А. С. МОНИН, А. М. ЯГЛОМ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

МЕХАНИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

ЧАСТЬ I



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

532
М 77
УДК 532.507

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 9

ГЛАВА I

ЛАМИНАРНЫЕ И ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. **Уравнения динамики жидкости и их основные следствия** . . . 35

1.1. Система уравнений динамики несжимаемой жидкости (35). 1.2. Простейшие течения несжимаемой жидкости (39). 1.3. Число Рейнольдса и критерий подобия (45). 1.4. Течения с большими числами Рейнольдса; пограничный слой (48). 1.5. Общее уравнение притока тепла и уравнение теплопроводности; вынужденная и свободная конвекция (58). 1.6. Критерии подобия для температурно-неоднородной жидкости; температурный пограничный слой (65). 1.7. Малые колебания сжимаемой жидкости (70).

§ 2. **Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности** 77

2.1. Понятие о турбулентности; эмпирические данные о возникновении турбулентности в трубах и в пограничном слое (77). 2.2. Данные о турбулентном обтекании: отрыв пограничного слоя, кризис сопротивления и механизм турбулизации пограничного слоя (85). 2.3. Гидродинамическая неустойчивость (91). 2.4. Простейшие примеры абсолютно неустойчивых потоков жидкости (95). 2.5. Математическая формулировка вопроса об устойчивости относительно малых возмущений (98). 2.6. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами (102). 2.7. Устойчивость слоя жидкости, подогреваемой снизу (109). 2.8. Устойчивость плоскопараллельных течений и течений в трубе и в пограничном слое (113). 2.9. Устойчивость по отношению к конечным возмущениям; возрастание возмущений и переход к турбулентности (136).

ГЛАВА II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 3. **Методы осреднения. Поля гидродинамических характеристик как случайные поля** 162

3.1. Практические методы осреднения и условия Рейнольдса (162). 3.2. Случайные поля гидродинамических величин и вероятностное

осреднение (166). 3.3. Понятие об эргодичности. Статистическая формулировка основной задачи теории турбулентности (172). 3.4. Характеристические функции и характеристический функционал (175).

§ 4. **Моменты гидродинамических полей** 180
4.1. Моменты и семиинварианты случайных величин (180). 4.2. Моменты и семиинварианты случайных полей (183). 4.3. Случайные поля с нормальными распределениями вероятности (гауссовские поля) (189). 4.4. Определение моментов и семиинвариантов случайного поля по его характеристическому функционалу (195). 4.5. Стационарные случайные функции (201). 4.6. Однородные случайные поля (204). 4.7. Эргодическая теорема (208).

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

§ 5. **Турбулентные течения в трубах и в пограничном слое** . . . 215
5.1. Уравнения Рейнольдса (215). 5.2. Общий вид профиля средней скорости течения около стенки (222). 5.3. Течение около гладкой стенки; вязкий подслой и логарифмический пограничный слой (227). 5.4. Влияние неровностей стенки; параметр шероховатости и высота вытеснения (239). 5.5. Турбулентные течения в каналах и круглых трубах; законы сопротивления (250). 5.6. Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке (263). 5.7. Профиль концентрации пассивной примеси около стенки; диффузия и теплопередача в турбулентном пограничном слое (279). 5.8. Полуэмпирические теории турбулентности (291). 5.9. Свободная турбулентность (304).

§ 6. **Уравнение баланса турбулентной энергии и его следствия** . . 318
6.1. Уравнение для тензора напряжений Рейнольдса (318). 6.2. Уравнение баланса турбулентной энергии (325). 6.3. Общее понятие о коэффициентах турбулентной вязкости и теплопроводности (331). 6.4. Баланс турбулентной энергии в сжимаемой жидкости (337). 6.5. Число Ричардсона и коэффициент турбулентной вязкости в температурно-стратифицированной среде (342). 6.6. Турбулентность в планетарном пограничном слое атмосферы (347). 6.7. Распределение взвешенных частиц в турбулентном потоке (354).

ГЛАВА IV

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТЕМПЕРАТУРНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

§ 7. **Обобщение теории логарифмического пограничного слоя на случай температурно-стратифицированной среды** 358
7.1. Турбулентный пограничный слой в температурно-стратифицированной среде как модель приземного слоя атмосферы (358). 7.2. Применение соображений размерности к турбулентности в стратифицированной среде (366). 7.3. Общий вид универсальных функций, описывающих турбулентный режим в стратифицированной среде (371). 7.4. Дальнейшие соображения о виде универсальных функций; интерполяционные и полуэмпирические формулы (383). 7.5. Общая формулировка гипотезы подобия для турбулентного режима в приземном слое атмосферы и ее применение к исследованию пульсаций метеорологических полей (397).

§ 8. **Сопоставление выводов теории с данными измерений в приземном слое атмосферы** 408
8.1. Профили скорости ветра в приземном слое атмосферы (408). 8.2. Данные о профилях температуры и влажности (423). 8.3. Методы измерения турбулентных потоков импульса, тепла и влаги (437). 8.4. Определение турбулентных потоков по данным о профилях метеорологических величин (444). 8.5. Пульсации скорости ветра и температуры в приземном слое (454).

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

§ 9. **Лагранжево описание турбулентности** 460
9.1. Уравнения гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа (460). 9.2. Лагранжевы статистические характеристики турбулентности (466). 9.3. Характеристики смещения фиксированной жидкой частицы; случай однородной турбулентности (471). 9.4. Смещение жидких частиц в турбулентности за решеткой и в турбулентных потоках с градиентом средней скорости (478). 9.5. Лагранжева корреляционная функция скорости и ее связь с эйлеровыми статистическими характеристиками (497).

§ 10. **Турбулентная диффузия** 505
10.1. Постановка задачи об описании турбулентной диффузии (505). 10.2. Взаимодействие между молекулярной и турбулентной диффузией (516). 10.3. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (529). 10.4. Диффузия в поле однородной турбулентности и в поле простейших течений с градиентом скорости (537). 10.5. Диффузия в приземном слое воздуха (559). 10.6. Диффузия с конечной скоростью (588).

Библиография 603

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория турбулентности, рассматриваемая в этой книге, исходит из макроскопического описания течений жидкостей и газов, как непрерывных сред, на основе классических уравнений гидромеханики. Но в отличие от обычной гидромеханики теория турбулентности изучает не индивидуальные особенности течений, а статистические свойства ансамблей течений при макроскопически одинаковых внешних условиях. Поэтому мы и озаглавили эту книгу «Статистическая гидромеханика». Однако следует иметь в виду, что такие вопросы, как вывод макроскопических уравнений гидромеханики из статистических законов кинетической теории газов, к которым иногда также относят это название, в нашей книге излагаться не будут.

Основные понятия и идеи, касающиеся турбулентности, и подход к изложению теории турбулентности, который мы избрали в этой книге, обрисованы во введении, где дан также краткий исторический очерк и приведен план как настоящей первой части книги, так и последующей второй части. Введение призвано дать читателю самое общее представление о проблематике и методах современной теории турбулентности и об ее прикладном значении; при этом, конечно, приходится использовать ряд понятий, детальная расшифровка которых дается лишь в последующих разделах книги.

Книга разбита на главы, параграфы и пункты. Главы и параграфы имеют сплошную нумерацию, а пункты нумеруются внутри каждого параграфа, причем отдельно указываются номер параграфа и номер пункта (например, четвертый пункт второго параграфа обозначается как пункт 2.4). Аналогично нумеруются и формулы: например, формула (2.15) — это пятнадцатая формула во втором параграфе. При ссылках на литературу, приведенную в библиографических списках в конце каждой части, в тексте указывается фамилия автора и в скобках — год появления работы. В тех случаях, когда упоминается несколько работ данного автора, вышедших в одном и том же году, эти работы дополнительно нумеруются русскими буквами. Кроме

введения, инициалы авторов в тексте указываются только в тех случаях, когда это необходимо для различения однофамильцев.

Мы старались по мере возможности использовать в книге общепринятые обозначения. В тех же многочисленных случаях, когда для встречающихся в теории турбулентности величин разными авторами используются различные символы, мы предпочитали, как правило, избирать одно из них, а не вводить какие-то новые обозначения. В некоторых случаях это привело к тому, что пришлось в разных частях книги использовать один и тот же символ для различных величин. Кое-где по ряду причин оказалось также удобным одну и ту же величину в разных разделах обозначать по-разному. Во всех таких случаях используемые обозначения специально оговариваются в тексте.

Наша книга представляет собой совместный труд обоих авторов. Мы считаем также необходимым отметить, что на ее написание, как и на наши собственные исследования, глубокое влияние оказали беседы с нашим учителем Андреем Николаевичем Колмогоровым, многие идеи которого мы постарались отразить в настоящей книге.

Мы многим обязаны и А. М. Обухову, который был одним из инициаторов написания этой книги и оказал нам большую помощь своими советами по отбору материала и изложению ряда вопросов. Отдельные части рукописи были прочитаны Л. А. Диким, Е. А. Новиковым и В. И. Татарским, высказавшими ряд полезных замечаний. В обсуждении экспериментальных данных об атмосферной турбулентности активно участвовали А. С. Гурвич и Л. Р. Цванг. Большую помощь в подготовке и редактировании книги оказал Г. С. Голицын. Всем этим лицам мы выражаем свою глубокую благодарность.

А. С. Монин
А. М. Яглом

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена теории турбулентных течений жидкостей и газов. Она начинается с напоминания основных уравнений, описывающих движения жидкой и газообразной среды, и от читателя, вообще говоря, не требуется, чтобы он заранее знал, что такое турбулентность. Поэтому нам кажется, что в начале введения небесполезно хотя бы вкратце объяснить, о чем же, собственно, будет идти речь в этой книге.

Известно, что все течения жидкостей и газов делятся на два резко различные типа: спокойные и плавные течения, называемые *ламинарными*, и их противоположность — так называемые *турбулентные* течения, при которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины беспорядочно пульсируют, крайне нерегулярно изменяясь в пространстве и во времени. В качестве типичного примера мы приводим на рис. 1 запись колебаний во времени скорости ветра, вертикальной компоненты скорости и температуры в атмосфере вблизи земли, полученную при измерении скорости и температуры с помощью специальных малоинерционных приборов. Сложный характер этих кривых сразу показывает, что соответствующее движение воздуха было турбулентным. Множество пульсаций различных периодов и амплитуд, наблюдающееся на представленных на рис. 1 записях, иллюстрирует сложную внутреннюю структуру турбулентных течений, резко отличающихся в этом отношении от ламинарных течений. Эта сложная структура сказывается на многих свойствах течения, оказывающихся весьма различными в ламинарном и турбулентном случаях. Так, турбулентные течения обладают гораздо большей способностью к передаче количества движения (образно говоря, турбулентная среда имеет огромную эффективную вязкость) и потому во многих случаях оказывают гораздо большее силовое воздействие на обтекаемые жидкостью или газом твердые тела. Аналогичным образом турбулентные потоки обладают повышенной способностью к передаче тепла и пассивных примесей, к распространению химических реакций (в частности, горения), к переносу взвешенных

частиц. Благодаря наличию внутренних неоднородностей турбулентные течения способны рассеивать проходящие сквозь жидкость или газ звуковые и электромагнитные волны и вызывать флюктуации их амплитуд и фаз и т. п.

Ясно, что перечисленные свойства турбулентных течений могут быть весьма существенными для многих задач естествознания и техники. Поэтому вопрос о том, часто ли встречаются

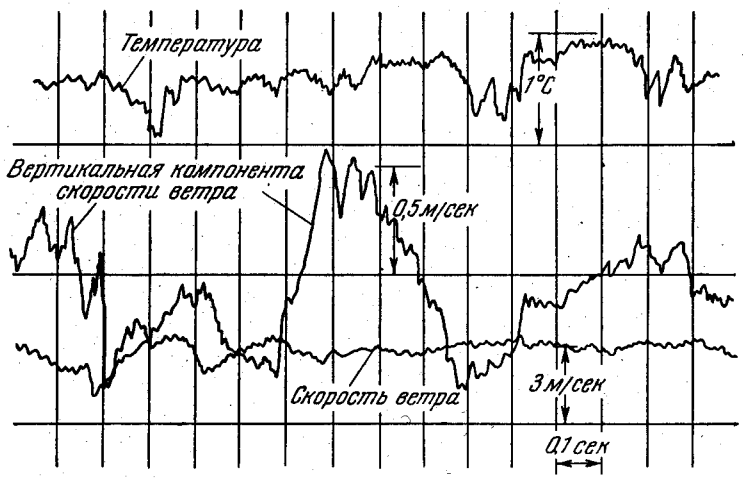


Рис. 1. Типичный пример записи пульсаций температуры, скорости ветра и вертикальной компоненты скорости ветра.

турбулентные течения, представляет несомненный интерес. Оказывается, что подавляющее большинство реально встречающихся в природе и технике течений является именно турбулентным; ламинарные же течения, подробно изучающиеся в гидромеханике, представляют собой лишь довольно редкое исключение.

Турбулентными, в частности, являются разнообразные движения воздуха в земной атмосфере, начиная от слабого ветра вблизи поверхности земли (к которому относятся измерения, воспроизведенные на рис. 1) и кончая движениями общей циркуляции, имеющими масштабы планеты в целом. Атмосферная турбулентность играет основную роль в процессах переноса тепла и влаги воздушными массами, в испарении влаги с поверхности земли и водоемов и в тепловом и динамическом взаимодействии между атмосферой и подстилающей поверхностью, существенно влияющем на изменения погоды; она определяет распространение примесей в воздушной среде, зарождение ветровых волн на поверхности моря и образование ветровых течений в океане, болтанку самолетов и других летательных аппаратов и вибрации многих наземных сооружений; наконец, турбулентные флюктуации показателя преломления обусловливают многие важные особенности распространения света и радиоволн от наземных и космических источников. Турбулентными оказываются и течения воды в реках, морях и океанах, а также колоссальные по сравнению с масштабами земли движения газов в межзвездных газовых туманностях. Наконец, турбулентными являются практически все имеющие прикладное значение течения в трубах — в водопроводах, газопроводах, нефтепроводах, соплах реактивных двигателей и т. д.; движения в пограничных слоях, образующихся около поверхности движущихся летательных аппаратов; в струях жидкости или газа, вырывающихся с большой скоростью из сопла; в следах за быстро перемещающимися твердыми телами — лопастями пропеллера, лопатками турбины, пулями, снарядами, ракетами. Таким образом, турбулентность буквально окружает нас и в природе и в технических устройствах, связанных с течениями жидкостей и газов; поэтому ее изучение безусловно является очень важной практической задачей.

Большой интерес представляют турбулентные течения и с чисто теоретической точки зрения как примеры нелинейных механических систем с очень большим числом степеней свободы. В самом деле, движения любой непрерывной среды, строго говоря, описываются бесконечным числом обобщенных координат (в качестве которых можно принять, например, коэффициенты разложения поля скорости по какой-либо полной системе функций от пространственных координат). Однако в случае ламинарных движений эти координаты обычно можно выбрать таким образом, что лишь небольшое число отвечающих им степеней свободы будет возбуждено, т. е. будет реально участвовать в движении. В случае же турбулентного движения возбужденным всегда оказывается огромное число степеней свободы, в результате чего изменение во времени любой физической величины здесь описывается функциями, содержащими громадное число компонент Фурье, т. е. имеющими очень сложный характер (см. опять рис. 1). По этой причине здесь уже практически безнадежно пытаться описать индивидуальные изменения во времени всех обобщенных координат, соответствующих возбужденным степеням свободы (т. е. математически выразить зависимость от времени полей скорости, давления и т. д. одного отдельного течения). Единственно возможным в теории турбулентности представляется статистическое описание, опирающееся на изучение специфических статистических закономерностей,

присущих большим совокупностям однотипных объектов. Таким образом, теорией турбулентности может быть лишь статистическая гидромеханика, изучающая статистические свойства ансамблей течений жидкостей или газов, находящихся в макроскопически одинаковых внешних условиях.

Теория турбулентности по самому своему существу не может не быть статистической — индивидуальное описание полей скорости, давления, температуры и других характеристик турбулентного течения принципиально невозможно и было бы даже бесполезным, так как крайне запутанный и нерегулярный характер этих полей исключает возможность использования точных данных о них в каких бы то ни было практических задачах. Поэтому не имеет смысла иногда встречающееся в литературе противопоставление так называемой полуэмпирической и статистической теорий турбулентности. Полуэмпирическая теория, разумеется, также является статистической и выделяется из других теорий турбулентности вовсе не отказом от использования статистических характеристик, а лишь приемами, используемыми для их определения.

Говоря о статистическом характере теории турбулентности, ее часто сравнивают с кинетической теорией газов, изучающей системы из очень большого числа взаимодействующих между собой молекул. Это сравнение оправдано в том смысле, что в обеих указанных теориях точное описание эволюции исследуемой механической системы теоретически безнадежно, а практически было бы бесплодным. Однако надо иметь в виду, что между статистической механикой молекулярных ансамблей, изучавшейся Гиббсом, Больцманом и другими исследователями, и статистической гидромеханикой вязкой жидкости существует и большое принципиальное различие. Оно связано, в первую очередь, с тем, что суммарная кинетическая энергия совокупности движущихся молекул не меняется во времени (во всяком случае при простейших предположениях о молекулярных взаимодействиях, обычно принимаемых в кинетической теории газов), тогда как при движениях реальной жидкости ее кинетическая энергия всегда диссипируется в теплоту под действием вязкости. Менее существенным, но также не безразличным оказывается то, что молекулярные ансамбли дискретны по своей природе и их временная эволюция описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как в гидромеханике речь идет о движениях непрерывной среды, описываемых уравнениями в частных производных. В результате всего этого аналогия с кинетической теорией газов сравнительно мало помогает построению теории турбулентности, облегчая лишь самое первоначальное понимание идеи о статистическом подходе к физической теории.

Может быть, даже более плодотворной окажется аналогия между теорией турбулентности и квантовой теорией поля, связанная с тем, что система взаимодействующих между собой полей — это также нелинейная система с теоретически бесконечным числом степеней свободы. Отсюда проистекает близость математического аппарата, используемого в обеих теориях, позволяющая надеяться, что существенные сдвиги в одной из них могут оказать решающее влияние и на развитие второй. В настоящее время, однако, квантовая теория поля сталкивается с большими затруднениями принципиального характера, а в теории турбулентности также имеются лишь частные успехи; поэтому глубокое воздействие одной из этих теорий на другую пока еще остается делом будущего.

Несмотря на то, что течения жидкостей и газов, встречающиеся в природе и технических устройствах, как правило, являются турбулентными, во всех существующих общих курсах гидромеханики теории турбулентности посвящены в лучшем случае лишь небольшие разделы, содержащие кое-какие отрывочные сведения о методах статистического описания неупорядоченных течений жидкости и газа и о некоторых статистических характеристиках таких течений. Монографическая литература, посвященная турбулентности, также очень бедна и насчитывает всего несколько названий (почти все они могут быть найдены в списке литературы, приложенном к настоящей книге); при этом большая часть из них относится к книгам сравнительно узкого содержания. Нетрудно понять, почему сложилось такое положение. Турбулентные течения являются значительно более сложным объектом, чем ламинарные, и требуют для своего изучения существенно новых методов, отличных от классических методов математической физики, в течение почти двух столетий считавшихся единственно годными для количественного изучения законов природы. Математический аппарат, нужный для логически аккуратного построения статистической механики непрерывных сред — теория случайных полей, — был создан лишь за последние 25—30 лет и до сих пор еще мало известен за пределами узкого круга специалистов по теории вероятностей. В эти же годы сформировалась и современная теория турбулентности, которая до сих пор еще далека от завершения. Нам кажется, однако, что уже имеющиеся в этой области достижения безусловно заслуживают того, чтобы занять заметное место в обязательном объеме знаний каждого образованного гидромеханика и физика-теоретика, и если этого еще не произошло, то лишь ввиду относительной молодости теории турбулентности. Можно

выразить уверенность, что в дальнейшем удельный вес этой теории в учебных руководствах и программах по гидромеханике для высших учебных заведений, в обязательном объеме знаний специалистов по гидромеханике и по теоретической физике и в планах научно-исследовательских работ будет быстро возрастать. Мы будем рады, если наша книга будет в какой-то мере способствовать этому процессу.

* * *

Перейдем теперь к краткому историческому очерку развития науки о турбулентности. При этом мы перечислим те подходы и результаты, развернутое изложение которых составит основное содержание книги, и постараемся объяснить, почему нам кажется, что такую книгу целесообразно написать именно сейчас — на современном этапе развития статистической гидромеханики.

Существование двух резко различающихся типов течений, называемых в настоящее время ламинарными и турбулентными, было замечено еще в первой половине XIX в., но теория турбулентности появилась только вместе с замечательными работами Осборна Рейнольдса (1883, 1895). В этих работах Рейнольдс уделил основное внимание условиям, при которых ламинарное течение жидкости в трубах превращается в турбулентное течение, и установил общий критерий динамического подобия течений вязкой несжимаемой жидкости. В отсутствие внешних сил таким критерием является, кроме геометрического подобия, совпадение значений так называемого *числа Рейнольдса* $\mathrm{Re}=UL/\nu$, где U и L — характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемом течении, а ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. С динамической точки зрения число Re может быть интерпретировано как отношение типичных значений сил инерции и сил вязкости, действующих внутри жидкости. Силы инерции, вызывающие перемешивание различных объемов жидкости, движущихся «по инерции» с разными скоростями, осуществляют передачу энергии от крупномасштабных компонент движения к мелкомасштабным и тем самым способствуют образованию в потоке резких мелкомасштабных неоднородностей, характерных для турбулентного течения. Силы вязкости, наоборот, приводят к сглаживанию мелкомасштабных неоднородностей. Поэтому следует ожидать, что течения с достаточно малыми значениями Re будут ламинарными, а с достаточно большими Re — турбулентными. Этот основной результат и был четко сформулирован Рейнольдсом.

Рейнольдс сделал еще один очень важный для теории турбулентности шаг. Он предложил представлять значения всех

гидродинамических величин в турбулентном течении в виде суммы *осредненных* (регулярных) и *пульсационных* (нерегулярных) составляющих и изучать лишь осредненные величины, сравнительно плавно меняющиеся в пространстве и во времени, отказавшись от практически безнадежных попыток описания всех деталей индивидуальных реализаций гидродинамических полей. Для определения средних значений Рейнольдс предложил применять обычное осреднение по некоторому интервалу времени или некоторой пространственной области, но фактически он пользовался лишь определенными алгебраическими свойствами вводимой операции осреднения, позволяющими существенно упростить ее применение к уравнениям гидромеханики. Поэтому в настоящее время, когда при исследовании турбулентности принято понимать осреднение иначе, чем во времена Рейнольдса, все его выводы тем не менее полностью сохраняют силу, поскольку, как оказывается, использованные им свойства осреднения оказываются совсем очевидными именно при современном понимании этой операции.

Для дальнейшего нам будет удобно сразу же указать, как теперь понимается осреднение в теории турбулентности. В современной статистической гидромеханике всегда подразумевается, что гидродинамические поля турбулентного течения представляют собой *случайные поля* в смысле, принятом в теории вероятностей. Иначе говоря, каждая конкретная реализация такого поля рассматривается как некий «представитель», извлеченный из «статистического ансамбля всевозможных полей», характеризуемого определенной вероятностной мерой на множестве функций от пространственных координат и времени, удовлетворяющих необходимым кинематическим и динамическим условиям (вытекающим из законов гидромеханики). При этом осреднение любых гидродинамических величин можно понимать как *теоретико-вероятностное осреднение* по соответствующему статистическому ансамблю, и все свойства операции осреднения, наличия которых требовал Рейнольдс, оказываются вытекающими из обычных свойств вероятностного среднего значения (математического ожидания), излагаемых в учебниках по теории вероятностей. Тем самым сразу устраняются многие трудности, неизбежные при применении временного или пространственного осреднения (но, правда, реальная интерпретация результатов формальной теории оказывается требующей использования некоторых предположений об *эргодичности,* обычных, впрочем, для статистической физики).

В предыдущем абзаце мы отступили от хронологического принципа изложения основных этапов формирования теории турбулентности. Однако, прежде чем вернуться к историческому

обзору, мы еще несколько разовьем допущенное отступление и дадим современную формулировку общей проблемы статистического описания турбулентных течений (или, коротко, *проблемы турбулентности*). Ограничимся при этом для простоты случаем несжимаемой жидкости, в котором течение полностью определяется соленоидальным (т. е. бездивергентным) полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \{u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t)\}$, где u_1, u_2, u_3 — компоненты скорости, $\boldsymbol{x}$ — точка пространства, t — время (поле давления с помощью уравнений гидродинамики может быть выражено через поле скорости в тот же момент времени). В этом случае проблема турбулентности сводится к нахождению распределения вероятностей $P(d\omega)$ на фазовом пространстве турбулентного потока $\Omega = \{\omega\}$, точками ω которого являются всевозможные соленоидальные векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие уравнениям гидродинамики и надлежащим краевым условиям на границах потока. Во многих случаях полезной оказывается также более узкая (т. е. менее полная) формулировка проблемы турбулентности, при которой рассматриваются лишь синхронные (отвечающие одному и тому же моменту времени) значения гидродинамических величин. При таком подходе проблема турбулентности заключается в нахождении однопараметрического семейства распределений вероятностей $P_t(d\tilde{\omega})$ на фазовых пространствах $\Omega_t = \{\tilde{\omega}\}$, точками $\tilde{\omega}$ которых являются всевозможные соленоидальные векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям (могущим, вообще говоря, зависеть от времени — именно поэтому мы ввели индекс t в обозначение Ω_t фазового пространства). Зависимость распределений $P_t(d\tilde{\omega})$ от времени отражает эволюцию поля скорости в соответствии с уравнениями гидродинамики. В самом деле, если записать решение этих уравнений символически в виде $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = T_t\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)$, где T_t — соответствующий нелинейный оператор, то, очевидно, для любого измеримого множества A пространства Ω_t будет иметь место равенство $P_t(A) = P_0(T_{-t}A)$, где $T_{-t}A$ — принадлежащее Ω_0 множество всех тех начальных полей скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)$, которые под действием оператора T_t переходят в поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, принадлежащие к множеству A. Отсюда видно, что семейство распределений вероятностей $P_t(d\tilde{\omega})$ в принципе однозначно определяется заданным начальным распределением $P_0(d\tilde{\omega})$, так что в излагаемой формулировке проблема турбулентности — это задача с начальными условиями об эволюции вероятностной меры в функциональном пространстве.

Полное определение распределений вероятностей $P(d\omega)$ или хотя бы $P_t(d\tilde{\omega})$ является задачей исключительной трудности, в настоящее время еще далекой от решения. Однако для многих

задач практики вовсе не требуется, чтобы проблема турбулентности была решена полностью. В большинстве практических задач достаточно определить лишь некоторые простейшие характеристики распределений вероятностей для значений гидродинамических полей турбулентного потока — такие, как средние значения скорости и давления в различных точках пространства или времени, вторые моменты пульсаций гидродинамических полей в заданной точке (например, дисперсии пульсаций скорости, характеризующие интенсивность турбулентности, или смешанные вторые моменты пульсаций скорости и температуры, через которые выражаются компоненты турбулентных потоков импульса и тепла) и коэффициенты корреляции между пульсациями гидродинамических полей в двух точках пространства — времени (характеризующие пространственно-временную статистическую связанность или структуру гидродинамических полей турбулентного потока). Поэтому естественно, что большинство исследований по теории турбулентности посвящалось не проблеме турбулентности в целом, а попыткам определения (хотя бы приближенного) некоторых простейших характеристик распределений вероятностей для значений гидродинамических полей турбулентных течений. Такие исследования позволили получить ряд ценных сведений о физической природе и свойствах турбулентности и удовлетворительно ответить на ряд важных практических вопросов.

Возвращаясь теперь к историческому изложению основных этапов развития теории турбулентности, упомянем прежде всего интересную работу Джеффри Тэйлора (1921) о турбулентной диффузии, в которой впервые выявилась важная роль корреляционных функций (т. е. смешанных вторых моментов) поля скорости (правда, не для обычной эйлеровой скорости течения в фиксированной точке, а для более сложной лагранжевой скорости фиксированной жидкой частицы). Однако в общем виде идея о том, что корреляционные функции и другие статистические моменты гидродинамических полей должны быть признаны основными характеристиками турбулентного движения, была впервые высказана Л. В. Келлером и А. А. Фридманом (1924), предложившими общий метод построения (с помощью уравнений движения реальной жидкости) дифференциальных уравнений для моментов произвольного порядка гидродинамических полей турбулентных течений. Определение в с е х таких моментов при некоторых общих предположениях эквивалентно определению соответствующего распределения вероятности в функциональном пространстве $P(d\omega)$ или $P_t(d\tilde{\omega})$, т. е. решению проблемы турбулентности. Поэтому полная бесконечная система уравнений Фридмана — Келлера

для всевозможных моментов дает *аналитическую формулировку* проблемы турбулентности. Но эта система уравнений оказывается весьма сложной: любая конечная подсистема этой системы уравнений всегда н е з а м к н у т а, т. е. содержит больше неизвестных, чем имеется уравнений в данной подсистеме (невозможность получить замкнутую систему уравнений для конечного числа моментов является прямым следствием н е л и н е й н о с т и уравнений гидродинамики). Таким образом, при использовании метода Фридмана — Келлера в применении к конечному числу моментов возникает *проблема замыкания* уравнений для моментов, во многом аналогичная проблеме замыкания цепочки уравнений для многочастичных функций распределения в кинетической теории газов.

Можно сказать, что большинство теоретических работ по динамике турбулентных течений посвящалось (и посвящается) способам преодоления трудностей, связанных с проблемой замыкания. Полностью преодолеть эти трудности до сих пор еще не удалось. Тем не менее, в теории турбулентности получено много важных и практически ценных результатов на двух обходных направлениях, одно из которых посвящено описанию крупномасштабных компонент турбулентности (масштабы которых сравнимы с масштабами течения в целом), а другое — описанию мелкомасштабных компонент. Основное различие в поведении этих двух типов компонент заключается в том, что крупномасштабные характеристики турбулентности существенно зависят от геометрии границ потока и характера внешних воздействий и поэтому оказываются весьма различными для разных типов течений, тогда как мелкомасштабные характеристики оказываются имеющими в значительной мере универсальный характер.

Крупномасштабные компоненты вносят основной вклад в передачу через турбулентную среду импульса и тепла, и вследствие этого их описание необходимо для таких важнейших проблем техники, как расчеты сопротивления и теплообмена при обтекании твердых тел жидкостью или газом. Поэтому естественно, что при развитии теории турбулентности разработке методов описания крупномасштабных компонент было уделено самое первоочередное внимание. Неотложные нужды практики потребовали проведения большого числа экспериментальных исследований свойств крупномасштабных компонент турбулентности при течениях в трубах, каналах, пограничных слоях и в свободных турбулентных течениях (струи, следы за обтекаемыми жидкостью телами и т. п.). На базе этих исследований и были построены так называемые *полуэмпирические теории турбулентности*, позволяющие систематизировать получаемые экспериментальные данные и использовать их для предсказания результатов последующих аналогичных экспериментов.

Создание полуэмпирических теорий турбулентности явилось важным этапом в развитии статистической гидродинамики. Этот этап начался еще в середине 10-х годов текущего столетия, но расцвет его приходится на последующие два десятилетия (20-е и 30-е годы); впрочем, возможности полуэмпирического метода до сих пор еще отнюдь не исчерпаны, и содержательные работы такого направления продолжают появляться и в наши дни. Решающие шаги в развитии полуэмпирического подхода к теории турбулентности были сделаны Джеффри Тэйлором (1915, 1932), Людвигом Прандтлем (1925) и Теодором фон Карманом (1930).

Полуэмпирические теории турбулентности строятся на основе аналогии между турбулентностью и молекулярным хаосом. В них основную роль играют такие понятия, как путь перемешивания (аналог средней длины свободного пробега молекул), интенсивность турбулентности (аналог средней скорости движения молекул), коэффициенты турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии. На основе той же аналогии делается предположение о существовании линейной зависимости между тензором турбулентных напряжений и тензором средних скоростей деформации, а также турбулентным потоком тепла (или пассивной примеси) и средним градиентом температуры (или концентрации примеси). Эти предполагаемые зависимости дополняются затем еще некоторыми гипотетическими закономерностями, общий вид которых устанавливается с помощью качественных физических рассуждений или же просто подбирается «наудачу» из соображений простоты. Далее принятые предположения (или какие-либо простые следствия из них) проверяются на эмпирическом материале, и при этом попутно находятся значения неопределенных постоянных, входящих в используемые полуэмпирические соотношения. Если результаты проверки оказываются удовлетворительными, то полученные выводы распространяются на целый класс турбулентных течений, родственный тем, к которым относились выбранные для проверки теории эмпирические данные.

Полуэмпирические теории 20-х и 30-х годов обычно рассматривали только простейшие статистические характеристики турбулентных течений. Как правило, принимаемые в этих теориях гипотезы позволяют замкнуть уже самые первые уравнения системы Фридмана — Келлера, содержащие только одноточечные первые и вторые моменты гидродинамических полей — так называемые уравнения Рейнольдса турбулентного движения. Заметную роль в полуэмпирических теориях играет также использование свойств симметрии турбулентности в потоках того или

иного вида и некоторых простейших гипотез подобия (являющихся, в частности, обязательной частью всех полуэмпирических теорий турбулентных струй и следов за обтекаемыми телами). Однако гипотезы подобия, опирающиеся на конкретные физические представления о механизме турбулентности, не были единственной основой этих теорий и всегда дополнялись (иногда даже и без настоящей надобности) предположениями более специального характера. Так, например, одним из важнейших выводов полуэмпирических теорий явилось установление универсального (т. е. справедливого при всех не слишком малых числах Рейнольдса) логарифмического закона для профиля осредненной скорости в трубах, каналах и пограничных слоях на плоской пластинке. В настоящее время известно, что этот закон можно вывести из одной только естественной гипотезы подобия, касающейся распределений вероятностей гидродинамических полей турбулентности в полупространстве, или из соображений размерности, опирающихся на простейшие предположения о физических величинах, определяющих в этом случае турбулентный режим. Тем не менее, в полуэмпирических теориях и этот результат всегда обосновывался с помощью некоторых специальных гипотез, причем, к сожалению, подобные его выводы до сих пор остаются господствующими в учебной литературе по гидромеханике.

Полуэмпирические теории турбулентности оказались очень ценным оружием для решения ряда важных практических задач; однако принимаемые в этих теориях гипотезы часто не имеют надежного физического обоснования и мало что дают для понимания физического механизма турбулентности. Совсем иной характер имеет *теория универсального стационарного статистического режима мелкомасштабных компонент турбулентности при очень больших числах Рейнольдса.* Эта теория непосредственно вытекает из новых гипотез подобия для мелкомасштабных компонент, предложенных А. Н. Колмогоровым (1941а, б) (к тем же выводам пришел и А. М. Обухов (1941), рассмотревший специальную модель физических процессов, обусловливающих эволюцию этих компонент). Ее создание явилось новым большим этапом в развитии статистической гидромеханики.

Прежде чем приступить к описанию вклада в теорию турбулентности, внесенного Колмогоровым и Обуховым, нам кажется необходимым, однако, соблюдая исторический принцип изложения, назвать двух их предшественников. Одним из них явился английский ученый Льюис Ричардсон (1922, 1926), а вторым — уже дважды упоминавшийся выше Дж. Тэйлор (1935а). Ричардсон в книге, опубликованной в 1922 г., высказал глубокие соображения (мало замеченные в то время) о физическом механизме турбулентного перемешивания при большом числе Рейнольдса. Согласно его представлениям, развитая турбулентность представляет собой иерархию «вихрей» (т. е. возмущений или неоднородностей) разных порядков, в которой «вихри» данного порядка возникают за счет потери устойчивости более крупных «вихрей» предыдущего порядка, заимствуют у них энергию и, в свою очередь, теряя устойчивость, порождают более мелкие «вихри» следующего порядка, которым они передают свою энергию. Таким образом возникает своеобразный «каскадный процесс», при котором энергия осредненного течения последовательно передается движениям все более и более мелких масштабов, вплоть до движений минимального масштаба, оказывающихся уже устойчивыми. Для того чтобы быть устойчивыми, эти наиболее мелкомасштабные движения должны характеризоваться достаточно малым числом Рейнольдса; отсюда вытекает, что в них вязкость уже играет существенную роль и, следовательно, происходит заметная диссипация кинетической энергии, переходящей непосредственно в теплоту. Соответствующая физическая картина развитой турбулентности хорошо передается английскими рифмованными строчками, по-видимому, также принадлежащими Ричардсону:

Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
Little whorls have smaller whorls,
And so on unto viscosity [1]).

Ричардсон высказал эти общие соображения лишь в качественной форме и не сделал из них никаких выводов, формулируемых на точном языке математики. Но сила его интуиции была столь велика, что в работе 1926 г. он сумел тем не менее чисто эмпирическим путем установить один из общих количественных законов мелкомасштабных турбулентных движений, вытекающих из математической теории, основанной на представлениях о каскадном процессе передачи энергии по совокупности турбулентных движений разных масштабов. Этот закон заключается в том, что эффективный коэффициент диффузии облака примеси в среде с развитой турбулентностью пропорционален размеру облака в степени четыре трети. В 1941 г., когда Колмогоров и Обухов сформулировали основные положения количественной теории мелкомасштабных компонент турбулентности,

[1]) Крупные завихрения рождают мелкие завихрения, питающиеся за счет их скорости; мелкие завихрения рождают еще меньше завихрения, и так далее до начала действия вязкости.

«закон четырех третей» Ричардсона был фактически единственным эмпирическим результатом, указывавшим на существование каких-то простых общих закономерностей, управляющих мелкомасштабной структурой турбулентности.

Большую роль в создании современной теории мелкомасштабных турбулентных движений сыграла также работа Тэйлора (1935а), в которой было введено понятие об однородной и изотропной турбулентности. Такая турбулентность определяется тем условием, что для нее все конечномерные распределения вероятностей значений гидродинамических полей в конечном числе точек пространства — времени инвариантны относительно любых ортогональных преобразований (параллельных переносов, вращений и отражений) системы пространственных координат. Однородная и изотропная турбулентность является тем частным случаем турбулентных течений, для которого структура статистических моментов гидродинамических полей и вид соответствующих уравнений Фридмана — Келлера оказываются наиболее простыми. Правда, и в этом простейшем случае все принципиальные трудности, связанные с проблемой замыкания уравнений Фридмана — Келлера, остаются в силе. Однако соответствующие уравнения оказались все же гораздо более доступными для математического анализа, чем общие уравнения, отвечающие произвольной турбулентности, и с их помощью удалось получить целый ряд результатов, разъясняющих отдельные закономерности турбулентных течений.

Сама по себе модель однородной и изотропной турбулентности непригодна для описания каких-либо реальных турбулентных течений, поскольку для таких течений предположения об однородности и изотропности никогда не выполняются (хотя бы потому, что пространственная однородность предполагает, в частности, отсутствие у потока каких-либо границ и строгое постоянство его средней скорости). Но математический аппарат теории однородной и изотропной турбулентности после некоторого его обобщения оказался весьма ценным для описания свойств мелкомасштабных компонент реальных турбулентных течений, так как статистический режим этих компонент, как мы, следуя Колмогорову, поясним чуть ниже, уже естественно предполагать однородным и изотропным. Иначе говоря, любую развитую турбулентность с достаточно большим числом Рейнольдса можно считать локально однородной и локально изотропной, что сразу резко упрощает ее математическое исследование.

Остановимся теперь на основных идеях принадлежащей Колмогорову *теории локально изотропной турбулентности* (или теории локального строения турбулентности при больших числах Рейнольдса) — ниже нам будет удобно использовать это сравнительно короткое название вместо того, которое употреблялось на стр. 20. Прежде всего Колмогоров существенно дополнил представление о каскадном процессе передачи энергии от крупномасштабных компонент (получающих энергию непосредственно от осредненного течения) ко все более и более мелкомасштабным компонентам, заметив, что вследствие хаотичности такой передачи энергии ориентирующее влияние среднего течения должно ослабляться при каждом переходе к более мелким возмущениям. Поэтому на свойствах компонент турбулентности с достаточно малым масштабом (т. е. достаточно большим порядковым «номером») вовсе не должно сказываться это ориентирующее влияние. Другими словами, несмотря на то, что среднее течение и наиболее крупномасштабные неоднородности любого реального турбулентного движения, вообще говоря, неоднородны и анизотропны, статистический режим достаточно мелкомасштабных пульсаций в любой турбулентности с очень большим числом Рейнольдса можно считать однородным и изотропным. Кроме того, естественно ожидать, что характерные периоды пульсаций разных порядков будут тем меньше, чем больше их порядок, и в случае пульсаций достаточно высокого порядка (т. е. достаточно малых пространственных масштабов) будут много меньше времени заметного изменения среднего течения. Следовательно, режим таких пульсаций будет квазистационарным — практически стационарным в течение промежутков времени, содержащих много характерных периодов.

Итак, мы видим, что в области возмущений достаточно малых масштабов, по-видимому, должен господствовать однородный, изотропный и практически стационарный статистический режим, характеризуемый наличием определенного среднего притока энергии $\bar{\varepsilon}$ к наиболее крупным из рассматриваемых возмущений и равной ему диссипацией энергии в теплоту под действием вязкости, сосредоточенной в основном в области возмущений минимального масштаба. Исходя отсюда, Колмогоров сформулировал гипотезу о том, что статистический режим достаточно мелкомасштабных компонент любой турбулентности с большим числом Рейнольдса является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами — средней скоростью диссипации энергии (на единицу массы жидкости) $\bar{\varepsilon}$ и коэффициентом вязкости ν. Отсюда уже с помощью простых соображений размерности можно вывести, что масштаб наибольших пульсаций, на которые вязкость еще оказывает существенное влияние, должен иметь порядок $\eta = \nu^{3/4}/\bar{\varepsilon}^{1/4}$. Следовательно, естественно предположить, что в случае, когда область масштабов возмущений, подчиняющихся указанному универ-

сальному статистическому режиму, простирается вплоть до масштабов, много больших η, должен существовать так называемый *инерционный интервал* масштабов (много меньших типичного масштаба течения в целом L, но много больших η), в котором вязкость уже не будет играть роли, т. е. статистический режим будет определяться единственным параметром $\bar{\varepsilon}$. Это предположение представляет собой вторую основную гипотезу Колмогорова.

Изложенные гипотезы Колмогорова позволяют сформулировать ряд конкретных выводов о статистических характеристиках мелкомасштабных компонент турбулентности. Наиболее важным из них является выведенный Колмогоровым «закон двух третей», согласно которому средний квадрат разности скоростей турбулентного течения в двух точках на расстоянии r друг от друга при r, принадлежащем инерционному интервалу масштабов, равен $C(\bar{\varepsilon}r)^{2/3}$, где C — универсальная числовая постоянная. Другой формой этого утверждения (впервые указанной Обуховым (1941)) является так называемый «закон пяти третей», согласно которому плотность распределения кинетической энергии по спектру волновых чисел k турбулентных неоднородностей в инерционном интервале имеет вид $C_1\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}$, где C_1 — новая числовая постоянная (просто связанная с C). Имеется также много других следствий из рассматриваемых гипотез, на которых мы здесь уже не будем задерживаться.

Работы Колмогорова послужили основой всего последующего развития теории локальной структуры турбулентности и ее приложений в 40-х и 50-х годах текущего столетия. За этот период была изучена локальная структура не только поля скорости, но и полей концентрации пассивных примесей и температуры (включая случай температурно-стратифицированной тяжелой жидкости, в котором, благодаря появлению архимедовых сил, температуру уже нельзя считать «пассивной примесью»), давления и турбулентного ускорения. Полученные сведения о статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности нашли приложение к задачам об относительном рассеянии частиц и дроблении капель в турбулентной среде, об образовании ветровых волн на поверхности моря, генерации магнитного поля в турбулентном потоке проводящей ток жидкости и распределении неоднородностей электронной плотности в ионосфере, о пульсациях коэффициента преломления в атмосфере и создаваемых ими рассеянии и флюктуациях параметров распространяющихся электромагнитных волн и к ряду других интересных задач.

Следствия теории Колмогорова, в первую очередь сформулированные выше «закон двух третей» и «закон пяти третей», в 40-х и 50-х годах неоднократно проверялись на материалах измерений статистических характеристик конкретных турбулентных течений. При этом, однако, в конце концов выяснилось, что в лабораторных экспериментах (производившихся обычно в аэродинамических трубах) числа Рейнольдса недостаточно велики для существования заметного инерционного интервала в спектре турбулентности и, следовательно, результаты таких измерений в аэродинамических трубах, собранные за 20 лет, не годятся для проверки указанных законов. Измерения же в природе, где числа Рейнольдса, как правило, имеют гораздо бо́льшие значения, чем в лабораторных течениях, до последнего времени давали результаты со значительным статистическим разбросом; поэтому, хотя общая совокупность экспериментальных данных несомненно свидетельствовала в пользу теории, ее подтверждение все же оказывалось не совсем непосредственным и не позволяло надежно оценить входящие в теорию числовые параметры. Лишь в самые последние несколько лет положение в этом отношении кардинально изменилось — за этот период несколькими экспериментаторами были проведены очень точные измерения характеристик турбулентности в различных природных и искусственных турбулентных течениях с очень большим числом Рейнольдса, результаты которых прекрасно совпали друг с другом, окончательно подтвердили справедливость теории и позволили, наконец, с достаточной точностью определить постоянные C и C_1.

В настоящее время есть веские основания считать, что теоретическая разработка и экспериментальная проверка идей об универсальном статистическом режиме мелкомасштабных компонент турбулентности в основном уже завершены, и для дальнейшего развития теории турбулентности требуются какие-то существенно новые идеи, о поисках которых мы скажем немного ниже. Поэтому нам кажется, что именно сейчас уместно подвести итоги всего того значительного периода развития теории турбулентности, который был связан с разработкой указанной идеи. Попытка в какой-то мере выполнить эту задачу и является одной из целей настоящей книги.

Назовем теперь несколько работ, посвященных поискам новых путей в развитии статистической гидродинамики. В работах А. Н. Колмогорова (1962) и А. М. Обухова (1962), доложенных на двух примыкающих друг к другу международных конференциях по теории турбулентности, состоявшихся в Марселе в начале осени 1961 года, предложен путь дальнейшего уточнения основных представлений о локальной структуре

турбулентности при больших числах Рейнольдса. А именно, в изложенной выше теории статистические характеристики мелкомасштабной турбулентности, как мы видели, предполагаются зависящими лишь от среднего значения $\bar{\varepsilon}$ скорости диссипации энергии. Но на самом деле поле диссипации энергии $\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ также беспорядочно пульсирует, причем есть основания (и теоретические и чисто эмпирические) думать, что его изменчивость должна быть весьма велика. Статистические характеристики этого поля, очевидно, могут зависеть от особенностей крупномасштабного течения; в частности, следует ожидать, что дисперсия поля ε будет расти с ростом Re. Поэтому статистические характеристики мелкомасштабных турбулентных движений, определенные по одному только значению $\bar{\varepsilon}$, следует интерпретировать лишь как *условные средние значения*, получаемые при условии, что значение ε строго фиксировано (и равно $\bar{\varepsilon}$). *Безусловные же средние значения*, получаемые с помощью осреднения результатов расчета при фиксированном ε по флюктуирующим значениям этого параметра, будут, вообще говоря, отличаться от условных средних значений (и могут оказаться уже не универсальными, т. е. различными для разных типов крупномасштабных течений и, в частности, зависящими от Re). Методам оценки влияния этого обстоятельства и были посвящены работы Колмогорова и Обухова. Получение на этом пути конкретных количественных результатов требует в первую очередь выяснения статистических свойств поля диссипации энергии $\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$, т. е., иначе говоря, более детального изучения механизма диссипации энергии в турбулентном потоке. Предварительные оценки показывают, что поправки к законам «двух третей» и «пяти третей», получаемые при учете изменчивости диссипации энергии, по-видимому, имеют порядок, близкий к степени точности лучших из имеющихся в настоящее время экспериментальных данных.

Упомянем также своеобразный вариант теории возмущений для уравнений гидродинамики, развитый Р. Крейчнаном (1959, 1962б) и основанный на предположении, что *прямые* динамические взаимодействия между тройками пространственных компонент Фурье поля скорости играют значительно бо́льшую роль, чем их *непрямые* взаимодействия (через все остальные компоненты Фурье). Укажем еще метод описания крупномасштабных компонент турбулентности, предложенный У. Малкусом (1954б) (см. также Таунсенд (1962б) и Спигел (1962)) и опирающийся на использование гипотетического вариационного *принципа максимума диссипации* и представление гидродинамических полей в виде суперпозиций *конечного числа* соответствующих собственных функций (где минимальный масштаб учитываемых компонент турбулентности соответствует пределу гидродинамической устойчивости осредненного поля). Оба эти подхода вызывают в последнее время много споров — они приводят к некоторым интересным и правдоподобным результатам, но опираются на непроверенные гипотезы и встречаются с рядом трудностей. Так, например, первое приближение теории возмущений Крейчнана приводит к формулам для спектра турбулентности в области малых масштабов, не согласующимся с прекрасно оправдавшимися предсказаниями теории Колмогорова и указывающим на необъяснимую зависимость статистических характеристик мелкомасштабных компонент от режима крупномасштабных компонент. Теория Малкуса в случае свободной конвекции приводит к результатам, не согласующимся с выводами из простейших предположений о подобии характеристик турбулентности в стратифицированной среде (и указывающим на существенную зависимость крупномасштабных компонент конвективного течения от молекулярной теплопроводности жидкости). Та же теория, примененная к течению между параллельными стенками, приводит к очень спорному выводу о зависимости крупномасштабных характеристик от молекулярной вязкости при сколь угодно больших числах Рейнольдса и к расхождению с общепринятым (и хорошо подтверждающимся на опыте) универсальным логарифмическим законом для профиля средней скорости. Поэтому в настоящее время еще невозможно сказать, окажутся ли эти подходы (или какие-либо простые их модификации) плодотворными для развития теории турбулентности или нет.

Укажем, наконец, на перспективы решения общей проблемы турбулентности, связанные с использованием аппарата *характеристических функционалов* гидродинамических полей. Эти характеристические функционалы однозначно определяют распределения вероятностей $P(d\omega)$ или $P_t(d\tilde{\omega})$ на фазовом пространстве турбулентного потока, и потому их нахождение явилось бы полным решением проблемы турбулентности. В работе Эбергарда Хопфа (1952) для характеристического функционала турбулентного поля скорости в несжимаемой жидкости было выведено уравнение в вариационных производных, замечательной особенностью которого является его *линейность*. Таким образом, хотя динамика жидкости нелинейна, основная проблема статистической гидромеханики, сформулированная в терминах характеристических функционалов, оказывается линейной задачей. Отметим также, что уравнение Хопфа оказалось формально близким к так называемым уравнениям Швингера

квантовой теории поля — уравнениям в вариационных производных для функции Грина взаимодействующих квантованных полей (на имеющуюся аналогию между теорией турбулентности и квантовой теорией поля мы уже указывали выше).

Решение уравнения Хопфа встречается со значительными трудностями как из-за того, что пока еще не ясно, какие именно конкретные задачи для этого уравнения должны быть рассмотрены в первую очередь, так и по причине отсутствия до сих пор каких-либо общих методов решения уравнений в вариационных производных (и даже общих результатов о существовании и единственности таких решений). В самые последние годы большое внимание в этой связи привлекает новый математический аппарат *континуальных интегралов* — интегралов от функционалов, распространенных по некоторому функциональному пространству. Уже сегодня формально удается записать решение уравнения Хопфа в виде континуального интеграла по некоторой «обобщенной мере» в функциональном пространстве (не обладающей некоторыми обычными свойствами мер, используемых в математическом анализе, и тем напоминающей пресловутую «меру Фейнмана», возникающую в квантовой механике и квантовой теории поля). Однако пока такая запись решения все еще остается лишь чисто формальным приемом, мало облегчающим эффективное построение и изучение искомых решений.

* * *

Заканчивая введение, мы хотели бы сказать несколько слов о содержании настоящей книги. Разумеется, совершенно невозможно в одном или двух томах исчерпать весь круг вопросов, связанных с проблемой турбулентности [1]). Мы и не пытались это сделать, а отобрали лишь тот материал, который, как нам кажется, может помочь выяснению физической природы турбулентности. Поэтому мы почти не останавливались на конкретных приложениях инженерного характера и на математических тонкостях, связанных с расчетом статистических характеристик. С этим связано и то, что мы всюду ограничивались рассмотрением лишь простейших течений и простейших задач. Так, например, в книге говорится только о течении в прямых круглых трубах; пограничный слой рассматривается только на плоской пластинке и при отсутствии градиента давления в обтекающем потоке; диффундирующие

[1]) Заметим в этой связи, что книга Чандрасекара (1961), посвященная фактически лишь материалу наших пп. 2.6 и 2.7 и некоторым его обобщениям, содержит около 700 стр. текста!

частицы предполагаются практически точечными и имеющими тот же удельный вес, что и окружающая среда, и т. д. Далее, мы ничего не говорим о турбулентных течениях проводящей жидкости в магнитном поле, а учету сжимаемости уделяем лишь совсем немного места в главе об изотропной турбулентности для того, чтобы иметь возможность объяснить связанные с этим новые физические эффекты. Однако мы включили в книгу главу, посвященную турбулентности в среде, вертикально стратифицированной по плотности (для простейшего случая плоскопараллельного течения в полупространстве $z > 0$), так как влияние стратификации на турбулентность имеет отчетливый физический характер и может исследоваться с помощью простых общих методов, широко использовавшихся в других частях книги.

Стремление сделать книгу как можно более «физической» диктовало также и выбор предпочтительных методов исследования. Уравнения турбулентного движения всегда оказываются незамкнутыми (содержащими больше неизвестных, чем уравнений), и поэтому задачи теории турбулентности обычно не могут быть непосредственно сведены к нахождению единственного решения некоторого дифференциального уравнения (или уравнений), определяемого известными начальными и граничными значениями. В этих условиях неизбежно приходится привлекать помимо уравнений движения какие-то дополнительные соображения. Нам представляется, что среди таких дополнительных соображений наиболее отчетливый физический смысл имеют соображения подобия (опирающиеся на инвариантность условий задачи относительно некоторых групп преобразований) и соображения размерности (основанные на выделении физических параметров, влияющих на исследуемое турбулентное течение). Поэтому мы старались наиболее подробно осветить именно выводы из соображений размерности и подобия, которые могут применяться в теории турбулентности значительно шире, чем это обычно предполагается. Соответственно полуэмпирическим теориям турбулентности, использующим более специальные гипотезы, в книге уделено сравнительно немного места; особенно кратко здесь изложены «классические» применения полуэмпирических теорий к течениям в трубах, каналах и пограничных слоях, подробно изложенные в известных монографиях С. Гольдштейна (1938), Л. Г. Лойцянского (1941) и Г. Шлихтинга (1951) (вместе с полуэмпирическими теориями «свободной турбулентности», вовсе опущенными в нашей книге). Однако мы включили все же некоторые сравнительно новые и менее известные применения полуэмпирических теорий и рассмотрели ряд применений полуэмпирической теории турбулентной

диффузии (которой чаще всего вообще только и ограничиваются при обсуждении проблемы распространения примесей в турбулентном потоке). Кроме того, мы детально проанализировали также различные гипотезы о переносе энергии по спектру изотропной турбулентности, близкие по характеру к полуэмпирическим гипотезам, но проливающие некоторый свет на физический механизм турбулентного перемешивания и ранее не излагавшиеся во всей полноте.

Большое внимание, уделенное в книге методам подобия и размерностей, обусловило также то, что изложению принадлежащей А. Н. Колмогорову теории локально-изотропной турбулентности (целиком построенной на применении этих методов) здесь отведено много места. Мы уже отмечали, что стремление подвести определенные итоги развитию идеи об универсальном локальном строении любого турбулентного течения с очень большим числом Рейнольдса было одним из основных стимулов к написанию этой книги. Мы рассмотрели также предложенные в 1961 г. А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым уточнения этой идеи вместе с дополнительными данными по этому вопросу, полученными в более позднее время. Но вызывающие много разногласий теории Р. Крейчнана и У. Малкуса, приводящие к результатам, противоречащим выводам из соображений размерности, мы почти не упоминаем после исторического очерка, помещенного в настоящем введении.

Желая систематически изложить теоретические основы статистической гидромеханики, мы в то же время отнюдь не хотели придать нашей книге формально-математический характер, а стремились все время подкреплять теоретические выводы анализом эмпирических данных. Сочетание теоретического и экспериментального подходов, крайне плодотворное во всех естественно-научных исследованиях, особенно необходимо в статистической гидромеханике, в которой теория часто еще имеет лишь предварительный характер и почти всегда базируется на ряде гипотез, нуждающихся в экспериментальной проверке. Однако мы избегали привлекать данные экспериментальных исследований турбулентности, не имеющие теоретического объяснения и не служащие базой для определенных теоретических выводов, даже если эти данные сами по себе казались весьма интересными или практически важными. В качестве источника экспериментальных данных о турбулентности особенно часто в этой книге используется атмосферная турбулентность. В какой-то мере это связано с тем, что оба автора в течение многих лет работают в Институте физики атмосферы и значительно лучше знакомы с атмосферной турбулентностью, чем с другими турбулентными течениями. Но и помимо этого

имеются веские причины, оправдывающие специальное внимание авторов к такой турбулентности. Дело в том, что атмосфера, которую еще Карман (1935) назвал гигантской природной лабораторией для изучения турбулентности, обладает очень ценными свойствами, делающими ее особенно подходящей для проверки выводов современной статистической теории. Мы уже отмечали, что атмосферные движения обычно характеризуются гораздо большими числами Рейнольдса, чем течения, осуществляемые в лаборатории, и, следовательно, гораздо более удобны для исследования специфических закономерностей, относящихся к случаю очень больших Re. Кроме того, и геометрические условия атмосферной турбулентности (а именно, отвечающие ветру в приземном слое условия плоскопараллельного течения в полупространстве, ограниченном твердой стенкой, которую в ряде случаев можно считать к тому же плоской и однородной, или хорошо описывающие движения воздуха в свободной атмосфере условия течения в безграничном пространстве) оказываются более простыми, чем в большинстве лабораторных экспериментов. Единственным дополнительным осложнением, возникающим при переходе из лаборатории в атмосферу, является необходимость учета влияния термической стратификации, но, как мы уже отмечали, это осложнение приводит к дополнительным интересным теоретическим рассмотрениям и расширяет число наблюдаемых на опыте закономерностей, допускающих физически обоснованное объяснение.

Широкая распространенность турбулентных течений, их большое значение для множества разнообразных практических задач и интерес к ним теоретиков привели к тому, что литература, касающаяся турбулентности, колоссальна — она насчитывает много десятков тысяч статей, разбросанных по громадному числу физических, механических, математических, химических, метеорологических и технических журналов. К сожалению, однако, теория турбулентности оказалась крайне трудной и до сих пор она продвинута не очень далеко; поэтому многие относящиеся сюда работы являются чисто эмпирическими, содержат лишь самые начатки теории или даже являются ошибочными. Эти обстоятельства, разумеется, очень осложняют обзор литературы по статистической гидромеханике. В нашей книге мы первоначально предполагали ограничиться лишь минимальным количеством необходимых ссылок; но, потратив очень много времени на изучение литературы (а без этого нельзя было выяснить, что же является необходимым), мы решили, что более целесообразно не скупиться на ссылки, особенно относящиеся к работам последних лет. Мы сделали это, рассчитывая дать читателю достаточно полное представление

о современном состоянии исследований в теории турбулентности, облегчить ему нахождение необходимых справок и как-то помочь ориентироваться в безграничном море книг и статей. В ряде мест книги мы включили даже небольшие обзоры литературы (чаще всего напечатанные мелким шрифтом), в которых старались по возможности кратко изложить содержание значительного числа типичных работ, относящихся к соответствующему разделу теории. Мы, разумеется, понимаем, что большое количество библиографических ссылок несколько загромождает текст книги, а также (в силу полной невозможности охватить хотя бы бо́льшую часть имеющихся работ) значительно увеличивает число авторов, могущих почувствовать себя несправедливо обойденными в столь обширном списке литературы. Мы заранее просим извинения у всех этих авторов и спешим предупредить читателя, что вовсе не считаем включенные в наш список работы самыми лучшими или наиболее важными, никак не претендуем на его полноту и сознаем, что в вопросе об авторском приоритете (которым мы специально не занимались) у нас вполне может встретиться ряд неточностей.

Разумеется, на отбор материала для книги оказали известное влияние и наши личные научные вкусы. В частности, в книгу включен ряд результатов наших собственных работ. Большая часть этих результатов изложена здесь в переработанном и дополненном виде, представляющемся нам сегодня наилучшим; также и результаты других авторов часто излагаются нами по-новому, с учетом более поздних данных, а также общего подхода к проблеме, терминологии и обозначений, принятых в настоящей книге. Естественно поэтому, что приведенные ссылки во многих случаях содержат лишь какой-то эквивалент вывода или формулы, в связи с которыми они указаны.

Отступление от изложения, принятого в оригинальной работе, часто бывает также обусловлено нашим стремлением во всех случаях как можно более четко указывать все предположения, используемые в ходе того или иного вывода. В частности, мы старались всегда отмечать, какие результаты непосредственно вытекают из основных уравнений движения (т. е. из общих законов физики), какие следуют из соображений размерности (т. е. из определенных представлений о том, какие физические величины являются существенными, а какие несущественными для данного явления), какие требуют привлечения специальных полуэмпирических гипотез (и каких именно), а какие являются просто эмпирическими фактами.

Статистическая гидромеханика широко использует результаты и методы классической гидромеханики и теории вероятностей. Поэтому знание указанных двух дисциплин сильно

облегчит знакомство с настоящей книгой. Тем не менее, мы надеемся, что наша книга будет доступной и для лиц, имеющих лишь общую математическую и физическую подготовку. Имея в виду таких читателей, мы включили в первые две главы основные необходимые сведения из классической гидромеханики (начиная с уравнений неразрывности и движения) и из теории вероятностей (начиная с самого понятия вероятности). Уже в этих главах, как и во всех дальнейших, мы старались уделять основное внимание принципиальным вопросам, не задерживаясь на технических деталях. С этим стремлением связано то, что мы нигде не излагаем методов решения встретившихся дифференциальных уравнений или других стандартных математических задач, а сразу приводим ответ (который иногда совсем не легко найти). В то же время мы сравнительно подробно останавливаемся на некоторых недостаточно широко известных, но важных математических вопросах, традиционно опускаемых во всех книгах и статьях, предназначенных для механиков или физиков (типа, например, вопроса об эргодических теоремах или спектральных разложениях случайных полей); этим объясняется то, что целых две главы книги оказались посвящены математической теории случайных полей.

По техническим причинам книгу оказалось удобным издать в виде двух частей. В первую из них включены вопросы, изложение которых не требует использования никаких спектральных представлений (вероятно, многих наших коллег удивит, что таких вопросов набралось на толстую книгу). Здесь излагаются общие сведения об уравнениях гидромеханики и их простейших следствиях (кончающихся несколько более специальной теорией малых колебаний сжимаемого газа); рассматривается вопрос о возникновении турбулентности и гидродинамической неустойчивости (включая элементы нелинейной теории неустойчивости); приводятся элементарные сведения из теории вероятностей и теории случайных полей (в том числе некоторые сведения об условиях эргодичности); подробно разбирается применение соображений размерности и подобия к турбулентным течениям в трубах, каналах, пограничных слоях и к свободным турбулентным течениям (струям, следам за обтекаемыми телами и т. д.) и кратко перечисляются основные идеи и результаты полуэмпирических теорий турбулентности (с конкретными примерами); детально исследуется теория подобия для турбулентности в вертикально стратифицированной по плотности среде, и полученные при этом результаты сопоставляются с обширным эмпирическим материалом наблюдений над ветром и температурой в приземном слое воздуха; изучаются лагранжевы характеристики турбулентности и теория турбулентной диффузии.

Вторая часть начинается с математической главы, посвященной спектральной теории случайных полей (в том числе и полей, являющихся не однородными, а только локально однородными); далее подробно излагается теория изотропной турбулентности (основное внимание здесь уделено различным методам замыкания уравнений для моментов гидродинамических полей изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости, но приводятся также и некоторые выводы, относящиеся к сжимаемому случаю); рассматриваются общие представления об универсальном локальном строении турбулентности при больших числах Рейнольдса и их следствия (включая и вопрос об относительной диффузии, т. е. увеличении размера облака примеси, переносимого турбулентным потоком) и исследуются спектральные характеристики турбулентности в расслоенной жидкости; приводятся основные сведения о распространении электромагнитных и звуковых волн в турбулентной среде и, наконец, рассматривается общая формулировка проблемы турбулентности, опирающаяся на изучение характеристических функционалов гидродинамических полей.

ГЛАВА I

ЛАМИНАРНЫЕ И ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

1.1. Система уравнений динамики несжимаемой жидкости

Турбулентность представляет собой сложное физическое явление, теоретическое изучение которого должно опираться на основные законы физики, находящие свое выражение в уравнениях гидро- и термодинамики. Поэтому мы начнем с того, что кратко напомним здесь эти уравнения и некоторые важнейшие вытекающие из них следствия, ограничившись, естественно, лишь теми формулами и фактами, которые нам понадобятся в дальнейшем (более подробное изложение см., например, в книгах Гольдштейна (1938), Кочина, Кибеля и Розе (1963), Ламба (1932) и Ландау и Лифшица (1953)). Поток жидкости [1]) мы, как обычно, будем характеризовать полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \{u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)\}$ и полями двух каких-либо термодинамических характеристик среды — например, полем давления $p(\boldsymbol{x}, t)$ и полем плотности $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ или температуры $T(\boldsymbol{x}, t)$ — всего пятью функциями от четырех переменных. Кроме того, нам будут нужны также значения молекулярных коэффициентов переноса, определяющих физические свойства жидкости, — коэффициента вязкости μ $\left(\text{или кинематической вязкости } \nu = \frac{\mu}{\rho}\right)$ и второго коэффициента вязкости ζ, а в дальнейшем также и коэффициента теплопроводности $\varkappa$ (или температуропроводности $\chi = \frac{\varkappa}{c_p \rho}$, где c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении).

---

[1]) Словом «жидкость» мы здесь и ниже будем обозначать любую жидкую или газообразную среду.

Простейшим уравнением механики жидкости, выражающим физический закон сохранения вещества, является уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}=0 \qquad (1.1)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}=-\rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \qquad (1.2)$$

(здесь и ниже мы всегда будем предполагать, что по дважды повторяющемуся в одночленном выражении индексу производится суммирование от единицы до трех, так что $\frac{\partial (\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}$, например, имеет тот же смысл, что и $\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial (\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}$)[1]. Основные динамические уравнения, выражающие второй закон Ньютона, примененный к малому объему жидкости, т. е. представляющие собой уравнения баланса количества движения (импульса), имеют следующий вид:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha}=\rho X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\delta_{i\alpha}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\right), \quad i=1, 2, 3, \qquad (1.3)$$

где $\rho X_i=\rho X_i(\boldsymbol{x}, t)$ — это i-я компонента плотности внешних сил в точке $\boldsymbol{x}$ в момент t. Из уравнения (1.1) следует, что плотность ρ можно вынести за знак производной $\frac{\partial}{\partial t}$ в первом члене левой части (1.3), одновременно вынеся также и ρu_α за знак производной $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ во втором члене. Что же касается до коэффициентов вязкости μ и ζ, то изменение их значений в пространстве (обусловленное зависимостью этих коэффициентов от температуры, меняющейся от точки к точке) на практике чаще всего оказывается весьма незначительным, так что членами, содержащими производные этих коэффициентов, обычно вполне можно пренебречь. Но это значит, что величины μ и ζ в уравнениях (1.3) также могут быть вынесены за знак производной, после чего эти

[1]) Чтобы иметь возможность как можно шире пользоваться этим соглашением, при выводе общих уравнений мы всегда будем обозначать оси координат через Ox_i, $i=1, 2, 3$. В конкретных же примерах, в которых направления трех осей определяются специальным образом, мы иногда будем обозначать координаты также и буквами x, y и z.

уравнения принимают вид

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)=\rho X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu \Delta u_i+\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha}. \qquad (1.4)$$

Четыре уравнения (1.2) и (1.4) содержат пять неизвестных функций и поэтому еще не образуют замкнутой системы. На практике, однако, изменения плотности ρ движущейся жидкой частицы в очень многих случаях оказываются столь малыми, что ими также можно пренебречь. Такое пренебрежение, в частности, всегда будет законным в случае так называемых «капельных жидкостей», т. е. сред, являющихся жидкостями в обычном смысле этого слова. В случае же газообразных сред при стационарном движении (со скоростью $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, не зависящей от t) изменениями плотности, обусловленными изменениями давления, вполне можно пренебречь, если только абсолютная скорость движения $u=|\boldsymbol{u}|$ во всех точках потока мала по сравнению со скоростью распространения звука a. В общем случае нестационарного движения газа изменения плотности ρ будут пренебрежимо малы, если кроме условия $u \ll a$ будет выполняться еще и условие $T \gg L/a$, где T и L — характерные время и расстояние, на которых скорость жидкости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ претерпевает заметное изменение (см. Ландау и Лифшиц (1953), ч. 1, § 10). Во всех перечисленных случаях плотность ρ обычно вообще будет принимать постоянное значение во всем пространстве, заполненном жидкостью. При этом ρ будет уже представлять собой заранее заданную постоянную величину (характеризующую свойства среды), и четырех уравнений (1.2) и (1.4) здесь будет достаточно для определения четырех неизвестных функций $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, $i=1, 2, 3$, и $p(\boldsymbol{x}, t)$ (при заданных начальных и граничных условиях).

Сами эти уравнения в рассматриваемом теперь случае несжимаемой жидкости приобретают более простой вид, так как в них можно опустить ряд членов, содержащих производные от ρ (или выражающихся через такие производные). Так, в уравнении неразрывности (1.2) мы можем в этом случае опустить все слагаемые в левой части, после чего оно приобретает вид

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0. \qquad (1.5)$$

В силу (1.5) в уравнениях движения (1.4) последний член в правой части тождественно обращается в нуль, после чего эти уравнения переходят в известные уравнения Навье — Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}=X_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu \Delta u_i. \qquad (1.6)$$

Уравнения (1.6) представляют собой основные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости. Мы видим, что они содержат уже единственный коэффициент вязкости, так что вторая вязкость оказывается существенной лишь при учете сжимаемости.

Легко видеть, что давление p может быть с самого начала исключено из уравнений (1.6). В самом деле, для этого надо только применить к обеим сторонам (1.6) операцию взятия ротора, которая в тензорных обозначениях записывается как операция $\varepsilon_{k\beta i}\frac{\partial}{\partial x_\beta}$, где $\varepsilon_{k\beta i}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга (т. е. $\varepsilon_{k\beta i}=0$, если индексы k, β и i не все различны, и $\varepsilon_{k\beta i}=+1$ или $=-1$, если тройка (k, β, i) получается из тройки (1, 2, 3) при помощи четной или соответственно нечетной подстановки). Предполагая для простоты, что внешние силы отсутствуют, мы придем при этом к системе трех уравнений

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial \omega_k}{\partial x_\alpha}-\omega_\alpha\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}=\nu\Delta\omega_k, \qquad k=1,\ 2,\ 3, \tag{1.7}$$

где

$$\omega_k=\varepsilon_{k\beta\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{1.8}$$

— компоненты вектора вихря. В принципе из уравнений (1.7) и (1.8) могут быть определены три функции $u_i(\boldsymbol{x}, t)$; после этого для нахождения поля давления надо только решить уравнение Пуассона

$$\Delta p=-\rho\frac{\partial^2(u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}, \tag{1.9}$$

получаемое с помощью применения к уравнениям (1.6) (с $X_i=0$) операции $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (т. е. с помощью составления дивергенции векторного уравнения Навье — Стокса).

Из уравнения (1.9) следует, что с точностью до слагаемого, являющегося гармонической функцией $\boldsymbol{x}$,

$$p(\boldsymbol{x})=\frac{\rho}{4\pi}\int_V\frac{\partial^2[u_\alpha(\boldsymbol{x}')\,u_\beta(\boldsymbol{x}')]}{\partial x'_\alpha\,\partial x'_\beta}\frac{d\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.9'}$$

где интегрирование распространяется на весь объем, заполненный жидкостью. В частности, если течение жидкости происходит во всем безграничном пространстве, то соответствующей гармонической функцией может быть лишь постоянная. Но поскольку в уравнениях движения фигурируют лишь производные от давления, то постоянное слагаемое в выражении для давления

вообще не играет никакой роли; поэтому здесь допустимо считать, что уравнение (1.9′) является точным без всяких добавлений. Для течений в ограниченных областях гармоническую добавку к правой части (1.9′) следует определять из граничных условий для давления; в ряде случаев и здесь она также оказывается постоянной и поэтому может не учитываться.

1.2. Простейшие течения несжимаемой жидкости

Для получения однозначного решения системы уравнений (1.5) — (1.6) надо задать начальные значения полей $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ и учесть, что скорость должна обращаться в нуль на поверхностях всех погруженных в поток твердых тел. Так как, однако, эта система нелинейна, нахождение ее точных решений в явном аналитическом виде, вообще говоря, является очень трудным делом. Лишь для некоторых специальных потоков нелинейные члены уравнений (1.6) тождественно обращаются в нуль; при этом система уравнений гидродинамики сразу очень упрощается, и в таких случаях ее точное решение обычно находится без большого труда. Ниже мы перечислим некоторые точные решения такого рода; примеры более сложных точных решений уравнений (1.5) — (1.6) можно найти, например, в книгах Ландау и Лифшица (1953) и Кочина, Кибеля и Розе (1963). Во всех рассматриваемых ниже примерах будет предполагаться, что объемные внешние силы X_i отсутствуют [1]); кроме того, в этих примерах потоки будут всегда предполагаться стационарными, т. е. не зависящими от t.

Отметим предварительно, что в случае стационарного течения полный импульс жидкости в фиксированной части пространства не меняется со временем, т. е. потери импульса, связанные с сопротивлением погруженных в жидкость твердых тел, балансируются с притоком импульса благодаря действию сил, вызывающих движение жидкости (при $X_i=0$ — благодаря действию силы перепада давления). Иначе говоря, при установившемся режиме вызывающая движение сила перепада давления, действующая на всю жидкость, уравновешивается действующей на жидкость силой торможения (отличающейся лишь знаком от суммарной силы воздействия потока на погруженное в него тело). Формула, выражающая это равновесие, позволяет установить связь между

[1]) Заметим, что всегда присутствующую объемную силу тяжести $\boldsymbol{X}=(0,\ 0,\ -\rho g)$ при отсутствии свободной поверхности жидкости можно легко исключить, заменив истинное давление p его отклонением от так называемого гидростатического давления $p_0=-\rho g x_3+\text{const}$.

характерной скоростью течения и перепадом давления, называемую обычно *законом сопротивления*.

Сила $\boldsymbol{W}$ воздействия потока на тело равняется интегралу по поверхности тела Σ от потока импульса по нормали к этой поверхности. Поток i-й компоненты импульса через единичную площадку, перпендикулярную оси Ox_k, имеет вид $\rho u_i u_k + p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$, где δ_{ik} — единичный тензор ($\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i \neq k$), а σ_{ik} — вязкий тензор напряжений, в несжимаемой жидкости равный $\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ (ср. ниже формулу (1.61)). Поскольку скорость движения жидкости на поверхности тела равна нулю, для i-й компоненты силы $\boldsymbol{W}$ получаем

$$W_i = -\int_\Sigma (p\delta_{ik} - \sigma_{ik})\, n_k\, d\Sigma = -\int_\Sigma p n_i\, d\Sigma + F_i, \qquad (1.10)$$

где n_i — компонента единичного вектора внешней нормали к поверхности, а F_i — интеграл по поверхности тела от $\sigma_{ik}n_k$. Первое слагаемое в правой части (1.10) связано с передачей телу импульса силами давления и не зависит от вязкости жидкости. Это слагаемое в ряде случаев (например, в случае обтекания плоской пластинки или при течениях в прямых трубах) оказывается равным нулю. Второе слагаемое F_i представляет собой *сопротивление трения*, которое в вязкой жидкости всегда отлично от нуля. В случае геометрически подобных тел за характерную величину силы $\boldsymbol{W}$ можно принять выражение $\frac{1}{2}\rho U^2 S$, где U — характерная скорость, а S — некоторая характерная площадь, например площадь поверхности тела или его миделево сечение. Безразмерная величина

$$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \qquad (1.11)$$

называется *коэффициентом сопротивления* тела. Если сопротивление связано только с трением ($W_i = F_i$), то коэффициент сопротивления обозначается C_f и называется *коэффициентом сопротивления трения*.

Примеры точных решений уравнений гидромеханики

1) Начнем с простейшего плоского стационарного течения вязкой жидкости, заключенной между двумя параллельными плоскостями, одна из которых неподвижна, а вторая движется с постоянной скоростью U. Обозначим через H расстояние между плоскостями и выберем систему координат, в которой уравнения этих плоскостей будут иметь вид $z = 0$ (неподвижная плоскость) и $z = H$ (подвижная), а ось Ox направлена вдоль вектора $\boldsymbol{U}$. В таком случае все гидродинамические величины будут зависеть только от z, а скорость движения жидкости всюду будет направлена вдоль оси Ox. Поэтому уравнение (1.5) и второе уравнение (1.6) здесь будут удовлетворяться тождественно, а первое и третье уравнения (1.6) приобретают вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \qquad \frac{dp}{dz} = 0, \qquad (1.12)$$

где $u(z) = u_1(z)$ — единственная отличная от нуля компонента скорости потока. Следовательно, здесь $p = \text{const}$ и $u = az + b$; учитывая еще граничные условия ($u = 0$ при $z = 0$ и $u = U$ при $z = H$), получаем

$$u(z) = \frac{U}{H} z. \qquad (1.13)$$

Итак, рассматриваемый поток характеризуется линейным профилем скорости, причем средняя скорость $U_{\text{ср}}$ равна $\frac{U}{2}$. Сила трения, действующая на каждую единицу площади стенок $z = 0$ и $z = H$, равна

$$\tau = \mu \left|\frac{du}{dz}\right| = \frac{\mu U}{H}, \qquad (1.14)$$

причем эта сила на плоскости $z = 0$ направлена вдоль оси Ox, а на плоскости $z = H$ имеет противоположное направление. Если положить

$$\tau = \frac{1}{2}\rho U_{\text{ср}}^2 \cdot C_f, \qquad (1.15)$$

где C_f — коэффициент сопротивления трения, то

$$C_f = \frac{4\nu}{U_{\text{ср}} H} = \frac{4}{\text{Re}}, \quad \text{где} \quad \text{Re} = \frac{U_{\text{ср}} H}{\nu}. \qquad (1.16)$$

Стационарное плоское течение жидкости между двумя безграничными параллельными плоскостями, описываемое формулами (1.13) и (1.16), очевидно, представляет собой математическую идеализацию, которая, однако, в некоторых случаях может оказаться полезной. В руководствах по гидродинамике это идеализированное течение иногда называется *течением Куэтта*.

2) Рассмотрим теперь стационарное двумерное течение между двумя неподвижными параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = H$ под действием приложенной на бесконечности внешней силы, создающей градиент давления по направлению оси Ox. Легко видеть, что в этом случае скорость потока также будет во всех точках направлена вдоль оси Ox и будет зависеть лишь от z, так что $u(z) = u_1(z)$ опять будет единственной ненулевой

компонентой поля $\boldsymbol{u}$. Поэтому уравнение (1.5) и второе уравнение (1.6) здесь также будут удовлетворяться тождественно; первое же и третье уравнения (1.6) будут иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2u}{dz^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{1.17}$$

Отсюда видно, что давление здесь не будет зависеть от z, т. е. будет постоянным по всей толщине слоя жидкости, и, следовательно, первое уравнение (1.17) будет выполняться лишь при

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} = -\frac{\Delta_l p}{l}, \qquad u(z) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta_l p}{l} z^2 + az + b, \tag{1.18}$$

где $\Delta_l p$ — перепад давления между плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + l$. Учитывая еще граничные условия ($u = 0$ при $z = 0$ и при $z = H$), получаем

$$u(z) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta_l p}{l}\left[\left(z - \frac{H}{2}\right)^2 - \frac{H^2}{4}\right], \tag{1.19}$$

так что профиль скорости в этом случае будет иметь форму параболы. Сила трения τ на обеих стенках здесь будет равна

$$\tau = \mu\left|\frac{du}{dz}\right| = \frac{H}{2}\frac{\Delta_l p}{l}; \tag{1.20}$$

поэтому безразмерный коэффициент сопротивления C_f формулы (1.15) будет равен

$$C_f = \frac{12\nu}{HU_{\text{ср}}} = \frac{12}{\text{Re}}, \quad \text{где} \quad \text{Re} = \frac{U_{\text{ср}}H}{\nu} \tag{1.21}$$

$$\left(\text{ибо в нашем случае } U_{\text{ср}} = \frac{1}{H}\int_0^H u(z)\,dz = \frac{H^2}{12\mu}\frac{\Delta_l p}{l} = \frac{2}{3}U_{\max}\right).$$

Точное решение (1.19), разумеется, также описывает идеализированное течение жидкости, которое иногда называется *течением Пуазейля между параллельными плоскостями*.

3) Перейдем к случаю стационарного течения жидкости в прямой бесконечной круглой трубе данного диаметра D. Направим ось Ox вдоль оси трубы; тогда отличной от нуля будет только компонента поля скорости $u_1(y, z) = u(y, z)$. Поэтому уравнение (1.5) и в этом случае будет удовлетворяться тождественно; кроме того, из второго и третьего уравнений (1.6) будет следовать, что $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т. е. что давление здесь постоянно по сечению трубы и зависит только от x. Введем теперь в плоскости Oyz полярные координаты (r, φ). Тогда в силу

симметрии трубы $u(y, z) = u(r)$ и, следовательно, в этих координатах первое уравнение (1.6) будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right). \tag{1.22}$$

Так как правая часть здесь зависит только от x, а левая от r, то должно быть $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} = -\frac{\Delta_l p}{l}$ (где $\Delta_l p$ — перепад давления на участке трубы длины l). Учитывая теперь граничное условие $u(D/2) = 0$ и ограниченность функции $u(r)$ при всех r, получаем

$$u(r) = \frac{\Delta_l p}{4\mu l}(R^2 - r^2) \quad \left(\text{где } R = \frac{D}{2}\right). \tag{1.23}$$

Таким образом, и в этом случае профиль скорости (вдоль любого диаметра) оказывается параболическим. Средняя скорость течения, определяемая формулой

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r)\,r\,dr\,d\varphi, \tag{1.24}$$

здесь оказывается равной $\frac{\Delta_l p}{8\mu l}R^2 = \frac{U_{\max}}{2}$; поэтому расход жидкости (т. е. объем жидкости, протекающей через сечение трубы за единицу времени) равен

$$Q = \pi R^2 U_{\text{ср}} = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta_l p}{l}. \tag{1.25}$$

Сила трения о стенку равна $\tau = \mu\left|\frac{du}{dr}\right| = \frac{R}{2}\frac{\Delta_l p}{l}$; тот же результат можно получить и иначе, сообразив, что полная сила трения $\pi Dl \cdot \tau$ на участке трубы длины l должна уравновешиваться силой перепада давления $\Delta_l p$, действующей на сечение трубы πR^2. Следовательно, коэффициент сопротивления C_f здесь равен

$$C_f = \frac{8\nu}{RU_{\text{ср}}} = \frac{16}{\text{Re}}, \quad \text{где} \quad \text{Re} = \frac{U_{\text{ср}}D}{\nu}. \tag{1.26}$$

Решение (1.23) уравнений гидродинамики также относится к идеализированному потоку, так как труба здесь предполагается бесконечно длинной, а течение — строго стационарным. Оказывается, однако, что в случае реальных конечных труб протекание по ним жидкости в случае постоянного напора $\Delta_l p$ довольно часто очень быстро становится практически стационарным, причем на расстояниях от входа трубы порядка $\frac{R^2 U_{\text{ср}}}{\nu}$ (по

теоретическим расчетам Шиллера (1934), приведенным также и в книге Гольдштейна (1938), т. 1, § 139, уже при $x > 0{,}115\frac{R^2U_{ср}}{\nu}$) влияние конечной длины трубы также перестает ощущаться, и течение хорошо описывается формулой (1.23). Таким образом, закономерности (1.23), (1.25) и (1.26) могут быть проверены на опыте; исторически дело обстояло так, что они впервые были обнаружены именно на опыте (Г. Хагеном в 1839 г.) и Ж. Пуазейлем в 1840—1841 гг.) и лишь затем объяснены теоретически (Дж. Стоксом в 1845 г.). В исследованиях Хагена было обнаружено также, что эти закономерности справедливы только в случае достаточно большой вязкости ν и при достаточно малой скорости $U_{ср}$ — обстоятельство, о котором мы еще будем подробно говорить в § 2. Течение несжимаемой жидкости, описываемое формулами (1.23) и (1.25), часто называется *течением Пуазейля (или Хагена — Пуазейля) в круглой трубе* или (в тех случаях, когда нет опасений спутать его с течением (1.19)) просто *течением Пуазейля*.

4) В качестве последнего примера мы рассмотрим стационарное движение жидкости, заключенной между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами радиусов R_1 и $R_2 > R_1$, вращающимися вокруг своих осей с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2; перепад давления вдоль оси цилиндров мы примем равным нулю. В таком случае все гидродинамические величины не будут зависеть от координаты x, отсчитываемой вдоль оси цилиндров. Кроме того, если в плоскости Oyz, перпендикулярной оси цилиндров, ввести цилиндрические координаты (r, φ), то из соображений симметрии ясно, что отличной от нуля будет лишь компонента скорости $u = u_\varphi$ и что скорость u и давление p будут зависеть только от r. Отсюда следует, что уравнение неразрывности (1.5) и первое уравнение (1.6) здесь будут удовлетворяться тождественно; что же касается до второго и третьего уравнений (1.6), то они после перехода к цилиндрическим координатам примут вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{u^2}{r}, \qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \tag{1.27}$$

Общее решение второго из уравнений (1.27) имеет вид $u(r) = ar + \frac{b}{r}$; так как к тому же $u(r)$ должно равняться $\Omega_1 R_1$ при $r = R_1$ и $\Omega_2 R_2$ при $r = R_2$, то искомая функция $u(r)$ будет определяться формулой

$$u(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}. \tag{1.28}$$

С помощью первого уравнения (1.27) теперь очень легко найти и $p(r)$, но мы на этом не будем останавливаться. Течение жидкости, задаваемое формулой (1.28), в ряде отношений родственно течению примера 1), но оно значительно проще может быть сравнительно точно воспроизведено в лаборатории. Это течение иногда называется *течением Куэтта между цилиндрами*.

1.3. Число Рейнольдса и критерий подобия

Все перечисленные выше точные решения уравнений гидродинамики относились к крайне простым идеализированным течениям. В более сложных случаях нахождение точного решения обычно оказывается невозможным, и приходится прибегать к численному решению уравнений (1.5)—(1.6) с помощью тех или иных приближенных методов. При этом очень важно уметь оценить порядок величины различных членов наших уравнений, чтобы знать, в каких случаях можно пренебречь некоторыми из этих членов и ограничиться рассмотрением упрощенных уравнений, легче поддающихся интегрированию.

Будем пока считать, что речь идет о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил. С помощью соотношения (1.9) нетрудно показать, что члены уравнений (1.6), содержащие давление, вообще говоря, будут иметь тот же порядок величины, что и нелинейные члены $u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$, так что сравнивать надо лишь порядки членов $u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ и $\nu\Delta u_i$, описывающих влияние на поток сил инерции и сил внутреннего трения. Обозначим через U характерный масштаб скоростей нашего течения (за U можно принять, например, максимальную скорость потока или как-то определенную среднюю скорость), а через L — характерный масштаб длин (например, средний размер тел, обтекаемых потоком, или типичное расстояние между твердыми стенками, или вообще расстояние, на котором скорость потока претерпевает заметное изменение ΔU, имеющее порядок U). В таком случае порядок первой производной поля скорости будет определяться отношением U/L, а вторых производных — отношением U/L^2, так что члены, описывающие силы инерции, будут иметь порядок U^2/L, а члены, описывающие силы трения — порядок $\nu U/L^2$. Отношение этих величин

$$\frac{U^2}{L} : \frac{\nu U}{L^2} = \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re} \tag{1.29}$$

называется *числом Рейнольдса* потока; оно является очень важной характеристикой течения, определяющей относительную

роль сил инерции и сил трения в динамике потока (выше это число нам уже встречалось в формулах (1.16), (1.21) и (1.26)). При малых числах Рейнольдса вязкость оказывает существенное влияние на весь поток в целом, сглаживая возникающие в потоке мелкие неоднородности; поэтому изменения характеристик течения от точки к точке при малых Re оказываются обычно весьма плавными. При больших числах Рейнольдса доминирующую роль в потоке играют силы инерции, действие которых приводит к передаче энергии от крупномасштабных компонент движения к мелкомасштабным и, следовательно, к образованию резких локальных неоднородностей течения; этот тип течений нас и будет интересовать в дальнейшем.

Понятие о числе Рейнольдса очень упрощает исследование геометрически подобных течений жидкости, таких, как, например, течения жидкости в трубах с сечением заданной формы или обтекание безграничным потоком жидкости твердого тела заданной формы. Поскольку в этих случаях речь идет о совокупности потоков с геометрически подобными границами, то свойства границ здесь могут быть охарактеризованы одним-единственным масштабом L размерности длины (в наших примерах за L можно принять средний диаметр сечения рассматриваемой трубы или средний диаметр обтекаемого потоком тела). Кроме того, само течение будет характеризоваться еще некоторой типичной скоростью U (например, максимальной скоростью в фиксированном сечении трубы или скоростью набегающего на тело потока). Наконец, единственный входящий в уравнения (1.5) и (1.6) размерный параметр — это коэффициент кинематической вязкости ν, характеризующий физические свойства текущей жидкости. Таким образом, в случае установившегося течения при отсутствии внешних сил геометрически подобные потоки будут зависеть лишь от длины L и от размерных параметров U и ν, имеющих размерности

$$[U] = LT^{-1}, \quad [\nu] = L^2T^{-1}, \tag{1.30}$$

где через L и T в правых частях равенств, как обычно, обозначены размерности длины и времени. Ясно, что из параметров L, U и ν можно составить единственную безразмерную комбинацию — число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$. Поэтому, если мы будем измерять длины в единицах L, скорости — в единицах U, а давление — в единицах ρU^2, то уравнение (1.5) и граничные условия для всех геометрически подобных потоков будут иметь один и тот же вид, а уравнения (1.6) будут отличаться самое большее значениями безразмерного параметра Re, могущего войти в эти уравнения после перехода к безразмерной форме. Следовательно, для геометрически подобных потоков скорость, измеренная масштабом U, будет зависеть только от координат, измеренных масштабом L, и от числа Re. Иначе говоря,

$$u_i(\boldsymbol{x}) = U\varphi_i\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}\right), \tag{1.31}$$

где $\varphi_i(\boldsymbol{\xi}, \mathrm{Re})$ — некоторые универсальные функции, описывающие сразу всю рассматриваемую совокупность течений (заметим, что в примерах 1)—4) предыдущего пункта функции φ_i по некоторым специальным причинам оказываются вовсе не зависящими от Re). Точно так же $p(\boldsymbol{x}) = \rho U^2\varphi_0\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}\right)$, где φ_0 — новая универсальная функция. Далее, если W — сила воздействия потока на какое-то обтекаемое потоком твердое тело, то коэффициент сопротивления $C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2L^2}$ будет зависеть уже только от числа Рейнольдса Re, причем L^2 в определении C_W можно заменить также площадью S всей обтекаемой поверхности тела (как мы и поступали выше, полагая, что $C_f = \frac{\tau}{\rho U^2}$, где τ — средняя сила, приходящаяся на единицу поверхности) или площадью S_0 миделева сечения тела. Иначе говоря, геометрически подобные течения в случае равенства отвечающих им чисел Рейнольдса (но, вообще говоря, только в этом случае) будут также и механически подобными, т. е. будут обладать геометрически подобными конфигурациями линий тока и будут описываться одними и теми же функциями от безразмерных координат (так называемый *закон подобия Рейнольдса*). Этот закон, естественно, имеет важное значение для теоретического изучения течений, имеющих место в аналогичных условиях, для унификации обработки наблюдений над такими течениями и для моделирования течений, встречающихся в практических задачах. Кроме того, он показывает, что всевозможные геометрически подобные течения будут описываться лишь однопараметрическим семейством решений уравнений (1.5)—(1.6) — это, разумеется, сильно упрощает задачу численного интегрирования этих уравнений.

Подчеркнем еще раз, что закон подобия Рейнольдса справедлив лишь для установившихся течений несжимаемой жидкости, на которые не оказывают существенного влияния внешние силы. В случае же движений, существенно зависящих от внешних сил (например, от силы тяжести), а также нестационарных движений, характеризующихся некоторым типичным периодом T, отличным от L/U, закон подобия оказывается более сложным: здесь для механического подобия необходимо, чтобы кроме чисел

Рейнольдса Re равные значения принимали также и еще некоторые дополнительные безразмерные «критерии подобия». В случае течений сжимаемой жидкости число критериев подобия также увеличивается; на этом мы еще остановимся в п. 1.6.

Заметим еще, что в некоторых случаях весьма небольшие нарушения геометрического подобия могут приводить к очень резкому нарушению механического подобия. Так, например, небольшие изменения условий у входного сечения круглой трубы, вносящие в поток небольшие возмущения, могут совершенно изменить характер течения в трубе (см. по этому поводу § 2).

1.4. Течения с большими числами Рейнольдса; пограничный слой

Будем теперь считать, что число Рейнольдса Re потока очень велико. В таком случае нелинейные инерционные члены уравнений (1.6) будут существенно превосходить по величине члены, содержащие коэффициент вязкости, так что на первый взгляд может показаться, что влиянием вязкости здесь можно попросту пренебречь. На самом деле, однако, дело будет обстоять не совсем так: отбрасывая члены с ν в уравнениях (1.6), мы тем самым понижаем порядок этих дифференциальных уравнений, и решения получающихся упрощенных уравнений идеальной жидкости не могут уже удовлетворить граничным «условиям прилипания», требующим обращения в нуль скорости на всех твердых поверхностях, ограничивающих поток. В то же время хорошо известно, что для вязкой жидкости (со сколь угодно малым коэффициентом вязкости) «прилипание» обязательно должно иметь место. Поэтому при движениях вязкой жидкости, характеризующихся большим числом Рейнольдса, только вдали от твердых стенок течение будет близким к тому, которое могло бы иметь место в случае идеальной жидкости (с нулевой вязкостью); вблизи же от стенок образуется тонкий слой, в котором скорость течения очень быстро изменяется от нулевого значения на стенке до значения на внешней границе слоя, весьма близкого к тому, которое получилось бы при течении идеальной жидкости. Быстрое изменение скорости внутри этого так называемого *пограничного слоя* приводит к тому, что в его пределах влияние сил трения на деле оказывается вовсе не малым, а имеющим тот же порядок, что и влияние сил инерции.

Таким образом, при больших числах Рейнольдса вязкость жидкости сказывается лишь вблизи от ограничивающих поток твердых стенок. В этой области течения члены, содержащие ν, никак не могут быть отброшены, но зато уравнения гидродинамики здесь могут быть заметно упрощены, исходя из специфических особенностей движения тонкой пленки жидкости, обволакивающей твердое тело. В свободном же пространстве течение будет определяться уравнениями гидродинамики идеальной жидкости, причем за граничные условия здесь уже надо принять условия на верхней границе соответствующего пограничного слоя (или слоев).

Рассмотрим теперь простейшую задачу о пограничном слое на плоской пластинке длины L и бесконечной ширины, расположенной в плоскости Oxy (так что она заполняет область $0 \leqslant x \leqslant L$ этой плоскости) и обтекаемой потоком жидкости, движущейся с данной скоростью U по направлению оси Ox. Прежде чем переходить к математическому решению этой задачи, изложим некоторые предварительные соображения качественного характера. Поскольку в нашем случае характерным масштабом длины будет L, а скорости — U, то нелинейные члены уравнений (1.6) (точнее говоря, первого из этих уравнений) в области пограничного слоя будут иметь порядок U^2/L. С другой стороны, продольная скорость $u = u_1$ здесь будет меняться от значения $u = 0$ на поверхности пластинки до значения порядка U на внешней границе пограничного слоя. Поэтому, если мы обозначим через δ толщину пограничного слоя [1]), то $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ будет иметь порядок U/δ^2, и главный член $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, описывающий силу трения, будет иметь порядок $\nu U/\delta^2$. Но внутри пограничного слоя сила трения должна иметь тот же порядок, что и сила инерции. Следовательно, $U^2/L \sim \nu U/\delta^2$, и, значит,

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}. \tag{1.32}$$

Таким образом, толщина пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса потока — чем больше это число (т. е. чем меньше вязкость жидкости и чем больше скорость набегающего потока), тем тоньше оказывается пограничный слой.

[1]) Разумеется, толщина δ пограничного слоя является условным понятием, так как пограничный слой не имеет четкой границы, и скорость u лишь асимптотически стремится к U при удалении от пластинки по направлению Oz. Поэтому под δ следует понимать расстояние от пластинки по направлению Oz, на котором скорость u достигает определенной, достаточно большой доли от U, например становится равной 0,99 U (такое определение δ часто используется в гидромеханике). Существуют также и другие определения толщины пограничного слоя, имеющие несколько менее формальный характер (но приводящие практически к эквивалентным результатам); об этом см. ниже, стр. 56—58.

Для определения толщины пограничного слоя над заданной точкой пластинки на расстоянии x от ее передней кромки мы должны заменить в этом расчете полную длину пластинки L величиной x. Следовательно,

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \text{в точке } x, \tag{1.33}$$

т. е. толщина пограничного слоя при увеличении расстояния x от передней кромки возрастает пропорционально $\sqrt{x}$. Что же касается напряжения трения τ на стенке (равного силе трения, действующей на единицу площади пластинки), то $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$ (где $\frac{\partial u}{\partial z}$ надо взять при $z = 0$). Поскольку $\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{U}{\delta}$, то $\tau \sim \frac{\mu U}{\delta}$, или, в силу (1.32),

$$\tau \sim \rho \sqrt{\frac{\nu U^3}{L}}. \tag{1.34}$$

Таким образом, напряжение трения здесь пропорционально скорости в степени 3/2; соответствующий коэффициент сопротивления трения

$$C_f = \frac{\tau}{\rho U^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \tag{1.35}$$

естественно, зависит только от числа Рейнольдса и убывает с возрастанием этого числа.

Перейдем к выводу уравнений, определяющих поле скорости внутри пограничного слоя. Поскольку в рассматриваемом нами случае движение, очевидно, будет строго двумерным (в плоскости Oxz), и все его характеристики не будут зависеть от y, то общие уравнения (1.6) и (1.5) здесь принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\end{gathered} \tag{1.36}$$

где $u = u_1$, $w = u_3$. Постараемся теперь оценить порядок отдельных членов этих уравнений. Напомним, что u внутри пограничного слоя, вообще говоря, равно конечной доле скорости U, т. е. имеет тот же порядок, что и U, а производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ имеют порядок U/L и, соответственно, U/δ. Интегрируя третье уравнение (1.36) по z от 0 до некоторого $z = c\delta$, $0 < c < 1$; составляющего конечную часть полной толщины δ пограничного слоя, получим

$$w = \int_0^{c\delta} \frac{\partial u}{\partial x}\, dz \sim \delta \frac{U}{L} = \frac{\delta}{L} U. \tag{1.37}$$

Отсюда видно, что w примерно в $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ раз меньше u. Учитывая еще соотношение (1.32), убеждаемся, что в первом уравнении (1.36) члены $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $w\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ имеют один и тот же порядок U^2/L, а член $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — много меньший порядок $\frac{U^2}{L}\frac{1}{\mathrm{Re}}$; поэтому этот последний член мы можем опустить. Далее, из второго уравнения (1.36) видно, что член $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$ будет иметь порядок не выше чем $\frac{U^2\delta}{L^2} = \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$ (так как ни один член этого второго уравнения не имеет более высокого порядка); поэтому с точностью до членов относительного порядка $\frac{\delta}{L}$ мы можем пренебречь поперечными изменениями давления и считать, что $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т. е. $p = p(x)$. Но в таком случае давление $p(x)$ внутри пограничного слоя можно заменить давлением на его верхней границе. Следовательно, член $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ в первом уравнении (1.36) можно независимо определить из уравнений гидродинамики идеальной жидкости, описывающих течение вне пограничного слоя: полагая $\nu = 0$ в первом из уравнений (1.6), мы найдем, что $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$, или же (в стационарном случае) $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = U\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial U^2}{\partial x}$. Таким образом, для нахождения u и w мы получаем систему двух уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.39}$$

Эта система вместе с граничными условиями

$$u = w = 0 \text{ при } z = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant L;\ u \to U(x, t) \text{ при } z \to \infty \tag{1.40}$$

позволяет однозначно определить функции $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$ по начальным значениям одной из этих функций.

Уравнения (1.38) и (1.39) представляют собой знаменитую *систему уравнений пограничного слоя*, впервые полученную

Л. Прандтлем в 1904 г. В дальнейшем и самим Прандтлем и другими авторами было предложено несколько различных выводов этой системы уравнений. При этом, в частности, было установлено, что уравнения Прандтля справедливы и в случае двумерного обтекания искривленной поверхности (с не слишком большой кривизной) и что они могут быть формально получены из общих уравнений гидромеханики в качестве первого приближения при помощи разложения всех членов в ряды по степеням $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ (см. Кочин, Кибель, Розе (1963), ч. 2, гл. II, § 29; Гольдштейн (1938), т. I, гл. IV; ср. также монографии Лойцянского (1941, 1962б) и Шлихтинга (1951)). В общем случае под z, естественно, надо понимать координату, отсчитываемую по нормали к обтекаемой поверхности, а под x — продольную координату в касательной плоскости.

Рассмотрим теперь подробнее простейший случай установившегося обтекания плоской пластинки стационарным потоком, имеющим постоянную скорость U по направлению оси Ox. В этом случае в уравнении (1.38) выпадут члены $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, так что это уравнение здесь принимает особенно простой вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.41}$$

Условимся считать длину пластинки L бесконечной. Так как естественно думать, что при рассматриваемом нами обтекании скорости в каждом сечении $x=\mathrm{const}$ пограничного слоя не будут существенно зависеть от скоростей в последующих сечениях вниз по течению, то можно ожидать, что предположение о бесконечной длине не будет заметно влиять на решение нигде, кроме узкой окрестности задней кромки и области $x\geqslant L$, расположенной за пластинкой, которых мы здесь не будем касаться. При $L=\infty$ граничные условия (1.40) будут иметь вид

$$u=w=0 \quad \text{при} \quad z=0,\ x\geqslant 0;\quad u\to U \quad \text{при} \quad z\to\infty. \tag{1.42}$$

Таким образом, нам надо лишь найти решение уравнений (1.39) и (1.41), удовлетворяющее условиям (1.42).

Чтобы избавиться от параметров ν и U, перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{x}{L},\quad z_1=\frac{z\sqrt{\mathrm{Re}}}{L}=z\sqrt{\frac{U}{\nu L}},\\ u_1&=\frac{u}{U},\quad w_1=\frac{w\sqrt{\mathrm{Re}}}{U}=w\sqrt{\frac{L}{\nu U}}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

задаваемым в соответствии с соотношениями (1.32) и (1.37);

длину L в (1.43) мы теперь можем выбрать произвольно (так как условия задачи не содержат никаких характерных длин). Подставив (1.43) в (1.41), (1.39) и (1.42), получаем

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=0, \tag{1.44}$$

$$u_1=w_1=0 \text{ при } z_1=0,\ x_1\geqslant 0;\ u_1\to 1 \text{ при } z_1\to\infty. \tag{1.45}$$

Но поскольку длина L была выбрана произвольно, то смысл может иметь только решение, не зависящее от L. Отсюда ясно, что $u_1=\frac{u}{U}$ может зависеть только от комбинации $\eta=\frac{z_1}{\sqrt{x_1}}=z\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ переменных z_1 и x_1, не содержащей L. От этой же комбинации должна зависеть и функция $\sqrt{x_1}\,w_1=w\sqrt{\frac{x}{\nu U}}$, также выражающаяся лишь через w, x, ν и U. Итак, мы видим, что

$$u=Uf\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{z}{\sqrt{x}}\right),\quad w=\sqrt{\frac{U\nu}{x}}f_1\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{z}{\sqrt{x}}\right), \tag{1.46}$$

где f и f_1 — две универсальные функции одного переменного (не зависящие от U и ν). Из (1.46), в частности, следует, что профили скоростей u и w над всеми точками любых пластинок, обтекаемых потоком постоянной скорости, должны быть подобны друг другу. Если мы обозначим

$$f(\eta)=\varphi'(\eta), \tag{1.47}$$

то уравнение (1.39) обратится в равенство $f_1(\eta)=\frac{1}{2}(\eta\varphi'-\varphi)$; после этого уравнение (1.41) и условия (1.42) легко приводятся к виду

$$\varphi\varphi''+2\varphi'''=0;\quad \varphi(0)=\varphi'(0)=0,\quad \varphi'(\infty)=1. \tag{1.48}$$

Таким образом, наша система уравнений свелась к одному нелинейному обыкновенному уравнению третьего порядка с тремя граничными условиями. Это уравнение может быть проинтегрировано численно, например, при помощи разложения функции $\varphi(\eta)$ в степенной ряд вблизи $\eta=0$ и в асимптотический ряд при $\eta\to\infty$ (такой метод решения был использован в 1908 г. Блазиусом, впервые исследовавшим рассматриваемую здесь задачу); некоторые другие численные методы применили к решению уравнения (1.48) в последующие годы Тепфер, Берстоу, Гольдштейн, Хоуарт и др. (см. ссылки в книгах Гольдштейна (1938), Шлихтинга (1951) и Лойцянского (1941, 1962б)). Полученные в результате этих расчетов профили продольной и

вертикальной скоростей в пограничном слое над плоской пластинкой приведены на рис. 2 и 3. Толщина δ пограничного слоя (определяемая как то значение z, при котором $u(z)=0{,}99U$) здесь оказалась имеющей значение

$$\delta \approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad (1.49)$$

(ср. формулу (1.33)). Напряжение трения в точке пластинки,

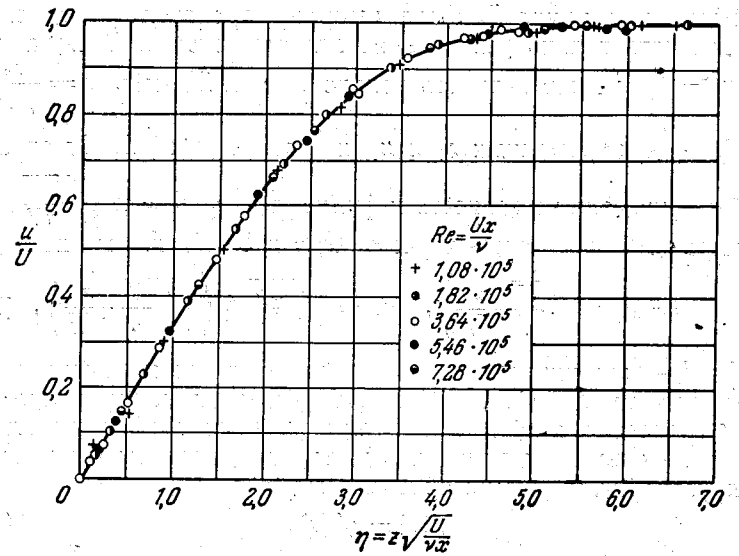


Рис. 2. Профиль продольной скорости в пограничном слое на плоской пластинке.
Экспериментальные данные — по измерениям Никурадзе (см. Шлихтинг (1951)).

удаленной на расстояние x от передней кромки, дается формулой $\tau(x)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}=\mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}\varphi''(0)$; поскольку результаты численного интегрирования показывают, что $\varphi''(0)=0{,}332$, то, следовательно,

$$\tau(x)=0{,}332\rho\sqrt{\frac{\nu U^3}{x}},\quad c_f(x)=\frac{\tau(x)}{\rho U^2}=\frac{0{,}332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\quad \mathrm{Re}_x=\frac{Ux}{\nu}. \qquad (1.50)$$

Для пластинки длины L, смачиваемой с обеих сторон, полная сила трения (на единицу ширины пластинки) будет равна

$$F=2\int_0^L \tau(x)\,dx=1{,}328\,\rho\sqrt{\nu U^3 L}, \qquad (1.51)$$

т. е. она будет пропорциональна скорости в степени $^3/_2$ и корню квадратному из длины пластинки (сравнительно медленное возрастание F с ростом L естественно объясняется тем, что трение $\tau(x)$ убывает с удалением от передней кромки в связи с увеличением толщины пограничного слоя). Вместо F обычно используют безразмерный коэффициент сопротивления C_f, который

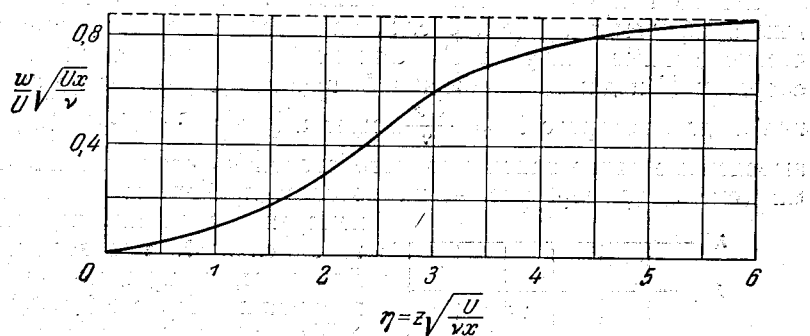


Рис. 3. Профиль вертикальной скорости в пограничном слое на плоской пластинке.

для плоской пластинки длины L и ширины B будет определяться из равенства

$$C_f=\frac{FB}{\rho U^2 LB}=\frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}}},\qquad \mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}. \qquad (1.52)$$

Экспериментальная проверка изложенной здесь теории обтекания плоской пластинки производилась, в частности, И. М. Бюргерсом и Б. Г. Ван дер Хегге Цийненом в 1924 г., М. Хансеном в 1928 г. и И. Никурадзе в 1942 г. (ссылки на оригинальные работы см., например, в книге Шлихтинга (1951)). При этом было обнаружено, что при не слишком больших числах $\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$ эмпирические значения коэффициента сопротивления достаточно точно описываются формулой (1.52). Точно так же и измеренные значения толщины пограничного слоя δ и форма профиля продольной скорости $u(z)$ внутри этого слоя при не слишком большом, но и не слишком малом $\mathrm{Re}_x=\frac{Ux}{\nu}$ (т. е. всюду кроме узкой полоски, примыкающей к переднему ребру пластинки, где не выполняется условие $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\ll\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$, и еще, быть может, задней части пластинки в случае, когда $\frac{UL}{\nu}$ очень велико) оказались весьма хорошо соответствующими теорети-

ческим предсказаниям. Небольшие расхождения теории с опытом, наблюдавшиеся в ранних измерениях, вполне могут объясняться влиянием конечной толщины пластинки и формы заострения на переднем ребре, а также наличием небольших продольных градиентов давления в обтекающем потоке; эти обстоятельства были специально учтены в опытах Никурадзе, сумевшего получить почти идеальное совпадение с вычисленным профилем $u(z)$ (см. рис. 2, на котором нанесены эмпирические данные Никурадзе). Однако при больших значениях скорости U и длины пластинки L, начиная с некоторого значения x, для которого $\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$ имеет порядок $3\cdot 10^5 - 3\cdot 10^6$, все выведенные выше закономерности оказались резко искаженными (см., например, рис. 4, на котором приведены результаты измерений толщины пограничного слоя δ, произведенных Ханзеном, показывающие, что начиная примерно с $\mathrm{Re}_x = 3{,}2\times 10^5$ эта толщина начинает возрастать гораздо быстрее, чем следовало бы согласно формуле (1.49)). О причинах, вызывающих эти искажения, мы еще будем подробно говорить в § 2.

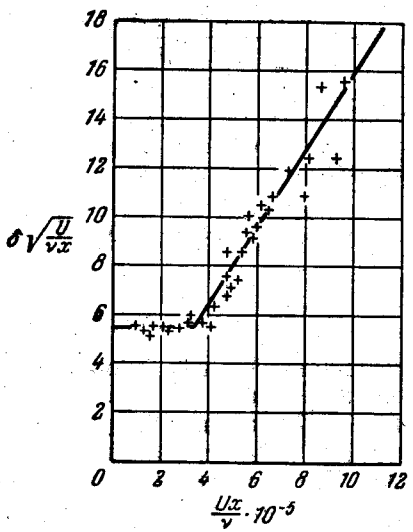


Рис. 4. Зависимость толщины пограничного слоя δ на плоской пластинке от расстояния x от передней кромки пластинки (по данным Ханзена (1928)).

До сих пор толщину пограничного слоя δ мы определяли чисто условно как то значение координаты z, при котором продольная скорость $u(z)$ принимает значение, равное какой-то определенной достаточно близкой к единице доле от U (например, равное 99% от U). Такое не очень четкое определение мы вынуждены были принять из-за того, что $u(z)$ лишь асимптотически приближается к U при $z\to\infty$, нигде не достигая этого последнего значения; поэтому, строго говоря, надо считать, что пограничный слой не имеет резкой границы. Тем не менее, поперечный масштаб пограничного слоя можно характеризовать и с помощью некоторых величин, имеющих отчетливый физический смысл. Одной из таких величин является так называемая *толщина вытеснения* δ^*, определяемая формулой

$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(z)}{U}\right] dz. \qquad (1.53)$$

Смысл этой величины заключается в том, что δ^* равно расстоянию, на которое оттесняется наружу обтекающий поток из-за вызванного трением уменьшения продольной скорости в пограничном слое. В самом деле, рассмотрим некоторую линию тока, отстоящую от пластинки у переднего ее края на расстояние z_0 (см. рис. 5). Так как расход жидкости через любое сечение трубки тока, заключенной между этой линией тока и поверхностью пластинки, должен быть одним и тем же, а продольная скорость u убывает вниз по течению вследствие трения о пластинку, то сечение трубки тока должно расти с ростом x. На расстоянии x от переднего края пластинки линия тока отойдет от пластинки на расстояние z_1, т. е. как бы «вытеснится» на расстояние $z_1 - z_0$, которое можно определить из условия постоянства расхода жидкости через начальное сечение трубки тока и через сечение с абсциссой x:

$$Uz_0 = \int_0^{z_1} u(x, z)\, dz,$$

откуда

$$z_1 - z_0 = \int_0^{z_1} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz. \qquad (1.54)$$

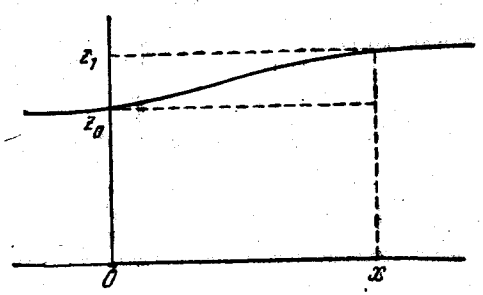


Рис. 5. Схематический вид линии тока в пограничном слое на плоской пластинке.

При $z_1 \to \infty$ разность $z_1 - z_0$ как раз и стремится к толщине вытеснения δ^*. Для случая стационарного обтекания плоской пластинки

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - \varphi'(\eta)]\, d\eta = \lim_{\eta\to\infty} [\eta - \varphi(\eta)] \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \qquad (1.55)$$

откуда можно получить формулу

$$\delta^* \approx 1{,}73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \qquad (1.56)$$

Заметим, что ранее вычислявшаяся толщина пограничного слоя δ (определяемая соотношением $u(\delta) = 0{,}99\ U$) оказывается в этом случае примерно в три раза больше толщины вытеснения δ^*. Из-за «вытеснения» линий тока вертикальная компонента скорости w не стремится к нулю при $z\to\infty$ (см. рис. 3), а приближается к некоторому асимптотическому значению, оказывающемуся равным

$$w(\infty) = 0{,}895\, U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \qquad (1.57)$$

Таким образом, вытеснение приводит к тому, что поток оказывается искаженным даже и вне пограничного слоя (как бы ни определялась его толщина), т. е. пограничный слой оказывает влияние на внешний поток, с чем иногда приходится считаться при расчетах.

Другой величиной, характеризующей поперечный масштаб пограничного слоя, является так называемая *толщина потери импульса*, определяемая

формулой

$$\delta^{**}=\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz. \tag{1.58}$$

Наименование этой величины связано с тем, что импульс, передаваемый силами трения за единицу времени части пластинки, имеющей единичную ширину и простирающейся от передней кромки $x=0$ до сечения пластинки с заданным x (т. е. теряемый за единицу времени столбом жидкости, расположенным над этой частью пластинки), как можно показать, равен $\rho U^2\delta^{**}$, т. е. характеризуется длиной δ^{**}. В случае стационарного обтекания пластинки потоком постоянной скорости U эта длина в силу (1.46), (1.47) и (1.48) будет равна

$$\delta^{**}=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty \varphi'(1-\varphi')\,d\eta=2\varphi''(0)\sqrt{\frac{\nu x}{U}}=0{,}664\sqrt{\frac{\nu x}{U}}; \tag{1.59}$$

таким образом, здесь δ^{**} оказывается еще почти в три раза меньше, чем δ^*.

Отметим еще, что теория пограничного слоя позволяет также объяснить, почему течение Пуазейля, представляющее собой точное решение уравнений гидродинамики, устанавливается лишь на расстояниях порядка $\frac{R^2U}{\nu}$ от входа трубы (см. стр. 43—44). В самом деле вблизи входного отверстия трубы тормозящее действие стенок будет сказываться лишь в пределах тонкого пограничного слоя, а в центральной части трубы жидкость будет двигаться с постоянной скоростью, не испытывая действия вязкости. По мере продвижения в глубь трубы толщина пограничного слоя на стенках будет возрастать пропорционально $\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$, где x — расстояние от входа. Наконец, на расстоянии $x\sim\frac{R^2U}{\nu}$ от входа пограничный слой заполнит все сечение трубы, и вязкость начнет сказываться на всем потоке в целом. Только после этого, разумеется, и может установиться теоретическое параболическое распределение скорости, задаваемое формулой (1.23) (ср. Шиллер (1932, 1934) или Гольдштейн (1938), т. I, гл. VII, § 139).

1.5. Общее уравнение притока тепла и уравнение теплопроводности; вынужденная и свободная конвекция

В дальнейшем больше всего внимания будет уделено течениям несжимаемой жидкости, описываемым уравнениями Навье — Стокса (1.6) и условием несжимаемости (1.5). Поскольку, однако, гл. IV будет посвящена изучению более общего случая температурно-неоднородной жидкости, а во второй части книги вкратце будет рассмотрен также и случай турбулентности в сжимаемой среде, то целесообразно остановиться здесь на вопросе о замыкании общей системы уравнений гидродинамики. Полученные при этом результаты помимо всего прочего позволят нам выписать уравнение для поля температуры несжимаемой температурно-неоднородной среды, которое будет играть важную роль в последующем изложении.

В сжимаемой среде уравнение неразрывности (т. е. баланса массы) и уравнения динамики (т. е. баланса трех компонент импульса) имеют вид (1.2) и соответственно (1.4). Поскольку эти четыре уравнения содержат пять неизвестных функций, то для получения замкнутой системы к ним надо добавить еще пятое уравнение — уравнение притока тепла, выражающее физический закон сохранения энергии. В самом общем виде это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho e\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_\alpha\left(\frac{u^2}{2}+w\right)-u_\beta\sigma_{\beta\alpha}-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right]+u_\alpha\rho X_\alpha, \tag{1.60}$$

где e — внутренняя энергия единицы массы жидкости (так что сумма $\rho(u^2/2+e)$ представляет собой полную энергию единицы массы движущейся жидкости), $w=e+\frac{p}{\rho}$ — так называемая тепловая функция[1]), $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, T — температура, а

$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right)+\zeta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij} \tag{1.61}$$

— вязкий тензор напряжений, входящий под знаком производной $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ в правую часть уравнения баланса импульса (1.3) (см., например, Ландау и Лифшиц (1953), ч. 1, § 49). Из уравнения баланса энергии (1.60) может быть выведено также уравнение баланса энтропии; в самом деле, воспользовавшись термодинамическими соотношениями, позволяющими выразить de и dw через dp, $d\rho$ и ds, где s — энтропия единицы массы жидкости, и учитывая также и уравнения (1.2) и (1.4), мы можем преобразовать уравнение (1.60) к виду

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial s}{\partial x_\alpha}\right)=\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.62}$$

[1]) Вообще говоря, использование здесь и ниже термодинамических величин и термодинамических соотношений требует известных оговорок, так как движущаяся жидкость при наличии градиентов скорости и температуры не является термодинамически равновесной системой. Можно, однако, показать, что при не слишком больших градиентах, характеризующих реально встречающиеся гидродинамические потоки, основные термодинамические величины все же могут быть определены так, чтобы для них удовлетворялись обычные формулы термодинамики равновесных сред; см., например, Ландау и Лифшиц (1953), ч. 1, § 49, а также Толмен и Файн (1948) и специальные руководства по кинетической теории газов (Чепмен и Каулинг (1952), Гиршфельдер, Кертисс, Берд (1954)).

(ср. Ландау и Лифшиц (1953)). Таким образом, в случае справедливости уравнений (1.2) и (1.4) уравнения (1.60) и (1.62) оказываются эквивалентными друг другу, и любое из них с одинаковым правом может быть положено в основу вывода замкнутой системы уравнений, описывающей движения сжимаемой жидкости.

Для получения такой замкнутой системы надо только выразить термодинамические величины e и w или s через давление p и плотность ρ (или температуру T) при помощи общих уравнений термодинамики и уравнения состояния рассматриваемой среды (связывающего p, ρ и T). Мы ограничимся здесь простейшим случаем, когда это уравнение состояния совпадает с уравнением состояния идеального газа, т. е. имеет вид

$$p = R\rho T, \tag{1.63}$$

где T — температура в градусах Кельвина, а постоянная R равна разности удельных теплоемкостей среды при постоянном давлении c_p и при постоянном объеме c_v:

$$R = c_p - c_v. \tag{1.64}$$

Кроме того, в соответствии с выводами кинетической теории газов и с данными многих экспериментов мы будем считать, что теплоемкости c_p и c_v по отдельности являются постоянными (т. е. не зависят от температуры). В таком случае нетрудно показать, что $e = c_v T + e_0$, $w = e + \frac{p}{\rho} = c_p T + e_0$ и $s = -R \ln \rho + c_v \ln T + \text{const} = -R \ln p + c_p \ln T + \text{const}$ (см., например, Ландау и Лифшиц (1951), § 43). Подставляя эти выражения для e и w в уравнение (1.60) и применяя (1.2) и (1.4) или же подставляя одно из выражений для s в уравнение (1.62), можно без труда преобразовать общее уравнение притока тепла к виду

$$c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = -p \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) + \rho\varepsilon, \tag{1.65}$$

или, что эквивалентно, к виду

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) + \rho\varepsilon, \tag{1.65'}$$

где

$$\rho\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} =$$
$$= \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)^2 + \zeta\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)^2. \tag{1.66}$$

Величина ε представляет собой умноженный на ρT прирост энтропии s за единицу времени, связанный с переходом части кинетической энергии в теплоту в результате внутреннего трения жидкости; иначе говоря, ε совпадает с количеством тепла, выделяющимся в результате действия вязкости за единицу времени в единице объема жидкости. При наличии еще и притока тепла, вызванного лучистой теплопроводностью, химическими реакциями, фазовыми превращениями или какими-то другими причинами, к правым частям (1.60), (1.62), (1.65) и (1.65′) должно быть добавлено еще слагаемое ρQ, где Q — дополнительный приток тепла на единицу массы за единицу времени. Уравнения (1.2), (1.4) и (1.65) или (1.65′) вместе с равенствами (1.63) и (1.66) дают нам общую систему пяти уравнений для определения пяти неизвестных функций $u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$; $p(x, t)$ и $\rho(x, t)$ или $T(x, t)$.

Уравнение типа (1.65′) может быть получено и для неоднородно нагретых «капельных жидкостей», т. е. сред, являющихся жидкими в обычном смысле этого слова. Здесь роль уравнения состояния будет играть закон теплового расширения жидкости

$$\rho - \rho_0 = -\beta\rho_0(T - T_0), \tag{1.67}$$

где ρ и ρ_0 — плотности при температурах T и соответственно T_0, а β — коэффициент теплового расширения. Можно показать, что при этом условии уравнение (1.62) примет следующий вид:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) = \beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) + \rho\varepsilon, \tag{1.68}$$

причем в выражении для ε в случае жидкости можно считать, что $\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0$, так что

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\nu\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2 \tag{1.69}$$

(см., например, Хоуарт (1953), т. II, гл. 14). Коэффициент β для обычных жидкостей очень мал (например, для воды $\beta \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$ при температуре 15° С); поэтому в уравнении (1.68) можно пренебречь членом, содержащим этот коэффициент. В результате получается уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \chi \Delta T + \frac{\varepsilon}{c_p}, \tag{1.70}$$

где $\chi = \frac{\varkappa}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности нашей среды, который здесь и всюду ниже предполагается принимающим постоянное значение (ср. переход от (1.3) к (1.4) на

стр. 36). Член $\frac{\varepsilon}{c_p}$ в уравнении (1.70) описывает общее прогревание среды, вызываемое внутренним трением жидкости; это прогревание в реальных условиях обычно играет совершенно незначительную роль и им вполне можно также пренебречь. При этом уравнение (1.70) еще более упростится и перейдет в обычное уравнение теплопроводности в движущейся среде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \chi \Delta T, \qquad (1.71)$$

которым мы и будем широко пользоваться в дальнейшем.

Весьма существенно, что уравнение (1.71) применимо не только к капельным жидкостям, но и к газам, если только скорость движения этих газов много меньше соответствующей скорости звука $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Можно показать, что при таких скоростях изменения давления будут играть в уравнении (1.65′) гораздо меньшую роль, чем изменения температуры, так что членами с p в правой части (1.65′) можно пренебречь; после этого мы немедленно приходим к уравнению (1.70) или, пренебрегая также и прогреванием среды из-за внутреннего трения, к уравнению (1.71). Заметим, что сопоставление (1.70) с (1.65) показывает, что в уравнении (1.65) в отличие от (1.65′) нельзя пренебречь членом $-p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$; локальные сжатия и расширения, вызываемые изменениями плотности при нагревании и охлаждении, в уравнении притока тепла должны учитываться даже и при малых скоростях движения. Однако в динамических уравнениях при движениях со скоростью, много меньшей скорости звука, поле скорости вполне можно считать «несжимаемым», если только изменения плотности, вызванные неоднородностью поля температуры, будут малыми по абсолютной величине, т. е. если имеющиеся в потоке абсолютные разности температур будут малы по сравнению со средней абсолютной температурой T_0. При этом условии и в выражении для ε можно также считать, что $\partial u_\alpha/\partial x_\alpha = 0$, т. е. ε снова можно считать представимым в виде (1.69). Так как к тому же в несжимаемой среде $Tds = de$, то в несжимаемой жидкости величина ε будет точно равна приросту внутренней энергии единицы массы за единицу времени, т. е. количеству кинетической энергии, диссипирующейся (переходящей в тепло) за единицу времени в единице массы жидкости (ср. Ландау и Лифшиц (1953), ч. I, § 16). Хотя при расчете поля температуры этой величиной обычно можно пренебречь, она тем не менее является очень важной физической характеристикой движения; для

краткости в дальнейшем мы ее будем называть просто *диссипацией энергии*.

Подчеркнем еще, что по своему виду уравнение (1.71) точно совпадает с уравнением диффузии

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} = \chi \Delta \vartheta, \qquad (1.72)$$

описывающим изменение концентрации $\vartheta(\boldsymbol{x}, t)$ некоторой пассивной (т. е. не оказывающей влияния на динамику потока) примеси в среде; только коэффициент χ в этом последнем случае надо интерпретировать не как коэффициент температуропроводности, а как молекулярный коэффициент диффузии. Так как уравнения (1.71) и (1.72) имеют один и тот же вид, то в дальнейшем, рассматривая уравнение (1.72), мы всегда будем иметь в виду, что величина ϑ здесь может быть как концентрацией некоторой пассивной примеси, так и температурой. Учитывая особую важность для приложений исследования поля температуры, мы для краткости часто будем даже называть ϑ просто температурой; однако следует запомнить, что фактически буквой ϑ всегда будет обозначаться концентрация некоторой пассивной примеси и что в тех случаях, когда температура у нас будет рассматриваться не как пассивная примесь, мы ее будем обозначать не буквой ϑ, а буквой T.

Предположение о пассивности примеси означает, что поле скорости $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ может быть определено независимо от исследования поля ϑ из обычной системы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости и затем подставлено в уравнение (1.72). Если под ϑ понимать температуру, то для этого разности температур в различных точках жидкости должны быть столь малыми, чтобы вызываемые ими изменения физических свойств жидкости не оказывали никакого влияния на движение, но в то же время достаточно большими для того, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь нагреванием, создаваемым выделением тепла в результате внутреннего трения. В таком случае температурные неоднородности будут просто перемещаться вместе с потоками жидкости, сглаживаясь попутно под влиянием молекулярной теплопроводности; возникающее при этом движение масс неоднородно нагретой жидкости называется обычно *вынужденной конвекцией*.

Важный класс потоков, в которых температура уже не может рассматриваться как пассивная примесь, представляют собой потоки неоднородно нагретой жидкости в поле тяжести, возникающие под влиянием архимедовых сил, вызывающих всплывание наверх более теплых и опускание вниз более холодных объемов жидкости. Такие движения температурно-неод-

нородной жидкости носят название *свободной конвекции*. Выясним, как будут выглядеть в этом случае уравнения движения. Будем считать, что скорости нашего движения настолько невелики, что изменениями плотности, вызываемыми изменениями давления (но не температуры!), можно пренебречь. Отсюда следует, что мы можем пользоваться обычными уравнениями несжимаемости (1.5) и Навье — Стокса (1.6), но только в (1.6) надо учесть внешнюю силу $\boldsymbol{X} = -g\boldsymbol{e}_3$ (где $\boldsymbol{e}_3$ — единичный вектор оси $Ox_3 = Oz$), и плотность ρ считать зависящей от температуры. Предположим теперь, что (абсолютная) температура $T(x_1\ x_2,\ x_3,\ t) = T(x,\ y,\ z,\ t)$ может быть представлена в виде $T = T_0 + T_1$, где T_0 — некоторое постоянное среднее значение, а T_1 — небольшие отклонения от T_0. В таком случае, очевидно, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 — постоянная плотность, отвечающая температуре T_0, а $\rho_1 = \rho - \rho_0$ определяется из уравнения (1.67):

$$\rho_1 = -\beta\rho_0 T_1 \tag{1.73}$$

(коэффициент теплового расширения $\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial T}\right)_p$ для газа, удовлетворяющего (1.68), очевидно, будет равен $\frac{1}{T_0}$). Заметим, что при $T = T_0 = \text{const}$ и $\rho = \rho_0 = \text{const}$ давление p_0 все равно не будет постоянным, а будет убывать с высотой вместе с убыванием веса столба жидкости, расположенного выше заданной точки:

$$p_0 = -\rho_0 g x_3 + \text{const}. \tag{1.74}$$

Полагая $\rho = \rho_0 + \rho_1$, с точностью до малых величин первого порядка будем иметь:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -g + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + g\beta T_1.$$

Отсюда видно, что третье уравнение Навье — Стокса в нашем случае будет записываться в виде

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + \nu\Delta u_3 - g\beta T_1 \tag{1.75}$$

(наличие в этом уравнении слагаемого, содержащего T_1, как раз и показывает, что температура здесь не может считаться пассивной примесью). Первое же и второе уравнения Навье — Стокса в нашем случае будут иметь обычный вид (1.6), причем ρ в них с самого начала можно заменить постоянным значением ρ_0, а под p понимать отклонение p_1 давления от среднего давления p_0, зависящего от $z = x_3$. Наконец, уравнение для температуры, как всегда, когда среду можно считать несжимаемой, будет иметь вид обычного уравнения теплопроводности в

движущейся жидкости

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial T_1}{\partial x_\alpha} = \chi\Delta T_1 \tag{1.76}$$

(членом с ε в уравнении для температуры мы, как обычно, пренебрегаем). Полученная приближенная система пяти уравнений (1.5), (1.6) с $i = 1, 2, 3$, (1.75) и (1.76) относительно пяти неизвестных функций $u_i(x,\ t)$, $i = 1, 2, 3$, $p_1(x,\ t)$ и $T_1(x,\ t)$ и описывает свободную конвекцию жидкости; поэтому она называется *системой уравнений свободной конвекции*.

1.6. Критерии подобия для температурно-неоднородной жидкости; температурный пограничный слой

Выше мы видели, что два геометрически подобных течения несжимаемой жидкости будут также и механически подобными, если только числа Рейнольдса этих двух течений совпадают между собой. В случае температурно-неоднородной или сжимаемой жидкости это утверждение уже оказывается неверным. Здесь для наличия механического и теплового подобия двух геометрически подобных течений требуется совпадение сразу нескольких безразмерных характеристик («критериев подобия»), к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

Начнем с простейшего случая таких течений неравномерно нагретой жидкости, при которых температура может рассматриваться как пассивная примесь. В этом случае течение будет описываться обычными уравнениями (1.5) — (1.6) гидродинамики несжимаемой жидкости (с постоянным ρ), к которым только надо будет добавить еще уравнение теплопроводности (1.72), описывающее изменение поля температуры. Будем для простоты рассматривать только стационарные движения, т. е. считать, что все поля u_i, p и ϑ не зависят от времени. В наши уравнения входят два постоянных коэффициента ν и χ (оба имеющие одинаковую размерность L^2T^{-1}, где L и T символизируют размерности длины и времени). Кроме того, краевые условия задачи при сохранении геометрического подобия будут характеризоваться некоторой длиной L, характерной скоростью U, а также еще и характерной разностью температур $\vartheta_1 - \vartheta_0$ (например, типичной разностью температур между твердыми границами и потоком). Поскольку, однако, температура у нас рассматривается как пассивная примесь, не оказывающая влияния на динамику, то единица температуры может быть выбрана произвольным образом; поэтому мы должны считать, что

$$[\vartheta_1 - \vartheta_0] = \Theta,$$

где Θ — новая независимая от L и T размерность (например, «градусы Цельсия»). Но в таком случае из ν, χ, L, U и $\vartheta_1 - \vartheta_0$ можно составить всего две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых можно принять, например, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$ и так называемое *число Прандтля*

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}. \tag{1.77}$$

В случае, когда ϑ — это концентрация пассивной примеси, а не температура, отношение ν/χ иногда называется также *числом Шмидта* и обозначается символом Sc.

Иногда вместо Pr удобно использовать *число Пекле*

$$\mathrm{Pe} = \frac{UL}{\chi} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}, \tag{1.78}$$

определяющее порядок отношения адвективных членов $u_\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}$ и члена $\chi \Delta \vartheta$ в уравнении (1.72) и играющее при исследовании поля температуры роль, аналогичную роли числа Рейнольдса в динамических задачах. Однако число Прандтля имеет перед числом Пекле то преимущество, что оно зависит лишь от природы движущейся жидкости (т. е. является характеристикой среды), но не от особенностей движения. Для воздуха (и других двухатомных газов) $\mathrm{Pr} \approx 0{,}7$ и почти не зависит от температуры; вообще для большинства газов Pr имеет порядок единицы. Для жидкостей (за исключением жидких металлов) число Прандтля обычно превышает единицу и заметно убывает с ростом температуры; например, для воды (при атмосферном давлении) $\mathrm{Pr} \approx 7$ при температуре 20° С и $\mathrm{Pr} \approx 2$ при 80° С. Для очень вязких технических масел число Pr оказывается, естественно, много большим, чем для воды, достигая значений порядка нескольких сотен или даже тысяч. Наоборот, для жидких металлов, отличающихся очень большой теплопроводностью, число Прандтля принимает значения, много меньшие единицы; например, для ртути $\mathrm{Pr} \approx 0{,}023$ при 20° С, а для других расплавленных металлов это число часто оказывается даже еще меньшим (порядка 10^{-3}). В случае, когда χ — это коэффициент диффузии пассивной примеси, число Прандтля (или, что то же самое, число Шмидта) также имеет существенно разный порядок для газов и для жидкостей: в газообразных средах коэффициенты диффузии и вязкости имеют одинаковый порядок, так что $\nu/\chi \sim 1$, в то время как для жидкостей типа воды $\nu/\chi \sim 10^3$, а для очень вязких жидкостей это отношение оказывается еще много большим и может достигать значения порядка 10^6 и более того.

Для подобия полей температуры в двух геометрически подобных течениях у этих течений должны совпадать и числа Рейнольдса Re и числа Прандтля Pr (или Re и Pe). В общем же случае только геометрически подобных течений поля температуры будут определяться формулой

$$\vartheta(x) - \vartheta_0 = (\vartheta_1 - \vartheta_0)\varphi\left(\frac{x}{L}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right), \tag{1.79}$$

отличающейся от аналогичной формулы (1.31), относящейся к полю скорости, тем, что функция φ здесь зависит уже от двух безразмерных параметров.

Точно так же, если мы обозначим через q плотность потока тепла через поверхность тела, погруженного в жидкость (т. е. положим $q = -\varkappa \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$, где n — внешняя нормаль к поверхности тела), то

$$q = \frac{\varkappa(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{L}\psi\left(\frac{x}{L}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right).$$

Иначе говоря, в каждой точке границы тела безразмерное отношение $\mathrm{Nu} = \frac{qL}{\varkappa(\vartheta_1 - \vartheta_0)}$ будет зависеть лишь от чисел Рейнольдса и Прандтля. Если же мы заменим здесь поток тепла в точке средним потоком тепла $q_{\mathrm{ср}}$ через единицу площади поверхности тела, характеризующим полный теплообмен тела и жидкости, то в формуле

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_{\mathrm{ср}} L}{\varkappa(\vartheta_1 - \vartheta_0)} = \psi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \tag{1.80}$$

функция ψ будет уже универсальной функцией двух переменных, определяющей зависимость теплообмена от физических свойств жидкости и масштабов длины, скорости и перепада температуры для всей совокупности геометрически подобных потоков. Величина Nu в теплотехнике называется *числом Нуссельта*. Можно также вместо него для характеристики теплообмена использовать так называемый *коэффициент теплопередачи* (иначе — *число Стэнтона*)

$$c_h = \frac{q}{c_p \rho U(\vartheta_1 - \vartheta_0)} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}. \tag{1.80'}$$

Перейдем теперь к случаю свободной конвекции. Здесь дифференциальные уравнения задачи содержат три размерных коэффициента ν, χ и $g\beta$ (где для идеального газа $\beta = \frac{1}{T_0}$), граничные же условия теперь будут характеризоваться типичной длиной L и типичной разностью температур $T_m - T_0$ (заметим

что никакой типичной скорости в этом случае не будет). Из этих величин, очевидно, можно составить две безразмерные комбинации. В качестве таких комбинаций можно принять, например, число Прандтля Pr и так называемое *число Грассхофа*

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3 (T_m - T_0)}{\nu^2}. \tag{1.81}$$

Можно также вместо числа Грассхофа использовать родственное ему *число Рэлея*

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta L^3 (T_m - T_0)}{\nu\chi} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}. \tag{1.81'}$$

Таким образом, в случае свободной конвекции в геометрически подобных потоках поля скорости и температуры будут подобны друг другу только в случае совпадения критериев подобия Pr и Gr (или Pr и Ra); вообще же говоря, из геометрического подобия здесь будут вытекать лишь соотношения вида

$$u_i = \frac{\nu}{L} f_i\left(\frac{x}{L},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}\right),\quad T_1 = (T_m - T_0)\,\varphi\left(\frac{x}{L},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}\right),$$
$$q_{\mathrm{ср}} = \frac{\varkappa (T_m - T_0)}{L}\,\psi(\mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}), \tag{1.82}$$

где f_i, $i = 1, 2, 3$, φ и ψ — новые универсальные функции. В общем случае течений сжимаемой жидкости, описываемых полной системой уравнений (1.2), (1.4), (1.63), (1.65) и (1.66), число критериев подобия оказывается еще значительно бо́льшим; на этом, однако, мы не будем задерживаться.

Для течений с очень большим числом $\mathrm{Pe} = \frac{UL}{\chi}$ (т. е. при числе Прандтля, меньшем или порядка единицы, для течений с очень большим Re) член $\chi\Delta\vartheta$ в уравнении теплопроводности будет гораздо меньше нелинейных членов $u_\alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}$; поэтому в первом приближении влиянием молекулярной теплопроводности здесь можно пренебречь. Однако, как и в случае учета вязкости в уравнениях движения, пренебрежение это будет законным лишь вдали от погруженных в поток твердых тел. Вблизи же поверхности таких тел может образоваться тонкий *температурный пограничный слой*, в котором температура быстро изменяется от температуры тела ϑ_1 до температуры, близкой к температуре ϑ_0, которая наблюдалась бы в свободном потоке, если бы никакого твердого тела не было. В этом слое влияние теплопроводности будет уже иметь тот же порядок, что и влияние адвекции температуры, описываемой членами $u_\alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}$. Отсюда можно вывести (аналогично выводу соотношения (1.32)), что толщина δ_1 температурного пограничного слоя будет иметь порядок $\frac{L}{\sqrt{\mathrm{Pe}}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}}$. Иначе говоря, она также будет обратно пропорциональна $\sqrt{\mathrm{Re}}$ и при числах Прандтля порядка единицы будет совпадать

по порядку с δ. Учитывая еще, что $q = -\varkappa \frac{\partial\vartheta}{\partial n} \sim \varkappa \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\delta_1}$, легко найдем, что при больших числах Рейнольдса

$$\mathrm{Nu} = \frac{qL}{\varkappa(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \sim \sqrt{\mathrm{Re}}.$$

Внутри температурного пограничного слоя уравнение теплопроводности может быть упрощено аналогично тому, как упрощаются уравнения движения внутри обычного пограничного слоя. В частности, при стационарном обтекании потоком жидкости данной температуры ϑ_0 плоской пластинки, поддерживаемой при некоторой другой температуре ϑ_1, уравнение теплопроводности в пределах пограничного слоя будет записываться в виде

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \chi\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}, \tag{1.83}$$

аналогичном (1.41). Что же касается граничных условий, то они, очевидно, в этом случае будут иметь вид $\vartheta = \vartheta_1$ при $z = 0$ и $\vartheta \to \vartheta_0$ при $z \to \infty$. Полагая здесь $\vartheta(x, z) = \vartheta_1 - (\vartheta_1 - \vartheta_0)\,\Theta\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\,\frac{z}{\sqrt{x}}\right)$ и подставляя эту формулу

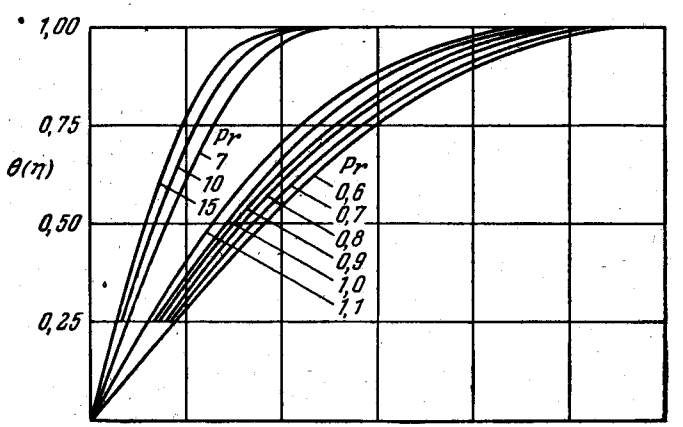


Рис. 6. Профиль температуры в пограничном слое на плоской пластинке при различных числах Прандтля.

вместе с формулами (1.46) и (1.47), определяющими поле скорости в пределах пограничного слоя, в уравнение (1.83), мы немедленно получаем

$$\Theta'' + \frac{\mathrm{Pr}}{2}\varphi\Theta' = 0;\ \Theta(0) = 0,\ \Theta(\infty) = 1, \tag{1.84}$$

где φ — решение уравнения (1.48). Таким образом, для $\Theta(\eta)$ получается простое линейное уравнение, решение которого в явном виде впервые было выписано Польгаузеном в 1921 г. (см. Гольдштейн (1938), т. 2, § 268; Хоуарт

(1953), т. 2, гл. 14, § 13; Шлихтинг (1951), гл. 14, § 7). В частности, при $\mathrm{Pr}=1$ сопоставление уравнений (1.84) и (1.48) показывает, что решение $\Theta(\eta)$ имеет вид $\Theta(\eta)=\varphi'(\eta)$. Таким образом, в этом случае профиль температуры оказывается в точности подобным профилю скорости. При других же значениях Pr функция $\Theta(\eta)$ легко может быть найдена численно по известной из рис. 2 функции $\varphi'(\eta)$ (см. рис. 6).

1.7. Малые колебания сжимаемой жидкости

Течения сжимаемой жидкости, описываемые общей системой уравнений (1.2), (1.4), (1.63), (1.65) и (1.66), обычно имеют очень сложный характер, и их теоретическое изучение наталкивается на значительные трудности. Мы здесь ограничимся лишь простейшим случаем малых колебаний относительно состояния покоя (или движения с постоянной скоростью), при исследовании которого может быть использован метод линеаризации уравнений. Как было показано Карьером и Карлсоном (1946), Ягломом (1948) и Коважным (1953), всевозможные движения среды при этом распадаются на колебания трех типов, отчетливо различающихся по своему характеру. Это распадение будет играть важную роль при рассмотрении изотропной турбулентности в сжимаемом газе и процессов распространения волн в турбулентной среде во второй части настоящей книги.

Итак, пусть мы имеем неподвижную массу идеального газа постоянной плотности ρ_0 и при постоянном давлении p_0 (случай газа, движущегося с постоянной скоростью $\boldsymbol{u}$, может быть, очевидно, сведен к случаю неподвижного газа при помощи перехода к новой инерциальной системе координат). Предположим теперь, что в начальный момент времени в газе возникли малые возмущения, характеризуемые полями пульсаций гидродинамических величин $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho'(\boldsymbol{x}, t)=\rho(\boldsymbol{x}, t)-\rho_0$ и $p'(\boldsymbol{x}, t)=p(\boldsymbol{x}, t)-p_0$, где $\frac{|\rho'|}{\rho_0}\ll 1$, $\frac{|p'|}{p_0}\ll 1$ и $\frac{|u|}{a_0}\ll 1$ (здесь $a_0=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$ — скорость звука в невозмущенной среде, $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$). В таком случае изменение во времени полей $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho'(\boldsymbol{x}, t)$ и $p'(\boldsymbol{x}, t)$ в первом приближении можно будет определить из системы уравнений (1.2), (1.4), (1.63), (1.65) и (1.66), линеаризованной относительно компонент скорости u_i и относительно отклонений давления, плотности и температуры от соответствующих невозмущенных значений p_0, ρ_0 и $T_0=\frac{p_0}{R\rho_0}$. При этом уравнение состояния (1.63) позволяет с самого начала исключить температуру из числа неизвестных и получить замкнутую систему уравнений относительно пяти неизвестных, в качестве которых можно принять, например, три компоненты скорости и какие-либо две однозначные функции давления и плотности. Следуя работам Коважного (1953) и Чжу и Коважного (1958), примем в качестве этих двух функций безразмерное давление $P=\frac{p}{\gamma p_0}$ и поделенную на c_v энтропию $S=\frac{s}{c_v}=\ln\frac{p^{1/\gamma}}{\rho}+\mathrm{const}$. Тогда с точностью до малых высшего порядка

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=(P-P_0)-(S-S_0),\qquad \frac{T-T_0}{T_0}=(\gamma-1)(P-P_0)+(S-S_0).$$

Линеаризованная система уравнений гидродинамики в переменных u_i, P и S будет иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0, \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_0^2\frac{\partial P}{\partial x_i}-\nu\Delta u_i-\left(\frac{\nu}{3}+\eta\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i\,\partial x_\alpha}=0,\quad \eta=\frac{\zeta}{\rho_0},\quad i=1,2,3, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\chi\Delta S-(\gamma-1)\chi\Delta P=0. \tag{1.87}$$

Преобразуем уравнения (1.85) и (1.86), введя вместо компонент u_i поля скорости в качестве неизвестных компоненты вихря $\omega_k=\varepsilon_{k\alpha\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$ и дивергенцию $D=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$. При этом три уравнения (1.86) сведутся к равенствам

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial t}-\nu\Delta\omega_k=0,\qquad k=1,2,3, \tag{1.88}$$

и

$$\frac{\partial D}{\partial t}-\nu_1\Delta D+a_0^2\Delta P=0,\quad \nu_1=\frac{4\nu}{3}+\eta, \tag{1.89}$$

а (1.85) в силу (1.87) перепишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t}-(\gamma-1)\chi\Delta P-\chi\Delta S+D=0. \tag{1.90}$$

Отметим прежде всего, что компоненты вихря ω_k входят только в уравнения (1.88), совпадающие с линеаризованными уравнениями для поля вихря в несжимаемой среде. Напомним в этой связи, что в случае несжимаемой жидкости по полю вихря ω_k и соответствующим граничным условиям всегда можно однозначно восстановить и поле скорости u_i; в сжимаемой же среде поле скорости можно представить в виде суммы несжимаемой (соленоидальной) и безвихревой (потенциальной) компонент, последняя из которых уже не зависит от поля вихря. Таким образом, в случае движений, представляющих собой лишь слабое возмущение состояния покоя, система уравнений гидродинамики в первом приближении распадается на замкнутую систему уравнений относительно компонент поля вихря ω_k, описывающую несжимаемое течение, и на систему уравнений относительно переменных D, P и S, описывающую безвихревой сжимаемый поток. При этом пульсации давления и энтропии в том же приближении будут связаны лишь со сжимаемым безвихревым потоком, т. е. в несжимаемой (вихревой) компоненте течения они будут отсутствовать. В следующем приближении теории возмущений эти две компоненты будут уже взаимодействовать друг с другом, создавая дополнительные изменения давления и энтропии (на этом мы вкратце остановимся в самом конце настоящего пункта).

Чтобы подробнее разобраться в характере движений, описываемых линеаризованной системой (1.87)—(1.90) и, в частности, показать, что уравнения относительно D, P и S на самом деле описывают два разных типа колебаний, воспользуемся обычным методом Фурье. С этой целью предположим, что все поля $\omega_j(\boldsymbol{x}, t)$, $D(\boldsymbol{x}, t)$, $P(\boldsymbol{x}, t)$ и $S(\boldsymbol{x}, t)$ являются периодическими функциями пространственных координат с заданным волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и, кроме того, заменим обычное время t безразмерным временем $\tau=a_0kt$, где $k=|\boldsymbol{k}|$,

а дивергенцию — безразмерной дивергенцией $\frac{D}{a_0 k}$:

$$\omega_j(x, t) = \omega_j(\tau)\, e^{ikx}, \qquad \frac{D(x, t)}{a_0 k} = D(\tau)\, e^{ikx},$$

$$P(x, t) = P(\tau)\, e^{ikx}, \qquad S(x, t) = S(\tau)\, e^{ikx}.$$

Тогда уравнения (1.88) примут вид

$$\frac{d\omega_j(\tau)}{d\tau} = -\frac{\nu k}{a_0}\omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.91}$$

а остальные уравнения преобразуются в следующую систему обыкновенных линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dD(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\nu_1 k}{a_0} D + P,\\
\frac{dP(\tau)}{d\tau} &= -D - (\gamma - 1)\frac{\chi k}{a_0} P - \frac{\chi k}{a_0} S,\\
\frac{dS(\tau)}{d\tau} &= -(\gamma - 1)\frac{\chi k}{a_0} P - \frac{\chi k}{a_0} S.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Отсюда следует, что амплитуды $\omega_j(t)$ компонент поля вихря будут затухать во времени по закону

$$\omega_j(t) = \omega_j(0)\, e^{-\nu k^2 t}, \tag{1.93}$$

а амплитуды $D(t)$, $P(t)$ и $S(t)$ дивергенции скорости и полей давления и энтропии будут представляться в виде

$$A_1 e^{\lambda_1 a_0 k t} + A_2 e^{\lambda_2 a_0 k t} + A_3 e^{\lambda_3 a_0 k t},$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 — три корня характеристического уравнения системы (1.92):

$$\lambda^3 + \frac{(\nu_1 + \gamma\chi)\, k}{a_0}\lambda^2 + \left(1 + \frac{\gamma\nu_1\chi k^2}{a_0^2}\right)\lambda + \frac{\chi k}{a_0} = 0. \tag{1.94}$$

Дальнейшее упрощение полученных результатов может быть достигнуто, если мы заметим, что формулы (1.91)—(1.94) содержат безразмерные постоянные, имеющие очень разный порядок величины. В самом деле, все коэффициенты системы (1.92) и уравнения (1.94) могут быть выражены через следующие три безразмерные величины:

$$\delta_1 = \frac{\nu_1 k}{a_0}, \qquad \pi_1 = \frac{\nu_1}{\chi}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}; \tag{1.95}$$

в равенствах же (1.91) фигурирует безразмерная постоянная $\delta = \frac{\nu k}{a_0}$, отличающаяся от δ_1 лишь заменой коэффициента вязкости $\nu_1 = \frac{4}{3}\nu + \eta = \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0}$, определяющего внутреннее трение в потенциальном потоке, на обычную кинематическую вязкость ν. Но π_1 является аналогом обычного числа Прандтля $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ и имеет тот же порядок величины, так что в газообразной среде $\pi_1 \sim 1$; точно так же и $\gamma \sim 1$ (для воздуха $\gamma \approx 1{,}4$).

В то же время величина $\delta = \frac{\nu k}{a_0}$ имеет тот же порядок, что и отношение $\frac{l}{\Lambda}$ длины свободного пробега газа l к длине волны возмущения $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$ (поскольку $\nu \sim vl$, где v — средняя скорость теплового движения молекул, $a \sim v$, а $k \sim 1/\Lambda$). Поэтому во всех случаях, когда движения газа могут быть описаны с помощью обычных гидродинамических уравнений, $\delta \ll 1$; в частности, для воздуха при нормальных условиях $\frac{\nu}{a_0} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ *см*, т. е. даже если $\Lambda \approx 1$ *мм*, то $\delta < 10^{-4}$. Тот же порядок величины имеет $\delta_1 = \frac{\nu_1}{\nu}\delta$; поэтому и $\delta_1 \ll 1$.

Пренебрегая теперь в основных уравнениях (1.91)—(1.92) членами, имеющими порядок малости δ (или δ_1), мы придем к упрощенной системе

$$\frac{d\omega_j(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{dS(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{dD(t)}{dt} = a_0^2 k^2 P, \qquad \frac{dP(t)}{dt} = -D. \tag{1.96}$$

Согласно первым двум уравнениям (1.96), поле вихря $\omega_j(x, t)$ и поле энтропии $S(x, t)$ в рассматриваемом приближении будут неподвижны в пространстве (или в случае, когда основное состояние — это состояние движения с постоянной скоростью u, будут переноситься без всякого изменения этим движением) — малость числа δ как раз и означает, что влияние вязкости (и теплопроводности) на малые возмущения будет гораздо меньше влияния инерционного переноса. Последние же два уравнения (1.96) показывают, что

$$\frac{d^2 D(t)}{dt^2} + a_0^2 k^2 D(t) = 0, \qquad \frac{d^2 P(t)}{dt^2} + a_0^2 k^2 P(t) = 0,$$

или, переходя снова от одной компоненты Фурье к полным полям $D(x, t)$ и $P(x, t)$, что

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta D, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta P. \tag{1.97}$$

Таким образом, для поля давления $P(x, t)$ и поля дивергенции скорости $D(x, t)$ здесь получаются одинаковые волновые уравнения, описывающие совокупность волн, распространяющихся со скоростью звука a_0.

Мы видим, что в нулевом приближении (по параметру малости δ) поля малых возмущений гидродинамических элементов потока распадаются уже на три не взаимодействующих между собой компоненты. Этими компонентами являются *вихревая несжимаемая* компонента, описываемая полем вихря $\omega_j(x)$, не меняющимся во времени (или переносящимся без изменений невозмущенной скоростью u), *энтропийная* компонента, описываемая также неподвижным (или перемещающимся со скоростью u) полем энтропии $S(x)$, созданным первоначальными неоднородностями поля температуры, и *потенциальная* (или *акустическая*) компонента, связанная с пульсациями потенциальной части поля скорости и пульсациями давления и представляющая собой совокупность волн, распространяющихся с невозмущенной скоростью звука a_0.

Если мы учтем еще и эффекты порядка малости δ, то прежде всего убедимся, что поле скорости вихревой компоненты будет медленно затухать под действием вязкости в соответствии с формулой (1.93). Чтобы описать с точностью до членов порядка δ также и энтропийную и акустическую компоненты, удобно прежде всего переписать уравнение (1.94) в виде

$$\lambda^3 + \left(1 + \frac{\gamma}{\pi_1}\right)\delta_1\lambda^2 + \left(1 + \frac{\gamma}{\pi_1}\delta_1^2\right)\lambda + \frac{\delta_1}{\pi_1} = 0, \tag{1.94'}$$

содержащем лишь величины (1.95). После этого три корня уравнения (1.94′) легко определить с точностью до членов порядка δ_1 включительно с помощью обычного метода степенных рядов. В результате получаются формулы

$$\lambda_1 = i - \frac{\pi_1 + \gamma - 1}{2\pi_1}\delta_1,$$
$$\lambda_2 = -i - \frac{\pi_1 + \gamma - 1}{2\pi_1}\delta_1, \qquad (1.98)$$
$$\lambda_3 = -\frac{1}{\pi_1}\delta_1.$$

Эти формулы показывают, что если ограничиться членами порядка не выше δ_1 и исключить из рассмотрения вихревую компоненту, то в сжимаемой среде будут существовать три различных волны с одинаковым волновым вектором $\boldsymbol{k}$. Две волны из этих трех будут затухающими с одинаковым декрементом затухания $\frac{\pi_1+\gamma-1}{2\pi_1}\delta_1 a_0 k = \frac{\nu_1+(\gamma-1)\chi}{2}k^2$ и будут распространяться с невозмущенной скоростью звука a_0 в направлениях векторов $\boldsymbol{k}$ и $-\boldsymbol{k}$, а третья из них будет неподвижной относительно невозмущенного потока с декрементом затухания $\frac{\chi k}{a_0} a_0 k = \chi k^2$ [1]). Предполагая далее, что зависимость функций $D(\tau)$, $P(\tau)$ и $S(\tau)$ от τ будет определяться множителем $e^{\lambda_j \tau}$, $j = 1, 2, 3$, и подставляя соответствующие частные решения в систему (1.92), легко убедиться, что общее решение этой системы с точностью до членов порядка δ_1 включительно можно представить в виде суммы следующих двух решений:

$$S(\tau) = S_0 e^{\lambda_3 \tau}, \qquad P(\tau) = 0, \qquad D(\tau) = -\frac{\delta_1}{\pi_1} S_0 e^{\lambda_3 \tau} \qquad (1.99)$$

и

$$D(\tau) = D_0^{(1)} e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)} e^{\lambda_2 \tau}, \qquad S(\tau) = -\frac{\gamma-1}{\pi_1}\delta_1 \left[D_0^{(1)} e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)} e^{\lambda_2 \tau}\right],$$
$$P(\tau) = D_0^{(1)}\left[i + \frac{\pi_1 - \gamma + 1}{2\pi_1}\delta_1\right] e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)}\left[-i + \frac{\pi_1 - \gamma + 1}{2\pi_1}\delta_1\right] e^{\lambda_2 \tau}. \qquad (1.100)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом приближении энтропийная компонента нашего возмущения будет соответствовать произвольному начальному распределению энтропии (или температуры), не перемещающемуся в пространстве, но медленно выравнивающемуся под действием теплопроводности. С этой компонентой будет связано также и очень слабое (порядка δ_1) распределение по объему газа потенциальной компоненты скорости и величины $D = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$, создаваемое тепловым расширением и сжатием элементарных объемов температурно-неоднородной среды. Акустическая же компонента будет состоять из волн давления и величины $D(\boldsymbol{x}, t)$ вида $D_0 e^{i(\boldsymbol{kx} \pm a_0 k t) - \frac{\nu_1 + (\gamma-1)\chi}{2} k^2 t}$, распространяющихся со скоростью a_0, слегка затухающих под влиянием вязкости и теплопроводности и создающих весьма слабый (порядка δ_1) перенос энтропии.

[1]) Нетрудно проверить, что учет еще и членов порядка δ_1^2 изменит лишь мнимые части корней λ_1 и λ_2, т. е. приведет к появлению слабой зависимости скорости распространения акустических волн от коэффициентов вязкости и температуропроводности (см. Яглом (1948)).

Описанное разбиение произвольных возмущений гидродинамических полей на вихревую, энтропийную и акустическую компоненты легко может быть прослежено во всех порядках малости по δ и δ_1; практически, однако, во всех случаях достаточно ограничиться членами, которые были выписаны выше. Несколько большее значение представляет вопрос о влиянии на отдельные компоненты возмущений нелинейных членов уравнений гидродинамики, к которому мы сейчас и перейдем. Чтобы учесть это влияние, надо перейти к следующему приближению теории возмущений, состоящему в том, что в уравнениях (1.87)—(1.90) сохраняются также и билинейные по гидродинамическим полям члены, в которых эти поля определяются по формулам первого приближения, т. е. считаются совпадающими с выписанными выше решениями линеаризованных уравнений. Таким образом, уравнения (1.87)—(1.90) в следующем приближении будут содержать еще небольшие добавочные слагаемые известного функционального вида, которые естественно перенести в правые части этих уравнений и рассматривать как объемные «источники» соответствующих гидродинамических полей. При этом решения уравнений будут отличаться от рассмотренных выше решений однородных уравнений (1.87)—(1.90) дополнительными членами, порожденными соответствующими источниками, т. е. билинейными комбинациями или «взаимодействиями» отдельных членов решений линеаризованных уравнений друг с другом. Представив снова решения линеаризованных уравнений в виде суммы вихревой, энтропийной и акустической компонент, мы получим шесть различных парных билинейных (и квадратичных) комбинаций этих трех компонент, т. е. шесть различных «взаимодействий», каждое из которых, в свою очередь, может создавать определенные добавки к решениям, описывающим любую из трех компонент, т. е. «порождать» эту компоненту.

Существенно, однако, что многие из возникающих таким образом 18 эффектов второго порядка будут выражаться билинейными относительно возмущений членами, содержащими еще множитель δ или δ_1, и поэтому будут играть очень малую роль. Так, например, из того, что с точностью до членов порядка δ_1 энтропийная компонента содержит только пульсации энтропии, можно вывести, что в нулевом по δ приближении эта компонента вовсе не будет взаимодействовать сама с собой, а ее взаимодействие с вихревой компонентой будет вносить определенный вклад (связанный, очевидно, с конвективными членами $u_\alpha \frac{\partial s}{\partial x_\alpha}$ уравнения (1.62)) только в энтропийную же компоненту поля возмущений. Полный анализ с этой точки зрения всех возможных «взаимодействий» может быть найден в работе Чжу и Козажного (1958). Основные результаты этого анализа иллюстрируются таблицей на стр. 76, в которой указан порядок по δ_1 всех упомянутых 18 эффектов второго порядка, и для эффектов нулевого порядка кратко объяснен их физический смысл. Помимо того Чжу и Коважный для всех эффектов нулевого порядка по δ_1 привели явные выражения соответствующих объемных источников, которые следует добавить к правым частям линеаризованных уравнений. Мы здесь, однако, не будем детально изучать все эффекты нулевого порядка, значительная часть которых, как видно из таблицы, сводится к простому переносу гидродинамических неоднородностей полем скорости из одного элемента объема жидкости в другой. Более подробно мы остановимся лишь на наиболее важном взаимодействии вихревой компоненты с самой собой (напомним, что в обычной слабо сжимаемой среде вихревая компонента, как правило, заметно превосходит другие по интенсивности).

Так как вихревая компонента связана лишь с возмущением поля скорости, то ее взаимодействие с собой будет вызываться только билинейными по скоростям членами уравнений гидродинамики. В уравнении баланса энтропии (т. е. притока тепла) такие билинейные члены содержатся (в слагаемом $\rho\varepsilon$) лишь вместе с коэффициентом вязкости, откуда ясно, что эффект

Взаимодействие	Порождение		
	акустической компоненты	вихревой компоненты	энтропийной компоненты
акустической компоненты с акустической	$O(1)$ «рассеяние звука на звуке» и «нелинейное искажение акустических волн»	$O(\delta_1)$	$O(\delta_1)$
вихревой компоненты с вихревой	$O(1)$ «порождение звука вихревым движением»	$O(1)$ «растяжение вихревых трубок», или иначе «инерционный перенос завихренности вихревым полем скорости»	$O(\delta_1)$
энтропийной компоненты с энтропийной	$O(\delta_1)$	$O(\delta_1^2)$	$O(\delta_1)$
акустической компоненты с вихревой	$O(1)$ «рассеяние звука на вихревых неоднородностях поля скорости»	$O(1)$ «перенос завихренности акустическими волнами»	$O(\delta_1)$
акустической компоненты с энтропийной	$O(1)$ «рассеяние звука на неоднородностях поля температуры»	$O(1)$ «порождение завихренности взаимодействием градиентов энтропии и давления» (эффект Бьеркнеса)	$O(1)$ «перенос тепла акустическими волнами»
вихревой компоненты с энтропийной	$O(\delta_1)$	$O(\delta_1)$	$O(1)$ «перенос тепла вихревым движением»

порождения энтропийной компоненты указанным здесь взаимодействием будет иметь порядок не выше δ. Заметно более существенную роль будут играть билинейные по скоростям члены $u_\alpha \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha}$ уравнений движения; именно они и будут определять все «значимые» эффекты второго порядка, связанные со взаимодействием вихревой компоненты с самой собой.

Сохранив в уравнениях движения члены $u_\alpha \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha}$ и перейдя затем к уравнению для вихря, мы придем к уравнению (1.7)

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \nu \Delta \omega_k = -u_\alpha \frac{\partial \omega_k}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha},$$

отличающемуся от (1.88) правой частью, описывающей процесс порождения завихренности за счет растяжения вихревых трубок. Считая в этой правой части поле u_α несжимаемым и удовлетворяющим (1.88), мы получим первый значимый «эффект второго порядка» — порождение вихревой компоненты поля скорости за счет взаимодействия этой компоненты с самой собой. Что же касается до влияния этого же взаимодействия на акустическую компоненту, то в нулевом приближении по δ его можно определить, опустив в уравнениях гидродинамики все члены, содержащие коэффициенты вязкости и температуропроводности, и все нелинейные члены, кроме членов $u_\alpha \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha}$ в уравнениях движения. Но в таком случае легко видеть, что вместо последнего уравнения (1.97) мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta P = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}. \qquad (1.101)$$

Правая часть здесь, очевидно, описывает дополнительные пульсации давления, возникающие из пульсаций поля скорости в соответствии с уравнением (1.9), имеющим вид $\Delta p = -\rho \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$. Подставляя в правую часть (1.101) в качестве $u_l(x, t)$ несжимаемое поле скорости, удовлетворяющее «уравнению вихря» (1.88) или (если не предполагать, что пульсации скорости являются малыми) уравнению (1.7), мы можем найти звуковые колебания, создаваемые взаимодействием несжимаемого поля скорости с самим собой; правую часть (1.101) в этом случае, очевидно, можно также записать как $-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$ или как $-\frac{\partial^2 (u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$. Порождение звука вихревыми гидродинамическими потоками, описываемое уравнением (1.101), изучалось в работах Лайтхилла (1952, 1954); оно как раз и представляет второй «значимый эффект второго порядка», связанный с взаимодействием вихревой компоненты поля скорости с самой собой.

§ 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ [1])

2.1. Понятие о турбулентности; эмпирические данные о возникновении турбулентности в трубах и в пограничном слое

В предыдущем параграфе были приведены уравнения, описывающие движения жидкости, и указаны некоторые их простейшие решения. При этом мы отмечали, что полученные решения далеко не всегда хорошо соответствуют каким-либо реально

[1]) В основу настоящего параграфа положена обзорная статья Монина и Яглома (1962).

наблюдаемым течениям. Так, например, на стр. 44 было сказано, что течение в трубе описывается формулами (1.23)—(1.26) лишь в случае достаточно большой вязкости или достаточно малой средней скорости, а на стр. 56 мы подчеркнули, что найденное Блазиусом решение уравнений пограничного слоя на плоской пластинке только при не слишком большом значении Ux/ν хорошо соответствует эмпирическим данным. Оказывается, что так же обстоит дело и в громадном большинстве других случаев. Как правило, найденные теоретически решения уравнений гидродинамики, точные или приближенные, лишь при некоторых специальных условиях удовлетворительно описывают реально наблюдаемые потоки. Если же эти условия не соблюдаются, то характер течения резко меняется, и вместо закономерного плавного изменения значений гидродинамических полей, соответствующего теоретическим решениям, наблюдаются беспорядочные пульсации всех гидродинамических полей во времени и пространстве, имеющие сложный характер — типа тех, которые изображены на рис. 1. Таким образом, течения жидкости распадаются на два резко различающихся класса: плавные и спокойные течения, меняющиеся во времени лишь в связи с изменением действующих сил или внешних условий, называются *ламинарными*, а течения, сопровождающиеся беспорядочными пульсациями всех гидродинамических полей как во времени, так и в пространстве, — *турбулентными*.

Различие между ламинарным и турбулентным режимами течения жидкостей проявляется в ряде явлений, имеющих большое значение для многих технических задач. Например, воздействие потока на твердые стенки (т. е. трение о стенки) при турбулентном режиме оказывается значительно большим, чем при ламинарном режиме (так как передача импульса в турбулентной среде происходит много интенсивнее). Наличие беспорядочных пульсаций поля скорости приводит также к резкому возрастанию перемешивания жидкости; в этой связи крайне интенсивное перемешивание часто даже рассматривается как наиболее характерная черта турбулентного движения. С возрастанием перемешивания резко увеличивается также и теплопроводность жидкости и т. д. По всем этим причинам установление условий перехода ламинарного режима течения в турбулентный режим является весьма актуальной задачей. Кроме того, выяснение механизма возникновения турбулентности должно помочь пониманию ее природы и тем самым способствовать изучению важных для практики закономерностей турбулентных потоков.

Подробный обзор экспериментальных данных, касающихся перехода ламинарного течения в турбулентное, содержится в

статьях Шлихтинга (1959) и Драйдена (1959). Теории этого вопроса посвящены многие обзорные статьи (одна из наиболее полных среди которых принадлежит Дж. Стюарту (1963)) и специальные монографии Линя (1955) и Чандрасекара (1961). В нашей монографии мы ограничимся рассмотрением лишь важнейших (и наиболее простых) течений и основное внимание уделим принципиальной стороне дела. За деталями математических расчетов и подробным описанием экспериментов, а также за сведениями, относящимися к более сложным потокам, читатель должен обратиться к перечисленным выше источникам и к специальным статьям.

Первые результаты об условиях возникновения турбулентности были получены Хагеном (1839). Хаген изучал течения воды в прямых круглых трубах небольших радиусов и установил, что при постепенном уменьшении вязкости воды (что достигалось повышением ее температуры) скорость течения при одном и том же напоре сначала возрастает до некоторого предела, а затем начинает уменьшаться. Вытекающая из трубы струя воды до указанного предела имеет гладкую форму, а после перехода через этот предел испытывает резкие колебания. Хаген объяснял эти явления тем, что при достаточно малом значении вязкости в потоке образуются внутренние движения и вихри, которые приводят к повышению сопротивления и, следовательно, к уменьшению скорости течения. Хаген обнаружил, что изменения характера течения можно добиться, меняя напор воды (т. е. среднюю скорость) или радиус трубы; однако никакого общего критерия для перехода ламинарного течения в турбулентное ему установить не удалось.

Общий критерий возникновения турбулентности был установлен Рейнольдсом (1883) при помощи соображений о механическом подобии течений вязкой жидкости. Этот критерий заключается в том, что поток остается ламинарным, пока число $\mathrm{Re} = UL/\nu$ не превосходит некоторого критического значения Re_{cr}, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ он становится турбулентным. Как было объяснено в п. 1.3, число Рейнольдса имеет смысл отношения характерных величин сил инерции и сил вязкости. Силы инерции приводят к сближению первоначально удаленных друг от друга объемов жидкости и тем самым способствуют образованию резких неоднородностей течения. Силы вязкости, наоборот, приводят к выравниванию скоростей в близких точках, т. е. к сглаживанию мелких неоднородностей. Поэтому при малых Re, когда силы вязкости доминируют над силами инерции, в потоке не может быть резких неоднородностей, т. е. гидродинамические поля изменяются весьма плавно, и течение имеет ламинарный характер. При больших Re, наоборот, сглаживающее действие

сил вязкости оказывается слабым и в потоке возникают беспорядочные пульсации — резкие мелкомасштабные неоднородности, т. е. течение становится турбулентным. Этими соображениями и объясняется критерий Рейнольдса.

Для экспериментальной проверки указанного критерия и для измерения Re_{cr} Рейнольдс провел серию опытов с течениями воды в стеклянных круглых трубах. В этих опытах на оси трубы у ее входа помещался источник красящего вещества. Окрашенная вода при малых Re принимала форму тонкой четко очерченной струйки, что указывало на ламинарный режим течения. При возрастании Re в момент перехода через критическое значение форма окрашенной струйки резко изменялась: уже недалеко от входа в трубу струйка расширялась и на ней появлялись волны, затем появлялись отдельные вихри и к концу трубы окрашенной оказывалась вся жидкость. Если в таком опыте осветить поток электрической искрой, то можно видеть, что окрашенная масса состоит из более или менее отчетливых завитков, указывающих на наличие завихренности. При докритических числах Re, близких к Re_{cr}, в ламинарном потоке наблюдаются переходные явления, заключающиеся в появлении впервые наблюдавшихся еще Рейнольдсом кратковременных вспышек пульсаций высокой частоты, в форме своеобразных «турбулентных пробок», заполняющих все сечение трубы, но на небольших отрезках ее длины (появление таких «вспышек» позже Шиллер (1934) связал с чередующимся образованием и разрушением крупных вихрей на внутренней стенке трубы у ее передней кромки). Аналогичный характер имеет течение в начальном участке трубы и при $Re > Re_{cr}$, причем с увеличением Re длина этого начального участка, на протяжении которого течение еще оказывается не полностью турбулентным, быстро уменьшается. Согласно измерениям Ротта (1956), при таком промежуточном режиме средняя доля времени, в течение которого в данной точке трубы наблюдается турбулентный режим («коэффициент перемежаемости»), монотонно возрастает с увеличением расстояния x от входа в трубу. Имеющиеся экспериментальные данные (наиболее детальные из которых принадлежат Линдгрену (1957, 1959)) позволяют объяснить это возрастание тем, что местная скорость на переднем крае «турбулентной пробки» превосходит местную скорость на ее заднем крае, и поэтому «пробки» растягиваются при своем передвижении по трубе (и некоторые из них иногда «догоняют» друг друга и сливаются, образуя одну большую пробку).

Опыты Рейнольдса производились с трубами различных диаметров с плавным входом, соединяющимся с резервуаром. Изменения числа $Re = U_{ср}D/\nu$ (где $U_{ср}$ — средняя скорость течения)

в этих опытах достигались как переходом к новой трубе (с другим диаметром D), так и варьированием скорости течения и вязкости воды (путем изменения ее температуры). Значение Re_{cr} в указанных опытах оказалось равным в среднем 12 830 с относительно небольшим разбросом по данным отдельных опытов. Дальнейшие исследования показали, однако, что значение Re_{cr}, соответствующее переходу от ламинарного течения к турбулентному, в различных опытах может оказаться очень разным, так как оно сильно зависит от степени возмущенности ламинарного течения (или, как говорят, от «начальной турбулентности», которая определяется главным образом условиями на входе в трубу). Абсолютно стационарного ламинарного течения в трубах осуществить не удается и в потоке всегда существуют возмущения, характеризующиеся сравнительно редкими пульсациями скорости, происхождение которых частично связано с вихрями, отрывающимися от передней кромки трубы. Интенсивность этих возмущений (которую можно охарактеризовать параметром $U'/U_{ср}$, где U' — типичная величина пульсаций x-компоненты скорости) может быть довольно большой, но вследствие своей малой повторяемости эти возмущения не меняют ламинарного характера течения и не сказываются существенно на профиле скорости, величине сопротивления и других средних характеристиках потока. При достаточно малых числах Рейнольдса возникшие возмущения, перемещаясь вниз по течению, затухают. Но при возрастании числа Рейнольдса в момент достижения его критического значения Re_{cr} (зависящего от интенсивности возмущений, а также, возможно, от их масштаба и частоты) возмущения скачкообразно порождают турбулентность. Установлено, что значение Re_{cr}, соответствующее переходу ламинарного течения в турбулентное, оказывается тем меньше, чем больше интенсивность возмущений. Так, например, в случае трубки с острыми краями, вставленной в сосуд с плоской стенкой, края трубки создают значительные возмущения и Re_{cr} оказывается равным уже, примерно, 2800. Уменьшая же с помощью тех или иных приемов степень возмущенности течения у входа в трубу, можно задержать переход ламинарного течения в турбулентное до весьма больших чисел Рейнольдса (это явление называется *затягиванием ламинарного режима*). Так, Барнесу и Кокеру (1905) удалось задержать возникновение турбулентности в трубах до значения $Re_{cr} \approx 20\,000$, а Экману (1911) — даже до $Re_{cr} \approx 50\,000$.

Эти результаты показывают, что число Рейнольдса само по себе еще не является однозначным критерием возникновения турбулентности: для течения в трубе, по-видимому, вообще нельзя указать такого универсального критического значения

Re_{cr}, чтобы при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ режим течения обязательно был турбулентным. Чтобы установить значение Re, являющееся верхней границей для чисел Рейнольдса ламинарного течения, нужно иметь сведения о степени возмущенности ламинарного течения, и указанная верхняя граница чисел Re будет функцией от параметра U'/U_{cp} (монотонно возрастающей при убывании этого параметра).

Без сведений о степени возмущенности ламинарного потока можно установить лишь более слабый критерий, указывающий условия, при которых возможен только ламинарный режим течения. Для этого нужно определить критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr\,min}$, соответствующее переходу от ламинарного режима к турбулентному при наибольшей возможной степени возмущенности ламинарного течения у входа в трубу. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr\,min}$ поток будет всегда оставаться ламинарным, т. е. любые возмущения, как бы интенсивны они ни были, будут затухать.

Опыты для измерения $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ были поставлены еще самим Рейнольдсом. Поскольку в таких опытах необходимо вводить в трубу возможно более возмущенную жидкость, то ясно, что для обнаружения перехода от ламинарного режима к турбулентному метод окрашенных струек здесь непригоден. Поэтому переход к турбулентности здесь приходится определять иначе (например, по изменению закона сопротивления, определяющего зависимость средней скорости от перепада давления). В опытах Рейнольдса минимальное критическое значение числа $\mathrm{Re} = U_{cp}D/\nu$ оказалось равным $\mathrm{Re}_{cr\,min} \approx 2300$. Близкие значения (лежащие в пределах от 1900 до 2320) были получены и всеми последующими исследователями.

Сходные во многих отношениях результаты об условиях возникновения турбулентности получаются и при изучении течений в пограничных слоях, образующихся при обтекании тел вязкой жидкостью. Рассмотрим, например, пограничный слой, образующийся при обтекании плоской пластинки потоком с постоянной скоростью U, направленной параллельно пластинке. Число Рейнольдса пограничного слоя можно определить, например, формулой $\mathrm{Re}_\delta = U\delta/\nu$, где δ — толщина пограничного слоя. Можно также вместо этого использовать легче измеряемое число $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$, где x — расстояние вдоль потока от переднего края пластинки. Числа Re_δ и Re_x связаны функциональной зависимостью; например, при ламинарном течении согласно результатам п. 1.4 $\mathrm{Re}_\delta \approx 5\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ (см. формулу (1.49) на стр. 54). Вниз по течению оба числа Re_δ и Re_x растут, и в некоторой точке x_{cr} они достигают «критического значения», при котором течение резко изменяет характер и становится турбулентным. Таким образом, при $x < x_{cr}$ (точнее говоря, при $\mathrm{Re}_\delta < \mathrm{Re}_{\delta\,cr}$ и $\mathrm{Re}_x < \mathrm{Re}_{x\,cr}$) течение в пограничном слое является ламинарным, а при $x > x_{cr}$ (т. е. $\mathrm{Re}_\delta > \mathrm{Re}_{\delta\,cr}$ и $\mathrm{Re}_x > \mathrm{Re}_{x\,cr}$) турбулентным. Непосредственно вблизи $x = x_{cr}$ образуется «переходная область», где наблюдаются лишь отдельные «вспышки» турбулентности, возникающие в виде небольших «турбулентных пятен», увеличивающихся в размере и сливающихся друг с другом по мере своего продвижения вниз по течению (см., например, Шлихтинг (1959), § 14, а также Элдер (1960)). Появление «турбулентных пятен» приводит к тому, что в точках переходной области имеет место перемежающееся чередование во времени ламинарного и турбулентного режимов, причем в начале этой области и частота появления и продолжительность существования турбулентного режима незначительны, а у ее конца ламинарный режим возникает уже лишь очень редко и на весьма короткие промежутки времени.

Первые измерения критического числа Рейнольдса пограничного слоя были выполнены в 1924 г. Бюргерсом и Ван дер Хегге Цийненом, изучившими в аэродинамической трубе обтекание воздушным потоком плоской стеклянной пластинки. Несколько позже аналогичные измерения были произведены также Ханзеном (1928) (см., в частности, рис. 4 на стр. 56). Согласно данным этих авторов,

$$\mathrm{Re}_{x\,cr} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{cr} \sim 3 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^5,$$

что, очевидно, соответствует значениям

$$\mathrm{Re}_{\delta\,cr} = \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{cr} \sim 2750 \div 3500,$$

имеющим тот же порядок величины, что и значения Re_{cr} для течения в трубе. В дальнейшем выяснилось, что, как и в случае течений в трубах, критическое число Рейнольдса пограничного слоя существенно зависит от степени возмущенности основного потока — в зависимости от которой число $\mathrm{Re}_{x\,cr}$ может меняться в пределах от $1 \cdot 10^5$ почти до $3 \cdot 10^6$ (см. рис. 7, иллюстрирующий зависимость $\mathrm{Re}_{x\,cr}$ от U'/U, где $3U'^2$ принимается равным среднему квадрату абсолютной величины пульсаций скорости набегающего потока). Заметим, однако, что рис. 7 оставляет впечатление, что при неограниченном убывании U'/U значение $\mathrm{Re}_{x\,cr}$ не возрастает неограниченно, а стремится к определенному пределу (порядка $3 \cdot 10^6$), выше которого пограничный слой будет турбулентным при сколь угодно малой степени возмущенности набегающего потока. С другой стороны, в случае течения в круглой трубе эксперимент не показывает резкого замедления роста Re_{cr} при приближении U'/U к нулю; поэтому представляется правдоподобным, что здесь $\mathrm{Re}_{cr} \to \infty$ при $U'/U \to 0$ (т. е.

что при любом значении Re течение в трубе может оставаться ламинарным, если только удастся обеспечить достаточно низкий уровень возмущенности потока у входа в трубу). Об этом важном различии течений в пограничном слое и в трубе мы еще будем подробнее говорить в п. 2.8.

С турбулизирующим влиянием возмущений в обтекающем потоке связано также то, что критическое число Рейнольдса

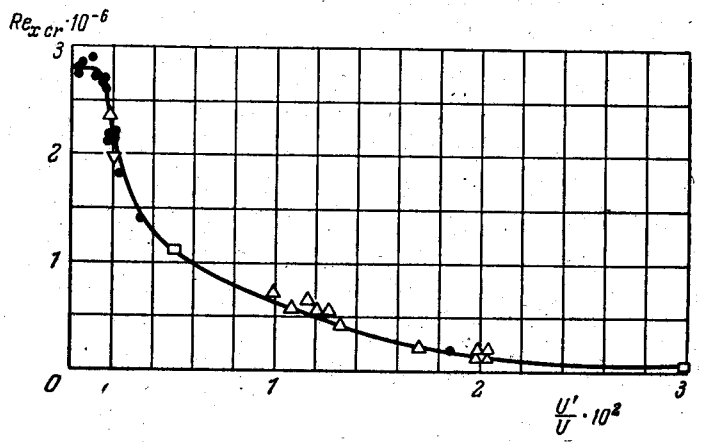


Рис. 7. Зависимость критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на плоской пластинке от степени возмущенности набегающего потока (по Драйдену (1959)).

Разными значками на рисунке отмечены данные разных экспериментаторов.

оказывается заметно меньшим при обтекании шероховатых пластинок, содержащих естественные или искусственные неровности, создающие дополнительные возмущения. Согласно данным многочисленных измерений, даже одна-единственная неровность может вызвать переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, если только высота h_0 этой неровности имеет тот же порядок, что и «толщина вытеснения» $\delta^* \approx 0{,}3\delta$ пограничного слоя в ее окрестности. Еще более значительное влияние оказывает наличие множества неровностей, разбросанных по всей плоскости (см., например, Шлихтинг (1959), гл. X, или Драйден (1959), § 5). Очень существенно меняет значение $Re_{x\,cr}$ также наличие хотя бы небольших продольных градиентов давления в обтекающем потоке. На этом, однако, мы не будем здесь задерживаться, а ограничимся лишь рассмотрением одного специального эффекта, связанного с наличием отрицательного продольного градиента давления, к которому мы сейчас и перейдем.

2.2. Данные о турбулентном обтекании: отрыв пограничного слоя, кризис сопротивления и механизм турбулизации пограничного слоя

Возникновение турбулентности при обтекании тел вязкой жидкостью может проявляться не только в виде турбулизации пограничного слоя, но и в виде образования турбулентного следа за телом в результате отрыва от его поверхности макроскопических вихрей.

Образование турбулентного следа обычно бывает связано с тормозящим действием отрицательного продольного градиента давления в обтекающем потоке. Рассмотрим, например, обтекание прямого круглого цилиндра потоком без циркуляции, перпендикулярным к оси цилиндра (см. рис. 8, на котором изображено обтекание верхней части цилиндра). Вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной, а ее движение — безвихревым. Линии тока этого потенциального движения более всего сгущаются над верхней точкой цилиндра (точка C), где, следовательно, касательная скорость u достигает максимума. Вследствие известного уравнения Бернулли

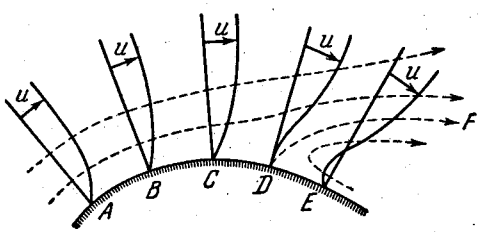


Рис. 8. Схематическая форма линий тока (пунктир) и профилей скорости (сплошные линии) над различными точками при обтекании прямого цилиндра.

$$\frac{u^2}{2} + p/\rho = \text{const}$$

(вытекающего из равенства $u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$, приведенного на стр. 51 перед уравнением (1.38)) давление над точкой C во внешнем потоке достигает минимума, так что на участке AC оно падает, а на участке CE возрастает. Такие же изменения давления вдоль поверхности тела имеют место и в пограничном слое (так как поперек пограничного слоя давление почти не меняется). Следовательно, на участке CE жидкость в пограничном слое должна двигаться по направлению возрастания давления, что приводит к ее торможению. Наиболее сильно это торможение сказывается, конечно, на частицах жидкости, движущихся около самой поверхности цилиндра, т. е. обладающих

наименьшей скоростью. В некоторой точке D вниз по потоку от точки C эти частицы останавливаются, а за точкой D даже двигаются вспять по сравнению с более удаленными от поверхности цилиндра и поэтому еще не заторможенными частицами. Образующийся у поверхности тела за точкой D возвратный поток оттесняет внешнее течение от поверхности цилиндра — происходит, как говорят, *отрыв пограничного слоя* от обтекаемой поверхности с образованием в жидкости поверхности раздела DF. Ясно, что если только скорость U внешнего потока достаточно быстро убывает за точкой C, то такой отрыв пограничного слоя обязательно будет иметь место. Если даже пограничный слой до отрыва был ламинарным, то после отрыва он ведет себя как свободная струя в затопленном пространстве и быстро становится турбулентным (при заметно меньших Re, чем не отрывавшийся пограничный слой, так как наличие стенки действует на течение стабилизирующим образом). Поверхность раздела DF, являющаяся поверхностью тангенциального разрыва скорости, весьма неустойчива (см. ниже) и быстро свертывается в один или несколько вихрей. В области FDE за поверхностью раздела около цилиндра образуется крупный вихрь; второй такой же вихрь образуется в нижней части цилиндра. Эти вихри попеременно отрываются от поверхности цилиндра, уносятся вниз по течению и постепенно рассеиваются; на их месте образуются новые вихри.

В результате за телом образуется турбулентный след, в котором движение является завихренным, в то время как вне этого следа и вне пограничного слоя движение является безвихревым (т. е. потенциальным). В самом деле, жидкость вне пограничного слоя можно считать идеальной; отсюда вытекает, что при ее движениях циркуляция скорости вдоль любого замкнутого жидкого контура сохраняется и, следовательно, при установившемся движении имеет место постоянство вихря скорости вдоль линий тока. Поэтому ясно, что область завихренного турбулентного движения вдали от поверхности тела может возникнуть только при выходе линий тока из пограничного слоя (в котором движение становится завихренным вследствие действия вязкости) наружу, т. е. лишь в связи с непосредственным перемещением жидкости из пограничного слоя в удаленные части пространства.

Ясно также, что линии тока не могут выходить из области течения, в которой вихрь скорости отличен от нуля, т. е. из области турбулентного следа (но они могут входить в след из области потенциального течения). Другими словами, жидкость может втекать в турбулентный след из области потенциального течения, но не может вытекать из турбулентного следа. В то же

время турбулентные пульсации скорости могут проникать из следа в область потенциального движения, но со значительным ослаблением. Действительно, легко видеть, что в случае потенциального движения несжимаемой жидкости уравнения движения в форме (1.7) будут удовлетворяться тождественно. Поэтому течение здесь будет описываться одним лишь условием несжимаемости (1.5), эквивалентным уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ относительно потенциала скорости φ, определяющего поле скорости по формуле $u_i = \partial\varphi/\partial x_i$. Пусть z обозначает координату поперек следа; тогда поле $\varphi(x, y, z)$, описывающее турбулентные пульсации скорости, удобно разложить на периодические по x, y компоненты вида $\varphi = \varphi_0(z)e^{i(k_1x+k_2y)}$. Из уравнения $\Delta\varphi = 0$ следует, что $\frac{d^2\varphi}{dz^2} = k^2\varphi_0$, где $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ — волновое число, обратно пропорциональное горизонтальному (в плоскости Oxy) масштабу рассматриваемых периодических пульсаций. Отбрасывая физически бессмысленное решение для φ_0, возрастающее вместе с z, убеждаемся, что затухание амплитуды пульсаций при удалении от следа в области $z>0$ описывается множителем e^{-kz}, так что пульсации затухают тем быстрее, чем меньше их масштаб. Следовательно, достаточно далеко в глубь потенциального движения проникают лишь сравнительно плавные крупномасштабные пульсации. Для таких пульсаций диссипация энергии в тепло не играет большой роли; поэтому почти вся осуществляющаяся в потоке диссипация энергии происходит внутри вихревого турбулентного следа [1]).

Наличие значительной диссипации энергии во всем объеме турбулентного следа, а также образование поверхности раздела при отрыве пограничного слоя приводят к тому, что тела, при обтекании которых возникает отрыв пограничного слоя, оказывают большое сопротивление набегающему потоку. При этом сопротивление, вообще говоря, будет тем меньше, чем уже турбулентный след, т. е. чем дальше на поверхности тела расположена точка отрыва. При достаточно больших числах Рейнольдса, при которых, однако, пограничный слой до точки отрыва остается ламинарным, коэффициент сопротивления $C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$ (где W — полная сила сопротивления, S — площадь обтекаемого тела или его сечения) оказывается не зависящим от Re, так как положение точки отрыва не зависит от Re

[1]) Изложенное рассуждение принадлежит Ландау и Лифшицу (1953); оно лежит также в основе детальных исследований поля скорости потока вне области турбулентного следа или турбулентной струи, выполненных Филлипсом (1955) и Стюартом (1956).

(абсцисса точки отрыва находится из уравнения $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$, в которое, как можно показать, число Рейнольдса не входит). Однако при достижении чисел Рейнольдса, при которых пограничный слой турбулизируется до точки отрыва ламинарного пограничного слоя, точка отрыва пограничного слоя перемещается вниз по течению; при этом турбулентный след заметно сужается, и сопротивление тела резко (в несколько раз) уменьшается. Это явление, называемое *кризисом сопротивления*, объясняется тем, что перенос импульса внутри пограничного слоя при его турбулизации резко возрастает; следовательно, увлечение жидкости в пределах пограничного слоя внешним потоком существенно усиливается, и жидкие частицы в пограничном слое продвигаются в направлении роста давления дальше, чем в случае ламинарного пограничного слоя.

Кризис сопротивления при обтекании шара впервые наблюдался Эйфелем (1912). Переход от больших сопротивлений к малым происходит в этом случае при значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = UD/\nu$ (где D — диаметр шара), близких к $5{,}0 \cdot 10^5$; коэффициент сопротивления C_W при этом падает, примерно, от 0,5 при $\mathrm{Re} = 10^5$ до 0,15 при $\mathrm{Re} = 10^6$. При тщательном проведении эксперимента удается даже зафиксировать минимальное значение C_W, меньшее 0,1. Аналогично ведет себя коэффициент C_W и для круглого цилиндра. Зависимость коэффициентов сопротивления для шара и круглого цилиндра от числа Рейнольдса изображена на рис. 9. Из сказанного выше ясно, что кризис сопротивления наступает тем раньше, чем выше степень возмущенности набегающего потока, т. е. чем меньше критическое число Рейнольдса для перехода к турбулентному режиму в пограничном слое. Это наглядно подтверждается известным опытом Прандтля (1914), который добивался перехода через кризис сопротивления при обтекании шара, надевая на шар проволочное кольцо, т. е. создавая в потоке дополнительные возмущения, турбулизирующие пограничный слой.

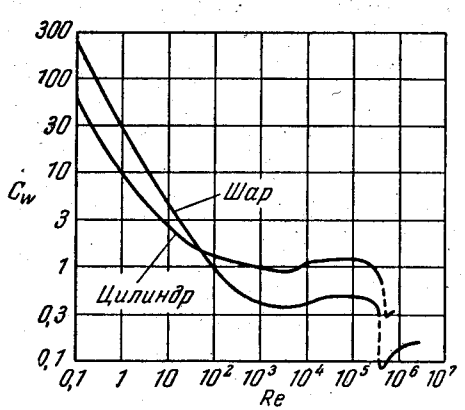


Рис. 9. Зависимость коэффициентов сопротивления шара и круглого цилиндра от числа Рейнольдса.

Необходимым условием для отрыва пограничного слоя является рост давления по направлению течения на каком-то участке поверхности тела. Это условие выполняется не только при обтекании выпуклых поверхностей, но и в других случаях, как, например, при течении в расширяющейся конической трубе (диффузоре) или в резко изогнутой трубе. В этих случаях также может возникнуть отрыв пограничного слоя.

Явление отрыва пограничного слоя под действием отрицательного продольного градиента давления может в известной мере объяснить также и влияние возмущений в набегающем потоке на значение $\mathrm{Re}_{x\,\mathrm{cr}}$. В самом деле, можно предполагать, что это влияние в значительной степени связано как раз с тем, что такие возмущения создают пульсации продольного градиента давления, приводящие к турбулизирующему пограничный слой образованию на непродолжительное время в отдельных его местах неустойчивых S-образных профилей скорости (типа профиля в точке E на рис. 8) и отрывов пограничного слоя. Основываясь на этой гипотезе, Тэйлор (1936а) попытался теоретически найти характер зависимости критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{x\,\mathrm{cr}}$ пограничного слоя от интенсивности начальной турбулентности набегающего потока (позже Вигхардт (1940) дал более короткий вывод результатов Тэйлора).

В своей работе Тэйлор исходил из приближенной теории Кармана — Польгаузена ламинарного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления $\partial p/\partial x$, согласно которой форма профиля скорости в различных сечениях пограничного слоя зависит лишь от единственного безразмерного параметра $\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$. В пограничном слое на плоской пластинке $\partial p/\partial x = 0$, но могут существовать пульсации давления, и Тэйлор предположил, что характер движения в фиксированном сечении здесь определяется параметром $\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\frac{\delta p'}{\delta x}$ (где p' — пульсация давления, а $\delta/\delta x$ означает соответственно определенное типичное значение производной $\partial/\partial x$). Иначе говоря, согласно Тэйлору точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный определяется тем, что параметр Λ достигает некоторой «критической» величины. Но в силу уравнений движения величина $-\frac{1}{\rho}\frac{\delta p'}{\delta x}$ должна иметь тот же порядок, что и $u'\frac{\delta u'}{\delta x} = \frac{1}{2}\frac{\delta u'^2}{\delta x}$, где u' — пульсация продольной скорости в набегающем потоке. Далее можно положить $\frac{\delta u'^2}{\delta x} \sim \frac{U'^2}{\lambda}$, где U' — типичное значение пульсации скорости, а λ — так называемый тэйлоров микромасштаб турбулентности, определяемый из условия $\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2 = \frac{U'^2}{\lambda^2}$ (этот масштаб еще будет неоднократно использоваться нами в дальнейшем). Масштаб λ можно связать с внешним (интегральным) масштабом турбулентности L (определяющим порядок величины наибольшего расстояния, на котором еще проявляется связь между мгновенными значениями пульсации скорости) при помощи следующего рассуждения: средняя удельная диссипация энергии $\bar{\varepsilon} \sim \nu\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2$, с одной стороны, пропорциональна $\frac{\nu U'^2}{\lambda^2}$, а с другой стороны, при больших $U'L/\nu$ она пропорциональна также и U'^3/L (об этом факте мы еще будем подробно говорить во второй части настоящей книги),

Следовательно,

$$\lambda \sim L\left(\frac{U'L}{\nu}\right)^{-1/2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \sim \frac{U'^2}{\lambda} \sim \left(\frac{U'^5}{\nu L}\right)^{1/2}.$$

Учитывая еще, что для ламинарного пограничного слоя на плоской пластинке $\delta \sim (\nu x/U)^{1/2}$, получим

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \sim \left(\frac{U'}{U}\right)^{5/2}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/2}\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, если считать, что $\mathrm{Re}_{x\,\mathrm{cr}} = \varphi(\Lambda_{\mathrm{cr}})$, то

$$\mathrm{Re}_{x\,\mathrm{cr}} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}} = F\left[\frac{U'}{U}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/5}\right]. \qquad (2.1)$$

В качестве длины L, входящей в эту формулу, можно принять характерный размер устройства, порождающего турбулентность (например, если турбулентность создается помещенной в поток решеткой, то L приближенно совпадает с расстоянием между прутьями решетки).

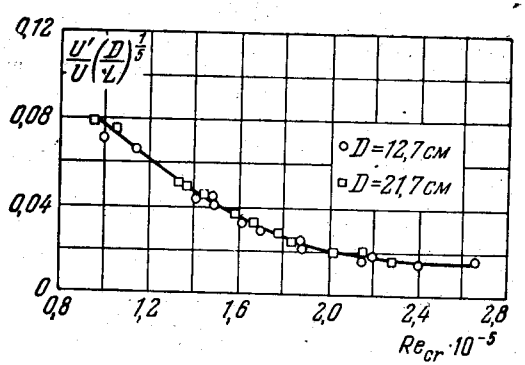


Рис. 10. Зависимость $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ при обтекании шара от величины $\frac{U'}{U}\left(\frac{D}{L}\right)^{1/5}$.

Результат (2.1), согласно которому $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ зависит только от величины $\frac{U'}{U}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/5}$, выведен здесь для случая обтекания плоской пластинки. Однако его можно обобщить и на случаи обтекания других тел, заменяя координату x расстоянием s от точки набегания потока на тело до точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, отсчитываемым вдоль контура тела, или же характерным размером тела D и используя вместо $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$ число $\mathrm{Re}_s = Us/\nu$ или $\mathrm{Re} = UD/\nu$. При этом оказалось, что этот результат, несмотря на всю нестрогость его вывода, находится в весьма хорошем соответствии с экспериментальными данными (см., например, рис. 10, на котором приведены эмпирические данные Драйдена, Шубауэра, Мока и Скрэмстада (1937), измерявших значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ для пограничного слоя на шарах различного радиуса при различных значениях интенсивности и масштаба начальной турбулентности свободного потока).

2.3. Гидродинамическая неустойчивость

При теоретическом анализе вопроса о возникновении турбулентности следует исходить из того, что функции, описывающие поля скорости и давления в любом потоке жидкости, как ламинарном, так и турбулентном, являются решениями уравнений гидродинамики при надлежащих начальных и краевых условиях. Установившееся ламинарное течение, в частности, описывается стационарными решениями этих уравнений; в случае же турбулентного течения каждой индивидуальной реализации потока соответствует некоторое, вообще говоря, весьма сложное нестационарное решение уравнений гидродинамики. Невозможность осуществления ламинарного течения при достаточно больших числах Рейнольдса, несмотря на то, что уравнения гидродинамики имеют стационарное решение при любом Re, ясно показывает, что не всякому решению соответствует движение жидкости, реально существующее в природе. Естественно связать это обстоятельство с хорошо известным положением, согласно которому реальные движения должны не только удовлетворять уравнениям гидродинамики, но и быть устойчивыми в том смысле, что неизбежно возникающие в реальных условиях малые возмущения этих движений должны затухать со временем, не меняя общей картины движения. Если же, наоборот, возникающие возмущения будут разрастаться со временем, то это приведет к существенному искажению исходного движения и, следовательно, такое движение не сможет существовать сколько-нибудь длительное время.

Исходя отсюда, можно ожидать, что значение $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ соответствует как раз потере устойчивости: при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ ламинарное течение устойчиво, но при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ оно становится неустойчивым и под влиянием всегда имеющихся малых возмущений превращается в турбулентное движение. Но в таком случае, исследуя математически вопрос об устойчивости решения уравнений гидродинамики, соответствующего ламинарному течению, можно (по крайней мере в принципе) теоретически определить соответствующее критическое число Рейнольдса.

Турбулентность характеризуется наличием весьма сложных колебаний поля скорости и других характеристик течения. Механизм возникновения этих колебаний можно уяснить с общемеханической точки зрения, рассматривая текущую жидкость как динамическую систему с очень большим числом степеней свободы, в которой в результате притока энергии извне возникают автоколебания.

Применение понятия о степенях свободы к потоку жидкости требует прежде всего введения каких-то «обобщенных координ-

нат», однозначно характеризующих конфигурацию течения. При определении таких обобщенных координат можно исходить из разложения движения на элементарные компоненты, сумма энергий которых равняется энергии потока в целом и состояние каждой из которых характеризуется небольшим числом параметров. Параметры всех таких элементарных компонент движения и будут тогда обобщенными координатами потока жидкости, а число таких координат, могущих меняться при заданных внешних условиях, будет совпадать с полным числом степеней свободы потока. С математической точки зрения разложение движения на элементарные компоненты сводится к разложению поля скорости по ортогональной системе функций; каждая из этих функций будет описывать поле скорости соответствующей элементарной компоненты движения, а коэффициенты разложения будут обобщенными координатами потока. Выбор той или иной ортогональной системы функций диктуется формой границ потока. Для потоков, занимающих в пространстве ограниченный объем, ортогональная система функций всегда оказывается счетной, так что такие потоки имеют не более чем счетное множество обобщенных координат [1]).

При установившемся ламинарном течении значения обобщенных координат однозначно определяются заданными внешними условиями, так что число степеней свободы ламинарного потока равно нулю. Число степеней свободы турбулентного потока, занимающего в пространстве ограниченный объем, весьма велико, но практически является конечным. Действительно, при разложении поля скорости в ряд по ортогональным функциям различные слагаемые описывают элементарные движения разных масштабов, и неограниченное увеличение номера слагаемого соответствует неограниченному уменьшению масштаба соответствующего элементарного движения. Однако из-за наличия вязкости колебания слишком малых масштабов существовать не могут. Поэтому при стационарных внешних условиях коэффициенты разложения поля скорости по ортогональным функциям, имеющие достаточно большие номера, не зависят от

[1]) Представление о потоке жидкости, занимающем неограниченный объем пространства, всегда является идеализацией. При этой идеализации вместо разложения поля скорости в ряд по ортогональной системе функций приходится прибегать к разложению в интеграл Фурье — Стилтьеса (которым мы будем широко пользоваться во второй части настоящей книги) и допускать в ряде случаев существование непрерывной компоненты спектра. Поэтому неограниченный поток жидкости может, вообще говоря, обладать континуумом обобщенных координат. Однако в ограниченных областях пространства и времени колебания с континуальным набором волновых чисел, разумеется, снова могут быть аппроксимированы счетным числом гармонических колебаний.

времени, что и означает, что число степеней свободы потока является конечным. Ясно также, что число степеней свободы должно расти при убывании коэффициента вязкости, т. е., иначе говоря, при возрастании числа Re. Согласно оценке Ландау и Лифшица (1953), число степеней свободы турбулентного потока, занимающего в пространстве ограниченный объем, вообще говоря, пропорционально $Re^{9/4}$, где Re — число Рейнольдса потока в целом (этот результат будет подробнее обсуждаться во второй части книги). Отсюда видно, что с ростом числа Рейнольдса число степеней свободы быстро растет, и для развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса оно достигает громадных значений.

Чтобы охарактеризовать в заданный момент времени не только конфигурацию системы, но и состояние ее движения, нужно кроме значений ее обобщенных координат указать также значения соответствующих обобщенных скоростей. Набор значений всех обобщенных координат и обобщенных скоростей определяет некоторую точку в фазовом пространстве системы, полностью характеризующую ее мгновенное состояние. Процесс изменения состояния системы изображается в фазовом пространстве определенной линией — фазовой траекторией системы. Указание фазовой траектории является удобным способом описания эволюции системы.

Рассмотрим эволюцию потока жидкости при фиксированных стационарных внешних условиях (в частности, при постоянном притоке энергии извне), но при различных начальных условиях. Каждому из этих начальных условий соответствует некоторая фазовая траектория, выходящая из соответствующей начальной фазовой точки, и представляет интерес выяснить поведение указанных фазовых траекторий для больших промежутков времени. Из статистической механики известно, что динамические системы с большим числом степеней свободы при стационарных внешних условиях имеют тенденцию стремиться к некоторому предельному равновесному режиму, при котором в среднем по времени внешний приток энергии уравновешивается диссипацией полной энергии системы, а полная энергия имеет фиксированное значение и определенным образом распределяется по степеням свободы. Можно высказать гипотезу, что для широкого класса потоков жидкости существуют два возможных предельных режима — ламинарный и турбулентный, так что каждая фазовая траектория потока жидкости с течением времени либо асимптотически приближается к точке, соответствующей ламинарному течению, либо накручивается на некоторый «предельный цикл», соответствующий установившемуся турбулентному режиму. Критерий возникновения турбулентности должен

позволить по начальной точке фазовой траектории предсказать, какой из этих двух предельных режимов будет иметь место.

Возможность разложения движения жидкости на элементарные компоненты означает, что поток жидкости можно рассматривать как совокупность взаимодействующих друг с другом элементарных нелинейных осцилляторов. В каждом из этих осцилляторов за счет поступления энергии извне могут возникать автоколебания. Возможность возникновения колебаний определяется соотношением между получаемой осциллятором энергией E^+ и теряемой им энергией E^- при различных амплитудах колебаний a (см. рис. 11). Если при всех амплитудах $E^- > E^+$ (рис. 11, $а$), то колебания, очевидно, будут затухать при любой

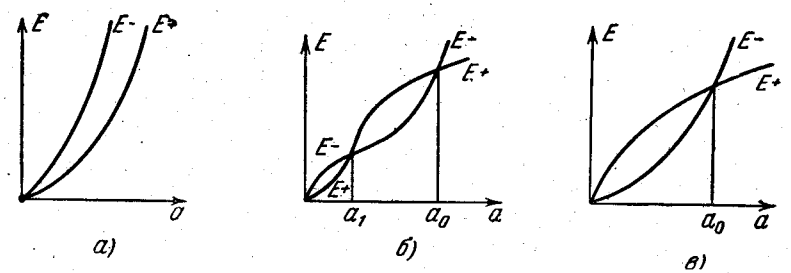


Рис. 11. Различные варианты зависимости получаемой и теряемой осциллятором энергии от амплитуды колебаний.

их начальной амплитуде, и система будет устойчивой по отношению к любому возмущению. Если $E^- < E^+$ при $a_1 < a < a_0$, но $E^- > E^+$ при $a < a_1$ и $a > a_0$ (рис. 11, $б$), то колебания с начальной амплитудой $a < a_1$ будут затухать, но при начальной амплитуде $a > a_1$ они будут возрастать, пока их амплитуда не достигнет равновесного значения a_0. При этом система будет устойчивой по отношению к малым возмущениям, но неустойчивой по отношению к возмущениям достаточно большой амплитуды (такая система называется *системой с жестким самовозбуждением*). Наконец, если $E^+ > E^-$ при сколь угодно малых амплитудах (рис. 11, $в$), то система будет неустойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям, т. е. абсолютно неустойчивой и практически всегда будет находиться в автоколебательном режиме с амплитудой колебаний a_0 (такая система называется *системой с мягким возбуждением*). Как будет видно из дальнейшего, есть все основания предполагать, что в потоках жидкости, вообще говоря, могут иметь место все три ситуации, изображенные на рис. 11; однако точные условия, позволяющие во всех случаях выяснить, какая именно из них реализуется в данном конкретном течении, до сих пор остаются неизвестными.

2.4. Простейшие примеры абсолютно неустойчивых потоков жидкости

Приведенные выше экспериментальные данные о зависимости Re_{cr} для течений в трубах и пограничных слоях от интенсивности начальных возмущений и о затягивании ламинарного режима определенно показывают, что при числе Re, немного превосходящем $Re_{cr\,min}$, указанные течения представляют собой автоколебательные системы с жестким возбуждением (некоторое представление о возможном механизме возбуждения колебаний в этих системах дает изложенная в п. 2.2 теория Тэйлора). Сейчас мы покажем, что нетрудно указать также примеры движений жидкости, неустойчивых уже и по отношению к бесконечно-малым возмущениям, т. е. с точки зрения теории колебаний, представляющих собой системы с мягким возбуждением.

Один из простейших примеров абсолютно неустойчивого потока жидкости представляет собой течение около поверхности тангенциального разрыва скорости, о котором уже упоминалось выше. Качественно возникновение здесь абсолютной неустойчивости может быть объяснено с помощью совсем простых физических соображений. В самом деле, рассмотрим идеальную жидкость с нулевой вязкостью, два слоя которой скользят один по другому с противоположными скоростями U и $-U$, образуя поверхность разрыва скорости. Допустим, что в результате некоторого возмущения на поверхности разрыва образовалась волна малой амплитуды (см. рис. 12). Предположим для простоты, что эта волна остается неподвижной. В таком случае над гребнями волны линии тока будут сгущаться, т. е. скорость повысится, а в ложбинах линии тока станут реже и скорость уменьшится. Вследствие уравнения Бернулли $u^2/2 + p/\rho = \text{const}$, над гребнями волн давление будет понижено, а в ложбинах — повышено (на рис. 12 это обозначено знаками + и —). Таким образом, в жидкости возникнут поперечные градиенты давления, которые будут стремиться увеличить амплитуду волны. В дальнейшем это увеличение амплитуды приведет к тому, что волна распадется на отдельные вихри, положив начало турбулизованной зоне.

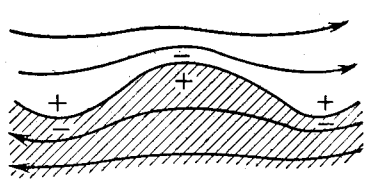


Рис. 12. Схематическая форма линий тока и распределения давления вблизи возмущенной поверхности тангенциального разрыва скорости.

В реальной жидкости возникающие волны, разумеется, не неподвижны, но аналогичные процессы и здесь приводят к их распаду. Этот процесс можно реально наблюдать, например, при турбулизации струи, бьющей из какого-то отверстия и распространяющейся затем в пространстве, заполненном той же (но неподвижной) жидкостью (границу такой струи, очевидно, можно рассматривать как поверхность тангенциального разрыва скорости). Аккуратный количественный анализ неустойчивости поверхности тангенциального разрыва скорости был выполнен Гельмгольцем (1868) (ср. Ламб (1932), § 232 или Ландау и Лифшиц (1953), § 30). При наличии вязкости скольжение двух слоев жидкости друг по другу, разумеется, будет невозможным, и вместо поверхности разрыва мы будем иметь между двумя течениями узкий переходной слой, в котором профиль скорости будет иметь S-образную форму. Вопрос об устойчивости такого слоя является более сложным; однако и здесь удается показать (и теоретически и экспериментально), что он является весьма мало устойчивым (см. ниже п. 2.8). Заметим еще, что абсолютная неустойчивость поверхности тангенциального разрыва скорости представляет собой лишь простейший случай так называемой *неустойчивости Гельмгольца* — абсолютной неустойчивости специального типа поверхностей раздела, отделяющих друг от друга области течения, заполненные одной и той же или разными жидкостями, движущимися с разной скоростью. Обзор основных относящихся сюда результатов и ссылки на дальнейшую литературу можно найти в статье Биркгофа (1962).

Другим простейшим примером абсолютной неустойчивости является равновесие в поле тяжести жидкости с переменной по оси z плотностью в случае возрастания плотности с высотой. Легко понять, что при любом законе изменения с высотой плотности $\rho = \rho(z)$ несжимаемой жидкости уравнения движения будут допускать решение $\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = 0$, соответствующее состоянию покоя; при этом только при наличии поля тяжести давление должно меняться с высотой по закону

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \text{т. е.} \quad p(z) = g\int_z^\infty \rho(z')\,dz' + \text{const}. \tag{2.2}$$

Пусть теперь вследствие какого-то возмущения некоторый элемент жидкости переместится с уровня z на новый уровень $z' = z + h$. Если плотность ρ убывает с высотой, то при $h > 0$ наш элемент будет под действием силы тяжести стремиться опуститься вниз, а при $h < 0$ под действием архимедовой силы он будет стремиться подняться наверх, так что равновесие будет

устойчивым. Однако если плотность возрастает с высотой, то при любом знаке h переместившийся элемент жидкости будет стремиться еще дальше удалиться от своего первоначального положения, и состояние равновесия будет абсолютно неустойчивым. Заметим еще, что в случае идеальной жидкости (не обладающей трением) уравнения движения будут при любом $\rho = \rho(z)$ допускать также стационарное решение с произвольным вертикальным профилем x-компоненты скорости $u = u(z)$ (и нулевыми компонентами скорости по двум другим осям), причем в силу тех же соображений и это течение будет абсолютно неустойчиво при $d\rho/dz > 0$. В случае $d\rho/dz < 0$ вопрос об устойчивости такого течения заметно более сложен; заранее можно лишь сказать, что в силу соображений подобия критерий устойчивости здесь должен выражаться через значение так называемого *числа Ричардсона* — безразмерного параметра

$$\mathrm{Ri} = \frac{-\dfrac{g}{\rho}\dfrac{d\rho}{dz}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{2.3}$$

Случай расслоенной по оси z жидкости представляет большой интерес для метеорологических задач, в которых такое расслоение вызывается наличием определенного профиля температуры $T = T(z)$. В этом случае, однако, мы не можем просто считать жидкость несжимаемой, а должны привлечь к ее рассмотрению уравнение состояния и элементарные термодинамические тождества (см., например, Ландау и Лифшиц (1953), ч. 1, § 4). При этом оказывается, что элемент жидкости, переместившийся с уровня z на уровень $z + h$, будет при $h > 0$ более легким, чем окружающий его воздух, а при $h < 0$ более тяжелым, чем окружающий его воздух, тогда и только тогда, когда

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{2.4}$$

где под T теперь понимается абсолютная температура, а V — удельный объем. Условие (2.4) и будет условием абсолютной неустойчивости состояния покоя при наличии профиля $T = T(z)$ поля температуры. В случае, когда среду можно считать идеальным газом, $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \dfrac{R}{p} = \dfrac{V}{T}$, так что критерий неустойчивости будет иметь вид

$$\frac{dT}{dz} < -\frac{g}{c_p} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{g}{R}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.5}$$

(в таком виде это условие можно найти во всех курсах динамической метеорологии). Величина $G_a = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\dfrac{g}{R}$ в метеорологии называется *адиабатическим градиентом температуры* (для воздуха этот градиент равен приблизительно 1° С/100 м). Термическое расслоение воздуха, при котором $-(dT/dz)$ больше, равно или меньше G_a, называется соответственно устойчивой, безразличной или неустойчивой стратификацией.

Еще один способ представления условия неустойчивости (2.4) или (2.5), также часто использующийся в метеорологии, связан с введением вместо обычной температуры T так называемой *потенциальной температуры*

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \tag{2.6}$$

где p_0 — некоторое стандартное давление (обычно принимаемое равным нормальному давлению на уровне моря). В силу выражения для энтропии идеального газа, приведенного на стр. 70, $c_p \ln\theta = s + \text{const}$. Отсюда ясно, что при адиабатических процессах потенциальная температура не меняется, так что θ равно температуре, которую будет иметь воздух, если его адиабатически привести к стандартному давлению p_0. Легко видеть, что $\frac{d\theta}{dz} \sim \frac{dT}{dz} - G_a$, поэтому с помощью понятия о потенциальной температуре критерий неустойчивости (2.4) может быть сформулирован следующим образом: состояние покоя будет неустойчивым, если $d\theta/dz<0$ (т. е. если потенциальная температура убывает с высотой), и будет устойчивым, если $d\theta/dz > 0$ (т. е. если потенциальная температура возрастает с высотой).

При наличии произвольного профиля скорости ветра движение в случае неустойчивой стратификации все равно будет неустойчивым; в случае же устойчивой стратификации устойчивость или неустойчивость движения должна как-то определяться значением числа Ричардсона

$$\mathrm{Ri} = \frac{\frac{g}{T}\left(\frac{dT}{dz} - G_a\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2}. \tag{2.3'}$$

2.5. Математическая формулировка вопроса об устойчивости относительно малых возмущений

Условия возникновения турбулентности далеко не всегда удается выяснить столь простыми средствами, как это имело место в изложенных выше примерах. В общем случае эффективным средством исследования устойчивости является так называемый *метод малых возмущений,* идею которого мы сейчас изложим в применении к движениям несжимаемой жидкости постоянной плотности ρ.

Метод малых возмущений состоит в том, что поля скорости $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ и давления $p(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие уравнениям гидродинамики, пишутся в виде $u_i = U_i + u_i'$, $p = P + p'$, где $U_i(\boldsymbol{x}, t)$ и $P(\boldsymbol{x}, t)$ представляют собой частное решение тех же уравнений, устойчивость которого исследуется, а u_i', p' — малое возмущение. Учитывая, что поля U_i и P сами удовлетворяют уравнениям гидродинамики, и пренебрегая квадратичными выражениями относительно возмущений, удается для u_i' и p' получить

линейные уравнения вида

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i', \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Продифференцировав уравнение (2.7), содержащее $\partial u_i'/\partial t$, по x_i, просуммировав результат по i и использовав последнее уравнение (2.7), можно выразить p' через u_i' с помощью формулы, аналогичной формуле (1.9'). Поэтому общее решение системы (2.7) будет определяться заданием одних лишь начальных значений $u_i'(\boldsymbol{x}, 0)$ функций $u_i'(\boldsymbol{x}, t)$. При этом можно (по крайней мере в принципе) попытаться установить условия, при которых не все решения соответствующей задачи с начальными условиями будут затухать во времени; эти условия и будут условиями абсолютной неустойчивости [1]) решения U_i, P. Разумеется, если даже соответствующие условия и не будут выполняться, так что решение U_i, P будет абсолютно устойчиво (относительно малых возмущений), остается еще возможность, что относительно конечных возмущений $u_i' \sim p'$ (описываемых существенно нелинейными уравнениями) это решение все же будет неустойчиво, т. е. что течение, описываемое этим решением, будет представлять собой систему с жестким возбуждением. Однако для того, чтобы опровернуть и эту возможность, требуются уже существенно иные методы исследования (см. ниже п. 2.9).

В случае, когда решение $U_i = U_i(\boldsymbol{x})$, $P = P(\boldsymbol{x})$ описывает стационарное ламинарное течение жидкости, коэффициенты системы уравнений (2.7), очевидно, не будут зависеть от времени. В таком случае эта система будет допускать частные решения вида

$$u'(\boldsymbol{x}, t) = e^{-i\omega t} f_\omega(\boldsymbol{x}), \qquad p'(\boldsymbol{x}, t) = e^{-i\omega t} g_\omega(\boldsymbol{x}), \tag{2.8}$$

зависимость которых от времени задается экспоненциальным множителем $e^{i\omega t}$ с, вообще говоря, комплексной «частотой» ω. Допустимые значения «собственных частот» ω и отвечающие им

[1]) Отметим, что терминология здесь не является вполне установившейся. Часто под условиями абсолютной неустойчивости понимают условия, при которых уравнения (2.7) будут иметь возрастающие по абсолютной величине решения, т. е. случаи наличия только затухающих и ограниченных решений причисляют к устойчивым. Нам здесь, однако, будет более удобно считать неустойчивыми также и течения, для которых существуют ограниченные (но незатухающие) возмущения.

«амплитуды» $\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})$, $g_\omega(\boldsymbol{x})$ при этом будут определяться из некоторой задачи на собственные значения для линейной системы уравнений с частными производными. В тех случаях, когда коэффициенты этой системы не зависят от каких-то пространственных координат, число независимых переменных, входящих в полученную систему, можно уменьшить, предположив заранее, что зависимость амплитуд $\boldsymbol{f}_\omega$ и g_ω от соответствующих координат будет также экспоненциальной с фиксированным «волновым числом» (т. е. зафиксировав заранее пространственный масштаб возмущения в направлении осей координат, по которым невозмущенное течение является однородным). Так, например, если невозмущенное течение зависит только от координаты x_3, то можно положить

$$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x}) = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3), \quad g_\omega(\boldsymbol{x}) = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}g_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3); \quad (2.9)$$

при этом собственные частоты $\omega = \omega(k_1, k_2)$ и амплитуды $\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1,\,k_2}$ и $g_{\omega;\,k_1,\,k_2}$ будут уже определяться из задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей параметры k_1 и k_2. Аналогичные формулы, в которых лишь $\exp[i(k_1x_1+k_2x_2)]$ заменяется на $\exp(ik_1x_1)$, а $\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3)$ и $g_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3)$ — на $\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1}(x_2, x_3)$ и $g_{\omega;\,k_1}(x_2, x_3)$ будут иметь место для течения, существенно зависящего лишь от x_2 и x_3.

Существенно, что весьма часто собственные функции $\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})$ оказываются образующими полную систему функций в пространстве всех векторных функций $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$, удовлетворяющих уравнению неразрывности $\partial f_i/\partial x_i$ и соответствующим краевым условиям (если $\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x}) = e^{ik_1x_1}\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1}(x_2, x_3)$ или $\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x}) = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3)$, то для этого, разумеется, достаточно, чтобы функции $\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1}(x_2, x_3)$ или $\boldsymbol{f}_{\omega;\,k_1,\,k_2}(x_3)$ при любом фиксированном k_1 или фиксированных k_1, k_2 образовывали полную систему функций в пространстве соответствующих векторных функций от двух или одного переменного) [1]). В таком случае любое начальное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)$ можно разложить в ряд (или интеграл) по этим собственным функциям. Поэтому общее решение задачи с начальными условиями для системы уравнений (2.7) здесь может быть представлено в виде суперпозиции элементарных решений, экспоненциально зависящих от времени, так что общая задача об устойчивости может быть сведена к изучению лишь соответствующей задачи на собственные значения. А именно, здесь для устойчивости рассматриваемого ламинарного течения по отношению к малым возмущениям необходимо и достаточно, чтобы у всех возможных «собственных частот» ω мнимая часть $\Im m\omega$ была отрицательной. При наличии пространственной однородности по каким-то координатам различные собственные частоты ω будут, вообще говоря, зависеть от пространственных «масштабов» возмущений (т. е. от волновых чисел k_1 или k_1 и k_2) и от числа Re. Ясно, что при $\mathrm{Re} \to 0$ мнимые части всех частот ω будут стремиться к отрицательным значениям (так как при $\rho = \mathrm{const}$ состояние покоя всегда устойчиво). Однако при возрастании Re мнимые части некоторых частот могут возрастать и, в конце концов, становиться положительными. Предположим, что задача на собственные значения, отвечающая фиксированному масштабу возмущений (т. е. фиксированным k_1 или k_1 и k_2), имеет дискретный спектр собственных частот ω_j (это предположение выполняется для многих важных течений). В таком случае критическое число Re, соответствующее границе устойчивости ламинарного течения по отношению к малым возмущениям данного масштаба, будет определяться из уравнения $\max \Im m\omega_j = 0$, где $\Im m\omega$ означает мнимую часть числа ω. Наименьшее из таких критических значений Re для возмущений различных масштабов будет критическим числом Re_{cr} потока в целом, т. е. при $\mathrm{Re} \geqslant \mathrm{Re}_{cr}$ рассматриваемое ламинарное течение будет абсолютно неустойчивым, а при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ — устойчивым. Заметим еще только, что введенное здесь число Re_{cr}, характеризующее абсолютную неустойчивость, очевидно, должно быть не меньше, чем критическое число Рейнольдса, характеризующее устойчивость потока относительно возмущений конечной амплитуды. Поэтому, следуя обозначениям, использованным на стр. 82, его можно было бы обозначить как $\mathrm{Re}_{cr\,max}$. С другой стороны, однако, наличие неустойчивости при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr\,max}$ означает только, что при таких числах Рейнольдса соответствующее ламинарное течение не может существовать, но совсем не означает еще, что оно обязательно перейдет в турбулентное течение. В самом деле, вообще говоря, возможно, что при нарушении устойчивости данное ламинарное течение превратится в новое ламинарное течение, являющееся уже устойчивым, а переход к турбулентности осуществится лишь при нарушении устойчивости и этого нового ламинарного течения при

[1]) С математической точки зрения возникающие здесь задачи на собственные значения являются задачами о собственных значениях некоторого линейного несамосопряженного оператора в функциональном пространстве. Для установления полноты системы собственных функций (или хотя бы собственных и родственных им присоединенных функций) такого оператора в ряде случаев можно воспользоваться теоремой Келдыша (1951) (см. также Келдыш и Лидский (1963)).

числах Рейнольдса, значительно превосходящих $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,max}}$ (см. примеры в пп. 2.6—2.7).

В заключение подчеркнем еще раз, что возможность разложения произвольного решения системы (2.7) в ряд по специальным решениям вида (2.8) будет иметь место часто, но все же не всегда — это обстоятельство часто забывается при рассмотрении задач гидродинамической теории устойчивости. В частности, более сложная ситуация возникает, если система (2.7) оказывается сингулярной (т. е., например, если какой-то коэффициент при старшей производной у этой системы где-то обращается в нуль). В таком случае полнота системы собственных функций не может быть просто доказана, и даже само понятие собственной функции должно определяться с осторожностью. Дело в том, что здесь часто и при фиксированном масштабе возмущения возникает непрерывный спектр собственных значений, которому отвечают собственные функции, удовлетворяющие более сложным, чем обычно, граничным условиям или имеющие более сложную структуру (например, не убывающие на бесконечности или имеющие разрывы производных в особой точке). В приложениях такие более сложные «собственные функции» часто просто упускаются из виду, в результате чего система «элементарных решений» вида (2.8) оказывается заведомо неполной (ср. Кэйз (1962), Линь (1961), Линь и Бенни (1962)). В тех случаях, когда система функций по каким-то причинам оказывается неполной, исследование одной лишь соответствующей задачи на собственные значения недостаточно для решения задачи об устойчивости, и для полного выяснения вопроса приходится исследовать поведение общего решения соответствующей задачи с начальными условиями. Такое исследование весьма сложно; однако в частном случае идеальной жидкости с $\nu = 0$ оно тем не менее позволило получить ряд вполне окончательных результатов (см. работы Дикого (1960а, б) и Кэйза (1960а, б), о которых подробнее еще будет говориться ниже).

2.6. Устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами

Одним из важных примеров абсолютной неустойчивости, допускающей полный математический анализ, является неустойчивость движения Куэтта между цилиндрами — плоского стационарного течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами. Пусть R_1 и Ω_1 — радиус и угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, а R_2 и Ω_2 — внешнего. В цилиндрических координатах r, φ, z с осью Oz по оси цилиндров поле

скорости стационарного течения определяется формулами

$$U_r = U_z = 0, \quad U_\varphi = Ar + \frac{B}{r}, \qquad A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = -\frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}, \tag{2.10}$$

вывод которых был приведен выше (см. формулу (1.28) на стр. 44).

Пренебрегая сперва действием вязкости, можно определить критерий неустойчивости из следующих элементарных физических соображений. При стационарном ламинарном течении действующая на элементы жидкости центробежная сила уравновешивается радиальным градиентом давления. Пусть теперь элемент массы m сместился под действием возмущения из положения с координатой r_0 в положение с координатой $r > r_0$. Тогда в силу закона сохранения момента количества движения $mrU_\varphi(r)$ в новом положении его скорость будет равна $r_0 U_\varphi(r_0)/r$ и, следовательно, на него будет действовать центробежная сила $m\frac{r_0^2}{r^3}U_\varphi^2(r_0)$. Равновесие будет неустойчивым, если эта сила окажется больше ее равновесного значения на расстоянии r от оси, равного по величине градиенту давления на расстоянии r. Следовательно, условие неустойчивости (которое для рассматриваемого здесь течения невязкой жидкости было установлено Рэлеем (1916а)) будет иметь вид

$$[r_0 U_\varphi(r_0)]^2 - [rU_\varphi(r)]^2 > 0 \quad \text{при} \quad r > r_0,$$

или, иначе,

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU_\varphi)^2 < 0. \tag{2.11}$$

С помощью формулы (2.10) критерий неустойчивости Рэлея приводится к виду $(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) U_\varphi < 0$. Если цилиндры вращаются в разные стороны, то U_φ где-то между цилиндрами меняет знак; таким образом, в этом случае течение наверное будет неустойчивым. При одинаковом направлении вращения цилиндров можно положить $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$, и тогда всюду будет $U_\varphi > 0$; при этом рэлеевский критерий неустойчивости принимает вид

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2. \tag{2.12}$$

Аккуратный математический вывод этого результата с помощью применения к движению невязкой жидкости методов теории

возмущений был дан Сингом (1933) для случая осесимметричных (т. е. не зависящих от φ) возмущений поля скорости и Чандрасекаром (1960) для случая произвольных возмущений этого поля.

Более полный анализ (учитывающий также влияние вязкости) может быть осуществлен только с помощью метода малых возмущений, впервые примененного к данной задаче Тэйлором (1923). Так как невозмущенное поле скорости (2.10) здесь зависит только от координаты r, то, следуя (2.8) и (2.9), возмущение скорости и давления здесь можно искать в виде

$$\begin{aligned} u_r'(x, t) &= e^{i(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(r)}(r), \quad & u_\varphi'(x, t) &= e^{i(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(\varphi)}(r), \\ u_z'(x, t) &= e^{i(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(z)}(r), \quad & p'(x, t) &= e^{i(kz+n\varphi-\omega t)}g(r), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $2\pi/k$ — длина волны возмущения в направлении оси Oz, n — целое неотрицательное число, определяющее зависимость возмущения от угла φ, а $f(r) = f_{\omega;\,k,\,n}(r) = (f^{(r)}(r), f^{(\varphi)}(r), f^{(z)}(r))$ и $g(r) = g_{\omega;\,k,\,n}(r)$ — зависящие от r «амплитуды» возмущения с заданной длиной волны, заданным значением n и собственной частотой ω. Подставляя формулы (2.10) и (2.13) в общую систему уравнений (2.7) и учитывая граничные условия $u'(r, \varphi, z, t) = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$, мы придем к задаче на собственные значения, определяющей спектр частот ω, допустимых при данных k и n. Можно показать (см., например, Ди Прима (1961)), что эта задача после некоторых преобразований (включающих, в частности, исключение из полученной системы функций $f^{(z)}$ и g) может быть сведена к следующей системе дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $f^{(r)}$ и $f^{(\varphi)}$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left[N\left(\frac{df^{(r)}}{dr}+\frac{f^{(r)}}{r}\right)\right]-k^2\left(N+\frac{\nu}{r^2}\right)f^{(r)} = \\ &\qquad = -2k^2\left(A+\frac{B}{r^2}-i\,\frac{n\nu}{r^2}\right)f^{(\varphi)}-in\,\frac{d}{dr}N\left(\frac{f^{(\varphi)}}{r}\right), \\ &-k^2\left(N+\frac{\nu}{r^2}\right)f^{(\varphi)}-\frac{n^2}{r}N\left(\frac{f^{(\varphi)}}{r}\right) = \\ &\qquad = 2k^2\left(A-i\,\frac{n\nu}{r^2}\right)f^{(r)}-\frac{in}{r}N\left(\frac{df^{(r)}}{dr}+\frac{f^{(r)}}{r}\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где A и B определяются из (2.10), а N — это дифференциальный оператор

$$N = -\nu\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}-k^2\right)-i\left(\omega-\frac{nU_\varphi(r)}{r}\right). \tag{2.15}$$

Граничные условия, при которых должна решаться система шестого порядка (2.14), имеют вид

$$f^{(r)}(r) = f^{(\varphi)}(r) = \frac{df^{(r)}}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1 \quad \text{и} \quad r = R_2. \tag{2.16}$$

По-видимому, нетрудно показать, что задача (2.14) — (2.16) всегда имеет дискретное множество собственных значений $\omega_j = \omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$, причем соответствующие собственные функции $f^{(r)}_{\omega;\,k,\,n}(r)$, $f^{(\varphi)}_{\omega;\,k,\,n}(r)$ образуют полную систему в пространстве пар функций $(f^{(r)}, f^{(\varphi)})$, удовлетворяющих граничным условиям (2.16). Отсюда уже вытекает, что определяемые с помощью (2.13) начальные поля $u'(x, 0)$, отвечающие собственным функциям со всевозможными k и целыми неотрицательными n, будут образовывать полную систему функций в пространстве векторных функций от $x = (r, \varphi, z)$, удовлетворяющих условию соленоидальности и обращающихся в нуль при $r = R_1$ и $r = R_2$. Таким образом, исследование задачи на собственные значения (2.14) — (2.16) полностью исчерпывает исследование устойчивости течения Куэтта между цилиндрами. Однако сама эта задача на собственные значения столь сложна, что она до сих пор остается неизученной [1]).

Вместо того, чтобы рассматривать общую систему уравнений (2.14), почти все исследователи, занимавшиеся вопросом об устойчивости течения Куэтта между цилиндрами, заранее предполагали, что $n = 0$, т. е. ограничивались лишь осесимметричными возмущениями поля скорости основного течения. В таком случае эта система заметно упрощается и, как нетрудно видеть, может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \left(L-k^2+\frac{i\omega}{\nu}\right)(L-k^2)f^{(r)}(r) &= \frac{2k^2}{\nu}\left(A+\frac{B}{r^2}\right)f^{(\varphi)}(r), \\ \left(L-k^2+\frac{i\omega}{\nu}\right)f^{(\varphi)}(r) &= \frac{2}{\nu}Af^{(r)}(r), \end{aligned} \tag{2.17}$$

где

$$L = \frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right). \tag{2.17'}$$

[1]) Кажется, единственным исключением в этом отношении является работа Ди Прима (1961), в которой при ряде упрощающих предположений (включающих, в частности, предположение о малости зазора между цилиндрами $d = R_2 - R_1$ по сравнению со средним радиусом $R_0 = (R_1+R_2)/2$ для некоторых значений R_2/R_1 и $n = 0$, 1, 2 или 3) приближенно (и притом довольно грубо) оцениваются численно те наименьшие значения $\mathrm{Re} = d^2\Omega_1/\nu$, при которых впервые хоть одно собственное значение системы (2.14)—(2.16) будет иметь неотрицательную мнимую часть. Полученные при этом результаты полностью согласуются с гипотезой о том, что раньше всего неотрицательная мнимая часть всегда появляется у собственного значения с $n = 0$.

Краевая задача (2.17) — (2.16) при фиксированном k имеет счетное число собственных значений $\omega_j = \omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$ и собственных функций $f_j(r) = f^{(\varphi)}_{\omega_j; k}(r)$. Однако соответствующие функции $e^{ikz} f_{\omega_j; k}(r)$ теперь уже, разумеется, не будут образовывать полную систему в пространстве допустимых начальных полей $u'(x, 0) = u'(r, \varphi, z)$ (хотя бы потому, что все эти функции не зависят от φ). Тем не менее, обычно область пар (Ω_1, Ω_2), которым отвечают неустойчивые возмущения вида $\exp[i(kz - \omega t)] f(r)$ (т. е. возмущения такого вида с $\Im m\, \omega \geqslant 0$), просто отождествляются со всей областью неустойчивости (см., например, Линь (1955), Чандрасекар (1961), Дж. Стюарт (1963)). Иначе говоря, обычно предполагается (хотя это и не всегда специально оговаривается), что при всех значениях R_1, R_2, Ω_1 и Ω_2, при которых имеется хоть одно собственное значение $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$ с $n \neq 0$ и $\Im m\, \omega_j \geqslant 0$, будет иметься также и значение $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$ (отвечающее $n = 0$) с $\Im m \omega_j \geqslant 0$ (т. е. что при возрастании числа Рейнольдса неотрицательная мнимая часть у $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$ всегда раньше всего появляется при $n = 0$). Так как данные экспериментов, как будет видно из дальнейшего, прекрасно подтверждают совпадение области неустойчивости, определяемой из рассмотрения одних лишь осесимметричных возмущений, со всей областью неустойчивости течения между вращающимися цилиндрами, то они подтверждают тем самым и это последнее предположение (см. также сноску на стр. 105).

Будем теперь считать радиусы R_1 и R_2 фиксированными. Нетрудно видеть, что при достаточно малых Ω_1 и Ω_2 все собственные значения $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ и $\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2)$ будут иметь отрицательную мнимую часть (так как состояние покоя всегда устойчиво). Если же мы будем увеличивать угловые скорости Ω_1 и Ω_2, не меняя отношения Ω_2/Ω_1 (что в данном случае соответствует увеличению числа Рейнольдса без нарушения геометрического подобия), то при некоторых Ω_2/Ω_1 нулевая мнимая часть ни у одного $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ так и не появится (т. е. движение все время останется устойчивым), в то время как при других значениях Ω_2/Ω_1 при некотором $\mathrm{Re}_{cr} = \Omega_2 R_2^2/\nu$ впервые появится значение k_{cr} такое, что какое-то $\omega_j(k_{cr}, \Omega_1, \Omega_2)$ будет уже иметь нулевую мнимую часть (т. е. движение станет неустойчивым).

Любопытно, что в этой задаче при всех Ω_2/Ω_1 потеря устойчивости имеет место в связи с появлением собственного значения ω_j такого, что не только $\Im m\, \omega_j = 0$, но и вообще $\omega_j = 0$ (точное математическое доказательство этого факта, по-видимому,

было дано лишь для случая, когда $R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$, в работах Пэлью и Саусвелла (1940) и Мексина (1946); однако и данные экспериментов и результаты численных расчетов подтверждают, что на самом деле он имеет общий характер). Это значит, что при потере устойчивости течения Куэтта между цилиндрами появляется новое стационарное движение с полем скорости $u = U + u'$, где $u' = \exp(ikz) f(r)$ (такое движение имеет характер ряда вихрей, расположенных в меридиональных плоскостях). То, что переход от устойчивого состояния к неустойчивому происходит через стационарное состояние, которому отвечает чисто нулевое собственное значение $\omega = 0$, в работах по гидродинамической теории устойчивости иногда называется *принципом смены устойчивости*. В свое время этому принципу придавалось большое значение, но в настоящее время известно, что он выполняется лишь в некоторых специальных случаях и нарушается для многих простых течений (например, для плоского течения Пуазейля). При дальнейшем возрастании числа Re появляется целый интервал значений k, для которых имеются собственные значения ω_j с $\Im m \omega_j \geqslant 0$. Опыт показывает, однако, что при этом возмущенное движение довольно долго еще имеет характер совокупности стационарных периодических вихрей, но уже с периодом, который не может быть определен из линейной теории (ср. ниже п. 2.9). При дальнейшем значительном возрастании Re и это периодическое движение в конце концов становится неустойчивым и переходит в неупорядоченное турбулентное движение.

Хотя краевая задача (2.17)—(2.16) значительно проще, чем (2.14) — (2.16) [1]), вычисление соответствующих собственных значений $\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$ все равно наталкивается на значительные трудности. Поэтому первоначально это вычисление было осуществлено Тэйлором (1923) лишь в предположении очень узкого зазора между цилиндрами (т. е. при $R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$), позволяющем еще значительно упростить исходные уравнения. Метод Тэйлора основан на разложении решений системы уравнений (2.17) по некоторой специальной ортонормированной системе функций; при этом рассматриваемые дифференциальные уравнения, очевидно, сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Позже этот метод был несколько усовершенствован Сингом (1938); другие численные методы (в частности, метод, опирающийся на сведение рассматривае-

[1]) Отметим, в частности, что в силу справедливости для задачи (2.17)—(2.16) принципа смены устойчивости при определении границы области устойчивости здесь можно считать, что $\omega = 0$. В случае же задачи (2.14)—(2.16) с $n \neq 0$ этот принцип не выполняется, и поэтому в расчетах участвует дополнительный параметр $\Re e\, \omega$.

мой краевой задачи к некоторой вариационной задаче, и метод Галеркина), также применимые только в случае узкого зазора между цилиндрами, были развиты Пэлью и Саусвеллом (1940), Мексином (1946), Чандрасекаром (1954, 1961), Ди Прима (1955), Стайнмен (1956), Дьюти и Ридом (1964) и другими авторами. Лишь сравнительно недавно Виттинг (1958) предложил более общий подход, использующий разложение решений по степеням параметра d/R_0 (где $d = R_2 - R_1$, $R_0 = (R_1 + R_2)/2$), а в работах Чандрасекара (1958), Чандрасекара и Элберт (1962), Кирхгеснера (1961) и Спэрроу, Мунро и Джонсона (1964) были разработаны еще более общие методы численного решения задачи о собственных значениях (2.17)—(2.16) при произвольных R_1 и R_2. Заметим еще, что сам факт неустойчивости течения вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами при некоторых значениях Ω_1 и Ω_2 был строго доказан Крыловым (1963) без всякого использования численных методов, но такое доказательство не дает возможности определить границу области неустойчивости. Численные же методы позволяют найти эту границу с большой степенью точности и показывают, что она во всех случаях имеет примерно одинаковую форму.

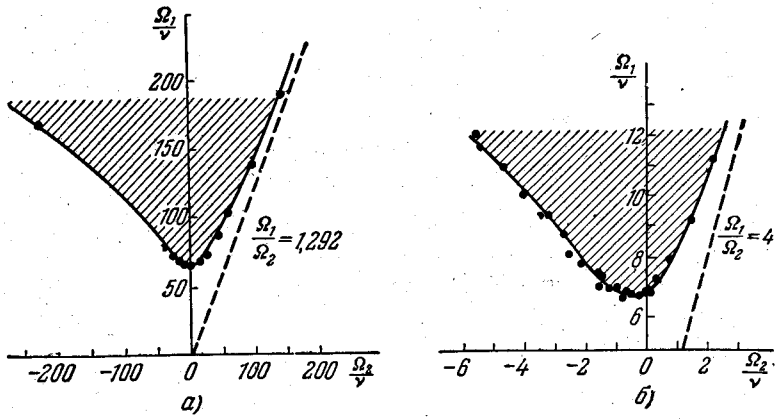


Рис. 13. Расположение области неустойчивости на плоскости (Ω_1, Ω_2) для течения Куэтта между цилиндрами при двух значениях отношения R_2/R_1.

Область неустойчивости на рисунке заштрихована. Пунктиром нанесена граница области неустойчивости для соответствующего течения невязкой жидкости (по Рэлею).

Для примера мы воспроизводим на рис. 13, *а* расположение области плоскости (Ω_1, Ω_2), в которой возможны неустойчивые возмущения, не зависящие от φ, при $R_2/R_1 = 1{,}13$ (по расчетам Тэйлора, прекрасно согласующимся и со всеми последующими расчетами), а на рис. 13, *б* — расположение той же области при $R_2/R_1 = 2$ (по расчетам Чандрасекара). В обоих случаях (а также и при всех других R_2/R_1) в области $\Omega_2/\Omega_1 > (R_1/R_2)^2$ ни при каких Re не возникает неустойчивости, так что вязкость здесь может иметь лишь стабилизирующее значение. В области же $\Omega_2/\Omega_1 < (R_1/R_2)^2$ согласно данным рис. 13 при достаточно большом Re обязательно возникает абсолютная неустойчивость. В незаштрихованной на рис. 13 области движение оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, но, как показывает опыт, при достаточно больших Re оно все же неустойчиво по отношению к возмущениям конечной величины, причем в этом случае потеря устойчивости приводит к спонтанному образованию развитой турбулентности. Граница области устойчивости, рассчитанная Тэйлором, прекрасно совпала с опытными данными, найденными и им самим, и рядом других исследователей, и это явилось первым большим успехом гидродинамической теории возмущений (см. рис. 13, *а*, на котором точками указаны эмпирические значения ряда пар (Ω_1, Ω_2), при которых впервые возникает потеря устойчивости). Расчеты для случая $R_2/R_1 = 2$ также прекрасно подкрепляются имеющимися опытными данными Доннели и Фультца (1960) (точки на рис. 13, *б*; ср. также Доннели (1962)).

2.7. Устойчивость слоя жидкости, подогреваемой снизу

При наличии в жидкости вертикального градиента температуры, направленного сверху вниз, архимедовы силы, очевидно, действуют на поток дестабилизирующим образом, аналогичным действию сил инерции при криволинейном движении жидкости, при котором скорость вращения жидкости убывает при удалении от центра кривизны. Наоборот, градиент температуры, направленный снизу вверх, действует на течение стабилизирующим образом, т. е. так же, как действует при криволинейном движении возрастание скорости при удалении от центра кривизны. Поэтому неудивительно, что задача об устойчивости тонкого слоя жидкости между двумя бесконечными плоскостями, имеющими разные температуры, оказывается математически весьма близкой к задаче об устойчивости течения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами [1]). При решении указанной задачи, очевидно, надо исходить из системы

[1]) Джефрис (1928) показал, что первая из этих задач фактически эквивалентна частному случаю второй (ср. Линь (1955), § 7.3). См. также работу Гертлера (1959), в основе которой лежит аналогия между учетом центробежных сил и архимедовых сил при исследовании устойчивости сравнительно широкого класса гидродинамических течений.

уравнений свободной конвекции, рассмотренной в конце п. 1.5. Если принять, что жидкость ограничена плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = H$, поддерживаемыми при постоянных температурах T_0 и T_1, то к этим уравнениям надо еще добавить граничные условия $u_i = 0$, $T = T_0$ при $x_3 = 0$; $u_i = 0$, $T = T_1$ при $x_3 = H$; в случае же свободной поверхности жидкости постоянной температуры граничное условие для поля скорости изменяется так, чтобы оно обеспечивало постоянство давления на этой поверхности. Стационарным состоянием, устойчивость которого нас интересует, здесь будет состояние покоя, при котором [1])

$$u_i = 0, \quad T = T(x_3) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{H} x_3, \qquad p = p(x_3) = p_0 - g\rho x_3. \tag{2.18}$$

Полагая $T = T(x_3) + T'$, $p = p(x_3) + p'$ и линеаризуя уравнения свободной конвекции относительно возмущений u_i, T' и p', мы придем к системе пяти уравнений с пятью неизвестными, из которой нетрудно исключить все переменные, кроме T'. Если теперь перейти к безразмерным переменным и затем, следуя (2.8) и (2.9), искать $T'(\boldsymbol{x}, t)$ в виде произведения

$$T'(\boldsymbol{x}, t) = \exp\left[i\left(\frac{k_1 x_1}{H} + \frac{k_2 x_2}{H} - \frac{\omega \nu t}{H^2}\right]\theta(\zeta), \quad \zeta = \frac{x_3}{H}, \tag{2.19}$$

то можно прийти к следующей задаче на собственные значения:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2\right)\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega\right)\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega \cdot \mathrm{Pr}\right)\theta + k^2 \mathrm{Ra} \cdot \theta = 0, \tag{2.20}$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \mathrm{Pr} = \nu/\chi, \quad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta(T_0 - T_1)H^3}{\nu\chi},$$

с граничными условиями на твердых поверхностях фиксированной температуры

$$\theta = \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + i\omega \mathrm{Pr}\right)\theta = 0 \tag{2.20'}$$

и на свободных поверхностях фиксированной температуры

$$\theta = \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = \frac{d^4\theta}{d\zeta^4} = 0 \tag{2.20''}$$

[1]) В соответствии с предположениями приближенной теории свободной конвекции мы считаем изменения плотности ρ с высотой столь малыми, что их можно не учитывать в уравнениях для возмущений. Поэтому излагаемые здесь результаты применимы лишь в случае сравнительно тонких слоев с небольшими H. Заметим, впрочем, что в случае слишком тонких слоев жидкости (при H порядка нескольких миллиметров) эти результаты опять же оказываются неприменимыми из-за нарушения условия линейности профиля температуры и некоторых других условий, принимаемых в рассматриваемой теории (см. Саттон (1950), Сиджел и Дж. Стюарт (1962)).

(см., например, Чандрасекар (1961), Дж. Стюарт (1963), Линь (1955)). Близкие граничные условия получаются также для случаев, когда на поверхностях $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ фиксируется не температура, а поток тепла или связь между потоком тепла и температурой (ср., например, Спэрроу, Голдстайн и Джонсон (1964)). Во всех случаях мы приходим к задаче, которая при фиксированном числе Прандтля Pr содержит всего два параметра: волновое число k и число Рэлея Ra. Следовательно, любым заданным значениям k и Ra здесь будет отвечать свой набор собственных чисел $\omega_j(k, \mathrm{Ra})$. Оказывается, что при отрицательных или малых положительных значениях Ra (т. е. в случае, когда нижняя плоскость имеет более низкую температуру, или же когда нижняя плоскость подогрета относительно верхней, но не слишком сильно) все числа $\omega_j(k, \mathrm{Ra})$ при всех значениях k будут иметь отрицательную мнимую часть; начиная же с некоторого «критического значения» Ra_{cr} (т. е. с некоторой критической разности температур $T_0 - T_1$, зависящей также и от расстояния H между плоскостями) появляется значение $k = k_{cr}$, при котором одно из собственных значений $\omega_j(k_{cr}, \mathrm{Ra}_{cr})$ имеет нулевую мнимую часть. При этом, так же как и в задаче об устойчивости движения жидкости между вращающимися цилиндрами, здесь выполняется принцип смены устойчивости, т. е. первое собственное значение $\omega_j(k, \mathrm{Ra})$ с $\Im\mathrm{m}\,\omega_j = 0$ оказывается нулевым (строго математически этот факт был доказан Пэлью и Саусвеллом (1940)). Поэтому потеря устойчивости состояния покоя при достижении критической разности температур $T_0 - T_1$ приводит к возникновению стационарного конвективного движения, периодического по x_1 и x_2.

Качественно все основные черты процесса потери устойчивости в подогреваемой снизу жидкости были выяснены еще Рэлеем (1916б), разобравшим математически заметно более простую (но нереальную физически) задачу о конвекции в слое жидкости между двумя свободными поверхностями фиксированной температуры. Математически эта задача сводится к исследованию дифференциального уравнения (2.20) при краевых условиях (2.20'') при $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$. Для определения значений Ra_{cr} и k_{cr} достаточно рассмотреть уравнение (2.20) с $\omega = 0$, т. е. уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2\right)^3 \theta + k^2 \mathrm{Ra}\,\theta = 0. \tag{2.21}$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям (2.20'') при $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$, все имеют вид $\theta = \sin \pi n \zeta$, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому при достаточно больших значениях Ra мы будем иметь ряд различных нейтральных возмущений (с $\omega = 0$), волновые

числа которых будут удовлетворять соотношению

$$(\pi^2 n^2 + k^2)^3 = k^2 \mathrm{Ra}, \tag{2.22}$$

где n — целое число. Минимальное число Рэлея при каждом заданном k будет отвечать возмущению с $n = 1$; следовательно, Ra_{cr} здесь определяются из условия $\mathrm{Ra}_{cr} = \min_k \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2}$. Отсюда получаем: $\mathrm{Ra}_{cr} = 27\pi^4/4 \approx 657{,}5$, $k_{cr} = \pi\sqrt{2}/2 \approx 2{,}2$.

Для реального случая конвекции в слое между твердыми поверхностями фиксированной температуры аналогичный расчет в связи с большей сложностью граничных условий требует уже применения численных методов. Такой расчет был выполнен Джефрисом (1926) и Пэлью и Саусвеллом (1940) (см. также Линь (1955) и Чандрасекар (1961)); он показал, что в этом случае $\mathrm{Ra}_{cr} \approx 1708$ и $k_{cr} \approx 3{,}13$. Заметим еще, что значение k определяет лишь периодичность возникающего течения в плоскости (x_1, x_2), но не его форму; в самом деле, нетрудно видеть, что функцию $\exp[i(k_1 x_1/H + k_2 x_2/H)]$ в формуле (2.19) можно без изменения всех последующих выводов заменить произвольной функцией $\varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{k^2}{H^2}\varphi = 0. \tag{2.23}$$

Явный вид функции φ определяет форму ячеек, на которые распадается конвективное движение, но он не может быть однозначно определен исходя из линейной теории возмущений. Однако данные многочисленных экспериментов (описанных, например, в книге Чандрасекара (1961); см. также Дж. Стюарт (1963) и цитированную там литературу) определенно показывают, что возникающее течение обычно распадается на совокупность ячеек (так называемые *ячейки Бенара*) в виде шестигранных призм, в середине которых жидкость движется вверх, а по краям вниз или наоборот. Таким ячейкам соответствует вполне определенная форма функции φ, которая была указана Кристоферсоном (1940). Сопоставление отвечающих этой функции φ значений скорости с данными наблюдений ячеек Бенара можно найти в книге Чандрасекара (1961) и в статье Дж. Стюарта (1964) (использовавшего также результаты нелинейной теории конвекции, о которой будет речь в п. 2.9); оно приводит к хорошему согласию теории и эксперимента.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда верхняя поверхность жидкости является свободной поверхностью фиксированной температуры; в этом случае только граничное условие (2.20′) при $\zeta = 1$ должно быть заменено на (2.20″). В результате мы приходим к новой задаче на собственные значения, для которой численный расчет показывает, что здесь потеря устойчивости происходит при $\mathrm{Ra}_{cr} \approx 1100$ (Пэлью и Саусвелл (1940), Чандрасекар (1961)). Это значение Ra_{cr}, так же как и значение Ra_{cr} для конвекции между твердыми поверхностями, прекрасно подтверждается на опыте (см., например, Чандрасекар (1961), Саттон (1950)). Значения Ra_{cr}, отвечающие некоторым другим граничным условиям для температуры, можно найти в статье Спэрроу, Голдстайна и Джонсона (1964).

При дальнейшем повышении $T_0 - T_1$ (т. е. при увеличении Ra) после достижения значения Ra_{cr} стационарная «ячеистая» конвекция сперва сохраняет свой характер, а затем и она становится неустойчивой и при $\mathrm{Ra} \sim 500\,000$ возникает неупорядоченное турбулентное движение. Любопытно, что переход к турбулентному режиму здесь, по-видимому, происходит постепенно — в виде ряда дискретных «скачков», в результате каждого из которых устанавливается новый режим конвекции, менее упорядоченный, чем предыдущий (см. Малкус (1954а)).

2.8. Устойчивость плоскопараллельных течений и течений в трубе и в пограничном слое

Выше мы рассмотрели два примера применения метода возмущений к исследованию гидродинамической устойчивости. Однако с точки зрения экспериментатора или инженера оба эти примера являются довольно специальными. Значительно более удобными для экспериментальной проверки и важными для приложений являются случаи течения в круглой трубе и обтекания плоской пластинки (которым именно поэтому и было уделено основное внимание в начале настоящего параграфа). И если тем не менее в качестве иллюстрации метода возмущений прежде всего были рассмотрены течение между вращающимися цилиндрами и свободная конвекция в слое между двумя плоскостями постоянной температуры, то это объясняется тем, что в указанных двух случаях (по-видимому, из-за наличия дополнительных сил — центробежной в первом случае и архимедовой во втором) метод возмущений приводит к относительно простым задачам на собственные значения, позволяющим получить вполне законченные результаты. Что же касается до течений в трубах и в пограничном слое, то здесь применение метода возмущений наталкивается на очень значительные трудности, которые до сих пор никак еще нельзя считать полностью преодоленными.

В связи со сложностью математического анализа в случае течений в трубе и в пограничном слое громадное большинство

имеющих сюда отношение исследований посвящено рассмотрению лишь простейших плоскопараллельных двумерных течений, которые в какой-то степени можно считать моделями упомянутых выше реальных течений. Поэтому мы здесь также начнем с рассмотрения вопроса об устойчивости плоскопараллельных течений и лишь затем укажем, что известно о возможности перенесения получаемых при этом результатов на течения в трубе и в пограничном слое. Заметим еще, что в силу уравнений гидродинамики (1.6) стационарное плоскопараллельное течение жидкости с отличной от нуля вязкостью, при котором отлична от нуля лишь одна компонента поля скорости $U = u_1$, зависящая только от координаты $x_3 = z$, возможно только при условии, что профиль $U(z)$ зависит от z квадратично. Иначе говоря, такое течение всегда представляет собой комбинацию течения Куэтта с линейным профилем скорости и течения Пуазейля с параболическим профилем (см. примеры 1 и 2 на стр. 40—42). Учитывая, однако, что плоскопараллельные течения нас интересуют как возможные модели более сложных реальных течений, мы будем здесь рассматривать также и более сложные профили $U(z)$ в надежде на то, что получаемые при этом результаты можно будет затем применить и к потокам, не являющимся строго плоскопараллельными.

Итак, будем считать, что ось $Ox_1 = Ox$ направлена вдоль потока и что скорость основного течения не зависит от $x_2 = y$ и задается произвольной функцией $U(x_3) = U(z)$. Существенно отметить, что *при нахождении критерия неустойчивости такого плоскопараллельного течения можно ограничиться рассмотрением лишь двумерных возмущений вида* $\boldsymbol{u}' = \{u'(x, z, t), w'(x, z, t)\}$, так как более общие трехмерные возмущения теряют устойчивость позже (при бо́льших числах Рейнольдса), чем двумерные возмущения. Это утверждение, доказанное Сквайром (1933) (см. также Линь (1955), § 3.1), можно пояснить, представив возмущение в виде суперпозиции элементарных компонент, имеющих вид плоских волн. Двумерным возмущениям будут соответствовать волны, распространяющиеся вдоль основного потока, а трехмерным — волны, направление распространения которых не совпадает с направлением основного течения. Но нетрудно показать, что на волновую компоненту возмущения с заданным волновым вектором $\boldsymbol{k}$ влияет только компонента скорости основного течения по направлению указанного волнового вектора, равная Uk_1/k, где k_1 — это x-компонента вектора $\boldsymbol{k}$, а k — его модуль. Математически это проявляется в том, что в случае плоскопараллельного течения со скоростью $U = U(z)$ подстановка формул (2.8) и (2.9) с $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ в общую систему (2.7) после некоторых преобразований (и исключения из системы всех неизвестных функций, кроме функции $f(z) = f^{(w)}(z)$, задающей компоненту $u_3'(\boldsymbol{x}, t) = w'(\boldsymbol{x}, t)$ возмущения $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$) приводит к уравнению

$$(k_1U - \omega)\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) - k_1\frac{d^2U}{dz^2}\Big]f = -i\nu\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^2 f, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2, \tag{2.24}$$

которое вместе с соответствующими граничными условиями определяет частоты задачи $\omega = \omega_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Если мы рассмотрим теперь двумерное возмущение с тем же модулем волнового вектора $\boldsymbol{k}$ (т. е. возмущение вида (2.8)—(2.9) с $k_1 = k$ и $k_2 = 0$), то новое уравнение (2.24) будет отличаться от старого лишь заменой k_1U на kU, т. е. будет совпадать с написанным выше уравнением, в котором только скорость $U(z)$ увеличена в k/k_1 раз. Таким образом, для волновых возмущений, распространяющихся под некоторым углом к основному течению, эффективное число Рейнольдса оказывается меньшим, чем для возмущений с той же длиной волны, распространяющихся вдоль основного потока, и следовательно, критическое число Рейнольдса для двумерных возмущений будет докритическим для трехмерных возмущений. Поэтому при нахождении границы устойчивости для плоскопараллельных течений всегда можно считать, что $k_2 = 0$, т. е. что возмущение не зависит от y. При этом допустимо считать также, что $u_2'(\boldsymbol{x}, t) = v'(\boldsymbol{x}, t) = 0$, так как пульсации v' никак не будут сказываться на системе уравнений относительно переменных u', w' (и будут затухать во времени) [1].

[1]) Разумеется, отсюда еще не следует, что и при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ существенными будут только не зависящие от y двумерные возмущения. Поскольку имеющиеся в настоящее время эмпирические данные определенно показывают, что при турбулизации двумерного пограничного слоя трехмерные возмущения играют большую роль (см., например, Клебанов, Тидстром и Сарджент (1962)), то исследование поведения таких возмущений при сверхкритических числах Рейнольдса также представляет интерес. Такое исследование было проведено Уотсоном (1960б) и Майклом (1961). Эти авторы показали, что в рамках линейной теории возмущений для любого плоскопараллельного течения всегда имеется такой интервал $\mathrm{Re}_{cr} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_1$ значений Re, в пределах которого среди всех неустойчивых волновых возмущений наиболее быстро возрастающим (т. е. имеющим наибольшее значение $\Im\mathrm{m}\,\omega$) будет некоторое двумерное возмущение (хотя среди возмущений с фиксированным волновым числом k при некоторых k наиболее неустойчивыми могут оказаться и трехмерные возмущения). По-видимому, однако, трехмерные возмущения часто начинают играть основную роль уже при Re, лишь слегка превышающем Re_{cr}, в результате возникновения существенно нелинейных эффектов (см. ниже п. 2.9).

Уравнения (2.7) в применении к двумерным возмущениям плоскопараллельного течения имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{dU}{dz}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu\Delta u',$$
$$\frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\Delta w', \qquad (2.25)$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — двумерный оператор Лапласа. Краевые условия для этих уравнений заключаются в обращении в ноль обоих компонент скорости u' и w' на ограничивающих поток стенках (или, в случае неограниченного потока, на бесконечности, т. е. при $z\to\infty$, или при $z\to-\infty$, или при $z\to\pm\infty$, в зависимости от характера неограниченности). Пользуясь уравнением неразрывности, перейдем в первых двух уравнениях (2.25) от компонент скорости u' и w' к функции тока ψ, полагая

$$u'=-\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w'=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Тогда после исключения давления для функции тока получается уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\psi-\frac{d^2U}{dz^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\nu\Delta^2\psi. \qquad (2.26)$$

Для нахождения критерия неустойчивости надо найти решение $\psi(x, z, t)$ этого уравнения при указанных выше краевых условиях и при заданном начальном значении $\psi(x, z, 0)=\psi_0(x, z)$, где $\psi_0(x, z)$ — произвольная функция, отличная от нуля в ограниченной области пространства (и удовлетворяющая краевым условиям и условию малости возмущения $|\nabla\psi_0|\ll U$). Характер изменения со временем величины $\max\limits_{(x,z)}|\nabla\psi(x, z, t)|$ будет зависеть от числа Рейнольдса основного течения: при достаточно малых Re эта величина всегда будет затухать, а при достаточно больших Re может оказаться иногда и возрастающей со временем. Граница между указанными областями значений Re (если она существует) и будет определять критическое число Рейнольдса.

Решение сформулированной задачи с начальными условиями обычно очень сложно. Поскольку, однако, коэффициенты уравнения (2.26) не зависят от t и x, то это уравнение может иметь

частные решения вида

$$\psi(x, z, t)=e^{i(kx-\omega t)}\varphi(z)=e^{ik(x-ct)}\varphi(z), \qquad (2.27)$$

где $c=\omega/k$. Если таких «волновых решений» окажется достаточно много, так что решение $\psi(x, z; t)$ задачи с начальными условиями всегда можно будет разложить в ряд по решениям вида (2.27) со всевозможными (вещественными) волновыми числами k, то общая задача нахождения значения Re_{cr} сведется к определению лишь допустимых значений c. С этой целью надо подставить формулу (2.27) в уравнение (2.26), после чего мы получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(z)$:

$$(U-c)(\varphi''-k^2\varphi)-U''\varphi=-\frac{i\nu}{k}(\varphi^{IV}-2k^2\varphi''+k^4\varphi) \qquad (2.28)$$

(штрихи здесь означают производные по z). Уравнение (2.28) часто называют *уравнением Орра — Зоммерфельда*. Краевые условия для этого уравнения заключаются в обращении в ноль значений φ и φ' на границах потока (которые могут находиться и на бесконечности). Однородное уравнение (2.28) с указанными однородными краевыми условиями будет иметь нетривиальные решения лишь при некоторых специальных значениях параметра c. Эти *собственные значения* задачи будут, вообще говоря, комплексными числами $c=c_1+ic_2$, зависящими от волнового числа k и от вязкости ν (т. е. от числа Рейнольдса Re). Действительная часть c_1 будет иметь смысл скорости распространения волны, а мнимая часть c_2 будет определять изменения амплитуды волны со временем, которые описываются множителем e^{kc_2t}: при $c_2<0$ амплитуда будет затухать, при $c_2=0$ — оставаться постоянной (волна в этом случае называется *нейтральной*), а при $c_2>0$ — расти со временем. Таким образом, значение Re_{cr} здесь определяется как то Re, при котором впервые $c_2(k, \mathrm{Re})=0$ хотя бы при одном k.

Итак, в рассматриваемом случае для нахождения критерия неустойчивости надо только определить величину c_2 как функцию от k и Re. Заметим еще, что при значении $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{cr}$, при котором $c_2(k, \mathrm{Re})$ впервые обращается в нуль, вещественная часть c_1 собственного числа $c(k, \mathrm{Re})$ с $\mathrm{Im}\,c=c_2=0$ не будет, вообще говоря, равна нулю (в нарушение «принципа смены устойчивости»). Это значит, что собственному числу c, вообще говоря, отвечает распространяющаяся вдоль оси Ox волна (2.27). При значениях Re, немного превосходящих Re_{cr}, найдется уже небольшой интервал значений k, при которых c_2 будет положительным (а c_1 — отличным от нуля). Волны со

значениями k из этого интервала образуют волновой пакет, который будет усиливаться со временем, перемещаясь одновременно вниз по течению. Действительно, значение kc_2 будет наибольшим где-то около центра указанного интервала значений k; поэтому вблизи этого центра $\frac{\partial}{\partial k}(kc_2)=0$, и групповая скорость $\frac{\partial}{\partial k}(kc)\approx\frac{\partial}{\partial k}(kc_1)$ нашего волнового пакета будет вещественной, т. е. будет представлять собой истинную скорость перемещения пакета (ср. Ландау и Лифшиц (1953), § 29). В этом отношении рассматриваемая здесь неустойчивость, очевидно, отличается от неустойчивости течений, рассмотренных в пп. 2.6 и 2.7, в которых неустойчивые возмущения были неподвижными и в каждой фиксированной точке возрастали до конечной величины.

Устойчивость плоскопараллельных течений идеальной жидкости

Подставляя в уравнение (2.28) какой-либо конкретный профиль скорости $U(z)$, мы придем к весьма сложной задаче на собственные значения, решение которой требует выполнения громоздких расчетов. В целях упрощения этих расчетов естественно начать с попытки воспользоваться экспериментальными данными, согласно которым критическое число Рейнольдса для большинства плоскопараллельных потоков очень велико. Следовательно, можно ожидать, что при числах Рейнольдса, близких к критическому, слагаемые в правой части уравнения Орра — Зоммерфельда (2.28), описывающие действие сил вязкости на малое возмущение, будут малы по сравнению со слагаемыми в левой части. Поэтому можно попробовать сперва считать жидкость идеальной, т. е. пренебречь правой частью уравнения (2.28), и рассмотреть укороченное уравнение

$$(U-c)(\varphi''-k^2\varphi)-U''\varphi=0, \qquad (2.29)$$

подробно изученное еще Рэлеем (1880, 1887, 1895, 1913). Поскольку это уравнение уже не четвертого, а только второго порядка, то мы не можем здесь требовать выполнения четырех краевых условий и должны ограничиться обычным для течений идеальной жидкости требованием, чтобы на ограничивающих поток стенках обращалась в нуль лишь нормальная компонента скорости. Вспоминая определение функции тока ψ и формулу (2.27), заключаем, что на стенках должно выполняться равенство $\varphi=0$.

Однако полное пренебрежение вязкостью и использование укороченного уравнения (2.29) наталкиваются на ряд трудностей. Эти трудности связаны в первую очередь с тем, что при вещественных собственных значениях c (отвечающих нейтральным волнам, представляющим наибольший интерес для нахождения критерия неустойчивости) может найтись такое значение z (скажем, $z=z_0$), при котором соответствующее значение скорости основного потока $U(z_0)=U_0$ окажется равным c, так что точка z_0 будет особой точкой уравнения (2.29). Более того, еще Рэлей, а затем при более общих условиях Толмин и Преч (1946) доказали, что при плоскопараллельном течении идеальной жидкости скорость c распространения нейтральных волн всегда оказывается меньше максимальной скорости основного потока, так что внутри течения обязательно возникает особая точка z_0 (ср. также Линь (1955), § 8.2). Если $U'(z_0)\neq 0$, то в окрестности этой точки можно положить $U(z)-c\approx U'(z_0)(z-z_0)$, и при $z\to z_0$ функция φ'' будет стремиться к бесконечности как $\frac{U''(z_0)\varphi(z_0)}{U'(z_0)(z-z_0)}$. Поэтому x-компонента скорости нейтрального возмущения в окрестности особой точки будет иметь вид

$$u'\sim\varphi'\sim\frac{U''(z_0)\varphi(z_0)}{U'(z_0)}\ln(z-z_0).$$

Таким образом, в случае нейтральной волны одно из двух линейно независимых решений укороченного уравнения (2.29) оказывается разрывным и многозначным, и возникает вопрос, какую ветвь получаемой многозначной функции следует выбрать. Кроме того, имеется еще одно затруднение, заключающееся в том, что при наличии у уравнения (2.29) комплексного собственного значения c (отвечающего собственной функции $\varphi(z)$) комплексно-сопряженное число c^* также, очевидно, будет собственным значением этого уравнения (отвечающим собственной функции $\varphi^*(z)$). Следовательно, наряду с затухающей волной уравнение для функции тока всегда будет иметь также и решение в виде возрастающей волны. Поэтому для невязкой жидкости не имеет смысла характеризовать устойчивый случай как случай наличия одних лишь затухающих колебаний, т. е. само определение устойчивости, опирающееся на рассмотрение элементарных волновых решений, здесь должно быть как-то изменено.

Наиболее обычный способ преодоления всех этих трудностей состоит в том, что возвращаются обратно к полному уравнению Орра — Зоммерфельда (2.28) и нужную ветвь решения укороченного уравнения (2.29), описывающего нейтральные колебания, так же как и имеющие физический смысл волновые решения этого уравнения с $\operatorname{Im} c\neq 0$, отбирают при помощи тщательного исследования асимптотического поведения решений

уравнения четвертого порядка (2.28) при $\nu \to 0$ (т. е. при $\mathrm{Re} \to \infty$)[1]). При этом, в частности, оказывается, что имеющие физический смысл возрастающие и затухающие волновые решения уравнения (2.29) вовсе не являются сопряженными друг к другу и что в некоторых случаях такие решения следует конструировать при помощи «склеивания» различных выражений в различных областях изменения переменного z (см., например, Линь (1955), гл. 8). Естественно, что такой подход к исследованию устойчивости невязкой жидкости оказывается довольно громоздким и что преимущества, заключающиеся в относительной простоте уравнения (2.29), при этом фактически теряются. Существует, однако, и другой подход к той же задаче, позволяющий использовать относительную простоту уравнений гидромеханики невязкой жидкости; он будет указан немного ниже.

Перечислим теперь основные результаты, полученные при исследовании устойчивости плоскопараллельных течений невязкой жидкости. Началом этих исследований послужили указанные выше важные работы Рэлея, который, в частности, еще в 1880 г. доказал, что *если $U''(z)$ нигде в пределах течения не обращается в нуль, то укороченное уравнение* (2.29) *не может иметь собственных значений таких, что* $\Im m\, c > 0$ (а, следовательно, и вообще комплексных собственных значений). В самом деле, переписав уравнение (2.29) в виде

$$\varphi'' - k^2\varphi - \frac{U''\varphi}{U - c_1 - ic_2} = 0,$$

а затем умножив его на комплексно-сопряженную функцию φ^* и проинтегрировав в пределах от $z = z_1$ до $z = z_2$ (где z_1 и z_2 — границы течения, на которых $\varphi(z)$ обращается в нуль), получим

$$\int_{z_1}^{z_2} (|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{(U - c_1 + ic_2)\,U''|\varphi|^2}{(U-c_1)^2 + c_2^2}\,dz = 0. \quad (2.30)$$

При $c_2 \neq 0$ обращение в нуль мнимой части последнего равенства, очевидно, может иметь место, лишь если $U''(z)$ где-то между z_1 и z_2 меняет знак, откуда и вытекает выделенный курсивом результат. В течение многих лет всеми принималось, что эта теорема Рэлея дает полное доказательство устойчивости (в смысле отсутствия возрастающих возмущений) плоскопараллельных течений идеальной жидкости, профиль скорости которых не имеет точки перегиба (заметим, что для идеальной жидкости с $\nu = 0$ любой профиль $U(z)$ является допустимым с точки зрения уравнений движения, в отличие от положения, имеющегося в случае вязкой жидкости). На самом деле, однако, дело здесь обстоит вовсе не так просто. Оказывается, что из-за наличия особенности, связанной с обращением в нуль коэффициента при старшей производной, уравнение (2.29) обычно имеет непрерывный спектр собственных значений; при этом собственные функции, отвечающие точкам непрерывного спектра, не удовлетворяют обычным условиям, накладываемым на собственные функции, и чаще всего просто упускаются из виду (в частности, и доказательство теоремы Рэлея относится лишь к простейшим дискретным собственным значениям). Но если ограничиться лишь дискретным спектром, то краевая задача для укороченного уравнения (2.29) вообще, как правило, при каждом фиксированном k будет иметь лишь конечное число собственных функций, так что ни о какой полноте системы этих функций не может быть и речи (а в частном случае течения Куэтта, где $U'' \equiv 0$, собственные функции, обращающиеся в нуль на двух границах течения, даже вообще отсутствуют). Если же добавить еще и собственные функции непрерывного спектра, то прежде всего надо точно определить, что под этим понимается, и исследовать поведение всех соответствующих функций при $t \to \infty$; в дальнейшем требуется еще доказать полноту полученной системы функций, что также представляется не простым делом. Таким образом, на самом деле доказательство устойчивости течений невязкой жидкости не вытекает из одной только теоремы Рэлея, а требует привлечения еще каких-то дополнительных тонких рассмотрений.

В этой связи Кэйз (1960а, б) и Дикий (1960а, б) указали независимо друг от друга, что при исследовании устойчивости течений идеальной жидкости целесообразно вообще отказаться от рассмотрения элементарных волновых решений вида (2.27). Вместо этого следует с самого начала решать задачу с начальным условием $\psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z)$ для дифференциального уравнения в частных производных (2.26) с нулевой правой частью (т. е. с $\nu = 0$; это и есть тот второй подход к задаче об устойчивости течений идеальной жидкости, о котором говорилось на стр. 120). Оказывается, что общее решение этой задачи с начальным условием может быть представлено в виде некоторого интеграла Лапласа, асимптотическое поведение которого при $t \to \infty$ может быть изучено с помощью обычных методов теории функций комплексного переменного. При этом подынтегральное выражение в соответствующем интеграле Лапласа

[1]) Заметим, что в случаях, когда речь идет о нейтральных волнах (с вещественным c), вязкость приходится учитывать лишь в окрестности особой точки $z = z_0$, где, таким образом, вводится дополнительный «внутренний пограничный слой».

может быть также использовано и для аккуратного определения набора собственных функций (относящихся как к непрерывному, так и к дискретному спектру) уравнения (2.29); тогда полнота этого набора функций получается уже автоматически (так как по ним разлагается решение произвольной задачи с начальным условием). Однако, как мы уже отмечали, с точки зрения теории устойчивости рассмотрение элементарных волновых решений, удовлетворяющих (2.29), вовсе не нужно, так как поведение при $t \to \infty$ общего решения задачи с начальным условием сразу определяет, будет ли течение устойчивым или нет. Кэйзом (1960а) и Диким (1960б) было независимо показано, что во всех случаях возрастающие решения задачи с начальными условиями для уравнения (2.26) могут существовать лишь тогда, когда соответствующее уравнение (2.29) имеет дискретные собственные значения c, у которых $\operatorname{Im} c > 0$ (или кратные собственные значения c, у которых $\operatorname{Im} c = 0$). Тем самым они впервые строго оправдали вывод, который обычно делался из теоремы Рэлея (заметим, что более детальное исследование уравнения (2.29) показывает, что изменение знака $U''(z)$ внутри потока необходимо также и для существования чисто вещественных собственных чисел c; см. Линь (1955), § 8.2). Любопытно, что для частного случая плоского течения Куэтта в идеальной жидкости описанный здесь подход был применен еще Орром (1906—1907), выписавшим решение задачи с начальным условием для малого возмущения в таком течении и показавшим, что оно будет затухать; позже, однако, этот результат Орра был забыт. Дикий и Кэйз показали также (см., особенно, Кэйз (1961)), что решение задачи с начальным условием $\psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z)$ для полного уравнения (2.26) при $\nu \to 0$ всегда стремится к решению той же задачи для укороченного уравнения. Таким образом, и в этом отношении задача с начальным условием имеет заметное преимущество перед краевой задачей для уравнения (2.28), в которой нет никакой простой связи между собственными значениями и функциями полного и укороченного уравнений (ср. Линь (1961), Линь и Бенни (1962)).

Предположим теперь, что профиль скорости $U(z)$ имеет точку перегиба, т. е. что $U''(z)$ в какой-то точке обращается в нуль. Толмином (1935) было доказано (см. также Линь (1955), § 8.2), что при некоторых дополнительных условиях (выполняющихся во многих практически интересных случаях) отсюда уже следует, что соответствующее уравнение (2.29) будет иметь собственные значения c такие, что $\operatorname{Im} c > 0$. В случаях, к которым применим результат Толмина, течение невязкой жидкости, очевидно, будет неустойчивым. Другие точные условия неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости можно найти у Розенблюта и Саймона (1964).

Заметим еще, что трудности, возникающие при исследовании неустойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости, в случае жидкости с переменной по «высоте» (т. е. координате z) плотностью сохраняются и при наличии отличной от нуля вязкости, т. к. здесь соответствующее обобщенное уравнение Орра — Зоммерфельда даже и при $\nu \neq 0$ будет иметь особенность в точке, в которой $U(z) = c$ (см., например, Дикий (1960а)) [1]). Поэтому механическое перенесение на этот случай правил выбора ветви многозначных решений, разработанных для случая течений жидкости постоянной плотности, произведенное в работе Шлихтинга (1935б), нельзя считать обоснованным. Также и непосредственное сведение задачи об определении критерия неустойчивости к задаче на собственные значения без привлечения непрерывного спектра здесь оказывается несостоятельным из-за неполноты соответствующей системы собственных функций. Отсюда вытекает, что в случае течений жидкости переменной по высоте плотности и при $\nu = 0$ и при $\nu \neq 0$ строгий анализ устойчивости течения требует изучения асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения соответствующей общей задачи с начальным условием. Возникающая при этом задача анализа является весьма трудной, и некоторые успехи здесь были достигнуты лишь сравнительно недавно и притом лишь в предположении, что $\nu = 0$ (т. е. для идеальной жидкости).

А именно, Элиассен, Хойланд и Риис (1953), а затем, более аккуратно, Дикий (1960а) и Кэйз (1960б) исследовали асимптотическое поведение решения задачи с начальным условием для функции тока возмущения в случае двумерного потока неоднородной тяжелой жидкости с экспоненциально убывающей плотностью, заполняющего неограниченное полупространство и имеющего линейный профиль скорости. Они показали при этом, что, как и в случае плоскопараллельных течений идеальной однородной жидкости, неустойчивость (в смысле наличия возрастающих возмущений) здесь может возникнуть лишь при существовании волновых возмущений вида (2.27) с возрастающими амплитудами (т. е. с $\operatorname{Im} c > 0$). В силу результатов исследования волновых возмущений в таком потоке, произведенного еще в 1915 г. Дж. Тэйлором (но опубликованного много

---

[1]) Правда, если кроме отличной от нуля вязкости учесть еще и отличную от нуля теплопроводность, то мы снова придем к обычной задаче на собственные значения (на этот раз уже шестого порядка), не содержащей особенности в коэффициенте при старшем члене (см. Коппел (1964)).

позже, см. Тэйлор (1931)), дополненного недавно более строгим математическим анализом поведения нулей гипергеометрических функций Уиттекера, независимо выполненным Диким (1960в) и Дайсоном (1960), отсюда вытекает, что рассматриваемый поток неоднородной жидкости будет устойчивым (в указанном смысле) при всех значениях $\mathrm{Ri} > 0$ (а не только при $\mathrm{Ri} > 1/4$, как утверждается в известных монографиях Прандтля (1949) и Шлихтинга (1951, 1959). Позже аналогичный же метод исследования был применен Майлсом (1961) к общему случаю плоскопараллельного потока невязкой неоднородной тяжелой жидкости с практически произвольным профилем плотности $\rho(z)$ (таким, что $\rho'(z) < 0$ при всех z, так что плотность монотонно убывает по высоте) и любым монотонным профилем скорости $U(z)$. При этом им было показано, что и здесь из существования неустойчивых возмущений вытекает также существование неустойчивых волн с функцией тока вида (2.27). Далее Майлс детально исследовал возможные в таком потоке волновые возмущения; в результате ему удалось доказать, что рассматриваемый поток наверное будет устойчивым, если во всех его точках $\mathrm{Ri} > 1/4$ (частные случаи этого последнего результата фактически содержатся также в работах Гольдштейна (1931) и Дразина (1958), посвященных рассмотрению волновых возмущений в некоторых специальных потоках идеальной жидкости переменной плотности). Общий результат Майлса был доказан также значительно более просто (с помощью некоторых интегральных неравенств, аналогичных использовавшимся в свое время Рэлеем) и при более общих условиях (без всяких ограничений на профили скорости и плотности) Хоуардом (1961). Кроме того, Кэйз (1960в) проанализировал также и поведение решения задачи с начальным условием для возмущения в неподвижной идеальной жидкости в полуплоскости $z > 0$ с экспоненциально возрастающей плотностью; при этом он, естественно, нашел решения, неограниченно возрастающие с течением времени (ср. выше стр. 97), и оценил максимальную достижимую скорость их роста. Некоторые другие примеры анализа поведения решений задачи с начальным условием для возмущений в жидкости с возрастающей с ростом z плотностью (но уже отличным от нуля градиентом скорости) можно найти в работе Элиассена, Хойланда и Рииса (1953). Подробное исследование возможных волновых возмущений в некоторых конкретных плоскопараллельных течениях расслоенной по плотности идеальной жидкости (с убывающей с высотой плотностью) было произведено Майлсом (1963) и Хоуардом (1963). При этом выяснилось, что «принцип смены устойчивости» (см.

стр. 107) здесь выполняется лишь при некоторых специальных условиях, а область неустойчивости на плоскости (k, Ri) может состоять из нескольких кусков.

Теория неустойчивости для плоскопараллельных течений вязкой жидкости

Вернемся теперь снова к более сложному случаю течений вязкой жидкости; плотность, как обычно, будет считаться постоянной. В этом случае уравнение Орра — Зоммерфельда (2.28) имеет чисто дискретный спектр, и, по-видимому, нет оснований для сомнений в том, что любое решение уравнения (2.26) может быть представлено в виде суперпозиции «плоских волн» вида (2.27). Поэтому здесь вполне можно ограничиться изучением обычной задачи на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда (2.28). Первые попытки такого изучения, предпринятые (с помощью не очень строгих математических методов) около 1910 г. рядом авторов (В. Орр, А. Зоммерфельд, Р. Мизес, Л. Хопф и др.) в применении к плоскому течению Куэтта с линейным профилем скорости, привели к выводу, что это течение является устойчивым при всех числах Рейнольдса. Этот вывод казался, с одной стороны, довольно естественным (так как Орром (1906—1907) было доказано, что при отсутствии вязкости течение Куэтта устойчиво, а действие вязкости, естественно, предполагалось стабилизирующим); но, с другой стороны, он явно противоречил эмпирическим фактам о турбулизации всех известных течений при достаточно больших числах Рейнольдса. В начале 20-х годов Прандтль (1921) и Титьенс (1925) рассмотрели вопрос об устойчивости течений с профилем скорости, составленным из отрезков прямых, и пришли к совсем неожиданному выводу, что при наличии вязкости такие течения будут неустойчивыми при любых (в том числе и сколь угодно малых) числах Рейнольдса. В те же годы появилась большая работа Гейзенберга (1924), посвященная исследованию с помощью метода малых колебаний устойчивости плоского течения Пуазейля. В этой работе с помощью тонкого исследования асимптотического поведения решения соответствующего уравнения Орра — Зоммерфельда при большом Re (т. е. малом ν) был получен казавшийся в то время парадоксальным (но оказавшийся тем не менее правильным) результат о том, что течение Пуазейля, которое при отсутствии вязкости будет устойчивым по отношению к малым возмущениям, в случае вязкой жидкости при достаточно больших числах Рейнольдса становится неустойчивым. Результат Гейзенберга, однако, долго вызывал серьезные сомнения, и доказательства устойчивости

плоского течения Пуазейля продолжали публиковаться еще много лет (по-видимому, последнее такое «доказательство» было дано Пекерисом в 1948 г.).

В работе Толмина (1929) методом малых возмущений исследовалось течение в пограничном слое, которое он рассматривал как плоскопараллельное и имеющее профиль скорости, составленный из отрезков прямых и парабол; при этом впервые удалось получить форму «кривой нейтральных возмущений» на плоскости (k, Re), отделяющую область устойчивых возмущений от неустойчивых возмущений. В дальнейшем Толмин (1930, 1947) и Шлихтинг (1933а, б; 1935а) перенесли эти результаты также и на случай произвольных профилей скорости. В 1944—1945 гг. вся теория устойчивости плоскопараллельных потоков была критически пересмотрена Линем (1945), пересчитавшим заново основные примеры и уточнившим численные результаты Толмина и Шлихтинга. Тем не менее, сложность используемых при этом методов анализа асимптотического поведения решений уравнения (2.28) приводит к тому, что еще до сих пор полученные результаты в некоторых отношениях нельзя считать окончательными. Дело в том, что используемые асимптотические ряды обычно имеют особенность в точке z, в которой $U(z) - c = 0$, в то время как исходное уравнение регулярно в этой точке. Поэтому большой интерес представляет нахождение равномерно сходящихся асимптотических разложений, но построение таких разложений пока наталкивается на большие трудности (см., например, Линь и Бенни (1962)).

Выше мы уже отмечали, что, строго говоря, плоскопараллельный поток вязкой жидкости может быть лишь комбинацией течений Куэтта и Пуазейля. В настоящее время мало кто сомневается в том, что плоское течение Куэтта является устойчивым по отношению к любым бесконечно малым возмущениям; но строго этот факт, по-видимому, до сих пор никем не был доказан. Большинство относящихся сюда исследований использует некоторые асимптотические соотношения для рассмотрения предельных случаев (обычно случаев очень большого числа Рейнольдса), в то время как для не слишком больших значений параметров применяется прямой численный расчет собственных значений соответствующего уравнения (2.28). Такой подход был систематически развит еще Саусвеллом и Читти (1930) (ограничившимися, впрочем, лишь чисто мнимыми собственными значениями в соответствии с «принципом смены устойчивости»). В последние годы он достиг очень большого развития в связи со значительным усовершенствованием техники асимптотических оценок и применением для численных расчетов быстродействующих электронных вычислительных машин (см., например, Вазов (1953), Гроне (1954), Риис (1962) [1]), Галлахер и Мерсер (1962, 1964), Дирдорф (1963)). Во всех перечисленных работах были обнаружены лишь устойчивые волновые возмущения плоского течения Куэтта. Это делает очень правдоподобным, что неустойчивых возмущений здесь вообще не существует, но не позволяет все же считать проблему окончательно решенной, так как вся область значений параметров, к которой не приложимы асимптотические оценки, еще не исчерпана. По-видимому, единственный точный математический результат, относящийся к собственным значениям уравнения (2.28) с $U(z) = Az$ при произвольных числах Рейнольдса, принадлежит Дикому (1964), доказавшему (без применения численных расчетов), что чисто мнимые собственные значения c этого уравнения все удовлетворяют неравенству $\mathrm{Im}\, c < -k/\mathrm{Re}$ (где Re — число Рейнольдса, построенное по значению $H_1 = H/2$ полуширины канала и максимальной скорости течения $U = 2AH_1$). Этот результат, в частности, показывает, что переход к неустойчивости здесь никак не может происходить с соблюдением «принципа смены устойчивости», но и он не гарантирует, что неустойчивость вообще невозможна.

Значительно более удовлетворительным представляется положение в отношении плоского течения Пуазейля. Здесь, после того как тщательные расчеты Линя, основанные на асимптотических разложениях специального типа, применимых при больших Re, подтвердили основной вывод Гейзенберга о неустойчивости этого течения и позволили найти форму кривой нейтральных возмущений $\mathrm{Im}\, c(k, \mathrm{Re}) = 0$, эти результаты были еще раз проверены Томасом (1953) с помощью численного решения соответствующей задачи на собственные значения, а затем частично также и Локком (1955), использовавшим усовершенствованную форму асимптотических разложений. Результаты всех этих расчетов оказались вполне удовлетворительно совпадающими друг с другом (см., например, рис. 14). В дальнейшем Шэнь (1954) рассчитал по методу Линя для этой задачи также и форму кривых $\mathrm{Im}\, c(k, \mathrm{Re}) = \mathrm{const}$, определяющих совокупность возмущений с заданной быстротой возрастания. Форма «нейтральной кривой» $\mathrm{Im}\, c(k, \mathrm{Re}) = 0$, где $\mathrm{Re} = UH_1/\nu$, U — максимальная скорость невозмущенного течения, найденная Линем и Локком, показана на рис. 14. Критическое число Рейнольдса (отвечающее самой левой точке этой кривой) оказалось равным примерно 6000 по данным Локка и

[1]) В этой работе исследуются также и волновые возмущения в потоке вязкой жидкости переменной плотности с линейным профилем скорости.

примерно 5300 по данным Линя, причем ему у обоих исследователей отвечает значение $k \approx 1/H_1$ (близкие значения $\mathrm{Re}_{cr} \approx \approx 5780$ и $k \approx 1{,}02/H_1$ были получены также Томасом). При $\mathrm{Re} \to \infty$ обе ветви нейтральной кривой (и верхняя и нижняя) стремятся к нулю (верхняя ветвь асимптотически пропорционально $\mathrm{Re}^{-1/11}$, а нижняя — пропорционально $\mathrm{Re}^{-1/3}$). Таким образом, при увеличении Re возмущения с фиксированным (но не слишком большим) k сначала оказываются в области устойчивости (т. е. затухают), затем попадают в область неустойчивости, а в конце концов снова оказываются в области устойчивости. Отсюда понятно, почему в пределе при $\mathrm{Re} \to \infty$ (т. е. $\nu \to 0$) течение оказывается устойчивым относительно любых возмущений.

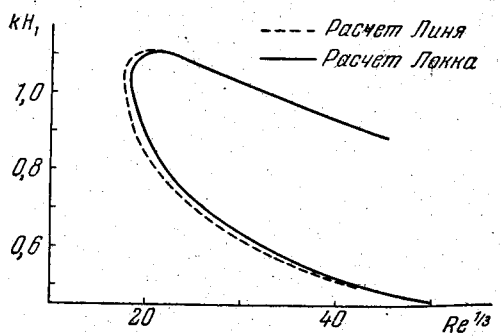


Рис. 14. Форма нейтральной кривой на плоскости (k, Re) для плоского течения Пуазейля по расчетам Линя (1945) и Локка (1955).

Устойчивость течений в трубе и в пограничном слое

Результаты, относящиеся к плоскопараллельным течениям, разумеется, не могут быть непосредственно применены к течению Пуазейля в трубе. Можно, однако, попытаться и к этому течению применить теорию возмущений. Ограничившись лишь простейшими волновыми возмущениями вида $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(r) e^{i(kx+n\varphi-\omega t)}$, мы, как обычно, придем к некоторой задаче на собственные значения. Исследования различных частных случаев этой задачи, проводившиеся разными авторами (см., например, Преч (1941б), Белякова (1950), Секл и Шпильберг (1958), Коркос и Селларс (1959) и Кропик (1964), где можно найти также дальнейшие ссылки), не привели к обнаружению каких-либо возрастающих волновых возмущений. Поэтому в настоящее время большинство специалистов предполагает, что течение Пуазейля в трубе (так же, как и плоское течение Куэтта) при всех числах Рейнольдса устойчиво по отношению к любым бесконечно малым возмущениям. Однако ни одна из имеющихся работ не содержит строгого доказательства этого факта. Прежде всего, большинство авторов вообще рассматривало только самые простые не зависящие от φ осесимметричные волновые возмущения с $n = 0$ (для которых возникающая задача на собственные значения оказывается родственной задаче, определяющей устойчивость или неустойчивость плоскопараллельных течений типа плоского течения Куэтта); для общих же волновых возмущений с $n \neq 0$ устойчивость пока доказана лишь в некоторых очень специальных случаях (например, в случае не зависящих от x возмущений с $k = 0$ или таких возмущений, что $u_r(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0$). Таким образом, пока нельзя исключить возможности существования каких-либо более сложных не осесимметричных волновых возмущений, являющихся неустойчивыми. Кроме того, даже и для осесимметричных возмущений дело обстоит не так просто, как это обычно предполагается. В связи с наличием в уравнении для осесимметричных возмущений течения Пуазейля особой точки при $r = 0$ общее решение задачи с начальными условиями здесь опять не может быть разложено по простейшим «волновым возмущениям», отвечающим дискретному спектру; поэтому общее исследование устойчивости таких возмущений не сводится к задаче на собственные значения. Отсюда вытекает, что вопрос об устойчивости течения Пуазейля в трубе даже и для простейших осесимметричных возмущений (для которых строго доказано отсутствие возрастающих волновых решений) пока нельзя считать выясненным до конца.

Перейдем теперь к рассмотрению случая течения в пограничном слое на плоской пластинке. Так как согласно результатам п. 1.4 толщина пограничного слоя возрастает сравнительно медленно и вертикальная скорость здесь значительно меньше горизонтальной, то есть основания рассчитывать, что и к этому течению с неплохой точностью можно приложить теорию устойчивости для плоскопараллельных течений (некоторые оценки влияния поправочных членов в уравнении Орра — Зоммерфельда (2.28), возникающих при рассмотрении почти, но не точно плоскопараллельных течений, позволяющие в известной мере оправдать это предположение, были выполнены Пречем (1941а)). Поэтому Толмин и Шлихтинг в своих расчетах много внимания уделили устойчивости плоскопараллельного течения с профилем скорости, совпадающим или близким к профилю Блазиуса (изображенному на рис. 2 на стр. 54). В результате они сумели построить кривую $\mathrm{Im}\, c(k, \mathrm{Re}) = 0$, т. е. определить границу области неустойчивости в плоскости (k, Re), имеющую по их данным примерно ту же форму, что и кривая $\mathrm{Im}\, c(k, \mathrm{Re}) = 0$ на рис. 14. Критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\delta^* cr} = \left(\frac{U\delta^*}{\nu}\right)_{cr}$, где δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, определяемая формулой (1.53), по Тол-

мину оказалось равным 420, а по Шлихтингу — 575. Согласно формуле (1.56) это означает, что $\mathrm{Re}_{x\,cr} = (Ux/\nu)_{cr} = 0{,}6 \cdot 10^5$ по Толмину и $\mathrm{Re}_{x\,cr} = 1{,}1 \cdot 10^5$ по Шлихтингу. Тот факт, что эти значения $\mathrm{Re}_{x\,cr}$ несколько ниже указанных в п. 2.1, может быть естественно объяснен тем, что потеря устойчивости вовсе не должна сопровождаться мгновенным переходом к турбулентному режиму. В точке потери устойчивости лишь возникают некоторые нарастающие колебания, которые усиливаются, сносясь вниз по течению, и при каком-то большем x вызывают переход к развитой турбулентности. С другой стороны, однако, полученные значения Re_{cr} сами по себе никак не могут рассматриваться и как подтверждающие теорию Толмина — Шлихтинга, и поэтому неудивительно, что еще Тэйлор (1938) высказывал сомнение в законности применения этой теории к реальному течению в пограничном слое, не являющемуся на самом деле плоскопараллельным. Однако непосредственная экспериментальная проверка теории Толмина — Шлихтинга, произведенная Шубауэром и Скрэмстедом (1947) как раз на примере течения в пограничном слое, подтвердила в основных чертах все ее выводы и тем самым показала, что сомнения в правильности этой теории не являются основательными. После этого Линь (1945) и Шэнь (1954) еще раз повторили расчеты Толмина и Шлихтинга и получили снова значение $\mathrm{Re}_{\delta^*cr} = 420$, но несколько отличающуюся от прежних форму границы области неустойчивости, показанную на рис. 15.

Упоминавшиеся выше опыты Шубауэра и Скрэмстеда производились в аэродинамической трубе Национального бюро стандартов США в Вашингтоне, обладающей особенно малой начальной турбулентностью; параметр U'/U в этой трубе при соблюдении некоторых специальных мер предосторожности может быть доведен до значений порядка 0,0003—0,0002. Это обстоятельство оказалось очень важным, так как некоторые имеющиеся в настоящее время результаты показывают, что при значениях U'/U, превышающих 0,002 (т. е., в частности, при значениях, имевшихся во всех более старых опытах) переход к турбулентности, по-видимому, вызывается влиянием конечных возмущений во внешнем потоке в соответствии с описанной в п. 2.2 схемой Тэйлора. Однако при $U'/U < 0{,}002$ основную

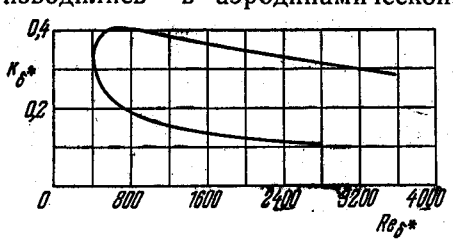


Рис. 15. Форма нейтральной кривой на плоскости (k, Re_{δ^*}) для пограничного слоя над плоской пластинкой.

роль при этом переходе играют случайные малые двумерные возмущения синусоидальной формы, амплитуда которых при некоторых условиях возрастает вниз по течению в полном соответствии с выводами теории возмущений. Подобные правильные колебания и были еще в 1940 г. обнаружены Шубауэром и Скрэмстедом с помощью тщательных термоанемометрических наблюдений. В дальнейшем с целью более аккуратной проверки выводов теории эти авторы использовали также помещенную в пограничный слой тонкую металлическую ленту, приводимую в колебание при помощи электромагнита и создающую искусственные возмущения фиксированной частоты ω. При этом им удавалось обнаружить нейтральные (не возрастающие и не затухающие) почти чисто синусоидальные колебания скорости, соответствующие точкам граничной кривой на диаграмме устойчивости. Для сопоставления этих данных с выводами теории удобно рассмотреть вместо более обычных возмущений вида (2.27) с фиксированным волновым числом k возмущения вида $\psi = e^{i(kx-\omega t)}\varphi(z)$ с фиксированной (вещественной) частотой ω и переменным (вообще говоря, комплексным) k, т. е. исследовать вопрос об изменении вдоль пластинки (т. е. с ростом x) возмущений заданной частоты ω, создаваемых в фиксированной точке потока (о связи такого подхода к теории устойчивости с обычным см. статью Гастера (1962)). При этом мы можем рассчитать кривую $\Im m\, k(\omega, \mathrm{Re}) = 0$ и получить, таким образом, форму области неустойчивости на плоскости (ω, Re). Результаты такого подсчета (по данным Шэня (1954)) приведены на рис. 16 вместе с эмпирическими точками Шубауэра и Скрэмстеда для частот нейтральных возмущений. Совпадение теории с опытом здесь оказывается вполне удовлетворительным.

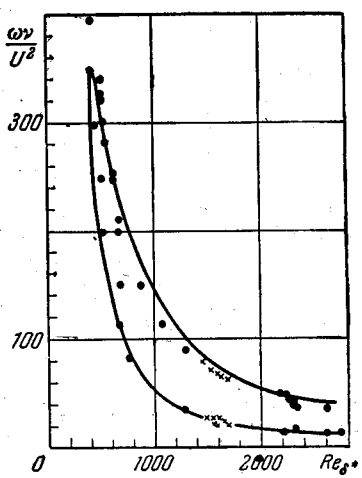


Рис. 16. Рассчитанная форма нейтральной кривой на плоскости (ω, Re_{δ^*}) для пограничного слоя на плоской пластинке и экспериментальные данные о частотах нейтральных колебаний.

Впоследствии опыт Шубауэра и Скрэмстеда был повторен также Бэрнсом, Чайлдсом, Николом и Россом (1959), использовавшими вместо термоанемометра помещенную в поток посеребренную пластинку. Пульсации этой пластинки, создаваемые z-компонентой скорости потока, вызывали пульсации

отражения направленного на нее пучка света, которые легко поддавались измерению. Результаты, полученные этими авторами, указаны на рис. 16 крестиками; они также хорошо совпадают с выводами теории[1]). На рис. 17 приведены эмпирические данные Шубауэра и Скрэмстеда, касающиеся на этот раз

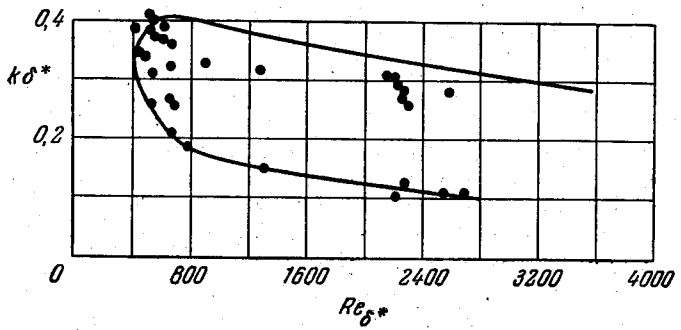


Рис. 17. Эмпирические данные о волновых числах нейтральных возмущений в пограничном слое над плоской пластинкой по данным Шубауэра и Скрэмстеда.

волновых чисел нейтральных возмущений; эти данные тоже неплохо укладываются на теоретическую кривую. Дальнейшие данные, касающиеся сравнения эмпирических данных Шубауэра и Скрэмстеда с выводами теории, можно найти в книгах Линя (1955) и Шлихтинга (1951, 1959) и в обзорных статьях Драйдена (1959) и Стюарта (1963).

Аналогично проводятся также расчеты нейтральной кривой и в случае более сложных профилей скорости, соответствующих, например, пограничному слою при обтекании искривленных поверхностей и при течениях с градиентом скорости во внешнем потоке. Любопытно, что форма получаемой при этом кривой существенно зависит от того, имеет ли профиль скорости точку перегиба (т. е. обращается ли $\frac{d^2U}{dz^2}$ в нуль при некотором z) или нет. В последнем случае граница области устойчивости имеет то же характер, что и в случаях течения Пуазейля между двумя плоскостями и плоскопараллельного течения в полупространстве $z \geqslant 0$ с профилем Блаузиуса (см. рис. 14 и 15), т. е. при $\mathrm{Re} \to \infty$ обе ее ветви стягиваются к оси абсцисс. Таким образом, при отсутствии у профиля скорости точки перегиба любые возмущения фиксированной длины волны (или фиксированной частоты) при возрастании числа Рейнольдса в конце концов становятся устойчивыми. В случае же наличия у профиля скорости точки (или точек) перегиба верхняя граница области устойчивости при $\mathrm{Re} \to \infty$ имеет конечную асимптоту (см. рис. 18); иначе говоря, здесь существует интервал длин волн (или частот) таких, что соответствующие возмущения неустойчивы при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Это обстоятельство, очевидно, непосредственно связано с определяющей ролью наличия точки перегиба у профиля скорости для неустойчивости течений идеальной жидкости.

[1]) В работе Бэрнса и др. отмечается, впрочем, что полученные экспериментальные результаты со старой нейтральной кривой Шлихтинга согласуются даже немного лучше, чем с кривой, рассчитанной Линем и Шэнем. Однако эти результаты все относятся к той части нейтральной кривой, относительно которой результаты Шлихтинга и результаты Линя и Шэня очень мало расходятся друг с другом; поэтому их никак нельзя считать решающими при сравнении соответствующих теоретических кривых.

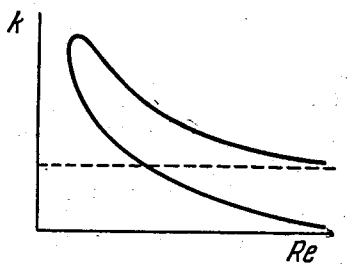


Рис. 18. Схематическая форма нейтральной кривой в плоскости (k, Re) для течения с профилем скорости, имеющим точку перегиба (например, для пограничного слоя при наличии замедляющего градиента давления).

Устойчивость некоторых плоскопараллельных течений в безграничном пространстве

В качестве конкретного примера течения с профилем, имеющим точку перегиба, рассмотрим плоскопараллельное течение в безграничном пространстве $-\infty < z < \infty$, имеющее профиль вида

$$U(z) = U_0 \operatorname{sech}^2 \frac{z}{H} = \frac{4U_0}{(e^{z/H} + e^{-z/H})^2} \qquad (2.31)$$

(см. рис. 19, *а*). Согласно расчетам Шлихтинга и Бикли (см., например, Шлихтинг (1951), гл. IX, § 6, или Гольдштейн (1938), т. I, § 57) формулой такого вида будет задаваться профиль продольной скорости $u_1 = U$ в ламинарной плоской струе (бьющей из бесконечного тонкого линейного отверстия, расположенного вдоль прямой $x = 0$, $z = 0$, в пространство, заполненное той же жидкостью) на большом расстоянии от этого отверстия. При этом параметры U_0 и H здесь будут лишь сравнительно слабо зависеть от x, а поперечная скорость $u_3 = w$ будет мала по сравнению с продольной. Таким образом, плоскопараллельное течение с профилем (2.31) можно рассматривать

как модель плоской струи на большом расстоянии от выходного отверстия; именно в этой связи его устойчивость и изучалась рядом авторов (в частности, Керлом (1956), Тацуми и Какутани (1958), Хоуардом (1959) и Кленшоу и Эллиоттом (1960)).

Определение нейтральной кривой на плоскости (k, Re) для течения с профилем (2.31), как всегда, сводится к исследованию задачи на собственные значения для соответствующего уравнения Орра — Зоммерфельда (2.28), причем неограниченность этого течения позволяет даже немного упростить расчеты

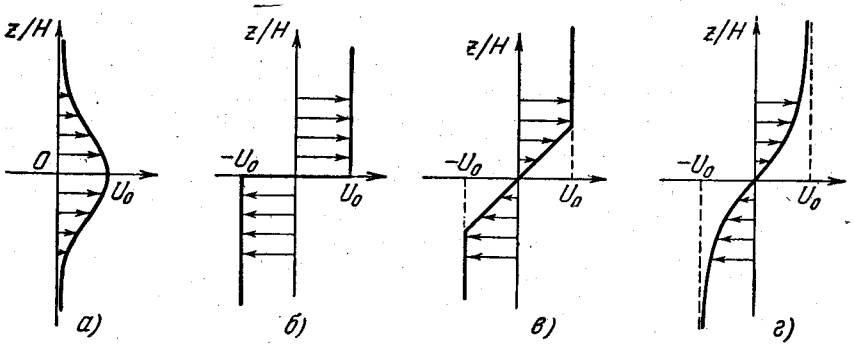


Рис. 19. Схематические формы профилей скорости для некоторых плоскопараллельных течений в безграничном пространстве.

а) Плоская струя; *б*) течение с поверхностью тангенциального разрыва скорости; *в*) и *г*) зона смешения двух плоских потоков разной скорости.

по сравнению со случаем течения между твердыми стенками (так как здесь надо рассматривать только решения уравнения (2.28), затухающие на бесконечности). Кроме того, в силу симметричности профиля (2.31) все собственные функции $\varphi(z)$ здесь распадаются на четные и нечетные по z. Так как и эксперименты и предварительные расчеты показывают, что наиболее неустойчивыми всегда оказываются возмущения с четным $\varphi(z)$, то при детальных вычислениях можно ограничиться лишь областью $0 \leqslant z < \infty$ и граничными условиями $\varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$ и $\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$. Результаты таких вычислений, проведенных двумя различными методами Керлом (1956) и Тацуми и Какутани (1958), представлены на рис. 20. Мы видим, что они в общем неплохо согласуются друг с другом (кроме области малых значений k, где метод Керла является недостаточно точным). Согласно рис. 20, при $\mathrm{Re} \to \infty$ все возмущения с $k < 2/H$ оказываются неустойчивыми; кроме того, с ростом Re область неустойчивых волновых чисел монотонно расширяется, так что увеличение вязкости может оказывать лишь стабилизирующее действие на возмущения (в отличие от ситуации в случае течений с профилем скорости без точки перегиба). Критическое число Рейнольдса здесь принимает очень небольшое значение (что также типично для течений с профилем скорости, имеющим точку перегиба): согласно тщательным численным расчетам Кленшоу и Эллиотта (1960), для профиля (2.31) $\mathrm{Re}_{cr} = \left(\frac{U_0 H}{\nu}\right)_{cr} \approx 3{,}7$ и $k_{cr} \approx 0{,}25/H$ (заметим, что в реальных

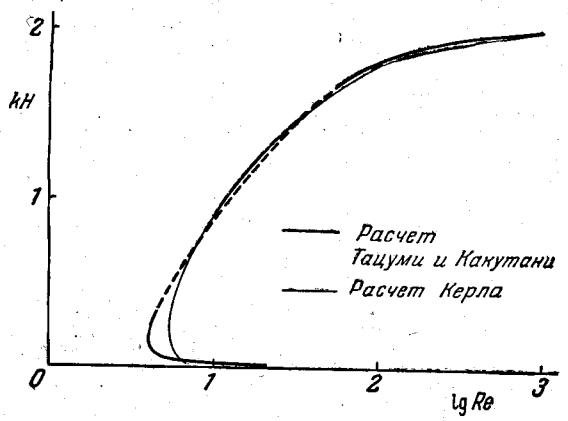


Рис. 20. Форма нейтральной кривой на плоскости (k, Re) для плоской струи по расчетам Керла (1956) и Тацуми и Какутани (1958).

струях значение $\mathrm{Re} \approx 4$ обычно достигается в области течения, в которой струю никак нельзя считать плоскопараллельной).

Другой важный тип течений в безграничном пространстве с профилем скорости $U(z)$ с точкой перегиба представляют собой течения, для которых $U(z) \to U_0$ при $z \to +\infty$ и $U(z) \to -U_0$ при $z \to -\infty$. Простейшим течением такого типа является идеализированное течение с ломаным профилем скорости, изображенным на рис. 19, *б*; это течение описывает плоскую поверхность тангенциального разрыва скорости. Более реальные профили того же типа изображены на рис. 19, *в* и 19, *г*; они качественно соответствуют ламинарной зоне смешения двух плоскопараллельных потоков, текущих с разными скоростями один над другим. Как мы уже говорили в п. 2.4, в пренебрежении вязкостью неустойчивость течения с профилем, изображенным на рис. 19, *б*, была строго доказана еще Гельмгольцем. Позже Рэлей подробно

исследовал вопрос об устойчивости течения невязкой жидкости с профилем, изображенным на рис. 19, *в* (а также и с некоторыми другими ломаными профилями, приближенно описывающими плоские струи; см. Рэлей (1894), т. 2, гл. 21); его результаты также указывают на неустойчивость всех рассматриваемых течений (в последние годы эти исследования Рэлея были продолжены Дразиным и Хоуардом (1962) и Михалке (1964)). С учетом вязкости устойчивость течения с профилем типа рис. 19, *г* была изучена Лессеном (1950); однако результаты Лессена относились только к случаю достаточно больших чисел Рейнольдса и фактически показали лишь, что здесь $\mathrm{Re}_{cr} < 20$ (в книге Линя (1955), исходя отсюда, было ошибочно предположено, что в этом случае Re_{cr} по порядку близко к числу 20). Позже Эш (1957) исследовал численно задачу на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда (2.28) с функцией $U(z)$, изображенной на рис. 19, *в*, уже для всех значений Re и впервые нашел, что течение с таким профилем скорости на самом деле при всех Re является неустойчивым (как показали Тацуми и Гото (1960), этот результат не связан со специальной формой профиля, рассматривавшейся Эшем, а относится к широкому классу профилей, соответствующих плоской зоне смешения двух потоков). Об общем характере нейтральной кривой на плоскости (k, Re) для случая плоской зоны смешения дает представление рис. 21, на котором изображены результаты, полученные Бетчовым и Шевчиком (1963) (с помощью численного интегрирования соответствующего уравнения Орра — Зоммерфельда) для профиля $U(z) = U_0 \operatorname{th}(z/H)$ (типа рис. 19, *г*).

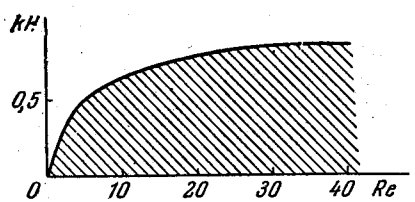


Рис. 21. Расположение нейтральной кривой и области неустойчивости (на рисунке заштрихована) на плоскости (k, Re) для зоны смешения двух плоскопараллельных потоков по данным Бетчова и Шевчика (1963).

2.9. Устойчивость по отношению к конечным возмущениям; возрастание возмущений и переход к турбулентности

Рассмотренная выше теория возмущения позволяет во многих случаях теоретически определить условия потери устойчивости ламинарных течений и тем самым выяснить некоторые важные обстоятельства, связанные с переходом к турбулентности. Совершенно ясно, однако, что сама по себе потеря устойчивости еще не является таким переходом и что линейная теория, о которой шла речь в пп. 2.5—2.8, в лучшем случае может описать лишь самое начало процесса возникновения турбулентности, но не дать полную картину этого процесса. Кроме того, в случае некоторых важных течений, таких как, например, течение Куэтта между двумя плоскостями или течение Пуазейля в трубе, теория возмущений в принципе не может помочь объяснению наблюдаемого на опыте возникновения турбулентности, так как эти течения, по-видимому, устойчивы относительно любых бесконечно малых возмущений. С другой стороны, в случае, например, течения Пуазейля между двумя плоскостями (близкого к реальному течению в плоском канале) теория устойчивости хоть и приводит к выводу о возможности потери устойчивости, но указывает на значительно более высокое значение Re_{cr}, чем значения чисел Рейнольдса, при которых на самом деле происходит турбулизация потока (эмпирические данные Дэвиса и Уайта (1928) показывают, что турбулизация плоского течения Пуазейля, по-видимому, реально происходит уже при $\mathrm{Re} = UH_1/\nu \approx \approx 1000$, в то время как согласно линейной теории $\mathrm{Re}_{cr} \approx 6000$). Наконец, принципиальное различие между движениями, возникающими после потери устойчивости течения между вращающимися цилиндрами или состояния покоя подогретой снизу жидкости, с одной стороны, и плоского течения Пуазейля или течения в пограничном слое, с другой стороны, также никак не может быть объяснено с точки зрения линейной теории возмущений. Все эти обстоятельства заставляют придавать большое значение разработке более полной нелинейной теории возникновения турбулентности, находящейся пока что еще в начальной стадии своего развития.

Баланс энергии конечного возмущения

Простейший подход, позволяющий исследовать вопрос об устойчивости потока по отношению к возмущениям конечной амплитуды, связан с применением так называемого «энергетического метода», использовавшегося еще Рейнольдсом (1894) (и являющегося, таким образом, даже более старым, чем метод теории возмущений). Сущность этого метода состоит в определении баланса энергии возмущения в заданном течении с целью выяснения условий, при которых энергия такого возмущения будет возрастать (или, наоборот, убывать) во времени.

Пусть $U_i(\boldsymbol{x}, t)$ и $P(\boldsymbol{x}, t)$ — поля скорости и давления основного течения, а $u_i'(\boldsymbol{x}, t)$ и $p'(\boldsymbol{x}, t)$ — поля скорости и давления возмущения. В таком случае оба поля $u_i = U_i + u_i'$ и U_i должны удовлетворять уравнениям Навье—Стокса (1.6) и неразрывности

(1.5) (как обычно, жидкость предполагается несжимаемой). Вычтя уравнения для u_i и для U_i одно из другого, мы получим следующие уравнения для скорости $\boldsymbol{u}' = (u_1', u_2', u_3')$:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i', \qquad \frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{2.32}$$

(от уравнений (2.7) они отличаются лишь наличием в первом из них нелинейного по $\boldsymbol{u}'$ слагаемого, опускаемого в линейной теории возмущений). Умножив, далее, первое из уравнений (2.32) на $u_i'/2$, просуммировав по i и проинтегрировав полученную сумму по всей области течения, мы придем к уравнению баланса энергии, определяющему изменение во времени полной энергии возмущения. В частности, если течение жидкости происходит в конечном объеме, ограниченном твердыми стенками (неподвижными или движущимися), на которых $u_i' \equiv 0$, то уравнение баланса энергии возмущения можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int \sum_i u_i'^2\, dV\right) = -\int u_i' u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\, dV - \nu \int \sum_{i,\,j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 dV, \tag{2.33}$$

где dV — элемент объема (в таком виде оно фактически использовалось еще Рейнольдсом (1894) и Орром (1906—1907)). Тот же результат будет верен и для многих неограниченных течений; например, он будет справедлив, если возмущение допустимо считать периодическим по тем координатам, по которым течение является неограниченным (в этом случае следует считать, что интегрирование в равенстве (2.33) в направлении таких осей распространяется лишь на один период возмущения).

В уравнении (2.33) первый член справа описывает обмен энергией между основным течением и полем возмущений и, как правило, оказывается положительным (перенос энергии обычно происходит от основного течения к возмущениям). Второй же член справа описывает вызываемую вязкостью диссипацию энергии возмущений и всегда является отрицательным. Относительная величина двух членов в правой части (2.33) и определяет, будет ли энергия возмущения убывать или возрастать.

Если мы перейдем в равенстве (2.33) к безразмерным величинам, измеряя расстояния в единицах характерной длины L, скорости — в единицах характерной скорости U, а время — в

единицах L/U, то размерный коэффициент ν при втором члене правой части перейдет в безразмерный коэффициент $1/\mathrm{Re}$. Отсюда ясно, что если число Рейнольдса достаточно мало, то отрицательный второй член справа будет перевешивать положительный первый член и энергия любого возмущения будет затухать, т. е. течение будет устойчивым по отношению к возмущениям произвольной величины. Исходя из равенства (2.33), можно получить некоторые оценки снизу значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}}$, ограничивающего диапазон «достаточно малых» чисел Рейнольдса, в пределах которого энергия любого возмущения может только убывать. Так, например, Серрин (1959) показал, что для любой пары соленоидальных векторных полей $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ в произвольной ограниченной области с диаметром D, таких, что $\boldsymbol{u}'$ обращается в нуль на границе области, имеют место неравенства

$$-\int u_i' u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\, dV \leqslant \frac{\nu}{2}\int \sum_{i,\,j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 dV + \frac{U_{\max}^2}{2\nu}\int \boldsymbol{u}'^2\, dV, \qquad \int \sum_{i,\,j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 dV \geqslant \frac{3\pi^2}{D^2}\int \boldsymbol{u}'^2\, dV, \tag{2.34}$$

где $U_{\max}$ — максимум модуля поля $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$. Подставляя эти неравенства в (2.33), найдем, что в случае течения в области диаметра D энергия $E(t)$ возмущения заведомо удовлетворяет неравенству

$$E(t) \leqslant E(0)\exp\left[\left(\frac{U_{\max}^2}{\nu} - \frac{3\pi^2\nu}{D^2}\right)t\right],$$

так что $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} = \left(\frac{U_{\max} D}{\nu}\right)_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \sqrt{3}\,\pi \approx 5{,}44$. Аналогичные неравенства Серрин вывел и для полей $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$, отвечающих течениям в прямой трубе произвольного сечения с максимальным диаметром D или в канале максимальной толщины D. При этом только ему пришлось постоянную $3\pi^2$ во втором неравенстве (2.34) в первом из указанных случаев заменить на $2\pi^2$, а во втором — на π^2; тем самым он показал, что $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \sqrt{2}\,\pi \approx 4{,}43$ для течения в прямой трубе (произвольного сечения) и $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \pi \approx 3{,}14$ для течения в плоском канале. Позже Вельте (1962) еще немного улучшил значения постоянных коэффициентов во втором неравенстве (2.34) и показал, что $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \sqrt{6}\,\pi \approx 7{,}7$ для течения в ограниченной области диаметра D, $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \sqrt{4{,}7}\,\pi \approx 6{,}8$ для течения в прямой трубе диаметра D и $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\,min}} \geqslant \sqrt{3{,}7}\,\pi \approx 6{,}0$ для течения в канале

ширины D; одновременно он показал, что найденные им числовые значения $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ очень близки к наибольшим, могущим быть полученными с помощью общих неравенств типа (2.34). Заметим еще, что неравенства того же типа существуют и для полей $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ в кольце между концентрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2; с их помощью Серрин получил следующее достаточное условие устойчивости относительно произвольных возмущений течения Куэтта между цилиндрами:

$$\frac{|\Omega_2-\Omega_1|}{\nu}<(R_2^2-R_1^2)\left[\frac{\pi}{R_1R_2\ln(R_2/R_1)}\right]^2. \qquad (2.35)$$

На рис. 22 область (2.35) на плоскости (Ω_1, Ω_2) (для исследовавшегося экспериментально Тэйлором случая $R_1=3{,}55$, $R_2=4{,}03$) нанесена вместе с перенесенной с рис. 13, *а* областью неустойчивости соответствующего течения относительно бесконечно малых возмущений.

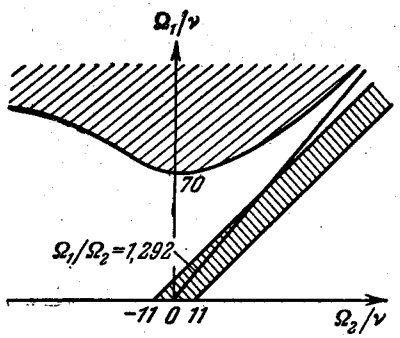


Рис. 22. Расположение области неустойчивости относительно бесконечно малых возмущений и области устойчивости относительно любых конечных возмущений для изученного Тэйлором течения Куэтта между цилиндрами.

Верхняя заштрихованная область соответствует неустойчивости относительно бесконечно малых возмущений, а течения, отвечающие точкам заштрихованной полоски, определенно являются устойчивыми относительно любых конечных возмущений. Сплошная прямая на рисунке — граница области неустойчивости для случая невязкой жидкости (ср. рис. 13, *а*).

Результаты Серрина и Вельте довольно просто выводятся и являются очень общими, но они дают очень грубую оценку $\mathrm{Re}_{cr\,min}$, заниженную по сравнению с данными экспериментов на несколько порядков (напомним, что, например, эмпирическое значение $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ для прямой круглой трубы близко к 2000). Несколько лучшие результаты получаются, если вместо использования общих (но грубых) неравенств типа (2.34) искать те возмущения $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$, для которых отношение притока энергии от заданного основного течения к диссипации энергии под действием вязкости будет наибольшим возможным. Рассмотрим, например, плоскопараллельное течение между плоскостями $z=0$ и $z=H$ с профилем скорости $U_1=U(z)$, $U_2=0$ и будем для простоты считать возмущение $\boldsymbol{u}'$ также двумерным: $\boldsymbol{u}'=(u'(x,z,t),\ w'(x,z,t))$. Измеряя расстояния в единицах H, скорости — в единицах $U_{\max}=\max U(z)$ и время — в единицах $H/U_{\max}$, мы можем переписать общее

уравнение баланса энергии (2.33) в виде

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int\int\frac{u'^2+w'^2}{2}\,dx\,dz=$$

$$=-\int\int u'w'\,\frac{dU}{dz}\,dx\,dz-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2dx\,dz, \qquad (2.33')$$

$$\mathrm{Re}=U_{\max}H/\nu.$$

В силу уравнения неразрывности (второго уравнения (2.32)) можно далее ввести функцию тока ψ, положив $u'=-\partial\psi/\partial z$, $w'=\partial\psi/\partial x$. Тогда условие неустойчивости $dE/dt\geqslant 0$ будет записываться в виде

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\leqslant\frac{\int\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dU}{dz}\,dx\,dz}{\int\int(\Delta\psi)^2\,dx\,dz}=F[\psi]. \qquad (2.36)$$

Максимум функционала $F[\psi]$ на множестве всевозможных функций ψ, удовлетворяющих заданным граничным условиям, и будет при этом иметь смысл $1/\mathrm{Re}_{cr\,min}$ (поскольку при числах Рейнольдса, меньших обратной величины этого максимума, энергия возмущения наверное будет убывать). Можно надеяться, что получаемые таким образом значения $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ будут уже больше тех, которые следуют из неравенств (2.34). Ясно, однако, что и они вполне могут оказаться сильно заниженными, так как от поля скорости возмущения здесь требуется только, чтобы оно удовлетворяло уравнению неразрывности и краевым условиям, но вовсе не учитывается, что сумма этого поля и поля скорости основного движения должна удовлетворять системе динамических уравнений. И действительно, попытки определения критерия неустойчивости энергетическим методом с помощью подсчета значений $F[\psi]$ для каких-то специальных функций ψ (приводящих к относительно низкому значению этого функционала) или с помощью решения соответствующей вариационной задачи, предпринимавшиеся Лоренцом (1907), Орром (1906—1907), Гамелем (1911), Карманом (1924) и другими исследователями, все также привели к чрезмерно малым значениям $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ (примерно на порядок меньшим реально наблюдавшихся значений этого числа). Анализируя это обстоятельство, Петров (1938) пришел к выводу, что экстремали ψ, обращающие $F[\psi]$ в максимум, по-видимому, во всех случаях не описывают никакого динамически возможного движения. Таким образом, энергетический метод никогда не может дать точного значения $\mathrm{Re}_{cr\,min}$, а годится лишь для получения весьма предварительных грубых оценок этой величины.

Теория Ландау

Значительно более перспективным (но и гораздо более трудным) представляется подход к исследованию поведения конечных возмущений, основанный на рассмотрении полной системы нелинейных уравнений гидродинамики (2.32). При этом интерес представляет как исследование возмущений в потоке с числом Рейнольдса, меньшим определяемого из линейной теории возмущений числа $\mathrm{Re}_{cr} = \mathrm{Re}_{cr\,max}$ (с целью определения критического числа Рейнольдса по отношению к конечным возмущениям), так и исследование возмущений при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ (с целью изучения дальнейшей эволюции слабых возмущений, экспоненциально возрастающих с ростом t согласно линейной теории). В настоящее время, однако, в отношении обеих указанных здесь задач имеются только отдельные изолированные результаты, причем почти все они относятся лишь к случаю чисел Рейнольдса, мало отличающихся от Re_{cr} (по поводу более точной оценки области допустимых значений Re см. работу Дж. Стюарта (1960)).

Наиболее общие закономерности поведения конечных возмущений при Re, близком к Re_{cr}, не зависящие даже от конкретного вида уравнений гидродинамики, были указаны Ландау (1944) (см. также Ландау и Лифшиц (1953), § 27). Будем сперва считать, что $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$, но $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr}$ мало. Так как при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}$ впервые появляется малое возмущение с «частотой» ω, имеющей нулевую мнимую часть, то при малом положительном $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr}$ будет существовать инфинитезимальное возмущение с полем скорости вида

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = A(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{2.37}$$

где $A(t) = e^{-i\omega t} = e^{\gamma t - i\omega_1 t}$, $\gamma = \Im\mathrm{m}\,\omega > 0$ и $\gamma \to 0$ при $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}_{cr}$ (так что $\gamma \ll |\omega_1|$ при достаточно малом $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr}$). Отсюда ясно, что $A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2. \tag{2.38}$$

Однако формула (2.38) верна лишь в рамках линейной теории возмущений. При возрастании же $A(t)$ неизбежно наступает момент, когда эта теория перестает действовать и должна быть заменена более полной теорией, учитывающей нелинейные по возмущениям члены уравнений гидродинамики. Правую часть уравнения (2.38) при этом можно рассматривать как первый член разложения $\frac{d|A|^2}{dt}$ в ряд по степеням A и A^* (где звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина). В следующем приближении (действующем при бо́льших t) необходимо учесть еще и следующие по порядку члены этого ряда. Следующие члены — это члены третьего порядка; однако надо учесть, что движение (2.37) сопровождается быстрыми (по сравнению с характерным временем $1/\gamma$ возрастания амплитуды) периодическими колебаниями, описываемыми множителем $e^{-i\omega_1 t}$ в выражении для $A(t)$. Эти периодические колебания нам неинтересны; поэтому для их исключения имеет смысл осреднить выражение $d|A|^2/dt$ по периоду времени, большому по сравнению с $2\pi/\omega_1$ (но малому по сравнению с $1/\gamma$). Так как члены третьего порядка по A и A^*, очевидно, все будут содержать периодический множитель, то они выпадут при таком осреднении. Что же касается членов четвертого порядка, то из них после осреднения сохранится лишь слагаемое, пропорциональное $|A|^4$. Таким образом, сохраняя слагаемые не выше четвертого порядка, мы будем иметь уравнение вида

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2 - \delta |A|^4 \tag{2.39}$$

(так как период осреднения много меньше $1/\gamma$, то величины $|A|^2$ и $|A|^4$ при осреднении практически не изменятся, так что (2.39) можно считать точным уравнением для амплитуды осредненного возмущения). При этом о знаке коэффициента δ ничего сказать нельзя: вообще говоря, следует ожидать, что он может быть как положительным, так и отрицательным.

Общее решение уравнения (2.39) может быть записано в виде

$$|A(t)|^2 = \frac{Ce^{2\gamma t}}{1 + \frac{\delta}{2\gamma} Ce^{2\gamma t}}, \tag{2.40}$$

где C — неопределенная постоянная интегрирования. Из формулы (2.40) следует, что если $\delta > 0$ и $|A(0)|^2 = \frac{C}{1 + C\delta/2\gamma}$ достаточно мало, то амплитуда $A(t)$ сначала возрастает экспоненциально (в соответствии с линейной теорией), но затем скорость этого возрастания убывает, и при $t \to \infty$ амплитуда стремится к конечному значению $A(\infty) = (2\gamma/\delta)^{1/2}$, не зависящему от $A(0)$. Заметим теперь, что γ — это функция от числа Рейнольдса, которая обращается в нуль при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}$ и может быть разложена в ряд по степеням $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr}$ (последнее обстоятельство может быть выведено из теории возмущений), в то время как $\delta \neq 0$ при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}$. Поэтому $\gamma \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr})$ и, следовательно, $A(\infty) = |A|_{\max} \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr})^{1/2}$ при малых $\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{cr}$.

Если же $\delta < 0$, то решение (2.40) формально обращается в бесконечность при $t = [\ln(2\gamma/C|\delta|)]/2\gamma$; следовательно, еще

значительно раньше оно достигает столь больших значений, что далее уже приходится отказаться от использования уравнения (2.39), полученного с помощью сохранения лишь двух первых членов в разложении $d|A|^2/dt$ по степеням $|A|^2$. В этом случае, однако, уравнение (2.39) может быть применено для исследования поведения конечных возмущений при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$. В самом деле, при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ коэффициент γ, очевидно, будет отрицательным, т. е. малое возмущение вида (2.37) будет затухать. Так как второй член в правой части (2.39) (равный $-\delta|A|^4$) положителен при $\delta < 0$, то при достаточно большом $|A|^2$ производная $d|A|^2/dt$ (осредненная по соответственно выбранному периоду времени) может стать положительной, т. е. по отношению к конечному возмущению движение будет неустойчивым уже при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$. При не слишком больших амплитудах, при которых можно пользоваться уравнением (2.39), амплитуда $|A|$ будет возрастать, если $|A| > (2|\gamma|/|\delta|)^{1/2}$. Учитывая, что $|\gamma| \sim (\mathrm{Re}_{cr} - \mathrm{Re})$, мы найдем, что относительно возмущений заданной амплитуды $|A|$ поток будет неустойчив при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{A\,cr} = \mathrm{Re}_{cr} - \alpha|A|^2$, где $\alpha > 0$. Отсюда ясно, что в этом случае $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ будет меньше значения Re_{cr}, даваемого линейной теорией. Точный подсчет $\mathrm{Re}_{cr\,min}$, однако, не может быть сделан на основе приближенного уравнения (2.39), применимого лишь при малых $|A|$, так как он требует определения числа $\mathrm{Re}_{A\,cr}$ для сколь угодно больших значений $|A|$.

Перейдем теперь снова к случаю $\delta > 0$, $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$, рассматривавшемуся нами выше. Мы видим, что здесь разрастание возмущения (2.37) при Re, немного превосходящем Re_{cr}, можно описать как мягкое самовозбуждение элементарного осциллятора, приводящее в конце концов к появлению установившегося периодического колебания с определенной конечной амплитудой. При этом существенно, что уравнение (2.39) определяет только амплитуду этого колебания; фаза же его не определяется однозначно внешними условиями, а зависит от случайных начальных значений фазы возмущения, т. е. фактически может быть произвольной. Таким образом, предельный режим установившихся колебаний рассматриваемого осциллятора характеризуется наличием одной степени свободы (в отличие от стационарного ламинарного течения, однозначно определяемого граничными условиями и поэтому вовсе не обладающего степенями свободы).

При дальнейшем возрастании Re это установившееся периодическое движение само может стать неустойчивым по отношению к малому возмущению $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}, t)$. Исследование такой неустойчивости потока с полем скорости $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}, t)$ (где $\boldsymbol{u}_1$ — установившееся значение возмущения (2.37)) в принципе можно

произвести с помощью обычного метода возмущений. Для этого надо только исследовать частные решения линейного уравнения относительно $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}, t)$ вида $\boldsymbol{u}_2 = \exp(-i\omega t)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ (где $\boldsymbol{f}$ — периодическая функция t периода $2\pi/\omega_1$) и определить частоту $\omega = \omega_2$, у которой при возрастании Re прежде всего (при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{2\,cr}$) появляется положительная мнимая часть. Тогда можно ожидать, что при Re, немного большем $\mathrm{Re}_{2\,cr}$, колебание с этой частотой будет возрастать до некоторого конечного предела, так что при $t \to \infty$ возникает квазипериодическое колебание с двумя периодами $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$, обладающее уже двумя степенями свободы (фазами колебаний). При дальнейшем возрастании Re все новые и новые осцилляторы приходят в колебательный режим, причем естественно думать, что интервалы между соответствующими «критическими» числами Рейнольдса будут все уменьшаться, а возникающие колебания будут становиться все более высокочастотными и мелкомасштабными. В результате при достаточно большом Re движение оказывается имеющим очень много степеней свободы и очень сложным и запутанным. Этому движению соответствует «предельный цикл» фазовых траекторий, в котором некоторые обобщенные координаты потока принимают фиксированные значения, а изменяются со временем (по формулам вида $\varphi(t) = \omega t + \alpha$) лишь координаты, отвечающие фазам соответствующих осцилляторов.

Траектория, образующая «предельный цикл», занимает в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз колебаний осцилляторов, и с течением времени проходит практически через все точки этой области. Действительно, в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega_1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в которые фаза $\varphi_1(t) = \omega_1 t + \alpha$ принимает значение α_1, фаза $\varphi_2(t) = \omega_2 t + \alpha_2$ любого другого колебания будет принимать значения $2\pi n\omega_2/\omega_1 + \alpha_2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В силу того, что отдельные частоты ω_1 и ω_2 будут, вообще говоря, несоизмеримыми (за исключением очень специальных случаев, представляющихся совершенно неправдоподобными), последняя совокупность будет содержать значения, которые после приведения к интервалу $[0, 2\pi]$ оказываются сколь угодно близкими к любому наперед заданному числу из этого интервала. Отсюда вытекает, что возникающее таким образом развитое турбулентное движение будет обладать определенной «эргодичностью», проявляющейся в том, что с течением времени жидкость проходит через состояния, сколь угодно близкие к любым ее возможным состояниям движения.

Приведенные общие соображения и составляют суть предложенной Ландау теории возникновения турбулентности. Они представляются очень наглядными и физически убедительными;

надо, однако, иметь в виду, что пока еще они ни в одном конкретном случае не были подтверждены непосредственными расчетами, и что описываемый ими механизм перехода к турбулентности заведомо не является универсальным. Так, например, в случае течения Пуазейля в трубе число $\mathrm{Re}_{cr} = \mathrm{Re}_{cr\,max}$, определяемое из линейной теории возмущений, по-видимому, равно бесконечности (т. е. уравнение (2.38) не имеет смысла); следовательно, турбулентное движение здесь должно возникать в результате неустойчивости по отношению к конечным возмущениям [1]), причем оно с самого начала, вероятно, обладает очень большим числом степеней свободы. При возникновении турбулентности в пограничном слое на плоской пластинке существенную роль, возможно, играет то обстоятельство, что возникающие при некотором числе Рейнольдса неустойчивые возмущения здесь переносятся вниз по течению в область с бо́льшим значением числа Рейнольдса. Во всяком случае, имеющиеся эмпирические данные о турбулизации пограничного слоя (о которых еще будет речь ниже) также не укладываются в рамки развитых выше соображений. Значительно более напоминает описанный механизм возникновения турбулентности процесс появления турбулентного следа при обтекании конечных тел (см. выше стр. 85—86). По-видимому, относящиеся к этому процессу эмпирические данные могут быть объяснены исходя из теории Ландау, если предположить, что в потоке, обтекающем тело, $\delta > 0$, а критические числа Рейнольдса для неустойчивостей различного порядка близки друг к другу. К сожалению, расчет критического числа Рейнольдса для обтекания конечного тела даже в рамках линейной теории представляет собой очень сложную задачу, не поддающуюся точному математическому решению. Поэтому количественное сопоставление развитой выше теории с имеющимися эмпирическими данными о турбулизации следа пока еще не представляется возможным.

Значительно более изученными являются случаи течения Куэтта между вращающимися цилиндрами, свободной конвекции между параллельными плоскостями и течения Пуазейля между параллельными плоскостями, для которых линейная теория возмущений может быть доведена до вполне окончательных результатов (см. выше пп. 2.6—2.8). Поэтому на вопросе о применении к указанным трем течениям теории Ландау (или,

[1]) Заметим, впрочем, что в работе Тацуми (1952) была предпринята попытка объяснить возникновение турбулентного течения в круглой трубе на основе линейной теории возмущений, прилагаемой к области течения у входа в трубу, где еще не успел образоваться параболический профиль Хагена — Пуазейля.

точнее говоря, уравнения Ландау (2.39)) мы остановимся немного более подробно.

В первых двух из перечисленных трех случаев движение, возникающее при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{cr}$), является стационарным (т. е. для него $\omega_1 = 0$). Тем не менее, развитые выше соображения вполне могут быть применены и к этим случаям, так как неустойчивое возмущение здесь зато оказывается периодическим относительно некоторых координат (координаты z в первом случае и координат x и y во втором); поэтому вместо осреднения по времени здесь можно воспользоваться осреднением по этим координатам. Другое, более существенное осложнение возникает в этих случаях в связи с тем, что неустойчивые возмущения здесь относятся к непрерывному спектру (они зависят от непрерывно меняющегося волнового числа k); поэтому, строго говоря, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{cr}$) здесь всегда существует непрерывное множество различных неустойчивых возмущений. Тем не менее, и это обстоятельство в конце концов оказывается непринципиальным, так как эмпирические данные явно показывают, что при малом $\mathrm{Re}—\mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra}—\mathrm{Ra}_{cr}$) всегда «выживает» (и достигает конечного значения) только одно неустойчивое возмущение со строго определенным волновым числом. О возможной причине такого положения мы еще скажем ниже; пока же примем за основу, что в обоих указанных случаях допустимо ограничиться исследованием отдельных возмущений вида (2.37) с фиксированным волновым числом k и фиксированным значением $\omega = i\gamma$, определяемым из линейной теории.

Как эмпирические данные, так и теоретический анализ нелинейных уравнений (типа (2.32)), описывающих поведение конечных возмущений в течении Куэтта между цилиндрами и в подогретом снизу слое жидкости, показывают, что при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}_{cr}$) здесь не существует стационарных возмущений с $d|A|^2/dt = 0$ (см., например, работы Сорокина (1954) и Уховского и Юдовича (1963) об уравнениях свободной конвекции). В то же время при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{cr}$) в обоих случаях происходит «разветвление» стационарных решений соответствующих нелинейных уравнений. А именно, в этой точке наряду с обычными ламинарными решениями появляются дополнительные стационарные решения, отличающиеся от обычных периодическими относительно координаты z (или координат x и y) членами, амплитуда которых при малых значениях $\mathrm{Re}—\mathrm{Re}_{cr}$ (или $\mathrm{Ra}—\mathrm{Ra}_{cr}$) пропорциональна $(\mathrm{Re}—\mathrm{Re}_{cr})^{1/2}$ (или $(\mathrm{Ra}—\mathrm{Ra}_{cr})^{1/2}$). Такие дополнительные решения нелинейных уравнений свободной конвекции были изучены в работах Сорокина (1954), Горькова (1957) и Малкуса и Вериниса

(1958); для течения Куэтта между цилиндрами они могут быть определены исходя из излагаемых ниже результатов Дж. Стюарта (1958) и Дэви (1962). Поэтому есть все основания предполагать, что в случаях вихревого движения в потоке жидкости между вращающимися цилиндрами при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ и свободной конвекции между плоскостями при $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{cr}$ мы сталкиваемся как раз с мягким самовозбуждением колебаний (только пространственных, а не временных) по схеме Ландау с $\delta > 0$. Имеющиеся эмпирические данные показывают также, что возникающее здесь стационарное движение оказывается устойчивым в большом интервале значений Re (или Ra), так что критические числа Re (или Ra) первого и второго порядков здесь широко раздвинуты относительно друг друга (см., в частности, ниже рис. 23). Напомним также, что согласно данным Малкуса (1954а), о которых шла речь на стр. 113, в случае термической конвекции можно экспериментально определить даже несколько критических значений Ra_{cr} разных порядков.

Представляет несомненный интерес получение для рассматриваемых двух случаев уравнений типа (2.39), описывающих эволюцию во времени неустойчивых согласно линейной теории возмущений, непосредственно из динамических уравнений (2.32). В применении к течению Куэтта между цилиндрами именно этому и были посвящены упоминавшиеся выше работы Дж. Стюарта (1958) и Дэви (1962). В первой из этих работ предполагалось, что $d = R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2 = R_0$ и что вращается (с угловой скоростью Ω_1) только внутренний цилиндр. В этом случае вместо числа Рейнольдса удобно рассматривать так называемое *число Тэйлора* $\mathrm{Ta} = \Omega_1^2 R_1 d^3/\nu^2$; течение Куэтта становится неустойчивым при $\mathrm{Ta} > \mathrm{Ta}_{cr} \approx 1708$. Стюарт предположил далее, что разность $\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{cr}$ мала (но положительна) и что в момент $t = 0$ в рассматриваемом течении возникло неустойчивое согласно линейной теории малое возмущение. Считая, что форма этого возмущения мало меняется во времени (так что применима формула (2.37)), можно определить зависимость соответствующей амплитуды $A(t)$ от времени с помощью уравнения баланса энергии возмущения (2.33) (являющегося следствием уравнений движения). При этом для $|A|^2$ получилось уравнение вида (2.39) с коэффициентами γ и δ, явно выражающимися через число Тэйлора Ta, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \Omega_1 R_1 d/\nu$, волновое число $k = k_{cr}$ и собственную функцию соответствующей задачи на собственные значения (2.16)—(2.17), подсчитанную Чандрасекаром (1953). В результате расчета выяснилось, что действительно $\delta > 0$ и, значит, существует конечное значение $|A|_{\max}$, причем $|A|_{\max} \sim (1 - \mathrm{Ta}_{cr}/\mathrm{Ta})^{1/2} \sim (\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{cr})^{1/2}$ при малом $\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{cr}$. Зная $|A|_{\max}$ и форму возникающего возмущения (приближенно даваемую линейной теорией возмущений), Стюарт смог рассчитать также и момент сил трения, действующих на поверхность цилиндров. Полученные им значения этого момента оказались вплоть до чисел Ta, почти в десять раз превышающих Ta_{cr}, весьма близкими к данным непосредственных измерений Тэйлора (1936б).

Более аккуратно уравнение для амплитуды возмущения в течении Куэтта между цилиндрами было выведено в работе Дэви (1962). В этой работе было учтено, что начальное осесимметричное возмущение вида $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{f}(r)e^{ikz}$ в силу нелинейности уравнений гидромеханики будет порождать также и высшие гармоники (пропорциональные e^{inkz}, $n = 2, 3, \ldots$) и что зависимость от r формы этого возмущения также будет слегка меняться со временем. Поэтому поле скорости возмущения здесь записывалось в виде

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_0(r, t) + \boldsymbol{u}_1(r, t)e^{ikz} + \boldsymbol{u}_2(r, t)e^{2ikz} + \ldots \quad (2.41)$$

(где член $\boldsymbol{u}_0(r, t)$ описывает искажение формы ламинарного течения Куэтта, вызванное возмущением). Далее предполагалось, что при $t \to 0$ в правой части (2.41) сохраняется лишь слагаемое, содержащее $\boldsymbol{u}_1(r, t)$, причем в пределе это слагаемое переходит в решение $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(r)e^{\gamma t + ikz}$, определяемое из линейной теории возмущений. Тогда и при небольшом положительном t указанное слагаемое также остается главным, причем $\boldsymbol{u}_1(r, t)$ при таком t можно представить в виде

$$\boldsymbol{u}_1(r, t) = A(t)\boldsymbol{f}(r) + \text{члены высшего порядка малости.} \quad (2.42)$$

Подставляя (2.41) и (2.42) в нелинейные уравнения (2.32), можно снова получить для $A(t)$ уравнение вида (2.39), где γ определяется из линейной теории возмущений и

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3. \quad (2.43)$$

Здесь $\delta_1 > 0$ определяется притоком энергии от течения Куэтта (искаженного слагаемым $\boldsymbol{u}_0(r, t)$) к основному возмущению $\boldsymbol{u}_1(r, t)e^{ikz}$ (только это слагаемое фактически и учитывалось в работе Стюарта), δ_2 описывает порождение основным возмущением высших гармоник, а δ_3 — искажение его формы. Для всех трех слагаемых в правой части (2.43) Дэви получил громоздкие формулы (содержащие решения соответствующей задачи на собственные значения линейной теории возмущений); после этого для случаев а) $d \ll R_0$, $\Omega_2 = 0$, б) $d \ll R_0$, $\Omega_2/\Omega_1 \approx 1$ и в) $R_2 = 2R_1$, $\Omega_2 = 0$ он подсчитал численно значения этих слагаемых. При этом коэффициент δ во всех случаях оказался положительным; в случае а) его значения близко совпали с результатами менее точных вычислений Стюарта, а в случаях б)

и в) они также привели к значениям момента сил трения при сверхкритических условиях, хорошо совпадающим с имеющимися экспериментальными данными.

Совпадение вычисленных и наблюденных значений момента сил трения убедительно свидетельствует, что полученное Стюартом и Дэви уравнение Ландау (2.39) с $\delta > 0$ правильно описывает процесс возрастания неустойчивого по линейной теории осесимметричного возмущения. Однако свидетельство это все же является косвенным, так как с экспериментом здесь сравнивается не само значение амплитуды A, а подсчитанная по этой амплитуде интегральная характеристика течения — суммарный момент сил трения. Более непосредственную проверку применимости теории Ландау к течению между цилиндрами осуществил Доннелли (1963). Он наполнил зазор между цилиндрами (радиусов $R_1 = 1{,}9$ *см* и $R_2 = 2{,}0$ *см*) электролитом CCl_4 и измерил силу проходящего через электролит тока, поступающего на коллектор — небольшую площадку на неподвижном внешнем цилиндре, перемещающуюся с постоянной скоростью в направлении оси Oz. При $\mathrm{Ta} \geqslant \mathrm{Ta_{cr}}$ в электролите между цилиндрами возникает правильная совокупность стационарных тороидальных вихрей, поле скорости которых имеет вид $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{f}(r)e^{ihz}$, где коэффициент A — это $A(\infty) = A_{\max}$ теории Ландау. Появившиеся вихри разрушают слои электрически заряженной жидкости около электродов и поэтому влияют на силу проходящего через электролит тока. Расчет этого явления показывает, что появлению вихрей должно соответствовать появление в выражении для силы тока j добавочного слагаемого вида $\Delta j = CA\cos kz$, где C — вполне определенный постоянный коэффициент. Результаты измерений подтверждают, что при $\Omega_1 \geqslant \Omega_{\mathrm{cr}} = (\nu^2 \mathrm{Ta_{cr}}/R_1 d^3)^{1/2}$ такая компонента действительно появляется, причем квадрат ее амплитуды A^2 оказывается пропорциональным $\Omega^2 - \Omega_{\mathrm{cr}}^2 \sim \mathrm{Ta} - \mathrm{Ta_{cr}}$ (в полном соответствии с теоретическим выводом Ландау) вплоть до значения $\Omega_1 = \Omega_{2\mathrm{cr}}$, такого, что $(\Omega_{2\,\mathrm{cr}}^2 - \Omega_{\mathrm{cr}}^2)/\Omega_{\mathrm{cr}}^2 \approx 0{,}15$ (см. рис. 23). Исходя из общих представлений теории Ландау, можно предположить, что резкое изменение закона $A_{\max} \sim (\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta_{cr}})^{1/2}$ при $\Omega_1 = \Omega_{2\mathrm{cr}}$ связано с достижением «второго критического значения» $\mathrm{Ta_{2cr}}$ числа Тэйлора, при котором тороидальные вихри становятся неустойчивыми и распадаются на более сложные возмущения (по-видимому, уже не осесимметричные).

Более сложно обстоит дело с применением нелинейной теории возмущений к течению Пуазейля между двумя плоскостями. Первая попытка в этом направлении была предпринята Мексиным и Дж. Стюартом (1951), получившими при ряде

упрощающих предположений, что для плоского течения Пуазейля критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{A\,\mathrm{cr}}$ для конечных двумерных возмущений амплитуды $|A|$ убывает при возрастании $|A|$. Этот результат заставляет предполагать, что здесь $\delta < 0$. С другой стороны, в более поздней работе Дж. Стюарта (1958) для получения уравнения вида (2.39) для амплитуды такого возмущения было использовано уравнение баланса энергии (2.33′); здесь уже при некоторых других упрощающих предположениях было найдено, что $\delta > 0$. В этой связи Дж. Стюарт

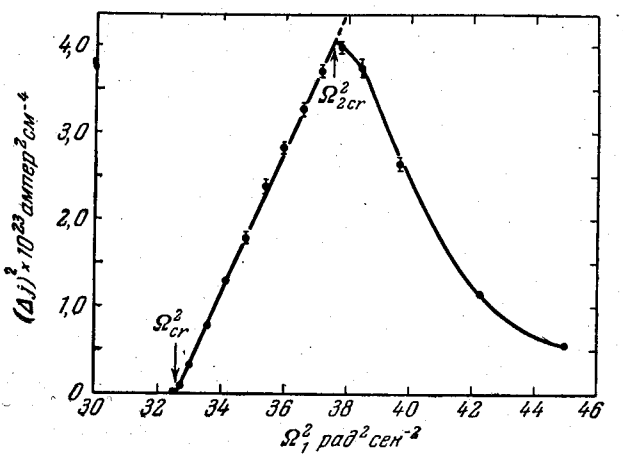


Рис. 23. Зависимость квадрата амплитуды добавочного тока $(\Delta j)^2$ в электролите между вращающимися цилиндрами от угловой скорости внутреннего цилиндра (по Доннелли (1963)).

(1960) и Уотсон (1960а) произвели более полный анализ поведения двумерных конечных возмущений в плоском течении Пуазейля при Re, близком к $\mathrm{Re_{cr}}$, основанный на использовании полных уравнений движения и формул типа (2.41) и (2.42) (этот анализ и был затем принят за образец в работе Дэви (1962)). В результате они снова получили уравнение вида (2.39) для амплитуды возмущений, но коэффициент δ на этот раз оказался суммой трех слагаемых (имеющих тот же смысл, что и слагаемые в равенстве (2.43)), не все из которых были правильно учтены и в работе Мексина и Дж. Стюарта (1951) и в работе Дж. Стюарта (1960). Оказалось также, что для всех этих слагаемых могут быть даны явные выражения, сложным образом содержащие собственные функции и собственные значения соответствующего линейного уравнения Орра — Зоммер-

фельда. Однако численный подсчет этих слагаемых и нахождение по ним точного значения коэффициента δ, позволяющее окончательно решить вопрос о его знаке, представляет собой очень сложную задачу численного анализа, решение которой пока еще никем не было получено. Поэтому и на вопрос о поведении конечных возмущений в плоском течении Пуазейля пока нельзя дать окончательного ответа.

В случае плоскопараллельных течений, неустойчивых при $\nu = 0$, уравнение Ландау (2.39), разумеется, может иметь смысл и в применении к слегка неустойчивым возмущениям в идеальной жидкости. Естественно, что пренебрежение вязкостью приводит здесь к упрощению всех вычислений. Поэтому неудивительно, что для течения идеальной жидкости в безграничном пространстве с профилем скорости $U(z) = U_0 \operatorname{th}(z/H)$ Шаде (1964), предположив, что форма возмущения близка к форме однозначно определяемой в этом случае «нейтральной волны», сумел аналитически определить значение коэффициента δ (оказавшегося положительным). Приняв затем для γ значение, отвечающее наиболее неустойчивому возмущению, он смог приближенно оценить также порядок амплитуды возмущения в «плоской зоне смешения», начиная с которой становится неприменимой линейная теория возмущений.

Выше мы уже отмечали, что уравнение Ландау (2.39) при $\delta > 0$ приводит к интересным физическим результатам только в применении к возмущениям в течении с $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$, а при $\delta < 0$ — только в применении к конечным возмущениям в потоке с $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$. В случае же $\delta > 0$ и $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ или же $\delta > 0$, $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ и $\gamma > 0$ это уравнение быстро оказывается неприменимым и должно быть дополнено следующими членами разложения по степеням $|A|^2$. Общее уравнение для $d|A|^2/dt$, учитывающее все члены такого разложения, очевидно, будет иметь вид

$$\frac{d|A|^2}{dt} = |A|^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m |A|^{2m} \qquad (2.44)$$

(уравнение Ландау получается отсюда, если учесть только два первых члена правой части). Уравнение вида (2.44) для амплитуды двумерного возмущения в плоскопараллельном течении также было формально получено Уотсоном (1960а) исходя из уравнений движения. При этом, однако, выражения для коэффициентов a_m с $m > 1$ оказались еще гораздо более сложными, чем для коэффициента $a_1 = -\delta$, так что их определение пока представляется совсем уже мало реальным. В последующей работе Уотсона (1962) аналогичный анализ был произведен для плоского течения Пуазейля, исходя из представления возмущения $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$ в виде $A(x)\boldsymbol{f}(z, t)$, где амплитуда $A(x)$ в линейном приближении равна $e^{(k_1 + ik_2)x}$. В этом случае для $A(x)$ получаются уравнения, отличающиеся от (2.39) и (2.44) лишь заменой t на x, причем определение коэффициентов этих уравнений, естественно, упирается в те же трудности, что и определение коэффициентов уравнений для зависящей от времени амплитуды $A(t)$.

Взаимодействие конечных возмущений. Роль трехмерных возмущений в плоскопараллельном течении

Изложенная выше теория Ландау касалась эволюции одного конечного возмущения в ламинарном течении. Поскольку, однако, эта эволюция определяется нелинейными дифференциальными уравнениями, то решение, отвечающее наличию в заданном течении нескольких различных начальных возмущений, уже не будет простой суммой решений, описывающих эволюцию каждого из них по отдельности. Поэтому в теории конечных возмущений недостаточно исследовать лишь процесс развития простейших «элементарных возмущений», по которым можно разложить любое начальное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)$, а требуется описать также и взаимодействие возмущений, т. е. влияние каждого из них на развитие всех остальных.

Вообще говоря, вопрос о взаимодействии конечных возмущений относится к числу наименее изученных в гидромеханике. Тем не менее, кое-какие частные результаты, касающиеся такого взаимодействия, могут быть все же указаны и заслуживают того, чтобы на них остановиться немного подробнее.

Начнем с хорошо изученного экспериментаторами случая термической конвекции в слое подогреваемой снизу жидкости при числе Рэлея $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{cr}$. Как мы знаем из п. 2.7, линейная теория возмущений приводит к выводу, что при таком значении Ra должно иметься бесконечное множество неустойчивых инфинитезимальных возмущений (с экспоненциально возрастающими амплитудами), соответствующих некоторому интервалу значений волнового вектора k, окружающему значение $k = k_{cr}$, при котором впервые проявляется неустойчивость. Наиболее неустойчивыми (т. е. быстрее всего возрастающими) будут возмущения с одним определенным k, но и таких возмущений будет бесконечное множество (так как при заданном k горизонтальная форма возмущения может описываться произвольной функцией $\varphi(x_1, x_2)$, удовлетворяющей уравнению (2.23)). Эксперимент же показывает, что на самом деле всегда возникает

лишь возмущение с одним определенным значением k, имеющее строго определенную форму (соответствующую разбиению горизонтальной плоскости (x_1, x_2) на совокупность правильных шестиугольных ячеек) и строго определенную конечную амплитуду. Теория Ландау позволяет лишь найти эту установившуюся амплитуду (с помощью соответствующего уравнения (2.39), получающегося из нелинейных уравнений конвекции в предположении, что функция $\varphi(x_1, x_2)$ заранее задана; ср. Горьков (1957)). Но эта теория ничего не говорит о том, почему в жидкости никогда не возникают возмущения с несколькими разными значениями k и почему среди наиболее неустойчивых возмущений реально наблюдаются лишь возмущения с одной определенной функцией $\varphi(x_1, x_2)$.

Исследованию этого последнего вопроса посвящены работы Палма (1960), Сиджела и Дж. Стюарта (1962) и Палма и Эйянна (1964). Палм, в частности, впервые указал на то, что обычные уравнения свободной конвекции (1.5), (1.6), (1.75) и (1.76) в принципе не могут удовлетворительно объяснить основные особенности ячеистой конвекции, так как эксперименты Типпельскирха (1956) показывают, что характер циркуляции в ячейках определяется формой зависимости коэффициента вязкости ν от температуры T (при $d\nu/dT < 0$ жидкость поднимается в середине ячейки и опускается по краям, а при $d\nu/dT > 0$ — поднимается по краям и опускается в середине). Поэтому он принял за основу более сложные уравнения, учитывающие также и возможную зависимость ν от T (и оценил влияние этой зависимости на значение $\mathrm{Ra_{cr}}$). Далее, Палм предположил, что в начальный момент времени в жидкости возникло некоторое «основное возмущение» в форме плоской волны (например, пропорциональное $\cos(kx_2/H) = \cos k\eta$, где $\eta = x_2/H$, H — толщина слоя жидкости, и не зависящее от $\xi = x_1/H$), на которое накладывается еще слабый «фон» различных других возмущений малой амплитуды с тем же самым (наиболее неустойчивым) значением волнового вектора k. В таком случае естественно допустить, что основную роль здесь будут играть «парные взаимодействия» основного возмущения с прочими и в соответствии с этим ограничиться лишь рассмотрением эволюции возмущений с полем $u_3(\boldsymbol{x}, t) = u(\xi, \eta, \zeta, t)$, где $\zeta = x_3/H$, вида

$$u_3(\xi, \eta, \zeta, t) = [A_1(t)\cos k\eta + A_2(t)\cos k_1\xi \cos k_2\eta]\, f(\zeta), \qquad k_1^2 + k_2^2 = k^2. \tag{2.45}$$

Но при этом особенно тесно связанными с основным возмущением будут те возмущения с $k_1^2 + k_2^2 = k^2$, квадратичные комбинации которых (входящие в уравнения гидромеханики) могут снова порождать члены того же вида, что и основное возмущение. Можно даже думать, что взаимодействие таких возмущений с основным может при определенных условиях приводить к взаимному усилению обоих возмущений, в результате которого только эти возмущения и будут в конце концов играть существенную роль. Исходя из таких соображений, Палм предложил прежде всего рассмотреть специальный случай, когда

$$u_3(\xi, \eta, \zeta, t) = [A_1(t)\cos k\eta + A_2(t)\cos(\sqrt{3}\,k\xi/2)\cos(k\eta/2)]\, f(\zeta) \tag{2.46}$$

(так как здесь два слагаемых являются как раз сильно связанными друг с другом). Ограничившись для простоты граничных условий лишь физически нереальным случаем конвекции в слое между двумя свободными поверхностями (это упрощение принималось затем и в работах Сиджела и Дж. Стюарта (1962), Сиджела (1962) и Палма и Эйянна (1964)) и приняв для определенности, что $f(\zeta) = \sin\lambda\zeta$, Палм вывел систему дифференциальных уравнений для амплитуд $A_1(t)$ и $A_2(t)$. Эта система после отбрасывания членов выше третьего порядка и некоторых других второстепенных членов может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \gamma A_1 - \frac{1}{4}\varepsilon A_2^2 - \delta_1 A_1^3 - (2\delta_2 - \delta_1/2)\, A_1 A_2^2, \\ \frac{dA_2}{dt} &= \gamma A_2 - \varepsilon A_1 A_2 - \delta_2 A_2^3 - (4\delta_2 - \delta_1)\, A_1^2 A_2, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где γ, ε, δ_1 и δ_2 — постоянные коэффициенты, $\gamma \sim \mathrm{Ra} - \mathrm{Ra_{cr}}$ и $\varepsilon \sim |d\nu/dT|$ (ср. Сиджел и Дж. Стюарт (1962)). Существенно, что система (2.47) имеет стационарные решения вида

$$A_2 = \pm 2A_1, \tag{2.48}$$

отвечающие как раз шестигранным призматическим ячейкам. Кроме того, согласно результатам Палма при $\varepsilon \neq 0$ (т. е. при $d\nu/dT \neq 0$, но не при $d\nu/dt = 0$) только такие решения и будут устойчивыми относительно малых возмущений амплитуд A_1 и A_2, так что именно они будут реализоваться в пределе при $t \to \infty$. Так как к тому же устойчивым решениям при разных знаках $d\nu/dT$ соответствует, как оказалось, именно то направление циркуляции жидкости в ячейках, которое наблюдается на опыте, то Палм заключил, что эти результаты полностью объясняют основные экспериментальные факты.

В дальнейшем теория Палма была критически пересмотрена Сиджелом и Дж. Стюартом (1962) и Палмом и Эйянном (1964) (также исходившими из третьего приближения теории возмущений). При этом выяснилось, что некоторые заключения работы Палма (1960) не совсем точны. В частности, оказалось, что решения (2.48) системы (2.47) на самом деле устойчивы лишь при не слишком малом $|dv/dT|$ (превосходящем некоторую постоянную $f > 0$, зависящую от значений коэффициентов системы). Кроме того, при $|dv/dT| > f$ решения вида (2.48) — не единственные устойчивые решения системы (2.47); однако все остальные ее стационарные решения становятся неустойчивыми, если немного расширить класс допустимых возмущений. В то же время отвечающее (2.48) стационарное движение в виде совокупности шестигранных ячеек (с зависящим от знака dv/dT направлением циркуляции жидкости в ячейках) оказалось устойчивым относительно сравнительно широкого класса возмущений и совпадающим с пределом при $t \to \infty$ произвольного возмущения вида

$$A_1(t)\cos k\eta + A_2(t)\cos(\sqrt{3}\,k\xi/2)\cos(k\eta/2) + A_3(t)\cos l_1\xi\cos l_2\eta]f(\zeta),$$
$$l_1^2 + l_2^2 = k^2$$

(а также, по-видимому, и любой другой комбинации конечного числа неустойчивых волн с фиксированным волновым числом k). В предположении, что при реальных граничных условиях значение f будет достаточно мало, эти факты хорошо согласуются с эмпирическими данными об исключительной роли шестигранных ячеек, хотя, разумеется, нельзя ручаться, что в реальных экспериментах не оказываются существенными еще какие-нибудь обстоятельства, не учтенные в рассматриваемой здесь приближенной теории.

То, что в ряде случаев нелинейные взаимодействия могут привести к разрастанию возмущений одной определенной формы за счет подавления всех остальных, подтверждают и расчеты Сиджела (1962), относящиеся к случаю возмущений с различными волновыми числами в слое подогретой снизу жидкости. Этот автор рассмотрел простейшее «парное взаимодействие» двух «одномерных волн», не зависящих от координаты η (т. е. x_2). Иначе говоря, исследовалась эволюция возмущения, для которого поле $u_3(\boldsymbol{x}, t) = u_3(\xi, \eta, \zeta, t)$ имеет вид

$$u_3(\boldsymbol{x}, t) = A_1(t)\cos k\xi f_1(\zeta) + A_2(t)\cos l\xi f_2(\zeta) + \text{малая добавка}. \quad (2.49)$$

Применив затем метод работ Дж. Стюарта (1960) и Уотсона (1960а), Сиджел получил в первом нелинейном приближении

для коэффициентов A_1 и A_2 систему уравнений вида

$$\frac{dA_1}{dt} = \gamma_1 A_1 - (\delta_1 A_1^2 + \beta_1 A_2^2) A_1,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = \gamma_2 A_2 - (\beta_2 A_1^2 + \delta_2 A_2^2) A_2, \quad (2.50)$$

обращающуюся при $A_2 = 0$ или $A_1 = 0$ в уравнение, равносильное уравнению Ландау (2.39) для амплитуды одного возмущения (зависимостью v от T, учтенной в уравнениях (2.47), здесь пренебрегается). Система (2.50), очевидно, имеет следующие стационарные решения:

(I) $A_1 = A_2 = 0$,

(II) $A_1 = 0$, $A_2 = (\gamma_2/\delta_2)^{1/2}$,

(III) $A_1 = (\gamma_1/\delta_1)^{1/2}$, $A_2 = 0$,

(IV) $A_1 = (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\beta_1)^{1/2}(\delta_1\delta_2 - \beta_1\beta_2)^{-1/2}$,
$A_2 = (\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\beta_2)^{1/2}(\delta_1\delta_2 - \beta_1\beta_2)^{-1/2}$.

Устойчивость этих решений может быть проверена с помощью обычных методов качественной теории дифференциальных уравнений (см., например, Андронов, Витт и Хайкин (1959)). При этом оказывается, что в наиболее важном случае, когда $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, из устойчивости хотя бы одного из решений (II) и (III) уже следует, что не может существовать устойчивое решение (IV). Отсюда видно, что существует широкий класс ситуаций, в которых окончательное состояние всегда будет содержать лишь одно возмущение (с волновым числом k или l), но не смесь их обоих. С другой стороны, при некоторых значениях коэффициентов из системы уравнений (2.50) вытекает, что взаимодействие одного устойчивого и одного неустойчивого возмущения (например, возмущений с $\gamma_1 > 0$ и с $\gamma_2 < 0$) может привести к тому, что неустойчивое возмущение начнет расти, и в конце концов установится «смешанное состояние», отвечающее решению типа (IV). Правдоподобно, что такая ситуация также может иногда встретиться в гидромеханике (например, в случае плоскопараллельных течений). Но для уравнений (2.50), отвечающих случаю термической конвекции при числе Ra, лишь слегка превышающем $\mathrm{Ra_{cr}}$, и неустойчивости обоих исходных возмущений (т. е. $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$) устойчивым относительно всех двумерных возмущений вида (2.49) всегда оказывается только решение (II) или (III). Это обстоятельство в какой-то мере поясняет, каким образом наличие взаимодействий между возмущениями приводит к тому, что при малых $\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra_{cr}}$ из всего интервала неустойчивых волновых чисел

всегда реально наблюдается только одно значение k. Однако при большой разности $Ra—Ra_{cr}$ исследование системы (2.50) сильно затрудняется, причем кажется правдоподобным, что при малом числе Прандтля здесь могут встретиться и случаи, когда устойчивым окажется как раз решение типа (IV), соответствующее смеси двух исходных возмущений.

Аналогичный анализ возможен и для других течений, к которым выше применялась обычная линейная теория возмущений. В частности, очень большой интерес представляет случай практически плоскопараллельного течения в пограничном слое на плоской пластинке, которому было уделено много внимания в п. 2.8. Мы уже отмечали, что согласно экспериментам Шубауэра и Скрэмстеда первоначальное развитие неустойчивых возмущений в таком течении полностью согласуется с выводами линейной теории Толмина — Шлихтинга — Линя. Однако последующие наблюдения целого ряда авторов (например, Шубауэра и Клебанова (1956), Хама, Лонга и Хегарти (1957), Клебанова и Тидстрома (1959) и, особенно, Клебанова, Тидстрома и Сарджента (1962)) убедительно показали, что так дело обстоит лишь на первой стадии развития возмущений; затем положение заметно изменяется. Непосредственно вслед за этой первой стадией следует стадия, в течение которой ранее двумерное возмущение приобретает явно выраженный трехмерный характер за счет появления продольных вихрей с осями, направленными вдоль основного течения, приводящих к резкому перераспределению интенсивности пульсаций в «боковом» направлении $Ox_2=Oy$ (см. рис. 24). Вслед за этой второй стадией следует третья стадия, в течение которой

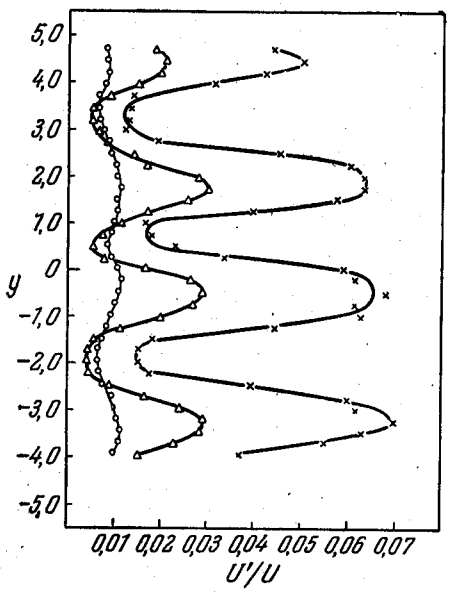


Рис. 24. Зависимость относительной величины типичной пульсации продольной скорости U' от «боковой» координаты y в пограничном слое над плоской пластинкой на различных расстояниях x от колеблющейся металлической ленты, создающей возмущения.

○ — для $x=7{,}6$ см, △ — для $x=15{,}2$ см, × — для $x=19$ см.

в отдельных точках потока возникают резко очерченные «турбулентные пятна» (в результате процесса почти взрывного характера); в дальнейшем эти пятна все сливаются друг с другом, порождая полностью турбулентное течение.

При теоретическом изучении упомянутой второй стадии турбулизации пограничного слоя, очевидно, необходимо учесть, что при сверхкритических числах Рейнольдса в плоскопараллельном течении будут существовать также и трехмерные (зависящие от y) неустойчивые волны, которые при достаточно большом $Re—Re_{cr}$ могут даже оказаться наиболее быстро возрастающими (т. е. самыми неустойчивыми). Исходя отсюда, Дж. Стюарт (1962) рассмотрел поведение в плоскопараллельном течении возмущения с полем скорости вида

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \\ = A_1(t)\cos kx f_1(z) + A_2(t)\cos kx \cos ly f_2(z) + \text{малая добавка}. \quad (2.51)$$

С помощью метода работ Дж. Стюарта (1960) и Уотсона (1960а) он получил при этом для амплитуд A_1 и A_2 систему уравнений вида (2.50). Таким образом, здесь также могут существовать стационарные решения четырех типов (I) — (IV) и основную роль будет играть степень устойчивости этих стационарных решений относительно тех или иных возмущений. К сожалению, количественное исследование устойчивости даже относительно одних только возмущений вида (2.51) требует определения значений коэффициентов соответствующей системы уравнений (2.50), что наталкивается на очень большие трудности (как мы уже отмечали на стр. 151—152, даже знак коэффициента δ_1, совпадающего с коэффициентом 2δ соответствующего уравнения (2.39) для одной амплитуды A_1, до сих пор не подсчитан ни для одного плоскопараллельного течения). Однако эмпирические данные рис. 24 создают впечатление, что при некоторых k и l устойчивым может оказаться именно смешанное стационарное решение типа (IV), причем устойчивость здесь будет иметь место не только по отношению к возмущениям вида (2.51), но и по отношению ко многим другим обычным типам возмущений.

Аналогичный вывод можно сделать и исходя из результатов Бенни (1961, 1964) и Линя и Бенни (1962), подошедших к той же задаче с другой стороны. Эти авторы представили решение уравнений гидромеханики в виде ряда теорий возмущений

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x}) + a\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}, t) + a^2\boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{x}, t) + \ldots, \quad (2.52)$$

где $a \ll 1$ — безразмерный коэффициент, определяющий отношение амплитуды возмущения к амплитуде основного течения $\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x})$. При конкретных расчетах в качестве основного течения

в работах Бенни (1961) и Линя и Бенни (1962) было выбрано плоскопараллельное течение в безграничном пространстве с профилем скорости $U_0(z) = U_0 \operatorname{th} z$, изображенным на рис. 19, *г*, а в работе Бенни (1964) — течение в полупространстве $z \geqslant 0$ с профилем $U_0(z)$, линейно возрастающим до некоторого значения $z = H$, а затем принимающим постоянное значение $U_0(H)$. Первичное возмущение $\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}, t)$ в обоих случаях полагалось имеющим вид

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}, t) = [\mu \boldsymbol{U}_1(z) + \lambda \boldsymbol{u}_1(z) e^{ily}] e^{ik(x-ct)}. \qquad (2.53)$$

Здесь $\boldsymbol{U}_1(z) = (U_1(z), V(z))$; k и c находились из обычной («двумерной») линейной теории (и соответствовали слегка неустойчивому возмущению при Re, немного превосходящем Re_{cr}), $\boldsymbol{u}_1(z) = (u_1(z), v_1(z), w_1(z))$ определялось из линейной теории, описывающей поведение трехмерных возмущений, а отношение μ/λ характеризовало относительную роль двумерного и трехмерного возмущений. Расчеты производились с точностью до вторичных возмущений (порядка a^2); они показали, что даже при $\mu/\lambda \gg 1$ взаимодействие двумерного и трехмерного возмущений приводит к возникновению вторичных продольных вихрей и заметному перераспределению энергии возмущений в направлении оси Oy. В результате суммарное движение (описываемое тремя членами правой части (2.52)) оказывается очень близким к тому, которое реально наблюдается в пограничном слое (имеющем совсем другой профиль скорости $U_0(z)$).

Выяснение важной роли трехмерных возмущений в процессе турбулизации пограничного слоя побудило Мексина (1964) снова вернуться к задаче об устойчивости плоского течения Пуазейля по отношению к конечным возмущениям. Приняв предположения, близкие к использовавшимся раньше в работе Мексина и Стюарта (1951), Мексин произвел аналогичные расчеты уже в применении к конечным трехмерным возмущениям (с полем скорости вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n_1, n_2} e^{i[n_1(kx-\omega t)+n_2 ly]} \boldsymbol{u}_{n_1, n_2}(z)$, где n_1 и n_2 — произвольные целые числа). В результате очень громоздких вычислений он нашел, что, по-видимому, для некоторых конечных трехмерных возмущений критическое число Рейнольдса Re_{cr} вполне может оказаться довольно близким к значению 1000, даваемому экспериментами в качестве значения $\mathrm{Re}_{cr\,min}$ для рассматриваемого течения.

Теоретическое исследование третьей стадии турбулизации пограничного слоя, характеризуемой возникновением турбулентных пятен, является еще значительно более трудным, чем исследование второй стадии, и пока очень мало продвинуто. Возможно, что появление такого «пятна» связано с тем, что в некоторый момент времени в определенной точке сразу становятся неустойчивыми многие элементарные возмущения и в результате устанавливается сложный «смешанный» режим, обладающий большим числом степеней свободы. Весьма правдоподобно, что значительную роль при этом играет возникновение внутри течения (в результате наложения на среднее течение развившихся во время второй стадии конечных трехмерных возмущений) крайне неустойчивых слоев с профилем скорости, имеющим точку перегиба (ср. Бетчов (1960)). Такие слои, вообще говоря, будут нестационарными; их толщина и отвечающий им перепад средней скорости могут быстро изменяться во времени, приводя к возникновению непосредственно перед появлением пятна областей течения, характеризуемых резко повышенной неустойчивостью. Несложные расчеты, проведенные Гринспаном и Бенни (1963) (в рамках линейной теории возмущений) в применении к простой модели с профилем скорости того типа, который изображен на рис. 19, *в*, но с зависящими от времени перепадом скоростей $2U_0$ и толщиной слоя $2H$, показали, что развитие такого слоя вполне может привести к очень бурному порождению мелкомасштабных возмущений, энергия которых достигает больших значений в течение ничтожно малого промежутка времени. Эти результаты находятся в хорошем качественном соответствии с имеющимися эмпирическими данными, касающимися перехода пограничного слоя к режиму развитой турбулентности (см., в частности, Миллер и Фейер (1964)).

Что же касается теоретического исследования развитой турбулентности, возникающей после полного завершения процесса турбулизации течения, то ему будут посвящены все последующие главы настоящей книги. При этом, однако, нам понадобится ряд сведений из теории вероятностей и теории случайных функций, к краткому изложению которых мы теперь и перейдем.

ГЛАВА II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 3. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ. ПОЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАК СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Практические методы осреднения и условия Рейнольдса

Как мы уже говорили выше, характерной особенностью тех движений жидкости (или газа), которые называются турбулентными, является наличие беспорядочных флюктуаций гидродинамических характеристик потока. В результате как зависимость мгновенных значений гидродинамических полей от пространственных координат, так и временной ход этих значений приобретают очень сложный и запутанный характер, причем при многократном осуществлении потока в одинаковых условиях точные значения всех полей каждый раз оказываются иными. Вернемся снова к рис. 1, на котором представлены образцы кривых, выражающих зависимость некоторых гидродинамических величин в турбулентном потоке от времени. Мы видим, что все эти кривые состоят из совокупности пульсаций разнообразных периодов и амплитуд, налагающихся друг на друга без какой-либо заметной закономерности. Аналогично выглядят и распределения мгновенных значений гидродинамических элементов в пространстве: они представляют собой беспорядочную совокупность трехмерных пульсаций различной амплитуды, длины волны и ориентации. В силу крайней неупорядоченности и резкой изменчивости во времени и в пространстве полей всех гидродинамических величин при изучении турбулентности необходимо использовать какие-либо *методы осреднения*, позволяющие перейти от исходных гидродинамических полей к более плавным и регулярным *средним значениям* характеристик потока, которые можно исследовать с помощью обычных методов математического анализа.

Вопрос о правилах вычисления средних значений является тонким вопросом теории турбулентности, имеющим большую историю. На практике при определении среднего значения чаще всего пользуются временным или пространственным осреднением по какому-либо промежутку времени или области пространства. Можно также рассматривать более общее пространственно-временное осреднение функций $f(x_1, x_2, x_3, t) = f(\boldsymbol{x}, t)$, задаваемое формулой

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3-\xi_3, t-\tau)\,\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau, \tag{3.1}$$

где черта сверху служит символом осреднения, а $\omega(\xi, \tau)$ — некоторая весовая функция (чаще всего неотрицательная), удовлетворяющая условию нормировки

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\tau = 1. \tag{3.2}$$

Если функция ω равна нулю вне некоторой четырехмерной области и принимает постоянное значение внутри нее, то (3.1) обращается в простое осреднение по заданной пространственно-временной области. Полагая же $\omega(\xi, \tau) = \omega(\xi)\delta(\tau)$ или $\omega(\xi, \tau) = \omega(\tau)\delta(\xi)$, где буквой δ обозначена δ-функция Дирака, а $\omega(\xi)$ и $\omega(\tau)$ — функции, имеющие постоянное значение на некотором параллелепипеде или отрезке и равные нулю вне его, мы придем к пространственному или соответственно временному осреднению. Ясно, однако, что среднее значение (3.1), вообще говоря, будет зависеть от вида весовой функции ω (в частности, при использовании осреднения по некоторому интервалу времени или области пространства оно будет зависеть от длины интервала или формы и объема области). Таким образом, формула (3.1) приводит к множеству различных «средних значений», и надо еще выяснить, какое из них является «наилучшим».

При выборе какого-либо определенного «правила осреднения» прежде всего следует четко сформулировать общие требования, которые целесообразно предъявлять к этому правилу. С точки зрения теории турбулентности важнейшим из таких общих требований, очевидно, является требование, чтобы применение рассматриваемого осреднения к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволяло получить достаточно простые уравнения относительно средних значений гидродина-

мических полей. Это хорошо понимал уже основоположник теории турбулентности О. Рейнольдс, который сам использовал лишь простейшее осреднение по некоторому временному интервалу, но одновременно указал и естественные общие условия, которым должно удовлетворять любое осреднение, применяемое в гидродинамике. На самом деле, правда, не все нужные общие условия были аккуратно выписаны Рейнольдсом (1894); но, слегка уточнив его рассуждения, легко прийти к выводу, что следует требовать выполнения следующих пяти соотношений:

$$\overline{f+g}=\bar{f}+\bar{g}, \tag{3.3}$$

$$\overline{af}=a\bar{f}, \quad \text{если} \quad a=\text{const}, \tag{3.4}$$

$$\bar{a}=a, \quad \text{если} \quad a=\text{const}, \tag{3.5}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \text{ где } s \text{ — это } x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ или } t, \tag{3.6}$$

$$\overline{\bar{f}g}=\bar{f}\bar{g}. \tag{3.7}$$

В настоящее время условия (3.3)—(3.7) обычно называются *условиями Рейнольдса.*

Условие (3.6) можно также заменить более общим условием перестановочности операций осреднения и предельного перехода

$$\overline{\lim_{n\to\infty} f_n}=\lim_{n\to\infty}\bar{f}_n. \tag{3.6'}$$

Полагая в (3.7) последовательно $g=1$, $g=\bar{h}$ и $g=h'=h-\bar{h}$ (штрихом у нас всегда будет обозначаться пульсация соответствующей величины, т. е. ее отклонение от своего среднего значения) и используя также (3.5) и (3.3), мы получаем следующие важные следствия из условий Рейнольдса:

$$\bar{\bar{f}}=\bar{f}, \quad \bar{f'}=\overline{f-\bar{f}}=0, \quad \overline{\bar{f}\bar{h}}=\bar{f}\bar{h}, \quad \overline{\bar{f}h'}=\bar{f}\overline{h'}=0. \tag{3.7'}$$

Ясно, что условия (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) или (3.6′) будут выполняться при любом осреднении (3.1) с произвольной весовой функцией ω, удовлетворяющей (3.2). Иначе обстоит дело с наиболее сложным условием (3.7). Так, например, если пользоваться временным или пространственным осреднением по некоторому интервалу, то можно показать, что, строго говоря, ни при каком выборе интервала осреднения это условие не будет точно выполняться. Нетрудно, однако, привести соображения в пользу того, что интервал осреднения можно выбрать так, чтобы это условие приближенно выполнялось со сравнительно большой степенью точности: для этого надо только, чтобы интервал осреднения был велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля $f'=f-\bar{f}$, но был мал по сравнению с периодами осредненного поля $\bar{f}$ (ср., например, Кочин, Кибель, Розе (1963), ч. 2, стр. 689—690). Подобного рода соображениями и ограничился в свое время Рейнольдс; в настоящее время, однако, эти качественные соображения вряд ли могут быть признаны вполне убедительными.

Возможность выбора интервала осреднения, промежуточного между периодами пульсационного и осредненного движения, предполагает заранее, что турбулентное движение может быть разбито на сравнительно плавное и медленно меняющееся «среднее движение» и налагающееся на него крайне нерегулярное «пульсационное движение», причем между областями частот, характерных для того и другого движения, имеется заметный разрыв. Иначе говоря, здесь предполагается, что преобразование Фурье (по времени или по координатам) функции f отлично от нуля в некоторой области вблизи нуля и в некоторой далекой от нее области больших частот (или волновых чисел) и равно нулю в промежутке между этими областями. Такая картина более или менее соответствует действительности в случае многих искусственных турбулентных потоков, создаваемых в лаборатории. Однако в случае, например, естественных турбулентных движений в земной атмосфере и океане она вряд ли может быть всегда принята, поскольку атмосферная и морская турбулентность часто имеет широкий непрерывный спектр.

Наиболее последовательное использование представления о том, что среднее значение $\bar{f}$ и пульсация f' функции f отличаются в первую очередь характерными периодами (или длинами волн) состоит в определении среднего значения $\bar{f}$ как части разложения функции f в интеграл Фурье, отвечающей интегрированию по области значений соответствующей переменной (частоты или волнового числа), меньших по абсолютной величине некоторого фиксированного числа p_0. Легко понять, что в этом случае условия (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) будут выполняться [1]); будут выполняться также и первые два из условий (3.7′), следующих из (3.7). Однако общее условие (3.7) здесь, вообще говоря, не будет иметь места; для его выполнения необходимо наложить на рассматриваемые функции f и g некоторые весьма специальные условия, несовместимые с предположением о том, что их преобразования Фурье всюду отличны от нуля (см. по этому поводу подробное исследование Изаксона (1929), а также заметку Кампе де Ферье (1951)).

Отметим еще, что Г. Биркгоф, Кампе де Ферье, Рота и некоторые другие авторы опубликовали ряд работ (ссылки на которые можно найти, например, в обзорной статье Кампе де Ферье (1956) и в статье Рота (1960)), посвященных исследованию общих «операций осреднения», точно удовлетворяющих условиям Рейнольдса (3.3)—(3.7) (или некоторым родственным условиям того же типа) и определенных на различных классах функциональных пространств (т. е. на совокупностях функций, удовлетворяющих тем или иным специальным условиям). Полученные в этих работах результаты позволяют в некоторых случаях дать полное описание (в абстрактных алгебраических терминах) всех таких операций осреднения. Однако все эти исследования имеют формально-математический характер и их результаты не нашли

[1]) Это следует и из того, что такое осреднение, как легко видеть, является частным случаем осреднения (3.1).

непосредственного применения в теории турбулентности. Впрочем, это оказывается и ненужным, так как в современной теории турбулентности вопрос о смысле операции осреднения решается совершенно иначе и притом так, что все условия Рейнольдса очевидным образом оказываются точно выполняющимися (но зато возникает совсем новый вопрос о выполнении так называемого условия эргодичности, о котором еще будет речь ниже).

3.2. Случайные поля гидродинамических величин и вероятностное осреднение

Использование временного, пространственного или пространственно-временного осреднения, задаваемого какой-либо формулой вида (3.1), очень удобно с практической точки зрения, но неизбежно приводит к большим аналитическим трудностям при теоретических расчетах. Кроме того, такое осреднение обладает тем существенным недостатком, что при его использовании каждый раз приходится специально решать вопрос о форме функции $\omega(\xi, \tau)$, наиболее удобной для данной задачи. По всем этим причинам представляется желательным в теории турбулентности вовсе не использовать осреднения такого типа, а принять вместо него какое-нибудь другое определение среднего значения, обладающее более простыми свойствами и более универсальное по своей природе. Такое более удобное определение, которым мы и будем все время пользоваться в настоящей книге, возникает при теоретико-вероятностной трактовке полей гидродинамических величин в турбулентном потоке как случайных полей.

Основой теоретико-вероятностного (или, как чаще говорят, статистического) подхода к теории турбулентности является переход от рассмотрения одного-единственного турбулентного потока к рассмотрению *статистической совокупности аналогичных потоков*, задаваемых некоторой совокупностью фиксированных внешних условий. Чтобы понять, что это означает, рассмотрим какой-либо конкретный класс гидродинамических потоков, например класс потоков, возникающих в аэродинамической трубе при обтекании прямого кругового цилиндра. Основное различие между случаями ламинарного и турбулентного обтекания состоит в следующем. При ламинарном обтекании, поместив одинаковым образом два равных цилиндра в две идентичные трубы (или, что то же самое, повторив дважды наш опыт с одним и тем же цилиндром в одной и той же трубе), мы через заданное время t после включения мотора в заданной точке $\boldsymbol{x}$ рабочей части трубы будем иметь одно и то же значение $u_1(\boldsymbol{x}, t)$ компоненты скорости вдоль оси Ox_1 и других гидродинамических характеристик потока (которые можно, во всяком случае в принципе, найти с помощью решения некоторой

задачи с краевыми и начальными условиями для системы уравнений Навье — Стокса). В случае же турбулентного обтекания влияние малых неконтролируемых возмущений в потоке и в начальных условиях приводит к тому, что, проведя два раза один и тот же опыт в практически одинаковых условиях, мы получим два различных значения величины $u_1(\boldsymbol{x}, t)$ и других характеристик. Но в таком случае можно ввести в рассмотрение «множество всех значений величины $u_1(\boldsymbol{x}, t)$, получающихся во всевозможных опытах по турбулентному обтеканию цилиндра при заданных внешних условиях», и значение $u_1(\boldsymbol{x}, t)$, полученное в каком-то конкретном опыте, считать одним «представителем», выбранным наудачу из этого множества [1]). Если теперь мы зафиксируем внешние условия и при этих условиях будем много раз повторять наш опыт, каждый раз записывая получающееся значение $u_1(\boldsymbol{x}, t)$, то среднее арифметическое всех полученных значений величины $u_1(\boldsymbol{x}, t)$ на практике обычно оказывается довольно устойчивым; иначе говоря, начиная с некоторого достаточно большого числа опытов, оно при дальнейшем возрастании этого числа обычно уже мало меняется, колеблясь все время около некоторого постоянного значения (наличие такой устойчивости средних и означает, что наш набор аналогичных опытов представляет собой статистический ансамбль). В таком случае значение, около которого все время колеблется среднее арифметическое значений $u_1(\boldsymbol{x}, t)$, наблюдавшихся в совокупности аналогичных опытов, мы будем называть *теоретико-вероятностным средним значением* скорости $u_1(\boldsymbol{x}, t)$ и обозначать символом $\overline{u_1(\boldsymbol{x}, t)}$, в дальнейшем черта сверху у нас всегда будет обозначать именно такое теоретико-вероятностное осреднение).

Подобным же образом и эмпирические средние значения всех других гидродинамических характеристик потока, взятые по совокупности аналогичных опытов, оказываются устойчивыми и при достаточно большом числе опытов обычно лишь слабо отклоняются от некоторых постоянных чисел. Особый интерес для нас будет представлять характеристика $\chi_{u_1(\boldsymbol{x}, t)}(u', u'')$, $u'' >$

[1]) Заметим, что в случае природной турбулентности (например, атмосферной) выбор множества аналогичных опытов представляет бо́льшие трудности, так как здесь «внешние условия» (сводящиеся в первую очередь к метеорологическим условиям) не могут быть повторно воспроизведены по нашему желанию. Однако и здесь обычно удается подобрать ряд ситуаций, в которых все условия, существенно влияющие на измеряемую величину (например, при измерении скорости ветра на высоте 2 $м$ — значение средней скорости ветра, градиентов ветра и температуры и направление ветра), оказываются практически одинаковыми. В таком случае совокупность этих ситуаций и будет представлять собой «статистический ансамбль аналогичных опытов», не отличающийся от ансамбля всевозможных обтеканий равных цилиндров в идентичных аэродинамических трубах.

$> u'$, равная нулю, если значение величины $u_1(x, t)$ оказывается бо́льшим, чем u'', или меньшим, чем u', и равная единице в противоположном случае. Число $p(u', u'')$, около которого колеблется при большом числе опытов среднее арифметическое этой характеристики (равное, очевидно, относительной частоте опытов, в которых значение $u_1(x, t)$ оказывается удовлетворяющим неравенству $u' \leqslant u_1(x, t) \leqslant u''$), называется *вероятностью* того, что $u_1(x, t)$ примет значение в интервале между u' и u''. Обычно это число $p(u', u'')$ может быть представлено в виде интеграла в пределах от u' до u'' от некоторой неотрицательной функции $p(u)$, называемой *плотностью распределения вероятности* (или короче — просто *плотностью вероятности*) величины $u_1(x, t)$. В таком случае совокупность всех u, для которых $p(u) \neq 0$, и будет составлять то «множество возможных значений $u_1(x, t)$», о котором мы говорили выше; конкретное же значение $u_1(x, t)$, наблюденное в одном из опытов, мы будем называть *выборочным значением* (или *реализацией*) x_1-компоненты скорости. Факт существования плотности $p(u)$ иногда записывается в виде равенства

$$P\{u < u_1(x, t) < u + du\} = p(u)\, du,$$

где знак $P\{\ldots\}$ означает вероятность выполнения условия, указанного в скобках. Теоретико-вероятностное среднее значение $\overline{u_1(x, t)}$ величины $u_1(x, t)$ при этом, очевидно, может быть выражено через $p(u)$ при помощи равенства

$$\overline{u_1(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u)\, du. \tag{3.8}$$

Одновременно знание плотности вероятности $p(u)$ позволяет нам определить также и теоретико-вероятностные средние значения произвольных функций от $u_1(x, t)$:

$$\overline{F[u_1(x, t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) p(u)\, du. \tag{3.8'}$$

В теории вероятностей величины u, имеющие определенную плотность вероятности, называются *случайными величинами*; совокупность же всевозможных вероятностей $p(u', u'') = P\{u' < u < u''\}$, отвечающих величине u, называется ее *распределением вероятности*.

Поэтому мы можем заключить, что с точки зрения теории вероятностей значение скорости в точке турбулентного потока представляет собой случайную величину, характеризуемую определенным распределением вероятности.

До сих пор мы говорили только о значении $u_1(x, t)$ компоненты скорости в фиксированной точке x и в фиксированный момент времени t. Однако аналогичный подход приложим и ко всему полю значений $u_1(x, t)$, т. е. функции $u_1(x, t) = u_1(x_1, x_2, x_3, t)$ от четырех переменных. Повторяя много раз один и тот же опыт (сводящийся к осуществлению некоторого турбулентного движения) при одинаковых внешних условиях, мы будем каждый раз получать новое поле $u_1(x, t)$. Таким образом, и здесь можно говорить о «множестве возможных полей $u_1(x, t)$», а каждое отдельное поле, наблюдающееся в каком-то конкретном турбулентном потоке, рассматривать как одного «представителя», наудачу выбранного из этого множества (иначе говоря, как одну *реализацию* или одно *выборочное значение* случайного поля $u_1(x, t)$. Нам надо теперь только объяснить, чем заменяется в этом случае предположение о существовании плотности вероятности $p(u)$, использовавшееся при рассмотрении одной величины $u_1(x, t)$.

Чтобы о поле $u_1(x, t)$ можно было говорить как о *случайном поле*, прежде всего необходимо, чтобы значение $u_1(M) = u_1(x, t)$ этого поля в любой фиксированной точке $M = (x, t)$ пространства — времени являлось случайной величиной. Поэтому каждой комбинации значений x и t здесь должна отвечать своя плотность вероятности $p_M(u)$, зависящая от $M = (x, t)$. Но это еще не все; если выбрать два значения $u_1(M_1) = u_1(x_1, t_1)$ и $u_1(M_2) = u_1(x_2, t_2)$ нашей компоненты скорости, то средние арифметические любых функций от этих двух величин также должны быть статистически устойчивыми. Это значит, что для величин $u_1(M_1)$ и $u_1(M_2)$ должна существовать *двумерная плотность вероятности* $p_{M_1M_2}(u_1, u_2)$, определяемая соотношением

$$P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1, \quad u_2 < u_1(M_2) < u_2 + du_2\} = p_{M_1M_2}(u_1, u_2)\, du_1, du_2.$$

Иными словами, при изменении значений $u_1(M_1)$ и $u_1(M_2)$ в большом числе турбулентных потоков, характеризуемых одинаковыми внешними условиями, доля случаев, в которых значение $u_1(M_1)$ оказывается заключающимся между фиксированными значениями u_1' и u_1'' и в то же время значение $u_1(M_2)$ оказывается заключающимся между u_2' и u_2'', должна колебаться около некоторого постоянного значения (равного двойному интегралу в пределах от u_1' до u_1'' и от u_2' до u_2'' от неотрицательной функции $p_{M_1M_2}(u_1, u_2)$). Точно так же, если $M_1 = (x_1, t_1)$, $M_2 = (x_2, t_2)$, ..., $M_N = (x_N, t_N)$ — произвольные N точек пространства — времени, то им должна отвечать функция N

переменных

$$p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N), \tag{3.9}$$

определяемая соотношением

$$P\{u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1,\ u_2 < u_1(M_2) < u_2 + du_2,\ \dots,$$

$$u_N < u_1(M_N) < u_N + du_N\} =$$

$$= p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)\, du_1\, du_2 \dots du_N$$

и являющаяся *N-мерной плотностью вероятности* значений N случайных величин $u_1(M_1)$, $u_1(M_2)$, ..., $u_1(M_N)$. Наличие всевозможных плотностей вероятности (3.9) как раз и дает основание считать поле $u_1(x, t)$ случайным полем; для его полного задания (т. е. для задания распределения вероятности в функциональном пространстве всех его возможных значений) надо задать все семейство функций (3.9), отвечающих всевозможным целым положительным N и всевозможным наборам N точек пространства — времени. Два турбулентных потока мы будем при этом считать одинаковыми, если им отвечают одинаковые (одномерные и многомерные) плотности вероятности; если же некоторый набор плотностей будет близок к тем, которые описывают заданный турбулентный поток, то этот набор плотностей будет определять некоторую приближенную статистическую модель нашего турбулентного потока.

Функции (3.9), очевидно, должны быть все неотрицательными и такими, что интеграл от каждой из них по всем переменным равен единице; кроме того, они должны еще удовлетворять определенным условиям симметрии и согласованности. А именно, по самому определению плотности (3.9) для любых M_1, M_2, ..., M_N должно выполняться соотношение

$$p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) = p_{M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_N}}(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_N}), \tag{3.10}$$

где $i_1, i_2, \dots, i_N$ — это те же числа 1, 2, ..., N, но расположенные в каком-то другом порядке. Далее, если $n < N$, то для любых N точек M_1 M_2, ..., M_n, M_{n+1}, ..., M_N должно выполняться равенство

$$p_{M_1 \dots M_n}(u_1, \dots, u_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{M_1 \dots M_n M_{n+1} \dots M_N}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_N)\, du_{n+1} \dots du_N. \tag{3.11}$$

Любое семейство неотрицательных функций (3.9), обладающих свойствами (3.10)—(3.11) и таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} p_M(u)\,du = 1$ при всех $M = (x, t)$, определяет некоторое *распределение вероятности в пространстве функций* $u_1(M) = u_1(x, t)$ *от четырех переменных* (т. е. задает случайное поле $u_1(M) = u_1(x, t)$). Вероятностное среднее значение $\overline{F}$ произвольной функции $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$ от значений

$$u_1 = u_1(M_1), \quad u_2 = u_1(M_2), \quad \dots, \quad u_N = u_1(M_N)$$

при этом определяется как интеграл

$$\overline{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1, u_2, \dots, u_N) \times$$

$$\times p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)\, du_1\, du_2 \dots du_N, \tag{3.12}$$

где $p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)$ — соответствующая плотность вероятности (3.9).

Естественно предположить, что в турбулентном потоке поле $u_1(x, t)$ и поля остальных компонент скорости, а также поля давления $p(x, t)$, плотности $\rho(x, t)$ (в случае сжимаемой жидкости), температуры $T(x, t)$ (в случае температурно-неоднородной среды) и других гидродинамических величин являются случайными полями. В таком случае каждому из этих полей будет соответствовать своя система многомерных плотностей вероятности (3.9). Кроме того, различные гидродинамические поля в турбулентном потоке являются статистически связанными друг с другом, и следует считать, что для них существуют также *совместные плотности вероятности* значений одного из полей в каких-то заданных N_1 точках пространства — времени, значений второго поля в заданных N_2 точках, значений третьего поля в заданных N_3 точках и т. д. Отсюда вытекает, что, имея любую функцию от гидродинамических характеристик турбулентного потока, мы можем определить ее среднее значение как интеграл от произведения этой функции на совместную плотность вероятности всех ее аргументов, распространенный по всей области изменения этих аргументов (ср. (3.12)). При этом условия (3.3) — (3.7) обращаются в известные свойства теоретико-вероятностных средних значений, доказательство которых приводится в курсах теории вероятностей; таким образом, теперь они уже оказываются точно выполняющимися и не требуют никакого специального обоснования.

3.3 Понятие об эргодичности. Статистическая формулировка основной задачи теории турбулентности

Намеченный выше подход к полям гидродинамических характеристик турбулентного потока как к случайным полям, идущий от работ А. Н. Колмогорова и его учеников (см., например, Миллионщиков (1939)) и работы Кампе де Ферье (1939), является в настоящее время общепринятым во всех исследованиях по теории турбулентности (см., например, обзорные статьи Кампе де Ферье (1953) и Обухова (1954)). Приняв предположение о существовании распределений вероятности для всех гидродинамических полей, мы можем, далее, широко применять математический аппарат современной теории вероятностей; операция осреднения при этом определяется вполне однозначно и обладает всеми свойствами, которых естественно от нее требовать. Существенно отметить, однако, что при таком подходе сразу же возникает важный дополнительный вопрос о сопоставлении выводов теории с данными непосредственных измерений.

Дело в том, что согласно нашему новому определению среднее значение понимается как среднее, взятое по всем возможным значениям рассматриваемой величины; поэтому для эмпирического определения средних значений со значительной степенью точности мы должны были бы иметь результаты большого числа измерений, производившихся в длинной серии повторяющихся аналогичных опытов. На практике, однако, мы чаще всего не имеем такого множества опытов и вынуждены определять средние значения по данным измерений, проводившихся в течение одного-единственного опыта [1]). Во всех таких случаях обычно используется простейшее осреднение эмпирических данных по некоторому интервалу времени или пространства. Отсюда видно, что предположение о существовании распределений вероятности само по себе еще не снимает вопроса о законности использования в теории турбулентности обычных временных или пространственных средних, а лишь изменяет постановку этого вопроса. А именно, вместо исследования частных свойств того или иного метода осреднения мы должны теперь выяснить, насколько близки соответствующие эмпирические средние к вероятностным средним значениям, с которыми лишь и имеет дело теория. Положение дел здесь вполне аналогично тому,

[1]) Исключение в этом отношении представляют лишь опыты по определению численных характеристик турбулентной диффузии, в которых чаще всего одновременно выпускается целое облако одинаковых частиц (например, клуб дыма), а затем производится «осреднение по облаку», в известном смысле эквивалентное осреднению по множеству аналогичных опытов.

которое имеется в обычной статистической механике систем с конечным числом степеней свободы, где также приходится заменять теоретические «средние по совокупности возможных состояний системы» (или, как чаще говорят, «средние по ансамблю») непосредственно наблюдаемыми временными средними. Известно, что в статистической механике при такой замене обычно исходят из предположения, что временные средние значения при неограниченном увеличении интервала осреднения сходятся к соответствующим теоретическим средним значениям. Справедливость этого предположения в некоторых специальных случаях может быть строго доказана (например, с помощью «эргодической теоремы» Дж. Биркгофа), а в остальных случаях оно принимается в качестве дополнительной весьма правдоподобной гипотезы («эргодическая гипотеза»). В теории турбулентности также иногда вводят предположение о сходимости временных или пространственных средних при неограниченном увеличении интервала осреднения к соответствующим вероятностным средним в качестве специальной «эргодической гипотезы». В применении к временным средним правдоподобность этой гипотезы в ряде случаев подкрепляется, в частности, общими представлениями Л. Д. Ландау о характере развитой турбулентности, изложенными на стр. 145. Заметим, однако, что во многих случаях законность замены теоретико-вероятностных средних значений гидродинамических полей временными или пространственными средними может быть также строго обоснована с помощью «эргодических теорем» современной теории случайных процессов и полей. В связи с большой важностью этого вопроса мы ниже еще остановимся на нем более подробно (см. п. 4.7); сейчас же мы постараемся сформулировать общую задачу изучения турбулентности как некоторую задачу о распределениях вероятности для соответствующих гидродинамических полей.

Выше мы видели, что в случае ламинарных движений уравнения гидродинамики позволяют однозначно определить значения всех гидродинамических характеристик потока в любой будущий момент времени по начальным значениям гидродинамических полей (и соответствующим граничным условиям). При этом в случае несжимаемой жидкости достаточно знать лишь начальные значения поля скорости (или поля вихря скорости); в случае же сжимаемой жидкости требуется задать начальные значения пяти независимых гидродинамических полей (например, трех компонент скорости, давления и температуры). В турбулентных потоках начальные значения соответствующих гидродинамических полей также будут с помощью уравнений гидродинамики

определять все их будущие значения[1]). Однако здесь эти будущие значения будут существенно зависеть от ничтожных неконтролируемых возмущений начальных и граничных условий и, кроме того, будут иметь столь сложный и запутанный вид, что точное их определение оказывается бесполезным, а интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений практически невыполнимым. Только распределения вероятности для соответствующих гидродинамических полей, а вовсе не сами точные значения этих полей могут в этом случае представлять интерес. Поэтому и уравнения гидродинамики в случае турбулентных потоков следует использовать лишь для исследования соответствующих распределений вероятности или каких-либо определяемых этими распределениями величин.

Заметим еще, что для возможности применения уравнений гидродинамики к случайным полям, задаваемым своими распределениями вероятности, эти распределения должны обладать известными свойствами регулярности, гарантирующими, что реализации соответствующих полей можно считать непрерывными и достаточно гладкими — имеющими все входящие в уравнения временные и пространственные производные. Предположим теперь, что распределения вероятности, относящиеся к значениям полей в фиксированный начальный момент времени $t = t_0$, удовлетворяют этим условиям регулярности. В таком случае каждая конкретная реализация гидродинамических полей потока будет закономерно изменяться во времени в соответствии с изменением во времени решения, отвечающего заданным начальным (и граничным) условиям. Следовательно, вся совокупность возможных начальных гидродинамических полей перейдет через время $\tau > 0$ в строго определенную совокупность функций от пространственных координат, относящуюся к моменту $t = t_0 + \tau$. Отсюда вытекает, что плотность вероятности для какого-либо гидродинамического поля в момент t можно (во всяком случае, в принципе) определить, рассчитав с помощью уравнений гидродинамики, какой совокупности начальных условий будет соответствовать тот или иной интервал значений нашего

[1]) Заметим, впрочем, что в литературе по теории турбулентности высказывалось иногда даже мнение о том, что в турбулентном потоке уравнения гидродинамики вообще неприменимы. Если не принимать во внимание совсем беспочвенные утверждения, то существенным здесь является лишь вопрос о том, не могут ли молекулярные флюктуации вызвать случайные «всплески», способные передавать энергию наиболее мелкомасштабным гидродинамическим возмущениям и тем самым, например, стимулировать переход потока к турбулентному режиму. В настоящее время, однако, почти все согласны с тем, что если такие процессы и возможны, то роль их, во всяком случае, очень невелика, так что в первом приближении их вполне можно не учитывать (см. также ниже стр. 216—217).

поля в момент t, и найдя вероятность этой совокупности начальных условий. Таким образом, в турбулентном потоке уравнения гидродинамики будут однозначно определять эволюцию во времени распределения вероятности гидродинамических полей. Это значит, что более или менее произвольно (с соблюдением лишь некоторых «условий регулярности») здесь можно выбирать только распределения вероятности в один фиксированный момент времени; после этого все остальные распределения вероятности, относящиеся к значениям гидродинамических полей во всевозможных точках пространства — времени, будут уже однозначно определяться из уравнений движения. Поэтому основную задачу теории турбулентности (например, для случая несжимаемой жидкости) можно сформулировать следующим образом: по заданному распределению вероятности значений трех компонент скорости в различных точках пространства в момент $t = t_0$, сосредоточенному на совокупности дважды дифференцируемых соленоидальных векторных полей, требуется определить распределения вероятности значений полей скорости и давления во все последующие моменты времени (включая и распределения для значений в несколько различных моментов времени). В случае сжимаемой жидкости надо только вместо распределений вероятности трех компонент скорости исходить из распределений вероятности значений пяти независимых гидродинамических величин. К сожалению, эта общая задача слишком трудна, и в настоящее время еще не видно подхода к ее полному решению. Поэтому дальнейшее обсуждение этой задачи мы отложим до заключительной главы второй части нашей книги; в остальных же главах мы будем заниматься лишь более частными задачами, в которых вместо распределений вероятности фигурируют некоторые менее полные статистические характеристики случайных полей.

3.4. Характеристические функции и характеристический функционал

Во многих случаях вместо плотностей вероятности (3.9) удобно рассматривать их преобразования Фурье

$$\varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) =$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i \sum_{k=1}^{N} \theta_k u_k} p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)\, du_1\, du_2 \dots du_N. \quad (3.13)$$

Такие преобразования Фурье называются *характеристическими функциями* соответствующих распределений вероятности; в силу (3.12) их, очевидно,

можно также представить в виде

$$\varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \overline{\exp\left(i \sum_{k=1}^{N} \theta_k u_k\right)}. \quad (3.14)$$

Ясно, что характеристическая функция однозначно определяет отвечающее ей распределение вероятности: в самом деле,

$$p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{-i \sum_{k=1}^{N} \theta_k u_k} \varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)\, d\theta_1\, d\theta_2 \dots d\theta_N \quad (3.15)$$

в силу известной формулы обращения интегралов Фурье. Таким образом, задание характеристической функции равносильно заданию соответствующей плотности вероятности.

В силу самого своего определения характеристические функции являются комплексными непрерывными функциями от аргументов θ_1, θ_2, ..., θ_N, обладающими следующими свойствами:

$$\varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}(0, 0, \dots, 0) = 1 \quad (3.16)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}\left(\theta_1^{(k)} - \theta_1^{(l)}, \theta_2^{(k)} - \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_N^{(k)} - \theta_N^{(l)}\right) c_k c_l^* \geqslant 0 \quad (3.17)$$

(где звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины) при любом целом n, любых вещественных $\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_1^{(n)}; \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_2^{(n)}; \dots; \theta_N^{(1)}, \dots, \theta_N^{(n)}$ и любых комплексных $c_1, \dots, c_n$. В самом деле, левая часть (3.17), очевидно, равна среднему значению неотрицательной величины $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i \sum_l \theta_l^{(k)} u_l} c_k\right|^2$, откуда и вытекает написанное неравенство. Можно также показать, что любая непрерывная функция от N переменных, обладающая свойствами (3.16) и (3.17), является характеристической функцией некоторого N-мерного распределения вероятности (которое, правда, может и не иметь плотности вероятности, а, например, относится к дискретному типу; см. Бохнер (1933)). Это обстоятельство нам еще понадобится во второй части книги.

Нетрудно видеть, что условие симметрии (3.10) и условие согласованности (3.11) в применении к характеристическим функциям переходят в условия

$$\varphi_{M_1 M_2 \dots M_N}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \varphi_{M_{i_1} M_{i_2} \dots M_{i_N}}(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_N}), \quad (3.18)$$

$$\varphi_{M_1 \dots M_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \varphi_{M_1 \dots M_n M_{n+1} \dots M_N}(\theta_1, \dots, \theta_n, 0, \dots, 0). \quad (3.19)$$

Таким образом, случайное поле любой гидродинамической величины можно также задать семейством характеристических функций (3.14), удовлетворяющих (3.18) и (3.19).

Из (3.19) видно, что характеристическая функция распределения вероятности значений поля в заданной системе N точек крайне просто определяет характеристические функции значений поля в любой подсистеме этой системы. Поэтому естественно попытаться сразу задать все распределения вероятности,

характеризующие поле, при помощи одной-единственной величины — «характеристической функции распределения вероятности для значений поля во всех возможных точках». Оказывается, что такое задание случайного поля при помощи одной величины — «характеристического функционала» — действительно возможно (и в этом состоит одно из важных преимуществ подхода, исходящего из характеристических функций, а не из плотностей вероятности). Впервые возможность подобного задания случайных функций была отмечена Колмогоровым (1935); в последующие годы ей был посвящен ряд как чисто математических работ, так и работ прикладного характера (среди которых особо следует отметить важную работу Хопфа (1952), о которой мы еще будем подробнее говорить во второй части книги). Здесь мы коротко изложим лишь самую суть дела, не останавливаясь на математических тонкостях.

Для простоты сначала рассмотрим вместо случайного поля, зависящего от четырех переменных, случайную функцию $u(x)$ от одного переменного, заданную на конечном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ оси x. Функция $u(x)$ задается всевозможными распределениями вероятности для значений $u(x_1)$, $u(x_2)$, ..., $u(x_N)$ этой функции на произвольной системе N точек $x_1, x_2, \dots, x_N$, таких, что $a \leqslant x_k \leqslant b$. Будем теперь безгранично увеличивать число N, выбирая точки x_k так, чтобы все расстояния между двумя соседними из них стремились к нулю, а в качестве значений параметра θ_k выберем умноженные на $x_{k+1} - x_k$ значения в точках x_k некоторой функции $\theta(x)$ на $[a, b]$. Если функция $\theta(x)$ такова, что интеграл

$$u[\theta(x)] = \int_a^b \theta(x)\, u(x)\, dx \quad (3.20)$$

существует для почти всех реализаций функции $u(x)$ [1]), то $\sum_{k=1}^{N} \theta_k u_k$ при $N \to \infty$ будет стремиться к интегралу (3.20). Переходя к пределу $N \to \infty$ в формуле (3.14), мы придем к величине

$$\Phi[\theta(x)] = \overline{\exp\{iu[\theta(x)]\}} = \exp\left\{i \int_a^b \theta(x)\, u(x)\, dx\right\}. \quad (3.21)$$

Величина $\Phi[\theta(x)]$, очевидно, является значением характеристической функции случайной величины $u[\theta(x)]$ при аргументе этой функции, равном единице. Следовательно, при заданной функции $\theta(x)$ это есть некоторое комплексное число. Таким образом, формула (3.21) сопоставляет каждой функции $\theta(x)$ некоторое комплексное число, т. е. $\Phi[\theta(x)]$ является функцией от функции или, как обычно говорят в таких случаях, является *функционалом*. Мы будем называть этот функционал *характеристическим функционалом* случайной функции $u(x)$.

Покажем, что, зная для некоторой случайной функции $u(x)$ ее характеристический функционал, можно определить все конечномерные плотности вероятности $p_{x_1, x_2, \dots, x_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)$. Для этого достаточно подставить в качестве функционального аргумента $\theta(x)$ функционала $\Phi[\theta(x)]$ специальную функцию

$$\theta(x) = \theta_1 \delta(x - x_1) + \theta_2 \delta(x - x_2) + \dots + \theta_N \delta(x - x_N), \quad (3.22)$$

[1]) То есть для всех реализаций этой функции, за исключением, быть может, некоторого множества исключительных реализаций, суммарная вероятность которых равна нулю.

где $\theta_1, \ldots, \theta_N$ — произвольные числа, а $\delta(x)$ — функция Дирака, так что функция (3.22) равна нулю всюду, кроме точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ [1]). Подставив равенство (3.22) в (3.21), получим

$$\Phi[\theta(x)] = \overline{\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N}\theta_k x_k\right\}} = \varphi_{x_1,\ldots,x_N}(\theta_1,\ldots,\theta_N). \tag{3.23}$$

Следовательно, характеристический функционал в этом случае обращается в характеристическую функцию многомерного распределения вероятности для величин $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)$, так что соответствующая плотность распределения может быть найдена с помощью формулы обращения интегралов Фурье.

Характеристический функционал $\Phi[\theta(x)]$, очевидно, обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам (3.16) и (3.17) характеристических функций:

$$\Phi[\theta(x)]\,|_{\theta(x)\equiv 0} = 1, \tag{3.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Phi[\theta_k(x)-\theta_l(x)]\,c_k c_l^* \geqslant 0 \tag{3.25}$$

при любых функциях $\theta_1(x), \ldots, \theta_n(x)$ и комплексных числах $c_1, \ldots, c_n$ (последнее свойство называется свойством *положительной определенности* функционала $\Phi[\theta(x)]$). Однако обратное утверждение о том, что непрерывный (в определенном смысле) положительно определенный функционал $\Phi[\theta(x)]$, обладающий свойствами (3.24) и (3.25), всегда является характеристическим функционалом некоторой случайной функции, будет справедливым, лишь если принять значительно более общее определение случайной функции, чем то,

[1]) При рассмотрении характеристического функционала (3.21) обычно предполагается, что $\theta(x)$ — достаточно гладкая функция (например, непрерывная или непрерывная и определенное число раз дифференцируемая). Поэтому, строго говоря, вместо «несобственной функции» (3.22) надо рассмотреть последовательность гладких функций $\theta^{(n)}(x)$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что для любого интервала $[\alpha, \beta]$, не содержащего ни одной из точек x_i, $i=1, 2, \ldots, N$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\theta^{(n)}(x)\,dx = 0$$

и что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $i=1, 2, \ldots, N$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\theta^{(n)}(x)\,dx = \theta_i.$$

Очевидно, что при этом

$$\lim_{n\to\infty}\Phi[\theta^{(n)}(x)] = \Phi[\theta(x)],$$

где $\theta(x)$ — функция (3.22). Отсюда видно, что значение $\Phi[\theta(x)]$ всегда может быть определено и по одним только значениям характеристического функционала для гладких функций $\theta^{(n)}(x)$,

которым мы здесь пользуемся (см. Гельфанд и Виленкин (1961), Прохоров (1961)).

Совершенно аналогично обстоит дело и тогда, когда вместо случайной функции $u(x)$ от одного переменного приходится рассматривать случайное поле $u_1(x, t)$, зависящее от четырех переменных. Здесь характеристическим функционалом называется величина

$$\Phi[\theta(x,t)] = \overline{\exp\left\{i\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\theta(x,t)\,u_1(x,t)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt\right\}}; \tag{3.26}$$

в качестве аргумента она содержит функцию $\theta(x, t)$ от четырех переменных [1]). Ясно, что и в этом случае характеристический функционал будет однозначно определять все распределения вероятности для поля $u_1(x, t)$ (и будет обладать свойствами, аналогичными (3.24) и (3.25)).

При рассмотрении нескольких статистически связанных между собой случайных функций или случайных полей приходится рассматривать характеристический функционал, зависящий от нескольких функциональных аргументов. Так, например, поле скорости турбулентного потока $\boldsymbol{u}(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ однозначно определяется характеристическим функционалом

$$\Phi[\theta(x,t)] = \Phi[\theta_1(x,t), \theta_2(x,t), \theta_3(x,t)] =$$

$$= \overline{\exp\left\{i\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{k=1}^{3}\theta_k(x,t)\,u_k(x,t)\,dx\,dt\right\}}, \tag{3.27}$$

зависящим от трех функций от четырех переменных. В общем случае N-мерного случайного поля $\boldsymbol{u}(x) = \{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$ в пространстве точек x мы будем иметь

$$\Phi[\theta(x)] = \Phi[\theta_1(x), \ldots, \theta_N(x)] = \overline{\exp\left\{i\int\sum_{i=1}^{N}\theta_k(x)\,u_k(x)\,dx\right\}}. \tag{3.27'}$$

Функционал $\Phi[\theta(x)]$, очевидно, также будет обладать свойствами (3.24) и (3.25) (с заменой лишь скалярного аргумента $\theta(x)$ векторным аргументом $\theta(x)$). Распределение вероятности для поля скорости в фиксированный момент времени t определяется функционалом

$$\Phi[\theta(x), t] = \overline{\exp\left\{i\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{k=1}^{3}\theta_k(x)\,u_k(x,t)\,dx\right\}}, \tag{3.28}$$

зависящим от тройки функций $\theta(x) = \{\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x)\}$ от трех переменных и от одного скалярного параметра t. Согласно сказанному на стр. 174—175 об однозначной зависимости распределений вероятности для поля скорости несжимаемой жидкости во все моменты времени от распределения вероятности в начальный момент $t=0$, характеристический функционал $\Phi[\theta(x), t]$ в

[1]) Во избежание затруднений со сходимостью интегралов на бесконечности можно с самого начала ограничиться лишь такими функциями $\theta(x, t)$, каждая из которых тождественно равна нулю вне некоторой ограниченной области пространства четырех переменных.

случае несжимаемой жидкости должен однозначно определяться своим начальным значением $\Phi[\theta(x), 0]$ (и даже более того — функционал $\Phi[\theta(x,t)]$ равенства (3.27) также должен однозначно определяться по $\Phi[\theta(x), 0]$) Более сложно обстоит дело для течений сжимаемой жидкости: здесь мы должны рассматривать функционал типа

$$\Phi[\theta(x), \theta_4(x), \theta_5(x), t] =$$

$$= \exp\left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \int \left[\sum_{k=1}^{3} \theta_k(x) u_k(x, t) + \theta_4(x) \rho(x, t) + \theta_5(x) T(x, t) \right] dx \right\} \quad (3.29)$$

($\rho(x, t)$ — поле плотности, $T(x, t)$ — поле температуры), зависящий от пяти функций от трех переменных и одного скалярного аргумента. Только для этого функционала должна иметь место в случае сжимаемой жидкости однозначная зависимость значения в любой момент $t > 0$ от соответствующего начального значения $\Phi[\theta(x), \theta_4(x), \theta_5(x), 0]$.

§ 4. МОМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

4.1. Моменты и семиинварианты случайных величин

В предыдущем параграфе мы видели, что для полного статистического описания полей гидродинамических характеристик турбулентного потока требуется задать все многомерные распределения вероятности для значений этих характеристик на всевозможных множествах точек пространства — времени. Однако определение таких многомерных распределений является весьма сложной задачей и редко может быть осуществлено с достаточной точностью; кроме того, сами эти распределения часто оказываются мало удобными для приложений в силу своей громоздкости. Поэтому на практике при решении конкретных задач теории турбулентности чаще всего ограничиваются рассмотрением лишь некоторых более простых статистических параметров, описывающих те или иные частные статистические свойства потока.

Наиболее важными из таких параметров распределений вероятности являются *моменты*. Если мы имеем систему N случайных величин $u_1, u_2, \ldots, u_N$ с N-мерной плотностью вероятности $p(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, то моментами этих величин называются выражения

$$B_{k_1 k_2 \ldots k_N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_N^{k_N}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int \ldots \int u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_N^{k_N} p(u_1, u_2, \ldots, u_N)\, du_1\, du_2 \ldots du_N, \quad (4.1)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_N$ — целые неотрицательные числа, сумма которых называется порядком момента. В частности, моменты первого порядка — это средние значения величин $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Наряду с обычными моментами $B_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ иногда оказывается удобным рассматривать некоторые специальные их комбинации. Например, часто используются так называемые *центральные моменты*, т. е. моменты отклонений величин $u_1, u_2, \ldots, u_N$ от соответствующих средних значений:

$$b_{k_1 k_2 \ldots k_N} = \overline{(u_1 - \bar{u}_1)^{k_1} (u_2 - \bar{u}_2)^{k_2} \ldots (u_N - \bar{u}_N)^{k_N}}. \quad (4.2)$$

Раскрыв скобки в правой части (4.2), легко выразить центральный момент $b_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ через $B_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ и обычные моменты низших порядков. В частности, при $N = 1$ мы будем иметь

$$b_1 = 0, \quad b_2 = B_2 - B_1^2, \quad b_3 = B_3 - 3B_1B_2 + 2B_1^3,$$
$$b_4 = B_4 - 4B_1B_3 + 6B_1^2B_2 - 3B_1^4, \ldots \quad (4.3)$$

(момент $b_2 = \sigma_u^2$ совпадает с теоретико-вероятностной *дисперсией* величины u). Если $\bar{u}_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$, то центральные моменты, очевидно, совпадают с обычными, так что момент $b_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ является частным случаем момента $B_{k_1 k_2 \ldots k_N}$. Если величины u_i имеют определенную размерность, то размерными будут и соответствующие моменты или центральные моменты; однако, например, отношения

$$\frac{b_3}{b_2^{3/2}} = s, \quad \frac{b_4}{b_2^2} = \delta \quad (4.4)$$

всегда безразмерны (отношение s называется *асимметрией* случайной величины u, а разность $(\delta - 3)$ — ее *эксцессом*).

Другими комбинациями моментов $B_{k_1 k_2 \ldots k_N}$, представляющими специальный интерес, являются так называемые *семиинварианты* (или *кумулянты*) $S_{k_1 k_2 \ldots k_N}$. Общее определение этих величин будет дано несколько позже (см. ниже, стр. 183); сейчас же мы только отметим, что семиинвариант $S_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ (так же, как и центральный момент $b_{k_1 k_2 \ldots k_N}$) получается при помощи вычитания из момента $B_{k_1 k_2 \ldots k_N}$ некоторого специального многочлена относительно моментов низших порядков. В частности, при $N = 1$ семиинварианты первых пяти порядков задаются следующими равенствами:

$$S_1 = B_1, \quad S_2 = B_2 - B_1^2 = b_2, \quad S_3 = B_3 - 3B_1B_2 + 2B_1^3 = b_3,$$
$$S_4 = B_4 - 4B_1B_3 - 3B_2^2 + 12B_1^2B_2 - 6B_1^4 = b_4 - 3b_2^2,$$
$$S_5 = b_5 - 10b_2b_3. \quad (4.5)$$

В многомерном случае семиинварианты второго и третьего порядков также совпадают с соответствующими центральными моментами, а общий семиинвариант S_{1111} четвертого порядка задается формулой

$$S_{1111} = b_{1111} - b_{1100}b_{0011} - b_{1010}b_{0101} - b_{1001}b_{0110}. \qquad (4.6)$$

Из дальнейшего будет видно, что в некоторых случаях семиинварианты оказываются особенно удобными характеристиками распределений вероятности; пока, однако, мы в их отношении ограничимся лишь тем, что уже сказано.

Различные моменты величин $u_1, u_2, \ldots, u_N$ не могут принимать произвольные значения, а должны удовлетворять некоторым условиям, имеющим вид неравенств. Так, например, если все показатели $k_1, k_2, \ldots, k_N$ четные, то момент $B_{k_1k_2\ldots k_N}$, очевидно, не может быть отрицательным. Далее, если $N = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} B_{k+l}c_kc_l \geqslant 0, \qquad (4.7)$$

где $B_0 = 1$, а $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — произвольные вещественные числа (ибо левая часть (4.7) равна среднему значению неотрицательной величины $\left[\sum_{k=0}^{n} c_k u^k\right]^2$). При $n = 2$ и $c_0 = 0$ отсюда, в частности, получаются неравенства

$$|B_3| \leqslant (B_2B_4)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad |s| \leqslant \delta^{\frac{1}{2}} \qquad (4.8)$$

(так как b_k — это частный случай момента B_k). Аналогичные неравенства могут быть выведены и для моментов высших порядков и моментов многомерных распределений. Тем не менее, ясно, что даже и при этих ограничениях произвол в выборе возможных значений различных моментов остается очень большим; поэтому задание всех без исключения моментов доставляет очень много информации о соответствующем распределении вероятности. Во многих случаях задание всех моментов даже просто равносильно заданию самого распределения (см. ниже мелкий шрифт), так что использование вместо плотности вероятности совокупности отвечающих ей моментов не приводит к какой-либо потере полноты статистического описания. На практике, однако, никогда не бывают известны сразу все моменты, а обычно рассматривается лишь несколько моментов низших порядков; они уже, разумеется, не определяют однозначно распределения, а характеризуют лишь некоторые его частные свойства. Несмотря на это, подход к изучению случайных величин, опирающийся на рассмотрение лишь нескольких

их моментов, часто оказывается весьма целесообразным; в дальнейшем мы увидим, что в применении к теории турбулентности он позволяет получить целый ряд конкретных результатов, представляющих значительный интерес.

Легко видеть, что моменты случайных величин $u_1, \ldots, u_N$ могут быть просто выражены через соответствующую характеристическую функцию $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$. В самом деле, из сравнения (4.1) с (3.13) следует, что

$$B_{k_1k_2\ldots k_N} = (-i)^K \left.\frac{\partial^K \varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)}{\partial\theta_1^{k_1}\partial\theta_2^{k_2}\ldots\partial\theta_N^{k_N}}\right|_{\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_N=0}, \qquad (4.9)$$

$$K = k_1 + k_2 + \ldots + k_N.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если характеристическая функция может быть представлена своим рядом Тэйлора, то

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_N} i^K \frac{B_{k_1k_2\ldots k_N}}{k_1!\,k_2!\ldots k_N!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}\ldots\theta_N^{k_N}. \qquad (4.10)$$

Таким образом, в этом случае, зная все моменты распределения, мы можем однозначно определить характеристическую функцию, а, следовательно, и плотность вероятности. Нетрудно показать, что такая однозначность восстановления плотности по совокупности моментов будет иметь место и тогда, когда ряд (4.10) является сходящимся лишь в некоторой области значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ (для одномерного случая общие условия, при которых эта однозначность будет иметь место, указаны, например, в книге Ахиезера (1961)).

С помощью характеристической функции легко формулируется также и общее определение семиинвариантов случайных величин. Для этого надо рассмотреть логарифм характеристической функции $\psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = \ln\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$; семиинвариант $S_{k_1k_2\ldots k_N}$ определяется по $\psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ следующим образом:

$$S_{k_1k_2\ldots k_N} = (-i)^K \left.\frac{\partial^K \psi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)}{\partial\theta_1^{k_1}\partial\theta_2^{k_2}\ldots\partial\theta_N^{k_N}}\right|_{\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_N=0} \qquad (4.11)$$

$$K = k_1 + k_2 + \ldots + k_N.$$

Учитывая, что $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 1$, отсюда легко получить формулы (4.5)—(4.6) и вообще выразить любой конкретный семиинвариант через моменты или центральные моменты.

4.2. Моменты и семиинварианты случайных полей

В теории турбулентности приходится иметь дело со случайными полями — случайными функциями $u(M)$ от точки M четырехмерного пространства — времени. Моментами K-го порядка такого поля называются средние значения произведений K значений поля:

$$B_{uu\ldots u}(M_1, M_2, \ldots, M_K) = \overline{u(M_1)u(M_2)\ldots u(M_K)}. \qquad (4.12)$$

Эти моменты зависят от координат тех точек, в которых берутся значения поля, так что момент K-го порядка, вообще говоря, является функцией от $4K$ переменных. Следует, однако, иметь в виду, что некоторые из точек $M_1, M_2, \ldots, M_K$ могут и совпадать друг с другом; число различных среди них определяет *тип* момента. В этой связи мы будем различать моменты одноточечного типа, двухточечного типа, трехточечного типа и т. д. (короче — одноточечные, двухточечные, трехточечные и т. д. моменты). Если тип момента меньше его порядка, то соответствующий момент $\overline{[u(M_1)]^{k_1}[u(M_2)]^{k_2}\ldots[u(M_N)]^{k_N}}$ будет обозначаться символом $B_{u\ldots u,\,u\ldots u,\ldots,\,u\ldots u}(M_1, M_2, \ldots, M_N)$, где запятыми отделены группы, относящиеся к различным точкам пространства — времени.

Средние значения произведений значений нескольких разных случайных полей, статистически связанных друг с другом, называются смешанными моментами этих полей. Так, например, поле вектора скорости $\boldsymbol{u}(M) = \{u_1(M), u_2(M), u_3(M)\}$ будет иметь 3^K различных (обычных и смешанных) моментов порядка K, образующих вместе один трехмерный тензор K-го ранга. В частности, важные для дальнейшего двухточечные моменты второго и третьего порядков поля скорости являются компонентами следующих тензоров второго и, соответственно, третьего рангов:

$$\begin{aligned} B_{ij}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)\,u_j(M_2)}, \\ B_{ij,\,k}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)\,u_j(M_1)\,u_k(M_2)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

(где тензор $B_{ij,\,k}$, очевидно, симметричен по индексам i и j). Аналогичные обозначения будут употребляться и для смешанных моментов других гидродинамических полей; например, двухточечные смешанные моменты поля давления и поля скорости или поля давления и поля температуры будут обозначаться символами $B_{pj}(M_1, M_2)$, $j=1, 2, 3$, или соответственно $B_{pT}(M_1, M_2)$. В случае моментов, порядок которых превосходит их тип, группы индексов, относящиеся к различным точкам, будут отделяться запятыми; например, через $B_{ij,\,p,\,rkl}(M_1, M_2, M_3)$ будет обозначаться трехточечный смешанный момент шестого порядка полей скорости, давления и температуры, содержащий четыре компоненты скорости и являющийся тензором четвертого ранга, симметричным по парам индексов i, j и k, l. Центральные моменты (т. е. моменты пульсаций гидродинамических полей — их отклонений от своих средних значений) в случае полей с отличными от нуля средними значениями будут обозначаться так же, как и аналогичные обычные моменты, но с заменой буквы B на b или с добавлением штрихов у соответствующих индексов.

Одноточечные моменты удобнее обозначать просто с помощью черты сверху (например, $\overline{u^k}$ или $\overline{uv}$); впрочем, для дисперсии $b_{uu}(M) = \overline{[u(M) - \overline{u(M)}]^2}$ поля $u(M)$ иногда будет использоваться также и один из двух следующих специальных символов: σ_u^2 или U'^2 (второе из этих обозначений уже использовалось в § 2 — см., например, рис. 7 и 24).

В тех случаях, когда аргументы $M_1, M_2, \ldots, M_K$ являются произвольными точками четырехмерного пространства — времени, мы будем называть соответствующие моменты *пространственно-временными*. Чаще всего, однако, в исследованиях по теории турбулентности ограничиваются рассмотрением лишь моментов, в которых значения всех полей относятся к одному и тому же моменту времени t; такие моменты обычно называются *пространственными*. Иногда приходится иметь дело также со *временными моментами* — средними произведениями значений гидродинамических полей в одной точке (но в разные моменты времени). В дальнейшем, говоря просто о моментах, мы всегда будем иметь в виду пространственные моменты; если же речь будет идти о временных или пространственно-временных моментах, то это обстоятельство всегда будет специально оговариваться.

Особенно часто нам будут встречаться в этой книге так называемые *корреляционные функции* — двухточечные моменты второго порядка. Корреляционная функция $B_{uu}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)\,u(M_2)}$ поля $u(M)$, очевидно, симметрично зависит от аргументов M_1 и M_2:

$$B_{uu}(M_1, M_2) = B_{uu}(M_2, M_1). \tag{4.14}$$

Кроме того, она обладает тем свойством, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{uu}(M_i, M_j)\,c_i c_j \geqslant 0 \tag{4.15}$$

при любом целом неотрицательном n и любом выборе n точек $M_1, \ldots, M_n$ и n вещественных чисел $c_1, \ldots, c_n$ (ибо правая часть (4.15) совпадает со средним значением неотрицательной величины $\left[\sum_{i=1}^{n} u(M_i)\,c_i\right]^2$). В частности, при $n=2$ из (4.15) вытекает неравенство

$$|B_{uu}(M_1, M_2)| \leqslant [B_{uu}(M_1, M_1)]^{\frac{1}{2}}\,[B_{uu}(M_2, M_2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.16}$$

В дальнейшем мы увидим, что любая функция $B_{uu}(M_1, M_2)$, удовлетворяющая (4.14) и (4.15), может являться корреляционной функцией некоторого случайного поля (см. сноску на

стр. 192). Смешанный двухточечный момент $B_{uv}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)v(M_2)}$ часто называют *взаимной корреляционной функцией* полей u и v. Эта функция удовлетворяет аналогичному (4.16) неравенству

$$|B_{uv}(M_1, M_2)| \leqslant [B_{uu}(M_1, M_1)]^{\frac{1}{2}} [B_{vv}(M_2, M_2)]^{\frac{1}{2}}; \quad (4.17)$$

кроме того, очевидно,

$$B_{uv}(M_1, M_2) = B_{vu}(M_2, M_1), \quad (4.18)$$

и если обозначить $B_{ij}(M_1, M_2) = \overline{u_i(M_1)u_j(M_2)}$, где $u_1(M), \ldots, \ldots, u_N(M)$ — произвольные N полей, то

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{k_l k_j}(M_l, M_j) c_l c_j \geqslant 0 \quad (4.19)$$

при любом выборе точек $M_1, \ldots, M_n$, вещественных чисел $c_1, \ldots, c_n$ и целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ (принимающих значения от 1 до N). Двухточечные моменты выше чем второго порядка, очевидно, представляют собой корреляционные функции некоторых новых полей, являющихся произведениями исходных; поэтому такие двухточечные моменты иногда называют *корреляционными функциями высших порядков*.

Центральные двухточечные моменты второго порядка

$$b_{uu}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][u(M_2) - \overline{u(M_2)}]} = B_{uu}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)}\,\overline{u(M_2)} \quad (4.20)$$

и

$$b_{uv}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][v(M_2) - \overline{v(M_2)}]} = B_{uv}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)}\,\overline{v(M_2)} \quad (4.20')$$

представляют собой корреляционные функции пульсаций соответствующих полей; иногда, когда не будет опасности путаницы, мы и их будем называть просто корреляционными функциями [1]). Корреляционные функции пульсаций, разумеется, обладают всеми свойствами обычных корреляционных функций. Весьма важно также, что при делении функции $b_{uu}(M_1, M_2)$ на $\sigma_u(M_1)\sigma_u(M_2)$, или $b_{uv}(M_1, M_2)$ на $\sigma_u(M_1)\sigma_v(M_2)$ мы получаем коэффициент корреляции между $u(M_1)$ и $u(M_2)$ или между

[1]) Заметим, что в приложениях часто корреляционными функциями называются только корреляционные функции пульсаций рассматриваемых полей. Нам, однако, чаще будут встречаться обычные (не центральные) двухточечные вторые моменты, и поэтому будет удобнее сохранить термин «корреляционные функции» именно для них.

$u(M_1)$ и $v(M_2)$; поэтому корреляционные функции пульсаций обращаются в нуль каждый раз, как только обращается в нуль соответствующий коэффициент корреляции. Так как естественно предполагать, что для любого гидродинамического поля u или пары таких полей u и v статистическая связь между величинами $u(M_1)$ и $u(M_2)$ или $u(M_1)$ и $v(M_2)$ (характеризуемая величиной соответствующего коэффициента корреляции) безгранично ослабевает при неограниченном удалении точек M_1 и M_2 друг от друга [1]), то, следовательно, корреляционные функции пульсаций гидродинамических полей при таком удалении всегда стремятся к нулю. Это обстоятельство определяет важное свойство корреляционных функций пульсаций, которым обычные корреляционные функции, вообще говоря, уже не обладают.

Известно, что для независимых случайных величин среднее значение произведения равно произведению средних значений отдельных сомножителей. Так как значения гидродинамических полей в очень далеких точках почти независимы, то отсюда следует, что любые центральные моменты гидродинамических полей (скажем, взятых в точках $M_1, \ldots, M_N$), порядок которых равен их типу, стремятся к нулю при неограниченном удалении одной из точек M_i от всех остальных. Однако для центральных моментов, порядок которых превосходит их тип, последнее утверждение уже будет неверным. Точно так же, для центральных моментов порядка $K \geqslant 4$ стремление к нулю, вообще говоря, не будет иметь места, если неограниченно удаляться от остальных будет не одна точка, а некоторая группа точек. В то же время, в случае, например, общего центрального момента четвертого порядка нетрудно проверить, что разность

$$b_{puvw}(M_1, M_2, M_3, M_4) - b_{pu}(M_1, M_2) b_{vw}(M_3, M_4) - b_{pv}(M_1, M_3) b_{uw}(M_2, M_4) - b_{pw}(M_1, M_4) b_{uv}(M_2, M_3) = S_{puvw}(M_1, M_2, M_3, M_4) \quad (4.21)$$

уже будет стремиться к нулю при любом изменении положения точек M_1, M_2, M_3, M_4, таком, что расстояние между хотя бы двумя из них неограниченно возрастает. Можно показать, что и в случае любого другого момента (центрального или обычного — безразлично) всегда можно подобрать такую комбинацию моментов низших порядков, что разность исходного момента

[1]) Две переменные точки $M_1 = (\boldsymbol{x}_1, t_1)$ и $M_2 = (\boldsymbol{x}_2, t_2)$ пространства — времени мы называем неограниченно удаляющимися друг от друга, если в процессе их изменения $|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1| \to \infty$ или $|t_2 - t_1| \to \infty$ (или и то и другое вместе). В частности, при $t_1 = t_2$ (случай пространственных корреляционных функций) точки $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ должны неограниченно удаляться друг от друга в обычном геометрическом смысле.

и этой комбинации стремится к нулю при неограниченном удалении друг от друга любых двух точек, от которых зависит рассматриваемый момент (см. мелкий шрифт ниже). Соответствующие разности момента порядка K и специально подобранных комбинаций моментов низших порядков как раз и совпадают с теми семиинвариантами случайных величин, о которых мы говорили в п. 4.1, и поэтому называются семиинвариантами (кумулянтами) порядка K рассматриваемых гидродинамических полей.

Воспользовавшись определением семиинварианта, приведенным на стр. 183 (см. равенство (4.11)), нетрудно доказать, что семиинварианты гидродинамических полей турбулентного потока действительно обладают указанным здесь свойством. В самом деле, рассмотрим произвольный семиинвариант

$$S_{k_1 k_2 \dots k_N}(M_1, M_2, \dots, M_N) = \\ = (-i)^K \frac{\partial^K \ln \varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)}{\partial\theta_1^{k_1} \partial\theta_2^{k_2} \dots \partial\theta_N^{k_N}}\Bigg|_{\theta_1=\theta_2=\dots=\theta_N=0}, \quad (4.22)$$

$$K = k_1 + \dots + k_N,$$

где $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ — характеристическая функция значений $u_1(M_1)$, $u_2(M_2)$, ..., $u_N(M_N)$ гидродинамических полей u_1, u_2, ..., u_N (быть может, частично или полностью совпадающих между собой) в точках M_1, M_2, ..., M_N (которые также могут частично совпадать). Пусть теперь система точек M_1, M_2, ..., M_N изменяется таким образом, что расстояние между хотя бы двумя из них (например, между точками M_i и M_j) неограниченно увеличивается. В таком случае эта система обязательно разобьется на, по крайней мере, две такие подсистемы, каждая точка первой из которых неограниченно удаляется от каждой точки второй (достаточно, например, принять за первую подсистему совокупность всех точек, неограниченно удаляющихся от точки M_j). Но так как статистическая связь между значениями любых гидродинамических полей неограниченно ослабевает с увеличением расстояния между точками, в которых берутся эти значения, отсюда вытекает, что N случайных величин $u_1(M_1)$, ..., $u_N(M_N)$ распадаются на, по крайней мере, две группы, такие, что величины первой группы становятся в конце концов практически независимыми от величин второй группы. Воспользуемся теперь тем, что характеристическая функция совокупности двух групп статистически независимых случайных величин равна произведению характеристических функций каждой из этих групп по отдельности [1]). Отсюда вытекает, что при рассматриваемом изменении совокупности точек $M_1, M_2, \dots, M_N$ функция $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ стремится распасться в произведение $\varphi(\theta_1, \dots, \theta_n) \times \varphi(\theta_{n+1}, \dots, \theta_N)$, где $n<N$. Подставляя это выражение функции $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ в формулу (4.22) и учитывая, что $k_i \geqslant 1$ при всех i, убеждаемся, что семиинвариант $S_{k_1 k_2 \dots k_N}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ при таком изменении системы точек $M_1, M_2, \dots, M_N$ стремится к нулю.

[1]) В силу (3.13) это обстоятельство вытекает из того, что многомерная плотность вероятности двух групп независимых случайных величин равна произведению плотностей вероятности для этих двух групп.

4.3. Случайные поля с нормальными распределениями вероятности (гауссовские поля)

Для случайных полей, так же как и для случайных величин, полное задание распределения вероятности предполагает, вообще говоря, задание всех моментов всевозможных порядков. Исключение в этом отношении могут представлять лишь случаи, когда имеются какие-то дополнительные сведения о распределениях вероятности, позволяющие по некоторым заданным моментам определить также и все остальные. Сейчас мы рассмотрим один частный, но очень важный случай такого рода, в котором, как оказывается, можно ограничиться заданием лишь моментов первого и второго порядков. А именно, мы рассмотрим случай, когда заранее известно, что рассматриваемое поле — *гауссовское*, т. е. что все распределения вероятности его значений являются многомерными нормальными распределениями (распределениями Гаусса).

Напомним, что N-мерное распределение вероятности называется *нормальным* (или *распределением Гаусса*), если соответствующая плотность вероятности имеет вид

$$p(u_1, u_2, \dots, u_N) = C \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} g_{jk}(u_j - a_j)(u_k - a_k)\right\}. \quad (4.23)$$

Здесь a_j, $j = 1, \dots, N$ — произвольные вещественные постоянные; g_{jk}, $j, k = 1, \dots, N$ — вещественные постоянные такие, что $\| g_{jk} \|$ — положительно определенная матрица (т. е. что $\sum_{j,k} g_{jk} c_j c_k > 0$ при любых вещественных $c_1, \dots, c_N$, не все из которых равны нулю), а C — постоянная, определяемая из условия нормировки

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} g_{jk}(u_j - a_j)(u_k - a_k)} du_1 \dots du_N = 1 \quad (4.24)$$

(нетрудно проверить, что $C = G^{\frac{1}{2}}/(2\pi)^{\frac{N}{2}}$, где $G = |g_{jk}| = \det \|g_{jk}\|$ [1])). Постоянные a_j и g_{jk} в формуле (4.23) просто

[1]) Вообще говоря, можно рассматривать и случай, когда $\|g_{jk}\|$ — лишь неотрицательная матрица, т. е. $\sum g_{jk} c_j c_k$ может обращаться в нуль при каких-то ненулевых значениях $c_1, \dots, c_N$. В этом случае надо лишь считать, что случайные величины $u_1, \dots, u_N$ линейно зависимы, и распределение вероятности с плотностью (4.23) целиком сосредоточено на некотором линейном подпространстве N-мерного пространства, меньшего чем N числа измерений. Такие распределения вероятности называются вырожденными нормальными распределениями; нас здесь, однако, они не будут интересовать.

связаны с первыми и вторыми моментами рассматриваемого распределения. В самом деле, подставив выражение (4.23) в общие формулы (4.1) и (4.2), легко убедиться, что

$$\bar{u}_j = a_j, \quad b_{jk} = \overline{(u_j - \bar{u}_j)(u_k - \bar{u}_k)} = \frac{G_{jk}}{G}, \tag{4.25}$$

где, как и выше, $G = \|g_{jk}\|$, а $G_{jk} = \dfrac{\partial G}{\partial g_{jk}}$ — алгебраическое дополнение элемента g_{jk} в детерминанте G (так что матрицы $\|g_{jk}\|$ и $\|b_{jk}\|$ оказываются взаимно обратными). Из (4.25) получается также и выражение для обычных (не центральных) вторых моментов распределения (4.23):

$$B_{jk} = \overline{u_j u_k} = \frac{G_{jk}}{G} + a_j a_k. \tag{4.26}$$

Мы видим, что в случае нормального распределения вероятности первые и вторые моменты полностью определяют плотность вероятности; поэтому они определяют все вообще статистические характеристики соответствующих случайных величин и, в частности, все моменты высших порядков. Так как обычные (не центральные) моменты любого порядка просто выражаются через центральные моменты и средние значения, то достаточно рассмотреть здесь лишь вопрос о вычислении центральных моментов высших порядков. Нетрудно видеть, что все центральные моменты нечетных порядков нормального распределения равны нулю; что же касается центральных моментов четных порядков, то они могут быть подсчитаны с помощью общего правила, выведенного Иссерлисом (1918). Согласно этому правилу, если $w_1, w_2, \ldots, w_{2K}$ — произвольные $2K$ случайных величин (некоторые из которых могут и совпадать друг с другом), имеющих нормальное совместное распределение вероятности и нулевые средние значения, то

$$\overline{w_1 w_2 \ldots w_{2K}} = \sum \overline{w_{i_1} w_{i_2}} \cdot \overline{w_{i_3} w_{i_4}} \ldots \overline{w_{i_{2K-1}} w_{i_{2K}}}, \tag{4.27}$$

где сумма справа распространена на всевозможные разбиения $2K$ индексов $1, 2, \ldots, 2K$ на K пар $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \ldots, (i_{2K-1}, i_{2K})$ (нетрудно подсчитать, что число слагаемых в правой части (4.27) равно $\dfrac{(2K)!}{2^K K!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2K-1)\Big)$. Отсюда следует, что при $k_1 + k_2 + \ldots + k_N = 2K$

$$b_{k_1 k_2 \ldots k_N} = \overline{(u_1 - \bar{u}_1)^{k_1} (u_2 - \bar{u}_2)^{k_2} \ldots (u_N - \bar{u}_N)^{k_N}} = \sum b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} \ldots b_{i_{2K-1} i_{2K}}, \tag{4.28}$$

где множители b_{ij} имеют тот же смысл, что и в (4.25), а сумма справа распространена на все $(2K)!/2^K K!$ разбиений $2K$ индексов $1, 1, \ldots, 1; 2, 2, \ldots, 2; \ldots; N, N, \ldots, N$ (среди которых 1 повторяется k_1 раз, $\ldots$, N повторяется k_N раз) на K пар $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \ldots, (i_{2K-1}, i_{2K})$. В частности,

$$b_{1111} = \overline{(u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2)(u_3 - \bar{u}_3)(u_4 - \bar{u}_4)} = b_{12} b_{34} + b_{13} b_{24} + b_{14} b_{23}; \tag{4.29}$$

что же касается до центральных моментов шестого порядка, то они уже будут складываться из 15 слагаемых и т. д. О методе доказательства этого общего правила см. ниже стр. 193.

Из сравнения формул (4.6) и (4.29) следует, что в случае нормального распределения $S_{1111} = 0$. Можно показать, что этот результат имеет весьма общий характер: все семиинварианты порядка $K \geqslant 3$ любого многомерного распределения Гаусса тождественно равны нулю (см. стр. 193).

Отметим, что нормальность распределения вероятности значений случайного вектора $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ является свойством, не зависящим от специального выбора системы координат; это непосредственно вытекает из того, что любые линейные комбинации нормально распределенных случайных величин также имеют нормальное распределение вероятности.

Перейдем теперь к гауссовским *случайным полям* $u(M)$ или $\boldsymbol{u}(M) = \{u_1(M), \ldots, u_N(M)\}$, распределения вероятности любого конечного числа значений которых являются нормальными распределениями. Согласно сказанному выше, полное статистическое описание таких полей сводится к заданию их средних значений и корреляционных функций. Все остальные моменты после этого можно определить, воспользовавшись формулой (4.28) и тем фактом, что центральные моменты нечетного порядка должны быть тождественно равны нулю. Существенно отметить, что для любого (одномерного или многомерного) случайного поля с конечными моментами первых двух порядков всегда можно подобрать гауссовское поле, имеющее то же среднее значение и ту же корреляционную функцию (или корреляционные функции). В самом деле, например, для одномерного поля $u(M)$ из условия (4.15), примененного к корреляционной функции пульсаций поля $b_{uu}(M_1, M_2)$, вытекает, что для любого набора точек $M_1, M_2, \ldots, M_N$ можно задать N-мерное нормальное распределение с плотностью $p_{M_1 M_2 \ldots M_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, имеющее средние значения $\overline{u(M_i)}$, $i = 1, \ldots, N$, и вторые моменты $B_{uu}(M_i, M_j) = b_{uu}(M_i, M_j) + \overline{u(M_i)}\,\overline{u(M_j)}$. Соответствующие распределения вероятности для всевозможных наборов точек, очевидно, будут

удовлетворять условиям симметрии (3.10) и согласованности (3.11), т. е. будут задавать некоторое случайное поле, имеющее те же моменты первых двух порядков, что и исходное случайное поле $u(M)$. Аналогично будет обстоять дело и в случае многомерного случайного поля $\boldsymbol{u}(M) = \{u_1(M), \ldots, u_N(M)\}$, с той разницей, что здесь вместо условия (4.15) надо воспользоваться условием (4.19) [1]). Поэтому при приближенном изучении случайных полей, использующем лишь данные о моментах первых двух порядков, всегда можно предполагать, что изучаемые поля имеют нормальные распределения вероятности. В дальнейшем мы увидим, что случайные поля гидродинамических характеристик турбулентного потока часто оказываются и на самом деле во многих отношениях близкими к гауссовским полям; этим обстоятельством мы еще неоднократно будем пользоваться.

При изучении нормальных распределений вероятности очень удобно использовать характеристические функции. Нетрудно показать, что в случае плотности вероятности (4.23)

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{i(\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_N u_N)}\, p(u_1, \ldots, u_N)\, du_1 \ldots du_N =$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k - \frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{N} b_{jk} \theta_j \theta_k \right\}, \qquad (4.30)$$

где постоянные a_j и b_{jk} — те же, что и в равенстве (4.25) (при выводе этой формулы удобно воспользоваться приведением квадратичной формы в показателе степени формулы (4.23) к главным осям). Таким образом, характеристическая функция нормального распределения вероятности имеет вид экспоненциальной функции от многочлена второго порядка относительно переменных $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ с равным нулю свободным членом. Обратное утверждение также верно — такой характеристической функции всегда отвечает плотность вероятности вида (4.23) [2]).

---

[1]) Из того, что при этом рассуждении используются лишь свойства (4.15) и (4.19) корреляционных функций, вытекает, в частности, что любая функция $B_{uu}(M_1, M_2)$ или система функций $B_{jk}(M_1, M_2)$, обладающая такими свойствами, является корреляционной функцией (или корреляционными функциями) некоторого (одномерного или многомерного) случайного поля.

[2]) На самом деле формула (4.30) охватывает и характеристические функции вырожденных нормальных распределений; в этом случае только $\|b_{jk}\|$ будет уже не положительно определенной, а лишь неотрицательной матрицей. Так как нетрудно видеть, что функция вида (4.30) может быть характеристической функцией некоторого распределения вероятности лишь при условии, что $\|b_{jk}\|$ является неотрицательной матрицей, то отсюда вытекает, что характеристические функции будут иметь вид (4.30) только для (невырожденных или вырожденных) нормальных распределений.

Из формулы (4.30) вытекает, что семиинварианты первого и второго порядков распределения Гаусса равны постоянным a_j, $j = 1, \ldots, N$ и b_{jk}, $j, k = 1, \ldots, N$ соответственно, а семиинварианты всех порядков выше второго тождественно равны нулю. Нетрудно получить из этой формулы также и общее правило (4.28) вычисления произвольных центральных моментов четного порядка: для этого надо воспользоваться общей формулой (4.9), в которую вместо $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ следует подставить функцию

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{N} b_{jk} \theta_j \theta_k \right\},$$

разложив ее предварительно в степенной ряд по переменным $\theta_1, \ldots, \theta_N$.

Метод характеристических функций позволяет просто доказать, что любые линейные комбинации случайных величин, имеющих нормальное распределение вероятности, также будут иметь нормальное распределение. В самом деле, если $v_j = \sum_{k=1}^{N} c_{jk} u_k$, $j = 1, \ldots, M$, то характеристическая функция величин $v_1, \ldots, v_M$, очевидно, будет равна

$$\varphi_{(v)}(\theta_1, \ldots, \theta_M) = \overline{\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} c_{jk} u_k \right) \theta_j \right\}} =$$

$$= \overline{\exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} c_{jk} \theta_j \right) u_k \right\}} = \varphi\left(\sum_{j=1}^{M} c_{j1} \theta_j, \ldots, \sum_{j=1}^{M} c_{jN} \theta_j \right), \qquad (4.31)$$

где $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ — характеристическая функция величин $u_1, \ldots, u_N$. Поэтому если $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ задается формулой (4.30), то и $\varphi_{(v)}(\theta_1, \ldots, \theta_M)$, будет экспоненциальной функцией от многочлена второй степени относительно переменных $\theta_1, \ldots, \theta_M$. Отсюда, в частности, следует, что для задания распределения вероятности величин $v_1, \ldots, v_M$ надо только определить их моменты первых двух порядков, которые без труда находятся по моментам первых двух порядков величин $u_1, \ldots, u_N$.

Последнее замечание позволяет выписать в явном виде характеристический функционал произвольной гауссовской случайной функции. Рассмотрим сначала случайную функцию $u(x)$ одного переменного x, определенную на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Согласно (3.21) характеристический функционал этой функции совпадает со значением характеристической функции случайной величины $u[\theta(x)] = \int_a^b u(x)\, \theta(x)\, dx$ при аргументе этой функции, равном единице. Но если распределения вероятности всех значений функции $u(x)$ являются нормальными распределениями, то и все интегральные суммы интеграла $u[\theta(x)]$, являющиеся линейными комбинациями случайных величин $u(x_k)$, $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b$, имеют нормальное распределение вероятности. Поэтому интеграл $u[\theta(x)]$ также является случайной величиной с нормальным законом распределения. Следовательно, для нахождения явной формулы для величины $\Phi[\theta(x)]$ надо лишь найти первые два

момента случайной величины $u[\theta(x)]$. Эти два момента, очевидно, определяются формулами

$$\overline{u[\theta(x)]} = \overline{\int_a^b \theta(x)\, u(x)\, dx} = \int_a^b \theta(x)\, \overline{u(x)}\, dx, \tag{4.32}$$

$$\overline{\{u[\theta(x)]\}^2} = \overline{\int_a^b \int_a^b \theta(x_1)\,\theta(x_2)\,u(x_1)\,u(x_2)\,dx_1\,dx_2} = \int_a^b \int_a^b \theta(x_1)\,\theta(x_2)\,B(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{4.33}$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{\{u[\theta(x)]\}^2} - \overline{\{u[\theta(x)]\}}^2 = \int_a^b \int_a^b \theta(x_1)\,\theta(x_2)\,b(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2, \tag{4.34}$$

где $b(x_1, x_2)$ — корреляционная функция пульсаций случайной функции $u(x)$. Подставляя теперь моменты (4.32) и (4.34) случайной величины $u[\theta(x)]$ в формулу (4.30) с $N = 1$, получаем

$$\Phi[\theta(x)] = \exp\left\{ i \int_a^b \theta(x)\,\overline{u(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b \theta(x_1)\,\theta(x_2)\,b(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \right\}. \tag{4.35}$$

Это и есть общее выражение для характеристического функционала гауссовской случайной функции, указанное еще в первой заметке Колмогорова (1935), посвященной характеристическим функционалам. Аналогично этому характеристический функционал $\Phi[\theta(M)]$ (или $\Phi[\theta_1(M), \ldots, \theta_N(M)]$) гауссовского случайного поля $u(M)$ (или $\boldsymbol{u}(M) = \{u_1(M), \ldots, u_N(M)\}$) равен

$$\Phi[\theta(M)] = \exp\left\{ i \int \theta(M)\,\overline{u(M)}\,dM - \frac{1}{2}\int\int \theta(M_1)\,\theta(M_2)\,b(M_1, M_2)\,dM_1\,dM_2 \right\} \tag{4.36}$$

или соответственно

$$\Phi[\theta_1(M), \ldots, \theta_N(M)] = \exp\left\{ i \int \sum_{j=1}^{N} \theta_j(M)\,\overline{u_j(M)}\,dM - \frac{1}{2}\int\int \sum_{j,k=1}^{N} \theta_j(M_1)\,\theta_k(M_2)\,b_{jk}(M_1, M_2)\,dM_1\,dM_2 \right\}; \tag{4.37}$$

естественно, что во всех случаях он однозначно определяется соответствующими средними значениями и корреляционными функциями.

4.4. Определение моментов и семиинвариантов случайного поля по его характеристическому функционалу

Так как характеристический функционал содержит в себе полное статистическое описание случайного поля, то ясно, что он определяет также все моменты и семиинварианты этого поля. Сейчас мы выведем явные формулы, связывающие моменты и семиинварианты с функционалом $\Phi[\theta]$; при этом мы придем к естественному обобщению формул (4.9) и (4.11), относящихся к конечномерному случаю.

Начнем опять с рассмотрения случайной функции $u(x)$, $a<x<b$ одного переменного. Так как моменты и семиинварианты случайного вектора $\boldsymbol{u} = \{u_1, \ldots, u_N\}$ выражаются, как мы знаем, через частные производные соответствующей характеристической функции $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$, то прежде всего нам надо обобщить понятие производной на случай функции от бесконечного числа переменных — функционала $\Phi[\theta(x)]$ относительно функции $\theta(x)$. Напомним, что в конечномерном случае функция $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \varphi(\boldsymbol{\theta})$ называется дифференцируемой в точке $\boldsymbol{\theta}^0 = \{\theta_1^0, \ldots, \theta_N^0\}$, если ее приращение $d\varphi = \varphi(\boldsymbol{\theta}^0 + d\boldsymbol{\theta}) - \varphi(\boldsymbol{\theta}^0)$ при небольшом изменении $d\boldsymbol{\theta} = \{d\theta_1, \ldots, d\theta_N\}$ значений аргумента представимо в виде

$$d\varphi = \sum_{k=1}^{N} A_k\, d\theta_k + o(|d\theta_1| + \ldots + |d\theta_N|)$$

(т. е. с точностью до малых высшего порядка линейно зависит от $d\boldsymbol{\theta}$). Частную производную $\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{\theta}^0)}{\partial\theta_k}$ при этом можно определить как коэффициент A_k при $d\theta_k$ в линейной части приращения $d\varphi$ $\left(\text{так что } d\varphi \approx \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_k}\, d\theta_k\right)$.

Аналогично этому функционал $\Phi[\theta(x)]$ мы будем называть дифференцируемым при значении $\theta_0(x)$ его аргумента, если при добавлении к $\theta_0(x)$ небольшой добавки $\delta\theta(x)$ главная часть изменения $\delta\Phi[\theta_0(x)]$ рассматриваемого функционала линейно зависит от $\delta\theta(x)$:

$$\delta\Phi[\theta_0(x)] = \Phi[\theta_0(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\,\delta\theta(x)\,dx + o\left[\int_a^b |\delta\theta(x)|\,dx\right] \tag{4.38}$$

(иначе говоря, если существует производная $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_0(x) + h\theta_1(x)]|_{h=0}$, представимая в виде $\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\,\theta_1(x)\,dx$). Значение функции $A(x)$ в точке $x = x_1$ в этом случае называется *вариационной производной* от $\Phi[\theta_0(x)]$ по $\theta(x)$ в точке $x = x_1$. Учитывая, что $A(x)$ является коэффициентом при $\delta\theta(x)\,dx$ в линейной части приращения $\delta\Phi[\theta_0(x)]$, удобно принять для вариационной производной обозначение

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)\,dx} = A(x). \tag{4.39}$$

Это обозначение подчеркивает также, что фактически вариационная производная представляет собой двойной предел

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)\,dx}=\lim_{\substack{|\delta\theta(x)|\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{\Phi[\theta_0(x)+\delta\theta(x)]-\Phi[\theta_0(x)]}{\int\limits_{\Delta x}\delta\theta(x)\,dx},$$

где на этот раз под $\delta\theta(x)$ понимается функция, отличная от нуля лишь на малом интервале длины Δx, окружающем точку x. Требование дифференцируемости функционала $\Phi[\theta(x)]$ накладывает на этот функционал определенные ограничения, которым, например, не удовлетворяет такой простейший функционал, как значение $\theta(x_0)$ функции $\theta(x)$ в фиксированной точке $x=x_0$. Наиболее простым примером дифференцируемого функционала является функционал $\Phi[\theta(x)]=\int\limits_a^b A(x)\,\theta(x)\,dx$, для которого, очевидно,

$$\frac{\delta\left[\int\limits_a^b A(x)\,\theta(x)\,dx\right]}{\delta\theta(x)\,dx}=A(x). \tag{4.40}$$

В примере (4.40) вариационная производная $\dfrac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x)\,dx}$ не зависит от значения функции $\theta(x)$, при котором эта производная берется. Однако в общем случае это уже, разумеется, будет не так, так что формулы (4.38) и (4.39) более правильно было бы писать в виде

$$\delta\Phi[\theta_0(x)]\approx\int\limits_a^b A[\theta_0(x);\,x_1]\,\delta\theta(x_1)\,dx_1,\quad \frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1}=A[\theta_0(x);\,x_1].$$

Таким образом, вариационная производная от функционала $\Phi[\theta(x)]$ является снова функционалом от $\theta(x)$, зависящим еще от точки x_1 как от параметра. Поэтому эта вариационная производная будет уже иметь производные двоякого типа: ее можно обычным образом дифференцировать по параметру x_1, а можно также составить ее вариационную производную по $\theta(x)$ в точке $x=x_2$, являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала $\Phi[\theta(x)]$:

$$\frac{\delta}{\delta\theta(x_2)\,dx_2}\left[\frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1}\right]=\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\,\delta\theta(x_2)\,dx_2}. \tag{4.41}$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом $A[\theta(x);\,x_1,\,x_2]$, зависящим от пары точек x_1 и x_2, причем этот функционал будет не произвольным, а удовлетворяющим условию симметрии $A[\theta(x);\,x_1,x_2]=A[\theta(x);\,x_2,x_1]$, вытекающему из легко доказываемого тождества

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\,\delta\theta(x_2)\,dx_2}=\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_2)\,dx_2\,\delta\theta(x_1)\,dx_1}. \tag{4.42}$$

Простейший пример дважды дифференцируемого функционала доставляет функционал $\Phi[\theta(x)]=\int\limits_a^b\int\limits_a^b A(x,\,x')\,\theta(x)\,\theta(x')\,dx\,dx'$; в этом случае,

как нетрудно проверить,

$$\frac{\delta^2\left[\int\limits_a^b\int\limits_a^b A(x,\,x')\,\theta(x)\,\theta(x')\,dx\,dx'\right]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\,\delta\theta(x_2)\,dx_2}=A(x_1,\,x_2)+A(x_2,\,x_1). \tag{4.43}$$

Аналогично определяются также и вариационные производные высших порядков: n-я вариационная производная

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta(x_n)\,dx_n}$$

(если она существует), очевидно, является функционалом относительно $\theta(x)$, зависящим еще от n точек $x_1,\ldots,x_n$.

Пусть теперь $\Phi[\theta(x)]$ — характеристический функционал случайной функции $u(x)$, задающийся формулой (3.21). В таком случае

$$\delta_0\Phi[\theta(x)]=\frac{\partial}{\partial h}\left\{\overline{e^{i\int\limits_a^b u(x)[\theta(x)+h\theta_1(x)]\,dx}}\right\}_{h=0}=\overline{i\int\limits_a^b u(x)\,\theta(x)\,dx\,e^{i\int\limits_a^b u(x)\,\theta(x)\,dx}}$$

(так как осреднение переставимо с дифференцированием). Отсюда следует, что

$$\frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x)\,dx}=iu(x)\,\overline{e^{i\int\limits_a^b u(x)\,\theta(x)\,dx}}. \tag{4.44}$$

Рассуждая таким же образом, можно получить и более общее равенство

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta(x_n)\,dx_n}=i^n\overline{u(x_1)\ldots u(x_n)\,e^{i\int\limits_a^b u(x)\,\theta(x)\,dx}}, \tag{4.45}$$

показывающее, что

$$B_{u\ldots u}(x_1,\ldots,x_n)=\overline{u(x_1)\ldots u(x_n)}=(-i)^n\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta(x_n)\,dx_n}\bigg|_{\theta(x)=0}. \tag{4.46}$$

Формула (4.46) и является обобщением формулы (4.9) на бесконечномерный случай.

Совершенно аналогично определяются вариационные производные от функционалов $\Phi[\theta(x)]$ и $\Phi[\theta(x)]=\Phi[\theta_1(x),\ldots,\theta_N(x)]$, зависящих от (скалярной или векторной) функции точки x многомерного пространства. Так, например, функционал $\Phi[\theta(x)]$ называется дифференцируемым по $\theta_l(x)$ при заданном значении функции $\theta(x)=\{\theta_1(x),\ldots,\theta_N(x)\}$, если имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_1(x),\ldots,\theta_l(x)+h\theta_l^0(x),\ldots,\theta_N(x)]\Big|_{h=0}=\int A_l[\theta(x);\,x_1]\,\theta_l^0(x_1)\,dx_1 \tag{4.47}$$

(т. е. если главная часть приращения $\Phi[\theta(x)]$ при небольшом изменении $\delta\theta_l(x)$ функции $\theta_l(x)$ линейно зависит от $\delta\theta_l(x)$). В этом случае функционал

$$A_l[\theta(x);\ x_1] = \frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_l(x_1)\,dx_1}, \tag{4.48}$$

зависящий от точки x_1 как от параметра, называется вариационной производной (или, подробнее, частной вариационной производной) от $\Phi[\theta(x)]$ по $\theta_l(x)$ в точке $x = x_1$ (иначе эту производную можно определить как двойной предел

$$\lim_{\substack{|\delta_l\theta(x)|\to 0\\ \Delta x_1\to 0}} \frac{\Phi[\theta(x)+\delta_l\theta(x)]-\Phi[\theta(x)]}{\int\limits_{\Delta x_1}\delta_l\theta(x)\,dx},$$

где $\delta_l\theta(x)$ — векторная функция, у которой отлична от нуля лишь l-я компонента и притом только в малой окрестности Δx_1 точки x_1). Вариационную производную (4.48) можно затем продифференцировать по $\theta_j(x)$; при этом придем ко второй вариационной производной

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_l(x_1)\,dx_1\,\delta\theta_j(x_2)\,dx_2} = A_{lj}[\theta(x);\ x_1,\ x_2], \tag{4.49}$$

зависящей уже от пары точек x_1 и x_2 и удовлетворяющей условию

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_l(x_1)\,dx_1\,\delta\theta_j(x_2)\,dx_2} = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_j(x_2)\,dx_2\,\delta\theta_l(x_1)\,dx_1}. \tag{4.50}$$

Подобным же образом определяются и вариационные производные

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{l_1}(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta_{l_n}(x_n)\,dx_n}$$

высших порядков. Если под $\Phi[\theta(x)]$ понимать характеристический функционал (3.27′) N-мерного случайного поля $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$, то совершенно аналогично выводу формулы (4.46) получается равенство

$$B_{l_1\ldots l_n}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{u_{l_1}(x_1)\ldots u_{l_n}(x_n)} = (-i)^n \frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{l_1}(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta_{l_n}(x_n)\,dx_n}\Bigg|_{\theta(x)=0} \tag{4.51}$$

(заметим, что свойство (4.50) вариационных производных обращается при этом в известное свойство (4.18) корреляционных функций).

Семиинварианты случайного поля $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$ мы теперь определим при помощи равенства

$$S_{l_1\ldots l_n}(x_1,\ldots,x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n \ln\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{l_1}(x_1)\,dx_1\ldots\delta\theta_{l_n}(x_n)\,dx_n}\Bigg|_{\theta(x)=0}, \tag{4.52}$$

где $\Phi[\theta(x)]$ — характеристический функционал нашего поля. Легко видеть, что

$$S_j(x_1) = -i\frac{\delta \ln\left\{\overline{\exp\left[i\int\Sigma u_\alpha(x)\,\theta_\alpha(x)\,dx\right]}\right\}}{\delta\theta_j(x_1)\,dx_1}\Bigg|_{\theta(x)=0} = \frac{\overline{u_j(x_1)\exp\left[i\int\Sigma u_\alpha(x)\,\theta_\alpha(x)\,dx\right]}}{\overline{\exp\left[i\int\Sigma u_\alpha(x)\,\theta_\alpha(x)\,dx\right]}}\Bigg|_{\theta(x)=0} = \overline{u_j(x_1)},$$

$$S_{lj}(x_1,\ x_2) = -i\frac{\delta}{\delta\theta_j(x_2)\,dx_2}\left\{\frac{\overline{u_l(x_1)\exp\left[i\int\Sigma u_\alpha(x)\,\theta_\alpha(x)\,dx\right]}}{\overline{\exp\left[i\int\Sigma u_\alpha(x)\,\theta_\alpha(x)\,dx\right]}}\right\}\Bigg|_{\theta(x)=0} = \overline{u_l(x_1)\,u_j(x_2)} - \overline{u_l(x_1)}\cdot\overline{u_j(x_2)} = b_{lj}(x_1,\ x_2)$$

и вообще, что $S_{l_1\ldots l_n}(x_1,\ldots,x_n)$ совпадает с семиинвариантом системы величин $u_{l_1}(x_1),\ldots,u_{l_n}(x_n)$, определенным по соответствующей характеристической функции с помощью формулы (4.11). Из формулы (4.52) легко вывести все свойства семиинвариантов (свойство (4.50) вариационной производной, например, означает, что корреляционные функции пульсаций должны обладать тем же свойством (4.18), что и обычные корреляционные функции).

Для функционала $\Phi[\theta(x)]$, имеющего вариационные производные всех порядков, при некоторых условиях можно получить разложение в ряд Тэйлора:

$$\Phi[\theta(x)] = \Phi[0] + \sum_{l=1}^{N}\int\frac{\delta\Phi[0]}{\delta\theta_l(x_1)\,dx_1}\theta_l(x_1)\,dx_1 + \sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int\int\frac{\delta^2\Phi[0]}{\delta\theta_l(x_1)\,dx_1\,\delta\theta_j(x_2)\,dx_2}\theta_l(x_1)\,\theta_j(x_2)\,dx_1\,dx_2 + \ldots \tag{4.53}$$

В применении к характеристическому функционалу случайного поля $u(x)$ это разложение обращается в разложение по корреляционным функциям всевозможных порядков:

$$\Phi[\theta(x)] = 1 + i\sum_{j=1}^{N}\int\overline{u_j(x)}\,\theta_j(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int\int B_{jk}(x_1,\ x_2)\,\theta_j(x_1)\,\theta_k(x_2)\,dx_1\,dx_2 + \ldots + i^n\sum_{l_1=1}^{N}\ldots\sum_{l_n=1}^{N}\int\ldots\int B_{l_1\ldots l_n}(x_1,\ldots,x_n)\,\theta_{l_1}(x_1)\ldots\theta_{l_n}(x_n)\,dx_1\ldots dx_n + \ldots \tag{4.54}$$

Можно показать, что для сходимости ряда в правой части (4.54) необходимо и достаточно, чтобы его n-й член стремился к нулю при $n \to \infty$; если же мы оборвем этот ряд на конечном числе членов, то для остатка можно получить оценку, близкую к оценке остаточного члена обычного ряда Тэйлора (см. Новиков (1964)). Заметим, однако, что если мы просто оборвем разложение (4.54) функционала $\Phi[\theta(x)]$ на каком-либо конечном числе членов, никак не учитывая остатка, то мы придем к функционалу, обладающему свойством (3.24) характеристического функционала, но наверное не обладающему столь же обязательным свойством (3.25). В самом деле, это следует хотя бы из того, что функционал, равный сумме конечного числа членов правой части (4.54), не удовлетворяет уже простейшему неравенству $|\Phi[\theta(x)]| \leqslant 1$, вытекающему из неравенства (3.25) с $n = 2$ (а также и из самого определения (3.27′) характеристического функционала $\Phi[\theta(x)]$). Поэтому, предположив, что все моменты некоторого случайного поля порядка выше данного K тождественно обращаются в нуль, мы можем в конце концов прийти к абсурдным выводам, противоречащим, например, условию, что никакая вероятность не может превосходить единицы.

Несколько более удобным с этой точки зрения представляется применение разложения Тэйлора к логарифму характеристического функционала $\Phi[\theta(x)]$, т. е. представление $\Phi[\theta(x)]$ в виде

$$\Phi[\theta(x)] = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N} \int \overline{u_j(x)}\, \theta_j(x)\, dx - \right.$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int b_{jk}(x_1, x_2)\, \theta_j(x_1)\, \theta_k(x_2)\, dx_1\, dx_2 +$$
$$+ \ldots + i^n \sum_{i_1=1}^{N} \ldots \sum_{i_n=1}^{N} \int \ldots \int S_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)\, \theta_{i_1}(x_1) \ldots$$
$$\left. \ldots\, \theta_{i_n}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n + \ldots \right\}. \qquad (4.55)$$

Оборвав разложение (4.55) на конечном числе членов, мы на этот раз придем уже к функционалу, удовлетворяющему не только условию (3.24), но и необходимому для характеристического функционала условию $|\Phi[\theta(x)]| \leqslant 1$. Более того, ограничившись лишь линейными и квадратичными по $\theta_j(x)$ членами в правой части (4.55), мы получим функционал, наверное являющийся характеристическим функционалом некоторого случайного поля — а именно гауссовского случайного поля с теми же моментами первых двух порядков, что и исходное поле $u(x)$ (см. формулу (4.37)). Если, однако, мы учтем в разложении (4.55) еще члены третьего порядка по $\theta_j(x)$, т. е. положим

$$\Phi[\theta(x)] = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N} \overline{u_j(x)}\, \theta_j(x)\, dx - \right.$$
$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\int b_{jk}(x_1, x_2)\, \theta_j(x_1)\, \theta_k(x_2)\, dx_1\, dx_2 -$$
$$\left. - i \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \int\int\int b_{jkl}(x_1, x_2, x_3)\, \theta_j(x_1)\, \theta_k(x_2)\, \theta_l(x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \right\}, \qquad (4.56)$$

или же оборвем ряд (4.55) на любом другом конечном числе членов выше второго порядка по $\theta_j(x)$, то мы придем к функционалу, который будет удовлетворять (3.24) и условию $|\Phi[\theta(x)]| \leqslant 1$, но, вообще говоря, не будет обладать свойством (3.25), необходимым для характеристических функционалов. Поэтому, предположив, что все семиинварианты рассматриваемого случайного поля $u(x)$ порядка выше данного $K \geqslant 4$ обращаются в нуль, мы также можем в конце концов прийти к противоречию с очевидными свойствами распределений вероятности (например, с неотрицательностью вероятности, из которой следует условие (3.25)). В части 2 книги мы еще будем иметь случай вспомнить об этом неприятном обстоятельстве.

4.5. Стационарные случайные функции

Вернемся теперь к упоминавшемуся выше (см. стр. 173) важному вопросу о том, при каких условиях временные и пространственные средние значения случайного поля $u(x, t)$ при неограниченном увеличении интервала осреднения сходятся к соответствующим теоретико-вероятностным средним значениям. При этом придем к некоторым специальным классам таких полей, представляющим большой интерес для теории турбулентности.

Будем сначала для определенности говорить лишь о временном осреднении; тогда зависимость поля $u(x, t)$ от координат x не будет иметь значения, так что можно рассматривать лишь функции $u(t)$ от одного переменного t. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях случайная величина

$$\tilde{u}_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, d\tau \qquad (4.57)$$

при $T \to \infty$ сходится [1]) к $\overline{u(t)}$. Одно весьма важное необходимое условие этого выводится крайне просто. В самом деле, для любой ограниченной функции $u(t)$ разность

$$\tilde{u}_T(t) - \tilde{u}_T(t_1) = \frac{1}{T}\left\{ \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, d\tau - \int_{-T/2}^{T/2} u(t_1+\tau)\, d\tau \right\} =$$
$$= \frac{1}{T}\left\{ \int_{-\frac{T}{2}+t}^{-\frac{T}{2}+t_1} u(s)\, ds - \int_{\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}+t_1} u(s)\, ds \right\}, \qquad (4.58)$$

[1]) Заметим, что речь здесь идет о сходимости случайных величин, требующей, вообще говоря, специального определения (см. ниже стр. 208).

где t и t_1 — фиксированные числа (и, например, $t_1 > t$), при $T \to \infty$, очевидно, неограниченно убывает. Поэтому пределы при $T \to \infty$ величин $\tilde{u}_T(t)$ и $\tilde{u}_T(t_1)$ (если только они существуют) должны совпадать друг с другом, т. е. временное среднее значение функции $u(t)$ $\left(\text{определяемое как } \lim_{T\to\infty} \tilde{u}_T(t)\right)$ не может зависеть от t. В то же время вероятностное среднее значение $\overline{u(t)}$ является, вообще говоря, функцией от t. Следовательно, для равенства этих двух средних значений необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\overline{u(t)} = U = \text{const}. \tag{4.59}$$

Аналогично обстоит дело с применением временного осреднения для определения моментов высших порядков и других функций от значений $u(t)$ в нескольких точках. Так, например, если использовать осреднение по времени t произведения $u(t)u(t_1) = u(t)u(t+s)$ (где $s = t_1 - t$ считается фиксированным) для определения корреляционной функции $B_{uu}(t, t_1)$, то мы придем к величине

$$\tilde{B}_{uu}(t, t_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau)\, u(t+s+\tau)\, d\tau, \tag{4.60}$$

которая может зависеть лишь от $s = t_1 - t$, но не от t и t_1 по-отдельности. Поэтому временная корреляционная функция $\tilde{B}_{uu}(t_1\ t_2)$ может быть равна вероятностному среднему значению $\overline{u(t_1)u(t_2)} = B_{uu}(t_1, t_2)$, лишь если

$$B_{uu}(t_1, t_2) = B_{uu}(t_2 - t_1). \tag{4.61}$$

Точно так же для возможности определения момента N-го порядка $B_{uu\ldots u}(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ при помощи временного осреднения необходимо, чтобы этот момент зависел лишь от $N-1$ разностей $t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_1$:

$$B_{uu\ldots u}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = B_{uu\ldots u}(t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_1). \tag{4.62}$$

Наконец, если потребовать, чтобы средние значения всевозможных функций от величин $u(t_1)$, $u(t_2)$, ..., $u(t_N)$ можно было получить при помощи временного осреднения, то придется ограничиться лишь такими случайными функциями $u(t)$, для которых N-мерные плотности вероятности $p_{t_1 t_2 \ldots t_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ при любых N и $t_1, t_2, \ldots, t_N$ зависят не от N параметров $t_1, t_2, \ldots, t_N$, а лишь от $N-1$ разностей $t_2 - t_1, \ldots, t_N - t_1$,

т. е. удовлетворяют условию

$$p_{t_1 t_2 \ldots t_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = p_{t_1+h,\, t_2+h,\, \ldots,\, t_N+h}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = p_{t_2 - t_1,\, \ldots,\, t_N - t_1}(u_1, u_2, \ldots, u_N), \tag{4.63}$$

где h — любое вещественное число. Условие (4.63) является наиболее общим — из него вытекают, в частности, и условия (4.59), (4.61) и (4.62). Заметим еще, что в частном случае гауссовской случайной функции $x(t)$ из (4.59) и (4.61) уже вытекают и общие равенства (4.62) и (4.63).

Итак, мы пришли к специальному классу случайных функций от времени, для которых все многомерные плотности вероятности удовлетворяют условиям (4.63), т. е. не меняются при сдвиге соответствующей группы точек t_i на любой интервал времени h. Такие случайные функции часто встречаются в самых разнообразных прикладных задачах; они называются *стационарными случайными функциями*, или, иначе, *стационарными случайными процессами* (поскольку случайные функции от времени в научной литературе часто называются также случайными процессами). Математической теории стационарных случайных процессов посвящен ряд подробных обзоров или глав в специальных монографиях (см., например, Яглом (1952), Дуб (1953), Лоэв (1955), Розанов (1963)). Однако здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями, имеющими непосредственное отношение к теме настоящей книги (см. также гл. 6 в ч. 2 книги).

Физический смысл условия стационарности совершенно ясен: оно означает, что физический процесс, численной характеристикой которого является функция $u(t)$, является установившимся, т. е. что все условия, вызывающие этот процесс, не меняются со временем. В применении к характеристикам турбулентности условие стационарности означает, что рассматриваемый турбулентный поток должен быть установившимся в обычном гидродинамическом смысле: все осредненные характеристики потока (например, распределение средней скорости, средняя температура), так же как и все внешние условия (например, внешние силы, положение ограничивающих поток поверхностей), должны оставаться неизменными во времени. Потоки, с достаточной степенью точности удовлетворяющие этому условию, сравнительно просто могут быть получены в лаборатории; в случае же природных турбулентных потоков обычно трудно гарантировать неизменность всех осредненных характеристик течения (в особенно сильной степени это относится к турбулентности в атмосфере, где средние значения всех гидродинамических элементов обычно

весьма неустойчивы и имеют явно выраженный суточный и годовой ход). Однако и здесь при рассмотрении мгновенных значений гидродинамических характеристик в течение сравнительно небольших промежутков времени (например, порядка нескольких минут или десятков минут) соответствующие случайные функции часто вполне можно считать стационарными. Таким образом, и в этих случаях вероятностные средние значения характеристик потока часто можно находить при помощи временного осреднения; для этого требуется, чтобы временные средние значения при $T \to \infty$ сходились к вероятностным средним и чтобы средние за такое время T, в течение которого рассматриваемый процесс еще можно считать стационарным, были уже достаточно близкими к предельным значениям, отвечающим $T \to \infty$.

Значения какой-либо гидродинамической характеристики в нескольких точках установившегося турбулентного потока или значения нескольких таких характеристик в одной или нескольких точках доставляют нам примеры многомерных стационарных случайных процессов — векторных функций $\boldsymbol{u}(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$, таких, что плотность вероятности для любого набора значений $u_{i_1}(t_1)$, $u_{i_2}(t_2)$, ..., $u_{i_N}(t_N)$ не меняется при одновременном сдвиге всех моментов времени t_1, t_2, ..., t_N на один и тот же произвольный интервал времени h. В этом случае, очевидно, и все смешанные моменты функций $u_j(t)$ будут зависеть лишь от разностей соответствующих моментов времени (например, все взаимные корреляционные функции $B_{jk}(t_1, t_2) = \overline{u_j(t_1)\, u_k(t_2)}$ будут зависеть лишь от аргумента $\tau = (t_2 - t_1)$. Ясно, что для того, чтобы статистические характеристики, зависящие от значений нескольких случайных функций времени, можно было получить при помощи временного осреднения, совокупность этих случайных функций должна представлять собой многомерный стационарный процесс; в противном случае характеристики, получаемые при временном осреднении, будут даже зависеть от меньшего числа переменных, чем соответствующие теоретико-вероятностные средние значения.

4.6. Однородные случайные поля

Прежде чем переходить к выяснению условий, при которых временные средние значения функций от стационарных случайных процессов сходятся к соответствующим теоретико-вероятностным средним, остановимся вкратце на вопросе о тех изменениях, которые надо внести в наши рассуждения, если исходить не из временного, а из пространственного осреднения. При этом, разумеется, следует рассматривать случайные функции $u(\boldsymbol{x})$ от точки $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, т. е. случайные поля в трехмерном пространстве. Пространственные средние значения таких полей определяются равенством

$$\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{ABC} \int_{-A/2}^{A/2} \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-C/2}^{C/2} u(x_1 + \xi_1,\ x_2 + \xi_2,\ x_3 + \xi_3) \times \times d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3. \quad (4.64)$$

Требуется определить, при каких условиях величина $\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{x})$ при $A \to \infty$, $B \to \infty$, $C \to \infty$ (или же при выполнении хотя бы одного из этих предельных переходов) стремится в определенном смысле к теоретико-вероятностному среднему значению $\overline{u(\boldsymbol{x})}$. Ясно, что для этого прежде всего должно выполняться следующее условие, аналогичное (4.59):

$$\overline{u(\boldsymbol{x})} = U = \text{const}, \quad (4.65)$$

т. е. теоретико-вероятностное среднее значение должно быть одинаковым во всех точках пространства. Точно так же для возможности определения с помощью пространственного осреднения корреляционной функции $\overline{u(\boldsymbol{x}_1)\, u(\boldsymbol{x}_2)} = B_{uu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ во всяком случае необходимо, чтобы эта функция зависела лишь от векторной разности своих аргументов:

$$B_{uu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = B_{uu}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1). \quad (4.66)$$

Наконец, для того чтобы средние значения всевозможных функций от значений поля в нескольких точках можно было получить при помощи пространственного осреднения, требуется, чтобы N-мерные плотности вероятности величин $u(\boldsymbol{x}_1)$, $u(\boldsymbol{x}_2)$, ..., $u(\boldsymbol{x}_N)$ при любых N и $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_N$ зависели лишь от разностей $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_1$, т. е. не менялись при любом сдвиге (параллельном переносе) системы точек $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_N$ на один и тот же вектор $\boldsymbol{y}$:

$$p_{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = p_{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{y}}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = = p_{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_1}(u_1, u_2, \ldots, u_N) \quad (4.67)$$

(в случае гауссовского поля $u(\boldsymbol{x})$ равенство (4.67) уже вытекает из (4.65) и (4.66)). Поле $u(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющее условию (4.67), называется *статистически однородным* (или короче — просто *однородным*); таким образом, для того чтобы осреднение по пространству любых функций от значений случайного поля приводило к тем же результатам, что и осреднение по вероятности, рассматриваемое поле должно быть однородным. При рассмотрении более общих функций от значений нескольких

случайных полей $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ приходится требовать, чтобы однородным было многомерное (векторное) поле $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$, т. е. чтобы все плотности вероятности произвольных наборов значений компонент $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$ поля $u(x)$ на некотором множестве точек пространства не менялись при одновременном сдвиге всех этих точек на один и тот же вектор y.

В приложении к полям гидродинамических характеристик турбулентного потока предположение об однородности всегда является математической идеализацией; точно оно никогда не выполняется. В самом деле, чтобы можно было говорить об однородности, необходимо, чтобы поток заполнял все неограниченное пространство, а уже одно это предположение само по себе в применении к реальным потокам всегда является идеализацией. Далее требуется, чтобы все средние характеристики потока (средняя скорость, давление, температура) были постоянными во всем пространстве и чтобы статистический режим пульсаций не менялся при переходе от одной части пространства к другой. Разумеется, все эти требования могут выполняться с удовлетворительной точностью лишь в пределах некоторых ограниченных областей пространства, малых по сравнению с масштабами макроскопических неоднородностей и достаточно удаленных от всех ограничивающих поток твердых стенок (или свободных поверхностей). Таким образом, на практике можно говорить лишь об однородности гидродинамических полей в некоторой определенной области[1]), но не во всем безграничном пространстве. Тем не менее, при рассмотрении такой однородной в некоторой области турбулентности часто целесообразно считать ее частью однородного турбулентного потока, заполняющего все пространство: ценность подобного предположения связана со значительной математической простотой идеализированной схемы однородного случайного поля, существенно упрощающей теоретический анализ. Также и эргодическая теорема (т. е. теорема о сходимости пространственных средних $\tilde{u}_{A,B,C}(x)$ к теоретико-вероятностным средним значениям $\overline{u(x)}$) может быть применена к однородным лишь в некоторой области случайным полям, если только размеры этой области достаточно велики (см. по этому поводу замечание на стр. 204, относящееся к стационарным случайным функциям).

[1]) Случайное поле $u(x)$ естественно назвать однородным в области G пространства, если соотношение (4.67) оказывается справедливым для любых $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и y, таких, что все точки $x_1, \ldots, x_N$; $x_1 + y, \ldots, x_N + y$ располагаются внутри G.

О наиболее важном методе экспериментального осуществления турбулентного потока, весьма близкого к однородному, мы будем говорить в гл. 7 ч. 2 в связи с изучением однородной и изотропной турбулентности. Здесь мы только отметим, что наряду с полями, однородными во всем трехмерном пространстве, можно рассматривать также поля $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$, однородные лишь в некоторой плоскости (или вдоль некоторой оси), т. е. удовлетворяющие условию (4.67) для всех векторов y, принадлежащих определенной плоскости (или оси), но, вообще говоря, не удовлетворяющие этому условию для других y. Значения такого поля $u(x)$ на любой плоскости или прямой, параллельной направлению однородности, будут, очевидно, представлять собой однородное поле на этой плоскости или прямой; значения же $u(x)$ на нескольких различных таких плоскостях или прямых можно рассматривать как многомерное однородное случайное поле на той же плоскости или прямой. Естественно ожидать, что осреднение по пространству часто может быть использовано и тогда, когда гидродинамические поля не являются однородными во всем пространстве, но однородными лишь в некоторой плоскости (или вдоль некоторой прямой); в этих случаях надо только рассматривать осреднение не по трехмерному объему, а лишь по соответствующей плоскости или прямой (т. е. трехкратный интеграл в (4.64) надо заменить двукратным или однократным).

В некоторых задачах теории турбулентности очень часто можно считать, что соответствующие гидродинамические поля являются однородными хотя бы в одном направлении или стационарными (или даже, что выполняются оба эти условия одновременно). Поэтому если бы удалось доказать, что во всех случаях при наличии стационарности или однородности теоретико-вероятностные средние значения можно заменять средними по времени или по пространству, то это имело бы очень большое практическое значение. На самом деле одной лишь стационарности или однородности, вообще говоря, еще недостаточно для сходимости временных или пространственных средних к средним значениям в смысле теории вероятностей[1]). Тем не

[1]) Чтобы подтвердить это утверждение, достаточно рассмотреть пример стационарного процесса $u(t)$, для которого с вероятностью единица $u(t) = u(0)$ при любом t (так что почти все реализации процесса изображаются прямыми, параллельными оси t). Здесь, очевидно, $\tilde{u}_T(t) = u(0)$ при любом T, и если $u(0)$ имеет какое-то распределение вероятности, то для определения среднего значения $\overline{u(t)} = \overline{u(0)}$ необходимо иметь большое число различных реализаций функции $u(t)$ (каждая из которых сводится к одному-единственному значению $u(0)$). В прикладных вопросах, однако, этот пример всегда будет рассматриваться как пример случайной величины $u = u(0)$,

менее, как мы сейчас покажем, условия, необходимые для того, чтобы такая сходимость имела место, носят столь общий характер, что в прикладных вопросах их почти всегда можно считать выполняющимися.

4.7. Эргодическая теорема

Будем сначала для определенности говорить только о стационарных случайных процессах $u(t)$ и о временном осреднении; точно те же рассуждения (лишь с заменой времени t пространственной координатой x) будут, разумеется, применимы и к однородным случайным полям $u(x)$ на прямой. Начнем с того, что четко определим, что мы будем понимать под сходимостью случайной величины $\tilde{u}_T(t)$, задаваемой равенством (4.57), при $T\to\infty$ к константе $\overline{u(t)} = U$. Нам будет удобно считать случайную функцию $\tilde{u}_T$ сходящейся при $T\to\infty$ к пределу U (вообще говоря, являющемуся случайной величиной), если

$$\lim_{T\to\infty} \overline{|\tilde{u}_T - U|^2} = 0. \tag{4.68}$$

В силу известного неравенства Чебышева

$$P\{|\tilde{u}_T - U| > \varepsilon\} \leqslant \frac{\overline{|\tilde{u}_T - U|^2}}{\varepsilon^2} \tag{4.69}$$

из (4.68) будет также следовать, что

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\tilde{u}_T - U| > \varepsilon\} = 0, \tag{4.70}$$

т. е. что вероятность отклонения величины $\tilde{u}_T$ от U, превышающего любое заданное ε, будет стремиться к нулю при $T\to\infty$ (и, следовательно, будет сколь угодно малой, если только выбрать достаточно большое значение T) [1]. Равенство (4.70) дает

но не случайной функции; кстати, и многомерные плотности вероятности $p_{t_1 t_2 \ldots t_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ здесь не являются обыкновенными функциями, а выражаются через δ-функцию Дирака.

[1]) В теории вероятностей условие (4.68) обычно называется условием сходимости $\tilde{u}_T$ к U при $T\to\infty$ *в среднем квадратичном*, а условие (4.70) — условием сходимости $\tilde{u}_T$ к U *по вероятности*. Таким образом, мы показали, что в силу неравенства Чебышева из сходимости случайной функции $\tilde{u}_T$ к U в среднем квадратичном следует также ее сходимость к тому же пределу и по вероятности.

достаточные основания для того, чтобы на практике можно было вместо U использовать значение величины $\tilde{u}_T$, где T сравнительно велико; поэтому остается лишь выяснить, при каких условиях соотношение (4.68) будет иметь место.

Легко понять, что правая часть (4.68), где $\tilde{u}_T$ — временное среднее (4.57) значений стационарного случайного процесса $u(t)$, а $U = \overline{u(t)}$ — его теоретико-вероятностное среднее значение, может быть выражена через корреляционную функцию пульсаций $u(t)$

$$b_{uu}(\tau) = \overline{[u(t+\tau) - U][u(t) - U]} = B_{uu}(\tau) - U^2 \tag{4.71}$$

(см. ниже равенство (4.83)). Поэтому справедливость равенства (4.68) должна определяться какими-то свойствами функции $b_{uu}(\tau)$. С точки зрения приложений к теории турбулентности основное значение имеет следующий факт: если $b_{uu}(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$, то сходимость величин $\tilde{u}_T(t)$ к вероятностному среднему значению обязательно имеет место. Этот факт является следствием следующей общей теоремы, впервые доказанной Слуцким (1938) (см. также Обухов (1954)): *для того чтобы для стационарного случайного процесса $u(t)$ выполнялось равенство* (4.68), *необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция $b_{uu}(\tau)$ удовлетворяла условию*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(\tau)\, d\tau = 0 \tag{4.72}$$

(доказательство этой теоремы, называемой обычно законом больших чисел или эргодической теоремой [1]) для стационарных случайных процессов, приведено ниже на стр. 212—214). Ясно, что если $b_{uu}(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$, то и условие (4.72) наверное будет выполняться; отсюда вытекает, что в этом случае равенство (4.68) всегда будет справедливо. Так как корреляционную функцию $b_{uu}(\tau)$ пульсаций гидродинамического поля $u(t)$ турбулентного потока всегда можно считать стремящейся к нулю при $\tau\to\infty$ (ср. выше стр. 187), то в теории турбулентности всегда можно исходить из того, что для установившихся течений теоретико-вероятностные средние значения любых гидродинамических полей могут быть определены с помощью осреднения по достаточно большому интервалу времени.

[1]) Во избежание недоразумений отметим, что в теории вероятностей эргодической теоремой для стационарных случайных процессов иногда называют и некоторые другие предложения, касающиеся связи вероятностных и временных средних.

Если скорость убывания $b_{uu}(\tau)$ при возрастании τ такова, что

$$\int_0^\infty b_{uu}(\tau)\,d\tau < \infty, \tag{4.73}$$

то существует также простая оценка длины T тех интервалов, осреднение по которым достаточно для получения среднего значения U с заданной точностью. В самом деле, можно показать, что в этом случае при достаточно большом T имеет место асимптотическое равенство

$$\overline{|\tilde{u}_T - U|^2} \approx 2\frac{T_1}{T} b_{uu}(0), \tag{4.74}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{b_{uu}(0)} \int_0^\infty b_{uu}(\tau)\,d\tau \tag{4.75}$$

— постоянная размерности времени, которую можно назвать «временем корреляции» стационарной функции (формула (4.74) была получена еще Тэйлором (1921)). Таким образом, для надежного определения величины U надо только воспользоваться временным осреднением по периоду T, много большему, чем соответствующее «время корреляции» T_1. Выбрав желательную нам степень точности (т. е. наибольшую среднюю квадратичную ошибку, которую еще можно считать допустимой при замене U на $\tilde{u}_T$), мы можем определить по формуле (4.74) и требуемый период осреднения T[1]).

Скажем теперь еще несколько слов по поводу однородных случайных полей $u(\boldsymbol{x})$ и пространственного осреднения. Случай однородных полей на прямой, как мы уже отмечали, вообще ничем не отличается от случая стационарных процессов. Что же касается до однородных случайных полей на плоскости или в пространстве, то значения такого поля $u(\boldsymbol{x})$ на любой прямой будут представлять собой однородное случайное поле на прямой. Поэтому если только корреляционная функция $b_{uu}(\boldsymbol{r})$ пульсаций этого поля такова, что хотя бы для одного направления (единичного вектора) $\boldsymbol{r}_0$ функция $b_{uu}(\tau\boldsymbol{r}_0)$ от τ удовлетворяет условию (4.72) (например, если $b_{uu}(\boldsymbol{r}) \to 0$ при $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ хотя бы вдоль одного направления), то средние по пространству (или

[1]) Отметим, что правая часть (4.74) вполне аналогична известному выражению для средней квадратичной ошибки среднего арифметического N независимых измерений, если только положить $N = T/2T_1$. Таким образом, осреднение стационарной функции с временем корреляции T_1 по периоду $2NT_1$ эквивалентно осреднению по N независимым измерениям этой функции (т. е. по N реализациям).

плоскости) наверное будут сходиться к константе $\overline{u(\boldsymbol{x})} \equiv U$ (такая сходимость здесь будет иметь место даже при осреднении лишь по одной прямой, параллельной $\boldsymbol{r}_0$). Общее условие, необходимое и достаточное для сходимости $\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}$ в среднем квадратичном к U при $A \to \infty$, $B \to \infty$, $C \to \infty$ для однородных полей в пространстве имеет вид

$$\lim_{A\to\infty,\, B\to\infty,\, C\to\infty} \frac{1}{4ABC} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-C}^C b_{uu}(\boldsymbol{r})\,dr_1\,dr_2\,dr_3 = 0 \tag{4.76}$$

(изменения для случая двумерных полей являются очевидными); доказательство этого условия почти не отличается от аналогичного доказательства для одномерного случая. Вместо (4.74) мы теперь будем иметь формулу

$$\overline{[\tilde{u}_V - U]^2} \approx 2\frac{V_1}{V} b_{uu}(0), \tag{4.74'}$$

где $\tilde{u}_V$ — среднее по объему $ABC = V$, а V_1 — «объем корреляции»:

$$V_1 = \frac{1}{b_{uu}(0)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty b_{uu}(\boldsymbol{r})\,dr_1\,dr_2\,dr_3, \tag{4.75'}$$

который в формуле (4.74'), естественно, предполагается конечным.

Указанные выше результаты могут быть применены и к вопросу о вычислении высших моментов или других теоретико-вероятностных средних значений каких-либо функций от значений $u(t)$ или $u(\boldsymbol{x})$ при помощи временного или пространственного осреднения; при этом надо только заменить процесс $u(t)$ или поле $u(\boldsymbol{x})$ новым процессом или полем, являющимся нелинейной функцией исходного. Например, в случае стационарного процесса $u(t)$ для возможности получения момента N-го порядка (4.62) при помощи осреднения по времени τ величины $u(t_1+\tau)\,u(t_2+\tau)\,\ldots\,u(t_N+\tau)$ надо только, чтобы момент $2N$-го порядка

$$B_{u\ldots uuu\ldots u}(t_2-t_1,\ \ldots,\ t_N-t_1,\ \tau,\ t_2-t_1+\tau,\ \ldots,\ t_N-t_1+\tau) = \overline{u(t_1)\ldots u(t_N)\,u(t_1+\tau)\,u(t_2+\tau)\ldots u(t_N+\tau)} \tag{4.77}$$

при фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_N$ являлся функцией от τ, удовлетворяющей условию (4.72). Поскольку обычно из физических

соображений можно утверждать, что коэффициент корреляции между величинами $u(t_1)\dots u(t_N)$ и $u(t_1+\tau)\dots u(t_N+\tau)$ при $\tau\to\infty$ стремится к нулю, то нужное нам условие на практике обычно можно считать выполняющимся, а использование временного осреднения законным. Для оценки необходимого времени осреднения надо оценить соответствующее «время корреляции», т. е. интеграл от указанного коэффициента корреляции. В случае гауссовских процессов $u(t)$ момент (4.77) можно выразить через корреляционную функцию и среднее значение процесса $u(t)$ с помощью общего правила (4.28) вычисления высших моментов. В частности, при определении с помощью временного осреднения среднего квадрата $\overline{u^2(t)} = B_{uu}(0)$ значения гауссовского стационарного случайного процесса $u(t)$ с нулевым средним значением роль корреляционной функции $b_{uu}(t)$ будет играть функция

$$\overline{[u^2(t+\tau)-\overline{u^2(t)}]\,[u^2(t)-\overline{u^2(t)}]} = 2b_{uu}^2(\tau); \qquad (4.78)$$

поэтому здесь формулы (4.74)—(4.75) принимают вид

$$\overline{[\widetilde{u_T^2}-b_{uu}(0)]^2} \approx \frac{4T_2}{T}\,b_{uu}^2(0), \qquad T_2 = \frac{1}{b_{uu}^2(0)}\int_0^\infty b_{uu}^2(\tau)\,d\tau. \qquad (4.79)$$

Заметим, что в этом случае из условия

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [b_{uu}(\tau)]^2\,d\tau = 0, \qquad (4.80)$$

в которое обращается (4.72) при замене функции $b_{uu}(\tau)$ функцией (4.78), будет вытекать также и первоначальное условие (4.72). Кроме того, для гауссовского стационарного процесса из (4.80) будет следовать, что вероятностное среднее значение любой функции от значений процесса, имеющей конечное среднее значение, будет равно пределу при $T\to\infty$ от соответствующего временного среднего за время T (см., например, Гренандер (1950)). Обобщение последнего результата на гауссовские однородные случайные поля (и на некоторые еще более общие гауссовские случайные функции) сформулировано в заметке Темпельмана (1962); несколько более слабый результат о таких случайных полях доказан в работе Биркгофа и Кампе де Ферье (1962).

Для доказательства того, что при условии (4.72) равенство (4.68) обязательно будет иметь место, выразим средний квадрат разности $\widetilde{u}_T(t) - U$

через корреляционную функцию $b_{uu}(\tau)$:

$$\overline{[\widetilde{u}_T-U]^2} = \overline{\left\{\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}[u(t)-U]\,dt\right\}^2} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\overline{[u(t)-U]\,[u(s)-U]}\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} b_{uu}(t-s)\,dt\,ds = \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau\,d\tau_1 \qquad (4.81)$$

(мы использовали подстановку $t-s=\tau$, $t+s=\tau_1$ и учли, что $b_{uu}(-\tau) = b_{uu}(\tau)$). Если $b_{uu}(\tau)$ удовлетворяет условию (4.72), то для любого $\delta>0$ будет существовать такое $T_0 = T_0(\delta)$, что

$$\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau < \frac{\delta}{2}\tau_1 \qquad \text{при} \qquad \tau_1 > T_0. \qquad (4.82)$$

С другой стороны, в силу неравенства $|b_{uu}(\tau)|\leqslant b_{uu}(0)$ при любом τ_1

$$\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau < b_{uu}(0)\,\tau_1. \qquad (4.83)$$

Интегрируя неравенство (4.83) по τ_1 от нуля до T_0, а неравенство (4.82) — от T_0 до некоторого $T > T_0$, найдем, что при любом $T > T_0$

$$\int_0^T\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau\,d\tau_1 < \frac{b_{uu}(0)\,T_0^2}{2} + \frac{\delta\left(T^2-T_0^2\right)}{4}. \qquad (4.84)$$

Следовательно,

$$\int_0^T\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau\,d\tau_1 < \frac{\delta}{2}T^2 \qquad \text{при} \qquad \frac{b_{uu}(0)\,T_0^2}{2} < \frac{\delta T^2}{4},$$

т. е. при

$$T > \sqrt{\frac{2b_{uu}(0)}{\delta}}\,T_0.$$

Итак, для любого $\delta>0$ при $T>T_0$ и $T > \sqrt{\frac{2b_{uu}(0)}{\delta}}\,T_0$

$$\overline{[\widetilde{u}_T-U]^2} = \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\,d\tau\,d\tau_1 < \delta, \qquad (4.85)$$

т. е. равенство (4.68) действительно имеет место.

Если предел, фигурирующий в левой части (4.72), существует, но равен отличному от нуля значению c, то условию (4.72), очевидно, будет удовлетворять функция $b_1(\tau) = b_{uu}(\tau) - c$. Отсюда ясно, что в этом случае

$$\lim_{T\to\infty} \overline{[\tilde{u}_T - U]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{\tau_1} [b_1(\tau) + c]\, d\tau\, d\tau_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{\tau_1} b_1(\tau)\, d\tau\, d\tau_1 + c = c,$$

т. е. $\tilde{u}_T$ при $T \to \infty$ здесь не сходится к U. Но можно показать, что $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(\tau)\, d\tau$ для корреляционной функции $b_{uu}(\tau)$ всегда существует (см., например, гл. 6 ч. 2 настоящей книги). Отсюда вытекает, что в случаях, когда условие (4.72) нарушается, временные средние $\tilde{u}_T$ не будут при $T \to \infty$ сходиться к соответствующему теоретико-вероятностному среднему $\overline{u(t)} = U$.

Если корреляционная функция $b_{uu}(\tau)$ удовлетворяет не только (4.72), но и более сильному условию (4.73), то из (4.81) легко следует формула (4.74).

Заметим, что из равенства (4.68), вообще говоря, еще не следует, что для любой реализации случайного процесса временные средние $\tilde{u}_T$ при $T \to \infty$ действительно стремятся к пределу, совпадающему с $\overline{u(t)} = U$. Этому равенству не противоречило бы, если бы даже для любой реализации иногда встречались такие сколь угодно большие значения T, при которых $\tilde{u}_T$ было бы далеко от U (так что для отдельных реализаций предел $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, dt$ просто не существовал бы). Можно доказать, однако, что для любого стационарного случайного процесса $u(t)$ с $\overline{|u(t)|} < \infty$ для почти всех реализаций (т. е. для всех реализаций, кроме, быть может, некоторых «особых» реализаций, суммарная вероятность которых равна нулю) значения временного среднего $\tilde{u}_T$ при $T \to \infty$ стремятся к определенному пределу (так называемая «эргодическая теорема Дж. Биркгофа — Хинчина»; см., например, Дуб (1953), гл. XI, § 2, Розанов (1963), гл. IV, § 5). Но отсюда вытекает, что во всех случаях, когда выполняется (4.68) (т. е. когда корреляционная функция $b_{uu}(\tau)$ удовлетворяет условию (4.72)), предел временных средних, составленных по отдельной реализации процесса $u(t)$, с вероятностью единица существует и равняется $\overline{u(t)}$.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

§ 5. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ И В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

5.1. Уравнения Рейнольдса

Изучение турбулентных потоков жидкости естественно начать со случая течений в круглых трубах и в пограничном слое на плоской пластинке, легче всего осуществимых в лаборатории и имеющих большое значение для многих технических задач. Богатый экспериментальный материал, накопленный при изучении таких течений, позволяет рассматривать их как эталоны для проверки различных теорий и гипотез о природе турбулентности. Изложение основных сведений о важнейших интегральных характеристиках течений в трубах и в пограничном слое — профиле продольной скорости, расходе жидкости и законе сопротивления — и займет центральное место в настоящем параграфе. Далее мы рассмотрим также некоторые гипотезы о турбулентных течениях, широко используемые при практических расчетах, и в заключение совсем коротко остановимся на так называемой свободной турбулентности, на которую не влияют существенно никакие твердые стенки. Прежде всего, однако, необходимо привести общие соображения Рейнольдса (1894), относящиеся к произвольным турбулентным течениям и лежащие в основе всей теории турбулентности.

Мы уже говорили о том, что гидродинамические поля скорости, давления, температуры и т. д. в случае турбулентного течения имеют столь сложную структуру, что их индивидуальное описание оказывается практически невозможным. Поэтому здесь приходится рассматривать сразу целую совокупность аналогичных течений и изучать лишь осредненные статистические характеристики этой совокупности, предполагая, что все рассматри-

ваемые гидродинамические поля являются случайными полями (в смысле, объясненном в п. 3.2). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что такой подход является возможным, т. е. турбулентными мы будем называть лишь такие течения, для которых существует статистический ансамбль аналогичных течений, характеризуемый определенными распределениями вероятности (с непрерывными плотностями) для значений всевозможных гидродинамических полей. Отметим в этой связи, что обычное определение турбулентных течений просто как течений, сопровождающихся беспорядочными пульсациями всех гидродинамических величин, еще недостаточно для возможности построения математической теории турбулентности. Если же соответствующий статистический ансамбль существует, то отвечающее ему статистическое описание гидродинамических полей турбулентности и с чисто практической точки зрения не будет «неполным», так как знание всех деталей очень запутанного индивидуального поля для практики никогда не нужно, а интерес всегда представляют лишь средние характеристики. Правда, на практике обычно используются не средние по ансамблю, а временные или пространственные средние; поэтому с практической точки зрения следует требовать еще, чтобы случайные поля гидродинамических величин удовлетворяли какой-то форме эргодической теоремы. Последнее условие в дальнейшем мы также всегда будем предполагать выполняющимся, не оговаривая этого.

Важнейшими и одновременно простейшими статистическими характеристиками случайных гидродинамических полей являются их средние значения. Разности $u' = u - \bar{u}$ между индивидуальными значениями поля u и его средним значением $\bar{u}$ естественно назвать пульсациями поля u. Разложение гидродинамических полей на их средние значения и пульсации и играло основную роль в рассуждениях Рейнольдса (а также и почти во всех последующих исследованиях турбулентности).

Средние значения гидродинамических полей обычно оказываются весьма гладкими и медленно меняющимися; пульсации же, наоборот, характеризуются большой изменчивостью во времени и в пространстве. Вообще говоря, допустимо даже предполагать, что турбулентные неоднородности могут иметь сколь угодно малые масштабы (вплоть до масштабов, сравнимых со средней длиной свободного пробега молекул) и сколь угодно малые периоды (вплоть до периодов, сравнимых со средним временем между последовательными столкновениями молекул). Если бы это было так, то использование при описании турбулентности обычных понятий и методов механики сплошных сред (и, в частности, дифференциальных уравнений гидродинамики),

разумеется, было бы незаконным. Однако опыт показывает, что на самом деле турбулентные неоднородности никогда не имеют столь малых пространственно-временных размеров. Это объясняется тем, что неоднородностям очень малых размеров должны были бы отвечать очень большие градиенты скорости; поэтому для движений очень малых масштабов затраты энергии на преодоление сил вязкого трения становятся столь большими, что делают существование таких движений практически невозможным. В результате минимальные масштабы и периоды турбулентных неоднородностей оказываются во всех случаях на несколько порядков превосходящими масштабы и периоды молекулярных движений. А именно, размеры наименьших неоднородностей, наблюдающихся и в воздушных, и в водных турбулентных потоках, имеют порядок нескольких миллиметров или, в крайнем случае, десятых долей миллиметра (ср., например, ч. 2 настоящей книги, гл. 8), в то время как в нормальных условиях длина свободного пробега молекул воздуха имеет порядок 10^{-5} *см*, а молекул воды — еще много меньший порядок. Так как к тому же скорости гидродинамических потоков по порядку величины не превосходят средней скорости теплового движения молекул (близкой к $5 \cdot 10^4$ *см/сек*), то характерные периоды турбулентных пульсаций также всегда на несколько порядков превосходят среднее время между двумя молекулярными столкновениями. На расстояниях, сравнимых с размерами минимальных неоднородностей, и в течение промежутков времени, сравнимых с минимальными периодами пульсаций, все гидродинамические поля изменяются плавно и могут быть описаны дифференцируемыми функциями. Отсюда вытекает, что описание турбулентных течений с помощью обычных дифференциальных уравнений гидромеханики является вполне оправданным.

Однако непосредственное использование этих уравнений невозможно хотя бы потому, что гидродинамические поля в турбулентном потоке всегда нестационарны и очень сильно зависят от мельчайших деталей начальных условий, а эти детали никогда не бывают известны с достаточной полнотой. Кроме того, если бы даже начальные значения и были известны точно, то все равно решение соответствующей задачи с начальными условиями из-за ее неустойчивости относительно малых возмущений начальных данных было бы крайне громоздким и практически бесполезным. Но отсюда еще не следует, что уравнения гидромеханики вообще не могут быть применены при изучении турбулентности. Благодаря тому, что индивидуальные реализации гидродинамических полей турбулентного потока удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, статистические характеристики этих полей оказываются связанными целым

рядом важных соотношений, имеющих для теории турбулентности самое первостепенное значение.

Простейшие связи такого рода и были установлены Рейнольдсом с помощью непосредственного осреднения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Будем исходить из уравнений баланса импульса, умноженных на ρ уравнений Навье — Стокса (1.6), в которых нам теперь будет удобно слагаемые $u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ преобразовать с помощью уравнения неразрывности к виду $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i u_\alpha)$. Применим ко всем членам этих уравнений операцию осреднения и используем перестановочность этой операции с дифференцированием по координатам и по времени (свойство (3.6) на стр. 164), а также равенство

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' u_j'},$$

непосредственно вытекающее из (3.3) и (3.7′). В таком случае мы получим уравнения

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_\alpha + \rho \overline{u_i' u_\alpha'}) = \rho \bar{X}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho \nu \Delta \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

обычно называемые *уравнениями Рейнольдса*. Эти уравнения содержат уже только плавно меняющиеся осредненные величины; поэтому при их использовании не возникает трудностей, связанных со сложностью и нерегулярностью гидродинамических полей турбулентных потоков. Зато при этом возникает другая трудность, связанная с наличием в уравнениях Рейнольдса новых неизвестных величин $\tau_{ij}^{(1)} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ (знак минус здесь поставлен по причине, которая выяснится чуть ниже), характеризующих пульсационную компоненту поля скорости. Появление этих новых неизвестных, очевидно, является непосредственным следствием нелинейности уравнений гидродинамики. При осреднении же линейных уравнений никаких новых членов, разумеется, не возникает, так что, например, осредненное уравнение неразрывности будет иметь простой вид

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (5.2)$$

Для выяснения физического смысла дополнительных слагаемых $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ в уравнениях (5.1) рассмотрим среднее значение плотности потока импульса

$$\overline{\rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \sigma_{ij}} = \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{p}\delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}),$$

где $\sigma_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ — вязкий тензор напряжений в несжимаемой жидкости. Это выражение показывает, что по отношению к осредненному движению роль вязкого тензора напряжений играет тензор $\tau_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'} = \bar{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}^{(1)}$ (для того чтобы здесь получить сумму, и был добавлен знак минус в выражении для $\tau_{ij}^{(1)}$). Таким образом, в турбулентном течении, кроме обмена импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости (описываемого тензором вязких напряжений), имеет место также и передача импульса от одних объемов жидкости к другим, вызываемая перемешиванием, создаваемым пульсациями скорости. Иначе говоря, влияние турбулентного перемешивания на осредненное движение оказывается родственным влиянию вязкости; чтобы подчеркнуть это, уравнения Рейнольдса иногда записываются также в виде

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{X}_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \overline{u_i' u_\alpha'}\right). \quad (5.1')$$

Мы видим, что величины $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ в уравнениях (5.1) для осредненного движения имеют смысл компонент тензора дополнительных напряжений, возникающих из-за наличия турбулентных пульсаций подобно тому, как в обычной гидродинамике микроскопические молекулярные движения приводят к появлению вязких напряжений. Эти дополнительные напряжения называются в теории турбулентности *напряжениями Рейнольдса*.

При рассмотрении тензора напряжений Рейнольдса особый интерес представляет компонента этого тензора, описывающая передачу импульса жидкости обтекаемому телу. Пусть Σ — небольшая площадка на поверхности обтекаемого тела, которую приближенно можно считать плоской и совпадающей с частью плоскости $x_3 = 0$. Предположим, далее, что направление осредненного течения в окрестности этой площадки параллельно оси Ox_1. В таком случае сила трения, приложенная к площадке Σ, также будет направлена вдоль оси Ox_1. Ясно, что величина силы трения, приходящейся на единицу площади поверхности тела, будет равна плотности потока x_1-компоненты импульса по направлению Ox_3, взятой в точке этой поверхности, т. е. будет определяться формулой

$$\tau_0 = (\bar{\sigma}_{13} - \rho \overline{u_1' u_3'})_{x_3 = 0}.$$

Величина τ_0 называется *напряжением трения* на стенке. Так как на поверхности обтекаемого тела величины $\bar{u}_i$ и u_i' и их производные по x_1, очевидно, равняются нулю, а $\bar{\sigma}_{13} = \rho\nu\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1}\right)$,

то величину τ_0 можно представить и в более простой форме:

$$\tau_0 = \rho\nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}. \tag{5.3}$$

Если, однако, мы выделим площадку, параллельную Σ, над поверхностью обтекаемого тела, то для нее напряжение трения будет уже определяться формулой

$$\tau = \bar{\sigma}_{13} - \rho\overline{u_1' u_3'}; \tag{5.4}$$

в важном частном случае, когда осредненная скорость всюду направлена вдоль оси Ox_1, мы будем иметь

$$\tau = \rho\nu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} - \rho\overline{u_1' u_3'}. \tag{5.4'}$$

В этом случае, следуя идеям Буссинеска (1897), часто формально полагают

$$-\rho\overline{u_1' u_3'} = \rho K \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}, \tag{5.5}$$

где K — новая величина размерности L^2T^{-1}, называемая *коэффициентом турбулентной вязкости*; сумму $\nu + K$ можно назвать *суммарным* (или *эффективным*) *коэффициентом вязкости* турбулентного потока. В отличие от обычного коэффициента (молекулярной) вязкости ν коэффициент турбулентной вязкости K, очевидно, характеризует не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения. Поэтому он уже не обязан являться постоянной величиной, а может меняться в пространстве и во времени и даже принимать отрицательные значения (см. ниже п. 6.3) [1]). Существенно подчеркнуть сразу же, что коэффициент турбулентной вязкости K обычно значительно превосходит коэффициент молекулярной вязкости ν; поэтому вдали от твердых границ напряжение трения (определяемое потоком x_1-компоненты импульса в направлении оси Ox_3) вполне можно подсчитывать по формуле

$$\tau = \tau^{(1)} = -\rho\overline{u_1' u_3'}. \tag{5.6}$$

Уравнения Рейнольдса (5.3) представляют собой уравнения баланса импульса осредненного движения; входящие в них напряжения Рейнольдса описывают турбулентный перенос этого

[1]) Помимо того, коэффициент турбулентной вязкости по самому своему определению зависит также и от принятого способа осреднения, т. е., иначе говоря, от выбора того статистического ансамбля аналогичных течений, задание которого должно быть включено в определение данного турбулентного потока. Это замечание оказывается особенно существенным в применении к «природной» турбулентности в атмосфере или океане, где обычно не существует однозначно определяемого «естественного множества аналогичных течений», и осреднение по различным статистическим совокупностям может привести к значениям K, отличающимся на несколько порядков.

импульса. Аналогичные уравнения баланса могут быть получены и для произвольной скалярной консервативной субстанции, переносимой жидкостью (например, для тепла или пассивной материальной примеси типа водяного пара, дыма или пыли в атмосфере). Применяя операцию осреднения к уравнению (1.72), описывающему перенос субстанции ϑ в несжимаемой жидкости, получим

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{u}_\alpha \bar{\vartheta} + \overline{u_\alpha' \vartheta'}\right) = \chi \Delta \bar{\vartheta}, \tag{5.7}$$

или, иначе,

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\chi \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_\alpha} - \overline{u_\alpha' \vartheta'}\right) \tag{5.7'}$$

(ср. (5.1) и (5.1')). Если ϑ — это температура, то вектор $c_p\rho\bar{\vartheta}\bar{u}_i$ описывает адвективный перенос тепла осредненным движением, $\varkappa \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_i}$ (где $\varkappa = c_p\rho\chi$) — перенос тепла за счет молекулярной теплопроводности, а величина

$$q_i = -c_p\rho\overline{\vartheta' u_i'} \tag{5.8}$$

будет плотностью *турбулентного потока тепла* по направлению отрицательной оси Ox_i. Мы видим, что турбулентные пульсации приводят к появлению дополнительного потока тепла, в ряде отношений родственного потоку тепла, создаваемому молекулярной теплопроводностью. Аналогично (5.5) мы можем формально положить

$$-c_p\rho\overline{\vartheta' u_i'} = c_p\rho K_\vartheta \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_i}, \tag{5.9}$$

где величина K_ϑ играет роль нового коэффициента температуропроводности, называемого *коэффициентом турбулентной температуропроводности* (вообще говоря, этот коэффициент может быть различным для разных координатных осей). Если же ϑ в уравнениях (5.7) и (5.7') представляет собой концентрацию пассивной материальной примеси, то величина

$$j_i = -\rho\overline{\vartheta' u_i'} \tag{5.8'}$$

будет иметь смысл плотности турбулентного потока примеси по направлению отрицательной оси Ox_i; в таком случае коэффициент K_ϑ в равенстве

$$-\rho\overline{\vartheta' u_i'} = \rho K_\vartheta \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_i} \tag{5.9'}$$

называется *коэффициентом турбулентной диффузии* (этот коэффициент был введен Шмидтом (1917, 1925)).

Все сказанное выше по поводу коэффициента турбулентной вязкости можно, разумеется, повторить и по поводу коэффициентов турбулентной температуропроводности и диффузии; дальнейшие сведения о всех этих коэффициентах турбулентного переноса см. ниже в п. 6.3.

5.2. Общий вид профиля средней скорости течения около стенки

Перейдем теперь к исследованию общих свойств турбулентных течений около стенки, параллельной направлению средней скорости течения. Результаты этого исследования будут приложимы и к течениям в круглой трубе или в плоском канале, и к течениям в пограничном слое на плоской пластинке (в частности, в приземном или приводном слое атмосферы над ровной подстилающей поверхностью при нейтральной термической стратификации). Мы начнем, однако, с рассмотрения простейшего идеализированного случая стационарного плоскопараллельного потока жидкости, движущейся по направлению оси Ox в полупространстве $z > 0$ в отсутствие градиента среднего давления.

В случае ламинарного безнапорного плоскопараллельного течения из первого уравнения гидродинамики, как мы видели на стр. 41, немедленно вытекает, что профиль скорости $u(z)$ должен быть линейным. Для аналогичного турбулентного течения первое уравнение Рейнольдса будет иметь вид

$$\nu \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} - \frac{d}{dz}\overline{u'w'} = 0. \tag{5.10}$$

Это уравнение показывает, что поток x-компоненты импульса вдоль оси Oz (направленный от жидкости к стенке) здесь будет одним и тем же на всех расстояниях от стенки:

$$\tau(z) = \rho\nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'} = \tau_0 = \text{const}, \tag{5.11}$$

где τ_0 — напряжение трения на стенке $z = 0$. Однако оно не позволяет однозначно определить профиль средней скорости $\bar{u}(z)$, так как, кроме функции $\bar{u}(z)$, содержит еще неизвестную величину $\overline{u'w'}$. Тем не менее, некоторые выводы о возможной форме функции $\bar{u}(z)$ в этом случае все же можно получить из соображений размерности. В самом деле, осредненные характеристики рассматриваемого течения на расстоянии z от стенки, очевидно, могут зависеть лишь от напряжения трения τ_0, координаты z и параметров жидкости ν и ρ. При этом величины τ_0 и ρ могут входить в кинематические характеристики течения

лишь в виде комбинации $\frac{\tau_0}{\rho}$, не зависящей от размерности массы. Вместо отношения $\frac{\tau_0}{\rho}$ удобно использовать величину

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{5.12}$$

имеющую размерность скорости и являющуюся поэтому естественным масштабом скоростей для течения около стенки; в дальнейшем мы ее будем называть *динамической скоростью* [1]). Так как из u_*, ν и z можно составить единственную безразмерную комбинацию $\frac{zu_*}{\nu}$, то общий вид зависимости профиля средней скорости $\bar{u}(z)$ от z, τ_0, ρ и ν может быть записан в виде

$$\bar{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right), \tag{5.13}$$

или, что то же самое, в виде

$$\bar{u}_+ = f(z_+), \quad \text{где} \quad \bar{u}_+ = \frac{\bar{u}}{u_*}, \quad z_+ = \frac{zu_*}{\nu}. \tag{5.13'}$$

Здесь $\bar{u}_+$ и z_+ — безразмерные скорость и расстояние от стенки, а $f(z_+)$ — некоторая универсальная функция одного переменного. Важный результат (5.13) иногда называется *универсальным законом турбулентности вблизи стенки*; впервые он был указан Прандтлем (1925) (см. также Прандтль (1932б)).

Формулы (5.13) и (5.13'), разумеется, будут справедливы лишь в случае, когда стенку можно считать гладкой, т. е. описываемой простейшим уравнением $z = 0$. Поскольку естественным масштабом длин в рассматриваемом течении будет «динамическая длина» $z_* = \frac{\nu}{u_*}$, то мы можем теперь количественно разъяснить требование гладкости: стенка будет динамически гладкой, если средняя высота h_0 имеющихся на ней бугорков удовлетворяет условию

$$h_0 \leqslant z_* = \frac{\nu}{u_*} \tag{5.14}$$

(более точные данные см. на стр. 242). Только в этом случае профиль скорости около стенки будет определяться общей формулой (5.13). В случае же шероховатой стенки, высота неровностей которой не удовлетворяет условию (5.14), эти неровности также будут как-то влиять на распределение средней скорости около стенки. Поэтому формулу (5.13) здесь следует заменить

[1]) Иногда эта скорость называется также *скоростью трения* (в соответствии с общепринятым в английской литературе термином *friction velocity*).

более общей формулой

$$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{h_0 u_*}{\nu}, \alpha, \beta, \ldots\right), \qquad (5.15)$$

где $\alpha, \beta, \ldots$ — безразмерные параметры, характеризующие форму неровностей и их распределение по поверхности стенки. В случае сильно шероховатых стенок при использовании формулы (5.15) возникает еще дополнительная трудность, связанная с тем, что здесь неясно, от какого уровня следует отсчитывать высоту z; к этому вопросу мы еще вернемся ниже при более подробном рассмотрении течений около шероховатых стенок.

Прежде чем переходить к обсуждению формы функции f, остановимся на вопросе о применимости соотношений (5.13) и (5.15) к различным реально встречающимся турбулентным течениям. Начнем со случая безнапорного турбулентного течения жидкости между двумя плоскими стенками, движущимися друг относительно друга. В этом случае уравнения (5.10) и (5.11) будут точными; поэтому, например, при гладких стенках для применимости формулы (5.13) к течению на расстоянии z от одной из стенок надо только, чтобы z было много меньше расстояния H между стенками [1]). Однако такое течение само является идеализированным течением, с трудом моделируемым в лаборатории; поэтому для возможности проверки формул (5.13) и (5.15) важно знать какие-либо более легко осуществимые течения, профиль скорости которых описывается этими формулами.

Как уже отмечалось, одним из таких течений может являться движение воздуха около поверхности земли (или воды) при нейтральной термической стратификации. Правда, в земной атмосфере горизонтальный градиент давления обычно бывает слегка отличен от нуля и, кроме того, на скорость ветра влияет еще и создаваемая вращением Земли сила Кориолиса (см. ниже п. 6.6). Однако в самом нижнем слое воздуха все эти факторы играют лишь малую роль и не вызывают заметного изменения с высотой напряжения трения τ: простые оценки (которые мы отложим до стр. 349), показывают, что в атмосфере вплоть до высоты порядка 50 *м* величина τ обычно может считаться практически постоянной. Следовательно, в пределах этого слоя в случае нейтральной стратификации можно с достаточным основанием пользоваться упрощенным уравнением (5.11)

[1]) Строго говоря, для турбулентного течения между движущимися стенками должна иметь место формула вида $\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{z_1 u_*}{\nu}\right)$, где $z_1 = H - z$ — расстояние до второй ограничивающей поток стенки. При $z_1 \gg z$ допустимо считать, что $\frac{z_1 u_*}{\nu} = \infty$, после чего эта формула обращается в формулу (5.13).

и формулой (5.15) (заметим, что в атмосфере подстилающая поверхность почти всегда оказывается шероховатой, так как u_* здесь обычно имеет порядок 10 *см/сек* и, значит, z_* не превосходит нескольких десятых долей миллиметра).

Перейдем теперь к искусственным течениям в трубах, каналах и пограничном слое на пластинке. В простейшем случае широкого плоского канала течение можно приближенно рассматривать как плоскопараллельное в среднем течение между бесконечными плоскостями $z = 0$ и $z = H = 2H_1$, однородное в плоскостях $z = \text{const}$. Ясно, что в таком случае первое и третье уравнения Рейнольдса будут иметь вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \qquad (5.16)$$

$\left(\text{где, как обычно, } \tau = \rho\nu \frac{d\overline{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'}\right)$. Из второго уравнения (5.16) следует, что $\overline{p} + \rho\overline{w'^2} = \overline{p}_0$ зависит только от x (величина $\overline{p}_0$, очевидно, совпадает со средним давлением на стенку). Но $\overline{w'^2}$ не может зависеть от x; поэтому в силу первого уравнения (5.16)

$$\tau = \frac{\partial \overline{p}_0}{\partial x} z + \text{const}.$$

Обозначим напряжение трения на нижней стенке $z = 0$ через τ_0; так как в силу условия симметрии напряжение трения в центре канала (при $z = H_1$) должно равняться нулю, то последнюю формулу можно также переписать в виде

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{z}{H_1}\right). \qquad (5.17)$$

Отсюда видно, что при $z \ll H_1$ можно полагать $\tau(z) = \tau_0 = \text{const}$; поэтому и в этом случае существует слой (примыкающий к стенке канала), в котором напряжение трения остается практически постоянным. В пределах этого слоя влиянием градиента давления можно пренебречь и, следовательно, можно пользоваться формулами (5.13) и (5.15) [1]).

[1]) Как данные экспериментов, так и аккуратные расчеты, учитывающие зависимость напряжения трения τ от z, показывают, что профили средних гидродинамических полей и основные интегральные характеристики турбулентных течений мало чувствительны к даже довольно значительным изменениям τ. Поэтому, например, к слою, в котором τ меняется не больше чем на 15—20%, почти всегда можно смело прилагать упрощенную теорию, предполагающую, что $\tau = \text{const}$. Ниже мы увидим, что в ряде случаев результаты, полученные при таком предположении, дают неплохое приближение даже и для всего сечения канала (или трубы).

Вполне аналогично обстоит дело и в случае напорного течения в круглой трубе диаметра $D=2R$. В этом случае из уравнений Рейнольдса, преобразованных к полярной системе координат (x, r, φ), легко выводится, что

$$\tau \equiv -\rho\overline{u'_x u'_r} + \rho\nu\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial r} = \frac{d\bar{p}_0}{dx}\cdot\frac{r}{2} = \frac{d\bar{p}_0}{dx}\cdot\frac{R}{2}\left(1-\frac{z}{R}\right) = \tau_0\left(1-\frac{z}{R}\right), \quad z \leqslant R, \qquad (5.17')$$

где $\bar{p}_0$ — статическое давление на стенку, а $z=R-r$ — расстояние от стенки. Следовательно, при $z \ll R$ напряжение трения здесь можно снова считать постоянным и задавать профиль средней скорости той же формулой (5.13) (или (5.15)), что и для плоскопараллельного безнапорного течения в полуплоскости. Наконец, в пограничном слое на плоской пластинке уравнения Рейнольдса получаются при помощи добавления членов, содержащих напряжения Рейнольдса, к обычным уравнениям пограничного слоя (1.38)—(1.39) относительно осредненных гидродинамических полей. Учитывая, что пульсационные скорости в пограничном слое много меньше средней продольной скорости $\bar{u}$, а производные по x много меньше производных по z, и сохраняя лишь главные члены, находим, что третье уравнение Рейнольдса при отсутствии продольного градиента давления в обтекающем потоке будет иметь вид

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} + \nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}. \qquad (5.18)$$

Исходя отсюда, можно оценить изменение напряжения трения τ по вертикали и показать, что и в пограничном слое существует заметный слой, примыкающий к пластинке, внутри которого напряжение трения будет практически постоянным. В пределах этого слоя течение можно считать плоскопараллельным и описывать уравнением (5.10), а профиль средней скорости — задавать формулой (5.13) или (5.15) [1].

[1]) Любопытно отметить, что, как обнаружили Людвиг и Тильман (1949), формула (5.13) с обычной универсальной функцией f оказывается справедливой и для пограничных слоев с весьма значительным продольным градиентом давления, который, казалось бы, должен был вызывать заметное изменение напряжения трения в пределах рассматриваемого слоя жидкости. Позже Коулс (1955) объяснил это тем, что в пограничных слоях с продольным градиентом давления изменение величины τ_0 вдоль стенки приводит к изменению величины τ по вертикали, в значительной степени компенсирующему изменение τ по вертикали, вызываемое градиентом среднего давления (ср. Ротта (1962 а, б)).

5.3. Течение около гладкой стенки; вязкий подслой и логарифмический пограничный слой

Будем пока предполагать, что стенка $z=0$ является динамически гладкой, так что имеет место формула (5.13). Тогда вид входящей в эту формулу функции $f(z_+)$ может быть явно определен для двух предельных случаев — для больших и для малых значений аргумента z_+.

Непосредственно около стенки основную роль играет то обстоятельство, что на самой стенке $\rho\overline{u'w'}=0$ и $\tau_0=\rho\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$ (см. формулу (5.3)). Поэтому при достаточно малых значениях z вязкое напряжение трения будет значительно превосходить по величине напряжение Рейнольдса $-\rho\overline{u'w'}$. Слой жидкости, в котором $\nu\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right| \gg |\overline{u'w'}|$, называется обычно *вязким подслоем* [1]). В пределах этого подслоя, очевидно, можно считать, что

$$\rho\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} = \tau_0 = \text{const}; \qquad (5.19)$$

следовательно, здесь

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu}z, \quad f(z_+) = z_+. \qquad (5.20)$$

Строго говоря, формула (5.20) представляет собой лишь первый член разложения функции $f(z_+)$ в ряд Тэйлора по степеням z_+ в окрестности точки $z_+=0$. Следующие члены этого разложения можно получить с помощью дифференцирования по z уравнения (5.11) в точке $z=0$. При этом существенно, что $u'=v'=w'=0$ при $z=0$; следовательно, при $z=0$ равны нулю и все производные пульсаций скорости по x и y и, кроме того, $\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{z=0}=0$ (в силу уравнения неразрывности).

[1]) Раньше вместо названия *вязкий подслой* часто употреблялось также выражение *ламинарный подслой*, поскольку предполагалось, что движение в пределах этого подслоя является ламинарным. В дальнейшем, однако, непосредственные ультрамикроскопические наблюдения движения частиц, взвешенных в жидкости около стенки (Фэйдж и Тауненд (1932)), подкрепленные затем и данными тонких термоанемометрических измерений (Лауфер (1951, 1954), Клебанов (1955)), показали, что хотя профиль средней скорости внутри рассматриваемого подслоя и совпадает с профилем скорости безнапорного плоскопараллельного ламинарного течения (см. (1.13)), течение в нем все же не является ламинарным, а сопровождается заметными турбулентными пульсациями. Поэтому в настоящее время термин «ламинарный подслой» представляется мало удачным.

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}w'}+\overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_{z=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial z^3}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial^2u'}{\partial z^2}w'}+2\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z}}+\overline{u'\frac{\partial^2w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial z^4}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{3}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial^2w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}.$$

Отсюда вытекает, что разложение Тэйлора профиля средней скорости по степеням z имеет вид

$$\bar{u}(z)=\frac{u_*^2}{\nu}z-c_4\frac{u_*^5}{\nu^4}z^4+c_5\frac{u_*^6}{\nu^5}z^5+\ldots,$$
$$f(z_+)=z_+-c_4z_+^4+c_5z_+^5+\ldots \qquad (5.20')$$

Здесь $c_4=-\frac{\nu^3}{24u_*^5}\left(\frac{\partial^3u'w'}{\partial z^3}\right)_{z=0}=-\frac{\nu^3}{8u_*^5}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial^2w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}$ (знак минус поставлен в связи с интуитивным представлением о том, что около стенки $\overline{u'w'}<0$ и поэтому $\left(\frac{\partial^3u'w'}{\partial z^3}\right)_{z=0}<0$), а $c_5=\frac{\nu^4}{120u_*^6}\left(\frac{\partial^4\overline{u'w'}}{\partial z^4}\right)_{z=0}$. Разложение (5.20′) было указано (по-видимому, впервые) в несколько другой форме Мерфри (1932) (см. также Таунсенд (1956)). Впоследствии некоторыми авторами (в частности, Дейслером (1955), Элродом (1957), Левичем (1959) и др.; ср. ниже стр. 238) приводились соображения в пользу того, что $c_4=0$, но они все не являются строгими. Имеющиеся экспериментальные данные также не позволяют надежно оценить коэффициент c_4 и, следовательно, не дают достаточных оснований определенно утверждать, что $c_4=0$. Тем не менее, равенство нулю второй и третьей производных $f(z_+)$ при $z_+=0$ уже достаточно для того, чтобы изменение скорости в значительной области было весьма близко к линейному, т. е. чтобы понятие о вязком подслое было практически оправданным.

Верхняя граница вязкого подслоя может быть условно определена, например, как значение z, при котором $\overline{u'w'}=0{,}1\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$; можно использовать также и некоторые другие определения, родственные этому. В любом случае толщина вязкого подслоя δ_v может зависеть только от параметров u_* и ν; поэтому она должна задаваться формулой $\delta_v=\alpha_v\frac{\nu}{u_*}=\alpha_vz_*$, где α_v — универсальная постоянная порядка единицы, точное значение которой, разумеется, будет зависеть от принятого определения и которую следует находить по данным экспериментов. То обстоятельство, что эта постоянная зависит от выбора определения, т. е. не задается вполне однозначно, является совершенно естественным, так как вязкий подслой не имеет резкой верхней границы, а плавно переходит в следующую область течения, в которой вязкое напряжение трения и напряжение Рейнольдса имеют одинаковый порядок величины. Тем не менее, так же как и в случае числового множителя, определяющего толщину пограничного слоя δ, интервал допустимых значений α_v здесь оказывается не очень широким; чаще всего в качестве α_v выбирается число 5, т. е. считается, что $\delta_v=5\frac{\nu}{u_*}$ (основой для такого выбора являются экспериментальные данные, приведенные ниже на рис. 25).

Перейдем теперь ко второму предельному случаю — к значениям z, значительно превосходящим $z_*=\frac{\nu}{u_*}$. Поскольку в развитом турбулентном потоке вдали от твердых стенок турбулентные напряжения во много раз превосходят по величине вязкие напряжения, то при достаточно большом z (скажем, при $z>\delta_l$) можно в уравнении (5.11) пренебречь членом $\rho\nu\frac{d\bar{u}}{dz}$ и считать, что $\tau_0=-\rho\overline{u'w'}$. Поэтому закон изменения средней скорости при $z>\delta_l$ также не должен зависеть от вязкости ν, а должен как-то определяться лишь значениями плотности ρ и потока импульса τ_0, проходящего сквозь жидкость (и равного суммарной силе взаимодействия жидкости со стенкой, приходящейся на единицу площади стенки). Существенно подчеркнуть, что мы не случайно говорим здесь не о самой скорости, а именно о законе изменения средней скорости. Дело в том, что, рассматривая лишь движение жидкости внутри слоя, в котором можно пренебречь вязкими напряжениями, мы ничего не можем сказать об абсолютных значениях скорости $\bar{u}(z)$, а можем изучать лишь разности $\bar{u}(z_1)-\bar{u}(z_2)$ значений скорости на двух высотах z_1 и z_2 в пределах этого слоя (и, в частности, прирост $\bar{u}(z)-\bar{u}(\delta_l)$ скорости в слое (z, δ_l), где $z>\delta_l$). Это вытекает из галилеевой инвариантности уравнений механики, согласно которой добавление ко всем скоростям $\bar{u}(z)$ при $z\geqslant\delta_l$ постоянного слагаемого не может изменить передаваемого через жидкость потока импульса τ_0. Следовательно, абсолютные значения скорости $\bar{u}(z)$ при $z>\delta_l$ не определяются лишь величинами τ_0 и z, а существенно зависят от значения $\bar{u}(\delta_l)$, т. е. от закона изменения скорости в слое $z\leqslant\delta_l$, на который уже влияет и вязкость ν. Однако значе-

ние $\frac{d\bar{u}}{dz}$ градиента средней скорости на высоте z при $z > \delta_l$ не должно зависеть от ν, т. е. должно быть функцией только параметров τ_0, ρ и z. Из этих параметров, как легко видеть, можно составить единственную комбинацию $\frac{\tau_0^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} z} = \frac{u_*}{z}$ размерности градиента скорости; следовательно, при $z > \delta_l$ должно выполняться соотношение

$$\frac{d\bar{u}(z)}{dz} = A\frac{u_*}{z}, \tag{5.21}$$

где A — универсальная безразмерная постоянная. Отсюда для профиля скорости при $z > \delta_l$ получается логарифмическая формула

$$\bar{u}(z) = Au_* \ln z + A_1, \tag{5.22}$$

где A_1 — новая постоянная, которая в силу сказанного выше может уже зависеть и от коэффициента вязкости ν. Слой жидкости, в котором выполняется соотношение (5.22), называется *логарифмическим пограничным слоем*; наличие этого слоя оказывается весьма существенным для многих задач, в которых встречаются турбулентные потоки, обтекающие твердые стенки. Универсальная формула (5.22) впервые была выведена Карманом (1930) и Прандтлем (1932б) с помощью совсем других (и притом различных) соображений. Впоследствии для нее был найден еще целый ряд других доказательств; некоторые из них представляют значительный интерес и будут воспроизведены ниже. Простой вывод этой формулы из соображений размерности, приведенный выше, был опубликован в 1944 г. в первом издании книги Ландау и Лифшица (1953); см. также Сквайр (1948).

Вместо соображений размерности при выводе формулы (5.22) можно воспользоваться инвариантностью уравнений гидродинамики идеальной жидкости (описывающих рассматриваемое движение при $z > \delta_l$) относительно преобразований подобия $x \to kx$, $y \to ky$, $z \to kz$ и $t \to kt$. Поскольку эти преобразования переводят полупространство $z > 0$ в себя, естественно допустить, что относительно них будут инвариантны и все статистические характеристики турбулентности в этом полупространстве (в той степени, в которой они не зависят от вязкости). Но, как мы уже видели, пренебрегая вязкостью (т. е. отвлекаясь от граничного условия $u = 0$ при $z = 0$), мы можем рассматривать лишь относительные скорости $\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2)$. Поскольку динамическая

скорость при преобразованиях подобия, очевидно, не изменяется, то согласно принятому допущению об инвариантности безразмерное отношение $\frac{\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)}{u_*}$ при не слишком малых z_1 и z_2 может зависеть лишь от отношения $\frac{z_2}{z_1}$:

$$\frac{\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)}{u_*} = g\left(\frac{z_2}{z_1}\right). \tag{5.23}$$

Из определения (5.23) функции $g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ вытекает, что $g\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = g\left(\frac{z_3}{z_2}\right) + g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$; последнее соотношение в силу равенства $\frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_1}$ можно записать также в виде

$$g(\xi_1 \cdot \xi_2) = g(\xi_1) + g(\xi_2). \tag{5.24}$$

Нетрудно показать, что единственным непрерывным решением функционального уравнения (5.24) является логарифмическая функция $g(\xi) = A \ln \xi$; таким образом, мы приходим к соотношению

$$\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = Au_* \ln \frac{z_2}{z_1}, \tag{5.22'}$$

эквивалентному (5.22).

Из соображений размерности ясно, что высота δ_l нижней границы логарифмического пограничного слоя должна определяться формулой $\delta_l = \alpha_l \frac{\nu}{u_*}$, где α_l — еще одна универсальная безразмерная постоянная (определяемая примерно с той же степенью точности, что и постоянная α_v). Эмпирические данные рис. 25 показывают, что допустимо считать $\alpha_l = 30$. Из сравнения формул (5.22) и (5.13) вытекает, что постоянная A_1 должна быть представима в виде $A_1 = Au_* \ln \frac{u_*}{\nu} + Bu_*$, где B — безразмерная универсальная постоянная; при этом (5.22) можно переписать в виде

$$\bar{u}(z) = u_*\left(A \ln \frac{zu_*}{\nu} + B\right) \quad \text{при} \quad z > \alpha_l \frac{\nu}{u_*}. \tag{5.25}$$

Отсюда видно, что

$$f(z_+) = A \ln z_+ + B \quad \text{при} \quad z_+ > \alpha_l. \tag{5.25'}$$

Заметим еще, что традиционно вместо коэффициента A чаще используется величина

$$\varkappa = \frac{1}{A},$$

называемая обычно *постоянной Кармана*. Заменяя A на $\frac{1}{\varkappa}$ и обозначая $e^{-\varkappa B}$ через β, формулу (5.25) можно также переписать в виде

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z u_*}{\beta \nu}. \qquad (5.25'')$$

Численные значения постоянных A $\left(\text{или } \varkappa = \frac{1}{A}\right)$ и B (или $\beta = e^{-\varkappa B}$), входящих в формулы (5.25)—(5.25''), могут быть определены по данным экспериментов. Согласно сказанному в п. 5.2, соответствующие измерения могут производиться и в гладких трубах, и в прямоугольных каналах с гладкими стенками, и в пограничном слое на гладких пластинках. Первые пригодные для этой цели тщательные измерения распределения средней скорости и напряжения трения τ_0 были произведены Никурадзе (1932) в потоках воды в прямых гладких трубах различных радиусов при $\mathrm{Re} = \frac{U_{\mathrm{ср}} D}{\nu}$, меняющемся в пределах от $4 \cdot 10^3$ до $3{,}2 \cdot 10^6$. Полученные им данные показывают, что действительно для значительной части течения, начинающейся на расстоянии порядка $30 \frac{\nu}{u_*}$ от стенки и продолжающейся почти до центра трубы, распределение средней скорости может быть с очень большой степенью точности описано формулой вида (5.25). Для коэффициентов A и B в этой формуле Никурадзе дал даже два набора значений: при значениях $A = 2{,}4$, $B = 5{,}8$ $\left(\text{т. е. } \varkappa = 0{,}417,\ \beta \approx 0{,}09 \approx \frac{1}{11}\right)$ достигалось наилучшее совпадение формулы (5.25) с опытными данными, относящимися к области $30 \frac{\nu}{u_*} < z < 1000 \frac{\nu}{u_*}$, значительно не доходящей до центра трубы, а значения $A = 2{,}5$, $B = 5{,}5$ $\left(\text{т. е. } \varkappa = 0{,}40,\ \beta \approx 0{,}11 \approx \frac{1}{9}\right)$ оказались наилучшими при применении формулы (5.25) ко всей области от $z = 30 \frac{\nu}{u_*}$ и до центра трубы. В дальнейшем подобные же измерения много раз выполнялись и для течений в трубах, и для течений в плоских каналах, и для пограничных слоев на пластинках; при этом формула (5.25) во всех случаях подтверждалась достаточно надежно, хотя в получаемых значениях коэффициентов A и особенно B и имеется небольшой разброс (см., например, обзорную статью Хинце (1962), содержащую сводку боль-

шого числа данных о величинах A и B) [1]. Значительное число данных, относящихся ко всем трем перечисленным типам течений,

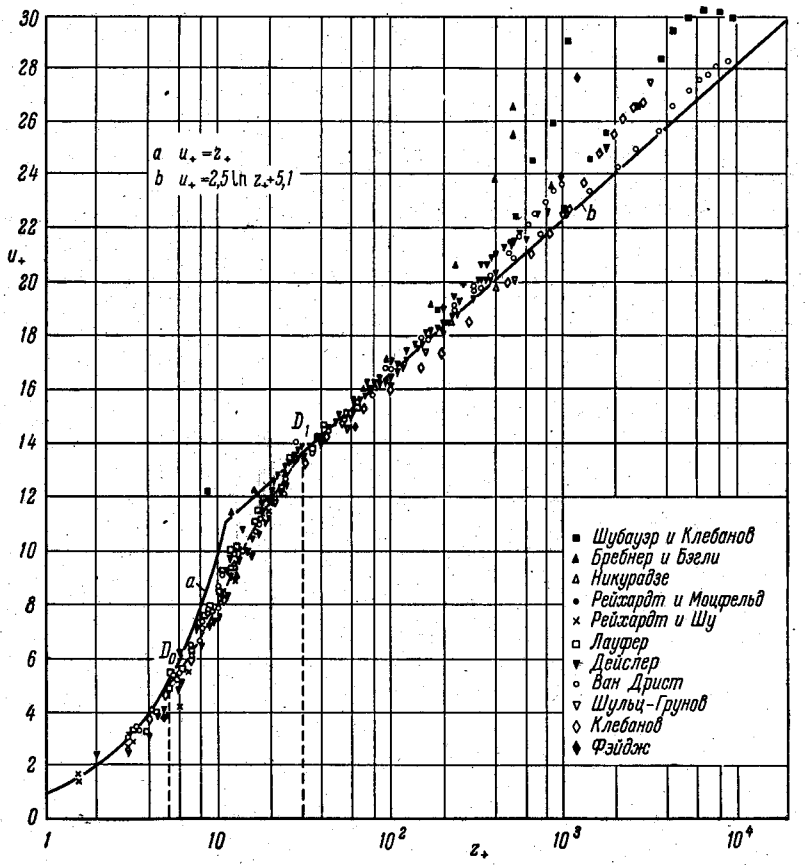


Рис. 25. Универсальный безразмерный профиль средней скорости турбулентного течения около гладкой стенки по данным измерений в трубах, каналах и пограничном слое (по Кестину и Ричардсону (1963)).

Разными значками на рисунке отмечены данные разных экспериментаторов.

собрано на сводном рис. 25 (заимствованном из обзора Кестина и Ричардсона (1963)). Мы видим, что при $z < 5 \frac{\nu}{u_*}$ все

[1]) Напомним, что согласно приведенному выше теоретическому выводу значения A и B должны являться универсальными постоянными лишь для идеализированного плоскопараллельного течения с постоянным напряжением трения τ_0. Поэтому для лабораторных наблюдений над реальными

наблюденные значения $u_+ = \frac{\bar{u}}{u_*}$ неплохо укладываются на кривую $u_+ = \frac{zu_*}{\nu}$ формулы (5.20), а при $500\frac{\nu}{u_*} < z < 30\frac{\nu}{u_*}$ — на кривую $u_+ = 2{,}5\ln\frac{zu_*}{\nu} + 5{,}1$, соответствующую формуле (5.25) с коэффициентами $A = 2{,}5$, $B = 5{,}1$ (т. е. $\varkappa = 0{,}4$, $\beta = 0{,}13$), рекомендованными Коулсом (1955) и являющимися средними среди значений этих коэффициентов, получавшихся у различных исследователей [1]).

В промежуточной области $5\frac{\nu}{u_*} < z < 30\frac{\nu}{u_*}$ экспериментальные значения отношения $\frac{\bar{u}(z)}{u_*}$, приведенные на рис. 25, явно уклоняются и от значений, даваемых формулой (5.20), и от тех, которые должны получаться по формуле (5.25). Согласно экспериментальным данным, значения функции $f(z_+)$ в этой области можно изобразить в виде гладкой кривой, плавно переходящей в кривую (5.20) в точке $z_+ = 5$ и в кривую (5.25′) с $A = 2{,}5$, $B = 5{,}1$ в точке $z_+ = 30$ (пунктирная кривая на рис. 25). Заметим, впрочем, что отклонение пунктирной кривой от ломаной, изображенной на рис. 25 сплошной линией, не очень велико, так что в тех случаях, когда не требуется большая точность, допустимо даже считать, что вплоть до значения $z_+ = 11{,}1$ (равного абсциссе точки пересечения кривых $u_+ = z_+$ и $u_+ = 2{,}5\ln z_+ + 5{,}1$) профиль средней скорости задается формулой (5.20), а при $z_+ > 11{,}1$ — формулой (5.25). Это предположение, очевидно, означает, что мы пренебрегаем промежуточной зоной, в которой величины $\rho\nu\frac{d\bar{u}}{dz}$ и $-\rho\overline{u'w'}$ имеют одинаковый порядок величины, и считаем, что вслед за вязким подслоем (который теперь уже целесообразно считать имеющим толщину $\delta_v = \delta_l = 11{,}1\frac{\nu}{u_*}$) непосредственно следует логарифмический пограничный слой, в котором вязкие напряжения пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями Рейнольдса.

Заметим еще, что с точки зрения представлений о турбулентной вязкости K (см. формулу (5.5)) вязкий подслой, очевидно,

потоками, в которых область применимости формулы (5.25) определялась «на глаз», небольшой разброс эмпирических значений этих коэффициентов является вполне объяснимым, даже если не учитывать неизбежных погрешностей измерений и обработки.

[1]) Близкие значения $A = 2{,}44$ и $B = 4{,}9$ были предложены Клаузером (1956) на основании обработки данных большого числа опытов, относящихся, однако, только к пограничному слою на плоской пластинке.

можно определить как подслой, в котором допустимо считать, что $K \equiv 0$ (т. е. что эффективная вязкость равна $\nu = \text{const}$). Точно так же логарифмический слой можно определить как слой, в котором молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной вязкостью, задаваемой формулой

$$K = \frac{u_* z}{A} = \varkappa u_* z, \qquad \varkappa \approx 0{,}4. \tag{5.26}$$

В таком случае пунктирной кривой на рис. 25, очевидно, будет отвечать слой, в котором эффективная вязкость как-то плавно изменяется от значения, близкого к ν, при $z = 5\nu/u_*$ и до значения $30\varkappa\nu \approx 12\nu$ при $z = 30\nu/u_*$.

До сих пор мы говорили только о профиле средней скорости турбулентного потока; однако физические соображения, приведшие нас к универсальному закону турбулентности вблизи стенки и к понятию логарифмического пограничного слоя, могут быть с тем же правом применены и к исследованию любых других одноточечных моментов поля скорости вблизи плоской стенки. Все эти моменты в пределах слоя постоянного напряжения трения, очевидно, могут зависеть лишь от параметров z, τ, ν и ρ, т. е. должны представляться в виде произведения некоторой степени динамической скорости u_* на универсальную функцию (свою для каждого момента) от безразмерного расстояния $z_+ = zu_*/\nu$. При достаточно больших значениях z_+ статистический режим турбулентных пульсаций не должен уже зависеть и от коэффициента вязкости ν; поэтому в случае центральных моментов (не зависящих от средней скорости $\bar{u}$) соответствующие универсальные функции должны стремиться к постоянным значениям при $z_+ \to \infty$. Рассмотрим в качестве примера одноточечные вторые моменты пульсаций u', v' и w'. Таких моментов всего имеется шесть, но два из них (а именно $\overline{u'v'}$ и $\overline{v'w'}$) тождественно обращаются в нуль вследствие симметрии нашей турбулентности относительно плоскости Oxz, так что остается лишь четыре ненулевых момента: $\overline{u'^2} = \sigma_u^2$, $\overline{v'^2} = \sigma_v^2$, $\overline{w'^2} = \sigma_w^2$ и $\overline{u'w'}$. Отсюда ясно, что наряду с формулой (5.13) мы будем иметь также четыре формулы вида

$$\begin{gathered} \sigma_u = u_* f_1(z_+), \quad \sigma_v = u_* f_2(z_+), \\ \sigma_w = u_* f_3(z_+), \quad -\overline{u'w'} = u_*^2 f_4(z_+), \end{gathered} \tag{5.27}$$

содержащие четыре новых универсальных функции. Вместо функции $f_4(z_+)$ можно использовать функцию $f_5(z_+) = f_4/f_2 f_3$, описывающую изменение с высотой коэффициента корреляции

между u' и w':

$$-r_{uw}=\frac{-\overline{u'w'}}{(\overline{u'^2}\,\overline{w'^2})^{1/2}}=f_5(z_+).$$

В пределах логарифмического пограничного слоя функцию $f_4(z_+)$, очевидно, можно считать тождественно равной единице, а функции f_1, f_2, f_3 и f_5 — принимающими постоянные значения $f_1(\infty)=A_1$, $f_2(\infty)=A_2$, $f_3(\infty)=A_3$ и $f_5(\infty)=A_5=(A_1A_3)^{-1}$. При приближении к стенке функции $f_1, \ldots, f_4$ стремятся к нулю, причем их разложения в ряд Тэйлора в точке $z_+=0$ имеют вид

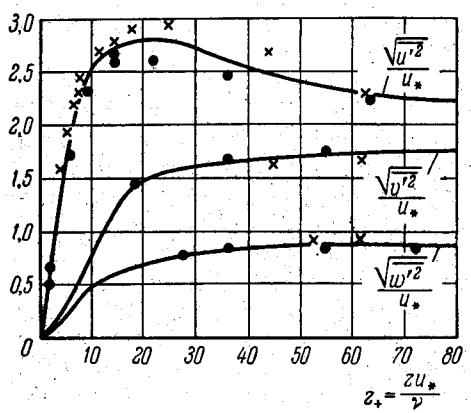


Рис. 26. Универсальные безразмерные профили интенсивности флюктуаций трех компонент скорости в течении около гладкой стенки по данным Клебанова (×) и Лауфера (●).

$$f_1(z_+)=a_1z_+ + b_1z_+^2 + \ldots,$$
$$f_2(z_+)=a_2z_+ + b_2z_+^2 + \ldots,$$
$$f_3(z_+)=a_3z_+^2 + b_3z_+^3 + \ldots,$$
$$f_4(z_+)=a_4z_+^3 + b_4z_+^4 + \ldots$$

(так как $u'=v'=w'=\frac{\partial w'}{\partial z}=0$ при $z=0$). Коэффициенты a_4 и b_4 здесь просто связаны с коэффициентами c_4 и c_5 равенства (5.20′), так как вблизи стенки $f_4(z_+)=1-f'(z_+)$ (в силу уравнения (5.10)). Точный вид функций $f_1, \ldots, f_5$ не может быть установлен теоретически, но приближенно его можно найти, исходя из данных измерений Лауфера (1954) и Клебанова (1955) (см. рис. 26 и 27). Мы видим, что данные измерений в трубе и в пограничном слое на пластинке в целом неплохо согласуются друг с другом; в частности, для постоянных A_1, A_2 и A_3 в обоих случаях получаются примерно одинаковые значения

$$A_1\approx 2{,}3, \quad A_2\approx 1{,}7, \quad A_3\approx 0{,}9$$

(близкие значения постоянных A_1 и A_3 были получены также Гурвичем (1960) и Зубковским (1962) при измерениях в атмосфере; ср. ниже п. 8.5 и, в частности, рис. 76). Обработав имеющиеся данные измерений пульсаций скорости в непосредственной близости от стенки, можно также приближенно оценить (пока еще лишь с очень невысокой степенью точности) значения коэффициентов $a_1, \ldots, a_4$; при этом оказывается, что

$$a_1\approx 0{,}3, \quad a_2\approx 0{,}04, \quad a_3\approx 0{,}01, \quad a_4\approx 0{,}0006$$

(см. Лауфер (1954), Клебанов (1955), Таунсенд (1956)).

Что же касается моментов пульсаций скорости выше второго порядка, то о них пока имеется еще заметно меньше данных,

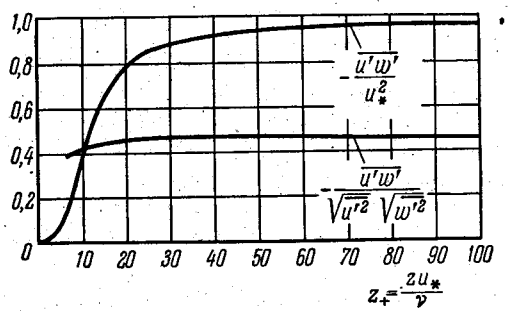


Рис. 27. Универсальные функции $f_4(z_+)$ и $f_5(z_+)$ по данным измерений Лауфера.

чем о величинах (5.27). Укажем, однако, что в работе Конт-Белло (1963) можно найти тем не менее предварительные эмпирические графики универсальных функций $f_6(z_+)=\overline{u'^3}/(\overline{u'^2})^{3/2}$ и $f_7(z_+)=\overline{u'^4}/(\overline{u'^2})^2$, определяющих асимметрию и эксцесс компоненты u'.

В некоторых задачах (в первую очередь при расчете турбулентной теплопередачи через жидкость; см. ниже п. 5.7) сплошная линия рис. 25 оказывается явно недостаточно точной, а гладкая пунктирная линия — очень неудобной. В этих задачах желательно иметь аналитическую формулу, описывающую поведение профиля средней скорости в промежуточной области $\delta_v<z<\delta_l$ и гладко переходящую в предельные выражения (5.20) и (5.25) при $z\leqslant\delta_v=\alpha_v\nu/u_*$ и соответственно при $z\geqslant\delta_l=\alpha_l\nu/u_*$. Целый ряд формул такого рода для функций $f(z_+)$ различной степени сложности и был предложен в разное время разными авторами. Одной из первых среди них является формула Кармана (1934, 1939), предположившего, что $f(z_+)=A_1\ln z_+ + B_1$ при $\alpha_v<z_+<\alpha_l$, причем коэффициенты A_1 и B_1, отличающиеся от A и B, таковы, что значение суммы $A_1\ln z_+ + B_1$ при $z_+=\alpha_v$ и при $z_+=\alpha_l$ оказывается совпадающим со значениями при таком z_+ функции (5.20) и соответственно (5.25′) (т. е., иначе говоря, предложившего соединить прямой линией точки D_0 и D_1 на рис. 25). В дальнейшем Гофман (1940), Рейхардт (1940) и Левич (1959), § 4, предложили также иные интерполяционные формулы для значений $f(z_+)$ при $\alpha_v<z_+<\alpha_l$, несколько лучше соответствующие данным измерений. Другая идея использовалась в работах Сквайра (1948), Лойцянского (1958) и в очень близких друг к другу работах Ротта (1950), Худимото (1941, 1951) и Майлса (1957): здесь область течения делилась уже лишь на два слоя $z_+\leqslant\alpha_v$ и $z_+>\alpha_v$, причем в первой из них принималась обычная формула (5.20), но зато во второй функции $f(z_+)$ задавалась

более сложным, чем (5.25′), аналитическим выражением, асимтотически переходившим в (5.25′) при $z_+ \to \infty$ и гладко соединяющимся с выражением (5.20) в точке $z_+ = \alpha_v$. В противоположность этому Хама (1953), Дейслер (1955, 1959), Рэнни (1956), Левич (1959), § 25, Цай Ко-ен (1961) и Тьен и Васан (1963) разбивали поток на слои $z_+ < \alpha_l$ и $z_+ \geqslant \alpha_l$ и использовали во втором из них обычную формулу (5.25′), а в первом — более сложное, чем (5.20), выражение для $f(z_+)$. В работах Линя, Маултона и Патнема (1953), Лойцянского (1960, 1962а) и Карра (1962) рассматривалась снова трехслойная модель (т. е. предполагалось, что функция $f(z_+)$ задается разными формулами при $z_+ < \alpha_v$, при $\alpha_v \leqslant z_+ \leqslant \alpha_l$ и при $z_+ > \alpha_l$), но в отличие от работы Кармана в первом из этих интервалов для $f(z_+)$ принималась более сложная, чем (5.20), формула (разная у разных авторов). Помимо того Лойцянский (1960, 1962а) предложил также и некоторое единое (но весьма сложное) выражение для функции $f(z_+)$, годное при всех значениях z_+. Более простые аппроксимационные формулы, описывающие поведение функции $f(z_+)$ во всей области постоянства напряжения трения τ и неплохо согласующиеся со всей совокупностью эмпирических данных, представленных на рис. 25, были указаны Рейхардтом (1951а), Ван Дристом (1956) и Споялингом (1961). Обзор работ этого направления содержится в книге Хинце (1959), § 7.4, и в статьях Лойцянского (1962а), Ротта (1962б) и Кестина и Ричардсона (1963).

Широкую дискуссию вызвал вопрос о детальном поведении функции $f(z_+)$ при $z_+ \to 0$. В некоторых из перечисленных работ, как уже говорилось выше, принималось, что $f(z_+) = z_+$ при $z_+ \leqslant \alpha_v$, т. е. считалось, что все производные функции $f(z_+)$ выше первого порядка обращаются в нуль в точке $z_+ = 0$; это предположение в дальнейшем рядом авторов было подвергнуто обоснованной критике. Согласно формуле, предложенной Рэнни, $f(z_+) = z_+ + c_3 z_+^3 + \ldots$ при $z_+ \to 0$, где $c_3 \neq 0$ — этот результат, очевидно, противоречит точной формуле (5.20′). В то же время формулы Рейхардта, Линя, Маултона и Патнема, Карра и Тьена и Васана приводят к разложению (5.20′) с $c_4 \neq 0$, а согласно Хама, Дейслеру, Левичу, Лойцянскому и Цай Ко-ену в этом разложении $c_4 = 0$; наконец, Споялдинг приводит сразу два разных выражения для $f(z_+)$ — с $c_4 \neq 0$ и с $c_4 = 0$. Большое внимание к вопросу о поведении $f(z_+)$ при $z_+ \to 0$ объясняется тем, что при достаточно большом числе Прандтля это поведение существенно влияет на турбулентный теплообмен; об этом еще будет подробнее сказано в п. 5.7.

Заметим еще, что в большинстве перечисленных работ за основу бралась не сама функция $f(z_+)$, а зависимость от z_+ эффективного коэффициента турбулентной вязкости $\nu + K = \tau/\rho \dfrac{d\bar{u}}{dz} = \nu [f'(z_+)]^{-1}$. Предлагаемый вид этой зависимости иногда просто подбирался на основе эмпирических данных, но чаще обосновывался теоретически с помощью рассуждений, близких по духу к так называемым полуэмпирическим теориям турбулентности (см. ниже п. 5.8) и использующих те или иные специальные гипотезы, представляющиеся интуитивно довольно правдоподобными. Надо, однако, иметь в виду, что ни одна из использовавшихся здесь гипотез не была строго доказана; в то же время разброс кривых $\bar{u}_+ = f(z_+)$, предложенных различными авторами, имеет тот же порядок величины и тот же характер, что и разброс экспериментальных точек на рис. 25. Поэтому в настоящее время нет оснований для выбора какой-то одной «наилучшей» формулы для $f(z_+)$ и при выборе между различными вариантами таких формул приходится руководствоваться лишь степенью их удобства для решения той или иной конкретной задачи.

Еще менее удовлетворительно обстоит в настоящее время дело с формулами для функций $f_1, \ldots, f_4$ и др., описывающих статистический режим пульсации скорости вблизи стенки. Здесь фактически можно указать лишь на работы Эйнштейна и Ли (1956) и Стернберга (1962), предложивших две различные физические модели процесса возникновения пульсаций скорости в пределах вязкого подслоя и использовавших эти модели для некоторых сугубо предварительных расчетов статистических характеристик пульсаций. Любопытно отметить, однако, что, несмотря на совсем разный характер предложенных моделей, результаты расчета в обоих случаях оказались во многом совпадающими с имеющимися эмпирическими данными о пульсациях скорости (ср. Кистлер (1962)).

5.4. Влияние неровностей стенки; параметр шероховатости и высота вытеснения

Перейдем теперь к рассмотрению турбулентного течения около шероховатой стенки с неровностями высоты h_0, не малой по сравнению с $\dfrac{\nu}{u_*}$. В этом случае профиль средней скорости будет описываться формулой (5.15), содержащей универсальную функцию f, зависящую от целого ряда параметров. Так как функции многих переменных обычно бывают мало удобны для практических применений, то может показаться, что использование соображений размерности в данном случае не очень плодотворно. На самом деле, однако, дело обстоит вовсе не так плохо.

Будем считать, что $h_0 \gtrsim \dfrac{\nu}{u_*}$, и рассмотрим опять отдельно случаи малых и больших значений z. При малых z, сравнимых с длиной h_0, следует ожидать, что средняя скорость $\bar{u}(z)$ будет существенно зависеть от формы и взаимного расположения неровностей стенки и будет различной над вершинами бугров и над впадинами между ними, так что здесь действительно нельзя надеяться на нахождение каких-то простых общих закономерностей. Во многих случаях, однако, основной интерес представляет распределение средней скорости не слишком близко к стенке — на расстояниях z, больших и по сравнению с динамической длиной $z_* = \dfrac{\nu}{u_*}$, и по сравнению со средней высотой h_0 неровностей стенки. Естественно думать, что на таких расстояниях от стенки ни вязкость, ни локальные свойства поверхности стенки уже не будут сказываться: существенным здесь будет лишь наличие постоянного потока импульса вдоль отрицательного направления оси Oz со «стоком» на плоскости $z = 0$. Поэтому оба вывода формулы (5.22), приведенные на стр. 230—231, в применении к потоку в полупространстве, ограниченном гладкой стенкой, при $z \gg h_0 > \dfrac{\nu}{u_*}$ полностью сохраняют силу и в случае шероховатой стенки. Следовательно,

$$\bar{u}(z) = Au_* \ln z + A_1 \quad \text{при} \quad z \gg h_0. \tag{5.22а}$$

Так как постоянная $A=\frac{1}{\varkappa}$ в (5.22а) задает значение градиента средней скорости, отвечающего заданному потоку импульса $\tau_0=\rho u_*^2$, то она и в случае шероховатой стенки должна иметь то же значение ($\approx 2{,}5$), что и в случае гладкой стенки. Что же касается коэффициента A_1, то он определяется граничным условием на нижней границе области применимости формулы (5.22а); следовательно, он зависит от закона изменения средней скорости в непосредственной окрестности стенки, существенно различающегося для гладких и шероховатых стенок. Заметим, что начало отсчета расстояний z при $z\gg h_0$ может быть произвольно выбрано между основаниями и вершинами бугорков стенки без заметного изменения результатов; практически оно обычно выбирается из условия наилучшего совпадения наблюденного профиля $\bar{u}(z)$ с логарифмической формулой (5.22а) (см. по этому поводу ниже стр. 248).

Формула (5.22а) для профиля скорости над шероховатой стенкой может быть несколькими различными способами переписана в безразмерной форме. Можно, разумеется, воспользоваться записью (5.25), применявшейся в случае гладкой стенки, т. е. положить

$$\bar{u}(z)=u_*\left(A\ln\frac{zu_*}{\nu}+B\right)\quad\text{при}\quad z\gg h_0. \tag{5.25а}$$

Однако при этом коэффициент B теперь уже не будет универсальной постоянной, а будет зависеть от безразмерных параметров, определяющих размер, форму и расположение неровностей стенки: $B=B\left(\frac{h_0u_*}{\nu},\ \alpha,\ \beta,\ \ldots\right)$. Кроме того, запись формулы (5.22а) в виде (5.25а) хоть и удобна для сопоставления профилей средней скорости около гладких и шероховатых стенок, но мало естественна (во всяком случае, при $h_0\gg\frac{\nu}{u_*}$). В самом деле, правая часть (5.25а) содержит ν, в то время как можно ожидать, что при $h_0\gg\nu/u_*$ профиль средней скорости (а следовательно, и значение коэффициента A_1 в (5.22а)) вообще не будет зависеть от вязкости, а будет определяться лишь размерами и формой неровностей стенки (полностью определяющими характер течения в самом нижнем слое). Поэтому при $h_0\gg\frac{\nu}{u_*}$ целесообразнее представить профиль средней скорости в виде

$$\bar{u}(z)=u_*\left(A\ln\frac{z}{h_0}+B'\right). \tag{5.28}$$

При этом уже можно ожидать, что при достаточно большом $\frac{h_0u_*}{\nu}$ значение коэффициента $B'=B+A\ln\frac{h_0u_*}{\nu}$ не будет меняться при изменении параметра $\frac{h_0u_*}{\nu}$, содержащего вязкость ν (т. е. будет функцией лишь от параметров α, β, ..., описывающих форму и взаимное расположение неровностей). Наконец, можно еще попытаться выразить постоянную A_1 в формуле (5.22а) непосредственно через характеристики трения жидкости о стенку, зависящего неизвестным нам образом от геометрических свойств стенки. В качестве безразмерной характеристики трения обычно принимается коэффициент сопротивления трения

$$c_f=\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}=2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2, \tag{5.29}$$

где U — характерная скорость потока. Однако в рассматриваемом случае идеализированного течения в безграничном полупространстве характерная скорость отсутствует, так что здесь речь может идти лишь о зависящем от высоты (и поэтому мало удобном) безразмерном коэффициенте $c_f(z)=2\left[\frac{u_*}{\bar{u}(z)}\right]^2$. Но если мы подставим значение $\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}}$ в формулу (5.22′), то получим следующий закон изменения $c_f(z)$ с высотой:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_2)}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_1)}}=A\ln\frac{z_2}{z_1}.$$

Отсюда видно, что в пределах логарифмического пограничного слоя

$$z_1e^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_1)}}}=z_2e^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_2)}}}.$$

Таким образом, величина

$$z_0=ze^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}}}=ze^{-\frac{\sqrt{2}\varkappa}{\sqrt{c_f(z)}}}, \tag{5.30}$$

имеющая размерность длины, уже не зависит от z. Эта величина является объективной характеристикой динамического взаимодействия потока со стенкой (существенно зависящего от неровностей стенки); ее называют *параметром шероховатости, динамической шероховатостью* или даже просто *шероховатостью*. Подставляя теперь формулу $\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}=\left[A\ln\frac{z}{z_0}\right]^{-1}$

в равенство $\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\sqrt{\frac{1}{2} c_f(z)}}$, получим

$$\bar{u}(z) = Au_* \ln \frac{z}{z_0} = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z}{z_0}; \qquad (5.31)$$

следовательно, $z_0 = \frac{\nu}{u_*} e^{-\varkappa B} = h_0 e^{-\varkappa B'}$. Согласно (5.31), параметр шероховатости можно также определить как ту высоту, на которой средняя скорость потока обратилась бы в нуль, если бы логарифмическая формула для $\bar{u}(z)$ была применима вплоть до этой высоты (на самом деле, разумеется, логарифмическая формула перестает действовать уже при значительно бо́льших значениях z).

Для выяснения зависимости величин B, B' и z_0 от высоты бугорков стенки надо иметь данные опытов, в которых изменялся бы только размер, но не форма и не взаимное расположение этих бугорков. Очень тщательные опыты такого рода были произведены Никурадзе (1933) в круглых трубах, стенки которых были обклеены песчинками заданного размера (меняющегося от опыта к опыту), по возможности тесно примыкающими одна к другой. Полученная в этих опытах зависимость коэффициента B' в формуле (5.28) от $\frac{h_0 u_*}{\nu}$ показана на рис. 28 (светлые и темные точки здесь соответствуют двум разным способам определения B', первый из которых опирался на непосредственное сравнение наблюденного распределения скорости с формулой (5.28), а второй будет описан на стр 255). Мы видим, что для однородной песочной шероховатости при $\lg \frac{h_0 u_*}{\nu} \leqslant 0{,}6$ (где lg — десятичный логарифм), т. е. при $\frac{h_0 u_*}{\nu} \leqslant 4$, имеет место формула вида

$$B' = A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + B, \quad \text{где} \quad A = 2{,}5, \quad B = \text{const} (\approx 5{,}5).$$

Таким образом, при $h_0 \leqslant 4 \frac{\nu}{u_*}$ профиль скорости вовсе не зависит от h_0, т. е. стенка может рассматриваться как *динамически гладкая* (заметим, что при таких h_0 бугорки стенки будут полностью погружены в вязкий подслой; этим, очевидно, и объясняется то, что здесь они никак не влияют на течение в области логарифмического пограничного слоя). При $0{,}6 \leqslant \lg \frac{h_0 u_*}{\nu} \leqslant 1{,}7$, т. е. при $4 \leqslant \frac{h_0 u_*}{\nu} \leqslant 60$, имеет место промежуточный режим,

при котором вершины бугорков выступают из вязкого подслоя и создают дополнительные возмущения, приводящие к тому, что оба коэффициента B и B' как-то зависят от $\frac{h_0 u_*}{\nu}$; стенку в этом случае следует считать *динамически слегка шероховатой*. Наконец, при $\lg \frac{h_0 u_*}{\nu} > 1{,}7$, т. е. при $\frac{h_0 u_*}{\nu} > 60$, вязкий подслой

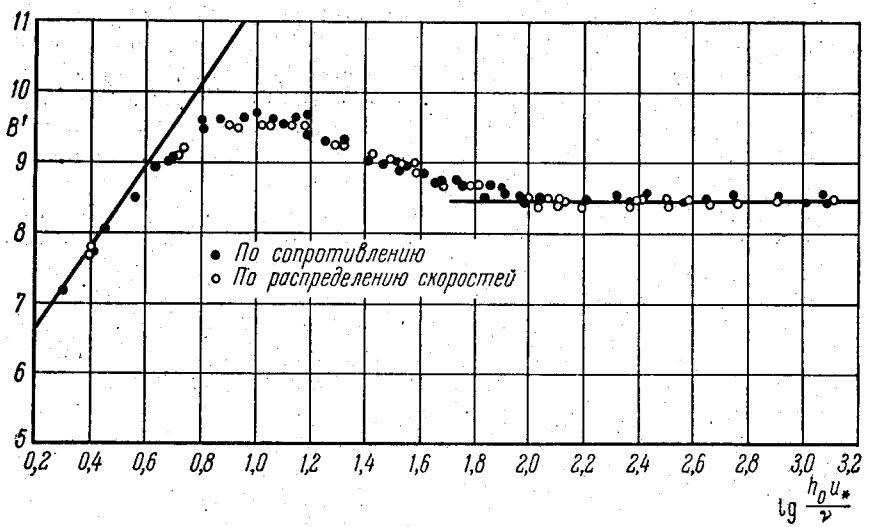


Рис. 28. Зависимость коэффициента B' от $\frac{h_0 u_*}{\nu}$ по данным Никурадзе (1933).

практически перестает существовать, и течение в непосредственной близости от стенки целиком состоит из совокупности вихрей, возникающих при обтекании отдельных бугорков; здесь распределение средней скорости $\bar{u}(z)$ оказывается не зависящим от коэффициента вязкости ν, и постоянным оказывается коэффициент B' (а именно, $B' \approx 8{,}5$ согласно данным рис. 28). В этом последнем случае стенку можно назвать *динамически вполне шероховатой*. Разумеется, будет ли стенка динамически гладкой, слегка шероховатой или вполне шероховатой, зависит не только от характера ее поверхности, но и от величин u_* и ν (т. е. в конечном счете от числа Рейнольдса течения). Значения трех параметров B, B' и z_0 для динамически гладкой и динамически вполне шероховатой стенок по данным Никурадзе (относящимся лишь к однородной песочной шероховатости)

оказываются равными:

$$B \approx 5{,}5, \quad B' \approx 2{,}5 \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + 5{,}5, \quad z_0 \approx \frac{1}{9} \frac{\nu}{u_*} \text{ (гладкая стенка)},$$

$$B \approx -2{,}5 \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + 8{,}5, \quad B' \approx 8{,}5, \quad z_0 = \frac{h_0}{30} \text{ (вполне шероховатая стенка)}.$$

Имея достаточно полные данные о логарифмическом пограничном слое около стенки, покрытой песочной шероховатостью, можно сопоставить шероховатости любого другого типа высоту h_s *эквивалентной песочной шероховатости* (которой при одинаковом τ_0 отвечает тот же логарифмический профиль средней скорости). Для ряда искусственных динамически вполне шероховатых поверхностей, покрытых геометрически правильными неоднородностями, эта высота h_s была экспериментально определена Шлихтингом (1936) (см. также Шлихтинг (1951), гл. XX, § 7). В книге Шлихтинга (1951) можно найти также дополнительные данные и библиографические указания, относящиеся к вопросу о высоте эквивалентной песочной шероховатости как для искусственных шероховатых поверхностей, так и для ряда обычных применяющихся в технике поверхностей (бетонных, чугунных, стальных и т. д.), оказывающихся во многих случаях динамически вполне шероховатыми.

Другой способ описания логарифмических профилей около стенок с различной шероховатостью состоит в указании соответствующего уменьшения средней скорости $\delta\bar{u}$ по сравнению с течением над гладкой стенкой при том же напряжении трения τ_0. Наличие неровностей всегда приводит к сглаживанию профиля скорости в непосредственной близости от стенки, т. е. замедляет нарастание средней скорости при очень малых значениях z. Поэтому в случае шероховатой стенки значение скорости на нижней границе логарифмического пограничного слоя (а следовательно, и во всем этом слое) оказывается меньше, чем в случае гладкой стенки. Используя формулы (5.25) и (5.28), мы можем написать

$$\frac{\delta\bar{u}}{u_*} = A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + B - B', \qquad (5.32)$$

где $A = \text{const} \approx 2{,}5$, $B = \text{const} \approx 5$. Отсюда видно, что $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ не зависит от z и что для динамически вполне шероховатой стенки эта величина при изменении $\frac{h_0 u_*}{\nu}$ будет линейно зависеть от $\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$. При переходе же к слегка шероховатым стенкам

зависимость величины $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ от $\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$ меняет свой вид, и при значениях h_0, при которых стенка становится динамически гладкой, разность $\delta\bar{u}$ становится равной нулю. Значительное число эмпирических данных о $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ (т. е. о значениях коэффициента B') для различных типов шероховатости, найденных

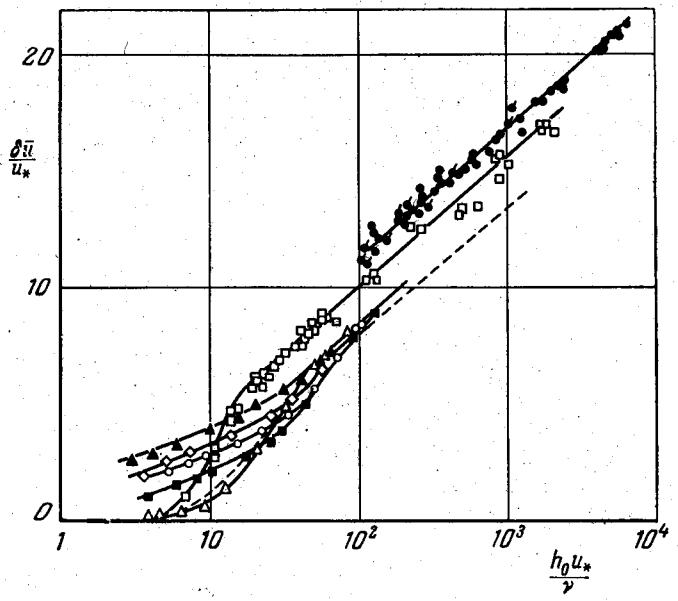


Рис. 29. Влияние шероховатости стенки на относительное уменьшение средней скорости $\delta\bar{u}/u_*$ (по Клаузеру (1956)).

Разными значками на рисунке отмечены данные, относящиеся к разным типам шероховатости. Пунктирная линия соответствует данным для однородной песочной шероховатости.

по результатам измерений в пограничных слоях на пластинках, было собрано Хама (1954) (см. также Клаузер (1956)) и Робертсоном (1957). На рис. 29, заимствованном из статьи Клаузера (1956), представлены полученные значения $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$. Мы видим, что при достаточно больших значениях $\frac{h_0 u_*}{\nu}$ величина $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ для всех типов шероховатости действительно оказывается линейно зависящей от $\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$, что соответствует постоянству коэффициен-

та B' (т. е. случаю вполне шероховатой поверхности). Однако переход к промежуточному режиму (проявляющийся в отклонении зависимости $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ от $\ln\frac{h_0u_*}{\nu}$ от простой линейной зависимости) для разных типов шероховатости происходит при различных значениях $\frac{h_0u_*}{\nu}$ (согласно данным рис. 29, обычно заключающихся между 30 и 100); кроме того, и характер зависимости $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$ от $\frac{h_0u_*}{\nu}$ для слегка шероховатых поверхностей разных типов оказывается совершенно различным. Заметим еще, что рис. 29 позволяет также для любой представленной на нем шероховатости легко определить и высоту h_s эквивалентной песочной шероховатости, т. е. такой песочной шероховатости, которой отвечает то же самое значение $\frac{\delta\bar{u}}{u_*}$. Для вполне шероховатых стенок (и только для них) высота h_s, очевидно, будет пропорциональна высоте h_0; поэтому и параметр шероховатости $z_0=\frac{h_s}{30}$ здесь будет пропорционален h_0.

Выше уже указывалось, что логарифмическая зависимость средней скорости от высоты должна иметь место также и для скорости ветра в нижнем слое атмосферы (толщиной порядка $10\div100$ *м*) при нейтральной (или близкой к нейтральной) термической стратификации (это обстоятельство, по-видимому, впервые было отмечено Прандтлем (1932а)). То, что дело именно так обстоит в действительности, было еще в 30-х годах подтверждено на обширном эмпирическом материале Свердрупом (1936), Пешке (1936) и другими исследователями. Позже подобные измерения многократно повторялись, причем выводы всегда оказывались одними и теми же (см., например, обсуждение этого вопроса в книгах Саттона (1953) и Пристли (1959а)). В ряде случаев наблюдения над профилем ветра сопровождались также и измерением напряжения трения τ_0 при помощи предложенного Шеппардом (1947) динамометрического метода, основанного на непосредственном определении силы трения, действующей на выделенный небольшой участок подстилающей поверхности, или же при помощи независимо разработанного в СССР (см. Кречмер (1954)) и в Австралии (Суинбенк (1951а, 1955)) пульсационного метода, опирающегося на представление величины $\tau=\tau_0$ в виде (5.6) (подробнее об этом см. в п. 8.3). Поскольку по наклону логарифмического профиля можно определить величину $u_*=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ (считая, что значения

$\varkappa\approx0{,}4$, $A=\frac{1}{\varkappa}\approx2{,}5$ известны из лабораторных экспериментов), независимое измерение τ_0 позволяет значительно более надежно проверить логарифмическую формулу (5.31), чем это можно сделать на основе одних только наблюдений над изменением скорости ветра с высотой. Следует только иметь в виду, что из-за сложности непосредственного измерения величины τ_0 точность каждого отдельного измерения такого рода пока еще остается не очень высокой; поэтому достаточно убедительные результаты здесь удается получить лишь на основе обработки значительного эмпирического материала. При наличии же такой обработки высокая корреляция значений u_*, определенных по профилю ветра и по данным измерений величины τ_0, обнаруживается без труда (см., например, Перепелкина (1957)).

Все методы определения динамической скорости приводят к выводу, что в атмосфере она обычно заключается между 10 и 100 *см/сек*. Так как для воздуха $\nu\approx0{,}15$ *см*^{2}*/сек*, то отсюда ясно, что подстилающая поверхность атмосферы почти всегда является динамически вполне шероховатой. Логарифмический профиль скорости ветра удобно представлять в виде (5.31), используя понятие о параметре шероховатости z_0. При этом существенно, однако, что в условиях атмосферы довольно часто важную роль играет правильный выбор начала отсчета высот z. В самом деле, размеры h_0 неровностей почвы, как известно, могут принимать сравнительно большие значения (например, в случае высокой травы или поля, покрытого какой-либо сельскохозяйственной культурой); в то же время увеличение высоты измерений z в атмосфере часто оказывается вовсе не безобидным, ибо с ростом z сильно возрастает роль всегда имеющихся отклонений температурного градиента от равновесного (см. ниже гл. 4). Поэтому имеет смысл специально остановиться на вопросе о виде профиля средней скорости $\bar{u}(z)$ на высотах, лишь на немного превышающих среднюю высоту h_0 неровностей почвы (т. е. сравнимых с этой высотой).

При $z\sim h_0$ параметр h_0 (размерности длины) также будет влиять на осредненное течение; что же касается вязкости ν, то в случае вполне шероховатой стенки ею, как мы знаем, можно пренебречь. Поэтому здесь $\frac{d\bar{u}}{dz}$ будет функцией от величин τ_0, ρ, z и h_0, из которых уже можно составить безразмерную комбинацию $\frac{h_0}{z}$. Отсюда вытекает, что вместо формулы (5.21) для градиента средней скорости при $z\sim h_0$ будет справедлива

более общая формула

$$\frac{d\bar{u}(z)}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa z} g\left(\frac{h_0}{z}\right), \tag{5.33}$$

где $\varkappa \approx 0{,}4$, а $g\left(\frac{h_0}{z}\right)$ — поправочная функция, описывающая отклонение турбулентного потока от автомодельного режима, характеризуемого логарифмической формулой (5.31). Это отклонение непосредственно связано с влиянием неоднородностей высоты h_0; при $z \gg h_0$ оно должно перестать сказываться, откуда следует, что $g(0)=1$. Учитывая, что $\frac{h_0}{z} < 1$, разложим функцию $g\left(\frac{h_0}{z}\right)$ в ряд по степеням ее аргумента; при этом получим

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa z}\left[1 + a\frac{h_0}{z} + b\left(\frac{h_0}{z}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{5.34}$$

Введем теперь новое начало отсчета высоты z, полагая $z = z_1 + z'$, где z_1 сравнимо по порядку величины с h_0. В таком случае $\frac{h_0}{z'}$ также будет меньше единицы, и мы можем заменить в правой части (5.34) переменную z на z' и вместо разложения по степеням $\frac{h_0}{z}$ воспользоваться разложением по степеням $\frac{h_0}{z'}$. Легко видеть, что первые члены этого нового разложения будут иметь вид

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa z'}\left[1 + \left(a - \frac{z_1}{h_0}\right)\frac{h_0}{z'} + b_1\left(\frac{h_0}{z'}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{5.35}$$

Выберем теперь z_1 так, чтобы в полученном выражении член первого порядка малости обратился в нуль (т. е. положим $z_1 = ah_0 = g'(0)h_0$). Тогда с точностью до членов второго порядка малости получим

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa(z - z_1)}, \tag{5.36}$$

откуда

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z - z_1}{z_0}. \tag{5.37}$$

Мы видим, что влияние конечной высоты h_0 в первом приближении сводится к тому, что при не слишком малых z профиль скорости оказывается логарифмическим при отсчете высот от определенного уровня $z = z_1$, а не от уровня $z = 0$. Высота z_1 может быть названа *высотой вытеснения* (по аналогии с понятием толщины вытеснения, вводимой в теории пограничного слоя).

Данные о значениях параметра шероховатости z_0 и высоты вытеснения z_1 для различных типов естественных поверхностей могут быть найдены во многих источниках (см., например, Пешке (1936), Дикон (1949), Колдер (1949), Константинов (1952), Саттон (1953), Эллисон (1956), Пристли (1959а)). К сожалению, эти данные не очень хорошо согласуются между собой (вероятно, из-за того, что оба параметра z_0 и z_1 зависят от довольно тонких деталей подстилающей поверхности). Как и должно быть для вполне шероховатых поверхностей, параметр шероховатости z_0, определяемый по профилю ветра, обычно можно считать пропорциональным высоте h_0 неровностей почвы. Однако и для обычного травяного покрова, и для сельскохозяйственных культур соответствующий множитель пропорциональности оказывается заметно бóльшим множителя 1/30 (отвечающего, по данным Никурадзе, однородной песочной шероховатости) и обычно бывает близок к 1/10 или даже к 1/5 (Пешке, например, рекомендует формулу $z_0 = \frac{h_0}{z}$). Высота вытеснения z_1 при не слишком высоком травостое вообще может быть принята равной нулю; однако при высокой растительности ее часто приходится считать заключающейся между h_0 и $\frac{h_0}{2}$.

Заметим еще, что при высокой травяной растительности параметр шероховатости может зависеть от средней скорости ветра, сгибающего стебли растений и тем самым воздействующего на форму поверхности. Например, Дикон (1949) нашел, что при высокой траве (около 60 *см* высоты) параметр z_0 может изменяться от 9 *см* при очень слабом ветре до примерно 4 *см* при сильном ветре. Аналогично обстоит дело и для водных поверхностей, для которых и высота, и форма неровностей также, очевидно, зависят от скорости ветра. Если считать, что при исследовании ветрового волнения можно пренебречь вязкостью и поверхностным натяжением воды и что шероховатость моря в данной точке его поверхности определяется лишь атмосферными условиями вблизи этой точки (т. е. лишь локальным значением напряжения трения), то из соображений размерности для параметра шероховатости z_0 получается формула вида

$$z_0 = b\frac{u_*^2}{g}. \tag{5.38}$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $u_*^2 = \tau_0/\rho$ (где ρ — плотность воздуха), а постоянная b может, в частности, зависеть от отношения плотностей воздуха и воды. Имеющиеся наблюдения

профиля скорости ветра над морем пока очень неполны и неточны; тем не менее, они не оставляют впечатления, что соотношение (5.38) хорошо оправдывается на опыте (отметим, например, что Чарнок (1958б) и Эллисон (1956), использовавшие это соотношение, получили резко различные значения b: по Чарноку $b \approx 1/80$, в то время как согласно Эллисону $b \approx 1/12$). В этой связи многие исследователи склонны считать, что на море z_0 зависит не только от локальных метеорологических условий (а, например, еще и от разгона ветра, характеризующего путь, проходимый ветром над морем). В то же время все имеющиеся данные указывают на то, что поверхность моря является аэродинамически заметно более гладкой, чем большинство других встречающихся на Земле естественных поверхностей: даже при довольно сильном ветре на море $z_0 < 0{,}1$ *см* (по данным ряда авторов морскую поверхность при не очень сильном ветре часто вообще можно считать аэродинамически гладкой; ср. Саттон (1953), Дикон (1962)). Поэтому при изучении ветра над морем понятие параметра шероховатости используется сравнительно редко; чаще же вместо значений z_0 здесь приводятся значения коэффициента сопротивления трения c_f, отнесенного к скорости $U = \bar{u}(z)$ на некоторой фиксированной высоте z (см., например, Уилсон (1960), Дикон (1962), Дикон и Уэбб (1962)).

5.5. Турбулентные течения в каналах и круглых трубах; законы сопротивления

Рассматривавшиеся выше общие закономерности турбулентных течений около твердой стенки относились к широкому классу течений, включающему, в частности, и течения в каналах и трубах; поэтому многие экспериментальные данные о турбулентности в каналах и трубах уже использовались в предыдущем изложении. Однако течения в каналах и трубах обладают также и важными особенностями, отличающими их от идеализированных течений в полупространстве $z > 0$, с которыми мы до сих пор имели дело. В первую очередь здесь надо отметить, что в отличие от течения в полупространстве для течений в каналах и трубах имеется характерная длина H_1 (полуширина канала) или R (радиус трубы) и характерная скорость U_0 (максимальная скорость в середине канала или на оси трубы) или $U_{\text{ср}}$ (средняя скорость, определяемая как $\frac{1}{H_1}\int_0^{H_1} \bar{u}(z)\,dz$ или же $\frac{2}{R^2}\int_0^{R} \bar{u}(r)\,r\,dr$). Отсюда ясно, что теория течений в слое постоянного трения около стенки не исчерпывает

всей теории течений в каналах и трубах, к рассмотрению которой мы сейчас и перейдем.

Начнем с общих соображений о подобии, причем сначала для простоты будем считать, что стенки являются аэродинамически гладкими. Течение мы будем рассматривать лишь на достаточно больших расстояниях от входа в канал или трубу, на которых условия у входа уже не сказываются, и будем предполагать его стационарным и полностью турбулентным. В таком случае отличной от нуля будет лишь одна компонента $\bar{u} = \bar{u}_x$ средней скорости, и все статистические характеристики потока будут зависеть от единственной координаты z — расстояния от стенки канала или трубы (для трубы $z = R - r$, где r — расстояние от оси). При заданных размерах канала или трубы и заданных плотности и вязкости жидкости мы будем иметь однопараметрическую совокупность течений, определяемых значением «напора» — постоянного продольного градиента давления. Градиент давления будет уже однозначно определять такие характеристики течения, как скорости U_0 и $U_{\text{ср}}$ и напряжение трения на стенке τ_0 или, иначе, динамическую скорость $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$. Таким образом, значения статистических характеристик течения на расстоянии z от стенки здесь могут зависеть от следующих параметров: ρ, ν, z, H_1 (для трубы мы теперь через H_1 обозначаем радиус, т. е. полагаем $H_1 = R$) и одной из скоростей U_0, $U_{\text{ср}}$ или u_*. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $\xi = \frac{u_* H_1}{\nu}$ (в качестве характерной скорости мы выбираем скорость u_*) и безразмерное расстояние $\eta = \frac{z}{H_1}$.

Следовательно,

$$\bar{u}(z) = u_* \varphi\left(\frac{u_* H_1}{\nu},\ \frac{z}{H_1}\right) = u_* \varphi(\xi,\ \eta); \tag{5.39}$$

эта более общая формула заменяет теперь формулу (5.13).

Мы видим, что профиль средней скорости течения в канале или в трубе, вообще говоря, определяется некоторой функцией от двух переменных (которая, разумеется, может быть различной для канала и для трубы). Имеются, однако, два важных предельных случая, в которых функцию $\varphi(\xi, \eta)$ удается все же выразить через функции от одного переменного; к ним мы сейчас и перейдем.

Первый случай (детально рассмотренный в п. 5.2—5.4) — это случай малых значений z $\left(\text{таких, что } \eta = \frac{z}{H_1} \ll 1\right)$. В этом

случае зависимость скорости $\bar{u}(z)$ от длины H_1 становится несущественной, так что формула (5.39) должна обратиться в соотношение

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = f\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = f(\xi \cdot \eta) \quad \text{при} \quad \eta < \eta_0, \tag{5.40}$$

совпадающее с (5.13). Второй же предельный случай, с которым мы раньше не сталкивались, — случай больших значений $\eta = \frac{z}{H_1}$, соответствующих «турбулентному ядру» течения, примыкающему к середине канала или оси трубы. В области больших значений η, удаленной от твердых стенок, можно рассчитывать на применимость тех же рассуждений, которыми мы пользовались на стр. 299—230 в связи с выводом логарифмической формулы для профиля средней скорости. А именно, поскольку вдали от стенок при развитой турбулентности турбулентное напряжение трения обычно во много раз превосходит вязкое напряжение, то есть основания думать, что в «турбулентном ядре» вязкость не будет оказывать непосредственного влияния на режим движения (хотя косвенно она все же будет влиять, поскольку от нее зависят граничные условия на границе «ядра» и значение параметра u_*, определяющего в силу (5.17) и (5.17′) величину турбулентного напряжения во всех точках потока). При отсутствии характерного масштаба длины отсюда следовало соотношение (5.21), приводящее к логарифмическому профилю, при наличии же такого масштаба H_1 мы будем иметь более общее равенство $\frac{d\bar{u}(z)}{dz} = \frac{u_*}{H_1}\varphi_1\left(\frac{z}{H_1}\right)$, где φ_1 — некоторая функция от одного переменного. Представив, далее, эту функцию в виде $\varphi_1(\eta) = -f_1'(\eta)$, где $f_1(1) = 0$, и проинтегрировав выражение для $\frac{d\bar{u}(z)}{dz}$ в пределах от некоторого значения z до $z = H_1$, найдем

$$\frac{U_0 - \bar{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{H_1}\right) = f_1(\eta) \quad \text{при} \quad \eta_1 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{5.41}$$

Соотношение (5.41), называемое обычно *законом дефекта скорости*, впервые было указано Карманом (1930) в применении к течению в трубе, исходя из экспериментальных данных Фрича (1928). В дальнейшем этот закон неоднократно тщательно проверялся (см. ниже рис. 30 и 31), и теперь уже нет сомнений, что он представляет собой частный случай весьма общего принципа *подобия по числу Рейнольдса*, выполняющегося со значительной степенью точности для широкого класса турбулентных движений. Согласно этому принципу при достаточно больших числах Рейнольдса (при $\nu \ll K \sim UL$, где U и L — характерные масштабы скорости и длины) для достаточно большой области турбулентного течения (обычно охватывающей почти весь поток за исключением сравнительно тонких слоев, примыкающих к стенкам) осредненное движение не зависит непосредственно от коэффициента вязкости (т. е. от числа Рейнольдса), оказывающего влияние на поток только через посредство граничных условий и величины U (см. Таунсенд (1956)). Заметим еще, что такое «подобие по числу Рейнольдса», вообще говоря, будет иметь место не только для средней скорости, но и для всех статистических характеристик течения, не связанных непосредственно с диссипацией кинетической энергии под действием вязкости (т. е., например, для $\overline{u'^2}$ или $\overline{u'w'}$, но не для $\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}}\right)^2$). На этом последнем утверждении мы здесь, однако, уже не будем задерживаться.

Приведем теперь важное рассуждение Изаксона (1937) (развитое затем в работах Милликена (1938) и Мизеса (1941)), позволяющее в некоторых случаях установить точный вид функций f и f_1. А именно, предположим, что $\eta_1 < \eta_0$, так что существует некоторый интервал $\eta_1 < \eta < \eta_0$ значений $\eta = \frac{z}{H_1}$, для которого общую формулу (5.39) можно представить и в виде (5.40), и в виде (5.41) (это предположение, разумеется, уже не может быть обосновано теоретически, а должно проверяться на конкретных экспериментальных данных). В таком случае, складывая равенства (5.40) и (5.41), мы получим

$$f(\xi\eta) + f_1(\eta) = f_2(\xi) \quad \text{при} \quad \eta_1 < \eta < \eta_0, \tag{5.42}$$

где через $f_2(\xi)$ обозначена величина $\frac{U_0}{u_*}$, которая, очевидно, может зависеть только от числа Рейнольдса $\xi = \frac{u_* H_1}{\nu}$ (но не от $\eta = \frac{z}{H_1}$). Но из функционального уравнения (5.42) легко следует, что все три функции f, f_1 и f_2 являются логарифмическими. В самом деле, продифференцировав равенство (5.42) сначала по ξ, а затем по η, получим

$$f'(\xi\eta) + \xi\eta f''(\xi\eta) = 0;$$

отсюда вытекает, что $f(\xi\eta) = A \ln\xi\eta + B$, где A и B — постоянные интегрирования. Таким образом, мы снова пришли к соотношению (5.25), исходя из немного других соображений. Подставляя теперь полученное выражение функции $f(\xi\eta)$ в (5.42), убеждаемся, что

$$f_1(\eta) = -A\ln\eta + B_1, \quad f_2(\xi) = A\ln\xi + B_2, \quad B_2 - B_1 = B,$$

Таким образом, «закон дефекта скорости» в области его пересечения с законом (5.40) должен иметь вид

$$\frac{U_0-\bar{u}(z)}{u_*}=-\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{z}{H_1}+B_1, \tag{5.43}$$

причем если только формула (5.43) может быть применена вплоть до значения $z=H_1$ (т. е. $\eta=1$), то, очевидно, $B_1=0$ (последний вывод, разумеется, не следует автоматически из приведенных рассуждений, так как они относятся лишь к области $\eta_1<\eta<\eta_0$). Наконец, логарифмическая формула для $f_2(\xi)$ дает нам следующую зависимость отношения $\frac{U_0}{u_*}$ от числа Рейнольдса:

$$\frac{U_0}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{u_*H_1}{\nu}+B_2. \tag{5.44}$$

Вводя вместо $\frac{U_0}{u_*}$ коэффициент сопротивления трения $c_f=\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}=2\left(\frac{u_*}{U_0}\right)^2$, мы можем переписать последнюю формулу также в виде

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}}=\frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{c_f}\right)+B_3;\quad \mathrm{Re}=\frac{U_0H_1}{\nu};\quad B_3=\frac{B_2}{\sqrt{2}}-\frac{\ln 2}{\varkappa\sqrt{2}}. \tag{5.45}$$

До сих пор мы все время предполагали, что стенки рассматриваемого канала или трубы являются гладкими. Легко видеть, однако, что приведенные рассуждения могут быть перенесены почти без всяких изменений и на случай канала или трубы с шероховатыми стенками. В этом случае функция $\varphi(\xi,\eta)$ в равенстве (5.39) и функция $f(\xi\eta)$ в равенстве (5.40) могут зависеть также от дополнительных аргументов $\frac{h_0u_*}{\nu}$ $\left(\text{или }\frac{h_0}{H_1}\right)$, α, β, ..., определяющих размеры, форму и взаимное расположение неровностей стенки. Тем не менее, естественно думать, что в «ядре» течения наличие шероховатости будет сказываться только через значения граничных условий и значение турбулентного напряжения трения (зависящего от величины трения о стенку), но не непосредственно; если это так, то соотношение (5.41) должно быть одинаковым и для гладких, и для шероховатых стенок. Но в таком случае, предположив, что области, в которых выполняются соотношения (5.40) и (5.41), частично перекрываются между собой, мы немедленно приходим к функциональному уравнению (5.42) с той только разницей, что теперь функции f и f_2 могут зависеть еще от дополнительных параметров, характеризующих шероховатость. Отсюда, как и выше, вытекает, что при $\eta_1<\eta<\eta_0$ все три функции f, f_1 и f_2 должны быть логарифмическими с общим коэффициентом $A=\frac{1}{\varkappa}$ при логарифме; следовательно, этот коэффициент должен являться универсальной постоянной (так же как и коэффициент B_1). Что же касается коэффициентов B и B_2, то они могут содержать еще некоторое общее слагаемое, зависящее от размеров и характера шероховатости. Если считать, что формула (5.43) применима вплоть до значения $z=H_1$, то вообще $B_1=0$ и $B_2=B$; поэтому при этом предположении данные измерений коэффициента сопротивления позволяют сразу определить и значение коэффициента B (или коэффициента B' формулы (5.28), просто связанного с B). Именно таким образом и были получены значения B' при разных $\frac{h_0u_*}{\nu}$, представленные в виде черных точек на рис. 28.

В частном случае динамически вполне шероховатой стенки функция $f\left(\xi\eta, \frac{u_*h_0}{\nu}, \alpha, \beta, \ldots\right)$ не должна зависеть от вязкости ν, т. е. она будет функцией только от $\xi\eta\cdot\frac{\nu}{u_*h_0}=\frac{z}{h_0}$, $\alpha, \beta, \ldots$ Отсюда вытекает, что функция $f_2\left(\xi, \frac{u_*h_0}{\nu}, \alpha, \beta, \ldots\right)$ здесь будет зависеть только от $\xi\cdot\frac{\nu}{u_*h_0}=\frac{H_1}{h_0}$, $\alpha, \beta, \ldots$ Следовательно, в этом случае соотношения (5.44) и (5.45) принимают вид

$$\frac{U_0}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{H_1}{h_0}+B_2, \tag{5.44'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}}=\frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\ln\frac{H_1}{h_0}+\frac{B_2}{\sqrt{2}}, \tag{5.45'}$$

где коэффициент B_2 может зависеть от формы и взаимного расположения неоднородностей стенки.

Значительное число экспериментальных данных, подтверждающих справедливость соотношения (5.40) (совпадающего с (5.13)) для турбулентных течений в трубах и каналах, было собрано на рис. 25. Разумеется, для того чтобы указанные здесь расстояния $z_+=\frac{u_*z}{\nu}$ можно было перевести в значения переменной $\eta=\frac{z}{H_1}$, надо знать число $\xi=\frac{u_*H_1}{\nu}$, которое является сложной функцией от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{U_0H_1}{\nu}$, неявно задаваемой соотношением (5.45). Для ориентировки мы приведем

таблицу, показывающую зависимость нижней границы $\delta_l = 30\frac{\nu}{u_*}$ логарифмического пограничного слоя для течений в гладких трубах от наиболее широко используемого числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_D = \frac{U_{\mathrm{ср}} D}{\nu}$:

Re_D	$5 \cdot 10^3$	10^4	10^5	10^6
$\frac{\delta_l}{H_1} = 2\frac{\delta_l}{D}$	0,2	0,1	0,012	0,0016

(на связи скоростей U_0 и $U_{\mathrm{ср}}$ мы еще остановимся ниже). С ростом числа Рейнольдса отношение $\frac{\delta_l}{H_1}$, естественно, уменьшается, но это уменьшение не будет безграничным. Для каждой реальной трубы при возрастании числа Рейнольдса в конце концов наступает момент, когда она оказывается уже вполне шероховатой; после этого нижняя граница логарифмического слоя начинает уже зависеть только от h_0 и не меняется при дальнейшем возрастании средней скорости течения.

Что же касается до верхней границы значений z, для которых оказывается применимой логарифмическая формула (5.25), то выше уже отмечалось, что по данным Никурадзе и в гладких, и в шероховатых трубах эта граница в широком диапазоне чисел Рейнольдса оказывается весьма близкой к значению $z = R$ (так что логарифмический пограничный слой тянется почти до центра трубы). При этом, однако, для применения логарифмической формулы ко всему течению в трубе Никурадзе пришлось несколько изменить коэффициенты A и B по сравнению с теми, которые давали наилучшее совпадение в примыкающей к стенке части потока. Отсюда ясно, что предложенные Никурадзе логарифмические формулы для всего течения в целом нельзя считать совпадающими с теоретическим законом (5.25), справедливым при $\delta_l/H_1 < \eta < \eta_0$. В самом деле, коэффициенты A и B в теоретической формуле (5.25), очевидно, должны определяться на основании по возможности массового материала, относящегося лишь к пристеночной части турбулентных течений; только используя такие коэффициенты, можно пытаться выяснить, нарушается ли закон изменения скорости, отвечающий логарифмическому пограничному слою, в центральной части течения. Попытка такого рода впервые была предпринята Милликеном (1938), использовавшим почти все имевшиеся в то время немногочисленные данные о течениях в трубах и каналах.

Любопытно, что для значений коэффициентов A и B в формуле (5.25) Милликен получил значения $A = 2{,}5$, $B = 5{,}0$, почти не отличающиеся от тех, которые считаются наиболее надежными в настоящее время (см. выше стр. 234). Далее, согласно его оценкам отклонения профиля средней скорости в круглой трубе от значений, даваемых формулой (5.25), начинаются примерно при $\eta = 0{,}1$ (т. е. после изменения значения τ на 10%), причем при всех η они не превосходят 10% от соответствующего значения $\bar{u}(z)$. Несмотря на то, что количество экспериментальных данных о профиле скорости в круглых трубах к настоящему времени заметно выросло по сравнению с 1938 г. (см. по этому поводу, например, обзорную статью Хинце (1962)), эти выводы Милликена и сейчас полностью остались в силе.

Из результатов Никурадзе ясно также, что если оба коэффициента $A = \frac{1}{\varkappa}$ и B_1 в логарифмической форме (5.43) закона дефекта скорости рассматривать как эмпирические постоянные, то можно считать, что эта формула действует вплоть до $z = H_1$, т. е. хорошего совпадения с экспериментальными данными можно достигнуть даже и при $B_1 = 0$. Теоретически, однако, значение A нельзя считать произвольной постоянной, а надо определять его из обработки результатов измерений, относящихся к примыкающей к стенке части течения. В таком случае для

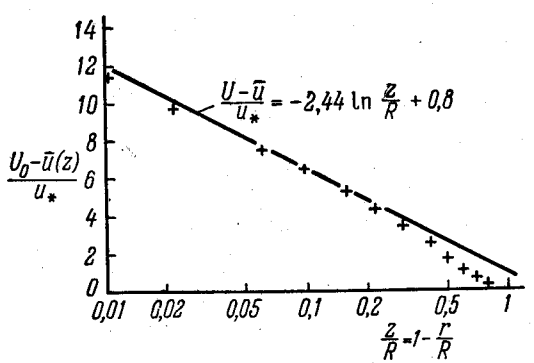


Рис. 30. Проверка закона дефекта скорости для турбулентного течения в трубе по данным Лауфера (1954).

получения наилучшего совпадения приходится принять, что $B \neq 0$ (см., например, заимствованный из книги Хинце (1959) рис. 30, построенный на материале измерений Лауфера (1954); значение $A = 2{,}44$, т. е. $\varkappa \approx 0{,}41$, здесь выбрано в соответствии с рекомендацией Клаузера (1956)). Аналогичные результаты

получаются и для течений в прямоугольном канале (см. заимствованный из статьи Шубауэра и Чена (1959) рис. 31, где

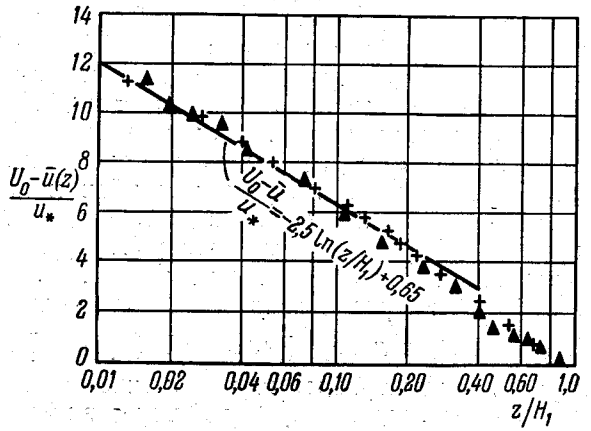


Рис. 31. Проверка закона дефекта скорости для турбулентного течения в прямоугольном канале по данным Лауфера (▼) и Дёнха (F. Dönch) (+).

положено $A=2{,}5$); отклонения от логарифмической формулы (5.43) в обоих случаях начинаются примерно при $\eta=0{,}25$.

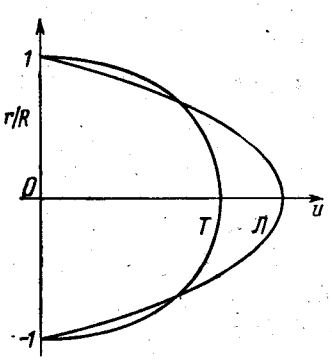


Рис. 32. Сравнение профилей средней скорости при ламинарном (*Л*) и турбулентном (*Т*) течениях в трубе.

Вопрос о выборе аналитической формулы для функции $f_1(\eta)$, дающей хорошее совпадение с опытными данными на большем интервале значений η, обсуждается во многих работах (см., например, Госс (1961)). Однако в практических задачах чаще всего можно просто считать, что профиль средней скорости в трубе при турбулентном течении вплоть до самой оси описывается логарифмической формулой. Ясно, что такой профиль резко отличается от параболического профиля ламинарного течения Пуазейля: вследствие гораздо более сильного радиального перемешивания в турбулентном течении профиль скорости всюду, кроме тонкого пристеночного слоя, оказывается заметно более сглаженным, чем в ламинарном течении (см. рис. 32). Заметим еще, что при $\eta>0{,}25$ функция $\ln\eta$ мало отличается от функции $-2{,}03\eta^{3/2}$; поэтому

неудивительно, что при первых тщательных измерениях профиля скорости около оси трубы, произведенных Дарси (1858), была получена эмпирическая формула, которая в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{U_0-\bar{u}(z)}{u_*}=5{,}08\left(1-\frac{z}{H_1}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{5.46}$$

Считая профиль скорости логарифмическим вплоть до оси трубы и пренебрегая тонким пристеночным слоем толщины $\delta_l=30\frac{\nu}{u_*}$, к которому уже неприменима логарифмическая формула, можно установить также простое соотношение между максимальной скоростью на оси трубы U_0 и средней скоростью $U_{\text{ср}}$. В самом деле, проинтегрировав равенство (5.43) с $B_1=0$, умноженное на $2\pi(H_1-z)$, в пределах от $z=0$ до $z=H_1$ и разделив результат на πH_1^2, получим

$$\frac{U_0-U_{\text{ср}}}{u_*}=-\frac{2}{\varkappa}\int_0^1(1-\eta)\ln\eta\,d\eta=\text{const}\approx 3{,}75.$$

Следовательно, для гладких труб (ср. (5.44))

$$\frac{U_{\text{ср}}}{u_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{u_*H_1}{\nu}+B_2',\quad B_2'=B_2-3{,}75. \tag{5.47}$$

Это соотношение также хорошо подтверждается на опыте.

Формула (5.47) позволяет установить форму *закона сопротивления*, т. е. зависимость от числа Рейнольдса $\text{Re}_D=\frac{U_{\text{ср}}D}{\nu}$ безразмерного коэффициента сопротивления $\lambda=\frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho U_{\text{ср}}^2}=8\left(\frac{u_*}{U_{\text{ср}}}\right)^2$ (отличающегося от коэффициента c_f в формуле (5.45), кроме несущественного численного множителя, лишь заменой максимальной скорости U_0 более просто измеряемой средней скоростью $U_{\text{ср}}$). В самом деле, представив в (5.47) выражение $\frac{u_*H_1}{\nu}$ в виде произведения $\frac{U_{\text{ср}}D}{\nu}\cdot\frac{u_*}{2U_{\text{ср}}}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{\varkappa\sqrt{8}}\ln\left(\text{Re}_D\sqrt{\lambda}\right)+B_3,\qquad B_3=\frac{B_2-3{,}75-\frac{1}{\varkappa}\ln 4\sqrt{2}}{\sqrt{8}}. \tag{5.48}$$

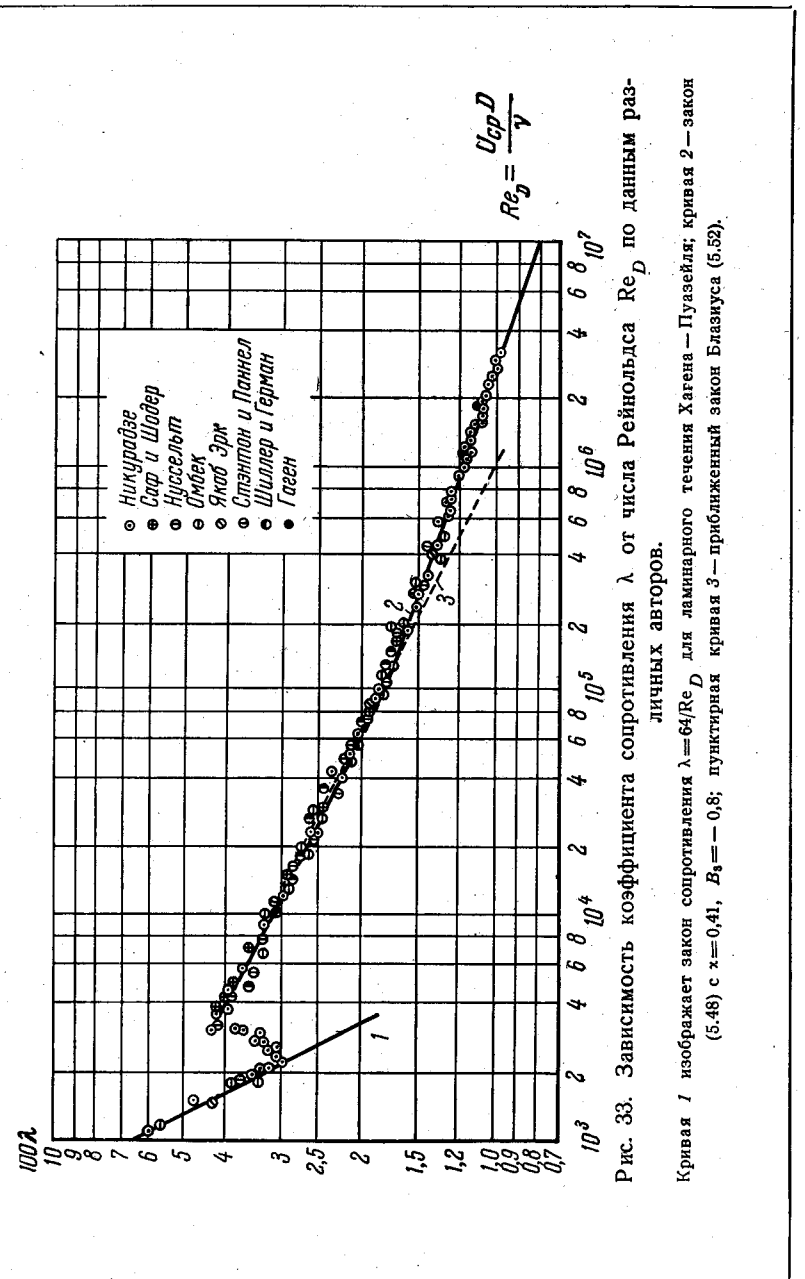


Рис. 33. Зависимость коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re_D по данным различных авторов.

Кривая 1 изображает закон сопротивления $\lambda = 64/Re_D$ для ламинарного течения Хагена—Пуазейля; кривая 2 — закон (5.48) с $\varkappa = 0{,}41$, $B_3 = -0{,}8$; пунктирная кривая 3 — приближенный закон Блазиуса (5.52).

Величина λ просто определяется по известному перепаду давления $\Delta_l p = \frac{4l\tau_0}{D}$ на участке трубы длины l и по расходу $Q = \frac{\pi D^2}{4} U_{ср}$; поэтому количество данных о зависимости λ от Re_D очень велико. Как показал Никурадзе (1932), все эти данные очень хорошо согласуются с формулой (5.48) при следующих значениях коэффициентов: $\frac{1}{\varkappa\sqrt{8}} = 0{,}87$ (чему соответствует $\varkappa \approx 0{,}41$), $B_3 = -0{,}8$ (см. рис. 33, где вместе с кривой (5.48) нанесена также и прямая $\lambda = \frac{64}{Re_D}$, отвечающая в силу (1.26) ламинарному течению в трубах). Согласно формуле (5.48), λ неограниченно убывает с ростом Re_D; на самом деле это, разумеется, будет не так, поскольку при возрастании Re_D каждая труба в конце концов оказывается вполне шероховатой. Как только это произойдет, коэффициент сопротивления трубы становится уже независимым от числа Рейнольдса и определяется по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{8}} \ln \frac{H_1}{h_0} + B_3', \qquad (5.48')$$

вытекающей из формулы (5.28) с $B' = \text{const}$, прилагаемой ко всем значениям z из интервала $0 < z < H_1$. Такое поведение коэффициента λ наглядно иллюстрируется данными рис. 34.

Если не требуется очень большая точность, то можно считать, что и в случае турбулентного течения в плоском канале ширины $2H_1$ логарифмическая форма закона дефекта скорости (5.43) также выполняется вплоть до значения $z = H_1$, отвечающего центру канала (при этом, разумеется, B_1 должно равняться нулю). Та же формула часто применяется и в случае течения в открытом плоском канале глубины H_1, ограниченном сверху свободной поверхностью жидкости (для такого канала максимальная скорость U_0, очевидно, будет достигаться на верхней границе течения, так что и здесь $B_1 = 0$). Иногда также в случае открытого канала вместо формулы (5.43) используется следующая формула Кармана (1930):

$$\frac{U_0 - \bar{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\varkappa}\left\{\left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln\left[1 - \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}. \qquad (5.49)$$

Еще лучшего совпадения с данными опыта можно здесь добиться, приняв несколько более общую формулу

$$\frac{U_0 - \bar{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\varkappa}\left\{\left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}} + C \ln\left[\frac{C - \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{C}\right]\right\}, \qquad (5.49')$$

где C — новый числовой коэффициент, который по данным Ханта (1954) оказывается немного большим единицы. Наконец, Эллисон (1960), исходя из некоторых теоретических соображений,

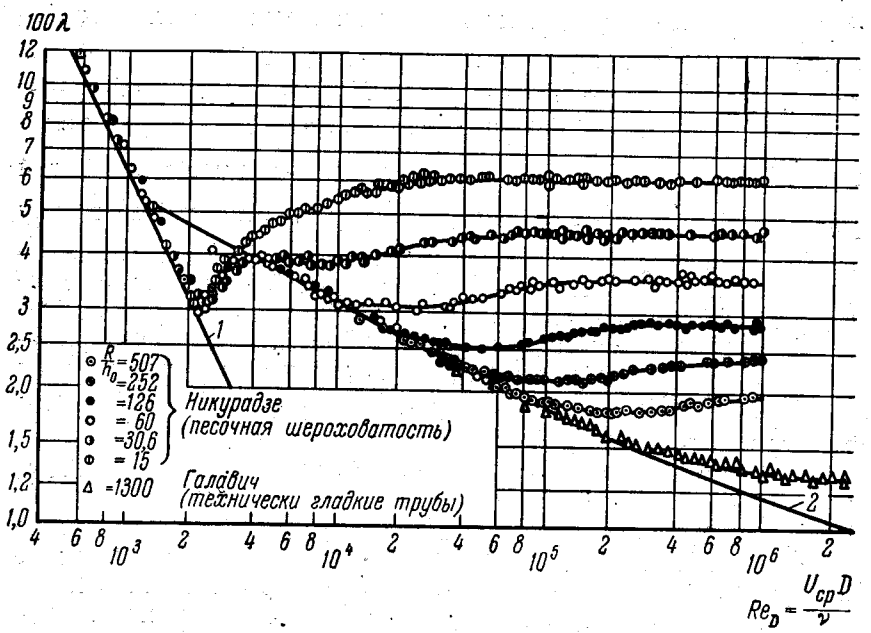


Рис. 34. Зависимость коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса Re_D для шероховатых труб различной шероховатости.

предложил в случае открытого канала вместо формул (5.49) или (5.49′) использовать соотношение вида

$$\frac{U_0-\bar{u}(z)}{u_*}=-\frac{1}{\varkappa}\left\{\ln\frac{1+\left(1+\frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\left(1+\frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{b}\ln\frac{b+\left(1-\frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{b-\left(1-\frac{z}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{5.49″}$$

правая часть которого при некоторых значениях b оказывается очень близкой и к правой части (5.43) (с $B_1=0$), и к правой части (5.49) или (5.49′). Согласно предложенной Эллисоном косвенной оценке коэффициента b (о которой мы еще скажем чуть подробнее в гл. 5) $b\approx 1{,}4$, что не противоречит также и имеющимся эмпирическим данным о профиле средней скорости в открытых каналах.

Для ограниченного интервала значений числа Рейнольдса общая формула (5.48) может быть приближенно заменена также значительно более простыми степенными законами сопротивления вида

$$\lambda=c\,(\mathrm{Re}_D)^{-m}. \tag{5.50}$$

Подобные степенные законы получаются, в частности, при аппроксимации (часто применявшейся в прошлом) профиля скорости $\bar{u}(z)$ степенными формулами вида

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*}=C\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)^n; \tag{5.51}$$

при этом, как легко видеть,

$$\frac{U_{\text{ср}}}{U_0}=\frac{2}{(n+1)(n+2)},\quad \frac{U_0}{u_*}=C^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{H_1U_0}{\nu}\right)^{\frac{n}{n+1}},\quad m=\frac{2n}{n+1}. \tag{5.51′}$$

Наиболее известным степенным законом сопротивления является эмпирический закон Блазиуса (1913)

$$\lambda=0{,}3164\,(\mathrm{Re}_D)^{-\frac{1}{4}}, \tag{5.52}$$

установленный с помощью обработки данных, относившихся к числам Рейнольдса Re_D, не превосходящим $5\cdot 10^4$ (ср. рис. 33). Согласно (5.51′), закону Блазиуса соответствует «закон 1/7» для профиля скорости, в силу которого $\bar{u}(z)\sim z^{\frac{1}{7}}$; этот «закон 1/7» (хорошо выполняющий при $\mathrm{Re}\approx 10^5$) широко использовался во многих исследованиях, начиная с 20-х годов нашего столетия. Однако степенные законы не являются универсальными (т. е. годными при всех числах Рейнольдса): при бо́льших числах Рейнольдса приходится использовать меньшие значения n.

Разумеется, помимо степенных формул можно подобрать и другие формулы для $\lambda(\mathrm{Re})$, аппроксимирующие неявное соотношение (5.48) на большом интервале значений Re. В частности, Никурадзе предложил использовать приближенную формулу $\lambda=0{,}032+\frac{0{,}221}{\mathrm{Re}_D^{0{,}237}}$; другими исследователями было предложено еще несколько формул такого рода (см., например, посвященную некоторым таким формулам критическую заметку Колмогорова (1952)).

5.6. Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке

Перейдем теперь к рассмотрению турбулентного пограничного слоя на длинной плоской пластинке при постоянной скорости U набегающего потока. Осредненное движение в таком пограничном слое будет стационарным и почти плоскопараллельным; во многом оно будет близким к течению в трубе, радиус которой равен толщине δ пограничного слоя, а скорость на оси — скорости U вне этого слоя. Имеются, однако, по крайней мере две причины, нарушающие аналогию между течениями в трубах

и в пограничном слое. Во-первых, физические условия на внешней границе пограничного слоя весьма отличны от условий в центре трубы: вне пограничного слоя (т. е. при $z > \delta$) турбулентность обычно вовсе отсутствует, в то время как течение в трубе всюду является полностью турбулентным. Во-вторых, характеристики пограничного слоя зависят не только от нормальной к пластинке координаты z, но также (хоть и сравнительно слабо) и от продольной координаты x, отсчитываемой вдоль пластинки. Указанные причины приводят к тому, что с теоретической точки зрения течение в пограничном слое оказывается значительно сложнее течений в канале или трубе.

Разница между течениями в пограничном слое и в трубах и каналах не затрагивает тонкого слоя жидкости, непосредственно примыкающего к пластинке, в котором действует универсальный «закон турбулентности вблизи стенки» (5.13). Как хорошо видно из рис. 25, на котором все точки ложатся на одну и ту же кривую, этот закон одинаков и для труб, и для каналов, и для пограничных слоев. Величина u_*, входящая в формулу (5.13), в пограничном слое, разумеется, может изменяться при изменении x; это изменение, однако, оказывается довольно медленным (см. ниже стр. 277), так что в каждом сечении $x=\text{const}$ поток успевает приспособиться к местным условиям и зависит уже лишь от значения u_* при данном x. Изменяется с ростом x также и относительная толщина слоя, к которому приложим закон (5.13): если при малых $\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$, не превышающих 10^6, формулой (5.13) еще можно с известным основанием пользоваться при всех z вплоть почти до самой границы турбулентного пограничного слоя, то при Re_x порядка 10^7—10^8 суммарная толщина вязкого подслоя и логарифмического пограничного слоя уже не превосходит 10—20% от толщины δ. Это последнее обстоятельство, очевидно, отличает течение около плоской пластинки от течений в трубах и каналах, где при всех $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ логарифмическими формулами можно без большой ошибки пользоваться вплоть до оси трубы или середины канала.

Профиль средней скорости во внешней части пограничного слоя естественно характеризовать зависимостью от z_1 дефекта скорости $U - \bar{u}(z)$. Если исходить из хорошо подтверждающегося на опыте предположения, что для невозмущенного пограничного слоя профиль скорости в каждом сечении $x=\text{const}$ зависит лишь от локальных условий, относящихся к этому же сечению, то разность $U - \bar{u}(z)$ должна определяться значениями U и δ, параметрами жидкости ν и ρ и (в случае шероховатой пластинки) характеристиками шероховатости при данном x. Согласно общему принципу подобия по числу Рейнольдса следует

ожидать, что во внешней части течения, достаточно далеко отстоящей от стенки, вязкость ν и характеристики шероховатости будут сказываться только через посредство величины напряжения трения на стенке τ_0 (или динамической скорости $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, или локального коэффициента трения $c_f = 2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2$). Отсюда вытекает следующая общая форма закона дефекта скорости для пограничного слоя:

$$\frac{U - \bar{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{\delta}, \frac{u_*}{U}\right) \tag{5.53}$$

(см. Ротта (1962а, б)). Для проверки этого закона целесообразно построить на графике значения $\frac{U - \bar{u}(z)}{u_*}$ в виде функции от $\frac{z}{\delta}$ и попытаться выяснить характер рассеяния экспериментальных точек в зависимости от значений отношения $\frac{u_*}{U}$. При этом, однако, оказывается, что это рассеяние полностью покрывается обычным разбросом экспериментальных точек, так что с точностью до погрешностей измерений все значения $\frac{U - \bar{u}(z)}{u_*}$ прекрасно ложатся на одну кривую (см., например, рис. 35, заимствованный из обзорной статьи Клаузера (1956)). Таким образом, зависимость отношения $\frac{U - \bar{u}(z)}{u_*}$ от медленно меняющейся с изменением Re_x величины $\frac{u_*}{U}$, если только она имеет место, является крайне слабой. Это означает, что на практике закон дефекта скорости для пограничного слоя на плоской пластинке может быть записан в виде

$$\frac{U - \bar{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{\delta}\right), \tag{5.54}$$

полностью аналогичном тому, который использовался выше при рассмотрении течений в трубах и каналах.

По сравнению с законом дефекта скорости (5.41) для труб и каналов закон (5.54) имеет лишь один недостаток: в то время как в (5.41) фигурирует известная точно длина H_1, в формулу (5.54) входит толщина пограничного слоя δ, не имеющая точного определения и лишь весьма приближенно определяемая по данным эксперимента. В то же время отношение длины δ к более точно определяемым толщинам типа, например, толщины вытеснения δ^* в турбулентном пограничном слое (в отличие от

ламинарного) оказывается переменным $\left(\text{зависящим от } \frac{u_*}{U}\right)$. В частности, если выполняется закон (5.54), то из самого определения (1.53) толщины вытеснения δ^* следует, что

$$\delta^* = C\frac{u_*}{U}\delta, \quad C = \int_0^1 f_1(\eta)\,d\eta = \text{const} \tag{5.55}$$

(толщиной вязкого подслоя, к которому неприложим закон (5.54), здесь пренебрегается). Учтя это соотношение, Ротта

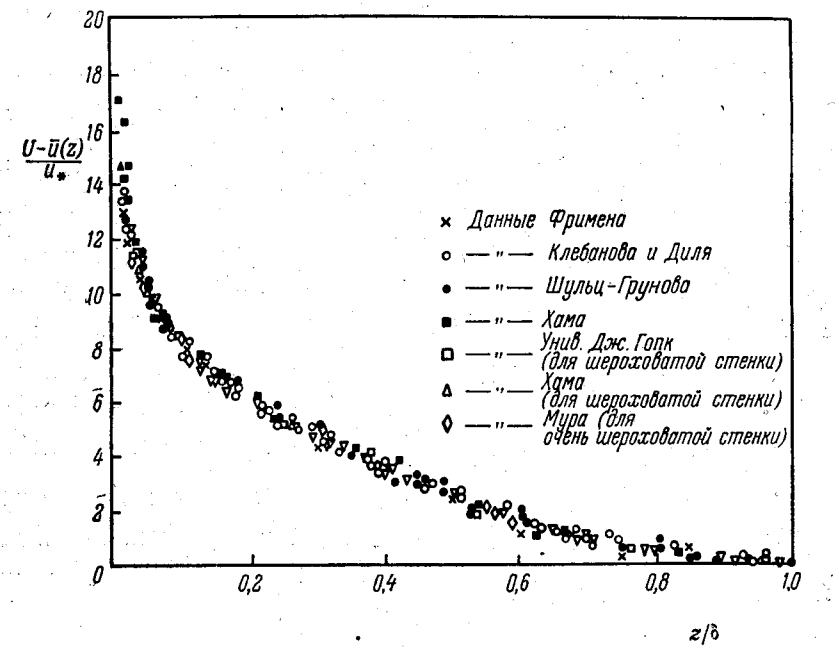


Рис. 35. Проверка закона дефекта скорости для турбулентного пограничного слоя по данным разных авторов.

(1951а) предложил использовать в формуле (5.54) вместо аргумента $\eta = \frac{z}{\delta}$ безразмерный аргумент $\eta_1 = \frac{z}{\delta^*}\frac{u_*}{U}$, не содержащий величины δ; в силу (1.53) этот аргумент удобен также и тем, что для него тождественно выполняется условие нормировки $\int_0^\infty \frac{U-\bar{u}}{u_*}\,d\eta_1 = 1$. Предположим теперь, что $\frac{U-\bar{u}}{u_*} = \varphi_1(\eta_1)$, где $\varphi_1(\eta_1) = 0$ при $\eta_1 = c$; тогда, очевидно, $\delta = c\frac{U}{u_*}\delta^*$ и $\varphi_1(\eta_1) = f_1\left(\frac{\eta_1}{c}\right)$. Следовательно, при обработке наблюдений вполне можно заменить δ на $\delta^*\frac{U}{u_*}$, и если $\frac{U-\bar{u}}{u_*}$ окажется однозначной функцией от $\eta_1 = \frac{z}{\delta^*}\frac{u_*}{U}$, то это значит, что выполняется и закон (5.54).

Разумеется, равенство (5.54) не может выполняться вплоть до $z=0$, так как оно не содержит вязкости и не учитывает граничного условия $\bar{u}(0)=0$. Непосредственно около стенки действует универсальный закон (5.13) и, как мы уже видели, в области, к которой применимы одновременно оба эти закона, функции f и f_1 обязательно будут логарифмическими. Поэтому неудивительно, что после переноса данных рис. 35 на новый график, на котором по оси абсцисс нанесена логарифмическая шкала, функция $f_1(\eta)$ в пределах от $\eta=0{,}01$ и до примерно $\eta=0{,}15$ представляется прямой вида $-A\ln\eta + B_1$ (см. рис. 36,

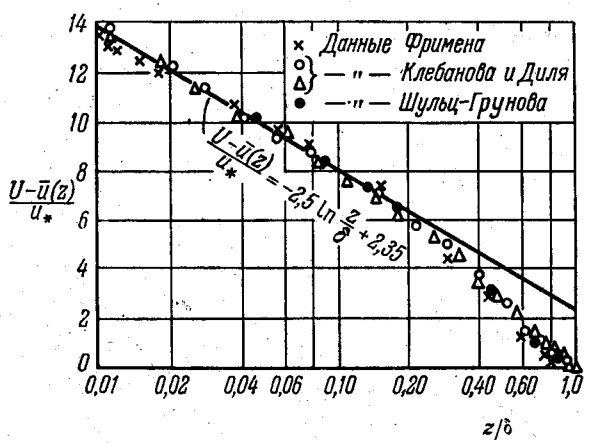


Рис. 36. Логарифмическая форма закона дефекта скорости для пограничного слоя.

где учтена лишь часть точек, приведенных на рис. 35). Отметим, что коэффициент $A = \frac{1}{\varkappa}$ здесь имеет точно то же значение, что и на рис. 31, относящемся к плоским каналам, как это и должно быть в силу универсальности логарифмического закона (5.25); коэффициент же B_1 для каналов и для пограничных слоев оказывается различным. Кроме того, из сравнения рис. 36 с рис. 31 видно, что при $\eta > 0{,}15$ функция $f_1(\eta)$ для пограничных слоев заметно более резко отклоняется от прямой $A\ln\eta + B_1$, чем та же функция для плоских каналов. Согласно данным Хама (1954)

значения функции $f_1(\eta)$ для пограничных слоев в области $\eta > 0{,}15$ хорошо описываются эмпирической формулой $f_1(\eta) = 9{,}6\ (1-\eta)^2$; в случае же течений в плоских каналах функцию $f_1(\eta)$ при $\eta > 0{,}15$ можно неплохо описать формулой $f_1(\eta) = A' \ln \eta + B_1'$ с коэффициентами A' и B_1', лишь немного отличающимися от A и B_1.

Существенная разница между профилем скорости в турбулентном пограничном слое около его внешней границы и профилем скорости в трубах и каналах около оси, естественно, объясняется различием между характером самого турбулентного течения во внешней части пограничного слоя и в центральной части трубы или канала. Заметим в этой связи, что в отличие от ламинарного пограничного слоя, не имеющего сколько-нибудь резкой границы, турбулентный пограничный слой обычно имеет отчетливую границу, выше которой турбулентность отсутствует. Эта граница имеет неправильные очертания, беспорядочно изменяющиеся во времени, как это хорошо видно на фотографиях



Рис. 37. Теневая фотография турбулентного пограничного слоя на цилиндре (из статей Ротта (1962а, б)). Направление течения — слева направо.

турбулентного пограничного слоя, полученных с помощью метода теней, позволяющего визуализировать возмущенные области потока (см., например, рис. 37). Соответствующая такой фотографии общая схема турбулентного пограничного слоя представлена на рис. 38. По данным измерений Клебанова (1955) верхняя граница турбулентного пограничного слоя в каждой отдельной точке колеблется в пределах примерно от $0{,}3\delta \div 0{,}4\delta$ и до $1{,}2\delta$ (где δ — расстояние от стенки, на котором средняя скорость равна $0{,}99U$) почти по нормальному закону со средним значением $0{,}78\delta$. Доля $\gamma(z)$ времени, в течение которого на расстоянии z от стенки наблюдается турбулентность, убывает с ростом z и при $z=\delta$ равняется всего лишь 0,06 (качественно близкие, хотя и отличающиеся количественно, результаты указывают также Корсин и Кистлер (1955)). Отсюда ясно, почему логарифмический профиль, характерный для развитой турбулентности, может с неплохой точностью применяться почти до центра канала или

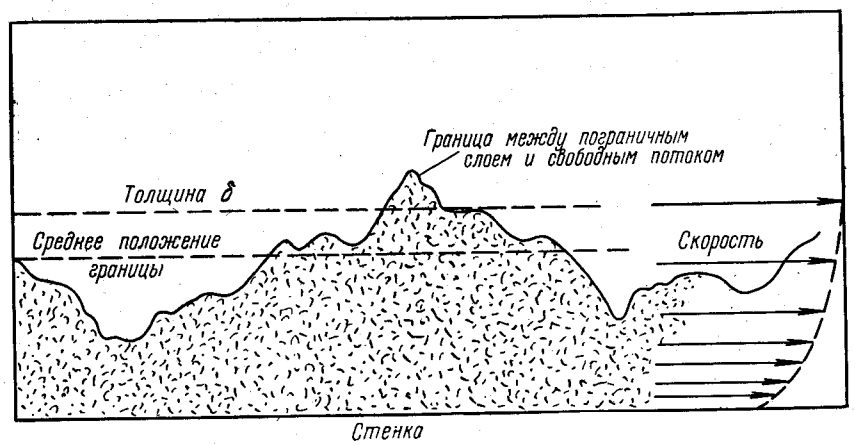


Рис. 38. Общая схема турбулентного пограничного слоя на плоской пластинке.

трубы, но в пограничном слое при большом Re сравнительно точно выполняется лишь для тонкого слоя жидкости, расположенного около стенки. Вне этой пристеночной части течения в каждой точке быстро чередуются периоды наличия и отсутствия турбулентности, так что среднее значение скорости, получаемое при осреднении по достаточно большому промежутку времени, фактически оказывается средним между значениями скорости, отвечающими турбулентному и ламинарному потокам. Так как в ламинарном потоке обмен импульсом между соседними слоями жидкости гораздо меньше, чем в турбулентном потоке, и поэтому градиенты скорости более резки, то ясно, что во внешней части турбулентного пограничного слоя средняя скорость при удалении от стенки должна возрастать быстрее, чем по логарифмическому закону, что и подтверждается данными рис. 36. Естественно также, что в случае пограничного слоя, возникаю-

щего при обтекании плоской пластинки турбулентным потоком, богатым возмущениями, различие между условиями во внешней части этого слоя и в центре трубы должно быть менее значительным. И действительно, опыты Вигхардта (1944) и других исследователей, пропускавших обтекающий поток сначала через турбулизирующую решетку, показывают, что форма функции $f_1(\eta)$ в формуле (5.54) зависит от степени возмущенности потока вдали от пластинки и при увеличении этой степени возмущенности приближается к форме, характерной для течений в трубах и каналах.

Интересная попытка объединения универсального пристеночного закона (5.13) с законом дефекта скорости (5.54) была предпринята Коулсом (1956). Исходя из (5.13), общий вид профиля средней скорости в каждом сечении $x=\text{const}$ пограничного слоя может быть представлен в виде

$$\bar{u}(z)=u_*\left[f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)+h(z)\right], \qquad (5.56)$$

где $f(z_+)$ — функция, изображенная на рис. 25 (и обращающаяся в $A\ln z_+ + B$ при $z_+ > 30$), а $h(z)$ — поправка к универсальному закону (5.13), обращающаяся в нуль непосредственно вблизи пластинки (скажем, при $z < 0{,}1\delta$). Но в таком случае $\frac{U-\bar{u}}{u_*} = A\ln\frac{\delta}{z} + h(\delta) - h(z)$ при $z > 30\frac{\nu}{u_*}$, и следовательно, чтобы удовлетворялся также и закон дефекта скорости, функция $h(z)$ должна зависеть только от $\frac{z}{\delta}$. Исходя отсюда, Коулс предположил, что

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) + \frac{\Pi}{\varkappa}w\left(\frac{z}{\delta}\right), \qquad (5.57)$$

где $\varkappa = \frac{1}{A} = 0{,}4$ — постоянная Кармана, Π — новая постоянная, а $w(\eta)$ — функция от одного переменного, нормированная условием $w(1)=2$. При этом еще остается некоторая неопределенность, связанная с тем, что толщина δ определяется не вполне однозначно; воспользовавшись этим, Коулс наложил на функцию $w(\eta)$ дополнительное условие нормировки $\int_0^1 w(\eta)\,d\eta = 1$, которое, как легко видеть, эквивалентно условию $\delta^*\frac{U}{u_*} = \frac{1+\Pi}{\varkappa}\delta$. Тем самым он задал определенным образом коэффициент C в (5.55), т. е. указал точную связь масштаба δ с легко определяемой по экспериментальным данным

толщиной вытеснения δ^*, величиной $\frac{u_*}{U}$ и параметрами $\varkappa$ и Π. Обработав большое число экспериментальных данных, относящихся к профилям скорости в пограничном слое на плоской пластинке (как при постоянном давлении, так и при наличии градиента давления в обтекающем потоке), Коулс обнаружил, что для широкого класса двумерных турбулентных пограничных слоев функция $w(\eta)$ оказывается одной и той же. Таким образом, по данным Коулса внешние условия обтекания (включая сюда и распределение давления в свободном потоке) отражаются лишь на величине множителя Π (который в случае сложного распределения давления приходится считать зависящим от координаты x); в простейшем случае безнапорного обтекания пластинки потоком постоянной скорости $\Pi = 0{,}55$. Универсальная

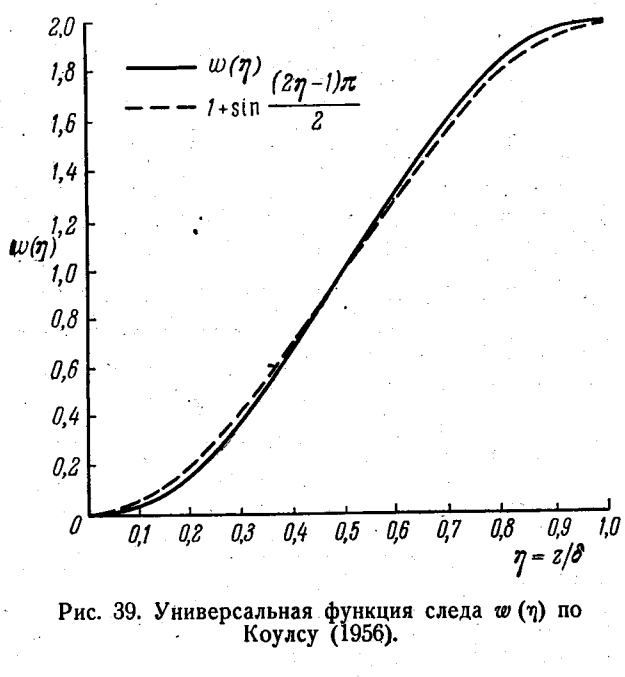


Рис. 39. Универсальная функция следа $w(\eta)$ по Коулсу (1956).

функция $w(\eta)$, полученная Коулсом с помощью обработки экспериментальных данных, изображена графически на рис. 39; она имеет почти точно антисимметричную S-образную форму и неплохо аппроксимируется отрезком синусоиды $w = 1 + \sin\frac{(2\eta-1)\pi}{2}$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Чисто формально в равенстве (5.57) можно перейти к пределу при $u_* \to 0$ (т. е. при $\tau_0 \to 0$); с помощью (5.55) и условия $w(1)=2$ при этом получается простой результат

$$\bar{u}(z) = \frac{U}{2} w\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

Таким образом, функция $w(\eta)$ задает форму профиля средней скорости в точке с $\tau_0=0$, т. е. в точке отрыва пограничного слоя, в которой $\frac{d\bar{u}}{dz}=0$ (ср. схематический рис. 8 на стр. 85). Исходя отсюда, Коулс назвал функцию $w(\eta)$ *функцией следа*, а закон (5.57), согласно которому отклонения профиля средней скорости в пограничном слое от универсального пристеночного закона (5.13) строго пропорциональны универсальной функции следа — *законом следа*. Общая форма профиля средней скорости $\bar{u}(z)$, удовлетворяющего этому закону следа, схематически показана на рис. 40. Здесь пунктиром изображено распределение средней скорости в верхней половине гипотетического турбулентного следа, создаваемое в основном взаимодействием турбулентного ядра этого следа со внешним ламинарным потоком и колебаниями границы между турбулентной и нетурбулентной частями течения в соответствии со схемой рис. 38; разность средних скоростей в центре и на границе этого следа равна $\frac{2\Pi}{\varkappa} u_*$. Если мы поместим в центре этого следа твердую пластинку, то распределение скорости в следе существенно изменится за счет того, что вблизи поверхности пластинки на поток начнет сильно воздействовать вязкость, приводящая к обязательному выполнению условия прилипания $\bar{u}(z)=0$. Это дополнительное ограничение в чистом виде порождает «универсальный пристеночный профиль», изображенный на рис. 40 линией из точек. В результате наложения этого «пристеночного профиля» на профиль в следе и получается реальный профиль скорости в турбулентном пограничном слое, изображенный на рис. 40 сплошной линией.

Как и в случае течений в трубе, из существования части течения, к которой приложим и пристеночный закон (5.13), и закон дефекта скорости (5.54) (с логарифмическими функциями f и f_1), вытекает, что локальный коэффициент трения $c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2$ должен удовлетворять уравнению вида

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \ln\left(\mathrm{Re}_\delta \sqrt{c_f}\right) + B_3, \qquad \mathrm{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \tag{5.58}$$

(ср. вывод уравнения (5.45) на стр. 254). Аналогично положению с законом (5.54) наличие в формуле (5.58) неточно определяемой толщины δ делает эту формулу в таком виде неудобной для приложений; поэтому желательно заменить здесь δ

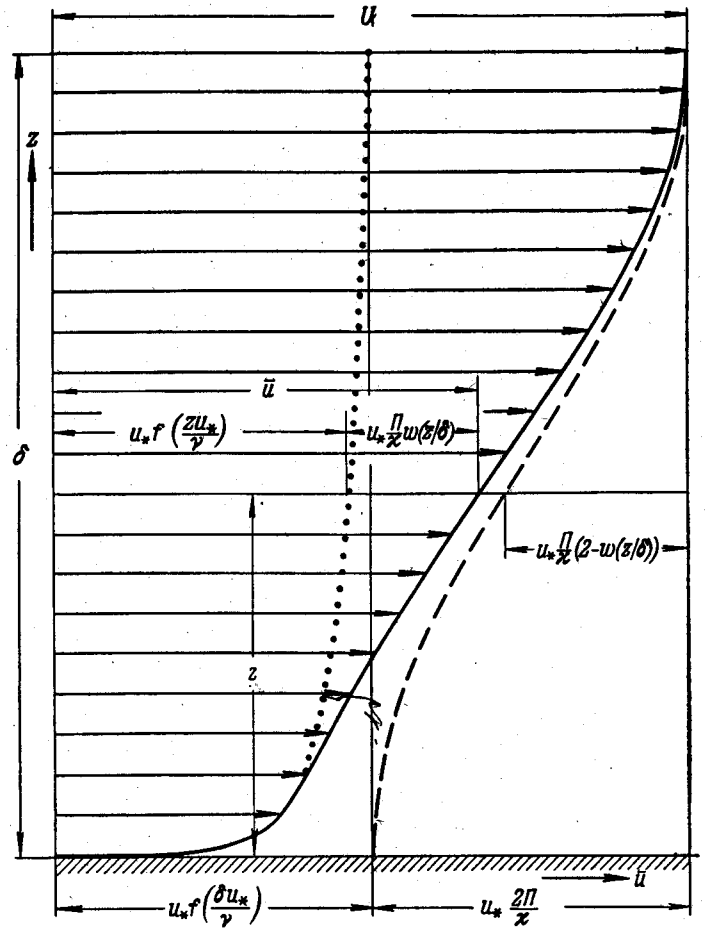


Рис. 40. Схематическое изображение профиля скорости, удовлетворяющего закону следа Коулса.

каким-либо более легко определяемым масштабом длины. Проще всего воспользоваться формулой (5.55), позволяющей переписать уравнение (5.58) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \ln \mathrm{Re}_{\delta^*} + B_4, \qquad \mathrm{Re}_{\delta^*} = \frac{U\delta^*}{\nu}. \tag{5.59}$$

Сравнение этого соотношения с данными непосредственных измерений значений локального коэффициента трения в различных точках пограничного слоя на гладкой плоской пластинке, выполненных Шульц-Груновым (1940) и Смитом и Уокером (1959), приведено на рис. 41; оно показывает, что экспериментальные значения $\frac{1}{\sqrt{c_f}}$ достаточно точно следуют правой части (5.58) (с $\varkappa=0{,}40$ и $B_4=2{,}6$).

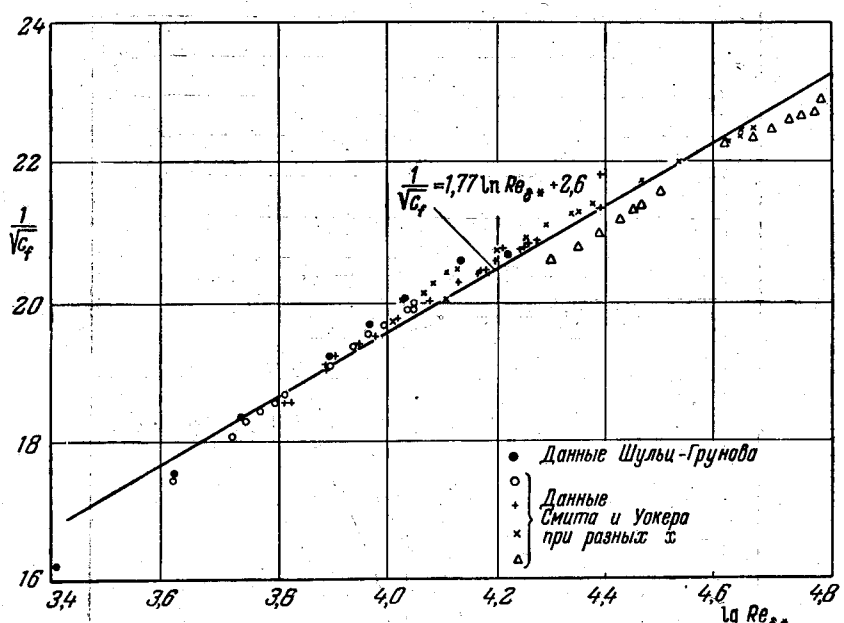


Рис. 41. Зависимость локального коэффициента сопротивления c_f для пограничного слоя на плоской пластинке от числа Рейнольдса Re_{δ^*} по данным Шульц-Грунова и Смита и Уокера.

Несколько более сложно обстоит дело, если желать заменить δ просто длиной x (отсчитываемой от начала пластинки). Для этого надо выразить толщину δ через x, что можно сделать с помощью следующих приближенных рассуждений. Так как линии тока вихревого турбулентного движения в пограничном слое не выходят за границу этого слоя, средняя граница пограничного слоя должна совпадать с линией тока осредненного движения, расположенной на расстоянии δ от пластинки. Отсюда вытекает, что угол наклона этой границы к оси Ox должен равняться отношению средней вертикальной скорости (в направлении оси

Oz) к средней горизонтальной скорости в точках границы. Но средняя горизонтальная скорость на границе пограничного слоя равна U; что же касается средней вертикальной скорости, то она не зависит от U, а определяется лишь относительным пульсационным движением, связанным с переносом импульса в направлении оси Oz. Следовательно, в силу соображений размерности эта вертикальная скорость должна быть пропорциональной динамической скорости u_*, составленной по значению τ_0 при данном x. Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{d\delta}{dx}=b_1\frac{u_*}{U}, \tag{5.60}$$

где b_1 — числовой коэффициент (порядка единицы). Предположим еще, что пограничный слой является турбулентным, практически начиная с самой передней кромки пластинки, так что равенство (5.60) выполняется при всех x, начиная с $x=0$ (где $\delta=0$). Величина $\frac{u_*}{U}$, вообще говоря, является функцией от x, но поскольку она изменяется очень медленно, то, интегрируя равенство (5.60), ее можно без большой ошибки вынести за знак интеграла (быть может, немного изменив одновременно значение коэффициента b_1). Отсюда получается приближенное равенство [1])

$$\delta=b\frac{u_*}{U}x. \tag{5.61}$$

Подставляя это равенство в уравнение (5.58), получим

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}}=\frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}(\mathrm{Re}_x\cdot c_f)+B_5. \tag{5.62}$$

Этот результат впервые был указан Карманом (1930, 1934) (пришедшим к нему из немного других рассуждений); он хорошо согласуется со старыми экспериментальными данными Кемпфа (1929) (полученными при помощи непосредственного динамометрического измерения локальных коэффициентов трения), так же как и с последующими эмпирическими данными

[1]) Строго говоря, равенство (5,61) будет следовать из (5.60), лишь если $\frac{u_*}{U}=\sqrt{\frac{c_f}{2}}$ может быть представлено простой степенной функцией от x. Как будет видно из дальнейшего, такое представление имеет довольно высокую степень точности (см., например, формулу (5.66), сравнение которой с данными измерений приведено на рис. 42).

Шульц-Грунова (1940) и Дхавана (1952) (см. рис. 42, где коэффициенты $\frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}=1{,}8$, т. е. $\varkappa=0{,}39$ и $B_5=1{,}7$ выбраны так, чтобы получилось наилучшее совпадение с данными

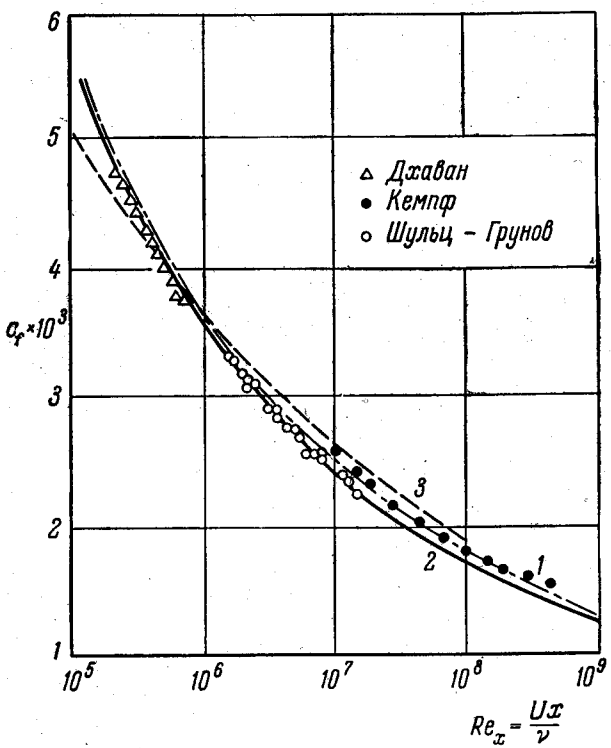


Рис. 42. Зависимость коэффициента сопротивления c_f для пограничного слоя на плоской пластинке от числа Рейнольдса Re_x по данным Кемпфа, Шульц-Грунова и Дхавана.

Кривая *1* — закон сопротивления Кармана (5.62) с $\varkappa=0{,}39$ и $B_5=1{,}7$; кривая *2* — закон Шульц-Грунова (5.64); кривая *3* — закон Фокнера (5.66).

Кемпфа). Заметим еще, что из сравнения численных значений коэффициентов B_4 и B_5 в формулах (5.59) и (5.62), приводящих к наилучшему сопоставлению с эмпирическими данными, можно оценить и значение коэффициента b в формуле (5.61). В частности, если принять значения этих коэффициентов, использованные на рис. 41 и 42 (пренебрегая небольшим расхождением

в принятых значениях $\varkappa$), то для толщины δ, определяемой формулой (5.55) с $C=\frac{1{,}55}{0{,}4}\approx3{,}9$ (т. е. с тем значением C, которое принимает Коулс (1956)), получается $b\approx0{,}3$.

В случае шероховатых пластинок предыдущие формулы должны быть изменены аналогично тому, как это делалось в случае шероховатых труб; например, формула (5.58) в применении к вполне шероховатой пластинке должна записываться в виде (5.45′) (но с δ вместо H_1). На этом, однако, мы уже не будем задерживаться (см., например, Шлихтинг (1951), гл. XXI, § 4).

Согласно (5.62) c_f является медленно убывающей функцией от x. Однако явное определение c_f как функции от Re_x с помощью уравнения (5.62) является довольно сложным, и на практике обычно используются более простые интерполяционные или эмпирические формулы. Так, например, Шлихтинг (1936) (исходивший, правда, не из формулы Кармана (5.62), а из более сложных результатов Прандтля, изложенных, например, в книге Шлихтинга (1951)), предложил для c_f расчетную формулу

$$c_f=(2\lg \mathrm{Re}_x-0{,}65)^{-2{,}3} \tag{5.63}$$

(где lg — десятичный логарифм), дающую результаты, близкие к вытекающим из (5.62). Позже Шульц-Грунов (1940) использовал формулу

$$c_f=0{,}370\,(\lg \mathrm{Re}_x)^{-2{,}584}, \tag{5.64}$$

результаты сопоставления которой с эмпирическими данными приведены на рис. 42. Наконец, если принять, что профиль средней скорости в пограничном слое во всех сечениях дается «законом 1/7» (см. стр. 263), то для c_f может быть получена совсем простая формула

$$c_f=c\,(\mathrm{Re}_x)^{-\frac{1}{5}}. \tag{5.65}$$

Эта формула при $c=0{,}0576$ также неплохо описывает данные измерений, относящиеся к интервалу чисел Рейнольдса $5\cdot10^5<\mathrm{Re}_x<10^7$. При дальнейшем увеличении числа Re_x формула (5.65) начинает давать заниженные значения c_f, так что для получения лучшего совпадения приходится заменить показатель степени 1/5 в этой формуле меньшим значением. В частности, при значениях Re_x вплоть до 10^9 хорошего совпадения с экспериментами можно добиться, используя формулу Фокнера (1943)

$$c_f=0{,}0262\,(\mathrm{Re}_x)^{-\frac{1}{7}}. \tag{5.66}$$

Помимо локального коэффициента сопротивления c_f можно рассматривать также полный коэффициент сопротивления C_f пластинки длины l, определяемый формулами

$$C_f=\frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2l}=\frac{1}{l}\int_0^l c_f(x)\,dx,\qquad F=2\int_0^l \tau_0(x)\,dx \tag{5.67}$$

(ср. (1.51)—(1.52)). Этот полный коэффициент сопротивления значительно проще поддается измерению, чем локальный коэффициент c_f, и относительно

него имеется очень много экспериментальных данных, наиболее ранние из которых относятся еще к 1793 г. (см. Шубауэр и Чен (1959), ср. также Гольдштейн (1938) и Шлихтинг (1951)). Исходя из формулы (5.62) для c_f, Шёнгер (1932) получил для C_f соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4{,}13 \lg (\mathrm{Re}_l \cdot C_f), \qquad \mathrm{Re}_l = \frac{Ul}{\nu}, \tag{5.68}$$

дающее хорошее совпадение с данными эксперимента. Используя вместо (5.62) более сложные расчеты Прандтля, Шлихтинг предложил простую интерполяционную формулу

$$C_f = 0{,}455\,(\lg \mathrm{Re}_l)^{-2{,}58}, \tag{5.69}$$

дающую результаты, почти не отличающиеся от вытекающих из (5.68). Близкую формулу

$$C_f = 0{,}427\,(\lg \mathrm{Re}_l - 0{,}407)^{-2{,}64} \tag{5.70}$$

использовал Шульц-Грунов (1940). Если исходить из «закона 1/7», то, как мы уже видели, для C_f получается зависимость вида $C_f \sim (\mathrm{Re}_l)^{-\frac{1}{5}}$; лучшее совпадение в широком интервале чисел Рейнольдса можно, однако, получить, если, следуя (5.66), положить

$$C_f = 0{,}0306\,\mathrm{Re}_l^{-\frac{1}{7}}. \tag{5.71}$$

Сравнение этого результата с формулой (1.52) для коэффициента сопротивления пластинки при ламинарном обтекании показывает, что при турбулентном обтекании сопротивление значительно больше, чем при ламинарном (например, при $\mathrm{Re}_l = 5 \cdot 10^5$ больше почти в 2,5 раза) и гораздо медленнее убывает с ростом числа Рейнольдса.

Все предыдущие рассуждения относились к случаю, когда пограничный слой можно считать турбулентным, начиная практически от самого переднего края пластинки. Если же переход к турбулентному режиму происходит лишь в точке $x = x_0$, достаточно далекой от переднего края, то в закон сопротивления необходимо внести поправку на наличие ламинарного участка пограничного слоя. Если принять допущение Прандтля (1927) о том, что после перехода к турбулентности пограничный слой ведет себя приблизительно так же, как если бы он был турбулентным, начиная от передней кромки пластинки, то эта поправка сводится к следующему: из вычисленной выше силы сопротивления F следует вычесть разность сил сопротивления при турбулентном и ламинарном режимах для участка пластинки от передней кромки до точки перехода $x = x_0$. С учетом этой поправки коэффициент сопротивления будет равен

$$C_f - \frac{\rho U^2 x_0 [C_1(x_0) - C_2(x_0)]}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 2l} = C_f - \frac{\mathrm{Re}_{x_0}[C_1(x_0) - C_2(x_0)]}{\mathrm{Re}_l} = C_f - \frac{A(x_0)}{\mathrm{Re}_l}, \tag{5.72}$$

где C_f дается, скажем, формулой (5.68) (или другой из приведенных выше формул), а $C_1(x_0)$ и $C_2(x_0)$ — коэффициенты сопротивления для пластинки длины x_0 при турбулентном и, соответственно, ламинарном обтекании. Полученная поправка позволяет описать переходную область между законом

сопротивления (1.52) для ламинарного режима и рассматривавшимися выше законами сопротивления для чисто турбулентного режима. Коэффициент $A(x_0)$ в формуле (5.72) будет, разумеется, зависеть от критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{x_0} = \mathrm{Re}_{x\,\mathrm{кр}}$, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное; согласно данным Прандтля при $\mathrm{Re}_{x_0} = 5 \cdot 10^5$, например, $A(x_0) = 1700$ (значения $A(x_0)$ при некоторых других значениях Re_{x_0} могут быть найдены в книге Шлихтинга (1951)).

Приведенные результаты, касающиеся закона изменения величин c_f и C_f при изменении чисел Рейнольдса Re_x и Re_l, могут быть использованы также и для исследования изменения с ростом x профиля средней скорости, зависящего согласно формуле (5.57) от $u_* = U\sqrt{\frac{c_f}{2}}$ и δ. Зависимость c_f от x детально исследовалась выше, изменение же δ с ростом x может быть определено из формулы (5.61), снова содержащей $\frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}$. Так как c_f очень медленно убывает с ростом x, толщина δ возрастает почти как первая степень x (если принять формулу (5.66), то δ пропорционально $x^{13/14}$). Существенно, что это возрастание является гораздо более быстрым, чем возрастание толщины ламинарного пограничного слоя, которая согласно формуле (1.33) пропорциональна $x^{\frac{1}{2}}$ (ср. рис. 4 на стр. 56, содержащий данные непосредственных измерений толщины δ как в ламинарной, так и в турбулентной частях пограничного слоя).

5.7. Профиль концентрации пассивной примеси около стенки: диффузия и теплопередача в турбулентном пограничном слое

Выше мы подробно рассмотрели вопрос о распределении средней скорости и о трении в турбулентных потоках около стенки. Оказывается, что аналогичные соображения могут быть применены и к исследованию турбулентной диффузии и теплопередачи. Ниже будут приведены некоторые основные относящиеся сюда факты; более подробное изложение (в первую очередь применительно к теплопередаче, лучше изученной экспериментально, чем диффузия) может быть найдено, например, в рассчитанных на инженеров книгах Гребера и Эрка (1955), Мак Адамса (1954) и Эккерта (1950), в гл. XIV сводной монографии под ред. Хоуарта (1953), гл. III—IV монографии Левича (1959) и обзорных статьях Дейслера (1959) и Кестина и Ричардсона (1963).

Рассмотрим, как и в пп. 5.2—5.3, плоскопараллельное течение жидкости в полупространстве $z > 0$ (ограниченном твердой гладкой стенкой), направленное вдоль оси Ox, в отсутствие продольного градиента давления. Предположим, что на граничной поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение ϑ_0 концентрации пассивной примеси. При этом в жидкости будет иметь место постоянный поток — j примеси, направленный от стенки

(т. е. вдоль положительного направления оси Oz), и уравнение (5.7′) будет иметь вид

$$j(z) = \rho\chi \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} - \rho\overline{\vartheta' w'} = j_0 = \text{const}. \tag{5.73}$$

Профиль средней концентрации $\bar{\vartheta}$ будет зависеть от статистических характеристик поля скорости (определяемых параметрами ν и u_*), а также от коэффициента диффузии χ, плотности ρ и интенсивности переноса примеси, характеризуемой значением потока j_0. Вводя специальную размерность Θ для величины ϑ и обозначая размерность массы буквой M, будем иметь

$$[j_0] = M\Theta L^{-2} T^{-1}, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [u_*] = LT^{-1}, \quad [\nu] = [\chi] = L^2T^{-1}.$$

Следовательно, в силу соображений размерности

$$\bar{\vartheta}(z) - \bar{\vartheta}(0) = \frac{j_0}{\rho\chi u_*} \varphi\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{\nu}{\chi}\right) = \theta_* \varphi(z_+, \text{Pr}), \tag{5.74}$$

где

$$\theta_* = \frac{1}{\varkappa u_*} \frac{j_0}{\rho} \tag{5.75}$$

— величина размерности Θ, задающая естественный масштаб концентраций (безразмерная постоянная Кармана $\varkappa = \frac{1}{A} \approx 0{,}4$ включена здесь в определение величины θ_*, поскольку в дальнейшем это иногда окажется удобным), а $\varphi(z_+, \text{Pr})$ — новая универсальная функция от двух переменных, удовлетворяющая условию $\varphi(0, \text{Pr}) \equiv 0$. Если ϑ — это температура T, то формулы (5.73) — (5.75), естественно, следует писать в виде

$$q(z) = c_p\rho\chi \frac{d\bar{T}}{dz} - c_p\rho\overline{T' w'} = q_0 = \text{const}, \tag{5.73′}$$

$$\bar{T}(z) - \bar{T}(0) = \frac{q_0}{c_p\rho\chi u_*} \varphi\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{\nu}{\chi}\right) = T_* \varphi(z_+, \text{Pr}), \tag{5.74′}$$

$$T_* = \frac{1}{\varkappa u_*} \frac{q_0}{c_p\rho}, \tag{5.75′}$$

где функция $\varphi(z_+, \text{Pr})$ — та же, что и в (5.74). Отметим, что для температуры предположение о пассивности более сомнительно, чем для материальной примеси, как из-за появления в неоднородно нагретой жидкости дополнительных архимедовых сил (об этом подробнее будет сказано в гл. 4), так и из-за зависимости от температуры физических констант жидкости типа коэффициентов вязкости и температуропроводности (по поводу учета этой зависимости, различной для газов и для жидкостей, см., например, статьи Дейслера (1959) и Ван Дриста (1959)). Тем не менее, для определенности ниже, как правило, величина ϑ будет

называться температурой, и будут использоваться формулы вида (5.73′) — (5.75′), но с заменой T на ϑ (в соответствии со сказанным на стр. 63 употребление буквы ϑ показывает, что фактически речь все время идет о совершенно произвольной пассивной примеси).

Формула (5.74′), содержащая неизвестную функцию φ, может быть сильно упрощена в случае достаточно больших значений z. Под достаточно большими здесь понимаются значения z, удовлетворяющие прежде всего условию $z \gg z_* = \frac{\nu}{u_*}$, при котором коэффициент вязкости ν не оказывает уже влияния на распределение средней скорости и (по той же причине) не влияет и на распределение средней температуры. Кроме того, от рассматриваемых значений z требуется, чтобы турбулентный поток тепла $q^{(1)} = -c_p\rho\overline{\vartheta' w'}$ при таких z был много больше потока тепла $c_p\rho\chi \frac{d\bar{\vartheta}}{dz}$, связанного с молекулярной теплопроводностью; при этом условии и коэффициент χ также не будет влиять на изменение величины $\bar{\vartheta}$ с высотой. Заметим теперь, что, поскольку турбулентный поток тепла порождается тем же вихревым пульсационным движением, что и турбулентный поток импульса $\tau^{(1)} = -\rho\overline{u' w'}$, турбулентные коэффициенты вязкости K и температуропроводности K_ϑ естественно предполагать имеющими одинаковый порядок величины. Поэтому, если $\text{Pr} \gtrsim 1$, т. е. $\chi \leqslant \nu$, то при $z \gg z_* = \frac{\nu}{u_*}$ турбулентный коэффициент температуропроводности будет намного больше молекулярного коэффициента χ, так что в этом случае при $z \gg z_*$ будут выполнены оба условия, нужные для того, чтобы значения z можно было считать достаточно большими. Если же $\text{Pr} \ll 1$, то турбулентный коэффициент температуропроводности (который при $z \gg z_*$ согласно (5.26) имеет порядок $u_* z$) будет намного превосходить молекулярный коэффициент χ лишь при $z \gg \frac{\chi}{u_*} = \text{Pr}^{-1} \cdot z_*$. Таким образом, вообще говоря, влиянием и ν, и χ на изменение средней температуры с высотой можно пренебречь, лишь если выполняются два условия: $z \gg z_*$ и $z \gg \text{Pr}^{-1} \cdot z_*$ (второе из них, очевидно, существенно лишь при $\text{Pr} \ll 1$).

При выполнении условий $z \gg z_*$ и $z \gg \text{Pr}^{-1} \cdot z_*$ градиент средней температуры должен определяться лишь параметрами $q_0/c_p\rho$, u_* и z. Отсюда в силу соображений размерности сразу следует формула

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = \frac{q_0}{\varkappa c_p\rho\chi u_* z} = \frac{\theta_*}{\varkappa z}, \tag{5.76}$$

где α — новая безразмерная постоянная (порядка единицы). Следовательно,

$$\overline{\vartheta}(z) - \overline{\vartheta}(0) = \frac{\vartheta_*}{\alpha} \ln z + A_1 \qquad (5.77)$$

(ср. Ландау и Лифшиц (1953), ч. 1, § 54), причем постоянная A_1 (так же, как и в случае формулы (5.22)) здесь должна определяться из условия смыкания профиля (5.77) с профилем средней температуры в нижнем слое, к которому формула (5.77) уже неприменима.

Из (5.77) видно, что

$$\varphi(z_+, \mathrm{Pr}) = \frac{1}{\alpha} \ln z_+ + C \quad \text{при} \quad z_+ \gg \max(1, \mathrm{Pr}^{-1}); \qquad (5.77')$$

таким образом, при достаточно больших значениях z_+ функция φ отличается от функции f формулы (5.13) лишь значением числовых коэффициентов (только один из которых — коэффициент C — может зависеть от числа Прандтля). Заметим еще, что профилю (5.77) в силу (5.9) отвечает следующее значение коэффициента турбулентной температуропроводности:

$$K_\vartheta = \alpha \varkappa u_* z. \qquad (5.78)$$

Отсюда видно, что постоянная α имеет смысл обратного значения турбулентного числа Прандтля для логарифмического пограничного слоя:

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{Pr}_t} = \frac{K_\vartheta}{K}, \quad \mathrm{Pr}_t = \frac{K}{K_\vartheta}. \qquad (5.79)$$

К сожалению, эмпирические данные о профилях концентрации пассивной примеси в реальных потоках около плоской стенки значительно более бедны, чем данные о профилях средней скорости; поэтому экспериментальная проверка формулы (5.77) до сих пор остается очень неполной. Измерения профилей средней температуры в приземном слое атмосферы, многократно проводившиеся метеорологами, мало пригодны для этой цели, так как в приземном слое при наличии изменения температуры воздуха с высотой (т. е. при не нейтральной термической стратификации) значительную роль играет архимедова сила, не позволяющая рассматривать температуру как пассивную примесь (подробнее об этом см. в гл. 4). Более подходящими могли бы быть данные тщательных наблюдений над профилем влажности (т. е. концентрации водяного пара) в приземном слое атмосферы [1]; однако таких данных пока имеется очень немного. Тем не менее, мы можем сослаться здесь на результаты измерений Паскуилла (1949) и Райдера (1954), подтверждающие, что при близкой к нейтральной температурной стратификации профили влажности хорошо описываются логарифмическими формулами (см. ниже п. 8.2). В лабораторных течениях большой скорости, сопровождающихся вынужденной конвекцией, температуру с бо́льшим основанием, чем в атмосфере, можно рассматривать как пассивную примесь; однако опубликованные измерения профилей температуры (или, тем более, концентрации материальной примеси) в лабораторных потоках около стенки весьма немногочисленны и обычно обладают столь невысокой точностью, что про них можно сказать только, что они не противоречат закону (5.77). Особо стоит выделить сравнительно старые наблюдения Элиаса (1929), показавшего, что при обтекании нагретой плоской пластинки профиль температуры в пограничном слое для расстояний z, превышающих $0{,}05\delta$, оказывается примерно логарифмическим и подобным профилю средней скорости, и наблюдения Нуннера (1956), получившего в неизотермическом течении

[1]) Разумеется, при наличии значительных температурных градиентов наличие архимедовых сил будет влиять не только на вертикальное распределение температуры, но и на вертикальное распределение влажности (см. главу 4). Однако профиль влажности можно наблюдать и в «чистых условиях» при изотермии, в то время как профиль температуры имеет смысл изучать лишь при нарушении условия постоянства средней температуры.

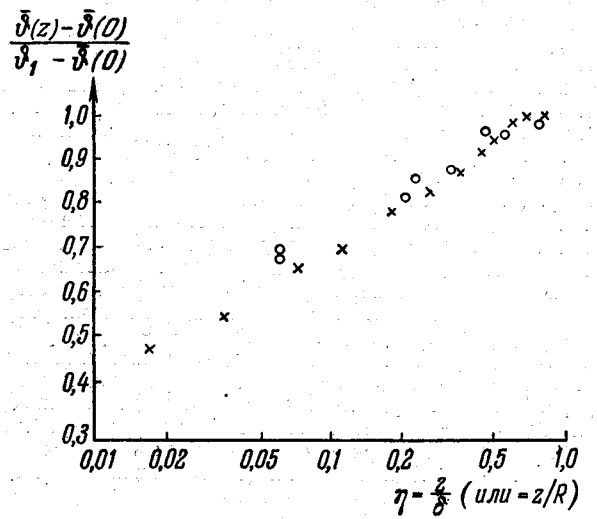


Рис. 43. Распределение средней температуры при турбулентном течении в трубе и в пограничном слое по данным Элиаса (○) и Нуннера (×).

$\vartheta(0)$ — температура стенки, ϑ_1 — температура на оси трубы или вне пограничного слоя.

воздуха по трубе с шероховатыми стенками почти точно логарифмический профиль средней температуры, начиная от $z=0{,}02R$ и вплоть почти до самого центра трубы (см. рис. 43).

Недостаток эмпирических данных очень затрудняет оценку коэффициента $\alpha\left(\text{или } \mathrm{Pr}_t=\frac{1}{\alpha}\right)$. В большинстве теплотехнических расчетов, относящихся как к техническим устройствам, так и к атмосфере, до сих пор, следуя Рейнольдсу (1874), обычно предполагают, что $\alpha=1$, причем, как правило, эти расчеты приводят к неплохому согласию с данными измерений. Однако интегральные характеристики теплопередачи, представляющие основной интерес для теплотехники, чаще всего малочувствительны к небольшим изменениям параметра α и поэтому не позволяют надежно судить о его значении. Попытки непосредственной оценки величины α по измеренным профилям средней скорости и температуры для течений в трубах и каналах чаще всего приводят к значениям α, немного большим единицы, — порядка $1{,}1\div1{,}4$ (т. е. к выводу, что $\mathrm{Pr}_t<1$; см., например, Коркоран и др. (1952), Каверс, Хсу и др. (1953), Хсу, Сато и Сейдж (1956), Людвиг (1956), Слейчер (1958), а также обзорные статьи Дейслера (1959) и Кестина и Ричардсона (1963)). Однако иногда (в первую очередь, в ряде экспериментов по теплообмену в жидких металлах) получались также и значения $\alpha<1$, т. е. $\mathrm{Pr}_t>1$ (см., например, Субботин, Ибрагимов, Номофилов (1963) и Дуайер (1963)). Определение величины α по профилям ветра и температуры в атмосфере может производиться лишь при температурной стратификации, отличной от безразличной; при этом, однако, можно попытаться найти предел, к которому стремится α при приближении стратификации к состоянию изотермии, и приравнять этот предел отношению коэффициентов K_ϑ и K для логарифмического пограничного слоя. Подобные попытки производились несколько раз, но результаты при этом оказывались различными: Райдер (1954), Пристли (1963—1964) и Суинбенк (1964) нашли таким образом, что $\alpha>1$, а в работах Суинбенка (1955) и Гурвича (1965) было получено значение $\alpha<1$ (см. ниже п. 8.2). Вообще следует иметь в виду, что пока все имеющиеся данные о турбулентной теплопередаче (и диффузии) через турбулентный пограничный слой во многом противоречивы, так что к ним надо относиться с большой осторожностью. Так, например, даже в работах, дающих примерно одно и то же среднее значение α, встречаются явно противоречащие друг другу утверждения об изменении коэффициента α при изменении расстояния до стенки z (согласно Людвигу (1956) величина α слегка возрастает с ростом z, в то время как согласно Коркорану и др. (1952) и Слейчеру (1958), наоборот, α убывает при возрастании z). В этой связи целесообразно еще раз подчеркнуть, что, согласно приведенным выше общим соображениям, в области логарифмического пограничного слоя, в которой и напряжение трения, и турбулентный поток тепла имеют постоянное значение, коэффициент α также должен быть п о с т о я н н ы м (т. е. вовсе не должен зависеть от z). Существенно также, что, поскольку речь идет об области течения, в которой молекулярные коэффициенты вязкости и теплопроводности не играют роли, α не должно зависеть от этих коэффициентов, а следовательно, и от молекулярного числа Прандтля Pr. Далее, если верить, что возможны условия вынужденной конвекции, при которой температура переносится как истинная пассивная примесь, то и значения α для тепла и для материальной примеси надо считать точно совпадающими. Если же эти два значения α отличаются, то это может лишь значить, что существует какой-то (неизвестный нам) физический механизм, иначе воздействующий на перенос тепла, чем на перенос материальной примеси.

При очень малых значениях $z_+=\frac{zu_*}{\nu}$ в случае гладкой стенки, естественно, должно выполняться равенство

$$\overline{\vartheta}(z)-\overline{\vartheta}(0)=\frac{q_0 z}{c_p\rho\chi},\qquad \varphi(z_+,\mathrm{Pr})=\varkappa\mathrm{Pr}\cdot z_+, \tag{5.80}$$

аналогичное (5.20). Дальнейшие члены разложения функции $\varphi(z_+,\mathrm{Pr})$ в ряд Тэйлора по степеням z_+ в окрестности точки $z_+=0$ можно получить, дифференцируя по z равенство (5.73′) в точке $z=0$. Так как в случае стенки постоянной температуры $\vartheta'=0$ при $z=0$, то аналогично (5.20′) с точностью до членов четвертого порядка по z_+ будем иметь

$$\overline{\vartheta}(z)=\overline{\vartheta}(0)+\frac{q_0 z}{c_p\rho\chi}-c_4'\frac{q_0u_*^3z^4}{c_p\rho\chi\nu^3},$$
$$\varphi(z_+,\mathrm{Pr})=\varkappa\mathrm{Pr}\left(z_+-c_4'z_+^4\right), \tag{5.80′}$$

где $c_4'=\frac{c_p\rho\nu^3}{8q_0u_*^3}\left(\overline{\frac{\partial\vartheta'}{\partial z}\frac{\partial^2w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}$ [1]. Из обращения в нуль второй и третьей производных функции $\varphi(z_+,\mathrm{Pr})$ по z_+ в точке $z_+=0$ следует, что изменение температуры будет близким к линейному в значительной области значений z; поэтому можно ввести понятие *подслоя молекулярной теплопроводности*, в котором значения функции $\varphi(z_+,\mathrm{Pr})$ практически не отличаются от $\varkappa\mathrm{Pr}\cdot z_+$. Однако толщина этого подслоя δ_ϑ' теперь будет определяться тремя параметрами ν, χ и u_*, так что, вообще говоря, можно лишь утверждать, что $\delta_\vartheta'=\psi(\mathrm{Pr})\frac{\nu}{u_*}$. Непосредственно за подслоем молекулярной теплопроводности должна следовать какая-то переходная область, промежуточная между областью применимости соотношения (5.80) и логарифмическим слоем. За этой переходной областью начинается логарифмический температурный пограничный слой, описываемый формулой (5.77). К сожалению, в настоящее время нет никаких непосредственных эмпирических данных о профилях температуры или концентрации примеси около стенки, позволяющих проверить все эти общие выводы и построить полный ход функции $\varphi(z_+,\mathrm{Pr})$. Поэтому о значениях этой функции при малых z_+ приходится судить лишь на основании косвенных данных, полученных при изучении теплопередачи и диффузии в турбулентных течениях.

---

[1]) Заметим, впрочем, что в отличие от точного уравнения (5.20′) уравнение (5.80′) для профиля средней температуры (но не для профиля концентрации материальной пассивной примеси) является лишь приближенным. В самом деле, исходное уравнение (5.73′), из которого вытекает (5.80′), само является приближенным, так как при его выводе было отброшено слагаемое, описывающее прогревание среды в результате диссипации кинетической энергии, входившее в уравнение (1.70) (стр. 61). Если же сохранить это слагаемое, то в разложении Тэйлора для функции $\varphi(z_+)$ появятся члены порядка z_+^2 и z_+^3 с коэффициентами, выражающимися через статистические характеристики пульсаций скорости. Оценке величины этих членов посвящена заметка Тьена (1964), показавшего, что в слое $z_+\leqslant10$ они могут играть какую-то роль, только если $\rho u_*^3/q_0>10^{-3}$ (где q_0 теперь предполагается выраженным в единицах размерности MT^{-3}).

Эти косвенные данные (которых зато имеется очень много) состоят в сведениях о значениях безразмерных интегральных характеристик теплопередачи — числа Нуссельта $\mathrm{Nu}=\dfrac{q_0\delta}{c_p\rho\chi\,(\vartheta_1-\vartheta_0)}$ или коэффициента теплопередачи (числа Стэнтона) $c_h=\dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}_\delta\,\mathrm{Pr}}=\dfrac{q_0}{c_p\rho U\,(\vartheta_1-\vartheta_0)}$ при различных значениях $\mathrm{Re}_\delta=\dfrac{U\delta}{\nu}$ и $\mathrm{Pr}=\dfrac{\nu}{\chi}$. Здесь $\vartheta_0=\overline{\vartheta}(0)$ — температура стенки (обычно плоской пластинки или трубы), предполагаемая постоянной, ϑ_1 — температура потока вне пограничного слоя или на оси трубы, δ — толщина пограничного слоя или радиус трубы, U — скорость невозмущенного обтекающего потока или скорость на оси трубы [1]). Те же безразмерные характеристики определяются обычно и в опытах по диффузии — в этом случае надо только q_0 заменить на j_0, опустить множитель c_p в знаменателях Nu и c_h и понимать под ϑ_0 и ϑ_1 соответствующие концентрации. При теоретическом изучении теплопередачи в трубах (а также и теплопередачи в пограничном слое при не слишком больших числах Рейнольдса) изменением величин τ и q вдоль оси Oz в первом приближении можно пренебречь и пользоваться схемой логарифмического пограничного слоя (обоснование законности такого упрощения можно найти, например, в работах Дейслера (1951, 1954)). Если теперь мы перепишем формулу (5.77′) в виде

$$\overline{\vartheta}(z)-\vartheta_0=\vartheta_*\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{zu_*}{\nu}+C\right), \tag{5.77″}$$

то для определения разности $\vartheta_1-\vartheta_0$ надо лишь знать параметры $\varkappa$ и α и как-то оценить постоянную C, существенно зависящую от изменения температуры в тонком пристеночном слое. Для оценки этой постоянной был предложен целый ряд теорий, приводящих к результатам, с разной степенью точности подтверждающимся на опыте.

Простейшая гипотеза, позволяющая оценить значение C, была выдвинута Рейнольдсом (1874). Он исходил из предположения, что механизмы переноса тепла и импульса в турбулентном потоке одинаковы; поэтому турбулентный поток тепла q по теории Рейнольдса должен быть связан с напряжением трения τ соотношением вида

$$\frac{q}{c_p\rho\,(U_2-U_1)\,(\vartheta_2-\vartheta_1)}=\frac{\tau}{\rho\,(U_2-U_1)^2}, \tag{5.81}$$

[1]) На практике при изучении теплопередачи в трубах вместо ϑ_1 обычно используется средняя температура

$$\vartheta_{\mathrm{ср}}=\int_0^R\overline{\vartheta}(z)\,\overline{u}(z)\,(R-z)\,dz\Big/\int_0^R\overline{u}(z)\,(R-z)\,dz$$

массы протекающей жидкости, а вместо U — средняя скорость $U_{\mathrm{ср}}=\dfrac{2}{R^2}\int_0^R\overline{u}(z)\,(R-z)\,dz$. На этом, однако, можно не останавливаться, так как по данным п. 5.5, зная значения критериев Nu и c_h, составленных с помощью ϑ_1 и U, легко подсчитать также и значения этих критериев, составленные с помощью $\vartheta_{\mathrm{ср}}$ и $U_{\mathrm{ср}}$, и наоборот.

где U_1, U_2 и ϑ_1, ϑ_2 — значения средней скорости и температуры на двух произвольных уровнях. Согласно этому соотношению, профили средней скорости и средней температуры во всем слое постоянства потоков τ и q должны быть точно пропорциональными $\left(\text{с коэффициентом пропорциональности, равным } \dfrac{c_p\tau}{q}\right)$. Отсюда вытекает, что $\varphi(z_+,\ \mathrm{Pr})=\varkappa f(z_+)$ (так что функция φ не зависит от Pr) и $C=\varkappa B$. Сравнивая равенство (5.80) с (5.20) и (5.77″) с (5.25), легко убедиться, что такая пропорциональность будет иметь место, лишь если $\chi=\nu$ (т. е. $\mathrm{Pr}=1$), $\alpha=1$ (т. е. $\mathrm{Pr}_t=1$) и, кроме того, $\dfrac{q}{c_p\dfrac{d\overline{\vartheta}}{dz}}=\dfrac{\tau}{\dfrac{d\overline{u}}{dz}}$ (т. е. $\mathrm{Pr}_t=1$) также и во всей промежуточной области между вязким подслоем и логарифмическим слоем. Заметим, что условие $\mathrm{Pr}=1$ лишь весьма приближенно (с точностью, не превышающей 20—30%) выполняется для воздуха и большинства других газов и уже совсем не выполняется для подавляющего большинства капельных жидкостей; условие же $\mathrm{Pr}_t=1$ накладывает сильные ограничения на беспорядочные пульсации полей скорости и температуры, которые также вряд ли никогда не нарушаются. Тем не менее, предположение Рейнольдса (или, как чаще говорят, *аналогия Рейнольдса*, имея в виду аналогию между потоками тепла и импульса, выражаемую равенством (5.81)), записанное в виде соотношения

$$c_h=\frac{1}{2}\,c_f, \tag{5.82}$$

удивительно хорошо описывает многие экспериментальные результаты о турбулентном теплообмене в газах и поэтому до сих пор довольно часто используется на практике.

Существенным недостатком аналогии Рейнольдса является то, что в ней пренебрегается влиянием на теплообмен молекулярного числа Прандтля, в ряде случаев бесспорно играющего определенную роль. Простейшее обобщение формулы (5.82), ставящее своей целью хоть как-то учесть влияние параметра Pr, было независимо предложено Прандтлем (1910, 1928) и Тэйлором (1916). Согласно их представлениям в области логарифмического пограничного слоя можно считать, что $\alpha=1$, но в вязком подслое (простирающемся вплоть до $z=\alpha_v\dfrac{\nu}{u_*}$) следует пользоваться строгими формулами (5.20) и (5.80), т. е. учитывать точные значения коэффициентов ν и χ. Что же касается промежуточной области, то в теории Прандтля — Тэйлора ею пренебрегалось, т. е. фактически предполагалось, что при $z>\alpha_v\dfrac{\nu}{u_*}$ имеют место логарифмические формулы (5.25) и (5.77). Таким образом, функция $\varphi(z_+,\ \mathrm{Pr})$ определялась формулой (5.80) при $z_+<\alpha_v$ и формулой (5.77′) с $\alpha=1$ при $z_+>\alpha_v$; отсюда, в частности, следует, что в этой теории $C=\alpha_v\varkappa\,\mathrm{Pr}-\ln\alpha_v$. Но легко проверить, что этому значению C (и значению $\alpha=1$) отвечает коэффициент теплопередачи

$$c_h=\frac{\frac{1}{2}\,c_f}{1+\alpha_v(\mathrm{Pr}-1)\sqrt{\dfrac{c_f}{2}}} \tag{5.83}$$

— это и есть основной результат теории Прандтля — Тэйлора. При $\mathrm{Pr}=1$ формула (5.83) совпадает с (5.82); если же $\mathrm{Pr}\neq1$ (но не очень сильно

отличается от единицы), то при разумном подборе постоянной α_v (по Прандтлю, например, $\alpha_v = 5{,}6$) она дает несколько лучшее совпадение с опытными данными, чем формула Рейнольдса (5.82).

Дальнейшее усовершенствование схемы Прандтля — Тэйлора было предпринято Карманом (1934, 1939), принявшим в расчет «промежуточный слой» $\alpha_v < z_+ < \alpha_l$ (где $\alpha_v = 5$, $\alpha_l = 30$; см. выше стр. 229 и 231). Как уже отмечалось на стр. 237, Карман предположил, что в этой промежуточной области профиль скорости также дается логарифмической формулой вида (5.25), но с другими значениями коэффициентов A и B; в частности, он считал, что $A = \frac{2}{\varkappa} \approx 5$ и, значит, $K = \frac{\varkappa}{2} u_* z = 0{,}2 \nu z_+$ при $5 < z_+ < 30$. При расчете профиля средней температуры (т. е. функции $\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$) предполагалось, что в области $z_+ < 5$ выполняется соотношение (5.80) (т. е. действует только молекулярная теплопроводность), в области $5 < z_+ < 30$ действует и молекулярная, и турбулентная теплопроводность, причем $K_\vartheta = K$, т. е. $\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = \frac{q_0}{c_p \rho (\chi + 0{,}2 u_* z)}$, а при $z_+ > 30$ коэффициентом χ можно пренебречь и считать, что $\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = \frac{q_0}{c_p \rho \cdot 0{,}4 u_* z}$ (число Pr_t в этой теории при $z > 5\nu/u_*$ принималось всюду равным единице). Исходя отсюда, легко рассчитать весь ход функции $\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$ (определяемой тремя различными аналитическими выражениями) и, в частности, найти значение постоянной C; для c_h при этом получается формула

$$c_h = \frac{\frac{1}{2} c_f}{1 + 5\left[(\mathrm{Pr} - 1) + \ln \frac{1 + 5\mathrm{Pr}}{6}\right] \sqrt{\frac{c_f}{2}}}. \qquad (5.84)$$

При $\mathrm{Pr} = 1$ эта формула снова обращается в (5.82), но при значениях Pr порядка нескольких единиц или одного-двух десятков (т. е. в случае обычных капельных жидкостей) она дает заметно лучшее совпадение с опытными данными, чем формула Прандтля — Тэйлора (5.83). Однако при очень больших или очень малых значениях Pr формула (5.84) также приводит к резким расхождениям с экспериментом.

В дальнейшем разными авторами был предложен ряд новых полуэмпирических (или просто эмпирических) формул для величины c_h (или Nu); см. по этому поводу работы, цитированные на стр. 237—238, а также статьи Рибо (1941), Капицы (1947), Шервуда (1950), Левича (1951), Рейхардта (1951б), Чепмена и Кестера (1953), Дейслера (1951, 1954), Ван Дриста (1959) и Сполдинга (1963), в которых можно найти много дополнительных ссылок. В значительной части этих работ основное усовершенствование теории заключалось в выборе, исходя из тех или иных интуитивных или эмпирических соображений, более сложного выражения для функции $\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$, задаваемого обычно в виде некоторой формулы для $K_\vartheta = \frac{q_0}{c_p \rho \, d\bar{\vartheta}/dz} - \chi$. После этого вычисление профиля $\bar{\vartheta}(z)$ (т. е. функции $\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$) и определение коэффициента c_h сводится к некоторому интегрированию (которое в случае более сложных теорий приходилось выполнять численно). Мы здесь не будем останавливаться на соответствующих результатах, имеющих в основном чисто технический характер, а рассмотрим лишь принципиально важный вопрос

об особенностях теплопередачи при очень больших или очень малых числах Прандтля.

В обоих этих предельных случаях явно неоправданным является содержащееся в теории Прандтля — Тэйлора и в теории Кармана предположение, что толщину слоя молекулярной теплопроводности можно оценить при помощи формулы $\delta_v' = \alpha_v \frac{\nu}{u_*}$, где α_v находится по излому профиля средней скорости и, следовательно, не зависит от Pr. Начнем со случая очень малых чисел Прандтля, характерных, в первую очередь, для жидких металлов. Поскольку в этом случае χ очень велико, слой молекулярной теплопроводности оказывается много толще вязкого подслоя; поэтому пренебрежение коэффициентом χ во всей области логарифмического профиля средней скорости здесь безусловно должно привести к серьезным ошибкам. Чтобы их избежать, многие авторы, специально занимавшиеся теорией турбулентного теплообмена в жидких металлах (например Мартинелли (1947), Лион (1951), Ликудис и Тулукян (1958) и др.), вообще нигде не пренебрегали молекулярной теплопроводностью. На самом деле это, разумеется, не является необходимым (во всяком случае, при рассмотрении идеализированного течения во всем полупространстве $z > 0$); но толщину δ_v' слоя, внутри которого коэффициент χ еще играет роль (т. е. сравним по порядку величины с турбулентным коэффициентом K_ϑ), при $\mathrm{Pr} \ll 1$ следует оценивать при помощи соотношения $\delta_v' u_* \sim \chi$ (поскольку $K \sim u_* z$ при $z \gg \frac{\nu}{u_*}$, а коэффициент K_ϑ по порядку величины должен совпадать с K). Поэтому, например, в простейшей «двухслойной модели» Прандтля — Тэйлора при $\mathrm{Pr} \ll 1$ следует считать, что $\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$ задается формулой (5.80) при $z_+ < \beta_v \frac{\chi}{\nu} = \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$ (где β_v уже не зависит от Pr и имеет тот же порядок, что и безразмерная толщина вязкого подслоя α_v) и задается формулой (5.77′) при $z_+ > \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$, так что $C = \varkappa \beta_v - \alpha \ln \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$. Исходя отсюда, уже легко рассчитать коэффициент теплопередачи c_h. Такой расчет и был выполнен Левичем (1959), принявшим, что $\beta_v = 11{,}7$, $\alpha = 1{,}2$. Несмотря на грубость использованных при этом расчете предположений, оказалось, что полученная таким путем формула неплохо соответствует большому числу эмпирических данных о теплопередаче при турбулентном течении жидких металлов в трубах.

Второй предельный случай $\mathrm{Pr} \gg 1$, встречающийся при изучении теплопередачи в технических маслах или диффузии материальных примесей в капельных жидкостях, значительно более сложен. Дело в том, что здесь слой молекулярной теплопроводности гораздо тоньше вязкого подслоя и, следовательно, уже при $z \ll \nu/u_*$ перенос тепла (или примеси) определяется в основном турбулентной теплопроводностью (диффузией). В то же время количественные характеристики турбулентности хуже всего известны как раз в области $z \lesssim \nu/u_*$, в которой молекулярная вязкость еще играет очень значительную роль. Так как к задаче независимого определения поведения сразу двух функций $f(z_+)$ и $\varphi(z_+)$ в этой области пока не видно подходов, то обычно предполагается, что коэффициенты K и K_ϑ при $z \lesssim \nu/u_*$ или точно совпадают между собой, или же отличаются лишь постоянным множителем α (выбираемым более или менее произвольно или же грубо оцениваемым по эмпирическим данным). При этом изучение турбулентной теплопередачи при $\mathrm{Pr} \gg 1$ сводится к исследованию асимптотического поведения турбулентного напряжения трения $-\rho \overline{u' w'}$ (или, что эквивалентно, одной

лишь функции $f(z_+)$) при $z \ll \nu/u_*$ (т. е. при $z_+ \ll 1$), которому именно по этой причине и было посвящено большое число работ (см. выше стр. 237—238). Предположим теперь, что $K \sim K_\vartheta \sim z^m$ при $z \to 0$ (т. е. что $\overline{u'w'} \sim \overline{\vartheta' w'} \sim z^m$ и, значит, $\left[f(z_+) - z_+\right] \sim \left[\varphi(z_+, \mathrm{Pr}) - \varkappa \mathrm{Pr} \cdot z_+\right] \sim z_+^{m+1}$). Так как толщина δ_v вязкого подслоя определяется условием $K(\delta_v) \sim \nu$, а толщина δ_v' подслоя молекулярной теплопроводности — условием $K_\vartheta(\delta_v') \sim \chi$, то очевидно, что в рассматриваемом случае

$$\delta_v' \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{m}} \delta_v \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{m}} \frac{\nu}{u_*}.$$

Профиль $\overline{\vartheta}(z)$ в слое $\delta_v' < z < \delta_v$ в первом приближении можно описать уравнением $q_0 = c_p \rho K_\vartheta \frac{d\overline{\vartheta}}{dz} \sim z^m \frac{d\overline{\vartheta}}{dz}$ (так что $\overline{\vartheta}(z) \sim \mathrm{const} - z^{-m+1}$), а при $z > \delta_v$ он обращается в логарифмический профиль (5.77). Исходя отсюда, нетрудно рассчитать и коэффициент теплопередачи (или диффузии) c_h; при этом получается, что асимптотически при $\mathrm{Pr} \gg 1$

$$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{m-1}{m}}, \quad \text{если} \quad K_\vartheta \sim z^m \tag{5.85}$$

(ср. Левич (1959)). Однако относительно значения показателя m, как уже отмечалось выше, в настоящее время еще нет окончательного мнения. Мы видели, что в силу уравнения неразрывности должно быть $m \geqslant 3$; если принять, что $m = 3$, то согласно (5.85)

$$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{2}{3}} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \gg 1. \tag{5.85'}$$

Предположение, что $m=3$, позволило Мерфри (1932) получить формулу для c_h, хорошо описывающую всю совокупность имевшихся тогда данных о теплопередаче в потоках газов, воды и технических масел (с числами Прандтля, доходившими до 1000); позже к аналогичным выводам пришел также Рибо (1941). Чисто эмпирически соотношение (5.85′) было найдено Чилтоном и Колбэрном (1934), изучавшими диффузию в капельных жидкостях (без всяких ссылок на работы о теплопередаче); в дальнейшем оно было подтверждено и рядом других исследователей, из которых следует отметить Линя, Дентона и др. (1951), тщательно измеривших скорость диффузии ионов в электрохимических реакциях (при числах Прандтля, меняющихся от 300 до 3000). В начале 50-х годов предположение о том, что $m=3$, снова начало широко использоваться в теоретических работах как по турбулентной теплопередаче (Рейхардт (1951б)), так и по турбулентной диффузии (Линь, Маултон, Патнем (1953)). Тем не менее, еще позже Рэнни (1956) допустил, что $m=2$, и получил, исходя отсюда, формулу $c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{2}}$, неплохо описывающую эмпирические данные по теплопередаче при $\mathrm{Pr} \leqslant 120$ (но не при бо́льших значениях Pr). В то же время многие авторы (например, Левич (1944, 1951, 1959), Дейслер (1959), Лойцянский (1960)) склонны настаивать на том, что $m = 4$, и, следовательно,

$$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{3}{4}} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \gg 1; \tag{5.88''}$$

этот результат также прекрасно описывает всю совокупность эмпирических данных о турбулентной теплопередаче и диффузии при значениях Pr вплоть до 4000. Так как показатели 2/3 и 3/4 отличаются лишь на 1/12, и к тому же все теории теплопередачи при больших Pr используют некоторые допущения (например, об отношении $\alpha = K_\vartheta/K$) и содержат дополнительные неизвестные параметры, то выяснить по эмпирическим данным, равно ли m трем или четырем, естественно, очень трудно (тем более, что всегда остается возможность, что коэффициент c_4 положителен, но очень мал). Однако можно утверждать, что пропорциональность коэффициента c_h при больших Pr функции $(\mathrm{Pr})^{-1}$ (в соответствии с формулами Прандтля — Тэйлора и Кармана) или функции $(\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{2}}$ (в соответствии с формулой Рэнни) определенно опровергается данными опытов, как этого и следовало ожидать, исходя из теоретических соображений, позволяющих строго доказать, что $m \geqslant 3$.

Разумеется, все предыдущие соображения относились лишь к случаю теплообмена или диффузии около гладкой стенки. В случае же шероховатой стенки проблема еще значительно усложняется (см. Нуннер (1956), Оуэн и Томсон (1963)); на этом, однако, мы не будем останавливаться.

5.8. Полуэмпирические теории турбулентности

Мы уже указывали в п. 5.1, что в случае турбулентных течений законы механики выражаются системой уравнений Рейнольдса, число неизвестных в которой превосходит число уравнений. Поэтому уравнения Рейнольдса позволяют лишь сделать вывод о наличии определенных связей между различными статистическими характеристиками турбулентности, но они не могут быть «решены» в обычном смысле этого слова. Таким образом, при выборе решений уравнений Рейнольдса, имеющих физический смысл, какие-то функции, описывающие турбулентность, обязательно должны быть заданы независимо от этих уравнений. В некоторых случаях вид таких функций может быть найден (с точностью до небольшого числа эмпирически определяемых констант) исходя из соображений размерности; чаще, однако, использование соображений размерности все равно приводит к соотношениям, содержащим неизвестные функции, которые приходится затем находить по данным экспериментов. Общее число таких неизвестных функций, необходимых для описания различных турбулентных течений, встречающихся в природе или в инженерно-технических устройствах, весьма велико; поэтому естественно, что многие исследователи стремились свести определение этих функций к нахождению небольшого числа связей между статистическими характеристиками турбулентности, применимых сразу ко многим различным течениям. Теории турбулентности, использующие наряду со строгими уравнениями гидромеханики также некоторые дополнительные связи, найденные чисто эмпирически по данным экспериментов или же выведенные с помощью качественных рассуждений наглядно-физического характера и затем прове-

ренные на опыте, называются *полуэмпирическими теориями.* Разумеется, все эти теории с точки зрения «чистой» теоретической физики должны рассматриваться как нестрогие, но для исследований в области турбулентности они очень характерны; в развитии наших представлений о турбулентных течениях полуэмпрические теории сыграли очень большую роль, и многие из них до сих пор продолжают широко использоваться в технике. Поэтому представляется целесообразным дать здесь хотя бы краткое представление об основных идеях важнейших полуэмпирических теорий, предложенных Буссинеском (1897), Прандтлем (1925), Тэйлором (1915, 1932) и Карманом (1930). Этому и будет посвящен настоящий пункт; дальнейшее развитие такого подхода к теории турбулентности и некоторые конкретные примеры применения полуэмпирических теорий будут рассмотрены в следующем параграфе.

Незамкнутость системы уравнений Рейнольдса относительно средних значений гидродинамических полей вызывается наличием в ней дополнительных членов, содержащих турбулентные напряжения (напряжения Рейнольдса). Отсюда ясно, что простейший путь замыкания этой системы уравнений состоит в установлении связей между осредненными гидродинамическими полями, с одной стороны, и напряжениями Рейнольдса, с другой стороны, позволяющих выразить последние величины через первые. Ниже мы перечислим несколько связей такого рода, предложенных различными исследователями в разное время.

Будем рассматривать лишь простейшие плоскопараллельные течения, в которых отлична от нуля только x-компонента средней скорости $\bar{u}_x=\bar{u}$, зависящая лишь от координаты z (или, что почти то же самое, течения в круглой трубе, в которых средняя скорость $\bar{u}$ всюду направлена вдоль оси Ox и зависит лишь от расстояния $z=R-r$ до стенки трубы). В таком случае уравнения Рейнольдса будут иметь вид (5.16) (или аналогичный вид в полярной системе координат); поэтому профиль средней скорости здесь будет определяться одним уравнением (первым уравнением (5.16) или уравнением (5.17′)), содержащим одно-единственное дополнительное неизвестное $\tau^{(1)}=-\rho\overline{u'w'}$. Следовательно, для определения функции $\bar{u}(z)$ надо только уметь выразить $\tau^{(1)}$ через $\bar{u}(z)$.

Простейшее возможное предположение о связи турбулентного напряжения $\tau^{(1)}=-\rho\overline{u'w'}$ с профилем $\bar{u}(z)$ — это предположение Буссинеска (1897) о существовании соотношения вида (5.5), содержащего некоторый коэффициент турбулентной вязкости K. Собственно говоря, само по себе соотношение (5.5) даже не является предположением и не устанавливает новой

связи; оно только заменяет неизвестное $\tau^{(1)}$ новым неизвестным $K=\dfrac{\tau^{(1)}}{\rho\,(d\bar{u}/dz)}$. Если, однако, предположить, что K зависит от ординат каким-либо определенным образом, то при этом мы сразу приходим к полуэмпирической теории, основанной на некоторой гипотезе и допускающей проверку на опыте.

Самое простое допущение о величине K состоит в том, что ее значение просто считается постоянным. Легко понять, однако, что в применении к течению в плоском канале или круглой трубе это допущение приводит к заведомо неверным результатам. В самом деле, при $K=\text{const}$ уравнения для средней скорости турбулентного течения отличались бы от соответствующих уравнений для ламинарного течения лишь числовым значением коэффициента вязкости, и, следовательно, из них следовало бы, что профиль скорости и в этом случае должен быть параболическим. В то же время известно, что такой профиль не соответствует данным экспериментов (ср. рис. 32 на стр. 258).

В полученном противоречии, разумеется, нет ничего неожиданного — хорошо известно, что при приближении к стенке коэффициент K должен стремиться к нулю (и притом даже не медленнее, чем третья степень расстояния от стенки; см. стр. 228); поэтому предположение о постоянстве K никак не может быть применено к течению при наличии твердых стенок. Однако в некоторых задачах, касающихся, например, турбулентных струй, распространяющихся в безграничном пространстве, или турбулентности в свободной атмосфере, предположение $K=\text{const}$ оказывается не столь уж плохим. В этих случаях подстановка соотношения (5.5) с постоянным K в уравнение Рейнольдса приводит к полуэмпирическому уравнению, содержащему неизвестный параметр K, который следует определять по данным наблюдений, и которому в разных случаях приходится приписывать весьма различные значения.

В случае течений, ограниченных стенками, нельзя считать, что $K=\text{const}$; но здесь в ряде случаев можно выдвинуть другие разумные гипотезы о коэффициенте турбулентной вязкости K, позволяющие доопределить соответствующие уравнения Рейнольдса. Так, например, в случае плоскопараллельного течения около плоской стенки (но не слишком близко от нее — за пределами вязкого подслоя) к хорошим результатам приводит гипотеза о пропорциональности коэффициента K расстоянию до стенки: из нее немедленно вытекает логарифмическая формула (5.22) для профиля скорости, согласующаяся с выводами из соображений размерности. Для течений в трубах, каналах и пограничном слое также был предложен ряд гипотез о зависимости K от расстояния до стенки z; в качестве примера можно

указать на заметку Госса (1961), в которой показано, что для труб и пограничного слоя к неплохо согласующимся с опытом результатам приводит предположение о пропорциональности K функции $1-\left(1-\frac{z}{\delta}\right)^2$, где δ — радиус трубы или толщина пограничного слоя. В непосредственной близости от стенки взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного трения приводит к зависимости вида $K=\varkappa u_* z\varphi(zu_*/\nu)$; некоторые полуэмпирические гипотезы о виде функции φ были предложены Дейслером (1955), Рэнни (1956), Левичем (1959) и другими авторами (см. выше стр. 237—238). В приземном слое атмосферы при устойчивой термической стратификации коэффициент K по всем имеющимся данным с ростом высоты z сначала возрастает почти линейно, а затем это возрастание становится более медленным, и при достаточно больших z турбулентную вязкость можно считать практически постоянной. В соответствии с этим разными исследователями был предложен ряд формул для $K(z)$, согласующихся с указанными здесь общими закономерностями (см., например, Юдин и Швец (1940), Дородницын (1941), Берлянд (1947)). Каждой из этих формул отвечает свой вариант полуэмпирической теории, позволяющий (после определения по данным наблюдений всех параметров, входящих в выбранную формулу для $K(z)$) с той или иной точностью рассчитать изменение скорости ветра с высотой и решить некоторые другие интересные для метеорологии задачи.

При исследовании закономерностей переноса пассивных консервативных примесей в турбулентном потоке роль турбулентного напряжения $\tau^{(1)}=-\rho\overline{u'w'}$ играет турбулентный поток массы $j^{(1)}=-\rho\overline{\vartheta'w'}$ или тепла $q^{(1)}=-c_p\rho\overline{\vartheta'w'}$, а роль коэффициента K — коэффициент K_ϑ, определяемый соотношением (5.9′). По поводу этого коэффициента можно дословно повторить все то, что выше говорилось о коэффициенте K (см., в частности, ниже § 10, где в связи с обсуждением вопроса о диффузии в атмосфере будут рассмотрены некоторые полуэмпирические теории, использующие определенную форму зависимости коэффициента K_ϑ от координаты z).

Часто, однако, понятие коэффициента турбулентной вязкости (или теплопроводности, или диффузии) ничем не облегчает задачу исследования турбулентных потоков в связи с тем, что выбор приемлемого допущения об этой величине наталкивается на большие трудности, и неясно, чем при таком выборе следует руководствоваться. Для облегчения этого выбора были разработаны некоторые другие полуэмпирические теории, во многих из которых основную роль играет понятие *пути перемешивания*,

введенное Прандтлем (1925) (в слегка отличной форме та же идея еще раньше высказывалась Тэйлором (1915)).

Применение понятия пути перемешивания легче всего проиллюстрировать на примере турбулентного переноса консервативной пассивной примеси ϑ. Пусть средняя концентрация $\overline{\vartheta}$ зависит только от координаты z, так что основной интерес представляет перенос этой примеси по направлению оси Oz. Будем считать, что перенос осуществляется лишь турбулентными пульсациями скорости. Наглядно это можно представить себе так, что в среде случайным образом возникают отдельные струйки, переносящие примесь с одного уровня $z=\text{const}$ на другой. Будем считать, что каждая такая струйка проходит по направлению оси Oz путь l' и только после этого перемешивается с окружающей средой; в таком случае l' и будет длиной пути перемешивания. Заметим теперь, что согласно принятому предположению на уровень z будут попадать только струйки, зародившиеся на уровне $z-l'$ и двигающиеся вверх, или зародившиеся на уровне $z+l'$ и двигающиеся вниз. Если еще считать, что перемешивание струйки происходит не постепенно, а сразу, то струйка, зародившаяся на уровне $z-l'$, донесет до уровня z свою исходную концентрацию примеси, равную в среднем $\overline{\vartheta}(z-l')$, а струйка, зародившаяся на уровне $z+l'$, донесет концентрацию, в среднем равную $\overline{\vartheta}(z+l')$. Таким образом, попав на уровень z, рассматриваемые струйки будут содержать примесь в концентрации, отличающейся от средней концентрации на этом уровне, т. е. будут приводить к появлению пульсации концентрации, равной $\overline{\vartheta}(z\mp l')-\overline{\vartheta}(z)\approx\mp l'\frac{d\overline{\vartheta}(z)}{dz}$. Ясно, что струйкам, двигающимся вверх, отвечает положительное значение пульсационной вертикальной скорости w', а двигающимся вниз — отрицательное значение w'. Поэтому если считать l' также имеющим знак, положительный для струек, движущихся вверх, и отрицательный для струек, движущихся вниз, то

$$j^{(1)}=-\rho\overline{w'\vartheta'}=\rho\overline{l'w'}\frac{d\overline{\vartheta}}{dz}. \tag{5.86}$$

Отсюда видно, что коэффициент турбулентной диффузии K^ϑ очень просто выражается через длину пути перемешивания (являющуюся, вообще говоря, случайной величиной):

$$K_\vartheta=\overline{l'w'}. \tag{5.87}$$

Формулу (5.86) можно попытаться использовать не только для подсчета потоков пассивных консервативных примесей, но и для описания турбулентного обмена импульсом. Эта идея

лежит в основе известной *теории переноса импульса* Прандтля (1925), предположившего, что для продольной компоненты импульса ρu также существует определенный путь перемешивания l' и, следовательно,

$$\tau^{1)} = -\rho\overline{u'w'} = \rho l'\overline{w'}\,\frac{d\bar{u}}{dz}, \qquad K = l'\overline{w'}. \tag{5.88}$$

Длина l' здесь, очевидно, в известном смысле аналогична длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов — она определяет путь, который проходит небольшой элемент жидкости («струйка»), прежде чем он перемешается с прочими жидкими частицами и передаст им свой импульс. В этом смысле формула (5.88) для K аналогична известному из кинетической теории газов выражению для коэффициента молекулярной вязкости: $\nu \sim l_m u_m$, где l_m — длина свободного пробега, u_m — скорость теплового движения молекул. Разумеется, длина l' на много порядков больше, чем l_m; поэтому, несмотря на то, что u_m обычно больше, чем w', формула (5.88) приводит к значениям K, намного превосходящим ν.

Заметим теперь, что струйки, попадающие в слой z из слоев $z - l'$ и $z + l'$, будут в среднем иметь продольную скорость $\bar{u}(z - l')$ и соответственно $\bar{u}(z + l')$, так что в обоих случаях они будут создавать пульсацию u' продольной скорости, близкую по абсолютной величине к $\left| l'\frac{d\bar{u}}{dz}\right|$. Допустив далее, что пульсации вертикальной скорости w' по абсолютной величине близки к пульсациям продольной скорости u', так что

$$w' \sim u' \sim l'\frac{d\bar{u}}{dz},$$

Прандтль представил турбулентное напряжение $\tau^{(1)}$ в виде

$$\tau^{(1)} = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dz}\right| \frac{d\bar{u}}{dz}, \tag{5.89}$$

где l — новая длина, имеющая тот же порядок, что и среднее квадратичное значение случайной длины l' [1]). Знак абсолютной величины в формуле (5.89) поставлен для того, чтобы напряжение $\tau^{(1)}$ всегда имело тот же знак, что и $\frac{d\bar{u}}{dz}$, так как импульс всегда передается от слоев жидкости, двигающихся более быстро, к слоям, двигающимся более медленно. Длина l в формуле (5.89), которая теперь уже не является случайной величиной, обычно также называется длиной пути перемешивания.

Формула (5.89) позволяет представить коэффициент турбулентной вязкости в виде

$$K = l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dz}\right|, \tag{5.90}$$

где l — длина, которая, вообще говоря, зависит от координат и характеризует масштаб турбулентности (средний размер турбулентных возмущений) в данной точке. После этого определение профиля средней скорости требует лишь задания явного вида зависимости длины l от координат. Поскольку при течении около бесконечной плоской стенки, характеризуемом постоянным значением τ, в области за пределами вязкого подслоя не существует никакого масштаба длины, всякая величина размерности длины должна быть здесь пропорциональной расстоянию от стенки. Полагая $l = \varkappa z$ и $\tau^{(1)} = \tau = \rho u_*^2 = \text{const}$, из (5.89) получим, что $\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\varkappa z}$, т. е. $\bar{u} = \frac{1}{\varkappa}\ln z + \text{const}$ (см. Прандтль (1932б)). Таким образом, мы снова пришли к логарифмическому закону для профиля скорости, который, как мы видели, прекрасно подтверждается на опыте. Для течения в плоском канале или в круглой трубе в качестве первого приближения можно даже предположить, что соотношение $l = \varkappa z$ остается справедливым вплоть до середины канала или оси трубы. Подставляя это соотношение в (5.89) и заменяя здесь левую часть значением (5.17) или (5.17′) (т. е. снова отождествляя $\tau^{(1)}$ с $\tau = \tau^{(1)} + \nu\frac{d\bar{u}}{dz}$), получим дифференциальное уравнение относительно $\bar{u}(z)$, которое при соответственном подборе постоянной $\varkappa$ приводит к профилю скорости, неплохо соответствующему данным опыта в значительной части сечения канала или трубы (см. Гольдштейн (1938)). Однако непосредственно вблизи от центра канала или трубы это приближение оказывается явно неприемлемым; здесь значительно лучше считать путь перемешивания приблизительно постоянным. Полагая, например, для трубы радиуса R, что $l = \beta R$, в силу формул (5.17′) и (5.89) будем иметь

$$\rho\left(\beta R\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2 = \rho u_*^2\left(1 - \frac{z}{R}\right).$$

[1]) Разумеется, l не равно просто $(\overline{l'^2})^{\frac{1}{2}}$ так как w' лишь имеет тот же порядок, что и $l'\frac{d\bar{u}}{dz}$, но не должно для каждой струйки точно совпадать с величиной $l'\frac{d\bar{u}}{dz}$.

Интегрируя это уравнение при краевом условии $\bar{u}(R)=U_0$, получим

$$\frac{U_0-\bar{u}(z)}{u_*}=\frac{2}{3\beta}\left(1-\frac{z}{R}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Последний результат, как показал еще Дарси (1858), при $\beta\approx$ $\approx 0{,}13$ хорошо соответствует экспериментальным данным в области $0{,}25<\frac{z}{R}<1$ (см. стр. 259). Наконец, для того чтобы получить совпадение с опытными данными при всех значениях $\frac{z}{R}$ вне пределов вязкого подслоя, в случае течения в круглой трубе следует положить

$$l=R\left[0{,}14-0{,}08\left(1-\frac{z}{R}\right)^2-0{,}06\left(1-\frac{z}{R}\right)^4\right] \qquad (5.91)$$

(Никурадзе (1932)). Последняя формула при $\frac{z}{R}\ll 1$ принимает вид $l=0{,}4z-0{,}44\frac{z^2}{R}+\ldots\approx 0{,}4z$, а при $\frac{z}{R}\to 1$ она обращается в соотношение $l\approx 0{,}14R$, т. е. она может рассматриваться как интерполяционная формула между выражениями для l вблизи стенки и в центре. Близкое распределение l по сечению трубы предложил также Обухов (1942), высказавший одновременно некоторую гипотезу о длине l, позволяющую находить ее зависимость от координат для труб любого сечения. Непосредственно около стенки (в пределах вязкого подслоя) l, по-видимому, должно убывать при убывании z быстрее, чем по линейному закону; гипотезы о поведении l в этой области течения предлагались Ротта (1950), Хама (1953), Ван Дристом (1956) и другими авторами.

В дальнейшем Прандтль указал некоторые обобщения теории переноса импульса, применимые, например, к трехмерным течениям (ср. Гольдштейн (1938), § 81) или же учитывающие возможность того, что при $\frac{d\bar{u}}{dz}=0$ турбулентная вязкость в противоречии с (5.90) будет все же отлична от нуля (Прандтль (1942)). Мы здесь, однако, не будем останавливаться на этих обобщениях, а перейдем сразу к предложенной Тэйлором *теории переноса вихря* — второй основной полуэмпирической теории.

Появление этой теории было связано с попыткой учета влияния пульсаций давления на перемещающиеся жидкие частицы, приводящего к изменению их импульса и поэтому не позволяющего считать импульс консервативной примесью, сохраняющейся при перемещении элементов жидкости. Исходя отсюда, Тэйлор

(1915), впервые вводя понятие «пути перемешивания», в отличие от Прандтля предположил, что «путь перемешивания» должен существовать для вихря скорости, а не для импульса; впоследствии эту идею он развил более подробно (см. Тэйлор (1932)).

Идея Тэйлора наиболее обоснована для двумерного потока, в котором, как известно, в отсутствие вязкости вихрь скорости переносится при движении жидких частиц без изменения. Поэтому единственная компонента вихря $\omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}$ двумерного потока с полем скорости $\boldsymbol{u}=\{u, w\}$ всюду вне вязкого подслоя является консервативной величиной. Турбулентное напряжение трения $\tau=-\rho\overline{u'w'}$ двумерного потока со средней скоростью $\bar{\boldsymbol{u}}=\{\bar{u}, 0\}$, всюду параллельной оси Ox, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}=-\left(\overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}\right)=$$
$$=-\overline{w'\left(\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right)}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2}-\overline{w'^2}\right)$$

(здесь использовано уравнение неразрывности для пульсаций скорости: $\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$). В случае потока, однородного вдоль оси Ox, производные по x от осредненных величин будут равны нулю; следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=-\rho\overline{w'\omega_y'}. \qquad (5.92)$$

Введем теперь путь перемешивания для вихря l_1', так что $\omega_y'=l_1'\frac{\partial\bar{\omega}_y}{\partial z}$; тогда $\rho\overline{w'\omega_y'}=\rho\overline{w'l_1'}\frac{\partial\bar{\omega}_y}{\partial z}$. Что же касается величины w', то ее, как и в теории Прандтля, представим в виде $w'=l'\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$, где l' — случайная длина пути перемешивания для скорости. Заметив, что в рассматриваемом случае $\bar{\omega}_y=\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=\frac{d\bar{u}}{dz}$, и, значит, $\frac{d\bar{\omega}_y}{dz}=\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}$, окончательно получаем

$$\frac{d\tau}{dz}=\rho l_1^2\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}, \qquad (5.93)$$

где $l_1=\left(-\overline{l'l_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$ — характерная длина, играющая в теории Тэйлора ту же роль, что и длина l в теории Прандтля. Разумеется, если учитывать, что на самом деле возмущения поля скорости плоскопараллельного потока могут быть и трехмерными,

то приведенный вывод формулы (5.93) теряет свою убедительность — при этом указанную формулу приходится рассматривать лишь как эмпирическую связь, допускающую проверку на опыте. Формула (5.93) также допускает некоторые дальнейшие обобщения (см., например, Тэйлор (1935в) или Гольдштейн (1938); §§ 84—85); на этом, однако, мы здесь не будем задерживаться.

Если $l_1=\text{const}$, то формула (5.93) оказывается точно эквивалентной формуле Прандтля (5.89). В самом деле, при $l_1=\text{const}$, интегрируя (5.93) по z, получим $\tau=\frac{1}{2}\rho l_1^2\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2$, что совпадает с формулой Прандтля, если положить $l_1=l\sqrt{2}$. Вообще же теория Тэйлора приводит к несколько иным результатам, чем теория Прандтля. В применении к напорным течениям в плоском канале или круглой трубе теория Тэйлора с $l_1=\varkappa_1 z$ (где приходится считать, что $\varkappa_1\approx 0{,}23$ в случае канала и $\varkappa_1\approx 0{,}19$ в случае трубы) позволяет получить зависимость средней скорости от z, которая почти вплоть до самой середины канала или центра трубы неплохо согласуется с опытными данными (см. Гольдштейн (1938), §§ 156—157).

Аналогично выводу формулы (5.89), при помощи подстановки соотношения $w'=l'\frac{d\bar{u}}{dz}$ в равенство (5.86) можно вывести равенство

$$j^{(1)}=\rho l_2^2\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{d\bar{\vartheta}}{dz},\qquad K_\vartheta=l_2^2\frac{d\bar{u}}{dz},\tag{5.94}$$

где l_2 — еще одна длина пути перемешивания, характеризующая теперь уже перенос пассивной консервативной примеси ϑ. Соотношение между длинами l_2 и l (или l_1) определяет значение турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr}_t=\frac{K}{K_\vartheta}$ (или величины $\alpha=\frac{K_\vartheta}{K}$). Так, например, в области течения, в которой можно положить $l=\text{const}$, значению $l_2=l$ отвечает $\mathrm{Pr}_t=\alpha=1$, в то время как при $l_2=l_1$ получается $\mathrm{Pr}_t=\frac{1}{2}$, $\alpha=2$. Теоретически, разумеется, длина l_2 не обязана совпадать ни с l, ни с l_1, так что нельзя считать (как это иногда делается), что из теории переноса импульса вытекает значение $\mathrm{Pr}_t=1$, а из теории переноса вихря — значение $\mathrm{Pr}_t=\frac{1}{2}$; на самом деле соотношение между длинами l_2, l и l_1 можно пытаться определить лишь на основании данных экспериментов.

Как теория переноса импульса Прандтля, так и теория переноса вихря Тэйлора не решают полностью вопроса о связи между напряжениями Рейнольдса и полем средней скорости, так как в этих теориях вводится новая величина — длина пути перемешивания, определение которой для всех точек течения требует привлечения дополнительных гипотез. Весьма общей гипотезой, позволяющей, в частности, во всех случаях установить связь между длиной l и осредненным полем скорости, является предложенная Карманом (1930) *гипотеза о локальном кинематическом подобии* поля турбулентных пульсаций скорости. Согласно этой гипотезе поля турбулентных пульсаций скорости в окрестности каждой точки развитого турбулентного течения (за исключением лишь точек тонкого «вязкого подслоя» около стенок, в котором непосредственно проявляется действие вязкости) подобны друг другу и отличаются лишь масштабами длины и времени (или, что то же самое, длины и скорости). Чтобы записать эту гипотезу математически, введем в окрестности каждой точки потока $\boldsymbol{x}_0$ подвижную систему отсчета, движущуюся со скоростью, равной средней скорости $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$ в данной точке; в таком случае координатами в этой системе отсчета будут компоненты вектора $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0-\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)t$. Согласно гипотезе Кармана, в каждой точке $\boldsymbol{x}_0$ могут быть определены такой масштаб длины $l(\boldsymbol{x}_0)$ и такой масштаб скорости $U(\boldsymbol{x}_0)$, что в окрестности этой точки поле турбулентных пульсаций скорости будет иметь вид

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}),\qquad \boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0-\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)t}{l(\boldsymbol{x}_0)},\tag{5.95}$$

где функция $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})$ универсальна, т. е. не зависит от точки $\boldsymbol{x}_0$ (а следовательно, и от поля средней скорости $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$). Таким образом, в теории Кармана связь между характеристиками турбулентных пульсаций и полем осредненной скорости имеет место лишь благодаря зависимости масштабов l и U от поля $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$.

Чтобы определить зависимость масштабов l и U от средней скорости течения в случае плоскопараллельного стационарного течения со средней скоростью $\bar{u}(z)$, всюду направленной вдоль оси Ox и зависящей лишь от z, можно воспользоваться уравнением (1.7) для вихря скорости, y-компонента которого в пренебрежении вязкостью будет иметь вид

$$\frac{\partial\omega_y}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\omega_y}{\partial x_\alpha}-\omega_\alpha\frac{\partial u_y}{\partial x_\alpha}=0.\tag{5.96}$$

Подставляя в это уравнение значение полной скорости $\boldsymbol{u}=u(z_0)\,\boldsymbol{i}+U(z_0)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор оси Ox, а $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}=\left\{\frac{x-\bar{u}(z_0)t}{l(z_0)},\ \frac{y}{l(z_0)},\ \frac{z-z_0}{l(z_0)}\right\}$ — вектор относитель-

ных безразмерных координат (и предполагается, что $x_0=y_0=0$), можно перейти от уравнения (5.96) к некоторому уравнению относительно неизвестных $v_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, 3$, с коэффициентами, содержащими величины $U(z_0)$, $l(z_0)$, $\bar{u}(z_0)$ и их производные по z_0. Согласно принятой гипотезе об универсальности функций $v_\alpha(\xi)$, коэффициенты последнего уравнения не должны зависеть от z_0. Таким образом, могут быть получены соотношения

$$\frac{l(z_0)}{U(z_0)}\frac{d\bar{u}(z_0)}{dz_0}=\text{const}, \qquad \frac{l^2(z_0)}{U(z_0)}\frac{d^2\bar{u}(z_0)}{dz_0^2}=\text{const}$$

(см., например, Гольдштейн (1938), § 158 или Шлихтинг (1951), гл. XIX, § 5, где соответствующий вывод подробно проведен для частного случая двумерного поля $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$). Отсюда вытекает, что

$$l=-\varkappa\frac{d\bar{u}}{dz}\Big/\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}, \qquad U=Bl\frac{d\bar{u}}{dz}, \tag{5.97}$$

где $\varkappa$ и B — универсальные постоянные (которым, вообще говоря, можно придать любое значение, так как масштабы l и U пока определены лишь с точностью до произвольного множителя).

Первое из соотношений (5.97), очевидно, может быть выведено и непосредственно с помощью соображений размерности, если потребовать, чтобы длина l зависела лишь от $\frac{d\bar{u}}{dz}$ и $\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}$ [1]); второе соотношение таким же образом получается из предположения, что и U зависит только от $\frac{d\bar{u}}{dz}$ и $\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}$ (или от l и $\frac{d\bar{u}}{dz}$).

Длина l является, очевидно, аналогом длины пути перемешивания l и l_1 в теориях Прандтля и Тэйлора. В самом деле, в силу (5.95) и (5.97)

$$\tau^{(1)}=-\rho\overline{u'w'}=\rho U^2\overline{v_1(0)v_3(0)}=\text{const}\cdot\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2, \tag{5.98}$$

где $\text{const}=B^2\overline{v_1(0)v_3(0)}$. Аналогично этому показывается, что

$$\frac{\partial\tau^{(1)}}{\partial z}=-\rho\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}=\text{const}\cdot\rho l^2\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}, \tag{5.99}$$

[1]) В силу галилеевской инвариантности уравнений движения характерный масштаб пульсаций l, очевидно, не может зависеть от абсолютного значения средней скорости $\bar{u}(z)$, а зависит только от изменения $\bar{u}$ в окрестности заданной точки, т. е. от производных функции $\bar{u}(z)$. Предположение о зависимости l только от первых двух производных $d\bar{u}/dz$ и $d^2\bar{u}/dz^2$ будет в таком случае простейшей возможной гипотезой об этой величине.

где теперь уже const имеет другое значение. Разумеется, если заменить const единицей в равенстве (5.98) или (5.99), т. е. отождествить длину l с длиной пути перемешивания для импульса или для вихря, то после этого постоянную $\varkappa$ в первом равенстве (5.97) уже нельзя выбирать произвольно, а надо определять, исходя из экспериментальных данных.

Гипотеза Кармана, выраженная соотношением (5.95), при ее буквальном понимании налагает на турбулентные пульсации скорости непомерно жесткие ограничения, не согласующиеся с естественным представлением о нерегулярности изменений пульсационной скорости в пространстве и во времени. Как будет видно из дальнейшего, гипотеза о локальном самоподобии оказывается приемлемой не для индивидуальных реализаций поля пульсационной скорости, а лишь для статистических характеристик такого поля (см. гл. 8 в ч. 2 книги, посвященную гипотезам подобия, предложенным А. Н. Колмогоровым). Существенно, однако, что основные результаты (5.97) теории Кармана могут быть выведены и при гораздо более слабых предположениях; как мы уже видели, в некотором смысле они являются естественными следствиями соображений размерности. Укажем еще, что, как показал Лойцянский (1935), для вывода формул (5.97) гипотезу о локальном самоподобии достаточно применить к среднему полю скорости, потребовав, чтобы в каждой точке $\boldsymbol{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$ был определен такой масштаб $l(z_0)$, для которого при $z_0\leqslant z\leqslant z_0+l$ с точностью до малых третьего порядка относительно l выполняется условие

$$\frac{\bar{u}(z)-\bar{u}(z_0)}{\bar{u}(z_0+l)-\bar{u}(z_0)}=f(\zeta), \qquad \zeta=\frac{z-z_0}{l}. \tag{5.100}$$

В самом деле, с указанной степенью точности имеем

$$\frac{\bar{u}(z)-\bar{u}(z_0)}{\bar{u}(z_0+l)-\bar{u}(z_0)}=\frac{(z-z_0)\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_0+\frac{1}{2}(z-z_0)^2\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0}{l\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_0+\frac{1}{2}l^2\left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_0}=$$

$$=\frac{\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2\left[l\left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)_0\Big/\left(\frac{du}{dz}\right)_0\right]}{1+\frac{1}{2}\left[l\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0\Big/\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_0\right]}.$$

Так как согласно принятой гипотезе последнее выражение не должно зависеть от z_0, то l, очевидно, должно удовлетворять первому равенству (5.97); после этого из условия независимости

от z_0 отношения

$$\frac{\tau(z_0)}{\rho[\bar{u}(z_0+l)-\bar{u}(z_0)]^2} \approx \frac{\tau(z_0)}{\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)_0^2}$$

выводится также и равенство (5.98).

Для безнапорного плоскопараллельного течения над безграничной плоскостью $z=0$ с постоянным напряжением трения $\tau=\rho u_*^2$ соотношение Кармана (5.97) для l в соединении с формулой Прандтля $\tau=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2$ (см. (5.98)) дает

$$u_*=\varkappa\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2\Big/\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}. \tag{5.101}$$

Отсюда снова получается логарифмический профиль средней скорости:

$$\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\varkappa}\ln(z-z_0)+B \tag{5.102}$$

(исторически именно так он и был выведен впервые). В случае напорного течения в плоском канале или круглой трубе наряду с формулами $l=-\varkappa\frac{\bar{u}'}{\bar{u}''}$ и $\tau=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2$ следует использовать еще соотношения (5.17) или (5.17′). При этом удается получить формулы для профиля $\bar{u}(z)$, которые при специальном выборе постоянной $\varkappa$ (различном для канала и для трубы) можно привести в удовлетворительное соответствие с имеющимися опытными данными (см. Гольдштейн (1938)).

5.9. Свободная турбулентность

До сих пор в настоящем параграфе мы рассматривали турбулентные течения в каналах, трубах и пограничных слоях, т. е. течения около твердых стенок, трение о которые приводит к непрерывному порождению завихренности и оказывает непосредственное влияние на весь поток. Но в природе и в технике часто встречаются также турбулентные течения совершенно другого рода, в которых непосредственное влияние каких-либо твердых стенок отсутствует, и которые называются поэтому *свободной турбулентностью*. Важнейшими видами свободных турбулентных течений являются турбулентные следы за обтекаемыми жидкостью (или движущимися сквозь жидкость) твердыми телами, турбулентные струи и зоны турбулентного перемешивания, возникающие на границе между потоками разной скорости, не разделенными какими-либо твердыми стенками.

Свободные турбулентные течения играют большую роль во многих явлениях природы и в ряде технических устройств. Поэтому неудивительно, что их изучению было посвящено очень большое число теоретических и экспериментальных исследований. Эти исследования привели к ряду результатов, полезных для практических расчетов, но они пока еще мало что внесли в наше понимание физической природы турбулентности. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким рассмотрением некоторых общих выводов, касающихся перечисленных выше основных видов свободных турбулентных течений.

Существующие методы описания свободной турбулентности основаны, во-первых, на некоторых гипотезах об автомодельности соответствующих течений и, во-вторых, на использовании полуэмпирических теорий турбулентности типа тех, которые были кратко изложены в предыдущем пункте. Гипотезы об автомодельности опираются на некоторые общие свойства течений жидкости и могут быть обоснованы также с помощью методов подобия и размерности; их рассмотрение представляет определенный физический интерес. Полуэмпирические же теории свободной турбулентности используют кроме общих законов физики еще некоторые дополнительные гипотезы более специального характера; получаемые при этом выводы важны в первую очередь для приложений. В дальнейшем в настоящем пункте мы ограничимся почти исключительно анализом гипотез об автомодельности свободных турбулентных течений.

Начнем с того, что постараемся разъяснить общую идею об автомодельности свободной турбулентности на частном примере трехмерной турбулентной струи, бьющей по направлению оси Ox из конца тонкой трубки диаметра D (но произвольного сечения) в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью. Будем сравнивать друг с другом гидродинамические поля в различных сечениях $x=\text{const}$. Данные наблюдений показывают, что турбулентная струя обычно оказывается относительно узкой, так что продольная компонента средней скорости в струе значительно превосходит поперечную компоненту, а продольные изменения статистических характеристик гидродинамических полей оказываются много меньшими, чем их поперечные изменения. Исходя отсюда естественно ожидать, что свойства гидродинамических полей в данном сечении струи будут в какой-то мере повторять соответствующие свойства в сечениях вверх по потоку. Иначе говоря, следует ожидать, что статистические характеристики гидродинамических полей струи в различных ее сечениях (т. е. при различных значениях x) будут подобны между собой. Это означает, что в каждом сечении $x=\text{const}$ можно ввести такие характерные масштабы длины $L(x)$

и скорости $U(x)$, что безразмерные статистические характеристики, получаемые при использовании этих масштабов, будут уже одинаковыми во всех сечениях. Разумеется, такое подобие не может иметь места начиная сразу же от отверстия, из которого бьет струя; оно представляется правдоподобным лишь на достаточно больших (по сравнению с диаметром D) расстояниях от этого отверстия, на которых его размер и форма перестают уже сказываться на течении в трубе. Кроме того, для подобия нужно также, чтобы числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{U(x)\,L(x)}{\nu}$ в рассматриваемых сечениях струи были достаточно большими и обеспечивали бы наличие полностью развитой турбулентности (и тем самым независимость от вязкости статистического режима крупномасштабных компонент турбулентности, создающих взаимодействие между гидродинамическими полями в близких сечениях струи, которое и является физической основой подобия этих полей).

Высказанное здесь предположение о подобии является еще одним применением общего принципа подобия по числу Рейнольдса, о котором мы говорили на стр. 252; оно может быть также обосновано с помощью простых рассуждений, родственных тем, которые использовались в п. 5.3 при выводе логарифмической формулы для профиля средней скорости вблизи стенки (но за пределами вязкого подслоя). В самом деле, в рассматриваемом здесь случае трехмерной затопленной струи течение зависит от диаметра выходного отверстия D, исходной скорости истечения струи U_0 и параметров жидкости ν и ρ. Поэтому статистические характеристики течения, например средняя скорость $\bar{u}$ или напряжение Рейнольдса $-\rho\overline{u'w'}$ (где w' — радиальная компонента пульсационной скорости в цилиндрической системе координат (r, φ, x) с осью Ox) в силу соображений размерности должны задаваться формулами вида

$$\bar{u} = U_0 f_1\left(\frac{x}{D},\ \frac{r}{D},\ \varphi,\ \mathrm{Re}_D\right),$$
$$-\rho\overline{u'w'} = \rho U_0^2 g_1\left(\frac{x}{D},\ \frac{r}{D},\ \varphi,\ \mathrm{Re}_D\right), \quad \text{где} \quad \mathrm{Re}_D = \frac{U_0 D}{\nu}. \tag{5.103}$$

То, что на достаточно большом расстоянии от отверстия трубки зависимость этих характеристик от x/D практически перестает сказываться, означает, что при достаточно большом x/D мы можем положить $x/D = \infty$ в (5.103) (т. е. является следствием предположения, что правые части в (5.103) стремятся к пределу при $x/D \to \infty$). Но тогда естественно считать, что «начальные условия» U_0 и D при столь большом x/D уже вообще будут сказываться лишь через значение «начального импульса» струи,

определяющего медленно изменяющиеся с ростом x интегральные характеристики течения в сечении $x = \mathrm{const}$ (типа скорости $U_{\max} = U(x)$ на оси струи и полуширины струи $L = L(x)$, равной тому значению r, при котором $\bar{u}(r, 0, x) = \frac{1}{2} U_{\max}(x)$); весь же статистический режим течения в окрестности плоскости $x = \mathrm{const}$ будет как-то приспосабливаться к значениям масштабов U и L. Отсюда вытекает, что при больших значениях x/D струю уже можно считать осесимметрической (так как зависимость от φ может определяться лишь формой выходного отверстия), и формулы (5.103) здесь будут представимы в виде

$$\bar{u} = U(x) f_2\left[\frac{r}{L(x)},\ \mathrm{Re}_x\right], \quad \overline{u'w'} = -U^2(x) g_2\left[\frac{r}{L(x)},\ \mathrm{Re}_x\right], \tag{5.104}$$

где

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U(x)\,L(x)}{\nu}.$$

Наконец, при достаточно большом Re_x мы можем положить $\mathrm{Re}_x = \infty$ в формулах (5.104), так как при развитом турбулентном режиме турбулентная вязкость всегда намного превосходит молекулярную и параметр ν здесь уже не должен играть роли (в этом и состоит принцип подобия по числу Рейнольдса). Следовательно, при достаточно больших значениях x/D и Re_x

$$\bar{u} = U(x) f\left[\frac{r}{L(x)}\right], \quad \overline{u'w'} = -U^2(x) g\left[\frac{r}{L(x)}\right], \tag{5.105}$$

где $f(r)$ и $g(r)$ — некоторые универсальные функции. Эти соотношения и выражают гипотезу об автомодельности течения в струе. Заметим еще, что в отличие от случая турбулентных течений при наличии твердых стенок автомодельность здесь имеет место уже для всей области турбулентного течения (но, как и для течений в трубах, каналах и пограничном слое, она касается только статистических характеристик крупномасштабных компонент движения, не связанных с диссипацией энергии под действием вязкости).

Важные связи между функциями $L(x)$, $U(x)$, $f(r)$ и $g(r)$ можно получить, подставив формулы (5.105) в уравнения Рейнольдса. В случае стационарного осесимметричного движения в пренебрежении слагаемыми, содержащими вязкость, уравнения Рейнольдса, как нетрудно показать, могут быть сведены к одному уравнению

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2} - \overline{w'^2}\right) \tag{5.106}$$

(см., например, Таунсенд (1956)). Член $\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2} - \overline{w'^2}\right)$ здесь описывает нормальное турбулентное напряжение и действие

продольного градиента давления; обычно он оказывается много меньше других членов (во всяком случае, в центральной части течения), и чаще всего им просто пренебрегают. В результате получается уравнение

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'}), \qquad (5.106')$$

являющееся основой почти всех теоретических исследований, касающихся турбулентных струй. С помощью уравнения неразрывности для осредненного движения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial (r\bar{w})}{\partial r}=0 \qquad (5.107)$$

из уравнения (5.106′) можно исключить поперечную скорость $\bar{w}$. Прежде всего заметим, однако, что, умножая уравнение (5.106′) на r и интегрируя по r от 0 до ∞, мы в силу (5.107) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \bar{u}^2 r\,dr=0, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^\infty \bar{u}^2 r\,dr=M=\text{const} \qquad (5.108)$$

(это равенство выражает закон сохранения импульса, т. е. равенство потоков импульса, протекающих через любую достаточно большую сферу с центром вблизи отверстия, из которого бьет струя). Если теперь мы подставим сюда первую из формул (5.105), то найдем, что $U^2L^2\int_0^\infty f^2(\eta)\,d\eta=\text{const}$. Отсюда вытекает, что UL (а следовательно, и число Рейнольдса $\mathrm{Re}_x=UL/\nu$) не может зависеть от x. Таким образом, $U\sim 1/L$. Учитывая этот результат и подставляя формулы (5.105) в уравнения (5.106′) и (5.107), легко найдем, что уравнения эти могут быть удовлетворены, лишь если $\frac{dL}{dx}=\text{const}$ (тот же вывод, разумеется, следует и из более общего уравнения (5.106)).

Итак, мы убедились, что автомодельность возможна лишь при

$$L(x)\sim x-x_0, \qquad U\sim (x-x_0)^{-1}, \qquad (5.109)$$

где x_0 — постоянная интегрирования. Точка $x=x_0$ при этом играет роль условного «начала струи». Поскольку нас интересуют лишь асимптотические закономерности при очень больших значениях x, то мы можем всюду в дальнейшем просто считать, что $x_0=0$. Согласно (5.109), на достаточно большом расстоянии от выходного отверстия трубки ширина струи растет пропорционально расстоянию (т. е. струя имеет форму прямого круглого

конуса), а средняя скорость течения в струе убывает обратно пропорционально расстоянию. Отметим еще, что количество жидкости, протекающей через поперечное сечение струи, равно $2\pi\int_0^\infty \bar{u}r\,dr$, т. е. возрастает пропорционально x. Это показывает, что в струю все время втягивается жидкость из окружающей ее неподвижной среды.

При условиях (5.109) система уравнений (5.106′)—(5.107) имеет бесконечное число решений вида (5.105). Фактически эта система позволяет получить лишь одно соотношение, связывающее две неизвестные функции $f(\eta)$ и $g(\eta)$, которое оказывается имеющим вид

$$g(\eta)=\frac{Af(\eta)}{\eta}\int_0^\eta \eta_1 f(\eta_1)\,d\eta_1, \qquad A=\text{const}$$

(см., например, Сквайр (1948)). Еще хуже будет обстоять дело, если принять более общее уравнение (5.106) — здесь мы уже получаем лишь одно соотношение, содержащее четыре неизвестных функции (см. Таунсенд (1956)). Полное определение всех неизвестных функций требует привлечения еще каких-либо дополнительных гипотез. Во многих работах с этой целью использовались полуэмпирические теории турбулентности; так, например, Толмин (1926) (по-видимому, впервые получивший формулы вида (5.105)) использовал теорию переноса импульса Л. Прандтля и предположение, что $l=l(x)\sim x$, а Гертлер (1942), следуя Прандтлю (1942), вместо этого принял, что $K=K(x)\sim x$ и т. д. (подробнее об этом см., например, книги Бай Ши-и (1954), Хинце (1959) и Абрамовича (1960)).

Разумеется, из уравнений Рейнольдса следует лишь, что если только автомодельность (5.105) имеет место, то масштабы U и L должны удовлетворять соотношениям (5.109), но никак не вытекает, что должна иметь место автомодельность. Наличие такой автомодельности кажется правдоподобным в силу приведенных выше общих соображений (которым, как мы покажем чуть ниже, можно придать также стандартную форму соображений размерности); однако окончательно оно может быть установлено лишь на основе анализа эмпирических данных. В случае струи, вытекающей в пространство, заполненное неподвижной жидкостью, формулы (5.105) и (5.109) проверялись в экспериментах большого числа авторов (см., например, Рейхардт (1942), Корсин (1943), Хинце и Ван дер Хегге Цийнен (1949), Корсин и Уберои (1950), Корсин и Кистлер (1954), Форстолл и Гейлорд (1955)). При этом было установлено, что уже на небольших

расстояниях от отверстия, из которого вытекает струя (при $x>8D$), профиль средней продольной скорости $\bar{u}(x, r)$ хорошо описывается формулами (5.105), (5.109). Полная же автомодельность течения, проявляющаяся и в профилях осредненной скорости, и во вторых моментах пульсаций скорости, окончательно устанавливается лишь в более далеких от отверстия сечениях струи (при $x>50D$). Наблюдается также некоторая зависимость профилей от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=\frac{U_0 D}{\nu}$, которая ослабевает с ростом Re и при $\mathrm{Re}\gtrsim 10^5$ уже перестает быть заметной. В качестве примера на рис. 44 приведены (по данным

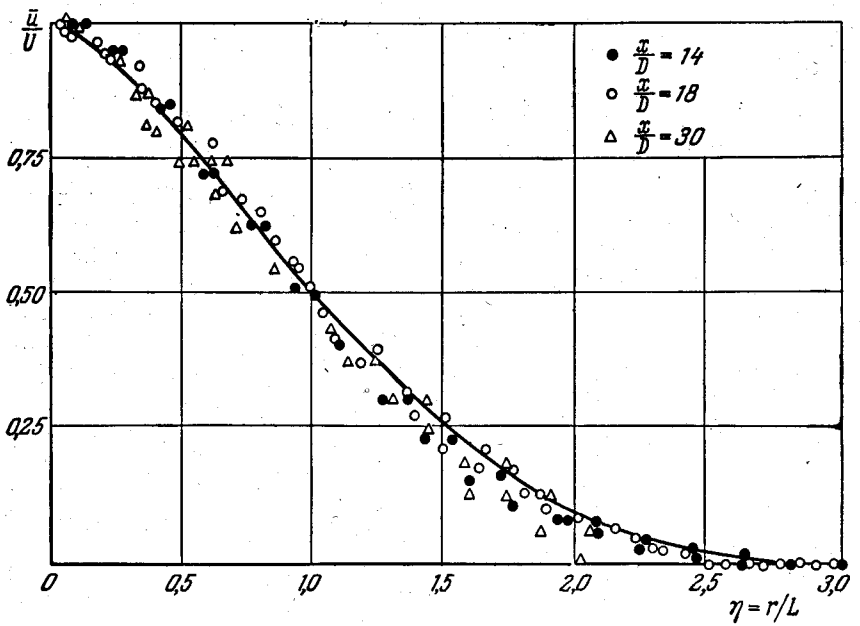


Рис. 44. Зависимость нормированной средней скорости $\bar{u}/U$ от $\eta=r/L$ в трех разных сечениях осесимметричной струи по данным Рейхардта (1942).

Рейхардта) профили скорости в трех сечениях струи, нормированные делением на $U_{\max}=U$ и отнесенные к расстояниям r, измеренным масштабом L, таким, что $\bar{u}(L)=\frac{1}{2}U_{\max}$. Мы видим, что подобие профилей выполняется вполне удовлетворительно.

Аналогичные гипотезы об автомодельности могут быть сформулированы и для других конкретных типов свободных турбулентных течений. Из них мы рассмотрим здесь плоскую турбулентную струю, бьющую в заполненное той же жидкостью про-

странство $x>0$ по направлению оси Ox из бесконечно длинной щели, расположенной в плоскости Oyz вдоль оси Oy; трехмерный турбулентный след за расположенным вблизи начала координат телом конечных размеров, обтекаемым жидкостью по направлению оси Ox; плоский турбулентный след за бесконечно длинным цилиндром с осью вдоль оси Oy, обтекаемым жидкостью по направлению оси Ox; наконец, зону перемешивания между двумя плоскопараллельными течениями в направлении Ox в полупространствах $z>0$ и $z<0$, имеющими в начальном сечении Oyz постоянные, но различные скорости (скажем, U_1 при $z>0$ и U_2 при $z<0$). При этом в случае следов за обтекаемыми телами естественно перейти к подвижной инерционной системе координат, перемещающейся вместе с невозмущенным обтекающим потоком (т. е. рассматривать лишь отклонения скорости течения в следе от невозмущенной скорости, затухающие на большом расстоянии от тела); в случае же зоны смешения систему координат надо выбрать так, чтобы выполнялось равенство $U_2=-U_1$. В таком случае для всех перечисленных течений следует ожидать, что при достаточно большом числе Рейнольдса профили средней скорости и напряжения трения на достаточно большом расстоянии x будут представимы в виде (5.105), где r — поперечная координата (расстояние от оси Ox для трехмерных течений и от плоскости $z=0$ для плоских течений), w — поперечная скорость. При этом масштабы длины и скорости $L(x)$ и $U(x)$ всегда оказываются пропорциональными некоторой степени продольного расстояния от условного начала отсчета x, т. е.

$$L(x)\sim x^m, \qquad U(x)\sim x^{-n} \tag{5.110}$$

(так что число Рейнольдса $\mathrm{Re}_x=\frac{U(x)L(x)}{\nu}$ пропорционально x^{m-n}). Показатели m и n могут быть определены, как и выше, из требования, чтобы функции (5.105) могли являться точными решениями соответствующих уравнений Рейнольдса (в пренебрежении молекулярной вязкостью). В случае следов за обтекаемым телом соответствующие уравнения Рейнольдса целесообразно предварительно упростить, воспользовавшись тем, что на большом расстоянии от тела средняя продольная скорость $\bar{u}$ в пределах следа будет лишь на немного меньше постоянной скорости U_0 обтекающего потока (равной невозмущенной скорости течения за пределами следа), так что $\bar{u}=U_0-\bar{u}_1$ где $U_0=\mathrm{const}$, $\bar{u}_1\ll U_0$, а средняя поперечная скорость $\bar{w}$ будет по порядку величины не больше, чем $\bar{u}_1$. Поэтому, например, в случае трехмерного следа уравнение Рейнольдса на большом

расстоянии x может быть приближенно записано в виде

$$-U_0\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'}), \qquad (5.111)$$

и, следовательно, здесь

$$\int_0^\infty \bar{u}_1 r\,dr = N = \text{const}. \qquad (5.112)$$

Дальнейшие рассуждения для всех рассматриваемых типов свободных турбулентных течений совершенно аналогичны тем, которые выше использовались в применении к случаю трехмерной струи. Получаемые при этом результаты сведены в нижеследующую таблицу:

	Трехмерная струя	Плоская струя	Трехмерный след	Плоский след	Зона перемешивания
m	1	1	1/3	1/2	1
n	1	1/2	2/3	1/2	0
$m-n$	0	1/2	−1/3	0	1

(см. также Сквайр (1948), Шлихтинг (1951), Шубауэр и Чен (1959)). Наиболее существенное различие между указанными здесь типами свободной турбулентности, которое можно усмотреть из таблицы, заключается в различной зависимости от расстояния x числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_x=\frac{U(x)L(x)}{\nu}$. В плоском следе, как и в трехмерной струе, Re не меняется с расстоянием, тем не менее, течение в плоском следе оказывается в некотором смысле более неустойчивым, чем в трехмерной струе; так, согласно Таунсенду (1956), полная автомодельность в плоском следе устанавливается лишь на расстояниях $x>(500\div 1000)D$, где D — диаметр обтекаемого цилиндра. В плоской струе и в зоне перемешивания Re растет с увеличением x. Наконец, в трехмерном следе Re убывает с расстоянием, так что при достаточно больших x турбулентность должна вырождаться (на таких расстояниях предположения об автомодельности, конечно, перестают быть применимыми). Дальнейшие сведения об этих течениях см., например, в книгах Бай Ши-и (1954), Таунсенда (1956), Биркхофа и Царантонелло (1957), Хинце (1959) и Абрамовича (1960).

Упомянем еще одну разновидность свободной турбулентности — вертикальные турбулентные струи термического происхождения, возникающие благодаря действию архимедовых сил над нагретыми телами. Предположения об автомодельности таких струй впервые были рассмотрены Зельдовичем (1937). Если, как и выше, принять направление течения в струе (т. е. вертикальное направление) за ось Ox, то эти предположения заключаются в том, что в каждом сечении струи $x=\text{const}$ можно ввести такие масштабы длины $L(x)$, скорости $U(x)$ и температуры $\Theta(x)$, что безразмерные осредненные характеристики гидродинамических полей, получаемые при использовании этих масштабов, будут одинаковыми во всех сечениях. В частности, будут иметь место формулы (5.105) и аналогичные формулы для распределения в струе средней температуры и радиального турбулентного потока тепла $c_p\rho\overline{w'T'}$:

$$\overline{T}=\Theta(x)f_1\left[\frac{r}{L(x)}\right],\quad \overline{w'T'}=-U(x)\Theta(x)g_1\left[\frac{r}{L(x)}\right] \qquad (5.113)$$

(где w' — радиальная компонента пульсационной скорости в цилиндрической системе координат с осью Ox). Подставляя формулы (5.105) и (5.113) в уравнения Рейнольдса, получаемые при помощи осреднения системы уравнений свободной конвекции (приведенной в п. 1.5) и пренебрегая в этих уравнениях членами, содержащими молекулярную вязкость и молекулярную температуропроводность (но не членом, описывающим архимедову силу!), получим, аналогично выводу (5.109), что

$$L(x)\sim x,\quad U(x)\sim x^{-1/3},\quad \Theta(x)\sim x^{-5/3}. \qquad (5.114)$$

Подобное же рассуждение может быть применено и к двумерной конвективной струе, возникающей над нагретым цилиндром, расположенным в горизонтальной плоскости $x=0$ вдоль оси Oy. Здесь мы получим

$$L(x)\sim x,\quad U(x)=\text{const},\quad \Theta(x)\sim x^{-1} \qquad (5.115)$$

(эти формулы также были получены Зельдовичем).

Заметим еще, что бóльшая часть результатов, собранных в таблицу на стр. 312, так же как и формулы (5.114) и (5.115), легко могут быть получены и из одних только соображений размерности. В самом деле, в случае, например, трехмерной струи все осредненные характеристики на большом расстоянии x от точки истечения струи, очевидно, могут зависеть, кроме расстояния $x-x_0\approx x$, еще только от плотности ρ и от суммарного импульса $2\pi\rho M$ массы жидкости, вытекающей из отверстия за единицу времени. Отсюда следует, что

$$\bar{u}\sim\frac{M^{1/2}}{x}f\left(\frac{r}{x}\right),\quad -\overline{u'w'}\sim\frac{M}{x^2}g\left(\frac{r}{x}\right) \qquad (5.116)$$

(в полном соответствии с формулами (5.109)). В случае плоской струи вместо величины $2\pi\rho M$ надо лишь рассмотреть импульс массы жидкости, вытекающей за единицу времени через единицу длины щели, $\rho M_1 = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2\, dz$. Следовательно, здесь

$$\bar{u} \sim \frac{M_1^{1/2}}{x^{1/2}} f\left(\frac{z}{x}\right), \quad -\overline{u'w'} \sim \frac{M_1}{x} g\left(\frac{z}{x}\right) \tag{5.117}$$

(в соответствии со вторым столбцом нашей таблицы). Еще проще применяются соображения размерности к случаю плоской зоны смешения: здесь условия в сечении $x = \text{const}$ могут зависеть только от x и от фиксированной разности скоростей $U_1 - U_2 = 2U_1 = U_0$, так что, например,

$$\bar{u} \sim U_0 f\left(\frac{z}{x}\right). \tag{5.118}$$

В случае свободных конвективных струй все осредненные характеристики могут зависеть от полного потока тепла вдоль струи $Q = 2\pi c_p \rho \int_0^{\infty} \overline{u'T'} r\, dr$ (или потока тепла на единицу длины нагретого цилиндра $Q_1 = c_p \rho \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u'T'}\, dz$) и параметра плавучести $g\beta$ (в случае идеального газа равного g/T_0). При этом величины Q и Q_1, естественно, могут входить только в комбинациях $Q/c_p\rho$ и $Q_1/c_p\rho$. Отсюда вытекает, что

$$\bar{u} \sim \left(\frac{g\beta Q}{c_p \rho x}\right)^{1/3} f_1\left(\frac{r}{x}\right), \quad T \sim \left(\frac{Q}{c_p\rho}\right)^{2/3} (g\beta)^{-1/3} x^{-5/3} g_1\left(\frac{r}{x}\right) \tag{5.119}$$

для трехмерной конвективной струи и

$$\bar{u} \sim \left(\frac{g\beta Q_1}{c_p\rho}\right)^{1/3} f_1\left(\frac{z}{x}\right), \quad T \sim \left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\right)^{2/3} (g\beta)^{-1/3} \frac{1}{x} g_1\left(\frac{z}{x}\right) \tag{5.120}$$

для плоской конвективной струи. Эти результаты, очевидно, соответствуют формулам (5.114) и (5.115).

Только в случае следов за обтекаемыми телами дело обстоит немного сложнее, так как здесь, кроме действующей на тело суммарной силы сопротивления $F = 2\pi\rho U_0 N = 2\pi\rho U_0 \int_0^{\infty} \bar{u}_1 r\, dr$ (или приходящейся на единицу длины обтекаемого цилиндра

силы сопротивления $F_1 = \rho U_0 N_1 = \rho U_0 \int_0^{\infty} \bar{u}_1\, dz$), определяющей «дефект импульса в следе», в условия задачи входит еще одна размерная величина, а именно — невозмущенная скорость U_0. Поэтому здесь формулы типа (5.116)—(5.118) не могут быть уже выведены на основе одних только соображений размерности. Однако с помощью немного более специальных рассуждений и их можно получить, не привлекая точных уравнений гидромеханики. В самом деле, воспользуемся тем, что тангенс угла наклона линии тока осредненного течения в следе к оси Ox равен $\frac{\bar{w}}{\bar{u}} = \frac{\bar{w}}{U_0 - \bar{u}_1} \approx \frac{\bar{w}}{U_0}$. Отсюда можно заключить, что если $L(x)$ — это характерная ширина следа, а $U = U(x)$ — характерное значение скоростей $\bar{u}_1$ и $\bar{w}$, то

$$\frac{dL}{dx} \sim \frac{U}{U_0}. \tag{5.121}$$

Но из постоянства величины $N = \int_0^{\infty} \bar{u}_1 r\, dr$ в случае трехмерного следа и величины $N_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_1\, dz$ в случае плоского следа вытекает, что $UL^2 \sim N = \text{const}$ в первом случае и $UL \sim N_1 = \text{const}$ во втором. Эти результаты вместе с соотношением (5.121) показывают, что $L \sim \left(\frac{Nx}{U_0}\right)^{1/3}$, $U \sim \left(\frac{NU_0^2}{x^2}\right)^{1/3}$, т. е.

$$\bar{u} \sim \left(\frac{NU_0^2}{x^2}\right)^{1/3} f\left(\frac{rU_0^{1/3}}{N^{1/3}x^{1/3}}\right) \tag{5.122}$$

в случае трехмерного следа и $L \sim \left(\frac{N_1 x}{U_0}\right)^{1/2}$, $U \sim \left(\frac{N_1 U_0}{x}\right)^{1/2}$, т. е.

$$\bar{u} \sim \left(\frac{N_1 U_0}{x}\right)^{1/2} f\left(\frac{zU_0^{1/2}}{N^{1/2}x^{1/2}}\right) \tag{5.123}$$

в случае плоского следа.

Разумеется, результаты, относящиеся к свободным конвективным струям, не надо путать с аналогичными результатами, относящимися к вынужденной конвекции — переносу пассивной примеси ϑ (которой может быть также и теплота) свободными турбулентными потоками динамического происхождения. В этом случае исходная система уравнений будет состоять из обычных уравнений гидромеханики (без члена, описывающего архимедову

силу) и уравнения диффузии (или теплопроводности) (1.72). Масштабы длины и скорости здесь, естественно, будут теми же, что и для соответствующей чисто динамической задачи (т. е. будут даваться формулами (5.110) со значениями показателей, указанными в таблице), но, кроме того, появится еще масштаб концентрации (температуры) $\Theta(x)$. Этот новый масштаб можно определить с помощью дополнительного уравнения Рейнольдса, получаемого при осреднении уравнения (1.72) с $\chi = 0$. Проще, однако, исходить из постоянства массы примеси, переносимой через любое сечение $x = \text{const}$, сразу показывающего, что $\Theta \sim L^{1/2}$ в случае трехмерных течений и $\Theta \sim L^{-1}$ в случае плоских течений. Подробнее о переносе примесей свободными турбулентными течениями мы еще будем говорить в гл. 5 в связи с изучением турбулентной диффузии. Здесь же мы только отметим, что, зная для свободных турбулентных течений распределения средней скорости $\overline{u}$ и средней температуры $\overline{\vartheta}$ и значения моментов $\overline{u'w'}$ и $\overline{\vartheta'w'}$, можно определить также значения соответствующих коэффициентов турбулентного обмена K и K_ϑ и найти их отношение $\alpha = \frac{1}{\mathrm{Pr}_t} = \frac{K_\vartheta}{K}$. Измерения, позволяющие осуществить это, много раз проделывались разными авторами в течениях разного типа (см., в частности, работы, указанные на стр. 312); обзор полученных при этом результатов можно найти, например, в книгах Хинце (1959) и Абрамовича (1960). В целом все относящиеся сюда результаты сравнительно неплохо согласуются друг с другом и показывают, что в первом приближении коэффициенты обмена K и K_ϑ допустимо считать принимающими постоянные значения в каждом поперечном сечении струи или следа, и что отношение $\alpha = K_\vartheta/K$ для свободной турбулентности больше единицы (и именно, $\alpha \approx 1{,}8 \div 2$ для следа за цилиндром и для плоской струи и $\alpha \approx 1{,}2 \div 1{,}4$ для осесимметричной струи).

Подчеркнем в заключение, что все свободные турбулентные течения имеют общую очень важную особенность — область пространства, занятая завихренным турбулентным течением, здесь в каждый момент времени имеет четкую, но очень неправильную по форме границу (строго говоря, представляющую собой не поверхность, а очень тонкую зону), вне которой движение является потенциальным. Как уже объяснялось в п. 2.2, жидкость может втекать извне в область завихренного движения, но не может вытекать из него наружу. Проникать же в область потенциального движения могут только крупномасштабные турбулентные пульсации скорости, затухающие на расстояниях порядка поперечных масштабов $L(x)$ области завихренного движения. Эти пульсации и создают нерегулярные искривления границы.

В качестве иллюстрации к сказанному мы приводим на рис. 45 великолепную теневую фотографию турбулентного следа за пролетевшей в воздухе пулей, заимствованную из статьи Корсина и Кистлера (1954).

Таким образом, всякое свободное турбулентное течение имеет, по выражению Таунсенда (1956), «двойную структуру»: оно состоит из интенсивной мелкомасштабной турбулентности и



Рис. 45. Теневая фотография турбулентного следа за пролетевшей пулей.

сравнительно мало интенсивных крупномасштабных вихрей, создающих нерегулярные искривления и движения границы турбулентной области. Благодаря этим движениям границы в любой точке свободного турбулентного течения, не слишком далекой от его оси (или, в случае двумерных течений, от плоскости симметрии), мелкомасштабная турбулентность будет временами присутствовать, а временами отсутствовать, т. е. турбулентность будет перемежающейся. На стр. 268, 269 мы уже указывали на перемежаемость турбулентности во внешних частях турбулентного пограничного слоя. В свободных турбулентных течениях зона перемежающейся турбулентности оказывается, однако, значительно более широкой, чем в пограничных слоях: если в пограничных слоях перемежаемость практически наблюдается в пределах расстояний от стенки от $0{,}4\delta$ до $1{,}2\delta$, то, например, в плоском турбулентном следе, согласно Корсину и Кистлеру (1954), она имеет место в зоне от $z = 0{,}4L(x)$ (где z — поперечная координата) по меньшей мере до $z = 3{,}2L(x)$. Кроме

свободной турбулентности и внешней части турбулентного пограничного слоя (во многом схожей со свободными турбулентными течениями) перемежаемость турбулентности и четкие подвижные границы между турбулентной и нетурбулентной частями потока наблюдаются, как мы знаем, и в случае течений в трубах и пограничных слоях при не слишком малых, но и не слишком больших числах Рейнольдса, способствующих возникновению турбулентных «пробок» и «пятен» (см. выше. п. 2.1), а также и в некоторых других случаях (см., например, обзор Коулса (1962)). Можно думать, что подобные явления вообще очень характерны для широкого круга турбулентных движений и играют большую роль в возникновении и развитии турбулентности. Однако теоретическое их объяснение пока наталкивается на значительные трудности (ср. Коулс (1962), Липманн (1962)).

§ 6. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

6.1. Уравнение для тензора напряжений Рейнольдса

Выше уже отмечалось, что из-за появления в уравнениях Рейнольдса для среднего движения дополнительных членов, содержащих напряжения Рейнольдса $\tau_{ij}^{(1)} = -\rho\overline{u_i' u_j'}$, система этих уравнений оказывается незамкнутой. Естественно попытаться замкнуть ее, дополнив уравнения Рейнольдса новыми уравнениями, описывающими изменение во времени самих напряжений $\tau_{ij}^{(1)}$. Эти уравнения для величин $\tau_{ij}^{(1)}$ и будут выведены в настоящем пункте; мы увидим, что и они, в свою очередь, также содержат ряд дополнительных неизвестных и поэтому снова не образуют замкнутой системы. Тем не менее, сами уравнения для величин $\tau_{ij}^{(1)}$, налагающие на статистические характеристики турбулентности новые динамические связи, представляют определенный интерес, так как позволяют сделать ряд качественных выводов о свойствах турбулентных течений. Особенно полезным оказывается *уравнение баланса турбулентной энергии*, описывающее изменение во времени плотности кинетической энергии пульсационного движения (или, короче, просто *турбулентной энергии*) $E_t = \frac{1}{2}\rho\overline{u_\alpha' u_\alpha'}$; подробному рассмотрению этого уравнения, все члены которого имеют ясный физический смысл, будет посвящен ряд последующих пунктов настоящего параграфа.

Для вывода уравнений, описывающих изменение во времени напряжений Рейнольдса, можно воспользоваться общим методом составления уравнений для моментов, предложенным Келлером и Фридманом (1924) (см. также Келлер (1925)). А именно, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_N$ — какие-то N различных или совпадающих друг с другом гидродинамических полей турбулентного потока сжимаемой жидкости, а $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — какие-то N различных или совпадающих точек в области пространства, заполненной жидкостью. В таком случае производная по времени от момента N-го порядка

$$B_{u_1 u_2 \ldots u_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = \overline{u_1(x_1, t)\, u_2(x_2, t) \ldots u_N(x_N, t)} \quad (6.1)$$

в силу возможности перемены порядка операций осреднения и дифференцирования может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{u_1 u_2 \ldots u_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = \overline{\frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial t} u_2(x_2, t) \ldots u_N(x_N, t)} + \overline{u_1(x_1, t) \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial t} \ldots u_N(x_N, t)} + \ldots + \overline{u_1(x_1, t)\, u_2(x_2, t) \ldots \frac{\partial u_N(x_N, t)}{\partial t}}. \quad (6.2)$$

Теперь достаточно исключить все производные по времени в правой части последнего равенства с помощью соответствующих гидродинамических уравнений, и мы получим уравнение баланса для момента $B_{u_1 \ldots u_N}(x_1, \ldots, x_N, t)$, выражающее $\frac{\partial}{\partial t} B_{u_1 \ldots u_N}(x_1, \ldots, x_N, t)$ в виде комбинации моментов самих гидродинамических полей и их пространственных производных.

Указанный прием, разумеется, может быть применен и к неосредненным величинам. Так, например, подставляя уравнения Навье — Стокса (1.6) в равенство $\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_i u_j u_\alpha + (p u_i \delta_{j\alpha} + p u_j \delta_{i\alpha}) - (u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha})\right] = (\rho u_i X_j + \rho u_j X_i) + p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \left(\sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right), \quad (6.3)$$

где $\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ — тензор вязких напряжений в несжимаемой жидкости. Отсюда, в частности, для плотности кинетической энергии $E = \frac{1}{2}\rho u_\beta u_\beta$ получается уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\alpha\beta}) = \rho u_\alpha X_\alpha - \rho\varepsilon, \quad (6.4)$$

где $\rho\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$ имеет смысл удельной (на единицу времени и единицу объема жидкости) диссипации кинетической энергии. Выражение в скобках в левой части последнего уравнения представляет собой плотность потока энергии, обусловленного как непосредственным переносом энергии при перемещении частиц жидкости, так и работой сил давления и молекулярных сил внутреннего трения. Правая же часть уравнения (6.4) показывает, что суммарная кинетическая энергия произвольного объема жидкости изменяется не только вследствие механического втекания или вытекания энергии через его границу и работы приложенных к границе сил давления и молекулярного трения, но также и вследствие работы объемных сил и вследствие диссипации, приводящей к переходу части кинетической энергии в теплоту.

Используя теперь вместо уравнений Навье — Стокса уравнения Рейнольдса (5.1)

$$\frac{\partial\rho\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\bar{u}_i\bar{u}_\alpha+\rho\overline{u_i'u_\alpha'}+\bar{p}\delta_{i\alpha}-\bar{\sigma}_{i\alpha})=\rho\bar{X}_i \qquad (6.5)$$

и учитывая, что $\rho=\text{const}$ и $\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$, аналогично получим следующее уравнение для тензора $\rho\bar{u}_i\bar{u}_j$:

$$\frac{\partial\rho\bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_\alpha+\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\bar{u}_j+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\bar{u}_i+$$
$$+(\bar{p}\bar{u}_i\delta_{j\alpha}+\bar{p}\bar{u}_j\delta_{i\alpha})-(\bar{u}_i\bar{\sigma}_{j\alpha}+\bar{u}_j\bar{\sigma}_{i\alpha})]=$$
$$=(\rho\bar{u}_i\bar{X}_j+\rho\bar{u}_j\bar{X}_i)+\bar{p}\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)-\left(\bar{\sigma}_{i\alpha}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_\alpha}+\bar{\sigma}_{j\alpha}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_\alpha}\right)+$$
$$+\left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (6.6)$$

В частности, для плотности кинетической энергии осредненного движения $E_s=\frac{1}{2}\rho\bar{u}_\beta\bar{u}_\beta$ получается уравнение

$$\frac{\partial E_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E_s\bar{u}_\alpha+\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\bar{u}_\beta+\bar{p}\bar{u}_\alpha-\bar{u}_\beta\bar{\sigma}_{\alpha\beta})=$$
$$=\rho\bar{u}_\alpha\bar{X}_\alpha-\rho\varepsilon_s+\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \qquad (6.7)$$

где $\rho\varepsilon_s=\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}=\frac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$ имеет смысл удельной диссипации энергии осредненного движения под действием

молекулярной вязкости. Физический смысл всех слагаемых этого уравнения (за исключением последнего слагаемого, которое мы подробно рассмотрим ниже) аналогичен смыслу соответствующих слагаемых уравнения (6.4). Заметим лишь, что плотность потока энергии осредненного движения наряду со слагаемым $\bar{u}_\beta\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$, описывающим перенос энергии силами молекулярной вязкости, содержит слагаемое $\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\bar{u}_\beta$, описывающее родственный процесс переноса энергии благодаря действию «турбулентной вязкости».

Осредняя уравнение (6.3) и затем вычитая из него почленно уравнение (6.6), получим искомое уравнение для тензора напряжений Рейнольдса:

$$\frac{\partial\rho\overline{u_i'u_j'}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho\overline{u_i'u_j'}\bar{u}_\alpha+\rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'}+(\overline{p'u_i'}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u_j'}\delta_{i\alpha})-$$
$$-(\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}'}+\overline{u_j'\sigma_{i\alpha}'})]=\rho\overline{u_i'X_j'}+\rho\overline{u_j'X_i'}+\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}-$$
$$-\left(\overline{\sigma_{i\alpha}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}\right)-\left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (6.8)$$

Это же уравнение можно получить, составив сначала динамическое уравнение для пульсации скорости $u_i'=u_i-\bar{u}_i$ (равное разности i-х уравнений Навье — Стокса и Рейнольдса)

$$\rho\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}_iu_\alpha'+\rho\bar{u}_\alpha u_i'+\rho u_i'u_\alpha'-\rho\overline{u_i'u_\alpha'}+p'\delta_{i\alpha}-\sigma_{i\alpha}')=\rho X_i', \qquad (6.9)$$

а затем применив формулу (6.2) к центральному моменту $\overline{u_i'u_j'}=-\frac{1}{\rho}\tau_{ij}^{(1)}$. Отметим сразу же, что уравнение (6.8), кроме средней скорости $\bar{u}_i$ и напряжений Рейнольдса $\rho\overline{u_i'u_j'}$, содержит ряд новых неизвестных. Этими новыми неизвестными являются, во-первых, третьи центральные моменты $\rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'}$; во-вторых, умноженные на ν вторые моменты пульсаций скорости и ее пространственных производных, входящие в выражения $\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}'}$ и $\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}$ и непосредственно не выражающиеся через напряжения Рейнольдса; в-третьих, взаимные вторые моменты полей давления и скорости вида $\overline{p'u_i'}$ и $\overline{p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$ (которые с помощью равенства (1.9′) можно представить в виде интегралов от двухточечных моментов третьего порядка типа

$\overline{u_i'(x, t)\,u_j'(x', t)\,u_k'(x', t)}$). Таким образом, уравнения Рейнольдса (6.5) и уравнения для напряжений Рейнольдса (6.8) снова не образуют замкнутой системы. Если теперь мы постараемся дополнить эту систему уравнениями для новых неизвестных, входящих в (6.8), и начнем с уравнений для третьих моментов $\rho\overline{u_i'u_j'u_k'}$, то в эти уравнения в свою очередь войдут многие другие дополнительные неизвестные (например, четвертые моменты $\rho\overline{u_i'u_j'u_k'u_l'}$ и третьи моменты типа $\overline{p'u_j'u_k'}$ или типа $\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\frac{\partial u_j'}{\partial x_n}u_k'}$; см. Чжоу Пэй-юань (1945а)), и разность между числом неизвестных и числом уравнений станет только еще больше. Таким образом, составление уравнений для высших моментов ни на каком этапе не позволяет получить замкнутой системы уравнений, описывающей турбулентное движение.

Разумеется, систему уравнений (6.5) и (6.8) можно попытаться замкнуть, привлекая для этой цели те или иные дополнительные гипотезы, позволяющие выразить перечисленные выше «новые неизвестные» в уравнениях (6.8) через первые и вторые моменты $\overline{u}_i$ и $\overline{u_i'u_j'}$. Такие попытки представляют собой фактически новые варианты «полуэмпирической теории турбулентности», отличающиеся от теорий, рассмотренных в п. 5.8, лишь тем, что гипотетические связи здесь имеют несколько более сложную структуру. Подобные усложненные полуэмпирические теории в разное время выдвигались многими авторами; мы здесь кратко остановимся лишь на некоторых из них. Одной из первых работ, посвященных попытке замкнуть систему уравнений (6.5) и (6.8), была работа Загустина (1938); вслед за ней появилась небольшая заметка Колмогорова (1942), в которой турбулентность характеризовалась двумя основными параметрами — интенсивностью и масштабом, через которые выражались затем все члены уравнения баланса турбулентной энергии, вытекающего из (6.8) (близкая идея немного позже была выдвинута также Прандтлем (1945)). К работе Колмогорова (1942) примыкает целая серия работ Невзглядова (1945а, б и др.), предложившего в развитие идеи Колмогорова несколько различных гипотез для замыкания системы уравнений (6.5) и (6.8). Аналогичные исследования проводились также в 40-х годах Чжоу Пэй-юанем (1945а, б, 1947). Им, в частности, была впервые предпринята попытка использовать наряду с уравнениями (6.5) и (6.8) также и уравнения для третьих моментов $\overline{u_i'u_j'u_k'}$; появляющиеся при этом четвертые моменты $\overline{u_i'u_j'u_k'u_l'}$ исключались с помощью гипотезы о равенстве нулю семиинвариантов поля скорости четвертого порядка или с помощью некоторой родственной гипотезы. Наконец, уже в 50-х и 60-х годах появились работы Ротта (1951б, в) и Давыдова (1958, 1959а, б, 1961), на которых мы остановимся немного более подробно, чтобы на конкретных примерах дать представление об общем характере всего этого круга исследований.

Ротта рассматривал уравнения (6.5) и (6.8) для стационарного плоскопараллельного в среднем турбулентного течения со средней скоростью $\overline{u}_1(x_3)$ (направленной всюду вдоль оси Ox_1) в отсутствие внешних сил. При этом в целях упрощения предполагалось, что слагаемыми в квадратных скобках в левых частях уравнений (6.8), описывающими «перенос (диффузию)

напряжений Рейнольдса», в первом приближении можно пренебречь, рассматривая лишь те части течения, где турбулентность более или менее близка к однородной и, следовательно, перенос турбулентных величин из соседних областей потока играет малую роль. Далее, как и в работах Колмогорова (1942) и Прандтля (1945), предполагалось, что турбулентность можно описать ее интенсивностью $b = \frac{1}{2}\overline{u_\beta' u_\beta'} = \frac{E_t}{\rho}$ и масштабом l — величиной размерности длины, определяющей средние размеры «турбулентных возмущений» и являющейся аналогом «пути перемешивания». Для вычисления величины $\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$ Ротта, следуя Чжоу Пэй-юаню (1945а, б), воспользовался тем, что пульсации давления удовлетворяют уравнению Пуассона вида (1.9) и, следовательно, могут быть представлены в виде, родственном (1.9′), где подынтегральную функцию можно представить в виде двух слагаемых — одного, зависящего от средней скорости $\overline{u}_1(x_3)$, и второго, содержащего только пульсации скорости. Вклад первой из этих частей в выражение $\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$ может быть представлен в виде ряда последовательных производных профиля средней скорости $\overline{u}_1(x_3)$ с коэффициентами, являющимися интегралами от двухточечных вторых моментов поля скорости. Эти коэффициенты удовлетворяют алгебраическим соотношениям, вытекающим из уравнения неразрывности, и могут быть приближенно выражены через напряжения Рейнольдса и масштаб l. Вклад же второй части, зависящий от двухточечных третьих моментов, Ротта отождествил со значением величины $\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$ в однородной турбулентности с постоянной средней скоростью и предложил вычислять с помощью гипотетического соотношения (оправдываемого некоторыми качественными соображениями; см. ниже сноску на стр. 329—330):

$$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} = -c_1\frac{b^{\frac{1}{2}}}{l}\left(\overline{\rho u_i'u_j'}-\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}\right), \tag{6.10}$$

где c_1 — числовой коэффициент, определяемый из эмпирических данных. Аналогичную связь вида

$$\overline{\sigma_{i\alpha}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}} = c_2\nu\frac{\overline{\rho u_i'u_j'}}{l^2}+c_3\frac{\rho b^{\frac{3}{2}}}{l}\delta_{ij}, \tag{6.11}$$

где c_2 и c_3 — новые числовые постоянные, Ротта предложил использовать для вычисления «диссипационных слагаемых» в правой части (6.8), содержащих коэффициент вязкости. При использовании этих формул уравнения (6.5) и (6.8) позволяют определить зависимость отношений различных напряжений Рейнольдса от градиента средней скорости и получить некоторые другие результаты, допускающие проверку на опыте. При соответствующем подборе параметров c_1, c_2 и c_3 все эти результаты оказались в неплохом согласии с данными измерений характеристик турбулентности в канале, выполненных Рейхардтом (1938) и Лауфером (1951). Во второй статье Ротта (1951в) в добавление к соотношениям (6.10) и (6.11) было предложено также дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени и в пространстве длины l, и с его помощью было получено более полное объяснение наблюдающихся на опыте фактов.

Более детальная схема получения на основе уравнений (6.5) и (6.8) замкнутой системы полуэмпирических уравнений турбулентного движения была развита Давыдовым. В его работах в отличие от работ Ротта в левых частях уравнений (6.8) отбрасывались лишь слагаемые $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{p'u'_i}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u'_j}\delta_{i\alpha}\right)$, описывающие перенос напряжений Рейнольдса, вызываемый пульсациями давления. Слагаемые уравнений (6.8), содержащие множителем коэффициент вязкости μ, могут быть преобразованы к виду $\mu\Delta\overline{u'_iu'_j}+2\mu\,\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}}$; первое слагаемое здесь выражается через напряжения Рейнольдса, а второе Давыдов предложил считать равным $\frac{2}{3}\rho\varepsilon_1\delta_{ij}$ (в силу изотропии мелкомасштабных движений, о которой мы еще будем подробно говорить в ч. 2 настоящей книги), где $\varepsilon_1=\nu\overline{\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}}$ — еще одна подлежащая определению основная характеристика турбулентности. Для определения слагаемых в правой части (6.8), содержащих давление, Давыдов использует формулу

$$\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}=-c_1\frac{\varepsilon_1}{b}\left(\rho\overline{u'_iu'_j}-\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}\right)-\left(B_{ij}-\frac{1}{3}B_{\alpha\alpha}\delta_{ij}\right), \quad (6.12)$$

где c_1 — эмпирическая постоянная (родственная постоянной c_1 в равенстве (6.10)), а B_{ij} — довольно сложный добавочный тензор, выражающийся через среднюю скорость, ее пространственные производные и напряжения Рейнольдса (этот тензор описывает анизотропию пульсационной скорости в пограничных слоях около твердых стенок). Далее, для третьих моментов поля скорости $\rho\overline{u'_iu'_ju'_k}$ выводятся уравнения, аналогичные (6.8), которые затем подвергаются еще более радикальным упрощениям (в них пренебрегается всеми слагаемыми, содержащими множителем коэффициент вязкости, а также четвертыми семиинвариантами поля скорости; кроме того, симметричная комбинация слагаемых вида $\overline{u'_iu'_j\frac{\partial p'}{\partial x_k}}$ заменяется выражением $c_2\frac{\varepsilon_1}{b}\overline{u'_iu'_ju'_k}$, где c_2 — еще один эмпирический коэффициент). Наконец, для определения ε_1 Давыдов сначала предложил специальное «уравнение переноса», содержащее кроме ε_1 только первые, вторые и третьи моменты поля скорости; впоследствии, однако, он сам от него отказался (см. Давыдов (1961)) и заменил его уравнением вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\varepsilon_1+\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_k}+c_3\frac{\varepsilon_1}{b}\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\alpha}{\partial x_\beta}+4\frac{\varepsilon_1^2}{b}=\nu\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}, \quad (6.13)$$

где c_3 — третий эмпирический коэффициент, а $\gamma_k=\nu\overline{u'_k\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}}$, $k=1,2,3$ — еще три дополнительных неизвестных. Теперь уже для замыкания системы требуется выписать еще и уравнения относительно величин γ_k, которые также можно составить, исходя из уравнений (6.9) для u'_i, с помощью общего правила (6.2). После значительных упрощений, снова использующих некоторые гипотетические связи, эти последние уравнения приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar u_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\gamma_k+\gamma_\alpha\frac{\partial\bar u_k}{\partial x_\alpha}+\overline{u'_ku'_\alpha}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_\alpha}+\frac{2}{9}\varepsilon_1\frac{\partial\overline{u'_ku'_\alpha}}{\partial x_\alpha}+c_4\frac{\varepsilon_1}{b}\gamma_k=0. \quad (6.14)$$

Окончательно, таким образом, получается весьма сложная, но замкнутая система из 23 квазилинейных дифференциальных уравнений относительно 23 неизвестных величин $\bar u_i$, $\overline{u'_iu'_j}$, $\overline{u'_iu'_ju'_k}$, ε и γ_k, содержащая 4 эмпирических коэффициента, значения которых можно оценить, например, на основании данных измерений Лауфера (1954). Более точная проверка этой системы требует специальных опытов, в которых тщательно измерялись бы все неизвестные величины, входящие в полученную систему; подобные измерения до сих пор, по-видимому, никем не производились.

6.2. Уравнение баланса турбулентной энергии

Аналогично тому, как из уравнения (6.3) получается уравнение (6.4) для полной кинетической энергии E, из уравнения (6.8) после суммирования по $i=j$ получается следующее уравнение для средней плотности кинетической энергии пульсационного движения $E_t=\frac{1}{2}\rho\overline{u'_\alpha u'_\alpha}$:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\bar u_\alpha+\frac{1}{2}\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha}+\overline{p'u'_\alpha}-\bar u_\beta\overline{\sigma'_{\alpha\beta}}\right)=$$
$$=\rho\overline{u'_\alpha X'_\alpha}-\rho\bar\varepsilon_t-\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (6.15)$$

где $\rho\bar\varepsilon_t=\overline{\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}}=\frac{\rho\nu}{2}\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2}$ имеет смысл средней удельной диссипации энергии пульсационного движения под действием вязкости. Выражение в скобках в левой части этого уравнения представляет плотность потока турбулентной энергии, связанного с переносом турбулентной энергии осредненным течением жидкости, пульсациями давления, силами внутреннего трения (молекулярной вязкостью) и, наконец, «турбулентной вязкостью», т. е. пульсационной компонентой скорости (слагаемое $\frac{1}{2}\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha}$). Слагаемое

$$A=-\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (6.16)$$

входящее в правые части уравнений для E_s и E_t с разными знаками, очевидно, описывает взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движений. На вопросе о значении этого слагаемого мы специально остановимся ниже.

Уравнение (6.15) и представляет собой общее *уравнение баланса турбулентной энергии*. Оно показывает, что плотность турбулентной энергии в данной точке потока может изменяться вследствие переноса турбулентной энергии от других частей жидкости (т. е. диффузии турбулентной энергии), работы пульсаций внешних сил, диссипации турбулентной энергии под действием вязкости и, наконец, вследствие превращения части энергии осредненного движения в турбулентную энергию или обратного превращения части турбулентной энергии в энергию среднего движения. Энергию турбулентности E_t в этом уравнении, разумеется, можно заменить также интенсивностью турбулентности (т. е. средней кинетической энергией пульсационного движения единицы массы жидкости) $b = \frac{E_t}{\rho} = \frac{1}{2}\overline{u'_\beta u'_\beta}$. Если при этом еще обозначить символом $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ индивидуальную производную относительно осредненного движения, то в силу того, что $\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$, уравнение (6.15) можно привести к виду

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \bar{\varepsilon}_t + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[-\frac{1}{2}\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} - \frac{1}{\rho}\overline{p'u'_\alpha} + \right.$$
$$\left. + \nu\overline{u'_\beta\left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)}\right] + \overline{u'_\alpha X'_\alpha}. \qquad (6.17)$$

Уравнение баланса турбулентной энергии (6.15) или (6.17) дополняет уравнения Рейнольдса в том отношении, что оно накладывает еще одно важное ограничение на статистические характеристики турбулентности. Правда, оно содержит новые неизвестные величины $\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha}$, $\overline{p'u'_\alpha}$ и $\bar{\varepsilon}_t$, не входящие в уравнения Рейнольдса, т. е. требует более полного описания турбулентного движения. Однако физический смысл слагаемых в уравнении (6.17), содержащих эти новые неизвестные, является достаточно наглядным, и это очень облегчает попытки их приближенного выражения через более простые характеристики. Кроме того, в ряде случаев (например, если турбулентность почти однородна в пространстве) слагаемыми, описывающими диффузию турбулентной энергии, вообще можно в первом приближении пренебречь (в связи с тем, что пространственный перенос энергии здесь играет малую роль). Использование уравнения баланса турбулентной энергии в дополнение к уравнениям Рейнольдса впервые было предложено Колмогоровым (1942).

Переходя к более подробному рассмотрению отдельных слагаемых уравнения баланса турбулентной энергии, начнем со слагаемых, содержащих пульсации давления. В общем балансе

турбулентной энергии E_t роль этих слагаемых незначительна; как показывают уравнения (6.15) и (6.17), в случае несжимаемой жидкости пульсации давления приводят лишь к дополнительному переносу турбулентной энергии от одних частей жидкости к другим. Поэтому, если рассмотреть объем жидкости, через границу которого турбулентная энергия не втекает и не вытекает, то на изменениях полной турбулентной энергии этого объема наличие пульсаций давления вообще не сказывается. Кроме того, вклад пульсаций давления в плотность потока турбулентной энергии, как правило, весьма невелик. Так, например, в ч. 2 этой книги будет показано, что в случае изотропной турбулентности $\overline{p'^2}$ имеет тот же порядок, что и $\overline{E_t^2}$; следовательно, $|\overline{p'u'}| \leqslant (\overline{p'^2}\overline{u'^2})^{\frac{1}{2}} \sim E_t \cdot U'$, где U' — характерная величина пульсационной скорости. Поэтому относительная роль переноса турбулентной энергии пульсациями давления по сравнению с переносом турбулентной энергии осредненным течением жидкости здесь определяется значением отношения $\frac{|\overline{p'u'}|}{|E_t\bar{u}|} \sim \frac{U'}{U}$, где U — характерная величина средней скорости. Параметр U'/U («уровень турбулентности») в большинстве реальных турбулентных течений принимает значения порядка $10^{-2} \div 10^{-1}$; такой же порядок будет иметь и относительная величина вклада пульсаций давления в полный поток энергии в случае изотропной или слабо анизотропной турбулентности. Поэтому в уравнении баланса турбулентной энергии пульсациями давления во многих случаях можно просто пренебречь. Тем не менее, эти пульсации играют в турбулентном потоке весьма существенную роль. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим величины $E_i = \frac{1}{2}\rho\overline{u_i'^2}$ (по i не суммировать!), имеющие смысл средних плотностей кинетической энергии пульсационных движений в направлениях отдельных координатных осей. Уравнения (6.8) для этих величин в предположении, что $X'_i = 0$, могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_i\bar{u}_\alpha + \frac{1}{2}\rho\overline{u_i'^2 u'_\alpha} + \overline{p'u'_i}\delta_{i\alpha} - \nu\frac{\partial E_i}{\partial x_\alpha}\right) =$$
$$= \overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} - \rho\bar{\varepsilon}_i - \rho\overline{u'_i u'_\alpha}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha}, \qquad (6.18)$$

где $\rho\bar{\varepsilon}_i = \mu\sum_\alpha\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)^2} > 0$; величина $\rho\bar{\varepsilon}_i$, очевидно, может быть интерпретирована как «диссипация» энергии E_i.

Рассмотрим теперь для наглядности случай, когда осредненное движение параллельно направлению Ox_1 (так что $\bar{u}_2 =$

$= \bar{u}_3 = 0$) и турбулентность однородна в направлениях осей Ox_1 и Ox_2 (так что все осредненные характеристики турбулентности могут зависеть лишь от координаты x_3). Воспользовавшись уравнением неразрывности $\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$, мы можем в этом случае переписать уравнения (6.18) в виде

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_1'^2 u_3'} - \nu\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right) = -\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \rho\bar{\varepsilon}_1 - \rho\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_2'^2 u_3'} - \nu\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) = \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \rho\bar{\varepsilon}_2, \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_3'^3} + \overline{p'u_3'} - \nu\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) = \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \rho\bar{\varepsilon}_3.$$

Уравнения (6.19) показывают, что величины $\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}$ и $\overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}$ описывают взаимные превращения друг в друга энергии E_1 продольных пульсаций и энергий E_2 и E_3 поперечных пульсаций. Кроме того, из этих уравнений видно, что энергия продольных пульсаций может еще как-то поддерживаться за счет энергии среднего течения (этот процесс описывается слагаемым $-\rho\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}$ первого уравнения (6.19)), но что энергия поперечных пульсаций может пополняться только за счет энергии продольных пульсаций. В самом деле, рассматривая стационарный режим $\left(\text{т. е. считая, что } \frac{\partial E_l}{\partial t} = 0\right)$ и проинтегрировав все уравнения (6.19) по области пространства V, через границу которой нет потока турбулентной энергии, мы получим соотношения

$$\int_V \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}\,dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_2\,dV > 0, \quad \int_V \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}\,dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_3\,dV > 0,$$

$$-\rho\int_V \overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\,dV = \int_V \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}\,dV + \qquad (6.20)$$

$$+\int_V \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}\,dV + \rho\int_V \bar{\varepsilon}_1\,dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_l\,dV > 0.$$

Таким образом, энергия осредненного движения, действительно, передается непосредственно только продольным пульсациям u_1',

а поперечные пульсации u_2' и u_3' получают энергию от продольных пульсаций скорости благодаря работе пульсаций давления. Последние, следовательно, осуществляют перераспределение энергии между пульсационными движениями различных направлений, создавая тенденцию к изотропности пульсационного движения.

Чтобы получить наглядное представление о механизме передачи энергии от продольных пульсаций скорости к поперечным, заметим, что отрицательный знак величины $\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} = -\left(\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} + \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}\right)$ означает наличие положительной корреляции между положительными (отрицательными) пульсациями давления и конвергенцией (дивергенцией) продольной пульсационной скорости. Другими словами, это значит, что конвергенция u_1' приводит преимущественно к положительным, а дивергенция — к отрицательным пульсациям давления; в то же время положительные пульсации давления создают преимущественно дивергенцию, а отрицательные — конвергенцию поперечных пульсаций u_2' и u_3'. Но так и должно быть: если, например, два соседних элемента жидкости движутся вдоль осредненного течения навстречу друг другу, то естественно, что в области между ними образуется (за счет их энергии) положительная пульсация давления и что этот рост давления приведет к оттоку жидкости в поперечных направлениях в соответствии с условием несжимаемости $\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$. Вообще, если $\overline{u_1'^2} > \overline{u_2'^2}$ и $\overline{u_1'^2} > \overline{u_3'^2}$, так что основную роль играют пульсации скорости вдоль оси Ox_1, то даже и при отсутствии средней скорости знак пульсации давления будет в основном определяться тем, происходит ли сближение или расхождение соседних элементов жидкости в направлении Ox_1; следовательно, величина $\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$ здесь будет отрицательной и пульсации давления будут стремиться уравнять энергии различных компонент пульсационной скорости (ср. работу Бэтчелора (1949а), где эта роль пульсаций давления была разъяснена на частном примере однородной турбулентности [1])).

[1]) Приведенные соображения оправдывают предположение о том, что величина $\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$ должна включать слагаемое, пропорциональное $-\left(\overline{u_1'^2} - \overline{u_2'^2}\right) \sim \left(\overline{u_2'^2} - \overline{u_3'^2}\right)$, содержащееся в формулах (6.10) и (6.12). Заме-

Рассмотрим теперь слагаемое $A = -\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$, описывающее в уравнении баланса турбулентной энергии обмен энергией между осредненным и пульсационным движением. Если в данной точке пространства $A > 0$, то плотность турбулентной энергии в этой точке возрастает за счет энергии осредненного движения; наоборот, $A<0$ означает, что плотность энергии осредненного движения в данной точке растет за счет энергии пульсаций. Последняя возможность на первый взгляд представляется парадоксальной; однако этот вопрос требует более внимательного анализа.

Уравнение (6.15) показывает, что при течении несжимаемой жидкости в поле массовых сил ρX_i с $X'_i = 0$ единственным источником турбулентной энергии внутри объема, через границы которого нет притока турбулентной энергии, может быть лишь трансформация энергии осредненного движения. При этих условиях возникновение и развитие турбулентности или поддержание стационарной турбулентности в указанном объеме возможны лишь при условии, что интеграл от A по всему объему положителен (см., например, (6.20)). С такими условиями мы встречаемся, в частности, при течении несжимаемой жидкости в трубах, каналах и пограничных слоях (при малой «начальной турбулентности» набегающего потока), где прямые измерения величин $\rho\overline{u'_i u'_j}$ и $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ показывают даже, что величина A здесь всегда оказывается положительной во всех точках турбулентного потока (в согласии с полуэмпирическими формулами п. 5.8).

Если же турбулентность имеет какие-либо «внешние» источники энергии (например создается искусственным перемешиванием жидкости или, в случае сжимаемой жидкости, образуется в результате появления пульсаций плотности, возникающих под действием притока тепла), то не исключена возмож-

тим еще, что в силу тензорного характера величины $\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}$ отсюда уже автоматически следует, что $\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} \sim 3\overline{u'_i u'_j} - 2b\delta_{ij}$, как это и указано в (6.10) и (6.12.). Таким образом, естественно думать, что пульсации давления вносят вклад в $\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{u'_i u'_j}$, где $i \neq j$, пропорциональный $-\rho\overline{u'_i u'_j}$, т. е. приводят к убыванию абсолютной величины всех напряжений Рейнольдса $\tau^{(1)}_{ij}$ с $i \neq j$.

ность превращения энергии турбулентности в энергию осредненного движения, т. е. выполнения неравенства $A < 0$. Именно так обстоит дело в случае атмосферной турбулентности в масштабах общей циркуляции атмосферы. В этом случае под турбулентностью надо понимать так называемую *макротурбулентность* — совокупность нерегулярных крупномасштабных движений типа циклонов и антициклонов, налагающихся на регулярное течение общей циркуляции; идея статистического описания такой макротурбулентности была впервые выдвинута Дефантом (1921). В условиях общей циркуляции отдельные «турбулентные возмущения» (циклоны и антициклоны) вполне могут возникать за счет энергии, вносимой локальным притоком тепла, причем в дальнейшем некоторая часть энергии этих возмущений может передаваться также и осредненному течению общей циркуляции. Геофизики, изучавшие эмпирические данные о балансе энергии, импульса и момента количества движения течений общей циркуляции атмосферы, сравнительно давно уже пришли к выводу, что данные наблюдений невозможно объяснить без допущения о превращениях в некоторых областях атмосферы энергии нерегулярных возмущений в энергию осредненного течения (см., например, обзорную статью Россби (1948)). Возможность таких превращений энергии была затем проанализирована и теоретически; см., например, работу Е. Лоренца (1953), в которой установлены условия, определяющие знак величины A. Заметим, наконец, что для течений, образующих общую циркуляцию атмосферы, фактические значения величины A непосредственно подсчитывались рядом авторов на основании формулы (6.16) по данным метеорологических наблюдений, причем в ряде случаев действительно оказывалось, что $A<0$; по этому поводу см., например, работы Монина (1956в) и Груза (1961), содержащие обширную дополнительную библиографию.

6.3. Общее понятие о коэффициентах турбулентной вязкости и теплопроводности

Коэффициент турбулентной вязкости был чисто формально введен в п. 5.1 для случая плоскопараллельного течения жидкости; после он несколько раз использовался в § 5 для описания простейших турбулентных течений в трубах, каналах и пограничном слое (см. особенно п. 5.8). Сейчас мы покажем, как подобные же коэффициенты могут быть введены и в общем случае произвольного трехмерного течения.

Будем предполагать, что турбулентность образуется лишь в результате перехода части энергии осредненного течения в

энергию мелкомасштабных возмущений, т. е. за счет того, что $A > 0$. Ясно, что в этом случае все статистические характеристики турбулентности (в частности, напряжения Рейнольдса) должны зависеть от поля средней скорости. Учтем теперь то, что по отношению к среднему движению напряжения Рейнольдса играют роль, аналогичную роли вязких напряжений в обычных движениях жидкости. Поэтому, если осредненное движение жидкости имеет характер движения всей жидкости в целом как твердого тела, т. е. не сопровождается никакими деформациями жидких частиц, то естественно предполагать, что рейнольдсовы напряжения, действующие на любой выделенный в жидкости элемент поверхности, будут направлены по нормали к этому элементу. Но в таком случае тензор $\rho\overline{u_i'u_j'}$ будет изотропен: $\rho\overline{u_i'u_j'} = c\delta_{ij}$, где, очевидно, $c = \frac{1}{3}\rho\overline{u_\alpha'u_\alpha'} = \frac{2}{3}\rho b$. Следовательно, турбулентная энергия $E_t = \rho b$ в определенном смысле аналогична давлению. Если же в осредненном движении имеет место перемещение частиц жидкости друг относительно друга, то напряжения $\tau_{ij}^{(1)} = \rho\overline{u_i'u_j'}$ должны зависеть от производных от средней скорости по координатам. Ограничиваясь случаем небольших градиентов средней скорости, можно в первом приближении учитывать лишь первые производные $\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}$ и зависимость $\tau_{ij}^{(1)}$ от этих производных считать линейной. Это рассуждение и является основой для попытки описания турбулентности при помощи коэффициентов турбулентной вязкости.

Поскольку напряжения $\rho\overline{u_i'u_j'}$ образуют симметричный тензор, их зависимость от производных $\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}$ должна иметь тензорный характер. Величины $\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}$ не образуют симметричного тензора, но из них можно образовать симметричный тензор деформации $\Phi_{ij} = \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}$, который как раз и характеризует отличие осредненного движения жидкости от движения твердого тела. Следовательно, тензор $\rho\overline{u_i'u_j'}$ естественно считать линейной функцией от тензора $\Phi_{ij} = \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}$, обращающейся в $\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}$ при $\Phi_{ij} = 0$. Коэффициенты этой линейной функции и будут иметь смысл коэффициентов «турбулентной вязкости».

Известно, что коэффициенты молекулярной вязкости ν и μ связаны соотношениями $\nu \sim u_m l_m$, $\mu \sim \rho u_m l_m$ со средней скоростью молекул u_m и средней длиной свободного пробега молекул l_m. Можно думать, что для коэффициентов турбулентной вязкости будут иметь место подобные же соотношения, в которых роль характеристик молекулярных движений u_m и l_m будут играть соответствующие характеристики неупорядоченных турбулентных движений. Аналогичной u_m характеристикой, очевидно, является среднее квадратичное значение пульсаций скорости, т. е. величина $\sqrt{b}$. Вместо же l_m следует использовать масштаб турбулентности l — величину размерности длины, описывающую среднее расстояние, на которое способны перемещаться турбулентные образования, сохраняя свою индивидуальность (т. е. прандтлевский «путь перемешивания», который по порядку величины совпадает с «длиной корреляции», определяемой по пространственной корреляционной функции с помощью формулы вида (4.75)). При этом турбулентность может характеризоваться разными масштабами в разных направлениях, так как турбулентные движения могут быть неизотропными и разные направления для них вовсе не должны быть равноправными. Поэтому, строго говоря, в каждой точке потока должен быть определен эллипсоид масштабов, т. е. задан симметричный тензор второго ранга l_{ij} (тензор масштабов), компоненты которого имеют размерность длины. При надлежащем его определении величины $M_{ij} = \rho K_{ij} = \rho\sqrt{b}\, l_{ij}$, имеющие размерность коэффициента вязкости, будут иметь смысл коэффициентов турбулентной вязкости. Используя тензор l_{ij} и учитывая симметрию тензора $\rho\overline{u_i'u_j'}$, можно положить

$$\rho\overline{u_i'u_j'} = \frac{2}{3}\rho b\delta_{ij} - \frac{1}{2}\rho\sqrt{b}\,(l_{i\alpha}\Phi_{\alpha j} + l_{j\alpha}\Phi_{\alpha i}). \qquad (6.21)$$

Такая формула была предложена Мониным (1950б). Лежащее в ее основе допущение о линейной зависимости напряжений Рейнольдса $\rho\overline{u_i'u_j'}$ от производных $\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}$ можно рассматривать как еще одну гипотезу того же типа, что и гипотезы, используемые в полуэмпирических теориях турбулентности (см. выше п. 5.8). Заметим еще, что в наиболее общей форме линейную зависимость между тензорами $\rho\overline{u_i'u_j'}$ и Φ_{ij} следовало бы записать в виде

$$\rho\overline{u_i'u_j'} = \frac{2}{3}\rho b\delta_{ij} - \rho K_{ij\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta},$$

где $K_{ij\alpha\beta}$ — некоторый тензор четвертого ранга, симметричный по i, j и по α, β и удовлетворяющий условию $K_{jj\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} = 0$.

Использование формулы (6.21) означает, что тензор $K_{ij\alpha\beta}$ предполагается вырожденным, а именно — представимым в виде

$$K_{ij\alpha\beta}=\frac{1}{2}(K_{i\alpha}\beta_{j\beta}+K_{j\alpha}\beta_{i\beta}).$$

Впрочем, если не делать никаких дополнительных предположений о тензоре l_{ij}, то формулу (6.21) (аналогично формуле Буссинеска (5.5), определяющей скалярный коэффициент турбулентной вязкости K) часто можно рассматривать и не как гипотетическую связь, а просто как определение новых характеристик турбулентности l_{ij}, вводимых вместо напряжений Рейнольдса $\tau_{ij}^{(1)}$. В самом деле, равенства (6.21) фактически представляют собой систему шести уравнений относительно шести неизвестных l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{22}, l_{23}, l_{33}. Перейдя к системе координат, в которой тензор Φ_{ij} диагонален, и учтя, что $\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi_{33}=0$, легко убедиться, что детерминант этой системы пропорционален $(\det\|\Phi_{ij}\|)^2$. Поэтому если только $\det\|\Phi_{ij}\|\neq 0$, т. е. если тензор Φ_{ij} не вырождается, то величины l_{ij} однозначно определяются по $\rho\overline{u_i'u_j'}$ и наоборот, т. е. формула (6.21) всегда может быть удовлетворена. В этом случае рассуждения, использовавшиеся при выводе этой формулы, должны лишь помочь физической интерпретации величин l_{ij} и $K_{ij}=\sqrt{b}\,l_{ij}$, позволяющей, если надо, сформулировать затем о них определенные гипотезы.

Если же $\det\|\Phi_{ij}\|=0$, то формула (6.21) не только предписывает гипотетическую линейную связь между тензорами $\rho\overline{u_i'u_j'}$ и Φ_{ij}, но и налагает определенные ограничения на вид тензора напряжений Рейнольдса, нужные для того, чтобы соответствующая система уравнений относительно l_{ij} вообще имела решение. В этом случае рассматриваемая формула иногда может уже оказаться лишь довольно грубым приближением к действительности. Рассмотрим, например, случай, когда осредненное движение является плоскопараллельным, так что $\bar{u}_1=\bar{u}_1(x_3)$, $\bar{u}_2=\bar{u}_3=0$ и соответственно этому только компоненты Φ_{13} и Φ_{31} тензора Φ_{ij} отличны от нуля. Здесь, исходя из геометрических соображений, естественно ожидать, что оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 будет являться главными направлениями тензора l_{ij}. Но тогда формулы (6.21) принимают вид:

$$\rho\overline{u_1'^2}=\rho\overline{u_2'^2}=\rho\overline{u_3'^2}=\frac{2}{3}\rho b,$$

$$\rho\overline{u_1'u_3'}=-\rho\sqrt{b}\,\frac{l_{11}+l_{33}}{2}\,\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_3},\quad \rho\overline{u_1'u_2'}=\rho\overline{u_2'u_3'}=0.$$

Равенство нулю компонент $\tau_{12}^{(1)}$ и $\tau_{23}^{(1)}$ согласуется с выводами из соображений симметрии; однако равенство друг другу сред-

них квадратов трех компонент пульсаций скорости является дополнительным ограничением, вообще говоря, не выполняющимся в реальных плоскопараллельных турбулентных потоках (ср. выше рис. 26 на стр. 236).

Тем не менее, использование вместо тензора $\rho\overline{u_i'u_j'}$ величин b и l_{ij} часто все же имеет смысл, так как тензор l_{ij} имеет более наглядный геометрический смысл и его главные направления иногда можно задать заранее, исходя из геометрических соображений. В ряде случаев можно даже в качестве первого приближения просто предположить, что $l_{ij}=l\cdot\delta_{ij}$ — изотропный тензор, т. е. принять за основу гипотезу, выражаемую формулой

$$\rho\overline{u_i'u_j'}=\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}-\rho l\sqrt{b}\,\Phi_{ij} \tag{6.22}$$

(заметим, что тензор $\overline{u_i'u_j'}$ здесь все равно остается анизотропным). Гипотеза (6.22) близка к той, которая использовалась еще Буссинеском (1897). Фигурирующая здесь величина $l\sqrt{b}=K$ имеет смысл скалярного коэффициента турбулентной вязкости (приближенно определяющего сразу все компоненты тензора напряжений Рейнольдса).

Согласно гипотезе (6.22) величина A имеет вид

$$A=\rho K\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{2}\rho K\sum_{\alpha,\,\beta}\Phi_{\alpha\beta}^2, \tag{6.23}$$

аналогичный выражению для диссипации энергии осредненного движения $\rho\varepsilon_s=\frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\,\beta}\Phi_{\alpha\beta}^2$, но с заменой коэффициента молекулярной вязкости μ коэффициентом турбулентной вязкости ρK. Условие $A>0$ при этом эквивалентно условию $K>0$, так что формальное использование соотношений (6.21) или (6.22) в случаях $A<0$ означало бы введение в теорию отрицательных коэффициентов вязкости. По этой причине понятие о коэффициенте турбулентной (точнее — макротурбулентной) вязкости является бессмысленным, например, для течений общей циркуляции атмосферы (отметим, однако, что «коэффициент макротурбулентной теплопроводности» для этих течений оказывается, тем не менее, всегда положительным).

Формулы, аналогичные (6.21) или (6.22), могут быть написаны и в применении к турбулентному переносу тепла и материальных примесей. А именно, если ϑ — концентрация примеси, то плотность турбулентного потока примеси по направлению Ox_i, равную $\rho\overline{\vartheta' u_i'}$, в общем случае анизотропной турбулентности

можно предполагать задающейся соотношением

$$\rho\overline{\vartheta' u_i'} = -\rho K_{\vartheta i\alpha}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}, \qquad (6.24)$$

где компоненты тензора $K_{\vartheta i\alpha}$ имеют смысл коэффициентов турбулентной диффузии для данной примеси; в случае, когда ϑ — это температура, в обе части (6.24) следует еще добавить множитель c_p (ср. формулы (5.9) и (5.9′) на стр. 221).

В формуле (6.24) учитывается, что турбулентная диффузия, вообще говоря, анизотропна. При использовании тензора масштабов турбулентности l_{ij} можно предполагать, что анизотропность турбулентной диффузии будет такой же, как и анизотропность этого тензора, т. е. что $K_{\vartheta ij} = \alpha_\vartheta \rho \sqrt{b}\, l_{ij}$, где α_ϑ — безразмерный параметр. Если предположить, что допустимо пренебречь анизотропностью тензора масштабов, т. е. принять, что $l_{ij} \approx l\delta_{ij}$, то (6.24) обратится в соотношение

$$\rho\overline{\vartheta' u_i'} = -\alpha_\vartheta \rho l\sqrt{b}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i} = -\alpha_\vartheta \rho K\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i}. \qquad (6.25)$$

Заметим, что даже в случае плоскопараллельных турбулентных течений, для которых (6.25) можно рассматривать просто как определение новой величины $K_\vartheta = \alpha_\vartheta K$, это соотношение становится гипотетическим (и требующим проверки), как только мы допускаем, что $\alpha_\vartheta = \text{const}$ (т. е. не меняется в пространстве и времени). Чисто формально здесь можно положить также, что $\vartheta = b' = \frac{1}{2}u_\alpha' u_\alpha'$, т. е. использовать формулу (6.25) для вычисления входящих в уравнения (6.15) и (6.17) третьих моментов поля скорости:

$$\frac{1}{2}\rho\overline{u_\beta' u_\beta' u_i'} = \rho\overline{b' u_i'} = -\alpha_b \rho l\sqrt{b}\,\frac{\partial b}{\partial x_i} = -\alpha_b \rho K\frac{\partial b}{\partial x_i}, \qquad (6.26)$$

где α_b — численный коэффициент, который может и не совпадать с α (формула (6.26), разумеется, представляет собой еще одну полуэмпирическую гипотезу).

Принимая гипотетические соотношения (6.22) и (6.26), мы вводим в уравнение баланса турбулентной энергии (6.17) вместо характеристик турбулентности $\rho\overline{u_i' u_j'}$ и $\rho\overline{u_\beta' u_\beta' u_i'}$ характеристики l и b (или $K = l\sqrt{b}$), т. е. существенно уменьшаем число неизвестных величин. Дальнейшим шагом в этом направлении будет установление связи между удельной диссипацией турбулентной энергии $\bar{\varepsilon}_t$, также входящей в качестве неизвестной в уравнение (6.17), и величинами l и b (или l и K). Если только допустить, что такая связь имеет место, то ее вид можно уже однозначно

восстановить с помощью соображений размерности:

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{b^{3/2}}{c^4 l} = \frac{K^3}{c^4 l^4}, \qquad (6.27)$$

где c^4 — еще один неотрицательный безразмерный параметр (то, что мы записываем его как четвертую степень некоторого другого числа, будет удобно в п. 6.6). Соотношение (6.27) опять же можно рассматривать просто как определение новой величины c, заменяющей $\bar{\varepsilon}_t$ (предполагая, что K и l уже заданы, например, при помощи соотношений $\tau_{13}^{(1)} = \rho K\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial x_3}$ и $K = l\sqrt{b}$). Если, однако, мы допустим, что $c = \text{const}$, то тем самым мы сразу превращаем (6.27) в дополнительную гипотезу того же типа, что и другие гипотезы полуэмпирических теорий турбулентности.

6.4. Баланс турбулентной энергии в сжимаемой жидкости

Учет сжимаемости жидкости и, в частности, пульсаций плотности ρ' сразу вносит в изложенные выше расчеты существенное усложнение. А именно, при этом средняя плотность импульса оказывается уже равной $\overline{\rho u_i} = \overline{\rho}\,\overline{u}_i + \overline{\rho u_i'}$, где $\overline{\rho u_i'} = \overline{\rho' u_i'}$ — средняя плотность импульса пульсационного движения (при отсутствии пульсаций плотности обращающаяся в нуль). Аналогично, средняя плотность кинетической энергии здесь имеет вид

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha u_\alpha} = \frac{1}{2}\overline{\rho}\,\overline{u}_\alpha\overline{u}_\alpha + \overline{\rho u_\alpha'}\overline{u}_\alpha + \frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha' u_\alpha'} = E_s + E_{st} + E_t, \qquad (6.28)$$

где E_s — плотность энергии среднего движения, $E_t = \frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha' u_\alpha'} = \frac{1}{2}(\overline{\rho u_\alpha' u_\alpha'} + \overline{\rho' u_\alpha' u_\alpha'})$ — плотность энергии пульсационного движения, а $E_{st} = \overline{\rho u_\alpha'}\cdot\overline{u}_\alpha = \overline{\rho' u_\alpha'}\cdot\overline{u}_\alpha$ — дополнительная часть пульсационной энергии, связанная с работой импульса $\overline{\rho u_i'}$ при перемещениях жидкости, составляющих осредненное течение.

При составлении уравнений для моментов в случае сжимаемой жидкости в основу должны быть положены общее уравнение неразрывности (1.1) и уравнения движения (1.3), которые мы здесь перепишем в виде

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_i u_\alpha + p\delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}) = \rho X_i, \qquad i = 1, 2, 3. \qquad (6.29)$$

В уравнениях (6.29) символом $\delta_{i\alpha}$, как обычно, обозначен единичный тензор, а символом $\sigma_{i\alpha}$ — общий тензор вязких напряжений,

задающийся формулой $\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right)+$ $+\zeta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}$; остальные обозначения не отличаются от использовавшихся в уравнениях (1.3). Осредняя уравнения (1.1) и (6.29), получим соотношения

$$\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar\rho\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_\alpha})=0, \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar\rho\bar u_i+\overline{\rho u'_i})+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar\rho\bar u_i\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_i}\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_\alpha}\bar u_i+\overline{\rho u'_i u'_\alpha}+\bar p\delta_{i\alpha}-\bar\sigma_{i\alpha})=$$
$$=\bar\rho\bar X_i+\overline{\rho' X'_i}, \tag{6.31}$$

играющие в данном случае ту же роль, которую играют уравнения Рейнольдса (5.1) в случае турбулентности в несжимаемой жидкости. С помощью уравнения (6.30) и уравнения

$$\frac{\partial\bar u_i}{\partial t}+\bar u_\alpha\frac{\partial\bar u_i}{\partial x_\alpha}+\overline{u'_\alpha\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}}=\bar X_i-\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}},$$

вытекающего из (1.4) (и, следовательно, справедливого лишь в пренебрежении пульсациями коэффициентов вязкости), можно найти также выражение для производной $\frac{\partial\bar\rho\bar u_i}{\partial t}$. При этом мы получим соотношение

$$\frac{\partial\bar\rho\bar u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar\rho\bar u_i\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_i u'_\alpha}+\bar p\delta_{i\alpha}-\bar\sigma_{i\alpha})=\bar\rho\bar X_i+\varphi_i, \tag{6.32}$$

где

$$\varphi_i=\overline{u'_i\frac{\partial\bar\rho\bar u'_\alpha}{\partial x_\alpha}}-\bar u_i\frac{\partial\overline{\rho u'_\alpha}}{\partial x_\alpha}+\left(\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}-\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right)-\left(\frac{\partial\bar\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}-\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}}\right) \tag{6.33}$$

— величина, которая для случая несжимаемой жидкости обращается в нуль. Сравнение уравнения (6.32) (с 6.31) показывает, что

$$\frac{\partial\overline{\rho u'_i}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho u'_i}\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_\alpha}\bar u_i+\overline{\rho' u'_i u'_\alpha})=\overline{\rho' X'_i}-\varphi_i. \tag{6.34}$$

Таким образом, величины φ_i имеют ясный физический смысл — они описывают обмен импульсом между осредненным и пульсационным движением.

Из уравнений движения (6.29) и уравнения неразрывности (1.1) легко получается также уравнение для тензора $\rho u_i u_j$, отличающееся от соответствующего уравнения для несжимаемой жидкости (уравнение (6.3) на стр. 319) лишь тем, что под σ_{ij} теперь надо понимать вязкие напряжения в сжимаемой жидкости. В частности, плотность кинетической энергии $E=\frac{1}{2}\rho u_\alpha u_\alpha$ в сжимаемой жидкости будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(Eu_\alpha+pu_\alpha-u_\beta\sigma_{\alpha\beta})=\rho u_\alpha X_\alpha+p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}-\rho\varepsilon, \tag{6.35}$$

отличающемуся внешне от (6.4) лишь наличием в правой части еще одного слагаемого $p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$, описывающего изменение кинетической энергии в результате сжатий и расширений элементов жидкости (сопровождающихся изменением внутренней энергии). Взяв среднее значение от всех членов этого уравнения, мы получим уравнение для средней плотности кинетической энергии $\bar E$. Это уравнение, однако, мы здесь не будем выписывать, а вместо того выпишем три уравнения для трех составляющих E_s, E_{st} и E_t плотности $\bar E$:

$$\frac{\partial E_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E_s\bar u_\alpha+\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta}\bar u_\beta+\overline{pu_\alpha}-\bar u_\beta\bar\sigma_{\alpha\beta})=\bar\rho\bar u_\alpha\bar X_\alpha-\overline{\rho\varepsilon}_s+\overline{p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}}+$$
$$+\left[\bar u_\alpha\bar\varphi_\alpha+\frac{1}{2}\bar u_\beta\bar u_\beta\overline{\frac{\partial\rho u'_\alpha}{\partial x_\alpha}}\right]+\left\{\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}\right\}, \tag{6.36}$$

$$\frac{\partial E_{st}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_{st}\bar u_\alpha+\overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta}\cdot\bar u_\beta+\frac{1}{2}\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta u'_\beta}\right)=$$
$$=\bar u_\alpha\overline{\rho' X'_\alpha}-\left[\bar u_\alpha\bar\varphi_\alpha+\frac{1}{2}\bar u_\beta\bar u_\beta\overline{\frac{\partial\rho u'_\alpha}{\partial x_\alpha}}\right]+\left\{\overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}+\overline{\rho u'_\alpha}\frac{D\bar u_\alpha}{Dt}\right\},$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\bar u_\alpha+\frac{1}{2}\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta u'_\beta}+\overline{p' u'_\alpha}-\overline{u'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right)=$$
$$=\overline{\rho u'_\alpha X_\alpha}+\overline{\rho u'_\alpha X'_\alpha}-\overline{\rho\varepsilon}_t+\overline{p'\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha}}-\left\{\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}+\overline{\rho u'_\alpha}\frac{D\bar u_\alpha}{Dt}\right\},$$

где

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\bar u_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\quad \overline{\rho\varepsilon}_s=\bar\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}\quad\text{и}\quad\overline{\rho\varepsilon}_t=\overline{\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}}.$$

В этих уравнениях выражение в квадратных скобках описывает взаимные превращения энергий E_s и E_{st}, а выражения в фигурных скобках — взаимные превращения E_s и E_t или E_{st} и E_t.

Уравнения (6.30)—(6.34) и (6.36) содержат целый ряд новых статистических характеристик турбулентности, не содержащихся в соответствующих уравнениях для несжимаемой жидкости. Наиболее существенными из этих новых характеристик являются величины $\overline{\rho u'_i}$ — компоненты средней плотности импульса пульсационного движения, или, что то же самое, компоненты

средней плотности турбулентного потока массы. Если осредненный турбулентный поток массы по направлению среднего движения отсутствует, то $E_{st}=\overline{\rho u'_\alpha}\cdot\bar{u}_\alpha=0$, и энергия пульсационного движения будет описываться лишь величиной E_t. Самое важное отличие общего уравнения для E_t от уравнения (6.15), справедливого для несжимаемой жидкости, заключается в появлении слагаемого

$$B=\overline{\rho u'_\alpha}\left(\overline{X}_\alpha-\frac{D\bar{u}_\alpha}{Dt}\right), \tag{6.37}$$

которое мы сейчас рассмотрим несколько более подробно.

В большинстве турбулентных течений, встречающихся на практике (как в природных условиях, так и в технических устройствах), основной массовой силой, действующей на жидкость и производящей работу, является сила тяжести. При этом, направив ось Ox_3 вертикально вверх, мы можем положить $X_i=Y_i-g\delta_{i3}$, где g — ускорение силы тяжести, а Y_i — компоненты ускорения других массовых сил. Но ускорение силы тяжести обычно значительно больше, чем индивидуальное ускорение частиц в осредненном движении $\frac{D\bar{u}_i}{Dt}$ и чем ускорения всех других массовых сил Y_i, так что в большинстве задач можно положить

$$B\approx-\overline{\rho u'_3}g. \tag{6.38}$$

Смысл этой величины можно уяснить, заметив, что при наличии пульсаций плотности ρ' на турбулентные элементы действует архимедова сила $-\rho' g$, так что B есть средняя работа архимедовой силы при турбулентных перемещениях элементов жидкости. Таким образом, величина B описывает взаимные превращения кинетической энергии турбулентности и потенциальной энергии вертикального столба жидкости непостоянной плотности в поле тяжести. Особенно существенную роль играют такие взаимные превращения в случае вертикально стратифицированной жидкости с переменной по высоте средней плотностью (например, в случае атмосферы при отличной от безразличной температурной стратификации). Если вертикальная стратификация жидкости устойчива, то вертикальные перемещения турбулентных элементов сопровождаются затратой энергии на работу против архимедовых сил, так что $B<0$ (заметим, что при устойчивой стратификации плотность убывает с высотой, и пульсации плотности и вертикальной скорости, очевидно, будут иметь положительную корреляцию). В случае неустойчивой стратификации, наоборот, при вертикальных перемещениях турбулентных элементов работа архимедовых сил совершается за счет потенциальной энергии стратификации и приводит к росту энергии турбулентности; в этом случае $B>0$ (корреляция u'_3 и ρ' отрицательна).

В случае атмосферной турбулентности и в ряде других важных случаев для вычисления величины $\overline{\rho u'_i}$ можно воспользоваться уравнениями теории свободной конвекции и в соответствии с (1.73) считать, что $\rho'=-\beta\bar{\rho}T'$, где β — коэффициент теплового расширения среды. В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать случай газовой среды и в соответствии с уравнением состояния идеального газа будем считать, что $\beta=1/\bar{T}$, где $\bar{T}$ — средняя температура. В таком случае $\overline{\rho u'_i}\approx$ $\approx-\frac{\bar{\rho}}{\bar{T}}\overline{T'u'_i}$, т. е. турбулентный поток массы оказывается пропорциональным турбулентному потоку тепла. Отсюда для величины B получается выражение

$$B=\frac{g\bar{\rho}}{\bar{T}}\overline{T'u'_3}=\frac{gq}{c_p\bar{T}},\quad\text{где}\quad q=c_p\bar{\rho}\overline{T'u'_3}. \tag{6.39}$$

Для приближенного вычисления величины (6.39) часто можно использовать полуэмпирическую формулу $q=-c_p\bar{\rho}K_\theta\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}=$ $=-c_p\bar{\rho}\alpha K\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}$ (см. (6.25)), в силу которой

$$B=-\alpha\frac{g}{\bar{T}}\bar{\rho}K\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}. \tag{6.40}$$

Иногда, однако, приходится учитывать то, что при вертикальных перемещениях элементов среды температура T, вообще говоря, меняется, т. е. что она не является строго консервативной величиной. Так как, однако, лучистый и молекулярный теплообмен между турбулентными элементами и окружающей средой почти всегда очень мал, то энтропию или функционально с ней связанную потенциальную температуру $\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ (см. выше стр. 98) можно уже считать консервативной величиной. Вследствие малости пульсаций давления по сравнению с пульсациями температуры (на которой основывается все приближение свободной конвекции) $\frac{T'}{\bar{T}}\approx\frac{\theta'}{\bar{\theta}}$; поэтому $B\approx\frac{g\bar{\rho}}{\bar{\theta}}\overline{\theta'u'_3}$. Исходя отсюда, в тех случаях, когда соотношение (6.40) оказывается неточным из-за неконсервативности температуры, полуэмпирическое соотношение (6.25) обычно можно применить к потенциальной

температуре θ, положив

$$B = -\alpha \frac{g}{\bar{\theta}} \bar{\rho} K \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3} \qquad (6.40')$$

(где α снова имеет смысл отношения коэффициентов обмена для теплоты и для импульса).

6.5. Число Ричардсона и коэффициент турбулентной вязкости в температурно-стратифицированной среде

В предыдущем пункте мы рассмотрели уравнение баланса турбулентной энергии для произвольной сжимаемой среды. В дальнейшем, однако, из всех эффектов, связанных со сжимаемостью, мы будем учитывать только эффект взаимных превращений кинетической энергии и потенциальной энергии расслоения по плотности, причем в соответствии со схемой свободной конвекции плотность будем считать зависящей только от пульсаций температуры (но не давления). При этом жидкость можно снова считать несжимаемой $\left(\text{т. е. использовать уравнение } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\right)$; однако в уравнении для вертикальной компоненты скорости следует учесть и архимедову силу, в случае газовой среды описываемую дополнительным слагаемым $-\frac{g}{\bar{T}} T'$ в правой части (ср. уравнение (1.75) на стр 64). Совершенно аналогичные результаты получаются также и для несжимаемой жидкости непостоянной плотности ρ; в этом случае надо лишь заменить во всех последующих формулах $-\frac{\bar{\rho}}{\bar{T}} T'$ на ρ'.

Итак, будем считать, что сила тяжести — единственная объемная внешняя сила, производящая работу, и будем исходить из системы уравнений свободной конвекции, т. е. предположим, что u_3 удовлетворяет уравнению (1.75) с $\beta = 1/\bar{T}$. В таком случае, повторив снова вывод уравнения баланса турбулентной энергии, мы придем к уравнению

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\rho}\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}\right) = -\bar{\rho}\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{g\bar{\rho}}{\bar{T}}\overline{T' u'_3} - \bar{\rho}\bar{\varepsilon}_t, \qquad (6.41)$$

где $E_t = \frac{1}{2}\bar{\rho}\overline{u'_\beta u'_\beta}$. Это уравнение отличается от уравнения (6.15), относящегося к несжимаемой жидкости, только заменой слагаемого $\rho\overline{u'_\alpha X'_\alpha}$ в правой части слагаемым $B = \frac{g\bar{\rho}}{\bar{T}}\overline{T' u'_3}$, смысл которого был раскрыт в конце предыдущего пункта. Уравнение (6.41) применимо, в частности, к атмосферной турбулентности, так как движения воздуха в атмосфере обычно с большой точностью описываются системой уравнений свободной конвекции.

Заметим теперь, что в условиях развитой турбулентности вязкие напряжения трения пренебрежимо малы по сравнению с турбулентными напряжениями Рейнольдса (за исключением примыкающего к твердым стенкам вязкого подслоя, который мы здесь не будем рассматривать). Поэтому естественно считать, что и перенос турбулентной энергии за счет сил вязкости (т. е. неупорядоченных молекулярных движений) очень мал по сравнению с переносом энергии турбулентными пульсациями скорости, т. е. что последний член в скобках в левой части (6.41) пренебрежимо мал по сравнению со вторым членом. Рассмотрим случай, когда осредненное течение однородно в направлении осей Ox_1 и Ox_2. В таком случае все статистические характеристики турбулентности будут зависеть только от x_3, причем в силу уравнения неразрывности здесь $\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = 0$, т. е. $\bar{u}_3 = 0$. Будем наряду с обозначениями x_i и u_i для координат и скоростей использовать обозначения x, y, z и u, v, w; тогда, пренебрегая малым членом $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}$, мы можем переписать (6.41) в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \overline{p' w'}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{T}}\overline{T'w'} - \bar{\varepsilon}_t, \qquad (6.42)$$

где $u'_\alpha u'_\alpha = u'^2 + v'^2 + w'^2$, а $b = \frac{E_t}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2}\overline{u'_\alpha u'_\alpha}$ — интенсивность турбулентности (т. е. средняя энергия пульсаций, приходящаяся на единицу массы жидкости).

Если средняя скорость течения всюду имеет одинаковое направление (скажем, вдоль оси Ox), то уравнение (6.42) еще упрощается; здесь

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(\frac{1}{2}u'_\alpha u'_\alpha + \frac{p'}{\rho}\right)w'} - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{T}}\overline{T'w'} - \bar{\varepsilon}_t. \qquad (6.43)$$

Последнее уравнение можно также представить в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(\frac{1}{2}u'_\alpha u'_\alpha + \frac{p'}{\rho}\right)w'} - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(1 - \mathrm{Rf}) - \bar{\varepsilon}_t, \qquad (6.44)$$

где

$$\mathrm{Rf} = \frac{\frac{g}{\bar{T}}\overline{T'w'}}{\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = -\frac{g}{c_p \bar{T}}\frac{q}{\tau\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}. \qquad (6.45)$$

Безразмерная величина Rf, очевидно, определяет относительную роль термической конвекции в порождении турбулентной энергии по сравнению с динамическими факторами (передачей энергии от осредненного движения); она называется *динамическим числом Ричардсона*. Ясно, что $\mathrm{Rf}<0$ при $q>0$ (т. е. при неустойчивой термической стратификации) и $\mathrm{Rf}>0$ при $q<0$ (при устойчивой стратификации); при безразличной же стратификации $\mathrm{Rf}=0$.

В уравнении (6.43) мы уже пренебрегли переносом энергии силами молекулярной вязкости. Выше также указывалось, что перенос энергии, обусловленный работой сил давления, обычно мал по сравнению с ее переносом пульсациями скорости (см. стр. 327). Поэтому часто в уравнении баланса турбулентной энергии пренебрегают слагаемым, содержащим пульсации давления, т. е. полагают

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(1-\mathrm{Rf}) - \bar{\varepsilon}_t. \qquad (6.46)$$

В случае стационарного течения, не сопровождающегося турбулентным переносом тепла (т. е. при безразличной термической стратификации), вблизи стенки образуется логарифмический пограничный слой, в пределах которого интенсивность турбулентности b постоянна (равна cu_*^2, где $c\approx 5$ согласно данным рис. 26 на стр. 236), а $\overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}$ лишь постоянным множителем отличается от u_*^3. Следовательно, перенос энергии в этом слое тождественно равен нулю, и в уравнении (6.46) здесь отличны от нуля только слагаемые $-\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ и $-\bar{\varepsilon}_t$, которые должны взаимно компенсироваться. Однако вне логарифмического пограничного слоя и при наличии турбулентного потока тепла диффузионное слагаемое $-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}$, по-видимому, может иногда оказаться сравнимым по величине с другими слагаемыми (см. ниже стр. 458—459). Тем не менее, чаще всего им и здесь пренебрегают, так как обычно это слагаемое все же не очень велико и, главное, его почти всегда неоткуда определить. При этом уравнение баланса энергии приобретает относительно простой вид

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(1-\mathrm{Rf}) - \bar{\varepsilon}_t, \qquad (6.47)$$

не содержащий уже никаких моментов пульсаций гидродинамических полей выше второго порядка. Иногда, впрочем, вместо отбрасывания диффузионного слагаемого предполагают, что в пограничном слое это слагаемое пропорционально слагаемому

$\frac{g}{T}\overline{T'w'}$, одновременно с которым оно обращается в нуль (см., например, Клюг (1963), Такеучи и Иокояма (1963)). В таком случае вместо уравнения (6.47) получается уравнение

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(1-\sigma\,\mathrm{Rf}) - \bar{\varepsilon}_t, \qquad (6.47')$$

имеющее столь же простой вид, но содержащее дополнительный безразмерный параметр σ, позволяющий добиться лучшего согласия с эмпирическими данными.

Будем пока исходить из уравнения (6.47). Так как всегда $\bar{\varepsilon}_t>0$ и практически всегда $-\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}>0$ (исключительными случаями, в которых энергия турбулентности передается среднему течению, мы здесь не будем заниматься), то в силу этого уравнения стационарная (незатухающая) турбулентность возможна лишь при

$$\mathrm{Rf}<1. \qquad (6.48)$$

Результат (6.48) представляет собой фактически критерий возникновения турбулентности в стратифицированной среде, полученный с помощью уравнения баланса энергии возмущения (ср. выше п. 2.9). Как и другие критерии, полученные с помощью энергетического метода, он, по-видимому, является довольно грубым, т. е. дает сильно завышенное значение критического числа Ричардсона. Поэтому исходя отсюда можно лишь утверждать, что стационарная турбулентность возможна при $\mathrm{Rf}<R$, где $R=\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$ наверное меньше единицы (причем, по всей вероятности, значительно меньше). Чисто формально значение $1/R=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$ можно отождествить также со значением параметра σ в уравнении (6.47′) — при таком выборе σ энергетический критерий, получаемый из этого последнего уравнения, оказывается уже точным.

Воспользовавшись полуэмпирическими соотношениями (5.5), (6.26), (6.27) и (6.40), мы можем преобразовать уравнение (6.46) в следующее *полуэмпирическое уравнение баланса турбулентной энергии*:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = K\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{T}\alpha K\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \frac{K^3}{c^4 l^4} + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_b K\frac{\partial b}{\partial z}. \qquad (6.49)$$

Здесь K — коэффициент турбулентной вязкости (переноса импульса), а $\alpha K=K_T$ и $\alpha_b K=K_b$ — коэффициенты турбулентного переноса тепла и, соответственно, энергии. Пренебрегая диффузией энергии (т. е. последним слагаемым в правой части), мы получим отсюда следующий, эквивалентный (6.48) критерий

существования незатухающей турбулентности:

$$\mathrm{Ri} < \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha = \frac{K_T}{K}. \tag{6.50}$$

Здесь

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}/\partial z}{(\partial \overline{u}/\partial z)^2} = \frac{\mathrm{Rf}}{\alpha} \tag{6.51}$$

— обычное число Ричардсона (см. формулу (2.3′) на стр. 98, в которой вместо $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$ использовалась величина $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - G_a$ в соответствии с равенством (6.40′), немного более точным, чем (6.40)). Критерий (6.50) был впервые получен Ричардсоном (1920) (предполагавшим, что $\alpha = 1$); он, очевидно, показывает, что $\mathrm{Ri_{cr}} < \frac{1}{\alpha}$, но никак не определяет еще точного значения $\mathrm{Ri_{cr}}$. На стр. 124 мы уже отмечали, что согласно теории гидродинамической устойчивости течение расслоенной жидкости оказывается устойчивым относительно бесконечно малых возмущений, если во всех его точках $\mathrm{Ri} > \frac{1}{4}$; следовательно, $\mathrm{Ri_{cr}} \leqslant \frac{1}{4}$. С другой стороны, однако, есть некоторые основания предполагать, что, может быть, даже $\alpha \to 0$ при $\mathrm{Rf} \to \mathrm{Rf_{cr}}$ и турбулентность может существовать при сколь угодно больших значениях Ri (так что $\mathrm{Ri_{cr}} = \infty$; см. ниже стр. 381 и 436).

Так как по определению $K \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho} = u_*^2$, то уравнение (6.49) для стационарных условий и в пренебрежении диффузией турбулентной энергии может быть представлено в виде

$$\frac{u_*^4}{K}(1 - \alpha\,\mathrm{Ri}) = \frac{u_*^4}{K}(1 - \mathrm{Rf}) = \frac{K^3}{c^4 l^4}.$$

Отсюда для коэффициента турбулентной вязкости K получается выражение

$$K = u_* c l (1 - \mathrm{Rf})^{1/4}. \tag{6.52}$$

Согласно формуле (6.52), K как будто бы обращается в нуль (т. е. прекращается турбулентный обмен) при $\mathrm{Rf} = 1$, т. е. $\mathrm{Rf_{cr}} = 1$, $\mathrm{Ri_{cr}} = \frac{1}{\alpha}$ в противоречии со сказанным выше. На самом деле, однако, использование полуэмпирического соотношения (6.27) с $c = \mathrm{const}$ при Rf, приближающемся к $\mathrm{Rf_{cr}}$, теряет смысл, так что и соотношение (6.52) здесь не может быть применено. Заметим теперь, что в отсутствие термической стратификации в пределах логарифмического пограничного слоя $cl = \varkappa z$ (так

как в силу (6.49) здесь $cl = K^{1/2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^{-1/2}$, а $K = \varkappa u_* z$, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\varkappa z}$); поэтому при произвольной стратификации удобно положить

$$cl = \varkappa z\, \lambda_1(\mathrm{Rf}), \qquad K = u_* \varkappa z\, \lambda_1(\mathrm{Rf})(1 - \mathrm{Rf})^{1/4}. \tag{6.53}$$

Функция $\lambda_1(\mathrm{Rf})$, очевидно, должна удовлетворять условиям $\lambda_1(0) = 1$ и $\lambda_1(R) = 0$, где $R = \mathrm{Rf_{cr}}$. Чтобы подчеркнуть, что $\lambda_1(R) = 0$, можно ввести в рассмотрение вместо $\lambda_1(\mathrm{Rf})$ функцию $\lambda(\mathrm{Rf})$ такую, что

$$\lambda_1(\mathrm{Rf}) = \lambda(\mathrm{Rf}) \frac{(1 - \sigma\,\mathrm{Rf})^{1/4}}{(1 - \mathrm{Rf})^{1/4}}, \qquad \sigma = \frac{1}{R}; \tag{6.54}$$

с помощью этой новой функции выражение для K записывается в аналогичном (6.53) виде

$$K = u_* \varkappa z\, \lambda(\mathrm{Rf})(1 - \sigma\,\mathrm{Rf})^{1/4}, \tag{6.55}$$

но уже с добавочным множителем $\sigma = 1/R$ при Rf в последних скобках. Тот же результат (6.55), очевидно, можно получить, если принять, что $cl = \varkappa z \lambda(\mathrm{Rf})$, но вместо пренебрежения диффузией турбулентной энергии считать эту диффузию пропорциональной слагаемому $\frac{g}{\overline{T}} \overline{T'w'}$ (т. е. использовать вместо (6.47) уравнение (6.47′) с $\sigma = 1/R$). В соотношении (6.55), очевидно, $\lambda(0) = 1$, но теперь уже автоматически $K(R) = 0$, и поэтому можно допустить, что $\lambda(\mathrm{Rf})$ нигде не обращается внуль. В п. 7.4 мы увидим, в частности, что разумные в ряде отношений результаты получаются, если даже просто положить, что $\lambda(\mathrm{Rf}) \equiv 1$. Следует, однако, подчеркнуть, что с точки зрения теории такой выбор функции $\lambda(\mathrm{Rf})$ ничем не оправдан и он вполне может быть изменен для получения лучшего согласия с данными экспериментов (подробнее об этом мы еще будем говорить в следующем параграфе).

6.6. Турбулентность в планетарном пограничном слое атмосферы

В этом и следующем пунктах мы приведем два примера использования полуэмпирического уравнения баланса турбулентной энергии в конкретных задачах, иллюстрирующие подход к изучению турбулентных течений, типичный для полуэмпирических теорий турбулентности.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о пограничном слое, образующемся в атмосфере около Земли вследствие того, что при движении воздуха относительно подстилающей поверхности возникают силы трения. Слой, в котором непосредственно проявляются эти силы, называется *планетарным пограничным слоем* или, иначе, *слоем трения*. Будем рассматривать

лишь пограничный слой над плоской однородной подстилающей поверхностью (которую мы примем за плоскость $z=0$) при стационарных внешних условиях и в предположении, что термическую стратификацию можно считать безразличной. Кроме того, воспользуемся тем, что в пределах планетарного пограничного слоя допустимо полагать $\bar{\rho}\approx\text{const}$; поэтому сжимаемость воздуха для данной задачи оказывается несущественной. Так как все статистические характеристики турбулентности в планетарном пограничном слое зависят только от z, то здесь можно использовать форму (6.42) уравнения баланса турбулентной энергии. В этом уравнении в рассматриваемом случае можно пренебречь слагаемым слева (в силу стационарности) и слагаемым $\frac{g}{\bar{T}}\overline{T'w'}$ в правой части (так как стратификацию мы считаем безразличной); кроме того, мы, как обычно, пренебрежем и членом $\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\overline{p'w'}}{\partial z}$, описывающим малосущественный эффект переноса турбулентной энергии под действием сил давления. В результате получается уравнение

$$-\overline{u'w'}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\overline{v'w'}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}-\bar{\varepsilon}_t=\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z}, \tag{6.56}$$

которое после использования полуэмпирических гипотез (6.22), (6.26) и (6.27) (с $\alpha_b=\text{const}$) и деления всех членов на $\bar{\rho}$ принимает вид

$$K\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{K^3}{c^4l^4}=-\alpha_b\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial b}{\partial z},\quad K=l\sqrt{b}. \tag{6.57}$$

Это уравнение следует рассматривать совместно с уравнениями Рейнольдса (6.5), которые в данном случае можно записать в виде

$$\frac{\partial\overline{\rho u'_i w'}}{\partial z}+\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}=\bar{\rho}\bar{X}_i,\qquad i=1,\ 2,\ 3 \tag{6.58}$$

(при этом мы пренебрегли вертикальным потоком импульса, связанным с действием молекулярной вязкости, по сравнению с турбулентным потоком импульса $\overline{\rho u'_i w'}$). Внешние силы X_i, действующие в пограничном слое атмосферы, это, во-первых, направленная вертикально вниз сила тяжести и, во-вторых, перпендикулярная вектору скорости $\boldsymbol{u}$ (т. е. не производящая работы) сила Кориолиса $\boldsymbol{Y}=2[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}]$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли. Выберем теперь оси $Ox_1=Ox$ и $Ox_2=Oy$ так, чтобы ось Ox была параллельна приземному ветру. В таком случае величины $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ будут равны соответствующим компонентам ускорения Кориолиса, т. е. $\bar{X}_1=Y_1=2\omega_z\bar{v}$, $\bar{X}_2=Y_2=-2\omega_z\bar{u}$, где ω_z — вертикальная компонента вектора $\boldsymbol{\omega}$. Воспользовавшись для вычисления величины $\overline{\rho u'_i w'}$ полуэмпирической формулой (6.22) и поделив уравнения Рейнольдса на $\bar{\rho}$, мы сможем записать первые два из этих уравнений (которые нам только и будут нужны) в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+2\omega_z\bar{v}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x},\qquad \frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}-2\omega_z\bar{u}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}. \tag{6.59}$$

Горизонтальный градиент давления $\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x},\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\right)$ в рассматриваемой задаче является заданной величиной, которую мы будем считать не зависящей от

координат x, y, z (независимость градиента давления от z является обычным допущением теории пограничного слоя). Вне слоя трения первыми слагаемыми в уравнениях (6.59) (которые описывают силу трения) можно пренебречь, и движение будет определяться так называемыми формулами геострофического ветра:

$$\bar{u}=-\frac{1}{2\bar{\rho}\omega_z}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}=G\cos\alpha,\quad \bar{v}=\frac{1}{2\bar{\rho}\omega_z}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}=-G\sin\alpha, \tag{6.60}$$

где $G=\frac{1}{2\bar{\rho}\omega_z}\left[\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ — скорость геострофического ветра, а α — угол между вектором с компонентами $\left(-\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ и приземным ветром (угол полного поворота ветра в слое трения), подлежащий определению.

Уравнения (6.57) и (6.59) позволяют определить распределение ветра $\bar{u}(z)$, $\bar{v}(z)$ и коэффициента турбулентной вязкости $K(z)$ в планетарном пограничном слое атмосферы, если задать каким-либо образом функцию $l(z)$, т. е. указать зависимость масштаба турбулентности от высоты. Такая задача рассматривалась Мониным (1950а) и Блэкедаром (1962). Начнем с того, что оценим изменение с высотой в приземном слое атмосферы x-компоненты турбулентного напряжения трения $\tau_x=\bar{\rho}K\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=\bar{\rho}u_*^2$. Интегрируя по высоте первое уравнение (6.59), получим

$$u_*^2(0)-u_*^2(H_0)=\int_0^{H_0}\left(2\omega_z\bar{v}-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)dz<\int_0^{H_0}\left(-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)dz<2\omega_zH_0G.$$

Здесь мы воспользовались тем, что отбрасывание члена $2\omega_z\bar{v}$ приводит к усилению неравенства, так как сила Кориолиса частично компенсирует действие градиента давления. Выберем H_0 так, чтобы относительное изменение u_*^2 в слое толщины H_0 не превосходило допуска a, т. е. чтобы выполнялось неравенство $\frac{u_*^2(0)-u_*^2(H_0)}{u_*^2(0)}\leqslant a$. Для этого, очевидно, достаточно потребовать, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$H_0<\frac{au_*^2(0)}{2\omega_zG}. \tag{6.61}$$

Согласно опытным данным, u_*/G имеет величину порядка 0,05. Кроме того, в умеренных широтах $2\omega_z\sim10^{-4}$ *сек*$^{-1}$, так что при $G\sim10$ *м/сек* получается $\frac{u_*^2(0)}{2\omega_zG}\sim250$ *м*. При допуске $a=20\%$ получаем оценку толщины приземного слоя $H_0\sim50$ *м*. В пределах этого слоя можно пренебрегать действием силы Кориолиса (а значит, и обусловленным этой силой вращением ветра с высотой) и считать u_* постоянным, т. е. здесь можно пользоваться обычной теорией логарифмического пограничного слоя. Следовательно, в этом слое $K=\varkappa u_*z$, $\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=\frac{u_*}{\varkappa z}$, $\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}=0$, $b=c_1u_*^2=\text{const}$, где c_1 — постоянный коэффициент, который можно оценить, например, по данным рис. 26, и, наконец, в

силу уравнения (6.57)

$$cl = \varkappa z, \qquad l = \frac{\varkappa}{c} z. \tag{6.62}$$

Вернемся теперь к уравнениям (6.59). Продифференцировав эти уравнения по z, можно записать полученный результат в виде одного равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2i\omega_z \frac{f}{K}, \tag{6.63}$$

где $f = K\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + i\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)$ — комплексная величина, характеризующая обе компоненты напряжения трения (поделенного на плотность $\bar{\rho}$). В приземном слое f, очевидно, принимает значение u_*^2. Далее, с помощью величины f уравнение баланса турбулентной энергии (6.57) можно представить в виде

$$\frac{|f|^2}{K} - \frac{K^3}{c^4 l^4} = -\alpha_b \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial}{\partial z} \frac{K^2}{l^2}. \tag{6.64}$$

Кроме параметра u_*, определяющего режим движения в приземном слое, уравнения (6.63)—(6.64) содержат еще параметр Кориолиса $2\omega_z$. Из этих двух параметров уже можно составить масштаб длины, в качестве которого мы примем

$$H = \frac{\varkappa u_*}{2\omega_z} \tag{6.65}$$

(постоянная Кармана $\varkappa$ здесь добавлена для удобства).

Пользуясь соображениями размерности, теперь можно положить

$$f = u_*^2 F\left(\frac{z}{H}\right); \qquad K = \varkappa u_* z \Phi\left(\frac{z}{H}\right); \qquad cl = \varkappa z \Psi\left(\frac{z}{H}\right), \tag{6.66}$$

причем безразмерные функции $F(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, подлежащие дальнейшему определению, при $\zeta=0$ должны все равняться единице. Для определения вается, так что $\Psi(\zeta)$ 1. При этом допущения уравнения (6.63)—(6.64) так что, вообще говоря, необходимо задать еще одно дополнительное уравнение, определяющее зависимость от высоты масштаба турбулентности l. В связи с отсутствием надежных данных об этой зависимости в работе Монина (1950а) для простоты допускалось, что наличие продольного градиента давления и силы Кориолиса на масштабе турбулентности вообще не сказывается, так что $\Psi(\zeta)\equiv 1$. При этом допущении уравнения (6.63)—(6.64) после подстановки в них формул (6.66) принимают вид

$$\zeta\Phi \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = iF, \qquad |F|^2 - \Phi^4 = -\delta\zeta\Phi \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\Phi \frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi^2\right), \tag{6.67}$$

где $\delta = \alpha_b \varkappa^2 c^2$ — число порядка единицы. Входящие в эти уравнения функции F и Φ по своему физическому смыслу должны стремиться к нулю при $\zeta = \frac{z}{H} \to \infty$.

Можно показать, что затухающие решения системы (6.67) таковы, что функция $F(\zeta)$ затухает экспоненциально, а функция $\Phi(\zeta)$ — степенным образом, а именно — как $\zeta^{-1/\sqrt{6\delta}}$. Следовательно, коэффициент турбулентной вязкости $K(z)$ здесь асимптотически пропорционален $z^{1-\frac{1}{\sqrt{6\delta}}}$. При $\delta > \frac{1}{6}$

коэффициент турбулентности неограниченно возрастает с высотой, а при $\delta < \frac{1}{6}$ достигает на некоторой высоте максимума, после чего стремится к нулю. Таким образом, учет правой части второго уравнения (6.67) (т. е. учет вертикального переноса турбулентной энергии, создаваемого «турбулентной вязкостью») оказывается в рассматриваемой теории существенным для определения поведения коэффициента турбулентной вязкости $K(z)$ на больших высотах.

При $\delta=0$ уравнения (6.67) не имеют решений, затухающих при $\zeta \to \infty$ однако имеется решение, стремящееся к нулю (по степенному закону) при ζ, приближающемся к некоторому конечному значению. Другими словами, турбулентный пограничный слой имеет в этом случае конечную толщину. Уравнения (6.67) были проинтегрированы Мониным численно при значениях $\delta=0$ и $\delta=\varkappa^2\approx 0{,}16$. В случае $\delta=0$ толщина турбулентного слоя оказалась близкой к $10H$, т. е. практически весьма большой. Максимум $K(z)$ в этом случае достигается на высоте $z=2{,}8H$. При $z<2H$ функции $F(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ для $\delta=0$ и для $\delta=\varkappa^2$ оказались весьма близкими друг к другу.

Когда функция $F(\zeta)$ уже определена, вектор скорости ветра $(\bar{u}, \bar{v})$ на различных высотах может быть найден из уравнений (6.59), которые удобно записать для этой цели в виде

$$\bar{u} + i\bar{v} = Ge^{i\alpha} - l\frac{u_*}{\varkappa} F'\left(\frac{z}{H}\right). \tag{6.68}$$

При этом параметры u_* и α заранее неизвестны (напомним, что u_* входит также в формулу для масштаба H). Для их определения воспользуемся тем, что скорость ветра обращается в нуль на некоторой высоте z_0 («высота шероховатости»), которую можно считать заданной. Приравнивая выражение (6.68) при $z=z_0$ нулю, получим соотношение

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{F'(\zeta_0)}{\zeta_0} = \eta e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}, \tag{6.69}$$

где $\zeta_0 = \frac{z_0}{H}$, а $\eta = \frac{\varkappa^2 G}{2z_0\omega}$ — известная величина. Функцию $\varphi(\zeta_0)$ можно считать известной, так как функция $F(\zeta)$ уже определена. Следовательно,

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \arg F'(\zeta_0). \tag{6.70}$$

Кроме того, поскольку $\eta=|\varphi(\zeta_0)|$, то $\zeta_0=\psi(\eta)$, где ψ — функция, обратная к функции $|\varphi|$. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{u_*}{G} = \frac{\varkappa}{\eta\psi(\eta)}, \tag{6.71}$$

чем и завершается определение неизвестных параметров.

Заметим еще, что при аппроксимации распределения ветра во всем слое трения с помощью формулы (6.68) для «шероховатости» z_0 следует принимать существенно бо́льшие значения, чем при аппроксимации профиля ветра в приземном слое воздуха. Это естественно, так как при увеличении вертикальных масштабов рассматриваемого явления необходимо увеличивать и горизонтальные масштабы и, следовательно, вводить «шероховатость», характерную для подстилающей поверхности на больших площадях.

Приведем еще один вывод из рассмотренной теории, полученный в более поздней работе Казанского и Монина (1961) и касающийся определения

зависимости отношения $\xi = \frac{u_*}{G}$ от «внешнего параметра» $\eta = \frac{\varkappa^2 G}{2\omega_z z_0}$. Знание зависимости $\xi(\eta)$ позволяет по измеренной скорости G и известной шероховатости подстилающей поверхности z_0 определить также и турбулентное напряжение трения у поверхности Земли, которое является одной из важнейших характеристик турбулентности в приземном слое воздуха. Как было указано выше, зависимость $\xi(\eta)$ можно определить из соотношения (6.69); при этом можно воспользоваться малостью аргумента $\zeta_0 = \frac{z_0}{H}$, так что достаточно определить вид функции $F(\zeta)$ при очень малых $\zeta = \frac{z}{H}$. Но при малых z коэффициент турбулентной вязкости K приблизительно равен $\varkappa u_* z$, так что в первом уравнении (6.67) можно заменить множитель Φ единицей. Тогда решение F этого уравнения, удовлетворяющее очевидному краевому условию $F(0)=1$, при малых ζ будет иметь вид $F=1+a\zeta+i\zeta\ln\zeta+\ldots$, где a — постоянная интегрирования. Отсюда получаем

$$F'(\zeta_0) \approx F'(\zeta_1) + i \ln \frac{\zeta_0}{\zeta_1},$$

где $z_1=\zeta_1 H$ — высота, на которой еще можно полагать $K=\varkappa u_* z$. При этом соотношение $\eta = \frac{|F'(\zeta_0)|}{\zeta_0}$, вытекающее из (6.69), можно переписать в виде

$$\frac{\varkappa}{\xi} = \left| b - i \ln \frac{\xi\eta}{\varkappa^2} \right|,$$

где $b=F'(\zeta_1) - i\ln(\varkappa\zeta_1)$ — комплексная постоянная. Полагая $b=A+iB$, отсюда получаем

$$\ln \frac{\eta}{\varkappa^2} = B - \ln\xi + \sqrt{\frac{\varkappa^2}{\xi^2} - A^2}. \qquad (6.72)$$

Постоянная b находится при решении полных уравнений (6.67) во всем пограничном слое. При $\delta=0$ для нее получается значение $b=-1{,}69+2{,}49\,i$; при $\delta=0{,}16$ получается $b=-1{,}81+1{,}7\,i$. Сравнение расчетов по формуле (6.72) с экспериментальными данными Леттау (1959) показало, что вычисленные при $\delta=0$ значения ξ оказываются явно завышенными, но при $\delta=0{,}16$ они уже оказываются в качественном согласии с экспериментом (см. рис. 46), причем можно ожидать, что при некотором увеличении значения δ это согласие еще улучшится.

Близкие результаты были получены также Блэкедаром (1962), рассмотревшим ту же задачу, но пренебрегшим вертикальной диффузией турбулентной энергии (т. е. предположившим, что $\alpha_b=\delta=0$). Зато в отличие от Монина, этот автор в соответствии с довольно грубыми эмпирическими данными Леттау (1950) принял, что масштаб l возрастает линейно с высотой лишь в самом нижнем слое атмосферы, а затем скорость его возрастания убывает, и асимптотически при $z\to\infty$ он стремится к некоторому постоянному значению λ/c. Исходя отсюда, функция $cl(z)$ была выбрана в виде

$$cl(z) = \frac{\varkappa z}{1 + \frac{\varkappa z}{\lambda}}.$$

Что же касается величины λ, имеющей размерность длины, то Блэкедар предположил, что $\lambda = \beta \frac{G}{2\omega_z}$, но одновременно указал, что с тем же основанием можно было бы положить $\lambda = \beta_1 \frac{\varkappa u_*}{2\omega_z} = \beta_1 H$, т. е. считать, что $\Psi(\zeta) = \left(1 + \frac{\varkappa}{\beta_1}\zeta\right)^{-1}$ (предположение $\lambda = \beta \frac{G}{2\omega_z}$, очевидно, приводит к значительно более сложному виду функции $\Psi(\zeta)$). Числовой параметр β был подобран так, чтобы получаемое значение угла поворота ветра совпало с данными наблюдений, проводившихся в Брукхевене (недалеко от Нью-Йорка). Оказалось, что этому условию удовлетворяет значение $\beta=0{,}00027$.

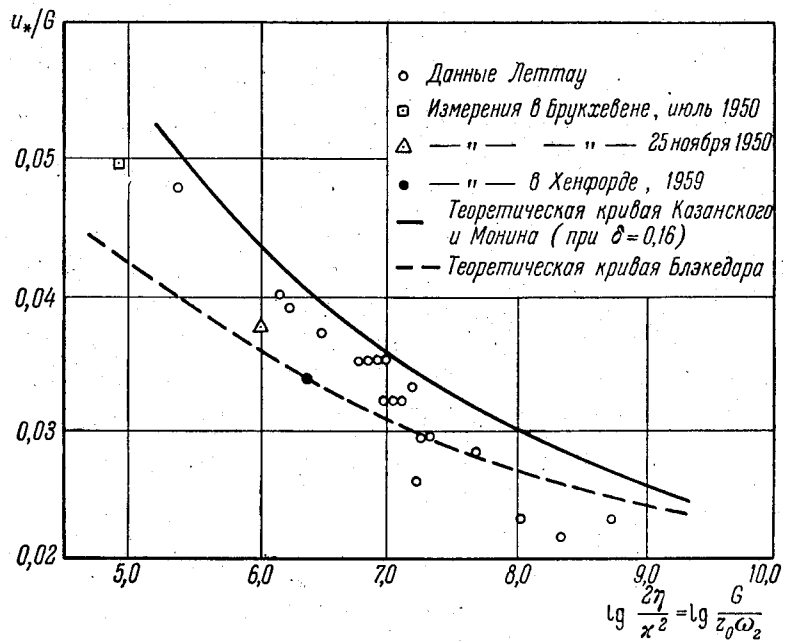


Рис. 46. Зависимость u_*/G от $\eta = \frac{\varkappa^2 G}{2z_0\omega_z}$ по эмпирическим данным и по теориям Казанского и Монина (1961) и Блэкедара (1962).

Как мы уже видели, задание закона изменения cl с высотой позволяет получить из уравнений Рейнольдса (6.59) и уравнения баланса турбулентной энергии (6.57) замкнутую систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций (то, что две из этих функций были объединены выше в одну комплексную функцию F, разумеется, не играет никакой роли). Соответствующие уравнения были записаны в работе Блэкедара в несколько другой безразмерной форме, чем в работе Монина, и решались численно. Полученные результаты также оказались неплохо соответствующими эмпирическим данным о зависимости ветра от высоты и о связи отношения $\xi = \frac{u_*}{G}$ с параметром $\eta = \frac{\varkappa^2 G}{2\omega_z z_0}$ (см. рис. 46).

6.7. Распределение взвешенных частиц в турбулентном потоке

Рассмотрим теперь задачу о движении взвешенных частиц в турбулентном потоке несжимаемой жидкости. Теория этого явления была развита в работах Баренблатта (1953, 1955) (см. также Колмогоров (1954)). Основным предположением указанной теории является допущение о малости размеров взвешенных частиц (по сравнению с характерным масштабом турбулентности), позволяющее считать, что они образуют как бы непрерывно распределенную в основной жидкости примесь. Полную плотность смеси можно записать в виде

$$\rho = \rho_0 (1 - s) + \rho_1 s = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) s, \tag{6.73}$$

где ρ_0 и ρ_1 — плотности среды (т. е. жидкости) и частиц, а s — относительный объем частиц (в работах по теории движения наносов величину s называют «мутностью»). При этом ρ_0 и ρ_1 являются постоянными, а «мутность» s в результате турбулентного перемешивания флюктуирует, так что

$$\rho' = (\rho_1 - \rho_0) s'.$$

Скорость u_i движения смеси в данной точке (т. е. скорость движения центра тяжести бесконечно-малого объема смеси, окружающего данную точку) будет определяться как среднее взвешенное по массе из скорости движения основной жидкости u_{0i} и скорости движения примеси u_{1i}:

$$u_i = \frac{\rho_0 (1 - s)}{\rho} u_{0i} + \frac{\rho_1 s}{\rho} u_{1i}. \tag{6.74}$$

Уравнения движения для смеси можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\rho_0 (1 - s) u_{0i} u_{0\alpha} + \rho_1 s u_{1i} u_{1\alpha} + p \delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}] = -\rho g \delta_{i3}, \tag{6.75}$$

где p — полное гидродинамическое давление в данной точке смеси, σ_{ij} — сумма вязкого тензора напряжений в основной жидкости (в присутствии примеси) и тензора напряжений, возникающих от взаимодействий взвешенных частиц. Из массовых сил мы учитываем лишь силу тяжести, направленную по направлению оси Ox_3 в сторону убывания координаты x_3.

Уравнения сохранения массы для основной жидкости и для примеси имеют вид

$$\frac{\partial \rho_0 (1 - s)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 (1 - s) u_{0\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1 s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 s u_{1\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Складывая эти уравнения, получаем уравнение сохранения массы для смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{6.76}$$

С другой стороны, поделив указанные уравнения соответственно на ρ_0 и ρ_1 и затем складывая, получим уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(1 - s) u_{0\alpha} + s u_{1\alpha}] = 0. \tag{6.77}$$

Учитывая малость частиц и приняв дополнительное предположение о малости индивидуальных ускорений в турбулентном потоке по сравнению с ускорением силы тяжести g, можно считать, что горизонтальные компоненты скорости основной жидкости и примеси совпадают, а вертикальные отличаются на некоторую величину a — скорость гравитационного оседания частиц. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая малой «мутности», т. е. будем считать, что $s \ll 1$. При этом величину a можно считать не зависящей от s, т. е. постоянной (равной скорости гравитационного оседания одиночной частицы в неограниченной жидкости). Таким образом, имеем

$$u_i = u_{0i} - \frac{\rho_1 s}{\rho} a \delta_{i3}, \tag{6.78}$$

$$\rho_0 (1 - s) u_{0i} u_{0\alpha} + \rho_1 s u_{1i} u_{1\alpha} = \rho u_i u_\alpha + \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho} s (1 - s) a^2 \delta_{i3} \delta_{\alpha 3}.$$

Уравнения движения (6.75) принимают вид

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_i u_\alpha + p \delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}) = -\rho \left[g + \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{s (1 - s) a^2}{\rho} \right] \delta_{i3}, \tag{6.79}$$

а уравнение неразрывности (6.77) запишется в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = -(\rho_1 - \rho_0) \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{s (1 - s) a}{\rho}. \tag{6.80}$$

В дальнейшем нам понадобятся лишь уравнения (6.73), (6.76), (6.79) и (6.80). Рассмотрим с их помощью задачу о распределении взвешенных частиц в стационарном потоке жидкости, занимающем полупространство, ограниченное снизу плоскостью $x_3 = 0$, и однородном в среднем вдоль осей Ox_1, Ox_2. При этом можно считать, что все осредненные характеристики зависят лишь от координаты $z = x_3$ и что $\overline{u}_2 = 0$.

Обозначая $u_3 = w$ и осредняя уравнение неразрывности (6.76), получим $\frac{\partial \overline{\rho w}}{\partial z} = 0$ или $\overline{\rho w} = \text{const}$. Поскольку при стационарном режиме вертикальный перенос массы в среднем отсутствует, мы должны положить $\overline{\rho w} = \overline{\rho} \overline{w} + \overline{\rho' w'} = 0$. Вспоминая формулу (6.73), мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\overline{w} = -\sigma \overline{w' s'}, \tag{6.81}$$

где $\sigma = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\overline{\rho}}$. Из самого существования стационарного распределения взвешенных частиц следует, что корреляция между w' и s' должна быть положительной, так как при стационарном режиме регулярное гравитационное оседание частиц должно быть сбалансировано их турбулентным переносом вверх, а турбулентный поток массы равен $\overline{\rho' w'} = (\rho_1 - \rho_0) \overline{w' s'}$. Следовательно, $\overline{w} < 0$, т. е. осредненное движение смеси имеет компоненту, направленную вниз (напомним, что скорость движения смеси определялась как среднее взвешенное из скоростей основной жидкости и частиц по массе, а не по объему).

Осредняя уравнение (6.80), получим

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -(\rho_1 - \rho_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\overline{s (1 - s) a}}{\rho} \right] \approx -\sigma \frac{\partial}{\partial z} \overline{s (1 - s) a},$$

откуда после интегрирования по z найдем

$$\overline{w} = -\sigma \overline{s (1 - s) a} + \text{const}.$$

Постоянное слагаемое в этой формуле можно считать равным нулю, так как при больших z величины $\overline{s}$, $\overline{w' s'}$ и, следовательно, $\overline{w}$ стремятся к нулю.

Поэтому, сравнивая последнюю формулу с (6.81), имеем

$$\overline{w's'} = \overline{s(1-s)a} \approx a\bar{s}. \tag{6.82}$$

Если воспользоваться полуэмпирической формулой типа (6.25)

$$\overline{w's'} = -\alpha_s K \frac{\partial \bar{s}}{\partial z}, \tag{6.83}$$

то последнее соотношение примет вид

$$\alpha_s K \frac{\partial \ln \bar{s}}{\partial z} = -a. \tag{6.84}$$

В качестве осредненного уравнения движения смеси используем уравнение Рейнольдса в проекции на ось Ox_1, которое для не слишком больших z можно принять имеющим вид

$$K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 = \text{const}. \tag{6.85}$$

Исключая из (6.84)—(6.85) величину K, получим

$$\frac{\partial \ln \bar{s}}{\partial z} = -\omega \frac{\varkappa}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},$$

где $\omega = \dfrac{a}{\alpha_s \varkappa u_*}$ — безразмерный параметр. Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\bar{s} = \bar{s}_0 e^{-\omega \frac{\varkappa \bar{u}}{u_*}}, \tag{6.86}$$

где $\bar{s}_0$ — значение $\bar{s}$ на некоторой условной «высоте шероховатости» z_0, на которой $\bar{u}(z)$ обращается в нуль.

Приняв для правой части уравнения движения (6.79) приближенное значение $-\rho g \delta_{i3}$, мы убеждаемся, что это уравнение вместе с уравнением баланса массы (6.76) совпадает с соответствующими уравнениями для сжимаемой жидкости. Поэтому уравнение баланса турбулентной энергии имеет такой же вид, как в сжимаемой жидкости. Пренебрегая эффектом диффузии энергии турбулентных пульсаций и другими малыми слагаемыми, запишем указанное уравнение в виде

$$\bar{\rho} l \sqrt{b} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 - \frac{\bar{\rho} b^{3/2}}{c^4 l} - \overline{\rho w' g} = 0, \tag{6.87}$$

причем $l\sqrt{b} = K$, а величина $B = -\overline{\rho w' g}$ имеет смысл работы взвешивания частиц турбулентным потоком в единице объема смеси. Для этой величины с помощью формул (6.73) и (6.82) получаем

$$B = -\sigma \bar{\rho} g \overline{s' w'} = -\sigma \bar{\rho} g \overline{s(1-s)a}. \tag{6.88}$$

Последнее выражение впервые было получено Великановым (1946). Выражая $\overline{s'w'}$ с помощью формулы (6.83), получим

$$B = \alpha_s \sigma \bar{\rho} g l \sqrt{b} \frac{\partial \bar{s}}{\partial z}.$$

С помощью этой формулы уравнение (6.87) может быть приведено к виду

$$b = c^4 l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 (1 - \alpha_s \mathrm{Ri}), \tag{6.89}$$

где

$$\mathrm{Ri} = -\sigma g \frac{\partial \bar{s}/\partial z}{(\partial \bar{u}/\partial z)^2} > 0$$

— безразмерное число, аналогичное числу Ричардсона. Исключая из (6.89) градиент скорости $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ с помощью уравнения (6.85) и соотношения $K = l\sqrt{b}$, получим

$$b = c^2 u_*^2 \sqrt{1 - \alpha\, \mathrm{Ri}}. \tag{6.90}$$

При отсутствии взвешенных частиц $\mathrm{Ri} = 0$ и $b = c^2 u_*^2$. Формула (6.90) показывает, что наличие в потоке взвешенных частиц приводит к уменьшению пульсационной энергии, т. е. влияет на динамику потока. Этот результат подтверждается прямыми экспериментами. Таким образом, расчет движения наносов в предположении, что взвешенные частицы не оказывают влияния на динамику потока (так называемая диффузионная теория), возможен лишь при достаточно малых Ri.

Распределение скорости $\bar{u}(z)$ в потоке, несущем взвешенные частицы, может быть найдено с помощью уравнений (6.84), (6.85) и (6.90). Именно, если ввести безразмерные величины, полагая

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\varkappa} F(\zeta), \quad K = \varkappa u_* z \Phi(\zeta), \quad cl = \varkappa z \Psi(\zeta), \quad \bar{s} = S(\zeta), \quad \zeta = \frac{z}{L}, \tag{6.91}$$

где $L = \dfrac{u_*^2}{a\varkappa^2 \sigma g}$, то указанные уравнения примут вид

$$\zeta \Phi S' = -\omega S, \quad \zeta \Phi F' = 1, \quad \Phi = \Psi \left(1 + \frac{S'}{F'^2}\right)^{1/4}. \tag{6.92}$$

Основной интерес представляет функция $S(\zeta)$, описывающая вертикальное распределение взвешенных частиц. Исключая из (6.92) функции F и Φ, для величины $T(\zeta) = \dfrac{1}{S(\zeta)}$ получим уравнение

$$\frac{\omega T}{\zeta} = \Psi T' \left(1 - \frac{\omega^2}{T'}\right)^{1/4}.$$

Баренблатт исследовал решение этого уравнения в общем виде, не задаваясь конкретной формой функции Ψ, а лишь допуская, что она удовлетворяет очевидному условию $\Psi(0) = 1$ и является невозрастающей функцией от числа Ричардсона (поскольку масштаб турбулентности l вследствие наличия взвеси должен уменьшаться). Результаты анализа показывают, что при $\omega < 1$ и $\omega > 1$ характер решения оказывается существенно различным. При $\omega > 1$ (малая скорость потока или крупные частицы) перенос частиц происходит в основном вблизи дна потока, причем в придонной области изложенная теория (основанная на допущении малости s) неприменима и должна быть заменена более точной теорией. Вне придонной области $\mathrm{Ri} \to 0$, так что распределение взвешенных частиц асимптотически приближается к распределению, получающемуся согласно диффузионной теории. При $\omega < 1$ (большая скорость потока или же мелкие частицы) перенос частиц происходит в основной массе потока. Распределение частиц на больших высотах асимптотически приближается к некоторому предельному автомодельному распределению ($\mathrm{Ri} \to \text{const}$), при котором $\bar{s}$ обратно пропорционально z, а $\bar{u}(z) = \dfrac{1}{\varkappa\omega} \ln z + \text{const}$. При этом существует некоторое предельное насыщение потока частицами, такое, что при еще большем насыщении изложенная теория становится неприменимой в придонной области.

ГЛАВА IV

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТЕМПЕРАТУРНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

§ 7. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА СЛУЧАЙ ТЕМПЕРАТУРНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ

7.1. Турбулентный пограничный слой в температурно-стратифицированной среде как модель приземного слоя атмосферы

В предыдущей главе были подробно рассмотрены основные закономерности турбулентных течений жидкости в пограничном слое над неограниченной плоской пластинкой. Полученные выводы мы сравнивали с эмпирическими данными, относящимися как к искусственным течениям, создаваемым в лаборатории, так и к наблюдаемым в атмосфере движениям воздуха вблизи поверхности земли. При этом, однако, нам пришлось оговорить, что из наблюдений в атмосфере для данной цели могут использоваться только наблюдения, относящиеся к нейтральной (безразличной) стратификации, т. е. к тем случаям, когда в нижних слоях воздуха температура практически не меняется с высотой [1]). Но такая нейтральная стратификация довольно редко наблюдается в природе. Действительно, днем обычно температура заметно понижается с высотой, а ночью она, как правило, повышается с высотой (как говорят, имеет место *инверсия температуры*), так что нейтральной стратификация оказывается лишь в течение небольших промежутков времени перед заходом и после восхода Солнца. Следовательно, движения в приземном слое воздуха в большинстве случаев не могут быть уложены в простую схему турбулентного пограничного слоя, рассмотренную в гл. 3.

[1]) Вообще говоря, под нейтральной стратификацией следует понимать распределение температуры, при котором ее вертикальный градиент dT/dz точно совпадает с адиабатическим градиентом $-G_a$, определенным на стр. 97. Действительно, только при этом условии вертикальные перемещения элементов среды не будут сопровождаться ни затратой, ни освобождением потенциальной энергии. Поскольку, однако, характерные значения вертикальных градиентов температуры в нижних десяти-пятнадцати метрах земной атмосферы почти на два порядка превосходят величину G_a, отличием этой величины от нуля здесь чаще всего можно пренебречь. С этим обстоятельством связано также и то, что в приземном слое обычно можно не различать обычную температуру T и потенциальную температуру θ формулы (2.4). Поэтому в дальнейшем для простоты мы все время будем говорить об обычной температуре, хотя, строго говоря, в большинстве случаев используемые нами соотношения будут точно выполняться лишь для потенциальной температуры. Точно так же и в § 8 мы не будем специально оговаривать, что в некоторых случаях (относящихся к наблюдениям в относительно толстом слое воздуха порядка нескольких десятков метров) используемые эмпирические данные фактически относились не к обычной, а к потенциальной температуре.

Итак, как правило, при изучении турбулентности в приземном слое атмосферы необходимо учитывать наличие в атмосфере температурной стратификации, создающей систематическое изменение плотности среды с высотой. Как известно, в поле тяжести наличие неоднородностей плотности жидкости ρ приводит к появлению архимедовых сил, способствующих перемещению вверх жидких частиц, менее плотных, чем окружающая среда, и перемещению вниз частиц, более плотных, чем окружающая среда [1]). Эти архимедовы силы складываются с силами чисто гидродинамического происхождения, которые действуют на жидкие частицы и в отсутствие силы тяжести. В результате частицы менее (более) плотные, чем окружающая среда, при движении вверх (вниз) получают дополнительную энергию за счет работы архимедовых сил, а при движении вниз (вверх), наоборот, теряют часть своей энергии на преодоление архимедовых сил. Тем самым потенциальная энергия расслоенной по плотности среды в поле тяжести может непосредственно переходить в энергию турбулентности, а энергия турбулентности может обратно переходить в потенциальную энергию неоднородной тяжелой среды. Количественному учету влияния этих переходов энергии на режим турбулентности и будет посвящена настоящая глава.

В п. 6.4 был подсчитан вклад, вносимый работой архимедовых сил в баланс турбулентной энергии. Этот вклад (на единицу объема) дается выражением

$$B = -\overline{\rho' w'} g, \tag{7.1}$$

[1]) Здесь и ниже под архимедовой силой всегда будет пониматься разность выталкивающей силы, описываемой законом Архимеда, и объемной силы тяжести. В однородной (нестратифицированной) среде эти две силы точно уравновешивают друг друга, и поэтому силу тяжести можно просто не учитывать (ср. сноску на стр. 39).

где w' — пульсация вертикальной скорости (см. формулу (6.38) на стр. 340). Из выражения (7.1) видно, что стратификация воздуха будет влиять на турбулентность, лишь если пульсации плотности ρ' будут коррелированы с пульсациями w'. Далее нам будет удобно перейти от пульсаций плотности, непосредственное измерение которых в атмосфере очень затруднительно, к пульсациям температуры, легко доступным непосредственному измерению. При этом, как и в п. 6.5, мы будем учитывать только пульсации плотности, связанные с пульсациями температуры, а гораздо меньшими пульсациями плотности, вызываемыми относительно очень малыми пульсациями атмосферного давления, пренебрежем. Так как в случае не слишком больших пульсаций температуры вполне можно полагать $\rho' \approx -(\bar{\rho}/\bar{T})T'$, где T — абсолютная температура, отсчитываемая от абсолютного нуля, то в этом приближении

$$B = \frac{g}{\bar{T}}\bar{\rho}\overline{w'T'} = \frac{g}{c_p\bar{T}}q, \tag{7.2}$$

где $q = c_p\bar{\rho}\overline{w'T'}$ — вертикальный турбулентный поток тепла (см. выше стр. 341). Отсюда видно, что в атмосфере влияние архимедовых сил на турбулентность непосредственно связано с турбулентной теплопередачей от подстилающей поверхности к атмосфере или наоборот. Это обстоятельство снова приводит к выводу, что указанное влияние должно исчезать при равном нулю вертикальном градиенте температуры: в самом деле, согласно основной формуле полуэмпирической теории,

$$q = -c_p\bar{\rho}K_T\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}, \tag{7.3}$$

где K_T — коэффициент турбулентной температуропроводности, и, следовательно,

$$B = -\frac{g}{\bar{T}}\bar{\rho}K_T\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}, \tag{7.4}$$

так что $B = 0$ при $\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} = 0$.

Мы видим, что при теоретическом анализе турбулентных процессов в приземном слое атмосферы надо учитывать наличие вертикальной температурной стратификации и связанного с ней вертикального турбулентного потока тепла. С другой стороны, горизонтальной неоднородностью подстилающей поверхности, всегда в какой-то мере имеющейся в реальной атмосфере, естественно на первых порах пренебречь. В самом деле, можно надеяться, что по крайней мере в случае сравнительно ровной

подстилающей поверхности, характер которой не меняется заметно на протяжении достаточно большой области, эта неоднородность не будет играть очень большой роли; в то же время ее учет очень осложняет теоретический анализ. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь упрощенную модель турбулентности в жидкости, заполняющей полупространство над бесконечной однородной плоской поверхностью $z = 0$ постоянной шероховатости z_0 (высотой вытеснения h_0, учет которой сводится к простому сдвигу начала отсчета значений z, мы в дальнейшем для простоты также будем пренебрегать). В соответствии с этим в настоящей главе мы всегда будем предполагать, что все одноточечные осредненные характеристики гидродинамических полей зависят только от вертикальной координаты z.

Допуская, что все одноточечные моменты зависят только от z, мы тем самым неявно предполагаем, что эти моменты могут быть определены, т. е. что значения всех гидродинамических полей в приземном слое атмосферы обладают определенной статистической устойчивостью. Вообще говоря, это предположение также может вызывать сомнения, так как условия в атмосфере существенно зависят от времени суток и от времени года, причем, кроме регулярных суточных и годовых колебаний, значения любого гидродинамического элемента в данной точке атмосферы испытывают еще нерегулярные колебания самых разнообразных периодов. Эти нерегулярные колебания можно рассматривать как проявления турбулентности различных пространственных масштабов, от весьма малых (порядка сантиметров и долей сантиметра) и до очень больших — порядка размеров циклонов и антициклонов или даже масштабов неоднородностей общей циркуляции атмосферы. Поэтому временные средние значения, например, температуры или скорости ветра в фиксированной точке атмосферы оказываются, во-первых, существенно зависящими от величины интервала осреднения и, во-вторых, при данном масштабе осреднения колеблющимися от выборки к выборке под действием компонент турбулентности с периодами, сравнимыми с величиной интервала осреднения или превосходящими эту величину. Указанное явление, называемое «эволюцией уровня» метеорологических полей, существенно затрудняет попытки определения статистических характеристик таких полей. Тем не менее, опыт показывает, что если ограничиться лишь наблюдениями, относящимися к определенному сезону года, определенному времени суток и определенным синоптическим условиям (т. е. определенной «погоде»), то при осреднении по временному интервалу τ, заметно превосходящему характерный период «макроструктурных элементов» (турбулентных образований, содержащих основную долю энергии турбулентности),

средние значения метеорологических полей будут уже относительно устойчивыми. Но в таком случае соответствующие наблюдения можно считать образующими «статистический ансамбль», позволяющий производить вероятностное осреднение. В приземном слое воздуха временной масштаб макроструктурных элементов можно оценить по порядку величины как отношение L_0/U, где U — характерное значение скорости ветра, а L_0 — характерный горизонтальный масштаб макроструктурных элементов, измеряющийся десятками или немногими сотнями метров. Поэтому L_0/U имеет порядок нескольких десятков секунд, и при осреднении по интервалам времени порядка десяти-двадцати минут средние значения скорости ветра, температуры и т. д. оказываются уже относительно устойчивыми и могут рассматриваться как приближенные значения вероятностных средних для соответствующих случайных полей. Правда, при дальнейшем значительном увеличении периода осреднения до интервалов порядка нескольких часов или еще бо́льших средние значения заметно меняются и могут снова стать малоустойчивыми за счет влияния длиннопериодных «синоптических колебаний», относящихся уже к турбулентности средних масштабов, а затем и к макротурбулентности; однако такой турбулентностью мы здесь не будем заниматься.

Кроме предположения о горизонтальной однородности, мы примем еще некоторые упрощающие предположения, касающиеся гидродинамических уравнений, описывающих рассматриваемую нами турбулентность. Прежде всего в соответствии со сказанным выше мы пренебрежем изменениями плотности, вызываемыми пульсациями давления, и ограничимся уравнениями, линеаризованными относительно отклонений полей плотности, температуры и давления от соответствующих «стандартных значений» ρ_0, T_0 и p_0 (зависящих только от z и удовлетворяющих уравнению статики $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$ и уравнению состояния $p_0 = R\rho_0 T_0$). Величины $\rho_0 = \overline{\rho}$ и T_0 мы будем в дальнейшем даже считать просто постоянными, так как их изменения с высотой в приземном слое толщиной в несколько десятков метров пренебрежимо малы. В таком случае уравнения движения обратятся в уже известные нам «уравнения теории свободной конвекции»:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Delta u,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\Delta v,\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\Delta w - \frac{g}{T_0}T'.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

В этих уравнениях член $-\frac{g}{T_0}T'$, описывающий «архимедовы ускорения» жидких частиц, явно учитывает влияние силы тяжести. В то же время сила Кориолиса здесь отброшена, так как согласно оценке, приведенной на стр. 349, эта сила в пределах нижних 50 *м* (или около того) не оказывает заметного влияния на осредненное движение, а, значит, и тем более не может влиять на пульсационное движение, скорость которого в нижней атмосфере примерно на порядок ниже средней скорости. Разумеется, выше немногих десятков метров над поверхностью земли уравнения (7.5) без силы Кориолиса уже становятся неприменимыми; это надо иметь в виду при сопоставлении выводов из указанных уравнений с данными наблюдений.

Уравнение неразрывности в приближении свободной конвекции может быть записано так же, как и в случае несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{7.6}$$

В силу горизонтальной однородности отсюда вытекает, что $\overline{w} = 0$, так что осредненное движение здесь является плоскопараллельным и задается вектором средней скорости $\overline{\boldsymbol{u}}(z) = \{\overline{U}(z), \overline{V}(z), 0\}$. Ясно также, что в отсутствие силы Кориолиса и при постоянном по высоте горизонтальном градиенте давления направление вектора $\overline{\boldsymbol{u}}(z)$ не может зависеть от z. Направим теперь ось Ox вдоль вектора $\overline{\boldsymbol{u}}(z)$. В таком случае будет справедливо равенство $\overline{v} = 0$; поэтому распределения вероятностей для гидродинамических полей здесь естественно считать инвариантными не только по отношению к параллельным переносам в плоскости Oxy, но и по отношению к отражениям относительно плоскости Oxz. Отсюда, в частности, вытекает, что $\tau_{xy} = -\rho_0\overline{u'v'} = 0$ и $\tau_{yz} = -\rho_0\overline{v'w'} = 0$.

Учитывая, что средняя сила ветра в приземном слое меняется за сутки на величину порядка 10 *м/сек*, нетрудно подсчитать, что в обычных условиях (при которых не проходит какой-либо особенно быстрой смены погоды) член с производной $\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}$ в осредненном первом уравнении (7.5) оказывается даже заметно меньшим, чем член с градиентом среднего давления $\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}$ или чем средняя кориолисова сила. Поэтому при осреднении уравнений (7.5) производные по времени также можно откинуть и считать, что в приземном слое

$$-\rho_0\overline{u'w'} + \rho_0\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} = \tau = \text{const} \tag{7.7}$$

(ср. выше уравнение (5.11) на стр. 222). Таким образом, среднее течение в приземном слое можно считать не только плоскопараллельным, но и стационарным, а напряжение трения $\tau = \rho_0 u_*^2$ (вертикальный поток импульса) — постоянным по высоте.

Кроме уравнений (7.5) и (7.6), мы должны использовать еще и уравнение притока тепла, определяющее изменения во времени температуры T. Согласно результатам п. 1.5 это уравнение можно записать в виде

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=c_p\rho\chi\Delta T+Q, \qquad (7.8)$$

где Q — приток тепла за счет излучения и за счет изменений фазового состояния содержащейся в воздухе влаги (другими формами притока тепла и, в частности, притоком тепла за счет диссипации кинетической энергии в приземном слое вполне можно пренебречь). Если мы пренебрежем и притоком тепла Q, то получим обычное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\Delta T, \qquad (7.8')$$

осреднение которого приводит к выводу, что в стационарных условиях

$$q=c_p\rho_0\overline{w'T'}-c_p\rho_0\chi\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=\text{const}, \qquad (7.9)$$

т. е. что средний поток тепла по вертикали, создаваемый молекулярной и турбулентной теплопроводностью, является постоянным (ср. уравнение (5.73′) на стр. 280, отличающееся от (7.9) лишь выбором положительного направления потока q). Если же учесть и величину Q (основную часть которой обычно составляет радиационный приток тепла), то вместо (7.9) мы получим более сложное уравнение

$$q+q_s=\text{const}, \qquad (7.9')$$

где $\overline{Q}=-\frac{\partial q_s}{\partial z}$, так что q_s обычно можно отождествить со средним лучистым потоком тепла по вертикали. Согласно предварительным данным Робинсона (1950) (см. также Халтинер и Мартин (1957), гл. 15) существенное изменение потока q_s с высотой, по-видимому, обычно имеет место лишь в тонком слое воздуха около поверхности земли, толщина которого не превосходит (или лишь немного превосходит) 1 *м*. Если это действительно так, то, рассматривая более высокие слои, можно полагать $q_s = \text{const}$, т. е. пренебрегать лучистым притоком тепла $\overline{Q}$. Косвенным подтверждением этого обстоятельства может служить также то, что теория, основанная на уравнении (7.9), как будет видно из дальнейшего, в большинстве случаев удовлетворительно согласуется с данными наблюдений в приземном слое[1]). В целом, однако, вопрос о законности приближения (7.9) в приземном слое воздуха пока еще нельзя считать окончательно выясненным ни теоретически, ни экспериментально. Особенно много сомнений с этой точки зрения вызывают случаи очень устойчивой стратификации (наблюдаемой, например, в ночное время), когда турбулентный поток тепла q очень мал, а изменение с высотой потока q_s может быть довольно заметным (см. Функ (1960)). Поэтому попытки более точного учета влияния радиационного теплообмена на турбулентность, начатые работами Таунсенда (1958) и Ямамото и Кондо (1959), следует считать вполне актуальными. Поскольку, однако, в этом направлении пока еще имеются лишь весьма предварительные оценки, мы ограничимся здесь рассмотрением только более грубой теории, исходящей из предположения (7.9), построение которой во всяком случае следует считать необходимым первым шагом к разъяснению закономерностей турбулентности в приземном слое.

Теперь мы можем окончательно описать ту теоретическую модель, изучению которой будет посвящена настоящая глава. Мы будем рассматривать плоскопараллельное стационарное течение жидкости в полупространстве $z>0$ над однородной поверхностью $z=0$ (характеризуемой определенной шероховатостью z_0), описываемое «уравнениями свободной конвекции» (7.5), (7.6) и (7.8′) и удовлетворяющее условиям (7.7) и (7.9) с заданными значениями τ и q (эти условия играют здесь роль граничных условий на верхней границе приземного слоя). Согласно сказанному выше, можно ожидать, что эта модель будет сравнительно хорошо соответствовать реальным условиям в нижнем слое атмосферы (порядка нескольких десятков метров) над относительно ровной и однородной подстилающей поверхностью и в условиях устойчивой погоды (за исключением, быть может, тонкого подслоя, непосредственно примыкающего к земле, и отдельных случаев, когда турбулентный обмен особенно мал или изменение по высоте радиационного потока тепла q_s особенно велико). Можно думать также, что та же модель может быть применена и к некоторым другим течениям — например, к турбулентности в придонном или приповерхностном слое

[1]) Напомним, впрочем, что логарифмический профиль средней скорости, вытекающий из теории лишь при $\tau=\text{const}$, в трубах неплохо выполняется почти вплоть до самого центра трубы, где $\tau=0$. Поэтому указанное здесь косвенное доказательство никак нельзя считать очень убедительным.

моря в условиях изотермии, но заметной вертикальной стратификации по солености (а следовательно, и по плотности $\bar{\rho}$), и к некоторым искусственным турбулентным потокам, создаваемым в лаборатории (в случае стратификации по плотности мы должны только, разумеется, заменить всюду $\frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ на $\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$, а $T'/\bar{T}$ — на $-\rho'/\bar{\rho}$). В дальнейшем, однако, мы для определенности все время будем говорить о турбулентности в приземном слое атмосферы (так как именно к ней будут относиться почти все привлекаемые нами эмпирические данные), понимая всюду под «приземным слоем» указанную идеализированную модель стратифицированной среды.

7.2. Применение соображений размерности к турбулентности в стратифицированной среде

Характеристики турбулентности в температурно-стратифицированной среде, описываемой уравнениями (7.5), (7.6) и (7.8′) и условиями (7.7) и (7.9), очевидно, могут зависеть только от небольшого числа физических величин. А именно, они могут зависеть от параметров $\frac{g}{T_0}$, ρ_0, ν и χ, входящих в указанные уравнения, от значений τ (или u_*) и q, задающих потоки импульса и тепла, идущие из бесконечности к поверхности $z=0$ (или наоборот), и характеризующих динамическое и тепловое взаимодействие приземного слоя воздуха с подстилающей поверхностью, и от параметра шероховатости z_0, суммарно описывающего геометрические свойства подстилающей поверхности. При этом существенно, что не все эти параметры играют одинаково важную роль. Прежде всего напомним, что в областях с достаточно развитой турбулентностью (т. е. практически всюду кроме весьма тонкого подслоя, прилегающего к подстилающей поверхности) потоки тепла и импульса, обусловленные молекулярной теплопроводностью и вязкостью, всегда очень малы по сравнению с турбулентными потоками тепла и импульса (см., например, стр. 220, 229 и 281). Поэтому в этих областях члены уравнений (7.5) и (7.8′), содержащие коэффициенты ν и χ, обычно можно просто опустить. Но тогда соотношения (7.7) и (7.9) можно переписать в более простой форме

$$-\rho_0\overline{u'w'}=\tau=\text{const}, \qquad c_p\rho_0\overline{T'w'}=q=\text{const}, \tag{7.10}$$

показывающей, что характеристики турбулентности здесь не должны зависеть от ν и χ. Что же касается параметра шероховатости z_0, то он определяет граничные условия на поверхности земли и через эти граничные условия влияет также на абсолютные значения средней скорости $\bar{u}(z)$ и на разность средних температур $\bar{T}(z)-\bar{T}(0)$ на значительных расстояниях от подстилающей поверхности. Однако законы изменения средней скорости и средней температуры на расстояниях z, на которых непосредственное влияние подстилающей поверхности уже не ощущается, от z_0 не должны зависеть, а должны определяться лишь значениями τ и q потоков импульса и тепла. Иначе говоря, изменение параметра шероховатости z_0 может привести лишь к сдвигу кривых $\bar{u}=\bar{u}(z)$ и $\bar{T}=\bar{T}(z)$ на некоторое постоянное значение, но не должно влиять на форму профилей $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$. Таким образом, зависимость от высоты градиентов средней скорости и температуры и других родственных им осредненных характеристик развитого турбулентного режима в приземном слое воздуха должна определяться значениями лишь следующих четырех параметров: плотности ρ_0, «параметра плавучести» g/T_0 (характеризующего влияние архимедовой силы на турбулентность), турбулентного напряжения трения τ (или $u_*=\sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}$) и вертикального турбулентного потока тепла q (или $q/c_p\rho_0$) [1]. При этом в случае $q=0$ (т. е. при безразличной стратификации, когда $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}=0$) влияние архимедовых сил на турбулентности не должно сказываться, т. е. зависимость от параметра $\frac{g}{T_0}$ должна исчезнуть. В этом случае мы возвращаемся к турбулентности в однородной среде, для которой

[1]) Заметим, что это основное для последующей теории предположение, кажущееся совершенно естественным, иногда вызывает некоторые возражения. Так, иногда высказывается мнение о том, что профили температуры и ветра в стратифицированной атмосфере должны зависеть от молекулярных констант ν и χ или хотя бы от их отношения — числа Прандтля $\mathrm{Pr}=\nu/\chi$ (см., например, Таунсенд (1962а)). В ряде случаев основой для такого мнения служит вызывающая много разногласий теория турбулентной конвекции Малкуса (1954б) (относительно которой см. также Таунсенд (1962б) и Спигел (1962)), в которой молекулярные константы играют существенную роль при всех z. Влиянию числа Pr на турбулентную конвекцию посвящена также работа Крейчнана (1962а), результаты которой, относящиеся к умеренным значениям Pr, не противоречат выводам настоящей главы. С другой стороны, например, Бюсингер (1955) к числу параметров, явно определяющих форму профилей ветра и температуры, отнес также и параметр шероховатости z_0, что очень усложнило все его формулы. Еще более далеко идущее предположение принял Лайхтман (1944, 1947а, 1961), у которого вместо обычного параметра шероховатости фигурирует явно влияющий на форму профилей параметр z_0 размерности длины, зависящий сложным образом и от размеров и формы неровностей поверхности, и от термической стратификации.

справедлива теория логарифмического пограничного слоя, развитая в п. 5.3.

Таким образом, при $z \gg z_0$ характеристики турбулентности на высоте z будут зависеть лишь от пяти величин: z, ρ_0, $\frac{g}{T_0}$, u_* и $\frac{q}{c_p\rho_0}$. Поскольку в данном случае имеется четыре независимых размерности — длина, время, масса и температура, то из этих пяти величин можно составить лишь одну (с точностью до числового множителя) независимую безразмерную комбинацию. Следуя работам Обухова (1946), Монина (1950в) и Монина и Обухова (1953, 1954), мы здесь в качестве этой безразмерной комбинации выберем величину

$$\zeta = \frac{z}{L}, \tag{7.11}$$

где

$$L = -\frac{u_*^3}{\varkappa \frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}} \tag{7.12}$$

— масштаб длины, составленный из параметров $\frac{g}{T_0}$, u_* и $\frac{q}{c_p\rho_0}$ (безразмерная постоянная Кармана $\varkappa$ введена в выражение для L ради удобства некоторых последующих выкладок, а знак выбран так, чтобы было $L>0$ при устойчивой термической стратификации, когда $q<0$). Тогда можно утверждать, что зависимость от высоты любой осредненной характеристики $\bar{f}$ развитого турбулентного режима в приземном слое воздуха, не зависящей от свойств подстилающей поверхности, может быть записана в виде

$$\frac{\bar{f}(z)}{f_0} = F\left(\frac{z}{L}\right), \tag{7.13}$$

где f_0 — комбинация размерности $\bar{f}$, составленная из параметров $\frac{g}{T_0}$, ρ_0, u_* и $\frac{q}{c_p\rho_0}$, а $F(\zeta)$ — универсальная функция. В качестве масштаба f_0 для осредненной скорости ветра мы примем величину $\frac{u_*}{\varkappa}$, а для осредненной температуры — величину

$$T_* = -\frac{1}{\varkappa u_*}\frac{q}{c_p\rho_0} \tag{7.14}$$

(ср. (5.75′)), где постоянная $\varkappa$ также введена для удобства последующих выкладок, а знак у T_* выбран так, что при устойчивой термической стратификации $T_* > 0$. Наконец, укажем, что для коэффициента турбулентности K естественным масштабом будет величина $\varkappa u_* |L|$.

Согласно формуле (7.13), вводя с помощью масштабов f_0 безразмерные величины, мы можем описать зависимость характеристик турбулентного режима от высоты универсальными функциями от ζ. Так, например, для вертикальных градиентов средней скорости ветра и температуры получаются соотношения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\varkappa L} g(\zeta), \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{T_*}{L} g_1(\zeta), \tag{7.16}$$

где $g(\zeta)$ и $g_1(\zeta)$ — две универсальные функции параметра ζ. Формулы (7.15) и (7.16) были указаны Мониным и Обуховым (1953, 1954); их можно рассматривать как непосредственное обобщение основных формул (5.21) и (5.76) теории логарифмического пограничного слоя на случай температурно-стратифицированной среды. Подставляя эти формулы в соотношения (5.5) и (5.9), определяющие турбулентные коэффициенты обмена K и K_T для количества движения и для теплоты, найдем, что

$$K = \frac{u_*^2}{\partial \bar{u}/\partial z} = \frac{\varkappa u_* L}{g(\zeta)}, \quad K_T = \frac{-q/c_p\rho_0}{\partial \bar{T}/\partial z} = \frac{\varkappa u_* L}{g_1(\zeta)}. \tag{7.17}$$

Отношение коэффициентов обмена K_T и K равно

$$\frac{K_T}{K} = \frac{\varkappa T_*}{u_*}\frac{\partial \bar{u}/\partial z}{\partial \bar{T}/\partial z} = \frac{g(\zeta)}{g_1(\zeta)} = \alpha(\zeta); \tag{7.18}$$

вообще говоря, оно является некоторой универсальной функцией от ζ. Число Ричардсона Ri, определенное в пп. 2.4 и 6.5 (см. формулы (2.3′) и (6.51)), в силу (7.12) и (7.14)—(7.16) оказывается равным

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{T_0}\frac{\partial \bar{T}/\partial z}{(\partial \bar{u}/\partial z)^2} = \frac{g_1(\zeta)}{[g(\zeta)]^2} = \frac{1}{\alpha(\zeta)\, g(\zeta)}. \tag{7.19}$$

Оно также является универсальной функцией от ζ. Аналогично этому динамическое число Ричардсона Rf формулы (6.45), определяемое по потокам тепла q и количества движения τ и профилю скорости $\bar{u}(z)$, будет равно

$$\mathrm{Rf} = -\frac{g}{c_p T_0}\frac{q}{\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{1}{g(\zeta)}. \tag{7.20}$$

Число Rf, очевидно, просто связано с коэффициентом турбулентной вязкости K:

$$K = \varkappa u_* L \cdot \mathrm{Rf}. \tag{7.21}$$

Из анализа общего характера функций $g(\zeta)$ и $g_1(\zeta)$, которому будет посвящен следующий пункт этой главы, можно вывести, что обе функции $\mathrm{Ri}(\zeta)$ и $\mathrm{Rf}(\zeta)$ являются монотонными и поэтому имеют однозначную обратную функцию. Отсюда вытекает, что величины Ri, Rf и ζ могут на равных правах использоваться как параметры, характеризующие степень вертикальной устойчивости воздуха.

Аналогично обстоит дело и с характеристиками поля концентрации пассивной примеси в стратифицированной среде при наличии постоянного потока $j=\rho_0\overline{w'\vartheta'}$ этой примеси через границу $z=0$ (в случае приземного слоя воздуха в качестве такой пассивной примеси можно рассматривать, например, водяной пар; тогда j будет иметь смысл величины испарения с единицы площади подстилающей поверхности за единицу времени). Здесь надо только добавить еще величину j к числу параметров, определяющих осредненные характеристики турбулентного режима. Однако при этом добавляется также еще одна независимая размерность величины ϑ и, следовательно, мы опять имеем единственную безразмерную характеристику $\zeta=z/L$. В частности, для вертикального градиента $\partial\overline{\vartheta}/\partial z$ средней влажности $\overline{\vartheta}$ (в дальнейшем только эту пассивную примесь мы будем рассматривать) получается соотношение

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial z}=\frac{\vartheta_*}{L}g_2(\zeta),\qquad \vartheta_*=-\frac{j}{\varkappa u_*\rho_0}, \tag{7.22}$$

вполне аналогичное (7.15) и (7.16); коэффициент обмена для влаги («коэффициент турбулентной диффузии») при этом равен

$$K_\vartheta=-\frac{j/\rho_0}{\partial\overline{\vartheta}/\partial z}=\frac{\varkappa u_* L}{g_2(\zeta)}. \tag{7.23}$$

Сами профили скорости ветра, температуры и влажности в приземном слое могут быть получены интегрированием равенств (7.15), (7.16) и (7.22):

$$\begin{aligned}\overline{u}(z_2)-\overline{u}(z_1)&=\frac{u_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{z_2}{L}\right)-f\left(\frac{z_1}{L}\right)\right],\\ \overline{T}(z_2)-\overline{T}(z_1)&=T_*\left[f_1\left(\frac{z_2}{L}\right)-f_1\left(\frac{z_1}{L}\right)\right],\\ \overline{\vartheta}(z_2)-\overline{\vartheta}(z_1)&=\vartheta_*\left[f_2\left(\frac{z_2}{L}\right)-f_2\left(\frac{z_1}{L}\right)\right],\end{aligned} \tag{7.24}$$

где

$$f(\zeta)=\int^{\zeta} g(\xi)\,d\xi;\quad f_1(\zeta)=\int^{\zeta} g_1(\xi)\,d\xi;\quad f_2(\zeta)=\int^{\zeta} g_2(\xi)\,d\xi. \tag{7.25}$$

7.3. Общий вид универсальных функций, описывающих турбулентный режим в стратифицированной среде

Согласно сказанному выше, в приземном слое воздуха возможны два качественно различных универсальных режима, соответствующих случаям устойчивой стратификации (поток тепла направлен вниз, т. е. $q<0$ и, соответственно, $L>0$ и $T_*>0$) и неустойчивой стратификации ($q>0$, $L<0$, $T_*<0$). Эти два режима должны сливаться при приближении к безразличной стратификации (при $q\to 0$). Соответственно этому и все универсальные функции, описывающие универсальный режим, распадаются на две отдельные ветви: при $\zeta\geqslant 0$ и при $\zeta\leqslant 0$.

В настоящем пункте мы будем рассматривать лишь простейшие характеристики турбулентности, а именно — профили средней скорости ветра $\overline{u}$, средней температуры $\overline{T}$ и средней влажности $\overline{\vartheta}$. Поэтому нас будут интересовать в первую очередь функции $f(\zeta)$, $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ и их производные $g(\zeta)=f'(\zeta)$, $g_1(\zeta)=f_1'(\zeta)$ и $g_2(\zeta)=f_2'(\zeta)$.

Начнем с рассмотрения функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$. Формулу (7.15) нам будет удобно переписать в виде

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=\frac{u_*}{\varkappa z}\zeta g(\zeta)=\frac{u_*}{\varkappa z}\varphi(\zeta);\qquad \varphi(\zeta)=\zeta g(\zeta)=\zeta f'(\zeta). \tag{7.15'}$$

Зафиксируем теперь значения z, u_* и g/T_0 и будем неограниченно уменьшать величину турбулентного потока тепла q, приближаясь тем самым к условиям безразличной стратификации. При этом масштаб L будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, так что $\zeta=\frac{z}{L}$ стремится к нулю. В пределе при $q\to 0$ мы, очевидно, должны получить обычную формулу теории логарифмического пограничного слоя $\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=\frac{u_*}{\varkappa z}$, не содержащую ни q, ни g/T_0. Следовательно,

$$\varphi(0)=\lim_{\zeta\to 0}\zeta f'(\zeta)=1. \tag{7.26}$$

Поскольку функцию $\varphi(\zeta)$ естественно считать непрерывной, при фиксированных значениях q и u_*, но достаточно малом z (а именно, при $z\ll|L|$) значение $\varphi(\zeta)$ будет близко к единице. Это означает, что при $z\ll|L|$ условия турбулентного обмена мало отличаются от условий обмена в температурно-однородной среде, так что турбулентность в слое $z\ll|L|$ обусловлена в основном динамическими факторами. Таким образом, масштаб L определяет толщину слоя, в котором термические факторы не играют заметной роли; он может быть поэтому назван *высотой*

подслоя динамической турбулентности[1]). Из того обстоятельства, что в самом нижнем слое термическими факторами можно пренебречь, естественно вытекает, что учет свойств подстилающей поверхности в стратифицированной среде должен осуществляться точно так же, как и в однородной среде. Иначе говоря, объективной характеристикой свойств подстилающей поверхности в отношении ее динамического воздействия на поток и в стратифицированной среде является параметр шероховатости z_0, определяемый так, как это было указано в п. 5.4. Так как параметр шероховатости может быть определен по распределению ветра только в подслое динамической турбулентности, то ясно, что он не может зависеть от температурной стратификации воздуха. Практически же этот параметр удобнее всего определять, аппроксимируя логарифмическим законом профили ветра, относящиеся к нейтральной или почти нейтральной стратификации, при которой $|L|$ велико и подслой динамической турбулентности имеет большую толщину. Учитывая, что на высоте z_0 логарифмический профиль средней скорости обращается в нуль и что при $z \ll |L|$ профиль скорости всегда можно считать логарифмическим, первую формулу (7.24) можно переписать в виде

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]. \qquad (7.24')$$

Отсюда видно, что функция $f(z)$ вместе с параметром шероховатости z_0 уже однозначно определяет профиль скорости ветра во всем приземном слое.

Доминирующая роль динамических факторов при $z \ll |L|$, естественно, должна быть связана с малостью числа Ричардсона при таких z. И действительно, ограничиваясь пока более удобным для нас числом $\mathrm{Rf} = \alpha \mathrm{Ri}$, легко вывести из (7.20) и (7.26), что

$$\lim_{z\to 0} \mathrm{Rf}(z) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \mathrm{Rf}}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{L}; \qquad (7.27)$$

следовательно, в пределах подслоя динамической турбулентности

$$|\mathrm{Rf}| \approx \frac{z}{|L|} \ll 1. \qquad (7.28)$$

[1]) Пользуясь этим названием, разумеется, надо не забывать, что толщина слоя, в котором термические факторы не играют роли, на самом деле равна длине L, умноженной на постоянный множитель (который, согласно данным, приведенным в следующем параграфе, по-видимому, имеет порядок нескольких сотых).

При небольших значениях $\zeta = \frac{z}{L}$ функцию $\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$ можно представить в виде степенного ряда:

$$\varphi(\zeta) = 1 + \beta_1\zeta + \beta_2\zeta^2 + \ldots \qquad (7.29)$$

Отсюда для функции $f(\zeta)$ в условиях, близких к безразличной стратификации, получается представление

$$f(\zeta) = \mathrm{const} + \ln|\zeta| + \beta_1\zeta + \frac{\beta_2}{2}\zeta^2 + \ldots; \qquad (7.30)$$

аналогично этому, число Rf здесь оказывается равным сумме степенного ряда

$$\mathrm{Rf}(\zeta) = \zeta - \beta_1\zeta^2 - (\beta_1^2 + \beta_2)\zeta^3 - \ldots \qquad (7.31)$$

Поскольку эмпирические данные не позволяют пока сколько-нибудь надежно определить несколько коэффициентов β_n, практическое значение может иметь только линейная аппроксимация функции $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) \approx 1 + \beta\zeta, \qquad (7.32)$$

$$f(\zeta) \approx \mathrm{const} + \ln\zeta + \beta\zeta, \quad \bar{u}(z) \approx \frac{u_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{z}{z_0} + \beta\frac{z - z_0}{L}\right), \qquad (7.33)$$

$$\mathrm{Rf} \approx \zeta - \beta\zeta^2 = \frac{z}{L} - \beta\left(\frac{z}{L}\right)^2 \qquad (7.34)$$

(здесь β — это коэффициент β_1 формул (7.29)—(7.31)).

По поводу формул (7.29)—(7.34) следует иметь в виду, что так как случаям $\zeta \geqslant 0$ и $\zeta \leqslant 0$ соответствуют два качественно различных режима турбулентности, то у нас нет оснований предполагать, что функция $\varphi(\zeta)$ является аналитической в точке $\zeta = 0$ (хотя она и непрерывна в этой точке в силу того, что при $\zeta \to 0$ оба режима турбулентности сливаются). Поэтому, вообще говоря, случаям $\zeta \geqslant 0$ и $\zeta \leqslant 0$ могут соответствовать различные значения коэффициентов разложений (7.29)—(7.31) и, в частности, различные значения постоянной β. Кроме того, коэффициенты β_n следует считать универсальными постоянными (того же типа, что и постоянная Кармана $\varkappa$), только если рассматривать их как точные значения коэффициентов ряда Тэйлора универсальной функции $\varphi(\zeta)$ (ограничиваясь, например, лишь неотрицательными значениями ζ). Однако в настоящее время у нас нет возможности определить точный аналитический вид функции $\varphi(\zeta)$, не прибегая к каким-либо более или менее произвольным гипотезам. В то же время эмпирически эта функция определяется не настолько точно, чтобы можно было надежно определить значения ее производных в точке $\zeta = 0$. Поэтому на практике коэффициент β обычно находят приближенно.

аппроксимируя эмпирическую функцию $\varphi(\zeta)$ на некотором интервале значений ζ формулой (7.32) или каким-либо другим аналитическим выражением. В результате получаемое значение β оказывается существенно зависящим от выбора интервала аппроксимации и от принятой формулы для $\varphi(\zeta)$, так что неудивительно, что разные авторы приводят сильно различающиеся значения этого коэффициента (см. ниже стр. 422—423). Впрочем, все эти расхождения не касаются вопроса о знаке β, ответ на который сразу следует из элементарных физических соображений. В самом деле, при устойчивой стратификации (т. е. при $q<0$, $L>0$ и $\zeta>0$) турбулентный обмен является затрудненным, и поэтому профиль средней скорости должен быть более «крутым», чем логарифмический профиль, наблюдающийся при более интенсивном обмене, отвечающем безразличной стратификации. Наоборот, при неустойчивой стратификации ($q>0$, $L<0$, $\zeta<0$) еще более интенсивное турбулентное перемешивание должно приводить к выравниванию средней скорости, так что здесь скорость ветра должна возрастать с высотой медленнее, чем при безразличной стратификации. Поэтому $\beta\frac{z-z_0}{L}$ должно быть положительным при $L>0$ и отрицательным при $L<0$, т. е. $\beta>0$ и при $\zeta>0$, и при $\zeta<0$.

Формулы (7.32) — (7.34), как мы уже отмечали, могут иметь смысл лишь при сравнительно небольших по абсолютной величине значениях ζ. Перейдем теперь к вопросу о поведении функций $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta)$ при очень больших значениях $|\zeta|=\frac{z}{|L|}$ и начнем со случая сильной неустойчивости, т. е. больших отрицательных значений ζ. Асимптотическое поведение $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta)$ при $\zeta\to-\infty$ можно изучать, рассматривая большие значения $z\gg|L|$ при фиксированных $q>0$, u_* и g/T_0 (т. е. фиксированном $L<0$), или же рассматривая при фиксированных $q>0$, g/T_0 и z предельный переход $u_*\to 0$ (т. е. $L\to 0$). Последний предельный переход, очевидно, отвечает приближению к случаю чисто термической турбулентности в условиях так называемой свободной конвекции (характеризуемой наличием неустойчивой стратификации с $q>0$ и отсутствием ветра и связанного с ним трения воздуха о подстилающую поверхность). При этом турбулентность имеет весьма своеобразный характер — она получает энергию не из энергии осредненного движения, а из энергии температурной неустойчивости, и имеет характер совокупности тепловых струек, возникающих в отдельных точках подстилающей поверхности и сравнительно слабо перемешивающихся между собой. Если предположить еще, что имеющееся горизонтальное перемешивание все же достаточно

для того, чтобы обеспечить инвариантность распределений вероятностей поля температуры относительно параллельных переносов и вращений в горизонтальной плоскости, то придется заключить, что турбулентность в условиях свободной конвекции представляет собой частный случай рассматриваемой в настоящей главе модели турбулентности в стратифицированной среде, характеризуемый лишь двумя параметрами g/T_0 и $q/c_p\rho_0$ (ибо при «чистой» конвекции $u_*=0$). Но с точки зрения теории подобия турбулентный режим на высотах $z\gg|L|$ при фиксированном u_* не должен отличаться от режима при фиксированном z, но очень малом u_*; поэтому при неустойчивой стратификации турбулентность на больших высотах всегда определяется в основном термическими факторами, т. е. статистические характеристики поля температуры здесь зависят только от g/T_0 и $q/c_p\rho_0$, но не от u_*. С этой точки зрения в предельном случае $\zeta\to-\infty$ проще сначала рассмотреть поведение функций $f_1(\zeta)$ и $g_1(\zeta)=f_1'(\zeta)$, характеризующих распределение средней температуры, и лишь затем обратиться к функциям $g(\zeta)$ (или $\varphi(\zeta)=\zeta g(\zeta)$) и $f(\zeta)$ (ибо при изучении поля скорости мы не можем апеллировать к предельному случаю «чистой» термической конвекции, в котором средняя горизонтальная скорость вообще отсутствует).

Поскольку из величин g/T_0 и $q/c_p\rho_0$ нельзя составить никакого масштаба длины, то турбулентный режим в условиях свободной конвекции должен быть автомодельным (ср. выше исследование конвективных струй на стр. 313—314). В частности, легко проверить, что соотношение (7.16) и второе из соотношений (7.24) не будут содержать величины u_*, лишь если $g_1(\zeta)\sim\zeta^{-1/3}$ и $f_1(\zeta)\sim\zeta^{-1/3}+\text{const}$. Таким образом,

$$g_1(\zeta)=-\frac{C_1\varkappa^{1/3}}{3}\zeta^{-1/3},\qquad f_1(\zeta)=\text{const}+C_1\varkappa^{1/3}\zeta^{-1/3}\qquad(7.35)$$

при $\zeta\ll-1$

(множитель $\varkappa^{1/3}$ здесь добавлен для удобства). Иначе говоря,

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=-\frac{C_1}{3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3}z^{-4/3},$$
$$\overline{T}(z)=T_\infty+C_1\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3}\qquad(7.36)$$

при $z\gg|L|$, $L<0$. Соотношения (7.36) впервые были указаны Прандтлем (1932а), а затем, независимо от него, Обуховым (1946); они, очевидно, вполне аналогичны выведенным Зельдо-

вичем (1937) формулам (5.119)—(5.120) для распределения температуры в конвективных восходящих струях и отличаются от них лишь тем, что здесь речь уже идет не о конвекции над нагретым шаром или цилиндром, а о конвекции над нагретой большой плоской пластинкой. В дальнейшем эти соотношения подробно обсуждались в ряде работ (см., например, Монин и Обухов (1953, 1954), Пристли (1954, 1955, 1956), Казанский и Монин (1958)). Из них, в частности, следует, что при неустойчивой стратификации распределение температуры на больших высотах приближается к изотермии; это, естественно, объясняется наличием очень интенсивного перемешивания (усиливающегося с высотой за счет появления все более и более крупных турбулентных возмущений, сравнимых по масштабу с расстоянием до земли), приводящего к выравниванию температуры. Коэффициент обмена для тепла в условиях свободной конвекции в силу (7.36) равен

$$K_T = -\frac{q}{c_p\rho_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}} = \frac{3}{C_1}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} z^{4/3}; \qquad (7.37)$$

с увеличением расстояния до земли он быстро возрастает.

Теперь уже нетрудно понять, какую асимптотическую форму должны иметь функции $g(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \zeta g(\zeta)$ и $f(\zeta)$ при $\zeta \to -\infty$. Поскольку предельный переход $\zeta \to -\infty$ эквивалентен переходу $u_* \to 0$ (при фиксированных остальных параметрах и фиксированном z), то режим турбулентности при $\zeta \ll -1$ не может зависеть от u_*. Но из величин $q/c_p\rho_0$, g/T_0, ρ_0 и z нельзя составить никакой безразмерной комбинации; поэтому все безразмерные характеристики, определяемые указанными параметрами, должны иметь постоянное (универсальное) значение. В частности, естественно считать, что такой безразмерной характеристикой является отношение коэффициентов обмена для тепла и для импульса $\alpha = K_T/K$; следовательно, в условиях свободной конвекции

$$\frac{K_T}{K} = \alpha_{-\infty} = \text{const}, \quad K = \frac{K_T}{\alpha_{-\infty}} = \frac{3}{C_1\alpha_{-\infty}}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} z^{4/3} \qquad (7.38)$$

(где $\alpha_{-\infty} = \lim\limits_{\zeta\to-\infty} \alpha(\zeta)$). Но в таком случае, очевидно,

$$g(\zeta) = -\frac{C_2}{3}\zeta^{-4/3}, \quad \varphi(\zeta) = -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3} \quad \text{при} \quad \zeta \ll -1, \qquad (7.39)$$

$$f(\zeta) = C_2\zeta^{-1/3} + \text{const} \quad \text{при} \quad \zeta \ll -1, \qquad (7.39')$$

где $C_2 = C_1\varkappa^{4/3}\alpha_{-\infty}$. Иначе говоря,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{C_2}{3\varkappa^{4/3}} u_*^2 \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3},$$
$$\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1) = -C_2\varkappa^{-4/3}u_*^2\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3}\left(z_2^{-1/3} - z_1^{-1/3}\right) \qquad (7.40)$$

при $q > 0$, $z_1 \gg |L|$, $z_2 \gg |L|$. Соотношения (7.40) также были впервые получены (в немного другой форме) Прандтлем (1932а) (см. также Обухов (1946б), Монин и Обухов (1954)). При возрастании z скорость ветра $\bar{u}(z)$ приближается к постоянному значению по тем же причинам, которые вызывают в условиях свободной конвекции приближение к изотермии при $z \to \infty$. Заметим, что в формулы (7.40), разумеется, уже входит величина u_*, так как $\bar{u}(z) = 0$ при $u_* = 0$, и поэтому функция $\bar{u}(z)$ не может не зависеть от u_*. Числа Ричардсона Ri и Rf также будут зависеть от u_*; в условиях свободной конвекции эти числа в силу (7.39), (7.19) и (7.20) равны

$$\mathrm{Ri} = -\frac{3}{C_2\alpha_{-\infty}}\left(\frac{z}{|L|}\right)^{4/3}, \quad \mathrm{Rf} = \alpha\,\mathrm{Ri} = -\frac{3}{C_2}\left(\frac{z}{|L|}\right)^{4/3}. \qquad (7.41)$$

Отсюда видно, что с возрастанием z оба числа Ri и Rf неограниченно возрастают по абсолютной величине (оставаясь все время отрицательными).

Перейдем теперь ко второму предельному случаю $\zeta \to +\infty$. Исследование асимптотического поведения функций $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta)$ при больших положительных ζ соответствует рассмотрению профиля средней скорости $\bar{u}(z)$ при больших z в случае устойчивой стратификации (фиксированное $L > 0$) или же рассмотрению при фиксированном z случая весьма малых положительных L (т. е. очень резких инверсий температуры). При этом, однако, надо иметь в виду, что в предельном случае резкой инверсии при исчезающе слабом ветре турбулентность вырождается, и движения среды приобретают совсем иной характер. А именно, при сильно устойчивой стратификации становится невозможным существование крупных турбулентных возмущений (так как эти возмущения должны были бы затрачивать слишком много энергии на работу против архимедовых сил), и турбулентность может существовать лишь в виде мелких вихрей (иначе это можно объяснить тем, что крупные волны здесь не теряют устойчивости). При еще большей устойчивости даже мелкомасштабная турбулентность, по-видимому, будет практически невозможной, и флуктуирующие движения среды, вероятно, в основном будут реализовываться в виде случайных внутренних гравитационных волн. Во всяком случае, ясно, что

при сильной устойчивости турбулентный обмен между различными слоями жидкости очень затруднен, и поэтому турбулентность приобретает локальный характер: характеристики турбулентного обмена (такие, как коэффициент обмена K, а значит, также и число $\mathrm{Rf} = \frac{K}{\varkappa u_* L}$) при $\zeta \gg 1$ (т. е. при фиксированном $L > 0$, но большой высоте $z \gg L$, или же при фиксированной высоте z, но очень малом $L > 0$) не должны явно зависеть от расстояния z до подстилающей поверхности. Последний вывод можно еще подкрепить следующим рассуждением: согласно известному выводу Ричардсона (см. выше стр. 345) число Rf ни при каких стационарных условиях не может превосходить единицу, т. е. максимальное возможное значение Rf_{cr} этого числа $\leqslant 1$ (по-видимому, Rf_{cr} даже заметно меньше единицы, но это для нас здесь неважно). С другой стороны, естественно предполагать, что изменение Rf с ростом $\zeta = \frac{z}{L}$ (т. е., при фиксированном z, с увеличением степени устойчивости стратификации) должно быть монотонным: невозможно представить себе физические причины, которые могли бы привести к тому, что с ростом устойчивости число Rf вдруг начало убывать. Но если $\mathrm{Rf}(\zeta)$ монотонно возрастает с ростом ζ и в то же время не может превзойти некоторого значения Rf_{cr}, то, значит, при $\zeta \to \infty$ оно должно приближаться к некоторому предельному значению R (которое естественно отождествить с Rf_{cr}).

Итак, в случае устойчивой стратификации должно существовать такое универсальное значение R, что

$$\mathrm{Rf} \approx R = \mathrm{const}, \quad K \approx \varkappa u_* LR \quad \text{при} \quad z \gg L. \tag{7.42}$$

Но отсюда уже следует, что

$$\begin{gathered} g(\zeta) = \frac{1}{R} = \mathrm{const}, \quad \varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{R} = C_3\zeta, \\ f(\zeta) = \mathrm{const} + \frac{\zeta}{R} = \mathrm{const} + C_3\zeta \quad \text{при} \quad \zeta \gg 1, \end{gathered} \tag{7.43}$$

где $C_3 = 1/R = 1/\mathrm{Rf}_{cr}$, и, значит,

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\varkappa RL} z + \mathrm{const} = C_3 \frac{\varkappa T_*}{u_*} \frac{gz}{T_0} + \mathrm{const}. \tag{7.44}$$

Таким образом, на больших высотах в случае устойчивой стратификации скорость ветра линейно возрастает с высотой, причем постоянный градиент этой скорости здесь определяется единственным «внешним» параметром, меняющимся от случая к случаю, а именно — параметром $\frac{\varkappa T_*}{u_*} = -\frac{q}{c_p \tau}$, фактически совпадающим с отношением турбулентного потока тепла к турбулентному напряжению трения. Этот результат был указан Обуховым (1946) (см. также Монин и Обухов (1954)).

Согласно формулам (7.29), (7.30), (7.39), (7.39′) и (7.43) универсальные функции $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ (слагаемое $-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ здесь добавлено, чтобы устранить неопределенность в выборе «начала отсчета» функции $f(\zeta)$) должны иметь общий вид, близкий к изображенному на рис. 47 и 48. В следующем параграфе мы увидим, что это заключение хорошо подтверждается данными непосредственных измерений в приземном слое атмосферы.

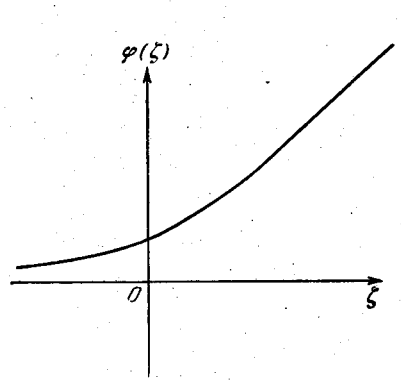


Рис. 47. Схематический вид универсальной функции $\varphi(\zeta)$.

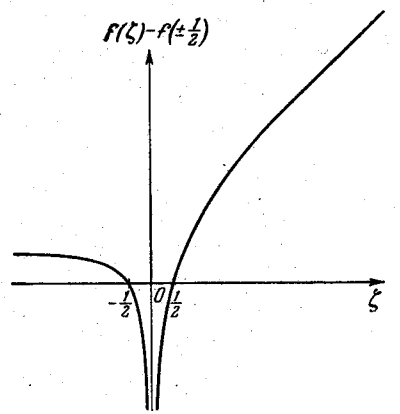


Рис. 48. Схематический вид универсальной функции $f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$.

Скажем теперь еще несколько слов об общем виде функций $g_1(\zeta)$, $f_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, описывающих вертикальные профили температуры и концентрации пассивной примеси («влажности»). Согласно п. 5.7

$$f_1(\zeta) \approx \frac{1}{\alpha_0} \ln|\zeta| + \mathrm{const} \quad \text{при} \quad |\zeta| \ll 1; \tag{7.45}$$

здесь $\alpha_0 = \alpha(0)$ — постоянная, близкая к единице (которую в п. 5.7 мы обозначали просто α). С другой стороны, как мы видели, при $\zeta \ll -1$ (в условиях «свободной конвекции») поведение функции $f_1(\zeta)$ определяется формулой (7.35); от функции $f(\zeta)$ в этой области $f_1(\zeta)$ отличается также лишь постоянным множителем $1/\alpha_{-\infty}$ (точное значение которого, так же как и

точное значение α_0, пока остается неизвестным; см. ниже стр. 428—429). В дальнейшем мы увидим, что при $\zeta \leqslant 0$ переход от режима «вынужденной конвекции», характеризуемого логарифмическими профилями скорости и температуры, к режиму «свободной конвекции», определяемому формулами (7.35)—(7.41), очень резкий, т. е. происходит на малом интервале значений ζ. Поэтому поведение функции $f_1(\zeta)$ на всей положительной полуоси, по-видимому, достаточно полно описывается значениями постоянных $\varkappa$, C_1 и α_0 (или $\varkappa$, $C_2 = C_1\varkappa^{4/3}\alpha_{-\infty}$, α_0 и $\alpha_{-\infty}$). В частности, вопрос о том, можно или нельзя считать функцию $f_1(\zeta)$ при $\zeta \leqslant 0$ подобной функции $f(\zeta)$, вероятно, в первую очередь определяется тем, насколько близки друг к другу значения постоянных α_0 и $\alpha_{-\infty}$. Общая же форма $f_1(\zeta) - f_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ при $\zeta \leqslant 0$ безусловно не должна отличаться от изображенной на рис. 48 формы функции $f(\zeta) - f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Несколько более сложным представляется вопрос о поведении функции $f_1(\zeta)$ при $\zeta > 0$. Поскольку

$$f_1(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{f'(\xi)}{\alpha(\xi)}\, d\xi + \text{const}, \tag{7.46}$$

вопрос о форме функции $f_1(\zeta)$ тесно связан с вопросом о зависимости величины $\alpha(\zeta)$ от параметра устойчивости $\zeta = \frac{z}{L}$ (или от чисел Rf и Ri). Если считать (как это чаще всего делается в метеорологической литературе), что $\frac{K_T}{K} = \alpha = \text{const}$, то функция $f_1(\zeta)$ оказывается совпадающей с функцией $f(\zeta)$ с точностью до постоянного множителя; если $\alpha \equiv 1$ (как это также очень часто предполагается), то вообще $f_1(\zeta) \equiv f(\zeta)$ (с точностью до не играющих роли аддитивных постоянных в выражениях для $f_1(\zeta)$ и $f(\zeta)$). При малых положительных ζ функция $f_1(\zeta)$ задается логарифмической формулой (7.45); при немного больших ζ можно использовать «логарифмическую + линейную» формулу

$$f_1(\zeta) = \text{const} + \frac{1}{\alpha_0}(\ln\zeta + \beta_1\zeta) \tag{7.47}$$

(с коэффициентом β_1, который, вообще говоря, может отличаться от соответствующего коэффициента в формуле (7.33)). Если предположить, что $\alpha(\zeta)$ сравнительно мало меняется на достаточно большом интервале положительных значений ζ, захватывающем также и часть области, в которой имеет место

линейный профиль скорости (7.44), то при достаточно больших значениях ζ из этого интервала и профиль температуры будет неплохо описываться линейной формулой вида

$$f_1(\zeta) = \text{const} + \frac{\zeta}{\alpha R}, \qquad \overline{T}(z) = \frac{1}{\alpha R}\left(\frac{\varkappa T_*}{u_*}\right)^2 \frac{gz}{T_0} + \text{const}, \tag{7.48}$$

где α — постоянная порядка единицы. Однако наблюдения над турбулентностью в море при сильно устойчивой стратификации и примыкающие к ним измерения в водных потоках в лаборатории определенно показывают, что при очень сильной устойчивости $\alpha(\zeta)$ принимает очень малые значения (см. ниже стр. 435—436 и, в частности, рис. 69). Иначе говоря, при очень большой устойчивости коэффициент обмена для теплоты K_T оказывается значительно меньшим, чем коэффициент обмена для импульса K. Следуя Стюарту (1959), нетрудно привести физические соображения, объясняющие причину этого. Случай среды с предельно устойчивой стратификацией можно представить себе в виде слоя тяжелой жидкости (скажем, воды), над которым помещается гораздо более легкая среда (например, воздух). При этом турбулентное движение в нижней жидкости будет приводить к возмущениям свободной границы и появлению отдельных «брызг», проникающих в верхнюю среду, а затем снова падающих под действием архимедовых сил. Проникновение «воды» в «воздух» будет создавать в «воздухе» пульсации давления, осуществляющие определенный обмен импульсом между двумя средами; в то же время обмен теплом здесь практически будет отсутствовать (напомним, что молекулярной теплопроводностью мы условились пренебрегать). Поэтому можно думать, что при очень сильной степени устойчивости (возможно, более сильной, чем та, которая реально наблюдается в атмосферных инверсиях) коэффициент обмена K будет иметь конечное значение, в то время как K_T будет близко к нулю. Но если это так, то отсюда следует, что при очень больших положительных $\zeta = \frac{z}{L}$ профиль температуры $\overline{T}(z)$ будет значительно более крутым, чем профиль скорости $\overline{u}(z)$ (из того, что $K_T \to 0$ при $\zeta \to \infty$, вытекает, что крутизна профиля температуры неограниченно возрастает с ростом z/L). Следовательно, общий вид функций $f_1(\zeta) - f_1\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\varphi_1(\zeta) = \zeta f_1'(\zeta)$ при очень больших положительных ζ будет отличаться от общего вида функций $f(\zeta) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\varphi(\zeta)$ (см. рис. 49 и 50). С этим связано также и то, что число $\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Rf}}{\alpha}$ при сильной устойчивости, по-видимому, может принимать

очень большие значения (так как если $\alpha \to 0$ при $\mathrm{Rf} \to \mathrm{Ri_{cr}}$, то $\mathrm{Ri} \to \infty$); поэтому никакого предельного («критического») значения Ri не существует (в отличие от положения с числом Rf).

Перейдем теперь к функциям $f_2(\zeta)$ и $g_2(\zeta) = f_2'(\zeta)$. До тех пор, пока всеми принималось, что $K = K_T$ (т. е. что $\alpha \equiv 1$), совершенно естественно было предполагать, что и $K_\vartheta = K = K_T$, т. е. что функция $f_2'(\zeta)$ не отличается от $f'(\zeta)$ и $f_1'(\zeta)$. Однако, как только мы отказываемся от предположения о равенстве

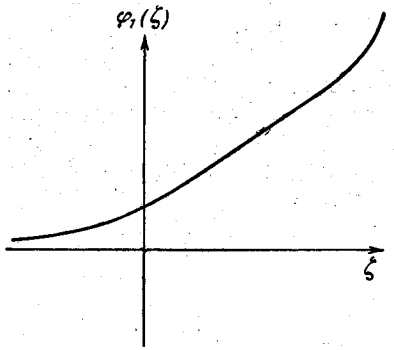


Рис. 49. Схематический вид универсальной функции $\varphi_1(\zeta)$.

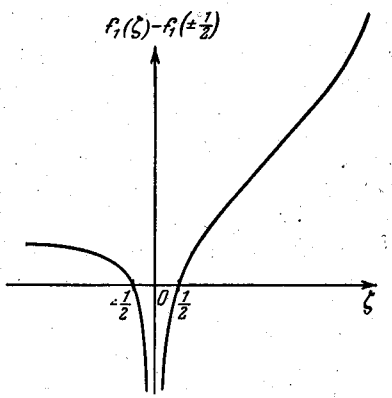


Рис. 50. Схематический вид универсальной функции $f_1(\zeta) - f_1\left(\pm\frac{1}{2}\right)$.

коэффициентов обмена для импульса и для тепла, перед нами сразу встает также и вопрос о значении коэффициента турбулентной диффузии K_ϑ, определяющего форму функций $f_2(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$. Ниже мы увидим, что эмпирические данные о значениях K_ϑ и $f_2(\zeta)$ еще беднее, чем данные о значениях K_T и $f_1(\zeta)$, так что на их основе пока нельзя сделать никаких заслуживающих доверия выводов. Поэтому остается апеллировать лишь к физической интуиции. Отметим в этой связи, что в статье Пристли и Суинбенка (1947), одной из первых в метеорологической литературе, в которой серьезно обсуждался вопрос о несовпадении разных коэффициентов обмена, было в свое время высказано предположение о том, что в силу особой роли пульсаций температуры в конвективных движениях под действием архимедовых сил (сказывающейся, например, в том, что тенденцию двигаться вверх имеют в первую очередь частицы, более теплые, чем окружающая среда)

коэффициент обмена для тепла K_T может иметь иное значение, в то время как коэффициенты обмена для импульса K и для влажности K_ϑ будут совпадать. Однако рассуждения этих авторов не очень ясны, и их точка зрения разделяется далеко не всеми (см., например, Робинсон (1951)), причем особенно малоубедительны их аргументы в применении к условиям приземного слоя. Более обоснованным представляется мнение, что в силу подобия физического механизма обмена теплом и влажностью (или другой пассивной субстанцией), осуществляемого лишь посредством прямого перемешивания воздушных масс, коэффициенты K_T и K_ϑ будут равны друг другу, в то время как коэффициент обмена K, на который влияют и пульсации давления, может быть отличен от $K_T = K_\vartheta$. Этого последнего мнения и придерживается в настоящее время большинство специалистов (см., например, Эллисон (1957), Чарнок (1958а)). Мы здесь также будем считать, что при не слишком большой температурной неоднородности избирательное влияние архимедовой силы на элементы среды разной температуры не будет существенно сказываться на турбулентной теплопередаче, так что до тех пор пока неизвестен никакой другой физический механизм обмена, по-разному влияющий на обмен теплом и влагой, нет оснований отказываться от предположения о том, что $K_T = K_\vartheta$ и, следовательно, $g_2(\zeta) = g_1(\zeta)$, $f_2(\zeta) = f_1(\zeta) + \mathrm{const}$. Разумеется, это предположение требует еще тщательной проверки на материале достаточно аккуратных специальных наблюдений в природе и в лаборатории, отсутствующих в настоящее время.

7.4. Дальнейшие соображения о виде универсальных функций; интерполяционные и полуэмпирические формулы

Выше был проанализирован общий ход универсальных функций $f(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta) = \zeta f_1'(\zeta)$ и указаны асимптотические формулы, определяющие поведение этих функций при близких к нулю больших отрицательных и больших положительных значениях аргумента. В ряде случаев, однако, удобно иметь явные формулы, задающие значения перечисленных функций при всех $\zeta = \frac{z}{L}$. Проще всего такие явные формулы могут быть получены с помощью интерполяции, использующей известные асимптотические закономерности (и учитывающей также имеющиеся эмпирические данные о поведении функций в промежуточных областях умеренных значений ζ). Можно также с этой целью использовать какой-либо из вариантов полуэмпирической теории турбулентности, обобщив его на случай стратифи-

цированной среды, или же просто попытаться подобрать выражения для статистических характеристик турбулентности в такой среде на основе одних только эмпирических данных без всяких ссылок на теорию. Трем указанным подходам к задаче об описании характеристик турбулентности в стратифицированной среде посвящена обширная литература, насчитывающая несколько сотен работ. Здесь мы вкратце остановимся лишь на некоторых относящихся сюда результатах, основное внимание уделив работам последних лет.

Начнем с рассмотрения поведения функций $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ в области отрицательных значений ζ. Как мы уже отмечали, при малых отрицательных значениях ζ обе эти функции должны аппроксимироваться логарифмической функцией. При несколько больших по абсолютной величине значениях ζ можно использовать «логарифмическую + линейную» формулу (7.33) или (7.47), а при очень больших отрицательных ζ функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ приближаются к постоянным значениям, причем отклонения их от соответствующих постоянных затухают, как $\zeta^{-1/3}$ (см. (7.35) и (7.39′)). Мы уже упоминали выше, что согласно эмпирическим данным переход от режима «вынужденной конвекции», описываемого логарифмическими функциями $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$, к режиму «свободной конвекции», которому соответствуют формулы (7.35) и (7.39′), происходит весьма быстро, т. е. без заметной промежуточной области (и притом при очень небольшом значении $|\zeta|=z/|L|$, порядка одной десятой или нескольких сотых; см. ниже стр. 419 и 428). В соответствии с этим Казанский и Монин (1958) предположили, что значения функции $f(\zeta)$ на всей отрицательной полуоси будут неплохо описываться простейшей интерполяционной формулой

$$f(\zeta)=\begin{cases} \ln|\zeta| & \text{при} \quad \zeta_1\leqslant\zeta<0, \\ \ln|\zeta_1|+C_2(\zeta^{-1/3}-\zeta_1^{-1/3}) & \text{при} \quad \zeta\leqslant\zeta_1. \end{cases} \tag{7.49}$$

Аналогично этому для $f_1(\zeta)$ можно предложить формулу

$$f_1(\zeta)=\begin{cases} \frac{1}{\alpha_0}\ln|\zeta| & \text{при} \quad \zeta_2\leqslant\zeta<0, \\ \frac{1}{\alpha_0}\ln|\zeta_2|+\frac{C_2}{\alpha_{-\infty}}(\zeta^{-1/3}-\zeta_2^{-1/3}) & \text{при} \quad \zeta\leqslant\zeta_2, \end{cases} \tag{7.50}$$

где $C_2/\alpha_{-\infty}=C_1\varkappa^{4/3}$. Значения безразмерных коэффициентов α_0, $\alpha_{-\infty}$ и ζ_2/ζ_1, определяющих степень различия функций $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$, должны быть еще уточнены на основании эмпирических данных. Пока можно лишь сказать, что все эти коэффициенты, по-видимому, сравнительно близки к единице (и во многих случаях всех их вполне можно считать равными единице). Что же

касается постоянных C_2, $C_2/\alpha_{-\infty}=S_1\varkappa^{4/3}$ и ζ_1, входящих в формулу (7.49), то на их значениях мы еще остановимся подробнее в следующем параграфе. В применении к функциям $\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$ и $\varphi_T(\zeta)=\alpha_0\zeta f_1'(\zeta)=\alpha_0\varphi_1(\zeta)$ формулы (7.49)—(7.50), очевидно, приводят к соотношениям

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad \zeta_1\leqslant\zeta\leqslant0, \\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3} & \text{при} \quad \zeta<\zeta_1 \end{cases} \tag{7.51}$$

и соответственно

$$\varphi_T(\zeta)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad \zeta_2\leqslant\zeta\leqslant0, \\ -\frac{C_2'}{3}\zeta^{-1/3} & \text{при} \quad \zeta<\zeta_2, \end{cases} \tag{7.52}$$

где $C_2'=\frac{\alpha_0}{\alpha_{-\infty}}C_2=C_1\varkappa^{4/3}\alpha_0$. Эти функции, естественно, оказываются разрывными, так как функции (7.49) и (7.50) непрерывны, но не дифференцируемы в точках ζ_1 и соответственно ζ_2.

Несмотря на наличие разрыва производной, функции (7.49) и (7.50) во многих отношениях являются вполне достаточными для описания профилей ветра и температуры в приземном слое при произвольной неустойчивой стратификации. В тех же случаях, когда желательно иметь функцию $f(\zeta)$ с непрерывной производной, можно, например, следуя Пристли (1960а), отказаться от определения значений ζ_1 и ζ_2 из эмпирических данных, а положить $\zeta_1=-\left(\frac{C_2}{3}\right)^3$ и $\zeta_2=-\left(\frac{C_2'}{3}\right)^3$ (при этом функции (7.51) и (7.52), разумеется, уже будут непрерывными). Того же можно добиться, если, следуя Казанскому и Монину (1958), сохранить также и линейный член в формулах для $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ при малых ζ, т. е. считать, что, например, $f(\zeta)=\ln|\zeta|+\beta\zeta$, $\varphi(\zeta)=1+\beta\zeta$ при $0>\zeta>\zeta_1$ и $f(\zeta)=\ln|\zeta_1|+\beta\zeta_1+C_2(\zeta^{-1/3}-\zeta_1^{-1/3})$, $\varphi(\zeta)=-\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}$ при $\zeta<\zeta_1$. При этом β можно выбрать так, чтобы функция $1+\beta\zeta$ хорошо аппроксимировала эмпирические значения $\varphi(\zeta)$ при малых ζ, а ζ_1 затем определить из условия $1+\beta\zeta_1=-\frac{C_2}{3}\zeta_1^{-1/3}$, обеспечивающего непрерывность $\varphi(\zeta)$ в точке $\zeta=\zeta_1$. С другой стороны, следуя методу Пристли (1960а) и считая обе постоянные β и ζ_1 неопределенными, можно подобрать эти постоянные так, чтобы функция

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases} 1+\beta\zeta & \text{при} \quad \zeta_1\leqslant\zeta\leqslant0, \\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3} & \text{при} \quad \zeta<\zeta_1 \end{cases} \tag{7.53}$$

даже имела в точке ζ_1 непрерывную производную (тогда $f(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi$ при всех ζ будет иметь уже две непрерывные производные). Вообще, полагая

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1 + \beta_1\zeta + \ldots + \beta_n\zeta^n & \text{при} \quad \zeta_1 \leqslant \zeta \leqslant 0, \\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3} & \text{при} \quad \zeta < \zeta_1, \end{cases} \tag{7.54}$$

мы можем добиться того, чтобы функция (7.54) имела n непрерывных производных (и, следовательно, функция $f(\zeta)$ имела $n+1$ непрерывную производную). В самом деле, для этого надо только приравнять друг другу значения функций $1+\beta_1\zeta+\ldots+\beta_n\zeta^n$ и $-\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}$ и их первых n производных в точке $\zeta=\zeta_1$, а затем определить $n+1$ неизвестных $\zeta_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ из полученной системы $n+1$ уравнений. Нетрудно получить явные формулы для решения этой системы уравнений при любом n; согласно этим формулам, если $n\to\infty$, то $\zeta_1\to\infty$, но значения коэффициентов β_k все стремятся к конечным значениям

$$\lim_{n\to\infty}\beta_k = \frac{a^{3k}}{(3k+1)\,k!\,C_2^{3k}}, \quad \text{где } a = 3\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!\sqrt[3]{n}}{4\cdot 7\ldots(3n+1)} \approx 2{,}7 \tag{7.55}$$

(см. Пристли (1960а)). Предельным значениям (7.55) коэффициентов β_k отвечает бесконечно дифференцируемая (даже аналитическая) предельная интерполяционная функция

$$\varphi(\zeta) = \frac{C_2}{a\zeta^{1/3}}\int_0^{a\zeta^{1/3}/C_2} e^{t^3}\,dt. \tag{7.56}$$

Совершенно аналогичные интерполяционные формулы могут быть выписаны и для функции $\varphi_T(\zeta)$, с той только разницей, что коэффициент C_2 теперь надо заменить на $C_2' = \frac{\alpha_0}{\alpha_{-\infty}}C_2 = C_1\varkappa^{4/3}\alpha_0$. Таким образом, придавая n значения $0, 1, 2, \ldots$ и ∞, мы получаем бесконечное число интерполяционных формул вида (7.54) для функций $\varphi(\zeta)$ и $\varphi_T(\zeta)$. При этом оказывается, что все эти интерполяционные формулы (включая и предельную формулу (7.56)) очень мало отличаются друг от друга и практически одинаково хорошо описывают имеющиеся эмпирические данные (характеризуемые значительным разбросом). Для иллюстрации степени близости различных интерполяционных формул друг к другу мы приводим здесь заимствованный из работы Пристли (1960а)

рис. 51, на котором изображен безразмерный поток тепла

$$\overset{*}{q} = \frac{q}{c_p\rho_0\left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right|^{3/2}z^2} = \frac{\varkappa^2\alpha_0^{3/2}}{[\varphi_T(\zeta)]^{3/2}\zeta^{1/2}}$$

(обращающийся в постоянную величину в условиях свободной конвекции), получающийся при использовании для $\varphi_T(\zeta)$ интерполяционной формулы вида (7.54) с $n=0$, 2 и 5. При расчетах,

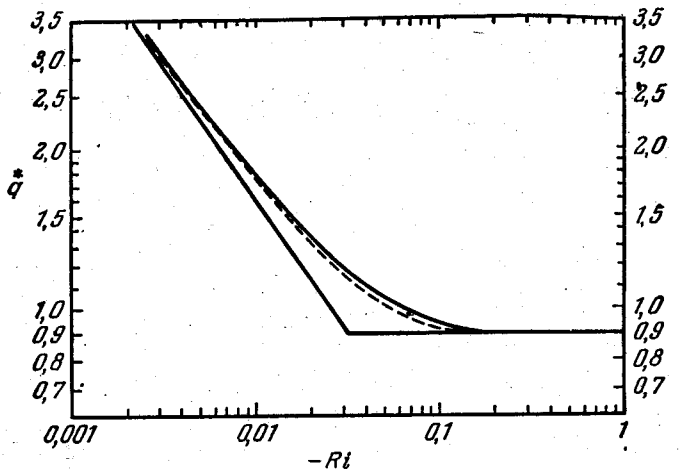


Рис. 51. Зависимость безразмерного потока тепла $\overset{*}{q}$ от числа Ричардсона Ri.

Ломаная линия соответствует функции $\varphi_T(\zeta)$ вида (7.52) с $\zeta_2 = -(C_2'/3)^3$; пунктирная и сплошная кривые — интерполяционным формулам вида (7.54) для $\varphi_T(\zeta)$ с $n=2$ и с $n=5$.

положенных в основу рис. 51, принималось, что $\alpha_0=1$ (и вообще $\alpha(\zeta)\equiv 1$), $\varkappa=0{,}4$ и $C_2'=C_2=0{,}95$ (последнее значение соответствует некоторым эмпирическим данным о профилях температуры в атмосфере); по оси абсцисс здесь отложена величина $\mathrm{Ri}=\mathrm{Ri}=\frac{\zeta}{\varphi_T(\zeta)}$ (при выборе вместо нее аргумента $\zeta=\frac{z}{L}$ расхождение между тремя кривыми было бы еще меньшим). Вообще при $C_2=0{,}95$ расхождение между значениями $\varphi(\zeta)$, отвечающими «нулевой» интерполяционной формуле (7.51) $\left(\text{с } \zeta_1 = -\frac{C_2^3}{27}\right)$ и «предельной» формуле (7.56), нигде не превосходит 15%, причем близкое к 15% расхождение наблюдается

лишь на коротком интервале значений ζ и оно в основном связано с наличием у кривой (7.51) «угловой точки» $\zeta=\zeta_1$. Первое же сглаживание с помощью формулы (7.53) сразу приводит к значениям $\varphi(\zeta)$, нигде не отличающимся от значений (7.56) больше чем на 5%. Отсюда ясно, что в приложениях к наблюдениям в атмосфере использование более сложных, чем (7.53), интерполяционных формул вида (7.54) не имеет большого смысла. С этой точки зрения вряд ли достаточно оправданным является также и предложение Уэбба (1960) использовать интерполяционную функцию вида

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases} 1+\beta\zeta & \text{при } \zeta_1\leqslant\zeta\leqslant 0,\\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}+C\zeta^{-1/3} & \text{при } \zeta<\zeta_1,\end{cases} \tag{7.57}$$

где коэффициент C_2 определяется из эмпирических данных, а β, C и ζ_1 подбираются из условия, чтобы функция (7.57) имела две непрерывные производные в точке $\zeta=\zeta_1$ (или же ζ_1 находится по данным наблюдений, а β, C_2 и C подбираются из указанного условия).

Интерполяционную формулу другого типа можно получить, если, следуя Эллисону (1957), принять за основу то, что при $\zeta=\frac{z}{L}\to 0$ (т. е. в условиях безразличной стратификации) $\mathrm{Rf}\to 0$ и $K\approx\varkappa u_* z$, а при $|\zeta|\gg 1$ (т. е. в условиях свободной конвекции) $-\mathrm{Rf}\sim|\zeta|^{4/3}$ и $K=\varkappa u_* L\cdot\mathrm{Rf}\sim\varkappa u_* z|\zeta|^{1/3}$ (см. (7.38) и (7.41)), т. е. $\frac{K}{\varkappa u_* z}\approx(-\sigma\,\mathrm{Rf})^{1/4}$, где σ — некоторая постоянная (равная, как легко видеть, $(3/C_2)^3$). Исходя отсюда, можно ожидать, что на всем интервале изменения Rf от нуля и до $-\infty$ (т. е. на полуоси $0\geqslant\zeta>-\infty$) зависимость K от Rf будет неплохо описываться формулой вида

$$K=\varkappa u_* z\,(1-\sigma\,\mathrm{Rf})^{1/4}, \tag{7.58}$$

дающей правильные результаты в предельных случаях и малых, и больших отрицательных значений Rf. Одновременно оказывается, что формула (7.58) при $\sigma=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$ дает асимптотически правильные результаты и в предельном случае очень устойчивой стратификации. В самом деле, из (7.58) видно, что в процессе возрастания числа Rf оно никогда не может превзойти значение $1/\sigma$ и что $K/z\to 0$ при $\mathrm{Rf}\to 1/\sigma$ (т. е. при $\zeta=\frac{z}{L}\to+\infty$) в полном соответствии с формулами (7.42). Таким образом, можно надеяться, что, воспользовавшись формулой (7.58), содержащей единственную эмпирическую постоянную σ, можно будет приближенно описать профиль средней скорости в турбулентной

стратифицированной среде при любых условиях стратификации. Правда, вообще говоря, трудно рассчитывать, что значение $\sigma=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$ точно совпадает со значением $\sigma=27C_2^{-3}$, которое приводит к правильному асимптотическому поведению функции $K(\mathrm{Rf})$ в области больших отрицательных значений Rf; однако, так как в настоящее время значение $\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$ известно лишь крайне неточно, то у нас пока нет оснований для использования в формуле (7.58) разных значений σ при $\mathrm{Rf}<0$ и при $\mathrm{Rf}>0$.

Формула (7.58) может быть также получена, исходя из простейшей попытки обобщения полуэмпирической теории турбулентности на случай стратифицированной среды. В самом деле, как мы уже видели в п. 6.5 (см. стр. 347), уравнение баланса турбулентной энергии в стратифицированной среде в рамках полуэмпирической теории может быть преобразовано к виду

$$K=u_* l_1(1-\sigma\,\mathrm{Rf})^{1/4}, \tag{7.59}$$

где $l_1=\varkappa z\lambda(\mathrm{Rf})$ — соответственным образом определенный «масштаб турбулентности». Если теперь предположить, что $\lambda(\mathrm{Rf})\equiv 1$, т. е. что масштаб турбулентности l_1 при любой стратификации задается одним и тем же равенством $l_1=\varkappa z$ (верным в случае равновесной стратификации), то отсюда сразу следует соотношение (7.58). Именно таким образом это соотношение и было впервые выведено Обуховым (1946), использовавшим его для исследования асимптотического поведения функций $f(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ в области больших положительных и больших отрицательных значений ζ. В последние годы различные методы вывода соотношения (7.58) детально обсуждались рядом авторов (см., например, Ямамото (1959), Пановский (1961а), Пристли (1961), Селлерс (1962), Сионо и Хамуро (1962), Клюг (1963)). Поскольку, однако, все предложенные выводы используют некоторые произвольные гипотезы, они мало что добавляют к приведенным выше соображениям Эллисона, рассматривавшего соотношение (7.58) просто как интерполяционную формулу для $K(\mathrm{Rf})$, дающую правильные результаты и для больших отрицательных, и для близких к нулю, и для больших положительных значений $\zeta=\frac{z}{L}$.

Поскольку $K=\frac{\varkappa u_* z}{\varphi(\zeta)}$, а $\mathrm{Rf}=\frac{\zeta}{\varphi(\zeta)}$, соотношение (7.58) может быть переписано в виде следующего простого алгебраического уравнения относительно функции $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi^4-\sigma\zeta\varphi^3-1=0. \tag{7.60}$$

Это уравнение содержит единственную неизвестную постоянную σ, которую можно исключить, введя вместо $\zeta=\frac{z}{L}$ в качестве

независимой переменной величину $\eta = \sigma\zeta = \frac{z}{L_*}$, где $L_* = \frac{L}{\sigma}$; тогда оно примет вид

$$\varphi^4 - \eta\varphi^3 - 1 = 0. \tag{7.61}$$

Уравнение (7.61) было численно решено Ямамото (1959), а затем также и Клюгом (1963). В работе Ямамото содержится таблица значений функции $\varphi(\eta)$ (хорошо согласующаяся со схематическим рис. 47), приведены несложные аналитические выражения, аппроксимирующие эту функцию на положительной и на отрицательной полуосях, и построены графики зависимости безразмерной скорости ветра $\varkappa\bar{u}/u_*$ от безразмерной высоты z/z_0 при различных значениях параметра $\eta_0 = \sigma z_0/L$, определяющего стратификацию. Позже Сионо и Хамуро (1962) и Окамото (1963) выписали решение уравнения четвертой степени (7.61) в радикалах и, исходя из него, более подробно исследовали форму функции $\varphi(\eta)$ и отвечающих ей профилей скорости ветра. Мы здесь, однако, не будем задерживаться на не представляющем большого интереса детальном изучении решения уравнения (7.61), являющегося лишь одной из возможных интерполяционных формул для функции φ (и к тому же, по-видимому, не очень точной).

То, что уравнение (7.61) не может быть точным, следует, в частности, из отмеченного выше факта соответствия этого уравнения физически мало естественному предположению о независимости масштаба турбулентности l_1 на высоте z от температурной стратификации. Если же предположить, что

$$l_1 = \varkappa z\lambda\left(\frac{z}{L}\right), \tag{7.62}$$

то для φ получится уравнение

$$\varphi^4 - \sigma\zeta\varphi^3 - \frac{1}{\lambda^4} = 0, \tag{7.63}$$

содержащее еще одну неизвестную универсальную функцию $\lambda(\zeta)$ (ср. Иокояма (1962б)).

В случае устойчивой стратификации турбулентный обмен затруднен и большие турбулентные образования не могут существовать; поэтому естественно ожидать, что при положительных ζ масштаб l_1 будет убывать с ростом ζ (или Rf). В этой связи Казанский и Монин (1956) предположили, что $l_1 = \varkappa z\lambda(\mathrm{Rf})$, где $\lambda(0) = 1$, а при возрастании Rf от нуля до значения $\mathrm{Rf}_{cr} = 1/\sigma$ функция $\lambda(\mathrm{Rf})$ монотонно убывает от единицы до нуля. В качестве конкретного примера они рассмотрели случай, когда $\lambda(\mathrm{Rf}) = (1 - \sigma\,\mathrm{Rf})^{\gamma - \frac{1}{4}}$, где $\gamma > \frac{1}{4}$ — некоторое число. При таком выборе $\lambda(\mathrm{Rf})$ уравнение (7.59) обращается в соотношение

$$K = \varkappa u_* z\,(1 - \sigma\,\mathrm{Rf})^{\gamma} \tag{7.64}$$

(такое соотношение с $\gamma = 1/2$ ранее использовалось Холцменом (1943) в качестве эмпирической формулы для K). Выразив здесь опять K и Rf через функцию $\varphi(\zeta)$, найдем, что (7.64) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)} = \left[1 - \frac{\sigma\zeta}{\varphi(\zeta)}\right]^{\gamma}. \tag{7.65}$$

Полагая, что $\sigma\zeta = \eta$, и вводя в качестве параметра величину $\varphi(\eta)$, нетрудно получить из (7.65) следующее параметрическое представление функции $f(\eta) = \int^{\eta} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\,d\xi$:

$$f = \varphi + \frac{1}{\gamma}\int^{\varphi} \frac{d\xi}{\xi^{1/\gamma} - 1}, \qquad \eta = \varphi - \varphi^{1-1/\gamma}. \tag{7.66}$$

Поскольку в инверсионных условиях $\eta = \sigma\zeta \geqslant 0$, второе из соотношений (7.66) показывает, что в этих условиях $\varphi \geqslant 1$, причем $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(\eta) \to \infty$ при $\eta \to \infty$. При малых η можно положить $\varphi(\eta) = 1 + \delta$, где $\delta \ll 1$; подставив эту формулу во второе равенство (7.66), найдем, что $\delta = \gamma\eta$, т. е. $\varphi \approx 1 + \gamma\eta = 1 + \sigma\gamma\zeta$. Отсюда видно, что произведение $\sigma\gamma = \beta$ должно совпадать с коэффициентом β в формуле (7.32). Далее, при больших η в силу того же второго равенства (7.66) будет выполняться асимптотическое соотношение $\varphi \sim \eta = \sigma\zeta$, показывающее, что $\sigma = \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathrm{Rf}_{cr}}$ (ср. (7.43)).

Казанский и Монин рассчитали значения $f(\eta)$ для частного случая $\gamma = 0{,}6$ (в этом случае интеграл в первом равенстве (7.66) выражается через элементарные функции); полученный исходя из этого расчета график зависимости безразмерного коэффициента обмена $K/\varkappa u_* L$ от безразмерной высоты $\eta = \sigma z/L$ приведен на рис. 52 вместе с графиком экспоненциальной функции $K/\varkappa u_* L = 1 - e^{-\eta}$, использовавшейся в ряде метеорологических работ (Дородницын (1941), Матвеев (1960) и др.).

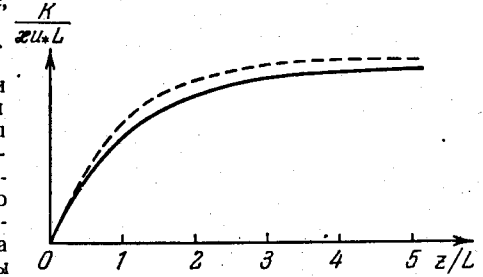


Рис. 52. Зависимость безразмерного коэффициента обмена $K/\varkappa u_* L$ от безразмерной высоты ζ согласно теории Казанского и Монина (сплошная линия) и согласно эмпирической формуле Дородницына и др. (пунктир).

Заметим, что аппроксимация (7.64) целесообразна только при положительных значениях ζ (и Rf). Действительно, если попытаться применить ее одновременно и при отрицательных ζ (для неустойчивых стратификаций), то обычные закономерности теории свободной конвекции (7.35)—(7.41) будут получаться при $\zeta \to -\infty$ и $\mathrm{Rf} \to -\infty$, лишь если $\gamma = 1/4$. Таким образом, при $\zeta < 0$ надо пользоваться либо уравнением (7.60) (т. е. заранее принять, что $\gamma = 1/4$), либо же применять простые интерполяционные формулы вида (7.51)—(7.54). Исходя из этих формул, можно также уточнить зависимость масштаба турбулентности l_1 от стратификации при неустойчивых условиях (уравнение (7.60), как мы знаем, приводит к неправдоподобно простой формуле: $l_1 = \varkappa z$). В самом деле, если принять, что $l_1 = \varkappa z\lambda(z/L)$, то в силу (7.63)

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{\varphi(\zeta)}\left[1 - \frac{\sigma\zeta}{\varphi(\zeta)}\right]^{-1/4}. \tag{7.67}$$

Поэтому, зная функцию $\varphi(\zeta)$ (и постоянную σ), мы можем найти также и поправочный множитель $\lambda(\zeta)$. В частности, в условиях свободной конвекции согласно (7.67) и (7.39)

$$\lambda(\zeta)=\left(\frac{27}{\sigma C_2^3}\right)^{1/4}\left(1+\frac{C_2}{3\sigma\zeta^{4/3}}\right)^{-1/4}\to\lambda(\infty)=\left(\frac{27}{\sigma C_2^3}\right)^{1/4}\quad\text{при}\quad\zeta\to-\infty \tag{7.68}$$

(то, что здесь $\lambda(\infty)=\text{const}$, т. е. l_1 пропорционально z, естественно вытекает из отсутствия в условиях свободной конвекции какого-либо фиксированного масштаба, отличного от z). Так как следует думать, что с ростом неустойчивости масштаб турбулентности должен возрастать, то должно быть $\lambda(\infty)>1$, т. е. $C_2<3\sqrt[3]{\sigma}$. При малых значениях ζ, используя формулу (7.32), получим

$$\lambda(\zeta)\approx 1-\left(\beta-\frac{\sigma}{4}\right)\zeta,\quad l_1\approx\varkappa z\left[1-\left(\beta-\frac{\sigma}{4}\right)\frac{z}{L}\right]. \tag{7.68'}$$

Таким образом, если $\beta>\frac{\sigma}{4}$, то при изменении ζ от нуля до $-\infty$ функция $\lambda(\zeta)=l_1/\varkappa z$ сначала будет линейно возрастать, затем рост ее замедляется, и при $\zeta\to-\infty$ она будет стремиться к постоянной (в соответствии с формулой (7.68)).

Можно также начать с того, что выбрать каким-либо образом функцию $\lambda(\zeta)$; тогда из уравнения четвертой степени (7.63) легко определить и функцию $\varphi(\zeta)$, т. е. найти распределение ветра с высотой, отвечающее заданному масштабу турбулентности $l_1=\varkappa z\lambda(z/L)$. В частности, Такеучи и Иокояма (1963), исходя из некоторых довольно грубых эмпирических данных, позволяющих оценить один из возможных «масштабов» турбулентности, приняли, что

$$\lambda(\zeta)=\sigma\left[(\zeta^2+\sigma^{-2})^{1/2}-\zeta\right],$$

где σ — тот же числовой коэффициент, который входит в (7.63). Исходя отсюда, они рассчитали функцию $\varphi(\zeta)$, которая, естественно, оказалась не удовлетворяющей «закону 1/3» (7.39) при $\zeta\to-\infty$ (так как выбранная функция $\lambda(\zeta)$ не стремится к постоянной при $\zeta\to-\infty$).

Уравнения (7.60) (или (7.63) при заданном $\lambda(\zeta)$) и (7.65) представляют собой частные примеры соотношений, определяющих функцию $\varphi(\zeta)$ и получающихся из некоторой полуэмпирической теории. Как мы уже видели в предыдущей главе, даже в случае турбулентности в однородной среде существует целый ряд различных вариантов полуэмпирической теории, приводящих к слегка различным результатам. Естественно поэтому, что в значительно более сложных условиях стратифицированной среды число возможных полуэмпирических теорий оказывается очень большим, и эти теории приводят к весьма разнообразным выражениям для $\varphi(\zeta)$ и других универсальных функций. Разумеется, все такие теории содержат те или иные произвольные допущения, требующие дополнительной проверки; получающиеся же выражения для $\varphi(\zeta)$ во многих случаях даже не удовлетворяют общим асимптотическим соотношениям, выведенным в предыдущем пункте, и, следовательно, могут применяться лишь на каких-то ограниченных интервалах значений ζ. Так, например, в первой полуэмпирической теории турбулентности в стратифицированной среде, предложенной Россби и Монтгомери (1935), предполагалось, что $K=u_*l_1$, и использовалась специальная гипотеза для определения зависимости масштаба l_1 от высоты и стратификации; в результате указанные авторы пришли к выводу, что

$$K=\frac{\varkappa u_* z}{(1+\sigma\,\mathrm{Ri})^{1/2}}, \tag{7.69}$$

где $\sigma=\text{const}$, т. е. что

$$\varphi^3-\varphi-\sigma\zeta=0, \tag{7.70}$$

если $\alpha(\zeta)\equiv 1$ (ср. вывод уравнения (7.60) из соотношения (7.58)). При $|\zeta|\ll 1$ равенства (7.69) и (7.70), очевидно, приводят к разумной «логарифмической+линейной» формуле для профиля ветра (с $\beta=\sigma/2$); однако асимптотическое поведение $\varphi(\zeta)$ и при $\zeta\to-\infty$, и при $\zeta\to+\infty$ здесь оказывается неправильным (в частности, из (7.69) видно, что в этой теории нет критического числа Ричардсона). В другой полуэмпирической теории, развитой Огура (1952а), в основу было положено уравнение баланса турбулентной энергии и гипотезы о том, что $K=\dfrac{u_*l_1^2}{\varkappa z}$ и $\alpha\equiv 1$. При этом для градиента скорости ветра была получена формула, которая в наших обозначениях может быть записана в виде

$$\varphi(\zeta)=\left(1+\frac{\sigma^2}{4}\zeta^2\right)^{1/2}+\frac{\sigma}{2}\zeta, \tag{7.71}$$

где σ — эмпирическая постоянная. Ясно, что при $|\zeta|\ll 1$ и эта формула эквивалентна «логарифмической+линейной» формуле для профиля ветра (с $\beta=\sigma/2$). Поэтому неудивительно, что она оказалась сравнительно хорошо описывающей профили ветра в условиях, не слишком сильно отклоняющихся от безразличной стратификации. Однако при $\zeta\to-\infty$ здесь также не получается соотношения (7.39), отвечающего «закону 1/3» для профиля скорости ветра (и температуры) в условиях свободной конвекции (в другом предельном случае $\zeta\to+\infty$ асимптотическое соотношение (7.43) теперь уже выполняется, если принять что $\sigma=1/R=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$). Основная гипотеза теории Огура о коэффициенте обмена K использовалась также Бюсингером (1955), но уже в соединении с гипотезой Россби и Монтгомери относительно масштаба l_1 (вместо использования полуэмпирического уравнения баланса энергии). При этом им был получен результат, который может быть преобразован к следующему виду:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left[1+(1-4\zeta)^{1/2}\right]-\zeta} \tag{7.72}$$

(как мы уже отмечали в сноске на стр. 367, сам Бюсингер пользовался более сложной записью, так как он считал, что, вообще говоря, $\dfrac{\varkappa z}{u_*}\dfrac{d\bar{u}}{dz}$ может зависеть и от z_0/z). Согласно формуле (7.72), $\varphi(\zeta)\approx 1+2\zeta$ при $|\zeta|\ll 1$, но асимптотическое поведение $\varphi(\zeta)$ при больших значениях $|\zeta|$ теперь снова оказывается неверным при любом знаке ζ (при сильной устойчивости $\varphi(\zeta)$ оказывается даже комплексным).

С помощью специальной гипотезы, представляющейся довольно искусственной, Суинбенк (1960, 1964) получил очень простую формулу

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta}{1-e^{-\zeta}}, \tag{7.73}$$

так же как и (7.72), вовсе не содержащую эмпирических констант. Эта формула опять имеет правильную асимптотику (вида (7.32) и соответственно (7.43)) при малых и при больших положительных значениях ζ (с коэффициентами $\beta=0{,}5$, $R=C_3=1$), но при $\zeta\to-\infty$ и она не переходит в «закон 1/3». Заметим еще, что соотношение (7.73) приводит к простой экспоненциальной зависимости коэффициента обмена от высоты (изображенной пунктиром на рис. 52), представляющейся правдоподобной в условиях устойчивой

стратификации. Еще один вариант полуэмпирической теории был предложен Као (1959), основной результат которого может быть записан в виде

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2}\left\{1+(1+4\sigma\zeta)^{1/2}\right\} \quad \text{при} \quad \zeta>-\frac{1}{4\sigma}, \tag{7.74}$$

где σ — эмпирическая постоянная. Формула (7.74), как и все предыдущие, приводит к ««логарифмическому+линейному» профилю в близких к равновесным условиям, но при $\zeta\to+\infty$ она имеет неправильную асимптотику. Более сложное соотношение для $\varphi(\zeta)$, которое можно представить в виде

$$\varphi(\zeta)-\sigma\zeta=\left\{\frac{\sigma\zeta+[(\sigma\zeta)^2+4(\varphi(\zeta)-\sigma\zeta)^2]^{1/2}}{2\varphi(\zeta)}\right\}^{3/4}, \tag{7.75}$$

было получено в полуэмпирической теории Бюсингера (1959). Последнее соотношение обладает уже тем преимуществом, что соответствующая функция $\varphi(\zeta)$ имеет правильное асимптотическое поведение и при $\zeta\to+\infty$ (с $\mathrm{Rf}_{cr}=1/\sigma$, т. е. $C_3=\sigma$), и при $\zeta\to-\infty$. Теми же достоинствами обладает и функция $f(\zeta)=\int_{\zeta}^{\zeta}\frac{\varphi(\xi)}{\xi}d\xi$, найденная Зилитинкевичем и Лайхтманом (1965), исходя из полуэмпирического уравнения баланса энергии турбулентности, дополненного следующим обобщением гипотезы Кармана (5.97) о «пути перемешивания» l:

$$l=-\varkappa_1\frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2-\alpha\frac{g}{T_0}\frac{d\bar{T}}{dz}}{2\frac{d\bar{u}}{dz}\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}-\alpha\frac{g}{T_0}\frac{d^2\bar{T}}{dz^2}}$$

(где $\varkappa_1$ и α — эмпирические константы, $\alpha=K_T/K$).

Примеры применения полуэмпирических гипотез для явного определения функций $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta)$ можно было бы еще продолжить (см., например, Эллиот (1957, 1960), Кравченко (1963), Наито (1964)). Следует, однако, иметь в виду, что все получаемые таким образом выражения для этих функций должны рассматриваться лишь как некоторые приближенные формулы, степень точности которых на заданном интервале значений ζ (или чисел Rf, или Ri) должна дополнительно устанавливаться на основе сопоставления с данными наблюдений. В следующем параграфе мы увидим, что разброс имеющихся данных наблюдений до сих пор остается довольно большим; поэтому и выбор между различными полуэмпирическими формулами является затруднительным.

Кроме полуэмпирических формул для профиля ветра, согласующихся с общими соображениями размерности (т. е. сводящихся к некоторым предположениям относительно функций $\varphi(\zeta)$ или $f(\zeta)$), в метеорологической литературе можно найти также большое число работ (имеющих, как правило, более чем десятилетнюю давность), в которых предлагаются полуэмпирические или же чисто эмпирические формулы для профилей метеорологических элементов, не опирающиеся на соображения размерности (и содержащие чаще всего вместо эмпирических постоянных некоторые эмпирические функции от числа Ричардсона или других характеристик стратификации). Так, например, в течение ряда лет в научной литературе широко дискутировался вопрос о возможности использования «логарифмического закона» (с параметрами, вообще говоря, зависящими от устойчивости) для описания профиля ветра в приземном слое воздуха при различных температурных стратификациях. Ряд авторов (например, Россби и Монтгомери (1935), Саттон (1936, 1937), Будыко (1946, 1948), Бьоргум (1953) и др.) отстаивали возможность применения этого закона при любых условиях. Так, например, Будыко разработал схему, в которой профиль ветра описывается формулой

$$\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\varkappa m}\ln\frac{mz}{z_0}, \tag{7.76}$$

где m — параметр, зависящий от температурной стратификации. Для величины m Будыко предложил формулу, которую, пользуясь введенным выше масштабом L, можно записать в виде $m=\left(1+\frac{h^2}{4L^2}\right)^{1/2}-\frac{h}{2L}$, где h — «высота приземного слоя воздуха», близкая к 30 *м* (наличие в этой формуле высоты h, очевидно, делает ее несогласующейся с размерностным анализом п. 7.2: здесь $\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$ зависит уже, кроме u_*, $\frac{q}{c_p\rho_0}$, $\frac{g}{T_0}$ и z, еще и от h). Позже Бьоргум (1953) рассмотрел также более общую формулу вида $\bar{u}(z)=\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{z-h_0}{z_0}$, где параметры $\varkappa$, z_0 и h_0 зависят от стратификации. Очевидным недостатком всех этих формул является то, что они не учитывают реально существующих систематических отклонений профиля ветра при ненейтральной стратификации от логарифмического закона. Кроме того, даже в самом нижнем слое, в котором температурная стратификация играет очень малую роль, соответствующие профили не приближаются к тем, которые наблюдаются в отсутствие градиентов температуры (в частности, экстраполяция профиля ветра до значения $\bar{u}(z_0)=0$ приводит здесь к значению z_0, зависящему от степени устойчивости, т. е. уже не являющемуся объективной характеристикой подстилающей поверхности).

Другие авторы, в том числе Шмидт (1925), Бест (1935), Лайхтман (1944, 1947а), Фрост (1948), Дикон (1949) и Такеда (1951), предлагали аппроксимировать профиль ветра в приземном слое воздуха степенными функциями от z. При этом Шмидт, Бест и Фрост использовали простейшую формулу вида $\bar{u}(z)\sim z^{\varepsilon}$, а Лайхтман развил теорию, в которой профиль ветра описывается формулой

$$\bar{u}(z)=\bar{u}(z_1)\frac{z^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}} \tag{7.77}$$

так что $\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=Az^{\varepsilon-1},\ A=\frac{\varepsilon\bar{u}(z_1)}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}\right)$, где ε — параметр, зависящий от стратификации воздуха (положительный при инверсиях, равный нулю при безразличной стратификации и отрицательный в случае неустойчивости); практически ту же формулу позже использовали также Дикон и Такеда. Формула (7.77) позволяет уловить характер отклонений профиля ветра от логарифмического закона; при $\varepsilon\to0$ она, очевидно, переходит в обычный логарифмический профиль (если положить, что $A=\frac{u_*}{\varkappa}$ при $\varepsilon=0$). Однако, если, следуя Лайхтману, считать, что параметр z_0 также зависит от стратификации, то влияние стратификации здесь все равно будет сказываться даже при $z\to0$, что противоречит выводам из теории подобия. Вместе с тем число свободных параметров, подлежащих определению в каждом отдельном случае по данным наблюдений, в такой теории оказывается слишком большим, что создает трудности при нахождении этих параметров и снижает точность расчетов. Если же, следуя Дикону, принять z_0 постоянным, то приходится допустить, что ε зависит также и от высоты (см., например, Дэвидсон и

Баред (1956)), что является совсем уж неудовлетворительным. Заметим, что формула (7.77) также не может быть согласована с изложенными в п. 7.2 соображениями размерности; в частности, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ здесь явно зависит от функции $\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{Ri})$ (где Ri берется на фиксированной высоте) и от параметра шероховатости z_0 (который в схеме Лайхтмана также зависит от стратификации).

Учет влияния стратификации на профиль ветра путем введения линейной добавки к логарифмическому закону, т. е. использования формулы вида

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{z}{z_0} + bz\right), \tag{7.78}$$

где b — параметр, зависящий от степени устойчивости (положительный при инверсиях и отрицательный при неустойчивой стратификации), предлагался, исходя из анализа эмпирических данных, в частности, Хелстедом (1943) и Пановским (1952). Формула (7.78), очевидно, может быть согласована с соображениями размерности, для чего надо только положить $b = \frac{\beta}{L}$; после этого она переходит в формулу Монина и Обухова (7.33).

Все сказанное выше о профиле ветра может быть перенесено и на профили температуры и влажности, если только стратификация является неустойчивой, безразличной или слегка устойчивой. Однако при очень высокой степени устойчивости, как мы уже отмечали выше, по-видимому, возникает особая ситуация: есть основания думать, что при таких условиях коэффициент обмена $K_T = K_\theta$ гораздо меньше, чем K, и поэтому профили температуры $\bar{T}$ и концентрации пассивной примеси $\bar{\theta}$ в этом случае отличаются по форме от профиля средней скорости (ср. рис. 48 и 50). Теоретический анализ этого явления представляет очень большие трудности и пока еще не увенчался значительными успехами; однако предпринятая Эллисоном (1957) попытка оценки зависимости величины $\alpha = \frac{K_T}{K}$ от числа Ричардсона $\mathrm{Rf} = \frac{\zeta}{\varphi(\zeta)}$ заслуживает все же упоминания, поскольку она привела к результатам, которые оказались неожиданно хорошо соответствующими результатам последующих экспериментов Эллисона и Тэрнера (1960) (см. ниже стр. 434). Для расчета величины α Эллисон использовал уравнение баланса турбулентной энергии $b = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ в стратифицированной среде и родственные ему уравнения для вторых моментов $\overline{T'^2}$, $\overline{w'^2}$ и $\overline{w'T'}$. Как мы уже видели в п. 6.1, такие уравнения содержат большое число новых неизвестных членов; поэтому для получения своих выводов Эллисону пришлось принять ряд дополнительных грубых предположений (типа полуэмпирических гипотез) о пренебрежимой малости некоторых слагаемых и о связях, позволяющих выразить не пренебрежимо малые неизвестные члены через сами рассматриваемые моменты. Использовав эти предположения (неявно содержащие уже допущение о малости обмена теплом по сравнению с обменом импульсом при сильной устойчивости), Эллисон пришел к соотношению, которое можно представить в виде

$$\alpha(\zeta) = \frac{K_T}{K} = \frac{\alpha_0(1 - \mathrm{Rf}/R)}{(1 - \mathrm{Rf})^2} = \frac{\alpha_0\varphi(\zeta)\,[R\varphi(\zeta) - \zeta]}{R\,[\varphi(\zeta) - \zeta]^2}, \tag{7.79}$$

где α_0 и R — медленно меняющиеся функции от ζ, которые в первом приближении можно просто считать эмпирическими постоянными. Ясно, что α_0 здесь

совпадает со значением K_T/K при безразличной стратификации (в условиях логарифмического пограничного слоя), а R — это критическое значение Rf_{cr}, которого число Rf никогда не может превзойти, и при котором K_T обращается в нуль. Весьма грубые оценки, произведенные Эллисоном на основе некоторых соображений интуитивного характера, привели его к выводу, что параметр R должен быть значительно меньше единицы (например, близким к 1/7 или 1/10); это заключение, однако, пока еще нельзя считать окончательным. Если знать характер приближения числа Rf к предельному значению $\mathrm{Rf}_{\text{сч}}$ (т. е. порядок члена $o(1)$ в асимптотическом разложении $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{R}[1 + o(1)]$ функции $\varphi(\zeta)$ при больших ζ), то, исходя из (7.79), можно определить также и асимптотическое поведение функции $\varphi_1(\zeta)$ (или $\varphi_T(\zeta) = \frac{1}{\alpha_0}\varphi_1(\zeta)$) при $\zeta \to \infty$. В настоящее время, однако, для этого еще нет необходимых данных.

7.5. Общая формулировка гипотезы подобия для турбулентного режима в приземном слое атмосферы и ее применение к исследованию пульсаций метеорологических полей

До сих пор мы рассматривали только профили средних значений скорости ветра, температуры и влажности в приземном слое атмосферы и лишь к ним применяли соображения размерности, изложенные в п. 7.2. На самом деле, однако, эти соображения имеют общий характер, и результаты пп. 7.3—7.4 далеко не исчерпывают всех приложений теории подобия к турбулентности в приземном слое. Сейчас мы рассмотрим некоторые дальнейшие приложения этой теории, относящиеся к статистическим характеристикам, отличным от средних значений основных метеорологических полей.

Начнем с того, что сформулируем в самой общей форме наши основные предположения о подобии. В п. 7.1 мы отмечали, что в случае плоскопараллельного турбулентного течения стратифицированной жидкости над плоской однородной шероховатой поверхностью (являющегося естественной моделью «приземного слоя») все одноточечные моменты гидродинамических полей будут зависеть только от вертикальной координаты z. Но ограничение лишь одноточечными моментами было там принято только потому, что именно они интересовали нас в первую очередь. Фактически же в такой модели все распределения вероятностей для значений гидродинамических полей в каком-то конечном числе точек будут инвариантными относительно произвольных параллельных переносов этой совокупности точек в плоскости Oxy и ее отражений в вертикальной плоскости Oxz, проходящей через направление среднего ветра $\bar{u}(z)$, а также стационарными (не зависящими от сдвигов во времени). Иначе говоря, в этой модели распределение вероятностей для значений

произвольных гидродинамических полей в точках (x_1, y_1, z_1, t_1), ..., (x_n, y_n, z_n, t_n) может зависеть лишь от параметров $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$; $y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_1$; $z_1, \ldots, z_n$; $t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1$ и не меняется при изменении направления оси Oy на противоположное.

Будем рассматривать только поля трех компонент скорости ветра u, v, w и температуры T (включение еще и поля влажности θ приведет лишь к появлению очевидных добавочных формул, на которых не стоит задерживаться). Эти поля можно представить в виде

$$u = \bar{u}(z) + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad T = \bar{T}(z) + T', \tag{7.80}$$

где $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$ — обычные (неслучайные) функции от z, детально изученные в предыдущих пунктах настоящего параграфа. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь распределения вероятностей для случайных полей $u'(x, y, z, t)$, $v'(x, y, z, t)$, $w'(x, y, z, t)$ и $T'(x, y, z, t)$. При этом общая гипотеза о подобии турбулентного режима в рассматриваемой нами модели стратифицированной среды в применении к приземному слою атмосферы может быть сформулирована следующим образом: *совместное распределение вероятностей для значений безразмерных величин* u'/u_*, v'/u_*, w'/u_* *и* $T'/|T_*|$ *в точках* (x_1, y_1, z_1, t_1), ..., (x_n, y_n, z_n, t_n) *может зависеть лишь от безразмерных параметров*

$$\frac{x_2 - x_1}{|L|}, \ldots, \frac{x_n - x_1}{|L|}; \quad \frac{y_2 - y_1}{|L|}, \ldots, \frac{y_n - y_1}{|L|}; \quad \frac{z_1}{L}, \ldots, \frac{z_n}{L}; \quad \frac{(t_2 - t_1)u_*}{|L|}, \ldots, \frac{(t_n - t_1)u_*}{|L|},$$

если только выполняются следующие два условия: 1) *высоты* $z_1, \ldots, z_n$ *не слишком велики* (находятся в пределах слоя, в котором можно считать, что $u_* = \text{const}$, $q = \text{const}$, и пренебрегать влиянием силы Кориолиса) *и не слишком малы* (все много больше «высоты шероховатости» z_0, от которой рассматриваемое распределение не должно зависеть) и 2) *расстояния между любыми двумя различными точками* (x_i, y_i, z_i) *и* (x_j, y_j, z_j) *и все отличные от нуля разности* $|t_i - t_j|$ *не слишком малы* (так, чтобы на взаимодействия между пульсациями в рассматриваемых точках пространства-времени не оказывали влияния молекулярные эффекты, определяемые коэффициентами молекулярной вязкости и теплопроводности воздуха) *и не слишком велики* (чтобы не нарушались условия горизонтальной однородности и стационарности). Через L и T_* здесь обозначены те же величины (7.12) и (7.14), что и всюду в этой главе. Обоснование этой гипотезы фактически уже содержалось в рассуждениях пп. 7.1—7.2.

В качестве примера рассмотрим более детально совместное распределение вероятностей для пульсаций (u', v', w', T') в фиксированной точке (x, y, z, t) пространства-времени. Согласно сформулированной гипотезе подобия это распределение может зависеть лишь от вертикальной координаты z и его плотность вероятности $\Phi(u', v', w', T')$ может быть записана в виде

$$\Phi(u', v', w', T') = \frac{1}{u_*^3 |T_*|} \Psi\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}, \frac{T'}{|T_*|}; \frac{z}{L}\right), \tag{7.81}$$

где Ψ — универсальная функция от пяти переменных. Разумеется, функция пяти переменных является очень сложной характеристикой; поэтому существенно, что в предельных случаях сильной неустойчивости $\left(\frac{z}{L} \to -\infty\right)$ и сильной устойчивости $\left(\frac{z}{L} \to \infty\right)$, так же как и в случае безразличной стратификации $\left(\frac{z}{L} \to 0\right)$, формула (7.81) может быть упрощена. В случае безразличной стратификации $q \to 0$ и архимедовы силы не влияют на турбулентность, так что параметр g/T_0 здесь должен выпасть из соотношения (7.81). Поэтому зависимость от z/L (где L содержит g/T_0) в этом случае отсутствует, т. е. распределение вероятностей не зависит от высоты. Кроме того, при безразличной стратификации не существует и пульсаций температуры, так что зависимость Φ от T' описывается множителем $\delta(T')$ (где δ — это дельта-функция Дирака). В результате получаем

$$\Phi(u', v', w', T') \to \frac{1}{u_*^3} \Psi_1\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}\right) \delta(T') \quad \text{при} \quad \frac{z}{L} \to 0, \tag{7.82}$$

где Ψ — универсальная функция от трех переменных, описывающая распределение вероятности пульсаций скорости в точке логарифмического пограничного слоя. Предельный случай очень сильной неустойчивости (свободной конвекции) получается при $q > 0$, $u_* \to 0$, так что при этом параметр u_* должен выпасть из соотношения (7.81). Отсюда следует, что

$$\Phi(u', v', w', T') \to \varkappa^{1/3} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{-2/3} \left(\frac{q}{c_p \rho_0}\right)^{-5/3} z^{-2/3} \times \Psi_2\left(\frac{u'}{\left(\varkappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho_0} z\right)^{1/3}}, \frac{v'}{\left(\varkappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho_0} z\right)^{1/3}}, \frac{w'}{\left(\varkappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p \rho_0} z\right)^{1/3}}, \frac{T'}{\varkappa^{-4/3} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3} \left(\frac{q}{c_p \rho_0}\right)^{2/3} z^{-1/3}}\right), \tag{7.83}$$

где Ψ_2 — еще одна универсальная функция. Наконец, можно считать, что при очень сильной устойчивости турбулентные пульсации приобретают локальный характер, т. е. что их статистические свойства перестают зависеть от расстояния z до подстилающей поверхности. Поэтому следует ожидать, что при $\frac{z}{L}\to+\infty$ параметр z будет выпадать из соотношения (7.81), т. е., иначе говоря,

$$\Phi(u', v', w', T')\to\frac{1}{u_*^3|T_*|}\Psi_3\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}, \frac{T'}{T_*}\right) \text{ при } \frac{z}{L}\to\infty. \quad (7.84)$$

К сожалению, соотношения (7.82)—(7.84) все еще трудно проверяемы, поскольку многомерные распределения вероятностей вообще очень трудно надежно определить по эмпирическим данным. Поэтому мы далее ограничимся рассмотрением лишь простейших характеристик распределения (7.81), а именно — младших моментов пульсаций u', v', w', T' в фиксированной точке (x, y, z, t). Согласно общей формуле (7.13) любой одноточечный момент этих пульсаций может быть представлен в виде некоторой комбинации из параметров $\frac{g}{T_0}$, u_* и $\frac{q}{c_p\rho_0}$, умноженной на универсальную функцию от $\zeta=\frac{z}{L}$ (тот же результат, разумеется, следует и из формулы (7.81)). По определению пульсаций их средние значения равны нулю, поэтому мы сразу перейдем ко вторым моментам рассматриваемых величин. Таких моментов всего имеется десять. Однако три из них, а именно $\overline{u'v'}$, $\overline{v'w'}$ и $\overline{v'T'}$, тождественно равны нулю вследствие симметрии турбулентности относительно направления среднего ветра (в отношении моментов $\overline{u'v'}$ и $\overline{v'w'}$ об этом уже говорилось на стр. 363). Моменты $\overline{u'w'}=-u_*^2$ и $\overline{w'T'}=\frac{q}{c_p\rho_0}$ имеют постоянные значения; поэтому остается рассмотреть лишь пять моментов — дисперсии пульсаций u', v', w', T' (вместо которых нам будет удобнее рассматривать стандартные отклонения σ_u, σ_v, σ_w, σ_T) и смешанный второй момент $\overline{u'T'}$. Эти величины в силу (7.13) можно записать в виде

$$\frac{\sigma_u}{u_*}=f_3(\zeta), \quad \frac{\sigma_v}{u_*}=f_4(\zeta), \quad \frac{\sigma_w}{u_*}=f_5(\zeta),$$
$$\frac{\sigma_T}{|T_*|}=f_6(\zeta), \quad \frac{\overline{u'T'}}{u_*T_*}=f_7(\zeta). \quad (7.85)$$

Таким образом, для описания всех вторых моментов пульсаций скорости ветра и температуры достаточно определить параметры u_* и q и знать пять универсальных функций f_3, f_4, f_5, f_6 и f_7. Через них могут быть выражены, в частности, такие интересные характеристики турбулентности, как коэффициенты анизотропии σ_v/σ_u и σ_w/σ_u и коэффициенты корреляции r_{uw}, r_{wT} и r_{uT}:

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_u}=\frac{f_4}{f_3}, \quad \frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{f_5}{f_3}, \quad r_{uw}=-\frac{1}{f_3f_5},$$
$$r_{wT}=\pm\frac{\varkappa}{f_5f_6}, \quad r_{uT}=\mp\frac{f_7}{f_3f_6} \quad (7.86)$$

(в последних двух равенствах верхний знак относится к неустойчивой, а нижний — к устойчивой стратификации).

Функции $f_3(\zeta)$, ..., $f_6(\zeta)$, очевидно, являются неотрицательными при всех значениях ζ по самому их определению. Момент $\overline{u'T'}$, определяемый функцией $f_7(\zeta)$, описывает турбулентный перенос тепла по направлению среднего ветра; практически этот перенос не играет роли, и обычно им вполне можно пренебречь. При безразличной стратификации и при очень сильной неустойчивости вообще $\overline{u'T'}=0$ (см. ниже); однако при других значениях ζ функция $f_7(\zeta)$, возможно, принимает небольшие положительные значения (за счет того, что при неустойчивой стратификации неравенство $T'>0$, как правило, будет иметь место тогда, когда $w'>0$, и следовательно, при этом пульсация u' чаще будет отрицательной, а при устойчивой стратификации дело будет обстоять наоборот).

Асимптотическое поведение функций f_3, ..., f_7 при $\zeta\to-\infty$, при $\zeta\to\infty$ и при $|\zeta|\to0$ может быть установлено, исходя из формул (7.82) — (7.84), подобно тому как это было сделано выше в применении к функциям f, f_1 и f_2, описывающим осредненные профили. При возрастании неустойчивости (т. е. при $\zeta\to-\infty$) величина u_* должна выпасть из всех равенств (7.85); следовательно, функции f_3, f_4 и f_5 должны при этом возрастать асимптотически пропорционально $|\zeta|^{1/3}$, функция f_6 — стремиться к нулю асимптотически пропорционально $|\zeta|^{-1/3}$, а функция f_7 — стремиться к некоторой постоянной. Кроме того, надо еще иметь в виду, что при $u_*\to0$ и $\bar{u}(z)\to0$, т. е. турбулентность приближается к режиму, при котором в плоскости Oxy уже нет никакого выделенного направления, и пульсации u' и v' ничем не различаются между собой (режим «истинной свободной конвекции» при отсутствии средней горизонтальной скорости). Поэтому следует ожидать, что при $\zeta\to-\infty$

$$f_3(\zeta)\approx f_4(\zeta)\approx C_4|\zeta|^{1/3}, \quad f_5(\zeta)\approx C_5|\zeta|^{1/3},$$
$$f_6(\zeta)\approx C_6|\zeta|^{-1/3}, \quad f_7(\zeta)\approx0, \quad (7.87)$$

или, иначе говоря,

$$\sigma_u \approx \sigma_v \approx C_4'\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3}, \quad \sigma_w \approx C_5'\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3},$$
$$\sigma_T \approx C_6'\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3}, \quad \overline{u'T'} \approx 0 \qquad (7.87')$$

(формула (7.87′) для σ_w фактически была известна еще Прандтлю (1932а), но затем была забыта; позже она была независимо получена Обуховым (1960) вместе с формулой для σ_T. Универсальные постоянные $C_4 = C_4'\varkappa^{-1/3}$, $C_5 = C_5'\varkappa^{-1/3}$ и $C_6 = C_6'\varkappa^{4/3}$ в формулах (7.87), очевидно, могут быть определены исходя из эмпирических данных. Из (7.87) вытекает также, что в условиях свободной конвекции $\frac{\sigma_v}{\sigma_u} \approx 1$, $\frac{\sigma_w}{\sigma_u} = \text{const}$, $r_{wT} = \text{const}$, $r_{uw} \sim |\zeta|^{-2/3} \to 0$ и $r_{uT} \approx 0$. В другом предельном случае — при $\zeta \to \infty$ (т. е. при неограниченном возрастании устойчивости) — характеристики турбулентности в силу (7.84) не должны явно зависеть от координаты z. Следовательно, при $\zeta \to \infty$ все функции (7.85) (и их комбинации (7.86)) должны приближаться к некоторым постоянным. Наконец, при $|\zeta| \to 0$ исчезают пульсации температуры (см. (7.82)), и $T_* \to 0$. Поэтому величины $f_6(0)$ и $f_7(0)$ не имеют непосредственного смысла; фактически функции $f_6(\zeta)$ и $f_7(\zeta)$ следует рассматривать как состоящие из двух отдельных ветвей (при $\zeta > 0$ и при $\zeta < 0$). Что же касается постоянных $f_3(0) = A_3$, $f_4(0) = A_4$ и $f_5(0) = A_5$, то они описывают интенсивность пульсаций скорости в логарифмическом пограничном слое однородной жидкости и имеют вполне определенное значение (см. выше стр. 236, где именно эти постоянные обозначались как A_1, A_2 и A_3). При малых значениях $|\zeta|$ функции f_3, f_4 и f_5 допустимо приближенно описывать двумя членами ряда Тейлора

$$f_i(\zeta) = A_i + \beta_i\zeta, \quad i = 3, 4, 5, \qquad (7.88)$$

где коэффициенты β_i, очевидно, все отрицательны (так как турбулентный обмен ослабевает с возрастанием устойчивости).

Формулы, аналогичные (7.85) (и содержащие новые универсальные функции), могут быть написаны и для моментов более высокого порядка пульсаций u' v', w' и T'. Так, например

$$\frac{\overline{w'^3}}{u_*^3} = f_8(\zeta), \quad \frac{\overline{T'^3}}{|T_*|^3} = f_9(\zeta),$$
$$\frac{\overline{w'(u'^2 + v'^2 + w'^2)}}{u_*^3} = f_{10}(\zeta), \quad \frac{\overline{w'T'^2}}{u_*T_*^2} = f_{11}(\zeta). \qquad (7.89)$$

Функции f_8 и f_9 характеризуют асимметрию распределений вероятностей для w' и для T':

$$\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3} = \frac{f_8}{f_5^3}, \quad \frac{\overline{T'^3}}{\sigma_T^3} = \frac{f_9}{f_6^3}, \qquad (7.90)$$

а функции f_{10} и f_{11} — вертикальную диффузию турбулентной энергии и интенсивности пульсаций температуры. Исходя из представления о термической конвекции как о совокупности восходящих движений нагретого воздуха в форме сравнительно интенсивных узких струек и нисходящих движений охлажденного воздуха в форме медленного оседания значительных масс, можно ожидать, что функции $f_8, \ldots, f_{11}$ будут положительными, по крайней мере, при отрицательных ζ. Согласно (7.82)—(7.84) с ростом неустойчивости (при $\zeta \to -\infty$) функции f_8 и f_{10} должны возрастать асимптотически пропорционально $|\zeta|$, функция f_9 — убывать асимптотически пропорционально $|\zeta|^{-1}$ (так что коэффициенты асимметрии f_8/f_5^3 и f_9/f_6^3 должны стремиться к постоянным), а функция $f_{11}(\zeta)$ — убывать пропорционально $|\zeta|^{-1/3}$. С ростом устойчивости (при $\zeta \to \infty$) все функции $f_8, \ldots, f_{11}$, так же как и отношения f_8/f_5^3 и f_9/f_6^3, должны стремиться к постоянным.

Статистические характеристики производных от скорости и температуры в фиксированной точке (x, y, z, t), вообще говоря, будут уже зависеть и от коэффициентов молекулярной вязкости и температуропроводности ν и χ (напомним, что в формулировке гипотезы подобия требовалось, чтобы разности $|t_i - t_j|$ и расстояния между различными точками (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) были не слишком малы). Поэтому применение к таким характеристикам соображений размерности приводит к более сложным формулам, содержащим уже универсальные функции от нескольких переменных. Однако имеются два важных исключения из этого правила, относящихся к величинам

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nu\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2} \qquad (7.91)$$

и

$$\bar{N} = \chi\overline{(\nabla T')^2} = \chi\sum_i\overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2}. \qquad (7.92)$$

В самом деле, эти величины входят в уравнение баланса турбулентной энергии (6.46), где $\bar{\varepsilon}$ обозначалось символом $\bar{\varepsilon}_t$, и в родственное ему уравнение баланса интенсивности пульсаций температуры (см. ниже уравнение (7.106)) и с их помощью могут

быть выражены через обычные одноточечные моменты полей скорости и температуры и их производные. Следовательно, величины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{N}$ не должны явно зависеть от молекулярных констант ν и χ. Это обстоятельство не является случайным — как будет показано в гл. 8 ч. 2 настоящей книги, величины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{N}$ играют существенную роль в закономерностях крупномасштабных движений и могут быть определены по распределениям вероятностей для пульсаций гидродинамических полей в двух достаточно далеких точках. Таким образом, для описания зависимости величин $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{N}$ от высоты z в приземном слое атмосферы можно воспользоваться обычной формулой теории подобия (7.13), не содержащей ν и χ. А именно, можно положить

$$\bar{\varepsilon}=\frac{u_*^3}{\varkappa z}\varphi_\varepsilon(\zeta),\quad \bar{N}=\frac{\varkappa u_* T_*^2}{z}\varphi_N(\zeta), \tag{7.93}$$

где φ_ε и φ_N — новые универсальные функции. При $|\zeta|\to 0$ функции φ_ε и φ_N будут стремиться к конечным пределам $\varphi_\varepsilon(0)=1$ (так как здесь $\bar{\varepsilon}=u_*^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$; см. выше стр. 344) и $\varphi_N(0)$; кроме того, $\varphi_\varepsilon(\zeta)\sim|\zeta|$ и $\varphi_N(\zeta)\sim|\zeta|^{-1/3}$ при $\zeta\to-\infty$.

Значительно более сложный вид имеют формулы для моментов пульсаций в нескольких точках, которые, очевидно, во всех случаях будут содержать универсальные функции от нескольких переменных. Так, например, двухточечные моменты пульсаций гидродинамических полей в точках (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в один и тот же момент времени t будут, вообще говоря, зависеть от четырех переменных $\frac{z_1}{L}$, $\frac{z_2}{L}$, $\frac{x_2-x_1}{L}$ и $\frac{y_2-y_1}{L}$. Экспериментальное определение функций от четырех переменных представляется в настоящее время практически безнадежным; поэтому большой интерес представляют условия, при которых число переменных в формулах для двухточечных моментов может быть уменьшено. Таким условием является, в частности, условие $-\zeta>\zeta_1$, где ζ_1 — положительное число, определяющее нижнюю границу интервала значений $|\zeta|$, для которых турбулентный режим является режимом свободной конвекции (о порядке величины числа ζ_1 мы будем говорить в следующем параграфе). При этом условии можно считать, что $u_*=0$, так что из параметров задачи здесь уже нельзя составить никакого конечного масштаба длины. Кроме того, в этом случае в плоскости Oxy нет выделенного направления, так что все скалярные (т. е. не зависящие от ориентации координатных осей) двухточечные моменты могут зависеть только от $r_0=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}$, но не от x_2-x_1 и y_2-y_1 по отдельности. Из величин z_1, z_2 и r_0 можно составить две безразмерные комбинации,

в качестве которых можно выбрать, например z_2/z_1 и $r_0/\sqrt{z_1z_2}$ (или z_2/z_1 и $r/\sqrt{z_1z_2}$, где $r=[r_0^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Поэтому в условиях свободной конвекции все скалярные двухточечные моменты будут равны некоторым комбинациям из параметров g/T_0, $q/c_p\rho_0$ и $z=\sqrt{z_1z_2}$, умноженным на универсальные функции от z_2/z_1 и r_0/z (или от z_2/z_1 и r/z). В частности,

$$\overline{w'(x_1, y_1, z_1, t)\,w'(x_2, y_2, z_2, t)}=\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{2/3}(z_1z_2)^{1/3}R_1\left(\frac{z_2}{z_1},\ \frac{r}{\sqrt{z_1z_2}}\right),$$

$$\overline{u'(x_1, y_1, z_1, t)\,u'(x_2, y_2, z_2, t)}=\overline{v'(x_1, y_1, z_1, t)\,v'(x_2, y_2, z_2, t)}=\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{2/3}(z_1z_2)^{1/3}R_2\left(\frac{z_2}{z_1},\ \frac{r}{\sqrt{z_1z_2}}\right), \tag{7.94}$$

$$\overline{T'(x_1, y_1, z_1, t)\,T'(x_2, y_2, z_2, t)}=\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{4/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-2/3}(z_1z_2)^{-1/3}R_3\left(\frac{z_2}{z_1},\ \frac{r}{\sqrt{z_1z_2}}\right),$$

где R_1, R_2 и R_3 — универсальные функции от двух переменных (эти формулы были указаны Обуховым (1960)).

Задача экспериментального определения функций от двух переменных представляется также достаточно сложной, но уже не безнадежной. Замечательно, однако, что в некоторых случаях удается теоретически предсказать форму зависимости соответствующих функций двух переменных от одного из них, а для ряда статистических характеристик вообще свести всю неопределенность, имеющуюся в теоретических формулах, к неопределенности в выборе числового коэффициента. Для этого надо только использовать дополнительные соображения о подобии, относящиеся к совсем другому классу турбулентных течений, включающему атмосферную турбулентность в качестве частного случая. Рассмотрению такого подобия будет посвящена основная часть гл. 8 в ч. 2; поэтому дальнейший анализ формул типа (7.94) мы отложим до ч. 2 настоящей книги.

Как и в случае функций f, f_1 и f_2, ряд дополнительных результатов относительно функций $f_3, \ldots, f_{10}$, φ_ε и φ_N (не являющихся уже точными) можно получить с помощью различных вариантов полуэмпирической теории турбулентности. Так, например, Казанский и Монин (1957) (см. также Монин (1959а)), исходя из уравнения баланса турбулентной энергии (6.47), дополненного еще некоторыми полуэмпирическими гипотезами, получили для функции $f_5(\zeta)$ приближенное соотношение вида

$$f_5(\zeta)=A_5\left[1-\frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}, \tag{7.95}$$

где $A_5=f_5(0)$ — эмпирическая постоянная. Те же соображения, примененные к уравнению баланса турбулентной энергии в форме (6.47′), приводят к соотношению

$$f_5(\zeta)=A_5\left[1-\frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}, \tag{7.95′}$$

содержащему еще одну эмпирическую постоянную σ. Позже Пановский и Мак-Кормик (1960) выдвинули гипотезу, приведшую их к выводу, что

$$f_5(\zeta)=A_5\left[\zeta f'(\zeta)+B\zeta\right]^{1/3}, \tag{7.96}$$

где B — новая эмпирическая постоянная, а Бюсингер (1959) и Манн (1961) с помощью двух разных предположений о пути перемешивания в стратифицированной среде получили формулы

$$f_5(\zeta)=\left\{\frac{\sigma+\left[\sigma^2+4\left(f'(\zeta)-\sigma\right)^2\right]^{1/2}}{2f'(\zeta)}\right\}^{1/2} \tag{7.97}$$

(σ — тот же коэффициент, что и в (7.75)) и соответственно

$$f_5(\zeta)=-A_5\frac{f''(\zeta)}{\left[f'(\zeta)\right]^2}. \tag{7.98}$$

Соотношение (7.98) с $A_5=1$ (что противоречит эмпирическим данным) использовал также Иокояма (1962а). Для функции $f_6(\zeta)$ Пристли (1960б) и Пановский (1961б) использовали полуэмпирическое соотношение

$$f_6(\zeta)=A_6\alpha_0\zeta f_1'(\zeta), \quad A_6=f_6(0). \tag{7.99}$$

Монин (1965) рассмотрел полную систему динамических уравнений для одноточечных вторых моментов скорости и температуры и пренебрег в ней слагаемыми, описывающими вертикальный перенос рассматриваемых величин (т. е., в частности, всеми слагаемыми, содержащими третьи моменты), а пульсации давления исключил с помощью простой полуэмпирической гипотезы типа (6.10) и (6.12). При этом он получил приближенное соотношение

$$\left[f_3^2(\zeta)-f_4^2(\zeta)\right]f_5^2(\zeta)\approx 2, \tag{7.100}$$

связывающее значения функций f_3, f_4 и f_5 (и при $\zeta=0$ хорошо подтверждающееся эмпирическими данными, приведенными на стр. 236). Приняв, далее, еще некоторые полуэмпирические гипотезы (типа гипотезы о постоянстве коэффициента c в формуле (6.27)), он смог выразить коэффициенты анизотропности $f_3(\zeta)/f_4(\zeta)$ и $f_5(\zeta)/f_4(\zeta)$ через $\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$ и известные из экспериментов постоянные $A_3=f_3(0)$, $A_4=f_4(0)$ и $A_5=f_5(0)$ (причем оказалось, что при сделанных предположениях дисперсии σ_u, σ_v и σ_w могут быть все положительными, лишь если $C_2=1/R\geqslant 5{,}5$). Еще одно полуэмпирическое соотношение, связывающее функции $\varphi(\zeta)$, $f(\zeta)$ и $f_5(\zeta)$, было предложено Пандольфо (1963). Использовав некоторые довольно грубые гипотезы, Панчев (1961) получил следующие связи между коэффициентами C_1, C_5' и C_6' формул (7.36) и (7.87′):

$$C_6'=\frac{1}{C_5'}=\left(\frac{C_1}{6}\right)^{1/4} \tag{7.101}$$

(из которых, в частности, следует, что при свободной конвекции $r_{wT}=1$, в прямом противоречии с эмпирическими данными рис. 79 на стр. 457).

Связь между универсальными функциями $\varphi_\varepsilon(\zeta)$, $f(\zeta)$ и $f_{10}(\zeta)$ можно получить из уравнения баланса турбулентной энергии (6.46): согласно этому уравнению

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\zeta f'(\zeta)-\zeta-\frac{\varkappa}{2}\zeta f_{10}'(\zeta) \tag{7.102}$$

(см. Монин (1958)). Соотношение (7.102) является точным в той степени, в какой является законным пренебрежение вертикальным переносом энергии турбулентности, обусловленным работой сил давления и сил вязкого трения. Если же мы вообще пренебрежем вертикальной диффузией энергии (т. е. примем уравнение (6.47)), то получим

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\zeta f'(\zeta)-\zeta. \tag{7.103}$$

а если будем считать эту диффузию пропорциональной величине $\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho}$ (т. е. примем уравнение (6.47′)), то будем иметь соотношение

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\zeta f'(\zeta)-\sigma\zeta. \tag{7.103′}$$

Разумеется, оба соотношения (7.103) и (7.103′) являются менее точными, чем (7.102). Вспомнив асимптотические формулы (7.33) и (7.39) для функции $f(\zeta)$ и исходя, например, из соотношения (7.103′), находим

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\begin{cases}-\sigma\zeta=\dfrac{\sigma z}{|L|} & \text{при } \zeta\to-\infty,\\ 1+(\beta-\sigma)\zeta & \text{при } |\zeta|\ll 1.\end{cases} \tag{7.104}$$

Таким образом, согласно формуле (7.103′), при стратификации, близкой к безразличной, $\bar{\varepsilon}\approx\dfrac{u_*^3}{\varkappa z}$; при сильной же неустойчивости $\bar{\varepsilon}\approx\sigma\dfrac{g}{T_0}\left|\dfrac{q}{c_p\rho}\right|$, т. е. перестает зависеть от высоты (те же результаты, но уже с неопределенными числовыми коэффициентами получаются из одних только соображений размерности).

Подобные же соотношения можно вывести и для функции $\varphi_N(\zeta)$; при этом надо только принять за основу уравнение

$$\frac{\partial T^2}{\partial t}+\frac{\partial uT^2}{\partial x}+\frac{\partial vT^2}{\partial y}+\frac{\partial wT^2}{\partial z}=\chi\Delta(T^2)-2\chi(\nabla T)^2, \tag{7.105}$$

получающееся из уравнения теплопроводности (7.8′) после умножения всех его членов на $2T$. Подвергнув уравнение (7.105) операции осреднения и учитывая однородность по горизонтали и стационарность турбулентности, мы получим следующее уравнение баланса интенсивности температурных неоднородностей:

$$\frac{\partial\overline{wT^2}}{\partial z}=\chi\frac{\partial^2\overline{T^2}}{\partial z^2}-2\overline{N}-\chi\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right)^2, \tag{7.106}$$

или, иначе,

$$\overline{N}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi\frac{\partial\overline{T^2}}{\partial z}-\overline{w'T'^2}-2\overline{w'T'}\cdot\overline{T}\right)-\chi\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right)^2, \tag{7.106′}$$

где, как обычно, $\overline{N}=\chi(\overline{\nabla T'})^2$. Пренебрегая здесь эффектом молекулярной теплопроводности (первый член в скобках в правой части и последний член в правой части), получаем соотношение

$$\varphi_N(\zeta)=\zeta f_1'(\zeta)-\frac{1}{2\varkappa}\zeta f_{11}'(\zeta). \tag{7.107}$$

Если, кроме того, мы пренебрежем и вертикальной диффузией пульсаций температуры (второй член в скобках в правой части (7.106′)), то получим

$$\varphi_N(\zeta) = \zeta f_1'(\zeta). \tag{7.108}$$

Функция (7.108) обладает свойствами

$$\varphi_N(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\varkappa^{4/3}}{3} C_1 |\zeta|^{-\frac{1}{3}} & \text{при } \zeta \to -\infty, \\ \dfrac{(1+\beta\zeta)}{\alpha_0} & \text{при } |\zeta| \ll 1. \end{cases} \tag{7.109}$$

Следовательно, в этом приближении при стратификации, близкой к безразличной, $\overline{N} \approx \dfrac{\varkappa u_* T_*^2}{\alpha_0 z}$, а при сильной неустойчивости $\overline{N}$ убывает с высотой по закону

$$\overline{N} \approx \frac{C_1}{3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{4}{3}}. \tag{7.110}$$

Однако поведение $\varphi_N(\zeta)$ при $\zeta \to +\infty$ нельзя указать, не зная, как ведет себя функция $\alpha(\zeta) = f'(\zeta)/f_1'(\zeta)$ при больших положительных значениях ζ.

Разумеется, о формулах (7.95)—(7.101), (7.103), (7.104) и (7.108)—(7.110) можно повторить все то, что выше говорилось по поводу аналогичных полуэмпирических соотношений, относящихся к функциям f, f_1 и f_2: все они являются лишь некоторыми приближениями, степень точности и область применимости которых должна быть выяснена путем их проверки на доброкачественном эмпирическом материале. В настоящее время эмпирические данные о пульсациях еще очень неполны; при этом, однако, полуэмпирические формулы все же могут иметь заметную ценность, так как они во многих случаях помогают оценить с неплохой точностью порядок величины соответствующих статистических характеристик и дают общую ориентировку при обработке результатов имеющихся сравнительно грубых наблюдений.

§ 8. СОПОСТАВЛЕНИЕ ВЫВОДОВ ТЕОРИИ С ДАННЫМИ ИЗМЕРЕНИЙ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

8.1. Профили скорости ветра в приземном слое атмосферы

Перейдем теперь к вопросу о сопоставлении данных непосредственных измерений метеорологических величин в приземном слое атмосферы с теоретическими выводами § 7. Начнем с простейших измерений средней скорости ветра на различных высотах z, многократно производившихся в разных точках земной поверхности с помощью тех или иных анемометров (многие из которых описаны, например, в книгах Мидлтона и Спилхауса (1953), Кедроливанского и Стернзата (1953) и Леттау и Дэвидсона (1957)). Как уже указывалось на стр. 246—247, в случае сравнительно ровной подстилающей поверхности и температурной стратификации, близкой к безразличной, эмпирические данные о профиле скорости ветра в нижнем слое атмосферы достаточно хорошо описываются логарифмической формулой (5.31). Однако при наличии заметных градиентов температуры зависимость скорости ветра $\bar{u}(z)$ от $\ln z$ (данные о которой можно найти, например, у Торнтвейта и Кейзера (1943), Щербаковой (1949), Дикона (1949), Паскуила (1949), Монина (1953) и в ряде других работ) обнаруживает закономерные отклонения от простой линейной зависимости. При этом при неустойчивой стратификации возрастание $\bar{u}(z)$ с ростом $\ln z$ всегда оказывается более медленным, чем линейное, а при устойчивой стратификации более быстрым. В качестве типичных примеров мы приводим на рис. 53 (заимствованной из работы Монина (1953)) осредненные профили, полученные в 1951 г. при измерениях скорости ветра (и температуры) в условиях открытой степи в Казахстане на высотах 0,5, 1, 2, 4, 8 и 15 *м*. Шесть кривых на рис. 53 были получены при помощи осреднения 61 индивидуальных профилей скорости ветра по шести группам, однородным в отношении устойчивости, характеризуемой значениями параметра

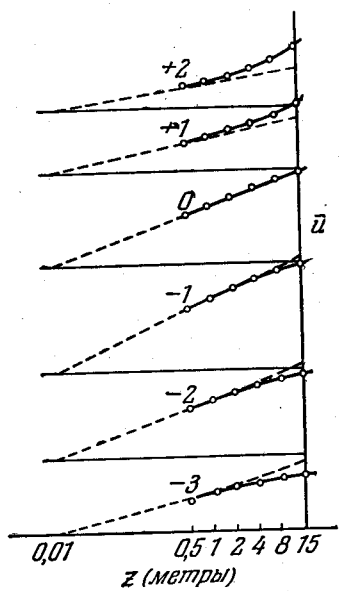


Рис. 53. Эмпирические профили средней скорости ветра в приземном слое при различных термических стратификациях.

$$B_1 = \frac{g}{T_0}\frac{\overline{T}(2) - \overline{T}(0{,}5)}{\overline{u}^2(1)}, \tag{8.1}$$

где T_0 — стандартная температура, а цифры в скобках указывают высоту (в метрах) точки наблюдения. Число случаев, вошедших в каждую группу, и соответствующее среднее значение параметра B_1 приведены в таблице на стр. 410 вместе с качественной характеристикой отдельных групп. Мы видим, что, действительно, лишь при безразличной стратификации профиль скорости ветра хорошо описывается логарифмической формулой (т. е. изображается на рис. 53 прямой линией). Во всех же остальных случаях на достаточно больших высотах наблюдаются отклонения от логарифмического закона, качественно согласующиеся с теоретическими предсказаниями предыдущего параграфа. В то же время на малых высотах профили скорости ветра при всех

Шифр группы	Число случаев	$100B_1$	Качественная характеристика
—3	8	—0,52	Сильная неустойчивость
—2	19	—0,24	Умеренная неустойчивость
—1	7	—0,11	Слабая неустойчивость
0	10	—0,01	Безразличная стратификация
1	11	0,17	Слабая устойчивость
2	6	0,56	Умеренная устойчивость

значениях B_1 могут быть приближенно аппроксимированы формулой вида $\bar{u}(z)=A\ln\frac{z}{z_0}$ с одним и тем же значением «высоты шероховатости» z_0 (наиболее надежно устанавливаемым, разумеется, по профилям при стратификации, близкой к безразличной); в условиях, к которым относится рис. 53, эта высота оказалась близкой к 1 *см*.

Согласно выводам из теории подобия, изложенным в § 7, изменения скорости ветра с высотой во всех случаях должны определяться универсальной функцией $f(\zeta)$ от безразмерной высоты $\zeta=\frac{z}{L}$, где $L=-c_p\rho_0T_0u_*^3/\varkappa gq$. Для непосредственной проверки этого результата и установления точного вида функции $f(\zeta)$ надо иметь наряду со значениями $\bar{u}(z)$ также и значения величин $u_*=\left(\frac{\tau}{\rho_0}\right)^{1/2}$ и q, позволяющие подсчитать масштаб L. Однако непосредственные измерения турбулентных потоков τ и q в приземном слое атмосферы (о которых мы еще специально будем говорить в п. 8.3) начали производиться лишь сравнительно недавно и до сих пор являются относительно немногочисленными и довольно неточными. Поэтому первая эмпирическая проверка общей формулы (7.24), содержащей функцию $f(\zeta)$, позволившая впервые построить примерный график этой функции, была произведена Мониным и Обуховым (1953, 1954) иным путем. В основу этой проверки были положены обширные данные (полученные во время четырех экспедиций, работавших в 1945, 1947, 1950 и 1951 гг. в различных районах СССР) об одних только профилях ветра и температуры при разных метеорологических условиях. Далее, было предположено, что имеют место формулы (7.24) и, кроме того, были приняты еще некоторые добавочные предположения о виде функций $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$. Хорошая согласованность между собой результатов обработки имеющихся данных, исходящей из этих предположений, в известной мере подтвердила их справедливость и показала, что найденные таким образом эмпирические

значения функции $f(\zeta)$ являются разумным первым приближением.

Добавочные предположения о профилях ветра и температуры, принятые в упомянутых работах Монина и Обухова, состояли в допущении законности «логарифмической + линейной» аппроксимации (7.33) функции $f(\zeta)$ при описании профиля ветра в нижних четырех метрах и в том, что профиль температуры в этом слое предполагается подобным профилю ветра. Исходя отсюда, все профили ветра, полученные в упомянутых четырех экспедициях, в пределах нижних четырех метров аппроксимировались формулой вида

$$\bar{u}_i(z)=A_i(\lg z+D)+C_iz, \qquad (8.2)$$

где i — номер профиля, а A_i, C_i и D — эмпирические коэффициенты (определявшиеся по методу наименьших квадратов). Так как все измерения относились к высотам $z\gg z_0$, то коэффициент D предполагался одинаковым для всех профилей, относящихся к одному и тому же месту наблюдения (т. е. для каждой из четырех экспедиций), и равным $-\lg z_0$, где z_0 — шероховатость. Значения же коэффициентов A_i и C_i позволяли найти для каждого профиля величины $\frac{u_*}{\varkappa}$ и $\frac{\beta}{L}$ по формулам

$$\frac{u_*}{\varkappa}=\frac{A_i}{\ln 10}; \qquad \frac{\beta}{L}=\frac{C_i\ln 10}{A_i}. \qquad (8.3)$$

Далее, для каждого профиля вычислялось эмпирическое значение параметра устойчивости $B_1=\frac{g}{T_0}\frac{\bar{T}(2)-\bar{T}(0{,}5)}{\bar{u}^2(1)}$, которое в силу (7.33) и предположения о подобии профилей $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$ считалось равным следующему выражению:

$$B_1=\frac{g}{T_0}\frac{\varkappa^2T_*}{u_*^2}\frac{\ln 4+\frac{3}{2}\frac{\beta}{L}}{\left(\ln\frac{1}{z_0}+\frac{\beta}{L}\right)^2}=\frac{1}{\beta}\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right), \qquad \Phi(t)=\frac{t\left(\ln 4+\frac{3}{2}t\right)}{\left(\ln\frac{1}{z_0}+t\right)^2}.$$

Зная $z_0=10^{-D}$, можно было определить и число β как коэффициент регрессии совокупности значений $\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right)$ (где $\frac{\beta}{L}$ бралось из (8.3)) на эмпирические значения B_1. При этом выяснилось, что $\beta\approx 0{,}6$, причем корреляция между значениями $\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right)$ и B_1 была достаточно высокой. По значениям $\frac{u_*}{\varkappa}$ и $L=\frac{0{,}6}{\beta/L}$ и всем данным об $\bar{u}(z)$ была построена эмпирическая функция

$$f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{\varkappa}{u_*}\left[\bar{u}(z)-\bar{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)\right], \qquad (8.4)$$

где знак плюс соответствует устойчивой, а знак минус — неустойчивой стратификации (значение $\bar{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)$ при этом определялось интерполяцией измеренных значений $\bar{u}(z)$). Полученные

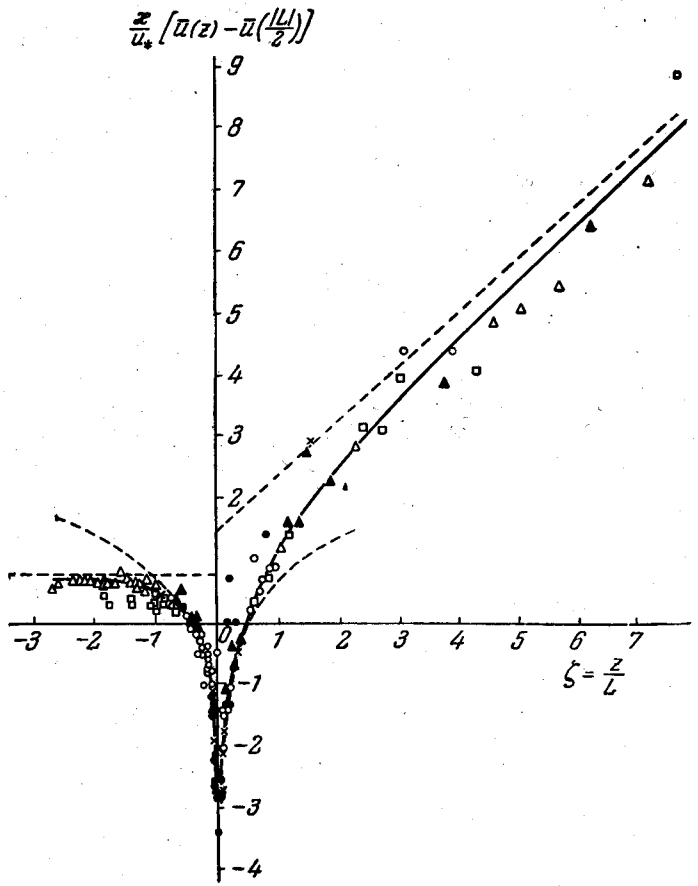


Рис. 54. Эмпирический график функции $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ по Монину и Обухову (1953, 1954).

Разными значками на рисунке отмечены данные, полученные в разных экспедициях.

результаты изображены на рис. 54; они позволяют построить эмпирическую функцию $f(\zeta)$ на интервале $-3<\zeta<6$. Мы видим, что несмотря на неточность измерений скорости ветра и сравнительную грубость использованного приближенного

метода определения величин $\frac{u_*}{\varkappa}$ и L, эмпирические точки ложатся на гладкую кривую (состоящую из двух ветвей) с весьма небольшим разбросом (кроме, пожалуй, случаев больших положительных значений ζ, для которых разброс оказывается довольно значительным). Тем самым полученный график подтверждает существование универсальной функции $f(\zeta)$, определяющей зависимость скорости ветра от высоты. Мы видим также, что эмпирическая функция $f(\zeta)$ в целом согласуется со схематическим графиком рис. 48, т. е. оказывается обладающей рядом асимптотических свойств, теоретически предсказанных в предыдущем параграфе: при условиях, близких к безразличной стратификации (малые $|\zeta|$), она близка к функции $\ln|\zeta|+\text{const}$, при сильной неустойчивости ($\zeta\ll-1$) — асимптотически приближается к постоянной, а при сильной устойчивости ($\zeta\gg1$) — возрастает приблизительно как линейная функция (на рис. 54 эти три асимптоты изображены пунктирными линиями). Заметим тут же, что, как показали последующие исследования, значения функции $f(\zeta)$, найденные в первых работах Монина и Обухова, при $\zeta\leqslant0$ оказались довольно точными, но при $\zeta>0$ они сильно занижены (на самом деле график $f(\zeta)$, по-видимому, поднимается вверх при возрастании ζ значительно круче, чем это изображено на рис. 54).

В дальнейшем графики, аналогичные приведенному на рис. 54, неоднократно строились также и на основе другого эмпирического материала, причем результаты обычно оказывались близкими к полученным Мониным и Обуховым. Так, Перепелкина (1959б) использовала данные тщательных измерений профилей ветра и температуры при $z\leqslant2$ м, опубликованные Паскуиллом (1949) и Райдером (1954), для детального исследования поведения функции $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ при $|\zeta|<\frac{1}{2}$. Позже она обработала таким же образом и данные наблюдений над профилями ветра и температуры до высоты 70 м, проводившиеся летом и осенью 1960—1961 гг. на специальной 70-метровой вышке в степи вблизи пос. Цимлянское. Аналогичный рис. 54 график функции $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ при $\frac{1}{4}<|\zeta|<\frac{3}{2}$ и отдельный детальный график функции $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{10}\right)$ при $|\zeta|<0{,}3$, полученные при помощи обработки, близкой к описанной выше, данных наблюдений над профилями ветра и температуры, проводившихся в 1960—1962 гг. на 45-метровой телевизионной вышке около Токио, опубликовал Шиотани (1962). После того как появились данные непосредственных измерений величин u_* и q, естественно было также попытаться построить график, аналогичный

рис. 54, на котором значения L определялись бы по результатам таких измерений (одновременных с измерениями профилей) без привлечения каких бы то ни было специальных гипотез. Такое построение в применении к данным, полученным в 1962 и 1963 гг. в районе пос. Цимлянское, было выполнено Гурвичем (см. ниже рис. 55 и 56).

Графики функции $f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$, приведенные на рис. 54, очень наглядны и дают хорошее представление об общем ходе зависимости скорости ветра от высоты при неустойчивой и при устойчивой стратификации. Однако для количественной оценки отклонений функции $f(\zeta)$ от логарифмической функции при малых значениях $|\zeta|$ и ее отклонений от постоянной при больших отрицательных значениях ζ эти графики мало удобны, так как соответствующие части эмпирической кривой на таких графиках оказываются сильно сжатыми. Поэтому ряд исследователей использовал преобразования графика рис. 54 или же преобразования самой эмпирической функции $f(\zeta)$, оказывающиеся более удобными в том или ином отношении. Так, например, Пристли (1959а) преобразовал часть рис. 54, отвечающую отрицательным значениям ζ (т. е. неустойчивой стратификации), заменив линейную шкалу безразмерных высот $\zeta=\frac{z}{L}$ логарифмической шкалой. При таком преобразовании отклонения функции $f(\zeta)$ от логарифмической функции при малых $|\zeta|$ стали значительно более заметными, и, в частности, стало видно, что даже при $\zeta\approx-0{,}05$ эти отклонения оказываются довольно значительными (хотя на рис. 54 кажется, что сплошная и пунктирная кривые при $|\zeta|<0{,}5$ не различаются друг от друга). Аналогичные графики (но с заменой значения $\bar{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)$ значением $\bar{u}\left(\frac{|L|}{10}\right)$, во многих случаях проще определяющимся по измеренным значениям $\bar{u}(z)$) были позже опубликованы также Р. Тэйлором (1960а), использовавшим данные измерений Райдера (1954) и Суинбенка (1955), и Такеучи (1961), обработавшим собранный в монографиях Леттау и Дэвидсона (1957) и Бареда (1958) обширный материал наблюдений в степи вблизи О'Нейла (штат Небраска, США), проводившихся в 1953 и 1956 гг. При этом Р. Тэйлор определял значения $\frac{u_*}{\varkappa}$ и L по данным измерений величин $\tau=\rho_0 u_*^2$ и q, производившихся Райдером и Суинбенком, в то время как Такеучи использовал для этой цели аппроксимацию профилей и ветра и температуры функциями вида (8.2) и формулы (7.33) и (7.47) (с $\alpha_0=1$,

$\beta_1=\beta$). Одновременно Такеучи на большом материале сравнил получающиеся таким образом значения L со значениями, получающимися при применении близкого по идее (но различающегося деталями) метода Монина и Обухова (1953, 1954) и при использовании измеренных значений u_* и q. Согласно полученным им результатам все три перечисленных метода определения L приводят к сравнительно близким значениям, которые

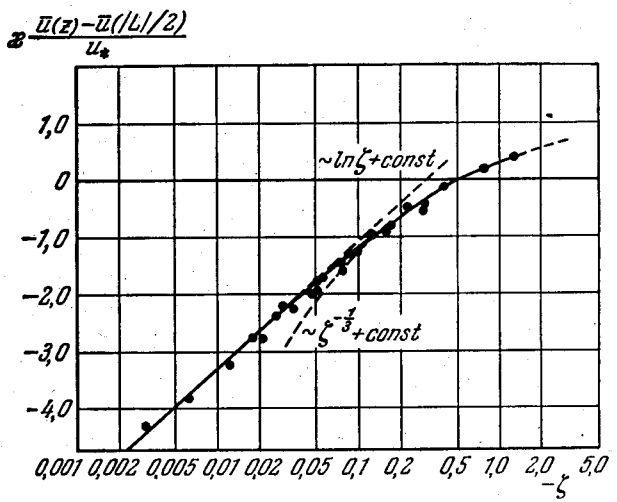


Рис. 55. Эмпирический график функции $f(\zeta)-f\left(-\frac{1}{2}\right)$ при $\zeta<0$ по данным Гурвича (1965).

в пределах точности существующих метеорологических наблюдений во многих случаях можно считать практически эквивалентными. Наконец, Гурвич (1965) построил такие же графики по данным одновременных измерений профиля ветра, турбулентного потока тепла и напряжения трения, проводившихся летом 1962 и 1963 гг. вблизи пос. Цимлянское (см. рис. 55 и 56, точки на которых соответствуют данным, осредненным по ряду измерений). Значения функции $f(\zeta)$ при $\zeta\leqslant 0$, найденные Р. Тэйлором, Такеучи и Гурвичем, в общем неплохо согласуются между собой и со значениями, ранее полученными Мониным и Обуховым. Если, однако, принять за основу данные проводившихся в последние годы в Австралии измерений профилей скорости ветра (и температуры) и величин q и τ, указанные Суинбенком (1964) и Пристли (1963—1964), то получающаяся универсальная функция $f(\zeta)$ оказывается несколько

отличной от той, которая изображена на рис. 55. В частности, согласно Суинбенку функция $\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$ при $\zeta \leqslant 0$ неплохо описывается простой полуэмпирической формулой (7.73), а данные других авторов этого не подтверждают (см., например, Баред (1963)). По-видимому, это расхождение связано с какими-то инструментальными ошибками измерений; однако окончательное его разъяснение требует проведения дополнительных исследований.

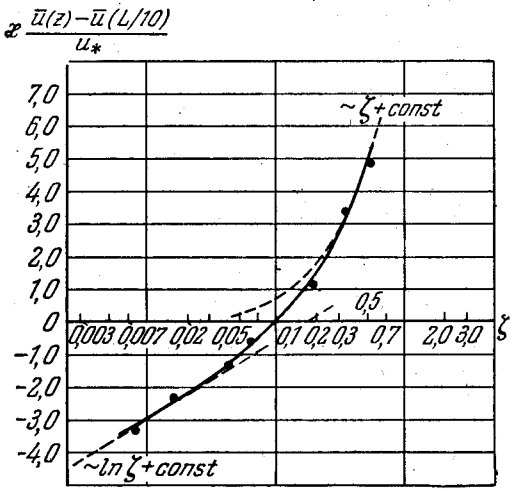


Рис. 56. Эмпирический график функции $f(\zeta) - f\left(\frac{1}{10}\right)$ при $\zeta > 0$ по данным Гурвича (1965).

Что же касается данных, относящихся к положительным значениям ζ (т. е. к устойчивой стратификации), то здесь разброс эмпирических точек оказывается заметно большим, чем при $\zeta < 0$, а общее число имеющихся наблюдений, пригодных для определения $f(\zeta)$, заметно меньшим. Поэтому приведенный на рис. 56 график функции $f(\zeta) - f(0{,}1)$ при $\zeta > 0$ пока должен считаться лишь ориентировочным. Заметим, однако, что хотя его общая форма и согласуется с формой функции $f(\zeta)$ при $\zeta > 0$, найденной Мониным и Обуховым, численные значения этой функции здесь оказываются заметно отличающимися от найденных ранее; в частности, коэффициент C_3 в асимптотическом соотношении $f(\zeta) \approx C_3\zeta + \text{const}$ теперь уже имеет значение, близкое к 10 (вместо значения $C_3 \sim 1$, следующего из данных рис. 54).

В ряде случаев при обработке эмпирических данных за основу принимался не сам профиль ветра $\bar{u}(z)$, а значения градиента скорости ветра $\frac{\partial \bar{u}(z)}{\partial z}$. Согласно формуле (7.15′) для получения универсальной зависимости надо рассмотреть безразмерную величину

$$\frac{\varkappa z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \varphi\left(\frac{z}{L}\right), \qquad \varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta), \tag{8.5}$$

или, что то же самое, величину

$$\overset{*}{K} = \frac{K}{u_* z} = \frac{u_*}{z\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} = \frac{\varkappa}{\varphi(\zeta)}. \tag{8.6}$$

Поскольку, однако, вычисление значений $\frac{z}{L} = \zeta$ требует знания турбулентных потоков $\tau = \rho u_*^2$ и q, о последнем из которых пока имеется сравнительно мало надежных данных, то значения $\overset{*}{K}$ чаще определялись в зависимости от числа Ричардсона $\mathrm{Ri} = \frac{g}{T_0}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\alpha(\zeta) f'(\zeta)}$, являющегося однозначной функцией от ζ. Графики функции $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$ были опубликованы Райдером (1954), Диконом (1955), Эллисоном и Тэрнером (1960) и Гурвичем (1962). На рис. 57 мы приводим один из графиков Гурвича (1962), относящийся к диапазону $-0{,}005 \geqslant \mathrm{Ri} \geqslant -4$ и учитывающий также и данные Дикона (1955). Пунктиром на этом графике нанесена зависимость

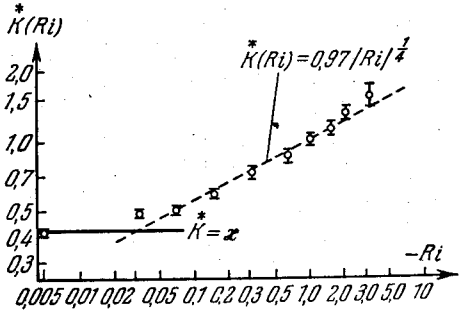


Рис. 57. Эмпирический график функции $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$ по Гурвичу (1962).

$$\overset{*}{K}(\mathrm{Ri}) = a\,|\,\mathrm{Ri}\,|^{\frac{1}{4}}; \qquad a = \left(\frac{3}{C_2}\right)^{\frac{3}{4}} \varkappa \alpha_{-\infty}^{\frac{1}{4}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{C_1^{\frac{3}{4}}\alpha_{-\infty}^{\frac{1}{2}}}, \tag{8.7}$$

отвечающая асимптотическому «закону $^1/_3$» (7.39) для условий свободной конвекции, с коэффициентом $a = 0{,}97$, найденным с помощью применения метода наименьших квадратов к совокупности данных с $\mathrm{Ri} < -0{,}05$. Сплошной линией отмечено асимптотическое значение $\overset{*}{K}(0) = \varkappa \approx 0{,}4$ функции $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$ в области применимости логарифмического закона, которое весьма точно определяется по графику функции $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$, построенному с использованием линейной шкалы чисел Ri (именно таким образом и было наиболее убедительно показано, что в атмосфере также $\varkappa \approx 0{,}4$). Значения $\mathrm{Ri} > 0$ (устойчивая стратификация) на рис. 57 отсутствуют, но вообще наблюдения при больших положительных Ri в метеорологии очень редки. Поэтому наиболее обширные данные о значениях $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$ при $\mathrm{Ri} > 0$ были

получены Эллисоном и Тэрнером (1960) в лабораторных экспериментах, в которых роль градиента температуры играл градиент солености воды (ср. ниже стр. 436). Данные Эллисона и Тэрнера, вообще говоря, характеризуются большим разбросом точек, но в целом они убедительно показывают, что и на положительной полуоси $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri})$ убывает с ростом Ri, как этого и следовало ожидать.

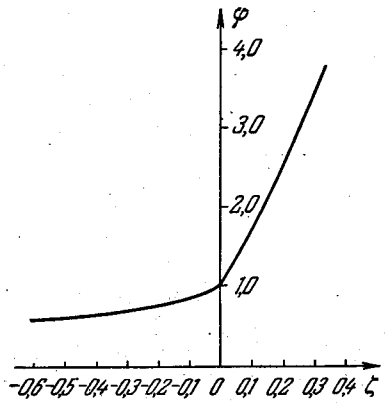


Рис. 58. Эмпирический график универсальной функции $\varphi(\zeta)$ по данным Гурвича.

Зависимость величины $\varphi = \frac{\varkappa z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ от параметра $\zeta' = \frac{z}{L'}$ $\left(\text{где } L' = u_*\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\Big/\varkappa\frac{g}{T_0}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \alpha(\zeta)L\right)$, также однозначно связанного с ζ, была изучена на большом эмпирическом материале Пановским, Блэкедаром и Маквейлом (1960). Согласно их результатам, функция $\varphi(\zeta')$ при всех отрицательных ζ' (т. е. при неустойчивой температурной стратификации) хорошо аппроксимируется решением уравнения (7.60) с $\sigma = 18$[1]). Одновременно Уэбб (1960) предложил для $\varphi(\zeta')$ следующую эмпирическую формулу:

$$\varphi(\zeta') = \begin{cases} 1 + 4{,}5\zeta' & \text{при } 0 \geqslant \zeta' \geqslant -0{,}0317, \\ 0{,}316\,(-\zeta')^{-1/3} - 0{,}00143\,(-\zeta')^{-1} & \text{при } \zeta' \leqslant -0{,}0317, \end{cases} \tag{8.8}$$

приводящую, как оказалось, при всех $\zeta' < 0$ к значениям $\varphi(\zeta')$, очень близким к тем, которые получаются из уравнения (7.60) с $\sigma = 18$ (см. Пановский (1963)). Несколько более грубый способ проверки допустимости аппроксимации функции $\varphi(\zeta)$ решением уравнения (7.60) и подбора наилучшего значения параметра σ использовал Кондо (1962а), пришедший к выводу, что $\sigma \approx 13$. На основе эмпирических данных, полученных в различные годы при измерениях вблизи пос. Цимлянское, график функции $\varphi(\zeta)$ был дважды построен Гурвичем (1962, 1965); последние его результаты приведены на рис. 58. Заметим еще, что, зная функцию $\varphi(\zeta)$ (или $f(\zeta)$), легко найти и зависимость числа Ричардсона

[1]) Поскольку $\zeta' = \zeta/\alpha(\zeta)$, уравнение (7.60) относительно $\varphi(\zeta)$ будет эквивалентно такому же уравнению относительно $\varphi(\zeta')$, лишь если $\alpha(\zeta) = \alpha = \text{const}$. При этом, очевидно, коэффициент σ в уравнении относительно $\varphi(\zeta')$ будет равен старому коэффициенту σ, умноженному на α.

$\mathrm{Rf} = \zeta/\varphi(\zeta)$ от ζ. Точно так же, зная функцию $\varphi(\zeta')$, где $\zeta' = z/L' = \zeta/\alpha(\zeta)$, легко найти зависимость обыкновенного числа Ричардсона $\mathrm{Ri} = \mathrm{Rf}/\alpha = \zeta'/\varphi(\zeta')$ от ζ'. Последняя зависимость, получающаяся по данным Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960) и Уэбба (1960) и по данным Гурвича (1962), показана на рис. 59 (для значений $\zeta' < 0$, т. е. для неустойчивой стратификации). Если считать (как это часто делается), что $\alpha(\zeta) \equiv 1$, то она будет тождественно совпадать и с зависимостью Ri от ζ. При $\zeta \to 0$ и $\mathrm{Ri} \to 0$, разумеется, $\mathrm{Rf} \sim \zeta$ и $\mathrm{Ri} \sim \zeta' \sim \frac{\zeta}{\alpha_0}$ (см. (7.28)). В области же положительных значений ζ функции $\zeta(\mathrm{Rf})$ и $\zeta'(\mathrm{Ri})$ могут быть определены еще менее точно, чем при $\zeta < 0$, так как в этой области рассеяние эмпирических точек больше, чем при $\zeta < 0$. Тем не менее, мы все же приводим на рис. 60 ориентировочный график зависимости Ri от ζ при $\zeta > 0$, построенный по данным Гурвича (1965).

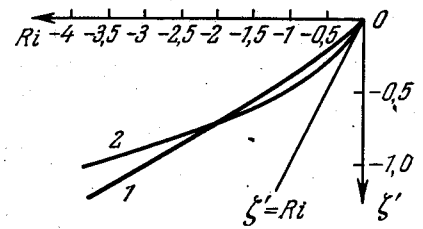


Рис. 59. Эмпирическая зависимость $\zeta' = \zeta/\alpha$ от числа Ричардсона Ri при $\mathrm{Ri} < 0$, полученная в результате осреднения данных Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960) и Уэбба (1960) (кривая *1*) и по данным Гурвича (1962) (кривая *2*).

Остановимся вкратце на эмпирической проверке асимптотических закономерностей, описывающих поведение универсальных функций при больших отрицательных, больших положительных и малых по абсолютной величине значениях ζ. Мы уже видели, что асимптотический «закон $^1/_3$» подтверждается, в частности, данными Гурвича, представленными на рис. 57, согласно которым он начинает выполняться уже при $-\zeta > 0{,}05$, причем $C_2 \approx 0{,}93\alpha_{-\infty}^{1/3}$. Более непосредственная проверка этого закона была еще раньше осуществлена Р. Тэйлором (1960а, б), который представил значения $\frac{\varkappa}{u_*}\left[\bar{u}(z) - \bar{u}\left(\frac{|L|}{10}\right)\right]$, найденные Мониным и Обуховым (1954) и подсчитанные по данным Райдера (1954), Суинбенка (1955) и Леттау и Дэвидсона (1957), в виде функции от $|\zeta|^{-1/3}$. При этом он тоже обнаружил, что уже при $-\zeta \approx 0{,}05$—$0{,}08$ соотношение (7.39), выражающее «закон $^1/_3$», выполняется довольно хорошо. Оказалось также, что данные Монина и Обухова, Суинбенка, Леттау и Дэвидсона (при обработке которых использовались три разных способа оценки длины L) хорошо согласуются друг с другом и приводят к примерно одинаковым значениям коэффициента $C_2 =$

$= C_1 x^{\frac{4}{3}} \alpha_{-\infty}$ (а именно, к значениям $C_2 \approx 1{,}3 \div 1{,}5$, так что $C_1 \approx$ $\approx 4{,}4\alpha_{-\infty}^{-1} \div 5\alpha_{-\infty}^{-1}$; см. рис. 61, где пунктирная прямая отвечает значению $C_2 = 1{,}4$), в то время как по данным Райдера $C_2 \approx 0{,}8 \div 0{,}9$ (т. е. $C_1 \approx 2{,}7\alpha_{-\infty}^{-1} \div 3\alpha_{-\infty}^{-1}$). Аналогично этому уравнение (7.60) относительно функции $\varphi(\zeta')$ с $\sigma = 18$, эмпирически полученное Пановским, Блэкедаром и Маквейлом, и формула (8.8) Уэбба также приводят к выводу, что соотношения

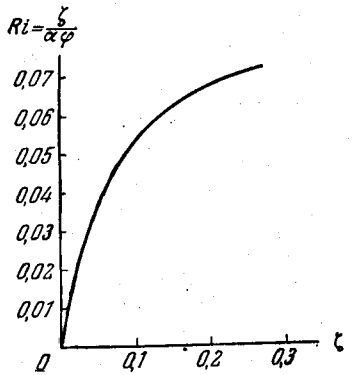


Рис. 60. Эмпирическая зависимость Ri от ζ при устойчивой стратификации по данным Гурвича (1965).

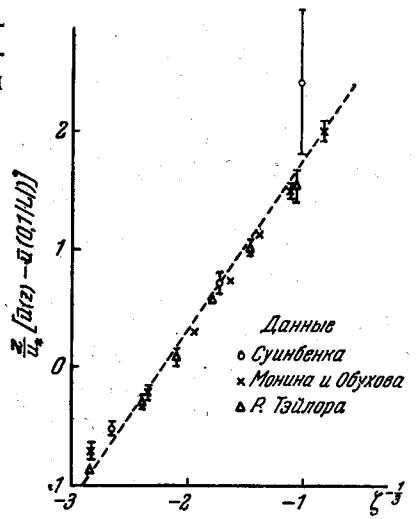


Рис. 61. Проверка «закона $^1/_3$» для профиля ветра при сильно неустойчивой стратификации (по Тэйлору (1960б)).

(8.7) и (7.39) начинают выполняться уже при сравнительно малых отрицательных значениях Ri или ζ. При этом для коэффициентов C_2 и C_1 здесь получаются такие значения: $C_2 = \frac{3\alpha_{-\infty}^{1/3}}{(18)^{1/3}} \approx 1{,}1\alpha_{-\infty}^{\frac{1}{3}}$, $C_1 \approx 3{,}8\alpha_{-\infty}^{-\frac{2}{3}}$ согласно уравнению Пановского и др. (эквивалентному соотношению $\overset{*}{K}(\mathrm{Ri}) = \varkappa(1 - 18\,\mathrm{Ri})^{\frac{1}{4}}$) и $C_2 \approx 0{,}95\alpha_{-\infty}^{\frac{1}{3}}$, $C_1 \approx 3{,}2\alpha_{-\infty}^{-2/3}$ согласно формуле Уэбба. Наконец, данные последней работы Гурвича (1965), представленные на рис. 55, также хорошо подтверждают «закон $^1/_3$» и приводят к выводу, что $C_2 \approx 1{,}4$, хорошо согласующемуся с результатами Р. Тэйлора, представленными на рис. 61. Заметим еще, что справедливость

«закона $^1/_3$» (теоретически относящегося лишь к случаю очень больших отрицательных ζ) уже при очень небольших $-\zeta$, так же как и наличие значительных отклонений функции $f(\zeta)$ от логарифмической функции уже при значениях $|\zeta|$ порядка нескольких сотых, показывают, что *толщина подслоя динамической турбулентности* (в котором термические факторы не играют заметной роли) *на самом деле составляет лишь очень небольшую долю от* $|L|$ [1]).

Менее определенные результаты получаются при проверке асимптотического закона (7.43)—(7.44), относящегося к случаю предельно устойчивой стратификации. Как уже отмечалось выше, в области больших положительных значений ζ эмпирические данные вообще хуже всего согласуются с предположением о существовании универсального подобия, определяемого одной лишь безразмерной высотой $\frac{z}{L}$. Возможно, что разброс экспериментальных точек при таких ζ объясняется сильной перемежаемостью турбулентности при устойчивой температурной стратификации, приводящей к значительной изменчивости временных средних значений, ввиду которой для получения надежных результатов здесь требуется сильно увеличить период осреднения. Какую-то роль здесь может играть и то, что мощные инверсии в приземном слое воздуха обычно сопровождаются сильным радиационным выхолаживанием, при котором метеорологические условия оказываются уже нестационарными, а q заметно меняется с высотой. Отметим, тем не менее, что еще в начале 50-х годов Райдер и Робинсон (1951) и Хелстед (1952) нашли из наблюдений, что при очень устойчивой стратификации профиль ветра обычно оказывается примерно линейным. Тот же вывод можно сделать и из наблюдений Лилиеквиста (1954), проводившихся в Антарктике, где сильные инверсии весьма обычны. Согласно Маквейлу (1964) и Уэббу (см. Ламли и Пановский (1964), стр. 117) при $0 \leqslant \zeta' \leqslant 0{,}3$, где $\zeta' = z/L'$ (см. стр. 418), функция $\varphi(\zeta')$ сравнительно хорошо представляется формулой $\varphi(\zeta') = 1 + \beta_1'\zeta'$, где $\beta_1' = 7$ по данным Маквейла (обработавшего результаты наблюдений, проводившихся вблизи О'Нейла в США и на станции «Южный Полюс» в Антарктике) и $\beta_1' \approx 4{,}5$ по данным Уэбба. Исходя отсюда, Уэбб высказал предположение, что функция $\varphi(\zeta)$ при всех положительных

[1]) С этой точки зрения традиционное включение в знаменатель выражения (7.12) для масштаба L постоянной Кармана $\varkappa$, приводящее к дополнительному увеличению этого масштаба в 2,5 раза, представляется не очень удачным.

значениях ζ должна неплохо аппроксимироваться выражением

$$\varphi(\zeta) = 1 + \beta_1 \zeta = \frac{1}{1 - \beta_1 \mathrm{Rf}},$$

имеющим правильное асимптотическое поведение и при $\zeta \to +\infty$, и при $\zeta \to 0$. Если еще принять, что при степени устойчивости, характерной для приземных инверсий, α лишь немного отличается от единицы, то надо будет считать, что коэффициент β_1 по порядку величины близок к C_3. Наконец, данные Гурвича (1965), представленные на рис. 56, как будто бы показывают, что $\varphi(\zeta) \sim C_3\zeta + \text{const}$ при $\zeta \geqslant 0{,}3$, где $C_3 \approx 10$ (заметим только, что точность этих данных заметно ниже точности данных той же работы, относящихся к неустойчивой стратификации). Таким образом, имеющиеся в настоящее время эмпирические данные все неплохо согласуются с предположением, что при сильной устойчивости имеют место асимптотические закономерности (7.43)—(7.44) с $C_3 \approx 5 \div 10$. Отметим в этой связи, что данные лабораторных экспериментов Эллисона и Тэрнера (по поводу которых см. ниже стр. 436) также приводят к выводу, что значение постоянной $R = \mathrm{Rf}_{cr}$, по-видимому, заключается между 0,10 и 0,15, так что $C_3 = 1/R \approx 7 \div 10$. Однако для более точного определения значения этой постоянной (и для более полного выяснения условий, при которых «линейный закон» (7.44) имеет место) требуется еще организация специальных тщательных метеорологических наблюдений в условиях сильных инверсий и проведение дополнительных лабораторных опытов.

Наконец, значение постоянной β в формулах (7.32)—(7.33), определяющей поведение функций $\varphi(\zeta)$ и $f(\zeta)$ при малых $|\zeta|$, оказывается весьма неопределенным — оно сильно зависит от выбора интервала значений ζ, по которому это значение находится. Мы уже указывали, что в работе Монина и Обухова (1954) было найдено, что $\beta \approx 0{,}6$ приводит к неплохой аппроксимации профиля ветра в нижнем четырехметровом слое «логарифмической + линейной» функцией. Этот результат был позже подтвержден также Пановским, Блэкедаром и Маквейлом (1960), использовавшими аппроксимацию вида (7.32) для сравнительно широкого диапазона отрицательных значений ζ. В то же время некоторые авторы, определявшие β фактически с помощью формулы $\beta = \left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\varkappa z}{u_*}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)\right]_{\zeta=0}$, получили значительно большие значения β, порядка нескольких единиц или даже порядка 10 (см., например, эмпирическую формулу (8.8) на стр. 418 и таблицу значений β в работе Кондо (1962а)). Отсюда видно, что определение β из условия наилучшей аппроксимации на конечном интервале значений ζ не совпадает с определением β по

производным от функции $\varphi(\zeta)$ в нуле. Положение осложняется еще тем, что второе определение может дать два разных значения β в зависимости от того, определяются ли производные по значениям при устойчивой стратификации (т. е. в точке $\zeta = +0$) или по значениям при неустойчивой стратификации (в точке $\zeta = -0$); первое же определение, вообще говоря, будет приводить к различным β при любых различных между собой интервалах аппроксимации. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в работах Р. Тэйлора (1960а, б), Такеучи (1961) и Кондо (1962а) был получен целый ряд разных значений β. Исходя отсюда, к использованию «логарифмической + линейной» аппроксимации вообще надо относиться с известной осторожностью, и при $\zeta < 0$ ее вряд ли целесообразно широко применять (несмотря на то, что согласно результатам Такеучи (1961), оценки турбулентных потоков и длины L, получаемые с помощью такой аппроксимации, по-видимому, все же можно считать удовлетворительными). Дело в том, что, в силу данных рис. 55, при неустойчивой стратификации переход от логарифмического закона к предельному «закону $^1/_3$» теории свободной конвекции происходит в очень тонком слое; поэтому формулы (7.32) и (7.33), относящиеся фактически только к этому переходному слою, здесь не имеют большого смысла.

8.2. Данные о профилях температуры и влажности

Наряду с наблюдениями профиля скорости ветра $\bar{u}(z)$ к числу весьма обычных метеорологических наблюдений относятся также и наблюдения профилей средней температуры $\bar{T}(z)$ и (в меньшей мере) средней влажности $\bar{\vartheta}(z)$ в приземном слое атмосферы. Для измерения температуры используются термометры разных типов, снабженные специальными приспособлениями, предохраняющими их от непосредственного влияния солнечной радиации. Наиболее удобными для измерения профилей $\bar{T}(z)$ являются электрические приборы — термометры сопротивления и термисторы, в которых регистрируются изменения силы тока, вызванные изменениями сопротивления вынесенного в атмосферу проводника или специального полупроводника (термистора) при повышении или понижении его температуры, и термопары, один из спаев которых поддерживается при постоянной температуре, а второй выносится в атмосферу (см., например, Лайхтман и Чудновский (1949), Кречмер (1957), Леттау и Дэвидсон (1957)). Существенно, что электрические приборы позволяют непосредственно измерять малые разности температуры $\bar{T}(z_1) - \bar{T}(z_2)$, что позволяет увеличить точность таких измерений и довести ее до немногих сотых или даже одной сотой

градуса. Для измерения влажности $\bar{\vartheta}(z)$ чаще всего используется сравнение показаний сухого и смоченного термометров. В разное время было предложено также много других принципов, позволяющих производить такие измерения (см., например, Лайхтман и Чудновский (1949), Мидлтон и Спилхаус (1953), Леттау и Дэвидсон (1957)); однако до сих пор ни один из этих принципов не привел еще к созданию простого и надежного прибора, дающего значения $\bar{\vartheta}$ с высокой относительной точностью. Поэтому получение доброкачественных данных о профилях $\bar{\vartheta}(z)$ пока остается очень трудной задачей.

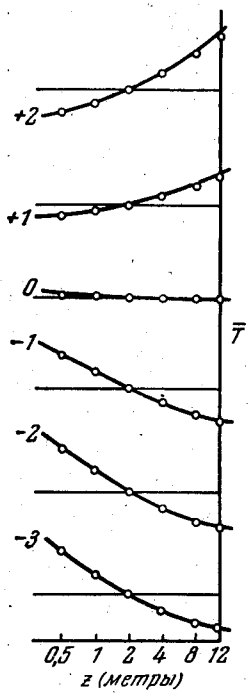


Рис. 62. Эмпирические профили средней температуры в приземном слое при различной стратификации.

Общая форма профилей температуры $\bar{T}(z)$ как при устойчивой, так и при неустойчивой стратификации в настоящее время хорошо известна из многих наблюдений. В качестве типичного примера, иллюстрирующего эту форму, мы приводим на рис. 62 данные Монина (1953), полученные при помощи осреднения 61 индивидуальных профилей температуры, наблюденных летом 1951 г. в условиях открытой степи, по шести однородным в отношении устойчивости группам, охарактеризованным в таблице на стр. 410. Из рис. 62 видно, что при неустойчивой стратификации убывание $\bar{T}(z)$ с ростом $\ln z$ происходит медленнее, чем по линейному закону, а при устойчивой стратификации возрастание $\bar{T}(z)$ с ростом $\ln z$ оказывается быстрее линейного. Аналогичная закономерность выше уже отмечалась и в отношении зависимости от стратификации закона возрастания скорости ветра с высотой (см. рис. 53). Сравнив рис. 53 с рис. 62, можно даже предположить, что при всех условиях стратификации профили скорости ветра и температуры подобны друг другу, т. е. что при любой устойчивости атмосферы отношение

$$\frac{\bar{T}(z_1)-\bar{T}(z_0)}{\bar{u}(z_1)-\bar{u}(z_0)} \tag{8.9}$$

для любых двух высот z_1 и z_0 в пределах приземного слоя принимает одно и то же значение (положительное при инверсиях, равное нулю при безразличной стратификации и отрицательное при неустойчивой стратификации). Для проверки этого предположения достаточно сравнить функции

$$\frac{\bar{u}(z)-\bar{u}(z_0)}{\bar{u}(z_1)-\bar{u}(z_0)} \quad \text{и} \quad \frac{\bar{T}(z)-\bar{T}(z_0)}{\bar{T}(z_1)-\bar{T}(z_0)}, \tag{8.10}$$

где высоты z_0 и z_1 фиксированы, а z переменно, и выяснить, совпадают ли они между собой или нет. Такая проверка в разное время и с разной степенью точности производилась многими исследователями (в частности, Паскуилом (1949), Райдером и Робинсоном (1951), Пановским (1961б), Пристли (1963—1964), Суинбенком (1964), Маквейлом (1964) и Гурвичем (1965)). При этом в более старых работах всегда оказывалось, что профили ветра и температуры в приземном слое при не слишком больших отклонениях от нейтральной стратификации практически подобны друг другу; часто даже утверждалось, что это подобие имеет место вообще при любой стратификации (или хотя бы при любой неустойчивой стратификации). В то же время последние результаты Пристли и Суинбенка (в целом ряде отношений расходящиеся с данными всех других исследователей) указывают на существование очень значительного различия формы профилей скорости ветра и температуры при неустойчивой стратификации (случаи устойчивой стратификации эти авторы вообще не рассматривали); некоторое (хотя и заметно меньшее) отклонение от подобия было обнаружено и Гурвичем. Таким образом, в настоящее время в вопросе о степени подобия профилей $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$ нет еще ясности, и окончательное его решение требует дополнительных тщательных исследований.

Еще хуже обстоит дело с данными о профилях влажности $\bar{\vartheta}(z)$. Имеющиеся пока данные измерений этих профилей (см., например, Паскуил (1949), Райдер (1954)) показывают, что в пределах нижних нескольких метров функция $\frac{\bar{\vartheta}(z)-\bar{\vartheta}(z_0)}{\bar{\vartheta}(z_1)-\bar{\vartheta}(z_0)}$ очень близка к функциям (8.10) (см., например, рис. 63, заимствованный из статьи Райдера (1954)). Иначе говоря, имеющиеся данные о профилях влажности $\bar{\vartheta}(z)$ при различной стратификации не противоречат и тому, что эти профили подобны профилям ветра, и тому, что они подобны профилям температуры. Это обстоятельство связано со сравнительно низкой точностью измерения профилей влажности, в силу которой все имеющиеся данные о профилях влажности должны считаться пока лишь предварительными и требующими еще тщательной проверки.

В силу общих формул теории подобия (7.24) отношение (8.9) может быть представлено в виде

$$\frac{\overline{T}(z_1)-\overline{T}(z_0)}{\overline{u}(z_1)-\overline{u}(z_0)}=\frac{T_*\varkappa}{u_*}\,\frac{f_1(\zeta_1)-f_1(\zeta_0)}{f(\zeta_1)-f(\zeta_0)}, \qquad (8.9')$$

где $\zeta_1=\frac{z_1}{L}$, $\zeta_0=\frac{z_0}{L}$, а $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ — универсальные функции, описывающие зависимость профилей ветра и температуры от безразмерной высоты. Отсюда ясно, что постоянство этого отношения при всех z_1 и z_0 означает, что функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$

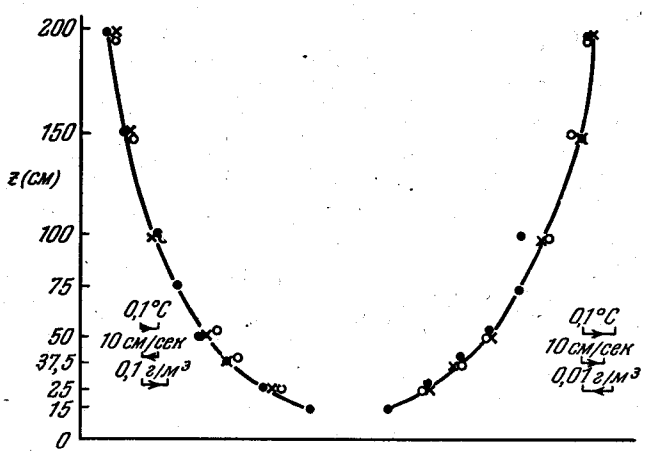


Рис. 63. Эмпирические профили скорости ветра (○), температуры (×) и влажности (●) в приземном слое при двух термических стратификациях.

Масштабы (подобранные так, чтобы профили по возможности совпали) указаны под кривыми.

отличаются лишь постоянным множителем. Но $\frac{f'(\zeta)}{f_1'(\zeta)}=\alpha(\zeta)=\frac{K_T}{K}$; поэтому подобие профилей ветра и температуры равносильно независимости от высоты (и от числа Ричардсона) отношения α коэффициентов обмена для тепла и для количества движения. В настоящее время есть известные основания предполагать, что отношение коэффициентов обмена K_T/K не является строго постоянным, но нет еще никаких данных для надежного определения его зависимости от $\zeta=z/L$ (подробнее об этом см. ниже). Что же касается коэффициента обмена K_ϑ для влаги, то пока можно лишь сказать, что эмпирические

данные о профилях влажности не противоречат предположению, что $K_\vartheta/K_T=\text{const}$.

Более полное исследование профиля температуры с точки зрения теории подобия требует построения эмпирической зависимости величины $[\overline{T}(z)-\overline{T}(a|L|)]/T_*$ или $\frac{z}{T_*}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}$ от аргумента $\zeta=\frac{z}{L}$, где a — фиксированный коэффициент (например, 1/2 или 1/10), а L и T_* должны быть определены по значениям u_* и q (полученным из непосредственных измерений

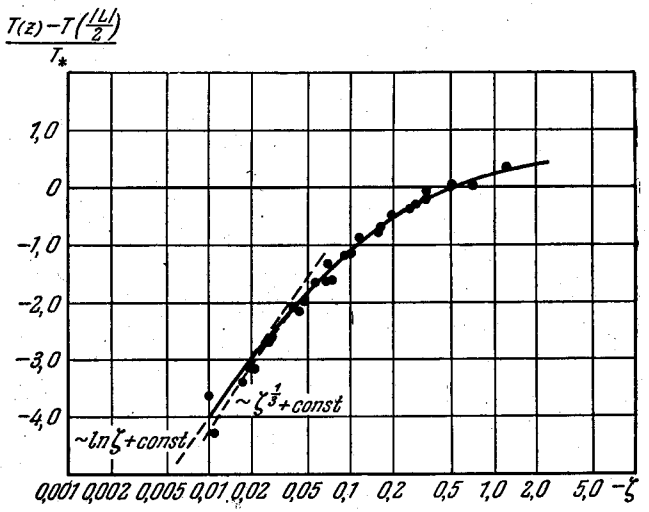


Рис. 64. Эмпирический график функции $f_1(\zeta)-f_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ при $\zeta<0$ по данным Гурвича (1965).

или оцененным с помощью какого-либо надежного косвенного метода) на основе формул (7.12) и (7.14). Функция $[\overline{T}(z)-\overline{T}(a|L|)]/T_*$ была построена, в частности, Р. Тэйлором (1960а) (по данным Райдера (1954) и Суинбенка (1955)), Такеучи (1961) (по данным обширных наблюдений профилей ветра и температуры, производившихся в 1956 г. вблизи О'Нейла в США) и Гурвичем (1965) (по данным измерений вблизи пос. Цимлянское в 1962 и 1963 гг., см. рис. 64 и 65). Поскольку, однако, Такеучи определял величины L и T_* с помощью косвенного метода (аналогичного тому, который раньше использовался Мониным и Обуховым (1953, 1954)) в предположении,

что $K_T = K$, то взаимная согласованность полученных им результатов показывает лишь, что на самом деле $\alpha(\zeta)$, по-видимому, не очень сильно уклоняется от единицы. В работе Р. Тэйлора данные были представлены в виде, ясно показывающем, что уже при $\zeta \approx -0{,}03$ в атмосфере происходит переход к «режиму свободной конвекции», характеризуемому «законом $^1/_3$» (7.35)—(7.36). Кроме того, поскольку здесь для определения величин L и T_* привлекались измеренные значения u_* и q, Тэйлор смог приближенно оценить и величину $\alpha = f'(\zeta)/f_1'(\zeta)$. Согласно этим оценкам оказалось, что при $|\zeta| \leqslant 0{,}03$ (т. е. в условиях «вынужденной конвекции») $\alpha(\zeta) = \alpha_0 \approx 1{,}2$ по данным Райдера и $\alpha_0 \approx 0{,}8$ по данным Суинбенка; при $\zeta < -0{,}03$ (при свободной конвекции) $\alpha(\zeta) = \alpha_{-\infty} \approx 1{,}7$ по данным Райдера и $\alpha_{-\infty} = 1{,}3$ по данным Суинбенка (см. также Дикон (1959)); наконец, при инверсиях (когда $\zeta > 0$) $\alpha \approx 1{,}8$ по данным Райдера и $\alpha \approx 1{,}0$ по данным Суинбенка. Заметное расхождение между оценками, вытекающими из данных Райдера и Суинбенка, является совершенно естественным, если учесть, что турбулентные потоки измерялись этими авторами довольно неточно (особенно это относится к значениям q, полученным Райдером с помощью замыкания уравнения баланса энергии) и что количество использованных наблюдений в обоих случаях было очень небольшим (например, из данных Райдера удалось использовать лишь 7 профилей). Гурвич, исходя из своих данных, построил функцию $\varphi_1(\zeta) = \frac{z}{T_*}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$ (см. рис. 66) и также оценил значения $\alpha(\zeta) = \varphi(\zeta)/\varphi_1(\zeta)$. Согласно его результатам, $\alpha(0) = \alpha_0 \approx 0{,}8$, а с ростом неустойчивости (т. е. при убывании ζ) функция $\alpha(\zeta)$ возрастает вплоть до значения $\alpha_{-\infty} \approx 1{,}3$ (с ростом устойчивости, согласно Гурвичу, значения $\alpha(\zeta)$ также слегка возрастают, но этот его результат вряд ли можно считать надежным, учитывая малую точность данных, относящихся к инверсионным условиям). Таким образом, выводы из

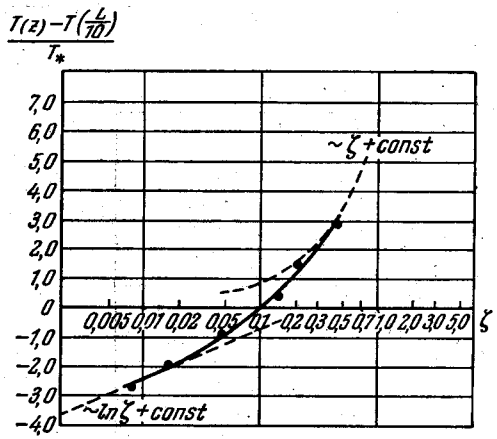


Рис. 65. Эмпирический график функции $f_1(\zeta) - f_1(0, 1)$ при $\zeta > 0$ по данным Гурвича (1965).

работы Гурвича, относящиеся к неустойчивой стратификации, оказались полностью совпадающими с результатами обработки наблюдений Суинбенка (1955); однако полученное ими значение α_0 расходится с данными большинства измерений в лабораторных условиях (согласно которым α_0 слегка больше единицы, см. стр. 284). Еще более значительно расходятся эти результаты с последними данными Пристли (1963—1964) и Суинбенка (1964), согласно которым $\alpha(\zeta)$ резко возрастает при убывании ζ от 0 до $-\infty$; по этим данным $\alpha_0 \approx 1$, но $\alpha_{-\infty} \approx 3$, т. е. принимает значение, существенно превосходящее все остальные оценки этой величины. Таким образом, имеющиеся сведения о функции $\alpha(\zeta)$ до сих пор во многом остаются противоречивыми, и их уточнение требует еще большой дополнительной работы.

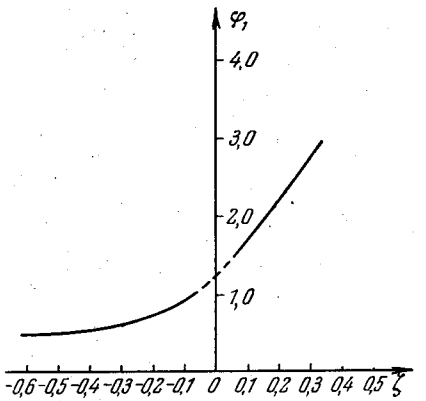


Рис. 66. Эмпирический график универсальной функции $\varphi_1(\zeta)$ по данным Гурвича (1965).

То, что в земной атмосфере переход от «режима вынужденной конвекции», характеризуемого близким к логарифмическому профилем температуры, к «режиму свободной конвекции» с его «законом 1/3» происходит при очень небольших отрицательных числах Ричардсона (и значениях ζ), следует также и из результатов Уэбба (1958), обработавшего данные о профилях температуры, полученные в ходе многолетних наблюдений вблизи Эдитвейла в Австралии. Так, например, Уэбб вычислил для ряда наблюдений при неустойчивой стратификации величину

$$\Gamma = \frac{1}{1{,}5 \ln 4} \frac{\overline{T}(8) - \overline{T}(2)}{\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)_{z=1{,}5}}$$

(цифры в скобках — высоты в метрах) и графически представил зависимость этой величины от числа Ri на высоте 1,5 $м$ (см. рис. 67). Сплошными линиями на рис. 67 нанесены значения $\Gamma = 1$ (отвечающее логарифмическому профилю $\overline{T}(z) \sim$ $\sim \text{const} - \ln z$) и $\Gamma = 0{,}73$ (отвечающее закону $\overline{T}(z) \sim \text{const} + z^{-\frac{1}{3}}$). Мы видим, что при наименьших наблюдавшихся значениях $-\text{Ri}_{1,5}$, близких к 0,015 или еще меньших, Γ действительно

оказывается близким к 1, но затем оно начинает убывать и уже при $\mathrm{Ri} \approx -0{,}03$ принимает значение, близкое к 0,73, сохраняющееся затем на значительном интервале чисел Ричардсона. Пунктиром на рис. 67 указан постепенный переход от $\Gamma=1$ к $\Gamma=0{,}73$, который должен был бы наблюдаться, если бы соотношение $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \sim z^{-1}$, отвечающее логарифмическому профилю, точно выполнялось вплоть до высоты z, на которой

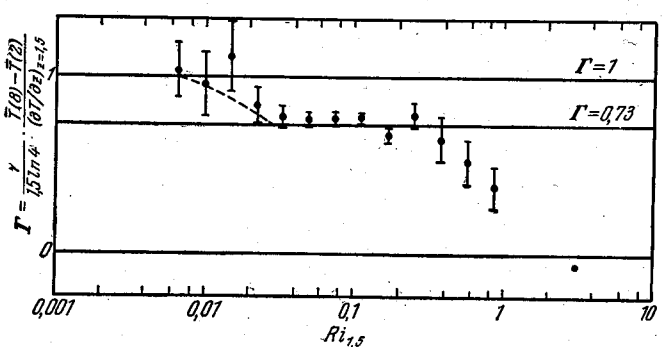


Рис. 67. Зависимость величины Γ от Ri при неустойчивой стратификации по эмпирическим данным.

$\mathrm{Ri}=-0{,}03$, а выше ее выполнялось бы соотношение $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \sim z^{-\frac{4}{3}}$. Любопытной особенностью рис. 67 является то, что, начиная примерно с $\mathrm{Ri}_{1,5}=-0{,}4$, значение Γ снова начинает уменьшаться. Если только этот результат верен (что пока не представляется бесспорным), то отсюда следует, что и при возрастании неустойчивости (но фиксированной высоте), и при возрастании высоты (но фиксированной неустойчивой стратификации) наступает момент, когда используемая нами теория подобия (приводящая к «закону 1/3») перестает действовать. Последнее обстоятельство в какой-то мере согласуется также с неподтверждением «закона 1/3» в довольно грубых лабораторных экспериментах Томаса и Таунсенда (1957) и Таунсенда (1959), в которых горизонтальная скорость $\overline{u}(z)$ равнялась нулю. Может быть, оно объясняется тем, что при нулевой (или очень малой) горизонтальной скорости очень ослабевает горизонтальное перемешивание, и в результате турбулентность на фиксированной высоте z оказывается однородной по горизонтали лишь при очень большом периоде осреднения по времени. С другой стороны, есть некоторые основания предполагать, что при отсутствии создаваемого горизонтальной скоростью горизонтального перемешивания на весь турбулентный режим будут существенно влиять условия зарождения восходящих конвективных струй в пределах подслоя молекулярной теплопроводности, так что статистические характеристики турбулентности на всех высотах здесь будут зависеть уже и от коэффициента χ (ср. теорию термической конвекции Малкуса (1954б)). Более детальное обсуждение этого вопроса может быть найдено в работах Таунсенда (1962а), Пристли (1962) и Уэбба (1962); однако полученные здесь результаты пока никак не могут считаться окончательными. Ввиду неясности вопроса в дальнейшем при рассмотрении неустойчивой стратификации мы, как правило, будем иметь в виду лишь слой с $z \leqslant |L|$, в отношении которого нет сомнения, что «закон 1/3» здесь хорошо выполняется, начиная с высоты z порядка $0{,}02|L| \div 0{,}05|L|$.

Для определения численного значения коэффициента C_1, входящего в «закон 1/3» (7.36), удобно рассмотреть безразмерную величину

$$\overset{*}{q} = \frac{q}{c_p \rho_0 \left(\frac{g}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right|^{\frac{3}{2}} z^2} = \frac{\varkappa^2}{\zeta^2 |f_1'(\zeta)|^{\frac{3}{2}}}, \qquad (8.11)$$

являющуюся однозначной функцией от ζ и от Ri. В условиях свободной конвекции эта величина, очевидно, принимает постоянное значение $\overset{*}{q}_{-\infty} = \left(\frac{3}{C_1}\right)^{\frac{3}{2}}$, где C_1 — коэффициент в «законе 1/3» (7.36); ее асимптотическое поведение при малых ζ и Ri дается формулой $\overset{*}{q} = \alpha_0^{\frac{3}{2}} \varkappa^2 |\zeta|^{-\frac{1}{2}} = \alpha_0 \varkappa^2 |\mathrm{Ri}|^{-\frac{1}{2}}$. Схематический вид зависимости $\log \overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$ от $\log \mathrm{Ri}$ представлен на рис. 51 на стр. 387; эмпирически эту зависимость исследовали Пристли (1955, 1956) (на материале Суинбенка (1955)), Р. Тэйлор (1956а) и Перепелкина (1959а), использовавшие данные одновременных измерений профилей $\overline{T}(z)$ и $\overline{u}(z)$ и величины q. На рис. 68 представлен сводный эмпирический график $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$, построенный по данным перечисленных выше работ. На этом графике индивидуальные значения $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$, полученные исходя из измерений Р. Тэйлора и Суинбенка, осреднены по нескольким узким интервалам значений Ri; светлые кружки на рис. 68 представляют эти осредненные значения, а вертикальные отрезки характеризуют средние квадратичные отклонения внутри каждой группы. Эти вертикальные отрезки оказались довольно большими, что указывает на значительный разброс индивидуальных значений $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$, связанный, по-видимому, со

сравнительно невысокой точностью применявшихся методов измерения. Однако средние точки вертикальных отрезков на рис. 68 хорошо согласуются с предположением о существовании двух предельных режимов $\overset{*}{q} \sim |\mathrm{Ri}|^{-\frac{1}{2}}$ и $\overset{*}{q} = \overset{*}{q}_{-\infty} = \mathrm{const}$, изображенных на рис. 68 сплошными линиями, причем переходная область между ними по этим данным оказывается очень узкой. Треугольники на рис. 68 представляют осредненные данные Перепелкиной, хорошо согласующиеся с данными Пристли и Тэйлора в отношении асимптотического поведения $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$, но, указывающие на несколько более плавный переход между предельными режимами (как указано в работе Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960), более плавный, чем у Пристли и Тэйлора, переход между предельными режимами получается и при обработке американских наблюдений, проводившихся вблизи О'Нейла). Эмпирическое значение коэффициента пропорциональности в асимптотическом соотношении $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri}) \sim |\mathrm{Ri}|^{-\frac{1}{2}}$ близко к 0,17 (Дикон (1959)), что хорошо согласуется с обычно принимаемыми значениями $\varkappa \approx 0{,}4$, $\alpha_0 \approx 1$. Что касается константы $\overset{*}{q}_{-\infty}$, то для нее большинство эмпирических данных дает почти одинаковые значения: согласно измерениям Суинбенка и Р. Тэйлора, исправленным посредством введения инструментальной поправки, $\overset{*}{q}_{-\infty} \approx 0{,}9$ (Пристли (1959а), Дикон (1959)), по данным Перепелкиной $\overset{*}{q}_{-\infty} \approx 0{,}8$, по данным Гурвича (1965) (измерившего значение коэффициента $C_1 = 3/(\overset{*}{q})^{2/3}$) получается, что $\overset{*}{q} \approx 0{,}73$, а по заметно более грубым данным Крамера и Рекорда и Пановского — что $\overset{*}{q}_{-\infty} \approx 0{,}95$ и соответственно $\overset{*}{q}_{-\infty} \approx 0{,}75$ (см. Дикон (1959)). Однако последние результаты Пристли (1963—1964) и в этом отношении представляют исключение, так как приводят к значению $\overset{*}{q} \approx 1{,}2 \div 1{,}3$, заметно превышающему остальные.

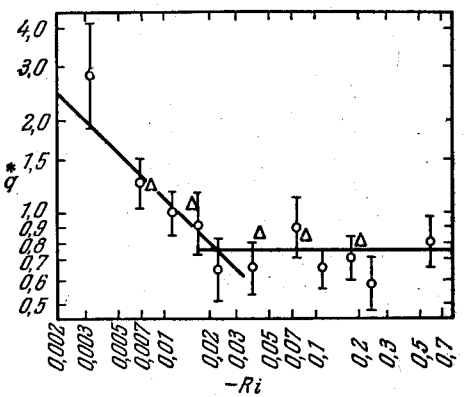


Рис. 68. Зависимость $\overset{*}{q}$ от Ri по данным Суинбенка и Тэйлора (○) и Перепелкиной (Δ).

Зная $\overset{*}{q}_{-\infty}$, легко вычислить также и коэффициент $C_1 = \frac{3}{(\overset{*}{q}_{-\infty})^{2/3}}$. Значению $\overset{*}{q}_{-\infty} = 0{,}9$ отвечает $C_1 \approx 3{,}2$, а значениям $\overset{*}{q}_{-\infty} = 0{,}73$ и $\overset{*}{q}_{-\infty} = 1{,}2$ — значения $C_1 \approx 3{,}7$ и соответственно $C_1 = 2{,}7$. Можно также попытаться непосредственно определить C_1 по эмпирическим данным о значениях q и профилях температуры. Для этого надо отобрать данные, относящиеся к условиям «свободной конвекции», и, например, приравнять C_1 коэффициенту регрессии измеренных значений $\Delta T = \overline{T}\left(\frac{H}{2}\right) - \overline{T}(2H)$ (где H — фиксированная высота) на значения $F_1(q, H) = \left(\frac{q}{c_p \rho_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right) H^{-\frac{1}{3}}$ (совпадающие с $\frac{\Delta T}{C_1}$ при выполнении «закона $^1/_3$»). Подобное определение C_1 было выполнено Перепелкиной (1962) на материале 52 значений ΔT и q (при условиях с $\mathrm{Ri} < -0{,}04$), найденных при измерениях в 1958—1959 гг. в открытой степи вблизи пос. Цимлянское. При этом было получено значение $C_1 = 3{,}4$, хорошо согласующееся с большинством имеющихся данных о константе $\overset{*}{q}_{-\infty}$ (этому значению отвечает $\overset{*}{q}_{-\infty} = 0{,}83$). Позднее Гурвич (1965) подобным же образом нашел значение $C_1 \approx 3{,}7$, указывавшееся выше.

Приведенные эмпирические значения коэффициента C_1 хорошо согласуются также с оценками, полученными на стр. 420, исходя из данных о профиле ветра, если предположить, что $\alpha_{-\infty}$ лишь немного отличается от единицы. Если взять за основу какую-то одну из приведенных на стр. 420 оценок коэффициента C_2 и одно значение C_1 (или $\overset{*}{q}_{-\infty}$), то из их сопоставления можно даже получить определенную оценку постоянной $\alpha_{-\infty}$ (именно так в работе Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960) была получена оценка $\alpha_{-\infty} \approx 1{,}3$). Однако имеющаяся пока неопределенность в эмпирических значениях C_1 и C_2 не позволяет придать большой вес получаемым на этом пути значениям $\alpha_{-\infty}$.

Значение Ri, начиная с которого можно считать справедливым «закон $^1/_3$», оценивается достаточно надежно как абсцисса точки пересечения двух асимптот функции $\overset{*}{q}(\mathrm{Ri})$, т. е. как корень уравнения $\alpha_0 \varkappa^2 |\mathrm{Ri}|^{-1/2} = \overset{*}{q}_{-\infty}$. Отсюда получаем $\mathrm{Ri} = -\alpha_0^2 \varkappa^4 / \overset{*}{q}{}^2_{-\infty}$, что при всех разумных значениях α_0, $\varkappa$ и $\overset{*}{q}_{-\infty}$ приводит к значению Ri, заключающемуся между —0,02 и

—0,05, т. е. находящемуся в соответствии с имеющимися эмпирическими данными.

В работах Паскуила (1949), Райдера (1954) и Перепелкиной (1959а) была эмпирически построена также функция

$$F_1(\mathrm{Ri}) = -\frac{q}{c_p\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} z^2} = \frac{\varkappa^2}{\zeta^2 f'(\zeta) f_1'(\zeta)}. \qquad (8.12)$$

Ясно, что если известна функция $f(\zeta)$, то значения $F_1(\mathrm{Ri})$ позволяют определить также и функцию $f_1(\zeta)$, описывающую универсальный профиль температуры. Однако недостаточная точность имеющихся пока данных о значениях $F_1(\mathrm{Ri})$ и недостаточная их согласованность между собой не позволяют использовать эти данные для дополнительного уточнения поведения функции $f_1(\zeta)$ или хотя бы для уточнения значений универсальных постоянных α_0, $\alpha_{-\infty}$ и C_1 (например, с помощью соотношения $F_1(0) = \alpha_0\varkappa^2$).

Аналогичная функция, относящаяся к профилю влажности,

$$F_2(\mathrm{Ri}) = -\frac{j}{\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} z^2} = \frac{\varkappa^2}{\zeta^2 f'(\zeta) f_2'(\zeta)} \qquad (8.13)$$

была также эмпирически построена Паскуилом (1949) и Райдером (1954) по данным измерений профилей ветра и влажности и измерения испарения с помощью почвенных испарителей. Поскольку, очевидно,

$$F_1(\mathrm{Ri}) = K_T \Big/ z^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \text{ а } F_2(\mathrm{Ri}) = K_\vartheta \Big/ z^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \text{ и } \overset{*}{K}{}^2(\mathrm{Ri}) = K \Big/ z^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

(см. формулу (8.6)), сопоставляя значения F_2, F_1 и $\overset{*}{K}$, можно в принципе сделать определенные выводы и об отношениях K_ϑ/K_T и K_ϑ/K. Однако очень большая неточность существующих методов измерения профиля влажности и испарения лишает пока такие сопоставления какого-либо реального значения.

Разумеется, если интересоваться лишь сравнением различных коэффициентов обмена, то можно не рассматривать безразмерные величины F_1, F_2 и $\overset{*}{K}$, а сразу определять $K = u_*^2 \Big/ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, $K_T = -q \Big/ c_p\rho_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ и $K_\vartheta = -j \Big/ \rho \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z}$. К сожалению, надежные данные о j и $\bar{\vartheta}(z)$, позволяющие непосредственно подсчитать значение коэффициента K_ϑ, пока, по-видимому, отсутствуют; поэтому в настоящее время приходится принять гипотезу о том, что $K_\vartheta = K_T$ (см. стр. 383), без проверки (если не считать

косвенной проверки Чарнока и Эллисона (1959), обнаруживших сильную корреляцию между пульсациями влажности и температуры над морем). Что же касается коэффициентов K и K_T, то большое число пар значений этих коэффициентов, подсчитанных по данным одновременных измерений величин τ, q, $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$, выполненных в Австралии, было опубликовано Суинбенком (1955), попытавшимся даже построить графики зависимости $\alpha = K_T/K$ от Ri и от Rf. Однако очень большой разброс точек на этих графиках (связанный, очевидно, с неточностью определения коэффициентов обмена) делает количественную зависимость α от Ri (или Rf), полученную Суинбенком, крайне ненадежной. Качественно же результаты Суинбенка сводятся к тому, что α не является постоянной, а возрастает с убыванием Ri (или Rf, или ζ) и принимает значения меньше единицы при слабых инверсиях и больше единицы при «свободной конвекции». В такой форме эти результаты согласуются также с весьма грубыми оценками Леттау по данным наблюдений вблизи О'Нейла (см. Леттау и Дэвидсон (1957), раздел 7.3). В той части, которая относится к неустойчивой стратификации, результаты работы Суинбенка (1955), как мы уже отмечали, прекрасно согласуются и с последними результатами Гурвича (но противоречат последующим данным самого Суинбенка и Пристли).

До сих пор рассматривались лишь эмпирические данные, относящиеся лишь к отрицательным или, в крайнем случае, небольшим положительным значениям Ri и ζ. Данных, относящихся к сильным инверсиям, при измерениях в атмосфере получено пока очень мало, и они обнаруживают сильный разброс точек, требующий, чтобы эти ситуации были дополнительно тщательно изучены. Тем не менее, следует указать, что наблюдения Лилиеквиста (1954) в Антарктике как будто бы подтверждают в ряде случаев наличие линейного профиля температуры при сильных инверсиях, предсказываемого теорией подобия при некоторых дополнительных предположениях (см. стр. 381). С другой стороны, если принять гипотезу о совпадении коэффициентов обмена для тепла и для пассивной примеси, то при исследовании вопроса о значениях $\alpha = K_T/K = K_\vartheta/K$ в условиях крайней устойчивости можно воспользоваться данными океанографических наблюдений и лабораторных экспериментов, относящимися к течениям жидкости при очень устойчивой плотностной стратификации, создаваемой отрицательным вертикальным градиентом солености. Первые и наиболее известные данные такого рода были получены Дж. Тэйлором при океанографических наблюдениях в проливе Каттегат. Они показали, что заметный турбулентный обмен может существовать даже при

Ri порядка 10 и что $\alpha = K_\vartheta/K$ при этом настолько мало, что $\mathrm{Rf} = \alpha\,\mathrm{Ri}$ остается заметно меньшим единицы (см. книгу Праудмена (1953) и дискуссию по докладу Стюарта (1959)). Обработка этих данных, приведенная в книге Праудмена, показывает, что $\alpha \approx 0{,}03 \div 0{,}05$ при $4 < \mathrm{Ri} < 10$ (см. черные квадратики на рис. 69). Близкие значения $\alpha = K_T/K \approx 0{,}02 \div 0{,}05$ были обнаружены и при непосредственном измерении K_T и K в подледном слое воды оз. Байкал (см. Колесников (1960)). Дальнейшие эмпирические данные о зависимости α от Ri при $\mathrm{Ri} > 0$ были получены (в менее чистых условиях) в лабораторных экспериментах Эллисона и Тэрнера (1960). В этих экспериментах в трубе прямоугольного сечения (со стеклянными боковыми стенками) искусственно создавалось турбулентное течение соленой воды с отрицательным вертикальным градиентом солености. После этого в одном сечении трубы измерялись профили скорости и плотности, а также (с помощью косвенных методов) — коэффициенты обмена K и K_ϑ. Полученные результаты вместе с океанографическими данными Тэйлора—Праудмена представлены на рис. 69. Мы видим, что разброс экспериментальных точек здесь оказывается весьма значительным, и, кроме того, имеется систематическое расхождение данных, относящихся к $z = 1$ *см* и $z = 1{,}5$ *см*; однако общая тенденция убывания α с ростом Ri на рис. 69 выявляется достаточно наглядно. Сплошные линии на рис. 69 соответствуют значениям α, получающимся исходя из полуэмпирической формулы

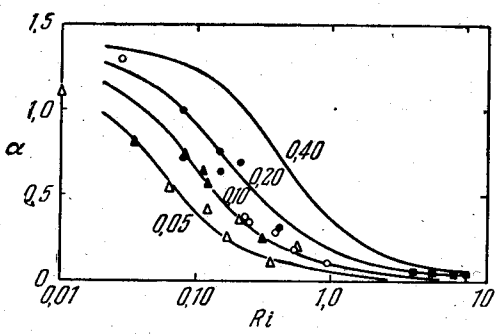


Рис. 69. Сравнение эмпирических данных Дж. Тэйлора и Эллисона и Тэрнера о зависимости α от Ri с формулой Эллисона (8.14).

●○ — данные Эллисона и Тэрнера, относящиеся к высоте $z = 1{,}5$ *см*;
▲△ — данные, относящиеся к $z = 1$ *см*; ■ — данные Тэйлора. Светлые значки соответствуют менее надежным экспериментальным данным.

$$\alpha(\mathrm{Rf}) = \frac{\alpha_0\,(1 - \mathrm{Rf}/R)}{(1 - \mathrm{Rf})^2}, \quad \mathrm{Rf} = \alpha\,\mathrm{Ri}, \tag{8.14}$$

предложенной Эллисоном (1957). При этом принято, что $\alpha_0 = 1{,}4$ (ср. стр. 284); значения $R = \mathrm{Rf_{cr}}$, отвечающие разным кривым, надписаны над ними. В целом экспериментальные точки на

рис. 69 более или менее согласуются с выводами, следующими из формулы (8.14); наилучшая оценка $R = \mathrm{Rf_{cr}}$, согласно этим данным, лежит где-то между 0,10 и 0,15.

8.3. Методы измерения турбулентных потоков импульса, тепла и влаги

Выше уже отмечалось, что полная проверка выводов из теории подобия, изложенных в § 7, требует знания не только профилей $\bar{u}(z)$, $\bar{T}(z)$ и $\bar{\vartheta}(z)$, но значений турбулентного потока импульса (напряжения трения) $\tau = \rho u_*^2$, потока тепла q и потока влаги (скорости испарения или конденсации) j. Поскольку к тому же величины τ (или u_*), q и j вообще являются очень важными характеристиками атмосферной турбулентности, наиболее непосредственно описывающими взаимодействие между атмосферой и подстилающей поверхностью, естественно, что задача определения их значений является одной из центральных в физике приземного слоя воздуха. Поэтому имеет смысл хотя бы вкратце описать здесь основные методы измерения турбулентных потоков.

Из прямых методов измерения величин u_*, q и j прежде всего следует назвать пульсационный метод, суть которого состоит в регистрации временного хода пульсаций u', w', T' и ϑ' в фиксированной точке атмосферы и последующем вычислении средних по времени значений произведений $u'w'$, $w'T'$ и $w'\vartheta'$. Поскольку

$$u_* = (-\overline{u'w'})^{\frac{1}{2}}, \quad q = c_p\rho_0\overline{w'T'}, \quad j = \rho_0\overline{w'\vartheta'}, \tag{8.15}$$

то эти средние значения уже определяют все интересующие нас величины. При этом, однако, приборы для пульсационных измерений должны регистрировать без искажения все детали пульсаций метеорологических полей, существенно влияющие на значения u_*, q и j. Последнее требование накладывает жесткие ограничения на параметры аппаратуры, причем даже само аккуратное выяснение характера этих ограничений является нелегким делом; для этого надо заранее знать, какие именно детали пульсаций влияют на турбулентные потоки, а это требует сведений о спектральном составе турбулентных потоков, остающихся до сих пор очень неполными (подробнее об этом будет сказано в гл. 8 ч. 2 книги). Кроме того, при использовании пульсационного метода для определения турбулентных потоков надо уметь выбрать интервал временного осреднения так, чтобы получающиеся средние значения были близки к средним, взятым по некоторой разумно определенной статистической

совокупности, но чтобы еще не проявлялась постепенная «эволюция уровня» метеорологических величин, о которой мы говорили на стр. 361. Все эти обстоятельства сильно осложняют измерения и в конечном счете приводят к тому, что результаты не всегда оказываются достаточно точными. Тем не менее, пульсационный метод до сих пор остается единственным общим методом непосредственного определения всех трех величин: τ, q и j.

Для измерения тонких деталей пульсаций скорости ветра u' и w' до 1958 г. большинство исследователей применяло принцип термоанемометра, уже в течение ряда десятилетий с успехом использующийся для измерений пульсаций скорости потока в аэродинамических лабораториях. Одной из первых работ, в которой этот принцип был успешно применен к измерениям в атмосфере, была работа Гедеке (1935). Позже (в 1947—1949 гг.) удобные приборы такого типа были созданы в СССР Обуховым и Кречмером (см., например, Кречмер (1954)). Более инерционные термоанемометрические приборы примерно в то же время начали применяться австралийскими и английскими исследователями (см., например, Суинбенк (1951а, 1955), Дикон (1955), Макилрой (1955), Джонс и Паскуил (1959)); очень тонкая аппаратура, построенная на принципе термоанемометра, была разработана Маккриди (1953).

Датчиками всех термоанемометрических приборов являются тонкие металлические нити (чаще всего платиновые), порядка 1 *см* длиной, которые во время измерений подогреваются током до температуры порядка нескольких сот градусов. При этом изменения температуры нити (а следовательно, и ее сопротивления) определяются теплоотдачей в воздух, зависящей от нормальной к нити компоненты скорости обдувающего нить потока и практически не зависящей от небольших изменений температуры воздуха (имеющих обычно порядок долей градуса). Поэтому, измеряя сопротивление нити, можно определить нормальную к нити компоненту скорости ветра. Существенным неудобством является при этом нелинейный характер зависимости сопротивления нити от скорости ветра. Измерение пульсаций сопротивления нити осуществляется с помощью регистрации пульсаций силы тока, проходящего через нить. При вертикальном положении нити термоанемометра эти пульсации соответствуют пульсациям горизонтальной компоненты скорости ветра. Если же установить две нити в вертикальной плоскости, проходящей через направление среднего ветра (что достигается при помощи инерционной флюгарки), и разместить их под углами $+45°$ и $-45°$ к вертикали, то разность сопротивлений этих нитей оказывается пропорциональной вертикальной компоненте скорости ветра (с коэффициентом пропорциональности,

зависящим от скорости среднего ветра). Термоанемометры, использовавшиеся в СССР, позволяют регистрировать пульсации скорости ветра с точностью до 1 *см/сек* и имеют инерцию (постоянную времени) порядка 0,01 *сек*; возможны, однако, и еще более точные и менее инерционные приборы этого типа.

Нелинейность термоанемометра существенно затрудняет вычисление средних значений произведений пульсаций. При этом приходится или записывать пульсации силы тока в термоанемометре на фотобумагу, снимать с этой записи ординаты кривых и затем уже численно переводить эти ординаты в значения u' и w' с помощью специальных тарировочных кривых (Кречмер (1954)), или же дополнительно пропускать пульсации тока через нелинейный прибор с характеристикой, подобранной по тарировочным кривым таким образом, чтобы сигнал на выходе был уже прямо пропорциональным измеряемой пульсации скорости (Маккриди (1953), Р. Тэйлор (1958)). Чтобы избежать этих осложнений и в то же время иметь возможность вычисления средних значений произведений пульсаций с помощью автоматических приборов, в 1958 г. Бовшеверовым и Гурвичем был создан линейный прибор для измерений пульсаций скорости — ультраакустический микроанемометр, основанный на зависимости времени распространения звука от излучателя до микрофона от скорости движения воздуха на его пути (см. Гурвич (1959), Бовшеверов и Воронов (1960)). Важнейшей частью этого прибора являются миниатюрные цилиндрические излучатели звука и микрофоны, имеющие диаметр 2 *мм* и длину около 5 *мм*. Прибор содержит два излучателя $И_1$ и $И_2$ и два приемника (микрофона) $П_1$ и $П_2$, причем пара $И_1$ и $П_2$ помещается на расстоянии 2,5 *см* от пары $П_1$ и $И_2$ (см. рис. 70). При этом звук (точнее говоря, ультразвук) распространяется по практически совпадающим путям от $И_1$ к $П_1$ и от $И_2$ к $П_2$ в противоположных направлениях, и при совпадающих фазах колебаний излучателей разность фаз колебаний микрофонов оказывается пропорциональной компоненте скорости ветра по направлению базы прибора и фактически не зависящей от температуры воздуха. Такой прибор также позволяет измерять пульсации скорости с точностью до 1 *см/сек*, а его инерция меньше 0,001 *сек*.

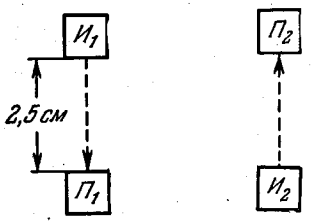


Рис. 70. Схема расположения излучателей и приемников в акустическом микроанемометре.

Помимо термоанемометров и акустических анемометров для измерения пульсаций скорости ветра иногда используются

также специальные микрофлюгарки, построенные на принципе обычного флюгера. Особенно удобным оказывается применение микрофлюгарок для регистрации пульсаций направления ветра, что вместе с данными о пульсациях полной скорости (определяемыми, например, с помощью термоанемометра) позволяет определить мгновенные значения всех трех компонент скорости u', v' и w' (см., например, Крамер и Рекорд (1953) и Леттау и Дэвидсон (1957), раздел 5.2). Однако инерционность такой аппаратуры превосходит инерционность аппаратуры, описанной выше, а возможности автоматизации измерений и их последующей обработки оказываются здесь меньшими.

Измерение пульсаций температуры T' можно производить с помощью приборов, основанных на принципе термометра сопротивления (с проводниковыми или полупроводниковыми датчиками), или с помощью миниатюрных термопар. В качестве типичного примера прибора для измерения значений T' можно упомянуть микротермометр Кречмера (1954), представляющий собой термометр сопротивления с платиновой нитью (тех же размеров и с той же инерцией, что и в применявшемся в СССР термоанемометре) в качестве датчика. При использовании этой нити для измерения пульсаций температуры через нее пропускается очень слабый ток, при котором ее перегрев относительно окружающего воздуха не превосходит 0,01°. В таком случае теплоотдача в воздух практически отсутствует, и температура нити (а следовательно, и ее сопротивление) зависит поэтому только от колебаний температуры воздуха и не зависит от скорости ветра. В результате пульсации силы тока, проходящего через нить, оказываются пропорциональными пульсациям температуры воздуха (с коэффициентом пропорциональности, определяемым только параметрами прибора).

Для измерения пульсаций влажности ϑ' можно использовать сухой и смоченный термометры сопротивления (или сухую и смоченную термопары), дающие мгновенные значения двух температур T' и T_1', по которым значение ϑ' определяется с помощью так называемого психрометрического уравнения (см., например, Мидлтон и Спилхауз (1953) или Кедроливанский и Стернзат (1953)). При этом ϑ' можно находить по значениям T' и T_1' численно (Макилрой (1955)), а можно вместо этого подавать пульсации T' и T_1' на вход специального электрического аналогового устройства, автоматически выполняющего операцию, эквивалентную решению психрометрического уравнения (Суинбенк (1951б), Р. Тэйлор (1956б), Тэйлор и Дайер (1958), Дайер (1961)). В обоих случаях задача оценки точности получаемых значений ϑ' и учета влияния погрешностей и инерции прибора на значение величины $j = \rho\overline{w'\vartheta'}$ оказывается заметно более трудной, чем в случае определения величин T' и q (ср. Р. Тэйлор (1963)); поэтому надежное получение значений j с помощью пульсационного метода остается пока еще делом будущего. Значительные перспективы открывает в этом отношении использование вместо двух термометров практически безынерционного оптического метода измерения пульсаций влажности, основанного на зависимости коэффициента преломления воздуха от содержания водяного пара (см. Елагина (1962)). Однако такая аппаратура пока еще не доведена до состояния, позволяющего систематически использовать ее в полевых условиях.

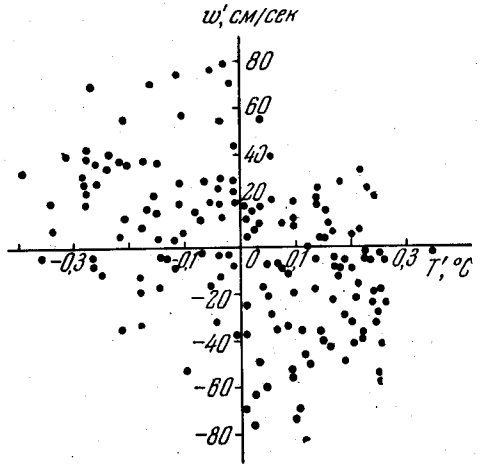


Рис. 71. Пример корреляционного графика для пульсаций температуры и вертикальной скорости.

Пульсационные измерения в принципе позволяют определять для ряда последовательных моментов времени одновременные значения u' и w' или w' и T', или w' и ϑ'. В качестве примера, иллюстрирующего получающиеся при этом результаты, на рис. 71 (заимствованном из работы Монина (1953)) приводится пример корреляционного графика, характеризующего связь между пульсациями w' и T', по измерениям на высоте 1,5 *м* в инверсионных условиях. Этому графику соответствует коэффициент корреляции r_{wT} между значениями w' и T', равный —0,24; турбулентный поток тепла здесь равен $q = -0{,}03$ *кал/см²мин*. На рис. 72 (взятом из той же работы) приводится пример корреляционного графика, характеризующего связь между пульсациями u' и w', также по измерениям на высоте 1,5 *м*. Здесь коэффициент корреляции r_{uw} равен —0,65, а $u_* = 0{,}33$ *м/сек*.

Разумеется, численный подсчет средних значений произведений пульсаций и их коэффициентов корреляции по записям типа изображенных на рис. 1 на стр. 10 весьма трудоемок и утомителен. Однако, если используемые приборы линейны (как, например, микротермометр или ультразвуковой микроанемометр) или же превращаются в практически линейные с помощью добавления к ним специальной линеаризирующей приставки, то средние

значения произведений (или квадратов) пульсаций можно получать автоматически. Для этого надо только подать сигналы на выходе пульсационных приборов на вход специального коррелометра — интегрирующего устройства, подсчитывающего интеграл от произведения двух вводимых в него функций. Подобные автоматические коррелометры были созданы в СССР Бовшеверовым, Гурвичем, Татарским и Цвангом (1959) (см. также Бовшеверов, Гурвич, Мордухович и Цванг (1962)) и были сразу же использованы ими для определения турбулентного потока

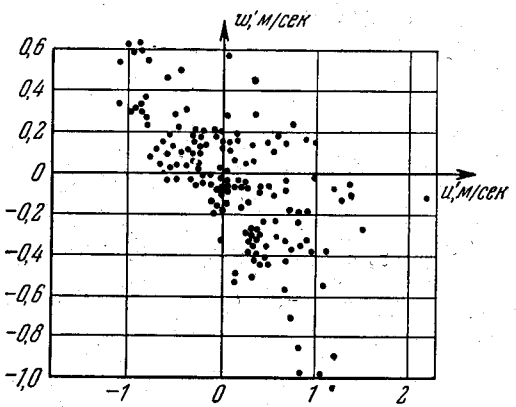


Рис. 72. Пример корреляционного графика для пульсаций горизонтальной и вертикальной компонент скорости ветра.

тепла (Бовшеверов, Гурвич, Цванг (1959)). В Австралии родственная аппаратура была разработана Тэйлором и Уэббом (1955) и Дайером (1958).

Кроме пульсационного метода для измерения турбулентного напряжения трения можно применять также динамометрический метод, впервые предложенный Шеппардом (1947), а затем использовавшийся Паскуилом (1950), Райдером (1954), некоторыми американскими исследователями (см. Леттау и Дэвидсон (1957), раздел 3.2) и Гурвичем (1961). Сущность этого метода заключается в том, что кусок почвы с характерным для окружающей местности травяным покровом помещается вровень с поверхностью почвы на подвижную платформу (подвешенную на нитях в опытах Гурвича и плавающую в жидкости в опытах других исследователей), удерживаемую на месте специальной пружиной. Сила трения, действующая на платформу при наличии ветра, при этом определяется с помощью измерения либо натяжения пружины (Шеппард, Паскуил и др.), либо

смещения платформы (Гурвич). Приборы для измерения величин τ и u_* с помощью этого метода весьма капризны и работа с ними требует большой осторожности, но точность лучших из них не уступает точности лучших из имеющихся пульсационных приборов, предназначенных для той же цели.

Турбулентный поток влаги j в метеорологии чаще всего измеряется с помощью почвенных испарителей. В этих приборах используется кусок почвы, вырезанный (по возможности без нарушения его структуры) из своего окружения и помещенный в специальный открытый сверху сосуд, края которого находятся на уровне почвы. Вес вырезанного куска измеряется через определенные промежутки времени, и отсюда находится скорость потери им влаги. К сожалению, пока трудно сказать, в какой мере скорость испарения вырезанного образца совпадает со скоростью испарения неповрежденной почвы. Поэтому в последние годы многие исследователи считают, что данные, полученные с помощью почвенных испарителей, вообще не имеют серьезного научного значения. Чтобы опровергнуть это мнение, необходимо иметь богатый материал одновременных измерений испарения с помощью испарителей и с помощью пульсационного метода, позволяющего установить, что между показаниями двух типов приборов действительно имеется значительная связь, и выяснить характер этой связи. Пока, однако, такой материал все еще отсутствует, так как вообще пульсационные измерения испарения до сих пор очень мало развиты и имеют небольшую точность.

Для определения турбулентного потока тепла q и испарения j можно привлечь также уравнение теплового баланса подстилающей поверхности

$$B = q + Q + mj, \tag{8.16}$$

где B — радиационный баланс поверхности Земли (т. е. сумма приходящей длинноволновой и коротковолновой радиации, из которой вычтена уходящая радиация), Q — поток тепла в почву, а m — скрытая теплота испарения. В некоторых случаях при очень сухой почве можно предполагать, что последний член в правой части мал по сравнению с двумя остальными. Тогда, измерив величины B и Q (определение последней из которых, впрочем, сопряжено с рядом трудностей и обычно оказывается не очень надежным), мы можем вычислить и величину q. В других случаях, когда величина q измеряется с помощью пульсационного метода, можно воспользоваться уравнением (8.16) и данными измерений q, B и Q для нахождения испарения j. Если q неизвестно, но значения j, полученные с помощью испарителей, рассматриваются как достаточно надежные, то по ним

с помощью (8.16) можно восстановить и значение q (ср. Райдер (1954)); если же и q, и j измеряются непосредственно, то уравнение (8.16) можно использовать для дополнительной проверки полученных данных (Дайер (1961)). Наконец, если ни q, ни j не измеряются непосредственно, но имеются данные о профилях температуры и влажности, то можно воспользоваться предположением о равенстве коэффициентов обмена для тепла и для влаги, из которого следует, что

$$\frac{q}{j}=\frac{c_p(\overline{T}_1-\overline{T}_0)}{\overline{\vartheta}_1-\overline{\vartheta}_0}, \tag{8.17}$$

где $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_0$ — значения средней температуры на двух фиксированных высотах z_1 и z_0, а $\overline{\vartheta}_1$ и $\overline{\vartheta}_0$ — значения влажности на тех же высотах. Из (8.16) и (8.17) вытекает, что

$$q=\frac{\gamma(B-Q)}{1+\gamma}, \quad j=\frac{B-Q}{m(1+\gamma)}, \tag{8.18}$$

где

$$\gamma=\frac{q}{mj}=\frac{c_p}{m}\frac{\overline{T}_1-\overline{T}_0}{\overline{\vartheta}_1-\overline{\vartheta}_0}; \tag{8.19}$$

последние равенства позволяют подсчитать значения q и j по измеренным значениям B, Q, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_0$, $\overline{\vartheta}_1$ и $\overline{\vartheta}_0$. Аналогичные формулы можно получить и исходя из некоторых других предположений о связи между разными коэффициентами обмена (см., например, Леттау и Дэвидсон (1957), раздел 7.3). Заметим, однако, что, поскольку величины Q и $\overline{\vartheta}_1-\overline{\vartheta}_0$ могут быть измерены лишь с большой ошибкой, точность балансового метода заметно уступает точности, например, пульсационного определения q.

8.4. Определение турбулентных потоков по данным о профилях метеорологических величин

Выше мы перечислили ряд методов измерения величин u_*, q и j. Однако все эти методы довольно сложны и требуют специального оборудования, имеющегося пока лишь в немногих научно-исследовательских учреждениях. В то же время для геофизики большой интерес представляло бы систематическое определение турбулентных потоков в большом числе пунктов земной поверхности. Поэтому большое значение приобретают методы определения величин u_*, q и j по данным более простых

измерений и, в первую очередь, обычных измерений профилей метеорологических полей (т. е., как часто говорят, *градиентных измерений*[1])).

Мы здесь не будем задерживаться на имеющих значительную давность многочисленных спекулятивных «полуэмпирических» формулах, выражающих потоки через профили, так как почти все они не сравнивались с данными непосредственных измерений (появившимися лишь в самое последнее время) и мало надежны. Вместо этого мы воспользуемся развитой в § 7 теорией подобия для турбулентного режима в приземном слое воздуха. Согласно этой теории, профили скорости ветра и температуры (влажности пока мы не будем касаться) определяются общими формулами (7.24), содержащими параметры u_*, q, z_0 (от последней величины зависит полная скорость $\overline{u}(z)$), $\overline{T}_0=\overline{T}(z_0)$ (от $\overline{T}_0$ зависит $\overline{T}(z)$), универсальную постоянную Кармана $\varkappa$ и две универсальные функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$. Постоянная $\varkappa$ близка к 0,4; относительно функций f и f_1 также имеется ряд сведений, собранных в § 7 и пп. 8.1—8.2. Будем пока считать, что эти функции нам точно известны. В таком случае любые четыре измерения значений скорости и температуры позволяют составить четыре уравнения, в принципе достаточные для определения четырех параметров u_*, q, z_0 и $\overline{T}_0$, причем число необходимых измерений, вообще говоря, нетрудно даже уменьшить (например, вовсе не рассматривая значений $\overline{T}(z)$ или рассматривая только разности $\overline{T}(z_2)-\overline{T}(z_1)$, не зависящие от $\overline{T}_0$). Сложность здесь состоит только в том, что на самом деле функции f и f_1 до сих пор известны лишь приближенно (причем данные о них разных исследователей даже кое в чем противоречат друг другу) и не задаются никакими простыми аналитическими формулами, а результаты измерений всегда содержат некоторые ошибки. Поэтому на практике приходится пользоваться какими-то приближенными выражениями для f и f_1, и разные методы, использующие разные наборы исходных данных, будут приводить к несколько различным результатам.

Напомним, что описанный на стр. 410—412 метод Монина — Обухова обработки измерений профилей ветра и температуры уже содержал в качестве составной части определение значений $\frac{u_*}{\varkappa}$

[1]) Это название связано с тем, что измерения профилей отличаются от стандартных метеорологических измерений на одной фиксированной высоте («на уровне метеорологической будки») тем, что здесь дополнительно определяются еще и значения градиентов метеорологических полей на разных высотах. Поскольку определение турбулентных потоков во многих случаях является основной целью измерений профилей, методы определения потоков по профилям часто называются *методами интерпретации градиентных измерений.*

и L (позволяющих найти также и q) по значениям $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$. Несмотря на то, что этот метод опирался на использование «логарифмической + линейной» формулы для профилей, которая позже была подвергнута критике, и на предположение, что $\alpha \equiv 1$, точность его, как показало сопоставление получаемых таким образом значений u_* и q с данными непосредственных измерений, оказалась более высокой, чем можно было бы ожидать. Однако в настоящее время рекомендовать этот метод в его первоначальном виде для непосредственного практического применения, разумеется, нельзя, так как он все же довольно груб и очень громоздок (в частности, включает определение некоторых параметров по материалам ряда измерений с помощью метода наименьших квадратов).

Близкие методы определения значений u_* и q по измерениям профилей ветра и температуры, также использующие «логарифмическую+линейную» аппроксимацию универсальных функций и предположение, что $K_T = K$, были предложены Такеучи (1961) и Шиотани (1962). В работе Такеучи, в частности, приведены некоторые практические приемы, позволяющие упростить вычисления; там же проведено сравнение получающихся значений u_* и q с данными непосредственного измерения потоков (по некоторым материалам, включающим измерения и потоков, и профилей). Тем не менее, даже и здесь методы определения значений u_* и q остаются неоправданно сложными; в то же время они используют лишь небольшую часть имеющихся сведений о функции $f(\zeta)$.

Методы определения турбулентных потоков по измерениям профилей рассматривались также в работах Казанского и Монина (1956, 1958, 1962), Пристли (1959б), Уэбба (1960), Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960), Монина (1962а), Кондо (1962б), Дикона и Уэбба (1962) и Пановского (1963). Мы здесь изложим, следуя в основном работам Казанского и Монина, общий метод представления данных об универсальных функциях в виде, удобном для практического нахождения турбулентных потоков; предварительно, однако, мы сделаем несколько замечаний общего характера.

Начнем с вопроса о выборе величин, наиболее удобных для определения потоков. Согласно сказанному выше, одних только значений скорости ветра на трех высотах в принципе уже должно хватить для нахождения параметров u_*, q и z_0; поэтому может создаться впечатление, что привлечение данных о температуре воздуха совершенно излишне. Однако, как показал Пристли (1959б), использование даже значений $\bar{u}(z)$ для более чем трех высот z не позволяет надежно определить q, так как

получаемые при этом значения сильно расходятся с данными непосредственных измерений и весьма различны при разных методах обработки. Поэтому представляется, что дополнительное использование значений $\bar{T}(z)$ имеет большую практическую ценность. Этот вывод фактически следует и из статьи Пановского, Блэкедара и Маквейла (1960), испробовавших метод определения q по одним лишь значениям $\bar{u}(z)$ на трех высотах (и значению z_0), но не получивших хороших результатов.

Так как нас обычно интересуют в первую очередь значения u_* и q, то можно подумать, что целесообразно с самого начала исключить величину z_0, рассматривая лишь разности $\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)$, а не сами значения $\bar{u}(z)$. Нетрудно понять, однако, что при этом мы сильно теряем в точности, так как разности скорости ветра определяются заметно менее точно, чем сам ветер (особенно, если высоты z_1 и z_2 сравнительно близки друг к другу). Кроме того, можно показать, что при исключении величины z_0 даже небольшая ошибка в разностях скоростей будет уже сильно сказываться на величинах u_* и q. Поскольку значение z_0 для данного пункта и времени года фактически надо определить лишь один раз (оно не меняется), и его нахождение несложно, более целесообразно заранее найти z_0 и затем уже все время пользоваться полученным значением. В то же время величина $\bar{T}_0 = \bar{T}(z_0)$ непостоянна, и ее исключение не приводит к вредным последствиям; поэтому данные о профиле температуры разумно использовать лишь в форме разностей $\bar{T}(z_2) - \bar{T}(z_1)$. При этом для определения значений u_* и q достаточно иметь данные двух измерений.

Исходя из сказанного выше, можно рекомендовать при определении значений u_* и q по данным о $\bar{u}(z)$ и $\bar{T}(z)$ начать с определения параметра шероховатости z_0, а затем исходить из скорости ветра U на некоторой фиксированной высоте H и из разности δT средних температур на двух высотах (например, на высотах $2H$ и $\frac{H}{2}$). Согласно основной гипотезе подобия для турбулентного режима в приземном слое атмосферы, величины $U = \bar{u}(H)$ и $\delta T = \bar{T}(2H) - \bar{T}\left(\frac{H}{2}\right)$ могут быть выражены через H, $\frac{g}{T_0}$, u_*, $\frac{q}{c_p \rho_0}$ и z_0. Следовательно, u_* и $\frac{q}{c_p \rho_0}$ (а также зависящая от них величина L) в свою очередь могут быть выражены через H, $\frac{g}{T_0}$, U, δT и z_0. Из этих пяти величин можно составить две независимые безразмерные комбинации, которые

мы запишем в виде

$$B=\frac{\alpha g H}{T_0}\frac{\delta T}{U^2},\qquad \zeta_0=\frac{z_0}{H}, \tag{8.20}$$

где α — произвольный безразмерный коэффициент, об удобном выборе которого мы еще скажем чуть ниже. Таким образом, получаем

$$\frac{u_*}{U}=F_1(B,\zeta_0),\qquad \left|\frac{q/c_p\rho_0}{\alpha U\,\delta T}\right|=F_2(B,\zeta_0),\qquad \frac{L}{H}=F_3(B,\zeta_0), \tag{8.21}$$

где F_1, F_2, F_3 — некоторые универсальные функции переменной B, зависящие также от параметра ζ_0. Располагая графиками этих функций, мы имели бы возможность определять с помощью таких графиков величины u_*, q и L по данным градиентных измерений. Графики же функций F_i, $i=1, 2, 3$, можно построить либо эмпирически, по данным независимых синхронных измерений величин U, δT, u_* и q, либо теоретически, на основе задания вида универсальных функций $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$. На втором из этих способов, позволяющем последовательно улучшать точность определения потоков по мере уточнения наших сведений об универсальных функциях, мы здесь остановимся немного подробнее.

Примем за основу общие формулы (7.24), с помощью которых были определены универсальные функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$. Тогда первую формулу (8.20) и первые две формулы (8.21) можно будет переписать в виде

$$\begin{aligned} B&=\frac{\alpha}{F_3}\frac{f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)]^2},\\ F_1&=\frac{\varkappa}{f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)},\\ F_2&=\frac{\varkappa^2}{\alpha[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)][f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)]}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Первое из этих уравнений задает в неявной форме вид функции $F_3(B,\zeta_0)$. Если функции $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ известны, то это уравнение можно разрешить относительно F_3, например, графически, и тогда два остальных уравнения (8.22) будут параметрически задавать функции $F_1(B,\zeta_0)$ и $F_2(B,\zeta_0)$.

В настоящее время различие формы профилей скорости ветра и температуры не установлено еще вполне убедительно; поэтому пока имеет смысл исходить из предположения о подобии этих профилей, т. е. считать, что $f_1(\zeta)=\frac{1}{\alpha}f(\zeta)$, где $\alpha=\frac{K_T}{K}=$ $=$ const. В таком случае и коэффициент α в (8.20) и (8.21) также удобно принять равным отношению K_T/K. При этом формулы

(8.22) несколько упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} B&=\frac{1}{F_3}\frac{f(2/F_3)-f(1/2F_3)}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)]^2},\\ F_1&=\frac{\varkappa}{f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)},\\ F_2&=\frac{\varkappa^2}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)][f(2/F_3)-f(1/2F_3)]}. \end{aligned} \tag{8.22′}$$

Поскольку в настоящее время данные о различиях между разными коэффициентами обмена очень неполны и противоречивы, пока естественно просто считать, что $\alpha=1$. Однако включение коэффициента α в величину B и функцию F_2 позволяет сохранить

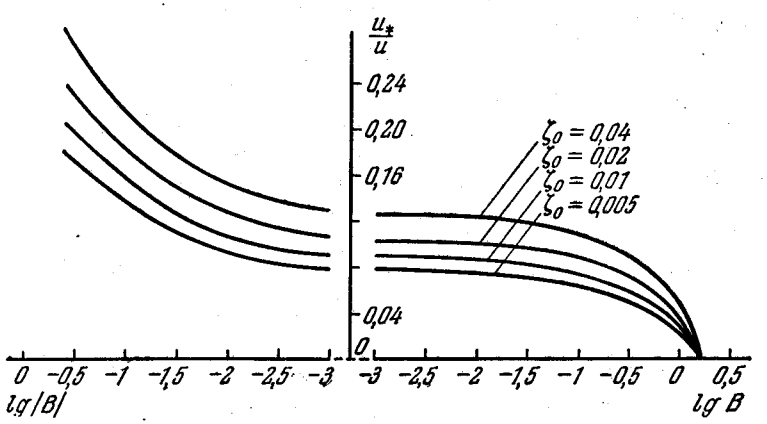


Рис. 73. Номограмма Казанского и Монина для определения безразмерного напряжения трения $u_*/U=F_1$ по параметру стратификации B и параметру шероховатости ζ_0.

ту же схему расчета и после появления более точных данных о коэффициентах обмена, изменив лишь значение α. Возможно также, что еще до того, как появятся достаточно надежные сведения о функции $\alpha(\zeta)$, требующие отказа от формул (8.22′) и возвращения к более общим формулам вида (8.22), станет целесообразно, тем не менее, считать α различным, например, при практически нейтральной, неустойчивой и устойчивой стратификации.

Казанским и Мониным, исходя из формул (8.22′), были построены номограммы функций F_1, F_2 и F_3 в предположении, что

$\varkappa = 0{,}43$, а функция $f(\zeta)$ при $\zeta < 0$ задается интерполяционной формулой (7.49) с $\zeta_1 = 0{,}03$ и $C_2 = 1$, а при $\zeta > 0$ — «логарифмической + линейной» формулой (7.33) с $\beta = 0{,}6$. Следует иметь в виду, что использованные при этом построении числовые значения параметров кое в чем отличаются от значений, которые в настоящее время представляются наилучшими; особенно это относится к определяющему вид $f(\zeta)$ при устойчивой стратификации параметру β. Однако изменение значений параметров в соответствии с последними данными не изменит

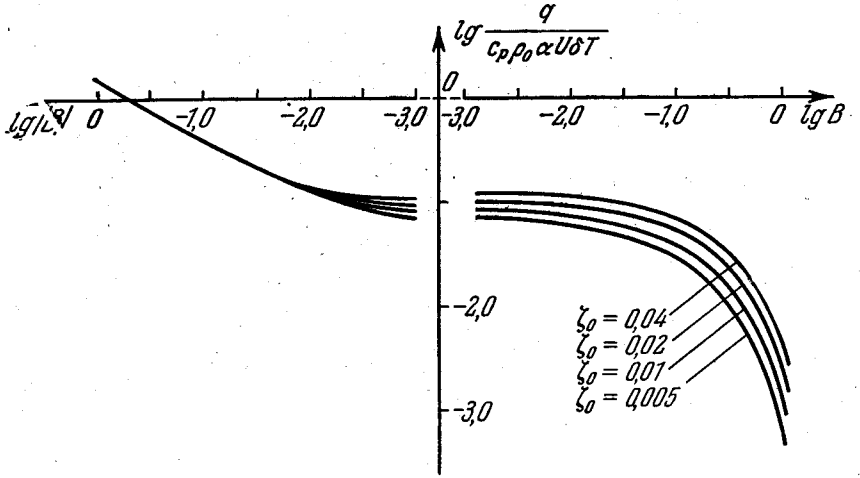


Рис. 74. Номограмма для определения безразмерного потока тепла $q/c_p \rho_0 \alpha U \delta T = F_2$ по B и ζ_0.

общего вида рассматриваемых номограмм и даже, может быть, не очень сильно изменит числовые значения определяемых по этим номограммам потоков. В то же время пересчет номограмм в настоящее время вряд ли был бы оправдан в связи с недавно обнаружившимся и пока еще не объясненным расхождением в значениях $f(\zeta)$ и α, полученных австралийскими и всеми остальными исследователями. Поэтому мы ограничимся тем, что приведем на рис. 73—75 старые номограммы Казанского и Монина, дающие достаточное представление о порядке величины турбулентных потоков, соответствующих тем или иным значениям $U = \overline{u}(H)$ и $\delta T = \overline{T}(2H) - \overline{T}(H/2)$.

Разумеется, номограмма для F_2 может быть использована не только для определения турбулентного потока тепла q, но

также и для определения скорости испарения j, если только, кроме U и δT, измерена также разность удельных влажностей на двух высотах $\delta\vartheta = \overline{\vartheta}(2H) - \overline{\vartheta}\left(\frac{H}{2}\right)$. Действительно, согласно

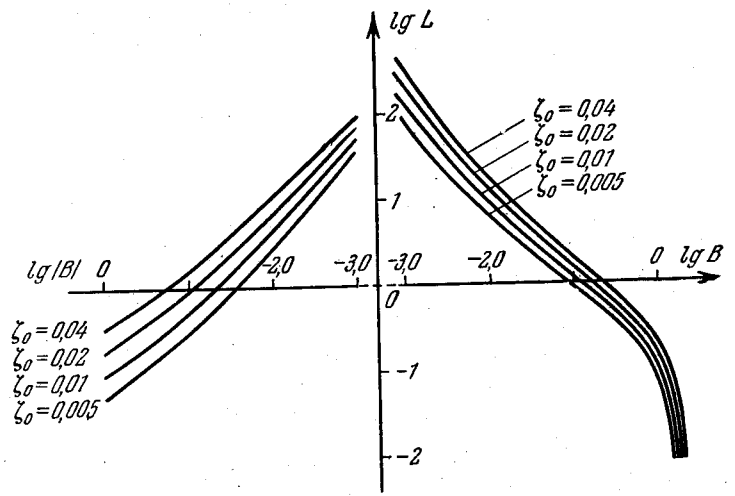


Рис. 75. Номограмма для определения $L/H = F_3$ по B и ζ_0.

общим формулам (7.24) и эмпирически обнаруженному подобию профилей $\overline{T}(z)$ и $\overline{\vartheta}(z)$,

$$\left|\frac{j/\rho_0}{\alpha_1 U \delta\vartheta}\right| = \left|\frac{q/c_p\rho_0}{\alpha U \delta T}\right| = F_2(B, \zeta_0), \tag{8.23}$$

где $\alpha_1 = K_\vartheta/K$.

С помощью формул (8.22′) нетрудно установить вид функций (8.21) при стратификации атмосферы, близкой к безразличной, сильно неустойчивой и очень устойчивой. При близкой к безразличной стратификации $|B|$ мало, а $|F_3|$ велико, и в (8.22′) можно всюду полагать $f(\zeta) \approx \ln|\zeta|$. Тогда уравнения (8.22′) сильно упрощаются и могут быть разрешены в явной форме, причем получается

$$F_1 \approx \frac{\varkappa}{\ln(1/\zeta_0)}, \quad F_2 \approx \frac{\varkappa^2}{\ln 4 \cdot \ln(1/\zeta_0)}, \quad F_3 \approx \frac{\ln 4}{\left(\ln\frac{1}{\zeta_0}\right)^2}\frac{1}{B}. \tag{8.24}$$

При сильной неустойчивости B будет большим отрицательным, а F_3 — малым отрицательным. Асимптотическое поведение функций (8.21) при этом можно

выяснить, положив $f(\zeta) \approx c_2 - C_2 |\zeta|^{-\frac{1}{3}}$ в формулах (8.22′). Тогда получается

$$F_1 \approx \frac{\varkappa}{\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} C_2^{\frac{3}{4}}} \frac{|B|^{\frac{1}{4}}}{\left(\zeta_0^{-\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$F_2 \approx \frac{\varkappa^2 |B|^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} C_2^{\frac{3}{2}}}, \qquad (8.25)$$

$$F_3 \approx -\frac{\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(\zeta_0^{-\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} C_2^{\frac{3}{4}}} |B|^{-\frac{3}{4}}.$$

Наконец, при сильной устойчивости B будет большим положительным, а F_3 — малым положительным. Асимптотическое поведение функций (8.21) в этом случае можно выяснить, положив в (8.22′) всюду $f(\zeta) \approx c_3 + C_3\zeta$. При этом оказывается, что B не может неограниченно возрастать, а приближается к пределу $\frac{3}{2C_3(1-\zeta_0)^2}$ при $F_3 \to 0$. Таким образом, число B при устойчивой стратификации не может превосходить значения $3/2C_3$. Для функций F_1 и F_2 при малых F_3 получается

$$F_1 \approx \frac{\varkappa F_3}{C_3(1-\zeta_0)}, \qquad F_2 \approx \frac{2\varkappa^2 F_3^2}{3C_3^2(1-\zeta_0)}. \qquad (8.26)$$

Если, например, при сильной устойчивости принять для $f(\zeta)$ асимптотическую формулу $f(\zeta) \approx c_3 + C_3\zeta + \frac{\gamma}{\gamma-1}(C_3\zeta)^{1-\frac{1}{\gamma}}$, вытекающую из уравнения (7.65) интерполяционной теории Казанского и Монина с $\sigma = C_3$, то для функции F_3 получается следующая асимптотическая формула:

$$F_3 \approx C_3 A^{-\gamma}\left[1 - \frac{2C_3(1-\zeta_0)^2}{3} B\right]^{\gamma},$$

$$A = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{1-\zeta_0^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\zeta_0} - \frac{2^{1-\frac{1}{\gamma}} - 2^{\frac{1}{\gamma}-1}}{3}\right]. \qquad (8.27)$$

Особенно простой вид приобретает методика определения турбулентного потока тепла по данным градиентных измерений в случае сильной неустойчивости. А именно, вспоминая формулу (7.49), мы видим, что если все высоты измерения превышают $\zeta_1 L$ (для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{H}{2} \geqslant \zeta_1 L$), то для интерпретации результатов измерений можно

воспользоваться формулами, справедливыми в предельном случае свободной конвекции. Критерий $\frac{H}{2} \geqslant \zeta_1 L$, обеспечивающий эту возможность, можно переписать в виде $|F_3| \leqslant \frac{1}{2|\zeta_1|}$. Пользуясь для F_3 формулой (8.25), мы можем привести этот критерий к виду

$$|B| \geqslant \frac{2\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right)|\zeta_1|^{\frac{4}{3}}}{C_2\left(\zeta_0^{-\frac{1}{3}} - 1\right)^2} \approx \frac{0{,}011}{\left(\zeta_0^{-\frac{1}{3}} - 1\right)^2},$$

где, как и при построении номограмм, принято, что $C_2 = 1$, а $|\zeta_1| = 0{,}03$. Значения этого критерия в грубых цифрах изменяются от 0,0005 при $\zeta_0 = 0{,}005$ до 0,004 при $\zeta_0 = 0{,}05$, так что правую часть неравенства можно для этого интервала значений ζ_0 записать приближенно в виде $0{,}1\,\zeta_0$. Тогда предложенный критерий приводится к виду

$$\left|\frac{\delta T}{U^2}\right| \geqslant \frac{3z_0}{H^2}, \qquad (8.28)$$

где z_0 и H измеряются в метрах, U — в *м/сек* и δT — в градусах С.

Если критерий (8.28) выполняется, то это значит, что при $z \geqslant \frac{H}{2}$ мы находимся в условиях режима свободной конвекции, где

$$q = \left(\frac{3\alpha_{-\infty}}{C_2}\right)^{\frac{3}{2}} c_p \rho_0 \varkappa^2 \left(\frac{g}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right|^{\frac{3}{2}} z^2 \qquad (8.29)$$

(см. (7.36) и (7.39)). Исходя отсюда, легко показать, что в этом случае

$$q = c_p \rho_0 \varkappa^2 \left[\frac{\alpha_{-\infty}}{C_2\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} |\delta T|^{\frac{3}{2}} \qquad (8.30)$$

(тот же результат можно получить и из формул (8.21) и (8.25)). Подставляя это значение q в формулу (7.38) для коэффициента турбулентности $K = \alpha_{-\infty}^{-1} K_T$ на высоте $z = H$, получаем

$$K(H) = \frac{3\varkappa^2}{C_2}\left[\frac{\alpha_{-\infty}}{C_2\left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} |\delta T|^{\frac{1}{2}}. \qquad (8.31)$$

Таким образом, величины q и $K(H)$ отличаются от $H^{\frac{1}{2}}|\delta T|^{\frac{3}{2}}$ и соответственно $H^{\frac{3}{2}}|\delta T|^{\frac{1}{2}}$ лишь универсальными (но не безразмерными) множителями. Выражая H в метрах, δT в градусах, q в $\frac{кал}{см^2\,мин}$ и $K(H)$ в $м^2/сек$ и полагая $\varkappa \approx 0{,}4$, $\alpha_{-\infty} = C_2 \approx 1$ и $T_0 \approx 300°$ К, получаем

$$q \approx 0{,}2 H^{\frac{1}{2}} |\delta T|^{\frac{3}{2}}, \qquad K(H) \approx 0{,}15 H^{\frac{3}{2}} |\delta T|^{\frac{1}{2}}. \qquad (8.32)$$

Эти формулы позволяют очень быстро оценивать значения q и $K(H)$ при неустойчивой стратификации.

При $H=2$ *м* и $\zeta_0=0{,}005$ (т. е. $z_0=1$ *см*, что является типичным значением «высоты шероховатости» для сухой степи) для параметров L, $\frac{u_*}{U}$ и $\frac{q}{\alpha U\,\delta T}$ с помощью номограмм рис. 73—75 получаются следующие характерные значения. При состояниях, близких к безразличной стратификации, с помощью формул (8.24) получаем

$$L=\frac{0{,}52}{(\lg\zeta_0)^2}\frac{1}{B}\approx\frac{1}{10B},\quad \frac{u_*}{U}=\frac{0{,}19}{\lg\frac{1}{\zeta_0}}\approx 0{,}08,\quad \frac{q}{\alpha U\,\delta T}=-\frac{0{,}11}{\lg\frac{1}{\zeta_0}}\approx -0{,}05. \tag{8.33}$$

Эти формулы практически оказываются достаточно точными при $-0{,}001<B<0{,}005$ (чему соответствуют значения $L>20$ *м* и $L<-100$ *м*). С ростом устойчивости величины L, $\frac{u_*}{U}$ и $\left|\frac{q}{\alpha U\,\delta T}\right|$ уменьшаются; с ростом неустойчивости $|L|$ уменьшается, а $\frac{u_*}{U}$ и $\left|\frac{q}{\alpha U\,\delta T}\right|$ растут. Характерные значения этих величин при различных B приведены в следующей таблице:

B	L *м*	$\frac{u_*}{U}$	$\frac{q}{\alpha U\delta T}$	Качественная характеристика
—0,015	—2	0,10	—0,13	Сильная неустойчивость
—0,006	—10	0,09	—0,09	Умеренная неустойчивость
—0,001	—100	0,08	—0,05	Слабая неустойчивость
0,005	20	0,08	—0,05	Слабая устойчивость
0,03	4	0,07	—0,03	Умеренная устойчивость
0,1	1,6	0,06	—0,02	Сильная устойчивость

По данным экспедиции 1951 г. в Заволжье типичные значения скорости трения u_* в сухой степи в условиях ясной летней погоды (при скоростях ветра U порядка $2 \div 6$ *м/сек*) лежат в интервале $0{,}2 \div 0{,}4$ *м/сек*, а турбулентный поток тепла q днем принимает значения порядка $0{,}25 \div 0{,}35$ *кал/см² мин*, а ночью — порядка $(-0{,}04) \div (-0{,}06)$ *кал/см² мин* (см. Монин (1953)).

8.5. Пульсации скорости ветра и температуры в приземном слое

Турбулентные потоки импульса и тепла представляют собой лишь частные примеры статистических характеристик пульсаций скорости ветра и температуры. Многие другие характеристики этих пульсаций были проанализированы с точки зрения теории подобия в п. 7.5, и все они могут быть найдены экспериментально с помощью той же аппаратуры, которая применяется в пульсационном методе определения величин u_* и q. Имея данные одновременных измерений значений u_*, q и еще какой-нибудь статистической характеристики пульсаций (или

имея данные измерений этой статистической характеристики и оценив u_* и q с помощью метода, изложенного в п. 8.4), можно проверить относящиеся к этой характеристике выводы из теории подобия и эмпирически построить соответствующую универсальную функцию от $\zeta=\frac{z}{L}$. Таким образом, данные пульсационных измерений в принципе позволяют определить все функции $f_3, \ldots, f_{11}$, φ_ε и φ_N, введенные в п. 7.5.

К сожалению, имеющиеся в настоящее время эмпирические данные о характеристиках пульсаций (содержащиеся в работах Суинбенка (1955), Р. Тэйлора (1956а), Перепелкиной (1957, 1962), Гурвича (1960), Цванга (1960), Пановского и Маккормика (1960), Леттау и Дэвидсона (1957), Бареда (1958), Монина (1962б), Зубковского (1962), Ламли и Пановского (1964) и в ряде других работ) еще довольно неточны, далеко не полны и позволяют сделать только некоторые предварительные выводы. Существенно, однако, что эти выводы во всех случаях в общем неплохо согласуются с предсказаниями теории и дают определенное представление о форме некоторых универсальных функций.

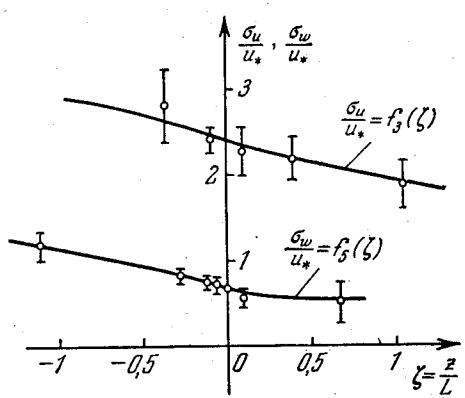


Рис. 76. Эмпирический график функций $\sigma_u/u_*=f_3(\zeta)$ и $\sigma_w/u_*=f_5(\zeta)$.

На рис. 76 мы приводим ориентировочные эмпирические графики функций f_3 и f_5, на рис. 77 — функцию f_6, на рис. 78 — график значений коэффициента анизотропии $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{f_5}{f_3}$, на рис. 79 — графики коэффициентов корреляции $r_{uw}=-\frac{1}{f_3 f_5}$ и $r_{wT}=\pm\frac{\varkappa}{f_5 f_6}$. Согласно этим данным, в частности, при малых $|\zeta|$ отношение $\sigma_u/u_*=f_3$ близко к 2,3, а $f_5=\frac{\sigma_w}{u_*}\approx 0{,}8$ [1]), так что

[1]) Результат $f_5(0)\approx 0{,}8$ был впервые получен Перепелкиной (1957) и с точностью до одной десятой подтверждается также и последующими измерениями Гурвича (1960) и лабораторными опытами Шубауэра и Лауфера. Однако некоторые авторы (Пановский и Маккормик (1960) и Паскуил (1962а)), использовавшие более инерционные приборы, пришли к большему значению $f_5(0)\approx 1{,}25 \div 1{,}35$, заметно отличающемуся от того, которое получалось при измерениях в лаборатории.

коэффициент вертикальной анизотропности при безразличной стратификации имеет порядок 0,3; отношение же $\frac{\sigma_T}{|T_*|}$ при очень малых $|\zeta|$ принимает значения, близкие к 1. Поскольку значения $f_3(0) = A_3$, $f_4(0) = A_4$ и $f_5(0) = A_5$ определяют интенсивности пульсаций трех компонент скорости в логарифмическом пограничном слое однородной жидкости, их можно найти также и по данным лабораторных пульсационных измерений в слое постоянного напряжения трения, проводившихся Клебановым (1955) и Лауфером (1954) (см. стр. 236 и, в частности, рис. 26). Данные этих лабораторных измерений, как мы видели, хорошо согласуются между собой; теперь мы видим, что от них почти не отличаются и значения σ_u/u_* и σ_w/u_*, найденные при измерениях в безразлично стратифицированной атмосфере. Для величины $A_4 = f_4(0) = \frac{\sigma_v}{u_*}$ лабораторные измерения, представленные на рис. 26, дают значение, близкое к 1,7 (в полном соответствии с полуэмпирической формулой (7.100)); в условиях же атмосферы отношение $\frac{\sigma_v}{u_*}$ до сих пор оценивалось лишь очень грубо, и можно только сказать, что полученные здесь весьма предварительные данные (собранные, например, в книге Ламли и Пановского (1964)) также не противоречат такому значению A_4.

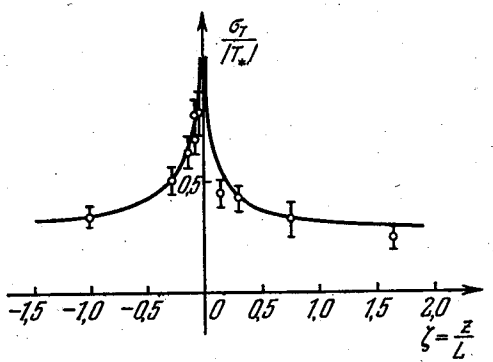


Рис. 77. Эмпирический график функции $\sigma_T/|T_*| = f_6(\zeta)$.

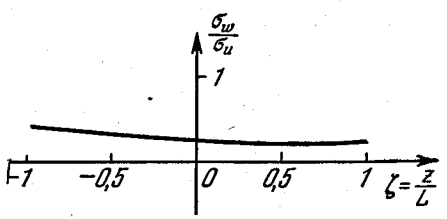


Рис. 78. Зависимость коэффициента анизотропии σ_w/σ_u от ζ по эмпирическим данным.

С ростом неусточивости функции $f_3(\zeta)$ и $f_5(\zeta)$ возрастают, а функция $f_6(\zeta)$, по-видимому, убывает. С ростом устойчивости функции f_3 и f_5, по-видимому, слегка убывают, а функция f_6 быстро убывает (заметно быстрее, чем с ростом

неустойчивости). Коэффициент анизотропности $\frac{\sigma_w}{\sigma_u}$ с ростом неустойчивости медленно возрастает. Коэффициент корреляции r_{uw}, при безразличной стратификации близкий к —0,5, с ростом неустойчивости слегка уменьшается по абсолютной величине. Коэффициент корреляции r_{wT} при стратификации, близкой к безразличной, по-видимому, чуть меньше, чем 0,5, а при возрастании неустойчивости он слегка возрастает, приближаясь к 0,5. О коэффициенте горизонтальной анизотропности $\frac{\sigma_v}{\sigma_u} = \frac{f_4}{f_3}$ при ненейтральной стратификации прямых эмпирических данных пока нет; при нейтральной стратификации, согласно приведенным выше лабораторным данным, он близок к 0,7. Можно ожидать, что при сильной неустойчивости этот коэффициент

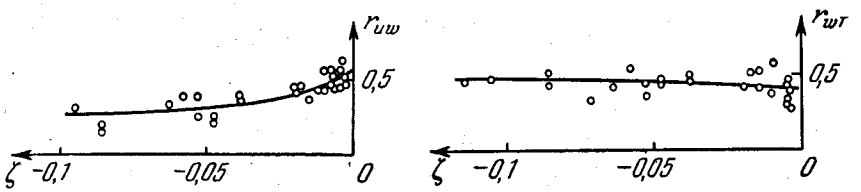


Рис. 79. Зависимость коэффициентов корреляции r_{uw} и r_{wT} от ζ при $\zeta < 0$ по эмпирическим данным.

должен быть близок к единице и должен убывать при возрастании ζ от больших отрицательных до положительных значений. О коэффициенте корреляции $r_{uT} = \mp \frac{f_7}{f_3 f_6}$, вероятно, очень небольшом по абсолютной величине, прямых эмпирических данных также пока нет.

Значения коэффициентов C_5' и C_6' в асимптотических формулах (7.87′), относящихся к условиям свободной конвекции, были оценены Перепелкиной (1962) по данным пульсационных измерений вблизи пос. Цимлянское (частично опубликованных в работах Гурвича (1960) и Цванга (1960)) в предположении, что эти асимптотические формулы справедливы при $\mathrm{Ri} < -0{,}04$. При этом оказалось, что $C_5' \approx 1{,}2$, $C_6' \approx 1{,}1$ (т. е. $C_5 \approx 1{,}6$, $C_6 \approx 0{,}3$); близкие (но несколько бо́льшие) значения этих коэффициентов получаются и по данным менее точных измерений Суинбенка (1955).

Имеющиеся пока скудные эмпирические данные о коэффициенте асимметрии $\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3} = \frac{f_8}{f_5^3}$ недостаточны для построения графика функции $f_8(\zeta)$, но подтверждают, что при $\zeta < 0$ эта

функция положительна (как это и предсказывалось на стр. 403). Так, согласно Дикону (1955), значения $\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3}$ при неустойчивой стратификации заключаются между 0,24 и 0,81, причем с ростом неустойчивости эти значения заметно возрастают. Аналогично Гурвич (1960) получил для $\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3}$ ряд положительных значений порядка $0{,}4 \div 0{,}6$. О значениях коэффициента асимметрии $\frac{\overline{T'^3}}{\sigma_T^3} = \frac{f_9}{f_6^3}$ данных еще меньше, но, исходя из весьма предварительных результатов Перепелкиной (1957), можно заключить, что и он положителен.

Из зависимости коэффициентов корреляции r_{uw} и r_{wT} и коэффициента асимметрии $\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3}$ от ζ можно заключить, что плотность многомерного распределения вероятностей для нормированных пульсаций $\frac{u'}{\sigma_u}$, $\frac{v'}{\sigma_v}$, $\frac{w'}{\sigma_w}$ и $\frac{T'}{\sigma_T}$ меняется с изменением стратификации, т. е. что форма этого распределения вероятностей не является универсальной. По-видимому, уже и форма одномерных распределений величин $\frac{w'}{\sigma_w}$ и $\frac{T'}{\sigma_T}$ не является универсальной, а зависит от ζ (см., в частности, работу Перепелкиной (1957)). Что же касается распределений вероятностей для $\frac{u'}{\sigma_u}$ и $\frac{v'}{\sigma_v}$, то они, вероятно, при любой стратификации близки к распределению Гаусса (это подтверждается, в частности, данными Дикона (1955), касающимися третьих и четвертых моментов распределения для $\frac{u'}{\sigma_u}$).

Некоторые оценки величины $\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2}} = \frac{u_*^3}{2L}f'_{10}(\zeta)$, описывающей вертикальную диффузию турбулентной энергии, содержатся в работах Р. Тэйлора (1952) и Пановского (1962) (см. также Ламли и Пановский (1964)); косвенным образом такие оценки можно извлечь также из данных Дикона (1955) об изменении турбулентной энергии с высотой. Согласно данным Тэйлора, на небольших высотах (бо́льшая часть его данных относится к высоте $z=2$ м) указанная величина пренебрежимо мала по сравнению с остальными членами уравнения баланса турбулентной энергии (6.46). С этим фактом согласуется и то, что Дикон обнаружил лишь малую разницу между значениями

турбулентной энергии на высотах 1,75 и 29 м (кроме случаев очень сильной неустойчивости). В то же время по предварительным данным Пановского, относящимся к более высокому слою в пределах от $z = 25$ до $z = 100$ м, на этих высотах при заметной неустойчивости диффузия энергии играет уже очень значительную роль в общем балансе турбулентной энергии и по порядку величины совпадает с притоком энергии за счет термической неустойчивости (т. е. за счет преобразования потенциальной энергии плотностного расслоения).

Эмпирические данные о функциях $\varphi_\varepsilon(\zeta)$ и $\varphi_N(\zeta)$ пока также очень бедны. Недавно Такеучи (1962) на основе имеющихся данных о $f(\zeta)$ построил график функции $\varphi_\varepsilon^{(1)}(\zeta) = \zeta f'(\zeta) - \zeta$ (совпадающей с $\varphi_\varepsilon(\zeta)$, если только верна формула (7.103)); на этот график он нанес оценки значений $\frac{\varkappa z\bar{\varepsilon}}{u_*^3}$ при различных ζ, полученные исходя из некоторых измерений Суинбенка и Гурвича с помощью метода, о котором мы будем говорить в ч. 2 настоящей книги. При этом, однако, оказалось, что эмпирические оценки $\varphi_\varepsilon(\zeta)$ обнаруживают очень большой разброс, так что проверку точности формулы (7.103) приходится отложить до времени, когда появятся более точные и более полные эмпирические данные о значениях $\bar{\varepsilon}$.

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

§ 9. ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

9.1. Уравнения гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа

В предыдущих главах мы все время пользовались эйлеровым методом описания движений жидкости. При использовании этого метода поток несжимаемой жидкости (которую мы только и будем рассматривать в настоящей главе) в момент t характеризуется полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, т. е. значениями вектора скорости во всевозможных точках $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ пространства (в настоящей главе по причинам, которые будут ясны из дальнейшего, нам будет удобно, как правило, обозначать координаты через X_i, а не через x_i, как в предыдущих главах). Уравнения гидродинамики (из которых давление можно исключить с помощью (1.9)) при этом позволяют (во всяком случае, в принципе) определить значения переменных Эйлера $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ в любой момент времени $t > t_0$ по заданным начальным значениям $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t_0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$. Однако для изучения таких явлений, как турбулентная диффузия (т. е. распространение примесей в турбулентном потоке) или деформация материальных (состоящих из фиксированных элементов жидкости) поверхностей и линий в турбулентном потоке, использование переменных Эйлера неудобно, а более удобным оказывается лагранжев метод описания движений жидкости. Этот метод заключается в том, что вместо скоростей жидкости в фиксированных точках $\boldsymbol{X}$ пространства здесь за основу берется движение фиксированных «жидких частиц», прослеживаемое начиная от некоторого начального момента времени $t = t_0$. Под «жидкими частицами» при этом понимаются объемы жидкости, линейные размеры которых очень велики по сравнению со средним расстоянием между молекулами (так что для соответствующих объемов имеет смысл говорить об их скорости, оставаясь в рамках механики сплошной среды), но все же настолько малы, что скорость и давление внутри частицы можно считать практически постоянными, и что в течение рассматриваемых промежутков времени эти частицы можно считать перемещающимися «как одно целое» (т. е. без заметной деформации). Иначе говоря, «жидкая частица» представляет собой выделенную «точку» объема жидкости, перемещающуюся внутри этого объема в соответствии с уравнениями гидромеханики. Лагранжев метод описания самым непосредственным образом связан с реальными движениями отдельных элементов жидкости, составляющими в совокупности гидродинамический поток, и поэтому он представляется даже более естественным, чем эйлеров метод описания. В то же время в аналитическом отношении использование переменных Лагранжа, относящихся к индивидуальным частицам жидкости, оказывается гораздо более громоздким, чем использование переменных Эйлера $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, вследствие чего уравнения гидродинамики в форме Лагранжа довольно редко используются при конкретных расчетах. Если для случая идеальной (невязкой) жидкости такие уравнения все же приводятся в некоторых учебниках (см., например, Ламб (1932)), то для случая вязкой жидкости соответствующие уравнения до сих пор очень мало изучены; вывод этих уравнений, позволяющий записать их в сравнительно компактном виде, впервые был опубликован, по-видимому, лишь сравнительно недавно Гербером (1949) (см. также Монин (1962в)). Хотя использование лагранжевых уравнений гидродинамики вязкой жидкости в задачах теории турбулентности еще является делом будущего, мы приведем здесь все же вывод этих уравнений, попутно вводя ряд понятий и обозначений, которые будут далее постоянно использоваться в настоящей главе.

Исчерпывающей лагранжевой характеристикой потока несжимаемой жидкости может служить функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$, задающая для любого момента времени t координаты $\boldsymbol{X}$ всевозможных «жидких частиц», идентифицируемых по значениям некоторого параметра $\boldsymbol{x}$. Уравнения гидродинамики в принципе должны позволить определить значения $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ при любых $t > t_0$ по заданным начальным значениям скоростей «жидких частиц» $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$, т. е. по величинам

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

Связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками дается соотношением

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]. \tag{9.1}$$

Переход от эйлеровых уравнений гидродинамики к лагранжевым заключается в замене независимых переменных $(\boldsymbol{X}, t)$ на $(\boldsymbol{x}, t)$ и переходе от неизвестной функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ к новой неизвестной $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$, связанной с $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ формулой (9.1).

Далее в настоящем параграфе мы всегда будем использовать в качестве лагранжевых параметров «жидких частиц» $\boldsymbol{x}$ начальные значения их пространственных координат $\boldsymbol{X}$ в момент $t = t_0$, т. е. положим

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t_0). \tag{9.2}$$

При этом функция двух переменных $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ описывает семейство траекторий «жидких частиц», находившихся в начальный момент времени $t = t_0$ во всевозможных точках $\boldsymbol{x}$ объема, занятого жидкостью. Ясно, что и в любой момент $t > t_0$ точки $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ соответствующие всевозможным допустимым значениям $\boldsymbol{x}$, непрерывно заполняют весь объем, занятый жидкостью. Таким образом, мы видим, что лагранжев метод заключается в задании потока жидкости в виде семейства траекторий (отличающихся друг от друга значениями $\boldsymbol{x}$), на каждой из которых роль параметра играет время t. Отметим, что согласно сказанному выше «жидкие частицы», соответствующие этим траекториям, фактически представляют собой математические точки, плывущие вместе с жидкостью.

Перейдем теперь к выводу лагранжевых уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости. Будем пользоваться декартовыми компонентами векторов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{x}$, которые обозначим (X_1, X_2, X_3) и (x_1, x_2, x_3) соответственно. Как указывалось выше, переход от эйлеровых уравнений гидродинамики к лагранжевым заключается прежде всего в замене независимых переменных (X_1, X_2, X_3, t) на (x_1, x_2, x_3, t). Подчеркнем, что при этой замене переменных мы переходим от декартовых координат к нестационарным криволинейным и неортогональным координатам, сопутствующим движению жидкости. Действительно, каждая координатная поверхность $x_i = \text{const}$ во все моменты времени состоит из одних и тех же «жидких частиц»; в начальный момент времени такие поверхности суть плоскости, но с течением времени они, перемещаясь вместе с жидкостью, искривляются.

Далее мы будем использовать для якобианов по переменным (x_1, x_2, x_3) сокращенное обозначение

$$\frac{\partial (A, B, C)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = [A, B, C] \tag{9.3}$$

и будем учитывать, не оговаривая этого, то обстоятельство, что величина $[A, B, C]$ не меняется при циклической перестановке переменных A, B, C и меняет знак при их ациклической перестановке.

При переходе от эйлеровых координат X_α к лагранжевым x_β большую роль играет матрица

$$M = \left\| \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} \right\|; \quad \det M = |M| = [X_1, X_2, X_3]. \tag{9.4}$$

Согласно (9.2) в начальный момент времени $\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, т. е. матрица M является единичной, а $|M| = 1$. Величины $\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_\beta}$ суть элементы обратной матрицы M^{-1}, т. е. алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$ в матрице M, деленные на $|M|$. Отсюда для вычисления производных по эйлеровым координатам X_i получаем формулу

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{1}{|M|}[X_j, X_k, f]. \tag{9.5}$$

Здесь и в дальнейшем под (i, j, k) всегда подразумевается циклическая перестановка индексов (1, 2, 3). В справедливости формулы (9.5) легко убедиться, записав ее левую часть в виде $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i}$ (где по повторяющемуся индексу α, как обычно, подразумевается суммирование); такое же выражение получается в правой части при разложении входящего в нее детерминанта по элементам столбца f.

Из (9.1) и (9.5) вытекает следующее соотношение для дивергенции скорости:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial X_\alpha}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{|M|}\left\{\left[\frac{\partial X_1}{\partial t}, X_2, X_3\right] + \left[X_1, \frac{\partial X_2}{\partial t}, X_3\right] + \left[X_1, X_2, \frac{\partial X_3}{\partial t}\right]\right\} = \frac{1}{|M|}\frac{\partial |M|}{\partial t}$$

(где u_α — декартовы компоненты поля скорости). В случае несжимаемой жидкости дивергенция скорости тождественно равна нулю, так что $\frac{\partial |M|}{\partial t} \equiv 0$ и, следовательно, $|M|$ не меняется со временем. Поскольку в начальный момент времени $|M| = 1$, это равенство остается справедливым и для любого

момента времени. Вспоминая выражение (9.4) для $|M|$, имеем

$$[X_1, X_2, X_3] = 1. \tag{9.6}$$

Это равенство и играет роль уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости (вязкой или идеальной, безразлично) в лагранжевых переменных.

Далее мы будем пользоваться формулой (9.5), полагая в ее правой части $|M| = 1$. Дважды используя эту формулу, для оператора Лапласа по эйлеровым координатам X_α получаем выражение

$$\Delta_X f = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial f}{\partial X_\alpha} =$$

$$= [X_2, X_3, [X_2, X_3, f]] + [X_3, X_1, [X_3, X_1, f]] + [X_1, X_2, [X_1, X_2, f]]. \tag{9.7}$$

Теперь мы можем уже без всякого труда перейти к лагранжевым переменным в уравнениях Навье — Стокса

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_i} + \nu\Delta_X u_i. \tag{9.8}$$

Пользуясь формулами (9.1), (9.5) и (9.7), получаем

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[X_j, X_k, p] + \nu\left\{\left[X_2, X_3, \left[X_2, X_3, \frac{\partial X_i}{\partial t}\right]\right] + \right.$$

$$\left. + \left[X_3, X_1, \left[X_3, X_1, \frac{\partial X_i}{\partial t}\right]\right] + \left[X_1, X_2, \left[X_1, X_2, \frac{\partial X_i}{\partial t}\right]\right]\right\}. \tag{9.9}$$

Уравнения (9.6) и (9.9) относительно неизвестных $X_i(\boldsymbol{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$ и $p(\boldsymbol{x}, t)$ образуют полную систему уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа.

Отметим, что нелинейным относительно основных динамических переменных слагаемым в уравнениях движения соответствуют силы, описывающие взаимодействие между компонентами механической системы. Так, в уравнениях Навье — Стокса (9.8) нелинейные (а именно, квадратичные) относительно переменных u_i слагаемые содержатся в выражении для ускорения $\frac{du_i}{dt}$; им соответствуют силы инерционного взаимодействия между пространственными неоднородностями поля скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, через которые (с помощью формулы (1.9′)) выражается и градиент давления (подчеркнем, что силы вязкости описываются в (9.8) линейными выражениями). Однако инерционные взаимодействия имеют относительный характер — они устраняются при переходе к сопутствующей системе отсчета. В лагранжевых уравнениях движения (9.9) нелинейными относительно переменных X_i выражениями описываются уже лишь реальные силы взаимодействия между жидкими частицами — силы давления и вязкости (причем силы вязкого взаимодействия здесь описываются нелинейными выражениями пятой степени относительно переменных X_i). Отношение типичных для данной задачи значений нелинейных и линейных слагаемых в уравнениях движения можно назвать константой взаимодействия. Так, в случае уравнений Навье — Стокса (9.8) константой инерционного взаимодействия является отношение типичных значений сил инерции и сил вязкости, т. е. число Рейнольдса Re; при достаточно больших Re (характерных для развитой турбулентности) инерционные взаимодействия оказываются весьма сильными. В лагранжевом описании константой вязкого взаимодействия является отношение типичных значений сил вязкости к типичному ускорению, т. е. $\frac{1}{\mathrm{Re}}$; при больших Re вязкие взаимодействия оказываются весьма слабыми.

Приведем еще вид лагранжевых уравнений гидродинамики для двумерного плоскопараллельного течения. Пусть движение жидкости происходит только в плоскостях $x_3 = \mathrm{const}$ (так что $X_3 \equiv x_3$), причем X_1 и X_2 не зависят от x_3. Тогда, используя для якобианов по (x_1, x_2) обозначения вида

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = [A, B], \tag{9.10}$$

уравнения (9.6) и (9.9) нетрудно привести к виду

$$[X_1, X_2] = 1,$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[p, X_2] + \nu\left\{\left[X_1, \left[X_1, \frac{\partial X_1}{\partial t}\right]\right] + \left[X_2, \left[X_2, \frac{\partial X_1}{\partial t}\right]\right]\right\}, \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[X_1, p] + \nu\left\{\left[X_1, \left[X_1, \frac{\partial X_2}{\partial t}\right]\right] + \left[X_2, \left[X_2, \frac{\partial X_2}{\partial t}\right]\right]\right\}.$$

В этом случае вязкие силы, очевидно, описываются уже нелинейными выражениями третьей степени относительно переменных X_i.

В заключение настоящего пункта отметим, что, кроме использования соотношения (9.1), имеется еще один способ установления связи между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками потока жидкости, основанный на рассмотрении произвольных консервативных характеристик «жидких частиц» (т. е. гидродинамических характеристик, значения которых для фиксированной «жидкой частицы» не меняются при ее движении). При лагранжевом описании каждую такую характеристику можно записать в виде $\Psi(\boldsymbol{x})$, так как при фиксированном $\boldsymbol{x}$ она не зависит от времени t. При эйлеровом описании,

однако, значения ψ такой характеристики в фиксированной точке пространства $\boldsymbol{X}$ могут меняться со временем t, т. е. $\psi = \psi(\boldsymbol{X}, t)$. Связь между лагранжевым и эйлеровым описанием будет, очевидно, даваться соотношением

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \psi[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]. \tag{9.12}$$

Так как $\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{x})}{\partial t} = 0$, то и полная производная по времени от правой части должна быть равна нулю, т. е.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha}\frac{\partial X_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha} = 0,$$

где мы воспользовались формулой (9.1). Пользуясь, кроме того, уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости $\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\alpha} = 0$, получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \psi}{\partial X_\alpha} = 0. \tag{9.13}$$

Это уравнение является дифференциальным аналогом соотношения (9.12). Таким образом, эйлерово поле любой консервативной характеристики «жидких частиц» удовлетворяет *уравнению переноса* (9.13). В частности, консервативной характеристике $\Psi(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, отличной от нуля (и равной бесконечности), лишь для одной «жидкой частицы» (с начальной координатой $\boldsymbol{x}_0$) соответствует эйлерово поле

$$\psi(\boldsymbol{X}, t) = \delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, t)], \tag{9.14}$$

которое является решением уравнения переноса (9.13) при начальном условии

$$\psi(\boldsymbol{X}, t_0) = \delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}_0). \tag{9.15}$$

9.2. Лагранжевы статистические характеристики турбулентности

При статистическом описании турбулентности необходимо прежде всего указать, какие именно ее характеристики предполагаются имеющими распределения вероятностей, т. е. представляющими собой реализации некоторых случайных полей. В предыдущих главах при рассмотрении турбулентных потоков мы всегда предполагали, что случайным полем является эйлерово поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$. Но в таком случае и лагранжевы величины

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t] \text{ и } \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t')\, dt'$$

будут случайными функциями аргументов $\boldsymbol{x}$ и t. Более того, при этом для любого конечного числа n «жидких частиц» (характеризуемых тем, что в момент $t = 0$ они находились в точках $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$) будут существовать многомерные совместные плотности вероятности для их координат $\boldsymbol{X}$ и скоростей $\boldsymbol{V}$ в произвольные моменты времени $t_1, \ldots, t_m$, являющиеся функциями от $3n+m$ переменных $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, t_1, \ldots, t_m$ (где $x_{i1}\ x_{i2}, x_{i3}$ — три компоненты вектора $\boldsymbol{x}_i$). Эти многомерные плотности вероятности и являются основными лагранжевыми статистическими характеристиками турбулентности. Заметим еще, что в рассматриваемом случае будут существовать также и совместные распределения вероятности для наборов величин, часть из которых является лагранжевыми величинами (координатами или скоростями фиксированных «жидких частиц»), а часть — эйлеровыми величинами (скоростями потока в фиксированных точках); плотности таких «смешанных вероятностей» также иногда заслуживают рассмотрения.

Далее мы будем обозначать плотности вероятности символами вида $p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \ldots | \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots)$, где в скобках перед вертикальной чертой указываются возможные значения рассматриваемых случайных величин (обозначаемые теми же буквами, что и сами соответствующие величины), а после вертикальной черты — параметры, от которых эти величины зависят. В тех случаях, когда параметры, отвечающие нескольким величинам, совпадают, мы будем их указывать после черты только один раз (если при этом не возникает опасность путаницы).

Между различными лагранжевыми (и смешанными) статистическими характеристиками турбулентности существует целый ряд общих соотношений; некоторые из них мы и укажем в настоящем пункте. Начнем с соотношений, являющихся следствиями «уравнения переноса» (9.13). Учитывая, что выражение (9.14) является решением этого уравнения и что, согласно (9.1),

$$u_\alpha(\boldsymbol{X}, t)\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)] = u_\alpha[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)] = V_\alpha(\boldsymbol{x}, t)\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)],$$

получим

$$\frac{\partial \delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]}{\partial t} + \frac{\partial V_\alpha(\boldsymbol{x}, t)\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]}{\partial X_\alpha} = 0.$$

Но в силу самого определения теоретико-вероятностного осреднения (см. (3.12))

$$\overline{\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]} = p(\boldsymbol{X} | \boldsymbol{x}, t),$$

$$\overline{V_\alpha(\boldsymbol{x}, t)\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]} = \int V_\alpha p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V} | \boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{V}.$$

Следовательно, осреднив уравнение для $\delta[X - X(x, t)]$, будем иметь

$$\frac{\partial p(X|x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\int V_\alpha p(X, V|x, t)\,dV = 0. \qquad (9.16)$$

Это уравнение и является статистическим аналогом «уравнения переноса» (9.13).

Другой тип соотношений между статистическими характеристиками можно получить, введя в рассмотрение наряду с лагранжевой скоростью $V(x, t)$, представляющей собой значение случайной функции $u(X, t)$ в случайной точке $X(x, t)$, также и случайную величину $V(X_1, x, t)$, относящуюся к фиксированной точке $X_1 = X(x, t)$. Значениями этой величины являются скорости тех жидких частиц, которые в момент $t = t_0$ находились в точке x, а в момент t оказались в фиксированной точке X_1, а ее плотность вероятности $p(V|X_1, x, t)$ — это условная плотность вероятности величины $V(x, t)$ при условии, что $X(x, t) = X_1$. Поэтому, строго говоря, величина $V(X_1, x, t)$ не является ни чисто лагранжевой, ни чисто эйлеровой. Однако можно ожидать, что при возрастании $t - t_0$ зависимость распределения вероятности для этой величины от значения x, как правило, будет становиться все менее и менее существенной. При достаточно больших по сравнению с лагранжевым «временем корреляции»

$$T = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\overline{V_l(x, t)\,V_l(x, t_0)}}{[\overline{V^2(x, t)}\;\overline{V^2(x, t_0)}]^{1/2}}\,dt$$

значениях $t - t_0$ этой зависимостью, по-видимому, в ряде случаев вообще можно пренебречь, так что случайную величину $V(X_1, x, t)$ при таких $t - t_0$ часто можно считать эквивалентной эйлеровой случайной величине $u(X_1, t)$. Подчеркнем, впрочем, что иногда замена $V(X_1, x, t)$ на $u(X_1, t)$ может оказаться незаконной при любых значениях $t - t_0$; так, например, в дальнейшем мы увидим, что в турбулентном пограничном слое над плоскостью $x_3 = 0$ всегда $\overline{V_3(X_1, x, t)} > 0$ (в частности, в области приложимости логарифмического закона для профиля средней скорости $\overline{V_3(X_1, x, t)} = \text{const} \approx 0{,}1\,u_*$), в то время как $\overline{u_3(X_1, t)} = 0$.

Нетрудно видеть, что совместную плотность вероятности для скоростей n «жидких частиц» $V(x_1, t_1), \ldots, V(x_n, t_n)$ (взятых в разные моменты времени $t_1, \ldots, t_n$) можно представить

в виде

$$p(V_1, \ldots, V_n|x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \int \ldots \int p(V_1, \ldots, V_n|X_1, \ldots, X_n; x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \times p(X_1, \ldots, X_n|x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\,dX_1 \ldots dX_n, \qquad (9.17)$$

где первый множитель под знаком интеграла есть условная плотность вероятности для указанных скоростей «жидких частиц» при условии, что их координаты в соответствующие моменты времени принимают фиксированные значения $X(x_1, t_1) = X_1, \ldots, X(x_n, t_n) = X_n$. Если все рассматриваемые «жидкие частицы» различны (т. е. среди начальных точек $x_1, \ldots, x_n$ никакие две не одинаковы), то этот первый множитель есть совместная плотность вероятности для случайных величин $V(X_1, x_1, t_1), \ldots, V(X_n, x_n, t_n)$, введенных выше. Второй множитель под знаком интеграла в (9.17) есть совместная плотность вероятности для лагранжевых случайных величин $X(x_1, t_1), \ldots, X(x_n, t_n)$. Формула (9.17) (принадлежащая, так же как и рассматриваемые ниже ее следствия, Монину (1960)) является частным случаем общей «теоремы о полной вероятности» теории вероятностей. Отметим, что если все рассматриваемые «жидкие частицы» различны и все разности $t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_0$ достаточно велики, то зависимость первого множителя под знаком интеграла в правой части (9.17) от аргументов $x_1, \ldots, x_n$ в ряде случаев можно считать несущественной. При этом указанный множитель можно отождествлять с плотностью вероятности для значений поля скорости $V_1 = u(X_1, t_1), \ldots, V_n = u(X_n, t_n)$ в фиксированных точках, так что формула (9.17) здесь становится соотношением между лагранжевыми и эйлеровыми статистическими характеристиками турбулентности.

Рассмотрим особо частный случай формулы (9.17) при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n (= x)$, когда эта формула содержит плотности вероятности для координат и скоростей одной и той же «жидкой частицы» в разные моменты времени. При $n = 1$ получаем

$$p(V|x, t) = \int p(V|X, x, t)\,p(X|x, t)\,dX. \qquad (9.18)$$

Как уже отмечалось, при достаточно больших $t - t_0$ функцию $p(V|X, x, t)$ иногда можно отождествить с плотностью вероятности для значений $V = u(X, t)$ эйлерова поля скорости в фиксированной точке пространства-времени (X, t) (в этом смысле формулу (9.18) можно считать статистическим аналогом основного соотношения (9.1), связывающего лагранжеву и эйлерову скорости потока). Подставляя теперь формулу (9.18) в выражение

для среднего значения $\overline{V(x, t)}$, вытекающее из общей формулы (3.12), получим

$$\overline{V(x, t)} = \int \overline{V(X, x, t)}\, p(X \mid x, t)\, dX. \qquad (9.19)$$

В тех случаях, когда зависимость $V(X, x, t)$ от x исчезает при $t - t_0 \to \infty$, последнюю формулу при достаточно больших $t - t_0$ можно переписать в виде

$$\overline{V(x, t)} = \int \overline{u(X, t)}\, p(X \mid x, t)\, dX. \qquad (9.20)$$

Для совместного распределения вероятностей значений $V_1 = V(x, t_0)$ и $V_2 = V(x, t)$ скорости одной и той же «жидкой частицы» в два последовательных момента времени t_0 и $t > t_0$ формула (9.17) приводит к соотношению

$$p(V_1, V_2 \mid x, t_0, t) = \int p(V_1, V_2 \mid X; x, t_0, t)\, p(X \mid x, t)\, dX, \qquad (9.21)$$

где первый множитель под знаком интеграла есть совместная плотность вероятности для величин $V_1 = V(x, t_0) = u(x, t_0)$ и $V_2 = V(X, x, t)$. Отсюда для *лагранжевой корреляционной функции скорости* (т. е. смешанного второго момента $\overline{V_{1i}V_{2j}}$ распределения (9.21), где индексы i и j нумеруют компоненты векторов V_1 и V_2) получается соотношение

$$\overline{V_i(x, t_0)\, V_j(x, t)} = \int \overline{u_i(x, t_0)\, V_j(X, x, t)}\, p(X \mid x, t)\, dX. \qquad (9.22)$$

При достаточно больших (по сравнению с лагранжевым «временем корреляции») значениях $t - t_0$ корреляционную функцию скоростей под знаком интеграла можно с известным основанием отождествить с более простой эйлеровой пространственно-временной корреляционной функцией $\overline{u_i(x, t_0)\, u_j(X, t)}$. Однако при таких $t - t_0$ величины $V_i(x, t_0)$ и $V_j(x, t)$ (а также величины $u_i(x, t_0)$ и $u_j(X, t)$) уже можно считать практически некоррелированными, так что в данном случае асимптотический вид формулы не представляет большого интереса. Заметим еще, что левая часть формулы (9.22) не является самой общей лагранжевой корреляционной функцией скорости, так как здесь в один из рассматриваемых моментов времени (именно, в момент t_0) координата соответствующей «жидкой частицы» имеет фиксированное значение (равное x). Более общей является лагранжева корреляционная функция $\overline{V_i(x, t_1)\, V_j(x, t_2)}$, где $t_2 > t_1 > t_0$; для нее с помощью формулы (9.17) можно получить выражение

вида

$$\overline{V_i(x, t_1)\, V_j(x, t_2)} = \int\int \overline{V_i(X_1, x, t_1)\, V_j(X_1, X_2, x, t_1, t_2)} \times \times p(X_1, X_2 \mid x, t_1, t_2)\, dX_1\, dX_2, \qquad (9.23)$$

где $V(X_1, X_2, x, t_1, t_2)$ означает случайную скорость жидкой частицы в момент t_2 при условии, что в моменты t_0, t_1 и t_2 эта частица находилась в фиксированных точках x, X_1 и X_2 соответственно. При достаточно большом $t_1 - t_0$ величину $V(X_1, x, t_1)$ часто можно с известным основанием считать эквивалентной $u(X_1, t_1)$; точно так же при достаточно большом $t_2 - t_1$ величину $V(X_1, X_2, x, t_1, t_2)$ часто можно считать эквивалентной $u(X_2, t_2)$.

9.3. Характеристики смещения фиксированной жидкой частицы; случай однородной турбулентности

Движение одной жидкой частицы (скажем, той, которая в момент $t = t_0$ находилась в точке x) полностью описывается векторной функцией $X(x, t)$, задающей положение этой частицы в произвольный момент времени t. Вместо вектора $X(x, t)$ можно использовать также вектор смещения частицы за промежуток времени τ

$$Y(\tau) = X(x, t_0 + \tau) - x = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V(x, t)\, dt, \qquad (9.24)$$

что обычно оказывается более удобным. В настоящем пункте мы специально рассмотрим вопрос о статистических характеристиках случайного вектора $Y(\tau)$.

Полное описание величины $Y(\tau)$ требует задания ее трехмерной плотности вероятности $p(Y \mid \tau; x, t_0)$ (зависящей от τ, x и t_0 как от параметров). Нетрудно видеть, что в случае очень малого (по сравнению с масштабом времени T, задаваемым типичным лагранжевым «временем корреляции») значения τ эта плотность вероятности может быть выражена через эйлеровы статистические характеристики турбулентности. В самом деле, при $\tau \ll T$ лагранжева скорость практически не изменится за время τ, так что равенство (9.24) здесь можно переписать в виде $Y(\tau) \approx V(x, t_0)\tau = u(x, t_0)\tau$. Поэтому плотность вероятности для $Y(\tau)$ в этом случае можно преобразовать к виду

$$p(Y \mid \tau; x, t_0) \approx \tau^{-3} P\left(\frac{Y}{\tau} \,\middle|\, x, t_0\right), \qquad (9.25)$$

где $P(\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{x},\ t_0)$ — плотность вероятности (эйлеровой) скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t_0)$ в фиксированной точке $\boldsymbol{x}$ в момент t_0. Если рассматриваемое турбулентное течение является установившимся, то плотность $P(\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{x},\ t_0)$ может быть без большого труда определена с помощью анализа данных наблюдений за скоростью в точке $\boldsymbol{x}$ в течение длительного промежутка времени. Так, например, в случае турбулентного потока в аэродинамической трубе, в начальной части которого установлена решетка с квадратными ячейками (создающая ниже по течению сильную турбулентность), данные измерений Симмонса и Солтера (1938) и Таунсенда (1947) убедительно показывают, что распределение $P(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x}$ (а следовательно, и $p(\boldsymbol{Y}|\tau,\ \boldsymbol{x})$ при $\tau \ll T$) весьма близко к нормальному распределению.

При не слишком малом τ распределение $p(\boldsymbol{Y}|\tau;\ \boldsymbol{x}, t_0)$ уже не может быть выражено через эйлеровы статистические характеристики. Однако, если $\tau \gg T$, то можно использовать то обстоятельство, что правая часть (9.24) в этом случае может быть представлена в виде суммы ряда интегралов, берущихся по непересекающимся интервалам времени продолжительности $> T$, и являющихся слабо зависимыми случайными величинами. Поэтому можно думать, что к соответствующей сумме должна быть применима так называемая *центральная предельная теорема для слабо зависимых случайных величин*, согласно которой распределение вероятностей суммы большого числа таких величин при некоторых широких условиях оказывается очень близким к нормальному. В последние годы центральная предельная теорема была при некоторых условиях доказана и непосредственно для интегралов вида (9.24) (см., например, Розанов (1963), где рассмотрен случай интеграла от стационарной случайной функции; близкие теоремы имеются и для интегралов от некоторых нестационарных случайных функций). К сожалению, прямо воспользоваться этими доказательствами все же нельзя, так как фигурирующие в них условия, налагаемые на случайные функции, не могут быть точно проверены в применении к характеристикам реальных процессов [1]). Тем не менее, эти условия настолько естественны, что было бы крайне странно, если бы распределение вероятностей для смещения $\boldsymbol{Y}(\tau)$ при $\tau \gg T$ существенно отличалось от нормального распределения. В некоторых случаях распределение для $\boldsymbol{Y}(\tau)$ (или хотя бы для отдельных компонент этого вектора) может быть найдено экспериментально с помощью измерения распределения концентрации в различных сечениях «облака», создаваемого помещенным в поток источником примеси (например, распределения температуры в различных сечениях «теплового следа» за нагретым телом). Таким образом удалось и экспериментально показать, что во многих турбулентных потоках распределение для $\boldsymbol{Y}(\tau)$ при больших τ действительно очень близко к нормальному, причем в частном случае турбулентности в аэродинамической трубе за решеткой оказалось даже, что оно является почти нормальным и при всех вообще значениях τ (см., например, Коллис (1948), Таунсенд (1951), Уберои и Корсин (1953)). Последнее обстоятельство не кажется удивительным, так как в этом случае, как мы видели, распределение для $\boldsymbol{Y}(\tau)$ должно быть нормальным и при малых, и при больших значениях τ; поэтому его близость к нормальному при всех τ означает только, что при промежуточных значениях τ здесь не происходит очень резкой перестройки формы соответствующего распределения. В общем же случае нет никаких оснований ожидать, что распределение для $\boldsymbol{Y}(\tau)$ будет близким к нормальному также и при не слишком больших значениях τ.

[1]) Так, например, ряд доказательств использует так называемое *условие сильного перемешивания*, которое в применении к функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$, грубо говоря, сводится к требованию, чтобы коэффициент корреляции между произвольным функционалом от значений $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t')$, $-\infty < t' < t_0$, и произвольным функционалом от значений $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t'')$, $t_0 + \tau < t'' < \infty$, был бы по модулю меньше такого числа $\alpha(\tau)$, что $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению важнейших числовых характеристик случайного вектора $\boldsymbol{Y}(\tau)$ — его первых и вторых моментов. Среднее значение этого вектора, очевидно, равно

$$\overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\ t)}\, dt. \tag{9.26}$$

Исходя отсюда, можно показать, что в ряде важных частных случаев $\overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \boldsymbol{U}\tau$, где $\boldsymbol{U}$ — соответственно определенная средняя скорость течения (см. примеры ниже). После этого остается только еще исследовать характеристики пульсации смещения

$$\boldsymbol{Y}'(\tau) = \boldsymbol{Y}(\tau) - \overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},\ t)\, dt.$$

Тензор вторых моментов этого случайного вектора будет задаваться формулой

$$D_{ij}(\tau) = \overline{Y_i'(\tau)\, Y_j'(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \overline{V_i'(\boldsymbol{x},\ t_1)\, V_j'(\boldsymbol{x},\ t_2)}\, dt_1\, dt_2; \tag{9.27}$$

его естественно назвать тензором дисперсии смещения «жидкой частицы». Отметим, что в случаях, когда распределение для

$\boldsymbol{Y}(\tau)$ можно считать нормальным, вектор (9.26) и тензор (9.27) исчерпывающим образом характеризуют это распределение.

При достаточно малых τ, при которых $\boldsymbol{Y}'(\tau) \approx \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t_0)\tau$, из (9.27) получаем

$$D_{ij}(\tau) \approx \overline{u_i'(\boldsymbol{x}, t_0)\, u_j'(\boldsymbol{x}, t_0)} \cdot \tau^2 = B_{ij}\tau^2. \tag{9.28}$$

Коэффициенты $B_{ij} = \overline{u_i'(\boldsymbol{x}, t_0)\, u_j'(\boldsymbol{x}, t_0)}$ в случае установившихся турбулентных течений будут зависеть только от $\boldsymbol{x}$, а при дополнительном предположении об однородности случайного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ вообще будут постоянными. Конкретные же сведения о виде функций $D_{ij}(\tau)$ при не слишком малом τ удается получить только для некоторых частных классов турбулентных потоков.

Рассмотрим, в первую очередь, идеализированный случай стационарной однородной турбулентности, в которой все гидродинамические поля являются однородными случайными полями в трехмерном пространстве и одновременно стационарными функциями от времени t. В этом случае средняя скорость $\bar{\boldsymbol{u}}$ является постоянной и в пространстве, и во времени и, следовательно, $\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)} = \overline{\boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]} = \bar{\boldsymbol{u}}$, $\overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \bar{\boldsymbol{u}}\tau$. Далее, пульсационная скорость жидкой частицы $\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t)$ здесь при всех $\boldsymbol{x}$ будет иметь одни и те же статистические характеристики и будет стационарной случайной функцией от t, так что

$$\overline{V_i'(\boldsymbol{x}, t_1)\, V_j'(\boldsymbol{x}, t_2)} = B_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1) = (\overline{u_i'^2}\,\overline{u_j'^2})^{\frac{1}{2}} R_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1) \tag{9.29}$$

(буква L здесь указывает, что соответствующие функции являются лагранжевыми корреляционными функциями). Перейдя теперь к переменным $s = t_2 - t_1$ и $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, формулу (9.27) можно переписать в виде

$$D_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} \int_{t_0 + \frac{s}{2}}^{t_0 + \tau - \frac{s}{2}} [B_{ij}^{(L)}(s) + B_{ji}^{(L)}(s)]\, dt\, ds =$$

$$= (\overline{u_i'^2}\,\overline{u_j'^2})^{\frac{1}{2}} \int_0^{\tau} \int_{t_0 + \frac{s}{2}}^{t_0 + \tau - \frac{s}{2}} [R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)]\, dt\, ds \tag{9.30}$$

или, после выполнения интегрирования по t,

$$D_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} (\tau - s)\, [B_{ij}^{(L)}(s) + B_{ji}^{(L)}(s)]\, ds =$$

$$= (\overline{u_i'^2}\,\overline{u_j'^2}) \int_0^{\tau} (\tau - s)\, [R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)]\, ds. \tag{9.30'}$$

Результат типа (9.30) для дисперсии одной компоненты $\boldsymbol{Y}(\tau)$ впервые был получен в ставшей уже классической работе Тэйлора (1921); в виде (9.30') он был представлен Кампе де Ферье (1939) в случае $i = j$ и Бэтчелором (1949б) в общем случае. При $i = j$ формула (9.30') обращается в соотношение

$$D_{ii}(\tau) = 2\int_0^{\tau} (\tau - s)\, B_{ii}^{(L)}(s)\, ds = 2\overline{u_i'^2} \int_0^{\tau} (\tau - s)\, R_{ii}^{(L)}(s)\, ds \tag{9.31}$$

(здесь, так же как и ниже в формулах (9.32)—(9.35), суммирование по i не предполагается!). Примем теперь естественное допущение, что лагранжева корреляционная функция $R_{ii}^{(L)}(s)$ стремится к нулю при $s \to \infty$ и притом настолько быстро, что существует конечное «время корреляции»

$$T_i = \int_0^{\infty} R_{ii}^{(L)}(s)\, ds \tag{9.32}$$

(за лагранжев временной масштаб T, упоминавшийся выше, при этом можно принять максимальное или среднее значение трех величин T_i, $i = 1, 2, 3$). Предполагая еще, что и интеграл

$$\int_0^{\infty} sR_{ii}^{(L)}(s)\, ds = S_i \tag{9.33}$$

является конечным, можно при достаточно большом τ (а именно, при $\tau \gg T_i$) заменить (9.31) асимптотическим соотношением

$$D_{ii}(\tau) \approx 2\overline{u_i'^2} \int_0^{\infty} (\tau - s)\, R_{ii}^{(L)}(s)\, ds = 2\overline{u_i'^2}\,(T_i\tau - S_i). \tag{9.34}$$

При очень большом τ основную роль в правой части (9.34) будет играть линейный по τ член, так что (9.34) можно будет переписать в виде

$$D_{ii}(\tau) \approx 2\overline{u_i'^2}\, T_i\tau \tag{9.35}$$

(последний результат, как легко видеть, может быть получен и без предположения о конечности интеграла (9.33)). Аналогично этому для $D_{ij}(\tau)$ при очень большом τ получается соотношение

$$D_{ij}(\tau) \approx (\overline{u_i'^2}\,\overline{u_j'^2})^{\frac{1}{2}} T_{ij}\tau;\ T_{ij} = \int_0^\infty [R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)]\, ds. \quad (9.36)$$

Равенство (9.35) показывает, что дисперсия смещения частицы за достаточно большое время τ оказывается пропорциональной τ. Этот результат вполне аналогичен основному закону брауновского движения (т. е. молекулярной диффузии), согласно которому средний квадрат смещения броуновской частицы (или любой частицы, участвующей в молекулярной диффузии) пропорционален времени движения (диффузии). При очень малых τ дисперсия смещения в силу (9.28) квадратично зависит от τ, как это и должно быть при любом движении, происходящем с конечной скоростью. При промежуточных значениях τ зависимость $D_{ii}(\tau)$ от τ оказывается более сложной и зависит уже от формы корреляционной функции $R_{ii}^{(L)}(s)$ (см., например, графики функций $D_{ii}(\tau)$, отвечающих нескольким частным формам функции $R_{ii}^{(L)}(s)$, приведенные в работах Френкиля (1952, 1953) и в книге Паскуила (1926б)). Заметим еще, что согласно данным Френкиля и Паскуила большие изменения значений $D_{ii}(\tau)$ при изменении формы функции $R_{ii}^{(L)}(s)$ возникают, лишь если допустить, что функция $R_{ii}^{(L)}(s)$ может принимать и отрицательные значения и много раз менять знак при возрастании аргумента s. В случае же функций $R_{ii}^{(L)}(s)$, остающихся всюду неотрицательными, зависимость $D_{ii}(\tau)$ от конкретной формы функции $R_{ii}^{(L)}(s)$ оказывается весьма слабой, причем асимптотическая формула (9.28) здесь достаточно хорошо выполняется при всех $\tau \leqslant T_i$, а асимптотическая формула (9.35) — при всех $\tau \geqslant 5T_i$. Таким образом, для неотрицательных функций $R_{ii}^{(L)}(s)$ дисперсия $D_{ii}(\tau)$ оказывается существенно зависящей от интенсивности турбулентности $\overline{u_i'^2}$ и ее временного масштаба T_i, но только очень слабо — от конкретной формы корреляционной функции $R_{ii}^{(L)}(s)$.

Может представиться, что результаты, относящиеся к модели стационарной однородной турбулентности, не имеют практического значения, так как однородная турбулентность в безграничном пространстве вообще является лишь математической идеализацией, а предположение о стационарности еще усугубляет дело (поскольку из-за наличия диссипации энергии стационарное течение вязкой жидкости должно иметь какие-то внешние

источники энергии и поэтому тем более не может быть однородным). На самом деле, однако, легко видеть, что приведенный вывод формулы (9.31) требует лишь, чтобы течение было однородным по направлению оси Ox_i. Это позволяет указать вполне реальные течения, к которым могут быть применены полученные выше результаты. В частности, в связи с работой Тэйлора (1954а) (о которой мы еще будем подробно говорить в следующем параграфе) Бэтчелор отметил, что эти результаты могут быть непосредственно применены к простейшему турбулентному потоку в достаточно длинной прямой трубе произвольного постоянного сечения (Бэтчелор и Таунсенд (1956), Бэтчелор (1957)). В самом деле, пусть направление трубы совпадает с осью Ox_1; тогда по этому направлению течение будет однородным, хотя распределение средней скорости $\bar{u}_1(x_2, x_3)$ в плоскости Ox_2x_3 здесь может быть весьма сложным. Рассмотрим теперь компоненту $Y_1(\tau)$ смещения жидкой частицы за время τ по направлению Ox_1. Соответствующая лагранжева скорость $\frac{dY_1(\tau)}{d\tau} = V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)$ будет, вообще говоря, нестационарной случайной функцией τ, зависящей от выбора начального положения частицы $\boldsymbol{x}$ в плоскости Ox_2x_3. Естественно ожидать, однако, что через некоторое время после момента выхода t_0 рассматриваемой частицы влияние ее начального положения $\boldsymbol{x}$ практически перестанет сказываться, так что далее функцию $V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)$ можно будет уже считать не зависящей от $\boldsymbol{x}$ и стационарной. В таком случае средняя продольная скорость $\overline{V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)} = U_1$ при достаточно большом τ не будет зависеть ни от τ, ни от $\boldsymbol{x}$, т. е. будет постоянной по времени и одной и той же для всех «жидких частиц», занимавших фиксированное положение в момент t_0 или раньше. При этом представляется очевидным (и может быть строго доказано с помощью рассуждений, о которых мы будем говорить на стр. 501—502), что U_1 будет совпадать также со средней продольной скоростью совокупности всех жидких, пересекающих фиксированное сечение трубы в течение заданного промежутка времени, т. е. со средней скоростью $U_{\text{ср}}$, определяемой как отношение объема жидкости, вытекающей из трубы за единицу времени, к площади ее поперечного сечения. Таким образом,

$$\overline{Y_1(\tau)} \approx U_{\text{ср}} \cdot \tau \quad (9.37)$$

при достаточно большом τ. Далее, в силу формулы (9.35)

$$\overline{[Y_1(\tau) - \overline{Y_1(\tau)}]^2} \approx 2\overline{u_1'^2}\, T_1 \tau \quad (9.38)$$

при достаточно большом τ; при чуть меньших значениях τ можно пользоваться более точной формулой (9.34) с $i=1$. Заметим

еще, что характеристики $\overline{u_1'^2}$ и T_1 в (9.38) должны определяться параметрами, от которых зависит статистический режим турбулентности в трубе. Поскольку в круглой трубе при достаточно большом числе Рейнольдса вязкий подслой составляет незначительную часть сечения (см. выше стр. 256), из результатов п. 5.5 следует, что в этом случае $\overline{u_1'^2}$ и T_1 будут зависеть только от радиуса трубы R и динамической скорости $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, где τ_0 — напряжение трения на стенке. Но в таком случае в силу соображений размерности

$$\overline{u_1'^2} T_1 = cRu_*, \tag{9.39}$$

где c — универсальная постоянная, значение которой можно оценить по эмпирическим данным (см. ниже п. 10.4). Формула такого же вида будет справедлива также и в случае турбулентного течения в прямой трубе или канале некругового сечения при достаточно большом Re; здесь только под R надо понимать типичный линейный размер сечения трубы или канала, а u_* определять по среднему значению напряжения трения на стенке.

9.4. Смещение жидких частиц в турбулентности за решеткой и в турбулентных потоках с градиентом средней скорости

Лагранжевы характеристики автомодельных турбулентных течений

Вывод формул (9.37)—(9.39) существенно опирается на то, что в рассматриваемом течении движение жидких частиц в поперечной плоскости Ox_2x_3 все время происходит лишь в пределах фиксированной конечной ее части. Ясно, что это последнее условие выполняется лишь для некоторых специальных турбулентных течений. В случае же, например, турбулентного пограничного слоя или турбулентной струи среднее расстояние частицы от ограничивающей поток стенки или от оси струи будет неограниченно возрастать с ростом τ; поэтому здесь лагранжеву скорость $\frac{dY_1(\tau)}{d\tau}$ ни при каком τ нельзя считать стационарной случайной функцией времени. Таким образом, класс реальных течений, к которым можно непосредственно применить формулы (9.30)—(9.36), все же довольно узок.

Бэтчелор (1957) заметил, однако, что имеется также класс течений (включающий некоторые практически важные потоки), к которым, по-видимому, можно применить указанные формулы после несложного их преобразования. Этот класс состоит из

установившихся автомодельных течений, в которых средняя скорость преимущественно направлена вдоль оси Ox_1, и статистический режим турбулентности при разных значениях координаты x_1 является подобным, т. е. отличается лишь значениями характерного масштаба длины $L(x_1)$ и масштаба скорости $U(x_1)$. Иначе говоря, в рассматриваемых потоках все эйлеровы статистические характеристики турбулентности в плоскости $x_1 = \text{const}$, приведенные к безразмерному виду путем деления на соответствующую комбинацию масштабов L и U, не зависят от значения x_1. При этом фиксированная жидкая частица все время будет находиться в практически одинаковых условиях, но с переменным масштабом скорости $U(\tau) = U[X_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)]$ и переменным масштабом времени $T(\tau) = \frac{L[X_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)]}{U[X_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)]}$. Поэтому при изучении движения такой частицы представляется целесообразным измерять время масштабом $T(\tau)$ (т. е. использовать вместо времени τ переменную $\eta(\tau)$, связанную с τ соотношением $d\eta = \frac{d\tau}{T(\tau)}$), а скорость — масштабом $U(\tau)$. При этом естественно предположить, что *при достаточно больших значениях* τ (таких, что влияние начального положения $\boldsymbol{x}$ уже перестает сказываться) *безразмерная пульсационная лагранжева скорость* $\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)/U(\tau)$ *будет стационарной случайной функцией* $\boldsymbol{F}_\bullet(\eta)$ *переменной* η:

$$\frac{\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)}{U(\tau)} = \boldsymbol{F}(\eta), \qquad d\eta = \frac{U(\tau)\,d\tau}{L(\tau)}. \tag{9.40}$$

Правда, строгое доказательство этого предположения (и вообще того, что из автомодельности эйлеровых свойств турбулентности вытекает автомодельность ее лагранжевых свойств) пока отсутствует. Однако оно представляет собой очень правдоподобную гипотезу, следствия из которой в ряде случаев хорошо согласуются с имеющимися (к сожалению, еще очень неполными) эмпирическими данными о лагранжевых статистических характеристиках. Заметим еще, что в тех случаях, когда автомодельность эйлеровых характеристик турбулентности устанавливается с помощью соображений размерности, этими же соображениями обычно можно обосновать и автомодельность лагранжевых характеристик; получаемые таким образом результаты также совпадают с выводами, следующими из выделенного курсивом предположения.

Одним из простейших случаев, к которому можно приложить сформулированную здесь гипотезу, является случай турбулентности в средней части аэродинамической трубы за решеткой, специально установленной для турбулизации течения.

В этом случае средняя скорость $\overline{u} = U_0 i_1$ (где i_1 — единичный вектор оси Ox_1) является строго постоянной и, следовательно, $\overline{Y_1(\tau)} = U_0\tau$, $\overline{Y_2(\tau)} = \overline{Y_3(\tau)} = 0$. Однако турбулентность здесь все же не является вполне однородной, так как под действием вязкости интенсивность пульсаций скорости слегка убывает с возрастанием расстояния от решетки. Заметим теперь, что как показывают результаты измерений характеристик такой турбулентности (см. гл. 7 в ч. 2 книги), в течение начального периода вырождения (т. е. на сравнительно небольших расстояниях от решетки) турбулентность за решеткой обычно примерно однородна в плоскостях $x_1 = \text{const}$ и отличается при разных значениях x_1 лишь масштабом скорости, пропорциональным $(x_1 - x_1^0)^{-1/2}$, и масштабом длины, пропорциональным $(x_1 - x_1^0)^{1/2}$ (где x_1^0 — некоторое условное «начало отсчета» на оси Ox_1). Так как в рассматриваемом потоке средняя скорость U_0 всегда много больше пульсаций скорости, то можно считать, что $X_1(\tau) - x_1^0 = U_0\tau$, где τ — время движения жидкой частицы, отсчитываемое от условного момента t_0 пересечения ею плоскости $x_1 = x_1^0$. За масштаб скорости $U(\tau)$ в плоскости $x_1 = x_1^0 + U_0\tau$ можно принять любую постоянную скорость, умноженную на $\tau^{-1/2}$; удобно, например, при рассмотрении движения жидкой частицы, находившейся в начальный момент времени в плоскости $x_1 = a$, положить $U(\tau) = U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$, где U_a — типичное значение пульсации скорости при $x_1 = a$, а $\tau_a = \frac{a - x_1^0}{U_0}$. Переменная η равенства (9.40) в рассматриваемом случае, очевидно, равна $\ln\tau + \text{const}$; поэтому можно считать, что $\eta = \ln\frac{\tau}{\tau_a}$. Отсюда вытекает, что предположение (9.40) здесь сводится к допущению, что лагранжева корреляционная функция пульсаций скорости имеет вид

$$\overline{V_i'(x,\, t_0+\tau_1)\, V_j'(x,\, t_0+\tau_2)} = U_a^2\tau_a(\tau_1\tau_2)^{-\frac{1}{2}} S_{ij}\left(\ln\frac{\tau_1}{\tau_a} - \ln\frac{\tau_2}{\tau_a}\right), \quad (9.41)$$

где S_{ij} — взаимная корреляционная функция стационарных процессов $F_i(\eta) = \frac{V_i'(x,\, t_0+\tau)}{U(\tau)}$ и $F_j(\eta) = \frac{V_j'(x,\, t_0+\tau)}{U(\tau)}$. Подставляя (9.41) в общую формулу (9.27) и заменяя в ней интегрирование по t_1 и t_2 интегрированием по τ_1 и τ_2 в пределах от τ_a до τ, аналогично выводу (9.30′) получим

$$D_{ij}(\tau) = U_a^2\tau_a^2 \int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}} \left(\frac{\tau}{\tau_a}e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{\frac{\theta}{2}}\right)[S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\, d\theta. \quad (9.42)$$

При естественном предположении о достаточно быстром затухании корреляционной функции (9.41) с ростом $\tau_1 - \tau_2$ из (9.42) следует, что при очень больших значениях τ

$$D_{ij}(\tau) = 2U_a^2\tau_a\Xi_{ij}\tau, \qquad \Xi_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^\infty [S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\, e^{-\frac{\theta}{2}}\, d\theta. \quad (9.43)$$

Тем самым мы показали, что асимптотический закон $D_{ij}(\tau) \sim \tau$, по-видимому, с известным приближением может быть применен и к вырождающейся турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе.

Аналогичное рассуждение может быть применено также и к случаю турбулентного следа за цилиндром произвольного сечения, расположенным вдоль оси Ox_2, или за каким-то конечным твердым телом с центром в начале координат. Как мы уже видели в п. 5.9, на достаточно большом расстоянии от обтекаемого тела (там, где турбулентные скорости в следе становятся малыми по сравнению со средней скоростью U_0 обтекаемого потока) турбулентный режим в следе можно считать автомодельным и различающимся при разных значениях продольной координаты x_1 лишь масштабом длины $L(x_1)$ и масштабом скорости $U(x_1)$. При этом $L(x_1) \sim x_1^{\frac{1}{2}}$, $U(x_1) \sim x_1^{-\frac{1}{2}}$ в случае двумерного следа (за цилиндром) и $L(x_1) \sim x_1^{\frac{1}{3}}$, $U(x_1) \sim x_1^{-\frac{2}{3}}$ в случае трехмерного следа (за конечным телом). Поскольку в рассматриваемом случае $X_1(\tau) \approx U_0\tau$ при соответственном выборе начала отсчета времени и достаточно большом τ, то, следовательно, $d\eta = \frac{d\tau}{\tau}$, $\eta = \ln\frac{\tau}{\tau_a}$ как для двумерного, так и для трехмерного следа. Так как турбулентная жидкость не вытекает из следа, то фиксированная жидкая частица будет все время блуждать в пределах объема, занимаемого следом, не выходя за его границы. Поэтому естественно ожидать, что при достаточно большом τ здесь также будет справедлива гипотеза (9.40) $\left(\text{с } U(\tau) = U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ или соответственно } U(\tau) = U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$. Но это

означает, что

$$D_{ij}(\tau)=U_a^2\tau_a^2\int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left(\frac{\tau}{\tau_a}e^{-\frac{\theta}{2}}-e^{\frac{\theta}{2}}\right)[S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\,d\theta \quad (9.44)$$

в случае движения жидкой частицы в двумерном турбулентном следе и

$$D_{ij}(\tau)=\frac{3}{2}U_a^2\tau_a^2\int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{\theta}{3}}-e^{\frac{\theta}{3}}\right][S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\,d\theta \quad (9.45)$$

в случае движения в трехмерном следе, причем $S_{ij}(\theta)$ в обоих случаях имеет тот же смысл, что и в (9.42). Таким образом, при очень больших значениях τ

$$D_{ij}(\tau)\sim\begin{cases}\tau & \text{для двумерного следа,}\\ \tau^{\frac{2}{3}} & \text{для трехмерного следа.}\end{cases} \quad (9.46)$$

Заметим еще, что в случае двумерного следа за длинным цилиндром, расположенным вдоль оси Ox_2, очевидно, $\overline{Y_2(\tau)}\equiv 0$. Что же касается величины $\overline{X_3(\tau)}$ в случае плоского следа и величин $\overline{X_2(\tau)}$ и $\overline{X_3(\tau)}$ в случае трехмерного следа, то так как на большом расстоянии от обтекаемого тела плоский след становится практически симметричным относительно плоскости Ox_1x_2, а трехмерный след — практически осесимметричным, можно ожидать, что при достаточно большом τ они также будут близки к нулю при любом начальном положении рассматриваемой жидкой частицы.

Перейдем теперь к рассмотрению движения жидкой частицы в плоской или круглой турбулентной струе, распространяющейся по направлению оси Ox_1 в заполненном жидкостью пространстве. Здесь также при достаточно большом x_1 статистический режим можно считать полностью характеризуемым масштабом длины $L(x_1)$ и масштабом скорости $U(x_1)$, как это было показано в п. 5.9, причем $L(x_1)\sim x_1$, $U(x_1)\sim x_1^{-\frac{1}{2}}$ в случае двумерной (плоской) струи и $L(x_1)\sim x_1$, $U(x_1)\sim x_1^{-1}$ в случае трехмерной (осесимметричной) струи. Однако, в отличие от случая турбулентного следа, в турбулентной струе отсутствует основное движение с постоянной скоростью $U_0\gg u_1'$; поэтому здесь уже

нельзя считать, что $X_1(\tau)\approx U_0\tau$. Поскольку, однако, в струе осредненное течение также является автомодельным, можно надеяться, что в этом случае гипотеза (9.40) с $U(\tau)=U[\overline{X_1(\tau)}]$, $L(\tau)=L[\overline{X_1(\tau)}]$ при достаточно большом τ будет применима уже не только к пульсациям лагранжевой скорости, но и к самой лагранжевой скорости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)$. Тогда

$$\frac{\overline{dX_1(\tau)}}{d\tau}=\overline{V}_1=\overline{F}_1\cdot U[\overline{X_1(\tau)}],$$

где $\overline{F}_1=\overline{F_1(\eta)}=\text{const}$ (ибо $F_1(\eta)$ — стационарный случайный процесс). Учтя характер зависимости $U(x_1)$ от x_1, получаем отсюда, что при соответственном выборе начала отсчета времени τ

$$\begin{aligned}&\overline{X(\tau)}\sim\tau^{\frac{2}{3}},\ U(\tau)\sim\tau^{-\frac{1}{3}},\ L(\tau)\sim\tau^{\frac{2}{3}} \text{ для двумерной струи,}\\ &\overline{X(\tau)}\sim\tau^{\frac{1}{2}},\ U(\tau)\sim\tau^{-\frac{1}{2}},\ L(\tau)\sim\tau^{\frac{1}{2}} \text{ для трехмерной струи.}\end{aligned} \quad (9.47)$$

Следовательно, в обоих случаях $d\eta=\frac{d\tau}{\tau}$, $\eta=\ln\frac{\tau}{\tau_a}$. Далее, аналогично выводу равенств (9.42), (9.44) и (9.45) находим

$$D_{ij}(\tau)=\frac{3}{4}U_a^2\tau_a^2\int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-\frac{2}{3}\theta}-e^{\frac{2}{3}\theta}\right][S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\,d\theta \quad (9.48)$$

для двумерной струи и

$$D_{ij}(\tau)=U_a^2\tau_a^2\int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left(\frac{\tau}{\tau_a}e^{-\frac{\theta}{2}}-e^{\frac{\theta}{2}}\right)[S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\,d\theta \quad (9.49)$$

для трехмерной струи, где $S_{ij}(\theta)=\overline{F_i'(\eta+\theta)F_j'(\eta)}$. При очень больших значениях τ эти формулы обращаются в асимптотические соотношения

$$D_{ij}(\tau)\sim\begin{cases}\tau^{\frac{4}{3}} & \text{для двумерной струи,}\\ \tau & \text{для трехмерной струи.}\end{cases} \quad (9.50)$$

Соображения, примененные при рассмотрении движения жидких частиц в турбулентных струях, приложимы и к двумерным (плоским) и трехмерным конвективным струям над нагретыми телами, а также к зоне турбулентного перемешивания двух плоскопараллельных потоков различной скорости U_1 и U_2. Как мы знаем из п. 5.9, турбулентное движение и в конвективных струях, и в зоне перемешивания автомодельно при доста-

точно большом x_1 (где ось Ox_1 считается вертикальной в случае конвективных струй и параллельной скорости обоих потоков в случае зоны перемешивания). При этом линейный масштаб $L = L(x_1)$ здесь во всех случаях пропорционален x_1, а масштаб скорости U в случае двумерной конвективной струи над нагретым цилиндром и зоны перемешивания оказывается одним и тем же во всех сечениях $x_1 = \text{const}$, в то время как в случае трехмерной конвективной струи $U(x_1) \sim x_1^{-1/3}$. Отсюда вытекает, что средняя продольная лагранжева скорость $\overline{V}_1 = \frac{d\overline{X_1(\tau)}}{d\tau}$ в двумерной конвективной струе и в зоне турбулентного перемешивания постоянна (в случае зоны перемешивания она, очевидно, равна $(U_1 + U_2)/2$), а в трехмерной конвективной струе — пропорциональна $\overline{X}_1^{-1/3}$. Поэтому гипотеза (9.40) с $U(\tau) = U[\overline{X_1(\tau)}]$ и $L(\tau) = L[\overline{X_1(\tau)}]$ в случае двумерной конвективной струи и зоны перемешивания сводится к простому утверждению, что $\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t_0 + \tau)$ является стационарной случайной функцией переменной $\eta = \ln \frac{\tau}{\tau_a}$. В случае же трехмерной конвективной струи, для которой $\frac{d\overline{X}_1}{d\tau} \sim \overline{X}_1^{-\frac{1}{3}}$, т. е. $\overline{X_1(\tau)} \sim \tau^{\frac{3}{4}}$, $L(\tau) \sim \overline{X_1(\tau)} \sim \tau^{\frac{3}{4}}$, $U(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{4}}$, эта гипотеза означает, что стационарной случайной функцией от $\eta = \ln \frac{\tau}{\tau_a}$ является величина $\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t_0 + \tau) U_a^{-1} \left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{1}{4}}$. Отсюда обычным образом получаем, что

$$D_{ij}(\tau) = \frac{1}{2} U^2 \tau_a^2 \int_0^{\ln \frac{\tau}{\tau_a}} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2 e^{-\theta} - e^{\theta}\right] [S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\, d\theta \quad (9.51)$$

для двумерной конвективной струи и зоны перемешивания и

$$D_{ij}(\tau) = \frac{2}{3} U_a \tau_a^2 \int_0^{\ln \frac{\tau}{\tau_a}} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{4}\theta} - e^{\frac{3}{4}\theta}\right] [S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\, d\theta \quad (9.52)$$

для трехмерной конвективной струи. В частности, при очень больших значениях τ

$$D_{ij}(\tau) \sim \begin{cases} \tau^2 & \text{для двумерной конвективной струи и зоны перемешивания,} \\ \tau^{\frac{3}{2}} & \text{для трехмерной конвективной струи} \end{cases} \quad (9.53)$$

(асимптотические формулы (9.43), (9.46), (9.50) и (9.53) были указаны Бэтчелором и Таунсендом (1956), Бэтчелором (1957) и Ягломом (1965)).

Покажем теперь, что формулы (9.50) и (9.53) могут быть выведены и из одних соображений размерности (без использования гипотезы (9.40)), если только принять, что физические параметры, от которых зависят эйлеровы статистические характеристики соответствующих турбулентных течений, определяют и их лагранжевы характеристики (т. е., иначе говоря, полностью задают весь «турбулентный режим»). В самом деле, согласно п. 5.9, для трехмерной струи динамического происхождения определяющими физическими параметрами являются плотность жидкости ρ и суммарный импульс вытекающей за единицу времени жидкости $2\pi\rho M$; для двумерной динамической струи — плотность ρ и импульс ρM_1, приходящийся на единицу времени и единицу длины струи; для зоны перемешивания плоскопараллельных потоков — ρ и скорость $U_0 = U_2 - U_1$; для трехмерной конвективной струи — ρ, c_p, поток тепла вдоль струи Q и параметр плавучести g/T_0; для двумерной конвективной струи — ρ, c_p, g/T_0 и поток тепла Q_1, приходящийся на единицу длины струи. Но если, например, распределение вероятностей для смещения $\boldsymbol{Y}(\tau)$ жидкой частицы за время τ при достаточно большом τ может зависеть только от этих параметров и от τ, то в силу соображений размерности соответствующая плотность вероятности $p(\boldsymbol{Y}) = p(Y_1, Y_2, Y_3)$ должна иметь вид

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M^{3/4}\tau^{3/2}} P^{(1)}\left(\frac{Y_1}{M^{1/4}\tau^{1/2}}, \frac{Y_2}{M^{1/4}\tau^{1/2}}, \frac{Y_3}{M^{1/4}\tau^{1/2}}\right) \quad (9.54)$$

в случае трехмерной струи,

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M_1\tau^2} P^{(2)}\left(\frac{Y_1}{M_1^{1/3}\tau^{2/3}}, \frac{Y_2}{M_1^{1/3}\tau^{2/3}}, \frac{Y_3}{M_1^{1/3}\tau^{2/3}}\right) \quad (9.54')$$

в случае двумерной струи,

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{U_0^3\tau^3} P^{(3)}\left(\frac{Y_1}{U_0\tau}, \frac{Y_2}{U_0\tau}, \frac{Y_3}{U_0\tau}\right) \quad (9.54'')$$

в случае зоны перемешивания,

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{3/4}\tau^{9/4}} P^{(4)}\left(\frac{Y_1}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4}\tau^{3/4}}, \frac{Y_2}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4}\tau^{3/4}}, \frac{Y_3}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4}\tau^{3/4}}\right) \quad (9.54''')$$

в случае трехмерной конвективной струи и

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\tau^3} P^{(5)}\left(\frac{Y_1}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3}\tau}, \frac{Y_2}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3}\tau}, \frac{Y_3}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3}\tau}\right) \quad (9.54''')$$

в случае двумерной конвективной струи. Здесь $P^{(1)}, \ldots, P^{(5)}$ — пять универсальных функций, характеризующих пять указанных автомодельных турбулентных течений. Из формул (9.54)—(9.54''''), разумеется, сразу вытекают и соотношения (9.50) и (9.53); вообще, из них легко получаются асимптотические соотношения для произвольных моментов случайного вектора $\boldsymbol{Y}(\tau) = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Аналогичные (9.54)—(9.54'''') формулы могут быть, очевидно, выписаны для плотности вероятности лагранжевой скорости $\boldsymbol{V}(\tau) = \frac{d\boldsymbol{Y}(\tau)}{d\tau}$ и других лагранжевых величин; на этом, однако, мы уже не будем задерживаться.

Дисперсии смещений частиц в потоке с постоянным градиентом средней скорости

Еще одним примером течения, в котором можно определить асимптотическое поведение дисперсий $D_{ij}(\tau)$, является идеализированное турбулентное течение во всем безграничном пространстве, такое, что его эйлерово поле пульсаций скорости $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$ стационарно и статистически однородно, а средняя скорость $\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ не меняется во времени и линейно зависит от пространственных координат. Последнее условие, очевидно, необходимо для того, чтобы поле пульсаций скорости можно было считать однородным, так как градиент средней скорости существенно влияет на статистический режим турбулентности, и поэтому в однородной турбулентности градиент скорости должен принимать постоянное значение. Предположим, что средняя скорость всюду направлена вдоль оси Ox_1 и изменяется только по направлению Ox_3, так что, например, $\overline{u}_1 = \Gamma x_3$, $\overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 0$, где $\Gamma = \text{const}$. Не ограничивая общности, достаточно рассмотреть лишь движение жидкой частицы, находившейся в момент $t = 0$ в точке $\boldsymbol{x} = 0$. Обозначим координаты этой частицы в момент t через $X_i(t)$, а ее скорость — через $\boldsymbol{V}(t)$. В таком случае

$$\boldsymbol{V}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}[\boldsymbol{X}(t)] + \boldsymbol{u}'[\boldsymbol{X}(t), t] \quad (9.55)$$

или, в проекциях на оси координат,

$$V_1(t) = \Gamma X_3(t) + V_1'(t),$$
$$V_2(t) = V_2'(t), \quad V_3(t) = V_3'(t) \quad (9.55')$$

и

$$X_1(t) = \int_0^t [\Gamma X_3(t) + V_1'(t)]\, dt,$$
$$X_2(t) = \int_0^t V_2'(t)\, dt, \quad X_3(t) = \int_0^t V_3'(t)\, dt. \quad (9.56)$$

Исходя из этих формул, уже нетрудно выразить и величины $D_{ij}(\tau)$ через статистические характеристики поля $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$, причем в отличие от рассматривавшихся выше случаев здесь уже не требуются никакие специальные гипотезы о лагранжевой автомодельности.

Так как $\overline{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)} \equiv 0$, то и $\overline{\boldsymbol{V}'(t)} \equiv 0$; следовательно, и $\overline{\boldsymbol{X}(t)} \equiv 0$ (в силу (9.56)). Поскольку поле $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$ однородно и стационарно, лагранжева скорость $\boldsymbol{V}'(t)$ также будет стационарной случайной функцией; ее корреляционный тензор будет иметь вид $\overline{V_i'(t_1) V_j'(t_2)} = B_{ij}^{(L)}(t_1 - t_2)$. Рассмотрим теперь тензор дисперсии $D_{ij}(\tau) = \overline{X_i(\tau) X_j(\tau)}$. Ясно, что наличие осредненной скорости, направленной вдоль оси Ox_1, никак не сказывается на смещениях частицы по направлениям Ox_2 и Ox_3. Поэтому величины $D_{22}(\tau)$, $D_{33}(\tau)$ и $D_{23}(\tau)$ здесь представляются в обычном для однородной турбулентности виде (9.30'), и их асимптотическое поведение при малых и больших значениях τ описывается формулами (9.28) и (9.35). Иначе обстоит дело с наиболее интересными компонентами $D_{11}(\tau)$ и $D_{13}(\tau)$. Для первой из них из первой формулы (9.56) вытекает соотношение

$$D_{11}(\tau) = \overline{X_1^2(\tau)} = \int_0^\tau \int_0^\tau \{\Gamma^2 \overline{X_3(t_1) X_3(t_2)} +$$
$$+ \Gamma\left[\overline{X_3(t_1) V_1'(t_2)} + \overline{X_3(t_2) V_1'(t_1)}\right] + B_{11}^{(L)}(t_1 - t_2)\}\, dt_1\, dt_2.$$

В силу третьего равенства (9.56) первое слагаемое в фигурных скобках здесь может быть преобразовано к виду

$$\overline{X_3(t_1) X_3(t_2)} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overline{V_3'(\theta_1) V_3'(\theta_2)}\, d\theta_1\, d\theta_2 =$$
$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} B_{33}^{(L)}(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 = \int_0^{t_1} (t_1 - \theta) B_{33}^{(L)}(\theta)\, d\theta +$$
$$+ \int_0^{t_2} (t_2 - \theta) B_{33}^{(L)}(\theta)\, d\theta - \int_0^{|t_1 - t_2|} (|t_1 - t_2| - \theta) B_{33}^{(L)}(\theta)\, d\theta.$$

Аналогично вычисляется второе слагаемое в фигурных скобках:

$$\overline{X_3(t_1)\,V_1'(t_2)}+\overline{X_3(t_2)\,V_1'(t_1)}=$$
$$=\int_0^{t_1}B_{13}^{(L)}(t_2-\theta)\,d\theta+\int_0^{t_2}B_{13}^{(L)}(t_1-\theta)\,d\theta=$$
$$=\int_0^{t_1}B_{13}^{(L)}(\theta)\,d\theta+\int_0^{t_2}B_{13}^{(L)}(\theta)\,d\theta+\int_0^{|t_1-t_2|}\left[B_{31}^{(L)}(\theta)-B_{13}^{(L)}(\theta)\right]d\theta.$$

Используя полученные выражения, формулу для $D_{11}(\tau)$ после многократного интегрирования по частям удается привести к виду

$$D_{11}(\tau)=\frac{\Gamma^2}{3}\int_0^\tau(2\tau^3-3\tau^2\theta+\theta^3)\,B_{33}^{(L)}(\theta)\,d\theta+\Gamma\int_0^\tau(\tau-\theta)^2\,B_{31}^{(L)}(\theta)\,d\theta+$$
$$+\Gamma\int_0^\tau(\tau^2-\theta^2)\,B_{13}^{(L)}(\theta)\,d\theta+2\int_0^\tau(\tau-\theta)\,B_{11}^{(L)}(\theta)\,d\theta. \quad (9.57)$$

Совершенно аналогичный расчет приводит к следующей формуле для D_{13}:

$$D_{13}(\tau)=\Gamma\tau\int_0^\tau(\tau-\theta)\,B_{33}^{(L)}(\theta)\,d\theta+\int_0^\tau(\tau-\theta)\left[B_{13}^{(L)}(\theta)+B_{31}^{(L)}(\theta)\right]d\theta. \quad (9.57')$$

При больших τ из (9.57) и (9.57′) получаются следующие асимптотические формулы:

$$D_{11}(\tau)\approx\frac{2}{3}\Gamma^2\overline{u_3'^2}T_3\cdot\tau^3,\qquad D_{13}(\tau)\approx\Gamma\overline{u_3'^2}T_3\cdot\tau^2. \quad (9.58)$$

Таким образом, оказывается, что дисперсия смещения жидкой частицы вдоль оси Ox_1 (по направлению осредненного течения) при больших τ асимптотически пропорциональна τ^3, т. е. растет со временем значительно быстрее, чем дисперсии поперечных смещений (асимптотически пропорциональные τ). Кроме того, смещения вдоль осей Ox_1 и Ox_3 оказываются взаимно коррелированными. Используя для $D_{33}(\tau)$ асимптотическую формулу (9.35), для коэффициента корреляции между величинами $X_1(\tau)$ и $X_3(\tau)$ получаем следующее предельное значение:

$$r_{X_1X_3}=D_{13}(\tau)\left[D_{11}(\tau)\,D_{33}(\tau)\right]^{-\frac{1}{2}}\to\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866\ldots \quad (9.59)$$

Таким образом, это предельное значение оказывается универсальным (не зависящим от параметров Γ, $\overline{u_3'^2}$ и T_3). Асимптотические формулы (9.58) и (9.59) были опубликованы Корсиным (1959б). Однако эквивалентные выражения еще раньше были известны из полуэмпирической теории, использующей для описания движения жидких частиц дифференциальные уравнения параболического типа; к этому вопросу мы еще вернемся в следующем параграфе.

Лагранжевы характеристики турбулентности в пограничном слое

Перейдем теперь к вопросу о смещении жидких частиц в турбулентном пограничном слое. Как и в гл. 3 и 4, будем считать, что поток заполняет полупространство $z>0$, причем стенку $z=0$ для определенности условимся считать динамически вполне шероховатой (с параметром шероховатости z_0). Ось Ox выберем совпадающей с направлением осредненного течения. Не ограничивая общности, можно считать, что рассматриваемая жидкая частица в момент $t=t_0$ находилась в точке с координатами $\boldsymbol{x}=(0,\ 0,\ H)$. Пусть $\boldsymbol{X}(\tau)=(X(\tau),\ Y(\tau),\ Z(\tau))$ — координаты этой частицы в момент $t_0+\tau$, а $\boldsymbol{V}(\tau)=(U(\tau),\ V(\tau),\ W(\tau))$ — ее скорость в этот момент. Случайная функция $\boldsymbol{V}(\tau)$, очевидно, не является стационарной — так, например, за достаточно большой промежуток времени τ частица вернее всего поднимется на значительную высоту $Z(\tau)$, и поэтому ее горизонтальная скорость $U(\tau)$ сильно возрастет. Вообще говоря, у нас нет также оснований рассчитывать, что функцию $\boldsymbol{V}(\tau)$ можно преобразовать в стационарную с помощью простого перехода к новым масштабам длины и времени. Естественно предположить, однако, что лагранжевы статистические характеристики турбулентности в пограничном слое будут зависеть, кроме параметров τ и H, только от небольшого числа «внешних» параметров, определяющих «турбулентный режим», т. е. входящих в выражения для эйлеровых статистических характеристик. Это предположение, существенно упрощающее изучение лагранжевых характеристик, в неявной форме использовалось Казанским и Мониным (1957) (см. также Монин (1959а)) для расчета формы дымовых струй в приземном слое атмосферы при разных условиях стратификаций. Вслед за тем оно было подробно исследовано Эллисоном (1959) и Бэтчелором (1959) в применении к частному случаю логарифмического пограничного слоя; еще позже Гиффорд (1962) (дополнивший это предположение некоторыми более специальными гипотезами) и Яглом (1965) вывели из него ряд следствий, относящихся к общему случаю температурно-стратифицированной

жидкости, причем выводы Гиффорда были им самим, Малхотрой и Сермаком (1963) и Сермаком (1963) сопоставлены и с имеющимися эмпирическими данными (см. ниже п. 10.5).

Поскольку высказанное выше предположение включает утверждение, что турбулентный режим в пограничном слое описывается небольшим числом параметров, применяя его, целесообразно ограничиться случаями, когда движение «жидкой частицы» не выводит ее за пределы слоя постоянства турбулентного напряжения трения $\tau = \rho u_*^2$ и (в случае температурно стратифицированной жидкости) турбулентного потока тепла q. Начнем, следуя Эллисону (1959) и Бэтчелору (1959), со случая пограничного слоя обычной (нестратифицированной) жидкости, для которого $q = 0$ (для определенности можно считать, например, что речь идет о приземном слое атмосферы в условиях безразличной стратификации). В этом случае турбулентный режим определяется параметрами u_* и z_0. Существенно, однако, что вне очень тонкого слоя жидкости (толщина которого имеет тот же порядок величины, что и z_0), непосредственно примыкающего к стенке $z = 0$, важную роль играет уже только один параметр u_*. Изменение же величины z_0 (скажем, ее замена на z_0') приводит лишь к дополнительному горизонтальному перемещению всей массы жидкости по направлению оси Ox с постоянной скоростью $\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{z_0}{z_0'}$, где $\varkappa \approx 0{,}4$ — постоянная Кармана (см. выше гл. 3, п. 5.4). Кроме того, представляется очевидным, что через достаточно большое время τ частица должна «забыть» про свою начальную высоту H, т. е. что при больших τ значение H практически перестает сказываться на статистических характеристиках движения жидкой частицы. Отсюда вытекает, что хотя, вообще говоря, статистические характеристики случайного вектора $\boldsymbol{V}(\tau)$ могут зависеть от четырех параметров τ, H, u_* и z_0, влияние второго и четвертого из них является довольно ограниченным. А именно, влияние величины H может сказываться лишь в течение конечного промежутка времени (продолжительность которого в силу соображений размерности должна иметь тот же порядок величины, что и отношение H/u_*), а значение параметра z_0 будет по-настоящему существенным, только если $H \lesssim z_0$, причем и в этом случае лишь в течение промежутка времени порядка z_0/u_*. Если же $H \gg z_0$ или $H \lesssim z_0$, но $\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$, то z_0 будет влиять на статистические характеристики $\boldsymbol{V}(\tau)$ только через посредство дополнительного постоянного слагаемого вида $-\frac{u_*}{\varkappa}\ln z_0$ в выражении для $\overline{U(\tau)}$.

Рассмотрим теперь среднюю скорость $\overline{\boldsymbol{V}(\tau)} = (\overline{U(\tau)}, \overline{V(\tau)}, \overline{W(\tau)})$ жидкой частицы в момент $t_0+\tau$. Из симметрии рассматриваемого течения относительно плоскости Oxz вытекает, что $\overline{Y(\tau)} = 0$ при всех τ и, следовательно, $\overline{V(\tau)} = \frac{d\overline{Y(\tau)}}{d\tau} = 0$. Что же касается компонент $\overline{U(\tau)}$ и $\overline{W(\tau)}$, то, согласно сказанному выше, при $\tau \gg H/u_*$ (или при $\tau \gg z_0/u_*$, если $H = 0$ или, вообще, $H \lesssim z_0$) вторая из этих компонент может зависеть только от u_* и τ, а первая должна равняться сумме некоторой функции от u_* и от τ и постоянного слагаемого $-\frac{u_*}{\varkappa}\ln z_0$. В силу соображений размерности отсюда получаются формулы

$$\overline{U(\tau)} = \frac{d\overline{X(\tau)}}{d\tau} = \frac{u_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{u_*\tau}{z_0} + d\right) = \frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{cu_*\tau}{z_0}, \tag{9.60}$$

$$\overline{W(\tau)} = \frac{d\overline{Z(\tau)}}{d\tau} = bu_*, \tag{9.61}$$

где b и $c = e^d$ — безразмерные универсальные постоянные. Интегрируя эти формулы по τ, найдем, что при достаточно большом τ

$$\overline{X(\tau)} \approx \frac{u_*\tau}{\varkappa}\left(\ln\frac{cu_*\tau}{z_0} - 1\right) = \frac{u_*\tau}{\varkappa}\ln\frac{cu_*\tau}{ez_0}, \tag{9.60'}$$

$$\overline{Z(\tau)} \approx bu_*\tau. \tag{9.61'}$$

При возрастании начальной высоты H формулы (9.60′) и (9.61′) становятся применимыми позже, но значения параметров b и c при любом H остаются одними и теми же. Наличие у частицы асимптотически постоянной средней вертикальной скорости $\overline{W(\tau)}$ несмотря на то, что средняя вертикальная эйлерова скорость $\overline{w(\boldsymbol{X})}$ во всех точках потока равна нулю (так что, в частности, и $\overline{W(0)} = \overline{w(0, 0, H)} = 0$), очевидно, связано с тем, что из-за наличия стенки при $z = 0$ частица не может опуститься ниже этого уровня, в то время как ничто не препятствует ее неограниченному подъему. Поэтому распределение вероятностей для $Z(\tau)$ с ростом τ все более вытягивается вверх по вертикали, так что средняя высота частицы $\overline{Z(\tau)}$ возрастает и, значит, $b > 0$. Отсюда вытекает, что для любого слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ фиксированной толщины h имеет место постоянный отток массы в верхние слои жидкости, который должен компенсироваться эквивалентным притоком массы из верхних слоев вниз (напомним, что для эйлеровой скорости $w(\boldsymbol{X})$ неравенство $\overline{w(\boldsymbol{X})} \neq 0$ означало бы, что нарушается закон сохранения массы!). Естественно думать, однако, что скорость $\overline{W(\tau)}$ должна быть все же

меньше, чем типичное значение пульсаций эйлеровой вертикальной скорости (т. е., например, чем величина $\sigma_w = (\overline{w^2})^{1/2}$), так что постоянная b будет заметно меньше единицы (согласно эмпирическим данным $b \approx 0{,}1$; см. ниже стр. 587). Что касается постоянной c, то ее можно попытаться оценить, исходя из приближенного равенства

$$\overline{U(\tau)} \approx \bar{u}\,[\overline{Z(\tau)}], \tag{9.62}$$

где $\bar{u}(Z)$ — средняя горизонтальная эйлерова скорость на высоте Z. Подчеркнем только, что в отношении (9.62) нельзя поставить знак точного равенства, так как в его левой части среднее значение берется по совокупности жидких частиц, находившихся в момент $\tau = 0$ на заданной высоте H, а в правой части — по совсем другой совокупности всевозможных жидких частиц, находящихся (в безразлично какой момент времени) на фиксированной высоте $\overline{Z(\tau)}$. Правда, то обстоятельство, что рассматриваемые жидкие частицы начали свое движение именно на высоте H, при $\tau \gg \frac{H}{u_*}$ уже не будет существенно сказываться на величине $\overline{U(\tau)}$. Тем не менее средняя лагранжева горизонтальная скорость и при таких τ не будет точно равна средней эйлеровой горизонтальной скорости на высоте $Z(\tau)$, так как $\overline{W(\tau)} > 0$, и поэтому в выражении $\overline{U(\tau)} = \overline{U}[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]$ осреднение преимущественно учитывает частицы, приходящие на высоту $Z(\tau)$ снизу. Кроме того, если бы даже и можно было считать, что $U(\tau) = u[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]$, то все равно равенство (9.62) не было бы точным, поскольку $\bar{u}(Z)$ возрастает медленнее, чем Z, и, следовательно, $\overline{\bar{u}[Z(\tau)]} \neq \bar{u}[\overline{Z(\tau)}]$. Заметим еще, что обе указанные причины должны приводить к тому, что левая часть (9.62) окажется несколько меньше правой части. Однако можно все же надеяться, что при $\tau \gg \frac{H}{u_*}$ различие между правой и левой частями (9.62) не будет очень значительным, так что вытекающее из (9.62), (9.60) и (9.61′) соотношение $c \approx b$ будет приемлемым первым приближением (хотя в некоторых случаях, возможно, придется все-таки учесть, что на самом деле c, по-видимому, немного меньше, чем b).

С помощью соображений размерности можно вывести также и выражения для моментов разных порядков векторов $\boldsymbol{V}'(\tau) = \boldsymbol{V}(\tau) - \overline{\boldsymbol{V}(\tau)} = (U'(\tau), V'(\tau), W'(\tau))$ и $\boldsymbol{X}'(\tau) = \boldsymbol{X}(\tau) - \overline{\boldsymbol{X}(\tau)} = (X'(\tau), Y'(\tau), Z'(\tau))$. Проще, однако, сразу выписать общие формулы для плотностей вероятности этих векторов, из которых уже следуют и выражения для всех их статистических

характеристик. Как мы уже видели, при $\tau \gg \frac{H}{u_*}$ и $\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$ распределение вероятностей для $\boldsymbol{V}'(\tau)$ может зависеть только от параметров u_* и τ. Следовательно, соответствующая плотность вероятности должна иметь вид

$$p(\boldsymbol{V}') = \frac{1}{u_*^3} P_1\left(\frac{U'}{u_*}, \frac{V'}{u_*}, \frac{W'}{u_*}\right), \tag{9.63}$$

где $P_1(u, v, w)$ — универсальная функция от трех переменных. Аналогично этому плотность вероятности вектора $\boldsymbol{X}'(\tau)$ определяется формулой вида

$$p(\boldsymbol{X}') = \frac{1}{u_*^3\tau^3} P_2\left(\frac{X'}{u_*\tau}, \frac{Y'}{u_*\tau}, \frac{Z'}{u_*\tau}\right), \tag{9.64}$$

где $P_2(x, u, z)$ — еще одна универсальная функция; отсюда, в частности, сразу вытекает, что в логарифмическом пограничном слое $D_{ij}(\tau) \sim \tau^2$. Согласно равенству (9.61′) длину $u_*\tau$ в (9.64) можно заменить пропорциональной ей длиной $\overline{Z} = \overline{Z(\tau)}$; поэтому, например, плотность вероятности для вектора $\boldsymbol{X}(\tau)$ можно записать в виде

$$p(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\overline{Z}^3} P_3\left(\frac{X - \overline{X}}{\overline{Z}}, \frac{Y}{\overline{Z}}, \frac{Z - \overline{Z}}{\overline{Z}}\right), \tag{9.65}$$

где функция P_3 получается из P_2 при помощи простого изменения масштабов на осях координат.

Перейдем теперь к более сложному случаю движения жидких частиц в пограничном слое температурно-стратифицированной жидкости (например, в приземном слое воздуха при стратификации, отличной от безразличной). Здесь уже к числу «внешних параметров» задачи наряду с u_* следует отнести и параметры $q/c_p\rho_0$ и g/T_0. Из этих трех величин можно составить комбинацию размерности длины $L = -u_*^3/\varkappa \frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}$, игравшую важную роль в выводах гл. 4. Параметр шероховатости z_0 и в рассматриваемом случае будет существенным, лишь если $H \lesssim z_0$ и одновременно $\tau \lesssim \frac{z_0}{u_*}$. Если же $H \gg z_0$ или $H \lesssim z_0$, но $\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$, то замена z_0 на z_0' приведет лишь к дополнительному движению всей массы воздуха по направлению Ox с постоянной скоростью $\frac{u_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{z_0'}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]$, где $f(\zeta)$ — универсальная функция, определяющая профиль средней скорости в приземном слое (см. гл. 4). Следовательно, при $\tau \gg \frac{H}{u_*}$ и $\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$ должны

иметь место соотношения

$$\overline{U(\tau)}=\frac{d\overline{X(\tau)}}{d\tau}=\frac{u_*}{\varkappa}\left[\psi_1\left(\frac{u_*\tau}{L}\right)-f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right], \tag{9.66}$$

$$\overline{W(\tau)}=\frac{d\overline{Z(\tau)}}{d\tau}=u_*\psi_2\left(\frac{u_*\tau}{L}\right), \tag{9.67}$$

где ψ_1 и ψ_2 — универсальные функции переменной $\xi=\frac{u_*\tau}{L}$. Интегрируя второе из этих соотношений, получим

$$\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}=\psi_3\left(\frac{u_*\tau}{L}\right),\quad \frac{u_*\tau}{L}=\Psi\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right), \tag{9.68}$$

где $\psi_3(\xi)=\int\limits_0^\xi \psi_2(\eta)\,d\eta$, а Ψ — функция, обратная к ψ_3. С помощью (9.68) равенства (9.66) — (9.67) можно переписать также в виде

$$\frac{d\overline{X(\tau)}}{d\tau}=\frac{u_*}{\varkappa}\left[\varphi_1\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right)-f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right], \tag{9.69}$$

$$\frac{d\overline{Z(\tau)}}{d\tau}=bu_*\varphi\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right), \tag{9.70}$$

где φ_1 и φ — еще две универсальные функции, а постоянная b введена для того, чтобы можно было считать $\varphi(0)=1$ (при этом условии b здесь будет иметь то же значение, что и в равенстве (9.61)). В силу приближенного равенства (9.62) следует также ожидать, что $\varphi_1(\zeta)\approx f(\zeta)$; поэтому в первом приближении можно положить

$$\frac{d\overline{X(\tau)}}{d\tau}\approx\frac{u_*}{\varkappa}\left[f\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right)-f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]. \tag{9.71}$$

Если, однако, стремиться к большей точности, то следует учесть, что на самом деле, по-видимому, $\varphi_1(\zeta)<f(\zeta)$ при всех ζ (но о величине разности $f(\zeta)-\varphi_1(\zeta)$ пока нет никаких данных). Соотношения (9.70) и (9.71) использовал Гиффорд (1962), а вслед за ним — Малхотра и Сермак (1963) и Сермак (1963). При этом все эти авторы дополнительно предполагали (без достаточных оснований), что функция $\varphi(\zeta)$ лишь постоянным множителем отличается от функции $f_5(\zeta)$ равенства (7.85), определяющей среднее квадратичное значение эйлеровой вертикальной скорости. Исходя отсюда, функция $\varphi(\zeta)$ в соответствии с полуэмпирической формулой Казанского и Монина (7.95) принималась равной $\left[1-\frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}$; такой выбор $\varphi(\zeta)$, впрочем, может быть в какой-то мере оправдан тем, что при этом выполняются

и условие $\varphi(0)=1$ и асимптотические закономерности, которым должна удовлетворять функция $\varphi(\zeta)$.

Для плотности вероятности $p(\boldsymbol{X})$ трехмерного вектора $\boldsymbol{X}(\tau)=(X(\tau),Y(\tau),Z(\tau))$ при $\tau\gg\frac{z_0}{u_*}$ и $\tau\gg\frac{H}{u_*}$ в силу соображений размерности должна иметь место формула вида

$$p(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\ \frac{Y}{\overline{Z}},\ \frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}};\ \frac{\overline{Z}}{L}\right), \tag{9.72}$$

где $\overline{X}=\overline{X(\tau)}$ и $\overline{Z}=\overline{Z(\tau)}$ определяются из (9.69) (или (9.71)) и (9.70), а $P(x,y,z;\zeta)$ — универсальная функция четырех переменных (последнее из них играет роль параметра, от которого зависит форма распределения вероятностей). В цитировавшихся выше работах Гиффорда, Малхотры и Сермака вместо этого использовалась более простая формула

$$p(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\ \frac{Y}{\overline{Z}},\ \frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}\right), \tag{9.72'}$$

т. е. неявно предполагалось, что зависимость формы распределения вероятностей от параметра стратификации $\zeta=\frac{\overline{Z}}{L}$ является довольно слабой и в первом приближении ею можно пренебречь. Это предположение, разумеется, уже не вытекает из соображений размерности; оно оправдывается лишь некоторыми имеющимися весьма предварительными эмпирическими данными (см. Сермак (1963)).

При $q>0$ (т. е. при неустойчивой стратификации) для величин $\overline{W(\tau)}$ и $\overline{Z(\tau)}$ можно получить также ряд заметно более простых асимптотических результатов, основываясь на предельных закономерностях свободной конвекции. В самом деле, в этом случае при $\tau\gg\frac{|L|}{u_*}$ (и даже уже при $\tau\gg\frac{0{,}1\,|L|}{u_*}$, как это следует из эмпирических данных § 8 гл. 4) и $\tau\gg\frac{H}{u_*}$ на вертикальное движение жидкой частицы не будет оказывать влияния не только начальная высота H, но и величина u_*, так как основное время частица будет проводить в области течения, в которой господствует режим «чистой» свободной конвекции, не зависящей от напряжения трения. Поэтому, если $q>0$ (т. е. $L<0$), то, по-видимому, уже при $-\xi>0{,}1$ функции $\psi_2(\xi)$ и $\psi_3(\xi)$ равенств (9.67) и (9.68) должны принять асимптотическую форму $\psi_2(\xi)\sim(-\xi)^{1/2}$ и $\psi_3(\xi)\sim(-\xi)^{3/2}$. Точно так же и функция $\varphi(\zeta)$ равенства (9.70), вероятно, уже при $-\zeta>0{,}1$ мало отличается от своего асимптотического выражения

$\varphi(\zeta) \sim (-\zeta)^{1/3}$. Но в таком случае при $\tau \gg 0{,}1|L|/u_*$ и $\tau \gg \frac{H}{u_*}$ будут выполняться соотношения

$$\overline{Z(\tau)} \approx a\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\tau^{3/2}, \tag{9.73}$$

$$\overline{W(\tau)} = \frac{d\overline{Z(\tau)}}{d\tau} \approx \frac{3}{2}a\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\tau^{1/2} \approx \frac{3}{2}a^{2/3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3}[\overline{Z(\tau)}]^{1/3}, \tag{9.74}$$

где a — универсальная постоянная, значение которой, в принципе, можно определить по эмпирическим данным. Формулы (9.73) и (9.74), разумеется, совершенно аналогичны формулам для $\overline{X_1(\tau)}$ и $\overline{V_1(\tau)}$, полученным выше для двумерной и трехмерной конвективных струй. Правая часть (9.74) очень близка также к правой части формулы (7.87′) для σ_w, но это объясняется лишь тем, что величины σ_w и $\overline{W(\tau)}$ имеют одинаковую размерность и зависят от почти одних и тех же параметров (лишь с заменой координаты z на $\overline{Z(\tau)}$). Поэтому из аналогии формул (9.74) и (7.87′) вовсе не следует еще, что и коэффициенты C_5' и $\frac{3}{2}a^{2/3}$ будут иметь близкие значения. Наоборот, естественно ожидать, что второй из этих коэффициентов заметно меньше первого, т. е. что a не превышает нескольких десятых.

Несколько более сложно обстоит дело со средней горизонтальной лагранжевой скоростью $\overline{U(\tau)} = \frac{\overline{dX(\tau)}}{d\tau}$ в случае режима свободной конвекции, так как эта скорость уже не может быть независимой от параметра u_* (при $u_* = 0$, очевидно, и $\overline{U(\tau)} = 0$). Ясно, однако, что функция $\varphi_1\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right) = \varphi_1(\zeta)$ в (9.69) в этом случае будет стремиться к постоянному значению $f(-\infty)$ с ростом ζ (т. е. с ростом τ). Это объясняется тем, что с течением времени частица поднимается в слои жидкости, в которых горизонтальная скорость практически постоянна. Для более точной оценки $\overline{U(\tau)}$ можно использовать приближенную формулу (9.71) с $f(\zeta) = C_2\zeta^{-1/3} + \text{const}$; возможно также, что в некоторых случаях целесообразно будет положить $\varphi_1(\zeta) = C_2'\zeta^{-1/3} + \text{const}$, где C_2' принимает немного меньшее значение, чем коэффициент C_2 в формуле (7.39). Естественно предполагать, однако, что параметр u_* при $\overline{Z(\tau)} > 0{,}1|L|$ будет влиять только на среднюю горизонтальную скорость перемещения жидких частиц, но не на турбулентные пульсации скорости. Поэтому следует ожидать,

что при достаточно большом τ в случае неустойчивой термической стратификации будут иметь место соотношения

$$p(U', V', W') = \frac{1}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{3/2}}P_4\left(\frac{U'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}, \frac{V'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}, \frac{W'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}}P_4'\left(\frac{U'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}, \frac{V'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}, \frac{W'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}\right), \tag{9.75}$$

и

$$p(X', Y', Z') = \frac{1}{\overline{Z}^3}P_5\left(\frac{X'}{\overline{Z}}, \frac{Y'}{\overline{Z}}, \frac{Z'}{\overline{Z}}\right), \tag{9.75′}$$

родственные соотношениям (9.54‴) и (9.54⁗), выполняющимся для турбулентных конвективных струй. Из (9.73) и (9.75′), в частности, следует, что асимптотически при неустойчивой стратификации $D_{ij}(\tau) \sim \tau^3$ (разумеется, все эти выводы предполагают, что условия, при которых справедлив «закон 1/3» для эйлеровой средней скорости и температуры, сохраняются, по крайней мере, до высоты $\overline{Z(\tau)}$).

9.5. Лагранжева корреляционная функция скорости и ее связь с эйлеровыми статистическими характеристиками

Выше мы видели, что при исследовании движения фиксированной жидкой частицы очень важную роль играет лагранжева корреляционная функция скорости

$$B_{ij}^{(L)}(t_1, t_2; \boldsymbol{x}) = \overline{V_i(\boldsymbol{x}, t_1)V_j(\boldsymbol{x}, t_2)}.$$

Об эмпирических данных, касающихся этой функции, мы скажем в следующем параграфе. Пока отметим только, что все эти данные очень малочисленны и неточны, так как в настоящее время нет никаких надежных методов измерения лагранжевых статистических характеристик турбулентности. Поэтому имеет смысл хотя бы вкратце остановиться на вопросе о возможных методах теоретического определения таких характеристик — непосредственно или исходя из их связи с гораздо лучше изученными эйлеровыми статистическими характеристиками, описывающими случайное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$.

Легко понять, что задача об определении лагранжевых статистических характеристик по эйлеровым не может быть простой,

В самом деле, в силу основных формул

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t], \qquad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{x}+\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t')\,dt', \tag{9.76}$$

являющихся фактически определением величин $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$, лагранжевы величины в момент t зависят от значений эйлерова поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ во всех точках случайной траектории $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t')$, $t_0 \leqslant t' \leqslant t$. Траектория же эта определяется как решение системы интегральных уравнений

$$X_i(\boldsymbol{x}, t')=x_i+\int_{t_0}^{t'} u_i[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t''), t'']\,dt'', \qquad i=1, 2, 3, \tag{9.77}$$

в свою очередь содержащих поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$. Поэтому распределение вероятностей для каждой лагранжевой величины будет, вообще говоря, зависеть от всего бесконечномерного распределения вероятностей для значений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, в функциональном пространстве всевозможных векторных полей. При этом даже и связь между распределениями в функциональном пространстве полей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ (или $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ и $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$) оказывается очень сложной, и попытки явно описать ее так и не привели к результатам, могущим быть примененными к каким-либо конкретным турбулентным течениям (см. Ламли (1962б)).

Рассмотрения распределений вероятностей в функциональном пространстве можно избежать, допустив, что функции $u_i(\boldsymbol{X}, t)$, $i=1, 2, 3$, — аналитические по всем переменным и поэтому разлагаются в ряды Тэйлора. Исходя отсюда, можно заключить, что и все лагранжевы величины в этом случае должны как-то выражаться через значения эйлеровой скорости и всех ее частных производных в одной-единственной точке пространства — времени. И действительно, представив значения $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)&=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^n= \\ &=\boldsymbol{x}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^n, \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)&=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^n= \\ &=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0)+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^n,\end{aligned} \tag{9.78}$$

можно с помощью (9.76) преобразовать коэффициенты этих рядов к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}=\frac{\partial^{n-1} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=t_0}, \qquad n=1, 2, \ldots \\ &\frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^n}\Big|_{t=t_0}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_i(\boldsymbol{X}, t)\frac{\partial}{\partial X_i}\right)^n \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\, t=t_0}, \\ &\qquad n=0, 1, 2, \ldots,\end{aligned} \tag{9.79}$$

т. е. выразить их через эйлеровы величины, относящиеся к точке $(\boldsymbol{x}, t_0)$. Из формул (9.78)—(9.79) вытекают некоторые важные общие выводы; например, как было замечено Ламли (1962а), отсюда сразу следует, что *если случайное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ является статистически однородным, то статистически однородными будут и случайные поля $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)-\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$* (этим обстоятельством мы фактически уже пользовались в п. 9.3). Если, однако, применить эти формулы для определения лагранжевых статистических характеристик, то результаты окажутся малоутешительными: для всех моментов полей $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ при этом получаются очень сложные представления в виде суммы бесконечного числа одноточечных эйлеровых статистических характеристик, умноженных на различные степени $t-t_0$. Ясно, что практически использовать такие представления для конкретного подсчета лагранжевых характеристик можно лишь при очень малых значениях $t-t_0$, при которых всеми членами рядов (9.78), кроме небольшого числа первых из них, можно пренебречь. В частности, в применении к лагранжевой корреляционной функции поля скорости таким образом удается оценить лишь члены порядка не выше $(t-t_0)^2$, причем уже для членов порядка $(t-t_0)^2$ получаемая оценка оказывается довольно сложной (см. гл. 7 в ч. 2 настоящей книги).

Лишь в случае членов нулевого порядка по $t-t_0$ (т. е. относящихся к моменту времени t_0) дело обстоит совсем просто, так как по определению $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0)$. Поэтому, например, $B_{ij}^{(L)}(t_0, t_0; \boldsymbol{x})=\overline{u_i(\boldsymbol{x}, t_0)u_j(\boldsymbol{x}, t_0)}=B_{ij}(t_0, t_0; \boldsymbol{x})$. Оказывается, что в случае несжимаемой жидкости и статистически однородного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ (а следовательно, и поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$) аналогичный результат имеет место и для всех вообще одноточечных характеристик поля скорости. Наметим здесь вкратце его доказательство, следуя работе Ламли (1962а). Выберем в пространстве точек $\boldsymbol{x}$ объем R и рассмотрим интеграл вида $\int_R \varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t))\,d\boldsymbol{x}$, где $\varphi(\boldsymbol{V})=\varphi(V_1, V_2, V_3)$ — некоторая функция от трех переменных. Перейдем в этом интеграле от пере-

менных x_1, x_2, x_3 к новым переменным X_1, X_2, X_3, где $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$. В случае несжимаемой жидкости (и только в этом случае) такой переход очень упрощается тем, что соответствующий якобиан $\frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}=[X_1, X_2, X_3]$ здесь, как мы знаем, тождественно равен единице (см. формулу (9.6) на стр. 464). Следовательно, в этом случае

$$\int_R \varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t))\,d\boldsymbol{x}=\int_{R_t} \varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t))\,d\boldsymbol{X}, \tag{9.80}$$

где R_t — область пространства, которую в момент t заполняет жидкость, заполнявшая в момент t_0 область R. Если, кроме того, поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ являются статистически однородными, то средние значения функций под знаком интеграла с обеих сторон (9.80) не зависят от координат. Тем не менее, мы не можем просто осреднить обе стороны равенства (9.80) и вынести средние значения функции φ из-под знака интеграла, поскольку область интегрирования R_t в правой части является случайной и зависит от поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$. Так как, однако, пространство, заполненное жидкостью, неограниченно (иначе не могло бы быть однородности), то мы можем при любом фиксированном t выбрать за R, например, шар сколь угодно большого радиуса. В частности, мы можем выбрать его радиус настолько большим, чтобы область R_t отличалась от R только некоторой частью (неправильной формы), расположенной сравнительно близко от границы R и имеющей объем, который с очень большой вероятностью не будет превосходить достаточно малой части полного объема шара R. При этом, заменив в правой части (9.80) интеграл по R_t аналогичным интегралом, распространенным по фиксированной области R, мы с очень большой вероятностью внесем этим лишь очень малую относительную ошибку. Осреднив теперь обе части полученного приближенного равенства и разделив результат на объем R, найдем

$$\overline{\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t))}=\overline{\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t))}, \tag{9.81}$$

где мы пишем уже знак точного равенства, так как относительная ошибка здесь может быть сделана сколь угодно малой, если только выбрать достаточно большую область R. В частности, если $\varphi(\boldsymbol{V})=e^{i\lambda_\alpha V_\alpha}$, то $\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t))$ — это характеристическая функция лагранжевой скорости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$, а $\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t))$ — характеристическая функция эйлеровой скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$. Поэтому *в случае однородной турбулентности в несжимаемой жидкости распределения вероятностей для эйлеровой и для лагранжевой скорости во все моменты времени совпадают между собой.* Таким образом, в однородной турбулентности невозможны парадоксы того типа, с которым мы встретились в случае пограничного слоя, где $\overline{u_3(\boldsymbol{x}, t)}\equiv 0$, но $\overline{V_3(\boldsymbol{x}, t)}\neq 0$.

Разумеется, все наше рассуждение относится только к одноточечным распределениям вероятностей; для распределений, относящихся к двум моментам времени, выделенное курсивом утверждение уже будет, вообще говоря, неверным. Поэтому для лагранжевой корреляционной функции $B_{ij}^{(L)}(t_1, t_2; \boldsymbol{x})$ отсюда следует лишь, что в случае однородной турбулентности

$$B_{ij}^{(L)}(t, t; \boldsymbol{x})=B_{ij}(t)=\overline{u_i(\boldsymbol{X}, t)\,u_j(\boldsymbol{X}, t)},$$

но ничего не следует о форме зависимости $B_{ij}^{(L)}(t_1, t_2)$ от t_2-t_1. Заметим, однако, что если поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ является не только однородным, но и стационарным, то и функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ будет стационарной по t (этим обстоятельством мы также фактически уже пользовались выше). В самом деле, представив $V_j(\boldsymbol{x}, t+\tau)=u_j[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t+\tau),\ t+\tau]$ в виде ряда Тэйлора (9.78) — (9.79) (с заменой t_0 на t, а t — на $t+\tau$), можно записать корреляционную функцию $B_{ij}^{(L)}(t, t+\tau)=\overline{V_i(\boldsymbol{x}, t)\,V_j(\boldsymbol{x}, t+\tau)}$ как сумму одноточечных эйлеровых характеристик (относящихся к точке $(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t)$), умноженных на степени τ. Поэтому, если соответствующие эйлеровы одноточечные характеристики не зависят от t (в силу стационарности и однородности поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$), то $B_{ij}^{(L)}(t, t+\tau)=B_{ij}^{(L)}(\tau)$.

Равенство (9.81) выше было доказано для идеализированного случая однородной турбулентности в безграничном пространстве; однако близкое равенство может быть установлено и для турбулентного течения в бесконечно длинной прямой трубе. В этом случае надо только принять за R достаточно длинный отрезок трубы между сечениями $x_1=a$ и $x_1=b$. При любом фиксированном $\tau=t-t_0$ мы можем выбрать $b-a$ столь большим, чтобы область R_t отличалась от R лишь небольшими кусками неправильной формы вблизи краев $x_1=a$ и $x_1=b$, суммарный объем которых очень мал по сравнению с полным объемом R. Но тогда после деления обеих частей равенства (9.80) на объем R и последующего осреднения мы получим в правой части величину, почти не отличающуюся от объемного среднего значения функции $\overline{\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t))}$, взятого по цилиндрическому объему, ограниченному сечениями $x_1=a$ и $x_1=b$ и стенками трубы. В левой же части будет стоять величина $\overline{\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t))}$, которую при достаточно большом $t-t_0$ вообще можно

считать не зависящей от $\boldsymbol{x}$ (ср. стр. 477). В частности, при $\varphi(\boldsymbol{u}) = u_1$ мы таким образом получаем равенство $\overline{V}_1 = U_{\text{ср}}$, о котором шла речь на стр. 477.

Вернемся теперь опять к простейшему случаю однородной и стационарной турбулентности. В этом случае $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{U} = \text{const}$, причем без ограничения общности можно даже считать (как мы и будем делать в дальнейшем), что $\boldsymbol{U} = 0$ (это эквивалентно простому переходу к новой инерционной системе координат). Если $B_{ij}^{(L)}(\tau) = \overline{V_i(\boldsymbol{x},\ t)\,V_j(\boldsymbol{x},\ t+\tau)}$ — лагранжев корреляционный тензор рассматриваемой турбулентности, а $B_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) = \overline{u_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)\,u_j(x_1+\xi_1,\ x_2+\xi_2,\ x_3+\xi_3,\ t+\tau)}$ — пространственно-временной эйлеров корреляционный тензор, то, как мы знаем, $B_{ij}^{(L)}(0) = B_{ij}(0, 0, 0, 0)$. Однако значения $B_{ij}^{(L)}(\tau)$ при $\tau > 0$, вообще говоря, уже не могут быть выражены через значения $B_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$. В связи с отсутствием надежных данных о функции $B_{ij}^{(L)}(\tau)$ некоторые авторы пробовали предположить, что $B_{ij}^{(L)}(\tau) = B_{ij}(0, 0, 0, \tau)$ (см., например, работу Болдуина и Майкельсена (1962), содержащую также сопоставление следствий из этого равенства с эмпирическими данными); но такое предположение не имеет никаких теоретических оснований. Более естественно предположить, что лагранжевы коэффициенты корреляции $R_{ii}^{(L)}(\tau) = B_{ii}^{(L)}(\tau)/\overline{V_i'^2}$ (по i не суммируется!), описывающие связь между i-й компонентой скорости фиксированной жидкой частицы в моменты времени t и $t+\tau$, будут убывать с ростом τ медленнее, чем эйлеровы коэффициенты корреляции $R_{ii}(\tau) = \dfrac{B_{ii}(0, 0, 0, \tau)}{\overline{u_i'^2}}$, описывающие связь между скоростями разных элементов жидкости, оказывающихся в момент t и в момент $t+\tau$ в одной и той же точке пространства. Если это так, то при $\tau > 0$ для всех $i = 1, 2, 3$ должно выполняться неравенство $R_{ii}^{(L)}(\tau) > R_{ii}(\tau)$. Из последнего неравенства, в частности, следует, что лагранжево время корреляции (лагранжев макромасштаб времени) $T_i = \int\limits_0^\infty R_{ii}^{(L)}(\tau)\,d\tau$ должно быть больше эйлерова времени корреляции (макромасштаба времени) $T_i' = \int\limits_0^\infty R_{ii}(\tau)\,d\tau$, а лагранжев микромасштаб времени $\theta_i = \left[-2\Big/\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}R_{ii}^{(L)}(\tau)\right\}_{\tau=0}\right]^{\frac{1}{2}}$ точно так же должен быть больше

эйлерова микромасштаба $\theta_i' = \left[-2/R_{ii}''(0)\right]^{1/2}$. Непосредственная проверка этих выводов пока, к сожалению, остается невозможной из-за отсутствия данных одновременных измерений эйлеровых и лагранжевых временных масштабов в условиях, близких к тем, которые отвечают однородной и стационарной турбулентности. Однако, как заметил Корсин (1963), сопоставление результатов измерений эйлеровых пространственно-временных корреляционных функций поля скорости, выполненных Фавром, Гавильо и Дюма (1953) в аэродинамической трубе за турбулизирующей решеткой, с данными диффузионных экспериментов Уберои и Корсина (1953), проводившихся в аналогичных условиях, дает некоторые основания думать, что в таких условиях $\dfrac{\theta_i'}{\theta_i} \approx 0{,}7$. В случае же, когда средняя скорость $|\overline{\boldsymbol{u}}| = \overline{U}$ отлична от нуля и сравнительно велика, можно ожидать, что коэффициент корреляции $R_{ii}(\tau) = B_{ii}(0, 0, 0, \tau)/\overline{u_i'^2}$ будет убывать с ростом τ еще значительно быстрее, чем при $U = 0$ (так как теперь он описывает связь между скоростями элементов жидкости, проносящихся в моменты t и $t+\tau$ с большой скоростью мимо одной и той же точки пространства, т. е. фактически находящихся на большом расстоянии друг от друга). И действительно, Хэй и Паскуил (1959), предположив, что

$$R_{22}(\tau) = R_{22}^{(L)}(\beta\tau) \tag{9.82}$$

(где направление оси Ox_2 совпадает с горизонтальным направлением, перпендикулярным среднему ветру), нашли из эмпирических данных о горизонтальной диффузии в атмосфере, что в первом (весьма грубом) приближении $\beta \approx 4$ (см. ниже стр. 513). Из равенства (9.82), очевидно, следует, что $T_2 = \beta T_2'$ и $\theta_2 = \beta\theta_2'$; поэтому значению $\beta = 4$ отвечает очень значительное превышение лагранжевых временных масштабов над эйлеровыми.

Предположение (9.82) о совпадении формы лагранжевой и эйлеровой временных корреляционных функций, часто использующееся в исследованиях о турбулентной диффузии, можно считать допустимым лишь по той причине, что на самом деле точная форма функций $R_{ii}^{(L)}(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, во многих случаях оказывается не очень существенной (см., например, выше стр. 476). Никаких теоретических оснований это предположение не имеет. Более того, в гл. 8 ч. 2 настоящей книги будет показано, что при очень больших значениях числа Рейнольдса $R_{ii}^{(L)}(\tau) \approx 1 - C_i\tau$ при $\theta_i^2/T_i \ll \tau \ll T_i$; в то же время эйлерова временная

корреляционная функция $R_{ii}(\tau)$ при очень большом Re и условии $\bar{u} \gg (\overline{u'^2})^{1/2}$ (выполняющемся в опытах Хэя и Паскуила) для таких τ имеет вид $R_{ii}(\tau) \approx 1 - C_i' \tau^{\frac{2}{3}}$ (но снова является линейной по τ, если $\bar{u} = 0$; ср. Корсин (1963), где исходя отсюда приближенно оценивается зависимость отношений различных временны́х масштабов от числа Рейнольдса). Таким образом, при $\bar{u} \gg (\overline{u'^2})^{1/2}$ соотношение (9.82) заведомо не может выполняться при всех τ. О поведении же лагранжевой и эйлеровой корреляционных функций при значениях τ, сравнимых с соответствующими временами корреляции, в общем случае вообще ничего нельзя сказать. Поэтому теоретическое определение вида функций $R_{ii}^{(L)}(\tau)$ оказывается возможным только на основе каких-либо специальных чисто эмпирических или же полуэмпирических гипотез.

Сафмен (1963) приближенно подсчитал значения функции $R_{ii}^{(L)}(\tau)$ для одного конкретного вида эйлеровой пространственно-временной корреляционной функции $R_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$, предположив, что в соотношении (9.22) скорость $V_j(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, t)$ при всех t можно заменить эйлеровой скоростью $u_j(\boldsymbol{X}, t)$. Однако мы уже отмечали, что такое предположение необоснованно; поэтому на нем не стоит задерживаться. Иноуэ (1950—1951) и Огура (1952б) рассмотрели модель турбулентного движения (задаваемого в виде совокупности возмущений поля скорости различных масштабов), в которой лагранжевы корреляционные функции $R_{ii}^{(L)}(\tau)$, $i=1,2,3$, оказались все задающимися следующей универсальной формулой: $R_{ii}^{(L)}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{2T_i}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2T_i$ и $R_{ii}^{(L)}(\tau) = 0$ при $\tau > 2T_i$. Позже, однако, Иноуэ (1952, 1959) пришел к выводу, что более удобной является другая модель, в которой $R_{ii}^{(L)}(\tau) = e^{-\tau/T_i}$. Грант (1957) использовал для подсчета функций $R_{ii}^{(L)}(\tau)$ специальную гипотезу о пути перемешивания и пришел при этом к более сложной (но также универсальной) формуле: $R_{ii}^{(L)}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{4T_i} + \frac{\tau}{4T_i} \ln \frac{\tau}{4T_i}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 4T_i$ и $R_{ii}^{(L)}(\tau) = 0$ при $\tau > 4T_i$; позже тот же результат получил Мацуока (1960) с помощью небольшого изменения первой модели Иноуэ, о которой говорилось выше. Еще одну модель турбулентности предложили Вандель и Кофёд-Ханзен (1962); в этой модели для лагранжевой корреляционной функции уже не получилось универсальной формулы, но зато эта функция оказалась довольно просто выражающейся через эйлерову временную корреляционную функцию. На самом деле, однако, лагранжева корреляционная функция не имеет одну и ту же форму во всех однородных и стационарных турбулентных течениях и не может быть однозначно выражена через эйлерову временную или пространственно-временную корреляционную функцию. Поэтому все перечисленные здесь результаты могут рассматриваться лишь как некоторые приближения к действительности, степень точности которых пока не может быть выяснена из-за отсутствия надежных эмпирических данных.

§ 10. ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ

10.1. Постановка задачи об описании турбулентной диффузии

В предыдущем параграфе мы рассматривали движение отдельных «жидких частиц» в турбулентном потоке. При этом под «жидкой частицей» мы понимали просто объем жидкости, настолько малый, что в рамках теории сплошной среды его можно отождествить с точкой, перемещающейся вместе с окружающей жидкостью. Ясно, однако, что полученные выводы можно будет сопоставить с данными наблюдений, лишь если в жидкости имеются выделенные «жидкие частицы», за движением которых можно как-то следить. Поэтому теория, развитая в предыдущем параграфе, может иметь значение лишь тогда, когда в некоторых элементах объема жидкость как-то «отмечена», т. е. обладает какими-то свойствами, отличными от свойств окружающей среды. Это отличие в свойствах чаще всего бывает связано с отличием химического состава, т. е. с наличием в отдельных элементах объема «посторонних веществ», отличных от самой жидкости; однако оно может сводиться, например, и лишь к разнице температуры. В любом случае при наличии «отмеченных» частиц мы будем говорить, что в потоке имеется некоторая *примесь*, понимая под примесью те части жидкости, которые обладают специальными свойствами, позволяющими следить за их движением.

Если вводить примесь лишь в определенные места турбулентного течения, то в результате ее переноса беспорядочно перемешивающимися струйками, составляющими в своей совокупности такое течение, она быстро распространится на весь занятый жидкостью объем. Это явление, называемое *турбулентной диффузией*, характерно именно для турбулентных течений; недаром в классических опытах Рейнольдса возникновение турбулентности определялось как раз тем, что при добавлении небольшого количества краски вся жидкость быстро становилась окрашенной. Разумеется, кроме турбулентной диффузии примесь обычно будет участвовать и в молекулярной диффузии, не связанной с турбулентностью, но этот процесс является несравненно более медленным, и поэтому при наличии турбулентности он играет лишь сравнительно небольшую роль. Именно турбулентной диффузией определяются такие всем известные и важные явления, как распространение в атмосфере Земли пыльцы растений, бактерий и вирусов, радиоактивных веществ, вулканической пыли и морской соли, загрязнение воздуха (особенно в городах) дымами и газами, выделяемыми промышленными

предприятиями и транспортом, перенос влаги, испаряемой поверхностью Земли и всевозможными водоемами, рассеяние предметов, плавающих на поверхности водоемов, и т. д. Поэтому неудивительно, что изучению турбулентной диффузии посвящена обширная литература (см., например, книги Саттона (1953), Френкиля и Шеппарда (1959), Паскуила (1962б), обзорные статьи Бэтчелора и Таунсенда (1956), Эллисона (1959), Монина (1959в) и др.).

Для возможности принять частицы жидкости, отмеченные наличием примеси, за «жидкие частицы» в смысле § 9 прежде всего необходимо, чтобы примесь была «пассивной» (т. е. не влияла бы на движение среды) и двигалась бы в потоке со скоростью, практически совпадающей с мгновенной скоростью течения в соответствующей точке. Отсюда, в частности, вытекает, что частицы примеси должны быть достаточно мелкими (меньшими по линейным размерам, чем те расстояния, на которых может хоть сколько-нибудь заметно измениться скорость $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$) и столь близкими по удельному весу к окружающей среде, чтобы ни гравитационное оседание примеси, ни ее всплывание вверх под действием архимедовой силы не играли бы существенной роли. Разумеется, даже и в этом случае частицы примеси все равно не будут полностью тождественны идеальным «жидким частицам». В самом деле, любая примесь может рассеиваться и в результате молекулярной диффузии или броуновского движения, связанных с тепловым движением молекул среды, в то время как на «жидкие частицы» (представляющие собой фактически «математические точки» непрерывной среды, подчиняющейся уравнениям гидромеханики) молекулярное движение не оказывает никакого влияния. Это обстоятельство (о котором мы еще будем подробнее говорить в п. 10.2) имеет, однако, лишь второстепенное значение и в большинстве случаев им вполне можно пренебречь.

Если частицы примеси могут наблюдаться по отдельности, то можно, следя за их движением, определить индивидуальную лагранжеву траекторию $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t)$ и затем попытаться подсчитать лагранжевы статистические характеристики турбулентности с помощью осреднения данных, полученных для ряда таких траекторий. Этот метод получил довольно широкое распространение в метеорологии в связи с использованием так называемых уравновешенных шаров-пилотов (вес которых специально подбирается так, чтобы они плавали в воздухе, не поднимаясь и не опускаясь) и воздушных шаров (см., например, книгу Паскуила (1962б), в которой можно найти и ряд ссылок на оригинальные работы). Однако полученные таким образом результаты позволяют получить лишь весьма предварительные

оценки лагранжевой корреляционной функции скорости и других лагранжевых характеристик атмосферной турбулентности. Дело в том, что создание точно уравновешенных шаров весьма сложно, а работа с ними очень хлопотлива и трудоемка; кроме того, такие шары всегда имеют довольно большой объем, и поэтому на них не действуют мелкомасштабные возмущения поля скорости, сказывающиеся на движении идеализированных «жидких частиц».

Как правило, примесь вводится в поток в виде жидкой или газообразной добавки или в виде большого числа мелких твердых частиц. При этом ее обычно можно с полным основанием считать непрерывно распределенной в пространстве и характеризовать эйлеровым полем объемной концентрации $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ (в случае сжимаемой жидкости более удобной характеристикой была бы массовая удельная концентрация ϑ/ϱ, но мы здесь будем для простоты рассматривать лишь диффузию в несжимаемой жидкости). Под описанием турбулентной диффузии мы будем понимать статистическое описание поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ при заданных начальных и краевых условиях, включающих и задание всех источников примеси. Отметим, что при наличии источников поле концентрации примеси $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ будет, вообще говоря, неоднородным, и его математическое ожидание — *средняя концентрация* $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ — будет некоторой функцией от $\boldsymbol{X}$ и t. Определение этой функции является важнейшей (хотя и не единственной) задачей теории турбулентной диффузии.

При описании турбулентной диффузии можно исходить из того, что в каждой индивидуальной реализации турбулентного потока поле концентрации $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ в областях, не содержащих источников примеси, удовлетворяет уравнению молекулярной диффузии

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+\frac{\partial u_\alpha \vartheta}{\partial X_\alpha}=\chi \Delta \vartheta \qquad (10.1)$$

с заданными краевыми условиями на границах рассматриваемой области пространства. Поскольку примесь пассивна, т. е. поле $\boldsymbol{u}$ не зависит от распределения концентрации ϑ, уравнение (10.1) линейно относительно ϑ. Краевые условия, как правило, также линейны относительно ϑ; обычно они имеют вид

$$\chi \frac{\partial \vartheta}{\partial n}+\beta \vartheta = f(t), \qquad (10.2)$$

где n — нормаль к границе, а β — некоторая постоянная. В случае твердых стенок, ограничивающих поток, краевые условия однородны, т. е. $f(t)=0$; при этом стенке полностью поглощающей примесь, соответствует значение $\beta=\infty$, стенке, совершенно непроницаемой для примеси, — значение $\beta=0$, а значения

$0 < \beta < \infty$ соответствуют случаю частичного поглощения и частичного отражения примеси на границе. В последние годы в исследованиях В. Феллера, А. Д. Вентцеля и других авторов по общей теории марковских случайных процессов были изучены также и более общие (в определенном смысле — наиболее общие) граничные условия, допускающие возможность временной остановки примеси в момент достижения границы и ее диффузии вдоль границы (см., например, Дынкин (1963)). Поскольку, однако, эффекты такого рода вряд ли могут иметь реальное значение при распространении примесей, то на соответствующих граничных условиях (которые также линейны) мы не будем задерживаться. В случае неограниченного по каким-то направлениям потока краевые условия на бесконечности обычно берутся в виде требования $\vartheta \to 0$, т. е. опять же имеют вид (10.2) (с $f(t) = 0$ и $\beta = \infty$). Мгновенные источники примеси, очевидно, описываются заданием определенных начальных условий для поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$; непрерывно же действующим источникам соответствуют неоднородные краевые условия вида (10.2) с $f(t) \neq 0$ (подробнее эти условия для различных типов источников будут рассмотрены ниже).

При однородных краевых условиях эволюция поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ в рассматриваемой области будет обусловлена исключительно переносом примеси полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ и молекулярной диффузией. Поле скорости в принципе однозначно определяется по начальному полю $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t_0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$ с помощью уравнений гидродинамики. Следовательно, решение уравнения (10.1) при заданном начальном поле концентрации $\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0) = \vartheta_0(\boldsymbol{X})$ может быть записано в виде

$$\vartheta(\boldsymbol{X}, t) = A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]\,\vartheta_0(\boldsymbol{X}), \tag{10.3}$$

где A — некоторый оператор, зависящий от начального поля скорости $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$, параметра t и вида краевых условий. Подчеркнем, что вследствие линейности уравнения (10.1) и краевых условий этот оператор линеен.

При статистическом описании турбулентности начальное поле скорости $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$ рассматривается как случайное, т. е. предполагается, что ему соответствует некоторое распределение вероятностей в функциональном пространстве его реализаций (всевозможных соленоидальных векторных полей). Но в таком случае и оператор $A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]$, зависящий от случайного поля $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$, будет случайным оператором, характеризуемым некоторым распределением вероятностей в пространстве линейных операторов, могущих являться реализациями оператора A. Следовательно, при фиксированном $\vartheta_0(\boldsymbol{X})$ поле концентрации $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ при $t > t_0$ будет случайным (так как оно зависит от A, т. е. от $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$). При этом среднее значение поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ будет определяться равенством

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \overline{A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]\,\vartheta_0(\boldsymbol{X})} = \bar{A}(t)\,\vartheta_0(\boldsymbol{X}), \tag{10.4}$$

где оператор $\bar{A}(t) = \overline{A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]}$ получается из случайного оператора $A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]$ с помощью теоретико-вероятностного осреднения (т. е. интегрирования по вероятностной мере, заданной в пространстве полей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$). Поскольку операторы $A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}), t]$ линейны при любом $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$, и осреднение является линейной операцией, то и результирующий осредненный оператор $\bar{A}(t)$ также линеен. Таким образом, при фиксированном начальном поле концентрации $\vartheta_0(\boldsymbol{X})$ осредненная концентрация $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению. Для корреляционной функции и для моментов более высокого порядка случайного поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ с помощью (10.3) также можно получить некоторые уравнения; однако эти уравнения будут уже нелинейными и гораздо более сложными, и они рассматриваются редко. Большинство существующих методов описания турбулентной диффузии сводится к конструированию лишь линейного уравнения для средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ или, что эквивалентно, к нахождению (теоретическому, полуэмпирическому или чисто эмпирическому) линейного оператора $\bar{A}(t)$.

В частном случае, когда допускается, что при определении осредненной концентрации можно пренебречь молекулярной диффузией по сравнению с турбулентной (условия, при которых законно это допущение, будут рассмотрены в следующем пункте), оператор $\bar{A}(t)$ может быть представлен в значительно более конкретном виде, чем это делалось выше. В самом деле, рассмотрим прежде всего случай, когда в начальный момент времени $t = t_0$ вся примесь (в количестве Q) сосредоточена в одной «жидкой частице», находящейся в точке $\boldsymbol{x}$. В таком случае, очевидно, $\vartheta_0(\boldsymbol{X}) = Q\delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x})$. Но поскольку молекулярной диффузией пренебрегается, примесь все время будет оставаться в той же жидкой частице, что и вначале, т. е. в момент t она будет находиться в точке $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$. Следовательно, в рассматриваемом случае $\vartheta(\boldsymbol{X}, t) = Q\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]$. Учитывая, что

$$\overline{\delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]} = p(\boldsymbol{X} | \boldsymbol{x}, t)$$

— это плотность вероятности для координат указанной «жидкой частицы» в момент t, получим $\bar{A}(t)\delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{X} | \boldsymbol{x}, t)$. В силу линейности оператора $\bar{A}(t)$, при произвольном начальном поле $\vartheta_0(\boldsymbol{X})$ мы можем теперь воспользоваться принципом

суперпозиции; отсюда вытекает, что

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \bar{A}(t)\,\vartheta_0(\boldsymbol{X}) = \int p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)\,\vartheta_0(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \qquad (10.5)$$

Таким образом, нахождение осредненной концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ в пренебрежении молекулярной диффузией сводится к определению плотности вероятности для координаты $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ одной «жидкой частицы». Заметим, что саму функцию $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ в силу (10.5) можно интерпретировать как поле концентрации примеси $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ при наличии в начальный момент $t = t_0$ в точке $\boldsymbol{x}$ мгновенного точечного источника примеси (единичной концентрации). Отсюда вытекает возможность эмпирического определения $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ по данным диффузионных опытов, о которой мы упоминали на стр. 473.

Зная оператор $\bar{A}(t)$, т. е. умея вычислить поле средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$, отвечающее заданному начальному полю $\vartheta_0(\boldsymbol{X})$, легко определить и среднюю концентрацию, отвечающую различным типам источников примеси, встречающимся на практике. Рассмотрим, например, снова случай «чисто турбулентной» диффузии, определяемой формулой (10.5), причем поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ для простоты будем предполагать стационарным (что соответствует установившейся турбулентности). В таком случае плотность вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t_0 + \tau)$ для координат «жидкой частицы» в момент $t_0 + \tau$ при условии, что в момент t_0 она находилась в точке $\boldsymbol{x}$, удобно обозначить символом $p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, \tau)$; тогда функция p_1 в отличие от p уже не будет зависеть от параметра t_0. При этом средняя концентрация от мгновенного точечного источника производительности Q (т. е. создавшего Q единиц массы примеси) будет равна $Q\,p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t - t_0)$. В случае непрерывно действующего стационарного точечного источника в точке $\boldsymbol{x}$ производительности Q (т. е. создающего Q единиц массы примеси за единицу времени) средняя концентрация $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \overline{\vartheta(\boldsymbol{X})}$, очевидно, не будет зависеть от времени и будет даваться формулой

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X})} = Q\int_{-\infty}^{t} p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t - t_0)\,dt_0 = Q\int_0^{\infty} p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, \tau)\,d\tau. \qquad (10.6)$$

На практике довольно часто приходится также иметь дело с диффузией в потоке, имеющем постоянную среднюю скорость $\bar{u} = U$, направленную вдоль оси OX_1; в таком случае удобно сначала перейти к системе координат, движущейся вместе со средним течением. При этом средняя концентрация от непрерывно действующего стационарного точечного источника в точке $\boldsymbol{x}$

принимает вид

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X})} = Q\int_0^{\infty} p_1(X_1 - U\tau,\ X_2,\ X_3|\boldsymbol{x}, \tau)\,d\tau, \qquad (10.6')$$

где $p_1(X_1, X_2, X_3|\boldsymbol{x}, \tau)$ — плотность вероятности для координат жидкой частицы при отсутствии средней скорости. В случае линейного источника, расположенного вдоль оси OX_2, средняя концентрация $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ получается интегрированием по x_2 концентрации от точечного источника в точке $(0, x_2, 0)$. Отсюда вытекает, что в случае установившейся турбулентности, однородной по направлению оси OX_2, и при наличии средней скорости потока U по направлению оси OX_1 средняя концентрация от мгновенного линейного источника на оси OX_2 будет иметь вид

$$\overline{\vartheta(X_1, X_3, t)} = Q\int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1 - U\tau,\ X_2,\ X_3|0,\ t - t_0)\,dX_2 = Qp_1(X_1 - U\tau,\ X_3|0,\ t - t_0). \qquad (10.7)$$

Здесь Q — это количество примеси, внесенное в поток на интервале оси OX_2 единичной длины (это количество мы считаем постоянным, т. е. не зависящим от X_2), а $p_1(X_1, X_3|0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1, X_2, X_3|0, \tau)\,dX_2$ — двумерная плотность вероятности для координат X_1 и X_3 «жидкой частицы» в момент $t_0+\tau$ (при условии, что в момент t_0 она находилась в точке $\boldsymbol{x}=0$) в потоке с нулевой средней скоростью. Точно так же в случае непрерывно действующего стационарного линейного источника на оси OX_2 производительности Q (т. е. производящего Q единиц массы примеси за единицу времени на каждую единицу длины) средняя концентрация $\overline{\vartheta(X_1, X_3)}$ равна

$$\overline{\vartheta(X_1, X_3)} = Q\int_0^{\infty} p_1(X_1 - U\tau,\ X_3|0, \tau)\,d\tau. \qquad (10.8)$$

С помощью формул для моментов $\overline{X_i}$ и $\overline{X_iX_j}$ координат «жидкой частицы», приведенных в предыдущем параграфе, мы можем теперь выразить через лагранжевы характеристики турбулентности величины $\int X_i\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}\,d\boldsymbol{X}$, $\int X_iX_j\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}\,d\boldsymbol{X}$ и некоторые другие того же типа. С другой стороны, эти величины можно определить и по найденной из диффузионных экспери-

ментов средней концентрации $\overline{\vartheta(X, t)}$, что дает возможность получить определенные эмпирические сведения о лагранжевых характеристиках. Рассмотрим в качестве иллюстрации простейший случай непрерывно действующего линейного источника на оси OX_2 в потоке со средней скоростью U, намного превосходящей типичные значения пульсаций скорости. В этом случае основной вклад в интеграл по $d\tau$ в правой части (10.8) внесут значения τ, близкие к X_1/U. Поэтому здесь с большой степенью точности можно положить

$$\overline{\vartheta(X_1, X_3)} = \text{const} \cdot p_1\left(X_3|0, \frac{X_1}{U}\right), \tag{10.9}$$

где $p_1(X_3|0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1, X_3|0, \tau)\, dX_1$ — одномерная плотность вероятности для координаты X_3 «жидкой частицы». В силу формулы Тэйлора (9.31) отсюда, в частности, вытекает, что при однородной турбулентности с $U \gg (\overline{u_1'^2})^{1/2}$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} X_3^2 \overline{\vartheta(X_1, X_3)}\, dX_3}{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vartheta(X_1, X_3)}\, dX_3} = \overline{[X_3(X_1)]^2} = 2\overline{u_3^2} \int_0^{X_1/U} \left(\frac{X_1}{U} - \tau\right) R_{33}^{(L)}(\tau)\, d\tau, \tag{10.10}$$

где, как и в § 9, $\overline{u_3^2} R_{33}^{(L)}(\tau) = \overline{V_3'(0, t)\, V_3'(0, t+\tau)}$. Следовательно, средняя толщина следа за стационарным линейным источником примеси (которую естественно отождествить с $(\overline{X_3^2})^{1/2}$) на малых расстояниях от источника возрастает пропорционально этому расстоянию (так как $\overline{X_3^2} \approx \frac{\overline{u_3^2} X_1^2}{U^2}$ при $X_1 \ll UT_3 = U\int_0^{\infty} R_{33}^{(L)}(\tau)\, d\tau$), а на больших — пропорционально квадратному корню из расстояния (так как $\overline{X_3^2} \approx \frac{2\overline{u_3^2} T_3 X_1}{U}$ при $X_1 \gg UT_3$). Это обстоятельство хорошо подтверждается данными диффузионных экспериментов Калинске и Пиена (1944), Уберои и Корсина (1953), Таунсенда (1954) и других исследователей. Аналогично показывается, что в тех же условиях след за точечным стационарным источником должен вначале иметь форму конуса, а затем — параболоида вращения. Этот факт также уже давно был известен и из лабораторных экспериментов, и из

наблюдений за дымовыми струями, выходящими при сильном ветре из фабричных труб (ср. Тэйлор (1921)).

Согласно формуле (10.10),

$$\frac{d^2\overline{X_3^2}}{dX_1^2} = 2\frac{\overline{u_3^2}}{U^2} R_{33}^{(L)}\left(\frac{X_1}{U}\right), \tag{10.11}$$

так что в принципе по эмпирическим значениям $\overline{X_3^2}(X_1)$ можно определить и функцию $R_{33}^{(L)}(\tau)$. На самом деле, однако, точность такого определения $R_{33}^{(L)}(\tau)$ оказывается крайне низкой, так как при этом приходится дважды дифференцировать экспериментальную кривую, на практике всегда определяемую довольно ненадежно. Тем не менее, некоторые авторы (в том числе Тэйлор (1935б) и Коллис (1948)) пробовали получить таким образом хотя бы ориентировочные значения лагранжевой корреляционной функции скорости. Другие исследователи (например, Калинске и Пиен (1944), Уберои и Корсин (1953), Майкельсен (1955), Хэй и Паскуил (1959)) использовали измерения величины $\overline{X_3^2}$ (в следе за линейным или точечным стационарным источником), в первую очередь, для получения более частной информации о лагранжевых статистических характеристиках и прежде всего данных о величине лагранжевого масштаба времени $T = \int_0^{\infty} R_{33}^{(L)}(\tau)\, d\tau$. В частности, Хэй и Паскуил измеряли (с помощью специальных коллекторов, представляющих собой небольшие липкие цилиндры) распределение примеси (которой в их опытах являлись споры ликоподия) вблизи Земли на расстоянии 100 *м* от помещенного в атмосферу непрерывного точечного источника. Одновременно эти исследователи регистрировали изменения скорости и направления ветра в фиксированной точке вблизи источника (на высоте 2 *м* над поверхностью Земли), что позволило им определить эйлерову временную корреляционную функцию скорости ветра. Предположив, что эйлерова и лагранжева корреляционные функции поперечной компоненты скорости ветра подобны друг другу (см. формулу (9.82) на стр. 503), и использовав формулу Тэйлора (9.31), они смогли оценить по экспериментальным данным величину коэффициента пропорциональности β; именно так было получено значение $\beta \approx 4$, упоминавшееся на стр. 503. Калинске и Пиен (1944) и Уберои и Корсин (1953) измерили в лабораторных условиях значения функции $\overline{X_3^2}(X_1)$ в следе за линейным стационарным источником, оценили по ней масштаб T и некоторые другие

параметры функции $R_{33}^{(L)}(\tau)$ и затем использовали эти оценки для уточнения значений $R_{33}^{(L)}(\tau)$, найденных по формуле (10.11); однако и в этом случае ход функции $R_{33}^{(L)}(\tau)$ определялся ненадежно. Заметим еще, что в большинстве упоминавшихся опытов измерения относились к случаю диффузии тепла (работы Тэйлора, Коллиса, Уберои и Корсина) или постороннего газа (работа Майкельсена) в воздухе, так что пренебрежение молекулярной диффузией здесь требовало специального обоснования (отсутствующего во всех этих работах). В опытах же Калинске и Пиена, в которых изучалась диффузия в воде мелких капелек жидкой примеси (того же удельного веса, что и вода), молекулярная диффузия вряд ли могла проявляться, но предположение об однородности турбулентности оказывалось, по-видимому, не очень точным.

Как мы уже указывали в п. 9.3, в случае однородной турбулентности есть веские основания предполагать, что распределение вероятностей для координат «жидкой частицы» при любых временах диффузии будет довольно близким к гауссовскому распределению. Иначе говоря, если мы примем за оси координат главные направления тензора дисперсии координат жидкой частицы $D_{ij}(\tau) = \overline{[X_i(\tau) - x_i][X_j(\tau) - x_j]}$, то при любом τ допустимо считать, что

$$p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} [D_{11}(\tau) D_{22}(\tau) D_{33}(\tau)]^{1/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(X_1 - x_1)^2}{2D_{11}(\tau)} - \frac{(X_2 - x_2)^2}{2D_{22}(\tau)} - \frac{(X_3 - x_3)^2}{2D_{33}(\tau)}\right\}, \quad (10.12)$$

где величины $D_{ii}(\tau)$ выражаются с помощью формулы (9.31) через лагранжевы коэффициенты корреляции $R_{ii}^{(L)}(\tau)$. Подставляя эту формулу в общие соотношения (10.5)—(10.9) (в предположении, во многих случаях вполне оправданном, что направление средней скорости совпадает с одним из главных направлений тензора $D_{ij}(\tau)$), можно значительно конкретизировать эти выражения, исследовать их асимптотическое поведение в различных предельных случаях, получить для некоторых из них более простые приближенные формулы и провести детальные расчеты для отдельных модельных примеров функций $R_{ii}^{(L)}(\tau)$ (Френкиль (1952, 1953), Флейшмен и Френкиль (1954); ср. также Хинце (1959), § 5.5 и начало п. 10.4 настоящей книги).

В ряде случаев примесь можно рассматривать не только как непрерывно распределенную в пространстве субстанцию, но и как совокупность дискретных частиц, причем иногда это последнее рассмотрение даже оказывается в некоторых отношениях более удобным. Несмотря на то, что в дальнейшем мы

не будем пользоваться таким рассмотрением, приведем здесь все же для полноты некоторые результаты, касающиеся математического описания поля дискретной примеси. Обозначим общее число частиц примеси через N, а их суммарную массу примем за единицу. Будем считать все частицы не отличающимися друг от друга и статистически равноправными в том смысле, что при любом $k \leqslant N$, любых пространственных областях $V_1, \ldots, V_k$ и любых различных номерах $i_1, \ldots, i_k$, $1 \leqslant i_s \leqslant N$, вероятность $P\{\boldsymbol{X}_{i_1} \in V_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i_k} \in V_k\}$, где $\boldsymbol{X} \in V$ означает, что точка $\boldsymbol{X}$ принадлежит области V, не зависит от номеров $i_1, \ldots, i_k$. Отсюда, в частности, вытекает, что все случайные векторы $\boldsymbol{X}_i$ являются одинаково распределенными и что $P\{\boldsymbol{X}_{i_1} \in V_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{i_k} \in V_k\}$ является симметричной функцией от областей $V_1, \ldots, V_k$.

Полной характеристикой распределения дискретной примеси в фиксированный момент времени будет случайная функция области $\mu(V)$, значение которой равно массе примеси, содержащейся в данный момент в пространственной области V. Эта случайная функция играет здесь ту же роль, что и случайное поле $\vartheta(\boldsymbol{X})$ в применении к непрерывно распределенной примеси (точнее говоря, $\mu(V)$ является аналогом величины $\int_V \vartheta(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X}$). Функция $\mu(V)$, очевидно, является аддитивной функцией области в том смысле, что $\mu(V_1 + V_2) = \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Вместо многомерных распределений вероятностей, определяющих случайное поле $\vartheta(\boldsymbol{X})$, теперь выступают вероятности

$$P_{n_1 \ldots n_k}(V_1, \ldots, V_k) = P\left\{\mu(V_1) = \frac{n_1}{N}; \ldots, \mu(V_k) = \frac{n_k}{N}\right\}, \quad (10.13)$$

заданные для всевозможных конечных наборов пространственных областей $V_1, \ldots, V_k$. В дальнейшем мы будем для простоты рассматривать лишь вероятности (10.13) для непересекающихся между собой областей $V_1, \ldots, V_k$. Отметим, что в частном случае независимых статистически равноправных частиц примеси распределение (10.13) вырождается в так называемое *полиномиальное распределение*

$$P_{n_1 \ldots n_k}(V_1, \ldots, V_k) = C_N^{n_1 \cdots n_k} [Q_1(V_1)]^{n_1} \ldots [Q_1(V_k)]^{n_k} \times$$
$$\times [1 - Q_1(V_1) - \ldots - Q_1(V_k)]^{n_0},$$

где

$$n_0 = N - n_1 - \ldots - n_k, \quad C_N^{n_1 \cdots n_k} = \frac{N!}{n_1! \ldots n_k! n_0!}, \quad Q_1(V) = P\{\boldsymbol{X}_1 \in V\}.$$

Таким образом, в случае независимых частиц функция $\mu(V)$ полностью задается значением вероятности $Q_1(V)$ для всех областей V. В общем же случае зависимых статистически равноправных частиц распределение (10.13) будет представлять собой некоторое обобщение полиномиального распределения; для его задания уже надо знать все вероятности

$$Q_{n_1 \ldots n_k}(V_1, \ldots, V_k) =$$
$$= P\{\boldsymbol{X}_1 \in V_1, \ldots, \boldsymbol{X}_{n_1} \in V_1; \ldots; \boldsymbol{X}_{n_1 + \ldots + n_{k-1} + 1} \in V_k, \ldots, \boldsymbol{X}_{n_1 + \ldots + n_k} \in V_k\}. \quad (10.14)$$

Можно показать, что произвольный момент случайных величин $\mu(V_1), \ldots, \mu(V_k)$ выражается через вероятности (10.14) с помощью формулы

$$\overline{\prod_{s=1}^{k} [\mu(V_s)]^{m_s}} = \frac{N!}{N^m} \sum_{n_1+\ldots+n_k \leqslant m} \frac{a_{n_1}^{m_1} \ldots a_{n_k}^{m_k}}{n_0!} Q_{n_1 \ldots n_k}(V_1, \ldots, V_k), \tag{10.15}$$

где $m = m_1 + \ldots + m_k$ — порядок момента, а a_n^m — так называемые числа Стирлинга, отличные от нуля лишь при $0 < n \leqslant m$ и удовлетворяющие разностному уравнению $a_n^m = a_{n-1}^{m-1} + n a_n^{m-1}$ при краевых условиях $a_m^m = a_1^m = 1$. Отсюда, в частности, следует, что момент m-го порядка случайной функции $\mu(V)$ полностью определяется совместным распределением вероятностей для координат m частиц, т. е., иначе говоря, что вероятности (10.14) с $n_1 + \ldots + n_k \leqslant m$ определяют случайную функцию $\mu(V)$ с точностью до моментов m-го порядка.

При $m = 1$ из (10.15) получается формула

$$\overline{\mu(V)} = Q_1(V), \tag{10.16}$$

аналогичная формуле (10.5) (точнее говоря, формуле, получающейся из (10.5) после интегрирования обеих ее частей по области V переменного $\boldsymbol{X}$). При $m = 2$ из (10.15) и (10.16) получаем

$$\overline{[\mu(V) - \overline{\mu(V)}]^2} = Q_2(V) - [Q_1(V)]^2 + \frac{1}{N}[Q_1(V) - Q_2(V)], \tag{10.17}$$

$$\overline{[\mu(V_1) - \overline{\mu(V_1)}][\mu(V_2) - \overline{\mu(V_2)}]} = Q_{11}(V_1, V_2) - Q_1(V_1) Q_1(V_2) - \frac{1}{N} Q_{11}(V_1, V_2). \tag{10.18}$$

Первая из этих формул показывает, что при наличии связей между частицами (т. е. при $Q_2(V) \neq [Q_1(V)]^2$) флюктуации количества примеси в фиксированном объеме V не убывают неограниченно (по своей средней квадратичной величине), даже когда $N \to \infty$. Иначе говоря, в случае взаимнозависимых частиц даже при очень большом числе частиц N значения $\mu(V)$ оказываются заметно различными для разных реализаций. Формула (10.18) показывает, что, кроме того, в таком случае флюктуации количества примеси в различных (непересекающихся) объемах оказываются взаимно коррелированными. Заметим, что взаимная зависимость между частицами как раз и характерна для процесса турбулентной диффузии, где движения частиц, находящихся на не слишком большом расстоянии друг от друга, определяются в значительной степени одними и теми же возмущениями поля скорости, т. е. статистически связаны друг с другом. Поэтому при турбулентной диффузии концентрации примеси в каждом объеме заметно флюктуируют и для близких (но непересекающихся) объемов оказываются зависимыми друг от друга при любом N и даже при $N = \infty$ — именно этот последний случай и описывается моделью непрерывно распределенной примеси с концентрацией $\vartheta(\boldsymbol{X})$, непрерывно зависящей от $\boldsymbol{X}$.

10.2. Взаимодействие между молекулярной и турбулентной диффузией

Распространение примесей в турбулентной среде в результате их переноса движущимися жидкими частицами (т. е. турбулентная диффузия) обычно происходит много быстрее, чем

их распространение, создаваемое молекулярным движением (т. е. молекулярная диффузия). Так, например, в приземном слое атмосферы условный «коэффициент турбулентной диффузии» для пассивных примесей (т. е. отношение турбулентного потока примеси к градиенту концентрации) обычно имеет значения порядка $10^4 \div 10^5$ *см²сек⁻¹*. Иначе говоря, он оказывается в $10^5 \div 10^6$ раз больше коэффициента молекулярной диффузии χ, который для большинства газов имеет порядок 10^{-1} *см²сек⁻¹*. В результате турбулентной диффузии дым от папиросы в концентрациях, достаточных для воздействия на человеческое обоняние, распространяется по комнате за несколько секунд, в то время как действие одной лишь молекулярной диффузии привело бы к такому результату лишь через несколько суток. Однако означает ли все это, что при описании турбулентной диффузии можно полностью пренебречь молекулярной диффузией?

Перенос примеси движущимися жидкими частицами, очевидно, приводит к тому, что объем, первоначально занятый примесью, по каким-то направлениям растягивается, а по другим сжимается, искривляясь при этом самым запутанным образом (подробнее об этом процессе мы будем говорить в гл. 8 ч. 2 книги). Однако суммарный объем примеси при такой деформации, разумеется, не меняется. В результате в каждой реализации турбулентного течения удельная концентрация $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ в каждой точке в любой момент времени будет равной либо удельному весу примеси ρ_0, либо 0, в зависимости от того, содержала ли соответствующая «жидкая частица» в начальный момент $t = t_0$ примесь или не содержала (ср. схематический рис. 80, заимствованный из обзорной статьи Корсина (1959а)). Таким образом, турбулентная диффузия приводит к образованию в жидкости очень искривленных и запутанных слоев с резко различающимися значениями концентрации примеси. Выравнивание концентрации в соседних слоях, сопровождающееся возрастанием объема, занятого примесью, и сглаживанием поля концентрации, в результате которого значения функции $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ уже, как правило, оказываются промежуточными между ρ_0 и 0, происходит только вследствие молекулярной диффузии и тем медленнее, чем меньше коэффициент χ. Отсюда ясно, что при описании мелкомасштабной статистической структуры поля $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ пренебречь молекулярной диффузией невозможно — иначе при большом t мы получим совершенно противоестественное распределение концентрации типа, изображенного в правой части рис. 80. Однако вопрос о том, нельзя ли пренебречь молекулярной диффузией по сравнению с турбулентной при нахождении средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$, как

это было сделано в предыдущем пункте при выводе формулы (10.5), более сложен. Этим вопросом мы теперь и займемся.

При выяснении относительной роли молекулярной и турбулентной диффузии в формировании поля осредненной концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ мы ограничимся для простоты рассмотрением задачи о диффузии примеси от мгновенного точечного источника единичной производительности в поле однородной турбулентности с нулевой средней скоростью. Будем считать, что этот

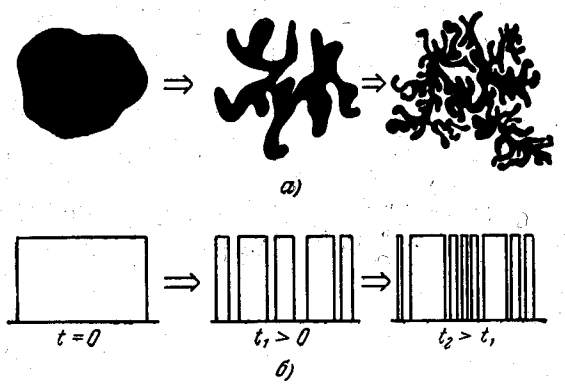


Рис. 80. а) Изменение формы объема, занятого примесью, в результате турбулентной диффузии. б) Схематический вид распределения концентрации примеси вдоль прямой, пересекающей этот объем.

источник помещен в момент $t = t_0$ в точку $\boldsymbol{X} = 0$. Иначе говоря, мы будем рассматривать поле концентрации $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$, соответствующее решению уравнения (10.1) при начальном условии $\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0) = \delta(\boldsymbol{X})$. Исследуем диффузию примеси по какому-то одному фиксированному направлению, скажем, по направлению оси OX_1. В качестве характеристики роли молекулярной диффузии мы используем относительный вклад этой диффузии в дисперсию распределения средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$. При этом существенно различать, во-первых, *дисперсию распределения средней концентрации относительно местоположения источника* $\boldsymbol{X} = 0$

$$D_0^2(t) = \int X_1^2 \overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}\, d\boldsymbol{X} \tag{10.19}$$

и, во-вторых, *дисперсию* (также относительно местоположения источника $\boldsymbol{X} = 0$) *центра тяжести* $X_c(t) = \int X_1 \vartheta(\boldsymbol{X}, t)\, d\boldsymbol{X}$ *распределения концентрации* $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$, т. е. величину

$$\overline{X_c^2(t)} = \overline{\left[\int X_1 \vartheta(\boldsymbol{X}, t)\, d\boldsymbol{X}\right]^2}. \tag{10.20}$$

Помимо того интерес представляет и *дисперсия распределения концентрации* $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ *относительно своего центра тяжести*

$$D_c^2(t) = \overline{\int [X_1 - X_c(t)]^2 \vartheta(\boldsymbol{X}, t)\, d\boldsymbol{X}}. \tag{10.21}$$

Однако, воспользовавшись условием нормировки $\int \vartheta(\boldsymbol{X}, t)\, d\boldsymbol{X} = 1$, выражающим закон сохранения количества примеси (или, как говорят, ее консервативность), нетрудно проверить, что

$$D_c^2(t) = D_0^2(t) - \overline{X_c^2(t)}, \tag{10.22}$$

так что нам достаточно подсчитать только две величины $D_0^2(t)$ и $\overline{X_c^2(t)}$.

Далее нам будет удобно перейти от неподвижной системы координат $\boldsymbol{X}$ к подвижной неинерциальной системе координат $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(0, t)$, начало отсчета которой в каждый момент времени совпадает с точкой, в которой в этот момент находится жидкая частица, находившаяся в момент t_0 в точке $\boldsymbol{X} = 0$. Для поля концентрации в этой новой системе отсчета мы примем обозначение

$$\theta(\boldsymbol{Y}, t) = \vartheta[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(0, t), t] = \vartheta(\boldsymbol{X}, t). \tag{10.23}$$

В таком случае ясно, что $\dfrac{\partial \theta(\boldsymbol{Y}, t)}{\partial Y_i} = \dfrac{\partial \vartheta(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_i}\Big|_{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(0, t)}$. С другой стороны,

$$\frac{\partial \theta(\boldsymbol{Y}, t)}{\partial t} = \frac{d}{dt}\vartheta[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(0, t), t] = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + V_\alpha(0, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial X_\alpha}, \tag{10.24}$$

где $\boldsymbol{V}(0, t) = \dfrac{d\boldsymbol{X}(0, t)}{dt}$ — лагранжева скорость «жидкой частицы», находившейся в момент t_0 в точке $\boldsymbol{X} = 0$. Следовательно, уравнение (10.1) в рассматриваемой подвижной системе координат принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + [u_i[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(0, t), t] - V_i(0, t)]\frac{\partial \theta}{\partial Y_i} = \chi \Delta\theta, \tag{10.25}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным (Y_1, Y_2, Y_3), а $\boldsymbol{V}(0, t)$ — скорость начала отсчета этой подвижной системы относительно исходной неподвижной системы координат. Поле $\theta(\boldsymbol{Y}, t)$ также удовлетворяет условию нормировки $\int \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y} =$

$= 1$, которым мы будем пользоваться, не оговаривая этого. Далее, равенства (10.19) и (10.20) после перехода к новой системе координат принимают вид

$$D_0^2(t) = \overline{\int [Y_1 + X_1(0, t)]^2 \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}} =$$

$$= \overline{X_1^2(0, t)} + 2\overline{X_1(0, t) \int Y_1 \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}} + \overline{\int Y_1^2 \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}}, \quad (10.26)$$

и соответственно

$$\overline{X_c^2(t)} = \overline{\left\{\int [Y_1 + X_1(0, t)]\, \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}\right\}^2} =$$

$$= \overline{X_1^2(0, t)} + 2\overline{X_1(0, t) \int Y_1 \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}} + \overline{\left[\int Y_1 \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y}\right]^2}. \quad (10.27)$$

Мы ограничимся вычислением величин $D_0^2(t)$ и $X_c^2(t)$ лишь при малых значениях $t - t_0$. Будем считать, что все моменты

$$\langle Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3} \rangle = \int Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3} \theta(\boldsymbol{Y}, t)\, d\boldsymbol{Y} \quad (10.28)$$

(где k_1, k_2, k_3 — неотрицательные целые числа) могут быть представлены в виде рядов по целым степеням $t - t_0$. В таком случае и дисперсии $D_0^2(t)$ и $\overline{X_c^2(t)}$ будут представимы в виде рядов по степеням $t - t_0$, причем для вычисления первых нескольких членов этих рядов надо знать лишь несколько первых членов рядов для моментов $\langle Y_1 \rangle$ и $\langle Y_1^2 \rangle$, входящих в формулы (10.26) и (10.27).

Для вычисления моментов (10.28) воспользуемся уравнением (10.25). При этом для нас будет существенно, что $u_l[\boldsymbol{X}(0, t), t] = V_l(0, t)$, и следовательно, разность скоростей, стоящая в фигурных скобках в левой части (10.25), может быть представлена в виде

$$u_l[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(0, t), t] - V_l(0, t) =$$

$$= Y_\alpha \frac{\partial u_l}{\partial X_\alpha} + \frac{1}{2} Y_\alpha Y_\beta \frac{\partial^2 u_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} + \frac{1}{6} Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma \frac{\partial^3 u_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta \partial X_\gamma} + \ldots, \quad (10.29)$$

где все производные от $u_l(\boldsymbol{X}, t)$ берутся в точке $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(0, t)$, т. е. являются функциями только от t. Подставим теперь разложение (10.29) в уравнение (10.25), а затем умножим все его члены на $Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3}$ и проинтегрируем по всем значениям $\boldsymbol{Y}$. Учитывая, что $\frac{\partial u_l}{\partial X_l} \equiv 0$, мы после интегрирования по частям членов, содержащих пространственные производные от $\theta(\boldsymbol{Y}, t)$, придем

к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3} \rangle = \chi \sum_{l=1}^{3} k_l (k_l - 1) \left\langle \frac{Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} X_3^{k_3}}{Y_l^2} \right\rangle +$$

$$+ \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{\partial u_l}{\partial X_\alpha} \left\langle \frac{Y_\alpha Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3}}{Y_l} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{\partial^2 u_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left\langle \frac{Y_\alpha Y_\beta Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3}}{Y_l} \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{l=1}^{3} k_l \frac{\partial^3 u_l}{\partial X_\alpha \partial X_\beta \partial X_\gamma} \left\langle \frac{Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma Y_1^{k_1} Y_2^{k_2} Y_3^{k_3}}{Y_l} \right\rangle + \ldots, \quad (10.30)$$

где моменты, содержащие отрицательные степени Y_i, считаются тождественно равными нулю.

Из (10.28) видно, что момент нулевого порядка (с $k_1 = k_2 = k_3 = 0$) тождественно равен единице; поскольку $\theta(\boldsymbol{Y}, t_0) = \delta(\boldsymbol{Y})$, все остальные моменты стремятся к нулю при $t \to t_0$. Но в таком случае первый порядок малости по $t - t_0$ будут иметь только те моменты, для которых правая часть (10.30) содержит момент нулевого порядка. Нетрудно видеть, что этим свойством будут обладать лишь моменты $\langle Y_i^2 \rangle$, причем их главные члены имеют вид

$$\langle Y_i^2 \rangle = 2\chi (t - t_0) + \ldots. \quad (10.31)$$

Однако, для того чтобы определить также и последующие члены этого разложения для момента $\langle Y_1^2 \rangle$, которые нам понадобятся ниже, требуется выписать также и все моменты, имеющие при $t \to t_0$ порядок $(t - t_0)^2$.

Ясно, что этим свойством будут обладать те моменты ненулевого порядка, отличные от $\langle Y_i^2 \rangle$, для которых среди слагаемых в правой части формулы (10.30) встречаются моменты $\langle Y_i^2 \rangle$. Нетрудно проверить, что таковыми являются лишь моменты $\langle Y_i \rangle$, $\langle Y_i^4 \rangle$ и $\langle Y_i Y_j \rangle$, $\langle Y_i^2 Y_j^2 \rangle$ при $i \neq j$, причем их главные члены имеют вид

$$\begin{aligned}
\langle Y_i \rangle &= \frac{1}{2} \chi \Delta u_i (t - t_0)^2 + \ldots, \\
\langle Y_i Y_j \rangle &= \chi \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) (t - t_0)^2 + \ldots, \\
\langle Y_i^4 \rangle &= 12 \chi^2 (t - t_0)^2 + \ldots, \\
\langle Y_i^2 Y_j^2 \rangle &= 4 \chi^2 (t - t_0)^2 + \ldots,
\end{aligned} \quad (10.32)$$

где все производные от $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ берутся в точке $\boldsymbol{X} = 0$ в момент $t = t_0$.

Поставим задачей вычислить величины $D_0^2(t)$ и $\overline{X_c^2(t)}$ с точностью до слагаемых порядка $(t-t_0)^3$ включительно. Поскольку

$$\boldsymbol{X}(0,\ t)=\boldsymbol{u}(0,\ t_0)(t-t_0)+\ \ldots, \tag{10.33}$$

для этого надо знать момент $\langle Y_1\rangle$ с точностью до слагаемых порядка $(t-t_0)^2$, а момент $\langle Y_1^2\rangle$ — с точностью до слагаемых порядка $(t-t_0)^3$. Таким образом, равенство (10.32) для $\langle Y_1\rangle$ достаточно для нашей цели, но разложение (10.31) для $\langle Y_1^2\rangle$ должно быть уточнено. Чтобы определить недостающие слагаемые, выпишем отдельно формулу (10.30) при $k_1=2$, $k_2=k_3=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Y_1^2\rangle=2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}\langle Y_\alpha Y_1\rangle+\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\langle Y_\alpha Y_\beta Y_1\rangle+$$
$$+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta\,\partial X_\gamma}\langle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma Y_1\rangle+\ \ldots$$

Учитывая в правой части этой формулы лишь слагаемые порядка малости не выше $(t-t_0)^2$, с помощью (10.32) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Y_1^2\rangle=2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\langle Y_1^2\rangle+2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\langle Y_1Y_2\rangle+2\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\langle Y_1Y_3\rangle+$$
$$+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1^3}\langle Y_1^4\rangle+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1\,\partial X_2^2}\langle Y_1^2Y_2^2\rangle+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1\,\partial X_3^2}\langle Y_1^2Y_3^2\rangle+\ \ldots=$$
$$=2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\langle Y_1^2\rangle+2\chi\Big[\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\Big)+$$
$$+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\Big)\Big](t-t_0)^2+4\chi^2\frac{\partial\,\Delta u_1}{\partial X_1}(t-t_0)^2+\ldots.$$

Так как $\frac{\partial u_1}{\partial X_1}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\Big|_{t=t_0}+\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)+\ \ldots$, то, следовательно,

$$\langle Y_1^2\rangle=2\chi(t-t_0)+2\chi\frac{\partial u_1}{\partial X_1}(t-t_0)^2+\frac{2}{3}\chi\Big\{2\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}+2\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\Big)^2+$$
$$+\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\Big)+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\Big)+2\chi\frac{\partial\,\Delta u_1}{\partial X_1}\Big\}(t-t_0)^3+\ldots, \tag{10.34}$$

где все производные от $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},\ t)$ берутся в точке $\boldsymbol{X}=0$, $t=t_0$.

Далее нам понадобится только среднее значение момента $\langle Y_1^2\rangle$. Вспомним теперь, что мы условились считать турбулентность однородной, так что средние значения всех величин, зависящих лишь от одной пространственной точки $\boldsymbol{X}$, сами от $\boldsymbol{X}$

не зависят. В частности,

$$\overline{\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}=\frac{\partial}{\partial X_1}\overline{\frac{\partial u_1}{\partial t}}+\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\overline{u_\alpha\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}=0.$$

Таким образом, в случае однородной турбулентности

$$\overline{\langle Y_1^2\rangle}=2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\Big\{2\overline{\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\Big)^2}+\overline{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\Big)}+$$
$$+\overline{\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\Big)}\Big\}(t-t_0)^3+\ \ldots.$$

Выражение в фигурных скобках легко может быть преобразовано к виду

$$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_1}\Big)}=\overline{(\nabla u_1)^2}+\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\overline{u_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_1}}=\overline{(\nabla u_1)^2},$$

и мы окончательно получаем

$$\overline{\langle Y_1^2\rangle}=2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+\ \ldots, \tag{10.35}$$

Отметим еще, что согласно (10.22), (10.26), (10.27) и (10.32) величина $D_c^2(t)$ с точностью до слагаемых порядка $(t-t_0)^3$ совпадает с $\langle Y_1\rangle^2$; поэтому и

$$D_c^2(t)=2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+\ \ldots \tag{10.36}$$

В неподвижной жидкости молекулярная диффузия приводит к тому, что сосредоточенная в точке единичная масса примеси за время $t-t_0$ расплывается в облако, описываемое сферически симметричным распределением концентрации с дисперсией $2\chi(t-t_0)$. Из равенства (10.36) видно, что при $t-t_0$ настолько малом, что вторым членом в правой части этого равенства можно пренебречь по сравнению с первым, среднюю дисперсию распределения примеси $\vartheta(\boldsymbol{X},\ t)$ относительно ее центра тяжести $X_c(t)$ также можно принять равной $2\chi(t-t_0)$. Иначе говоря, можно считать (во всяком случае, в той мере, в какой это касается дисперсий), что на первом этапе турбулентной диффузии от точечного источника расплывание примеси под действием молекулярной диффузии накладывается на ее перенос соответствующей «жидкой частицей», но не взаимодействует с этим переносом. Однако при немного бо́льших значениях $t-t_0$ положение изменяется, поскольку начинает сказываться и второе слагаемое в правой части (10.36). В результате дисперсия $D_c^2(t)$ начинает возрастать быстрее, чем при молекулярной диффузии в неподвижной жидкости, причем добавочный

член здесь уже зависит и от коэффициента молекулярной диффузии жидкости χ, и от среднего квадрата градиента скорости в турбулентном движении. Таким образом, возникает взаимодействие молекулярной диффузии с турбулентной, приводящее к «ускорению молекулярной диффузии», т. е. к более быстрому расширению объема, занятого примесью, и соответственно этому к более быстрому убыванию максимальной концентрации. Истинной причиной этого явления, очевидно, являются резкие деформации занятого примесью объема в турбулентном потоке (типа изображенных на рис. 80), существенно увеличивающие роль молекулярной диффузии. Поэтому неудивительно, что «ускорение молекулярной диффузии» начинает сказываться не сразу, а лишь через некоторое время — после того как обычная молекулярная диффузия превратит точечную массу примеси в облако, объем которого достаточен для того, чтобы деформироваться под влиянием неоднородностей поля мгновенной скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$.

Эффект «ускорения молекулярной диффузии под действием турбулентности» был впервые отмечен Таунсендом (1951). В этой работе были даны предварительные оценки указанного эффекта и приведены результаты специальных экспериментов (по измерению постепенного падения максимальной температуры «тепловых пятен», создаваемых импульсным разрядом тока в турбулентном потоке), подтвердивших его существование (и даже показавших, что формулы типа (10.36) неплохо соблюдаются для значительно больших значений $t - t_0$, чем можно было бы заранее предполагать). Дальнейшие более полные формулы для диффузии от мгновенного линейного источника (содержащие, впрочем, некоторые ошибки в значениях числовых коэффициентов; см. Сафмен (1960)) были получены Таунсендом (1954) и Бэтчелором и Таунсендом (1956). Заметим, наконец, что второе слагаемое в правой части формулы (10.35) очень напоминает формулу (9.58) для дисперсии продольной координаты «жидкой частицы» в однородном турбулентном потоке с постоянным градиентом средней скорости. Это сходство не случайно: при малых $t - t_0$ вся примесь находится в малой окрестности источника, в которой поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ допустимо считать линейно зависящим от координат $\boldsymbol{X}$ (ограничившись первыми членами соответствующего ряда Тэйлора), и именно такому представлению поля скорости и соответствует формула (10.35).

До сих пор мы рассматривали только формулу для дисперсии $D_c^2(t)$ распределения $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ относительно своего центра тяжести. Если же мы перейдем к результатам, касающимся дисперсии $D_0^2(t)$ облака примеси относительно положения источника (совпадающего со средним центром тяжести $\overline{X_c(t)}$) и дисперсии $\overline{X_c^2(t)}$ самого центра тяжести, то найдем, что здесь взаимодействие молекулярной и турбулентной диффузии приводит к противоположному эффекту «замедления диффузии». В самом деле, для подсчета величин $D_0^2(t)$ и $\overline{X_c^2(t)}$, согласно (10.26) и (10.27), надо лишь определить среднее значение $\overline{X_1(0, t)\langle Y_1\rangle}$. Пользуясь формулами (10.33) и (10.32) для $X_1(0, t)$ и $\langle Y_1\rangle$, получаем

$$\overline{X_1(0, t)\langle Y_1\rangle} = \frac{1}{2}\chi\overline{u_1 \Delta u_1}(t - t_0)^3 + \ldots$$

или, поскольку в однородной турбулентности $\overline{u_1 \Delta u_1} = -\overline{(\nabla u_1)^2}$,

$$\overline{X_1(0, t)\langle Y_1\rangle} = -\frac{1}{2}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t - t_0)^3 + \ldots \qquad (10.37)$$

Отсюда и из (10.26), (10.27), (10.35) и (10.32) следует, что

$$D_0^2(t) = \overline{X_1^2(0, t)} + 2\chi(t - t_0) - \frac{1}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t - t_0)^3 + \ldots, \qquad (10.38)$$

$$\overline{X_c^2(t)} = \overline{X_1^2(0, t)} - \chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t - t_0)^3 + \ldots. \qquad (10.39)$$

Эти формулы впервые были получены Сафменом (1960). Вторая из них показывает, что дисперсия центра тяжести распределения примеси $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ при малых $t - t_0$ оказывается меньше дисперсии $\overline{X_1^2(0, t)}$ координаты жидкой частицы (определяемой при малых $t - t_0$ почти исключительно разбросом начальной скорости $V_1(0, t_0) = u_1(0, t_0)$ «жидкой частицы», т. е. близкой к $\overline{u_1^2}(t - t_0)^2$). Образно говоря, частица примеси вследствие молекулярной диффузии в среднем «отстает» от «жидкой частицы», с которой она вначале совпадала, т. е. «молекулярная диффузия замедляет турбулентную диффузию». Легко понять, в чем состоит механизм этого «замедления»: величина $\overline{X_1^2(0, t)}$ определяется дисперсией «средней скорости переноса жидкой частицы» $\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} u_1[\boldsymbol{X}(t'), t']\,dt'$, а молекулярная диффузия приводит к тому, что при $t' > t_0$ полем скорости $u_1(\boldsymbol{X}, t')$ переносится уже не точечная «жидкая частица», а целое облако примеси; поэтому скоростью переноса здесь является скорость $u_1(\boldsymbol{X}, t')$, осредненная по некоторому объему, которая, как правило, меньше мгновенной скорости в точке $\boldsymbol{X}(0, t')$. В резуль-

тате того, что $\overline{X_c^2(t)}$ оказывается меньше, чем $\overline{X_1^2(0,\ t)}$, полная дисперсия $D_0^2(t)$ оказывается все же меньше, чем сумма $\overline{X_1^2(0,\ t)}+2\chi(t-t_0)$ вкладов от турбулентной и от молекулярной диффузии по отдельности (без учета их взаимодействия).

«Замедление турбулентной диффузии под действием молекулярной диффузии» можно описать также с помощью введенной Сафменом (1962а) «корреляционной функции для примеси» $B^{(\Phi)}(t-t_0)$, определяемой как средний коэффициент корреляции между значениями скорости жидкости в точках, занятых примесью в моменты $t>t_0$ и t_0:

$$B^{(\Phi)}(t-t_0)=\overline{\langle u_1(0,\ t_0)\,u_1[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,\ t),\ t]\rangle}, \qquad (10.40)$$

где угловые скобки, как и выше, являются символом осреднения по значениям $\boldsymbol{Y}$ с весовой функцией $\theta(\boldsymbol{Y},\ t)$. Сафмен показал, что дисперсия $D_0^2(t)$ может быть выражена через $B^{(\Phi)}(t-t_0)$ с помощью формулы

$$D_0^2(t)=2\chi(t-t_0)+2\int\limits_{t_0}^{t}(t-t_0-\tau)\,B^{(\Phi)}(\tau)\,d\tau, \qquad (10.41)$$

которая аналогична формуле Тэйлора (9.31), имеющей вид

$$\overline{X_1^2(0,\ t)}=2\int\limits_{t_0}^{t}(t-t_0-\tau)\,B^{(L)}(\tau)\,d\tau. \qquad (10.42)$$

Кроме того, подобно тому как $B^{(L)}(t-t_0)$ можно представить в виде

$$B^{(L)}(t-t_0)=\int\overline{u_1(0,\ t_0)\,u_1(\boldsymbol{X},\ t)\,\psi(\boldsymbol{X},\ t)}\,d\boldsymbol{X}, \qquad (10.43)$$

где $\psi(\boldsymbol{X},\ t)=\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(0,\ t)]$ — решение «уравнения переноса» $\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial X_\alpha}=0$ при начальном условии $\psi(\boldsymbol{X},\ t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$, так и $B^{(\Phi)}(t-t_0)$, очевидно, можно записать в виде

$$B^{(\Phi)}(t-t_0)=\int\overline{u_1(0,\ t_0)\,u_1(\boldsymbol{X},\ t)\,\psi^{(\Phi)}(\boldsymbol{X},\ t)}\,d\boldsymbol{X}, \qquad (10.44)$$

где $\psi^{(\Phi)}(\boldsymbol{X},\ t)$ — решение уравнения диффузии $\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial X_\alpha}=\chi\Delta\psi$ при том же начальном условии $\psi(\boldsymbol{X},\ t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$. Эффект «замедления турбулентной диффузии» в применении к функции $B^{(\Phi)}(\tau)$ выражается в том, что если предполагать $B^{(L)}(\tau)$ неотрицательным при всех τ, то следует ожидать, что

$B^{(\Phi)}(\tau)<B^{(L)}(\tau)$ при всех $\tau>0$. Образно говоря, можно сказать, что вследствие молекулярной диффузии частица примеси скорее «забывает» свою начальную скорость, чем «жидкая частица» (причиной этого, разумеется, является дополнительное осреднение по Y в (10.40)). Исходя отсюда, Хинце (1959) предложил чисто качественно считать, что $B^{(\Phi)}(\tau)=B^{(L)}(\tau)\cdot f(\tau)$, где $f(\tau)$ — монотонно убывающая функция (зависящая от параметра χ) такая, что $f(0)=1$. Следуя предложению Бюргерса, он специально рассмотрел модель, в которой $f(\tau)=e^{-\alpha\tau}$ (где $\alpha=\frac{c\chi}{L^2}$, c — безразмерная постоянная, а L — характерный масштаб турбулентности). Это предложение, однако, не имеет каких-либо теоретических оснований (кроме, может быть, частного случая турбулентности при очень малом числе Пекле $\mathrm{Pe}=\frac{L\overline{(u'^2)}^{1/2}}{\chi}$; ср. Сафмен (1962а)). При очень малых $\tau=t-t_0$, при которых решение уравнения диффузии можно искать в виде ряда по степеням τ и ограничиться лишь слагаемыми порядка не выше τ, исходя из (10.44), можно показать, что функция $B^{(\Phi)}(\tau)$ представима в виде

$$B^{(\Phi)}(\tau)=B^{(L)}(\tau)-\chi\,\overline{(\nabla u_1)^2}\,\tau+\ \ldots,$$

откуда сразу вытекает и равенство (10.38). Естественно ожидать, что с возрастанием $t-t_0$ (т. е. с возрастанием объема, занятого примесью) эффект «замедления турбулентной диффузии» усиливается, т. е. что отношение $[B^{(L)}(\tau)-B^{(\Phi)}(\tau)]/B^{(L)}(\tau)$ растет с ростом τ. Предположив, что при $\tau\to\infty$ это отношение приближается к некоторой постоянной A, Сафмен (1960, 1962а) получил асимптотическую формулу

$$D_0^2(t)=\overline{X_1^2(0,\ t)}+2\chi(t-t_0)-A\overline{X_1^2(0,\ t)}, \qquad (10.45)$$

верную при больших $t-t_0$. Сафмен приводит также некоторые соображения, согласно которым $A\sim(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re})^{-1}=(\mathrm{Pe})^{-1}$, где Re — число Рейнольдса турбулентности, составленное, например, из средней квадратичной пульсации скорости $\overline{(u_1'^2)}^{1/2}$ и так называемого тэйлоровского микромасштаба турбулентности $\lambda=\left[\overline{u_1'^2}\Big/\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2}\right]^{1/2}$. Это предсказание оказалось в качественном согласии с данными экспериментов Майкельсена (1959), измерившего распределение средней концентрации гелия и углекислого газа за точечным источником в турбулентном потоке за решеткой в аэродинамической трубе. Однако ни аккуратного

количественного подтверждения гипотетической асимптотической формулы Сафмена (10.45), ни хотя бы качественного подтверждения формулы (10.38), относящейся к малым значениям $t - t_0$, до сих пор получено не было.

Чтобы понять причину этого последнего обстоятельства, следует приближенно оценить относительную роль молекулярной и турбулентной диффузии и взаимодействия между ними в формировании поля осредненной концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$. Для этого надо сравнить порядок величины трех членов в правых частях формул (10.38) и (10.45). При очень малых $t - t_0$ следует пользоваться формулой (10.38), и в ее правой части наибольшим слагаемым является второе (порядка $t - t_0$), а наименьшим — третье (порядка $(t - t_0)^3$). Однако с ростом $t - t_0$ вклад турбулентной диффузии растет быстрее, чем вклад молекулярной диффузии, и при значениях $t - t_0$, превышающих некоторое значение τ_1, вклад турбулентной диффузии уже превосходит величину $2\chi(t - t_0)$. Считая, что τ_1 мало по сравнению с лагранжевым масштабом времени T_1, определяющим характерное время изменения скорости «жидкой частицы», можно при оценке τ_1 воспользоваться формулой (10.33) для $\overline{X_1^2(0, t)}$; в таком случае получаем, что $\tau_1 = 2\chi/\overline{u_1^2}$. В большинстве реальных турбулентных потоков это значение τ_1 ничтожно мало; например, в приземном слое воздуха $\overline{u_1^2} \sim 10^2 \div 10^3$ *см*$^2 \cdot$ *сек*$^{-2}$, так что $\tau_1 \sim 10^{-3}$ *сек* при $\chi \sim 10^{-1}$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-2}$. При больших значениях $t - t_0$, когда величину $\overline{X_1^2(0, t)}$ можно оценивать с помощью асимптотической формулы (9.35), отношение вклада молекулярной диффузии к вкладу турбулентной диффузии имеет порядок $\frac{\chi}{\overline{u_1^2} T_1} = \frac{\tau_1}{2T_1}$. Иначе это отношение еще можно оценить как имеющее порядок $(\mathrm{Pr} \cdot \mathrm{Re}^2)^{-1}$ (так как можно показать, что обычно $T_1 \sim \lambda^2/\nu$); обе эти оценки показывают, что в реальных условиях рассматриваемое отношение всегда чрезвычайно мало.

Далее, при достаточно малых $t - t_0$, при которых вклад в дисперсию $D_0^2(t)$ слагаемого, связанного с взаимодействием молекулярной и турбулентной диффузии, еще можно считать пропорциональным $(t - t_0)^3$, этот вклад будет много меньше вклада молекулярной диффузии, если $(t - t_0)^2 \ll 6[\overline{\nabla u_1)^2}]^{-1}$. Но в случае стационарной однородной турбулентности $\overline{(\nabla u_1)^2} = \overline{\left(\frac{u_1 \nabla u_1}{u_1}\right)^2} \sim \overline{\left(\frac{du_1/dt}{u_1}\right)^2} \sim \tau_\lambda^{-2}$, где $\tau_\lambda = \left\{ B^{(L)}(0) \Big/ \left[\frac{d^2}{d\tau^2} B^{(L)}(\tau)\right]_{\tau=0} \right\}^{1/2}$ — лагранжев микромасштаб времени. Таким образом, при

$t - t_0 \ll \tau_\lambda$ отношение вклада в дисперсию, вызываемого взаимодействием молекулярных и турбулентных движений, к вкладу молекулярной диффузии является малой величиной (порядка $\left(\frac{t - t_0}{\tau_\lambda}\right)^2$). Наоборот, при $t - t_0 \gg \tau_\lambda$ с помощью асимптотической формулы (10.45) можно установить, что указанное отношение имеет порядок $2A\frac{T_1}{\tau_1} \sim \frac{T_1}{\mathrm{Pe} \cdot \tau_1}$, т. е. может и не быть малым. При этом, однако, отношение вклада, вносимого взаимодействием, к вкладу «чистой турбулентной диффузии» имеет порядок $A \sim (\mathrm{Pe})^{-1}$, т. е. оно при больших Re (и $\mathrm{Pr} \sim 1$) очень мало.

Подводя итоги, можно сказать, что молекулярная диффузия вносит некоторые изменения в зависимость среднего диаметра облака диффундирующей примеси от времени $t - t_0$ (и поэтому еще более затрудняет использование функций $\overline{X_i^2} = \overline{X_i^2(t)}$ для определения лагранжевой корреляционной функции скорости с помощью формул типа (10.11)). Однако относительное изменение самой величины $D_0^2(t)$, вызываемое этой диффузией, при не слишком малом $t - t_0$ и достаточно большом числе Рейнольдса обычно пренебрежимо мало. Поэтому можно думать, что в реальных условиях при вычислении средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ допустимо вовсе не принимать во внимание молекулярную диффузию. Так мы и будем поступать в последующих пунктах настоящего параграфа.

10.3. Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии

Вернемся снова к рассмотрению турбулентной диффузии непрерывно распределенной примеси в пренебрежении молекулярной диффузией. При этом средняя концентрация примеси $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ в момент t связана с начальной концентрацией $\vartheta_0(\boldsymbol{X})$ соотношением (10.5). Отсюда видно, что если плотность вероятности для координат жидкой частицы $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению по переменным $\boldsymbol{X}, t$, то такому же уравнению будет удовлетворять и функция $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$. Постараемся теперь понять, какой вид может иметь это последнее уравнение.

В пренебрежении молекулярной диффузией поле концентрации примеси $\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$ удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \vartheta}{\partial X_\alpha} = 0,$$

получающемуся из уравнения диффузии (10.1) после приравнивания нулю его правой части. Осреднив все члены этого уравнения, получим

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_\alpha}\,\overline{\vartheta}}{\partial X_\alpha}=-\frac{\partial S_\alpha}{\partial X_\alpha},\qquad S_\alpha=\overline{u'_\alpha\vartheta'},\tag{10.46}$$

где вектор $\boldsymbol{S}=(S_1, S_2, S_3)$ имеет смысл плотности турбулентного потока диффундирующей примеси. Простейшая (и наиболее ранняя) теория турбулентной диффузии, предложенная Тэйлором (1915) и Шмидтом (1917, 1925) (но по существу восходящая еще к Буссинеску (1897)), исходит из предположения, что поток $\boldsymbol{S}$ пропорционален градиенту средней концентрации примеси, т. е. что

$$S_i=-K\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_i},\tag{10.47}$$

где K — это коэффициент K_ϑ гл. 3 и 4 (в настоящей главе мы все время будем иметь дело только с ним, и поэтому индекс ϑ нам будет удобно опустить). В более общем анизотропном случае вместо предположения (10.47) принимается существование линейной зависимости между векторами S_i и $\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_i}$:

$$S_i=-K_{ij}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_j},\tag{10.48}$$

где тензор коэффициентов турбулентной диффузии K_{ij} является, вообще говоря, функцией от $\boldsymbol{X}$ и t.

Из полуэмпирической гипотезы (10.48) немедленно получается полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u_\alpha}\,\overline{\vartheta}}{\partial X_\alpha}=\frac{\partial}{\partial X_\alpha}K_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_\beta}.\tag{10.49}$$

В силу очень большой важности этого уравнения для дальнейшего содержания настоящего параграфа целесообразно прежде всего рассмотреть некоторые дополнительные соображения, относящиеся к выводу этого уравнения и позволяющие лучше понять область его приложимости. Начнем с простейшего случая диффузии в поле стационарной однородной турбулентности, все статистические характеристики которой не меняются при изменении начала отсчета времени или сдвига начала системы пространственных координат. В этом случае тензор вторых моментов смещений жидкой частицы за время τ (т. е. величин $D_{ij}(\tau)=\overline{Y'_i(\tau)\,Y'_j(\tau)}$) определяется обобщенной формулой Тэйлора (9.30′), а среднее значение смещений равно $\overline{Y_i(\tau)}=\bar{u}_i\tau$, где $\bar{\boldsymbol{u}}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ — постоянная (в силу стационарности и однородности) средняя скорость течения. Кроме того, как мы знаем из п. 9.3, в этом случае есть веские основания предполагать, что совместное распределение вероятностей для величин (Y_1, Y_2, Y_3) и при малых, и при больших (по сравнению с типичным лагранжевым масштабом времени T) значениях τ будет весьма близким к гауссовскому распределению и, по-видимому, не будет сильно отличаться от гауссовского при всех вообще значениях τ. Поэтому плотность вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ здесь можно приближенно представить в виде трехмерной гауссовской плотности вида (4.23) со средними значениями $a_j=x_j+\bar{u}_j(t-t_0)$ и матрицей дисперсий $D_{ij}(\tau)$ (обратной матрице коэффициентов g_{ij} в выражении для плотности), определяемой формулой (9.30′) (в частности, при отсутствии средней скорости и в предположении, что $D_{ij}(\tau)=0$ при $j\neq i$, мы снова приходим к формуле (10.12)). Но нетрудно проверить, что такая функция $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ является решением уравнения (10.49) с коэффициентами K_{ij} вида

$$K_{ij}=\frac{1}{2}\frac{dD_{ij}(t-t_0)}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^{t-t_0}\left[B^{(L)}_{ij}(\tau)+B^{(L)}_{ji}(\tau)\right]d\tau\tag{10.50}$$

(см. Бэтчелор (1949б)). Такому же уравнению будет в этом случае удовлетворять и средняя концентрация $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$; таким образом, предположение о справедливости уравнения вида (10.49) (но с коэффициентами K_{ij}, определяемыми формулой (10.50), т. е. зависящими от времени распространения примеси $\tau=t-t_0$) для диффузии в поле стационарной однородной турбулентности точно эквивалентно предположению о том, что распределение вероятностей для вектора смещения жидкой частицы при любом τ будет нормальным (гауссовым). Если, однако, в духе полуэмпирической гипотезы (10.48) желать, чтобы распределение средней концентрации при всех $t=t_0+\tau$ описывалось уравнением вида (10.49) с одними и теми же коэффициентами K_{ij}, то, согласно (10.50), приходится ограничиться лишь рассмотрением значений τ, больших по сравнению с лагранжевым масштабом времени T. При этом, в силу (10.50),

$$K_{ij}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{u'^2_i}\,\overline{u'^2_j}\right)^{\frac{1}{2}}T_{ij},\quad T_{ij}=\int_0^\infty\left[R^{(L)}_{ij}(\tau)+R^{(L)}_{ji}(\tau)\right]d\tau\tag{10.51}$$

в полном соответствии с полуэмпирическим представлением о том, что турбулентные коэффициенты обмена должны быть равны произведению типичной скорости на типичный масштаб длины (или, что то же самое, квадрата типичной скорости на типичный масштаб времени).

Мы видим, что для диффузии в поле однородной стационарной турбулентности полуэмпирическое уравнение (10.49) (с постоянными коэффициентами диффузии K_{ij}) выполняется лишь при $t \gg t_0 + T$, но при таких t зато может быть обосновано весьма убедительно (оно вытекает из нормальности распределения вероятностей для $\boldsymbol{Y}(\tau)$, очень правдоподобного в силу центральной предельной теоремы; см. выше п. 9.3). Заметим, однако, что в этом случае ценность уравнения (10.49) оказывается довольно ограниченной, так как общее выражение для $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$ здесь может быть сразу выписано и независимо от этого уравнения (например, исходя из равенств (10.5) и (10.12)). Поэтому основная ценность полуэмпирической теории заключается в возможности ее применения к более общему случаю неоднородной (или нестационарной) турбулентности, к которому мы теперь и перейдем.

Покажем прежде всего, что и в общем случае уравнение (10.49), строго говоря, может быть применимо, лишь если время диффузии $\tau = t - t_0$ значительно превосходит типичный лагранжев масштаб времени. Для этого посмотрим, в чем заключается теоретико-вероятностный смысл этого уравнения. Уравнение (10.49) является уравнением первого порядка по t; следовательно, его решение однозначно определяется начальным значением $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \vartheta_0(\boldsymbol{X})$ (краевые условия мы считаем заранее фиксированными). Обозначим временно плотность вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ символом $p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$ (чтобы подчеркнуть ее зависимость от начального момента времени t_0); в таком случае соотношение (10.5) можно переписать в виде $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \int \overline{\vartheta(\boldsymbol{x}, t_0)}\, p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)\, d\boldsymbol{x}$. Полагая здесь $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x})$, получим $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$ при любом $t > t_0$. Используем этот результат для момента времени $t_1 < t$ и затем решим снова уравнение (10.49) для интервала времени от момента t_1 и до t при начальном условии $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_1)} = p(\boldsymbol{X}, t_1|\boldsymbol{x}, t_0)$. Тогда получим

$$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0) = \int p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{X}_1, t_1)\, p(\boldsymbol{X}_1, t_1|\boldsymbol{x}, t_0)\, d\boldsymbol{X}_1, \quad (10.52)$$

где $t_0 < t_1 < t$. Но такое уравнение для «плотности вероятности перехода» $p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$ случайной функции $\boldsymbol{X}(t)$ будет справедливо, лишь если эта функция является *марковской*, т. е. такой, что условное распределение вероятностей для значения функции в момент t при условии, что известны ее значения в произвольные моменты $t_n < t_{n-1} < \ldots < t_0$ (где $t_0 < t$), будет зависеть только от последнего из этих значений $\boldsymbol{X}(t_0)$, но не от значений $\boldsymbol{X}(t_i)$ с $t_i < t_0$ (в теории марковских случайных

процессов уравнение (10.52) часто называется уравнением Смолуховского). В самом деле, для произвольной (не обязательно марковской) случайной функции $\boldsymbol{X}(t)$ при $t_0 < t_1 < t$ будет иметь место очевидное соотношение

$$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0) = \int p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{X}_1, t_1; \boldsymbol{x}, t_0)\, p(\boldsymbol{X}_1, t_1|\boldsymbol{x}, t_0)\, d\boldsymbol{X}_1,$$

где первый множитель под знаком интеграла есть условная плотность вероятности для $\boldsymbol{X}(t)$ при условии, что значения $\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{x}$ фиксированы. Последняя формула превращается в (10.52), только если указанная плотность вероятности не зависит от значения $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{x}$, а это означает, что случайная функция $\boldsymbol{X}(t)$ является марковской. Подчеркнем еще раз, что наш вывод не использует явного вида уравнения (10.49), а опирается лишь на то, что это уравнение — первого порядка по t.

Наоборот, если случайная функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ является марковской, то для плотности вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t) = p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$ (а потому, согласно (10.5), и для средней концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$) при весьма общих условиях может быть получено дифференциальное уравнение вида (10.49). Этот важный математический факт был установлен Колмогоровым (1931, 1933) (его частные случаи еще раньше рассматривались физиками Эйнштейном, Фоккером и Планком). А именно, Колмогоров доказал, что при некоторых общих условиях «регулярности» (налагаемых на переходную вероятность $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ и гарантирующих, что рассматриваемая марковская случайная функция $\boldsymbol{X}(t)$ будет в определенном смысле непрерывной) существуют производные

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0)} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)}\right]_{t=t_0}, \\ 2K_{ij}(\boldsymbol{x}, t_0) &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{Y_i'(\boldsymbol{x}, t) Y_j'(\boldsymbol{x}, t)}\right]_{t=t_0} \end{aligned} \quad (10.53)$$

(где, как обычно, $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{Y}}$), и плотность вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_\alpha}[\overline{V_\alpha(\boldsymbol{X}, t)}\, p] = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}[K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{X}, t)\, p]. \quad (10.54)$$

Это уравнение, очевидно, совпадает с (10.49), если положить $\overline{V}_i - \frac{\partial K_{ij}}{\partial X_j} = \overline{u}_i$. Смысл последнего равенства заключается в том, что величина $\overline{V}_i$, являющаяся, согласно первой формуле (10.53), средней скоростью движения частицы примеси, в общем случае равна сумме «скорости переноса» $\overline{u}_i$ и дополнительной скорости

$\frac{\partial K_{ij}}{\partial X_j}$, связанной с тем, что в поле неоднородной турбулентности частицы примеси даже и в отсутствие осредненного течения могут иметь тенденцию двигаться в определенном направлении. Подчеркнем, что здесь фигурирует лишь понятие средней, но не мгновенной скорости движения частицы; мгновенная скорость в изложенной «марковской модели» не существует. В самом деле, предел $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x},t)}{t-t_0}\right|^2$, который должен был бы иметь смысл среднего квадрата мгновенной скорости движения частицы в момент t_0, в силу второго равенства (10.53) не может быть конечным при $K_{ii}(\boldsymbol{x},t_0)\neq 0$ (так как средний квадрат длины пути, пройденного частицей за время от момента t_0 до $t_1=t_0+\tau$, при $\tau\to 0$, согласно (10.53), имеет порядок τ, а не τ^2). Заметим, что вторая формула (10.53) дает статистическую интерпретацию «коэффициентов турбулентной диффузии»: мы видим, что K_{ij} отличается лишь множителем $^1/_2$ от скорости изменения тензора дисперсии смещения частицы (изученного нами в п. 9.3).

Невозможность определения мгновенной скорости движения $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ означает, что случайная функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ недифференцируема. Таким образом, в полуэмпирической теории турбулентной диффузии функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$, описывающая движение фиксированной «жидкой частицы» в турбулентном потоке, трактуется как нигде не дифференцируемая марковская функция. На самом деле траектории «жидких частиц» в турбулентном потоке, разумеется, не обладают такими свойствами. Так, функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ при всех t дифференцируема по t (и, более того, удовлетворяет лагранжевым уравнениям гидродинамики (9.6) и (9.9), содержащим первые и вторые производные от $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ по x_i и по t). Знание статистических свойств производной $\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ (т. е. лагранжевой скорости) важно для многих задач, использующих лагранжево описание турбулентного движения (см., например, формулу (9.27) для тензора дисперсии смещения жидкой частицы). С этим связано и то, что дисперсии смещения «жидкой частицы» за очень малое время τ на самом деле пропорциональны не τ, а τ^2 (см. формулу (9.28)). Наконец, функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ не является также и марковской случайной функцией; например, плотности вероятности $p(\boldsymbol{X},t|\boldsymbol{x},t_0)$ и $p(\boldsymbol{X},t|\boldsymbol{x},\boldsymbol{V}_0,t_0)$ для величины $\boldsymbol{X}(t)$ при фиксированном значении $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{x}$ и соответственно фиксированных значениях $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{x}$ и $\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\boldsymbol{V}_0$, которые для марковской функции должны совпадать, на самом деле, как легко понять, будут различными (в частности, при малых $\tau=t-t_0$ вторая из этих плотностей вероятности будет существенно отлична от нуля лишь при $\boldsymbol{X}\approx\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}_0\tau$, а первая не будет обладать таким свойством).

Если, однако, рассматривать функцию $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ лишь на дискретном множестве моментов времени $t=t_n=t_0+n\tau$, где шаг по времени τ велик по сравнению с лагранжевым масштабом времени T, то практически можно считать, что случайная последовательность $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t_n)$ является марковской. В самом деле, приращения функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ на непересекающихся интервалах времени длины $\tau\gg T$ практически некоррелированы, и естественно ожидать, что они будут также и почти независимы, а случайная последовательность с независимыми приращениями заведомо является марковской. Отметим, кроме того, что дисперсии приращений функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ на интервалах времени длины $\tau\gg T$, согласно (9.35), пропорциональны τ, как это и должно быть при условиях (10.53). Таким образом, если бы вместо дифференциального уравнения (10.49) мы рассмотрели аналогичное разностное (по времени) уравнение, соответствующее марковской последовательности $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t_n)$, то оно уже близко соответствовало бы реальным свойствам движения «жидких частиц» в турбулентном потоке. Следовательно, можно ожидать, что полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (10.49) все же имеет определенный смысл, но лишь как дифференциальный аналог некоторого разностного по времени уравнения с шагом $\tau\gg T$. Но отсюда вытекает, что уравнение (10.49) можно использовать для описания поля $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$ в фиксированный момент времени t, где $t-t_0\gg T$. Иначе говоря, формулы для распределения примеси $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$ или тех или иных характеристик этого распределения, получаемые при решении уравнения (10.49), можно рассматривать как асимптотические формулы, справедливые при $t-t_0\gg T$. В практических задачах, связанных, например, с диффузией примесей в атмосфере, как правило, представляет интерес именно описание диффузии в масштабах, значительно превышающих лагранжев масштаб времени T (который в приземном слое воздуха обычно имеет значения порядка секунд); поэтому в этих задачах обычно можно пользоваться полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии. Заметим, впрочем, что даже при больших значениях $t-t_0$ полуэмпирическое уравнение может приводить все же к неверным результатам на очень больших расстояниях от источников примеси в связи с тем, что эта теория фактически

предполагает, что скорость распространения примеси может быть бесконечно большой (см. ниже п. 10.6).

В дальнейшем чаще всего нам придется иметь дело со случаем стационарного и однородного в плоскостях $X_3 = Z = \text{const}$ турбулентного движения со средней скоростью $\bar{u} = U$, всюду направленной вдоль оси $OX_1 = OX$. В этом случае коэффициенты K_{ij} (как и все другие статистические характеристики турбулентности) могут зависеть только от координаты Z. Кроме того, здесь естественно считать, что координатные оси $OX_1 = OX$, $OX_2 = OY$ и $OX_3 = OZ$ совпадают с главными направлениями тензора K_{ij} (так как именно направления указанных осей здесь являются выделенными направлениями). Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (10.49) в этом случае обращается в уравнение

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + \bar{u}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial X} = K_{xx}(Z)\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial X^2} + K_{yy}(Z)\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial Y^2} + \frac{\partial}{\partial Z}K_{zz}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}. \tag{10.55}$$

Заметим, что если необходимо учесть гравитационное оседание диффундирующих частиц (происходящее с постоянной скоростью w), то к левой части уравнения (10.55) следует добавить слагаемое $-w\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}$. Точно так же возможность распада примеси $\left(\text{с периодом полураспада } \frac{\ln 2}{\alpha}\right)$ приводит к появлению в левой части добавочного слагаемого $\alpha\bar{\vartheta}$. Если область течения по какому-то направлению простирается до бесконечности, то соответствующим краевым условием обычно будет условие достаточно быстрого убывания $\bar{\vartheta}(\boldsymbol{X}, t)$ при неограниченном удалении точки $\boldsymbol{X}$ от местоположения всех источников примеси. Краевые условия на твердых стенках следует подбирать, исходя из анализа физических процессов, происходящих на этих стенках, но обязательно так, чтобы получающееся решение соответствовало марковской случайной функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ (перечислению всех таких условий как раз и посвящены работы Феллера и Вентцеля, упоминавшиеся на стр. 508). В соответствии со сказанным на стр. 507—508 достаточно общим краевым условием на твердой стенке $Z = 0$, описывающим практически все встречающиеся ситуации, является условие вида

$$K_{zz}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z} + w\bar{\vartheta} = \beta\bar{\vartheta} \quad \text{при} \quad Z = 0, \tag{10.56}$$

где β — постоянная размерности скорости (для общности мы даже допускаем здесь наличие гравитационного оседания со скоростью w, приводящего к добавлению к вертикальному турбулентному потоку примеси $-K_{zz}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}$ потока $-w\bar{\vartheta}$. Случай $\beta = 0$ соответствует «отражению» примеси от стенки, случай $\beta = \infty$ — «поглощению» примеси, а случай $0 < \beta < \infty$ — промежуточной ситуации частичного отражения и частичного поглощения (более подробное обсуждение условия (10.56) см. в работах Монина (1956а, 1959б) и Колдера (1961)).

10.4. Диффузия в поле однородной турбулентности и в поле простейших течений с градиентом скорости

Распространение примеси от источников в случае однородной турбулентности

Вернемся к простейшему случаю диффузии в идеализированной модели однородной и стационарной турбулентности с постоянной средней скоростью $\bar{u} = U$ (которую, как обычно, мы будем предполагать направленной вдоль оси $OX_1 = OX$). Направим оси координат $OX_1 = OX$, $OX_2 = OY$ и $OX_3 = OZ$ по главным осям тензора дисперсии $D_{ij}(\tau) = \overline{Y'_i(\tau)Y'_j(\tau)}$ (считая ось OX_1 одной из главных осей) и пренебрежем молекулярной диффузией по сравнению с турбулентной. Воспользовавшись еще тем, что согласно эмпирическим данным плотность вероятности $p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$ в случае однородной турбулентности при всех $\tau = t - t_0$ близка к плотности многомерного нормального распределения (причем при больших значениях τ это обстоятельство имеет и определенное теоретическое оправдание), мы можем для поля осредненной концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$, отвечающей начальному значению $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \vartheta_0(\boldsymbol{X})$, написать формулу

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \frac{1}{[8\pi^3 D_{xx}(\tau)D_{yy}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int\int \vartheta_0(x, y, z) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(X - x - U\tau)^2}{2D_{xx}(\tau)} - \frac{(Y - y)^2}{2D_{yy}(\tau)} - \frac{(Z - z)^2}{2D_{zz}(\tau)}\right\} dx\,dy\,dz. \tag{10.57}$$

При этом для решения любых вопросов, относящихся к осредненной концентрации $\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$, надо только знать дисперсии $D_{xx}(\tau)$, $D_{yy}(\tau)$ и $D_{zz}(\tau)$ компонент смещения жидкой частицы за время τ, которые выражаются по формуле (9.31) через соответствующие лагранжевы корреляционные функции $B^{(L)}_{xx}(\tau)$, $B^{(L)}_{yy}(\tau)$ и $B^{(L)}_{zz}(\tau)$. В частности, при $t - t_0 = \tau \gg T = \max(T_x, T_y, T_z)$, (где T_x, T_y и T_z — три лагранжевых масштаба времени) можно

принять, что $D_{xx}(\tau)=2\overline{u'^2}T_x\tau=2K_{xx}\tau$, $D_{yy}(\tau)=2\overline{v'^2}T_y\tau=2K_{yy}\tau$ и $D_{zz}(\tau)=2\overline{w'^2}T_z\tau=2K_{zz}\tau$; при этом правая часть (10.57) будет совпадать с решением уравнения

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+U\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}+K_{yy}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Z^2} \qquad (10.58)$$

(являющегося частным случаем уравнения (10.55)) при начальном условии $\overline{\vartheta}(\boldsymbol{X}, t_0)=\vartheta_0(\boldsymbol{X})$. Если $\vartheta_0(\boldsymbol{X})=Q\delta(\boldsymbol{X})=Q\delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$ (случай мгновенного точечного источника в точке $\boldsymbol{X}=0$), то распределение (10.57) будет описывать эллипсоидообразное облако примеси, концентрация которой убывает при удалении от центра по закону Гаусса. Центр этого облака находится в точке $(U\tau, 0, 0)$ (т. е. перемещается со средней скоростью течения), а максимальная концентрация (в центре) пропорциональна $[D_{xx}(\tau)D_{yy}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{-1/2}$ (т. е., например, при $\tau\gg T$ убывает с ростом τ пропорционально $\tau^{-\frac{3}{2}}$). Если $\vartheta_0(\boldsymbol{X})=Q\delta(X)\delta(Z)$ (случай мгновенного линейного источника вдоль оси OY), то облако примеси при любом τ будет иметь форму цилиндра эллиптического сечения с осью на прямой $X=U\tau$, $Z=0$. В этом случае максимальная концентрация пропорциональна $[D_{xx}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{-1/2}$, т. е. при больших значениях τ убывает пропорционально τ^{-1}. В случае непрерывно действующего точечного источника в точке $\boldsymbol{X}=0$ постоянной производительности Q следует пользоваться формулами (10.6′) и (10.12), причем при $X\gg UT$ мы можем в последней из них без большой ошибки заменить $D_{ii}(\tau)$ на $2K_{ii}\tau$. После этого интеграл по τ в (10.6′) легко берется в явном виде, и в результате получается формула

$$\overline{\vartheta(X, Y, Z)}\approx\frac{Q}{4\pi(K_{yy}K_{zz}X^2+K_{xx}K_{zz}Y^2+K_{xx}K_{yy}Z^2)^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{U}{2K_{xx}}\left[K_{xx}^{1/2}\left(\frac{X^2}{K_{xx}}+\frac{Y^2}{K_{yy}}+\frac{Z^2}{K_{zz}}\right)^{1/2}-X\right]\right\}. \qquad (10.59)$$

Формула (10.59) описывает струю примеси, имеющую форму эллиптического параболоида, вытянутого вдоль оси OX. При $X\gg\sqrt{Y^2+Z^2}$ эта формула может быть преобразована к виду

$$\overline{\vartheta(X, Y, Z)}\approx\frac{Q}{4\pi(K_{yy}K_{zz})^{1/2}X}\exp\left\{-\frac{U}{4X}\left(\frac{Y^2}{K_{yy}}+\frac{Z^2}{K_{zz}}\right)\right\}, \qquad (10.60)$$

показывающему, что на большом расстоянии от источника при фиксированных Y и Z концентрация примеси убывает примерно пропорционально X^{-1}, а при фиксированном X и возрастании расстояния от оси струи вблизи оси она убывает экспоненциально. Точно так же в случае стационарного линейного источника на оси OY производительности Q (на единицу длины) формулы (10.8) и (10.12) при $X\gg UT$ (т. е. тогда, когда можно принять, что $D_{xx}=2K_{xx}\tau$, $D_{zz}=2K_{zz}\tau$) приводят к соотношению

$$\overline{\vartheta(X, Z)}\approx\frac{Q}{2\pi(K_{xx}K_{zz})^{1/2}}K_0\left[\frac{U}{2}\left(\frac{X^2}{K_{xx}^2}+\frac{Z^2}{K_{xx}K_{zz}}\right)^{1/2}\right]\exp\left(\frac{UX}{2K_{xx}}\right), \qquad (10.61)$$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода). В частном случае, когда $UX\gg K_{xx}$ и $Z\ll X$, решение (10.61) можно упростить, представив его в виде

$$\overline{\vartheta(X, Z)}\approx\frac{Q}{2(\pi K_{zz}UX)^{1/2}}\exp\left(-\frac{UZ^2}{4K_{zz}X}\right). \qquad (10.62)$$

Отсюда видно, что в случае стационарного линейного источника концентрация примеси в поле однородной турбулентности с постоянной средней скоростью убывает при $X\to\infty$ (и фиксированном Z) примерно пропорционально $X^{-1/2}$.

Продольное рассеяние примеси в прямой трубе или канале

Перейдем теперь к значительно более сложной задаче о турбулентной диффузии в потоке с градиентом скорости. Интересные результаты здесь удается получить лишь для отдельных частных классов течений. Начнем с практически важного случая *продольной диффузии примеси в прямой длинной трубе* (или прямом канале). Важность этого случая диффузии связана, в первую очередь, с тем, что измерение скорости продольного распространения примеси в трубе часто оказывается наиболее доступным методом измерения средней скорости течения (и для турбулентных течений, и даже для ламинарных). По этой причине продольное рассеяние уже сравнительно давно привлекло внимание экспериментаторов (см., например, исследования рассеяния при ламинарном течении в кровеносных сосудах и в стеклянных капиллярах, перечисленные в статье Тэйлора (1953), и работу Аллена и Е. Тэйлора (1923) о рассеянии при турбулентном течении в трубе). Эксперименты, описанные в перечисленных работах, состояли в том, что в какой-то момент времени t_0 в трубу в некоторой точке вводилась определенная масса примеси (т. е. имитировался мгновенный точечный источник). Затем на некотором расстоянии X от этой точки вниз по течению измерялось изменение во времени средней (по сечению трубы) концентрации примеси $\vartheta_m(t)$. Естественно, что

в течение некоторого времени после введения примеси в трубу ее концентрация в точке X будет равна нулю. Пусть $t_0' = t_0 + \tau_0$ — момент, в который в точке X впервые обнаруживается примесь; тогда величина $u_{\max} = X/\tau_0$, очевидно, будет равна максимальной скорости течения в трубе (т. е. в случае осесимметричных труб — скорости течения на оси трубы). Средняя же скорость течения $u_{\text{ср}}$ может быть определена по формуле $u_{\text{ср}} = X/\tau_1$, где $t_0 + \tau_1 = t_1$ — время, соответствующее некоторой характерной точке функции $\vartheta_m(t)$.

Согласно экспериментальным данным (полученным в прямых круглых трубах) продольное рассеяние примесей в трубах обладает следующими примечательными особенностями: (1) кривые $\vartheta_m(t)$, соответствующие достаточно большим (по сравнению с радиусом трубы R) расстояниям X, оказываются приблизительно симметричными относительно своих максимумов, хотя распределение скорости течения по сечению трубы $\bar{u}_x(r)$ (где r — радиальная координата) не симметрично относительно средней скорости $u_{\text{ср}}$; (2) если время $t_1 = t_0 + \dfrac{X}{u_{\text{ср}}}$ соответствует максимуму кривой $\vartheta_m(t)$, то $u_{\text{ср}}$ совпадает со средней скоростью $U_{\text{ср}}$, определяемой как отношение объема жидкости, вытекающего из трубы за единицу времени, к площади ее поперечного сечения (иначе говоря, центр тяжести продольного распределения концентрации перемещается вниз по течению со скоростью, равной именно этой средней скорости $U_{\text{ср}}$); (3) ширина кривой $\vartheta_m(t)$, определяемая как квадратный корень из отношения $\sigma^2_{\vartheta_m} = \int\limits_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^2 \vartheta_m(t)\,dt \Big/ \int\limits_{t_0}^{\infty} \vartheta_m(t)\,dt$, увеличивается при возрастании расстояния X (или, что эквивалентно, времени $\tau_1 = X/U_{\text{ср}}$) пропорционально $X^{1/2}$ (или $\tau_1^{1/2}$), т. е. дисперсия $\sigma^2_{\vartheta_m}$ имеет вид $\sigma^2_{\vartheta_m} = 2K_1\tau_1$, где K_1 — некоторая постоянная; (4) величина $K = K_1 U_{\text{ср}}^2$, которая, очевидно, играет роль «эффективного коэффициента продольной диффузии», имеет значение, во много раз превосходящее значение коэффициента радиальной (турбулентной или молекулярной) диффузии примеси. Особенно любопытна особенность (2), которая показывает, что определение максимума кривой $\vartheta_m(t)$ дает возможность измерить именно ту среднюю скорость $U_{\text{ср}}$, которая наиболее интересна для большинства гидротехнических приложений, и особенность (3), согласно которой длина участка трубы (симметричного относительно точки $X = U_{\text{ср}}\tau_1$), содержащего, скажем, 90% (или 95%, или 99%) диффундирующей примеси, растет со временем как $\tau_1^{1/2}$, так что

ее отношение к среднему расстоянию $X = U_{\text{ср}}\tau_1$ этого участка от источника примеси непрерывно уменьшается. Заметим еще, что так как участок, заполненный примесью, движется со средней скоростью $U_{\text{ср}}$, то жидкость вниз по течению от этого участка, находящаяся у оси трубы (и следовательно, движущаяся со скоростью, превышающей $U_{\text{ср}}$), с течением времени догоняет, а затем и перегоняет этот участок.

Особенности продольного рассеяния примесей в трубах были теоретически проанализированы (и проверены экспериментально) в работах Тэйлора (1953, 1954а, б), первая и третья из которых посвящены ламинарным, а вторая — турбулентным течениям. Опубликование этих работ обострило интерес к рассматриваемому явлению и способствовало выполнению ряда новых теоретических и экспериментальных исследований (Бэтчелора, Бинни и Филлипса (1955), Ариса (1956), Элдера (1959), Эллисона (1960), Сафмена (1962б), Филипа (1963) и др.), уточнивших в некоторых деталях результаты Тэйлора и расширивших область их применимости. При этом, в частности, выяснилось, что перечисленные выше основные свойства (1)—(4) продольного распространения примеси могут быть просто объяснены, исходя из общих соображений о движении жидких частиц в прямых трубах и каналах. А именно, как отмечалось в конце п. 9.3, продольное перемещение жидкой частицы в прямой трубе (или прямом канале) при не слишком малом времени движения $\tau = t - t_0$ подчиняется тем же закономерностям, которые справедливы в случае однородной турбулентности в потоке жидкости с постоянной средней скоростью $\bar{u} = U_{\text{ср}}$. Следовательно, среднее значение продольной координаты $\overline{X(t_0+\tau)}$ жидкой частицы, находившейся в момент t_0 в точке $X = 0$, при большом τ будет весьма точно определяться соотношением $\overline{X(t_0+\tau)} \approx U_{\text{ср}}\tau$, а дисперсия координаты $X(t_0+\tau)$ будет иметь вид $\overline{(X-\bar{X})^2} \approx 2K\tau$, где $K = \text{const}$ (в п. 9.3 эту постоянную мы записывали в виде $\overline{u_1'^2} T_1$). Что же касается плотности вероятности $p_1(X|\tau)$ для значений $X(t_0+\tau)$, то центральная предельная теорема теории вероятностей дает веские основания предполагать, что при больших τ эта плотность вероятности будет близка к плотности нормального распределения вероятностей. Отсюда вытекает, что продольное распределение облака примеси от мгновенного точечного источника через большое время τ будет иметь колоколообразную «гауссовскую» форму со средним значением $U_{\text{ср}}\tau$ и дисперсией $2K\tau$. Если фиксировано не $\tau = t - t_0$, а X и $\tau(X)$ — время прохождения жидкой частицей фиксированного участка трубы длины X, то $\tau(X) = \dfrac{X}{V_\tau(X)}$, где

$V_{\tau(X)}$ — средняя лагранжева скорость частицы за время от t_0 до $t_0+\tau(X)$. Поскольку при возрастании X пульсации времени прохождения $\tau(X)$ становятся относительно все менее существенными, а $\overline{\tau(X)}$ приближается к $X/U_{\text{ср}}$, при достаточно большом X распределение вероятностей средней за время $\tau(X)$ лагранжевой скорости будет с высокой степенью точности совпадать с распределением вероятностей средней за время $X/U_{\text{ср}}$ лагранжевой скорости $V_{X/U_{\text{ср}}}=X\left(t_0+\frac{X}{U_{\text{ср}}}\right)\cdot\frac{U_{\text{ср}}}{X}$. Но $\overline{X\left(t_0+\frac{X}{U_{\text{ср}}}\right)}=X$, т. е. $X\left(t_0+\frac{X}{U_{\text{ср}}}\right)=X+X'$; следовательно, при достаточно большом X

$$\tau(X)\approx\frac{X}{U_{\text{ср}}}\frac{X}{X+X'}=\frac{X}{U_{\text{ср}}}\left[1-\frac{X'}{X}+\left(\frac{X'}{X}\right)^2-\ldots\right]. \quad (10.63)$$

Пренебрегая здесь слагаемым $\left(\frac{X'}{X}\right)^2$ (среднее значение которого имеет порядок $1/X$) и последующими слагаемыми еще более высокого порядка малости, найдем, что при больших значениях X

$$\tau(X)\approx\frac{X}{U_{\text{ср}}}-\frac{X'}{U_{\text{ср}}}, \quad (10.64)$$

где X' — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией $2K\frac{X}{U_{\text{ср}}}$. При этом и сама величина $\tau(X)$ будет иметь нормальное распределение вероятностей, но со средним значением $\bar{\tau}=\frac{X}{U_{\text{ср}}}$ и дисперсией $2K_1\bar{\tau}$, где $K_1=\frac{K}{U_{\text{ср}}^2}$, что вполне соответствует эмпирически установленным свойствам (1)—(3) продольного рассеяния примеси. Указанное выше свойство (4) также имеет простое объяснение, так как в данном случае продольная дисперсия облака примеси вызывается в первую очередь влиянием поперечного градиента средней скорости, т. е. порождается разностями скоростей $\bar{u}(r)-U_{\text{ср}}$, заметно превосходящими как турбулентные пульсации продольной скорости $u'=u(r)-\bar{u}(r)$, приводящие к турбулентной диффузии, так и тем более молекулярные флюктуации, вызывающие молекулярную диффузию.

Если, однако, мы захотим оценить численные значения коэффициентов K и K_1, то приведенные соображения, опирающиеся на лагранжево описание течения жидкости, помогут нам мало. В самом деле, коэффициент K выражается через лагранжев масштаб времени T_1; однако этот масштаб определяется по лагранжевой корреляционной функции скорости, и его очень трудно связать с непосредственно измеряемыми эйлеровыми статистическими характеристиками (так что обычно он сам оценивается только по данным диффузионных экспериментов). Оказывается, однако, что в рассматриваемом случае продольного рассеяния примесей в трубе или канале значение K можно довольно точно оценить, воспользовавшись полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии для эйлерова поля концентрации $\overline{\vartheta(X,t)}$ — именно этот путь исследования и был применен в глубоких работах Тэйлора. Поскольку наша задача состоит в изучении асимптотических закономерностей при большом τ (или X), следует ожидать, что полуэмпирическое уравнение здесь окажется достаточно точным, причем в данном случае его использование имеет еще и то преимущество, что при этом одна и та же теория может быть применена к рассеянию и в турбулентных, и в ламинарных течениях (в последнем случае приближенное полуэмпирическое уравнение заменяется точным уравнением молекулярной диффузии (10.1)). Следуя Тэйлору (1953, 1954а), предположим, что средняя концентрация $\bar{\vartheta}$ не зависит от угловой переменной φ, и поэтому запишем уравнение диффузии (10.55) (или в ламинарном случае уравнение (10.1)) для диффузии в прямой круглой трубе в виде

$$\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial t}+\bar{u}_x(r)\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial X}=K_{xx}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial X^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rK_{rr}(r)\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial r}. \quad (10.65)$$

Далее нам будет удобно перейти к системе отсчета, движущейся со средней скоростью течения жидкости, т. е. заменить продольную координату X на координату $x=X-U_{\text{ср}}(t-t_0)$; кроме того, вместо r мы введем безразмерную радиальную переменную $z=\frac{r}{R}$, где R — радиус трубы. Ориентируясь на указанную выше особенность (4) продольного рассеяния примесей в трубах, установленную по экспериментальным данным, мы сразу же пренебрежем в уравнении (10.65) слагаемым $K_{xx}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial X^2}$, описывающим продольную диффузию примеси (учет этого слагаемого почти не изменит рассуждений и приведет лишь к небольшой поправке в окончательном результате, которая будет указана ниже). Тогда уравнение (10.65) в переменных x, z, t примет вид

$$\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial t}+[\bar{u}_x(z)-U_{\text{ср}}]\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial x}=\frac{1}{R^2}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}zK_{rr}(z)\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z}. \quad (10.66)$$

Мы будем использовать это уравнение для описания распределения концентрации $\bar{\vartheta}(x, z, t)$, соответствующего наличию в момент $t = t_0$ в точке $x = z = 0$ мгновенного точечного источника примеси. Предварительно сравним интервалы времени τ_k и τ_d, в течение которых концентрация примеси в фиксированной точке трубы может существенно измениться вследствие одного только переноса примеси осредненным течением (конвекции) и одной только поперечной диффузии. Можно положить $\tau_k = \sigma_{\vartheta_m}$, где $\sigma_{\vartheta_m}(t)$ — стандартное отклонение распределения концентрации примеси ϑ_m, осредненной по сечению трубы. С другой стороны, τ_d есть время, в течение которого поперечная диффузия приводит к выравниванию неоднородностей распределения концентрации по сечению трубы, и можно положить $\tau_d = \frac{R^2}{K_0}$, где K_0 — некоторое типичное значение коэффициента поперечной диффузии. Ясно, что значение σ_{ϑ_m}, а потому и τ_k, растет со временем распространения примеси τ (согласно приведенным выше теоретическим соображениям и экспериментальным данным — асимптотически пропорционально $\tau^{1/2}$), тогда как τ_d не меняется со временем. Поэтому при достаточно большом τ (т. е. x) будет выполняться неравенство $\tau_k \gg \tau_d$, т. е.

$$\sigma_{\vartheta_m} \gg \frac{R^2}{K_0}. \tag{10.67}$$

Ограничимся рассмотрением лишь таких больших τ, при которых уже выполняется неравенство (10.67), и вычислим значение Q_1 полного потока примеси через сечение трубы $x = \text{const}$ (напоминаем, что $x = X - U_{\text{ср}}\tau$, так что сечение $x = \text{const}$ движется вдоль трубы со скоростью $U_{\text{ср}}$). Очевидно,

$$Q_1 = \int_S \int [\bar{u}_x(r) - U_{\text{ср}}]\,\bar{\vartheta}\, dS = 2\pi R^2 \int_0^1 [\bar{u}_x(z) - U_{\text{ср}}]\,\bar{\vartheta}\, z\, dz, \tag{10.68}$$

где S — сечение трубы; отсюда видно, что Q_1 может быть отлично от нуля лишь при наличии радиальных неоднородностей поля концентрации $\bar{\vartheta}$. При условии (10.67) такие радиальные неоднородности весьма быстро выравниваются; поэтому достаточно длительно могут существовать лишь очень слабые неоднородности, постоянно создаваемые неоднородным конвективным переносом примеси и «приспосабливающиеся» к этому переносу в том смысле, что для них эффекты конвекции и поперечной диффузии балансируются. Такие неоднородности удовлетворяют

уравнению

$$[\bar{u}_x(z) - U_{\text{ср}}]\frac{\partial \vartheta_m}{\partial x} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z} z K_{rr}(z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} \tag{10.69}$$

(здесь в левой части мы заменили $\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x}$ на $\frac{\partial \vartheta_m}{\partial x}$ вследствие малости радиальных неоднородностей $\bar{\vartheta} - \vartheta_m$). Из (10.69) получаем

$$\bar{\vartheta}(z) = \bar{\vartheta}(0) + R^2 \frac{\partial \vartheta_m}{\partial x} \int_0^z \frac{dz'}{z' K_{zz}(z')} \int_0^{z'} [\bar{u}_x(z'') - U_{\text{ср}}]\, z''\, dz'';$$

после этого формула (10.68) легко приводится к виду

$$Q_1 = -\pi R^2 K \frac{\partial \vartheta_m}{\partial x},$$

где

$$K = -2R^2 \int_0^1 [\bar{u}_x(z) - U_{\text{ср}}]\, z\, dz \int_0^z \frac{dz'}{z' K_{zz}(z')} \int_0^{z'} [\bar{u}_x(z'') - U_{\text{ср}}]\, z''\, dz'' =$$

$$= 2R^2 \int_0^1 \frac{dz}{z K_{zz}(z)} \left[\int_z^1 [\bar{u}_x(z') - U_{\text{ср}}]\, z'\, dz'\right]^2. \tag{10.70}$$

Подставляя полученное выражение для Q_1 в уравнение $\pi R^2 \frac{\partial \vartheta_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0$, выражающее закон сохранения количества примеси (это уравнение может быть выведено, например, интегрированием всех членов уравнения диффузии (10.66) по сечению трубы), получим $\frac{\partial \vartheta_m}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \vartheta_m}{\partial x^2}$. Отсюда видно, что продольное рассеяние примеси относительно плоскости, движущейся вдоль трубы со скоростью $U_{\text{ср}}$, происходит совершенно аналогично молекулярной диффузии (т. е., в частности, также приводит к гауссовскому распределению концентрации по направлению Ox), но с коэффициентом диффузии K, определяемым формулой (10.70). Следовательно, пространственная дисперсия продольного распределения примеси будет равна $2K(t - t_0)$ и, значит, $\sigma^2_{\vartheta_m} = 2K_1\tau$, где $K_1 = K/U^2_{\text{ср}}$, $\tau = t - t_0$. Учитывая, кроме того, что, согласно (10.70), K есть величина порядка $\frac{U^2_{\text{ср}} R^2}{K_0}$, мы можем привести условие (10.67), при котором были справедливы наши рассуждения, к виду

$$\tau \gg \frac{R^2}{K_0}. \tag{10.71}$$

Нам остается лишь вычислить значения коэффициента K для ламинарных и для турбулентных течений. В первом случае в формуле (10.70) для K в соответствии с формулой (1.23) следует положить $\bar{u}_x(z) = 2U_{\text{ср}}(1-z^2)$ и принять $K_{rr} = \chi$, где χ— коэффициент молекулярной диффузии рассматриваемой примеси. Тогда формула (10.70) для K легко приводится к виду

$$K = \frac{R^2 U_{\text{ср}}^2}{48\chi}, \tag{10.72}$$

так что $\frac{K}{\chi} \approx \left(\frac{1}{7}\frac{RU_{\text{ср}}}{\chi}\right)^2$. За исключением чрезвычайно медленных течений в особо тонких капиллярах, число $\frac{1}{7}\frac{RU_{\text{ср}}}{\chi}$ значительно превосходит единицу, так что $K \gg \chi$. Нетрудно видеть, что при учете также и молекулярной диффузии, т. е. при сохранении слагаемого $\chi\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial X^2}$ в уравнении (10.65), мы вместо (10.72) получили бы формулу $K = \frac{R^2U_{\text{ср}}^2}{48\chi} + \chi$, обычно почти не отличающуюся от (10.72).

Ясно, что если бы скорость $u(z)$ была постоянной, то продольная диффузия определялась бы лишь значением коэффициента χ; таким образом, наличие поперечного градиента скорости приводит к резкому увеличению продольной дисперсии примеси. Любопытно отметить, что поперечная диффузия, наоборот, задерживает продольное рассеяние примеси: согласно (10.72), с увеличением χ значение K уменьшается. Если бы поперечной диффузии не было, то, как нетрудно убедиться с помощью уравнения переноса, распределение примеси, вначале сосредоточенное на участке трубы очень малой длины δX (и равномерное по сечению трубы), за время τ превратилось бы в равномерное распределение, при котором $\vartheta_m(X) = \text{const}$ на участке длиной $U_{\max}\tau$ и $\vartheta_m(X) = 0$ вне этого участка. При наличии же поперечной диффузии оно, как мы видели, превращается в гауссовское распределение, в котором почти вся примесь сосредоточена на участке трубы длины $L \sim \sqrt{K\tau}$, при достаточно большом τ весьма малой по сравнению с $U_{\max}\tau$.

Поскольку значение K нетрудно определить экспериментально с помощью измерений концентрации $\vartheta_m(t)$ или $\vartheta_m(X)$, то использование формулы (10.72) открывает возможность получения по данным таких экспериментов значений коэффициента молекулярной диффузии χ. Этот метод измерения величины χ был проверен Тэйлором (1953), экспериментально исследовавшим диффузию марганцевокислого калия в стеклянных капиллярах и получившим исходя отсюда значение коэффициента молекулярной диффузии этого вещества, хорошо согласующееся с данными других измерений. Специально обсуждению такого метода измерения χ посвящена также статья Тэйлора (1954б).

В случае турбулентного течения при достаточно большом числе Рейнольдса (таком, что толщина вязкого подслоя составляет пренебрежимо малую долю радиуса R) осредненную скорость $\bar{u}_x(r)$ можно задать с помощью «закона дефекта скорости» (5.41):

$$\frac{\bar{u}_x(0) - \bar{u}_x(r)}{u_*} = f_1\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

где u_* — «динамическая скорость», определяемая по напряжению трения на стенке трубы. Учитывая, что турбулентное напряжение трения в круглой трубе имеет вид $\tau = \rho u_*^2\frac{r}{R}$ (см. (5.17′)), и приняв гипотезу о том, что турбулентный коэффициент диффузии точно совпадает с турбулентным коэффициентом вязкости (т. е. воспользовавшись аналогией Рейнольдса, по терминологии п. 5.7), можно представить радиальный коэффициент диффузии в виде

$$K_{rr}(r) = \frac{\tau}{-\rho\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial r}} = \frac{u_* r}{-f_1'\left(1-\frac{r}{R}\right)}.$$

Используя значения функции $f_1(\eta)$, полученные с помощью обработки данных измерений Никурадзе и других исследователей, Тэйлор (1954а) получил по формуле (10.70) значение $K = 10{,}06\,Ru_*$ (так что $c \approx 10$ в формуле (9.39) на стр. 478). К этому значению K нетрудно ввести поправку за счет продольной турбулентной диффузии, вычислив соответствующий поток примеси через сечение трубы

$$Q_1' = -\int_S\int K_{xx}(r)\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial x}\,dS = -2\pi R^2\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x}\int_0^1 K_{xx}(z)\,z\,dz. \tag{10.73}$$

Для грубой оценки можно принять простое предположение, что $K_{xx}(r) = K_{rr}(r)$; тогда $Q_1' = -\pi R^2 K'\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x}$, где для K' численное интегрирование дает значение $K' = 0{,}052\,Ru_*$. Величина K' очень мала по сравнению с K, но поскольку для K/Ru_* все равно удается получить лишь приближенное численное значение, целесообразно все же добавить K' к полученному выше значению K, т. е. принять формулу

$$K = 10{,}1\,Ru_* \tag{10.74}$$

(неточность гипотезы, использованной при вычислении K', здесь вряд ли может иметь какое-нибудь значение в силу относительной малости всего слагаемого K').

Результат (10.74) оказывается хорошо согласующимся с эмпирическими данными о продольном распространении примеси в достаточно длинных прямых круглых трубах. Так, например, опытные данные Аллена и Е. Тэйлора (1923), касающиеся диффузии соли в потоке воды в прямых круглых (но не очень длинных) трубах, приводят к значению $K/Ru_* = 10{,}6$ для одной серии экспериментов и $K/Ru_* = 11{,}7$ для другой (см. Тэйлор (1954а)). В аналогичных опытах самого Тэйлора (проводившихся при участии Эллисона), в которых использовалась значительно более длинная гладкая труба, при условиях, наиболее точно соответствующих описанной выше теории, было получено значение $K/Ru_* = 10{,}0$; при использовании же трубы с сильно шероховатыми стенками оказалось, что $K/Ru_* = 10{,}5$. Зависимость концентрации ϑ_m от времени t во всех перечисленных опытах на достаточно большом расстоянии от источника примеси близко соответствовала гауссовской кривой (см., например, рис. 81, воспроизводящий данные одного из опытов Тэйлора). В случае же изогнутых труб или, например, промышленных нефтепроводов, никогда не бывающих идеально прямыми, значения K/Ru_*, естественно, оказываются уже заметно отличающимися от приведенного выше теоретического значения для прямых труб; в ряде случаев здесь K/Ru_* принимает значения, близкие к 20 (Тэйлор (1954а)).

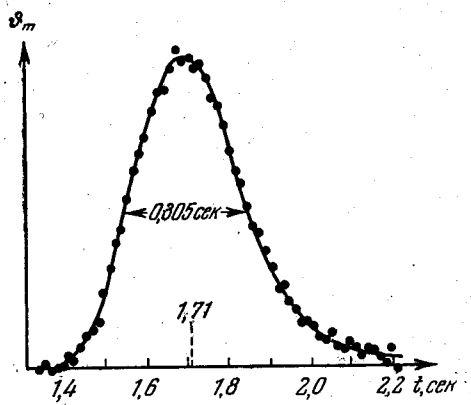


Рис. 81. Зависимость концентрации соли в фиксированном сечении прямой трубы от времени по данным Тэйлора (1954а).

Совершенно аналогично может быть рассмотрена и задача о продольном распространении примеси в широком прямом канале, ограниченном стенками $Z=0$ и $Z=H$ (роль верхней стенки может играть также свободная поверхность жидкости). Эта задача рассматривалась в работах Элдера (1959), Эллисона (1960) и Сафмена (1962б). В первых двух указанных работах был применен изложенный выше метод Тэйлора, а в третьей — изящный метод Ариса (1956), при котором из полуэмпирического уравнения диффузии (10.55) (или уравнения молекулярной диффузии (10.1)) прежде всего выводятся уравнения для моментов

$$\theta_{nm}(Z, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vartheta(X, Y, Z, t)}\, X^n Y^m\, dX\, dY. \qquad (10.75)$$

Нетрудно видеть, что, например, в случаях, когда $m=0$, а n равно 0, 1 или 2 и используется уравнение (10.55), эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{\partial\theta_{00}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\right) = 0, \qquad (10.76)$$

$$\frac{\partial\theta_{10}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{10}}{\partial Z}\right) = \bar{u}(Z)\,\theta_{00}, \qquad (10.76')$$

$$\frac{\partial\theta_{20}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{20}}{\partial Z}\right) = 2K_{xx}(Z)\,\theta_{00} + 2\bar{u}(Z)\,\theta_{10}; \qquad (10.76'')$$

аналогично выглядят и уравнения для моментов θ_{01}, θ_{11}, θ_{02} и моментов высших порядков. Полученные уравнения можно решать последовательно при начальных и граничных условиях, следующих из начальных и граничных условий для концентрации $\overline{\vartheta(X, t)}$. В таком случае асимптотическое поведение полученных решений будет описывать среднее распределение примеси при больших значениях t в плоскости $Z=\text{const}$ (т. е. в тонком слое, окружающем высоту Z) с точностью до моментов того порядка, на котором была оборвана система уравнений для величин (10.75). Аналогично этому асимптотическое поведение величин $\Theta_{nm}(t) = \int_0^H \theta_{nm}(Z, t)\, dZ$ будет с той же степенью точности описывать среднее распределение примеси во всем трехмерном объеме, занятом жидкостью. Окончательные результаты, получаемые на этом пути, разумеется, оказываются такими же, как и при применении метода Тэйлора. Согласно этим результатам, если примесь была внесена в поток в момент $t=t_0$ в точке $(0, 0, Z)$, где $0 \leqslant Z \leqslant H$, и она не поглощается стенками, то центр тяжести соответствующего облака примеси в момент $t=t_0+\tau$ асимптотически (при больших значениях τ) будет иметь координаты $\left(U_{\text{ср}}\tau, 0, \frac{H}{2}\right)$, где $U_{\text{ср}} = \frac{1}{H}\int_0^H \bar{u}(Z)\, dZ$, т. е. будет горизонтально перемещаться вдоль оси OX со скоростью $U_{\text{ср}}$. По вертикали примесь будет распределена асимптотически равномерно (в том смысле, что любой слой жидкости фиксирован-

ной толщины ΔZ при большом τ будет содержать одно и то же количество примеси), причем центр тяжести примеси в каждом слое также будет перемещаться с асимптотически постоянной скоростью $U_{ср}$ (но для разных слоев координаты центра тяжести примеси будут при больших τ различаться на постоянную величину, зависящую от соответствующих значений Z и формы профилей $\bar{u}(Z)$ и $K_{zz}(Z)$). Распределение примеси в плоскостях $X = \text{const}$ в момент $t_0 + \tau$ будет при большом τ близко к распределению Гаусса с нулевым средним значением и дисперсией

$$\sigma^2_{\theta_y} = 2K_y\tau + \text{const}, \quad K_y = (K_{yy})_{ср} = \frac{1}{H}\int_0^H K_{yy}(Z)\,dZ. \quad (10.77)$$

Распределение же примеси в плоскостях $Y = \text{const}$ будет близко к распределению Гаусса со средним значением $\overline{X} \sim U_{ср}\tau$ и дисперсией

$$\sigma^2_{\theta_x} = 2K_x\tau + \text{const}, \quad K_x = K + (K_{xx})_{ср}, \quad (10.78)$$

где

$$K = \frac{1}{H}\int_0^H \frac{dZ}{K_{zz}(Z)}\left[\int_Z^H [\bar{u}(Z') - U_{ср}]\,dZ'\right]^2,$$
$$(K_{xx})_{ср} = \frac{1}{H}\int_0^H K_{xx}(Z)\,dZ \quad (10.79)$$

(ср. (10.70)). Дисперсия распределения примеси по направлению OX в тонком слое вблизи фиксированной высоты Z также будет иметь асимптотическую форму (10.78), но постоянное слагаемое здесь, вообще говоря, будет зависеть от Z.

Сафмен исследовал продольную диффузию в плоском канале между двумя твердыми стенками, рассматривая ее как возможную модель распространения примеси в атмосфере при наличии инверсионного слоя, преграждающего дальнейший подъем примеси на некоторой фиксированной высоте H. Поскольку такая модель является довольно грубой, профиль скорости ветра $\bar{u}(Z)$ он также описывал лишь очень схематически: кроме простейшего случая ламинарного течения Куэтта, когда $\bar{u}(Z) = \frac{2Z}{H}U_{ср}$, $K_{zz} = \chi = \text{const}$ и, следовательно, согласно (10.78)—(10.79),

$$K_x = \frac{U^2_{ср}H^2}{30\chi} + \chi, \quad (10.80)$$

им был разобран еще лишь случай, когда $\bar{u}(Z) = (a+1)\left(\frac{Z}{H}\right)^a U_{ср}$, где $a = \text{const}$, и (в соответствии с аналогией Рейнольдса) $K_{zz}(Z) = \frac{u_*^2}{d\bar{u}/dZ}$. В этом последнем случае интеграл, входящий в первую формулу (10.79), также берется в явном виде, и мы получаем

$$K_x = \frac{a^3}{(a+2)(3a+2)}\frac{U^3_{ср}H}{u_*^2} + (K_{xx})_{ср}. \quad (10.81)$$

Элдер рассмотрел диффузию в канале со свободной поверхностью на высоте $Z = H$ и сравнил полученные при этом результаты с данными специальных экспериментов, в которых исследовалось расплывание капель раствора марганцевокислого калия в слегка наклонном лотке, по которому свободно стекала вода. Здесь уже требовалось подобрать форму профиля средней скорости, хорошо соответствующую реальному течению в лотке, причем результат оказался весьма чувствительным даже к небольшим изменениям этой формы. В работе Элдера предполагалось, что профиль скорости в открытом канале дается логарифмической формой «закона дефекта скорости» (5.43) с постоянной Кармана $\varkappa = 0{,}41$; тогда, если K_{zz} определять с помощью аналогии Рейнольдса и принять, что $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$, то оказывается, что

$$(K_{yy})_{ср} = (K_{xx})_{ср} = 0{,}068Hu_*, \quad K = 5{,}86Hu_*,$$
$$K_x = (5{,}86 + 0{,}068)Hu_* = 5{,}93Hu_*. \quad (10.82)$$

Согласно данным измерений Элдера, $\frac{K_y}{Hu_*} = \frac{(K_{yy})_{ср}}{Hu_*} \approx 0{,}23$, что примерно втрое превосходит соответствующее значение (10.82); одним из возможных объяснений получившегося расхождения может служить несправедливость гипотезы о равенстве трех коэффициентов K_{xx}, K_{yy} и K_{zz}. Если вместо этого принять, что $K_{xx} = K_{yy} > K_{zz}$ (напомним, что и $\overline{w'^2}$ обычно оказывается меньшим, чем $\overline{u'^2}$ и $\overline{v'^2}$; ср. стр. 236), то коэффициент продольной диффузии станет равным $K_x = (5{,}86 + 0{,}23)Hu_* = 6{,}1Hu_*$. Это значение оказывается уже весьма хорошо соответствующим определенному из экспериментов значению $\frac{K_x}{Hu_*} = 6{,}3$ — даже лучше, чем можно было ожидать, учитывая, что указанные опыты производились при сравнительно небольшом значении числа Re, небольших τ и в условиях, не позволяющих рассчитывать на высокую точность получаемых данных. Впрочем, по мнению Эллисона (1960), полученное совпадение должно в значительной

мере считаться случайным, так как около свободной поверхности логарифмическая форма профиля скорости не может служить хорошей аппроксимацией. В этой связи Эллисон повторил расчеты Элдера, приняв, что профиль скорости задается формулой (5.49″). Согласно его результатам, значение K/Hu_* существенно зависит от значения коэффициента b, входящего в (5.49″), причем экспериментальным данным Элдера лучше всего соответствует значение $b = 1{,}4$.

Диффузия в свободных турбулентных течениях

Рассмотренный случай продольной диффузии примеси в прямой трубе или прямом канале весьма специфичен в том отношении, что здесь сохраняется ряд свойств, характерных для диффузии в поле однородной турбулентности. С этой точки зрения более типичными примерами диффузии в потоке с градиентом скорости являются, например, случаи диффузии в турбулентных струях или турбулентных следах за твердыми телами. Однако теоретическое изучение диффузии в струях или следах с помощью полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии неприятно тем, что при этом обязательно приходится привлекать еще какие-то дополнительные гипотезы, позволяющие определить зависимость коэффициентов турбулентной диффузии (а также и средней скорости $\bar{u}$) от пространственных координат. В качестве таких дополнительных гипотез обычно используются те или иные полуэмпирические теории турбулентного обмена, о которых шла речь в п. 5.8. Получаемые на этом пути результаты часто оказываются вполне удовлетворительными с точки зрения практики (см., например, Хинце (1959), Абрамович (1960)), но теоретически они не очень обоснованы, и мы не будем на них задерживаться.

В случае, когда исследуется распределение примеси в плоскости $X=\text{const}$, расположенной вниз по течению за непрерывным точечным или линейным источником на малом расстоянии от него (по сравнению с масштабом $L=UT$, где U — типичное значение средней скорости, а T — типичный лагранжев масштаб времени), ряд результатов можно получить с помощью перехода к переменным Лагранжа, если воспользоваться разложением лагранжевой скорости в ряд Тэйлора (9.78). В частности, как заметил Хинце (1951, 1959), во многих случаях полезным оказывается уже первое приближение, согласно которому $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t_0) + \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t_0)$, так что $X(\boldsymbol{x}, t) = x + (\bar{u} + u') \cdot (t - t_0)$ и $Z(\boldsymbol{x}, t) = w' \cdot (t - t_0)$, где значения $\bar{u}$, u' и w' относятся к точке $(\boldsymbol{x}, t_0)$ пространства-времени. Отсюда следует, что в установившемся потоке со средней скоростью, направленной вдоль оси

OX, координата $Z(t)$ жидкой частицы, вышедшей в момент t_0 из точки $\boldsymbol{x} = 0$, в момент достижения ею плоскости $X=\text{const}$, где $X \ll L$, будет в первом приближении равна

$$Z(X) \approx \frac{w'}{\bar{u} + u'} X. \tag{10.83}$$

Если $|u'| \ll \bar{u}$, то согласно этому равенству $Z(X) \approx (w'/\bar{u})X$; поэтому распределение вероятностей для $Z(X)$ здесь только

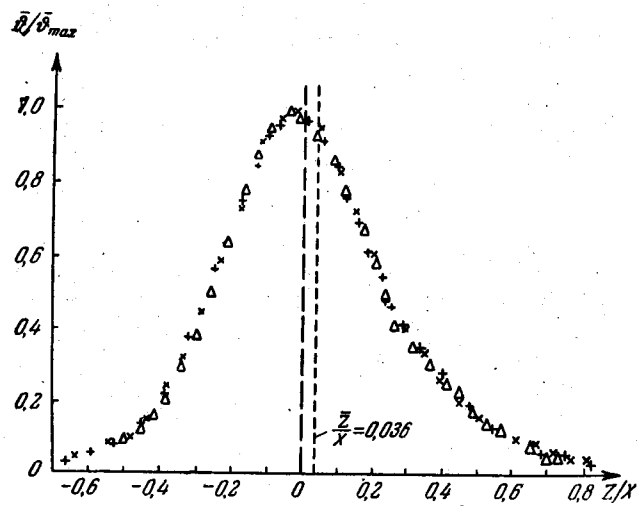


Рис. 82. Распределение температуры в нескольких сечениях двумерной турбулентной струи, в которую помещена нагретая проволочка (по Хинце и Ван дер Хегге Цийнену).

постоянным множителем отличается от распределения вероятностей для $w'(0)$. Если, однако, значения u' меньше $\bar{u}$, но не пренебрежимо малы, то

$$\frac{Z(X)}{X} \approx \frac{w'}{\bar{u}} - \frac{u'w'}{\bar{u}^2} + \frac{u'^2 w'}{\bar{u}^3} - \dots \tag{10.84}$$

Отсюда уже можно без труда выразить моменты распределения случайной величины $Z(X)$ через моменты эйлеровой пульсационной скорости $\boldsymbol{u}' = (u', w')$ в точке $\boldsymbol{x} = 0$, причем обычно при этом вполне можно ограничиться лишь несколькими первыми членами ряда (10.84). В тех случаях, когда получающиеся формулы содержат моменты $\boldsymbol{u}'$ четвертого порядка, по-видимому, допустимо также заменить их комбинациями вторых моментов,

приняв, что соответствующие семиинварианты пренебрежимо малы (см. Бэтчелор и Таунсенд (1956), Хинце (1959)). Несмотря на очевидную грубость подобных приближенных рассмотрений, они неплохо описывают целый ряд наблюдавшихся Хинце и Ван дер Хегге Цийненом (1951) и Корсином и Уберои (1950, 1951) характерных особенностей распределения температуры в плоскости $X = \text{const}$ в текущей по направлению OX турбулентной струе, в которую в фиксированной плоскости $X=0$ помещалась нагретая проволочка. В качестве примера на рис. 82 приведено такое распределение температуры, полученное в опытах Хинце и Ван дер Хегге Цийнена, в которых в плоскую струю, вытекающую из узкого сопла, на расстоянии 100 *мм* от сопла и на 6 *мм* ниже оси струи вводилась тонкая проволочка, нагретая электрическим током до температуры 400° С. Ось OX на рис. 82 принималась параллельной направлению средней скорости у проволочки и проходящей через проволочку (начиная от которой и измерялось расстояние X); различными значками обозначены данные измерений при разных значениях X. Мы видим, что в отличие от аналогичных данных, относящихся к случаю однородной турбулентности, распределение температуры здесь оказывается асимметричным — более вытянутым в область положительных значений Z, которым отвечают бóльшие, чем отрицательным Z, значения средней скорости. Полученный результат находится в соответствии с формулой (10.84), поскольку в данном случае можно считать, что $\overline{w'}=0$, а $\overline{u'w'}<0$. Среднее значение распределения, приведенного на рис. 82, равно 0,036; в этом опыте такое же значение имеет и $-\frac{\overline{u'w'}}{\overline{u}^2}$. Таким образом, в данном случае при вычислении среднего значения $\overline{Z(X)} = \dfrac{\int \overline{\vartheta(X, Z)}\, Z\, dZ}{\int \overline{\vartheta(X, Z)}\, dZ}$ уже третьим слагаемым в правой части (10.84) можно пренебречь. Заметим еще, что если бы мы попытались описать распределение температуры в струе полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии с постоянным коэффициентом K_{zz}, то в условиях, к которым относится рис. 82, получилось бы $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vartheta(X, Z)}\, Z\, dZ < 0$, в противоречии с эмпирическими данными.

В другом крайнем случае очень большого X (или, иначе, очень большого времени диффузии $\tau = t - t_0$) некоторые результаты могут быть получены на основе соображений об автомодельности, рассмотренных в пп. 5.9 и 9.4. Из этих соображений непосредственно вытекает, что в случае непрерывного источника

примеси (расположенного около обтекаемого тела или сопла, из которого вытекает струя) распределение средней концентрации $\overline{\vartheta}$ в любых двух плоскостях $X=\text{const}$ с достаточно большими значениями X (где X отсчитывается от источника по направлению средней скорости течения) будут подобны друг другу. Точно так же в случае мгновенного источника (также расположенного около тела или сопла и внесшего в поток примесь в момент времени $t=t_0$) подобными будут распределения средней концентрации в трехмерном пространстве в два момента времени t, достаточно удаленные от момента t_0. В силу соображений симметрии естественно предполагать, что соответствующие распределения будут симметричными, причем их максимум будет расположен около оси струи или следа в плоскости $X=\text{const}$ (в случае непрерывного источника, расположенного достаточно близко от оси) или же около точки $(\overline{X(\tau)}, 0, 0)$, где $\overline{X(\tau)}$ дается формулами п. 9.4 (в случае мгновенного источника). При этом результаты пп. 5.9 и 9.4 позволяют просто определить зависимость соответствующих максимальных концентраций $\vartheta_m(X)$ или $\vartheta_m(\tau)$ от X или τ (хотя они и не дают возможности оценить форму распределений $\overline{\vartheta(Y, Z)}$ или $\overline{\vartheta(X, Y, Z)}$).

Начнем, например, со случая непрерывно действующего стационарного источника примеси и воспользуемся тем, что в силу стационарности процесса диффузии поток примеси через любую плоскость $X=\text{const}$ должен быть постоянным. В случае турбулентного следа скорость переноса примеси по направлению OX вдали от обтекаемого тела, очевидно, всюду будет практически равна скорости обтекаемого потока. В то же время размеры площади в плоскости $X=\text{const}$, на которой имеет место заметный поток примеси от точечного источника в точке $\boldsymbol{x}=0$, в случае трехмерного следа за конечным телом будут расти пропорционально $L^2 \sim X^{2/3}$, а в случае двумерного следа за цилиндром — пропорционально $L(X)\,[D_{22}(\tau)]^{1/2} \sim X^{1/2}\left[D_{22}\left(\frac{X}{U}\right)\right]^{1/2} \sim X$. В случае следа за цилиндром и линейного источника примеси (параллельного оси цилиндра) постоянным должен быть поток примеси на единицу длины оси OY; в плоскости $X=\text{const}$ единичному отрезку оси OY отвечает прямоугольная площадка с заметно отличной от нуля концентрацией $\overline{\vartheta}$, имеющая площадь, пропорциональную $L(X) \sim X^{1/2}$. Но поскольку концентрация примеси в плоскости $X=\text{const}$ пропорциональна $\vartheta_m(X)$, получаем

$$\vartheta_m(X) \sim \begin{cases} X^{-2/3} & \text{для точечного источника в трехмерном следе,} \\ X^{-1} & \text{для точечного источника в двумерном следе,} \\ X^{-1/2} & \text{для линейного источника в двумерном следе.} \end{cases} \qquad (10.85)$$

Аналогичное рассуждение применимо и к диффузии примеси в зоне перемешивания двух плоскопараллельных потоков и в турбулентных струях (включая сюда и диффузию пассивной материальной примеси в струях конвективного происхождения). Однако теперь скорость $\bar{u}$ переноса примеси через плоскость X=const уже не будет всюду равна фиксированной скорости U_0, а будет функцией от X, Y и Z. Существенно, однако, что при изменении параметра X функция $\bar{u}(X, Y, Z)$ от Y и Z остается подобной себе, причем ее максимальное значение остается постоянным в случае плоской зоны перемешивания и двумерной конвективной струи и убывает пропорционально X^{-1} в случае обычной трехмерной струи (бьющей в заполненное той же жидкостью пространство), пропорционально $X^{-1/2}$ в случае обычной двумерной струи и пропорционально $X^{-1/3}$ в случае трехмерной конвективной струи. Далее, площадь той части плоскости X = const, на которой концентрация $\overline{\vartheta(X, Y, Z)}$ заметно отлична от нуля, в случае точечного источника примеси в трехмерной струе растет пропорционально $L^2(X)$, в случае линейного источника в двумерной струе или зоне перемешивания — пропорционально $L(X)$, а в случае точечного источника в двумерном течении — пропорционально $L(X)[D_{22}(\tau_x)]^{1/2}$, где τ_x определяется по формулам (9.47), или родственным им, из условия, что $\overline{X(\tau_x)}=X$. Поскольку поток примеси пропорционален произведению концентрации на скорость и на площадь, то рассуждения, приведшие выше к соотношениям (10.85), теперь приводят к следующим соотношениям:

$$\vartheta_m(X)\sim\begin{cases} X^{-1/2} & \text{для линейного источника в двумерной струе [1]),}\\ X^{-1} & \text{для точечного источника в трехмерной струе и для линейного источника в зоне перемешивания или двумерной конвективной струе,}\\ X^{-3/2} & \text{для точечного источника в двумерной струе,}\\ X^{-5/3} & \text{для точечного источника в трехмерной конвективной струе,}\\ X^{-2} & \text{для точечного источника в зоне перемешивания или двумерной конвективной струе.}\end{cases} \qquad (10.85')$$

В случае мгновенного источника примеси постоянной должна оставаться общая масса примеси (или, если источник линейный, масса примеси, приходящаяся на единицу длины оси OY). Но через время τ размер (вдоль оси OX_i) облака примеси от мгновенного источника характеризуется масштабом $[D_{ii}(\tau)]^{1/2}$ (естественно, совпадающим с $L[\overline{X(\tau)}]$). В силу результатов п. 9.4, отсюда для максимальной концентрации $\vartheta_m(\tau)$ облака примеси, образующегося через время τ после момента ее испускания, получаются формулы:

$$\vartheta_m(\tau)\sim\begin{cases} \tau^{-1} & \text{для точечного источника в трехмерном следе и линейного источника в двумерном следе,}\\ \tau^{-4/3} & \text{для линейного источника в двумерной струе,}\\ \tau^{-3/2} & \text{для точечного источника в двумерном следе и в трехмерной струе,}\\ \tau^{-2} & \text{для точечного источника в двумерной струе и для линейного источника в двумерной конвективной струе и в зоне перемешивания,}\\ \tau^{-9/4} & \text{для точечного источника в трехмерной конвективной струе,}\\ \tau^{-3} & \text{для точечного источника в двумерной конвективной струе и зоне перемешивания}\end{cases} \qquad (10.86)$$

(основная часть результатов (10.85)—(10.86) принадлежит Бэтчелору (1957); см. также Яглом (1965)).

Диффузия в безграничном турбулентном потоке с постоянным градиентом средней скорости

В заключение настоящего пункта остановимся на случае диффузии примеси в безграничном потоке с постоянным поперечным градиентом скорости $\bar{u}_x(Z)$ и однородным и стационарным полем пульсаций $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{X}, t)$. В п. 9.4 мы видели, что в этом случае взаимодействие градиента скорости с поперечным рассеянием приводит не к простому увеличению эффективного коэффициента горизонтальной диффузии, как это было в случае течения в трубе или в канале, а к качественному изменению закономерностей продольного рассеяния (выражающемуся в том, что продольная дисперсия $D_{xx}(\tau)$ становится асимптотически пропорциональной τ^3, а не τ, как обычно). Поэтому вначале сферическое облако примеси в таком потоке через некоторое время принимает форму сильно вытянутого по направлению оси OX эллипсоидообразного веретена, большая ось которого слегка наклонена по отношению к плоскости $Z=0$. Поскольку после пульсаций $\boldsymbol{u}'$ здесь однородно и стационарно, при использовании полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии здесь не возникает трудности с определением зависимости коэффициентов турбулентной диффузии от координат: эти коэффициенты естественно считать постоянными в пространстве и во

[1]) Здесь и ниже если не указано, что струя конвективная, то подразумевается, что речь идет об обычной динамической струе, распространяющейся в заполненном той же жидкостью пространстве.

времени. Поэтому есть все основания надеяться, что основные особенности рассматриваемого процесса диффузии можно выяснить, рассмотрев решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\Gamma Z\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}+K_{yy}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Z^2} \qquad (10.87)$$

при начальном условии $\overline{\vartheta}(\boldsymbol{X}, t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$. Нетрудно убедиться, что искомое решение уравнения (10.87) будет представлять собой трехмерное распределение Гаусса со вторыми моментами

$$\left.\begin{aligned} &D_{xx}=\tfrac{2}{3}\Gamma^2K_{zz}\tau^3+2K_{xx}\tau, \quad D_{yy}=2K_{yy}\tau, \quad D_{zz}=2K_{zz}\tau,\\ &D_{xy}=D_{yz}=0, \qquad\qquad D_{xz}=\Gamma K_{zz}\tau^2, \end{aligned}\right\} \qquad (10.88)$$

где $\tau=t-t_0$ (этот результат и некоторые его обобщения были опубликованы Новиковым (1958); позже немного более подробно он был изложен также Элриком (1962)). Формулы (10.88) очень наглядно показывают разницу между случаями $\Gamma=0$ и $\Gamma\neq 0$; они полностью согласуются также и с формулами (10.53), согласно которым удвоенные коэффициенты турбулентной диффузии K_{ij} равны производным в нуле от компонент тензора дисперсии $D_{ij}(\tau)$. При сравнении же этих формул с формулами (9.57), (9.57′) и (9.58), выведенными на основе лагранжева описания турбулентности, видно, что наши новые результаты представляют собой асимптотический вид найденных раньше более точных выражений для дисперсий $D_{11}=D_{xx}$ и $D_{13}=D_{xz}$ при $\tau\gg T_3$ (причем, как обычно, $K_{zz}=\overline{w'^2}T_3$, $K_{xx}=\overline{u'^2}T_1$). Выражения же для дисперсий при не слишком больших значениях τ полуэмпирическая теория турбулентной диффузии не позволяет определить. Таким образом, мы еще раз убеждаемся в том, что эта теория описывает только асимптотические закономерности, имеющие место при больших временах диффузии.

Поскольку максимум многомерной плотности нормального распределения вероятностей обратно пропорционален корню квадратному из детерминанта матрицы дисперсий, концентрация $\vartheta_m(t)$ в центре облака примеси, созданного в момент $t=t_0$ мгновенным точечным источником, в поле однородной турбулентности с градиентом скорости с ростом $\tau=t-t_0$ будет убывать асимптотически пропорционально $\tau^{-6/2}$ (а не пропорционально $\tau^{-3/2}$, как это было при постоянной средней скорости). Точно так же в случае мгновенного линейного источника на оси OY максимальная концентрация примеси будет убывать пропорционально τ^{-2} (вместо τ^{-1}). Зная решение, отвечающее мгновенному точечному источнику, с помощью формул (10.6) и (10.8) можно найти также и распределение концентрации, отвечающее стационарному точечному и линейным источникам; на этом, однако, мы уже не будем задерживаться.

В случае более сложного, чем линейный, профиля средней скорости $\bar{u}(Z)$ в безграничном пространстве и зависимости коэффициентов турбулентной диффузии от координаты Z точное решение уравнения (10.55), отвечающее мгновенному точечному источнику, уже не может быть явно выписано. Но если зависимость средней скорости и коэффициентов диффузии от Z задается достаточно простыми формулами (например, если функции $\bar{u}(Z)$, $K_{xx}(Z)$, $K_{yy}(Z)$ и $K_{zz}(Z)$ являются степенными), то основные особенности процесса диффузии, описываемого полуэмпирическим уравнением (10.55), можно исследовать с помощью уравнений (10.76), (10.76′), (10.76″) и т. д. для моментов $\vartheta_{nm}(Z, t)$. При этом оказывается, что здесь также взаимодействие вертикального градиента средней скорости $\bar{u}$ с вертикальной диффузией, описываемой коэффициентом K_{zz}, приводит к горизонтальному рассеянию, как правило, при большом времени диффузии $\tau=t-t_0$ много превосходящему обычную горизонтальную турбулентную диффузию с коэффициентом K_{xx}. При этом в отличие от ситуации, с которой мы столкнулись при изучении горизонтальной диффузии в трубах и каналах, в безграничном пространстве это дополнительное горизонтальное рассеяние обычно не сводится к простому увеличению коэффициента горизонтальной диффузии до некоторого нового значения $K>K_{xx}$, а приводит к тому, что горизонтальная дисперсия $\sigma^2_{\vartheta_x}$ оказывается пропорциональной более высокой, чем первая, степени τ. Обо всем этом, однако, мы более подробно будем говорить в следующем разделе в связи с рассмотрением более важного практически случая диффузии в полупространстве $Z>0$, для которого также сохраняются указанные здесь особенности процесса горизонтального рассеяния, вызываемого взаимодействием вертикального градиента средней скорости с вертикальной диффузией.

10.5. Диффузия в приземном слое воздуха

Среди примеров турбулентной диффузии, упоминавшихся в начале п. 10.1, наиболее важны, бесспорно, те, в которых идет речь о диффузии примесей в атмосфере. Поэтому неудивительно, что в литературе по проблеме турбулентной диффузии центральное место занимают работы, посвященные именно диффузии в атмосфере (к числу таких работ относятся, в частности, и все книги и обзорные статьи, перечисленные на стр. 506).

При изучении атмосферной диффузии наибольший интерес представляет диффузия в приземном слое воздуха, наиболее

непосредственно связанном с жизнью и деятельностью человека. Специфика задачи здесь состоит в том, что диффузия происходит в турбулентном пограничном слое (вообще говоря, термически стратифицированном), заполняющем полупространство над твердой или жидкой подстилающей поверхностью (которую мы в дальнейшем будем предполагать однородной и примем за плоскость $Z=0$). Поэтому результаты предыдущего пункта, в котором предполагалось, что жидкость либо течет между твердыми стенками в трубе или канале, либо же заполняет все пространство, непосредственно к атмосферной диффузии неприложимы. Заметим, впрочем, что рассматривавшаяся выше модель диффузии в плоском канале между стенками $Z=0$ и $Z=H$ может быть с известным основанием применена к диффузии в приземном слое воздуха при наличии на высоте H мощного инверсионного слоя (в котором температура растет с высотой), приводящего к резкому уменьшению вертикального обмена на этой высоте (см., например, Раундс (1955), Сафмен (1962б), Цейтин (1963)). Ясно, однако, что основной интерес для теории атмосферной диффузии представляет все же не эта модель, а случай диффузии во всем полупространстве $Z>0$, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

Решения полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, не учитывающие изменения ветра с высотой

Начнем с простейшего подхода, использующего полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии. Будем пока, как обычно, предполагать, что оси системы координат $OXYZ$, в которой направление OX совпадает с направлением среднего ветра $\bar{u}=\bar{u}(Z)$, являются главными направлениями тензора коэффициентов турбулентной диффузии $K_{ij}=K_{ij}(Z)$. В таком случае полуэмпирическое уравнение диффузии принимает вид (10.55), и чтобы все основные задачи теории диффузии свелись к четко поставленным задачам математической физики, требуется только еще как-то задать зависимость от высоты скорости ветра $\bar{u}$ и коэффициентов диффузии K_{xx}, K_{yy} и K_{zz}.

Решение уравнения (10.55) удается получить в аналитическом виде лишь при некоторых частных предположениях о характере зависимости коэффициентов этого уравнения от высоты. Качественные особенности решений, отвечающих различным типам источников примеси, можно выяснить на простейшем примере уравнения (10.58), т. е. уравнения вида (10.55) с постоянными коэффициентами $\bar{u}$, K_{xx}, K_{yy} и K_{zz}. Такое простейшее полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии было исследовано Робертсом (1923). Воспользовавшись тем, что в этом случае решение, отвечающее наличию в точке $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ безграничного пространства мгновенного точечного источника производительности Q, получается из (10.12) с помощью замены X_1 на $X_1-\bar{u}\tau$ и $D_{ii}(\tau)$ — на $2K_{ii}\tau$, легко убедиться, что в случае диффузии в полупространстве $Z>0$ с краевым условием «отражения» $\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial Z}=0 \text{ при } Z=0\right)$ решение, отвечающее мгновенному точечному источнику в точке $(0, 0, H)$ в момент $t=t_0$, дается формулой

$$\bar{\vartheta}(X, Y, Z, t)=\frac{Q}{[4\pi(t-t_0)]^{3/2}(K_{xx}K_{yy}K_{zz})^{1/2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{[X-\bar{u}(t-t_0)]^2}{4K_{xx}(t-t_0)}-\frac{Y^2}{4K_{yy}(t-t_0)}\right\}\left[e^{-\frac{(Z-H)^2}{4K_{zz}(t-t_0)}}+e^{-\frac{(Z+H)^2}{4K_{zz}(t-t_0)}}\right]. \tag{10.89}$$

При краевом условии «поглощения» (т. е. при $\bar{\vartheta}(X, Y, 0, t)=0$) решение уравнения (10.58) будет отличаться от (10.89) только тем, что при втором слагаемом в квадратных скобках будет стоять знак минус, а не знак плюс. Аналогично формулы (10.59) и (10.61) могут быть использованы для получения решений уравнения (10.58) в полупространстве $Z>0$ (с поглощающей или отражающей примесь границей), отвечающих стационарному точечному или линейному источнику на высоте $Z=H$. Эти решения обычно можно еще упростить, воспользовавшись тем, что $\bar{u}\bar{\vartheta}\gg\overline{u'\vartheta'}$ и слагаемое $\bar{u}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial X}$ почти всегда значительно превосходит соответствующий «диффузионный член» $-K_{xx}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial X^2}=-\frac{\partial}{\partial X}\overline{u'\vartheta'}$ (см., например, оценки Кароля (1960)). Поэтому слагаемым $K_{xx}\frac{\partial^2\bar{\vartheta}}{\partial X^2}$ в (10.55) чаще всего можно пренебречь (что соответствует в формулах (10.59) и (10.61) переходу к пределу при $K_{xx}\to 0$). При этом решение, отвечающее стационарному точечному источнику производительности Q в точке $(0, 0, H)$ и условию отражения примеси на границе $Z=0$, принимает вид

$$\bar{\vartheta}(X, Y, Z)=\frac{Q}{4\pi X\sqrt{K_{yy}K_{zz}}}e^{-\frac{\bar{u}Y^2}{4K_{yy}X}}\left[e^{-\frac{\bar{u}(Z-H)^2}{4K_{zz}X}}+e^{-\frac{\bar{u}(Z+H)^2}{4K_{zz}X}}\right]. \tag{10.90}$$

В случае поглощения примеси на границе $Z=0$ мы опять должны только заменить в последней формуле знак плюс в квадратной скобке знаком минус. Согласно (10.90) распределение примеси поперек направления ветра в горизонтальной плоскости

при любых X и Z задается гауссовской функцией со средним квадратичным отклонением $\left(\frac{2K_{yy}X}{\bar{u}}\right)^{1/2}$, пропорциональным $X^{1/2}$ и обратно пропорциональным $\bar{u}^{1/2}$. При возрастании X (и фиксированных Y и Z) концентрация $\bar{\vartheta}$ убывает асимптотически пропорционально X^{-1} (как и в случае диффузии в поле однородной турбулентности в безграничном пространстве). В случае «отражения» примеси наибольшая наземная концентрация примеси $\bar{\vartheta}_{\max}=\frac{Q}{\pi e\bar{u}H^2}\left(\frac{K_{zz}}{K_{yy}}\right)^{1/2}$ обратно пропорциональна квадрату высоты источника; она достигается при $Y=0$ на расстоянии от источника $X=\frac{\bar{u}H^2}{4K_{zz}}$, прямо пропорциональном H^2. При краевом условии поглощения скорость поглощения примеси подстилающей поверхностью $\sigma(X, Y)=K_{zz}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial Z}\Big|_{Z=0}$, как легко проверить, убывает асимптотически пропорционально X^{-2}. В этом случае наибольшая скорость оседания $\sigma_{\max}=\frac{4QK_{zz}}{\pi e^2\bar{u}H^3}\left(\frac{K_{zz}}{K_{yy}}\right)^{1/2}$ обратно пропорциональна кубу высоты и достигается при $Y=0$ и $X=\frac{\bar{u}H^2}{8K_{zz}}$. Решение, отвечающее стационарному линейному источнику, расположенному на прямой $X=0$, $Z=H$ и производящему за единицу времени массу Q примеси на каждую единицу своей длины, при краевом условии «отражения» будет иметь вид

$$\bar{\vartheta}(X, Z)=\frac{Q}{2(\pi\bar{u}XK_{zz})^{1/2}}\left[e^{-\frac{\bar{u}(Z-H)^2}{4K_{zz}X}}+e^{-\frac{\bar{u}(Z+H)^2}{4K_{zz}X}}\right] \qquad (10.91)$$

(в случае поглощения примеси поверхностью земли мы снова должны заменить здесь знак плюс на минус). Согласно (10.91) наземная концентрация от линейного источника на больших расстояниях от него должна убывать пропорционально $X^{-1/2}$. Решения уравнения (10.58), отвечающее более общему граничному условию $K_{zz}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial Z}\Big|_{Z=0}=\beta\bar{\vartheta}|_{Z=0}$, где $0<\beta<\infty$, также могут быть явно выписаны, но они имеют более сложный вид, и мы на них не будем останавливаться.

На первый взгляд перечисленные выше результаты, получающиеся при использовании уравнения (10.58) для концентрации $\bar{\vartheta}$, представляются довольно правдоподобными, но они никак не согласуются с эмпирическими данными, полученными

при многочисленных полевых исследованиях диффузии в приземном слое воздуха. Так, например, опыты показывают, что наземная концентрация примеси, создаваемой стационарным точечным источником, при безразличной температурной стратификации убывает при удалении от источника примерно пропорционально X^{-2} (согласно Саттону (1953) — пропорционально $X^{-1,8}$), но никак не пропорционально X^{-1}; наземная же концентрация от стационарного линейного источника при безразличной стратификации убывает пропорционально X^{-1} или $X^{-0,9}$ (Саттон (1953), Паскуил (1962б)), но не пропорционально $X^{-1/2}$. Данные, относящиеся к устойчивой или неустойчивой стратификации, менее определенны, чем в случае безразличной стратификации, но и они показывают, что ни при какой стратификации убывание наземной концентрации не следует простым законам, вытекающим из формул (10.90) и (10.91) (см., например, Дикон (1949)). Таким образом, приходится заключить, что уравнение (10.58) непригодно для количественного описания процесса турбулентной диффузии в приземном слое воздуха.

Полученное несоответствие в принципе может объясняться тем, что полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии вообще не может быть вполне строго обосновано и не является точным. Ясно, однако, что только на этом основании еще нельзя заключить, что полуэмпирическое уравнение диффузии неприменимо к рассеянию примесей в атмосфере. В самом деле, все предыдущие выводы делались на основе очень грубой модели, в которой полностью пренебрегалось зависимостью скорости ветра и коэффициентов диффузии от высоты Z. В то же время хорошо известно, что в действительности в атмосфере и скорость ветра, и коэффициенты обмена растут с высотой (см. выше гл. 4). Поэтому естественно прежде всего попытаться обобщить используемую модель, приняв какие-то разумные предположения о виде функций $\bar{u}(Z)$, $K_{xx}(Z)$, $K_{yy}(Z)$ и $K_{zz}(Z)$. Такие попытки предпринимались многими авторами, причем, поскольку решение уравнения диффузии с переменными коэффициентами наталкивается на значительные аналитические трудности, эти попытки породили обширную литературу, представляющую, главным образом, прикладной интерес.

Заметим прежде всего, что явное аналитическое решение нестационарных задач теории диффузии в полупространстве $Z>0$ (легко сводящихся к нахождению формул для диффузии примеси от мгновенного точечного источника) в случае меняющейся с высотой скорости ветра $\bar{u}(Z)$ до сих пор, по-видимому, не было получено ни в одном случае. Поэтому при решении задачи о расплывании облака примеси, созданной мгновенным источником, всегда используются те или иные приближенные приемы. Чаще всего при этом сначала исследуется лишь процесс вертикальной диффузии примеси, т. е. определяется зависимость от времени суммарной концентрации на высоте Z,

равной $\theta_{00}(Z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)\,dX\,dY$ (ср. выше формулу (10.75)), и только после этого приближенно учитывается также и горизонтальная диффузия. Функция $\theta_{00}(Z,t)$, как мы знаем, удовлетворяет уравнению (10.76) вида

$$\frac{\partial\theta_{00}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial Z}\left[K_{zz}(Z)\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\right];$$

соответствующие начальные и краевые условия в случае мгновенного источника на высоте $Z=H$ в момент $t=t_0$ и «отражения» примеси на границе $Z=0$ будут иметь вид

$$\theta_{00}(Z,t_0)=Q\delta(Z-H),\quad K_{zz}\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\Big|_{Z=0}=0,\quad \theta_{00}(Z,t)\to 0\ \text{при}\ Z\to\infty. \tag{10.92}$$

Таким образом, распределение примеси между различными горизонтальными плоскостями $Z=\text{const}$ не зависит от профиля ветра и от коэффициентов горизонтального обмена и определяется единственной функцией $K_{zz}(Z)$ (и высотой источника H). Решения уравнения (10.76) при условиях (10.92) для некоторых функций $K_{zz}(Z)$, пригодных для аппроксимации профиля коэффициента вертикального обмена в приземном слое при различных метеорологических условиях, были найдены, в частности, Лайхтманом в 40-х годах; позже они исследовались также и другими авторами (см., например, Монин (1956а)). При $K_{zz}=K_1Z$ такое решение имеет вид

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{K_1(t-t_0)}\,e^{-\frac{Z+H}{K_1(t-t_0)}}\,I_0\left[\frac{2\sqrt{HZ}}{K_1(t-t_0)}\right], \tag{10.93}$$

где I_0 — символ функции Бесселя от мнимого аргумента. Поскольку при безразличной температурной стратификации $K_{zz}=\alpha\varkappa u_*Z$, где $\alpha=\dfrac{K_\vartheta}{K}=\text{const}$ (ср. (5.26)), решением (10.93) естественно пользоваться при отсутствии заметного вертикального градиента температуры. В случае наземного источника (т. е. при $H=0$) формула (10.93) заметно упрощается: здесь

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{K_1(t-t_0)}\,e^{-\frac{Z}{K_1(t-t_0)}}. \tag{10.93'}$$

В более общем случае степенной зависимости коэффициента обмена от высоты, когда $K_{zz}=K_1Z^n$, где $0<n<2$ [1]), решение задачи (10.92) для уравнения (10.76) дается формулой

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{(2-n)K_1(t-t_0)H^{n-1}}\left(\frac{Z}{H}\right)^{\frac{1-n}{2}}e^{-\frac{Z^{2-n}+H^{2-n}}{(2-n)^2K_1(t-t_0)}}\times$$
$$\times I_{-\frac{1-n}{2-n}}\left[\frac{2(ZH)^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)^2K_1(t-t_0)}\right]; \tag{10.94}$$

[1]) Можно показать, что при $n\geqslant 2$ уравнение (10.76) не имеет решения, обращающегося в $\delta(Z-H)$ при $t\to t_0$. Однако это обстоятельство для нас не будет играть роли, так как в метеорологических приложениях всегда можно считать, что $n<2$.

при $H\to 0$ отсюда следует, что

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)[K_1(t-t_0)]^{\frac{1}{2-n}}}\,e^{-\frac{Z^{2-n}}{(2-n)^2K_1(t-t_0)}}. \tag{10.94'}$$

Значительно более громоздкие формулы для $\theta_{00}(Z,t)$ получаются при использовании функций $K_{zz}(Z)$, содержащих «излом», т. е. составленных из двух аналитических выражений, действующих в различных интервалах высот. Тем не менее, для случая, когда

$$K_{zz}(Z)=\begin{cases}K_1Z & \text{при}\quad 0<Z<H_1,\\ K_1H_1=\text{const} & \text{при}\quad Z\geqslant H_1,\end{cases} \tag{10.95}$$

аналитическое представление функции $\theta_{00}(Z,t)$ (в виде некоторого интеграла от цилиндрических функций) было указано Мониным (1956а), составившим также таблицу значений этой функции (в безразмерных переменных, позволяющих исключить неопределенные постоянные K_1 и H_1), соответствующей наземному источнику примеси (т. е. случаю $H=0$).

Следуя развитой в гл. 4 теории подобия для приземного слоя воздуха, при выборе аналитической формулы для функции $K_{zz}(Z)$ целесообразно сначала перейти к безразмерным переменным

$$\zeta=\frac{Z}{|L|},\quad \tau=\frac{\varkappa u_*t}{|L|},\quad \eta=\frac{H}{|L|},\quad K(\zeta)=\frac{K_{zz}(Z)}{\varkappa u_*|L|},\quad \Theta=\frac{|L|\,\theta_{00}}{Q}, \tag{10.96}$$

где L — естественный масштаб высот в приземном слое, определяемый формулой (7.12). Если, как обычно, считать, что коэффициент обмена для тепла совпадает с коэффициентом обмена для пассивной примеси, то в силу формулы (7.21) величина K равенства (10.96) будет отличаться от числа Ричардсона Ri (или, в случае неустойчивой стратификации, от его модуля) лишь множителем $\alpha^2=\left(\dfrac{K_\vartheta}{K}\right)^2$, который, по-видимому, в большинстве случаев не очень сильно отклоняется от единицы. Функция $\vartheta(z,t)=\theta(\zeta,\tau|\eta)$ теперь будет определяться условиями

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\zeta}K(\zeta)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta},\quad K(\zeta)\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0}=0,$$
$$\Theta\to 0\ \text{при}\ \zeta\to\infty,\quad \Theta(\zeta,0)=\delta(\zeta-\eta), \tag{10.97}$$

которые уже универсальны, т. е. не содержат никаких метеорологических параметров. При этом, теоретически говоря, нам надо рассмотреть лишь случаи неустойчивой и устойчивой стратификации, которым отвечают две разные функции $K(\zeta)$, и мы получим формулы, пригодные во всех реальных случаях. Практически удобно добавить сюда также и третий случай безразличной стратификации (хотя в принципе его можно получить из любого из двух предыдущих при помощи предельного перехода $|L|\to\infty$). В этом третьем случае, как мы уже говорили, целесообразно полагать $K(\zeta)=\zeta$ и, следовательно, применять формулы (10.93) и (10.93'). Что же касается устойчивой и неустойчивой стратификации, то если бы соответствующие универсальные функции $K(\zeta)$ были достаточно точно известны, то можно было бы даже не аппроксимировать эти функции аналитическими формулами, а раз навсегда решить две задачи (10.97) численно и составить таблицы соответствующих функций $\Theta(\zeta,\tau|\eta)$ от трех переменных. Поскольку, однако, из § 8 мы знаем, что функция $K(\zeta)$ и для неустойчивой и, особенно, для устойчивой страти-

фикации известна лишь в общих чертах, и что использование теории подобия в реальных условиях всегда сопровождается значительным разбросом эмпирических данных, пока вполне достаточно ограничиться рассмотрением приближенных выражений для $K(\zeta)$, позволяющих получить для $\Theta(\zeta, \tau \mid \eta)$ явные формулы. В частности, в случае устойчивой стратификации при слабой устойчивости (т. е. тогда, когда интерес представляют лишь сравнительно малые значения ζ) можно, следуя Лайхтману (1944) и Дикону (1949), приближенно заменить $K(\zeta)$ степенной функцией вида $K_1\zeta^n$ с показателем n, немного меньшим единицы. При сильной устойчивости (т. е. когда речь идет о широком интервале значений ζ) можно воспользоваться тем, что $K(\zeta) = \alpha_0\zeta$ при $\zeta \to 0$ и $K(\zeta) \to \frac{\alpha_\infty}{R}$ при $\zeta \to \infty$ (см. § 7), и применять функцию $K(\zeta)$ вида (10.95). Точно так же в случае неустойчивой стратификации при слабой неустойчивости можно приближенно принять, что $K(\zeta) = K_1\zeta^n$, где n немного больше единицы. При более сильной неустойчивости значительно более оправданной является «составная» формула вида

$$K(\zeta) = \begin{cases} \alpha_0 \mid \zeta \mid & \text{при } 0 \leqslant -\zeta \leqslant \zeta_1^* = \left(\dfrac{C_2\alpha_0}{3\alpha_{-\infty}}\right)^3, \\ \dfrac{3\alpha_{-\infty}}{C_2} \mid \zeta \mid^{4/3} & \text{при } -\zeta > \zeta_1^*, \end{cases} \tag{10.98}$$

вытекающая из (7.51), а при особо резкой неустойчивости (когда основной интерес представляют значения $|\zeta|$, превосходящие 0,05) можно полагать $K(\zeta) = K_1\zeta^{4/3}$ и пользоваться формулами (10.94) — (10.94′) с $n = 4/3$.

Полученные выше результаты позволяют довольно точно описать вертикальную диффузию в приземном слое воздуха при любой температурной стратификации. Что же касается учета горизонтальной диффузии, то простейший (но весьма грубый) метод здесь заключается в том, что скорость ветра $\bar{u}(Z)$ и коэффициенты $K_{xx}(Z)$ и $K_{yy}(Z)$ приближенно заменяются постоянными величинами $U_{\text{ср}}$, $(K_{xx})_{\text{ср}}$ и $(K_{yy})_{\text{ср}}$, равными средним значениям соответствующих функций от Z в пределах между верхней и нижней границами получающегося облака примеси (которые можно заранее рассчитать по функции $\theta_{00}(Z, t)$). При этом концентрация $\overline{\vartheta}(X, Y, Z, t)$, отвечающая случаю мгновенного точечного источника производительности Q в точке $(0, 0, H)$, возникшего в момент времени $t = t_0$, будет в первом приближении представляться в виде

$$\overline{\vartheta}(X, Y, Z, t) \approx \frac{1}{4\pi\left[(K_{xx})_{\text{ср}}(K_{yy})_{\text{ср}}\right]^{1/2}(t - t_0)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{[X - U_{\text{ср}}(t - t_0)]^2}{4(K_{xx})_{\text{ср}}(t - t_0)} - \frac{Y^2}{4(K_{yy})_{\text{ср}}(t - t_0)}\right\} \theta_{00}(Z, t), \tag{10.99}$$

где $\theta_{00}(Z, t)$ — решение соответствующего уравнения (10.76) при условиях (10.92). Поскольку коэффициенты $K_{xx}(Z)$ и $K_{yy}(Z)$ обычно не очень хорошо известны, практическое применение формулы (10.99) часто оказывается довольно затруднительным и может привести при разных выборах значений этих коэффициентов к заметно различающимся результатам. Еще более существенно, однако, то, что независимо от того, как определяются коэффициенты K_{xx} и K_{yy}, при использовании формул вида (10.99) с постоянной средней скоростью ветра мы полностью теряем важный эффект взаимодействия вертикального перемешивания с вертикальным градиентом скорости, который, как было показано выше, в турбулентных потоках в трубе или в канале и в безграничном пространстве при достаточно большом времени

диффузии играет основную роль в горизонтальном рассеянии. Отсюда ясно, что формула (10.99) и в приземном слое воздуха может быть применима лишь при сравнительно малых значениях $t - t_0$.

Учет горизонтального рассеяния, создаваемого градиентом скорости ветра

Чтобы приближенно учесть также и влияние градиента средней скорости на горизонтальное рассеяние, Сафмен (1962б) воспользовался методом Ариса, при котором распределение примеси в плоскости Z=const описывается несколькими первыми моментами $\theta_{nm}(Z, t)$, задаваемыми формулой (10.75). С помощью полуэмпирического уравнения диффузии (10.55) для моментов θ_{00}, θ_{10}, θ_{20} и т. д. получаются известные нам уравнения (10.76), в которых, однако, теперь краевое условие $\left.\frac{\partial\theta_{nm}}{\partial Z}\right|_{Z=H} = 0$ на верхней границе канала $Z = H$, использовавшееся в п. 10.4, заменяется условием $\theta_{nm}(Z, t) \to 0$ при $Z \to \infty$. Так как нас будет интересовать в первую очередь асимптотическое поведение облака примеси от мгновенного источника в момент t_0 при $t - t_0 \to \infty$, то мы можем ограничиться случаем наземного источника в начале координат — точке (0, 0, 0) (поскольку естественно думать, что при наличии источника на конечной высоте H эта высота будет заметно сказываться на процессе рассеяния облака примеси лишь в течение ограниченного промежутка времени). Чтобы уяснить себе основные качественные особенности исследуемого эффекта взаимодействия вертикального градиента скорости с вертикальным перемешиванием, рассмотрим прежде всего простейший модельный случай, когда $\bar{u}(Z) = \Gamma Z$ и $K_{zz}(Z) = K = \text{const}$ (случай $\bar{u}(Z) = U_0 + \Gamma Z$, $K_{zz} = \text{const}$, могущий представить интерес при конечной высоте источника H, легко получается отсюда при помощи перехода к новой инерционной системе координат). В этом случае искомым решением уравнения (10.76) относительно $\theta_{00}(Z, t)$ будет $\theta_{00}(Z, t) = \theta_{00}(Z, t_0 + \tau) = \frac{Q}{(\pi K\tau)^{1/2}} e^{-\frac{Z^2}{4K\tau}}$ (символом τ здесь и всюду ниже будет обозначаться разность $t - t_0$). Решение уравнения (10.76′) для функции $\theta_{10}(Z, t)$ при $K_{zz} = K$, $\bar{u}(Z) = \Gamma Z$ и таком $\theta_{00}(Z, t)$ более сложно; ясно, однако, что оно должно быть пропорционально $Q\Gamma$ и, следовательно, в силу соображений размерности должно иметь вид

$$\theta_{10}(Z, t) = \theta_{10}(Z, t_0 + \tau) = Q\Gamma\tau \cdot \varphi_{10}\left(\frac{Z}{(K\tau)^{1/2}}\right). \tag{10.100}$$

Здесь $\varphi_{10}(\xi)$ — универсальная функция одного переменного такая, что $\varphi_{10}(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$; с помощью уравнения (10.76′) эту функцию удается явно выразить через $\exp(-\xi^2)$ и так называемые функции параболического цилиндра математической физики (см. Сафмен (1962б)). Аналогично обстоит дело и с наиболее интересной для нас функцией $\theta_{20}(Z, t)$, описывающей дисперсию распределения примеси в плоскости $Z=\text{const}$ по направлению оси OX. Согласно уравнению (10.76″), эта функция зависит уже и от коэффициента горизонтального обмена K_{xx}; точнее говоря, она представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых зависит только от $\bar{u}(Z)$ и $K_{zz}=K$ (но не от K_{xx}), а второе — от $K_{xx}(Z)$ и $K_{zz}=K$ (но не от $\bar{u}(Z)$). Первое из указанных слагаемых, очевидно, пропорционально $Q\Gamma^2$ и поэтому в силу соображений размерности должно записываться в виде произведения $Q\Gamma^2K^{-2}(K\tau)^{5/2}\varphi_{20}(Z/(K\tau)^{1/2})$; что же касается второго из них, то его общий вид также легко может быть выписан, если только K_{xx} представляет собой степенную функцию от Z. В частности, если $K_{xx}=K_1=\text{const}$ или, соответственно, $K_{xx}=K_1^*Z$, где $K_1^*=\text{const}$, то нужное нам решение уравнения (10.76) будет представимо в виде

$$\theta_{20}(Z, t_0+\tau)=\frac{Q\Gamma^2}{K^2}(K\tau)^{5/2}\varphi_{20}\left(\frac{Z}{\sqrt{K\tau}}\right)+ \\ +\begin{cases} QK_1\sqrt{\dfrac{\tau}{K}}\,\varphi_{20}^{(1)}\left(\dfrac{Z}{\sqrt{K\tau}}\right) & \text{при} \quad K_{xx}=K_1, \\ QK_1^*\tau\,\varphi_{20}^{(2)}\left(\dfrac{Z}{\sqrt{K\tau}}\right) & \text{при} \quad K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.101}$$

Здесь $\varphi_{20}(\xi)$, $\varphi_{20}^{(1)}(\xi)$ и $\varphi_{20}^{(2)}(\xi)$ — новые затухающие на бесконечности функции, которые, как оказывается, тоже выражаются через функцию $\exp(-\xi^2)$ и функции параболического цилиндра. Аналогичные (но более сложные) выражения могут быть получены и для моментов $\theta_{nm}(Z, t)$ высших порядков (с $n+m>2$).

Согласно формулам (10.100), (10.101) и т. д. моменты распределения примеси в плоскости $Z=\text{const}$ в момент времени $t=t_0+\tau$ представляют собой степенные функции от τ, умноженные на функции от $\xi=\dfrac{Z}{\sqrt{K\tau}}$, принимающие, как нетрудно проверить, конечные значения при $\xi=0$. Поэтому в любом слое $0<Z<H$ фиксированной толщины H моменты распределения примеси во всех плоскостях $Z=\text{const}$ при $\tau\to\infty$ имеют асимптотически одинаковую форму. Суммарное распределение примеси между различными плоскостями $Z=\text{const}$, очевидно, описывается функцией $\theta_{00}(Z, \tau)=\dfrac{Q}{\sqrt{\pi K\tau}}e^{-Z^2/4K\tau}$. Эта функция не зависит от $\bar{u}(Z)$ и $K_{xx}(Z)$ и показывает, что при фиксированном значении τ толщина облака примеси имеет порядок $\sqrt{K\tau}$; при этом если $H\ll\sqrt{K\tau}$, то примесь почти равномерно распределяется по вертикали в пределах слоя толщины H (с постоянной вертикальной плотностью $\theta_{00}=\dfrac{Q}{\sqrt{\pi K\tau}}$). Выражения для моментов $\theta_{10}(Z, t_0+\tau)$ и $\theta_{20}(Z, t_0+\tau)$ при $Z\ll\sqrt{K\tau}$, получающиеся после подстановки в формулы (10.100) и (10.101) явных выражений соответствующих специальных функций $\varphi_{10}(\xi)$, $\varphi_{20}(\xi)$, $\varphi_{20}^{(1)}(\xi)$ и $\varphi_{20}^{(2)}(\xi)$ и перехода к пределу $\xi\to 0$, согласно Сафмену оказываются равными

$$\theta_{10}=\frac{Q\Gamma\tau}{4}, \quad \theta_{20}=\frac{7}{30\sqrt{\pi}}\frac{Q\Gamma^2}{K^2}(K\tau)^{5/2}+ \\ +\begin{cases} \dfrac{2QK_1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\tau}{K}\right)^{1/2} & \text{при} \quad K_{xx}=K_1, \\ \dfrac{QK_1^*\tau}{2} & \text{при} \quad K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.102}$$

Отсюда вытекает, что координата X центра тяжести распределения примеси в нижнем слое (толщины $H\ll\sqrt{K\tau}$) и дисперсия $\sigma_{\vartheta_x}^2$ этого распределения по направлению OX имеют следующий вид:

$$\langle X\rangle=\frac{\theta_{10}}{\theta_{00}}=\frac{\Gamma}{4}\sqrt{\pi K\tau^3}; \quad \sigma_{\vartheta_x}^2=\frac{\theta_{20}}{\theta_{00}}-\left(\frac{\theta_{10}}{\theta_{00}}\right)^2= \\ =\left(\frac{7}{30}-\frac{\pi}{16}\right)\Gamma^2K\tau^3+\begin{cases} 2K_1\tau & \text{при} \quad K_{xx}=K_1, \\ \dfrac{K_1^*}{2}\sqrt{\pi K\tau^3} & \text{при} \quad K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.103}$$

Мы видим, что центр тяжести распределения примеси в нижнем слое переносится средним течением по направлению оси OX со все возрастающей скоростью $\dfrac{3\sqrt{\pi}}{8}\Gamma\sqrt{K\tau}$ (пропорциональной градиенту скорости Γ и квадратному корню из коэффициента вертикального обмена). Что же касается дисперсии этого распределения, то она, согласно (10.103), складывается из двух слагаемых. Первое из них пропорционально $\Gamma^2K\tau^3$ (т. е. только постоянным множителем отличается от соответствующего слагаемого в выражении (10.88) для горизонтальной дисперсии облака примеси, диффундирующей в безграничном пространстве); оно, очевидно, создается взаимодействием вертикального турбулентного переноса с вертикальным градиентом скорости,

Второе же слагаемое в выражении для $\sigma^2_{\vartheta_x}$ описывает обычное горизонтальное рассеяние, вызываемое турбулентными пульсациями горизонтальной скорости (т. е. турбулентной диффузией с коэффициентом K_{xx}). Это второе слагаемое при $K_{xx} = K_1$ имеет обычный вид $2K_1\tau$, а при $K_{xx} = K_1^* Z$ оно зависит также и от $K_{zz} = K$ (т. е. выражает взаимодействие горизонтальной и вертикальной диффузии) и пропорционально $\tau^{3/2}$. Существенно, однако, что в любом случае при достаточно больших значениях τ оно оказывается пренебрежимо малым по сравнению с первым слагаемым (имеющим порядок τ^3). Заметим еще, что уравнение для $\theta_{02}(Z, t)$ будет отличаться от (10.76″) отсутствием члена с $\bar{u}(Z)$ (в предположении, что средняя скорость при всех Z направлена вдоль оси OX). Поэтому дисперсия $\sigma^2_{\vartheta_y}$ будет описываться лишь вторым слагаемым формулы (10.103) для $\sigma^2_{\vartheta_x}$ (с очевидной заменой K_{xx} на K_{yy}), т. е. при больших значениях τ будет много меньшей, чем $\sigma^2_{\vartheta_x}$. Максимальная наземная концентрация $\bar{\vartheta}_m = \bar{\vartheta}_m(\tau)$ (достигающаяся, очевидно, в точке $(\langle X\rangle, 0)$) при $\tau \to \infty$ будет убывать асимптотически пропорционально $\tau^{-5/2}$, если K_{yy}=const, и пропорционально $\tau^{-11/4}$, если $K_{yy} \sim Z$. Ясно, что все эти факты никак не согласуются с упрощенной формулой (10.99). Кроме того, эта формула оказывается неверной и в том отношении, что распределение примеси в плоскости Z=const при достаточно большом значении $\tau = t - t_0$ и по форме не напоминает распределения Гаусса. В самом деле, воспользовавшись аналогичными (10.100)—(10.102) соотношениями для момента θ_{30}, можно показать, что $\theta_{30} \approx \frac{21}{256} Q\Gamma^3 K\tau^4$ при достаточно большом τ, откуда вытекает, что асимметрия распределения примеси по направлению оси OX при фиксированном Z и $\tau \to \infty$ не стремится к нулю, а приближается к единице.

Перечисленные результаты относились к модели, в которой $\bar{u}(Z) = \Gamma Z$, $K_{zz} = K$ = const. Естественно ожидать, однако, что и в других случаях при наличии зависимости скорости ветра от высоты дело будет обстоять аналогичным образом. Наибольший интерес, разумеется, представляло бы исследование случая

$$\bar{u}(Z) = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{Z}{Z_0}, \qquad K_{zz} = \varkappa u_* Z$$

(т. е. случая диффузии в логарифмическом пограничном слое), а также случаев, когда $\bar{u}(Z)$ и $K_{zz}(Z)$ определяются формулами, выведенными в гл. 4 для пограничного слоя в температурно-стратифицированной жидкости. Однако такое исследование, опирающееся на полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии, наталкивается на значительные аналитические трудности. Поэтому, следуя опять Сафмену, мы ограничимся лишь кратким рассмотрением ситуаций, возникающих при использовании аппроксимации всех вертикальных профилей степенными функциями. Предположим, что

$$\bar{u}(Z) = u_1 Z^m, \quad K_{zz}(Z) = KZ^n, \qquad K_{xx}(Z) = K_1 Z^k, \quad K_{yy}(Z) = K_2 Z^l, \tag{10.104}$$

где u_1, K, K_1, K_2 — постоянные, и $n < 2$. В таком случае общий вид решений уравнений (10.76), (10.76′), (10.76″) и т. д. (для случая наземного мгновенного точечного источника производительности Q в начале координат в момент $t = t_0$) снова может быть установлен на основе соображений размерности. В частности, в уравнение (10.76) для $\theta_{00}(Z, t)$ теперь входит единственный размерный параметр K; поскольку из K, Z и $\tau = t - t_0$ можно составить единственную безразмерную комбинацию $\xi = Z(K\tau)^{-\frac{1}{2-n}}$, получаем

$$\theta_{00}(Z, t) = Q(K\tau)^{-\frac{1}{2-n}} \varphi_{00}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}), \tag{10.105}$$

где $\varphi_{00}(\xi)$ — безразмерная универсальная функция (явный вид которой дается формулой (10.94′)). Функция $\theta_{10}(Z, t)$, согласно (10.76′) и (10.104), должна быть пропорциональна Qu_1, а в остальном также зависит лишь от K, Z и τ; следовательно,

$$\theta_{10}(Z, t) = Qu_1\tau (K\tau)^{\frac{m-1}{2-n}} \varphi_{10}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}), \tag{10.106}$$

где $\varphi_{10}(\xi)$ — еще одна универсальная функция. Наконец, θ_{20} в силу (10.76″) и (10.104) представляется в виде суммы слагаемого, пропорционального Qu_1^2, и слагаемого, пропорционального QK_1, а θ_{02} пропорционально QK_2; поэтому

$$\theta_{20}(Z, t) = Qu_1^2\tau^2 (K\tau)^{\frac{2m-1}{2-n}} \varphi_{20}^{(1)}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}) + QK_1\tau (K\tau)^{\frac{k-1}{2-n}} \varphi_{20}^{(2)}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}),$$
$$\theta_{02}(Z, t) = QK_2\tau (K\tau)^{\frac{l-1}{2-n}} \varphi_{02}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}). \tag{10.107}$$

Поскольку $\bar{\vartheta}(Z, t) \to 0$ при $Z \to \infty$, все функции $\varphi_{00}(\xi)$, $\varphi_{10}(\xi)$, $\varphi_{20}^{(1)}(\xi)$ и т. д. должны убывать при $\xi \to \infty$; в силу (10.105) отсюда вытекает, что толщина облака примеси в момент $t_0 + \tau$ должна иметь порядок $(K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$. В слое толщины $H \ll (K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$ распределение примеси будет практически независимым от высоты и будет иметь плотность

$$\theta_{00} = \frac{\alpha_{00} Q}{(K\tau)^{1/(2-n)}},$$

где $\alpha_{00} = \varphi_{00}(0)$ $\left(\text{т. е. } \alpha_{00} = (2-n)^{-\frac{n}{2-n}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)\right]^{-1} \text{ в силу (10.94′)}\right)$.

При принятом нами предположении, что скорость $\bar{u}(Z)$ на всех уровнях параллельна оси OX (от которого, впрочем, при необходимости легко освобо-

диться, введя в рассмотрение еще и компоненту $\bar{v}(Z) = v_1 Z^{m_1}$), центр тяжести распределения примеси в этом слое будет иметь координаты

$$\langle X\rangle = bu_1\tau\,(K\tau)^{\frac{m}{2-n}}, \qquad \langle Y\rangle = 0, \qquad b = \frac{\varphi_{10}(0)}{\varphi_{00}(0)}. \tag{10.108}$$

При том же предположении дисперсии распределения примеси в плоскости $Z = \text{const}$, где $Z \ll (K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$, будут иметь вид

$$\sigma^2_{\vartheta_x} = b_1 u_1^2 \tau^2 (K\tau)^{\frac{2m}{2-n}} + b_2 K_1 \tau\,(K\tau)^{\frac{k}{2-n}}, \qquad \sigma^2_{\vartheta_y} = b_3 K_2 \tau\,(K\tau)^{\frac{l}{2-n}}, \tag{10.108'}$$

где b_1, b_2 и b_3 — новые постоянные, а смешанный момент $\sigma_{xy} = \langle (X - \langle X\rangle) Y\rangle = \frac{\theta_{11}}{\theta_{00}} - \frac{\theta_{01}\theta_{10}}{\theta_{00}^2}$ будет равен нулю (так как $\theta_{01} = \theta_{11} = 0$). Первое слагаемое первой формулы (10.108') снова описывает горизонтальное рассеяние, вызываемое взаимодействием вертикального градиента средней скорости с вертикальным турбулентным переносом, а второе слагаемое той же формулы — обычную горизонтальную турбулентную диффузию. Ясно, что первый из этих эффектов при больших τ будет преобладающим, если только $2m + 2 - n > k$. В условиях приземного слоя атмосферы последнее условие, по-видимому, всегда приходится считать выполняющимся (так как при устойчивой или безразличной стратификации $n \leqslant 1$ и, вероятно, следует считать, что $n + k \leqslant 2$, а при сильной неустойчивости n приближается к $^4/_3$, но коэффициент $K_{xx}(Z)$, если только им здесь можно пользоваться, вряд ли будет заметно возрастать с высотой). Поэтому следует ожидать, что в атмосфере наличие вертикального градиента скорости ветра всегда играет основную роль в горизонтальном рассеянии в течение сравнительно больших промежутков времени. Так как к тому же естественно думать, что $K_{yy}(Z)$ примерно пропорционально $K_{xx}(Z)$, то в пренебрежении поворотом ветра с высотой рассеяние по направлению среднего ветра при больших τ будет заметно превосходить рассеяние по перпендикулярному направлению. Кроме того, дисперсия $\sigma^2_{\vartheta_x}$ здесь оказывается заметно большей и средней толщины облака (имеющей порядок $(K\tau)^{1/(2-n)}$); поэтому облако примеси при больших τ оказывается больше всего вытянутым по направлению среднего ветра.

Формулы Саттона для рассеяния примесей в атмосфере

Приведенные выше оценки горизонтального рассеяния в приземном слое воздуха открывают новые возможности для математического анализа процесса распространения примесей от мгновенных источников. Ясно, однако, что такой анализ неизбежно будет довольно сложным; поэтому в практических приложениях широкое применение получили различные довольно грубые, но зато простые приближенные приемы описания атмосферной диффузии. В частности, в Англии и США при расчетах диффузии примесей в атмосфере часто используются приближенные формулы, предложенные Саттоном (1932, 1949, 1953). Согласно этим формулам, распределение примеси от мгновенного точечного источника предполагается имеющим гауссовскую форму (10.12) (в системе координат, перемещающейся вместе со средним ветром с постоянной скоростью $\bar{u}$), но с дисперсиями $D_{ii}(\tau)$, растущими быстрее, чем первая степень τ (в соответствии с формулами (10.108') и с тем, что убывание наземной концентрации, отвечающее дисперсиям $D_{ii}(\tau) = 2K_{ii}\tau$, в реальных приложениях оказывается слишком медленным). Чтобы определить функциональную форму дисперсий $D_{ii}(\tau)$, Саттон предположил, что при диффузии в приземном слое атмосферы можно приближенно пользоваться классической формулой Тэйлора (9.31) для $D_{ii}(\tau)$ (строго получающейся лишь в предположении об однородности турбулентности), приняв при этом, что лагранжевы корреляционные функции $R^{(L)}_{ii}(\tau)$ имеют вид

$$R^{(L)}_{ii}(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{\tau_i}\right)^{-n}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{10.109}$$

Здесь τ_i — некоторые постоянные масштабы времени, а показатель n, согласно Саттону, принимает значения порядка $0{,}1 \div 0{,}3$ (в зависимости от стратификации). Поскольку предполагается, что $n < 1$, лагранжев масштаб времени T_i формулы (9.32) оказывается бесконечно большим; именно поэтому теория Саттона не приводит к асимптотически линейному росту дисперсий при возрастании времени τ (и отсюда же следует, что эта теория, строго говоря, не является одним из вариантов обычной полуэмпирической теории турбулентной диффузии, пригодной, как отмечалось выше, лишь при $\tau \gg T_i$). Однако, как и в обычной полуэмпирической теории, в теории Саттона также рассматриваются лишь достаточно большие значения τ, но большие не по сравнению с T_i (равным здесь бесконечности), а по сравнению с τ_i. Согласно (10.109) и (9.31), при $\tau \gg \tau_i$ дисперсия $D_{ii}(\tau)$ оказывается асимптотически пропорциональной τ^{2-n}; соответствующую асимптотическую формулу Саттон записывает в виде

$$D_{ii}(\tau) = \frac{C_i^2}{2}(\bar{u}\tau)^{2-n}, \tag{10.110}$$

где $\bar{u}$ — средняя скорость ветра в рассматриваемом слое воздуха, а C_i — постоянные коэффициенты (при $\overline{u_i'^2} \sim \bar{u}^2$ это означает, что $\tau_i \sim (\bar{u})^{-1}$). В случае диффузии примесей от высотных источников Саттон, ориентируясь на экспериментальные данные, рекомендует считать коэффициенты C_i зависящими от высоты источника H (и убывающими с ростом H). Отметим, что при определении дисперсий $D_{ii}(\tau)$ формулой (10.110) функция (10.12) также оказывается решением уравнения диффузии вида (10.55), но с коэффициентами диффузии $K_{ii} = \frac{2-n}{4} C_i^2 (\bar{u})^{2-n} \tau^{1-n}$, зависящими не от высоты Z, а от времени диффузии τ. Но при этом уравнение (10.55) уже не может быть выведено из статистических предположений полуэмпирической теории диффузии, требующих (см. формулы (10.53)), чтобы коэффициенты диффузии определялись только полем скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$, но не зависели бы от того, когда и где в это поле внесены источники примеси (как отметил Тэйлор (1959), то, что коэффициенты турбулентной диффузии в полуэмпирической теории не могут зависеть от τ, вытекает уже из принципа суперпозиции, соответствующего предположению о линейности уравнения диффузии: при зависимости K_{ii} от τ значение K_{ii} в фиксированной точке $(\boldsymbol{X}, t)$ при наличии нескольких мгновенных источников примеси, выделивших примесь не одновременно, было бы многозначным).

Зная распределение концентрации от мгновенного точечного источника, можно без труда рассчитать концентрацию и от стационарных точечного и линейного источников точно так же, как это было сделано выше в применении к формулам Робертса, отвечающим предположению о постоянстве

коэффициентов диффузии. Так, например, случаю диффузии от стационарного точечного источника производительности Q в точке $(0, 0, H)$ при условии «отражения» примеси поверхностью Земли в теории Саттона отвечает родственная (10.90) формула

$$\bar{\vartheta}(X, Y, Z) = \frac{Q}{\pi C_y C_z \bar{u} X^{2-n}} e^{-\frac{Y^2}{C_y^2 X^{2-n}}} \left[e^{-\frac{(Z-H)^2}{C_z^2 X^{2-n}}} + e^{-\frac{(Z+H)^2}{C_z^2 X^{2-n}}} \right] \quad (10.111)$$

(в случае линейного источника на прямой $X = 0, Z = H$ здесь надо только справа опустить множитель, зависящий от Y, и заменить Q на $\sqrt{\pi} Q C_y X^{1-\frac{n}{2}}$). Согласно (10.111), распределение примеси поперек ветра в горизонтальной плоскости оказывается гауссовским с дисперсией $\frac{C_y^2}{2} X^{1-\frac{n}{2}}$, а распределение наземной концентрации по направлению среднего ветра имеет вид

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) = \frac{2Q}{\pi C_y C_z \bar{u} X^{2-n}} e^{-\frac{H^2}{C_z^2 X^{2-n}}}, \quad (10.112)$$

т. е. убывает асимптотически пропорционально X^{n-2} (в случае линейного источника — пропорционально $X^{\frac{n}{2}-1}$). Максимум наземной концентрации (10.112) равен $\bar{\vartheta}_{\max} = \frac{2Q}{\pi e \bar{u} H^2} \frac{C_z}{C_y}$ (т. е. обратно пропорционален скорости ветра и квадрату высоты источника) и достигается на расстоянии от источника $X = \left(\frac{H}{C_z}\right)^{\frac{2}{2-n}}$ (которое, в отличие от случая теории Робертса, не зависит от скорости ветра $\bar{u}$).

Сопоставление формул Саттона со сравнительно новыми и полными эмпирическими данными о диффузии в атмосфере можно найти, например, в работах Бареда и Хоугена (1959), Дриммеля и Рейтера (1960) и Хоугена, Бареда и Антанаитиса (1961); сопоставлению формулы (10.109) с эмпирическими данными о лагранжевых корреляционных функциях посвящена работа Манна (1963). Приведенные в указанных статьях материалы показывают, что формулы Саттона весьма неточно описывают реальные лагранжевы корреляционные функции; тем не менее, их можно более или менее удовлетворительно согласовать с имеющимися эмпирическими данными о диффузии, если только значительно расширить интервал допустимых значений n и допустить, что не только параметры C_i, но и n могут принимать различные значения для диффузии по различным направлениям (т. е. заменить в формуле (10.110) параметр n на n_i). Но в таком случае число неопределенных параметров в формулах теории Саттона оказывается настолько большим, что оно уже само по себе вполне объясняет возможность согласования этих формул с результатами полевых экспериментов; зависимость же параметров C_i и n_i от метеорологических условий все равно оказывается довольно сложной и плохо изученной. Поэтому представляется естественным искать другие пути приближенного описания данных об атмосферной диффузии, которые были бы достаточно просты, но более обоснованы теоретически, чем формулы Саттона.

Стационарные решения полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии

В частном случае поперечной дисперсии $D_{yy}(\tau)$ (по направлению OY, перпендикулярному среднему ветру) новые приближенные формулы были предложены Бютнер и Лайхтманом (1963); эти формулы, однако, довольно сложны и еще требуют эмпирической проверки. Ряд практических формул для расчета атмосферной диффузии можно найти также в монографии Паскуила (1962б). Мы здесь остановимся лишь на некоторых из таких формул, вытекающих из полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии (10.55). Выше мы рассматривали только решения этого уравнения, отвечающие случаю мгновенного источника примеси; именно к ним относилось замечание, что никаких точных решений уравнения диффузии, учитывающих возрастание скорости ветра с высотой, до сих пор не получено. На практике, однако, часто основной интерес представляет распределение концентрации от непрерывно действующего стационарного источника примеси, а это распределение уже заметно проще поддается математическому анализу.

Начнем со случая концентрации $\bar{\vartheta}(X, Z)$ от стационарного линейного источника, перпендикулярного среднему ветру и производящего Q единиц массы примеси за единицу времени на единицу длины (очевидно, равной также величине $\bar{\vartheta}(X, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\vartheta}(X, Y, Z)\, dY$, где $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$ — концентрация, создаваемая стационарным точечным источником производительности Q). В этом случае в уравнении (10.55), очевидно, можно опустить члены, содержащие $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial Y}$. Если, кроме того, мы пренебрежем также и слагаемым $-K_{xx}\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\overline{u'\vartheta'}$, описывающим продольную диффузию, по сравнению со слагаемым $\bar{u}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial X}$, описывающим перенос примеси средним течением (а в случае стационарных источников это почти всегда не приводит к заметной ошибке), то уравнение (10.55) еще упростится и превратится в так называемое двумерное уравнение турбулентной диффузии

$$\bar{u}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Z}\left[K_{zz}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}\right]. \quad (10.113)$$

В случае отражения примеси поверхностью Земли и источника на высоте H искомое решение должно удовлетворять условиям

$$\begin{gathered} \bar{\vartheta} \to 0 \quad \text{при} \quad X \to \infty \quad \text{или} \quad Z \to \infty; \quad K_{zz}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}\Big|_{Z=0} = 0; \\ \bar{\vartheta} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0, \quad Z \neq H; \quad \int_0^{\infty} \bar{u}\bar{\vartheta}\, dZ = Q \quad \text{при} \quad X \geqslant 0 \end{gathered} \quad (10.114)$$

(последние два из этих условий могут быть также записаны в виде $\bar{u}(H)\bar{\vartheta}(0, Z) = Q\delta(Z - H)$). Таким образом, мы приходим к обычной задаче с начальными и краевыми условиями для параболического уравнения (10.113), в котором роль времени теперь играет переменная X. В частном

случае $\bar{u}(Z) = \bar{u} = \text{const}$, $K_{zz}(Z) = K_{zz} = \text{const}$ решение задачи (10.113) — (10.114), очевидно, будет даваться формулой Робертса (10.91), которая, как мы знаем, не согласуется с эмпирическими данными. Случай постоянной скорости ветра $\bar{u}$, но линейно возрастающего коэффициента обмена $K_{zz}(Z) = K_1 Z$ был рассмотрен Бозанке и Пирсоном (1936), получившими (для частного случая наземного источника с $H = 0$) очень простую формулу

$$\bar{\vartheta}(X, Z) = \frac{Q}{K_1 X} e^{-\frac{\bar{u} Z}{K_1 X}}, \qquad (10.115)$$

уже сравнительно неплохо согласующуюся с данными наблюдений, относящихся к случаям температурной стратификации, близкой к безразличной. В дальнейшем ряд авторов изучили также более общий случай произвольной степенной зависимости скорости ветра и коэффициентов обмена от высоты

$$K_{zz}(Z) = K_1 Z^n, \quad \bar{u}(Z) = u_1 Z^m. \qquad (10.116)$$

В частном случае $n = 1 - m$ уравнение (10.113) с такими коэффициентами, но при отличных от (10.114) краевых условиях было сравнительно давно решено Саттоном (1934) в связи с исследованием процесса испарения в приземном слое воздуха; близкую задачу рассмотрел также Лайхтман (1947б). Решение уравнения (10.113) при условиях (10.114), отвечающих наземному источнику, в случае коэффициентов (10.116) было получено, в частности, Робертсом (см. Колдер (1949)), Фростом (1946) (в предположении, что $n = 1 - m$) и Лайхтманом (1961, 1963); оно имеет следующий вид:

$$\bar{\vartheta}(X, Z) = \frac{(m - n + 2) Q}{u_1 \Gamma\left(\frac{m+1}{m-n+2}\right)} \left[\frac{u_1}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right]^{\frac{m+1}{m-n+2}} \times \exp\left[-\frac{u_1 Z^{m-n+2}}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right] \qquad (10.117)$$

(в предположении, что $m - n + 2 > 0$). Более общее решение того же уравнения, отвечающее высотному источнику на произвольной высоте H, можно найти, например, в работах Лайхтмана (1961, 1963), Раундса (1955), Монина (1956а) и Смита (1957); в этом случае

$$\bar{\vartheta}(X, Z) = \frac{Q (HZ)^{\frac{1-n}{2}}}{(m-n+2) K_1 X} \times \exp\left[-\frac{u_1 (Z^{m-n+2} + H^{m-n+2})}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right] I_p\left(\frac{2u_1 (HZ)^{(m-n+2)/2}}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right), \qquad (10.118)$$

где I_p — функция Бесселя от мнимого аргумента индекса $p = -\frac{1-n}{m-n+2}$. Значительно более громоздкое решение уравнения (10.113) с коэффициентами (10.116) при краевых условиях, отвечающих общему случаю «частичного или полного поглощения» примеси, при котором $K_{zz} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}\Big|_{Z=0} = \beta \bar{\vartheta}\Big|_{Z=0}$, опубликовано Лайхтманом (1961, 1963); им же, а также Цейтиным (1963), исследован случай, когда скорость ветра $\bar{u}$ и коэффициент обмена K_{zz} удовлетворяют степенным формулам (10.116) лишь до некоторой фиксированной высоты $Z = H_1$, а выше остаются постоянными.

В случае $\bar{u}(Z) = u_1 \ln \frac{Z}{Z_0}$, $K_{zz}(Z) = K_1 Z$, отвечающем логарифмическому пограничному слою, задачу (10.113) — (10.114) не удается решить аналитически, но, разумеется, ее можно решить численно. Для нескольких значений H такое численное решение было построено Берляндом, Гениховичем и др. (1963, 1964), принявшими, однако, что линейное возрастание коэффициента $K_{zz}(Z)$ сохраняется лишь до некоторой условной «высоты приземного слоя» h, а далее $K_{zz}(Z)$ остается постоянным (или даже изменяется с высотой причудливым образом, так что график функции $K_{zz}(Z)$ оказывается имеющим несколько изломов). В противоположность этому в работе Ямамото и Шимануки (1960) численное решение уравнения (10.113) искалось в предположении, что $\tau = \rho_0 u_*^2 = \text{const}$ и что коэффициент K_{zz}

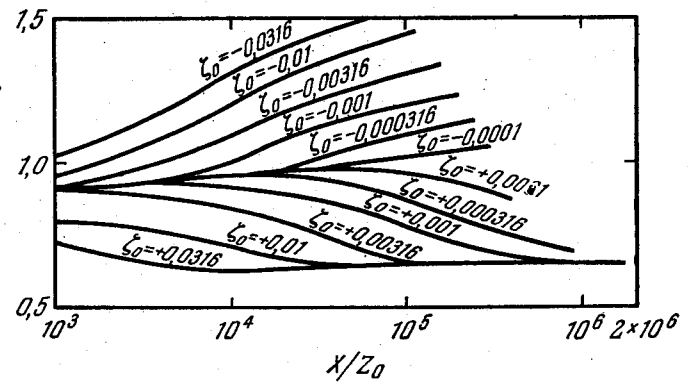


Рис. 83. Зависимость показателя p в законе убывания наземной концентрации примеси от расстояния от источника и от параметра устойчивости.

в соответствии с аналогией Рейнольдса всюду совпадает с коэффициентом турбулентной вязкости, т. е. определяется соотношением $K_{zz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} = u_*^2$ (приводящим в случае логарифмического профиля ветра к равенству $K_{zz} = K_1 Z$). Однако вместо логарифмической формулы для $\bar{u}(Z)$ здесь для профиля ветра использовалась общая формула теории подобия (7.24) с универсальной функцией $\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$, удовлетворяющей уравнению четвертого порядка (7.60). Параметр σ, входящий в уравнение (7.60), в процессе численного решения удалось исключить с помощью простого перехода к новому масштабу длины $L_* = L/\sigma$. После этого задача о диффузии примеси от наземного линейного источника (на высоте шероховатости $Z = Z_0$) при условии «отражения» на поверхности земли свелась к решению одного универсального уравнения относительно функции от двух переменных, зависящего от единственного параметра $\zeta_0 = \frac{Z_0}{L_*}$ (возникающего в связи с зависимостью $\bar{u}(Z)$ от Z_0). Ясно, что положительным значением ζ_0 отвечает устойчивая стратификация, а отрицательным значениям — неустойчивая. Полученные Ямамото и Шимануки численные решения соответствующего уравнения для ряда значений ζ_0 были представлены в виде нескольких графиков. На рис. 83 мы приводим один из них, показывающий зависимость показателя p, харак-

теризующего быстроту убывания наземной концентрации (при $Z = Z_0$) с расстоянием X от «параметра устойчивости» ζ_0 и безразмерного расстояния от источника X/Z_0. Параметр p здесь определялся из условия

$$\frac{\bar{\vartheta}(X_2, Z_0)}{\bar{\vartheta}(X_1, Z_0)} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{-p},$$

где оба значения X_2 и X_1 брались вблизи определенной координаты X. Мы видим, что при безразличной стратификации (т. е. при близком к нулю значении ζ_0) параметр p вплоть до весьма больших расстояний остается примерно постоянным и близким к 0,9, в полном соответствии с эмпирическими фактами, о которых говорилось на стр. 563. Однако при отличной от безразличной стратификации он, как правило, существенно зависит от расстояния X.

Если при использовании степенных формул (10.116) принять, что $K_{zz}(Z)$ может отличаться от коэффициента турбулентной вязкости самое большее постоянным множителем α, т. е. что $K_{zz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} = \text{const}$, то неизбежно приходится считать, что $n = 1 - m$. В частном случае безразличной стратификации логарифмический профиль скорости ветра сравнительно хорошо аппроксимируется на значительном интервале высот степенной функцией с показателем $m = 1/7$ (ср. выше стр. 263 и 277); поэтому здесь целесообразно принять $m = 1/7$, $n = 6/7$. И действительно, формулы (10.117) — (10.118) при таких m и n (и соответствующем подборе коэффициентов U_1 и K_1), как оказалось, очень неплохо соответствуют имеющимся эмпирическим данным о диффузии в условиях безразличной стратификации (см., например, Колдер (1949)). Из (10.117) и (10.118), в частности, видно, что при таких m и n наземная концентрация убывает асимптотически пропорционально $X^{-6/9}$, что хорошо согласуется и с опытными данными, и с данными рис. 83 для очень малых ζ_0. При стратификации, не являющейся безразличной, многие авторы также пробовали применять формулы (10.117) — (10.118), в которых показатели m и n определялись в зависимости от метеорологических условий (см., например, Дикон (1949), Воэн (1961)), но здесь полученные результаты довольно сильно зависят от метода выбора значений m и n и поэтому представляются менее убедительными.

Перейдем теперь к диффузии от стационарного точечного источника производительности Q в точке $(0, 0, H)$. В этом случае, если мы снова пренебрежем диффузией по направлению OX по сравнению с переносом примеси средним течением, то полуэмпирическое уравнение для средней концентрации будет иметь вид

$$\bar{u}(Z)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(K_{yy}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}\right). \tag{10.119}$$

Интересующее нас решение уравнения (10.119) должно удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\vartheta} \to 0 \quad \text{при} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 \to \infty, \quad K_{zz}\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial Z}\Big|_{Z=0} = 0, \\ &\bar{\vartheta}(0, Y, Z) = \frac{Q}{\bar{u}(H)}\,\delta(Y)\,\delta(Z - H) \end{aligned}\right\} \tag{10.120}$$

(ср. (10.114)). Увеличение числа независимых переменных от двух до трех при переходе от уравнения (10.113) к (10.119), естественно, приводит к значительному усложнению задачи. Дэвис (1950) попытался найти точное решение задачи (10.119) — (10.120) (для случая наземного источника) в предположении, что $\bar{u}(Z) \sim Z^m$, $K_{zz}(Z) \sim Z^{1-m}$ и $K_{yy}(Z) \sim Z^n$; однако он сумел достигнуть цели лишь в частном случае, когда $\alpha = m$, т. е. когда $K_{yy}(Z) = c\bar{u}(Z)$, где $c = \text{const}$. В последнем случае, как легко проверить $\bar{\vartheta}(X, Y, Z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c X}} \exp\left(-\frac{Y^2}{4cX}\right) \cdot \bar{\vartheta}(X, Z)$, где $\bar{\vartheta}(X, Z)$ — решение задачи (10.113) — (10.114). Таким образом, при $\alpha = m$ учет диффузии вдоль оси OY не представляет никакой трудности; поэтому предположение, что $K_{yy} \sim \bar{u}$, принималось в целом ряде работ о турбулентной диффузии. К сожалению, получаемые при таком предположении формулы для концентрации $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$ во многих случаях оказались явно противоречащими эмпирическим данным о распространении примеси от стационарных точечных источников в приземном слое атмосферы. В связи с этим Смит (1957) вернулся к случаю общего показателя α, но он отказался от точного определения функции $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$, а ограничился нахождением лишь двух первых отличных от нуля моментов распределения концентрации примеси вдоль прямых $X = \text{const}$, $Z = \text{const}$:

$$\theta_0(X, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\vartheta}(X, Y, Z)\,dY, \quad \theta_2(X, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} Y^2 \bar{\vartheta}(X, Y, Z)\,dY. \tag{10.121}$$

Функция $\theta_0(X, Z)$, очевидно, будет удовлетворять тому же уравнению (10.113) (с условиями (10.114)), которое описывает распределение концентрации в случае линейного стационарного источника, т. е. ее можно определить из равенства (10.118) с $n = 1 - m$. Что же касается функции $\theta_2(X, Z)$, то для нее из (10.119) получается дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее также и коэффициент $K_{yy}(Z)$. Это уравнение при некоторых частных значениях m и α может быть решено в общем виде, но при произвольных m и α его явное решение (выражающееся через сложные специальные функции) удалось найти лишь для случая наземного источника, т. е. при $H = 0$. Естественно думать, однако, что при не слишком большом H и большом X решение при $H > 0$ будет уже мало отличаться от решения, отвечающего случаю $H = 0$. Кроме того, если интересоваться лишь наземным распределением примеси (т. е. значениями $\bar{\vartheta}(X, Y, 0)$), то решение для случая высотного источника может быть выведено из общего решения для случая наземного источника с помощью доказанной Смитом изящной теоремы взаимности, выражающей статистическую обратимость процесса диффузии, описываемого полуэмпирическим уравнением (10.55). Согласно этой теореме, *в случае турбулентной диффузии с условием отражения примеси на поверхности* $Z = 0$ *значение* $\bar{\vartheta}(X, Y, 0)$ *функции* $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$, *отвечающей высотному источнику примеси в точке* $X = Y = 0$, $Z = H$, *совпадает со значением* $\bar{\vartheta}(X, Y, H)$ функции $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$, *отвечающей такому же наземному источнику в точке* $X = Y = Z = 0$ (так что для $\bar{\vartheta}(X, Y, 0)$ при любом H можно написать явную формулу). Зная $\theta_0(X, Z)$ и $\theta_2(X, Z)$, можно приближенно определить и функцию $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$, допустив (в соответствии с интуитивными физическими представлениями о поперечной диффузии и с имеющимися эмпирическими данными), что распределение примеси вдоль прямой $X = \text{const}$, $Z = \text{const}$ при всех X и Z мало отличается от распределения Гаусса. Следовательно, при любых X, Y и Z

$$\bar{\vartheta}(X, Y, Z) \approx \frac{\exp\left[-Y^2/2\overline{Y^2}(X, Z)\right]}{\left[2\pi\overline{Y^2}(X, Z)\right]^{1/2}}\,\theta_0(X, Z), \tag{10.122}$$

где

$$\overline{Y^2(X, Z)} = \frac{\theta_2(X, Z)}{\theta_0(X, Z)}.$$

С помощью этой формулы Смит, в частности, нашел скорость убывания наземной концентрации вдоль направления OX по оси облака примеси (т. е. при $Y = 0$) для $m = 1/7$ и $n = \alpha = 6/7$. Оказалось, что в этом случае асимптотически $\overline{\vartheta} \sim X^{-5/3}$, что более или менее согласуется с эмпирическими данными, относящимися к стационарным точечным источникам примеси в атмосфере при стратификации, близкой к безразличной.

В общем случае произвольной стратификации Ямамото и Шимануки (1964) попытались оценить коэффициент диффузии в «боковом» направлении OY с помощью сопоставления эмпирических данных о диффузии от точечных источников с результатами численного решения задачи (10.119)—(10.120) при значениях $K_{yy}(Z)$, содержащих неопределенный параметр. При этом, как и в предыдущей их работе, предполагалось, что ветер задается формулой (7.24), где $\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (7.60), и что $K_{zz} = u_* \varkappa Z/\varphi(\zeta)$. Что же касается до коэффициента $K_{yy}(Z)$, то в виде первого приближения было принято, что он при любой стратификации линейно зависит от высоты, т. е. задается формулой вида

$$K_{yy}(Z) = u_* \varkappa Z \cdot \alpha(\zeta_0), \qquad \zeta_0 = \frac{Z_0}{L_*} = \frac{\sigma Z_0}{L},$$

где $\alpha(\zeta_0)$ — неизвестная нам функция от ζ_0 (т. е. от стратификации). Основное удобство такого выбора K_{yy} состоит в том, что при этом от параметра α можно легко избавиться с помощью перехода к безразмерным координатам $X_1 = X/Z_0$, $Y_1 = Y/\alpha^{1/2} Z_0$, $Z_1 = Z/Z_0$, зависящим от α. После такого перехода задача о диффузии от наземного стационарного точечного источника сводится к решению универсального уравнения относительно функции $\overline{\vartheta}(X_1, Y_1, Z_1)$ от трех переменных, зависящего от единственного параметра ζ_0. Это уравнение было решено численно для ряда значений ζ_0, после чего найденное из расчета распределение примеси вдоль оси OY_1 при $X_1 = 32\,000$ и $Z_1 = 240$ было сопоставлено с соответствующими данными диффузионных экспериментов Бареда (1958) и других исследователей. Результаты такого сопоставления позволили приближенно определить неизвестные значения $\alpha(\zeta_0)$ (значения Z_0 и L_* при этом оценивались по профилям ветра и температуры, измерявшимся в ходе рассматривавшихся диффузионных экспериментов). Полученные значения $\alpha(\zeta_0)$ легли со сравнительно небольшим разбросом на плавную кривую, монотонно убывающую при возрастании ζ_0; согласно этой кривой, $\alpha \approx 13$ при $\zeta_0 = 0$ (т. е. при безразличной стратификации), $\alpha \approx 100$ при $\zeta_0 = -0.014$ и $\alpha \approx 3$ при $\zeta_0 = 0{,}01$. Далее, с целью проверки допустимости принятого предположения о $K_{yy}(Z)$ найденные значения $\alpha(\zeta_0)$ были использованы для теоретического расчета распределения концентрации вдоль оси OY при некоторых других значениях X и Z, результаты которого снова были сопоставлены с данными наблюдений. Оказалось, что общее согласие теории с опытом удовлетворительно, но разброс экспериментальных точек столь велик, что на их основании нельзя сделать надежного вывода. Для убывания наземной концентрации вдоль оси облака примеси при безразличной стратификации расчет, основанный на предположении, что $K_{yy} = 13\,\varkappa u Z$, привел к соотношению $\overline{\vartheta} \sim X^{-1{,}78}$, хорошо согласующемуся с имеющимися эмпирическими данными.

Эмпирические данные показывают также, что горизонтальная диффузия по направлению оси OY становится более быстрой при увеличении горизонтального протяжения облака, так что коэффициент K_{yy} как бы возрастает с ростом времени диффузии $\tau = t - t_0$ (или координаты X). Это обстоятельство

объясняется очень важным эффектом *ускорения относительной диффузии* облака примеси (т. е. ускорения изменения расстояния между отдельными составляющими облако частицами) при увеличении размера облака, связанным с тем, что по мере возрастания размера облака в его рассеянии начинают принимать активное участие все более и более крупномасштабные возмущения поля скорости (об этом мы еще будем говорить в гл. 8 ч. 2 книги). Однако в рамках рассматриваемой здесь полуэмпирической теории турбулентной диффузии, как уже отмечалось выше, нельзя допустить, чтобы коэффициенты диффузии зависели от времени τ. Тем не менее, Дэвис (1954а) попробовал учесть и этот эффект, формально допустив, что в уравнении (10.119) коэффициенты $\overline{u}$ и K_{zz} зависят только от Z (а именно, $\overline{u} \sim Z^m$, $K_{zz} \sim Z^{1-m}$), но $K_{yy} \sim Z^{\sigma} |Y|^{\beta}$ (т. е. K_{yy} фактически зависит от положения источника примеси, так как только им выделяется значение $Y = 0$). В частном случае $\alpha = m$, $\beta = 1 - 2m$ Дэвису удалось найти точное решение уравнения (10.119); однако ясно, что принятое им основное предположение о зависимости K_{yy} от Y резко противоречит духу полуэмпирической теории. С этой точки зрения более последовательным представляется предложение Лайхтмана (1963), согласно которому концентрацию $\overline{\vartheta}(X, Y, Z)$ в случае точечного источника следует искать в виде (10.122), где $\theta_0(X, Z)$ задается как решение уравнения (10.113), а при определении величины $\overline{Y^2(X, Z)}$ рекомендуется опираться на представления, связанные с лагранжевым описанием турбулентности (например, на формулу Тэйлора (9.31)), но вовсе не использовать полуэмпирическую теорию.

Учет возможного отклонения главных осей тензора коэффициентов диффузии от осей OX, OY и OZ

Все предыдущие выводы опирались на предположение, что полуэмпирическое уравнение атмосферной диффузии имеет вид (10.55). Помимо того, что и самое общее полуэмпирическое уравнение диффузии может быть получено лишь при использовании некоторых приближенных гипотез, применимость которых к диффузии в приземном слое иногда может вызывать сомнения, уравнение (10.55) содержит в себе еще дополнительное допущение, что оси OZ, OX и OY, направленные вертикально вверх, вдоль среднего ветра и перпендикулярно ветру, являются главными осями тензора коэффициентов диффузии K_{ij}. Мы ввели это допущение, основываясь на том, что направления указанных осей выделены самими условиями движения в приземном слое (см. выше стр. 536); однако надо иметь в виду, что такая аргументация не является строгой. Поэтому не исключено, что впоследствии, когда наше понимание всех деталей процесса турбулентной диффузии станет более глубоким, нам придется ввести поправки в полуэмпирическое уравнение (10.55), учтя в нем еще некоторые дополнительные члены. В самом деле, например, в п. 7.5 (см. стр. 401) мы уже отмечали, что при теплообмене атмосферы с однородной подстилающей поверхностью в принципе возможен и небольшой турбулентный перенос тепла по направлению среднего ветра, описываемый смешанным моментом $\overline{u'T'} = u_* T_* f_7(Z/L)$. Представляется довольно правдоподобным, что этот момент будет положительным при положительных градиентах средней температуры и отрицательным при отрицательных градиентах. Но в таком случае в рамках полуэмпирической теории турбулентности момент $\overline{u'T'}$ должен представляться в виде $\overline{u'T'} = K_{xz} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial Z}$. Наличие отличного от нуля коэффициента K_{xz}, разумеется, означает, что оси координат не совпадают с главными направлениями тензора K_{ij}. В полуэмпирической

теории турбулентной диффузии наличие ненулевого момента $\overline{u'T'}$ в условиях, когда $\overline{T}$ зависит только от Z, показывает, что в общем случае турбулентный поток примеси по направлению среднего ветра должен иметь вид

$$\overline{u'\vartheta'} = -K_{xx}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} + K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}. \qquad (10.123)$$

Отсюда вытекает, что в правой части уравнения турбулентной диффузии (10.55) в принципе может присутствовать также и слагаемое вида $-\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)$. На эту возможность, по-видимому, впервые обратил внимание Леттау (1952) (см. также Пристли (1963)). Позже Дэвис (1954б) попытался оценить возможное влияние этого слагаемого на диффузию от стационарного точечного источника, сравнив решение уравнения $\overline{u}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)$ при некоторых специальных предположениях о функциональной форме коэффициентов $\overline{u}(Z)$, $K_{xz}(Z)$ и $K_{zz}(Z)$ с решением обычного двумерного полуэмпирического уравнения (10.113); как и следовало ожидать, разница оказалась очень небольшой. Вслед за тем Мацуока (1961) произвел некоторые расчеты для модели, в которой полуэмпирическое уравнение содержит, кроме члена $\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)$, также и член, характеризуемый коэффициентом K_{zx}, а Ги и Дэвис (1963) оценили влияние члена $\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)$ на подсчитанные Сафменом значения $\langle X\rangle$ и σ_ϑ^2 (см. (10.103)) и нашли, что при некоторых предположениях о $K_{xz}(Z)$ возникающие поправки могут иметь порядок 15—20%. Следует, однако, иметь в виду, что во всех перечисленных работах предполагалось, что коэффициент K_{xz} (и K_{zx}) имеет тот же порядок, что и коэффициент K_{zz}, хотя естественно предполагать, что на самом деле он будет заметно меньшим. В целом же по поводу этих поправок к полуэмпирическому уравнению диффузии можно сказать то же самое, что мы в свое время говорили о родственном им моменте $\overline{u'T'}$: пока они остаются практически совершенно неизученными, но, по-видимому, описываемые ими эффекты обычно оказываются незначительными. Поэтому в настоящее время нет оснований учитывать эти поправки при практических расчетах, хотя теоретически нельзя исключить возможности, что такие поправки реально существуют и в каких-то условиях могут даже иметь значение.

Использование гипотезы о подобии лагранжевых статистических характеристик в теории диффузии в приземном слое

Выше мы все время исходили из полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии. Представляет интерес, однако, посмотреть, какие выводы о диффузии в приземном слое воздуха можно сделать, не пользуясь полуэмпирической гипотезой о линейной зависимости турбулентных потоков примеси от градиента средней концентрации. Оказывается, что значительную помощь здесь может оказать представляющееся вполне естественным предположение о подобии лагранжевых характеристик

турбулентности в приземном слое воздуха, введенное в п. 9.4. К следствиям из этого предположения мы теперь и перейдем.

Прежде всего напомним, что в пренебрежении действием молекулярной диффузии средняя концентрация примеси от мгновенного точечного источника единичной производительности в точке $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ в момент t_0 равна плотности вероятности лагранжевых координат (X, Y, Z) жидкой частицы, находившейся в момент t_0 в точке $\boldsymbol{x}$ (см. выше стр. 509—510). Отсюда, в частности, следует, что в случае мгновенного наземного источника производительности Q в начале координат средняя концентрация в момент $t = t_0+\tau$ при безразличной термической стратификации и достаточно большом τ будет определяться формулой вида

$$\overline{\vartheta}(X, Y, Z, t_0+\tau) = \frac{Q}{\overline{Z}^3}P_3\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}, \frac{Y}{\overline{Z}}, \frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}\right), \qquad (10.124)$$

где P_3 — некоторая универсальная функция от трех переменных, $\overline{Z} \approx bu_*\tau$, $\overline{X} \approx \frac{u_*\tau}{\varkappa}\ln\frac{cu_*\tau}{eZ_0}$, а b, c и $e = 2{,}718\ldots$ — универсальные постоянные (см. (9.65), (9.60′) и (9.61′)). В случае источника на высоте H можно пользоваться тем же соотношением, если только $\tau \gg \frac{H}{u_*}$. Впрочем, при не очень больших (но все же заметно превосходящих $\frac{H}{u_*}$) значениях τ несколько более точные результаты получаются, если допустить, что формулы (9.60′) и (9.61′) для $\overline{Z}(\tau)$ и $\overline{X}(\tau)$ начинают действовать лишь через время $\tau_1 \sim \frac{H}{u_*}$ после момента t_0; за время же от момента t_0 до $t_0+\tau_1$ центр облака примеси лишь переносится осредненным течением, т. е. остается на той же высоте H, но перемещается на расстояние $\overline{u}(H)\tau_1 = \frac{u_*\tau_1}{\varkappa}\ln\frac{H}{Z_0}$ вдоль направления OX (Бэтчелор (1959)). Такая поправка играет роль лишь в течение сравнительно небольшого промежутка времени, но при обработке реальных экспериментов, в которых часто поневоле приходится ограничиваться лишь не очень большими значениями τ, она иногда оказывается полезной (см., например, Сермак (1963)). В случае неустойчивой или устойчивой стратификации формула (10.124) заменяется более общим соотношением

$$\overline{\vartheta}(X, Y, Z, t_0+\tau) = \frac{Q}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}, \frac{Y}{\overline{Z}}, \frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}; \frac{\overline{Z}}{L}\right), \qquad (10.125)$$

где P — новая универсальная функция от четырех переменных, $\overline{Z} = \overline{Z}(\tau)$ и $\overline{X} = \overline{X}(\tau)$ определяются равенствами (9.69) и (9.70),

а L — естественный масштаб длины в стратифицированном пограничном слое, введенный в гл. 4. При не очень большом τ здесь также можно ввести поправку на высоту источника H, но на ней мы уже не будем останавливаться.

Из соотношения (10.124) вытекает, в частности, что дисперсии облака примеси, созданного мгновенным точечным источником, определяемые из соотношений

$$\sigma^2_{\vartheta_x} = Q^{-1}\int\int\int (X-\bar{X})^2\,\bar{\vartheta}(X, Y, Z)\,dX\,dY\,dZ,$$

$$\sigma^2_{\vartheta_y} = Q^{-1}\int\int\int Y^2\,\bar{\vartheta}(X, Y, Z)\,dX\,dY\,dZ,$$

$$\sigma^2_{\vartheta_z} = Q^{-1}\int\int\int (Z-\bar{Z})^2\,\bar{\vartheta}(X, Y, Z)\,dX\,dY\,dZ,$$

при безразличной стратификации должны быть асимптотически пропорциональны $\bar{Z}^2$. В силу (9.61′) это означает, что дисперсии вдоль всех осей облака примеси от мгновенного точечного источника при безразличной стратификации должны быть асимптотически пропорциональны τ^2 (а не τ, как в случае однородной турбулентности, и не τ^3, как в случае потока с постоянным градиентом скорости). При наличии же термической стратификации, строго говоря, нельзя уже ручаться, что эти дисперсии даже при очень большом τ будут строго пропорциональны $\bar{Z}^2$, так как здесь форма распределения $\bar{\vartheta}(X, Y, Z)$ может зависеть от $\bar{Z}/L$, т. е. меняться при изменении τ. Естественно думать, однако, что зависимость распределения от $\bar{Z}/L$ не будет проявляться очень сильно, так что в первом приближении и здесь дисперсии можно считать пропорциональными $\bar{Z}^2$. В случае сильной неустойчивости последний вывод имеет дополнительные основания (см. равенство (9.75′)); поэтому при этих условиях для не слишком малых значений τ должны иметь место соотношения $\sigma^2_{\vartheta_x} \sim \sigma^2_{\vartheta_y} \sim \sigma^2_{\vartheta_z} \sim \bar{Z}^2 \sim \tau^3$ (наиболее точным последнее соотношение, вероятно, будет в применении к $\sigma^2_{\vartheta_z}$). Все приведенные заключения можно, во всяком случае в принципе, попытаться сравнить с эмпирическими данными, относящимися к мгновенным точечным источникам примеси. Так как, однако, таких данных пока имеется очень немного, то более удобными для проверки на опыте являются следствия из предположения об автомодельности лагранжевых характеристик, относящихся к распределению концентрации от стационарных источников примеси, о которых будет речь ниже.

Согласно формуле (10.125), наземная концентрация примеси от стационарного точечного источника на достаточно большом

расстоянии X от этого источника по направлению среднего ветра будет определяться формулой

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) = Q\int_0^\infty P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ 0,\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)\frac{d\tau}{\bar{Z}^3}. \qquad (10.126)$$

В случае линейного источника эту формулу надо заменить соотношением

$$\bar{\vartheta}(X, 0) = Q\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ \frac{Y}{\bar{Z}},\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)\frac{dY\,d\tau}{\bar{Z}^3}. \qquad (10.127)$$

Последние две формулы, очевидно, можно также переписать в виде

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) = Q\int P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ 0,\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)\frac{d\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\right)}{\bar{Z}^3\frac{d\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\right)}{d\tau}} =$$

$$= Q\int \frac{P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ 0,\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)}{\bar{Z}^2\left[\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\frac{d\bar{Z}}{d\tau}+\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right]}d\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\right) \qquad (10.126')$$

и аналогично

$$\bar{\vartheta}(X, 0) = Q\int\int \frac{P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ \frac{Y}{\bar{Z}},\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)}{\bar{Z}\left[\frac{\bar{X}-X}{\bar{Z}}\frac{d\bar{Z}}{d\tau}+\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right]}d\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\right)d\frac{Y}{\bar{Z}}. \qquad (10.127')$$

Для приближенного вычисления интегралов в правых частях (10.126′) и (10.127′) воспользуемся, следуя Бэтчелору (1959) и Эллисону (1959), тем, что при большом X облако примеси от мгновенного точечного источника в начале координат должно проплыть мимо плоскости $X=\text{const}$ за время, много меньшее, чем время τ, требующееся для достижения облаком этой плоскости. Иначе это можно еще выразить так: поскольку, очевидно, $\bar{Z}/\bar{X}\to 0$ при $\tau\to\infty$, интервал значений X, при которых $P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ 0,\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)$ $\left(\text{или } P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}},\ \frac{Y}{\bar{Z}},\ -1;\ \frac{\bar{Z}}{L}\right)\right)$ еще остается заметно отличным от нуля, при большом $\bar{X}$ будет составлять относительно малую долю самого $\bar{X}$. Поэтому при достаточно

большом $\bar{X}$ допустимо считать, что $P\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}, \frac{Y}{\bar{Z}}, -1; \frac{\bar{Z}}{L}\right) \sim \sim \delta\left(\frac{X-\bar{X}}{\bar{Z}}\right)$ при любом фиксированном $\frac{Y}{\bar{Z}}$. Это допущение вполне аналогично использовавшемуся выше при рассмотрении полуэмпирической теории пренебрежению продольной диффузией (по направлению оси OX) по сравнению с переносом примеси средним течением. Из него следует, что равенства (10.126′) и (10.127′) могут быть без большой ошибки заменены приближенными соотношениями

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) \approx \frac{Q}{\bar{Z}^2 \frac{d\bar{X}}{d\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi, 0, -1; \frac{\bar{Z}}{L}\right) d\xi \qquad (10.126'')$$

и

$$\bar{\vartheta}(X, 0) \approx \frac{Q}{\bar{Z} \frac{d\bar{X}}{d\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi, \eta, -1; \frac{\bar{Z}}{L}\right) d\xi\, d\eta, \qquad (10.127'')$$

где $\bar{Z} = \bar{Z}(\tau)$ и $\bar{X} = \bar{X}(\tau)$ берутся уже только при таком значении τ, что $\bar{X}(\tau) = X$.

Рассмотрим сначала простейший случай диффузии при безразличной стратификации. В этом случае функция P не зависит от $\bar{Z}/L$, т. е. при всех $\bar{Z}$ является одной и той же, а $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{Z}(\tau)$ удовлетворяют соотношениям (9.60′)—(9.61′). Поэтому здесь

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) \sim \frac{Q}{u_*^3 \tau^2 \ln \frac{cu_*\tau}{Z_0}} \approx \frac{Q \ln \frac{c\bar{Z}}{bZ_0}}{u_* X^2} \qquad (10.128)$$

и

$$\bar{\vartheta}(X, 0) \sim \frac{Q}{u_*^2 \tau \ln \frac{cu_*\tau}{Z_0}} \approx \frac{Q}{u_* X}. \qquad (10.129)$$

Отсюда видно, что при нейтральной стратификации концентрация примеси от линейного стационарного источника должна убывать примерно пропорционально X^{-1}, а от точечного стационарного источника — немного медленнее, чем X^{-2}; как мы знаем, эмпирические данные достаточно хорошо согласуются с этим выводом (см. выше стр. 563). Более аккуратно показатель p в соотношении $\bar{\vartheta} \sim X^{-p}$ можно определить с помощью формулы $p = -\frac{d \log \bar{\vartheta}}{d \log X}$; такое его определение было произведено Сер-

маком (1963), принявшим во внимание также и упоминавшуюся выше поправку к $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{Z}(\tau)$, связанную с конечной высотой источника H. При этом теоретические значения $p = p(X)$, вычисленные в предположении, что $b = c = 0{,}1$ [1]), оказались совпадающими с эмпирическими данными ряда авторов (относящимися и к лабораторным экспериментам, и к наблюдениям в атмосфере при нейтральной стратификации) даже лучше, чем этого можно было ожидать.

В случае стратификации, отличающейся от безразличной, положение значительно осложняется. Прежде всего здесь уже интегралы в правых частях равенств (10.126″) и (10.127″), вообще говоря, могут зависеть от $\bar{Z}/L$ (т. е. от X). Естественно ожидать, однако, что эта зависимость будет гораздо слабее зависимости от X множителей перед интегралами, так что и в этом случае без большой ошибки можно использовать соотношения

$$\bar{\vartheta}(X, 0, 0) \sim \frac{Q}{\bar{Z}^2 \frac{d\bar{X}}{d\tau}\Big|_{\bar{X}(\tau)=X}}, \qquad \bar{\vartheta}(X, 0) \sim \frac{Q}{\bar{Z} \frac{d\bar{X}}{d\tau}\Big|_{\bar{X}(\tau)=X}}.$$

Более существенным является то, что функции $\bar{X}(\tau)$ и $Z(\tau)$ здесь определяются соотношениями (9.69) и (9.70), содержащими универсальные функции $f(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$, только асимптотическое поведение которых известно (да и то лишь с точностью до неопределенных числовых коэффициентов). Так, при сильной неустойчивости $\bar{Z}(\tau) \sim \tau^{3/2}$, $\bar{X}(\tau) \sim \tau$ и, следовательно, $\vartheta(X, 0, 0) \sim X^{-3}$, $\bar{\vartheta}(X, 0,) \sim X^{-3/2}$. Исходя из данных, приведенных в гл. 4, можно, однако, надеяться, что именно асимптотическое поведение указанных функций будет играть основную роль при расчете концентраций, и поэтому в первом приближении мы можем подставить вместо неизвестных функций почти любые функции, изменяющиеся так, как надо, при малых и при больших значениях аргумента. Такая надежда подкрепляется, в частности, результатами вычислений Гиффорда (1962). Этот автор в соответствии с (9.71) предположил, что $\varphi_1(\zeta) = f(\zeta)$ (так что $\frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{u}(\bar{Z})$,

[1]) Заметим в этой связи, что в силу полуэмпирической формулы (10.93′) при нейтральной стратификации, когда $K_{zz} \approx \varkappa u_* Z$,

$$\langle Z \rangle = \int_0^{\infty} Z\theta_{00}(Z, \tau)\, dZ = \varkappa u_* \tau.$$

Исходя отсюда, Эллисон (1959) даже сделал вывод, что, возможно, $b \approx \varkappa \approx 0{,}4$. На самом деле, однако, полуэмпирическая теория не может быть применена для оценки скорости перемещения частиц примеси (см. ниже п. 10.7); поэтому такое заключение необоснованно.

а затем выбрал в качестве $f(\zeta)$ функцию вида

$$f(\zeta)=\begin{cases}\ln\zeta+6\zeta & \text{при } \zeta>0,\\ \ln|\zeta| & \text{при } 0>\zeta>-0{,}03,\\ \zeta^{-\frac{1}{3}}+(0{,}03)^{-\frac{1}{3}}+\ln 0{,}03 & \text{при } \zeta<-0{,}03\end{cases} \quad (10.130)$$

и предположил (следуя Казанскому и Монину (1957)), что

$$\varphi(\zeta)=\left[1-\frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}.$$

По найденной исходя из этих предположений зависимости безразмерной концентрации $\frac{u_* L^2}{Q\varkappa}\bar{\vartheta}$ в случае точечного источника примеси от безразмерного расстояния $\varkappa b\frac{X}{L}$ Гиффорд подсчитал показатель p в соотношении $\bar{\vartheta}\sim X^{-p}$ при различной термической стратификации и разных расстояниях X. Полученные им значения p оказались сравнительно неплохо согласующимися с эмпирическими данными, собранными в ходе выполнения программы «Прэри Грасс» в О'Нейле (Небраска, США) и опубликованными Баредом (1958) и др. Позже Малхотра и Сермак (1963) сравнили результаты расчетов Гиффорда (опять при $b=0{,}1$) с данными некоторых диффузионных экспериментов, производившихся в специальной аэродинамической трубе с подогреваемой нижней стенкой, позволяющей искусственно создавать неустойчивую температурную стратификацию; полученные результаты также оказались удовлетворительными. Дополнительную проверку теории Гиффорда произвел Сермак (1963), который, правда, ограничился лишь случаем очень слабых отклонений от безразличного равновесия и в этой связи заменил функцию $f(\zeta)$ равенства (10.130) более простой функцией Суинбенка (7.73), имеющей неверную асимптотику при больших отрицательных значениях ζ. Но поскольку все использованные Сермаком экспериментальные данные (полученные частично в лаборатории, а частично при полевых наблюдениях) относились лишь к очень небольшим значениям $|\zeta|$, неудивительно, что совпадение теории с экспериментом и здесь оказалось довольно хорошим.

10.6. Диффузия с конечной скоростью

Параболический характер полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии (10.55) приводит к тому, что примесь, внесенная в жидкость в момент времени t_0, немедленно распространяется по всему пространству и в момент $t_0+\tau$, где τ сколь

угодно мало, уже может быть обнаружена, хотя бы и в очень малом количестве, на сколь угодно большом расстоянии от источника примеси (см., например, формулу (10.89)). Это обстоятельство явно противоречит фактической ограниченности скоростей движения частиц примеси. Оно непосредственно связано с тем, что в полуэмпирической теории мгновенная скорость «жидких частиц», как мы видели на стр. 534, оказывается бесконечной. На практике, однако, появление в рассматриваемой теории бесконечной скорости чаще всего не играет большой роли, так как окружающий источник примеси объем, внутри которого концентрация не слишком мала, всегда ограничен, и распределение концентрации внутри этого объема при не слишком малом времени диффузии, как правило, удовлетворительно описывается параболическим уравнением диффузии. Тем не менее, вблизи от реальных границ облака примеси использование параболического уравнения диффузии может привести к существенным ошибкам. Например, дым, вышедший из трубы высоты H, на самом деле достигает поверхности земли не ближе чем на расстоянии от трубы, равном $\frac{u}{v}H$, где u — минимальная скорость ветра, а v — максимальная скорость вертикальных движений частиц дыма; в то же время, согласно полуэмпирическому параболическому уравнению диффузии, дым может быть обнаружен у поверхности земли сколь угодно близко к трубе. Поэтому в некоторых случаях желательно иметь более общую полуэмпирическую теорию диффузии, в которой учитывалась бы ограниченность скорости движения жидких частиц. Подобное обобщение обычной теории диффузии (не обязательно турбулентной) в разное время предлагалось рядом авторов; в настоящем пункте мы его изложим, следуя в основном работам Монина (1955, 1956б).

Будем считать, что случайная функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$, описывающая движение «жидкой частицы», почти всюду дифференцируема по t, и ее производная — скорость «жидкой частицы» $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ — ограничена. Функцию $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ при этом уже нельзя считать марковской функцией от t. Действительно, выше мы уже видели, что в случае марковской функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ скорость $\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$ всегда будет бесконечной, если только $K_{ij}\neq 0$. Если же допустить, что $K_{ij}=0$, то скорость уже не будет бесконечной, но, как легко видеть, функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ при этом вообще не будет случайной.

Таким образом, условие ограниченности скорости «жидкой частицы» несовместимо с предположением, что ее координата $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ является марковской случайной функцией от t.

Аналогичная ситуация возникает в теории молекулярной диффузии при попытке учета инерции диффундирующей частицы; благодаря инерции ее траектория $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ оказывается всюду имеющей конечную производную $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)=\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$, откуда вытекает, что функцию $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ уже нельзя считать марковской. Известно, что в теории молекулярной диффузии (т. е. броуновского движения) учет инерции частиц осуществляется на основе предположения, что марковской является не функция $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$, а шестимерная функция $\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)\}$ (см., например, Уленбек и Орнштейн (1930) или Чандрасекар (1943)). Аналогично этому будем поступать далее и мы.

Ограничимся для простоты рассмотрением одномерной задачи о диффузии по направлению оси OZ. В соответствии со сказанным выше попытаемся построить обобщение полуэмпирической теории турбулентной диффузии на основе нового полуэмпирического предположения, более широкого, чем предположение о марковском характере функции $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$. А именно, допустим, что марковской является двумерная случайная функция $\{Z(z, t), W(z, t)\}$, где $Z(z, t)$ — координата «жидкой частицы», а $W(Z, t)=\frac{\partial Z(z, t)}{\partial t}$ — ее скорость. Поставив при этом своей целью только учет ограниченности скорости W, мы можем ограничиться лишь весьма грубым описанием возможных значений W. Пусть $|W|<C$; разобьем всю область возможных значений скорости — $C<W<C$ на конечное число N интервалов Δ_n и вместо конкретных значений W будем указывать лишь номера n интервалов Δ_n, в которые эти значения попадают. Иначе говоря, вместо случайной функции $W(z, t)$ мы будем рассматривать случайную функцию $n(t)$, принимающую дискретные значения 1, 2, ..., N, и примем предположение, что марковской является случайная функция $\{Z(z, t), n(t)\}$.

Рассмотрим теперь условные вероятности

$$P\{Z(z, t)<Z;\ n(t)=i\,|\,Z(z, t_0)=z\}=\int\limits_{-\infty}^{Z} p_i(Z\,|\,z, t)\,dZ. \quad (10.131)$$

Плотность вероятности для координаты «жидкой частицы» $Z(z, t)$, играющая основную роль в теории турбулентной диффузии, выражается через функции $p_i(Z|z, t)$ по формуле

$$p(Z\,|\,z, t)=\sum_i p_i(Z\,|\,z, t). \quad (10.132)$$

Общие дифференциальные уравнения марковских случайных процессов, указанные Колмогоровым (1931), в данном случае

сводятся к следующей системе уравнений относительно функций $p_i(Z|z, t)$, заменяющей обычное полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=\sum_j a_{ji}p_j-\frac{\partial \overline{W}_i p_i}{\partial Z}. \quad (10.133)$$

Здесь приняты обозначения

$$\overline{W}_i=\overline{W}_i(Z, t)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{Y_i(\tau\,|\,Z, t)}\right]_{\tau=0},$$

$$a_{ji}=a_{ji}(Z, t)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}P\{n(t+\tau)=i\,|\,Z(z, t)=Z,\ n(t)=j\}\right]_{\tau=0},$$

где $Y_i(\tau|Z, t)=Z(z, t+\tau)-Z(z, t)$ — это смещение частицы при условии, что значения $Z(z, t)=Z$ и $n(t+\tau)=n(t)=i$ фиксированы. Очевидно, $\overline{W}_i$ — это математическое ожидание скорости частицы W при условии, что W принадлежит интервалу Δ_i, так что значение $\overline{W}_i(Z, t)$ при всех Z и t лежит где-то внутри интервала Δ_i. Смысл величин a_{ji} можно пояснить следующим образом. Поскольку функция $n(t)$ принимает лишь целочисленные значения, она может изменяться лишь скачками, переходя от значения $n(t-0)=j$ в момент, непосредственно предшествующий t, к некоторому другому значению $n(t+0)=i$ в момент, сразу следующий за t. Величины a_{ji} при $i\neq j$ — это средние частоты переходов от $n(t-0)=j$ к $n(t+0)=i$ (ибо $a_{ji}\Delta t$ — вероятность скачка от $n=j$ к $n=i$ в течение промежутка времени $(t, t+\Delta t)$ при условии, что $n(t)=j$). Так как $\sum\limits_i P\{n(t+\tau)=i\,|\,Z(z, t)=Z, n(t)=j\}=1$, то ясно, что $\sum\limits_i a_{ji}=0$; следовательно, $a_{jj}=-\sum\limits_{i\neq j}a_{ji}$ равно взятой со знаком минус средней частоте переходов от $n=i$ к какому-то другому значению n.

Уравнения (10.133) образуют полуэмпирическую систему уравнений диффузии, соответствующую сформулированным выше предположениям. Эти уравнения надо решать при начальных условиях

$$p_i(Z\,|\,z, t)\to\varepsilon_i(z)\,\delta(Z-z) \quad \text{при} \quad t\to t_0,$$
$$\varepsilon_i(z)=P\{n(t_0)=i\,|\,Z(z, t_0)=z\}. \quad (10.134)$$

Величины ε_i задают распределение вероятностей для $n(t_0)$, т. е. фактически для значений начальной скорости «жидкой частицы».

Рассмотрим более детально простейшую схему, в которой вся область возможных значений скорости «жидкой частицы»

$-C<W<C$ разбивается лишь на два интервала Δ_1 и Δ_2. Выберем в качестве Δ_1 и Δ_2 интервалы $0<W<C$ и $-C<W<0$; случайная функция $n(t)$ в этом случае указывает направление движения «жидкой частицы». Предположим для определенности, что оба направления равноправны, так что, в частности, $\overline{W}=0$; в этом случае можно положить $\overline{W}_1=-\overline{W}_2=W$ (где W — средняя абсолютная скорость частицы) и $a_{12}=a_{21}=-a_{11}=-a_{22}=a$ (где a — частота изменений направления движения). Тогда уравнения (10.133) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial W p_1}{\partial Z}&=a(p_2-p_1),\\ \frac{\partial p_2}{\partial t}-\frac{\partial W p_2}{\partial Z}&=a(p_1-p_2).\end{aligned}\tag{10.135}$$

Уравнения такого типа (или вытекающее из них *телеграфное уравнение*, которое мы выведем ниже) впервые были получены (для описания одномерной диффузии фотонов) Фоком (1926), затем (для описания молекулярной диффузии с учетом конечности скоростей диффундирующих частиц) — Давыдовым (1935), Каттанео (1948—1949), Гольдштейном (1951), Р. Дэвисом (1954) и другими авторами. Для описания турбулентной диффузии такие уравнения предлагались Ляпиным (1948, 1950) и Мониным (1955, 1956б).

Предположим, что диффузия происходит в поле стационарной турбулентности. В этом случае величины a и W не зависят от t и, следовательно, могут зависеть лишь от Z. Введя новые неизвестные $p=p_1+p_2$ (плотность вероятности для координаты диффундирующей частицы) и $q=W(p_1-p_2)$ (плотность потока диффундирующих частиц), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial Z}&=0;\\ \frac{\partial q}{\partial t}+2aq&=-W\frac{\partial W p}{\partial Z}.\end{aligned}\tag{10.136}$$

Первое из этих уравнений (справедливое и в случае нестационарной турбулентности) выражает закон сохранения количества диффундирующей примеси. Согласно этому уравнению, можно положить

$$p=\frac{\partial\Psi}{\partial Z},\quad q=-\frac{\partial\Psi}{\partial t},\tag{10.137}$$

причем $\Psi=\Psi(Z|z,t)=\int\limits_{-\infty}^{Z}p(Z'|z,t)dZ'$ будет иметь смысл интегральной функции распределения вероятностей для координаты $Z(z,t)$ диффундирующей частицы. Подставив формулы (10.137) во второе уравнение (10.136), мы получим для функции Ψ так называемое *телеграфное уравнение*[1])

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+2a\frac{\partial\Psi}{\partial t}=W\frac{\partial}{\partial Z}W\frac{\partial\Psi}{\partial Z}.\tag{10.138}$$

Это уравнение — гиперболического типа; ему соответствует распространение диффундирующей примеси в пространстве с конечной скоростью, не превосходящей W. Оно также является лишь приближенным, так как опирается на нестрогую гипотезу о марковском характере функции $\{Z(t), n(t)\}$, но все же оно точнее обычного (одномерного) полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии. В самом деле, нетрудно показать, что наше новое уравнение диффузии представляет собой обобщение параболического уравнения диффузии: последнее получается из уравнения (10.138) как некоторый предельный случай. Это легче всего продемонстрировать на примере диффузии в поле стационарной однородной турбулентности, в котором коэффициенты a и W не зависят не только от t, но и от Z, т. е. являются постоянными. В этом случае p (а также p_1 и p_2) удовлетворяет такому же уравнению, что и Ψ, а именно — телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+2a\frac{\partial p}{\partial t}=W^2\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}.\tag{10.139}$$

Если параметры a и W неограниченно возрастают, причем таким образом, что отношение $W^2/2a$ стремится к конечному пределу (который мы обозначим K), то телеграфное уравнение (10.139) в пределе превращается в параболическое уравнение диффузии $\frac{\partial p}{\partial t}=K\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}$ (отвечающее рассматриваемому здесь случаю, когда $\overline{w(Z)}=0$).

---

[1]) Уравнение вида (10.138) называется телеграфным, так как оно описывает также закон изменения во времени тока в проводнике (например, в телеграфном кабеле) с сопротивлением R, емкостью C и самоиндукцией L, если положить $a=\frac{R}{2L}$ и $W=(CL)^{-1/2}$. Используя полученную аналогию, можно заключить, что электроны как бы совершают в проводнике случайное блуждание со средней скоростью $(CL)^{-1/2}$, меняя направление движения в среднем с частотой $R/2L$; величина $K=\frac{W^2}{2a}=\frac{1}{CR}$ является при этом аналогом коэффициента диффузии.

Решение уравнения (10.139) для неограниченного пространства $-\infty<Z<\infty$ при начальных условиях (10.134) имеет вид

$$p(Z|z,t)=e^{-a\tau}\left\{\varepsilon_1\delta(\zeta-W\tau)+\varepsilon_2\delta(\zeta+W\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{a}{2W}\left[I_0\left(a\tau\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}\right)+\frac{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\zeta}{W\tau}}{\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}}I_1\left(a\tau\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}\right)\right]\right\}, \tag{10.140}$$

где $\tau=t-t_0$, $\zeta=Z-z$, I_0 и I_1 — символы функций Бесселя мнимого аргумента, и при $|\zeta|>W\tau$ функция p принимается равной нулю. Формула (10.140) показывает, что в рассматриваемой здесь теории распределение примеси, диффундирующей от мгновенного точечного источника, имеет четкую границу — «фронт волны» $\zeta=\pm W\tau$, на котором сосредоточена конечная доля всего количества диффундирующей примеси (причем эта доля экспоненциально убывает со временем). За этим «фронтом» тянется непрерывный «след» (образованный частицами примеси, испытавшими многократное «рассеяние», т. е. изменение направления движения). В основной части этого «следа», а именно — при $|\zeta|\ll W\tau$ правая часть (10.140) при $\tau\gg\frac{1}{a}$ и любых ε_1 и ε_2, как нетрудно видеть, почти не отличается от функции $\sqrt{\frac{a}{2\pi W^2\tau}}\,e^{-\frac{a\zeta^2}{2W^2\tau}}$, являющейся решением параболического уравнения $\frac{\partial p}{\partial\tau}=K\frac{\partial^2 p}{\partial\zeta^2}$; $K=\frac{W^2}{2a}$. Таким образом, теория диффузии с конечной скоростью приводит к заметному расхождению с выводами из параболического уравнения диффузии только или при очень малом времени диффузии $\tau\lesssim\frac{1}{a}$, или же вблизи от границы облака примеси, где концентрация по любой теории очень мала. В качестве иллюстрации на рис. 84 приведены графики непрерывной части распределения $p(Z|z,t)$ при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$ и $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$ для двух значений $a\tau$ вместе с графиками распределения примеси, отвечающими параболическому уравнению диффузии.

Математическое ожидание и дисперсия распределения (10.140) равны

$$\bar{Z}=z+\frac{W}{2a}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-e^{-2a\tau});$$
$$\overline{(Z-\bar{Z})^2}=\frac{W^2\tau}{a}\left[1-\frac{1-e^{-2a\tau}}{2a\tau}+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\frac{(1-e^{-2a\tau})^2}{4a\tau}\right]; \tag{10.141}$$

при $a\tau\gg1$ они почти не отличаются от значений $\bar{Z}=z+\frac{W}{2a}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ и $\overline{(Z-\bar{Z})^2}=2K\tau=\frac{W^2\tau}{a}$. Согласно принятой здесь модели процесса диффузии, вероятность «рассеяния» на малом интервале времени τ равна $a\tau+o(\tau)$, а «рассеяния» на

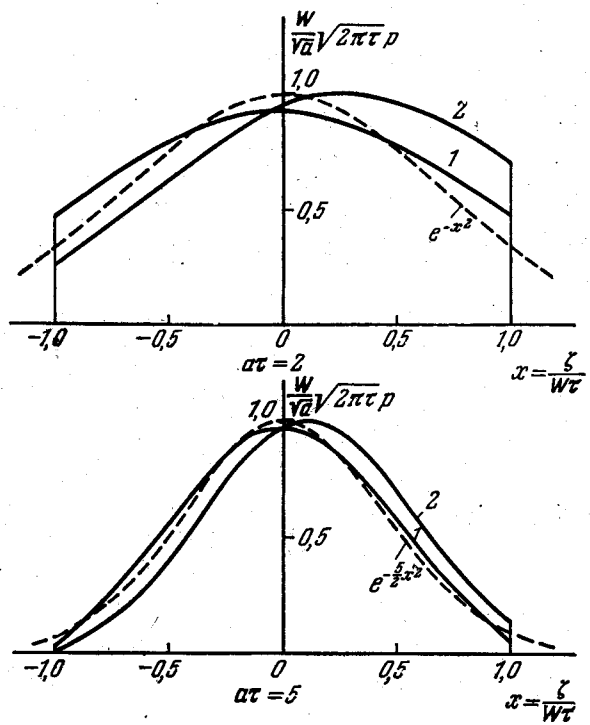


Рис. 84. Сопоставление непрерывной части распределения $p(Z|z,t)$ при $a\tau=2$ и $a\tau=5$ по теории диффузии с конечной скоростью с распределением Гаусса, вытекающим из параболического уравнения диффузии.

Кривая *1* отвечает правой части формулы (10.140) (без слагаемых, содержащих δ-функции) при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$; кривая *2* — то же, при $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$; пунктирная кривая — распределение Гаусса.

непересекающихся интервалах времени суть независимые случайные события. Поэтому число $\nu(\tau)$ «рассеяний» на интервале времени τ — это случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $a\tau$:

$$P\{\nu(\tau)=m\}=\frac{(a\tau)^m}{m!}e^{-a\tau}.$$

Если обозначить через $p_m(\zeta, \tau)$ условную плотность вероятности для $Z(z, t)=Z(z, t_0+\tau)$ при условиях $n(t_0)=1$, $\nu(\tau)=m$, то, очевидно,

$$p(Z|z, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^m}{m!}e^{-a\tau}[\varepsilon_1 p_m(\zeta, \tau)+\varepsilon_2 p_m(-\zeta, \tau)]. \quad (10.142)$$

Эта формула дает разложение распределения (10.140) по «кратности» рассеяний; с помощью (10.140) можно убедиться, что $p_0(\zeta, \tau)=\delta(\zeta-W\tau)$, а при $m\geqslant 1$ функции $p_m(\zeta, \tau)$ отличны от нуля лишь при $|\zeta|\leqslant W\tau$ и при этом условии имеют вид

$$p_{2m+1}(\zeta, \tau)=\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{m!\sqrt{\pi}}\frac{1}{W\tau}\left(1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}\right)^m, \quad (10.143)$$

$$p_{2m+2}(\zeta, \tau)=\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{m!\sqrt{\pi}}\frac{1}{W\tau}\left(1+\frac{\zeta}{W\tau}\right)\left(1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}\right)^m.$$

При $a\to\infty$, $W\to\infty$, $\frac{W^2}{2a}\to K$ распределение (10.140) асимптотически приближается к нормальному распределению с математическим ожиданием z и дисперсией $\frac{W^2\tau}{a}=2K\tau$, являющемуся решением параболического уравнения диффузии $\frac{\partial p}{\partial\tau}=K\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}$. Тот же предел, как мы видели, достигается, если a и W (а также $\frac{W^2}{2a}=K$) фиксированы и ζ фиксировано, но τ неограниченно возрастает. Таким образом, при достаточно больших τ в точках ζ, далеких от «фронта волны» $\zeta=\pm W\tau$, изложенная схема описания турбулентной диффузии дает практически такие же результаты, что и обычная полуэмпирическая теория, основанная на использовании параболического уравнения. Это обстоятельство еще раз показывает, что изложенная схема действительно является обобщением полуэмпирической теории в том смысле, что содержит в себе последнюю в качестве предельного случая.

В качестве примера применения теории диффузии с конечной скоростью к случаю неоднородной турбулентности посмотрим, как будет выглядеть эта теория в применении к вертикальной диффузии в приземном слое воздуха. В этом случае распределение концентрации $\overline{\vartheta}(Z, t)$ следует определять по формуле $\overline{\vartheta}=\frac{\partial\Psi}{\partial Z}$, где $\Psi=\Psi(Z, t)$ — решение соответствующего телеграфного уравнения (10.138) при надлежащих краевых условиях (мы ниже будем использовать лишь условие «отражения» примеси при $Z=0$) и начальном условии, отвечающем наличию в момент $t=t_0$ мгновенного точечного источника примеси единичной интенсивности в точке $(0, 0, H)$. В силу общих принципов подобия, развитых в гл. 4, следует ожидать, что коэффициенты W (размерности скорости) и a (размерности частоты) здесь могут быть представлены в виде

$$W=\lambda u_*\varphi_1\left(\frac{Z}{L}\right), \quad a=\frac{u_*}{Z}\varphi_2\left(\frac{Z}{L}\right), \quad (10.144)$$

где φ_1 и φ_2 — безразмерные универсальные функции, а λ — введенная для удобства числовая постоянная, позволяющая наложить на функцию $\varphi_1(\zeta)$ дополнительное ограничение $\varphi_1(0)=1$ (при этом λ будет иметь смысл предельного значения W/u_* при $\frac{Z}{L}\to 0$, т. е. отношения W/u_* при безразличной стратификации). Поскольку рассматриваемая теория диффузии все равно не является точной, имеет смысл привлечь дополнительные приближенные соображения полуэмпирического характера и для определения функций $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$. Это можно сделать, например, следующим образом. Примем за основу полуэмпирическое соотношение $K=u_*l(1-\sigma\mathrm{Rf})^{1/4}$ (см. § 6); если, кроме того, еще допустить, что $K\sim Wl$, то отсюда вытекает, что

$$W\sim u_*(1-\sigma\mathrm{Rf})^{\frac{1}{4}}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_1(\zeta)=\left[1-\frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{4}}, \quad (10.145)$$

где $f(\zeta)$ — универсальная функция, определяющая профиль средней скорости ветра в приземном слое воздуха. Воспользуемся теперь тем, что в стационарном случае уравнения (10.136) имеют вид

$$q=\mathrm{const}, \quad 2aq=-W\frac{\partial W\overline{\vartheta}}{\partial Z}, \quad (10.146)$$

где q — вертикальный поток диффундирующей примеси. При безразличной стратификации, которой мы уделим больше всего внимания в дальнейшем, $W=\lambda u_*=\mathrm{const}$; поэтому правую часть второго уравнения (10.146) здесь можно записать в виде $-W^2\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$. В общем случае, строго говоря, это будет уже не так, но можно надеяться, что и здесь появляющаяся поправка к слагаемому $-W^2\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$ будет относительно невелика и не будет играть большой роли. Таким образом, в первом приближении можно положить

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}=-\frac{2aq}{W^2}=-\frac{2q}{\lambda^2u_*Z}\frac{\varphi_2(\zeta)}{[\varphi_1(\zeta)]^2}.$$

С другой стороны, если пренебречь возможным различием коэффициента турбулентной диффузии и коэффициента турбулентной вязкости, то, согласно теории подобия, градиент стационарного распределения концентрации пассивной примеси будет равен

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}=-\frac{q}{\varkappa u_*Z}\zeta f'(\zeta).$$

Сравнивая два приведенных выражения для $\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$ и используя (10.145), получим

$$(\zeta)=\frac{\lambda^2}{2\varkappa}\zeta f'(\zeta)\left[1-\frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.147)$$

Формулы (10.144), (10.145) и (10.147) при известной функции $f(\zeta)$ и известной постоянной σ (которую допустимо считать принимающей разные значения при устойчивой и при неустойчивой стратификации) полностью определяют вид коэффициентов телеграфного уравнения диффузии (10.138) для приземного слоя воздуха. При этом предельный переход $a \to \infty$, $W \to \infty$, $\frac{W^2}{2a} \to K = \text{const}$, соответствующий замене телеграфного уравнения обычным параболическим уравнением диффузии, очевидно, будет эквивалентен переходу к пределу при $\lambda \to \infty$.

Пользуясь полученными формулами и переходя к безразмерным переменным $\zeta = \frac{Z}{L}$ и $\tau = \frac{\lambda u_* (t - t_0)}{L}$, мы можем привести уравнение (10.138) к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{2n}{g(\xi)} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}, \tag{10.148}$$

где $n = \frac{\lambda}{2\varkappa}$, а переменная ξ и функция $g(\xi)$ определяются формулами

$$\xi = \int_0^\zeta \left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{-\frac{1}{4}} d\zeta, \quad g = \frac{1}{f'(\zeta)} \left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{10.149}$$

Как и функция $f(\zeta)$, переменная ξ и функция $g(\xi)$ в случаях безразличной, устойчивой и неустойчивой стратификации определяются по-разному. Так, в случае безразличной стратификации во всех предыдущих формулах следует перейти к пределу $L \to \infty$ или $\zeta = \frac{Z}{L} \to 0$. Но $f'(\zeta) \approx \frac{1}{\zeta}$, $\xi \approx \zeta$ и $g \approx \zeta$ при малых $|\zeta|$; поэтому уравнение (10.148) здесь принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{2n}{\zeta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2}. \tag{10.150}$$

Если теперь мы вернемся от безразмерных переменных (ζ, τ) к размерным переменным (Z, t), то масштаб L сократится. Поэтому в случае безразличной стратификации мы можем пользоваться уравнением (10.150), понимая под L любой конечный масштаб. В случае устойчивой стратификации, пользуясь для $f(\zeta)$, например, интерполяционной формулой $f(\zeta) \approx \ln \zeta + C_2 \zeta$, где $C_2 = 1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} = \sigma$, при больших ζ получаем: $f'(\zeta) \sim \sigma + \zeta^{-1}$, $\xi \sim \zeta^{5/4}$ и $g \sim \xi^{2/5}$. В случае неустойчивой стратификации при больших ζ имеем $f'(\zeta) \sim \zeta^{-\frac{4}{3}}$, так что $\xi \sim \zeta$ и $g \sim \xi^{\frac{4}{3}}$. Следовательно, функция $g(\xi)$ в уравнении (10.148) при устойчивой стратификации возрастает с увеличением ξ медленнее, а при неустойчивой стратификации — быстрее, чем ξ; в этом и заключается основное качественное отличие указанных случаев от случая безразличной стратификации.

Далее мы ограничимся рассмотрением уравнения (10.150), описывающего диффузию с конечной скоростью в приземном слое воздуха при безразличной температурной стратификации. При этом в качестве масштаба L, используемого для измерения высот Z, удобно выбрать высоту источника H, так что безразмерные переменные (ζ, τ) определяются формулами $\zeta = \frac{Z}{H}$, $\tau = \frac{\lambda u_* (t - t_0)}{H}$. Начальные условия для интересующего нас решения

$\Psi(\zeta, \tau)$ мы сформулируем сначала в терминах условных плотностей вероятности p_1 и p_2, удовлетворяющих уравнениям (10.135):

$$p_1(Z \mid H, t) \to \varepsilon_1 \delta(Z - H), \quad p_2(Z \mid H, t) \to \varepsilon_2 \delta(Z - H) \quad \text{при} \quad t \to t_0,$$

где ε_1 и ε_2 — вероятности положительного и отрицательного направления начального движения диффундирующей частицы, определяемые из физических соображений (например, для частиц дыма, выходящих из дымовой трубы, естественно принять, что $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, а для частиц газа, распространяющихся от точки разрыва снаряда — что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$). Но так как $\Psi = \int_0^Z (p_1 + p_2)\, dZ$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -W(p_1 - p_2)$ в силу формул (10.137), то для функции Ψ начальные условия записываются в виде

$$\Psi(\zeta, 0) = E(\zeta - 1), \quad \left.\frac{\partial \Psi(\zeta, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \delta(\zeta - 1), \tag{10.151}$$

где $E(\zeta)$ — сосредоточенное в точке $\zeta = 0$ распределение вероятностей, т. е. функция, равная нулю при $\zeta < 0$ и единице при $\zeta \geqslant 0$.

Интересующее нас решение уравнения (10.150), удовлетворяющее условию «отражения» примеси на поверхности Земли $Z = 0$, очевидно, будет совпадать с решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{2n}{|\zeta|} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} \tag{10.152}$$

во всем пространстве $-\infty < \zeta < \infty$, соответствующим наличию, кроме источника в точке H, также и симметрично действующего источника в точке $-H$. Поэтому мы можем положить $\Psi(\zeta, \tau) = \Psi_1(\zeta, \tau) + \Psi_1(-\zeta, \tau)$, где $\Psi_1(\zeta, \tau)$ — решение уравнения (10.152), удовлетворяющее условиям (10.151). В частном случае наземного источника (при $H = 0$) в условиях (10.151), очевидно, надо считать, что $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, а решение $\Psi_1(\zeta, \tau)$ здесь обращается в функцию $\Psi_0(\zeta, \tau)$, которая может зависеть только от отношения своих аргументов $\xi = \frac{\zeta}{\tau} = \frac{Z}{\lambda u_* (t - t_0)}$, т. е. имеет вид $\Psi_0(\zeta, \tau) = F(\xi)$. При этом уравнение (10.152) обращается в обыкновенное уравнение второго порядка относительно $F(\xi)$, решение которого, отвечающее условиям нашей задачи, как оказывается, имеет вид

$$\Psi_0(\zeta, \tau) = F(\xi) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)^n & \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad \xi > 1 \text{ или } \xi < 0 \end{cases} \tag{10.153}$$

(Монин (1956б)). Следовательно, концентрация примеси $\overline{\vartheta} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial Z}$ здесь задается формулой

$$\overline{\vartheta}(Z, t \mid 0) = \frac{Q}{\varkappa u_* \tau} \frac{(1 - Z/\lambda u_* \tau)^{n-1}}{(1 + Z/\lambda u_* \tau)^{n+1}}, \quad 0 \leqslant Z \leqslant \lambda u_* \tau. \tag{10.154}$$

Отметим, что $F(1 - 0) = 1$ согласно формуле (10.153), т. е. функция $F(\xi)$ здесь оказывается непрерывной в точке $\xi = 1$; иными словами, доля примеси, находящаяся на «фронте» ее распространения $Z = \lambda u_* \tau$, во все моменты времени равна нулю (это объясняется тем, что в точке $Z = 0$ частота «рассея-

ний» $a=\frac{\lambda^2}{2\varkappa}\frac{u_*}{Z}$ бесконечно велика, так что частица, вышедшая из источника в точке $Z=0$, не может не испытать ни одного рассеяния). Характер поведения концентрации примеси около «фронта» существенно зависит от значения числовой постоянной $n=\frac{\lambda}{2\varkappa}$. При $n<1$ (т. е. $\lambda<2\varkappa\approx 0{,}8$) концентрация примеси неограниченно растет при приближении к «фронту», так что последний имеет характер сильного разрыва. При $n>1$ (т. е. $\lambda>2\varkappa\approx 0{,}8$), наоборот, концентрация примеси при приближении к фронту стремится к нулю (а при $n=1$ — к некоторому конечному значению). Экспериментальным данным Казанского и Монина (1957) лучше всего соответствует значение n, близкое к единице. В экспериментах этих авторов измерялись профили концентрации примеси в дымовой струе от стационарного линейного источника, перпендикулярного направлению ветра, на расстоянии от источника в 100 *м*. Двадцать измеренных профилей были сведены на один график в форме $\overline{\vartheta}/\overline{\vartheta}_{\max}=f(Z/H)$, где $\overline{\vartheta}_{\max}$ — наибольшее значение концентрации дыма для данного профиля (которое из-за того, что дым был теплее воздуха и поэтому стремился подняться вверх, обычно достигалось не при $Z=0$, а на небольшой положительной высоте), а H — высота дымовой струи в точке измерения. Эмпирические данные о $\overline{\vartheta}/\overline{\vartheta}_{\max}$ следует сравнивать с теоретической кривой $f(\xi)=(1-\xi)^{n-1}(1+\xi)^{-n-1}$. Такое сравнение показано на рис. 85, где пунктирными кривыми проведены теоретические функции с $n=1$ и $n=\frac{5}{4}$. График показывает, что концентрация дыма при приближении к «фронту» остается, по крайней мере, ограниченной (т. е. $n\geqslant 1$) и что теоретическая кривая с $n=1$ все же лучше аппроксимирует экспериментальные данные, чем с $n=\frac{5}{4}$. В одном из опытов Казанского и Монина с помощью кинематографирования одиночного клуба дыма был также изучен характер роста его вертикального диаметра d со временем. При этом оказалось, что экспериментальная кривая $d(t)$ хорошо аппроксимируется прямой $d=2W(t-t_0)$, причем значение $\lambda=\frac{W}{u_*}$ оказалось равным 0,75, чему опять соответствует значение $n=\frac{\lambda}{2\varkappa}$, близкое к единице.

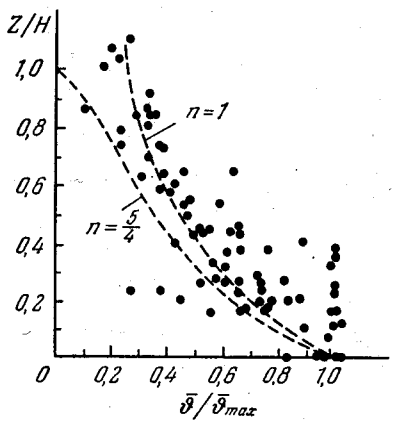


Рис. 85. Вертикальное распределение плотности дыма в дымовой струе.

При сопоставлении теории диффузии с конечной скоростью с обычной полуэмпирической теорией турбулентной диффузии решение (10.154) целесообразно сравнивать с решением (10.93′), отвечающим случаю линейного возрастания коэффициента обмена $K=\varkappa u_* Z=K_1 Z$. Такое сопоставление (в предположении, что $n=1{,}25$) представлено на заимствованном из книги Паскуила (1962б) рис. 86. Мы видим, что профиль средней концентрации $\overline{\vartheta}(Z)$ при

каждом фиксированном $\tau=t-t_0$ в пределах значений Z, которым еще соответствуют относительно большие значения концентрации $\overline{\vartheta}$, принимает очень близкую форму в теории диффузии с конечной скоростью и в обычной полуэмпирической теории. Существенное расхождение профилей наблюдается лишь около «вершины» облака примеси, где согласно теории диффузии с конечной скоростью концентрация внезапно падает до нулевого значения, в то время как согласно обычной теории она продолжает плавно убывать, оставаясь отличной от нуля при сколь угодно больших значениях Z.

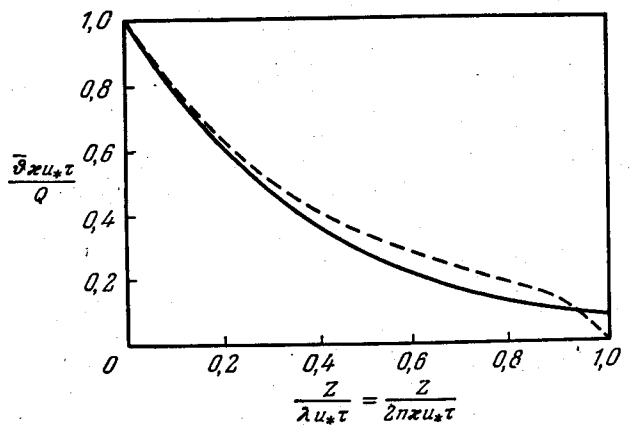


Рис. 86. Сопоставление вертикального распределения концентрации по теории диффузии с конечной скоростью (пунктирная кривая) с распределением, получаемым из параболического уравнения диффузии с линейным по высоте коэффициентом обмена (сплошная кривая).

При $\lambda\to\infty$ функция (10.54), естественно, стремится к функции (10.93′), являющейся решением параболического уравнения диффузии $\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}=$ $=\frac{\partial}{\partial Z}\varkappa u_* Z\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$. В случае наземного точечного источника, производящего примесь, начиная с момента $t=0$, с постоянной (единичной) скоростью, концентрация $\overline{\vartheta}_1(Z,t)$ находится с помощью интегрирования по времени решения (10.154); при $t\to\infty$ отсюда легко получается следующее разложение по степеням $1/t$:

$$\overline{\vartheta}_1(Z_2,t)-\overline{\vartheta}_1(Z_1,t)=\frac{1}{\varkappa u_*}\int\limits_{Z_2/\lambda u_* t}^{Z_1/\lambda u_* t}\frac{(1-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^{n+1}}\frac{d\xi}{\xi}\approx$$

$$\approx\frac{1}{\varkappa u_*}\left(\ln\frac{Z_1}{Z_2}+\frac{Z_2-Z_1}{\varkappa u_* t}+\ldots\right). \quad (10.155)$$

Эта формула позволяет оценивать скорость приближения профиля концентрации к логарифмическому профилю, соответствующему стационарному наземному источнику.

В случае высотного источника (на произвольной высоте H) решение соответствующей задачи с начальными условиями для уравнения (10.152) может быть найдено с помощью общего метода Римана решения дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа. Это решение, вообще говоря, имеет значительно более громоздкий вид (оно представляется в виде интеграла от сложной комбинации гипергеометрических функций; см. Монин (1956б)). Тем не менее, в некоторых случаях оно может быть заметно упрощено. Так, например, для наземной концентрации примеси от высотного мгновенного точечного источника, выпустившего всю примесь вверх (дымовая труба), получается формула вида

$$\overline{\vartheta}(0, t \mid H) = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial \Psi_1(+0, \tau)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Psi_1(-0, \tau)}{\partial \zeta}\right] = \frac{2n}{H}\frac{(\tau-1)^n}{(\tau+1)^{n+1}}, \quad \tau \geqslant 1. \qquad (10.156)$$

Исходя из формул (10.140) и (10.156), для распределения наземной концентрации по направлению ветра от дымовой трубы высоты H можно получить формулу

$$\overline{\vartheta}(X, 0, 0 \mid H) = \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\alpha n Q}{UH^2}\frac{(\xi-1)^n}{(\xi+1)^{n+1}} f(\alpha\xi), \qquad (10.157)$$

где

$$f(\xi) = e^{-\xi}[I_0(\xi) + I_1(\xi)], \qquad \xi = \frac{\lambda u_* X}{UH} \geqslant 1, \quad \alpha = \frac{a_1 H}{\lambda u_*}, \quad \lambda_1 = \frac{u_1}{u_*},$$

Q — масса дыма, выходящего из трубы за единицу времени, U — скорость ветра (предполагаемая постоянной), а u_1 и a_1 — средняя скорость движения и частота «рассеяний» частиц, диффундирующих в горизонтальной плоскости поперек направления ветра. Параметр α следует считать малым, и при оценке положения и величины максимума функции (10.157) можно приближенно заменить $f(\alpha\xi)$ единицей.

БИБЛИОГРАФИЯ

Абрамович Г. Н.
1960. Теория турбулентных струй, М., Физматгиз.

Аллен и Тэйлор Е. (Allen C. M., Taylor E. A.)
1923. The salt velocity method of water measurement, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, **45**, 285—341.

Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э.
1959. Теория колебаний, 2 изд. М., Физматгиз.

Арис (Aris R.)
1956. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, Proc. Roy. Soc., **A235**, No. 1200, 67—77.

Ахиезер Н. И.
1961. Классическая проблема моментов, М., Физматгиз.

Бай Ши-и (Pai Shih-i)
1954. Fluid dynamics of jets, Toronto — N. Y. — London, Van Nostrand (русск. перевод: Бай Ши-и, Теория струй, М., ИЛ, 1960).

Баред (Barad M. L.)
1958. Project Prairie Grass, a field program in diffusion, vols. 1—2, Geophys. Res. Pap., No. 59, Cambridge, Mass.
1963. Examination of a wind profile proposed by Swinbank, J. Appl. Meteor., **2**, No. 6, 747—754.

Баред и Хоуген (Barad M. L., Haugen D. A.)
1959. A preliminary evaluation of Sutton's hypothesis for diffusion from a continuous point source, J. meteorol., **16**, No. 1, 12—20.

Баренблатт Г. И.
1953. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, Прикл. матем. мех., **17**, № 3, 261—274.
1955. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины, Прикл. матем. мех., **19**, № 1, 61—88.

Барнес и Кокер (Barnes H. T., Coker E. G.)
1905. Experiments on streamline motion and the measurements of critical velocity, Proc. Roy. Soc. London, **74**, No. 503, 341—356.

Белякова В. К.
1950. К вопросу об устойчивости движения вязкой жидкости в прямой круглой трубе. Прикл. матем. мех., **14**, № 1, 105—110.

Бенни (Benney D. J.)
1961. A non-linear theory for oscillations in a parallel flow, J. Fluid Mech., **10**, No. 2, 209—236.

1964. Finite-amplitude effects in an unstable laminar boundary layer, Phys. Fluids, **7**, № 3, 319—326.

Берлянд М. Е.
1947. Теория изменения ветра с высотой, Труды научно-иссл. учр. Главн. упр. гидрометслужбы, сер. 1, № 25, 16—67.

Берлянд М. Е., Генихович Е. Л., Ложкина В. П. и Оникул Р. И.
1963. Численное решение уравнений турбулентной диффузии и расчет загрязнения атмосферы вблизи промышленных предприятий, Труды Гл. геофиз. обсерв., № 138, 3—17.
1964. Численное исследование атмосферной диффузии при нормальных и аномальных условиях стратификаций, Труды Гл. геофиз. обсерв., № 158, 22—31.

Бест (Best A. C.)
1935. Transfer of heat and momentum in the lowest layers of the atmosphere, Geophys. Mem., **7**, No. 65.

Бетчов (Betchov R.)
1960. On the mechanism of turbulent transition, Phys. Fluids, **3**, No. 6, 1026—1027.

Бетчов и Шевчик (Betchov R., Szewczyk A.)
1963. Stability of shear layer between parallel streams, Phys. Fluids, **6**, No. 10, 1391—1396.

Биркгоф (Birkhoff G.)
1962. Helmholtz and Taylor instability, Proc. Symp. Appl. Math., **13** (Hydrodynamic instability), 55—76 (русск. перевод в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., Мир, 1964, 68—94).

Биркгоф и Кампе де Ферье (Birkhoff G., Kampé de Fériet J.)
1962. Kinematics of homogeneous turbulence. D. Metric transitivity, J. Math. Mech., **11**, No. 3, 319—340.

Биркгоф и Царантонелло (Birkhoff G., Zarantonello E. H.)
1957. Jets, wakes and cavities, N. Y. Acad. Press.

Блэкедар (Blackadar A. K.)
1962. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res., **67**, No. 8, 3095—3102.

Бовшеверов В. М. и Воронов В. П.
1960. Акустический флюгер, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 882—885.

Бовшеверов В. М., Гурвич А. С., Мордухович М. И. и Цванг Л. Р.
1962. Приборы для измерений пульсаций температуры и скорости ветра и для статистического анализа результатов измерений, сб. «Атмосферная турбулентность» (Труды Инст. физ. атмосф. АН СССР, № 4), 21—29.

Бовшеверов В. М., Гурвич А. С., Татарский В. И. и Цванг Л. Р.
1959. Приборы для статистического анализа турбулентности, Труды совещ. по исслед. мерцания звезд, М., Изд. АН СССР, 26—32.

Бовшеверов В. М., Гурвич А. С. и Цванг Л. Р.
1959. Прямые измерения турбулентного потока тепла в приземном слое атмосферы, Докл. АН СССР, **125**, № 6, 1242—1245.

Бозанке и Пирсон (Bosanquet C. H., Pearson J. L.)
1936. The spread of smoke and gases from chimneys, Trans. Faraday Soc., **32**, No. 8, 1249—1263.

Болдуин и Майкельсен (Baldwin L. W., Mickelsen W. R.)
1962. Turbulent diffusion and anemometer measurements, J. Eng. Mech., **88**, No. 1, 37—69; discussion, 151—153.

Бохнер (Bochner S.)
1933. Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse, Math. Ann., **108**, No. 3, 378—410 (русск. перевод в книге: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, М., Физматгиз, 1962).

Будыко М. И.
1946. Распределение метеорологических элементов в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **10**, № 4, 317—329.
1948. Испарение в естественных условиях, Л., Гидрометеоиздат.

Буссинеск (Boussinesq J.)
1897. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumulteux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, I—II, Paris, Gauthier-Villars.

Бьоргум (Bjorgum O.)
1953. On the velocity, temperature and humidity profiles, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **79**, No. 339, 84—93.

Бэрнс, Чайлдс, Никол и Росс (Burns J. G., Childs W. H. J., Nicol A. A., Ross M. A. S.)
1959. Development and use of a vane device for boundary-layer measurements, J. Fluid Mech., **6**, No. 1, 97—112.

Бэтчелор (Batchelor G. K.)
1949а. The role of big eddies in homogeneous turbulence, Proc. Roy. Soc., **A195**, No. 1043, 513—532.
1949б. Diffusion in a field of homogeneous turbulence, Austr. J. Sci. Res., **A2**, No. 4, 437—450.
1957. Diffusion in free turbulent shear flows, J. Fluid Mech., **3**, No. 1, 67—80.
1959. Diffusion from sources in a turbulent boundary layer (неопубликованная рукопись).

Бэтчелор, Бинни и Филлипс (Batchelor G. K., Binnie A. M., Phillips O. M.)
1955. The mean velocity of discrete particles in turbulent flow in a pipe, Proc. Phys. Soc., **B68**, No. 432, 1095—1104.

Бэтчелор и Таунсенд (Batchelor G. K., Townsend A. A.)
1956. Turbulent diffusion, Surveys in Mechanics (ed. by G. K. Batchelor and R. M. Daivies), Cambridge, Univ. Press, 352—399.

Бюсингер (Businger J. A.)
1955. On the structure of the atmospheric surface layer, J. Meteor., **12**, No. 6, 553—561.
1959. A generalization of the mixing-length concept, J. Meteor., **16**, No. 5, 516—523.

Бютнер Э. К. и Лайхтман Д. Л.
1963. О рассеянии пассивных частиц от точечного источника в неоднородной среде, Труды Ленингр. гидромет. ин-та, вып. 15, 130—136.

Вандель и Кофёд-Хансен (Wandel C. F., Kofoed-Hansen O.)
1962. On the Eulerian-Lagrangion transform in the statistical theory of turbulence, J. Geophys. Res., **67**, No. 8, 3089—3093.

Ван Дрист (van Driest E. R.)
1956. On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci., **23**, No. 11, 1007—1011.
1959. Convective heat transfer in gases, Turbulent flows and heat transfer (ed by C. C. Lin), Princeton, Univ. Press, 339—427 (русск. перевод в книге «Турбулентные течения и теплопередача», М., ИЛ, 1963, 349—436).

Вазов (Wasow W.)
1953. On small disturbances of plane Couette flow, J. Res. Nat. Bur. Standarts, **51**, 195—202.

Великанов М. А.
1946. Динамика русловых потоков, Л.—М., Гидрометеоиздат.

Вельте (Velte W.)
1962. Über ein Stabilitätskriterium der Hydrodynamik, Arch. Rat. Mech. Anal., **9**, Nr. 1, 9—20.

Вигхардт (Wieghardt K.)
1940. Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschalgspunkt, Zs. angew. Math. Mech., **20**, Nr. 1, 58—59.
1944. Über die turbulente Strömung in Rohr und längs der Platte, Zs. angew. Math. Mech., **24**, Nr. 4, 294—296.

Виттинг (Witting H.)
1958. Über den Einfluss der Strömlinienkrummung auf die Stabilität laminarer Strömungen, Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, Nr. 3, 243—283.

Воэн (Vaughan L. M.)
1961. The prediction of atmospheric diffusion by using an eddy diffusivity based on the vertical transfer of heat, J. Meteor., **18**, No. 1, 43—49.

Галлахер и Мерсер (Gallagher A. P., Mercer A. McD.)
1962. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow, J. Fluid Mech., **13**, No. 1, 91—100.
1964. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. Part 2. The higher eigenvalues, J. Fluid Mech., **18**, No. 3, 350—352.

Гамель (Hamel G.)
1911. Zum Turbulenzproblem, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 261—270.

Гастер (Gaster M. A.)
1962. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, J. Fluid Mech., **14**, No. 2, 222—224.

Гедеке (Gödecke K.)
1935. Messungen der atmosphärischen Turbulenz in Bodennähe mit einer Hitzdrahtmethode, Ann. Hydrogr., Nr. 10, 400—410.

Гейзенберг (Heisenberg W.)
1924. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen, Ann. Phys., (4), **74**, 577—627.

Гельмгольц (Helmholtz H.)
1868. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Monatsber. Kön. Akad. Wiss., Berlin, **23**, 215—228 (русск. перевод: Г. Гельмгольц, Два исследования по гидродинамике, СПб, 1902).

Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я.
1961. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства («Обобщенные функции», вып. 5), М., Физматгиз.

Гербер (Gerber R.)
1949. Sur la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Ann. Inst. Fourier, **1**, 157—162.

Гертлер (Görtler H.)
1942. Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, Zs. angew. Math. Mech., **22**, No. 5, 244—254.
1959. Über eine Analogie zwischen der Instabilitäten laminaren Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden, Ing. Arch., **28**, Nr. 1, 71—78.

Ги и Дэвис (Gee J. H., Davies D. R.)
1963. A note on horizontal dispersion from an instantaneous ground sorce, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **89**, No. 382, 542—545.

Гиршфельдер, Кертисс и Берд (Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.)
1954. Molecular theory of gases and liquids, N. Y., Viley; London, Chapman and Hall (русск. перевод: Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, М., ИЛ, 1961).

Гиффорд (Gifford F. A.)
1962. Diffusion in the diabatic surface layer, J. Geophys. Res., **67**, No. 8, 3207—3212.

Гольдштейн (Goldstein S.)
1931. On the stability of superposed streams of fluids of different densities, Proc. Roy. Soc., **A132**, No. 820, 524—539.
1938. Modern developments in fluid dynamics, vols. 1—2, Oxford Univ. Press (русск. перевод: Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. 1—2, М., ИЛ, 1948).
1951. On diffusion by discontinous movement and on the telegraph equation, Quart. J. Mech. Appl. Math., **4**, No. 1, 129—156.

Горьков Л. П.
1957. Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи, Ж. эксп. теор. физ., **33**, № 2(8), 402—411.

Госс (Gosse J.)
1961. Sur l'écoulement turbulent des fluids, C. r. Acad. Sci., **253**, № 1, 61—63.

Гофман (Hofmann E.)
1940. Über die Gesetzmässigkeiten der Wärme- und Stoffübertragung auf Grund des Strömungsverganges im Rohr, Forsch. Gebiete Ingenieurwesens, **A11**, 159—169.

Грант (Grant A. M.)
1957. Corrected mixing-leght theory of turbulent diffusion, J. Meteor., **14**, No. 4, 297—303.

Гребер и Эрк (Gröber H., Erk S.)
1955. Die Grundgesetze der Wärmeubertragung, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer (русск. перевод: Г. Гребер, С. Эрк и У. Григулль, Основы учения о теплообмене, М., ИЛ, 1958).

Гренандер (Grenander U.)
1950. Stochastic processes and statistical inference, Ark. Mat., **1**, No 3, 195—277 (русск. перевод: У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, М., ИЛ, 1961).

Гринспан и Бенни (Greenspan H. P., Benney D. J.)
1963. On schear-layer instability, breakdown and transition, J. Fluid Mech., **15**, No. 1, 133—153.

Гроне (Grohne D.)
1954. Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen, Zs. angew. Math. Mech., **34**, Nr. 3, 344—357.

Груза Г. В.
1961. Макротурбулентность в общей циркуляции атмосферы, Л., Гидрометеоиздат.

Гурвич А. С.
1959. Акустический микроанемометр для исследования микроструктуры турбулентности, Акустич. журнал, **5**, № 3, 368—369.
1960. Экспериментальное исследование частотных спектров и функций распределения вероятностей вертикальной компоненты скорости ветра, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1042—1055.
1961. Измерение напряжения трения в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 458—466.
1962. Турбулентный поток количества движения при неустойчивой стратификации и в условиях, близких к безразличному равновесию, сб. «Атмосферная турбулентность» (Труды Инст. физ. атмосф. АН СССР, № 4), 81—100.
1965. Вертикальные профили скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана», **1**, № 1.

Давыдов Б. И.
1935. Уравнение диффузии с учетом молекулярной скорости, Докл. АН СССР, **2**, № 7, 474—478.
1958. Феноменологические уравнения статистической динамики несжимаемой турбулентной жидкости, Ж. эксп. теор. физ., **35**, № 2(8), 527—529.
1959а. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости, Докл. АН СССР, **127**, № 4, 768—771.
1959б. К статистической теории турбулентности, Докл. АН СССР, **127**, № 5, 980—982.
1961. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости, Докл. АН СССР, **136**, № 1, 47—50.

Дайер (Dyer A. J.)
1958. An improved electromagnetic integrator, J. Scient. Instr., **35**, No. 7, 240.
1960. Heat transport anemometer of high stability, J. Scient. Instr., **37**, No. 5, 166—169.
1961. Measurements of evaporation and heat transfer in the lower atmosphere by an automatic eddy-correlation technique, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **87**, No. 373, 401—412.

Дайсон (Dyson F. J.)
1960. Stability of an idealised atmosphere, II, Zeros of the confluent hypergeometric function, Phys. Fluids, **3**, No. 2, 155—158.

Дарси (Darcy H.)
1858. Recherches experimentales relatives aux mouvement de l'eau dans les tuyaux, Mém. Sav. Etrang. Acad. Sci., **15**, 265—342.

Дейслер (Deissler R. G.)
1951. Investigation of turbulent flow and heat transfer in smooth tubes, including the effects of variable fluid properties, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, **73**, No. 1, 101—107.

1954. Heat transfer and fluid friction for fully developed turbulent flow of air and supercritical water with variable fluid properties, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, **76**, No. 1, 73—86.
1955. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, Nat. Adv. Com. Aeronaut. Rep. 1210.
1959. Convective heat transfer and friction in flow of liquids. Turbulent flow and heat transfer (ed. by C. C. Lin), Princeton, Univ. Press, 288—338 (русск. перевод в книге «Турбулентные течения и теплопередача, М., ИЛ, 1963, 297—353).

Дефант (Defant A.)
1921. Die Zirkulation der Atmosphäre in den gemässigten Breiten der Erde, Geografiska Annaler, **3**, 209—265.

Джефрис (Jeffreys H.)
1926. The stability of a layer of fluid heated from below, Phil. Mag., (7) **2**, 833—844.
1928. Some cases of instability in fluid motion, Proc. Roy. Soc., **A118**, No. 779, 195—208.

Джонс и Паскуил (Jones J. I. P., Pasquill F.)
1959. An experimental system for directly recording statistics of the intensity of atmospheric turbulence, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **85**, No. 365, 225—236.

Дикий Л. А.
1960а. Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости, Прикл. матем. мех., **24**, № 2, 249—257.
1960б. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости, Докл. АН СССР, **135**, № 5, 1068—1071.
1960в. О корнях функции Уиттекера и функции Макдональда комплексного индекса, Изв. АН СССР, сер. матем., **24**, № 6, 943—954.
1964. Об устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта, Прикл. матем. мех., **28**, № 2, 389—392.

Дикон (Deacon E. L.)
1949. Vertical diffusion in the lowest layers of the atmosphere, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **75**, No. 323, 89—103.
1955. The turbulent transfer of momentum in the lowest layers of the atmosphere, C. S. I. R. O., Div. Meteor. Phys., Techn. Pap. No. 4, Melbourne.
1959. The measurements of turbulent transfer in the lower atmosphere, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 211—228 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 236—255).
1962. Aerodynamic roughness of the sea, J. Geophys. Res., **67**, No. 8, 3167—3172.

Дикон и Уэбб (Deacon E. L., Webb E. K.)
1962. Interchange of properties between sea and air. Small-scale interaction, The Sea (ed. by M. N. Hill), vol. 1, N. Y. — London, Interscience Publ., 43—87.

Ди Прима (Di Prima R. C.)
1955. Application of the Galerkin method to the calculation of the stability of curved flows, Quart. Appl. Math., **13**, No. 1, 55—62 (русск. перевод в сб. «Механика», № 3 (37), 1956).

1961. Stability of nonrotationally symmetric disturbances for viscous flow between rotating cylinders, Phys. Fluids, **4**, No. 6, 751—755.

Дирдорфф (Deardorff J. W.)
1963. On the stability of viscous plane Couette flow, J. Fluid Mech., **15**, No. 4, 623—631.

Доннели (Donnelly R. J.)
1962. Experimental determination of stability limits, Proc. Symp. Appl. Math., **13** (Hydrodynamic instability), 41—53 (русск. перевод в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., Мир, 1964, 54—67).
1963. Experimental confirmation of the Landau law in Couette flow, Phys. Rev. Letters, **10**, No. 7, 282—284.

Доннели и Фультц (Donnely R. J., Fultz D.)
1960. Experiments of the stability of viscous flow between rotating cylinders, II, Visual observations, Proc. Roy. Soc., **A258**, No. 1292, 101—123.

Дородницын А. А.
1941. К теории суточного хода температуры в слое перемешивания, Докл. АН СССР, **30**, № 5, 410—413.

Дразин (Drazin P. G.)
1958. The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous fluid, J. Fluid Mech., **4**, No. 2, 214—224.

Дразин и Хоуард (Drazin P. G., Howard L. N.)
1962. The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow, J. Fluid Mech., **14**, No. 2, 257—283.

Драйден (Dryden H. L.)
1959. Transition from laminar to turbulent flow, Turbulent flow and heat transfer (ed. by C. C. Lin), Princeton, Univ. Press. 3—74 (русск. перевод в книге «Турбулентные течения и теплопередача», М., ИЛ, 1963, 9—82).

Драйден, Шубауэр, Мок и Скрэмстад (Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C., Skramstad H. K.)
1937. Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No. 581.

Дриммель и Рейтер (Drimmel J., Reuter H.)
1960. Der Exponent n in Sutton's Ansatz fur die Lagrangesche Korrelationsfunktion, Arch. Meteor., Geophys. und Bioklim., **A12**, Nr. 1, 24—39.

Дуайер (Dwyer O. E.)
1963. Eddy transport in liquid-metal heat transfer, A. I. Ch. E. Journal, **9**, No. 2, 261—268.

Дуб (Doob J. L.)
1953. Stochastic processes, N. Y., Wiley (русск. перевод: Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956).

Дхаван (Dhawan S.)
1952. Direct measurements of skin friction, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Tech. Note, No. 2567.

Дьюти и Рид (Duty R. L., Reid W. H.)
1964. On the stability of viscous flow between rotating cylinders, J. Fluid Mech., **20**, No. 1, 81—94.

Дынкин Е. Б.
1963. Марковские процессы, М., Физматгиз.

Дэви (Davey A.)
1962. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders, J. Fluid Mech., **14**, No. 3, 336—368.

Дэвидсон и Баред (Davidson B., Barad M. L.)
1956. Some comments on the Deacon wind profile, Trans. Am. Geophys. Union, **37**, No. 2, 168—176.

Дэвис (Davies D. R.)
1950. Three-dimensional turbulence and evaporation in the lower atmosphere, I—II, Quart. J. Mech. Appl. Math., **3**, No. 1, 51—63, 64—73.
1954а. On diffusion from a continous point source at ground level into a turbulent atmosphere, Quart. J. Mech. Appl. Math., **7**, No. 2, 168—178.
1954б. A note on the two-dimensional equation of diffusion in the atmosphere, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **80**, No. 345, 429—434.

Дэвис Р. (Davies R. W.)
1954. The connection between the Smoluchowski equation and the Kramers — Chandrasekhar equation, Phys. Rev., **93**, No. 6, 1169—1171.

Дэвис и Уайт (Davies S. J., White C. M.)
1928. An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section, Proc. Roy. Soc., **A119**, No. 781, 92—107.

Елагина Л. Г.
1962. Оптический прибор для измерения турбулентных пульсаций влажности, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1100—1107.

Загустин А. И.
1938. Уравнения турбулентного движения жидкостей, Труды Воронежского унив., **10**, № 2, 7—39.

Зельдович Я. Б.
1937. Предельные законы свободновосходящих турбулентных потоков, Ж. эксп. теор. физ., **7**, № 12, 1463—1465.

Зилитинкевич С. С. и Лайхтман Д. Л.
1965. Турбулентный режим в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана», **1**, № 1.

Зубковский С. Л.
1962. Частотные спектры пульсаций горизонтальной компоненты скорости ветра в приземном слое воздуха, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1425—1433.

Изаксон А.
1929. К определению турбулентности, Ж. русск. физ.-хим. общ., **61**, № 3, 257—293.
1937. О формуле распределения скоростей вблизи стенки, Ж. экспер. теор. физ., **7**, № 7, 919—924.

Иноуэ (Inoue E.)
1950—1951. On the turbulent diffusion in the atmosphere, I—II, J. Meteor. Soc. Japan, **28**, No. 12, 441—456; **29**, No. 7, 246—253.
1952. On the Lagrangian correlation coefficient for turbulent diffusion and its application to atmospheric diffusion phenomena, Geophys. Res. Pap., No. 19, 397—412.
1959. The effects of thermal stratification on turbulent diffusion in the atmospheric surface layer, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 319—330 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 354—364).

Иокояма (Yokoyama O.)
1962a. On the thickness of smoke plume in diabatic surface layer, J. Meteor. Soc. Japan, ser. II, **40**, No. 2, 83—92.
1962б. On the contradiction and modification of the equation of diabatic wind profile, J. Meteor, Soc. Japan, ser. II, **40**, No. 6, 359—360.

Иссерлис (Isserlis L.)
1918. On a formula for the product-moment coefficient in any number of variables, Biometrika, **12**, No. 1—2, 134—139.

Каверс, Хсу, Шлингер и Сейдж (Cavers S. D., Hsu N. Y., Schlinger W. G., Sage B. H.)
1953. Temperature gradients in turbulent gas streams. Behavior near boundary in two-dimensional flow, Ind. Eng. Chem., **45**, No. 9, 2139—2145.

Казанский А. Б. и Монин А. С.
1956. Турбулентность в приземных инверсиях, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 79—86.
1957. О форме дымовых струй, Изв. АН СССР, сер геофиз., № 8, 1020—1033.
1958. О турбулентном режиме в приземном слое воздуха при неустойчивой стратификации, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6 741—751.
1961. О динамическом взаимодействии между атмосферой и поверхностью земли, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 786—788.
1962. Определение турбулентных потоков количества движения, тепла и влаги по данным градиентных наблюдений, Метеор. и гидрология, № 12, 3—8.

Калинске и Пиен (Kalinske A. A., Pien C. C.)
1944. Eddy diffusion, Ind. Eng. Chem., **36**, No. 3, 220—223.

Кампе де Ферье (Kampé de Fériet J.)
1939. Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **59**, 145—194.
1951. Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence, J. Meteor., **8**, No. 5, 358—361.
1953. Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence (в книге A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, Masson, 568—623).
1956. Problèmes mathématiques posés par la méchanique statistique de la turbulence, Proc. Intern. Congress Math. Amsterdam, 1954, **3**, 237—242, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.

Као (Kao S. K.)
1959. Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified fluid, J. Meteor., **16**, No. 5, 497—503.

Капица П. Л.
1947. Теоретические и эмпирические выражения для теплопередачи в двумерном турбулентном потоке. Докл. АН СССР, **55**, № 7, 595—602.

Карман (Kármán Th. von).
1924. Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz, Proc. 1st Intern. Congr. Appl, Mech., Delft, 97—112.
1930. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 58—76 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.—Л., ОНТИ, 1936, 271—286).
1934. Some aspects of the theory of turbulent motion, Proc. Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.—Л., ОНТИ, 1936, 35—74).

1939. The analogy between fluid friction and heat transfer, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., **61**, 705—710.

Кароль И. Л.
1960. О влиянии турбулентной диффузии в направлении ветра на распределение концентрации субстанции, диффундирующей в атмосфере, Докл. АН СССР, **131**, № 6, 1283—1286.

Карр (Carr A. D.)
1962. The transport of heat in a fluid in turbulent pipe flow, Reactor, **1**, 6—14.

Карьер и Карлсон (Carrier G. F., Carlson F. D.)
1946. On the propogation of small disturbances in a moving compressible fluid, Quart. Appl. Math., **4**, No. 1, 1—12.

Каттанео (Cattaneo C.)
1948—1949. Sulla conduzione del calore, Atti sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **3**, 83—101.

Кедроливанский В. Н. и Стернзат М. С.
1953. Метеорологические приборы, Л., Гидрометеоиздат.

Келдыш М. В.
1951. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, Докл. АН СССР, **77**, № 1, 11—14.

Келдыш М. В. и Лидский В. Б.
1963. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Труды 4-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Л., Акад. наук СССР, 101—120.

Келлер Л. В.
1925. Über die Ausstellung eines System von Charakteristiken der atmosphärischen Turbulenz, Ж. геофиз. метеор., **2**, № 34, 275—290.

Келлер Л. В. и Фридман А. А.
1924. Differentialgleichung für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit, Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 395—405.

Кемпф (Kempf G.)
1929. Neue Ergebnisse der Wiederstandforschung, Werft, Reederei, Hafen, **10**, 234—239, 247—253.

Керл (Curle N.)
1956. On hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow, Proc. Roy. Soc., **A238**, No. 1216, 489—501.

Кестин и Ричардсон (Kestin J., Richardson P. D.)
1963. Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers, Intern. J. Heat Mass Transfer, **6**, No. 2, 147—189.

Кирхгеснер (Kirchgässner K.)
1961. Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiteln, Z. angew. Math. Phys., **12**, Nr. 1, 14—30.

Кистлер (Kistler A. L.)
1962. The structure of the laminar sublayer, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS, 287—297.

Клаузер (Clauser F. H.)
1956. The turbulent boundary layer, Adv. Appl. Mech., **4**, N. Y., 1—51 (русск. перевод: Ф. Клаузер, Турбулентный пограничный слой, Проблемы механики, вып. 2, М., 1959, 297—340).

Клебанов (Klebanoff P. S.)
1955. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, Nat. Advis. Com. Aeronaut., Rep. No. 1247.

Клебанов и Тидстром (Klebanoff P. S., Tidstrom K. D.)
1959. Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient, Nat. Aeronaut. Space Adm., Tech. note D-195.

Клебанов, Тидстром и Сарджент (Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.)
1962. The three-dimensional nature of boundary-layer instability, J. Fluid Mech., **12**, No. 1, 1—34.

Кленшоу и Эллиотт (Klenshow C. W., Elliott D.)
1960. A numerical treatment of the Orr — Sommerfeld equation in the case of a laminar jet, Quart. J. Mech. Appl. Math., **13**, No. 3, 300—313.

Клюг (Klug W.)
1963. Zum vertikalen Windprofil, Beitr. Phys. Atmosph., **36**, Nr. 3—4, 226—253.

Коважный (Kovásznay L. S. G.)
1953. Turbulence in supersonic flow, J. Aeronaut. Sci., **20**, No. 10, 657—674, 682.

Колдер (Calder K. L.)
1949. Eddy diffusion and evaporation in flow over aerodinamically smooth and rough surfaces: a treatment based on laboratory laws of turbulent flow with special reference to conditions in the lower atmosphere, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, No. 2, 153—176.
1961. Atmospheric diffusion of particulate material, considered as a boundary value problem, J. Meteor., **18**, No. 3, 413—416.

Колесников А. Г.
1960. Вертикальный турбулентный обмен в устойчиво-стратифицированном море, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1614—1623.

Коллис (Collis D. C.)
1948. The diffusion process in turbulent flow, Austr. Counsil Sci. Ind. Res., Div. Aero., Rep. A55.

Колмогоров А. Н.
1931. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., **104**, 415—458 (русск. перевод в журнале «Усп. матем. наук», вып. 5, 1938, 5—41).
1933. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse, Math. Ann., **108**, 149—160.
1941а. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, Докл. АН СССР, **30**, № 4, 299—303.
1941б. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности, Докл. АН СССР, **32**, № 1, 19—21.
1942. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, сер. физ. **6**, № 1—2, 56—58.
1952. К вопросу о сопротивлении и профиле скоростей при турбулентном течении в трубах, Докл. АН СССР, **84**, № 1, 29—30.
1954. О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов, Вестн. МГУ, № 3, 41—45.
1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, Fluid Mech., 13, No. 1, 82—85.

Кондо (Kondo J.)
1962а. Observations on wind and temperature profiles near the ground, Sci. Reports Tôhoku Univ., ser. 5, Geophys., **14**, No. 2, 41—56.
1962б. Evaporation from extensive surfaces of water, Sci. Rep. Tôhoku Univ., ser. 5, Geophys., **14**, No. 3, 107—119.

Константинов А. Р.
1952. Расчет испарения с сельскохозяйственных полей с учетом влияния лесных полос, Труды Гос. гидрологич. ин-та, вып. 34(88), 15—65.

Конт-Белло (Compte-Bellot G.)
1963. Coefficients de dissymétrie et d'aplatissement, spectres et corrélations en turbulence de conduite, J. Mécanique, **2**, № 2, 105—128.

Коппел (Koppel D.)
1964. On the stability of flow of a thermally stratified flow under the action of gravity, J. Math. Phys., **5**, No. 7, 963—982.

Коркоран, Пейдж, Шингер и Сейдж (Corcoran W. H., Page F., Schinger W. G., Sage B. H.)
1952. Gradients in turbulent gas streams, Ind. Eng. Chem., **44**, No. 3, 410—430.

Коркос и Селларс (Corcos G. M., Sellars J. R.)
1959. On the stability of fully developed flow in a pipe, J. Fluid Mech., **5**, No. 1, 97—112.

Корсин (Corrsin S.)
1943. Investigation of flow in an axially symmetric heated jet of air, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Wartime Report W-94.
1959а. Outline of some topics in homogeneous turbulent flow, J. Geophys. Res., **64**, No. 12, 1234—2150.
1959б. Progress report on some turbulent diffusion research, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 161—164 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 187—190).
1963. Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence, J. Atmosph. Sci., **20**, No. 2, 115—119.

Корсин и Кистлер (Corrsin S., Kistler A. L.)
1955. The free-stream boundaries of turbulent flows, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No. 1244.

Корсин и Уберои (Corrsin S., Uberoi M. S.)
1950. Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No. 998.
1951. Spectra and diffusion in a round turbulent jet, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No 1040.

Коулс (Coles D.)
1955. The law of the wall in turbulent shear flow, 50 Jahre Grenzschichtforschung, Vieweg, Braunschweig, 153—163.
1956. The law of the wake in turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., **1**, No. 3, 191—226.
1962. Interface and intermittency in turbulent shear flow, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Ed. CNRS, 229—248.

Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В.
1963. Теоретическая гидромеханика, т. 1 и 2, 3-е изд., М., Физматгиз.

Кравченко И. М.
1963. О профиле ветра в приземном слое, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 498—499.

Крамер и Рекорд (Cramer H. E., Record F. A.)
1953. The variation with height of the vertical flux of heat and momentum, J. Meteor., **10**, No. 3, 219—226.

Крейчнан (Kraichnan R. H.)
1959. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, J. Fluid Mech., **5**, No. 4, 497—543.
1962a. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number, Phys. Fluids, **5**, No. 11, 1374—1389.
1962б. The closure problem of turbulence theory, Proc. Symp. Appl. Math., **13** (Hydrodynamic instability), 199—225 (русск. перевод в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., Мир, 1964, 231—264).

Кречмер С. И.
1954. Методика измерения микропульсаций скорости ветра и температуры в атмосфере, Труды Геофиз. инст. АН СССР, № 24(151), 43—111.
1957. Полевой градиентометр для измерения градиентов температуры воздуха, Труды Центр. аэролог. обсерв., № 22, 96—99.

Кристоферсон (Christopherson D. G.)
1940. Note on the vibration of membranes, Quart. J. Math., **11**, No. 1, 63—65.

Кропик (Kropik K.)
1964. Beiträge zum Stabilitätsproblem der Poiseulleschen Strömung, Acta Phys. Austr., **17**, Nr. 4, 351—377.

Крылов А. Л.
1963. Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости, Докл. АН СССР, **153**, № 4, 787—789.

Кэйз (Case K. M.)
1960a. Stability of inviscid plane Couette flow, Phys. Fluids, **3**, No. 2, 143—149.
1960б. Stability of an idealised atmosphere. I Discussion of results, Phys. Fluids, **3**, No. 2, 149—155.
1960в. Taylor instability of an inverted atmosphere, Phys. Fluids, **3**, No. 3, 366—368.
1961. Hydrodynamic stability and the inviscid limit, J. Fluid Mech., **10**, No. 3, 420—429.
1962. Hydrodynamic stability and the initial value problem, Proc. Simp. Appl. Math., **13** (Hydrodynamic instability), 25—33 (русск. перевод в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., Мир, 1964, 37—46).

Лайтхилл (Lighthill M. J.)
1952. On sound generated aerodynamically. I. General theory, Proc. Roy. Soc., **A211**, No. 1107, 564—587.
1954. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound, Proc. Roy. Soc., **A222**, No. 1148, 1—32.

Лайхтман Д. Л.
1944. Профиль ветра и обмен в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., **8**, № 1, 1—5.
1947a. О профиле ветра в приземном слое атмосферы при стационарных условиях, Труды научно-иссл. учр. гидрометслужбы, сер. 1, № 39, 58—76.

1947б. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности, Метеорол. и гидрол., № 1, 17—21.
1961. Физика пограничного слоя атмосферы, Л., Гидрометиздат.
1963. Диффузия примеси от точечных источников в приземном слое атмосферы, Труды Ленингр. гидромет. ин-та, вып. 15, 3—9.

Лайхтман Д. Л. и Чудновский А. Ф.
1949. Физика приземного слоя атмосферы, Л.—М., Гостехиздат.

Ламб (Lamb H.)
1932. Hydrodynamics, 6th ed., N. Y. Dover, 1932 (русск. перевод: Г. Ламб, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947).

Ламли (Lumley J. L.)
1962a. The mathematical nature of the problem of relating Lagrangian and Eulerian statistical functions in turbulence, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS.
1962б. An approach to the Eulerian—Lagrangian problem, J. Math. Phys., **3**, No. 2, 309—312.

Ламли и Пановский (Lumley J. L., Panofsky H. A.)
1964. The structure of atmospheric turbulence, N. Y. — London—Sydney, Interscience Publ.

Ландау Л. Д.
1944. К проблеме турбулентности, Докл. АН СССР, **44**, № 8, 339—342.

Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.
1951. Статистическая физика, М., Гостехиздат.
1953. Механика сплошных сред, М., Гостехиздат.

Лауфер (Laufer J.)
1951. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, Nat. Advis. Com. Aeronaut., Rep. No. 1033.
1954. The structure of turbulence in fully developed pipe flow, Nat. Advis. Com. Aeronaut., Rep. No. 1174.

Левич В. Г.
1944. Теория концентрационной поляризации, Ж. физ. химии, **18**, № 9, 335—355.
1951. Теория диффузионных процессов в движущейся жидкости (гидродинамика при больших числах Прандтля), Докл. АН СССР, **78**, № 6, 1105—1108.
1959. Физико-химическая гидродинамика, 2 изд., М., Физматгиз.

Лессен (Lessen M.)
1950. On stability of free laminar boundary layer between parallel streams, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No. 979.

Леттау (Lettau H.)
1950. A re-examination of the «Leipzig wind profile» considering some relations between wind and turbulence in the friction layer, Tellus, **2**, No. 2, 125—129.
1952. On eddy diffusion in shear zones, Geophys. Res. Pap., No. 19, 437—445.
1959. Wind profile, surface stress and geostrophic drag coefficients in the atmospheric surface layer, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 241—257 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ., 1962, 268—287).

Леттау и Дэвидсон (Lettau H., Davidson B.)
1957. Exploring the atmosphere's first mile, vols. 1—2, London—N. Y.—Paris, Pergamon Press.

Ликудис и Тулукян (Lykoudis P. S., Touloukian J. S.)
1958. Heat transfer in liquid metals, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., **80**, No. 3, 653—666.

Лилиеквист (Liljequist G. H.)
1954. Energy exchange of the Antarctic snowfield, Norwegian—British—Swedish Antarctic expedition 1949—1952, Scientific Results, 2, part 1, Oslo.

Линдгрен (Lindgren E. R.)
1957. The transition process and other phenomena in viscous flow, Ark. Fysik, **12**, No. 1—2, 1—169.
1959. Liquid flow in tubes, I—II, Ark. Fysik, **15**, No. 2, 97—119; No. 6, 503—519.

Линь (Lin C. C.)
1945. On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I—III, Quart. Appl. Math., **3**, No. 2, 117—142, No. 3, 218—234, No. 4, 277—301.
1955. The theory of hydrodynamic stability, Cambridge, Univ. Press (русск. перевод: Линь, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958).
1961. Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows, J. Fluid Mech., **10**, No. 3, 430—438.

Линь и Бенни (Lin C. C., Benney D. J.)
1962. On the instability of shear flows, Proc. Symp. Appl. Math., **13** (Hydrodynamic instability), 1—24 (русск. перевод в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., Мир, 1964, 9—36).

Линь, Дентон, Гаскилл и Патнем (Lin C. S., Denton E. B., Gaskill H. S., Putnam G. L.)
1951. Diffusion-controlled electrode reactions, Ind. Eng. Chem., **43**, No. 9, 2136—2143.

Линь, Маултон и Патнем (Lin C. S., Moulton R. W., Putnam G. L.)
1953. Mass transfer between solid valls and fluid streams, Ind. Eng. Chem., **45**, No. 3, 636—646.

Лион (Lyon R. N.)
1951. Liquid metal heat-transfer coefficients, Chem. Eng. Progress, **47**, No. 2, 75—79.

Липманн (Liepmann H. W.)
1962. Free turbulent flows, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS, 211—226.

Лойцянский Л. Г.
1935. О некоторых приложениях метода подобия в теории турбулентности, Прикл. матем. мех., **2**, № 2, 180—206.
1941. Аэродинамика пограничного слоя, Л.—М., Гостехиздат.
1958. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости, Прикл. матем. мех., **22**, № 5, 600—611.
1960. Перенос тепла в турбулентном движении, Прикл. матем. мех., **24**, № 4, 637—651.
1962а. Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обмена в турбулентном движении жидкости, Труды Всесоюзн. съезда теор. прикл. мех., 1960, М.—Л., Изд. АН СССР, 145—166.
1962б. Ламинарный пограничный слой, М., Физматгиз.

Локк (Lock R. C.)
1955. The stability of the flow of an electrically-conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, Proc. Roy. Soc., **A233**, No. 1192, 105—125.

Лоренц (Lorentz H. A.)
1907. Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitbewegungen und über den Einfluss dieses Bewegungen bei der Strömung durch Rohren, Abh. theor. Phys., Lpz, **1**, 43—71.

Лоренц E. (Lorenz E.)
1953. The interaction between a mean flow and random disturbances, Tellus, **5**, No. 3, 238—250.

Лоэв (Loève M.)
1960. Probability theory, 2nd ed., Princeton, van Nostrand (русск. перевод: М. Лоэв, Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962).

Людвиг (Ludwieg H.)
1956. Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoeffizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten, Zs. für Flügwiss., **4**, Nr. 2, 73—81.

Людвиг и Тильманн (Ludwieg H., Tillmann W.)
1949. Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten, Ing. Arch., **17**, Nr. 4, 288—299.

Ляпин Е. С.
1948. О турбулентном перемешивании воздуха в атмосфере, Метеор. и гидрол., № 5, 13—23.
1950. О гиперболическом уравнении вертикального турбулентного обмена в атмосфере, Труды Главн. геофиз. обсерв., № 19(81), 175—184.

Майкельсен (Mickelsen W. R.)
1955. An experimental comparison of the Lagrangian and Eulerian correlation coefficients in homogeneous isotropic turbulence, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Techn. note No. 3570.
1959. Measurements of the effect of molecular diffusivity in turbulent diffusion, J. Fluid Mech., **7**, No. 3, 397—400.

Майкл (Michael D. H.)
1961. Note on the stability of plane parallel flows, J. Fluid Mech., **10**, No. 4, 525—528.

Майлс (Miles J. W.)
1957. On the velocity profile for turbulent flow near a smooth wall, J. Aeronaut. Sci., **24**, No. 9, 704.
1961. On the stability of heterogeneous shear flows, J. Fluid Mech., **10**, No. 4, 496—508.
1963. On the stability of heterogeneous shear flows, Part 2, J. Fluid Mech., **16**, No. 2, 209—227.

Мак Адамс (McAdams W. H.)
1954. Heat transmission, 3rd. ed., N. Y.—Toronto—London, McGraw-Hill (русск. перевод В. Х. Мак-Адамс, Теплопередача, М., Металлургиздат, 1961).

Маквейл (McVehil G. E.)
1964. Wind and temperature profiles near the ground in stable stratification, Quart. J. Roy. Met. Soc., **90**, No. 384, 136—146.

Макилрой (McIlroy I. C.)
1955. The atmospheric fine structure recorder, C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys., Techn. Pap. No. 3, Melbourne.

Маккриди (MacCready P. B.)
1953. Atmospheric turbulence measurements and analysis, J. Meteor., **10**, No. 5, 325—337.

Малкус (Malkus W. V. R.)
1954а. Discrete transitions in turbulent convection, Proc. Roy. Soc., **A225**, No. 1161, 185—195.
1954б. The heat transport and spectrum of thermal turbulence, Proc. Roy. Soc., **A225**, No. 1161, 196—212.

Малкус и Веронис (Malkus W. V. R., Veronis G.)
1958. Finite amplitude cellular convection, J. Fluid Mech., **4**, No. 3, 225—260.

Малхотра и Сермак (Malhotra R. C., Cermak J. E.)
1963. Wind-tunnel modeling of atmospheric diffusion, J. Geophys. Res., **68**, No. 8, 2181—2184.

Манн (Munn R. E.)
1961. A theoretical expression for the root mean square vertical eddy fluctuation $(\overline{w'^2})^{\frac{1}{2}}$, J. Meteor., **18**, No. 1, 38—42.
1963. A reappraisal of Sutton's parameter *n*, J. Appl. Meteor., **2**, No. 4, 440—445.

Мартинелли (Martinelli R. S.)
1947. Heat transfer to molten metals, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, **69**, 947—959.

Матвеев Л. Т.
1960. К установлению зависимости коэффициента турбулентности от высоты в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 83—88.

Мацуока (Matsuoka H.)
1960. A corrected turbulon model theory of turbulent diffusion and its application, J. Meteor. Soc. Japan, **38**, No. 3, 148—153.
1961. Note on two dimensional diffusion in the atmospheric surface layer, J. Meteor. Soc. Japan, **39**, No. 6, 324—330.

Мексин (Meksyn D.)
1946. Stability of viscous flow between rotating cylinders, I—III, Proc. Roy. Soc., **A187**, No. 1008, 115—128, No. 1011, 480—491, 492—504.
1964. Stability of laminar flow between parallel planes for two- and threedimensional finite disturbances, Zs. Phys., **178**, Nr. 2, 159—172.

Мексин и Стюарт Дж. (Meksyn D., Stuart J. T.)
1951. Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances, Proc. Roy. Soc., **A208**, No. 1095, 517—526.

Мерфри (Murphree E. V.)
1932. Relation between heat transfer and fluid friction, Ind. Eng. Chem., **24**, No. 7, 726—736.

Мидлтон и Спилхаус (Middleton W. B. K., Spilhaus A. F.)
1953. Meteorological instruments, Toronto, Univ. Press.

Мизес (Mises R.)
1941. Some remarks on the laws of turbulent motion in tubes, Th. v. Kármán anniversary volume, Calif. Inst. Techn. Press, Pasadena, 317—327.

Миллер и Фейер (Miller J. A., Fejer A. A.)
1964. Transition phenomena in oscillating boundary-layer flows, J. Fluid Mech., **18**, No. 3, 438—448.

Милликен (Millikan C. B.)
1939. A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes, Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge (USA), 386—392.

Миллионщиков М. Д.
1939. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости, Докл. АН СССР, **22**, № 5, 236—240.

Михалке (Michalke A.)
1964. On the inviscid instability of the hyperbolictangent velocity profile, J. Fluid Mech., **19**, No. 4, 543—556.

Монин А. С.
1950а. Динамическая турбулентность в атмосфере, Изв. АН СССР, сер. геогр., геофиз., **14**, № 3, 232—254.
1950б. О характеристиках анизотропной турбулентности, Докл. АН СССР, **75**, № 5, 621—624.
1950в. Турбулентный режим в приземном слое воздуха, Информ. сборн. Гл. упр. гидрометслужбы, № 1, 13—27.
1953. О механизме нагревания воздуха в открытой степи, сб. «Климатические и микроклиматические исследования в прикаспийской низменности», М., Изд. АН СССР, 100—123.
1955. О диффузии с конечной скоростью, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 234—248.
1956а. Полуэмпирическая теория турбулентной диффузии, Труды Геоф. инст. АН СССР, № 33 (160), 3—47.
1956б. О турбулентной диффузии в приземном слое воздуха, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1461—1473.
1956в. О макротурбулентном обмене в земной атмосфере, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 452—463.
1958. Структура атмосферной турбулентности, Теор. вероятн. и ее примен., **3**, № 3, 285—317.
1959а. Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 331—343 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 366—381).
1959б. On the boundary condition on the earth surface for diffusing pollution, Adv. in Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 435—436 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 477—478).
1959в. Атмосферная диффузия, Усп. физич. наук, **67**, № 1, 119—130.
1960. О лагранжевых характеристиках турбулентности, Докл. АН СССР, **134**, № 2, 304—307.
1962а. О структуре полей скорости ветра и температуры в приземном слое воздуха, сб. «Атмосферная турбулентность» (Труды Ин-та физики атмосф. АН СССР, № 4, 5—20).
1962б. Empirical data on turbulence in the surface layer of atmosphere, J. Geophys. Research, **67**, No. 8, 3103—3109.
1962в. О лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости, Прикл. матем. мех., **26**, № 2, 320—327.
1965. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана», **1**, № 1.

Монин А. С. и Обухов А. М.
1953. Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы, Докл. АН СССР, **93**, № 2, 223—226.

1954. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы, Труды Геофиз. инст. АН СССР, № 24(151), 163—187.

Монин А. С. и Яглом А. М.
1962. Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности, Прикл. мех. тех. физ., № 5, 3—38.

Наито (Naito K.)
1964. Some remarks on the Monin—Obukhov function in the atmosphere near the ground, J. Met. Soc. Japan, **42**, No. 1, 53—63.

Невзглядов В. Г.
1945а. К феноменологической теории турбулентности, Докл. АН СССР, **47**, № 3, 169—173.
1945б. К статистической теории турбулентности, Докл. АН СССР, **47**, № 7, 482—485.

Никурадзе (Nikuradse J.)
1932. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, VDI-Forschungsheft Nr. 356 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.—Л., ОНТИ, 1936, 75—150).
1933. Strömungs gesetze in rauhen Röhren, VDI-Forschungsheft Nr. 361.

Новиков Е. А.
1958. О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости, Прикл. матем. мех., **22**, № 3, 412—414.
1964. Сходимость функционального ряда Тэйлора для характеристического функционала случайного поля. Успехи матем. наук, **19**, № 6(120), 195—197.

Нуннер (Nunner W.)
1956. Wärmeübertragung und Druckabfall in rauhen Rohren, VDI-Forschungsheft Nr. 455.

Обухов А. М.
1941. О распределении энергии в спектре турбулентного потока, Изв. АН СССР, сер. геогр. геофиз., **5**, № 4—5, 453—466.
1942. О распределении масштаба турбулентности в трубах произвольного сечения, Прикл. матем. мех., **6**, № 2—3, 209—220.
1946. Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере, Труды Ин-та теорет. геофиз. АН СССР, **1**, 95—115.
1954. Статистическое описание непрерывных полей, Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24(151), 3—42.
1960. О структуре температурного поля и поля скоростей в условиях свободной конвекции, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1392—1396.
1962. Some specific features of atmospheric turbulence, J. Fluid Mech., **13**, No. 1, 77—81.

Огура (Ogura J.)
1952а. Note on the wind velocity profile in the non-adiabatic atmosphere. J. Meteor. Soc. Japan, ser. II, **30**, No. 10, 329—342.
1952б. The theory of turbulent diffusion in the atmosphere, I—III, J. Meteor. Soc. Japan, **30**, No. 1, 23—28; No. 2, 53—58; No. 11, 386—397.

Окамото (Okamoto M.)
1963. A note on the wind and temperature profiles in the diabatic atmosphere near the ground, Geophys. Mag. (Japan), **31**, No. 3, 505—514.

Орр (Orr W. McF.)
1906—1907. The stability or instability of the steady motions of a liquid, Proc. Roy. Irish Acad., **A27**, 9—27, 69—138.

Оуэн и Томсон (Owen P. R., Thomson W. R.)
1963. Heat transfer across rough surfaces, J. Fluid Mech., **15**, No. 3, 321—334.

Палм (Palm E.)
1960. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, J. Fluid Mech., **8**, No. 2, 183—192.

Палм и Эйянн (Palm E., Øiann H.)
1964. Contribution to the theory of cellular thermal convection, J. Fluid Mech., **19**, No. 3, 353—365.

Пандольфо (Pandolfo J. P.)
1963. A formula relating various nondimensional parameters of turbulence fields in atmospheric surface layer under diabatic conditions, J. Geophys. Res., **68**, No. 10, 3249—3256.

Пановский (Panofsky H. A.)
1952. A comparison of different types of stress measurement, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **78**, No. 337, 411—414.
1961а. An alternative derivation of the diabatic wind profile, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **87**, No. 371, 109—110.
1961б. Similarity theory and temperature structure in the lower atmosphere, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **87**, No. 374. 597—601.
1962. The budget of turbulent energy in the lowest 100 meters, J. Geophys. Research, **67**, No. 8, 3161—3165.
1963. Determination of stress from wind and temperature measurements, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **89**, No. 379, 85—93.

Пановский, Блэкедар и Маквейл (Panofsky H. A., Blackadar A. K., McVehil G. E.)
1960. The diabatic wind profile, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **86**, No. 369 390—398.

Пановский и Маккормик (Panofsky H. A., McCormick R. A.)
1960. The spectrum of vertical velocity near the surface, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **86**, No. 370, 495—503.

Панчев Ст.
1961. Некоторые количественные соотношения между статистическими характеристиками чисто термической турбулентности в атмосфере, Докл. Болг. Акад. наук, **14**, № 8, 791—794.

Паскуил (Pasquill F.)
1949. Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground, Proc. Roy. Soc., **A198**, No. 1052, 116—140.
1950. The aerodynamic drag of the grassland, Proc. Roy. Soc., **A202**, No. 1068, 143—153.
1962а. Recent broad-band spectral measurements of turbulence in the lower atmosphere, J. Geophys. Research, **67**, No. 8, 3025—3031.
1962б. Atmospheric diffusion. A study of the dispersion of windborne material from industrial and other sources, London—Toronto—N. Y.—Princeton, Van Nostrand.

Перепелкина А. В.
1957. Некоторые результаты исследования турбулентных пульсаций температуры и вертикальной составляющей скорости ветра, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 765—778.
1959а. Об определении турбулентного потока тепла, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1026—1035.
1959б. Статистические характеристики турбулентного обмена в приземном слое атмосферы, Канд. диссертация, Ин-т физики атмосф. АН СССР, М.

1962. О характеристиках турбулентности приземного слоя в условиях свободной конвекции, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 271—274.

Петров Г. И.
1938. О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности, Труды ЦАГИ, вып. 345.

Пешке (Paeschke W.)
1936. Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitätsproblem in der Bodennahen Luftschicht, Beitr. Phys. fr. Atmosph., **24**, No. 3, 163—189.

Прандтль (Prandtl L.)
1910. Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungwiderstand der Flussigkeiten, Phys. Zs., **11**, 1072—1078.
1914. Über den Luftwiderstand von Kugeln, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 177—190.
1921. Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., **1**, Nr. 6, 431—436.
1925. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., **5**, Nr. 2, 136—139.
1927. Über der Reibungswiderstand strömender Luft, Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen, **3**, 1—5.
1928. Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr, Phys. Zs., **29**, Nr. 14, 487—489.
1932a. Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre, Beitr. Phys. fr. Atmosph., **19**, Nr. 3, 188—202.
1932б. Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten, Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen, **4**, 18—29.
1942. Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., **22**, No. 5, 241—243.
1945. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 6—19.
1949. Führer durch die Strömungslehre, 3ed., Braunschweig, F. Vieweg (русск. перевод: Л. Прандтль, Гидроаэромеханика, М., ИЛ, 1951).

Праудмен (Proudman J.)
1953. Dynamical oceanography, London, Methuen (русск. перевод: Дж. Праудмен, Динамическая океанография, М., ИЛ, 1957).

Преч (Pretsch J.)
1941a. Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckansteig, Jahresber. deutsch. Luftfahrtf., **1**, 158—175.
1941б. Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit Kreisformigen Querschnitt, Zs. angew. Math. Mech., **21**, Nr. 3, 204—217.

Пристли (Priestley C. H. B.)
1954. Convection from a large horizontal surface, Austr. J. Phys., **7**, No. 2, 176—201.
1955. Free and forced convection in the atmosphere near the ground, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **81**, No. 348, 139—143.
1956. Convection from the Earth's surface, Proc. Roy. Soc., **A238**, No. 1214, 287—304.
1959a. Turbulent transfer in the lower atmosphere, Chicago, Univ. Press (русск. перевод: С. Х. Б. Пристли, Турбулентный перенос в приземном слое атмосферы, Л., Гидрометиздат, 1964).
1959б. Estimation of surface stress and heat flux from orofile data, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **85**, No. 366, 415—418.

1960a. A determinant hypothesis for the superadiabatic wind and temperature profiles, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **86**, No. 368, 232—236.
1960б. Temperature fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech., **7**, No. 3, 375—384.
1961. An alternative derivation of the diabatic wind profile, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **87**, No. 373, 437—438.
1962. Free convection in a wind, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **88**, No. 375, 100—101.
1963. Eddy diffusion in shear zones, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **89**, No. 380, 287—288.
1963—1964. Recent flux and profile measurements in Australia, Доклад на симпозиуме в Беркли 30 августа 1963 г. и частное сообщение от 7 апреля 1964 г.

Пристли и Суинбенк (Priestley C. H. B., Swinbank W. C.)
1947. Vertical transport of heat by turbulence in the atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A189**, No. 1019, 543—561.

Прохоров Ю. В.
1961. The method of characteristic functionals, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., **2**, Berkeley—Los Angeles, Univ. Calif. Press, 403—419.

Пэлью и Саусвелл (Pellew A., Southwell R. V.)
1940. On maintained convective motion in a fluid heated from below, Proc. Roy. Soc., **A176**, No. 966, 312—343.

Райдер (Rider N. E.)
1954. Eddy diffusion of momentum, water vapour and heat near the ground, Phil. Trans. Roy. Soc., **A246**, No. 918, 481—501.

Райдер и Робинсон (Rider N. E., Robinson G. D.)
1951. A study of the transfer of heat and water vapour above a surface of short grass, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **77**, No. 333, 375—401.

Раундс (Rounds W.)
1955. Solutions of the two-dimensional diffusion equations, Trans. Amer. Geophys. Union, **36**, No. 2, 395—405.

Рейнольдс (Reynolds O.)
1874. On the extent and action of the heating surface of steam boilers, Proc. Lit. Phil. Soc. Manchester, **14**, 7—12.
1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinouos, and the law of resistance in parallel channels, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **174**, 935—982.
1894. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Phil. Trans. Roy. Soc., London, **186**, 123—161 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М., ОНТИ, 1936, 185—227).

Рейхардт (Reichardt H.)
1938. Messungen turbulenten Schwankungen, Naturwiss., **26**, Nr. 24/25, 404—408.
1940. Die Wärmeübertragung in turbulenten Reibungsschichten, Zs. angew. Math. Mech., **20**, Nr. 6, 297—328.
1942. Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz, VDI-Forschungs, No. 414.
1951a. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, Zs. angew. Math. Mech., **31**, Nr. 7, 208—219.

1951б. Die Grundlagen des turbulenten Wärmeüberganges, Arch. Ges. Wärmetech., **2**, 129—142.

Рибо (Ribaud G.)
1941. Nouvelle expression du coefficient de convection de la chaleur en régime d'écoulement turbulent, J. Phys. Radium (8), **2**, Nr. 1, 12—25.

Риис (Riis E.)
1962. The stability of Couette flow in non-stratified and stratified viscous fluids, Geofys. Publik. (Oslo), **23**, No. 4, 3—37.

Ричардсон (Richardson L. F.)
1920. The supply of energy from and to atmospheric eddies, Proc. Roy. Soc., **A97**, No. 686, 354—373.
1922. Weather prediction by numerical process, Cambridge, Univ. Press.
1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, Proc. Roy. Soc., **A110**, No. 756, 709—737.

Робертс (Roberts O. F. T.)
1923. The theoretical scattering of smoke in a turbulent atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A104**, No. 728, 640—654.

Робертсон (Robertson J. M.)
1957. The turbulent velocity distribution in rough pipe, Proc. 5th Midvestern Conf. Fluid Mech., Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 67—84.

Робинсон (Robinson G. D.)
1950. Two notes on temperature changes in the troposphere due to radiation, Centenn. Proc. Roy. Meteor. Soc., 26—33.
1951. The vertical convective heat flux in the atmosphere — a critical essay, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **77**, No. 331, 61—73.

Розанов Ю. А.
1963. Стационарные случайные процессы, М., Физматгиз.

Розенблют и Саймон (Rosenbluth M. N., Simon A.)
1964. Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow, Phys. Fluids, **7**, No. 4, 557—558.

Россби (Rossby C.-G.)
1948. On the nature of the general circulation in the lower atmosphere, «The atmospheres of the Earth and planets», ed. by G. P. Kuiper, Chicago, Univ. Press, ch. 2 (русск. перевод: «Атмосферы Земли и планет», М., ИЛ, 1951, 25—57).

Россби и Монтгомери (Rossby C.-G., Montgomery R. B.)
1935. The layer of frictional influence in wind and ocean currents, Pap. Phys. Oceanogr. Meteor., **3**, No. 3.

Рота (Rota G.-C.)
1960. Spectral theory of smoothing operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46**, No. 6, 863—868.

Ротта (Rotta J. C.)
1950. Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen, Ing.-Arch., **18**, Nr. 4, 277—280.
1951а. Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten, Ing. Arch., **19**, Nr. 1, 31—41.
1951б. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 1, Zs. Phys., **129**, Nr. 5, 547—572.
1951в. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 2, Zs. Phys., **131**, Nr. 1, 51—77.
1956. Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr, Ing. Arch., **24**, Nr. 4, 258—281.

1962а. Incompressible turbulent boundary layers, Mécanique de la turbulense (Colloque Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Ér. CNRS, 255—283.
1962б. Turbulent boundary layers in incompressible flow, Progr. Aeronaut. Sci. 2, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1—219.

Рэлей (Rayleigh)
1880, 1887, 1895. On the stability, or instability, of certain fluid motions, I—III, Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, **1**, 474—487; **3**, 17—23; **4**, 203—209.
1894. The theory of sound, London, Macmillan (русск. перевод: Рэлей. Теория звука, изд. 2-е, т. 1—2, М., Гостехиздат, 1955).
1913. On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid, Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, **6**, 197—204.
1916а. On the dynamics of revolving fluids, Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, **6**, 447—453.
1916б. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, **6**, 432—443.

Рэнни (Rannie W. D.)
1956. Heat transfer in turbulent shear flow, J. Aeronaut. Sci., **23**, No. 5, 485—489.

Саттон (Sutton O. G.)
1932. The theory of eddy diffusion in the atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A135**, No. 826, 143—165.
1934. Wind structure and evaporation in a turbulent atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A146**, No. 858, 701—722
1936. The logarithmic law of wind structure near the ground, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **62**, No. 271, 124—126.
1937. The logarithmic law of wind structure near the ground, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **63**, No. 275, 105—107.
1949. The application to micrometeorology of the theory of turbulent flow over rough surfaces, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **75**, No. 326, 335—350.
1950. On the stability of a fluid heated from below, Proc. Roy. Soc., **A204**, No. 1078, 297—309.
1953. Micrometeorology, N. Y. — Toronto — London, McGraw-Hill (русск. перевод: О. Г. Сеттон, Микрометеорология, Л., Гидрометиздат, 1958).

Саусвелл и Читти (Southwell R. V., Chitty L.)
1930. On the problem of hydrodynamic stability. 1. Uniform shearing motion in a viscous fluid, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A229**, 205—283.

Сафмен (Saffman P. G.)
1960. On the effect of the molecular diffusivity in turbulent diffusion, J. Fluid Mech., **8**, No. 2, 273—283.
1962а. Some aspects of the effects of the molecular diffusivity in turbulent diffusion, Mecanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS, 53—62.
1962б. The effect of wind shear on horizontal spread from instantaneous ground source, Quart. J. Roy. Met. Soc., 88, No. 378, 382—393.
1963. An approximate calculation of the Lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogenous turbulence, Appl. Scient. Res., **A11**, No. 3, 245—255.

Свердруп (Sverdrup H. U.)
1936. The eddy conductivity of the air over a smooth snow field, Geophys. Pub. **11**, No. 7.

Секслиштпильберг (Sexl T., Spielberg J.)
1958. Zum Stabilitätsproblem der Poiseuilleschen Strömung, Acta Phys. Austr., **12**, Nr. 1, 9—28.

Селлерс (Sellers W. D.)
1962. A simplified derivation of the diabatic wind profile, J. Atmosph. Sci., **19**, No. 2, 180—181.

Сермак (Cermak J. E.)
1963. Lagrangian similarity hypothesis applied to diffusion in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., **15**, No. 1, 49—64.

Серрин (Serrin J.)
1959. On the stability of viscous fluid motions, Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, No. 1, 1—13.

Сиджел (Segel L. A.)
1962. The non-linear interaction of two disturbances in the thermal convection problem, J. Fluid Mech., **14**, No. 1, 97—114.

Сиджел и Стюарт (Segel L. A., Stuart J. T.)
1962. On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, J. Fluid Mech., **13**, No. 2, 289—306.

Симмонс и Солтер (Simmons L. F. G., Salter C.)
1938. An experimental determination of the spectrum of turbulence, Proc. Roy. Soc., **A165**, No. 920, 73—89.

Синг (Synge J. L.)
1933. The stability of heterogeneous liquids, Trans. Roy. Soc. Canada, **27**, No. 1, 1—18.
1938. Hydrodynamic stability, Semi-centennial publications of the Amer. Math. Soc., **2** (Adresses), 227—269.

Сионо и Хамуро (Syōno S., Hamuro M.)
1962. Notes on the wind-profile in the lower layer of a diabatic atmosphere, J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II, **40**, No. 1, 1—12.

Сквайр (Squire H. B.)
1933. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, Proc. Roy. Soc., **A142**, No. 847, 621—628.
1948. Reconsideration of the theory of free turbulence, Phil. Mag., **39**, No. 288, 1—14.

Слейчер (Sleicher C. A., Jr.)
1958. Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, **80**, No. 3, 693—704.

Слуцкий Е. Е.
1938. Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes, Actual. Scient. Industr., N738, 33—55 (русск. перевод в книге: Е. Е. Слуцкий, Избранные труды, М., Акад. наук. 1960).

Смит (Smith F. B.)
1957. The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent atmosphere, J. Fluid Mech., **2**, No. 1, 49—76.

Смит и Уокер (Smith D. W., Walker J. H.)
1959. Skin-friction measurements in incompressible flow, Nat. Aeronaut. Space Adm., Rep. R-26.

Сорокин В. С.
1954. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. Прикл. мат. мех., **18**, № 2, 197—204.

Спигел (Spiegel E. A.)
1962. On the Malkus theory of turbulence, Mécanique de la turbulence, (Colloq. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS 181—201.

Сполдинг (Spalding D. B.)
1961. A single formula for the «law of the wall», J. Appl. Mech., **28E**, No. 3, 455—457.
1963. Исследование теплообмена пластины с турбулентным потоком жидкости, Инж.-физ. журн., **6**, № 3, 21—33.

Спэрроу, Голдстайн и Джонсон (Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K.)
1964. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary condition and non-linear temperature profile, J. Fluid Mech., **18**, No. 4, 513—528.

Спэрроу, Мунро и Джонсон (Sparrow E. M., Munro W. D., Jonsson V. K.)
1964. Instability of the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem, J. Fluid Mech., **20**, No. 1, 35—46.

Стейнмен (Steinman H.)
1956. The stability of viscous flow between rotating cylinders, Quart. Appl. Math., **14**, No. 1, 27—33.

Стернберг (Sternberg J.)
1962. A theory for the viscous sublayer of a turbulent fluid, J. Fluid Mech., **13**, No. 2, 241—271.

Стюарт (Stewart R. W.)
1956. Irrotational motion associated with free turbulent flows, J. Fluid Mech., **1**, No. 6, 593—606.
1959. The problem of diffusion in a stratified fluid, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 303—311 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 337—347).

Стюарт Дж. (Stuart J. T.)
1958. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability, J. Fluid Mech., **4**, No. 1, 1—21.
1960. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech., **9**, No. 3, 353—370.
1962. On three-dimensional non-linear effects in the stability of parallel flow, Advances Aeronaut. Sci., vol. **3**, Oxford—London—N. Y.—Paris, Pergamon Press, 121—142.
1963. Hydrodynamic stability, Laminar boundary layers (ed. by L. Rosenhead), London, Oxford Univ. Press, 492—579.
1964. On the cellular patterns in thermal convection, J. Fluid Mech., **18**, No. 4, 481—498.

Субботин В. И., Ибрагимов М. Х. и Номофилов Е. В.
1963. Определение отношения между коэффициентами переноса тепла и количества движения, Атомная энергия, **14**, № 4, 414—416.

Суинбенк (Swinbank W. C.)
1951a. The measurement of vertical transfer of heat and water vapour and momentum in the lower atmosphere with some results, J. Meteor., **8**, No. 2, 135—145.

1951б. A sensitive vapour pressure recorder, J. Scient. Instr., **28**, No. 3, 86—89.
1955. An experimental study of eddy transports in the lower atmosphere, C. S. I. R. O., Div. Meteor. Phys., Techn. Pap. No. 2, Melbourne.
1960. Wind profile in thermally stratified flow, Nature, **186**, No. 4723, 463—464.
1964. The exponential wind profile, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **90**, No. 384, 119—135.

Такеда (Takeda K.)
1951. On the atmospheric turbulence. II. On the generalized exponential formula, J. Meteor. Soc. Japan, **29**, No. 7, 243—245.

Такеучи (Takeuchi K.)
1961. On the structure of the turbulent field in the surface boundary layer, J. Meteor. Soc. Japan, **39**, No. 6, 346—367.
1962. On the nondimensional rate of dissipation of turbulent energy in the surface boundary layer, J. Meteor. Soc. Japan, **40**, No. 3, 127—135.

Такеучи и Иокояма (Takeuchi K., Yokoyama O.)
1963. The scale of turbulence and the wind profile in the surface boundary layer, J. Meteor. Soc. Japan, **41**, No. 2, 108—117.

Таунсенд (Townsend A. A.)
1947. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence, Proc. Cambr. Phil. Soc., **43**, No. 4, 560—570.
1951. The diffusion of heat spots in isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc., **A209**, No. 1098, 418—430.
1954. The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence, Proc. Roy. Soc., **A224**, No. 1159, 487—512.
1956. The structure of turbulent shear flow, Cambridge, Univ. Press (русск. перевод: А. А. Таунсенд, Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, М., ИЛ, 1959).
1958. The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid, J. Fluid Mech., **4**, No. 4, 361—375.
1959. Temperature fluctuations over a heated horizontal surface, J. Fluid Mech., **5**, No. 2, 209—241.
1962а. Natural convection in the earth's boundary layer, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **88**, No. 375, 51—56.
1962б. Remarks on the Malkus theory of turbulent flow, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS, 167—180.

Тацуми (Tatsumi T.)
1952. Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime, I—II, J. Phys. Soc. Japan, **7**, 489—494, 495—501.

Тацуми и Гото (Tatsumi T., Gotoh K.)
1960. The stability of free boundary layers between two uniform streams, J. Fluid Mech., **7**, No. 3, 433—441.

Тацуми и Какутани (Tatsumi T., Kakutani T.)
1958. The stability of a two-dimensional laminar jet, J. Fluid Mech., **4**, No. 3, 261—275.

Темпельман А. А.
1962. Эргодические свойства однородных случайных полей на группах, Труды VI Всесоюзн. совещ. теор. вероятн. мат. стат., Вильнюс, Гос. полит. научн. изд., 253—255.

Типпельскирх (Tippelskirch H.)
1956. Über Konvektionszellen, insbesondere im flüssigen Schwefel, Beitr. Phys. Atmosph., **29**, Nr. 1, 37—54.

Титьенс (Tietjens O.)
1925. Beitrage zur Entstehung der Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech., **5**, Nr. 3, 200—217.

Толмен и Файн (Tolman R. C., Fine P. C.)
1948. On the irreversible production of entropy, Rev. Mod. Phys., **20**, No. 1, 51—77.

Толмин (Tollmien W.)
1926. Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Zs. angew. Math. Mech., **6**, Nr. 6, 468—478.
1929. Über die Entstehung der Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., **21**—44.
1930. Beitrag zur Theorie der Turbulenz, Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm, **1**, 105—108.
1935. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 79—114.
1947. Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen, Zs. angew. Math. Mech., **25/27**, 33—50, 70—83.

Толмин и Преч (Tollmien W., Pretsch J.)
1946. Instabilität laminar Grenzschichten, Göttinger Monogr. über deutschen Luftfahrtforsch., **3**, Göttingen.

Томас (Thomas L. H.)
1953. The stability of plane Poiseuille flow, Phys. Rev., **91**, No. 5, 780—783.

Томас и Таунсенд (Thomas D. B., Townsend A. A.)
1957. Turbulent convection over a heated horizontal surface, J. Fluid Mech., **2**, No. 5, 473—492.

Торнтвейт и Кейзер (Thornthwaite C. H., Kaser P.)
1943. Wind-gradient observations, Trans. Amer. Geophys. Union, **24**, No. 1, 166—182.

Тьен (Tien C. L.)
1964. A note on distributions of temperature and eddy diffusivity for heat in turbulent flow near a wall, Zs. angew. Math. Phys., **15**, No. 1, 63—66.

Тьен и Васан (Tien C. L., Wasan D. T.)
1963. Law of the wall in turbulent channel flow, Phys. Fluids, **6**, No. 1, 144—145.

Тэйлор (Taylor G. I.) [Все статьи Тэйлора за исключением работы 1959 года могут быть также найдены в книге G. I. Taylor, Scientific papers, vol. 2, Cambridge, Univ. Press, 1960.]
1915. Eddy motion in the atmosphere, Phil. Trans. Roy. Soc., **A215**, 1—26.
1916. Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind, Brit. Adv. Com. Aero. Rep. and Memor., 272.
1921. Diffusion by continuous movements, Proc. London Math. Soc., (2), **20**, 196—211.
1923. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, Phil. Trans. Roy. Soc., London, **A223**, 289—343.
1931. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid, Proc. Roy. Soc., **A132**, No. 820, 499—523.

1932. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion, Proc. Roy. Soc., **A135**, No. 828, 685—706 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.—Л., ОНТИ, 1936, 228—248).
1935а. Statistical theory of turbulence, I—III, Proc. Roy. Soc., **A151**, No. 874, 421—464.
1935б. Statistical theory of turbulence. IV. Diffusion in a turbulent air stream, Proc. Roy. Soc., **A151**, No. 874, 465—478.
1935в. Distribution of velocity and temperature between concentric rotating cylinders, Proc. Roy. Soc., **A151**, No. 874, 494—512.
1936а. Statistical theory of turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layer, Proc. Roy. Soc., **A156**, No. 888, 307—317.
1936б. Fluid friction between rotation cylinders. I. Torque measurements, Proc. Roy. Soc., **A157**, No. 892, 546—564.
1938. Some recent developments in the study of turbulence, Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge (USA), 294—310.
1953. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, Proc. Roy. Soc., **A219**, No. 1137, 186—203.
1954а. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc., **A223**, No. 1155, 446—468.
1954б. Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion, Proc. Roy. Soc., **A225**, No. 1163, 473—477.
1959. The present position in the theory of turbulent diffusion, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 101—112 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 124—137).

Тэйлор P. (Taylor R. J.)
1952. The dissipation of kinetic energy in the lowest layers of the atmosphere, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **78**, No 336, 179—185.
1956а. Some measurements of heat flux at large negative Richardson number, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **82**, No. 351, 89—91.
1956б. An electronic analogue of the saturated vapour pressure curve of water, J. Scient. Instr., **33**, No. 11, 436—438.
1958. A linear unidirectional anemometer of rapid response, J. Scient. Instr., **35**, No. 1, 47—52.
1960а. Similarity theory in the relation between fluxes and gradients in the lower atmosphere, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **86**, No. 367, 67—78.
1960б. Вид профиля ветра в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1821—1827.
1963. The effect of instrumental inertia on measurement of the turbulent flux of water vapour, Austr. J. Appl. Sci., **14**, No. 1, 27—37.

Тэйлор и Дайер (Taylor R. J., Dyer A. J.)
1958. An instrument for measuring evaporation from natural surfaces, Nature, **181**, No. 4606, 408—409.

Тэйлор и Уэбб (Taylor R. J., Webb E. K.)
1955. A mechanical computer for micrometeorological research, C. S. I. R. O., Div. Meteor. Phys., Techn. Pap. No. 6, Melbourne.

Уберои и Корсин (Uberoi M. S., Corrsin S.)
1953. Diffusion of heat from a line source in isotropic turbulence, Nat. Adv. Com. Aeronaut. Rep., No. 1142.

Уилсон (Wilson B. W.)
1960. Note on surface wind stress over water at low and high wind speed, J. Geophys. Res., **65**, No. 10, 3377—3382.

Уленбек и Орнштейн (Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.)
1930. On the theory of Brownian motion, Phys. Rev., **36**, No. 3, 823—841.

Уотсон (Watson J.)
1960а. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of solution for plane Poiseuille and for plane Couette flow, J. Fluid Mech., **9**, No. 3, 371—383.
1960б. Three-dimensional disturbances in flow between parallel planes, Proc. Roy. Soc., **A254**, No. 1279, 562—569.
1962. On spatially-growing finite disturbances in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech., **14**, No. 2, 211—221.

Уховский М. Р. и Юдович В. И.
1963. Об уравнениях стационарной конвекции, Прикл. матем. мех., **27**, № 2, 295—300.

Уэбб (Webb E. K.)
1958. Vanishing potential temperature gradients in strong convection, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **84**, No. 360, 118—125.
1960. An investigation of the evaporation from Lake Eucumbene, C. S. I. R. O., Div. Meteor. Phys., Techn. Pap. No. 10, Melbourne.
1962. Thermal convection with wind shear, Nature, **193**, No. 4818, 840—842.

Фавр, Гавильо и Дюма (Favre A., Gaviglio J., Dumas R.)
1953. Quelques measures de correlation dans le temps et l'espace en soufflerie, La Rech. Aéro., N32, 21—28.

Филип (Philip J. R.)
1963. The theory of dispersal during laminar flow in tubes, I—II, Austr. J. Phys., **16**, No. 3, 287—299; 300—310.

Филлипс (Phillips O. M.)
1955. The irrotational motion outside a free turbulent boundary, Proc. Cambr. Phil. Soc., **51**, No. 1, 220—229.

Флейшмен и Френкиль (Fleishman B. A., Frenkiel F. N.)
1954. Diffusion of matter emitted from a line source in a non-isotropic turbulent flow, J. Meteor., **12**, No. 2, 141—145.

Фок В. А.
1926. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света, Труды Гос. оптич. ин-та **4**, № 34.

Фокнер (Falkner V. M.)
1943. The resistance of a smooth flat plate with turbulent boundary layer, Aircr. Eng., **15**, 65—69.

Форстолл и Гейлорд (Forstall W., Gaylord E. W.)
1955. Momentum and mass transfer in a submerged water jet, J. Appl. Mech., **22**, No. 2, 161—164.

Френкиль (Frenkiel F. N.)
1952. Application of the statistical theory of turbulent diffusion to micrometeorology, J. Meteor., **9**, No. 4, 252—259.
1953. Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence, Adv. Appl. Mech., **3**, 61—107 (русск. перевод: Ф. Н. Френкиль, Турбулентная диффузия; распределение средней концентрации в поле однородного турбулентного потока, Проблемы механики, М., ИЛ, 1955, стр. 384—421).

Френкиль и Шеппард (Frenkiel F. N., Sheppard P. A., ed.)
1959. Atmospheric diffusion and air pollution, Adv. in Geophys., **6**, N. Y. — London, Acad. Press (русск. перевод: Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха, М., ИЛ, 1962).

Фрич (Fritsch W.)
1928. Einfluss der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen, Zs. angew. Math. Mech., **8**, Nr. 2, 199—216.

Фрост (Frost R.)
1946. Turbulence and diffusion in the lower atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A186**, No. 1004, 20—35.
1948. Atmospheric turbulence, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **74**, No. 321, 316—338.

Функ (Funk J. P.)
1960. Measured radiative flux divergence near the ground at night, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., **86**, No. 369, 382—389.

Фэйдж и Тауненд (Fage A., Townend H. C. H.)
1932. An examination of turbulent flow with an ultramicroscope, Proc. Roy. Soc., **A135**, No. 828, 656—677 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.—Л., ОНТИ, 1936, 163—184).

Хаген (Hagen G.)
1839. Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren, Pogg. Ann., **46**, 423—442.

Халтинер и Мартин (Haltiner G. J., Martin F. L.)
1957. Dynamical and physical meteorology, N. Y. — Toronto — London, McGraw-Hill (русск. перевод: Дж. Халтинер, Ф. Мартин, Динамическая и физическая метеорология, М., ИЛ, 1960).

Хама (Hama F. R.)
1953. On the velocity distribution in the laminar sublayer and transition region in turbulent shear flows, J. Aeronaut. Sci., **20**, No. 9, 648—650.
1954. Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces, Trans. Soc. Naval Arch. Marine Engrs, **62**, 333—358.

Хама, Лонг и Хегарти (Hama F. R., Long J. D.., Hegarty J. C.)
1957. On transition from laminar to turbulent flow, J. Appl. Phys., **28**, No. 4, 388—394.

Хансен (Hansen M.)
1928. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte, Z. angew. Math. Mech., **8**, Nr. 2, 185—199.

Хант (Hunt J. N.)
1954. The turbulent transport of suspended sediment in open channels, Proc. Roy. Soc., **A224**, No. 1158, 322—335.

Хелстед (Halstead M.)
1943. A stability term in the wind-gradient equation, Trans. Amer. Geophys. Union, **24**, No. 1, 204—208.
1952. The relationship between wind structure and turbulence near the ground, Geophys. Res. Pap. No. 19, 97—126.

Хинце (Hinze J. O.)
1951. Turbulent diffusion from a source in turbulent shear flow, J. Aeronaut. Sci., **18**, No. 8, 565—566.
1959. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory, N. Y., McGraw-Hill (русск. перевод: И. О. Хинце, Турбулентность, М., Физматгиз, 1963).
1962. Turbulent pipe-flow, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Éd. CNRS, 130—165.

Хинце и Ван дер Хегге Цийнен (Hinze J. O., Van der Hegge Zijnen B. G.)
1949. Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet, Appl. Sci. Res., **A1**, 435—461.
1951. Local transfer of heat in anisotropic turbulence, Inst. Mech. Eng., Proc. Gener. Discus. on Heat Transfer, 188—197.

Холцмен (Holzman B.)
1943. The influence of stability on evaporation, Ann. New York Acad. Sci., **44**, 13—19.

Хопф (Hopf E.)
1952. Statistical hydromechanics and functional calculus, J. Rat. Mech. Anal., **1**, No. 1, 87—123.

Хоуард (Howard L. N.)
1959. Hydrodynamic stability of a jet, J. Math. and Phys., **39**, No. 4, 283—298.
1961. Note on a paper of John W. Miles, J. Fluid Mech., **10**, No. 4, 509—512.
1963. Neutral curves and stability boundaries in stratified flow, J. Fluid Mech., **16**, No. 3, 333—342.

Хоуарт (Howarth L., ed.)
1953. Modern developments in fluid dynamics. High speed flow, Oxford Univ. Press (русск. перевод: Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Л. Хоуарта, М., ИЛ, 1955).

Хоуген, Баред и Антанаитис (Haugen D. A., Barad M. L., Antanaitis P.)
1961. Values of parameters appearing in Sutton's diffusion models, J. meteorol., **18**, No. 3, 368—372.

Хсу, Сато и Сейдж (Hsu N. T., Sato K., Sage B. H.)
1956. Temperature gradients in turbulent gas streams. Effect of flow condition upon eddy conductivity, Ind. Eng. Chem., **48**, No. 12, 2218—2223.

Худимото (Hudimoto B.)
1941. On the turbulent boundary layer, Trans. Japan Soc. Mech. Eng., **7**.
1951. A brief note on the laminar sublayer of the turbulent boundary layer, Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., **13**, 174—179.

Хэй и Паскуил (Hay J. S., Pasquill F.)
1959. Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence, Adv. Geophys., **6** (Atmospheric diffusion and air pollution), 345—365 (русск. перевод в сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., ИЛ, 1962, 382—404).

Цай Ко-ен
1961. Теплообмен в турбулентном потоке жидкости при больших значениях чисел Прандтля, Инж.-физ. журн., **4**, № 8, 20—29.

Цванг Л. Р.
1960. Измерение частотных спектров температурных пульсаций в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1252—1262.

Цейтин Г. Х.
1963. Распространение примеси от высотного источника, Труды Ленингр. гидромет. ин-та, вып. 15, 10—31.

Чандрасекар (Chandrasekhar S.)
1943. Stochastics problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys., **15**, No. 1, 1—89 (русск. перевод: С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1947.)

1953. The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field, Proc. Roy. Soc., **A216**, No. 1126, 293—309.
1954. The stability of viscous flow between rotating cylinders, Mathematika, **1**, 5—13.
1958. The stability of viscous flow between rotating cylinders, Proc. Roy. Soc., **A246**, No. 1246, 301—311.
1960. The stability of inviscid flow between rotating cylinders, J. Indian Math. Soc. (N. S.), **24**, 211—221.
1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford, Clarendon Press.

Чандрасекар и Элберт (Chandrasekhar S., Elbert D. D.)
1962. The stability of viscous flow between rotating cylinders. II, Proc. Roy. Soc., **A268**, No. 1333, 145—152.

Чарнок (Charnock H.)
1958a. Meteorology, Sci. Progress, **46**, No. 183, 470—487.
1958б. Physical oceanography, Sci. Progress, **46**, No. 183, 487—501.

Чарноки Эллисон (Charnok H., Ellison T. H.)
1959. Fluctuations of temperature and humidity at 134m over the sea, Deutsch. Hydrograph. Zs., **12**, Nr. 4, 171—180.

Чепмен и Каулинг (Chapman S., Cowling T. G.)
1952. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge, Univ. Press (русск. перевод: С. Чепмен и Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, М., ИЛ, 1960).

Чепмен и Кестер (Chapman D. R., Kester R. H.)
1953. Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities, J. Aeronaut. Sci., **20**, No. 7, 441—448.

Чжоу (Chou P. Y.)
1945a. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, Quart. Appl. Math., **3**, No. 1, 38—54.
1945б. Pressure flow of a turbulent fluid between parallel planes, Quart. Appl. Math., **3**, No. 3, 198—209.
1947. Turbulent flow along a semi-infinite plane, Quart. Appl. Math. **5**, No. 3, 346—353.

Чжу и Коважный (Chu B. T., Kovásznay L. S. G.)
1958. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas, J. Fluid Mech., **3**, No. 5, 494—514.

Чилтон и Колбэрн (Chilton T. H., Colburn A. P.)
1934. Mass transfer (absorption) coefficients, Ind. Eng. Chem., **26**, No. 11, 1183—1187.

Шаде (Schade H.)
1964. Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers, Phys. Fluids, **7**, No. 5, 623—628.

Шёнгер (Schoenherr K. E.)
1932. Resistance of flat surfaces moving through a fluid, Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Eng., **40**, 279—313.

Шеппард (Sheppard P. A.)
1947. The aerodynamic drag of the earth's surface and the value of von Karman's constant in the lower layer, Proc. Roy. Soc., **A188**, No. 1013, 208—222.

Шервуд (Sherwood T. K.)
1950. Heat transfer, mass transfer and fluid friction relationships in turbulent flow, Ind. Eng. Chem., **42**, No. 10, 2077—2084.

Шиллер (Shiller L.)
1932. Strömung in Röhren, Handbuch der Experimentalphysik, **4**, Nr. 4 (русск. перевод: Движение жидкостей в трубах, М., ОНТИ, 1936).
1934. Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung, Zs. angew. Math. Mech., **14**, Nr. 1, 36—48.

Шиотани (Shiotani M.)
1962. The relationship between wind profiles and stabilities of the air layer in the outskirts of the city, J. Meteor. Soc. Japan, **40**, No. 6, 315—329.

Шлихтинг (Schlichting H.)
1933a. Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 160—198.
1933б. Berechnung der Anfachung kleiner Störungen bei der Plattenströmung, Zs. angew. Math. Mech., **13**, Nr. 3, 171—174.
1935a. Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattengrenzschicht, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., **1**, 47—78.
1935б. Turbulenz bei Wärmeschichtung, Z. angew. Math. Mech., **15**, Nr. 6, 313—338.
1936. Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem, Ing.-Arch. **7**, Nr. 1, 1—34.
1951. Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe (русск. перевод: Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, М., ИЛ, 1956).
1959. Entstehung der Turbulenz, Handbuch der Physik, Berlin (русск. перевод: Г. Шлихтинг, Возникновение турбулентности, М., ИЛ, 1962).

Шмидт (Schmidt W.)
1917. Der Massenaustausch bei der ungeordneten Strömung in freier Luft und seine Folgen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl. (2a), **126**, Nr. 6, 757—804.
1925. Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg, Grand.

Шубауэр и Клебанов (Schubauer G. B., Klebanoff P. S.)
1956. Contributions on the mechanics of boundary-layer transition, Nat. Adv. Com. Aeronaut. Rep. No. 1289.

Шубауэр и Скрэмстед (Schubauer G. B., Skramstad H. K.)
1947. Laminar boundary-layer oscilations and stability of laminar flow, J. Aeronaut. Sci., **14**, No. 2, 69—78.

Шубауэр и Чен (Schubauer G. B., Tchen C. M.)
1959. Turbulent flow, Turbulent flow and heat transfer (ed. by C. C. Lin), Princeton, Univ. Press, 75—195 (русск. перевод в книге «Турбулентные течения и теплопередача». М., ИЛ, 1963, 83—205).

Шульц-Грунов (Schultz-Grunow F.)
1940. Neues Reibungswinderstandgesetz für glatte Platten, Luftfahrtforsch., **17**, Nr. 8, 239—246.

Шэнь (Shen S. F.)
1954. Calculated amplified oscillations in plane Poiseuille flow and Blasius flows, J. Aeronaut. Sci., **21**, No. 1, 62—64.

Щербакова Л. Ф.
1949. Исследование некоторых способов характеристики турбулентного обмена на основе данных наблюдений в нижнем слое атмосферы, Труды Главн. геофиз. обсерв., № 16(78), 25—51.

Эйнштейн и Ли (Einstein H. A., Li H.)
1956. The viscous sublayer along a smooth boundary, Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs., Pap. 945.

Эйфель (Eiffel G.)
1912. Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement, C. r. Acad. Sci., **155**, 1597—1599.

Эккерт (Eckert E. R. G.)
1950. Introduction to the transfer of heat and mass, N. Y., McGraw-Hill (русск. перевод: Э. Р. Эккерт, Введение в теорию тепло- и массообмена, М. — Л., Госэнергоиздат, 1957).

Экман (Ekman V. W.)
1911. On the change from steady to turbulent motion of liquids, Ark. Mat. Astron. Fys., **6**, No. 12.

Элдер (Elder J. W.)
1959. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., **5**, No. 4, 544—560.
1960. An experimental investigation of turbulence spots and breakdown to turbulence, J. Fluid Mech., **9**, No. 2, 235—249.

Элиас (Elias F.)
1929. Die Wärmeübertragung einer gehiezten Platte an strömende Luft. I. Anlage und Ergebnisse der Versuche, Zs. angew. Math. Mech., **9**, Nr. 6, 434—465.

Элиассен, Хойланд и Риис (Eliassen A., Høiland E., Riis E.)
1953. Two-dimensional perturbation of flow with constant shear of a stratified fluid, Publ. Inst. Weath. Clim. Res., Oslo, No. 1.

Эллиот (Elliot W. P.)
1957. A comparision of some approaches to the diabatic wind profile, Trans. Amer. Geophys. Union, **38**, No. 1, 21—24.
1960. An hypothesis for the diabatic mixing length, J. Meteor., **17**, No. 6, 680—681.

Эллисон (Ellison T. H.)
1956. Atmospheric turbulence, Surveys in Mechanics (ed. by G. K. Batchelor and R. M. Davies), Cambridge, Univ. Press, 400—430.
1957. Turbulent transfer of heat and momentum from an infinite rough plane, J. Fluid Mech., **2**, No. 5, 456—466.
1959. Turbulent diffusion, Sci. Progress, **47**, No. 187, 495—506.
1960. A note on the velocity profile and longitudinal mixing in a broad open channel, J. Fluid Mech., **8**, No. 1, 33—40.

Эллисон и Тэрнер (Ellison T. H., Turner J. S.)
1960. Mixing of dense fluid in a turbulent pipe flow. Parts 1—2, J. Fluid Mech., **8**, No. 4, 514—544.

Элрик (Elrick D. E.)
1962. Source functions for diffusion in uniform shear flow, Australian J. Phys., **15**, No. 3, 283—288.

Элрод (Elrod H. G.)
1957. Note on the turbulent shear stress near a wall, J. Aeronaut. Sci., **24**, No. 6, 468—469 (см. также Исправление к этой статье: J. Aeronaut. Sci., **27**, No. 2, 145, 1960).

Эш (Esch R. E.)
1957. The instability of shear layer between two parallel streams, J. Fluid Mech., **3**, No. 3, 289—303.

Юдин М. И. и Швец М. Е.
1940. Стационарная модель распределения ветра с высотой в турбулентной атмосфере, Труды Гл. геофиз. обсерв., № 31, 42—52.

Яглом А. М.
1948. Однородная и изотропная турбулентность в вязкой и сжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., **12**, № 6, 501—522.
1952. Введение в теорию стационарных случайных функций, Усп. матем. наук, **7**, № 5(51), 3—168.
1965. Лагранжевы характеристики турбулентности в термически стратифицированном приземном слое и в конвективных струях, Изв. АН СССР, сер. «Физика атмосферы и океана», **1**, № 2.

Ямамото (Yamamoto G.)
1959. Theory of turbulent transfer in non-neutral conditions, Journ. Meteor. Soc. Japan, **37**, No. 2, 60—69.

Ямамото и Кондо (Yamamoto G., Kondô J.)
1959. Effect of surface reflectivity for long wave radiation on temperature profiles near the bare soil surface, Sci. Reports Tôhoku Univ., ser. V, Geophysics, **11**, No. 1, 1—9.

Ямамото и Шимануки (Yamamoto G., Shimanuki A.)
1960. Numerical solution of the equation of atmospheric turbulent diffusion, Sci. Rep. Tôhoku Univ., ser. V, Geophys., **12**, No. 1, 24—35.
1964. The determination of lateral diffusivity in diabatic conditions near the ground from diffusion experiments, J. Atmosph. Sci., **21**, No. 2, 187—196.

Андрей Сергеевич Монин,

Акива Моисеевич Яглом

Статистическая гидромеханика
Часть I

М., 1965 г., 640 стр. с илл.

Редактор *Г. С. Голицын*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 5/IX 1964 г. Подписано к печати 10/XII 1964 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 40. Условн. печ. л. 40.
Уч.-изд. л. 37,94. Тираж 7000 экз. Т-17074.
Цена книги 2 р. 05 к. Заказ № 729

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по печати. Измайловский проспект, 29