АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

В. В. Мелешко
М. Ю. Константинов

ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1993

УДК 532

В монографии рассмотрены закономерности движения вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости. Дан обзор современного состояния проблем вихревой динамики. Приведены математические модели и методы расчета плоских и осесимметричных вихревых структур в свободном и ограниченном пространстве. Проанализированы вопросы упорядоченного и хаотического движения вихрей, тесно связанные с современными проблемами интегрируемости динамических систем. Изучено явление адвекции частиц жидкости в поле вектора завихренности. Рассмотрено влияние вязкости.

Для научных и инженерно-технических работников, а также преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

У монографії розглянуто закономірності руху вихрових структур в ідеальній нестисливій рідині. Дано огляд сучасного стану проблем вихрової динаміки. Приведено математичні моделі і методи розрахунку плоских та осесиметричних вихрових структур у вільному і обмеженому просторі. Проаналізовано питання упорядкованого та хаотичного руху вихрів, тісно пов'язані з сучасними проблемами інтегровності динамічних систем. Вивчено явище адвекції частинок рідини у полі вектора завихрюваності. Розглянуто вплив в'язкості.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, а також викладачів, аспірантів та студентів вузів.

Ответственный редактор *И.Т. Селезов*

Утверждено к печати ученым советом Института гидромеханики АН Украины

Редакция математики и механики

Редактор *Н.И. Сухомлинская*

$\text{М}\,\dfrac{1603040100-136}{221-93}\,247-92$

ISBN 5-12-002213-8

© В. В. Мелешко, М.Ю.Константинов, 1993

Посвящается В.Т.Гринченко, считавшему, что писать эту книгу будет трудно

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Досужий читатель! Ты и без клятвы можешь поверить, как хотелось бы мне, чтобы эта книга, плод моего разумения, являла собой верх красоты, изящества и глубокомыслия. Но отменить закон природы, согласно которому всякое живое существо порождает себе подобное, не в моей власти. А когда так, так что же иное мог породить бесплодный мой и неразвитый ум, если не повесть о костлявом, тощем, взбалмошном сыне, полном самых неожиданных мыслей, доселе никому не приходивших в голову...» — такими словами, следуя М.Сервантесу, хотелось бы начать настоящую монографию. «Взбалмошный» ее герой — это вектор завихренности, растяжение и переплетение линий которого в потоке жидкости порождает труднейшую и, пожалуй, основную проблему гидродинамики — проблему турбулентности.

Концепция вихревого движения имеет давнюю историю. Здесь можно указать как на феноменологические вихревые модели Вселенной (Декарт) и атома (Кельвин), так и на тонкие наблюдения закономерностей вихреобразования и их яркое художественное воплощение (Леонардо да Винчи, Ван Гог). Разнообразные примеры такого движения в природе, науке и технике приведены в интересной монографии [173]. Математическое описание процессов, связанных с движением завихренности в жидкости, началось в 1858 г. выдающейся статьей Г.Гельмгольца [135]. О фундаментальной важности этой статьи свидетельствуют и ее переводы на русский и английский (в Англии и США) языки. С тех пор интерес к проблемам вихревой динамики («сухожилий и : ускулов течения жидкости»[224]) то угасал, то вновь возрождался. По замечанию Ф.Сэффмена[222] повышенный интерес к этой проблеме наблюдается примерно каждые 50 лет. И если первые исследователи были в основном настроены на создание объясняющей инерцию и гравитацию «вихревой теории материи» [177, 227, 241], то сейчас дело обстоит иначе.

В настоящее время наблюдается стремительный прогресс в понимании физических явлений, обусловленных взаимодействием вихревых структур [92, 224, 251]. Экспериментально открытые когерентные структуры [147] — крупномасштабные вихревые образования в свободных сдвиговых течениях (струях и следах), в тонкой зоне течений на поверхностях раздела и в пограничных слоях — заставили в значительной степени изменить оценку возможностей классической статистической теории турбулентности и обратиться к детерминированным моделям переноса зав хренности и энергии по каскаду волновых чисел. Взаимодействия вихрей существенно влияют на природные процессы в атмосфере и океане. В технике не может быть достигнута полная ясность в понимании процессов отрыва потока, сопротивления движению и генерации шума без четкого представления о природе вихревого движения. В широком и важном классе течений идеальной невязкой жидкости динамика завихренности обеспечивает физически содержательные примеры нелинейных гамильтоновых систем бесконечной размерности, что представляет значительный интерес в связи с современными работами по хаотическим явлениям в динамических системах [32]. Недавно возникший интерес к проблеме «лагранжевой» турбулентности — хаотическому движению частиц жидкости в поле заданной (в частности, завихренностью) скорости и связанным с этим задачам эффективного перемешивания жидкостей в различных процессах химической технологии — еще одна область современного приложения вихревой динамики [198].

Прогресс в изучении вихревых движений в значительной степени обусловлен как расширением возможностей компьютеров и эффективных численных методов, так и совершенствованием экспериментального оборудования, позволяющего осуществлять более тонкие измерения. С помощью компьютеров целые классы задач вихревой динамики выведены на принципиально иной уровень. Появилась возможность численного моделирования [167] трехмерных взаимодействий вихрей.

При работе над книгой, однако, представлялось целесообразным сконцентрировать внимание на отдельных вопросах динамики вихревых стуктур. При этом рассматривались как задачи, которые ставились на начальных этапах формирования теории вихрей и решались при помощи сравнительно простых формул, так и задачи, для решения которых требовалась современная вычислительная техника. Во всех случаях результаты представлялись так, чтобы сложность выкладок и вычислений не мешала раскрытию особенностей нелинейного поведения вихревых структур, поскольку есть опасность многие математические формулы, являющиеся вспомогательным средством в современной теории вихрей, рассматривать в качестве физической реальности.

Принципиальным моментом развития вихревой динамики является постоянный интерес к ней великих ученых прошлого. Изучение работ Г.Гельмгольца, Г.Кирхгоффа, В.Томсона, А.Пуанкаре, Н.Е.Жуковского позволяет раскрыть некоторые стороны научного мышления классиков в процессе выбора задач, методов их решения и трактовки результатов. Особо следует выделить диссертацию В.Гребли [130], заслуженный и устойчивый интерес к которой возник лишь спустя столетие [88]. В работе [88] приведены некоторые рисунки из старых научных работ, а в приложении данной монографии представлены переводы трех замечательных экспериментальных работ по вихрям. Своеобразные и в чем-то наивные взгляды великих исследователей вдохновляли нас, и хочется, чтобы читатели данной монографии ощутили то же. Такая работа была бы невозможной без помощи сотрудников филиала №1 Центральной научной библиотеки АН Украины им.В.И.Вернадского, поскольку и сегодня справедливы слова Рэлея из предисловия к книге «Теория звука», в которой говорится: «Многие из наиболее ценных вкладов в науку сейчас можно найти в журналах и трудах научных обществ, изданных в разных частях света и на нескольких языках и часто практически недоступных тем, кто не живет в соседстве с большими публичными библиотеками. При таком положении вещей технические помехи изучению предмета требуют затрат излишнего труда и создают для развития науки препятствия, которые нельзя недооценивать».

Следует признать, что авторам настоящей монографии ясно видны недочеты как в фактических результатах, так и в их анализе и стиле изложения. Не все имеющиеся в нашем распоряжении данные использованы должным образом и не весь огромный научный материал, относящийся к данной книге, критически переработан. Однако, приняв во внимание сложность затронутой темы — динамики вихревых структур, надеемся, что читатели смогут найти для себя нужные страницы и разделить интерес ко многим описанным в книге явлениям.

На протяжении многих лет авторы находили постоянную поддержку у своих учителей В.Т.Гринченко и А.Ф.Улитко, которым глубоко признательны за участие в обсуждении структуры книги, обсуждении некоторых результатов, неустанное внимание и постоянно обращенный к нам вопрос, — что есть истина? Авторы рады возможности поблагодарить Х.Арефа и Г.М.Заславского за обсуждение ряда принципиальных вопросов хаотической и регулярной динамики точечных вихрей. Многие недавние исследования, отражающие научные интересы авторов и обсуждающиеся в этой книге, были выполнены в сотрудничестве с А.А.Гуржием и Т.П.Коновалюк. Выражаем им искреннюю благодарность, а также И.В.Вовку и Ю.Н.Савченко за полезные дискуссии по ключевым вопросам, М.С.Капелевичу за создание условий для творческой работы, З.И.Белокриницкой за помощь и терпение при подготовке материалов к публикации. Здесь, к сожалению, невозможно перечислить всех друзей и коллег, без поддержки которых настоящая работа не была бы выполнена. Всем им авторы глубоко признательны.

ТЕОРИЯ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Одинаково трудно удовлетворить читателей, когда пишешь о предметах либо малоинтересных, либо представляющих слишком большой интерес.

Стендаль «Жизнеописание Наполеона»

Гидромеханика как самостоятельный раздел механики сплошной среды заложена трудами выдающихся ученых, среди которых в первую очередь следует назвать Д.Бернулли, Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, О.Коши, К.Навье,Д.Стокса, А.Сен-Венана. Благодаря их работам уже в середине XIX в. задача определения полей скорости и давления в жидкости сведена к граничной задаче математической физики. В общем случае ее решение состоит из трех этапов: составление дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости внутри некоторой области; получение интегралов этих уравнений; подчинение этих интегралов граничным и начальным условиям.

И если применительно к классическим моделям идеальной и вязкой жидкости первый этап успешно давно решен — уравнения Эйлера и Навье — Стокса выглядят обманчиво просто, то второй и третий этапы встречают до сих пор огромные трудности. Эти трудности связаны прежде всего с нелинейностью основных уравнений движения. Применительно к идеальной жидкости Г.Гельмгольц установил [135], что все возможные интегралы уравнений Эйлера делятся на два широких класса,отвечающих так называемому потенциальному и вихревому движению.Г.Гельмгольц детально исследовал основные общие свойства интегралов вихревого движения и, по словам Н.Е. Жуковского [27], та роль, какая выпала на долю Пуансо при разъяснении вопроса о движении твердого тела, выпала и Гельмгольцу в разъяснении вопроса о движении жидкости. Значительная часть работ, появившихся после 1858 г. и посвященных теоретическим исследованиям вопроса о вихревых движениях идеальной жидкости, представляет собой развитие и обобщение полученных Гельмгольцем результатов и приложение их к решению некоторых задач. В настоящее время в связи с развитием экспериментальной и компьютерной техники появляется возможность глубже проникнуть в понимание многих сложных процессов. Однако настолько велико число предполагаемых вариантов движений, что систематизация даже простейших случаев представляет большой интерес и значительные трудности. Такой систематизации будет отведена большая часть объема данной книги. В первой главе представлены основополагающие сведения, относящиеся к моделям жидкости, способам описания их движения, в частности вихревого, а также к основным их законам.

1. Теоретические модели жидкости

Понятие жидкости. При изучении движения и равновесия тел в механике их разделяют на два класса: твердые и жидкие. Жидкие тела, обладая незначительным взаимным сцеплением и чрезвычайной подвижностью своих частей, в свою очередь подразделяются на собственно текучие или капельные жидкости и газы. Текучие жидкости могут содержаться в открытом сосуде и их можно переливать из одного открытого сосуда в другой. Газы наоборот стремятся к неограниченному расширению и должны содержаться в закрытом сосуде. Кратко можно сказать, что твердые тела имеют как размеры, так и форму, жидкости имеют размеры, но не имеют формы, а газы не имеют ни размеров, ни формы. Более строго жидкость можно определить как вещество, которое легко и непрерывно изменяет свою форму, когда к нему приложены даже малые, но надлежащим образом направленные силы*.

При теоретическом подходе к изучению явлений природы из сложного комплекса составляющих явление исключаются второстепенные, с определенной точки зрения, признаки. Создается модель явления, которая подвергается количественному анализу. Эта модель может быть упрощенной; вначале ее следует выбирать наиболее простой для аналитического изучения и лишь последующие этапы развития теории** вносят в нее все бóльшие и бóльшие приближения к действительности. Упрощенная модель заключает в себе внутренние противоречия, приводящие к отклонениям характеризуемого ею явления от действительных процессов в природе. Самая важная и наиболее трудная задача при теоретическом описании физического явления и построения его математической модели — ввести именно те упрощающие допущения (научные абстракции), которые существенны для интересующих особенностей явления, и пренебречь влияниями меньшего порядка.

* В незаконченной рукописи И. Канта «Переход от метафизических начальных основ естествознания к физике» имеется следующее определение: «Жидкой называется материя, которой можно сообщить движение только путем непрерывно следующих друг за другом ударов бесконечно раздробленной величины на спокойной поверхности тела. Наоборот, мы называем твердым такое тело, поверхность которого, оставаясь неподвижной, сопротивляется упомянутым ударам. Капельно-жидкой называется весомая материя, принимающая вследствие внутреннего притяжения в окружающем пространстве шаровую форму (жидкость, стремящаяся занять наименьший объем»)[63].

** Прежде всего под стимулирующим влиянием эксперимента (совершенствование его методики и средств наблюдения, расширение круга физических параметров). Как отмечал английский химик Г. Дэви еще в 1799 г.: «Один хороший эксперимент стоит больше изобретательности ньютоновского ума»[34].

В основе гидромеханики, являющейся одним из разделов механики сплошной среды, лежит несколько основных научных абстракций.

Гипотеза сплошности и непрерывности. Согласно гипотезе сплошности, жидкость, как и всякая сплошная среда — континуум, представляет собой непрерывное распределение по объему совокупности различимых материальных элементов, называемых *жидкими частицами*. Допущение о сплошности среды является идеальной абстракцией и в точности в природе никогда не соблюдается, так как все тела имеют молекулярное и атомное строение. Однако в качестве первого приближения к действительности в данном случае им можно воспользоваться. Решающим является то, что все результаты, полученные при теоретическом описании широчайшего класса течений жидкости с учетом гипотезы сплошности, прекрасно согласуются с многочисленными данными экспериментальных наблюдений.Такая гипотеза не исключает возможности образования в рассматриваемой жидкости отдельных мест разрывов ее объема — внутренних полостей или каверн. Однако при изучении таких кавитационных явлений полости нельзя включать в общий объем жидкости, а их границы следует принимать как свободные поверхности ограничения объема жидкости.

Следующей является гипотеза непрерывности количественного распределения плотности, скорости и внутренних сил по всему объему жидкости и их изменений во времени. Такое предположение позволяет использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления. При этом из рассматривания выпадают явления, связанные, например, с разрывами плотности на скачках уплотнения или с разбрызгиванием жидкости. Разного рода разрывные движения изучаются на базе теории непрерывных движений с формулировкой дополнительных условий на поверхностях разрывов [67].

Модели жидкости. Среди математических моделей жидкости наиболее широко применяются две — модели идеальной и вязкой жидкости. Для идеальной жидкости в процессе движения силы взаимного давления двух ее частей, прилегающих к проведенной через любую точку плоскости, всегда перпендикулярны к последней. Иными словами, идеальная жидкость не способна сопротивляться никаким касательным (сдвиговым) усилиям. Следствие такого определения — равенство силы нормального давления в точке по всем направлениям для движущейся жидкости. Концепция идеальной жидкости является приближением к реальной жидкости аналогично тому, как идеальная окружность в абстрактной геометрии характеризует зачастую далекие от совершенства окружности.

Уравнения движения идеальной жидкости получены Л.Эйлером в XVIII в. и носят его имя. С тех пор многие выдающиеся математики и механики изучали типы движения безотносительно к тому, существуют ли они для реальной жидкости. Обнаружилось противоречие (знаменитый « парадокс Д'Аламбера»), заключающееся в том, что твердое тело любой формы при равномерном движении в идеальной жидкости в режиме безотрывного обтекания не испытывает сопротивления. Поэтому неудивительно, что многие инженеры практики считали, что такая «сухая вода» не имеет ничего общего с реальной жидкостью, и к концу XIX в. все ученые- гидромеханики делились на инженеров-гидравликов, наблюдавших то, что нельзя объяснить, и математиков, объяснявших то, что нельзя наблюдать [9].

Эксперименты показали, что все жидкости в той или иной степени обладают способностью сопротивляться сдвиговым усилиям, т.е. в них в процессе движения на мысленно выделенных площадках существуют и касательные силы, которые схожи с силами трения между поверхностями твердых тел. Однако трение для твердых тел возникает на границе двух сред, движущихся друг относительно друга с конечной скоростью. В то же время в жидкости трение происходит внутри, причем скорость изменяется непрерывно от точки к точке. Жидкости, в которых наряду с нормальными силами давления на выделенной площадке существуют касательные усилия (т.е. силы воздействия прилегающих частей жидкости уже не перпендикулярны к их общей поверхности), называются вязкими.

Д.Стокс [228], заложив основы феноменологического подхода к гидродинамике и теории упругости, предложил общее определение понятия жидкости: разность между давлением, действующим на проходящую в заданном направлении плоскость через произвольную точку P движущейся жидкости и одинаковым для всех направлений давлением в этой же точке, когда жидкость в ее окрестности находится в состоянии относительного равновесия, зависит от относительного движения жидкости в непосредственной близости от P, причем относительное движение, обусловленное любым вращением, может быть исключено без изменения упомянутой разницы давления [228]. Этому определению Д.Стокс придал и четкую математическую форму, придя в итоге к уравнениям движения вязкой жидкости. В настоящее время эти уравнения называются уравнениями Навье — Стокса. История развития представлений о характере и свойствах жидкости в XIX и начале XX в. представлена в работе [206]. Экспериментально установлено, что коэффициент пропорциональности между касательными напряжениями в точке и локальным градиентом скорости зависит от температуры жидкости и давления в точке и называется *коэффициентом вязкости* μ. Физический смысл этого параметра, связанный с молекулярным переносом количества движения в жидкости, раскрыт в [8, 65, 66]. Наряду с коэффициентом вязкости μ часто используется кинематический коэффициент вязкости $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ (ρ — плотность жидкости), поскольку в его размерность — $(\text{длина})^2 \times (\text{время})^{-1}$ — не входит масса.

В табл.1 представлены значения величин μ и ν для различных жидкостей и газов при 15 °С и атмосферном давлении.

Таблица 1

Вещество	μ, гсм$^{-1}$ с$^{-1}$	ν, см$^{-2}$ с$^{-1}$
Воздух	0,00018	0,15
Азот, N_2	0,00017	0,15
Кислород, O_2	0,00020	0,15
Водород, H_2	0,00009	1,05
Гелий, He	0,00020	0,12
Неон, Ne	0,00031	0,37
Аргон, A	0,00022	0,13
Хлор, Cl_2	0,00013	0,043
Сернистый водород, H_2S	0,00012	0,085
Углекислый газ, CO_2	0,00014	0,077
Угарный газ, CO	0,00017	0,150
Вода, H_2O	0,01140	0,0114
Раствор сахара, $C_{12}H_{22}O_{11}$ в воде, %		
20	0,023	0,021
60	0,750	0,580
Раствор соли, NaCl (23%)	0,021	0,018
Ртуть, Hg	0,016	0,0012
Серная кислота, H_2SO_4	0,300	0,1600
Этиловый эфир, $(C_2H_5)_2O$	0,0025	0,0034
Бисульфид углерода, C_2S	0,0038	0,0029
Хлороформ, $CHCl_3$	0,0059	0,0039
Метиловый спирт, CH_3OH	0,0064	0,0080
Этиловый спирт, C_2H_5OH	0,0130	0,0170
Бензин, C_6H_6	0,0070	0,0080
Анилин, $C_6H_5NH_2$	0,0520	0,0510
Парафиновое масло	0,2	0,25
Рыбий жир	0,7	0,7
Оливковое масло	1,0	1,0
Глицерин	13,0	10,0
Касторовое масло	15,0	15,0

. Скалярные и векторные поля

Дифференциальные характеристики. Для аналитического описания движения жидкости необходимо определить и исследовать общие геометрические свойства скалярных и векторных полей безотносительно их физической природы.

Введем в трехмерном эвклидовом пространстве ортогональную систему координат x_1, x_2, x_3. Элементы длины дуги в точке (x_1, x_2, x_3) в направлении возрастания координат x_1, x_2 и x_3 составляют соответственно $h_1\,dx_1$, $h_2\,dx_2$ и $h_3\,dx_3$. Здесь величины h_1, h_2 и h_3, которые называются коэффициентами Ламе, в общем случае являются функциями координат. Пусть в таком пространстве заданы скалярное φ и векторное $\boldsymbol{c}$ поля, причем φ и компоненты c_1, c_2 и c_3 вектора $\boldsymbol{c}$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат x_1, x_2 и x_3.

Напомним, что не любая тройка скалярных функций c_1, c_2, c_3 образует векторное поле — для этого необходимо выполнение условия инвариантности при переходе к новой системе координат. При этом все векторы подразделяются на два класса — полярные и аксиальные — в зависимости от значений их новых компонент при инверсии $x_i^{\prime} = -x_i$: компоненты *полярного* вектора $\boldsymbol{c}$ меняют знак ($c_i^{\prime} = -c_i$), а компоненты *аксиального* вектора $\boldsymbol{d}$ — нет ($d_i^{\prime} = d^{\prime}$). Операции скалярного и векторного произведения двух векторов вводятся обычным образом. Отметим, что векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный.

Дифференциальные операции — нахождение градиента, дивергенции и ротора этих полей — осуществляются согласно формулам [41]

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right);$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{c} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{c} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 c_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 c_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 c_3)\right];$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{c} \equiv \nabla\times\boldsymbol{c} = \left\{\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 c_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 c_2)\right],\right.$$

$$\left.\frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 c_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 c_3)\right], \frac{1}{h_2 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 c_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 c_1)\right]\right\}, \qquad (1.1)$$

где $\nabla \equiv \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

При этом ротор полярного вектора образует аксиальный вектор, эквивалентный антисимметричному тензору второго ранга. В дальнейшем будем пользоваться декартовой (x, y, z) и цилиндрической (r, θ, z) системами ортогональных координат, для которых выражения для коэффициентов Ламе имеют вид (x, y, z): $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; (r, θ, z): $h_1 = h_3 = 1$; $h_2 = r$.

Оператор Лапласа Δ от скалярного и векторного полей вычисляется по определениям

$$\nabla \varphi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi \; ; \quad \Delta \boldsymbol{c} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{c} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{c} . \tag{1.2}$$

В общем случае ортогональных криволинейных координат компоненты вектора $\Delta \boldsymbol{c}$ не совпадают со значениями величин Δc_1, Δc_2 и Δc_3. Такая ситуация имеет место только в декартовых прямоугольных координатах.

Далее будет встречаться вектор, обозначаемый $\boldsymbol{c} \cdot \nabla \boldsymbol{b}$ и имеющий в декартовых координатах компоненты ($\boldsymbol{c} \cdot \operatorname{grad} b_x$, $\boldsymbol{c} \cdot \operatorname{grad} b_y$, $\boldsymbol{c} \cdot \operatorname{grad} b_z$). Для общего случая этот вектор вводится согласно соотношениям

$$2\, \boldsymbol{c} \cdot \nabla \boldsymbol{b} \equiv \operatorname{rot}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \operatorname{grad}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{b} -$$

$$- \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{c} . \tag{1.3}$$

Действие, определяемое оператором $\boldsymbol{c} \cdot \nabla$, соответствует вычислению градиента вектора (или скаляра) по направлению вектора $\boldsymbol{c}$. Имеют место векторные тождества, проверяемые непосредственно из определений (1.1):

$$\operatorname{rot} \cdot \nabla \varphi = 0 ; \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{c} = 0 ; \quad \operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{c} ;$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{c}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \times \operatorname{grad} \varphi ;$$

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla \boldsymbol{b} ;$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot \nabla \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{c} . \tag{1.4}$$

Интегральные характеристики. Под кривой L, поверхностью S и объемом V понимаются обычные геометрические понятия с необходимыми условиями гладкости. Линейный интеграл $\int_L \boldsymbol{c}\, d\boldsymbol{x}$, где $d\boldsymbol{x}$ — вектор с компонентами (dx_1 dx_2, dx_3), называется *потоком вектора* $\boldsymbol{c}$ *вдоль* L. Если кривая L образует замкнутый контур, то интеграл $\oint_L \boldsymbol{c}\, d\boldsymbol{x}$ называется *циркуляцией* вектора $\boldsymbol{c}$ вдоль L. Поверхностный интеграл $\int_S \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S в месте элемента dS, называется *потоком вектора* $\boldsymbol{c}$ *через* S. В случае, когда S образует замкнутую поверхность, то $\oint_S \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$ ($\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль) называется *потоком вектора* $\boldsymbol{c}$ из S. Объемный интеграл $S\boldsymbol{c}\,dV$ не имеет четкого названия и характеризует общую величину $\boldsymbol{c}$ в объеме. В дальнейшем замкнутый контур L будем считать *стягиваемым*, т.е. путем непрерывного деформирования он может быть стянут в точку, не выходя за область задания поля c. Для стягиваемого контура можно всегда указать незамкнутую поверхность, которая ограничена этим контуром и целиком расположена в области определения поля.

Для непрерывных и интегрируемых скалярных и векторных полей имеют место равенства

$$\int_V \operatorname{grad}\varphi \; dV = \oint_S \varphi \, \boldsymbol{n} \, ds \, ; \tag{1.5}$$

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{c} \, dV = \oint_S \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \, ; \quad \int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{c} \, dV = \oint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \, dS \, ; \tag{1.6}$$

$$\oint_L \boldsymbol{c} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} \; dS \, , \tag{1.7}$$

связывающие интегралы по объему V и интегралы по ограничивающей его поверхности S, а также циркуляцию вектора $\boldsymbol{c}$ по контуру L с потоком вектора rot $\boldsymbol{c}$ через любую незамкнутую поверхность S, ограниченную этим контуром. Соотношения (1.5) — (1.7) являются теоремами Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса соответственно. Детально история формулировки и доказательств этих равенств представлена в [250].

Кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{c}$ в этой же точке, называется *векторной линией* поля $\boldsymbol{c}$. Если через замкнутый контур L можно провести векторные линии поля $\boldsymbol{c}$, то образованную таким образом поверхность называют *векторной трубкой* поля $\boldsymbol{c}$. Поток вектора $\boldsymbol{c}$ через незамкнутую поверхность, ограниченную контуром L, называется *интенсивностью* векторной трубки в соответствующем сечении. Векторное поле $\boldsymbol{c}$ называется *соленоидальным*, если его поток из любой стягиваемой замкнутой поверхности равен нулю. Используя (1.6), видим, что это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда div $\boldsymbol{c} = 0$. Для непрерывного и интегрируемого с квадратом соленоидального векторного поля $\boldsymbol{c}$ справедливы тождества

$$\int_S \left[(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}) \, \boldsymbol{c} - \frac{1}{2} |\boldsymbol{c}|^2 \boldsymbol{n} \right] ds = \int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} \, dV \, ; \tag{1.8}$$

$$\int_V |\boldsymbol{c}|^2 dV = \int_S \left[|\boldsymbol{c}|^2 (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}) - 2 (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n}) \right] dS + $$
$$+ 2 \int_V \boldsymbol{x} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}) \, dV \, , \tag{1.9}$$

установленные А.Пуанкаре [201] и Дж.Дж.Томсоном [238].

Векторное поле c называется *потенциальным*, если его циркуляция по любому стягиваемому контуру равна нулю. Используя формулы (1.7) и первое из тождеств (1.4), приходим к заключению, что для потенциального поля c должно существовать такое скалярное поле φ, при котором $c = \operatorname{grad} \varphi$.

Представление Стокса — Гельмгольца. Фундаментальным свойством произвольного кусочно-дифференцируемого векторного поля c в конечном объеме V является установленная Дж.Стоксом [229] и Г.Гельмгольцем [135] возможность представления

$$c = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi\,, \tag{1.10}$$

т.е. в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Функции φ и ψ, входящие в (1.10), называются соответственно скалярными и векторными потенциалами. Без дополнительных условий по заданному полю c таких потенциалов существует бесконечное множество, поскольку по трем исходным функциям-компонентам векторного поля c желательно построить четыре функции — составляющие потенциалов. В частности, одним из способов такого разложения для непрерывного дифференцируемого поля c будет

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{div} c(x')}{|x - x'|}\,dV' + h(x)\,;$$

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot} c(x')}{|x - x'|}\,dV'\,, \tag{1.11}$$

где $h(x)$ — гармоническая функция, позволяющая удовлетворить условиям на границе V: $\operatorname{div} \psi = 0$.

Детальный вывод соотношений (1.11) приведен в [66].

3. Кинематические характеристики движения жидкости

Способы описания движения жидкости. Описанию любого сложного явления обычно предшествуют разбор некоторых простых ситуаций, которые его характеризуют. В гидродинамике к таким ситуациям относится кинематика движения жидкости без анализа сил, вызывающих это движение. Этот раздел механики жидкости усилиями О.Коши, Г.Гельмгольца, В.Томсона (лорда Кельвина), Е.Бельтрами и других выдающихся ученых еще в XIX в. получил практически завершенный вид. Детальный обзор выполненных исследований и глубокий анализ различных кинематических характеристик жидкости сделаны Н.Е.Жуковским [28].

В феноменологическом рассмотрении движение жидкости определяется по отношению к некоторой фиксированной системе координат. Это устанавливает в трехмерном эвклидовом пространстве соответствие между частицами жидкого континиума и их радиусом-вектором. Процесс движения можно изучать двумя методами. Первый называется методом Лагранжа, второй — методом Эйлера. В ряде книг, например в [67], отмечается, что данные названия условны, так как на самом деле оба метода были предложены Л.Эйлером в середине XVIII в. Детальный исторический обзор данной ситуации содержит монография [250]. В дальнейшем, следуя [66], будем придерживаться уже устоявшейся и принятой терминологии.

В методе Лагранжа фиксируется внимание на жидкой частице и прослеживается история ее движения. Д.Максвелл называл [177] такой подход историческим. Переменными — *материальными*, или *лагранжевыми* — будут начальные координаты частицы x и время t. В методе Эйлера внимание фиксируется на некоторой точке пространства, занятого жидкостью, и наблюдается, что там происходит. Именно поэтому Д.Максвелл трактовал такой подход, как статистический. Переменными — *пространственными*, или *эйлеровыми* — выступают координаты точки пространства x и время t.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тройка чисел (a, b, c) задает относительно неподвижной прямоугольной системы отсчета декартовы координаты радиуса-вектора типичной жидкой частицы. В момент времени t эта частица будет находиться в точке x с декартовыми координатами (x, y, z). Тогда отображения

$$x = f(X, t) \tag{1.12}$$

определяют *закон движения* континиума. Если x будет фиксированным, а t — переменным, то уравнение (1.12) определяет траекторию фиксированной частицы континиума. Если x будет переменным, а t — фиксированным, то вектор - функция f задает расположение всех частиц континиума в пространстве в данный момент времени.

Важнейшими является предположение о непрерывности движения, т.е. в дальнейшем будем считать, что функции, задающие отображения (1.12), однозначны и трижды непрерывно дифференцируемы по пространственным и временной координатам. Именно это обстоятельство позволяет детально исследовать всю систему, частицы которой независимы друг от друга и совершают индивидуальное, на первый взгляд, произвольное движение. Однако непрерывность функции является существенным условием и позволяет обнаружить простые законы, связывающие кинематические и динамические характеристики жидких частиц.

Из требований непрерывности следует существование отображения

$$X = F(x, t), \tag{1.13}$$

обладающего теми же свойствами. В частности, две жидкие частицы, различные в какой-то момент времени, будут оставаться различными. Общие топологические свойства преобразований (1.12) и (1.13) заключаются в том, что любой объем переходит в объем (а не в поверхность или точку), а замкнутая поверхность (линия) — в замкнутую поверхность (линию). Это довольно общие допущения, но они тем не менее ограничивают класс возможных для изучения явлений. Так, например, при падении капли жидкости в ту же жидкость, расположенную в сосуде, две первоначально удаленные жидкие частицы могут стать бесконечно близкими в последующие моменты времени. Описать такого рода явления в предположении непрерывности закона движения жидкости уже нельзя.

В гидродинамике преимущественно используют подход Эйлера к описанию движения жидкости. Следует отметить, что в целом принадлежащая Л.Эйлеру идея полевого описания сплошной среды при помощи дифференциальных уравнений в частных производных является одним из краеугольных камней не только механики, но и всей классической физики.

Поле скорости жидкости. Скорость является важнейшим понятием, которое наряду с законом движения характеризует течение жидкости. В лагранжевых координатах при наличии закона движения (1.12) скорость $v(X,t)$ жидкой частицы по определению $v = \partial x/\partial t$. Она вычисляется для фиксированной частицы и численно равна расстоянию, проходимому за единицу времени, поэтому здесь берется частная производная от x по t. Однако задание скорости в лагранжевых координатах при описании движения жидкости встречается крайне редко. Кроме того, такое задание не позволяет просто определить пространственные градиенты скорости в точках жидкости. Поэтому при анализе течения основной независимой переменной выступает векторная функция $u(x, t)$ — скорость жидкости в точке x в момент времени t. В эйлеровых координатах она определяется как объем жидкости, проходящей за единицу времени через единичную площадку, которая перпендикулярна направлению потока. Отыскание векторного поля скоростей $u(x, t)$ наряду со скалярными полями давления $p(x,t)$ и плотности $\rho(x, t)$ является основной задачей гидромеханики.

Векторная линия поля скорости $u(x, t)$ называется *линией тока.* В декартовых координатах семейство линий тока в момент времени t является решением системы уравнений

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}, \tag{1.14}$$

где время t выступает только в качестве параметра.

В важном частном случае установившегося движения, когда скорость не зависит от времени, линии тока совпадают с траекториями жидких частиц.

В дальнейшем все рассмотренные задачи будут относиться к чрезвычайно обширному типу движений как идеальной, так и вязкой жидкости, а именно к движению *несжимаемой* жидкости. Для нее поле скорости удовлетворяет дополнительному условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{1.15}$$

выражающему, по существу, требования сохранения материального объема жидкости в процессе движения.

Существуют два обширных класса полей течения, распределение скорости в которых до некоторой степени известно. К первому относится *плоское* поле течений, когда вектор поля скоростей $\boldsymbol{u}$ в любой точке $\boldsymbol{x}$ и в любой момент времени образует с фиксированным направлением прямой угол и не зависит от смещения вдоль этого угла. Обычно таким направлением выбирают ось z декартовой системы координат. Тогда вектор скорости для плоского течения имеет вид $[u,(x, y, t), v(x, y, t), 0]$. Ко второму классу относится осесимметричное поле течений, для которого компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат (r, θ, z) не зависят от полярного угла θ, т.е. для общего случая осесимметричных движений вектор скорости $u_r(r, z, t)$; 0; $u_z(r, z, t)$.

Для плоского движения несжимаемой жидкости уравнение (1.15) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,.$$

Отсюда следует, что выражение $udy - vdx$ должно быть полным дифференциалом $d\psi$ некоторой функции (x, y, t). Две компоненты скорости выражаются таким образом через одну функцию:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v = -\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,. \tag{1.16}$$

Функция $\psi\,(x, y, t)$ называется *функцией тока* Лагранжа. Она имеет четкий физический смысл: определяет объем жидкости, протекшей за единицу времени через цилиндрическую поверхность единичной высоты вдоль оси z, причем, образующая цилиндра представляет собой кривую, соединяющую точки P_0 и $P\,(x, y)$. Суммарный поток считается положительным, если относительно точки P он направлен против часовой стрелки. Качественно картину плоского течения жидкости удобно изображать, нанося на плоскости линии тока, отличающиеся на некоторую постоянную величину δ. Это позволяет судить о скорости, так как в данной точке она пропорциональна δ и обратно пропорциональна расстоянию между двумя соседними линиями тока.

В полярной системе координат (r, θ) плоское движение с компонентами скорости $u_r(r, \theta, t)$ и $U(r, \theta, t)$ также можно описать с помощью функции тока $\psi(r, \theta, t)$; $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$.

Для плоского движения общее правило состоит в том, что дифференцирование функции тока ψ в определенном направлении дает компоненту скорости , повернутую на 90 ° по часовой стрелке от этого направления.

В случае осесимметричных течений несжимаемой жидкости условие (1.15) сводится на основе выражений (1.1) к равенству

$$\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r u_z) = 0 .$$

Отсюда выражение $ru_z dr - ru_r dz$ будет полным дифференциалом $d\psi$ некоторой функции $\psi(r, z, t)$, а компоненты скорости имеют вид

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} . \tag{1.17}$$

Функция ψ называется *функцией тока* Стокса. Линии тока осесимметричного течения жидкости, на которых ψ=const, целиком лежат в плоскостях, проходящих через ось z. Однако они не позволяют дать качественную оценку скорости, как это имеет место в плоском случае, из-за наличия множителя $1/r$.

Производные по времени. Введение двух способов описания движения жидкости и скорости частиц требует четкого разграничения понятий производных по времени от скалярной или векторной функций в фиксированной точке пространства или для фиксированной частицы жидкости. Следуя Д.Стоксу [228], связанную с частицей *материальную* производную обозначают символом D/Dt, в то время как для *пространственной* производной в точке остается обозначение $\partial/\partial t$. Обозначение d/dt или $\cdot$ сохраняется для функций, зависящих только от времени.

Если функция Θ задана в лагранжевых координатах X, t, то ее производная по времени для фиксированной частицы X вычисляется как частная производная:

$$\left.\frac{D\Theta(X, t)}{Dt}\right|_X = \frac{\partial\Theta(X, t)}{\partial t} .$$

При использовании эйлеровых координат функция $\Theta(x, t)$ характеризует некоторое свойство жидкости в фиксированной точке x в момент времени t. Чтобы найти скорость изменения Θ во времени для фиксированной материальной частицы X, нужно, согласно общему правилу дифференцирования сложной функции, вычислить производную:

$$\frac{D\Theta(X,t)}{Dt}\bigg|_X = \frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}\bigg|_x + u(x,t)\cdot\nabla\Theta(x,t). \qquad (1.18)$$

Выражение (1.18) для скорости изменения скалярной величины Θ, следующей за движением фиксированной частицы, называется *полной*, или *субстанциональной*, производной. Она состоит из суммы *локальной* производной $\partial\Theta/\partial$, представляющей собой локальную скорость изменения Θ во времени в фиксированной точке x, и *конвективного* слагаемого $u\cdot\nabla\Theta$, отражающего перенос фиксированной частицы в другое место. Заметим, что для заданной функции $\Theta(x, t)$ при вычислении субстанциональной производной не обязательно знать закон движения (1.12), а нужно иметь лишь распределение поля скоростей $u(x, t)$.

Для векторных функций $c(x, t)$ субстанциональная производная

$$\frac{Dc}{Dt}\bigg|_X = \frac{\partial c}{\partial t}\bigg|_x + (u\cdot\nabla)c \qquad (1.19)$$

и, в частности, $\frac{Dx}{Dt} = u(x,t)$. Формулы (1. 18) и (1. 19) сохраняют свой вид и в произвольной ортогональной системе координат. При этом нужно воспользоваться общими формулами (1.1) и (1.3).

При выводе основных уравнений и анализе течений важное значение имеют линейные, поверхностные и объемные интегралы от скалярных $\Theta(x, t)$ и векторных c (x, t) функций, вычисленные для состоящих из одних и тех же движущихся вместе с жидкостью частиц *материальных* линий L, незамкнутой поверхности S или объема V. Значения этих интегралов являются функциями только времени t и для производных справедливы соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_{L(t)} c\cdot dx = \int_{L_0}\left[\frac{Dc}{Dt}\cdot dx + c\cdot(dx\cdot\nabla u)\right]; \qquad (1.20)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} c\cdot n\,dS = \int_{S_0}\left[\frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{rot}(u\times c) + u\cdot\operatorname{div} c\right]\cdot n\,dS; \qquad (1.21)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\Theta\,dV = \int_{V_0}\left[\frac{D\Theta}{Dt} + \Theta\cdot\operatorname{div} u\right]dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\Theta dV + \int_{S_0}\Theta u\cdot n\,dS. \qquad (1.22)$$

Интегралы, стоящие в правых частях равенств (1.20) — (1.22), вычисляются по неподвижным областям (линиям, поверхностям и объемам), совпадающим в момент, для которого ищется производная, с движущимися областями. Отметим, что равенство (1.22), носящее название «теорема переноса», постулировано О.Рейнольдсом [214] при общем анализе движения материи во Вселенной.

Определение траектории частиц по заданному полю скорости. Если известна траектория частиц, задаваемая соотношением (1.12), то поле скоростей однозначно определяется дифференцированием по времени. Однако в гидромеханике основной наблюдаемой величиной является поле скорости. Поэтому интересна и важна задача определения траекторий движения жидких частиц.

Зная распределение $v(X, t)$ скоростей частиц в лагранжевых координатах, траекторию их движения $x(X, t)$ можно легко найти простым интегрированием $x = \int v(X, t)\,dt$.

В случае эйлеровых координат, когда $u(x, t)$ известно, также можно определить закон движения (1.14) индивидуальной жидкой частицы, что достигается при решении векторного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = u(x, t) \tag{1.23}$$

с начальным условием $x = X$ при $t = 0$. Оно может оказаться чрезвычайно сложным даже для сравнительно простого вида поля $u(x, t)$. По-видимому, Д.Максвелл [176] первым обратился к решению уравнения (1.23) при конкретном задании плоского поля скорости. Он привел детальную картину траекторий частиц жидкости при прямолинейном и равномерном движении перпендикулярно своей оси бесконечно длинного кругового цилиндра. Интересный анализ траекторий частиц жидкости при поступательном или вращательном движении в ней эллиптического цилиндра содержится в [189].

На современном этапе развития гидромеханики к проблеме определения траекторий частиц обращено внимание в связи с задачами перемешивания применительно к различным химическим технологиям [198]. Перемешивание можно рассматривать как растяжение или сужение расстояний между начально близкими или удаленными областями двух различных по составу жидкостей. Перемешивание жидкостей служит важным физическим аналогом многих концепций в теории динамических систем и хаоса. Еще Д.В.Гиббс [18] указывал на возможность визуализации движения в двухмерных гамильтоновых системах с помощью мысленного эксперимента по перемешиванию несжимаемой жидкости. Лабораторный эксперимент по перемешиванию красителя в прямоугольной области, содержащей глицерин, описан в [109].

Во многих случаях перемешивание двух жидкостей происходит в первую очередь за счет механического движения частиц, а не за счет явления молекулярной диффузии. В качестве примера можно указать на смешивание сливок в кофе, когда для быстрого и эффективного перемешивания используют ложечку, а не просто полагаются на процесс диффузии во времени. Аналогичные процессы часто происходят и в других ситуациях, например при раскатке теста. На аналогию между перемешиванием цветных струек в жидкости (вытягивание, скручивание и складывание) и процессов в различных областях техники (текстильное и прокатное производство) обратил внимание О.Рейнольдс [212], систематизированно описав процессы механического перемешивания. Он заметил, что введение цветных полос (струек) в жидкость позволяет обнаружить в ряде случаев неперемешанные зоны, и указал механизм, по которому происходит процесс в целом

Кроме того, в работе [211] об экспериментальном определении критерия перехода к турбулентности в потоке воды в трубах О.Рейнольдс отметил, что перемешивание цветной сруйки происходит за счет стохастизации основного течения. Экспериментальные результаты работы дают основание рассматривать процесс стохастизации течения как результат взаимодействия вихревых структур различных масштабов.

Практически важным классом задач гидромеханики являются плоские течения. Здесь всегда имеет место функция тока $\psi(x, y, t)$ и уравнения для траекторий частиц (1.23) приобретает вид гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \dot{y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.24}$$

с гамильтонианом ψ.

Известно [32], что, когда гамильтониан не зависит явно от времени, система (1.24) вполне интегрируема и, следовательно, хаоса не возникает. Вопрос о возможностях хаотической адвекции частиц и лагранжевой турбулентности в системе (1.24) применительно к конкретному виду вихревых движений впервые сформулирован в [89]. Детальное математическое исследование такой гидродинамической ситуации с позиции теории динамических систем дано в [151].

Любопытна важная особенность некоторых трехмерных течений: они обнаруживают хаотическое поведение частиц даже в стационарном поле скорости $u(x)$. Например, для так называемого ABC-потока, где поле скорости имеет вид $A\sin z + C\cos y$, $B\sin x + A\cos z$, $C\sin y + B\cos x$, при подходящем выборе чисел A, B, C движение частиц обнаруживает хаотическое поведение [116,137].

Обобщая, отметим, что современные подходы к описанию траекторий движения частиц и связанная с ними проблема перемешивания требуют использования общей концепции порядка и хаоса [79] и еще далеки от окончательного завершения.

Поле ускорения. Кинематической характеристикой жидкости является также вектор ускорения жидких частиц. Если известен закон движения, то в лагранжевых координатах ускорение определяется как вторая частная производная $a(X,t)=\dfrac{\partial^2 x(X,t)}{\partial t^2}$. Если известно поле скорости, то ускорение $a(X,t)=\dfrac{\partial v(X,t)}{\partial t}$.

В наиболее важном случае, когда поле скорости $u(x, t)$ используется в эйлеровых координатах, ускорение жидкой частицы вычисляется по формуле (1.18):

$$a=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\nabla u. \tag{1.25}$$

С учетом вытекающего из (1.4) равенства

$$(u\cdot\nabla)u=\frac{1}{2}\operatorname{grad}(u\cdot u)-u\times\operatorname{rot}u$$

получаем выражение

$$a=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}(u\cdot u)-u\times\operatorname{rot}u, \tag{1.26}$$

инвариантное относительно выбора системы координат.

Наличие нелинейного конвективного слагаемого в выражении для ускорения жидкой частицы в пространственных координатах является одним из принципиальных моментов, вносящих огромную сложность в решение задач гидродинамики. И только когда этим членом можно пренебречь ввиду либо его малости (линеаризация), либо в силу некоторых условий симметрии, задачи существенно упрощаются и допускают аналитическое решение. Ряд общих свойств вектора ускорения и его конвективной составляющей даны в [250]. Используя соотношение (1.20), получаем кинематическую теорему В.Томсона:

$$\frac{d}{dt}\oint_L u\,dx=\oint_L a\,dx. \tag{1.27}$$

Эта формула связывает производную от циркуляции скорости по материальному замкнутому контуру с циркуляцией ускорения по неподвижному контуру.

4. Кинематика завихренности

Поле вектора завихренности. Среди скалярных, векторных и тензорных величин, которые могут быть построены из заданного в эйлеровых координатах поля скорости $u(x,t)$, важную роль играет аксиальный вектор $\omega(x,t)$, который вводится по формуле

$$\omega = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \tag{1.28}$$

и называется вектором завихренности. Это название введено в классическом учебнике Г.Ламба [46] (1879 г.). Ранее использовался вектор $\frac{1}{2}\omega$, компоненты которого назывались угловыми скоростями [228], вращательной скоростью [135], вращениями [242], молекулярным вращением [97]. На первый взгляд нет никаких особых предпосылок для выделения завихренности из многих других векторов, связанных с полем скорости. О возможности ее включения в рассмотрение было известно и основателям теоретической гидромеханики Д'Аламберу, Л.Эйлеру, Ж.Лагранжу и О.Коши. Однако решающим оказалось то, что описание движения однородной несжимаемой жидкости можно удобно представить в терминах векторов $\boldsymbol{u}$ и ω. При этом из рассмотрения исчезает давление и задача носит чисто кинематический характер. Часто оказывается, что в результате ее решения распределение завихренности носит локализованный характер даже в безграничной области, где поле скорости всюду отлично от нуля. Важность вектора ω для качественного и количественного описаний практически любых явлений движения жидкости осознавалась всеми учеными, работавшими и работающими в гидромеханике.

Вектор завихренности допускает ряд количественных интерпретаций, позволяющих глубже понять его специфику и связь с полем скорости. Далее приведены лишь основные свойства, которые были сформулированы О.Коши, Д.Стоксом и В.Томсоном и изложены в [250]:

проекция вектора ω в точке P на любую ось, проходящую через эту точку, равна удвоенной средней скорости правостороннего вращения всех прямолинейных отрезков, проходящих через P и перпендикулярных к данной оси;

длина проекции вектора ω на любую ось заданного направления, проходящую через точку P, равна удвоенному среднему арифметическому скоростей правостороннего вращения вокруг направлений любых двух взаимно перпендикулярных прямолинейных отрезков, лежащих в плоскости, проходящей через точку P и перпендикулярной к заданному направлению;

если вокруг точки P мысленно выделить малый мгновенно отвердевший сферический объем жидкости, а остальную часть жидкости убрать, то угловая скорость вращения твердой сферы равна $1/2\omega$;

если в проведенной через точку P плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}$ выбрать замкнутый контур L, охватывающий область площадью S и содержащий P, то

$$\omega_n = \omega \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{x}}{S}.$$

Анализ движения элемента жидкости. Важным моментом в описании движения жидких частиц является допущение о непрерывности функций, задающих поле скорости в эйлеровых координатах. Именно это обстоятельство позволило полностью охарактеризовать движение в малой окрестности жидкой частицы. Согласно кинематической теореме, независимо установленной в работах О.Коши, Д.Стокса и Г.Гельмгольца [250], изменение, которое претерпевает бесконечно малый объем жидкости с центром в точке P за время dt, состоит из наложения трех типов движения, а именно:

равномерного переноса со скоростью центра u_P; растяжения или сжатия объема по трем главным направлениям, причем всякий прямоугольный параллелепипед, стороны которого параллельны главным направлениям растяжения, остается прямоугольным; вращения как твердого тела с угловой скоростью $\Omega = \omega/2$ вдоль мгновенной оси, проходящей через центр P.

В свою очередь второй тип движения, согласно Д.Стоксу [228], может быть представлен в виде наложения равномерного растяжения (сжатия) вдоль трех осей и двух плоских сдвиговых движений в плоскостях главных растяжений. Математически запись этого утверждения сводится к тому, что скорость в точке $x + dx$ с точностью до членов второго порядка относительно $|dx|$ представляется в виде

$$u(x+dx,t)=u(x,t)+dx\cdot\nabla u(x,t)\ . \qquad (1.29)$$

Тензор второго ранга ∇u всегда может быть записан в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. В декартовой системе координат это соотношение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{vmatrix}, \qquad (1.30)$$

где

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\ e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}\ ;\ e_{yz}=e_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\ ;$$

$$e_{xy}=e_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);\ e_{xz}=e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\ ;\ \Omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right);$$

$$\Omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right);\ \Omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1.31)$$

и все производные вычисляются в точке x.

Такое представление, на первый взгляд, является лишь формальным тождеством. Однако оно имеет глубокий физический смысл, характеризуя два независимых типа движения — деформацию элемента жидкости и его вращение как твердого тела. Именно в классических работах Д. Стокса и О. Коши строго доказано, что матрица с элементами $e_{xx}, \ldots, e_{zy}$ образует симметричный тензор деформации, а три числа $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ — суть компоненты вектора, сохраняющего в трехмерном пространстве свое направление и значение при повороте и переносе декартовой системы координат.

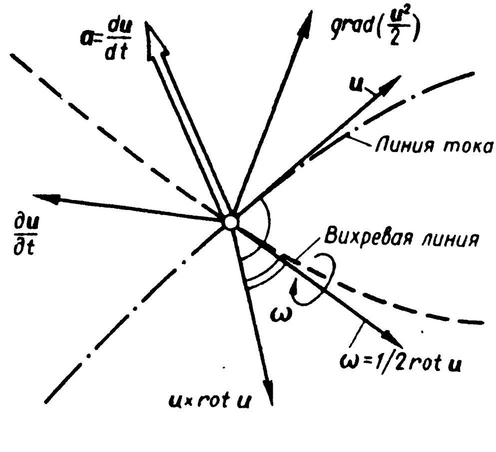


Рис. 1

В произвольной ортогональной системе координат (x_1, x_2, x_3) компоненты тензора деформации задаются соотношениями

$$e_{ii} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{u_j}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{u_k}{h_i h_k}\frac{\partial h_i}{\partial x_k} \; ;$$

$$2\, e_{ij} = \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial(h_i u_i)}{\partial x_j} + \frac{h_j}{h_i}\frac{\partial(h_j u_j)}{\partial x_i} \; , \quad i \neq j \neq k \; , \qquad (1.32)$$

а вектор ω согласно общим дифференциальным операциям вычисляется по формулам (1.1). В дальнейшем компоненты этого вектора в декартовой системе координат будем обозначать через ξ, η, ζ, а в цилиндрической — ω_r, $\omega\Theta$, ω_z. На рис. 1 показана общая картина расположения векторов u, a и ω в некоторой точке поля течения.

Описанное выше разложение движения элемента объема жидкости не является единственно возможным. Так, Ж.Бертран [99] доказал, что в окрестности любой точки жидкости существуют такие бесконечно малые косоугольные параллелепипеды, которые за время dt преобразуются в параллелепипеды с тем же направлением ребер, т.е. движение элемента жидкости состоит лишь в переносе, растяжении (сжатии) по трем взаимно *неортогональным* направлениям без вращения таких осей. Кроме того, Ж.Бертран находил неумест-

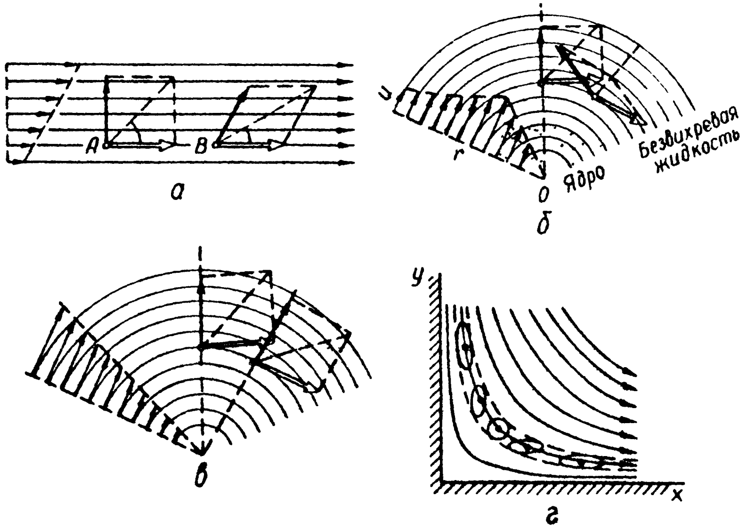


Рис. 2

ным называть вращением частицы вращение осей деформации. В качестве примера он приводил плоское сдвиговое течение в безграничной жидкости с полем скоростей $u = y$, $v = 0$, $w = 0$, при котором жидкие частицы движутся по прямым линиям. Вместе с тем, согласно Г.Гельмгольцу, движение является вихревым с $\xi = \eta = 0$, $\zeta = -1$. Это породило в 1868 г. бурную полемику между этими учеными на страницах «Докладов Парижской Академии наук». Г.Гельмгольц доказал, что комбинация растяжений или сжатий по трем неортогональным направлениям эквивалентна сумме растяжений по ортогональным направлениям и некоторому вращению. Что касается приведенного контрпримера, то здесь действительно жидкие частицы движутся по прямым и не вращаются по орбитам как планеты. Однако любой бесконечно малый прямоугольник испытывает вращение своей диагонали вокруг оси, перпендикулярной к плоскости течения (рис. 2, *а*). Это рассуждение дополнил Б.Сен-Венан [225], отметивший, что при таком сдвиговом течении лишь линии тока $y = \mathrm{const}$ являются единственными прямыми, не испытывающими поворота. Важный результат по этой дискуссии состоял в выработке четкого и глубокого понимания особой роли вектора завихренности в кинематике процесса движения. Отметим, что понятие завихренности не обязательно предполагает вращение всей жидкости. Различие между вихревым движением и безвихревым, сопровождающимся движением частиц по круговым траекториям, показано на рис. 2, *б в*. Здесь поле скоростей в цилиндрической системе координат дается формулами

$$u_r = 0\,;$$

$$u_\theta(r) = \begin{cases} \Omega r, & 0 \le r \le a; \\ \Omega a r^{-1}, & a \le r, \end{cases} \qquad u_z = 0\,.$$

В таком движении круговая область $r \le a$ вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью Ω, а единственная, отличная от нуля компонента вектора завихренности $\omega_z = 2\Omega$. При этом диагональ бесконечно малого прямоугольника за время dt изменяет свое направление. Напротив, область $a \le r$ находится в безвихревом движении, так как здесь $\omega_z = 0$. Отсюда видно, что диагональ прямоугольника своего направления не изменяет. Такое течение с постоянной в круговой области завихренности называется вихрем Рэнкина [205].

Иной пример плоского безвихревого движения дан на рис. 2, *г*, где показано течение вблизи прямого угла с полем скорости $u = ax$, $v = -ay$. В этом случае имеет место только деформация жидкого элемента при отсутствии завихренности. Имеющий в точке (P) вид окружности элемент выше и ниже по течению представляет собой вытянутые эллипсы.

Определение скорости жидкости по заданной завихренности. Введение в рассмотрение поля завихренности жидкости $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)$ по заданному полю скоростей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ ставит обратную задачу: по заданному распределению завихренности определить поле скоростей несжимаемой жидкости, занимающей безграничную или ограниченную область в пространстве. Такая задача поставлена и решена Г. Гельмгольцем [135], а более общая формулировка — определение произвольного векторного поля по заданным распределениям его дивергенции и ротора — дана Д.Стоксом [229]. Рекомендуя читателям обратиться к подробному описанию решения этой задачи в прямоугольных декартовых координатах, содержащемуся в статье [135] и лекциях Г.Кирхгофа [35], а также в учебниках по гидродинамике [8,46,64], приведем в кратком векторном виде основные результаты.

Искомое поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ должно удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}\,, \tag{1.33}$$

причем $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$.

Возможны два основных типа геометрии течения. Жидкость может занимать бесконечное безграничное пространство, покоясь на бесконечности, либо заполнить одно- или многосвязную ограниченную область. При этом кусочно - гладкое поле завихренности либо отлично от нуля лишь в конечной области, либо стремится по модулю к нулю как $A\,|\boldsymbol{x}|^{(2+\lambda)}$ $(0 < \lambda < 1)$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.

Во всех случаях задача решается введением векторного $\Psi(x,t)$ и при необходимости скалярного $\Phi(x,t)$ потенциалов, через которые поле скорости представляется в виде

$$u = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\Psi, \quad \operatorname{div}\Psi = 0. \tag{1.34}$$

Для безграничной жидкости окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\omega(x',t)\times s}{|s|^3}\,dV(x'), \quad s = x - x', \tag{1.35}$$

где интегрирование ведется по всему трехмерному пространству.

В литературе формула (1.35) называется законом Био — Савара по аналогии с электромагнетизмом [66].

В случае конечной области, на границе которой $\omega\cdot n$ (т.е. вихревые линии являются замкнутыми кривыми, целиком лежащими внутри области), также справедлива формула (1.35) с интегрированием по конечной области. В более общем случае ограниченной области, для которой в некоторых точках границы $\omega\cdot n = 0$, необходимо непрерывно продолжить распределение завихренности и образовать на ее границе новую область с $\omega\ n = 0$. Имеется много способов продолжить распределение завихренности (в качестве одного из них можно потребовать выполнения равенства $\operatorname{rot}\omega = 0$ в области продолжения), поскольку задача отыскания соленоидального вектора ω при заданном $\omega\cdot n$ на границе недоопределена. Однако во всех случаях интегрирование в (1.35) проводится по расширенной области и дает одно и то же значение скорости в области, занятой жидкостью.

Следуя Г.Гельмгольцу [135], можно дать физическую трактовку формулы (1.35): каждая вращающаяся жидкая частица в точке с координатами x' вызывает в каждой другой частице в точке с координатами x скорость, направленную перпендикулярно к плоскости, проходящей через вектор $\omega(x')$ и точку x. Эта скорость прямо пропорциональна объему $dV(x')$ частицы, скорости ее вращения $\omega(x)$, синусу угла между прямой $x'x$ и $\omega(x')$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами.

Отметим, что в области, где $\omega(x,t) = 0$, поле скоростей жидкости, определяемое формулой (1.35), будет потенциальным. В отличие от потенциальных безвихревых течений жидкости в этом случае потенциал $\Phi(x,t)$ будет многозначным. Однако скорость, определяемая с его помощью, является однозначной. На такое свойство потенциалов, названных Г.Гельмгольцем интегралами второго класса уравнений гидродинамики, впервые было обращено внимание в [135], где указано на математическое сходство вихревых движений несжимаемой жидкости и теории электромагнетизма: вихревые нити соответствуют электрическим контурам (интенсивность вихревой нити — силам токов по этим контурам, скорость — магнитной силе) [29].

В общем случае конечной области выражение (1.35) не будет удовлетворять значениям задаваемой на границе нормальной составляющей скорости U_n. Однако если к нему добавить вектор $u^* = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — решение задачи Дирихле $\Delta G = 0$, $\partial\varphi/\partial n = U_n - U_n$, то сумма $u + u^*$ будет иметь заданную завихренность и заданную на границе нормальную составляющую скорости. Такое добавление можно тра⋅ го-вать для простых форм областей (плоскость, круговой цилиндр, сфера) как включение «мнимых» или зеркальных источников завихренности. Отметим мгновенный отклик скорости на движение границ (изменение U_n) и единственность определения вихревого потока только по нормальной составляющей скорости на границе.

5. Уравнения движения жидкости

Уравнения движения сплошной среды. Дифференциальные уравнения движения жидкости выводятся исходя из применения второго закона Ньютона к произвольному жидкому объему. Этот закон связывает изменение во времени импульса объема жидкости с системой поверхностных и объемных сил, действующего на него. Векторные уравнения движения элемента сплошной среды связывают поля плотности ρ, вектора ускорения $\boldsymbol{a}$ и тензора напряжений T во всех внутренних точках. Они установлены О.Коши (1828 г.) и имеют вид

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \hat{T}, \tag{1.36}$$

справедливый для любого типа сплошной среды. Вектор $\boldsymbol{F}$ определяет отнесенные к единице массы объемные силы и является известной функцией координат $\boldsymbol{x}$ и времени t. К внешним силам относятся силы тяжести, силы Кориолиса в случае вращающейся жидкости, электромагнитные силы для электропроводной жидкости и другие. В дальнейшем будем считать, что такие силы являются потенциальными : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = -\operatorname{grad} \Pi(\boldsymbol{x}, t)$.

Уравнения состояния. Для основных моделей идеальной или вязкой жидкости уравнения состояния связывают в каждой точке компоненты σ_{ij} тензора напряжений T с компонентами e_{ij} тензора скоростей деформации $\hat{\mathcal{E}}$. В самом общем случае линейных соотношений для изотропной вязкой жидкости эти уравнения были получены исходя из различных физических предпосылок в работах К.Навье (1822 г.), С.Пуассона (1829 г.), Б.Сен - Венана (1843 г.) и Д.Стокса (1845 г.) и имеют вид

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{u}}{3}\delta_{ij}\right); \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j; \\ 0; & i \neq j. \end{cases} \tag{1.37}$$

Подробный вывод уравнения состояния (1.37) и оценка заложенной в них системы физических гипотез методически наиболее четко изложены в [8, 65, 66, 228].

Уравнение состояния для идеальной жидкости получаем из (1.37), полагая коэффициент вязкости $\mu = 0$:

$$\sigma_{ij} = - p\,\delta_{ij}. \tag{1.38}$$

Оно показывает, что во всех точках движущейся, как и покоящейся идеальной жидкости, поверхностные силы, действующие на выделенную площадку, являются силами давления, направленными перпендикулярно к ней, и не зависят от вектора ее ориентации.

Уравнения Эйлера и Навье — Стокса. В случае идеальной жидкости подстановка уравнений состояния (1.38) в общие уравнения движения дает

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{1.39}$$

Уравнения движения (1.39), записанные в эйлеровых координатах $\boldsymbol{x}$, t, называются уравнениями Эйлера. Обращая внимание на физический смысл отдельных членов в (1.39), отметим, что правая его часть дает выражение для полного ускорения в виде двух составных частей: ускорения, которое вызывает массовые силы, и добавочного ускорения, учитывающего действие сил гидродинамического давления. Уравнение (1.39) можно записать в лагранжевых переменных $\boldsymbol{x}$, t, причем неизвестными будут пять функций $\boldsymbol{x}$, p, ρ. Выражая ускорение и массовые силы через лагранжевы координаты и переходя к ним в выражении для градиента путем умножения на Grad $\boldsymbol{x}$, окончательно находим

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2} - \boldsymbol{F}\right)\cdot \operatorname{Grad}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{Grad} p, \tag{1.40}$$

где большая буква в операции градиента обозначает вычисление соответствующих производных по $\boldsymbol{X}$. Эти уравнения найдены Ж.Лагранжем [44] в 1788 г. независимо от Л.Эйлера и называются лагранжевыми уравнениями. Несмотря на большую сложность, они играют важную роль, особенно при анализе нестационарных движений жидкости.

Для вязкой жидкости подстановка тензора напряжений (1.37) в (1.36) приводит к векторному уравнению Навье — Стокса в эйлеровых переменных

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \frac{2}{3}\mu\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}. \tag{1.41}$$

Полная система уравнений движения. Записанные в эйлеровых и лагранжевых координатах уравнения движения (1.39) или (1.40) для идеальной жидкости и (1.41) для вязкой еще не образуют полной системы уравнений, описывающей изменение в пространстве и во времени основных характеристик течения жидкости — поле скорости, давления, плотности. Для замыкания системы уравнений движения необходимо использовать уравнение сохранения массы $\int\limits_{v} \rho dV$ жидкого объема $V(t)$. В эйлеровых координатах, применяя соотношение (1.31), получаем два эквивалентных уравнения

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1.42}$$

связывающих изменение плотности при движении жидкости.

В лагранжевых переменных уравнение сохранения массы получается при сравнении объемов жидкого элемента в начальном и текущем состояниях и имеет вид

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \right\| = \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{1.43}$$

где $\rho_0(\boldsymbol{X})$ — плотность элемента объема $\boldsymbol{X}$ в начальный момент времени.

Для получения полной системы уравнений используют несколько разных предположений. Часто ограничиваются рассмотрением баротропной жидкости, для которой в каждой точке давление является однозначной функцией плотности. Таким образом, соотношение $p = f(\rho)$ дает пятое уравнение для полной системы. Обычно используется при рассмотрении движений в газообразной среде. Существует иное предположение, основанное на введении гипотезы о несжимаемости жидкости — сохранение во времени плотности жидкого элемента. В эйлеровых и лагранжевых переменных это уравнение запишем в виде

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0; \quad \rho(\boldsymbol{X}, t) = \rho_0(\boldsymbol{X}). \tag{1.44}$$

Обращаясь к уравнениям (1.42), видим, что для несжимаемых жидкостей поле скорости в эйлеровых координатах удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$. Оно не исключает того, что несжимаемая жидкость может быть неоднородной, например, состоять из нескольких несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Здесь имеет место зависимость плотности от координат, которая должна либо задаваться, либо определяться с использованием дополнительного условия. Для *однородной* жидкости условие несжимаемости означает, что плотность среды не зависит ни от времени, ни от координат $\rho = \rho_0 = \text{const}$, т.е. является физической постоянной среды.

Таблица 2

Координата	Уравнение
x	$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{du}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$
y	$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$
z	$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$
r	$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=$ $=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]$
θ	$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}=$ $=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$
z	$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=$ $=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$

Таким образом, *полная система* уравнений, описывающих движение *однородной несжимаемой* идеальной или вязкой жидкости, состоит из уравнений Эйлера (1.39) или Навье — Стокса (1.41) и уравнения несжимаемости (1.15) и содержит четыре неизвестных функции $\mathbf{u}$, p. В табл. 2 эта система записана в декартовых и цилиндрической системах координат для общего случая вязкой жидкости. Уравнения для идеальной жидкости получаются при $\nu = 0$.

Учитывая векторное тождество (1.26) и потенциальность внешних сил, уравнения Навье — Стокса (1.41) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \times \operatorname{rot} u + \operatorname{grad}\left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Pi\right) = \partial \Delta u . \qquad (1.45)$$

Для идеальной жидкости они называются уравнениями движения в форме Громеко — Лэмба [66].

Начальные и граничные условия. В качестве начальных условий для решения полной системы уравнений движения несжимаемой однородной жидкости необходимо иметь распределение полей скорости и давления в момент времени $t = 0$.Уравнения движения являются эволюционными во времени первого порядка и задание начального распределения величин позволяет вычислить их развитие во времени.

Когда в жидкости имеются твердые тела или ограничивающие ее твердые или свободные границы, необходимо сформулировать соответствующие граничные условия.На свободной или на внутренней поверхности раздела двух разных жидкостей должно выполняться условие непрерывности вектора напряжений [46]. Наличие свободной поверхности или границы раздела налагает дополнительные значительные трудности на решение задач гидродинамики, поскольку положение и форма свободной границы заранее не известны. Формулировка условий на твердых неподвижных границах связана с результатами многих тщательных экспериментов, выполненных в XIX в. [65].

К настоящему времени придерживаются следующих условий на твердых неподвижных границах с внешней нормалью n.

Для идеальной жидкости на стенках должно быть выполнено условие непротекания — нормальная составляющая скорости обращается в нуль, $u \cdot n = 0$. Относительно касательной составляющей нет никаких ограничений. Это обстоятельство является, пожалуй, основным недостатком модели идеальной жидкости, ведущим при безотрывном обтекании твердых тел к парадоксу Д'Аламбера и другим существенным отличиям от данных многочисленных экспериментов. Таким образом, учет даже малой вязкости таких жидкостей или газов, как вода или воздух, принципиально важен при рассмотрении взаимодействия потока с ограничивающими его телами. Движение в свободной части течения хорошо описывается в рамках модели идеальной жидкости.

Для вязкой жидкости на стенках должно выполняться условие полного прилипания: $u = 0$. При этом вектор силы t, действующей на твердую стенку, вычисляется [67] согласно формуле $t = -pn + \mu(\omega \times n)$.

Наличие твердых границ в вязкой жидкости — существенный источник генерации завихренности при обтекании тел.

6. Динамика завихренности

Основные определения. Начало классической теории движения вихрей в жидкости положил в 1858 г. Г.Гельмгольц [135]. Он впервые ввел в гидродинамику учение о вихревых нитях и установил знаменитый принцип сохранения вихрей, который, как отметил А.Пуанкаре, составляет наибольший прогресс, достигнутый на сегодняшний день в гидродинамических теориях [201]. Г.Гельмгольц указал, что интегралы гидродинамических уравнений, из которых непосредственно вытекает этот принцип, были даны еще О.Коши. Последний рассматривал полученные результаты лишь с аналитической стороны. Частичные выражения принципов, установленных в [135], встречались и в работах Д'Аламбера, Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, Дж.Сванберга и Д.Стокса.

Однако Г.Гельмгольц установил эти принципы сохранения во всей идейной полноте, указав правила для определения расположения поля скоростей в жидкости, содержащей вихревые трубки.

Используем общие определения параграфа 2 применительно к векторному соленоидальному полю завихренности ω. Тогда из общих свойств векторных полей на основании теоремы Стокса (1.8) следует, что циркуляция Γ по любому замкнутому стягиваемому контуру равна алгебраической сумме интенсивностей κ всех вихревых трубок, пересекающих поверхность, ограниченную этим контуром. Это справедливо и в частном случае вихревых трубок бесконечно малого поперечного сечения — *вихревых нитей.* Обратим внимание на то, что понятие «вихревая нить» и «вихревая линия» отличны. Вихревая нить — это особая линия в распределении поля завихренности, полностью определяемая значением интенсивности κ. В свою очередь — *вихревая линия* — это линия, касательная к которой в каждый момент времени совпадает с направлением мгновенной оси вращения жидких элементов. Применительно к описанию вихревого движения термины «вихревые линии» и «нити» ввел Г. Гельмгольц в [135]. Он сформулировал основные свойства интегралов гидродинамических уравнений второго класса (так были названы течения, содержащие отличную от нуля завихренность в отличие от полностью потенциальных течений, весьма детально к тому времени изученных). Сформулированные в виде трех положений, эти свойства в дальнейшем названы законами или теоремами Гельмгольца для вихревого движения. Более столетия они встречаются в различных интерпретациях практически во всех учебниках по механике жидкости. Приведем эти законы в формулировках Г. Гельмгольца:

1) ни одна жидкая частица не может прийти во вращательное движение, если только она сначала не находилась в нем;

2) жидкие частицы, которые в какой-нибудь момент времени расположены на вихревой линии, при своем перемещении всегда будут принадлежать одной и той же вихревой линии;

3) произведение поперечного сечения на скорость вращения вихревой нити является вдоль всей ее длины величиной постоянной и сохраняется при передвижении нити. Поэтому вихревые нити должны либо замыкаться на себя внутри области течения, либо оканчиваться не иначе как на ее границах.

Координата	Уравнение
x	$\frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}+v\frac{\partial\xi}{\partial y}+w\frac{\partial\xi}{\partial z}=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$
y	$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}+w\frac{\partial\eta}{\partial z}=\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}+\zeta\frac{\partial v}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)$
z	$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}+\zeta\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)$
r	$\frac{\partial\omega_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial\omega_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial\omega_r}{\partial z}=\omega_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\omega_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\omega_z\frac{\partial u_r}{\partial z}+$ $+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega_r}{\partial\theta_2}+\frac{\partial^2\omega_r}{\partial z^2}-\frac{\omega_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\theta}\right]$
θ	$\frac{\partial\omega_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial\omega_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial\omega_\theta}{\partial z}+\frac{\omega_r u_\theta}{r}=\omega_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\omega_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\omega_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\omega_\theta u_r}{r}+$ $+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\omega_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\omega_\theta}{\partial z^2}-\frac{\omega_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\right]$
z	$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial\omega_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial\omega_z}{\partial z}=\omega_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\omega_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+w_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+$ $+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right]$

Установленные Г. Гельмгольцем законы применимы для идеальной жидкости при условии потенциальности внешних массовых сил и предположении о баротропности или несжимаемости однородной жидкости. Несмотря на определенную ограниченность их поля действия, они по своей сущности обладают таким значением, которое позволяет поставить их в один ряд с основными законами механики жидкости.

Уравнения Гельмгольца. Применительно к вихревым течениям более удобным представляются уравнения движения (1.45) в иной форме. Они получаются в результате применения операции rot к уравнениям (1.45) с учетом равенств $\Delta u = -\mathrm{rot}\,\omega$, $\Delta\omega = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\omega$ (следующих из общих формул (1.2) и условий соленоидальности полей и скорости завихренности):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

С учетом векторных тождеств (1.4) имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \tag{1.46}$$

Используя определение полной производной, уравнения (1.46) записываем в виде

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{D t} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \tag{1.47}$$

или в инвариантной форме

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{D t} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \tag{1.48}$$

В табл. 3 для удобства дальнейших ссылок уравнения (1.46) — (1.48) расписаны покомпонентно в декартовых и цилиндрических координатах.

Для идеальной жидкости ($\nu = 0$) эти уравнения принимают вид

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{1.49}$$

и называются *уравнениями Гельмгольца.* Следует отметить, что такая запись уравнения движения идеальной жидкости для частных случаев осесимметричного движения встречалась еще в работах Д'Аламбера (1752 г.) и Л.Эйлера (1755 г.). Однако именно Г. Гельмгольц положил их в основу учения о вихрях в идеальной жидкости и доказал на основе использования уравнений (1.49) свои знаменитые законы.

Основное преимущество уравнений для завихренности в форме Гельмгольца состоит в том, что они не содержат в явном виде неизвестную функцию — давление. Уравнения (1.47) и (1.49) определяют изменение завихренности во времени, по которому, в свою очередь, с помощью формул (1.35) определяют изменение поля скорости. Поле давления вычисляется исходя из найденного поля скорости согласно (1.45).

Несмотря на прозрачность формальной схемы решения этих существенно нелинейных гидродинамических уравнений, их фактическое решение сопряжено с огромными трудностями. Даже современные суперкомпьютеры и растущее понимание математических свойств исходных уравнений не дают пока полного решения задачи о движении даже идеальной жидкости с произвольно заданным начальным распределением завихренности. Глубокий анализ современного состояния проблемы динамики завихренности с упором на фундаментальные ее аспекты содержат статьи Ф.Сэффмена [69, 222, 223].

Рассмотрим члены, стоящие в правой части уравнения (1.46). Первый из них представляет собой скорость изменения величины ω в некоторой точке пространства вследствие конвекции жидкости, из-за которой завихренность жидкости, проходящая через данную точку, есть величина непостоянная. Второй член $\omega \cdot \nabla u$ дает своеобразное изменение завихренности. Смысл его становится ясным, если рассмотреть поведение ω аналогично поведению элемента жидкой линии, в некоторый момент времени совпадающему с участком вихревой линии. Изменение ω можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое представляет собой поворот линейного элемента как твердого тела. Оно обусловлено компонентой изменения скорости δu, нормальной к вектору ω. Второе слагаемое связано с растяжением или сжатием линейного элемента. Оно вызвано компонентой скорости δu, параллельной вектору ω. Наконец, член $\nu\Delta\omega$ представляет скорость изменения ω за счет молекулярной диффузии завихренности.

Теорема В. Томсона. В. Томсон подошел к исследованию вихревого движения с несколько иной стороны [242]. Он изучал изменение во времени циркуляции Γ скорости течения по произвольному жидкому контуру $L(t)$. Основываясь на установленной формуле (1.27) и используя уравнения движения (1.41), записываем

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{d}{dt} \oint\limits_{L(t)} u(x, t)\, dx = \oint\limits_{L_0} (F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta u)\, dx .$$

Первые два слагаемых в последнем выражении при условиях потенциальности сил и баротропности или несжимаемости жидкости при интегрировании по замкнутому контуру превращаются в нуль. Отсюда следует

$$\dot{\Gamma} = - \nu \oint\limits_{L_0} \operatorname{rot} \omega \cdot dx = \nu \oint\limits_{S_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \omega \cdot n\, dS = \nu \oint\limits_{S_0} \Delta \omega \cdot n\, dS .$$

В случае невязкой жидкости ($\nu = 0$) окончательно получаем $\dot{\Gamma} = 0$. Это составляет утверждение теоремы В. Томсона о том, что циркуляция скорости по замкнутому контуру, который проведен через одни и те же частицы жидкости, в процессе движения есть величина постоянная. С помощью теоремы В. Томсона легко доказываются второй и третий законы Гельмгольца.

Для доказательства второго закона Гельмгольца рассмотрим замкнутый контур L_0, целиком лежащий в момент $t = 0$ на вихревой поверхности W_0. Тогда по теореме Стокса (1.8) имеем

$$\Gamma = \int_{L_0} u(x, 0)\, dx = \int_{S_0} \omega(x, 0)\, n\; dS \equiv 0. \tag{1.50}$$

В момент времени t жидкие частицы контура L_0 непрерывно перейдут в контур $L(t)$, а вихревая поверхность W_0 — в поверхность (вообще говоря, невихревую) $W(t)$. Однако, согласно теореме В. Томсона, значение нулевой циркуляции скорости сохранится и при ее вычислении по контуру $L(t)$, а следовательно, равенство (1.50) будет иметь место и в момент t для поверхности W. Поскольку поток вектора $\Omega(x, t)$ через любую поверхность $S(t)$, ограниченную контуром $L(t)$, лежащим на $W(t)$, будет равен нулю, то отсюда следует, что $W(t)$ будет вихревой поверхностью и в момент t. Поскольку вихревые нити являются пересечением вихревых поверхностей, то и они будут жидкими линиями , т.е. перемещаться вместе с жидкостью.

Доказательство части третьего закона Гельмгольца о постоянстве интенсивности вихревой трубки в любом ее сечении основывается на свойстве соленоидальности поля $\omega(x, t)$. Выбирая на вихревой трубке две поверхности S_1 и S_2, пересекающие эту трубку по контурам L_1 и L_2, и применяя (1.7), получаем

$$\int_{S_1} \omega \cdot n\; dS - \int_{S_2} \omega \cdot n\; dS = \int_V \operatorname{div} \omega\, dV \equiv 0\,.$$

Сохраняемость этой величины во времени вытекает из теоремы В.Томсона, поскольку интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по жидкому замкнутому контуру, единожды ее обхватывающему. А такой жидкий контур, согласно второму закону Гельмгольца, всегда лежит на той же самой вихревой трубке. Справедливо и обратное утверждение: если вихревые линии являются жидкими и интенсивность вихревой трубки постоянна во времени, то циркуляция скорости по любому жидкому контуру сохраняется во времени.

Второй и третий законы Гельмгольца составляют в совокупности принцип сохранения вихревой трубки. Поперечное сечение трубки и угловая скорость могут изменяться, но их произведение (точнее, интеграл по сечению) — интенсивность — всегда остается постоянным. При потенциальности массовых сил вихревая трубка не может ни разорваться, ни исчезнуть. Она может продольно расщепиться на отдельные ветви, что не противоречит указанным теоремам. Из этих законов следует важное свойство интенсификации завихренности в вихревых трубках малого поперечного сечения. Оно состоит в том, что если некоторый участок трубки в процессе движения, скажем, в силу какихлибо причин удвоил свою длину, то из сохранения его объема следует, что площадь поперечного сечения уменьшилась наполовину, а среднее значение вектора завихренности для сохранения постоянной интенсивности трубки должно удвоиться. Таким образом, вектор завихренности изменяется по значению и направлению так же, как и расстояние между двумя соседними жидкими частицами, лежащими на оси трубки. В принципе в идеальной жидкости возможен процесс неограниченного возрастания вектора Ω по мере растяжения вихревой трубки. Детальный количественный анализ данного сложного нелинейного процесса весьма сложен и многие важные обстоятельства до конца не прояснены [8]. В частности, имеется предположение [69], что нелинейное растяжение трехмерных вихревых нитей может происходить быстрее, чем с экспоненциальной скоростью, и нити могут стать бесконечно длинными за конечное время, что приведет к появлению сингулярности в поле завихренности. Кроме того, вихревые трубки (нити) не могут пересечься, хотя в процессе деформирования могут принимать весьма причудливую форму [25].

Доказать первый закон Гельмгольца с помощью теоремы В. Томсона нельзя, поскольку речь идет о нулевой завихренности в точке, а циркуляция всегда вычисляется по контуру.

Отметим принципиально важную особенность, относящуюся только к идеальной жидкости. Как следует из уравнений Эйлера (1.39), для консервативных внешних сил и при несжимаемости жидкости имеем уравнение $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Оно называется условием Д'Аламбера — Эйлера и в эйлеровых координатах необходимо и достаточно для движения, сохраняющего циркуляцию. В лагранжевых переменных его аналогом выступает условие Ханкеля — Аппеля $\operatorname{Rot}(\operatorname{Grad} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}) = 0$. Приняв эти уравнения в качестве аксиом, были решены многие задачи динамики завихренности для несжимаемой жидкости путем последовательного кинематического анализа без помощи динамических уравнений [250]. Несмотря на некоторую неизбежную формальность и искусственность, красоту такого построения стоит оценить и сейчас.

Теорема Лагранжа. В точках, в которых скорость имеет потенциал, вектор завихренности согласно его определению равен нулю. Иными словами, потенциальное течение жидкости является безвихревым. Возникает вопрос, может ли потенциальное в начальный момент времени течение стать вихревым ? Для идеальной жидкости ответ на этот вопрос дает теорема Лагранжа, которая утверждает, что если в начальный момент движения идеальной несжимаемой жидкости, подверженной действию потенциальных сил, существовал потенциал скорости, то он будет существовать во все последующие моменты ее движения. Иными словами, движение, однажды будучи безвихревым, всегда им и останется.

Не комментируя результаты Ж. Лагранжа, О. Коши (1815 г.) дал четкую формулировку и корректное доказательство следующего утверждения: при непрерывном движении идеальной несжимаемой жидкости жидкая частица, будучи в начальный момент в невращательном движении, останется в нем и в дальнейшем. Существенная разница между этими двумя утверждениями отмечена Г. Ламбом [46]. В первом случае фигурирует часть пространства, занимаемого жидкостью, а во втором — часть самой жидкости. Согласно О. Коши, часть жидкости, для которой существует потенциал скорости, движется и уносит это свойство с собой. В то же время ту часть пространства, которую первоначально занимала невращательная жидкость, может занять жидкость, в которой имеет место вращательное движение. Ввиду важности результатов укажем схемы двух их доказательств.

Первое доказательство, содержащееся, например, в [35, 59], принадлежит О. Коши. Исходя из записи уравнений движения в лагранжевых координатах (1.40) он свел их, по существу, к уравнению для завихренности (1.49) и нашел их первый интеграл $\omega(X, t) = \omega(X, 0) \cdot \mathrm{Grad}\, x$. Отсюда следует, что если в начальный момент времени вектор завихренности для жидкого элемента равен нулю, то и в любой момент времени завихренность будет равна нулю. Это, по существу, является первым законом Гельмгольца.

Второе доказательство принадлежит Д.Стоксу [228]. Он основывался на уравнении (1.49), записанном в эйлеровых координатах, и обратил внимание на то, что равенств $\Omega = 0$ и $D\omega/Dt = 0$ в начальный момент недостаточно в общем случае для утверждения, что ω будет иметь место и в дальнейшем. Именно на возможности представления величин $u(x, t)$ и $\omega(x, t)$ аналитическими функциями

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)\,t^j; \qquad \omega(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(x)\,t^j$$

и базировалось доказательство Ж.Лагранжа. Д.Стокс отметил, что такое разложение не всегда справедливо. Например, для скалярного случая можно указать такие функции, как $t\ \ln t$n или $\exp(-t^2)$, обращающиеся в нуль вместе с первой производной, однако не допускающие аналитического представления.

Причина такой ситуации может быть проиллюстрирована примером скалярного нелинейного дифференциального уравнения ($\dot{f} = 2f^{1/2}$) с начальным условием ($f(0)=0$). При этом ($\dot{f}(0) = 0$), однако решение ($f(t)=t^2$) отлично от нуля. Чтобы высказанное предположение имело место, необходимо, чтобы f обращалась в нуль не только в пределе первого порядка малости по t, но и для всех более высоких порядков величины t. Этого, очевидно, нельзя достичь в данном случае, так как ($\ddot{f}(0)$) не определена. Если, однако, уравнение имеет вид ($\dot{f} = f$), то все производные от f по t обращаются в нуль вместе с t и тогда заключение о том, что f никогда не может отличаться от нуля, справедливо.

Для конкретного случая уравнений (1.49) Д. Стокс показал, что если тензор grad u ограничен на интервале $(0, t)$ некоторой постоянной K, то квадрат длины вектора завихренности удовлетворяет неравенству

$$|\omega(x,t)|^2 \leq |\omega(x,0)| e^{2Kt},$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Самое простое доказательство теоремы Лагранжа непосредственно следует из теоремы В.Томсона, поскольку в начальный момент времени циркуляция по замкнутому контуру скорости, имеющей потенциал, равна нулю и таковой остается в последующие моменты.

7. Инварианты вихревого движения

Общие соотношения. Уравнения Гельмгольца при наличии областей завихренности в безграничной области допускают неизменность во времени ряда физических характеристик. Это обстоятельство представляет не только теоретический интерес, но существенно при проверке корректности численных алгоритмов расчета вихревых течений. Вопрос об инвариантах вихревого движения частично затрагивал А.Пуанкаре [201]. Наиболее систематическое обобщение данного вопроса содержится в [245], где установлена не только инвариантность ряда интегральных комбинаций полей завихренности, но и для вязкой жидкости найдены общие законы вырождения величин, названных моментами завихренности.

Исходным соотношением для анализа принято условие

$$I^n(b_1, b_2, b_3, t) = \int_V (b \cdot x)^n \, b \cdot \omega(x,t) \, dV = 0,$$

которое выполняется для любого вектора b при условии, что $\operatorname{div} \omega = 0$. Само распределение завихренности при этом либо ограничено, либо гладко убывает на бесконечности. Выбирая последовательно n, равное 0, 1, 2,..., собирая коэффициенты при степенях b_i^{n+1} и приравнивая их нулю, получаем ряд нетривиальных соотношений. При их выводе использована декартова система координат (x_1, x_2, x_3).

При $n = 0$ имеем

$$\int_V \omega_i \, dV = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.51}$$

т.е. суммарно значение вектора завихренности по объему в безграничной жидкости равно нулю.

При $n = 1$ имеется шесть равенств

$$\int_V (x_i \omega_j + x_j \omega_i) \, dV = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{1.52}$$

при $n = 2$ — восемнадцать соотношений для вторых моментов

$$\int_V x_i^2\,\omega_i\,dV=0;\quad \int_V (x_i^2\,\omega_j+2x_ix_j\omega_i)\,dV=0;$$

$$\int_V (x_1x_2\omega_3+x_1x_3\omega_2+x_2x_3\omega_1)\,dV=0. \tag{1.53}$$

Установленные соотношения (1.51) — (1.53) справедливы, как видно из идеи вывода, для любого соленоидального вектора ω. Если же учесть, что завихренность должна удовлетворять уравнениям Гельмгольца (1.49) для несжимаемой идеальной жидкости, то, как впервые показано в [187], в общем случае имеют место ненулевые инварианты для распределенной завихренности.

Инварианты для моментов первого порядка

$$\int_V x_i\omega_j\,dV=C_k=\text{const}\ ,\quad k=1,2,3;\ i\neq j\neq k. \tag{1.54}$$

Соответственно при $n=2$ три нетривиальных инварианта имеют вид

$$\int_V (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,\omega_i\,dV=D_i=\text{const}. \tag{1.55}$$

Для $n\geq 3$ инвариантов не обнаружено, т.е. все моменты завихренности третьего порядка зависят от времени.

Для двухмерных течений в плоскости (x_1, x_2) единственной отличной от нуля компонентой вектора завихренности будет ω_3. Предыдущие соотношения для трехмерного случая предполагали ограниченность или достаточно быстрое убывание на бесконечности вектора ω. Для плоской задачи компонента Ω_3 не зависит от x_3 и, следовательно, все формулы нужно выводить отдельно, основываясь на известной [8] методике перехода от трех- к двухмерным интегралам. В результате получаются простые соотношения

$$\int_S \omega_3(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=\Gamma;$$

$$\int_S x_i\,\omega_3(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=C_i,\ i=1,2;$$

$$\int_S (x_1^2+x_2^2)\,\omega_3(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=4\theta\Gamma t+D, \tag{1.56}$$

где интегрирование ведется по всей плоскости, а постоянные Γ, C_i, D определяются начальным распределением завихренности. Эти формулы установлены А.Пуанкаре [201].

Импульс, момент импульса и энергия. Кроме кинематических характеристик, определяемых полем скорости и завихренности, вихревое движение обладает и динамическими свойствами. К ним, в первую очередь, принадлежат импульс $\boldsymbol{P}$, момент импульса $\boldsymbol{M}$ и кинетическая энергия T всего объема жидкости. Эти величины важны из-за того, что такими интегральными характеристиками регулируется поведение динамической системы в целом. Можно сказать, что весь процесс движения жидкости определяется начальными значениями импульса и энергии. Способы задания этих величин в конкретных ситуациях могут быть весьма разнообразны.

Общие выражения для импульса $\boldsymbol{P}$ кинетической энергии T и момента импульса $\boldsymbol{M}$ относительно начала координат движения несжимаемой жидкости имеют вид

$$\boldsymbol{P} = \rho \int_V \boldsymbol{u}\, dV \; ; \quad \boldsymbol{M} = \rho \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u}\, dV \; ; \quad T = \frac{\rho}{2} \int_V (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})\, dV \, , \tag{1.57}$$

где интегрирование производится по всему объему, занимаемому жидкостью.

В общем случае эти величины могут зависеть от времени

$$T = -\mu \int_V |\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)|^2 \, dV, \tag{1.59}$$

превращаясь благодаря диссипации в теплоту.

Спиральность. Еще один инвариант движения идеальной жидкости установлен Ж. Моро [188] и назван им спиральностью. Этот инвариант определяется формулой

$$H = \int_{V_\omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, dV. \tag{1.60}$$

Используя формулы (1.7) и (1.22), уравнения Эйлера (1.39) и Гельмгольца (1.49) для несжимаемой идеальной жидкости, получаем

$$H = \int_{V_\omega} \omega \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 - \frac{p}{\rho} - \Pi \right) dV = \int_{S_\omega} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 - \frac{p}{\rho} - \Pi \right) dS = 0 .$$

Здесь использовано свойство соленоидальности поля $\boldsymbol{\omega}$ и условие $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ на ограничивающей области (V_ω) поверхности (S_ω).

Между введенными инвариантами (H, T) и *энстрофией*

$$\Omega = \int_{V_\omega} |\boldsymbol{\omega}|^2 \, dV \tag{1.61}$$

существует соотношение

$$\Omega \geq \frac{\rho}{2} \frac{H^2}{T}, \tag{1.62}$$

вытекающее из интегрального неравенства Шварца. Ограничение (1.62) показывает, что в любом процессе динамики завихренности в идеальной жидкости энстрофия имеет четкую нижнюю границу. Отметим, что равенство в (1.62) достигается для так называемых течений Бельтрами, где ($\boldsymbol{\omega} = a\, \boldsymbol{u}$ ($a = \text{const}$).

ПЛОСКИЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

Я встретился с большими затруднениями, предполагая существование вихрей в среде, которые располагаются непосредственно друг около друга и вращаются в одном и том же направлении около параллельных осей.

Д.К. Максвелл «О физических силовых линиях»

Важным упрощением общих уравнений вихревого движения жидкости является предположение о том, что области завихренности представляют собой бесконечные прямолинейные цилиндрические трубки конечного сечения, все образующие которых параллельны оси z декартовой системы координат. При этом единственная отличная от нуля компонента вектора ω также параллельна оси z, а ее величина ζ зависит лишь от поперечных координат x, y и времени t. С учетом таких предположений оказывается, что задача о потенциальном и вихревом движении бесконечной жидкости сводится к плоской задаче определения составляющих $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ поля скоростей (составляющая вдоль оси равна нулю). Векторные уравнения Гельмгольца существенно упрощаются, сохраняя, однако, всю специфику и сложность нелинейной природы движения завихренности.

Предложенный в работе Г.Гельмгольца [135] и нашедший отражение в [35, 46, 97] такой подход дал возможность рассмотреть большое число задач с определенным распределением завихренности. Получен ряд точных аналитических решений для конкретного вида областей. Вместе с тем вопрос об адекватности описания вихревыми движениями такого типа реальных явлений в природе оставался до недавнего времени открытым. Однако экспериментальные работы [4, 76, 113, 134], выполненные для жидкостей в различных условиях (тонкие мыльные пленки, двухслойная несмешивающаяся жидкость во вращающемся бассейне), убедительно продемонстрировали наличие именно двухмерных вихревых структур (диполей, триполей) с распределенной завихренностью. При этом новый толчок получили проблемы двухмерной турбулентности [183, 226] и связанные с ней вопросы образования крупномасштабных вихревых структур. Созданный эффективный метод контурной динамики [184] позволил существенно продвинуться в понимании процессов эволюции и взаимодействия, слияния и распада изолированных распределенных областей в идеальной жидкости. Некоторые из этих вопросов освещаются в данной главе.

1. Движение завихренности в идеальной жидкости

Общие уравнения. Рассмотрим случай, когда в идеальной несжимаемой жидкости имеются лишь несколько прямолинейных цилиндрических вихревых трубок конечного поперечного сечения, причем образующие всех трубок параллельны оси z декартовой системы координат. Покоящаяся на бесконечности жидкость либо заполняет все безграничное пространство, либо ограничена двумя перпендикулярными оси z твердыми поверхностями. В обоих случаях движения, происходящие в любой из плоскостей, перпендикулярной оси z, совершенно одинаковы, т.е. компоненты скорости u и v не зависят от координаты z, а $w=0$.

При этих предположениях для компонент вектора ω имеем

$$\xi = 0\,; \quad \eta = 0\,; \quad \zeta(x,y,t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,, \tag{2.1}$$

т.е. завихренность трубок имеет единственную отличную от нуля компоненту, параллельную образующей и не зависящую от координаты z. Векторное уравнение Гельмгольца (1.46) тогда сводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0\,, \tag{2.2}$$

откуда следует, что величина ζ остается постоянной для жидкой частицы.

Вводя вместо компонент u и v функцию тока $\psi(x,y,t)$, согласно формулам (1.16) из (2.1) и (2.2) получаем нелинейную систему уравнений в терминах переменных завихренность — функция тока:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0\,; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \begin{cases} -\ \zeta, & (x,y) \in S_\zeta\,; \\ \ \ 0, & (x,y) \notin S_\zeta\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

То обстоятельство, что второе линейное уравнение в (2.3) должно выполняться в неизвестной заранее и зависящей от времени области S_ζ, где завихренность ζ отлична от нуля, является одним из главных в формировании исключительных трудностей описания движения распределенной завихренности.

Система уравнений (2.3), (2.4) должна быть дополнена начальным условием для завихренности или функции тока

$$\zeta(x,y,0)=\zeta_0(x,y) \quad \text{или} \quad \psi(x,y,0)=\psi_0(x,y)$$

и условиями непрерывности компонент скорости на границе вихревой области S_ζ и их убыванием к нулю на бесконечности.

Для этой системы доказаны теоремы существования и единственности на всем промежутке времени, если начальное распределение завихренности $\zeta_0(x,y)$ есть гладкая [255] или кусочно-постоянная функция. Однако до настоящего времени не существует единого численного алгоритма для решения системы (2.3) при произвольных начальных условиях. Обзор первого этапа развития методов конечных разностей и конечных элементов, псевдоспектральных алгоритмов и метода «частиц в ячейках» для решения таких задач содержится в [166], а современного состояния вычислительной динамики — в [184].

Иногда при решении конкретных задач удобно применять полярные координаты (r,θ). Тогда для функций $\zeta(r,\theta,t)$ и $\psi(r,\theta,t)$ разрешающая система имеет вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}=0;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\begin{cases}-\zeta, & (r,\theta)\in S_\zeta,\\ 0, & (r,\theta)\notin S_\zeta\end{cases} \qquad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\zeta(r,\theta,0)=\zeta_0(r,\theta) \quad \text{или} \quad \psi(r,\theta,0)=\psi_0(r,\theta).$$

Уравнения Пуассона (2.4) для функции тока в предположении непрерывности поля скорости на границе вихревой области и обращения в нуль на бесконечности имеет решение в виде логарифмического потенциала

$$\psi(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{S_\zeta}\zeta(x',y',t)\ln r\,dx'dy',$$

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2. \qquad (2.6)$$

Именно то обстоятельство, что интегрирование в (2.6) производится по области S_ζ с неизвестной, зависящей от времени границей, является одним из главных в формировании тех исключительных трудностей, с которыми сталкивается задача описания даже плоского вихревого движения идеальной жидкости.

Формула (2.6) с учетом соотношений (1.16) дает выражение для поля скоростей на плоскости:

$$u(x,y,t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_\zeta}\frac{y-y'}{r^2}\zeta(x',y',t)\,dx'dy';$$

$$v(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_\zeta}\frac{x-x'}{r^2}\zeta(x',y',t)\,dx'dy'. \tag{2.7}$$

Эти формулы установлены Г.Гельмгольцем [135] на основе общих соотношений закона Био —Савара.

В случае прямолинейной вихревой нити, проходящей через точку (ξ,η), завихренность, функция тока и скорость течения даются соотношениями

$$\zeta(x,y) = \kappa\,\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta);\ \psi(x,y) = -\frac{\kappa}{4\pi}\ln[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2];$$

$$u = -\frac{\kappa}{2\pi}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2};\quad v = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Вводя в рассмотрение комплексные величины $z=x+ij$, имеем

$$u - iv = \frac{1}{2\pi}\frac{\kappa}{z-\zeta}.$$

Отсюда скорость частиц жидкости, расположенных на расстоянии r от точечного вихря, равна $\kappa/2\pi r$ и направлена по касательной к окружности радиуса r с центром, совпадающим с точечным вихрем. Подчеркнем, что скорость частицы жидкости в точке ζ равна нулю, поскольку она совпадает с индуцированной скоростью от бесконечной прямолинейной вихревой нити. Примем традиционное определение знака интенсивности вихря: величина κ является положительной, если сверху видно вращение части" жидкости вокруг вихря против часовой стрелки и κ отрицательно, если такое вращение происходит по часовой стрелке.

Интегральные инварианты уравнений движения. Как и в общем трехмерном случае, плоское вихревое движение идеальной неограниченной жидкости имеет некоторые физические величины, которые остаются постоянными во времени. Впервые они четко систематизированы в лекциях А.Пуанкаре [201], хотя ряд из них был упомянут в работах Г.Гельмгольца [135] и Г.Кирхгофа [35]. Отметим, что в силу специфики плоского движения непосредственное использование заведомо постоянных (без приложения внешних сил и диссипации) значений импульса, момента импульса и кинетической энергии всей жидкости оказывается невозможным, так как соответствующие интегралы (1.58), взятые для бесконечной области в виде слоя единичной высоты, расходятся. Поэтому, в плоском случае целесообразно конструировать заново инвариантные комбинации, проверяя, чтобы их производная по времени обращалась в нуль.

Первым из таких инвариантов является полная *интенсивность завихренности* κ, определяемая формулой

$$\kappa = \int\limits_{S_\zeta} \zeta \, dS . \tag{2.8}$$

Применяя формулу (1.22) для производной по времени от субстанциональных интегралов к объему цилиндра единичной высоты и основанием S_ζ с учетом плоского характера движения, условий несжимаемости и уравнения (2.2), имеем

$$\frac{d\kappa}{dt} = \int\limits_{S_\zeta} \frac{D\zeta}{Dt} \, dS = 0 .$$

Такое доказательство показывает, что инвариантом будет также интеграл по области S_ζ от любой достаточно гладкой функции $f(\zeta)$. В частности, важным является инвариант *энстрофии* Z, задаваемый формулой

$$Z = \int\limits_{S_\zeta} \frac{1}{2} \zeta^2 \, dS . \tag{2.9}$$

Эта величина играет важную роль в трактовке природы двухмерной турбулентности.

Несколько сложнее доказывается инвариантность первых моментов завихренности

$$C_1 = \int\limits_{S_\zeta} x \zeta \, dS ; \quad C_2 = \int\limits_{S_\zeta} y \zeta \, dS . \tag{2.10}$$

Имеем последовательно

$$\frac{dC_1}{dt} = \int\limits_{S_\zeta} \frac{D(x, \zeta)}{Dt} \, dS = \int\limits_{S_\zeta} u \zeta \, dS =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_\zeta S_\zeta'} \frac{(y - y')\zeta(x', y', t)\zeta(x, y, t)}{r^2} \, dx\, dy\, dx' dy' ,$$

поскольку в двукратном поверхностном интеграле каждому элементарному слагаемому $(y-y')\zeta'\zeta r^{-2}dSdS'$ соответствует равное по модулю и противоположное по знаку слагаемое $(y'-y)\zeta\zeta' r^{-2}dS'dS$.

Постоянство во времени величин к, C_1, C_2 позволяет ввести две инвариантные величины

$$X=\frac{C_1}{\kappa};\quad Y=\frac{C_2}{\kappa}, \tag{2.11}$$

представляющие собой координаты центра завихренности системы вихревых областей. Если к=0, то центр завихренности лежит на бесконечности.

Аналогично доказывается инвариантность второго полярного момента завихренности

$$J=\int_{S_\zeta}(x^2+y^2)\zeta\,dS. \tag{2.12}$$

Комбинацией инвариантов к, X,Y,J служит инвариантная величина

$$D=\left\{\frac{1}{|\kappa|}\int_{S_\zeta}[(x-X)^2+(y-Y)^2]\zeta\,dS\right\}^{1/2}, \tag{2.13}$$

представляющая собой дисперсию распределения завихренности относительно фиксированного центра завихренности (X,Y).

Установленные инварианты позволяют представить [245] функцию тока (2.6) в дальнем поле при $R\to\infty$

$$\psi(x,y,t)=-\frac{\kappa}{2\pi}\ln R+\frac{1}{2\pi R}(C_1\cos\theta+C_2\sin\theta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi R^2}[G(t)\cos 2\theta+H(t)\sin 2\theta]+O(R^{-3});$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2};\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$G(t)\equiv\int_{S_\zeta}(x^2-y^2)\zeta\,dS;\ H(t)=2\int_{S_\zeta}xy\zeta\,dS. \tag{2.14}$$

Первый член этого разложения описывает сингулярный характер поведения функции тока на бесконечности и показывает, что в первом приближении поле распределенной завихренности можно заменить точечным вихрем интенсивности к, расположенным в начале координат.

Обращаясь к выражению для кинетической энергии T_R слоя жидкости единичной высоты, заключенной внутри круга S_R радиуса R, можно записать цепочку тождеств

$$\frac{2}{\rho} T_R = \int_{S_R} (u^2 + v^2) \, d S = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial \psi}{\partial y} - v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d S =$$

$$= \int_{S_R} \left[\psi \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial (\psi u)}{\partial y} - \frac{\partial (\psi v)}{\partial x} \right] d S = \int_{S_R} \psi \zeta \, d S - \int_{L_R} \psi (u \, dx + v \, dy).$$

Последнее равенство основано на теореме Стокса

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d x \, d y = \oint_L (P \, dx + Q \, dy)$$

и том факте, что завихренность ζ отлична от нуля лишь в конечной области S_ζ.

Используя асимптотику (2.14), можно показать, что при $R \to \infty$

$$T_R = \frac{\rho}{2} \int_{S_\zeta} \psi \zeta \, d S + \frac{\rho \kappa^2}{4\pi} \ln R + O (R^{-1})$$

и таким образом из кинетической энергии движения выделена та конечная часть

$$W = \frac{\rho}{2} \int_{\zeta} \psi \zeta \, d S \tag{2.15}$$

избыточной энергии, которая зависит от относительного распределения завихренности, а не от ее суммарной энергии, а внешние силы отсутствуют. Можно предположить, что величина W является интегральным инвариантом движения. Это можно доказать и прямым вычислением производной по времени.

Таким образом, общие характеристики плоского вихревого движения в идеальной безграничной жидкости таковы, что в процессе движения величины κ, Z, X, Y, D, I, W, определенные выше, остаются постоянными. При численном решении основной системы (2.3) и (2.4) они служат критерием оценки точности и надежности того или иного алгоритма. Кроме того, в ряде простых случаев начального распределения завихренности эти инварианты дают возможность качественно оценить характер движения вихревых структур.

Линии тока. Формула (2.6) показывает, что в фиксированный момент времени по известному распределению завихренности ζ в

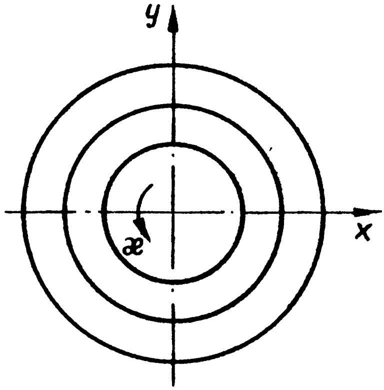


Рис. 3

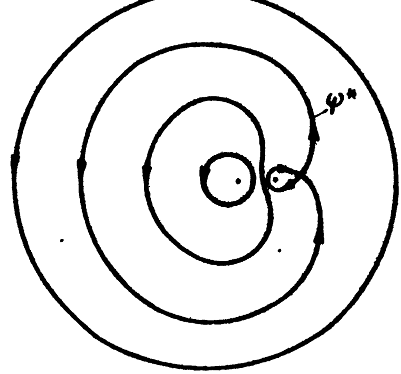


Рис. 4

области S_ζ можно восстановить картину функций тока. Ниже зависимость от времени будет подразумеваться без дополнительных обозначений аргумента функции.

В случае, когда завихренность сосредоточена в нескольких вихревых нитях интенсивности κ_i, пересекающих плоскость (x,y) в точках x_i, y_i, формула (2.6) существенно упрощается и выражение для функции тока имеет вид

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\kappa_i \ln[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]. \qquad (2.16)$$

Условие $\psi(x,y)=C=\text{const}$ определяет систему линий тока на плоскости.

Формула (2.16) показывает, что если $\sum_{i=1}^{n}\kappa_i = 0$, то линии тока при $R^2=x^2+y^2\to\infty$ отвечает значение постоянной $C\to-\infty$, если же $\sum_{i=1}^{n}\kappa_i = 0$, то линии тока на бесконечности отвечает значение $C=0$.

Решая уравнение (2.16) для конкретных значений и расположения вихревых нитей, можно построить геометрическое место точек (x,y), отвечающие конкретному значению C. Результаты для ряда конкретных случаев представлены на рис. 3 — 6.

На рис. 3 приведена картина линий тока, вызванных одной вихревой нитью. В этом случае имеется семейство концентрических окружностей, центром которого является вихревая нить. При этом касательная скорость изменяется в полярной системе координат по закону $u_0=\kappa/2\pi r$ и, следовательно, неограниченно возрастает вблизи оси.

На рис.4 даны примеры линий тока от двух вихрей, когда суммарная интенсивность не равна нулю. Характерным для этих рисунков является наличие замкнутой нулевой линии тока, образующей сепаратрису. Внутри сепаратрисы имеются замкнутые области потенциального движения жидкости. Далее будет показано, что эти вихри будут равномерно вращаться, причем замкнутые области будут их сопровождать, сохраняя свою форму. На больших расстояниях картина линий тока будет аналогична ситуации от одного вихря, имеющего интенсивность, равную сумме взаимодействующих вихрей.

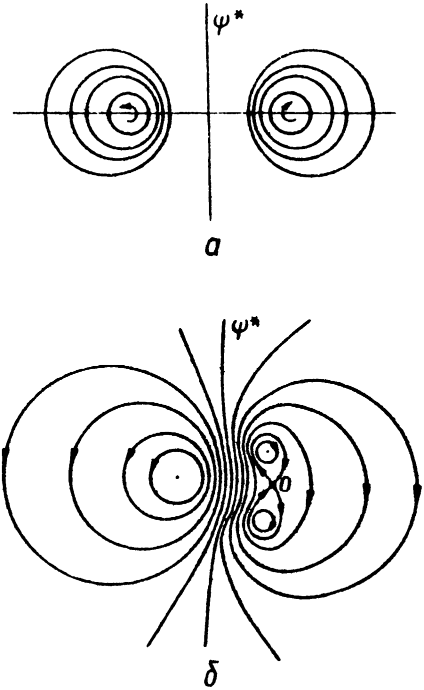


Рис. 5

Ситуация, когда суммарная интенсивность нескольких вихрей равна нулю, показана на рис. 5. В случае вихревой пары (рис. 5, *а*) линии тока образуют систему неконцентрических окружностей, причем предельная окружность ψ_∞, отвечая значению $C=0$, вырождается в прямую. Комбинация вихрей (рис. 5, *б*) сводится в дальнем поле также к случаю вихревой пары, хотя картина ближнего поля выглядит иной.

Типичные для ситуаций равномерного вращения системы вихрей, центры которых расположены в вершинах правильных N-угольников, для $N = 2 \ldots 6$ показаны на рис. 6 (*а* — *д*). Здесь имеется несколько областей, выделенных замкнутыми линиями тока — сепаратрисами. Следуя [117], будем их называть соответственно центральной (*1*) и вихревой (*2*) областями, «пояс» (*3*), «зонтик» (*4*) и внешний поток (*5*). Линии тока, расположенные внутри этих областей, образуют замкнутые кривые.

Кинетическая энергия. Полная кинетическая энергия жидкости, в которой находится одна прямолинейная вихревая нить интенсивности к, определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u_\theta^2\, r\, d r\, d\theta = \frac{\rho\kappa^2}{4\pi} \ln r \Big|_0^\infty = \infty . \qquad (2.17)$$

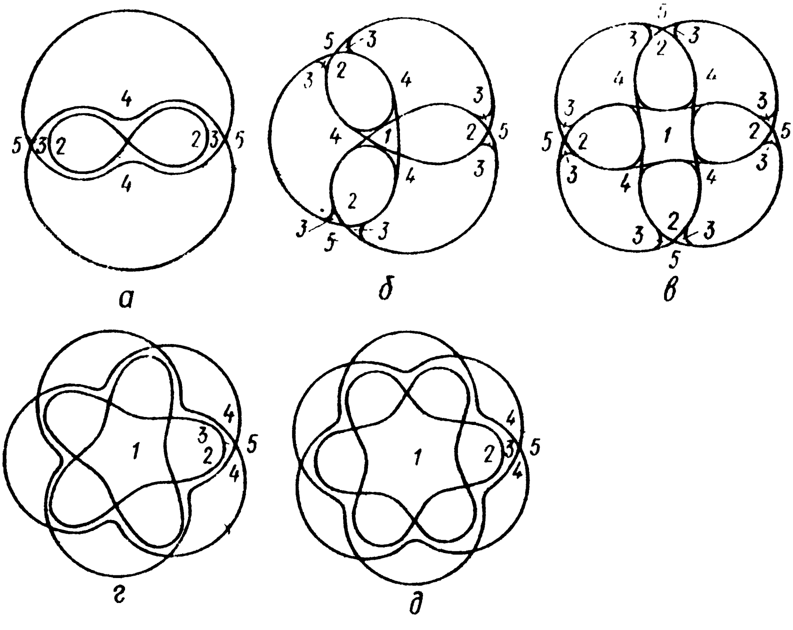


Рис. 6

Этот физически невозможный результат нельзя изменить, предполагая конечным сечение вихревой нити, т.е. считая окружную скорость всюду конечной. Это связано с тем, что кинетическая энергия жидкости, расположенная в кольцевой области между двумя соседними линиями тока, которые различаются значением ΔC (см. рис. 3), оказывается постоянной и независимой от r.

Возникает вопрос: возможны ли вообще в идеальной жидкости системы вихрей, которые обладают конечной кинетической энергией? Рассмотрим случай взаимодействия двух произвольных вихрей (рис. 7). Выделим на фигуре линий тока замкнутые области I — III. В каждой из них поверхностный элемент dS будет образован из произведения элемента длины линии тока dl и нормального расстояния до соседней линии тока dn. Тогда получим кинетическую энергию всего поля, отнесенную к единице ширины,

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_s u^2\,dS = \frac{1}{2}\rho\int_s\int u^2\,dl\,dn\,.$$

Выражение $udn = dQ$ представляет собой расход жидкости между двумя соседними линиями тока. Известно [8], что расход выражается как изменение значения функции тока $dQ = d\psi$. В свою очередь $\oint u dl = \kappa = \mathrm{const}$ — циркуляция вдоль каждой линии тока в соответствующей области. Энергию для всего поля запишем в виде

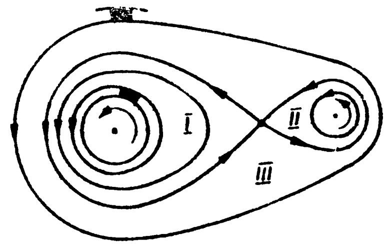


Рис. 7

$$T = \frac{\rho}{2}[\kappa_1 \int_{\mathrm{I}} d\psi + \kappa_2 \int_{\mathrm{II}} d\psi +$$

$$+ (\kappa_1 + \kappa_2) \int_{\mathrm{III}} d\psi].$$

Пусть вихри имеют конечные размеры сечений. Тогда

$$T = \frac{\rho}{2}[\kappa_1(\psi_1^* - \psi_0) + \kappa_2(\psi_2^* - \psi_0) +$$

$$+ (\kappa_1 + \kappa_2)(\psi_0 - \psi_\infty) + T_1^* + T_2^*.$$

Пределы интегрирования в областях *I* и *III* — это граничная линия тока ψ_0 и линии тока ψ^*_1, ψ^*_2 на внешних окружностях сечений вихревых ядер. В области *III* пределы интегрирования — ψ_∞ и ψ_0; T^*_1 и T^*_2 — энергии вихревых ядер. В приведенном выражении члены с ψ_0 взаимно сокращаются и окончательно имеем

$$T = \frac{\rho}{2}[\kappa_1 \psi_1^* + \kappa_2 \psi_2^* - (\kappa_1 + \kappa_2)\psi_\infty] + T_1^* + T_2^*. \qquad (2.18)$$

Таким образом, кинетическая энергия зависит лишь от функций тока на внешних окружностях сечений ядер ψ^*_1 и ψ^*_2 и от ψ_∞. Значения ψ^*_1 и ψ^*_2 для конечных сечений также конечны. До тех пор пока $\kappa_1+\kappa_2 \neq 0$, значение $\psi_\infty = -\infty$. Это означает, что по (2.18) кинетическая энергия будет иметь бесконечно большое значение.

В случае вихревой пары $\kappa_1+\kappa_2=0$ и, следовательно, $\psi_\infty=0$. Отсюда следует

$$T = \frac{\rho}{2}\kappa_1(\psi_1^* - \psi_2^*) + T_1^* + T_2^*. \qquad (2.19)$$

Положим радиусы сечений вихрей a_1 и a_2. Тогда выражение (2.19) примет вид

$$T = \frac{\rho\kappa^2}{2\pi}\ln\frac{a_1}{a_2} + T_1^* + T_2^*.$$

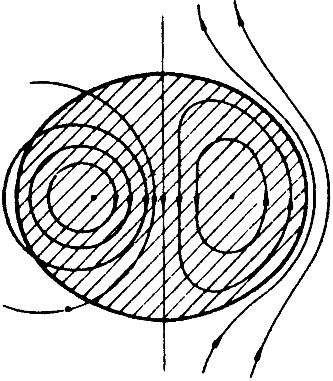


Рис. 8

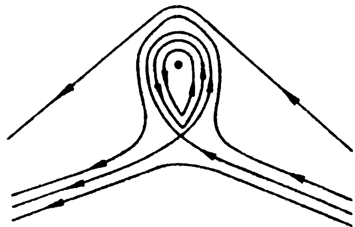


Рис. 9

Как видно, энергия вихревой пары и при конечных значениях ядер имеет конечное значение. В противоположность указанному выше вихревая пара представляет собой физически возможное образование.

В качестве обобщения рассмотрим произвольное количество параллельных вихревых нитей, находящихся в ограниченной области пространства. Общая энергия запишется по аналогии с (2.18):

$$T=\frac{\rho}{2}\left[\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\psi_i^{*}-\psi_{\infty}\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\right]+\sum_{i=1}^{N}T_i . \qquad (2.20)$$

Энергия такого вихревого поля будет конечной лишь тогда, когда $\psi_\infty=0$. Это означает, что общая интенсивность всех расположенных в данной области вихревых нитей должна равняться нулю.

«Атмосфера» вихря. В процессе потенциального движения безграничной жидкости, обусловленного полем завихренности точечных вихрей, следует разделять внутреннюю область, в которой линии тока замкнуты, и внешнюю, в которой линии тока простираются на бесконечность. В ряде случаев граница этих областей сохраняет свою форму относительно положения вихрей в процессе их движения. При этом внутренняя область называется атмосферой системы вихрей. Вся жидкость, находящаяся в ней, переносится вместе с вихрями.

Впервые понятие «атмосфера» применительно к вихревой паре ввел Кельвин [241]. Он показал, что при поступательном движении вдоль оси x вихревой пары со скоростью $\kappa/4\pi a$ (где $2\,a$ — расстояние между вихрями) частицы жидкости, лежащие на замкнутой кривой

$$x^2=2\,y\,\mathrm{cth}\,\frac{y}{2}-\ (y^2+1)\,,$$

имеют ту же скорость, что и вихревая пара.

Таким образом, жидкость, заключенная внутри овальной области с полуосями 1,73 a и 2,09 a вдоль осей x и y соответственно (рис. 8), переносится вместе с вихревой парой. Движение частиц жидкости вне атмосферы соответствует потенциальному обтеканию гладкого овального твердого тела, форма которого совпадает с формой атмосферы вихрей, и движущейся со скоростью $\kappa/4\pi a$.

Как показано в [141], площадь сечения овального тела равна 3,61 a. Кинетическая энергия жидкости во внешней области составляет $0{,}13\,\kappa^2/\pi$, а во внутренней — обращается в бесконечность. Это связано с приближением точечных вихрей. Если ввести предположение о конечной круговой радиуса $c<<a$ области постоянной завихренности для каждого точечного вихря, то, согласно [141], кинетическая энергия областей завихренности T_1 и потенциального движения внутри атмосферы T_2 имеет вид

$$T_1 = \frac{\kappa^2}{2\pi}\left(1+\frac{c^2}{2a^2}\right);$$

$$T_2 = \frac{\kappa^2}{2\pi}\left(\ln\frac{2a}{c} - 0{,}274 - \frac{c^2}{4a^2}\right).$$

Понятно, что в процессе движения круговые сечения вихрей не сохраняются и приведенные формулы следует рассматривать в качестве первых приближений.

В ситуациях, когда вихри одинаковой интенсивности расположены симметрично в вершинах правильных N-угольников, имеет место равномерное вращение. В системе координат, вращающейся вместе с такой вихревой системой, атмосфера будет иметь более сложный вид, но форма ее не будет изменяться во времени.

Еще один пример атмосферы вихря можно получить, рассматривая одиночную вихревую нить интенсивности κ, находящуюся в равномерном на бесконечности поле течения жидкости со скоростью U. В системе отсчета, связанной с движущейся со скоростью U нитью (рис. 9), жидкость вращается вокруг покоящегося вихря, причем имеется область, ограниченная сепаратрисой ψ_0, которая всегда остается внутри этой кривой. Другими словами, рассматриваемая часть среды перемещается сквозь окружающую жидкость вместе с вихревой нитью. Пусть точка A находится на расстоянии L от оси вихря. Тогда скорость течения, вызванная вращением, равна $\kappa/2\pi L$, равна, но противоположна по знаку, скорости U равномерного поступательного движения, сообщенного окружающей жидкости. Отсюда $L=\kappa/2\pi U$.

Если представить, что нескольким нитям равной интенсивности κ сообщены поступательные движения с различными скоростями, то каждая нить будет уносить с собой массу, пропорциональную величине L^2, т.е. U^{-2}. Следовательно, кинетическая энергия поступательного движения атмосферы, увлекаемой жидкостью, не зависит от скорости U набегающего потока. Такая модель использовалась Дж.Дж.Томсоном для аналогии при рассмотрении концепций фарадеевых силовых линий в классической теории электромагнетизма [74]. Дополнительные количественные результаты, характеризующие атмосферу одиночной вихревой нити и вихревой пары при различных значениях U, приведены в работе [7], где высказанное предположение о нарушении закона В.Томсона о сохранении циркуляции неточно, поскольку частицы жидкого контура, лежащие в начальный момент на сепаратрисе ψ_0, достигают седловой точки A лишь за бесконечное время, а за конечное время любой контур будет охватывать атмосферу. Аналогичная ситуация будет рассмотрена в третьей главе.

Точные решения. Несмотря на сильное нелинейное переплетение функций тока ψ и завихренности ζ в исходной разрешающей системе (2.3), (2.4), в ряде случаев удается найти ее точные аналитические решения при определенных начальных условиях. Эти решения, составляющие своеобразный «золотой фонд» гидромеханики, в настоящее время являются основой для конструирования эффективных численных алгоритмов для решения общей системы (2.3), (2.4) [263]. Приведем наиболее типичные примеры: вихрь Рэнкина, установившееся движение завихренности и эллиптический вихрь Кирхгофа.

Вихрь Рэнкина относится к области постоянной завихренности ζ_0, занимающей в начальный момент круг радиуса a. Нетрудно проверить, что функции

$$\psi(r)=\begin{cases}\dfrac{\zeta_0(a^2-r^2)}{4}-\kappa\ln a, & r\le a,\\ -\dfrac{(\kappa\ln r)}{2\pi}, & r\geq a;\end{cases}$$

$$\zeta(r)=\begin{cases}\zeta_0, & r\le a;\\ 0, & r>a;\end{cases}$$

$$\kappa=\pi a^2\zeta_0$$

удовлетворяют системе (2.5) при непрерывности на границе $r=a$ скоростей $u_\theta(u_r=0)$. Таким образом, вихри Рэнкина движутся так, что круговое пятно вращается как твердое тело с угловой скоростью $\Omega=\zeta_0/2$ вокруг своего центра, сохраняя свою первоначальную форму. Поле скорости и давления в жидкости представим формулами

$$u_v = \begin{cases} \dfrac{\zeta_0 r}{2}, & r \le a, \\ \dfrac{\kappa}{2\pi r}, & r > a; \end{cases}$$

$$p(r) = \begin{cases} p = -\dfrac{\rho \zeta_0 (2a^2 - r^2)}{8}, & r \le a, \\ p = -\dfrac{\rho \kappa a^4}{8r^2}, & r > a. \end{cases}$$

При установившемся движении завихренности частные производные по времени от функции ψ и ζ равны нулю. Тогда $\zeta=-f(\psi)$ будет решением уравнения (2.3). Здесь $f(\psi)$ — произвольная достаточно гладкая функция от ψ. Уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = f(\psi). \tag{2.21}$$

В частном случае $f(\psi)=-k^2\psi$ решение (2.21) имеет вид

$$\psi = C J_1(kr)\sin\theta. \tag{2.22}$$

Приняв, что решение (2.22) имеет место лишь в круге радиуса a, а в остальной области функция тока имеет вид

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta, \tag{2.23}$$

соответствующий потенциальному обтеканию цилиндра, и выбрав величину k как корень уравнения $J_1(ka)=0$, а $C=-2U/kJ_0(ka)$, получим цилиндрический вихрь, движущийся со скоростью U в покоящейся на бесконечности жидкости.

Для первого корня $\lambda \approx 3{,}83$ функции Бесселя решение, отвечающее цилиндрическому вихрю, имеет вид

$$\zeta(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_1}{a}\right)^2 \psi, & r \le a, \\ 0, & r > a; \end{cases}$$

$$\psi(r,\theta) = \begin{cases} -2U(a/\lambda_1)J_0(\lambda_1)J_1(\lambda_1 r/a)\sin\theta, & r \le a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \tag{2.24}$$

В работе [113] взаимодействие вихревых диполей моделировалось при решении (2.24). При этом получено согласование с экспериментами двухмерной вихревой динамики на мыльных пленках.

Установлено, что эллиптический вихрь Кирхгофа [35], заключенный в области $x^2/a^2+y^2/b^2<1$ постоянной завихренности ζ_0, не изменяет своей формы и равномерно вращается вокруг центра с угловой скоростью $2_{ab}(a+b)^2\zeta_0$. Эллиптические вихри Кирхгофа использовались [263] для моделирования более сложных ситуаций взаимодействия нескольких областей распределенных завихренностей.

Еще один случай точного решения дает течение, имеющее квазикристаллическую симметрию [33]. В этом типе стационарного движения завихренность периодически распределена на правильные N-угольные ячейки, а функция тока имеет вид

$$\psi(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\cos(x\cos 2\pi j/N+y\sin 2\pi j/N).$$

Метод контурной динамики. Данный метод применяется при исследовании эволюции кусочно-постоянного распределения завихренности

$$\zeta(x,t)=\omega_k=\text{const},\quad k=1,2,\dots,N \tag{2.25}$$

внутри нескольких односвязных вихревых областей S_ζ. Такое постоянное распределение завихренности приводит к существенному упрощению в поиске поля скоростей u,v, удовлетворяющих уравнениям Эйлера. Из формул (2.7) видно, что поле скорости в точке (x,y) при условии (2.25) дается выражениями

$$u(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K}\omega_k\int_{S_k}\frac{y-y'}{r^2}\,dx'dy';$$

$$v(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K}\omega_k\int_{S_k}\frac{x-x'}{r^2}\,dx'dy'. \tag{2.26}$$

Хотя подынтегральные выражения не зависят от времени, скорость в точке (x,y) будет в общем случае зависеть от t. Дело в том, что в процессе движения изменяются размеры области S_k. Именно в отыскании их изменений во времени и заключается полное решение поставленной задачи. Поверхностные интегралы (2.26) по неизвестным областям S_k могут быть легко преобразованы к линейным контурам L_k, их ограничивающим. Используя теорему Стокса

$$\int_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d x' d y' = \oint_L (P\, d x' + Q\, d y')$$

и выбирая $Q=0$; $P=-\ln r$ для u и $Q=-\ln r$, $P=0$ для v, находим

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \omega_k \int_{L_k} \ln[(x - X_k')^2 + (y - Y_k')^2] d X_k' ;$$

$$v(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \omega_k \int_{L_k} \ln[(x - X_k')^2 + (y - Y_k')^2] d Y_k' . \tag{2.27}$$

Учитывая, что контуры L_k, согласно теореме Гельмгольца, являются жидкими и скорость их частиц совпадает с наведенной скоростью, получаем динамические уравнения, описывающие эволюцию точек X_j, Y_j на внешней границе L_j,

$$\dot{X}_j = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \omega_k \int_{L_k} \ln[(X_j - X_k')^2 + (Y_j - Y_k')^2]\, d X_k' ;$$

$$\dot{Y}_j = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \omega_k \int_{L_k} \ln[(X_j - X_j')^2 + (Y_j - Y_k')^2] d Y_k' . \tag{2.28}$$

Система (2.28) представляет собой нелинейную интегродифференциальную систему уравнений для определения положения во времени внешних границ контуров $L_j[X_j(t), Y_j(t)]$ по их начальному расположению $[X_j(0), Y_j(0)]$ при $t=0$.

Дополненный эффективными (как в смысле точности, так и по быстродействию) алгоритмами вычисления контурных интегралов в (2.28) метод контурной динамики [262] является основой для взаимодействия нескольких распределенных вихревых пятен. В частности, изучалась [101] задача о движении двух вихревых пятен, имеющих в начальный момент форму вихрей Рэнкина радиусов R с начальным расстоянием между их центрами $D>2R$. Установлено, что при $D/R \geq 3{,}5$ вихри вращаются, сохраняя круговую форму, вокруг центра завихренности в течение нескольких периодов. При $D/R<3{,}5$ вихри быстро относительно масштаба времени D/κ закручиваются в один общий вихрь — происходит так называемый процесс слияния. Однако в рамках идеальной жидкости этот новообразованный вихрь будет иметь сплошную перемежающуюся структуру. Особенно интересны полученные методом контурной динамики данные о структуре изменения во времени формы границы одиночного вихревого пятна, имеющего в начальный момент определенную симметрию. Аналогично солитону (одним из авторов открытия которого в 1965 г. был Н.Забуски) при определенных видах симметрии здесь также наблюдался периодически возврат вихревого пятна в начальное состояние. Однако в отличие от точного решения солитонного уравнения Кортевега — де Вриза для вихревой динамики пока не удалось получить явного аналитического решения, позволяющего полностью проанализировать картину физического явления. Рассчитывать на создание для вихревой динамики нечто подобного методу обратной задачи рассеяния для нелинейных солитонных уравнений пока, к сожалению, не приходится. Основным методом исследования здесь остается прямое численное решение уравнений (2.28), причем описанные выше инварианты выступают в качестве критерия качества численного алгоритма. Из последних работ в этой области следует выделить обширное исследование Д.Дритчела [119], посвященное анализу процесса постоянного вытягивания вихревых нитей из сдеформированного кругового вихревого пятна. Оказалось, что даже произвольно малое изменение начальной круговой формы одиночного пятна приводит не только к появлению и развитию волновой неустойчивости на границе, но после определенного промежутка времени — к периодическому генерированию вихревых нитей.

Обзор последних достижений метода контурной динамики приведен в [184]. Следует особо выделить обширные исследования [118], посвященные анализу с позиции метода контурной динамики (и его обобщения — метода контурной хирургии), ряда классических задач о так называемых V-состояниях — стационарных вращательных и поступательных движений симметричных вихревых пятен, первоначально расположенных либо по окружности, либо на прямой.

Обширные данные вычислений на мощных компьютерах позволили установить некоторые общие закономерности двухмерных вихревых структур в безграничной жидкости: *осесимметризация* начально некругового распределения завихренности для одной области; *слияние* областей с одинаковым знаком распределенной завихренности; *переплетение* областей с противоположными знаками распределенной завихренности; *вытягивание* в процессе эволюции вихревых областей длинных нитей, содержащих завихренность.

Эти результаты выдвинули три ключевых вопроса для понимания вихревых процессов в двухмерном плоском течении.

1. Каковы механизмы, с помощью которых гладкое некруговое начальное распределение завихренности «собирается» в почти круговую область с осесимметричным распределением завихренности?

2. Каковы механизмы, с помощью которых две области завихренности одинакового знака стремятся слиться в одну, а две области противоположного знака — переплестись?

3. Каким образом мелкомасштабные вытянутые вихревые области, возникающие в процессах осесимметризации, слияния и перепле-

тения, воздействуют на долговременную эволюцию крупномасштабных вихревых структур?

Поиск ответов на эти вопросы занимает в настоящее время центральное место в исследованиях по двухмерной плоской динамике вихревых структур. Однако, несмотря на значительное количество данных числовых расчетов, ясного и простого представления о причинах такого поведения завихренности пока не получено.

2. Возникновение и диффузия завихренности в вязкой жидкости

Частные решения. Плоское движение вязкой жидкости в терминах завихренность — функция тока описывается системой уравнений

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\nu\,\Delta\,\zeta;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\zeta. \qquad (2.29)$$

Существует несколько подходов и построений частных решений системы (2.29). Все они основаны на предположении об автомодельности, либо на представлении искомых функций с разделенными переменными x,y,t.

Одним из таких решений является решение Д.Тэйлора [235], который предположил, что завихренность и функция тока связаны соотношением $\zeta=-k^2\psi$. Тогда нелинейные члены в первом уравнении (2.29) исчезают и его решение имеет вид

$$\zeta(x,y,t)=g(x,y)\,e^{-\nu k t};$$

$$\Delta g+k^2 g=0. \qquad (2.30)$$

Выбирая решение линейного уравнения (2.30) в виде $g(x,y)=\cos mx\cdot\cos ny$ $(m^2+n^2=k^2)$, находим, что вся плоскость разбивается на прямоугольные ячейки размерами $(2S+1)\pi/2m\times(2S+1)\pi/2n$ $(S=0,1,2,\ldots)$, в которых линии тока образуют замкнутые линии, а завихренность имеет попарно различные знаки и убывает согласно закону (2.30).

Другим частным решением системы (2.29) является выражение $\psi(x,y,t)=yf(x,t)$. Функция $f(x,t)$ при этом должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\,\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-f\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\nu\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

с первым интегралом

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\nu\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

Выбирая $f(x,t)$ в виде $f(x,t)=V+G(x+Vt)$ (V=const) для определения функции $G(S)$ ($S=x+Vt$), имеем

$$G'^2-G\,G''=\nu\,G'''.$$

Это уравнение имеет частные решения:

$$G(S)=U\left(1-c\,e^{-\frac{US}{\nu}}\right);\qquad G(S)=\frac{G\nu}{S}.$$

Третьим возможным решением системы (2.29) в полярных координатах служит выражение $\psi=ar^2+\zeta b$, где a и b — постоянные. Вводя новую неизвестную переменную $\lambda=\zeta-4a$ и разыскивая решение в виде

$$\lambda(r,\theta,t)=e^{\frac{\nu t}{b}}F(r,\theta+2at),$$

для определения функции F имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}=\frac{F}{b}.$$

Окончательно выражение для функции тока имеет вид

$$\psi(r,\theta,t)=a\,r^2-4ab+b\,G_n(r)\exp\left\{\frac{\nu t}{b}-n(\theta+2at)\right\};$$

$$G_n''+\frac{1}{r}G_n'+\left(\frac{n^2}{r^2}-\frac{1}{b}\right)G_n=0.$$

Другие виды частных решений содержатся в [120].Приведенные решения представляются искусственными и скорее задача здесь заключается в отыскании реальных течений, которым они соответствуют. Однако они представляют интерес как примеры точных решений существенно нелинейных систем.

Возникновение завихренности. В случае вязкой жидкости Б.Сен-Венан показал, что завихренность не может возникать внутри жидкости, подверженной консервативным внешним силам, а с необходимостью диффундирует вовнутрь с границ. Ж.Буссинеск [102] построил точное решение, описывающее генерацию вихрей в полубесконечной вязкой жидкости под действием консервативных сил. Он рассмотрел плоскую задачу о начале прямолинейного движения вязкой несжимаемой жидкости, занимающей область $x \geq 0$, под воздействием постоянной силы F_0, направленной вдоль вертикальной оси y. Жидкость на границе $x=0$ полностью сцеплена с неподвижной стенкой. Задача в этом случае описывается одним скалярным уравнением относительно компоненты вертикальной скорости $v(x,t)$. В силу постоянства давления и отсутствия зависимости всех величин от координаты y оно имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_0 + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

с начальным $v(x,0)=0$ и граничным $v(0,t)=0$ условиями.

Вводя автомодельную переменную $\sigma = x/2\sqrt{\nu t}$ и разыскивая решения в виде $v(x,t)=F_0 t G(\sigma)$, приходим к уравнению

$$G'' + 2\sigma G' - 4G + 4 = 0$$

с общим решением

$$G(\sigma) = 1 - (1+2\sigma^2)(A + Bf(\sigma));$$

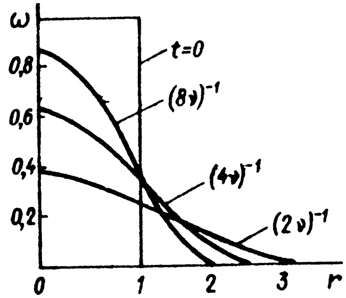
$$f(\sigma) \equiv \int_\sigma^\infty \frac{e^{-\tau^2} d\tau}{(1+2\tau^2)^2}, \qquad A, B = \text{const}.$$

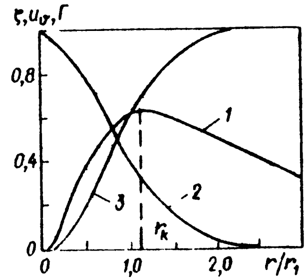
Выполняя граничные и начальные условия, находим постоянные A и B и после несложных преобразований записываем выражения для скорости и единственной компоненты завихренности ζ в виде

$$v(x,t) = F_0 t \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\sigma^\infty \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right) e^{-\tau^2} d\tau \right];$$

$$\zeta(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{F_0}{\nu} \sqrt{\nu t} \left[e^{-\sigma^2} - 2\sigma \int_\sigma^\infty e^{-\tau^2} d\tau \right].$$

Из этих формул следует, что для малых t завихренность всюду, кроме малых x, пренебрежимо мала и имеет порядок $0(\sqrt{\nu t})$. Существенное значение для ранних времен завихренность имеет лишь вблизи стенки в пограничном слое толщиной порядка $\sqrt{\nu t}$. Самым важным в этом решении является возникновение отсутствующей при $t=0$ завихренности и, как указал Ж.Буссинеск, ее неаналитичность по времени. Иными словами, функцию $\zeta(x,t)$ нельзя представить бесконеч-





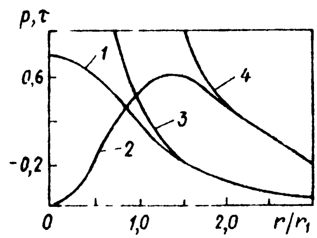


Рис. 10

Рис. 11

Рис. 12

ным рядом по восходящим целым степеням t. Это обстоятельство является частным случаем общего утверждения о том, что в несжимаемой вязкой жидкости, подверженной действию потенциальных внешних сил и имеющей неподвижную твердую границу (на которой выполнено условие прилипания), в движении, начинающимся из состояния покоя, всегда будут существовать частицы, для которых завихренность не является аналитической функцией времени. Факт неаналитичности не позволяет использовать доказательство в форме Лагранжа для обоснования отсутствия завихренности в потоке вязкой жидкости. Подробные качественные оценки этапов возникновения завихренности прекрасно изложены в книге Дж.Бэтчелора [8].

Диффузия осесимметричной завихренности. До сих пор движение плоских вихревых структур рассматривалось в рамках модели идеальной жидкости. Такой подход позволяет оценить характер взаимодействия нескольких вихрей и подсказать, как может происходить этот процесс в реальной жидкости. Однако если имеем дело со структурами, которые подвержены быстрому вырождению, то предсказание их поведения на основании модели идеальной жидкости справедливо лишь для весьма небольших моментов времени.

Задача о диффузии осесимметричной завихренности $\zeta(r,t)$ в вязкой жидкости описывается уравнениями, следующими из системы (2.29):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right];$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\zeta\,. \qquad (2.31)$$

При этом радиальная скорость жидкости тождественно равна нулю, а циркуляция скорости $\Gamma_R(t)=2\pi R u_\upsilon(R,t)$ по окружности радиуса R изменяется во времени согласно уравнению

$$\Gamma=4\pi\nu R\frac{\partial\zeta}{\partial r}\quad .$$

Следовательно, при $R\to0$ стремится к нулю не только циркуляция, но и ее производная по времени.

Самым важным при этом является ~~отсутствие~~ в (2.31) нелинейных слагаемых. Задача становится весьма схожей с хорошо изученными задачами теплопроводности, поэтому многие накопленные решения для распределения температуры могут быть перенесены на случай диффузии завихренности. В частности, решения уравнений (2.31) при начальных условиях $\zeta(r,0)=f(r)$ имеют вид

$$\zeta(r,t)=\frac{1}{4\nu t}e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}\int_0^\infty f(\alpha)e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}I_0\left(\frac{\alpha r}{2\nu t}\right)\alpha\,d\alpha;$$

$$u_\theta(r,t)=\frac{1}{2\nu r t}\int_0^\infty f(\alpha)e^{\frac{-\alpha^2}{4\nu t}}\alpha\,d\alpha\int_0^r r e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}I_0\left(\frac{\alpha r}{2\nu t}\right)dr\,. \qquad (2.32)$$

Радиальная составляющая скорости тождественно равна нулю.

Для частного случая, когда в начальный момент завихренность ζ_0 равномерно распределена в круге радиуса a, общие формулы (2.32) упрощаются. На рис. 10 построены распределения завихренности для различных безразмерных моментов времени $\partial t/a^2$. В предельном случае, когда $a\to0$, $\zeta_0\to\infty$ так, что $\kappa=\pi a^2\zeta_0=\text{const}$, получаем решение классической задачи о диффузии вихревой нити:

$$\zeta(r,t)=\frac{\kappa}{8\pi\nu t}e^{\frac{-r^2}{4\nu t}};$$

$$u_\theta(r,t)=\frac{\kappa}{2\pi r}\left(1-\ e^{\frac{-r^2}{4\nu t}}\right);$$

$$\Gamma_R(t)=\kappa\left(1-\ e^{\frac{-R^2}{4\nu t}}\right). \qquad (2.33)$$

В случае, когда завихренность распределена по кругу радиуса a по закону

$$\zeta = \frac{\kappa_0}{2\pi a^2} e^{-r^2/a^2},$$

формулы (2.32) записываются в замкнутом виде:

$$\zeta(r, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi r_1^2} e^{-r^2/r_1^2};$$

$$u_\theta(r, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi r}[1 - e^{-r^2/r_1^2}];$$

$$\Gamma_R(t) = \kappa_0(1 - e^{-r^2/r_1^2}), \quad r_1^2 = a^2 + 4\nu t. \tag{2.34}$$

Из уравнения (2.34) нетрудно определить, что время, за которое окружная скорость $u_\theta(r,t)$ уменьшается вдвое, определяется из уравнения $1 - e^{-r^2/4\nu t} = 0{,}5$, откуда $t = r^2/2{,}772\nu$.

Координаты точек, в которых в любой момент времени окружная скорость будет иметь максимум, определяются из равенства

$$1 + r^2/2\nu t = e^{-r^2/4\nu t},$$

что приводит к заключению, что расстояние r_m от места максимума до центра вихря пропорционально $\sqrt{\nu t}$.

Сделаем некоторые замечания. В вязкой жидкости согласно (2.34) уже не действует закон сохранения во времени циркуляции (закон В.Томсона). Течение в вихревом поле, в противоположность потенциальному вихрю, нестационарно. Между тем, благодаря расширению вихря, в целом отсутствует потеря циркуляции, так как взятая по всей плоскости течения за конечное время циркуляция будет сохранять свое первоначальное значение, т.е. $\Gamma(r \to \infty, t) = \Gamma(r \to \infty, t = 0)$.

На рис. 11 приведены в безразмерном виде распределения окружной скорости, завихренности и циркуляции (соответственно кривые *1* — *3*)[249].

В некоторых практических приложениях важно знать размеры вихревого ядра. В.Кауфманн [150] приближенно определил, что $r_k \approx 1{,}544\, r_m$.

Остановимся еще кратко на вопросах о давлении и энергии. Выражение для давления имеет вид

$$p(r, t) - p_\infty = -\rho\int_r^\infty (u_\theta^2/r)\, dr.$$

Воспользовавшись уравнением (2.34), после проведения интегрирования по r получим следующее распределение давления:

$$\frac{p-p_\infty}{q_1}=-\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{r_1^2}\right)\right]^2\frac{r_1^2}{r^2}+2\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{r_1^2}\right)-\mathrm{Ei}\left(-2\frac{r^2}{r_1^2}\right)\right],$$

где $q_1=(\rho/2)u_1$; $u_1=\kappa_0/2\pi r_1$; p_∞ — давление в покоящейся жидкости на бесконечности; Ei — интегральная показательная функция.

Касательные напряжения $\tau(r,t)=\mu r\,\partial(u_\theta/r)/\partial r$.

Используя (2.34), получаем

$$\tau=-2\frac{r_1^2}{r^2}\left[1-\left(1+\frac{r^2}{r_1^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{r_1^2}\right)\right]\frac{\mu u_1}{r_1}.$$

На рис. 12 даны распределения давления (кривая *1*) и касательного напряжения (кривая *2*); кривыми *3* и *4* показаны распределения давления и касательного напряжения для потенциального вихря.

Как показано выше, кинетическая энергия от одиночного вихря в идеальной жидкости имеет бесконечное значение. Поэтому возникает вопрос: в какой форме вязкость может повлиять на такой результат ?

Кинетическая энергия всей жидкости

$$T=\left[\ln\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)+\mathrm{Ei}\left(-2\frac{r^2}{r_1^2}\right)-2\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{r_1^2}\right)-\ln 2+C\right]\frac{\rho\kappa_0^2}{8\pi},\qquad(2.35)$$

где C — константа Эйлера — Маскерони, $C=0{,}5772$.

При $r\to\infty$ $T\to\infty$. Таким образом, кинетическая энергия при конечном времени также становится бесконечно большой. Некоторые комментарии этому результату даны в [249].

Уравнение (2.35) можно продифференцировать по времени t и получить скорость изменения энергии всего поля, которая не будет зависеть от ν,

$$T=-\frac{\rho\kappa_0^2}{8\pi t},\quad r\to\infty.\qquad(2.36)$$

Простейшее рассмотрение баланса энергии позволяет сделать следующие выводы. При пренебрежении массовыми силами совершающаяся на границе поверхности поля в единицу времени работа внешних сил равна сумме кинетической и тепловой (в результате трения) энергий поля.

Чтобы рассчитать работу внешних сил за единицу времени, рассмотрим вначале область произвольной окружности $r>0$, охватывающей центр вихря. На цилиндрической границе несжимаемой жидкости нормальные напряжения отсутствуют. Изменение во времени работы A внешних сил получаем из соотношения $A=2\pi r\tau u_\theta$. Если $r\to\infty$, то $A=0$. Когда внешними силами не совершается никакая работа, то изменение кинетической энергии (2.36) должно полностью равняться диссипации вследствие внутреннего трения, т.е.уменьшение скорости кинетической энергии равно диссипации поля. Процесс расширения вихря сводится, очевидно, к влиянию напряжений.

Вихрь Озеена. В случае, когда в начальный момент завихренность в вязкой жидкости заключена в круговой области радиуса a, однако распределена не осесимметрично, точное решение уравнений (2.31) не может быть получено. К.Озеен [197] ввел ряд упрощающих предположений и после громоздких выкладок получил приближенные формулы для скоростей:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{S_a}(1-e^{-r^2/4\nu t}\zeta(\xi,\eta,0)\frac{\eta-y}{r^2}d\xi d\eta;$$

$$v(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{S_a}(1-e^{-r^2/4\nu t}\zeta(\xi,\eta,0)\frac{\xi-x}{r^2}d\xi d\eta; \qquad (2.37)$$

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,\quad S_a:\{(\xi,\eta)\mid \xi^2+\eta^2\le a^2\}.$$

Полученные К.Озееном формулы очень просты. От теории Гельмгольца они отличаются лишь добавочным множителем $1-\exp(-r^2/4\nu t)$.

К.Озеен также получил приближенное решение для двух вихревых нитей начальных интенсивностей κ_1 κ_2. Для точек, расположенных на большом расстоянии от вихрей, поле скорости дается в виде

$$u(x,y,t)=-\frac{\kappa_1}{2\pi}\frac{y-\eta_1}{r_1^2}-\frac{\kappa_2}{2\pi}\frac{y-\eta_2}{r_2^2}+$$

$$+\frac{\kappa_1}{8\pi\nu}\int_0^t\frac{y-\eta_1}{(t-\tau)^2}e^{-r_1^2/4\nu(t-\tau)}d\tau+$$

$$+\frac{\kappa_2}{8\pi\nu}\int_0^t\frac{y-\eta_2}{(t-\tau)^2}e^{-r_2^2/4\nu(t-\tau)}d\tau;$$

$$v(x,y,t)=\frac{\kappa_1}{2\pi}\frac{x-\xi_1}{r_1^2}+\frac{\kappa_2}{2\pi}\frac{x-\xi_2}{r_2^2}-$$

$$- \frac{\kappa_1}{8\pi\nu}\int_0^t \frac{x-\xi_1}{(t-\tau)^2} e^{-r^2/4\nu(t-\tau)}\,d\tau -$$

$$- \frac{\kappa_2}{8\pi\nu}\int_0^t \frac{x-\xi_2}{(t-\tau)^2} e^{-r^2/4\nu(t-\tau)}\,d\tau\ . \qquad (2.38)$$

Здесь ξ_i, η_i — координаты центров вихрей, $i = 1, 2$.

Такую же задачу рассматривал Л.Н. Стретенский применительно к диффузии вихревой пары [68]. В основу решения положены два допущения. Первое состояло в том, что в начальный момент времени все вихревое движение сосредоточено на двух круговых площадках, симметрично относительно некоторой горизонтальной прямой. Центры этих площадок принимаются полюсами биполярной системы координат; считается, что в каждый момент времени система окружностей, охватывающих эти полюсы, является системой линий тока. Второе допущение состоит в том, что в каждый момент времени линии тока являются семейством окружностей, определяемых по первому приближению, причем центры биполярной системы координат перемещаются в вертикальном направлении так, что масса жидкости, находящейся выше линии, которая соединяет центры, не испытывает подъемной силы.

Эта же задача получила дальнейшее развитие в работе [106].

ДИНАМИКА ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

> Человеческий ум редко бывает удовлетворен и, конечно, не выполняет своей наивысшей функции, когда производит работу счетной машины. Ученый, математик ли он или физик, стремится составить себе и развить ясное представление о предметах, с которыми он имеет дело. Для этого он согласен проделать длинные вычисления и даже сделаться на некоторое время вычислительной машиной, если тем самым он сделает свои идеи в конечном счете более ясными.
>
> *Д.К.Максвелл «О соотношении между физикой и математикой»*

В предыдущей главе рассмотрены задачи о взаимодействии конечных областей завихренности. Несмотря на упрощающие предположения о равномерном распределении завихренности и плоском характере движения, очевидны трудности, связанные, в первую очередь, с сильной нелинейностью основной разрешающей системы. Однако ряд задач о взаимодействии нескольких круглых вихревых пятен показал, что до определенных пределов их можно рассматривать как точечные вихри. Положение этих вихрей совпадает с центром тяжести каждого пятна, а интенсивность равна интегралу от завихренности по площади пятна. При таком подходе связанные с вихревым ядром внутренние степени свободы исчезают и остается лишь взаимодействие точечных вихрей. Разумеется, что в обычных жидкостях дискретные точечные вихри могут рассматриваться лишь как приближение.

Задачи о движении точечных вихрей не исследовались бы столь внимательно, если бы кроме красоты построенных аналитических решений из них нельзя было бы извлечь информации о том, что происходит в случаях, отличных от наиболее простых. Такая информация состоит, прежде всего, в моделировании с помощью точечных вихрей двухмерных когерентных структур и общем описании двухмерной изотропной турбулентности на основе статистической механики [196]. Задача представляется весьма сложной, поскольку прямой численный счет для случая многих (до 100) точечных вихрей не позволяет установить четких закономерностей, кроме общих утверждений о своеобразном «группировании» вихрей. Кроме того, резко возрастает время счета: по данным работы [88], исследование движения 800 точечных вихрей требует порядка 250 ч счета на современном быстродействующем компьютере. В этой же работе поставлена под сомнение возможность моделирования двухмерных вихревых пелен с помощью набора точечных вихрей. Все сказанное заставляет с осторожностью относиться к данным о характеристиках поля течения жидкости при наличии в ней большого числа точечных вихрей.

Задача о движении нескольких вихрей имеет ряд существенных достоинств. Во-первых, она допускает простое численное интегрирование в рамках современных вычислительных подходов. Во-вторых, в ряде случаев симметрии движения относительно прямой или точки удается построить аналитические выражения для зависимости координат от времени или установить относительные траектории движения. Наличие точных решений позволяет оценивать эффективность вычислительных алгоритмов решения задачи Коши применительно к нелинейным вихревым движениям. И, наконец, если задача трех вихрей в целом интегрируема, то четыре и более вихрей обеспечивают простейший (если можно употреблять такое слово) пример хаотического поведения. Отметим, что хаотическое движение нельзя рассматривать как пример турбулентных течений, поскольку турбулентность в обычном понимании означает стохастическое поле скорости, описываемое детерминированными уравнениями Навье — Стокса. Скорее здесь речь должна идти о новом режиме течения, не укладывающемся в традиционное деление на ламинарное и турбулентное движение. Стохастическое движение системы нескольких вихрей представляет собой ламинарный поток со стохастическими свойствами. Когерентные вихревые структуры в турбулентных (например сдвиговых) течениях, наоборот, представляют собой регулярные картины потока в стохастическом поле скорости.

В данной главе последовательно рассмотрены вопросы взаимотеорема Гельмгольца — следствие динамических уравнений Эйлера для идеальной жидкости. Таким образом, при отсутствии внешнего потенциального потока уравнения движения точечных вихрей в безграничной жидкости имеют вид

$$\dot{z}^{*}_{\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_{\beta}}{z_{\alpha}-\ z_{\beta}},\quad \alpha=1\,,2\,,...,N\,, \tag{3.2}$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение; штрих здесь и далее означает, что при суммировании $\beta\neq\alpha$.

Движение точечного вихря z_{α} определяется результирующим вектором наведенных скоростей со стороны остальных N—1 вихрей.

В обзорном докладе Х.Арефа [90] прослеживается аналогия и различие между движениями N точечных вихрей в гидродинамике и точечных масс в небесной механике.

Для однозначного решения задачи необходимо задать начальные условия — положение $Z^{(0)}_{\alpha}$ всех вихрей в начальный момент времени

$$z_{\alpha}=z_{\alpha}^{(0)},\quad t=0\,. \tag{3.3}$$

Из уравнений (3.2) следует: если ансамбль $(\kappa_{\alpha},\,z_{\alpha})$ является их решением, то решением будут также ансамбли $(\kappa_{\alpha},\,-z_{\alpha})$ и $(-\kappa_{\alpha},\ z^{*}_{\alpha})$. В работе [232] установлены общие свойства движения системы точечных вихрей, описываемых уравнениями (3.2).

1. Если в некоторой исходной конфигурации интенсивности всех вихрей мгновенно изменяют знаки, то новая система проходит в обратном порядке последовательность конфигураций, через которые она пришла к исходной.

2. Пусть в момент времени $t=t_0$ имеется конфигурация, в которой вихри коллинеарны, т.е. все лежат на одной прямой. Тогда конфигурации в моменты времени $t=t_0\pm\tau$ являются отражением друг друга относительно этой прямой для любых τ.

3. Система вихрей не может проходить более чем через две коллинеарные конфигурации. Время, необходимое для перехода от одной коллинеарной конфигурации в другую, всегда одно и то же в процессе движения. Это свойство следует из свойства 2 и принципа зеркального отображения системы вихрей относительно коллинеарной конфигурации.

4. Если две системы состоят из вихрей одинакового количества, причем интенсивность каждого их вихрей первой системы пропорциональна множителю K интенсивности второй системы, то начальные положения в обеих конфигурациях подобны. Причем масштабы длин в первой системе равны масштабам длин во второй системе, умноженным на L. Тогда последующая конфигурация второй

системы через время t_2 будет подобна конфигурации первой системы через время t_1. Времена t_1 и t_2 связаны соотношением $t_2 = t_1 K / L^2$. Эти общие свойства позволяют ориентироваться при выборе масштабов длины и времени, а также при сравнении результатов при движении вихрей различной конфигурации.

Гамильтонова система и инварианты уравнений движения. Иная форма записи основной системы (3.2) установлена Г.Кирхгофом еще в 1876 г. [35]. Разделяя действительные и мнимые части в уравнениях (3.2), приходим к действительной системе с $2N$ неизвестными функциями $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$

$$\kappa_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}; \quad \kappa_\alpha \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.4}$$

где

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln r_{\alpha\beta}; \quad r_{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 \tag{3.5}$$

совпадает с кинетической энергией взаимодействия вихрей.

Важность этого результата заключается в том, что система (3.4) является гамильтоновой с парой канонически сопряженных переменных $p_\alpha = x_\alpha$, $q_\alpha = x_\alpha y_\alpha$. Более того, в данном случае фазовое пространство (p_α, q_α) совпадает (с точностью до масштаба и ориентации) с реальной плоскостью течения. Поэтому траектории в фазовом пространстве суть траектории вихрей в реальном пространстве, занимаемом идеальной жидкостью. На эту аналогию для точечных вихрей впервые обратил внимание Л.Онзагер [196], хотя общая идея об использовании плоских течений идеальной жидкости при моделировании фазового пространства гамильтоновых систем принадлежит Д.Гиббсу [18].

В развернутом виде уравнения (3.4) записываются следующим образом:

$$\dot{x}_\alpha = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\beta (y_\alpha - y_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2}; \quad \dot{y}_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\beta (x_\alpha - x_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2}. \tag{3.6}$$

В полярных координатах (ρ, θ) на плоскости имеют место соотношения $x_\alpha = \rho_\alpha \cos\theta_\alpha$, $y_\alpha = \rho_\alpha \sin\theta_\alpha$. Гамильтонова система (3.4) переходит в

$$\kappa_\alpha \rho_\alpha \dot{\rho}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}; \quad \kappa_\alpha \rho_\alpha \theta_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \rho_\alpha}; \tag{3.7}$$

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta \; 1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln [\rho_\alpha^2 + \rho_\beta^2 - 2\rho_\alpha \rho_\beta \cos(\theta_\alpha - \theta_\beta^{\cdot})]. \tag{3.8}$$

В дальнейшем будем различать понятия решение гамильтоновой системы и ее первые интегралы. Под решением системы понимается набор $2N$ функций $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$, удовлетворяющих системе уравнений и начальным условиям. Под первым интегралом понимается функция $F(x_\alpha y_\alpha)$, которая не зависит от времени и сохраняет постоянное значение в силу исходной системы уравнений.

Г.Кирхгоф [36] установил, что система уравнений (3.4) обладает четырьмя независимыми первыми интегралами (инвариантами), связанными непосредственно с независимостью функции H от времени и ее инвариантностью относительного параллельного переноса и поворота координат:

$$H = \text{const}\,; \qquad Q \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha x_\alpha = \text{const}\,;$$

$$P \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha y_\alpha = \text{const}\,; \qquad I \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = \text{const}\,. \tag{3.9}$$

Физический смысл этих величин весьма прозрачен. Как и для общего случая распределения завихренности (см.гл.2), они выражают законы сохранения кинетической энергии взаимодействия вихрей, компонент импульса и момента импульса плоского течения безграничной жидкости. Инварианты Q и P при отличном от нуля значении $\Gamma \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha$ дают возможность утверждать, что частица жидкости, находящаяся в точке с координатами (X, Y):

$$X = \Gamma^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha x_\alpha\,; \qquad Y = \Gamma^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha y_\alpha\,, \tag{3.10}$$

остается неподвижной. Эта точка называется *центром завихренности*. В частном случае, когда $\Gamma=0$, центр лежит на бесконечности.

В полярной системе координат инварианты Кирхгофа Q, P, I имеют вид

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha \rho_\alpha \cos\theta\,; \qquad P = \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha \rho_\alpha \sin\theta\,; \qquad I = \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha \rho_\alpha^2\,. \tag{3.11}$$

Возникает вопрос, существуют ли другие первые интегралы системы (3.8), не связанные с выбором специальных начальных значений и системы координат. Этот вопрос решен еще в 1902 г. в работе Е.Лаура [164], который показал, что независимые первые интегралы в общем случае единственны.

Скобки Пуассона и интегралы в инволюции. Мощным аппаратом исследования гамильтоновых систем является использование скобок Пуассона. В данном случае системы (3.4) они вводятся по формуле

$$[f, g] \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{\kappa_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}\right) \tag{3.12}$$

для произвольных функций f и g, зависящих от координат x_α, y_α. Говорят, что функции f и g находятся в *инволюции*, если их скобки Пуассона равны нулю. Из аналитической механики [75] известна фундаментальная теорема Лиувилля. Сущность ее в том, что если гамильтонова система имеет N линейно независимых первых интегралов $\Phi_\Gamma(p_\alpha, q_\alpha)$=const ($\Gamma$=1, 2, ..., N),находящихся в инволюции между собой, то система интегрируема. Важность этой теоремы в том, что в общем случае для интегрирования в квадратурах системы 2 N дифференциальных уравнений первого порядка необходимо знать 2 N первых интеграла. Для интегрирования в квадратурах гамильтоновой системы нужно иметь лишь N первых интегралов, находящихся, однако, в инволюции. Более того, доказывается, что первых независимых интегралов гамильтоновой системы не может быть больше N и первые интегралы не интегрируют задачу, не дают возможности построить явную зависимость координат от времени и начальных условий, если их число $M<N$.

Зная четыре первых интеграла (3.9) системы (3.4), отыщем для нее интегралы в инволюции. Непосредственно проверяется, что

$$[H, P] = [H, Q] = [H, I] = 0. \tag{3.13}$$

Вместе с тем

$$[Q, P] = \Gamma,\ [Q, I] = 2P,\ [P, I] = -2Q, \tag{3.14}$$

т.е. первые интегралы (3.9) не находятся в инволюции.

Заметив, что $[Q^2, I] = 2Q[Q, I]$, $[P^2, I] = 2P[P, I]$, с учетом (3.13) находим

$$[Q^2 + P^2, I] = 0. \tag{3.15}$$

Таким образом, первые интегралы H, I и P^2+Q^2 находятся в инволюции. На основании этого можно утверждать, что задача о движении трех вихрей независимо от их интенсивности и начального расположения интегрируема. Этот результат впервые отметил А. Пуанкаре [201]. Отметим, что возможна комбинация, когда правые части выражений (3.14) обращаются в нуль. Это происходит, когда суммарная интенсивность равна нулю, а начальные расположения вихрей таковы, что величины P и Q обращаются в нуль. Тогда четыре первых интеграла (3.9) находятся в инволюции. Таким образом, задача о движении четырех точечных вихрей в этом случае является интегрируемой. Ряд примеров рассмотрен ниже.

К сожалению, другие первые интегралы в инволюции системы (3.4) в настоящее время неизвестны. Поэтому система четырех и более точечных вихрей в общем случае неинтегрируема, т.е. нельзя построить траектории вихрей $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$, зависящие в качестве параметров только от инвариантов H, P, Q, I. С понятием неинтегрируемости гамильтоновой системы тесно связано новое направление нелинейной физики — исследование феномена детерминированного хаоса [32, 47, 79].

Уравнения относительного движения. Гамильтониан (3.5) системы (3.4), описывающий движение N точечных вихрей, зависит лишь от относительного расстояния между вихрями. Естественно желание получить систему уравнений, в которую входят лишь расстояния между вихрями независимо от их абсолютного положения на плоскости. Такая система впервые установлена в [165]; независимый вывод таких уравнений получен недавно в [54]. Для вывода этих уравнений целесообразно воспользоваться методикой, основанной на скобках Пуассона. Нетрудно показать, что для любой функции $\Psi=(x_\alpha, y_\alpha)$, $\alpha= 1, 2, \ldots, N$, не содержащей явно времени, имеет место равенство

$$\dot\Psi=\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha}\dot x_\alpha+\frac{\partial\Psi}{\partial y_\alpha}\dot y_\alpha\right)\equiv[\Psi, H]. \tag{3.16}$$

Если в этом тождестве взять $\Psi = r^2_{\alpha\beta}$, то получим систему уравнений

$$\dot r^2_{\alpha\beta}=[r^2_{\alpha\beta}, H]=\sum_{i,j=1}^{N}[r^2_{\alpha\beta}, r^2_{ij}]\frac{\partial H}{\partial r^2_{ij}}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что имеет место тождество

$$[r^2_{\alpha\beta}, r^2_{ij}]=\frac{8}{\kappa_\alpha}\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & 1\\ x_\beta & y_\beta & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}.$$

Если $\beta\neq j$, то определитель равен удвоенной площади треугольника с вершинами, совпадающими с вихрями α, β, j. Учитывая явный вид зависимости (3.5) и приведенное выше равенство, получаем

$$\dot r^2_{\alpha\beta}=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N}{}'' \kappa_j\gamma_{\alpha\beta j}\left(r_{\beta j}^{-2}-r_{j\alpha}^{-2}\right)A_{\alpha\beta j}, \tag{3.17}$$

где два штриха над знаком суммы означают, что $j\neq\alpha\neq\beta$; $\gamma_{\alpha\beta j}$ — численно равна 1, если обход $\alpha \to \beta \to i$ происходит против часовой стрелки, и — 1, если обход происходит по часовой стрелке; $A_{\alpha\beta j}$ — площадь треугольника $\alpha\beta j$, которая находится по формуле Герона:

$$A_{\alpha\beta j} = \frac{1}{2}\sqrt{2r_{\alpha\beta}\, r_{\beta j} + 2r_{\beta j}\, r_{j\alpha} + 2r_{j\alpha}\, r_{\alpha\beta} - r_{\alpha\beta}^2 - r_{\beta j}^2 - r_{j\alpha}^2}\ .$$

Нетрудно показать, раскрывая скобки, что

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \kappa_\alpha \kappa_\beta\, r_{\alpha\beta}^2 \equiv \Gamma I - Q^2 - P^2 = \text{const}\,. \tag{3.18}$$

Уравнения (3.17) вместе с двумя первыми интегралами (3.5), (3.18) определяют задачу относительного движения системы вихрей. Очевидно, что при этом имеется $(1/2)\,N\,(N-1)$ переменных $r_{\alpha\beta}$, из которых только $2N-3$ независимы. Вид уравнений (3.17) показывает, что задача о трех вихрях является ключевой в общей задаче об N вихрях, поскольку начиная с трех вихрей в процессе движения могут возникать новые масштабы.

Решение системы (3.17) с соответствующими начальными условиями дает возможность построить абсолютное движение всех вихрей. Следуя [14, 165], введем в рассмотрение функции

$$\theta_{ij} = \operatorname{arctg}\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\,,$$

определяющие наклон прямой, соединяющей i-й и j-й вихри, к положительному направлению оси x.

Тогда на основании (3.16) имеем

$$\dot\theta_{ij} = [\,\theta_{ij}\,, H\,] = \frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\alpha}{r_{ij}^2}\Big\{\frac{1}{r_{i\alpha}^2}[\,(x_i - x_\alpha)(x_i - x_j) +$$

$$+ (y_i - y_\alpha)(y_i - y_j)\,] +$$

$$+ \frac{1}{r_{j\alpha}^2}[\,(x_\alpha - x_j)(x_i - x_j) + (y_\alpha - y_j)(y_i - y_j)\,]\Big\} + \frac{\kappa_i + \kappa_j}{4\pi\, r_{ij}^2}\,.$$

Учитывая тождества

$$(x_\alpha - x_j)(x_i - x_j) + (y_\alpha - y_j)(y_i - y_j) = \frac{1}{2}(r_{ij}^2 - r_{i\alpha}^2 + r_{j\alpha}^2)\ ;$$

$$(x_i - x_\alpha)(x_i - x_j) + (y_i - y_j)(y_i - y_\alpha) = \frac{1}{2}(r_{ij}^2 + r_{i\alpha}^2 - r_{j\alpha}^2)\ ,$$

получаем

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha=1}^{N}{}'' \frac{\kappa_\alpha}{r_{ij}^2}\left(\frac{r_{ij}^2 - r_{i\alpha}^2}{r_{i\alpha}^2} + \frac{r_{ij}^2 - r_{i\alpha}^2}{r_{j\alpha}^2}\right) + \frac{\Gamma}{4\pi r_{ij}^2}.$$

Правая часть этого уравнения после решения системы (3.17) является известной функцией времени. Следовательно, простой квадратурой с учетом начальных значений можно вычислить и значение θ_{ij}. Зная зависимости от времени r_{ij}^2 и θ_{ij}, можно получить зависимости от времени величин $(x_i—x_j)$ и $(y_i—y_j)$. Используя инварианты P и Q, можно получить также отдельно зависимости $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$ и тем самым, в принципе, завершить решение задачи. В случае, когда $\Gamma=0$, решение задачи упрощается. Используя инварианты P и Q, получаем

$$2P(x_i - x_j) + 2Q(y_i - y_j) = \sum_{\alpha=1}^{N}{}' \kappa_\alpha r_{j\alpha}^2 - \sum_{\alpha=1}^{N}{}' \kappa_\alpha r_{i\alpha}^2.$$

Это соотношение наряду с равенством $(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 = \Gamma_{ij}^2$ позволяет определить $x_i—x_j$ и $y_i—y_j$ только через расстояния между вихрями и, следовательно, как функции времени. Обращаясь к системе (3.6), квадратурами при соответствующих начальных условиях определяем зависимости $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$.

В статье [155] предложен принципиально иной подход к использованию уравнений относительного движения. Выбирая в (3.16) $\Psi \equiv r_{\alpha\beta}^{-2}$, после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$\dot{r}_{\alpha\beta}^{-2} = \frac{r_{\alpha\beta}^{-4}}{\pi}\sum_{\gamma=1}^{N}{}'' \kappa_\gamma [\, y_\alpha(x_\beta - x_\gamma) + y_\beta(x_\gamma - x_\alpha) +$$
$$+ y_\gamma(x_\alpha - x_\beta)\,](r_{\alpha\gamma}^{-2} - r_{\beta\gamma}^{-2}).$$

В совокупности с (3.6) это дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $(x_\alpha, y_\alpha, r_{\alpha\beta}^{-2})$. Отличительной особенностью этой системы является полиномиальная зависимость правых частей от искомых функций. Это позволяет применить методику теста Ковалевской — Пэнлеве [36, 199] для анализа возможности ее интегрируемости. Подробнее свойство Пэнлеве описано в [1, 2, 233].

Автомодельная задача. Под автомодельным течением в механике жидкости понимают такие течения, в которых состояние системы в любой момент времени подобно некоторому начальному состоянию. При этом удается уменьшить число независимых переменных, выразив их через некоторые автомодельные переменные.

В случае движения точечных вихрей речь идет о поиске решения системы (3.2), описывающей движение N точечных вихрей, в виде

$$z_\alpha(t) = z_\alpha^{(0)} f(t); \quad z_\alpha^{(0)} = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, , N, \qquad (3.19)$$

где $f(t)$ — в общем случае комплексная функция времени, причем $f(0)=1$, т.е. ищется такое решение, при котором все вихри будут двигаться подобным образом, начиная с начального состояния z_α^0. При этом расстояния между ними изменяются по закону

$$r_{\alpha\beta}(t) = r_{\alpha\beta}^{(0)} |f(t)|. \qquad (3.20)$$

Такие предположения о характере решения требуют выполнения условий, следующих как из вида исходной системы (3.2), так и из инвариантов (3.13). При условии (3.19) инварианты Кирхгофа принимают вид

$$Q + iP = \sum_{\alpha=1}^{N} (\kappa_\alpha z_\alpha^{(0)}) f(t); \quad I = \sum_{\alpha=1}^{N} (\kappa_\alpha |z_\alpha^{(0)}|^2) f^2(t);$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln r_{\alpha\beta}^{(0)} - V \ln|f(t)|; \quad V = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta.$$

Для того чтобы эти величины не зависели от времени, необходимо выполнение условий

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha z_\alpha^{(0)} = 0; \quad \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha |z_\alpha^{(0)}|^2 = 0; \quad V = 0. \qquad (3.21)$$

Равенство $V=0$ возможно лишь тогда, когда вихри имеют интенсивности разных знаков. Возводя в квадрат Г, с учетом $V=0$ находим

$$\Gamma^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha^2 > 0.$$

Изложенное показывает, что необходимыми условиями автомодельного движения вихрей являются равенства $I=0$, $V=0$ при условии, что центр завихренности совпадает с началом координат.

Подстановка автомодельных зависимостей (3.19) и (3.20) в (3.2) приводит к

$$z_\alpha^{(0)*} f \dot{f}^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\beta}{z_\alpha^{(0)} - z_\beta^{(0)}}, \qquad (3.22)$$

откуда следует, что функция $f(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$f(t)\dot{f}^*(t) \equiv C = A - iB = \text{const}. \qquad (3.23)$$

При этом (3.22) переходит в равенства

$$z_\alpha^{(0)*} C = \frac{i}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\beta}{z_\alpha^{(0)} - z_\beta^{(0)}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3.24)$$

определяющие постоянную C через начальные положения вихрей.

Отыскивая решение (3.23) в виде $f(t) = r(t)\exp[i\varphi(t)]$ и отделяя действительную и мнимую части, получаем два уравнения $\dot{r}r = A$; $r^2\dot{\varphi} = B$, допускающие решение в явном виде. Окончательно выражение для автомодельной функции $f(t)$, удовлетворяющей начальному условию $f(0) = 1$, имеет вид [152]

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2At+1}\exp\left[i\dfrac{B}{2A}\ln(2At+1)\right], & A \neq 0, \\ \exp(iBt), & A = 0. \end{cases} \qquad (3.25)$$

Постоянные A и B определяются начальным положением вихрей согласно соотношению (3.24).

Выражение (3.25) для $f(t)$ показывает, что при $A < 0$ за конечное время $t^* = -1/2A$ все вихри стягиваются в точку. Это явление называется *коллапсом*. При $A > 0$ имеется неограниченное разбегание вихрей, причем оно может начинаться (в идеализированном случае) из одной точки.

2. Движение двух вихрей

Простейшим примером движения системы точечных вихрей является задача о движении двух вихрей. Хотя такая ситуация рассмотрена еще в работе Г.Гельмгольца [135], кратко приведем результаты ее решения для последовательного изложения общей проблемы динамики точечных вихрей. Система уравнений (3.6) для случая двух вихрей с интенсивностями κ_1 и κ_2 имеет вид

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\kappa_2(y_1 - y_2)}{r^2}; \quad \dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{\kappa_2(x_1 - x_2)}{r^2};$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\kappa_1(y_2 - y_1)}{r^2}; \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\kappa_1(x_2 - x_1)}{r^2};$$

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \qquad (3.26)$$

В начальный момент времени $t=0$ координаты вихрей $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})$ и $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})$.

Из соотношения $4\pi H=-\kappa_1\kappa_2 \ln r$ вытекает, что расстояние между вихрями в данном случае остается постоянным. Это обстоятельство позволяет привести систему (3.26) к системе двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций x_1-x_2 и y_1-y_2 с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_1-\dot{x}_2=-\Omega(y_1-y_2); \quad \dot{y}_1-\dot{y}_2=\Omega(x_1-x_2);$$

$$\Omega=\frac{(\kappa_1+\kappa_2)}{2\pi r^2}. \qquad (3.27)$$

При $\kappa_1+\kappa_2\neq 0$ инварианты P и Q определяют центр завихренности системы с координатами

$$X=\frac{\kappa_1 x_1^{(0)}+\kappa_2 x_2^{(0)}}{\kappa_1+\kappa_2}; \qquad Y=\frac{\kappa_1 y_1^{(0)}+\kappa_2 y_2^{(0)}}{\kappa_1+\kappa_2},$$

который в процессе движения остается неподвижным.

Поместив начало декартовой системы координат в точку (X, Y), получаем $P=0$; $Q=0$. Используя это обстоятельство и учитывая инвариантность решения (3.27) относительного параллельного переноса, траектории движения вихрей можно выразить зависимостями

$$x_1(t)=r\frac{\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\cos(\Omega t+\delta);$$

$$y_1(t)=r\frac{\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\sin(\Omega t+\delta);$$

$$x_2(t)=-r\frac{\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}\cos(\Omega t+\delta);$$

$$y_2(t)=-r\frac{\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}\sin(\Omega t+\delta); \quad \operatorname{tg}\delta=\frac{y_1^{(0)}}{x_1^{(0)}}. \qquad (3.28)$$

Вид выражений (3.28) показывает, что два вихря совершают равномерное движение с частотой Ω по двум концентрическим окружностям радиусов соответственно $r\frac{\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}$, $r\frac{\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2}$. При этом, если знаки κ_1 и κ_2 одинаковы, то центры обеих окружностей находятся внутри

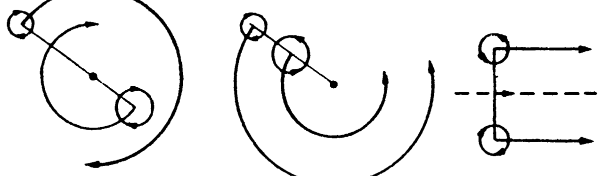


Рис. 13

отрезка, соединяющего вихри (рис. 13, *а*), а если знаки противоположные, то вне отрезка (рис. 13, *б*), на прямой, являющейся продолжением этого отрезка в сторону более сильного по модулю интенсивности вихря. Период обращения вихрей равен $4\pi r^2 / (\kappa_1+\kappa_2)$.

Важным частным случаем двух вихрей является случай так называемой «вихревой пары», для которой $\kappa_1+\kappa_2=0$, т.е. $\kappa_1=-\kappa_2=\kappa>0$.

Анализ уравнений (3.26) показывает, что в этом случае центр завихренности расположен на бесконечности, а вихри движутся в одном направлении с постоянной скоростью $\kappa / 2\pi r$ по прямым, перпендикулярным к отрезку, соединяющему вихри. Выбрав начало координат в точке, делящей пополам постоянное расстояние между вихрями, и соответствующим образом расположив оси (рис. 13, *в*), из уравнений (3.26) находим

$$x_{1,2}(t) = x_0 + \frac{\kappa}{2\pi r} t; \quad y_{1,2} = \pm \frac{r}{2}.$$

Модель вихревой пары часто используется для теоретического описания явления развития вихревого движения, образованного срывом концевых вихрей с крыльев [251]. Определенный интерес имеют задачи взаимодействия вихревой пары с жесткими и свободными границами. Экспериментальное исследование таких явлений и оценка возможностей модели идеальной жидкости и точечной вихревой пары даны в [96].

3. Движение трех вихрей

Решение уравнений движения. Интерес к этой задаче обусловлен несколькими причинами. Во-первых, как отметил А.Пуанкаре [201], такая нелинейная гамильтонова система всегда интегрируема, что само по себе весьма ценно. Во-вторых, физическая картина движения дает простейший пример возникновения новых масштабов длин, отличных от начальных. В-третьих, эта задача внешне подобна знаменитой задаче трех тел небесной механики, однако имеет тем не менее существенные, принципиальные отличия, связанные прежде всего с интегрируемостью. И, наконец, данная задача дает необычайно красивые траектории движения вихрей.

Обращаясь к истории вопроса, отметим, что задача детально изучалась в 1877 г. в инаугурационной диссертации В.Грёбли, опубликованной впоследствии в [130]. Один из характерных рисунков этой работы воспроизводился Д.Н.Бобылевым [10] и Н.Е.Жуковским [27], но эта работа не нашла достаточного распространения.

Новый этап устойчивого интереса к динамике трех вихрей отражен в работах [54, 86, 232]; обобщение современного представления об этой задаче содержится в [88, 234], где дана исчерпывающая классификация всех типов движения трех вихрей.

Рассмотрим движение в безграничной идеальной жидкости трех точечных вихрей интенсивностями κ_j, расположенными в точках с координатами ρ_j, θ_j ($j=1, 2, 3$) в полярной системе координат. Тогда система уравнений (3.7) примет вид

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{\kappa_2\rho_2}{2\pi}\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_3^2} + \frac{\kappa_3\rho_3}{2\pi}\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{l_2^2};$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{\kappa_3\rho_3}{2\pi}\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{l_1^2} + \frac{\kappa_1\rho_1}{2\pi}\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_3^2};$$

$$\dot{\rho}_3 = -\frac{\kappa_1\rho_1}{2\pi}\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{l_2^2} + \frac{\kappa_2\rho_2}{2\pi}\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{l_1^2};$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\kappa_2}{2\pi\rho_1}\frac{\rho_1-\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{l_3^2} + \frac{\kappa_3}{2\pi\rho_1}\frac{\rho_1-\rho_3\cos(\theta_3-\theta_1)}{l_2^2};$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\kappa_3}{2\pi\rho_2}\frac{\rho_2-\rho_3\cos(\theta_2-\theta_3)}{l_1^2} + \frac{\kappa_1}{2\pi\rho_2}\frac{\rho_2-\rho_1\cos(\theta_1-\theta_2)}{l_3^2};$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\kappa_1}{2\pi\rho_3}\frac{\rho_3-\rho_1\cos(\theta_3-\theta_1)}{l_2^2} + \frac{\kappa_2}{2\pi\rho_3}\frac{\rho_3-\rho_2\cos(\theta_2-\theta_3)}{l_1^2}, \qquad (3.29)$$

где

$$l_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho_2\rho_3\cos(\theta_2-\theta_3);$$

$$l_2^2 = \rho_3^2 + \rho_1^2 - 2\rho_3\rho_1\cos(\theta_3-\theta_1);$$

$$l_3^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2). \qquad (3.30)$$

Начальные условия соответственно принимают вид

$$\rho_j = \rho_j^{(0)}; \quad \theta_j = \theta_j^{(0)}; \quad t = 0 .$$

В дальнейшем удобно совместить начало координат с центром завихренности. Тогда первые два инварианта (3.9) Q и P будут тождественно равны нулю:

$$\kappa_1 \rho_1 \cos\theta_1 + \kappa_2 \rho_2 \cos\theta_2 + \kappa_3 \rho_3 \cos\theta_3 = 0 ;$$

$$\kappa_1 \rho_1 \sin\theta_1 + \kappa_2 \rho_2 \sin\theta_2 + \kappa_3 \rho_3 \sin\theta_3 = 0 . \qquad (3.31)$$

Инварианты движения I и H запишем в форме

$$\kappa_1 \rho_1^2 + \kappa_2 \rho_2^2 + \kappa_3 \rho_3^2 = c_1; \qquad (3.32)$$

$$\kappa_1^{-1} \ln l_1 + \kappa_2^{-1} \ln l_2 + \kappa_3^{-1} \ln l_3 = c_2 . \qquad (3.33)$$

Значения постоянных C_1 и C_2 очевидным образом определяются начальным расположением вихрей.

Уравнения (3.31) можно тождественно преобразовать к более удобному для дальнейшего виду, выразив их лишь через разность углов. С этой целью первое уравнение в (3.31) умножаем на $\sin\vartheta_2$, второе — на $(-\cos\vartheta_1)$, и результаты суммируем. Затем те же операции проводим, последовательно используя величины $\sin\vartheta_2$, $\sin\vartheta_3$ и $(-\cos\vartheta_2)$, $(-\cos\vartheta_3)$. В результате получаем три уравнения:

$$\kappa_2 \rho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \kappa_3 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) = 0 ;$$

$$\kappa_1 \rho_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \kappa_3 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) = 0 ;$$

$$\kappa_3 \rho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) + \kappa_2 \rho_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) = 0 . \qquad (3.34)$$

Из уравнений (3.31) можно получить также выражения для косинусов разницы углов, входящих в систему (3.29). Для этого следует перенести поочередно каждое слагаемое в (3.31) в правую часть, возвести в квадрат и просуммировать:

$$\cos(\theta_2 - \theta_3) = \frac{\kappa_1 \rho_1^2 - \kappa_2 \rho_2^2 - \kappa_3 \rho_3^2}{2 \kappa_2 \kappa_3 \rho_2 \rho_3} ;$$

$$\cos(\theta_3 - \theta_1) = \frac{-\kappa_1 \rho_1^2 + \kappa_2 \rho_2^2 - \kappa_3 \rho_3^2}{2 \kappa_3 \kappa_1 \rho_3 \rho_1} ;$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{-\kappa_1\rho_1^2 - \kappa_2\rho_2^2 + \kappa_3\rho_3^2}{2\kappa_1\kappa_2\rho_1\rho_2}. \tag{3.35}$$

Уравнения (3.29) содержат шесть неизвестных функций ρ_j, ϑ_j. Однако правая часть в этой автономной системе содержит зависимость от углов лишь в виде разностей $\theta_1-\theta_2$, $\theta_2-\theta_3$, $\theta_3-\theta_1$. Поэтому данная система может быть сведена к системе пяти уравнений относительно величин ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\theta_1-\theta_2$, $\theta_3-\theta_1$. Шестое, оставшееся неиспользованным, на первый взгляд, уравнение необходимо для определения зависимости одного из углов от времени. Таким образом, для системы из пяти дифференциальных уравнений первого порядка имеем четыре независимых первых интеграла — соотношения (3.31) — (3.33). Имеется принципиальная возможность свести систему к одному автономному дифференциальному уравнению с одним неизвестным, т.е. довести дело до квадратуры. Конкретно процедура выглядит следующим образом. Подставив выражения для косинусов в (3.30) и используя (3.32), получаем выражения

$$\kappa_2\kappa_3 l_1^2 = (\kappa_2+\kappa_3)c_1 - \kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\rho_1^2;$$

$$\kappa_3\kappa_1 l_2^2 = (\kappa_3+\kappa_1)c_1 - \kappa_2(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\rho_2^2;$$

$$\kappa_1\kappa_2 l_3^2 = (\kappa_1+\kappa_2)c_1 - \kappa_3(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\rho_3^2. \tag{3.36}$$

Введем новую постоянную c_3, связанную с c_1 зависимостью

$$c_3 = \frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}c_1.$$

Тогда из (3.36) получим

$$\kappa_1^{-1}l_1^2 + \kappa_2^{-1}l_2^2 + \kappa_3^{-1}l_3^2 = c_3. \tag{3.37}$$

Инварианты (3.33) и (3.37) содержат только стороны треугольника, образованного точечными вихрями. Удобно обратиться к уравнениям (3.17) относительного движения вихрей, которые в данном случае принимают вид

$$\frac{d\,l_1^2}{dt} = -\frac{\kappa_1}{\pi}\frac{l_2^2 - l_3^2}{l_2^2 l_3^2}\gamma A;$$

$$\frac{d l_2^2}{d t} = - \frac{\kappa_2}{\pi} \frac{l_3^2 - l_1^2}{l_3^2 l_1^2} \gamma A ;$$

$$\frac{d l_3^2}{d t} = - \frac{\kappa_3}{\pi} \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 l_2^2} \gamma A . \tag{3.38}$$

Площадь треугольника A известным способом по формуле Герона выражается через стороны

$$A = \sqrt{l(l - l_1)(l - l_2)(l - l_3)} ; \quad l = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2} ,$$

а величина γ принимает значение 1 или —1 в зависимости от обхода вихрей 1, 2, 3 против или по часовой стрелке.

Отметим, что первые интегралы (3.33) и (3.37) можно непосредственно получить из уравнений (3.38). В первом случае уравнения (3.38) разделим соответственно на $\kappa_1 l_1^2$, $\kappa_2 l_2^2$, $\kappa_3 l_3^2$ и результаты просуммируем. Во втором случае делим соответственно на κ_1, κ_2 и κ_3 и результаты также складываем. В обоих случаях в правой части будет тождественный нуль, а в левой — производная по времени от выражений (3.33) и (3.37).

Наличие двух первых интегралов системы (3.38) еще раз указывает на интегрируемость в квадратурах исходной задачи. Эти инварианты позволяют определить относительное движение системы трех вихрей, не прибегая к интегрированию исходных уравнений движения. Подробно об этом будет сказано ниже.

Полное решение поставленной задачи — определение положения вихрей на плоскости в любой момент времени — можно получить в квадратурах. Зная зависимость от времени величин l_j^2 и используя (3.36), можно построить зависимость от времени значений ρ_j. Для нахождения углов ϑ_j как функции времени нужно так преобразовать систему (3.29), чтобы она содержала только стороны l_1, l_2, l_3. Это можно легко осуществить, используя выражения (3.35) и (3.36):

$$\rho_1^2 \dot{\theta}_1 = \frac{\kappa_2 \kappa_3 [(l_2^2 - l_3^2) - l_1^2 (l_2^2 + l_3^2)] + 4 (\kappa_2 + \kappa_3)^2 l_2^2 l_3^2}{4\pi (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) l_2^2 l_3^2} ;$$

$$\rho_2^2 \dot{\theta}_2 = \frac{\kappa_3 \kappa_1 [(l_3^2 - l_1^2) - l_2^2 (l_3^2 + l_1^2)] + 4 (\kappa_3 + \kappa_1)^2 l_3^2 l_1^2}{4\pi (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) l_3^2 l_1^2} ;$$

$$\rho_3^2 \dot{\theta}_3 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 [(l_1^2 - l_2^2) - l_3^2 (l_1^2 + l_2^2)] + 4 (\kappa_1 + \kappa_2)^2 l_1^2 l_2^2}{4\pi (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) l_1^2 l_2^2} . \tag{3.39}$$

Здесь для простоты записи сохранены величины ρ_j, которые связаны с l_j уравнениями (3.36). Необходимо отметить, что эта система уравнений справедлива только при условии, что центр завихренности совпадает с началом координат.

Отметим, что предложенный путь решения не может быть применим для случая, когда $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$, так как тогда центр завихренности системы лежит на бесконечности. В этом случае целесообразно воспользоваться декартовой системой координат. Причем выбор направления осей осуществим таким образом, чтобы инвариант $P=0$.

Вихри равной интенсивности: $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=\kappa$. Для вихрей одинаковой интенсивности инварианты движения (3.32) и (3.33) приобретают более простой вид

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=1\,; \qquad (3.40)$$

$$l_1 l_2 l_3=\lambda\,. \qquad (3.41)$$

Здесь величины ρ_j, l_j записаны в безразмерном виде и отнесены к начальной длине $\rho_0^2=\rho_1^{(0)2}+\rho_2^{(0)2}+\rho_3^{(0)2}$. Положительная безразмерная величина λ также определяется начальным расположением вихрей

$$\lambda=l_1^{(0)} l_2^{(0)} l_3^{(0)} \rho_0^{-3}\,. \qquad (3.42)$$

В дальнейшем будем работать в таких безразмерных координатах, не меняя обозначений.

Уравнения (3.36), определяющие связь между величинами ρ_j и l_j, переходят тогда в соотношения

$$l_1^2=2-3\rho_1^2\,; \quad l_2^2=2-3\rho_2^2\,; \quad l_3^2=2-3\rho_3^2\,. \qquad (3.43)$$

Складывая их и учитывая уравнение (3.40), получаем

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=3\,. \qquad (3.44)$$

Уравнения (3.41) и (3.44) с использованием неравенства между средним арифметическим и геометрическим для величин l_j^2 приводят к выводу, что значение λ находится в пределах $0<\lambda\le 1$. Для классификации типов движений трех одинаковых точечных вихрей удобно соотносить длины l_j сторон вихревого треугольника с точкой (l_1, l_2, l_3) в декартовой системе координат. В силу положительности величин l_j рассмотрение проводится только в первом положительном октанте.

Уравнение (3.44) представляет собой в этих координатах сферу радиуса $\sqrt{3}$; уравнение (3.41) определяет поверхность третьего порядка, имеющую координатные плоскости $l_j=0$ в качестве асимптотических

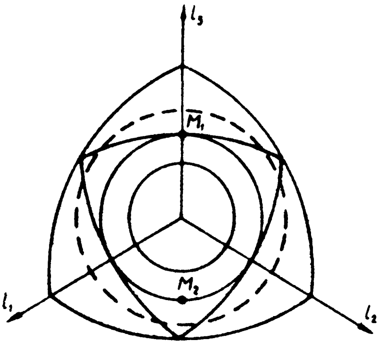


Рис. 14

плоскостей. Плоскости l_j=const рассекают эту поверхность на равносторонние гиперболы. Плоскости $l_1=l_2$, $l_2=l_3$ и $l_3=l_1$ суть симметричные как для сферы, так и для поверхности третьего порядка и для их сечений. Каждой точке, находящейся на овале-кривой пересечения сферы с поверхностью третьего порядка, соответствует определенное положение трех вихрей (рис. 14). На овале расположены точки M_1 и M_2 максимального и минимального значения координаты l_3, внутри которых лежат допустимые значения l_3. В силу симметрии задачи они расположены на плоскости $l_1=l_2$. Положив $l_1=l_2$, получаем, что максимальное и минимальное значения l_3 определяются корнями уравнения

$$l^3 - 3l + 2\lambda = 0. \qquad (3.45)$$

Если одна из сторон достигает своего экстремального значения, то треугольник из трех вихрей становится равнобедренным.

Один из действительных корней этого уравнения отрицателен, поскольку произведение трех корней, согласно теореме Виета, равно — $2\lambda<0$. Два других корня определяют l_{3max} и l_{3min} и, вообще говоря, могут быть как действительными (равными и нет), так и мнимыми. Это свидетельствует о том, что указанные поверхности могут вообще не пересекаться. В предельном случае $\lambda=1$ имеет место касание в одной точке $l_1=l_2=l_3=1$. При этом три вихря образуют равносторонний треугольник, причем $\rho_1^2=\rho_2^2=\rho_3^2=1/3$. Используя уравнение (3.39), находим, что вихревой равносторонний треугольник вращается вокруг своего центра завихренности с постоянной угловой скоростью $3\kappa/\pi$. Кроме того, l_j — стороны реального вихревого треугольника, а не просто тройки чисел, удовлетворяющие уравнениям (3.41) и (3.44). Поэтому необходимо, чтобы сумма двух любых величин l_j превышала третью. Три уравнения $l_1+l_2=l_3$, $l_3+l_1=l_2$, $l_3+l_2=l_1$, отвечающие предельным случаям, когда вихри лежат на одной прямой, представляют собой плоскости, содержащие по две биссектрисы положительных координатных осей. Эти плоскости вырезают на сфере равносторонний сферический треугольник, внутри которого возможно расположение точек l_j, отражающих физическое содержание задачи. Часть овала, лежащая внутри этого треугольника, окончательно определяет траектории относительного движения вихрей. При этом необходимо отличать три случая, когда величина λ^2 больше, равна или меньше 1/2. Они различаются тем, что овал находится либо внутри треугольника, либо его касается, либо пересекает (рис.14). Направление обхода определяется уравнениями (3.38); по знаку их правых частей определяется возрастание или убывание значений величин в начальный момент времени. Знак правых частей, в свою очередь, определяется совокупностью факторов: знаком κ, величиной λ и разностями $l_1^2 - l_j^2$.

Перейдем теперь к определению типов движения. Покажем, как можно определить движение вихря 1. Рассмотрим уравнения (3.38) и (3.39). Из уравнений (3.41) и (3.44), используя l_1 в качестве основной переменной и вводя безразмерное (отнесенное к величине $4\pi\rho_0^2/\kappa$) время, получаем первые из уравнений (3.38) и (3.39) в виде

$$\frac{d\, l_1^2}{d\, t} = (\mp\ \gamma)\, \lambda^{-2} \sqrt{(l_1^6 - 6\, l_1^4 + 9\, l_1^2 - 4\lambda^2) \times}$$

$$\overline{\times (-4\, l_1^6 + 12\, l_1^4 - 9\, l_1^2 + 4\lambda^2)}\,; \tag{3.46}$$

$$\frac{d\,\theta_1}{d\, t} = \frac{2l_1^6 - 9l_1^4 + 9l_1^2 + 4\lambda^2}{2\lambda^2 (2 - l_1^2)}\,. \tag{3.47}$$

Выбор знака в правой части уравнения (3.46) определяется положительным или отрицательным значением разности $l_2^2 - l_3^2$ в начальный момент времени. Относительное значение сторон треугольника в зависимости от угловой координаты ϑ_1 следует из (3.46) и (3.47) исключением безразмерного времени t:

$$\frac{d\, l_1^2}{d\,\theta_1} = (\mp\ \gamma) \times$$

$$\times \frac{2(2 - l_1^2) \sqrt{(l_1^6 - 6\, l_1^4 + 9\, l_1^2 - 4\lambda^2)(-4\, l_1^6 + 12\, l_1^4 - 9\, l_1^2 + 4\lambda^2)}}{2l_1^6 - 9\, l_1^4 + 9l_1^2 + 4\lambda^2}\,. \tag{3.48}$$

С учетом равенства $\rho_1^2 = (2 - l_1^2)/3$ интегрирование этого уравнения с начальными условиями определяет траекторию движения вихря 1.

Характер движения вихря 1 по траектории находится из интегрирования уравнений (3.46), (3.47) :

$$t = \mp\ \gamma \int \frac{\lambda^2\, d\, z}{\sqrt{f(z)}}\ ; \quad \theta_1 = \int \frac{(2z^3 - 9z^2 + 9z + 4\lambda^2)\, d\, z}{2(2 - z)\sqrt{f(z)}}\,;$$

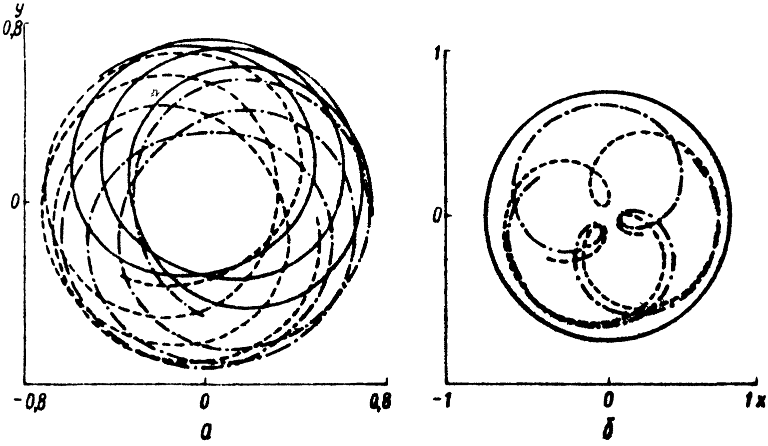


Рис. 15

$$f(z)=f_1(z)f_2(z)\,; \quad f_1(z)=z^3-6z^2+9z-4\lambda^2\,;$$

$$f_2(z)=-4z^3+12z^2-9z+4\lambda^2\,; \quad z=l_1^2, \quad 0\le z\le 2\,. \qquad (3.49)$$

В общем случае интеграл (3.49) является (за исключением некоторых частных случаев) гиперэллиптическим, поскольку в знаменателе под корнем стоят полиномы от z степени, выше четвертой.

Уравнение шестого порядка $f(z)=0$ имеет равные корни лишь тогда, когда λ^2 принимает значения 0, 1/2 или 1. Для случая $\lambda=0$ все сводится к взаимодействию двух вихрей, случай $\lambda=1$ соответствует равностороннему треугольнику и рассмотрен выше, а к $\lambda^2=1/2$ обратимся ниже.

Если значение λ^2 отлично от приведенных значений, то тогда не имеется двух равных между собой линейных множителей, на которые можно было бы разложить $f(z)$, и интегралы (3.49) будут иметь интегрируемую корневую особенность. При этом в интеграле для ϑ_1 имеется еще одна особенность при $z=2$. Если $z\neq 2$, то этот интеграл остается конечным. Движение при этом будет периодическим в том смысле, что через определенный момент времени треугольник вихрей, не попадая в свое первоначальное положение, будет иметь такую же форму как и в начальный момент времени. Это связано с тем, что углы ϑ_j монотонно растут, а угол, на который поворачивается треугольник за один период, не совпадает с 2π.

В случае $1/2<\lambda^2<1$ уравнение $f_1(z)=0$ имеет три положительных корня z_1, z_2, z_3, лежащих в пределах $2-\sqrt{3}<z_1<1$, $1<z_2<2$, $2+\sqrt{3}<z_3<4$. Уравнение $f_2(z)=0$ имеет только один действительный корень, лежащий в интервале $2<\xi_1<3$. Этот корень, как и корень z_3, лежит вне физически допустимых значений z. Изменение величин происходит на отрезке $z_1\leq z\leq z_2$. Время T, которое требуется для того, чтобы вихревой треугольник принял первоначальную форму, и увеличение Θ за это время углов ϑ_j и определяются следующим образом:

$$T=2\lambda^2\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\ ;\qquad \Theta=\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{(2z^3-9z^2+9z+4\lambda^2)\,dz}{(2-z)\sqrt{f(z)}}.$$

В качестве примера такого движения рассмотрим ситуацию, когда три вихря в начальный момент времени $t=0$ образуют равнобедренный треугольник со сторонами $l_1^0=\sqrt{3}/7$, $l_2^0=l_3^0=\sqrt{9}/7$. При этом $\lambda=0{,}842$; $\gamma=-1$.

Вихрь 1 находится в вершине и сторона l_1 имеет минимальное значение. Треугольник вращается против часовой стрелкм вокруг центра завихренности, при этом его форма видоизменяется. К моменту времени $t=T/6$ треугольник снова становится равнобедренным с вихрем 2 в вершине, а к моменту $t=T/3$ — равнобедренным с вихрем 3 в вершине. Максимум или минимум одной из сторон соответствует всегда по (3.43) минимуму или максимуму расстояния от вихря, противолежащего данной стороне, до центра завихренности. Общий вид траекторий всех трех вихрей за время $0\leq t\leq 3T$ представлен на рис. 15 *а*. Траектория вихря *1* показана сплошной линией, вихря *2* — штриховой, вихря *3* — штрихпунктирной. В силу несоизмеримости значений Θ и 2π траектории с течением времени будут всюду плотно заполнять кольцо с радиусами $\rho_{min}=\sqrt{4/42}$; $S_{max}=\sqrt{22/42}$.

Отметим, что случай с аналогичными начальными условиями приведен в [130]. Однако несмотря на то, что эта работа по богатству идей и результатов может рассматриваться как основополагающая в теории взаимодействия точечных вихрей (ссылки в известных учебниках Г.Кирхгофа [35] и Г.Ламба [46] не отражают всего ее содержания), в ней при анализе данного случая содержится неточность. Это связано с неверно выбранным направлением интегрирования по l_2^2 и l_3^2, поскольку начальный предел интегрирования лежит внутри допустимого интервала (z_1, z_2).

Следует подчеркнуть важное обстоятельство. В случае $\lambda^2>1/2$ начальная ориентация вихрей (величина γ) не изменяется в процессе движения и вихри никогда не выстраиваются в одну линию, т.е. $A>0$.

В случае $\lambda^2<1/2$ уравнение $f_1(z)=0$ обладает тремя действительными корнями, лежащими в интервалах $0<z_1<2-\sqrt{3}$, $2<z_2<3$, $3<z_3<2+\sqrt{3}$. Корень z_1 соответствует минимальному значению l_1, а корни z_2 и z_3 лежат вне физически допустимого интервала $z<2$.

Уравнение $f_2(z)$ имеет также три действительных корня в пределах $0<\xi_1<1/2$; $1/2<\xi_2<3/2$; $3/2<\xi_3<2$. Все три корня ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворяют условиям допустимого треугольника вихрей. Шесть корней уравнения $f(z)$ расположены по порядку возрастания их величин следующим образом: $z_1<\xi_1<\xi_2<\xi_3<z_2<z_3$. Таким образом, многочлен

$$f(z)=-4(z-z_1)(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)(z-z_2)(z-z_3)$$

имеет положительное значение, если z находится между z_1 и ξ_1 или между ξ_2 и ξ_3, и, наконец, между z_2 и z_3. Для физически допустимого треугольника вихрей должно быть выполнено условие $z<2$, поэтому z может изменяться в пределах $z_1 \le z \le \xi_1$ либо $\xi_2 \le z \le \xi_3$, определяемых начальным расположением вихрей. Отличие от предыдущей ситуации состоит в наличии двух интервалов положительных значений $f(z)$. При этом очевидно, что с учетом (3.44) в первом интервале находится только одно из значений l_j^2, а во втором обязательно два оставшихся значения. Для определенности будем считать, что l_1^2 расположена в первом интервале. Движение трех вихрей происходит следующим образом. Выберем начальный момент времени так, чтобы треугольник вихрей опять был равнобедренным с вершиной в вихре *1*. При этом $l_1^{(0)2}$ принимает минимальное значение, равное z_1. В процессе движения стороны l_1 и l_2 будут увеличиваться, а l_2 уменьшаться. В определенный момент времени $t=T/4$ все три вихря располагаются на прямой линии, причем вихрь *3* между вихрями *1* и *2* ближе к вихрю *2*. Далее треугольник продолжает видоизменяться, причем величина γ изменяет свой знак с минуса на плюс. В момент $t=T/2$ треугольник становится, как и в момент $t=0$, равнобедренным с вершиной в вихре *1*, но при этом вихри *2* и *3* поменялись местами. К моменту $t=3/4T$ три вихря снова располагаются на одной прямой линии, но в отличие от предыдущего случая вихрь *2* находится между вихрями *1* и *3*. Далее происходит изменение ориентации вихрей, и к моменту $t=T$ треугольник вихрей становится по форме идентичен начальному. Исходя из этих соображений полный период относительного движения можно вычислить по формуле

$$T=4\lambda^2\int_{z_1}^{\xi_1}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\,.$$

Один из возможных типичных вариантов представлен на рис. 15 *б*, где $l_1^0 = 0{,}25$; $l_2^0 = l_3^0 = 1{,}375$; $\lambda = 0{,}4726$. (Обозначения траекторий те же, что на рис. 15 *а*).

Сравнение этих рисунков обнаруживает существенное их различие, которое состоит в том, что в последнем случае траектории вихря *1* заполняют всюду плотно кольцо радиусов $\rho_{min} = \sqrt{\dfrac{2-\xi_1}{3}}$; $\rho_{max} = \sqrt{\dfrac{2-z_1}{3}}$. Вихри *2* и *3* вращаются внутри колец соответственно $\rho_{min} = \sqrt{\dfrac{2-\xi_3}{3}}$ и $\rho_{max} = \sqrt{\dfrac{2-\xi_2}{3}}$.

В предельном случае $\lambda^2 = 1/2$ многочлен $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = 4(z-2)^2(z-1/2)^2(-z^2+4z-1)$$

и имеет кратные корни. Тем самым особенности в интегралах (3.49) являются степенными. Интегралы легко могут быть сведены к табличным:

$$t = \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+\sqrt{-l_1^4+4l_1^2-1}}{2-l_1^2} -$$

$$- \frac{1}{3\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}\,l_1^2+\sqrt{-l_1^4+4l_1^2-1}}{1-2l_1^2} ;$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{2} \arccos \frac{2-l_1^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+\sqrt{-l_1^4+4l_1^2-1}}{2-l_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}\,l_1^2+\sqrt{-l_1^4+4l_1^2-1}}{1-2l_1^2} .$$

При этом аналогично двум предыдущим случаям начальное положение вихрей выбиралось в виде равнобедренного треугольника с вершиной в вихре *1*, т.е. $l_1^{(0)2} = 2-\sqrt{3}$; $l_2^{(0)2} = l_3^{(0)2} = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})$. Как видно из этих формул, движение не периодическое. Траектории вихрей представляют собой спирали, причем с ростом t вихри *1* и *3* будут асимптотически приближаться к окружности радиуса 1 / 2, а вихрь *2* — к центру завихренности. Здесь имеем типичный для нелинейных колебательных систем пример выхода на предельный цикл и фокус [32]. Движение осуществляется так, что на конечной стадии вихри располагаются на одной прямой, причем вихрь *2* строго посередине между вихрями *1* и *3*. Предельными длинами будут $l_1^{(00)2} = l_3^{(00)2} = 1/2$,

$l_2^{(00)2}=2$. Такое движение будет неустойчивым. Реализация этого случая на ЭВМ путем прямого численного решения исходной системы (3.29) с соответствующими начальными условиями не дает возможности в силу накопления погрешности проследить за траекториями вихрей при больших значениях t.

Следует отметить, что аналогичный способ решения нелинейных уравнений движения трех одинаковых вихрей разработан в [54]. Основное внимание было уделено описанию относительных траекторий движения в зависимости от введенного параметра Θ, который в наших обозначениях равен $1/\lambda^2$. Кроме того, построена зависимость периода относительного вращения T от параметра Θ и изучено его поведение при характерных предельных значениях.

Другой способ решения этой задачи, основанный на общих свойствах канонических преобразований гамильтоновых уравнений, предложен в [93]. При этом нелинейное дифференциальное уравнение относительно безразмерной площади треугольника решается явно с помощью эллиптических функций Якоби. В частности установлено, что при $\lambda^2=1/2$ площадь треугольника с течением времени изменяется по закону $A(t)=A(0)\left[1+\frac{2}{\sqrt{3}}ch(12\sqrt{3t})\right]^{-1}$ и асимптотически стремится к нулю.

Взаимодействие вихревой пары с одиночным вихрем. Для случая одинаковой по модулю интенсивности при анализе взаимодействия вихревой пары *1*; *3* ($\kappa_1=-\kappa_3=\kappa$) с одиночным вихрем *2* ($\kappa_2=\kappa$) начальное расположение и система координат показаны на рис. 16 *а*. Такое расположение вихрей всегда можно осуществить выбором направления осей координат. Поскольку здесь начало координат размещено в центре завихренности, то вихри в любой момент времени образуют параллелограмм. Причем вихрь 3 и начало координат расположены в противоположных вершинах. При таком выборе системы координат инварианты P и Q тождественно равны нулю. Введем нормировку всех линейных параметров к величине l, определяемой формулой

$$l^2=\frac{d^2[L^2+(r+0{,}5d)^2]}{\lambda^2+(r+1{,}5d)^2}.$$

Инварианты I и H сводятся к виду

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=4\lambda\ ;\quad \rho_1^2\rho_2^2-\ \rho_3^2=8\lambda, \tag{3.50}$$

где

$$\lambda=\frac{(2r+d)[L^2+(r+1{,}5d)^2]}{4d[L^2+(r+0{,}5d)^2]}. \tag{3.51}$$

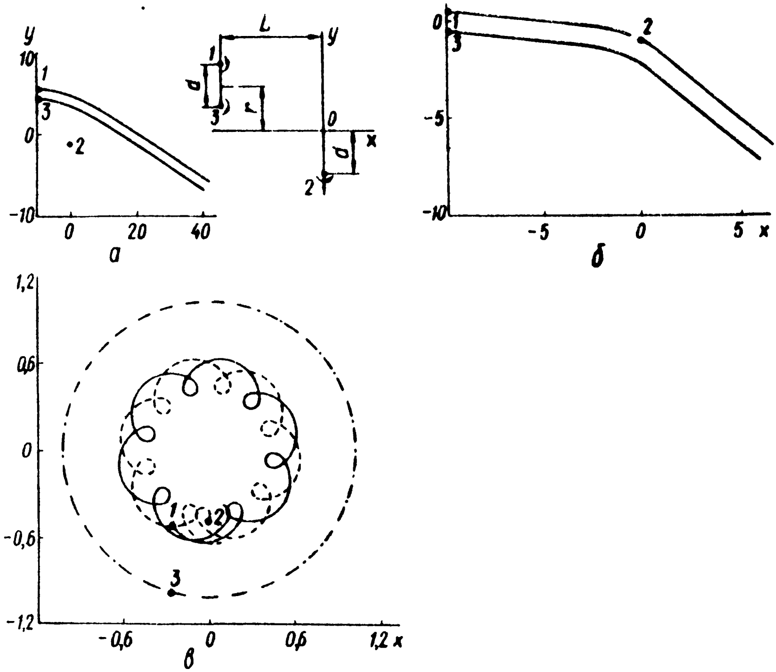


Рис. 16

Из уравнений (3.50) выразим величины ρ_2^2 и ρ_3^2 через ρ_1^2:

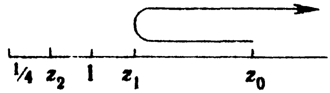
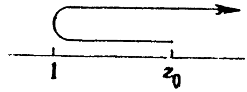
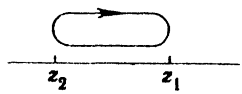
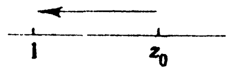
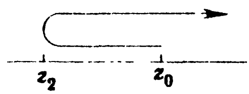
$$\rho_2^2=\frac{\rho_1^2+4\lambda}{\rho_1^2-1};\qquad \rho_3^2=\frac{\rho_1^2-4\lambda\rho_1^2+8\lambda}{\rho_1^2-1}\qquad\left(\lambda\neq-\frac{1}{4}\right).$$

Из (3.29) получаем дифференциальные уравнения, описывающие движение вихря первого (время нормируется к величине $2\pi l^2/\kappa$):

$$\dot{\rho}_1=-\frac{\sqrt{(\rho_1^4-4)(\lambda^2-\lambda)(\rho_1^2+4\lambda^2)(\rho_1^2-1)}}{\rho_1^3(\rho_1^2+4\lambda)};$$

$$\dot{\theta}_1=\frac{(\rho_1^2-1)[1-2\lambda)\rho_1^2+2\lambda]}{\rho_1^4(\rho_1^2+4\lambda)}.$$

Таблица 4

Тип взаимодействия	λ	z_0	Путь интегрирования
Столкновение прямое	$-\infty < \lambda < -1/4$	$z_0 > z_1$	
обменное	$-1/4 < \lambda < 0$	$z_0 > 1$	
Взаимный захват		$z_2 < z_0 < z_1$	
Столкновение обменное	$o < \lambda < 2$	$z_0 > 1$	
прямое	$2 < \lambda < \infty$	$z_0 > z_2$	

Поскольку правые части этих уравнений являются функциями одной переменной ρ_1, то они допускают квадратуры вида

$$t = -\int_{z_0}^{z} \frac{z(z+4\lambda)}{2} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)^3 f(z)}};$$

$$\theta_1 = \int_{z_0}^{z} \frac{(2\lambda-1)z-2\lambda}{2z} \frac{dz}{\sqrt{(z-1)f(z)}} \quad \operatorname{sign}(z-1)+\theta_1^{(0)};$$

$$f(z) = z^2 - 4(\lambda^2-\lambda)z + 4\lambda^2; \quad z = \rho_1^2;$$

$$\theta_1^{(0)} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{r+0,5\,d}{L}; \quad z_0 = \frac{L^2 + (r+1,5\,d)^2}{d^2}. \qquad (3.52)$$

Из соотношения (3.52) видно, что характеристики движения определяются корнями уравнения $f(z) = 0$, $z_{1,2} = (\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda})^2$, а также неинтегрируемой особенностью $z = 1$.

Пусть интегрирования в формулах (3.52) определяются начальным условием $z=z_0$ и требованием времени. Во всех случаях интегрирование происходит в допустимых областях от z_0 в стороны убываний значений до нижнего предела, а затем в сторону возрастания. Исключение составляют случаи, когда путь интегрирования заканчивается в точке $z=1$ (неинтегрируемая особенность, $t=\infty$). В момент времени, отвечающий значению z в левом крае интервала, вихри располагаются на одной прямой. После этого происходит смена их ориентации.

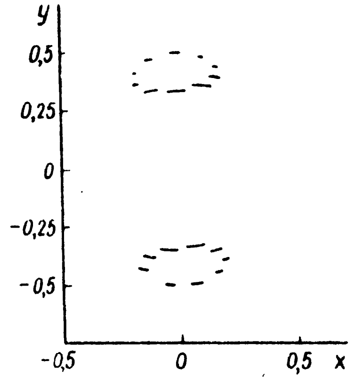


Рис. 17

Отметим, что интегралы (3.52) после громоздких, но очевидных преобразований [130] при всех значениях λ сводятся к комбинации эллиптических интегралов Лежандра первого, второго и третьего родов.

Решение задачи, согласно общим формулам (3.52), показывает, что в зависимости от начального расположения вихрей имеют место три основных типа движения: прямое, обменное столкновения и взаимный захват. Такая терминология атомной физики, начиная с работы Х.Арефа [85], применяется в задачах вихревого взаимодействия. При этом характерная величина r/d служит аналогом параметра соударения.

Прямое столкновение качественно определяется схемой *1*; *3+2→1*; *3+2*, характеризующей начальное и конечное состояния вихрей. Обменное столкновение происходит по схеме *1*; *3+2→1+ 3*; *2*, а взаимный захват по схеме — *1*; *3+2→1*; *2*; *3*. В табл. 4 [37] представлены пределы изменения параметров λ и z_0 и пути интегрирования для трех указанных типов взаимодействия. Эта таблица дополняет классификацию, приведенную в [50, 86], с учетом влияния начального параметра z_0. При $z_0>1$ результаты совпадают, однако при $z_0\propto 1$, т.е. когда все три вихря расположены достаточно близко, параметр r/d не дает возможности однозначно классифицировать тип взаимодействия.

В случае прямого столкновения (рис. 16, *а*, $L/d=10$, $r/d=5$, $\lambda=3$) пара *1*; *3* незначительно отклоняет от своего начального положения вихрь *2*. В свою очередь в зоне влияния вихря *2* расстояние между вихрями *1* и *3* изменяется и пара изменяет направление своего движения. При удалении пары на бесконечность расстояние между вихрями *1* и *3* опять стремится к единице.

При обменном столкновении (рис. 16, *б*, $L/d=10$, $r/d=0$, $\lambda=0{,}251$)

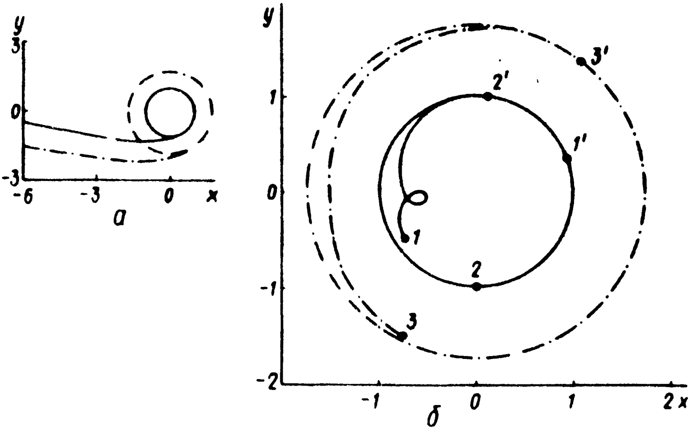


Рис. 18

пара *1*; *3* приближается к вихрю *2*, причем в этом случае траектория вихря *1* проходит близко от вихря *2*. Происходит «замена» вихрей *1* и *2*, и с ростом времени новая пара *2*; *3* равномерно удаляется от начала координат и расстояние между вихрями стремится к единице. Отметим, что окончательное положение вихря *1* не совпадает с первоначальным положением вихря *2*. Интересно, существует ли полностью обратимая картина ?

В случае взаимного захвата имеет место периодическое вращение вокруг начала координат всех трех вихрей. В таком движении само понятие пары вихрей теряет первоначальный смысл. Полярные радиусы вихрей при взаимном захвате изменяются в пределах

$$\sqrt{\lambda^2-2\lambda}-\lambda \le \rho_1, \rho_2 \le \sqrt{\lambda^2-2\lambda}+\lambda\,;$$

$$2\sqrt{\lambda^2-2\lambda} \le \rho_3 \le \sqrt{2-4\lambda-2\sqrt{1+\lambda}}\,.$$

На рис. 16, *в* представлен пример такого взаимодействия при $L/d=0{,}6$, $r/d=1{,}5$, $\lambda=1/8$, $z_0=0{,}35$. С увеличением времени траектории будут всюду плотно заполнять кольца с указанными выше радиусами.

Иной график подобного взаимодействия приведен в работе В.Гребли [130]. Незначительное его отличие состоит в том, что в начальный момент времени все вихри расположены на одной прямой и поэтому удобно контролировать периодичность движения. Этот рисунок неоднократно воспроизводился (однако с искажением масштабов) во многих обзорных работах [10, 14, 27] на рубеже прошлого и нынешнего веков — времени бурного интереса к проблеме динамики точеч-

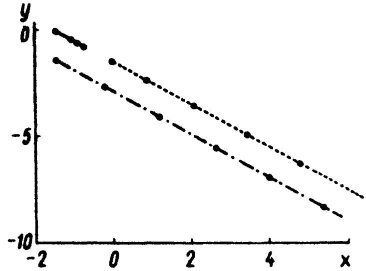


Рис. 19

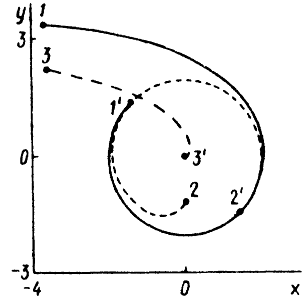


Рис. 20

ных вихрей. Не воспроизводя этот рисунок в очередной раз, приведем важную качественную характеристику нелинейных колебательных гамильтоновых систем [47] — сечения Пуанкаре (рис. 17).Они отражают положение вихрей *2* в момент времени, когда вихрь *1* пересекает *x*. Регулярный характер расположения точек непосредственно связан с интегрируемостью системы уравнений (3.29).

Описанные три случая взаимодействия определялись значениями, лежащими внутри допустимых интервалов. Рассмотрим теперь предельные случаи.

В случае $\lambda = -1/4$ инварианты (3.50) сводятся исключением ρ_3 к равенству

$$(\rho_1^2 - 1)(\rho_2^2 - 1) = 0. \qquad (3.53)$$

Если в (3.53) оба сомножителя равны нулю, то $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 1$; $\rho_3 = \sqrt{3}$ и $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. В этом случае вихри образуют равносторонний треугольник, который, согласно (3.29), равномерно вращается вокруг неподвижного центра завихренности с постоянной угловой скоростью $\kappa / 2\pi$. Однако в отличие от трех одинаковых вихрей такое вращение будет неустойчивым. Это проявляется при численном решении исходной системы уравнений (3.29). Нетрудно убедиться, что незначительное накопление погрешности вычислений приведет к нарушению равенства $\lambda = -1/4$, что выведет режим движения на один из рассмотренных выше случаев.

Если только один из сомножителей (3.53) равен нулю (для определенности будем считать $\rho_2 = 1$, тогда из (3.50) $\rho_3^2 = \rho_1^2 + 2$, то соотношения (3.52) имеют место. При этом $z_1 = 1$, $z_2 = 1/4$ и степенная особенность при $z = 1$ становится второго порядка. Вычисление этих интегралов в этом случае даст

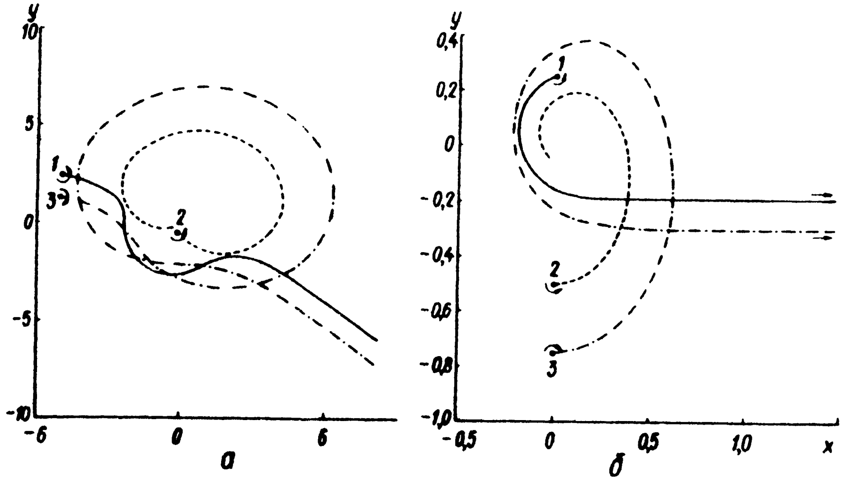


Рис. 21

$$t = -\ \frac{1}{2}\sqrt{4\rho_1^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{4\rho^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{4\rho^2 - 1} - \sqrt{3}}\right|;$$

$$\theta_1 = -\ \operatorname{arctg}\sqrt{4\rho_1^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{4\rho^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{4\rho^2 - 1} - \sqrt{3}}\right| + \theta_1^{(0)}\ .$$

В зависимости от начального положения вихря *1* возможны две ситуации: $\rho^{(0)}>1$ или $1/2\ \varphi_1^{(0)} < 1$. Обе ситуации отражены на рис. 18, где значение $\lambda = -1/4$ получается при $r\,/\,d = -1$ для любого значения $L\,/\,d$. В обоих случаях имеет место взаимный захват, причем вихрь *2* движется по окружности $\rho_2=1$, а вихрь *1* и *3* приближаются с течением времени, вращаясь по спирали, к асимптотическим окружностям радиусов *1* и $\sqrt{3}$. Различие состоит в том, что при $\rho_1^{(0)} > 1$ стремление вихрей *1* и *3* к указанным окружностям происходит снаружи (рис. 18, а), а при $1/2\ \varphi_1^{(0)} < 1$ — изнутри (рис. 18, *б*). К тому же в траектории вихря *1* имеется характерная точка возврата. В обоих случаях окружность радиусов $\rho_1 = 1\ \rho_3 = \sqrt{3}$ является предельным циклом для траектории движения. Результаты рис. 18, *а* показывают, что при фиксированном $\lambda = -1/4$ движение устойчиво относительно изменений начальных условий $\rho_1^{(0)} = 1$.

Отметим, что в исключительном случае, характеризуемом $\lambda = -1/4$,

$\rho_1^{(0)}=1$, движение вихрей не определяется однозначно заданием параметров λ и $\rho_1^{(0)}$. Изменением ρ_2 можно получить движение в режимах взаимного захвата, когда $1/2<\rho_2<1$, и обменного столкновения, когда $\rho_2^{(0)}>1$. Траектории движения будут подобны данным рис. 18, но с очевидной заменой нумерации вихрей.

Случай $\lambda=0$ является предельным случаем обменного столкновения. При этом $r/d=-0{,}5$, $\theta_1^{(0)}=\pi$. Корни функции $f(z)$ являются кратными, причем $z_1=z_2=0$. Выражения (3.52) существенно упрощаются:

$$t=\frac{2-\rho_1^2}{\sqrt{\rho_1^2-1}}-\frac{2-z_0}{\sqrt{z_0-1}}\,;\quad z_0=\left(\frac{L}{d}\right)^2+1\,;$$

$$\theta_1=-\operatorname{arctg}\sqrt{\rho_1^2-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{z_0-1}+\pi\,.$$

Анализ этих выражений показал, что значение ρ_1^2 изменяется в пределах $1<\rho_1^2\le z_0$, причем при $\rho_1^2\to 1$, $t\to\infty$. Траектории движения вихрей показаны на рис. 19.

Наиболее интересен частный случай движения, при котором $L/d=1$, $z_0=2$. Здесь переходя от полярных координат к декартовым, находим, что координаты x_i, y_i связаны соотношениями $y_1=-x_1-\sqrt{2}$, $y_2=-x_2\sqrt{2}$, $y_3=-x_3-2\sqrt{2}$, т.е. траектории вихрей представляют собой отрезки прямых (рис.19). При этом скорость вихря *3*, отнесенная к к$/2\pi d$, остается постоянной и равной $\sqrt{2}$; скорость вихря *1* постепенно уменьшается от $1/\sqrt{2}$ до 0, а вихря *2* — увеличивается от $1/\sqrt{2}$ до $\sqrt{2}$. Движение происходит таким образом, что треугольник вихрей остается прямоугольным. Наконец, значение $\lambda=2$ отвечает случаю, когда вихрь *3* в процессе взаимодействия стремится занять неподвижное положение в начале координат. Для такого значения λ имеем $z_1=z_2=4$, и соотношения (3.52) имеют неинтегрируемую особенность: $z=4$. Поэтому при $z_0>4$ значение ρ_1^2 заключено в интервале $4<\rho_1^2\le z_0$, причем при $t\to\infty$ $\rho_1\to 0$.

Таким образом, движение (рис. 20) происходит так, что вихри *1* и *2* с течением времени стремятся выйти на предельный цикл — окружность радиуса *2*, а вихрь *3* стремится к фокусу — началу координат. Частный случай, когда $r/d=1/2$, $l/d=0$, $z_0=4$, дает пример равномерного вращения вихрей *1* и *2* по окружности радиуса *2*, в центре которой находится покоящийся вихрь *3*. Необычность ситуации заключается в том, что вихрь *3* заставляет вращаться одинаковые вихри *1* и *2* в сторону, противоположную их вращению в случае отсутствия третьего вихря. К сожалению, такое движение является неустойчивым: малейшее отклонение какого-либо вихря от заданной траектории приводит к изменению значения λ и возникновению явлений либо прямого, либо обменного столкновения.

Перейдем к задаче о взаимодействии вихревой пары $\kappa_1=-\kappa_3=\kappa$ с одиночным вихрем $\kappa_2=a\kappa (a\neq 1)$. В отличие от предыдущего случая вихревая пара после всех своеобразных движений каждого из входящих в нее вихрей в конечном итоге сохраняет свою целостность и удаляется от одиночного вихря.

На рис. 21, *а* для $a=2, l/d=5, r/d=3$ показано, как вихревая пара *1*; *3*, приближаясь к неподвижному вихрю *2*, вызывает сложные движения всей системы. При этом траектории вихрей образуют очень симметричные кривые, имеющие асимптоты. В процессе взаимодействия прослеживаются элементы взаимного захвата трех вихрей, но в конечном итоге с течением времени пара *1*; *3* удаляется на бесконечность, а вихрь *2* возвращается на свое место. Рис. 21, *б* соответствует $a=2, l/d=0, r/d=-0{,}25$.

Специальные типы движения и коллапс вихрей. В силу обратимости задачи во времени любые комбинации интенсивностей трех вихрей можно привести к виду, при котором по крайней мере два вихря имеют положительную интенсивность. Для определенности будем считать, что $\kappa_1\geq\kappa_2\geq\kappa_3$ и исследуем возможность существования движений, в процессе которых вихри постоянно либо образуют равносторонний или равнобедренный треугольник, либо лежат на одной прямой.

1. Для случая, когда вихри постоянно образуют равносторонний треугольник, $l_1=l_2=l_3=1$, стороны которого не изменяются во времени, уравнения (3.38) удовлетворены тождественно. Из уравнений (3.39) получаем угловую скорость вращения треугольника вокруг центра завихренности: $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\Gamma/2\pi l^2$; $\Gamma=\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3$. Вихри вращаются по окружностям, имеющим радиусы

$$\Gamma\rho_i = l\sqrt{\kappa_j^2+\kappa_j\kappa_k+\kappa_k^2}\,, \qquad i\neq j\neq k\,.$$

Движение равностороннего треугольника как жесткого целого во многом сходно с вращением (при отличной от нуля суммарной интенсивности) двух вихрей. В предельном случае, когда $\Gamma=0$ центр завихренности системы лежит на бесконечности и треугольник вихрей движется параллельно самому себе. Вихри при этом движутся по прямым линиям с одинаковой скоростью

$$u=\frac{1}{2\pi l}\sqrt{\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2}{2}}\,.$$

Здесь имеется аналогия с вихревой парой. Важным вопросом является устойчивость движения такой конфигурации. В работах [86, 232, 234] показано, что устойчивость движения зависит от параметра $K=\kappa_1\kappa_2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_1\kappa_3$. Для $K>0$ движение является устойчивым, а для $K\leq 0$ — неустойчивым.

2. В случае, когда три вихря постоянно лежат на одной прямой, уравнения (3.38) также выполнены тождественно, поскольку площадь треугольника равна нулю. При этом расстояния между вихрями должны оставаться неизменными в процессе движения. Вихри вращаются с постоянной угловой скоростью $\dot{\Theta}$ вокруг центра завихренности. При таком движении величины ρ_i являются постоянными и должны быть одновременно выполнены соотношения

$$\dot{\Theta}=\frac{1}{2\pi\,\rho_1}\left[\frac{\kappa_2}{\rho_1-\rho_2}-\frac{\kappa_3}{\rho_3-\rho_1}\right]=\frac{1}{2\pi\,\rho_2}\left[\frac{\kappa_3}{\rho_2-\rho_3}-\frac{\kappa_1}{\rho_1-\rho_2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\,\rho_3}\left[\frac{\kappa_1}{\rho_3-\rho_1}-\frac{\kappa_2}{\rho_2-\rho_3}\right].$$

Умножая эти уравнения последовательно первый раз на множители κ_1, κ_2, κ_3, второй раз на $(\rho_2-\rho_1)^{-1}$; $(\rho_3-\rho_1)^{-1}$; $(\rho_1-\rho_2)^{-1}$ и суммируя каждый раз результаты, получаем эквивалентные уравнения

$$\kappa_1\rho_1+\kappa_2\rho_2+\kappa_3\rho_3=0\,;$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_3}+\frac{\rho_2}{\rho_3-\rho_1}+\frac{\rho_3}{\rho_1-\rho_2}=0\,. \qquad (3.54)$$

Из уравнений (3.54) нетрудно получить кубическое уравнение

$$(\kappa_1+\kappa_2)\,\nu^3-(\kappa_1+2\,\kappa_2)\,\nu^2-(\kappa_1+2\,\kappa_3)\,\nu+\kappa_1+\kappa_2=0\,. \qquad (3.55)$$

Для определения зависимости величины $\nu=(\rho_3-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$ от интенсивностей κ_j уравнение (3.55) может иметь один либо три положительных корня. Им отвечают один или три набора отношений

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1+\frac{\kappa_2+\nu\,\kappa_3}{\Gamma}\,;\qquad \frac{\rho_3}{\rho_1}=1+\frac{\nu\,(\kappa_2+\kappa_3)}{\Gamma}\,. \qquad (3.56)$$

Угловая скорость имеет вид

$$\dot{\Theta}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{K}{\kappa_1^2\,\rho_1^2+\kappa_2\,\rho_2^2+\kappa_3\rho_3^2}\,. \qquad (3.57)$$

Подробный анализ корней кубического уравнения (3.55) в зависимости от изменения значений κ_3 при фиксированных значениях κ_1 и κ_2 содержится в [234], где показано, что существует критическое значение κ_{3c}, определяемое обращением в нуль дискриминанта кубического уравнения (3.55). Для $\kappa_3>\kappa_{3c}$ имеется три действительных корня $\nu_1<\nu_2\leq\nu_3$; для $\kappa_3<\kappa_{3c}$ только один корень ν_1. Анализ устойчивости вращательных движений трех вихрей, лежащих на одной прямой, также выполнен в этой работе. Показано, что при $\kappa_3>\kappa_{3c}$ движение, отвечающее корням ν_1 и ν_3, устойчиво при $K<0$ и неустойчиво при $K>0$. Движение, отвечающее корню ν_2, всегда неустойчиво. При $\kappa_3<\kappa_{3c}$ движение, отвечающее единственному корню ν_1, всегда устойчиво.

Рассмотрим несколько характерных частных случаев данного типа движения.

а) $\kappa_2=\kappa_3$, κ_1 — произвольное. Тогда уравнения (3.54) будут выполнены при условии $\rho_1=0$, $\rho_2+\rho_3=0$, т.е. когда вихрь *1* находится в центре завихренности, а вихри *2* и *3* равноудалены от центра.

б) $K=0$. В этом случае всегда $\kappa_3<0$ и корни уравнения (3.55) суть

$$\nu_{1,3}=\frac{1\mp\sqrt{\chi^2+\chi+1}}{\chi+1}\ ;\quad \nu_2=\frac{\chi}{\chi+1}\ ;\quad \chi=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\,.$$

В работе [130] показано, что этим корням отвечают две группы значений $\rho_j^{(1)}, \theta_j^{(1)}$ и $\rho_j^{(2)}, \theta_j^{(2)}$ определяемых соотношениями (3.56) и (3.57):

$$\rho_1^{(1)}=\mu\,\frac{\kappa_2-\kappa_3}{\kappa_1}\ ;\quad \rho_2^{(1)}=\mu\,\frac{\kappa_3-\kappa_1}{\kappa_2}\ ;\quad \rho_3^{(1)}=\mu\,\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_3}\ ;$$

$$\rho_1^{(2)}=\chi^{-1}[\,\kappa_2\kappa_3(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)+(\kappa_2-\kappa_3)\,\Delta\,]\,;$$

$$\rho_2^{(2)}=\chi^{-1}[\,\kappa_1\kappa_3(2\kappa_2-\kappa_3-\kappa_1)+(\kappa_3-\kappa_1)\,\Delta\,]\,;$$

$$\rho_3^{(2)}=\chi^{-1}[\,\kappa_1\kappa_2(2\kappa_3-\kappa_1-\kappa_2)+(\kappa_1-\kappa_2)\,\Delta\,]\,;$$

$$\dot\Theta^{(1)}=0\ ;\qquad \dot\Theta^{(2)}=-\,\frac{\kappa_2\kappa_3\rho_1+\kappa_3\kappa_1\rho_2+\kappa_1\kappa_2\rho_3}{\pi\Gamma\rho_1\rho_2\rho_3}\ ;$$

$$\Delta=\sqrt{-\kappa_1\kappa_2\kappa_3\Gamma}\ ,$$

где μ — произвольная постоянная.

В первом случае вихри находятся в покое. Второй случай более интересен, поскольку вихри равномерно вращаются с одинаковой угловой скоростью по концентрическим окружностям, постоянно находясь на одной прямой. Оба состояния (покой и движение) вихрей, однако, неустойчивы.

в) Г=0. Из этого условия и первого уравнения (3.54) можно получить

$$\frac{\rho_2 - \rho_3}{\kappa_1} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\kappa_2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\kappa_3} .$$

Подстановка этих соотношений во второе уравнение (3.54) дает

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} + \frac{\rho_2}{\kappa_2} + \frac{\rho_3}{\kappa_3} = 0 .$$

Отсюда и из первого уравнения (3.54) получаем однопараметрическое (с параметром μ) семейство решений:

$$\rho_1 = \mu \frac{\kappa_2^2 - \kappa_3^2}{\kappa_2 \kappa_3}; \quad \rho_2 = \mu \frac{\kappa_3^2 - \kappa_1^2}{\kappa_3 \kappa_1}; \quad \rho_3 = \mu \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{\kappa_1 \kappa_2};$$

$$\dot{\Theta} = - \frac{1}{2\pi \mu^2} \frac{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3}{K} .$$

Другие возможные случаи движения трех вихрей при Г=0 рассмотрены в [219].

Возможны также типы движения, когда вихри постоянно образуют равнобедренный треугольник с зависящими от времени сторонами. Для определенности положим, что в процессе движения $l_2=l_3=l(t)$. Тогда из первого уравнения (3.38) следует, что $dl_1^2/dt = 0$. Вводя соответствующую нормировку для масштаба длины, будем считать, что $l_1=1$. Левые стороны второго и третьего уравнений (3.38) должны быть равны, что приводит к условию $\kappa_2=-\kappa_3=\kappa$.

Таким образом, треугольник вихрей может оставаться равнобедренным только тогда, когда два вихря образовывают пару. При этом в отличие от рассмотренных случаев интенсивность κ_1 может быть произвольной.

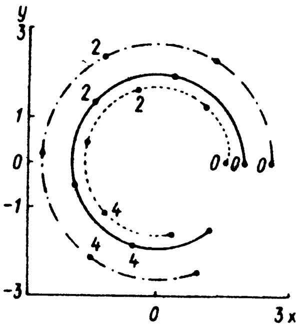


Рис. 22

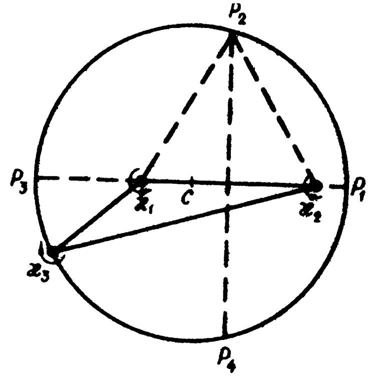


Рис. 23

Второе (или третье) уравнение (3.38) дает соотношение

$$\frac{\kappa}{\pi} t = - f(l) + f(l_0) + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+f(l)}{\sqrt{3}-f(l)} \; \frac{\sqrt{3}-f(l_0)}{\sqrt{3}+f(l_0)} \right| ;$$

$$f(l) \equiv \sqrt{4l^2 - 1} ,$$

где l_0 — начальное значение стороны.

При $t \to \infty$ треугольник асимптотически приближается к равностороннему.

Используя соотношения (3.36) и (3.32), для постоянно равнобедренного треугольника, получаем

$$\rho_1^2 = \frac{\kappa^2}{\kappa_1^2} ; \qquad \rho_{2,3} = l^2 + \frac{\kappa(\kappa \mp \kappa_1)}{\kappa_1^2} .$$

Таким образом, в этом случае вихрь 1 движется по окружности постоянного радиуса вокруг центра завихренности.

С учетом выражений для радиусов находим

$$\theta_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+f(l)}{\sqrt{3}-f(l)} \; \frac{\sqrt{3}-f(l_0)}{\sqrt{3}+f(l_0)} \right| .$$

Используя соотношения (3.35), для ϑ_2 и ϑ_3 получаем

$$\theta_{2,3} = \theta_1 - \operatorname{arctg} \left(\frac{\kappa_1 f(l)}{2\kappa \mp \kappa_1} \right).$$

Пример движения вихрей для $\kappa_1=0{,}5\kappa$ представлен на рис. 22. Траектории вихрей *2*, *3* — спирали. В зависимости от начальной ориентации вихревой пары относительно вихря *1*, вихри *2* и *3* могут двигаться по направлению либо к центру завихренности, либо от него. В первом случае траектории вихрей асимптотически приближаются с течением времени к окружностям радиусов $\kappa_1^{-2}(\kappa_1^2 \mp \kappa_1\kappa + \kappa^2)^{1/2}$, во втором случае — к прямым $\kappa_{2,3} = \kappa_1^{-2}(2\kappa_1^2 \mp \kappa_1\kappa + \kappa^2)$.

Во всех рассмотренных выше случаях движение вихрей происходило таким образом, что расстояние между ними оставалось конечным. В случае интенсивности одного знака движение было финитным, т.е. расстояние между всеми вихрями ограничено сверху и снизу. Для вихрей разных по знаку интенсивностей были возможны варианты неограниченного удаления вихрей. Естественно поставить вопрос, возможны ли случаи либо разбегания на бесконечность всех трех вихрей, либо, наоборот, стягивание за конечное время вихрей в одну точку — центр завихренности (коллапс). Этот вопрос в современной литературе рассмотрен одновременно и независимо в [57, 86], где показано, что при выполнении условия

$$h \equiv \kappa_1^{-1} + \kappa_2^{-1} + \kappa_3^{-1} = 0 \qquad (3.58)$$

и подходящих начальных условиях в системе трех вихрей возможен коллапс (либо разбегание). Однако в дальнейшем выяснилось [88], что явление коллапса было исследовано за столетие до этих публикаций. В.Гребли [130] рассмотрел ситуацию, когда в процессе движения треугольник вихрей либо расширяясь, либо сжимаясь остается подобным. При таком движении стороны $l_2(t)$ и $l_3(t)$ треугольника вихрей все время пропорциональны стороне $l_1(t)$. Структура уравнений (3.38) такова, что при этих условиях правые части принимают постоянные, независящие от времени значения λ_1, λ_2, λ_3 соответственно. Тогда из (3.38) следует, что

$$l_j^2(t) = \lambda_j t + l_j^2(0)\,. \qquad (3.59)$$

Подобие треугольника вихрей требует выполнения соотношений

$$\frac{l_k^2(t)}{l_1^2(t)} = \frac{l_k^2(0)}{l_1^2(0)}\,, \quad k = 2\,,3\,, \qquad (3.60)$$

что связывает константы λ_2 и λ_3 с λ_1 :

$$\lambda_k = \lambda_1 l_k^2(0)\, l_1^{-2}(0), \quad k = 2\,,3\,. \qquad (3.61)$$

Требования подобия треугольника вихрей в процессе движения приводят к тому, что его начальная ориентация не нарушается, т.е. γ не изменяет знак. Тогда, подставив (3.59) с учетом (3.60) и (3.61) в (3.38), после несложных преобразований получим

$$\lambda_1 = \kappa_1 S\,[\,l_2^2(0) - l_3^2(0)\,]\,l_1^2(0)\,l_2^{-2}(0)\,l_3^{-2}(0);$$

$$\lambda_2 = \kappa_2 S\,[\,l_3^2(0) - l_1^2(0)\,]\,l_3^{-2}(0);$$

$$\lambda_3 = \kappa_3 S\,[\,l_1^2(0) - l_2^2(0)\,]\,l_2^{-2}(0);$$

$$S = -\frac{2\gamma A(0)}{\pi} = \text{const}. \qquad (3.62)$$

Эти соотношения определяют постоянные λ_j через начальные условия и интенсивности вихрей.

Учитывая соотношения (3.61) и складывая уравнения (3.62), разделенные на соответствующие κ_j, приходим к соотношению (3.58) между интенсивностями. Таким образом, условие подобия треугольника может быть выполнено только при определенных соотношениях между интенсивностями.

Обратимся к двум инвариантам уравнений движения и посмотрим, накладывают ли они какие-нибудь дополнительные ограничения на характеристики движения. Инвариант (3.37) сводится к соотношению

$$\frac{\lambda_1}{\kappa_1} + \frac{\lambda_2}{\kappa_2} + \frac{\lambda_3}{\kappa_3} = 0.$$

Отсюда с учетом (3.61) следует, что

$$\frac{l_1^2(0)}{\kappa_1} + \frac{l_2^2(0)}{\kappa_2} + \frac{l_3^2(0)}{\kappa_3} = 0. \qquad (3.63)$$

Инвариант c_3 при подстановке соотношений (3.59) с учетом (3.61) опять приводит к условию (3.58). Два оставшихся инварианта попрежнему определяют положение центра завихренности и выполнены тождественно.

Анализ соотношений (3.59) показал, что если $\lambda_1>0$ (а в силу соотношений (3.61) также λ_2, $\lambda_3>0$), то имеет место неограниченное разбегание трех вихрей из исходного положения при сохранении подобия треугольника. В случае, когда $\lambda_j<0$, имеет место коллапс: за конечное время $t^* = -l_1^2(0)/\lambda_1$ система трех вихрей стянется в точку.

Возвращаясь к соотношениям (3.58) и (3.63), необходимым для коллапса (разбегания) вихрей, дадим, следуя Х.Арефу [86], наглядную геометрическую картину начального расположения вихрей. На рис. 23

приведена схема геометрического места точек расположения вихря *3* при заданных положениях *1* и *2*. Это место является окружностью радиуса $l_3[\Gamma(\kappa_1+\kappa_2)^{-1}]^{1/2}$, центр которой расположен в центре завихренности вихрей *1* и *2*. Применение теоремы косинусов и несложные алгебраические выкладки показывают, что при этом соотношение (3.63) выполнено тождественно. Точки P_2 и P_4 образованы перпендикуляром, построенным из середины отрезка, соединяющего вихри *1* и *2* и пересекающим окружность; точки P_1, P_3 соответствуют точкам пересечения окружностью прямой, на которой лежат вихри *1* и *2*. Эти точки делят окружность на четыре дуги. Если вихрь *3* расположен на дугах P_1P_2 или P_3P_4, то при этом $\lambda_1<0$ и будет иметь место коллапс при соответственно положительной либо отрицательной начальной ориентации вихрей. Соответственно дуги P_2P_3, P_1P_4 отвечают условиям разбегания вихрей. Точки $P_1 \div P_4$ являются предельными в следующем смысле. Положение вихря *3* в точках P_2, P_4 соответствует равносторонней начальной конфигурации треугольника вихрей, при этом $\lambda_i=0$ и треугольник вихрей равномерно вращается. Точки P_1, P_3 отвечают коллинеарному начальному положению, также равномерно вращающемуся вокруг центра завихренности. Оба эти случая рассмотрены выше. Отметим, что равнобедренная конфигурация треугольника вихрей при коллапсе (разбегании) невозможна. В статье [142] приведены дополнительные графические данные, позволяющие, в частности, определить время t^* при различных начальных положениях трех вихрей.

Для построения траекторий абсолютного движения обратимся к соотношениям (3.36). В силу условий (3.63) $c_i=0$ выражения (3.36) приобретают вид $\Gamma\rho_i^2=-\kappa_j\kappa_k\kappa_i^{-1}l_i^2$, $i\neq j\neq k$.

Из уравнений (3.39) следует, что угловая скорость вихрей одинакова:

$$\dot\theta_1=\dot\theta_2=\dot\theta_3=\chi\, l_1^{-2}(t);$$

$$\chi=\frac{[(\kappa_1+\kappa_2)+\kappa_1^3(1+\alpha^{-1})+\kappa_2^3(1+\alpha)]\,l_1^2(0)}{4\pi(\kappa_1+\kappa_2)^2\,l_3^2(0)};$$

$$\alpha=\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\,\frac{l_2^2(0)}{l_1^2(0)}.$$

Решения этих дифференциальных уравнений с учетом (3.59) запишем в виде

$$\theta_i(t)=\theta_i^{(0)}+\frac{\chi}{\lambda_i}\ln\left(1+\frac{\lambda_1}{l_1^2(0)}\,t\right). \tag{3.64}$$

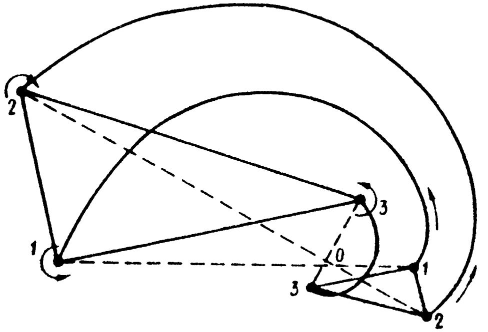


Рис. 24

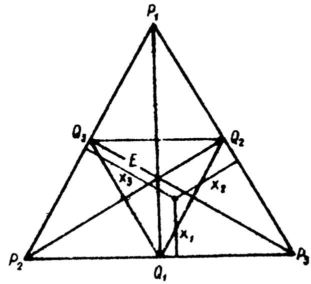


Рис. 25

Исключив из соотношения (3.64) t, получим для траекторий вихрей уравнения логарифмических спиралей

$$\rho_j = \rho_j^{(0)} e^{(\theta_j - \theta_j^{(0)})\lambda_1 \chi^{-1}} , \qquad (3.65)$$

закручивающихся к центру завихренности в случае $\lambda_1 < 0$ и раскручивающихся от центра в случае $\lambda_1 > 0$.

На рис. 24 проиллюстрировано явление коллапса или разбегания, где $\kappa_1 = 6$, $\kappa_2 = 3$, $\kappa_3 = -2$. При этом подходящий выбор масштабов длины и времени позволяет записать зависимости, характеризующие процесс разбегания трех вихрей из центра завихренности (точка 0):

$$l_1^2 = 7t; \quad l_2^2 = 28t; \quad l_3^2 = 21t;$$

$$\rho_1^2 = t; \quad \rho_2^2 = 16t; \quad \rho_3^2 = 27t.$$

При этом траектории вихрей

$$\rho_1 = e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\theta_1 - \theta_1^{(0)})}; \quad \rho_2 = 4\, e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\theta_2 - \theta_2^{(0)})}; \quad \rho_3 = 3\sqrt{3}\, e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\theta_3 - \theta_3^{(0)})};$$

$$\theta_1 - \theta_2 = -2\pi/3; \qquad \theta_2 - \theta_3 = \pi/6; \qquad \theta_3 - \theta_1 = \pi/2.$$

По этим же траекториям будет происходить коллапс вихрей, если знаки всех интенсивностей поменять на противоположные. Задание начального значения одного из полярных углов, например $\theta_1^{(0)}$, позволяет однозначно определить начальное положение всех вихрей и вычислить необходимое для коллапса время.

В заключение отметим, что возможность стягивания вихрей в точку является следствием сильной идеализации принятой модели точечных вихрей в идеальной жидкости. Учет конечности размеров вихрей (вихревые пятна) в предположениях (3.58) и (3.63) для интегральных характеристик является чрезвычайно интересной задачей, нерешенной и в настоящее время. Метод контурной динамики, изложенный во второй главе, принципиально позволяет решить эту задачу, однако исследовать взаимодействие более двух вихревых пятен чрезвычайно трудно.

Относительное движение. Выше рассмотрены частные случаи относительного движения трех одинаковых вихрей и отмечено, что фазовые траектории — зависимости между расстояниями l_1, l_2 и l_3 — могут быть получены из алгебраических, а не дифференциальных уравнений. Это важное обстоятельство справедливо и в общем случае. Инварианты (3.33), (3.37) позволяют не только принципиально, но и в каждом конкретном случае дать полное количественное описание фазовых траекторий. При этом основным является выбор такой системы координат, в которой фазовые траектории строятся наиболее просто и допускают наглядное изображение.

В литературе известно несколько вариантов выбора такой системы координат. Один из них, наиболее очевидный, состоит в использовании декартовых координат, в которых положение вихрей задается точкой (l_1, l_2, l_3). Данный способ предложен в работе [130] и независимо почти столетие спустя — в [54]. Его возможности для построения фазовых траекторий несколько ограничены тем обстоятельством, что в общем случае уравнения (3.33) и (3.37) определяют весьма сложные поверхности, пересечением которых задается фазовая траектория. Изучить аналитически все ее особенности (область существования , замкнута или разомкнута, точки возврата и т.д.) просто не удается. Иной, более наглядный способ представления фазовых траекторий предложен в [232]. Сущность его отражена на рис. 25. Фазовую траекторию, описываемую вектором L (l_1, l_2, l_3) в декартовых координатах, радиально проецируют (точка M) на плоскость $l_1 + l_2 + l_3 = \sqrt{2/3}$. Для положительных значений l_i эта плоскость представляет собой равносторонний треугольник $P_1P_2P_3$ единичной высоты. Точки Q_1Q_2 и Q_3 являются серединами его сторон. Вводя в рассмотрение величины

$$x_i = \frac{l_i}{l_1 + l_2 + l_3}; \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.66}$$

удовлетворяющие тождеству $x_1+x_2+x_3=1$, нетрудно убедиться, что они выражают расстояние от точки M до соответствующих сторон треугольника $P_1P_2P_3$. Поскольку неотрицательные координаты вектора L являются сторонами треугольника вихрей, то косоугольные координаты должны удовлетворять неравенствам $x_k+x_m \ge x_n (k \ne m \ne n)$. Таким образом, точка M, отвечающая конфигурации вихрей, будет расположена внутри или на сторонах треугольника $Q_1Q_2Q_3$. При этом сторонам треугольника Q отвечает конфигурация трех вихрей. Целесообразно принять треугольник Q двухлистным. Верхний лист Q_+ соответствует положительной ориентации вихрей, нижний Q_- — отрицательной. Переход с одного листа на другой осуществляется через коллинеарную конфигурацию, т.е. по сторонам. Таким образом, каждая фазовая траектория, отвечающая движению, может быть представлена в виде кривой на двухлистной поверхности. Удобство такого представления состоит в том, что оно дает единообразное представление движения трех вихрей независимо от их интенсивностей и ориентации. Важную роль при этом играет величина $K=\kappa_1\kappa_2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_3\kappa_1$.

Комбинируя инварианты (3.33) и (3.37) с учетом (3.36), можно свести их к одному соотношению в терминах x_j. При $K\neq 0$ имеем равенство

$$\left(\frac{x_1^2}{\kappa_1}+\frac{x_2^2}{\kappa_2}+\frac{x_3^2}{\kappa_3}\right)\left(x_1^{2\kappa_1^{-1}}\,x_2^{2\kappa_2^{-1}}\,x_3^{2\kappa_3^{-1}}\right)^{\kappa_1\kappa_2\kappa_3 K^{-1}} \equiv I = \text{const}\,, \tag{3.67}$$

а при $K=0$

$$(x_1 x_3^{-1})^{2\kappa_2}(x_2 x_3^{-1})^{2\kappa_1} \equiv I_0 = \text{const}\,. \tag{3.68}$$

Правые части этих соотношений определяются начальным значением расположения вихрей, т.е. величинами $\kappa_j^{(0)}$.

Формулы (3.67) или (3.68) наряду с соотношением (3.66) дают два уравнения относительно трех неизвестных x_j. Выражая из них, например, величины x_2 и x_3 через x_1, находим фазовую траекторию в треугольнике Q.

Важным является вопрос связи значений длин сторон вихревого треугольника l_j с найденными величинами x_j. Запишем инварианты (3.33) и (3.37) в виде

$$\kappa_1^{-1}\ln x_1+\kappa_2^{-1}\ln x_2+\kappa_3^{-1}\ln x_3 =$$
$$= c_1-(\kappa_1^{-1}+\kappa_2^{-1}+\kappa_3^{-1})\ln(l_1+l_2+l_3)\,;$$
$$\frac{x_1^2}{\kappa_1}+\frac{x_2^2}{\kappa_2}+\frac{x_3^2}{\kappa_3}=\frac{a}{(l_1+l_2+l_3)^2}\,. \tag{3.69}$$

Отсюда получаем, что если интенсивности вихрей таковы, что $K\neq 0$, то из первого уравнения (3.69) при известном из начальных условий значении c_1 можно найти $l_1+l_2+l_3$, а из (3.66) — и значения l_j (за исключением ориентации вихрей). Если $K=0$, то для точек, лежащих на кривой c,

$$\kappa_3\kappa_2 x_1^2+\kappa_3\kappa_1 x_2^2+\kappa_1\kappa_2 x_3^2=0\,,$$

значение $a=0$ и соотношения (3.69) не содержат $l_1+l_2+l_3$ и не дают возможности определить значения l_i. Ниже показано, что в этом случае траектория вектора L есть прямая, проходящая через начало координат и, следовательно, ситуации подобного расширения или сжатия вихревого треугольника соответствует точка на кривой c. Если же $K=0$, но $a\neq 0$, то из второго уравнения (3.69) можно найти $l_1+l_2+l_3$ и однозначно (с точностью до ориентации) определить относительное движение вихрей.

Детальная классификация всех возможных траекторий движения для любых значений интенсивностей трех вихрей содержится в работе [234], которая развивает методику исследований, предложенную в [232], и дополняет ее анализом ряда конкретных случаев соотношений интенсивностей. Можно сказать, что в [234] проведено исчерпывающее исследование всех возможных типов относительного движения трех вихрей.

Наконец, еще один способ построения относительных фазовых траекторий был предложен Х.Арефом [86]. Он состоит в использовании выбранной специальным образом косоугольной системы координат b_1, b_2, b_3. Здесь $b_i = l_i^2(\kappa_i c)^{-1}$, где c определяется значением второго инварианта. Первый инвариант дает возможность ввести характерный параметр ϑ, который определяет поведение фазовых траекторий. В этой работе детально исследованы типы относительного движения в зависимости от величин $a=(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\ /\ 3$; $g=(\kappa_1\kappa_2\kappa_3)^{1/3}$. Кроме того, изучено явление коллапса, а также взаимодействие вихревой пары с одиночным вихрем той же интенсивности. Подчеркнуто, что знание фазовых траекторий относительного движения трех вихрей недостаточно для описания траекторий абсолютного движения.

В заключение отметим, что детальная классификация областей, в которых расположены фазовые траектории, не снимает необходимости отыскания качественных различий в типах взаимодействия и периодов колебаний вихрей. Поэтому несмотря на всю важность и красоту картин относительного движения их следует рассматривать лишь как фундамент для более глубокого изучения абсолютного движения трех вихрей.

4. Интегрируемые случаи движения нескольких точечных вихрей

Взаимодействие коаксиальных вихревых пар. Существуют ситуации, когда система уравнений, описывающая движение в безграничной жидкости, имеет строго детерминированное упорядоченное решение. Это, в первую очередь, относится к движениям, имеющим геометрическую симметрию и определенные отношения интенсивности вихрей. Важен и недостаточно изучен до настоящего времени анализ влияния интенсивности вихрей на интегрируемость или неинтегрируемость системы.

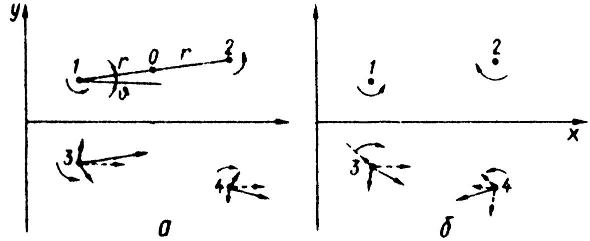


Рис. 26

Рассмотрим движение системы четырех вихрей, обладающей симметрией относительно координатной плоскости $y = 0$, т.е. оси x. Будем считать, что вихрь *1* имеет координаты (x_1, y_2) и интенсивность κ_1; вихрь 2 — (x_2, y_2), κ_2. Тогда вихрь *3* будет иметь координаты $(x_1, -y_1)$ и интенсивность $-k_1$, а вихрь 4 — $(x_2 - y_2)$, $(-k_2)$. Легко проверить, что в силу структуры уравнений движения (3.2) такая симметрия сохраняется в процессе всего движения. Важная особенность такого типа движения состоит в том, что $\Gamma = 0$ и, таким образом, центр завихренности находится на бесконечности. Такой тип движения представляет собой взаимодействие двух коаксиальных вихревых пар 1; 3 и 2; 4, имеющих общую ось симметрии. Эта задача в частном случае одинаковой интенсивности пар $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ рассматривалась еще в работах [130, 142, 172] в связи со стремлением получить качественное описание процесса взаимодействия одинаковых коаксиальных вихревых колец. В [81] на основе детального анализа такой задачи моделировалось сдвиговое течение в плоских струях.

Процесс взаимодействия двух коаксиальных пар в зависимости от знаков интенсивностей и начального расположения состоит либо в движении пар в одном направлении, сопровождающемся их периодической «чехардой» — попеременным проскакиванием одной пары внутри другой и чередованием передней и задней пар —, либо в их встречном движении. Качественно явление «чехарды» для случая коаксиальных вихревых колей описано в [135], а для случая пар количественно исследовано в [130, 142, 172].

Схематично процесс движения вихрей можно проанализировать, обратившись к рис. 26, *а*, где показан случай, когда интенсивности κ_1 и κ_2 имеют одинаковый знак. Анализируя для каждого из точечных вихрей пар *1*; *3* и *2*; *4* вектор скорости, сообщаемый ему тремя остальными вихрями, можно легко заметить, что вихри задней по отношению к направлению движения пары *1*; *3* имеют тенденцию к сближению, а вихри передней пары *2*; *4* удаляются. Поскольку при сближении скорость пары *1*; *3* увеличивается в направлении движения, то вихри этой пары догоняют удаляющиеся и замедляющиеся вихри пары *2*; *4*, проскакивают между ними и оказываются впереди. После этого отставшие и удалившиеся вихри пары *2*; 4 начинают сближаться и ускорять свой ход, а проскочившая вперед пара *1*; *3* постепенно замедляясь расширяется, пока не пропустит через себя находившуюся за ней пару, и «игра» начинается снова.

На рис. 26, *б* приведена соответствующая схема для движения двух пар при $\kappa_1\kappa_2 < 0$. Направления векторов скорости пар показывают, что при сближении они все дальше уходят от оси x. В случае когда $|\kappa| = |\kappa_2|$, образуются новые, уже в общем случае некоаксиальные пары *1*; *2* и *3*; *4*.

При таком схематичном описании явления чехарды ~~остается~~ невыясненным вопрос: при всяком ли начальном расположении вихревых пар, даже одинаковой интенсивности $\kappa_1 = \kappa_2$, существует возможность их попеременного чередования. В работах [130, 142, 172] установлено, что при определенных геометрических соотношениях две пары точечных вихрей после одного взаимного прохождения могут удаляться на бесконечное расстояние, становясь по существу невзаимодействующими. Количественно эти условия выражены через отношения расстояний между вихрями только в момент прохождения одной пары через другую.

Следуя работе [38], приведем вывод условий для определения возможности чехарды при любом начальном положении пар точечных вихрей и найдем период обращения двух пар в зависимости от их первоначального положения. Уравнения движений вихрей *1* и *2*, полностью определяющих движение двух пар, запишем, используя (3.2) в виде

$$\dot{x}_l = -\frac{\kappa_j}{2\pi}\frac{y_l - y_j}{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2} + \frac{\kappa_j}{2\pi}\frac{y_l + y_j}{(x_j - x_l)^2 + (y_j + y_l)^2} + \frac{\kappa_l}{4\pi y_l};$$

$$\dot{y}_l = \frac{\kappa_j}{2\pi}\frac{x_l - x_j}{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2} + \frac{\kappa_j}{2\pi}\frac{x_l - x_j}{(x_j - x_l)^2 + (y_j + y_l)^2}; \quad l \neq j. \tag{3.70}$$

Начальные условия имеют вид $x_l = x_l^0$, $y_l = y_l^0$, $t = 0$.

Инварианты Кирхгофа (3.9) в этом случае приобретают вид

$$Q \equiv 0; \quad I \equiv 0; \quad \kappa_1 y_1 + \kappa_2 y_2 = \mathrm{const};$$

$$\left\{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}\right\}^{\kappa_1 \kappa_2} \frac{1}{y_1^{\kappa_1} y_2^{\kappa_2}} = \mathrm{const}. \tag{3.71}$$

Из уравнений (3.71) можно получить величины y_1 и $(x_1 - x_2)$, выразив их через y_1. Подставив такие соотношения в первые два уравнения (3.70), получим

$$\dot{x}_1 = f_1(y_1), \quad \dot{y}_1 = f_2(y_2). \tag{3.72}$$

Исключив из (3.72) t, запишем

$$\frac{d x_1}{d y_1} = f_3(\dot{y}_1). \tag{3.73}$$

Из вторых уравнений (3.72) и (3.73) с помощью квадратур находим t и x_1 как функцию y_1. Задача в квадратурах решается до конца при любых начальных условиях и значениях κ_1 и κ_2. Инварианты (3.71) позволяют полностью определить движение пар 1; 3 и 2; 4 относительно друг друга. Для простоты выкладок и наглядности восприятия рассмотрим важный частный случай пар одинаковой интенсивности $\kappa_1 = \kappa_2$. В этом случае инварианты (3.71) сводятся к виду

$$y_1 + y_2 \equiv 2c = \mathrm{const};$$

$$y_1 y_2 \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \equiv \lambda = \mathrm{const}. \tag{3.74}$$

Первый инвариант показывает, что средняя точка 0 прямой 1, 2 движется параллельно оси x на расстоянии c от нее.

Обозначая длину отрезка $1, 2$ через $2r$, а угол наклона прямой $1, 2$ к оси x через θ (рис. 26, *а*) из (3.74) с учетом тождества $4 y_1 y_2 = (y_2 + y_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$ получаем уравнение

$$(c^2 - r^2 \sin^2\theta)(c^2 + r^2\cos^2\theta) = \lambda r^2. \tag{3.75}$$

Уравнение (3.75) можно рассматривать как соотношение, описывающее движение вихрей 1 и 2 относительно точки 0. В системе прямоугольных координат $\hat{x}$, $\hat{y}$ с началом в точке 0 это уравнение принимает вид

$$(\hat{x}^2 + \lambda + c^2)(\hat{y}^2 + \lambda - c^2) = \lambda^2. \tag{3.76}$$

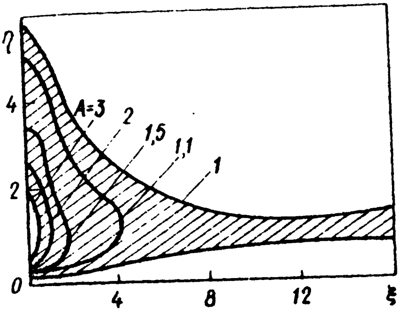


Рис. 27

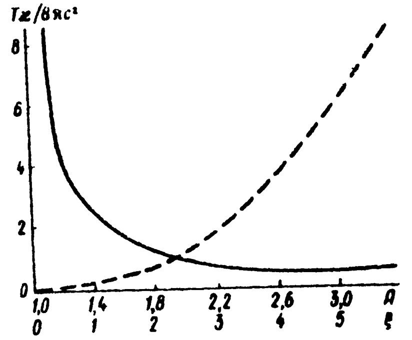


Рис. 28

Ясно, что условие периодичности движения вихрей *1* и *2* эквивалентно требованию замкнутости кривой, определяемой уравнением (3.76). Это приводит к неравенству $\lambda > c^2$, поскольку лишь при его выполнении кривая, определяемая условием (3.76), будет пересекать ось $\hat{x}(\hat{y}=0)$. Вводя в рассмотрение величины $\xi = (x_2 - x_1)\, c^{-1}$, $\eta = y_2 y_1^{-1}$ и используя соотношения (3.74), находим

$$|\xi| < \frac{2}{|\eta - 1|}\sqrt{6\eta - \eta^2 - 1}\,.$$

Допустимая область параметров ξ и η, при которых вихревые пары участвуют в чехарде, на рис. 27 заштрихована. Анализ графиков позволяет отметить следующие обстоятельства. При $\xi = 0$, т.е. когда вихри расположены на одной прямой, имеем $0{,}171 < \eta < 5{,}828$, что согласуется с результатами работ [142, 172]. Если отношение η лежит вне указанного интервала, скажем $\eta > 5{,}828$, то пара *1*; *3*, проскочив через пару *2*; *4*, неограниченно удаляется от нее. При этом расстояние между вихрями в парах *1*; *3* и *2*; *4* асимптотически приближается к значению $2c$. При $\eta = 1$ для любого $\xi = 0$ чехарда оказывается допустимой. Замкнутые линии (рис. 27) суть траектории относительного движения вихревых пар

$$|\xi| = 2\sqrt{\frac{1-(A^2+1)(\eta-1)^2(\eta+1)^{-2}}{A^2+1+(\eta-1)^2(\eta+1)^{-2}}}\,, \quad A = \frac{\sqrt{\lambda}}{c}$$

в зависимости от параметра A. Чем больше энергия взаимодействия, тем на меньшее расстояние друг от друга отходят вихревые пары. Для значений углов θ, при которых $\sin\theta$ или $\cos\theta$ обращается в нуль, непосредственно из (3.75) имеем

$$r=\frac{c}{\sqrt{A^2-1}}\ ,\quad \theta=0\,,\pi\,;$$

$$r=\frac{c}{\sqrt{A^2+1}}\ ,\quad \theta=\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,. \tag{3.77}$$

Значения $2r$, определяемые согласно (3.77), представляют собой соответственно максимальное и минимальное расстояние между точками *1* и *2* в процессе взаимодействия вихревых пар. Период полного обращения взаимодействующих вихревых пар определяется как учетверенная разность времен между $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$:

$$T=\frac{8\pi c^2}{\varkappa}\,\frac{(1+k')^2}{k'(1-k')}(E-k'K)\,,\qquad k'=\frac{A^2-1}{A^2+1}\,,$$

где E, K — полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго родов с модулем $k = 2A/(A^2+1)$.

Анализ зависимости периода T от параметра A (рис. 28, сплошная линия) и от значения ξ для частного случая вихревых пар одинаковой начальной конфигурации $\eta = 1$ (штриховая линия) показывает, что увеличение энергии взаимодействия вихревых пар, характеризуемое параметром A, приводит к уменьшению в обратно пропорциональной зависимости периода их полного обращения. Увеличение начального расстояния между одинаковыми парами ($\eta = 1$) обусловливает согласно (3.74) при фиксированном c уменьшение начальной энергии взаимодействия системы вихрей, что приводит к увеличению периода их обращения. Представленные результаты позволяют установить по произвольному начальному расположению двух вихревых пар одинаковой интенсивности возможность их постоянного взаимодействия и определить период полного обращения участвующих в чехарде пар. Абсолютное движение двух одинаковых пар вихрей может быть получено по общей схеме, указанной выше. Введем безразмерные координаты, отнесенные к c, и время, отнесенное к $\varkappa/\pi c^2$. В дальнейшем не будем вводить специальных обозначений для безразмерных величин.

Первый из инвариантов (3.74) позволяет, следуя [130], ввести новую неизвестную y, через которую величины y_1 и y_2 выражаются следующим образом:

$$y_1 = 1 + y\,;\qquad y_2 = 1 - y\,. \tag{3.78}$$

При этом учтено, что в процессе движения ординаты вихрей *1* и *2* периодически отклоняются от прямой $y = 1$. Второй инвариант в этом случае приобретает вид

$$\frac{(x_2 - x_1)^2 + 4}{(x_2 - x_1)^2 + 4y^2}(1 - y^2) = \lambda . \qquad (3.79)$$

Важно отметить, что в этом уравнении постоянная λ может принимать любые действительные значения. При этом отрицательным значениям λ соответствуют в процессе движения ординаты $y_2 < 0$ при условии, что $y_1 > 0$. Соотношение (3.79) дает возможность выразить $x_2 - x_1$ через y. Подстановка этих значений и величины y_1 во второе из уравнений (3.70) дает уравнение

$$\dot{y} = - \frac{(\lambda - 1 + y^2)\sqrt{R(y)}}{\lambda(1 - y^2)^2},$$

$$R(y) = (\lambda - 1 + y^2)[1 - (\lambda + 1)y^2]. \qquad (3.80)$$

Отсюда время находится квадратурой:

$$t = - \int \frac{\lambda(1 - y^2)^2 dy}{(\lambda - 1 + y^2)\sqrt{R(y)}} . \qquad (3.81)$$

Первое и третье из уравнений (3.70), разделенные на уравнение (3.80), дают уравнение

$$\frac{dx_{1,2}}{dy} = - \frac{y^4 + 2(\lambda - 1)y^2 \pm \lambda^2 y + 1 - 2\lambda}{(\lambda - 1 + y^2)\sqrt{R(y)}}, \qquad (3.82)$$

откуда квадратурой находим

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = - \int \frac{[y^4 + 2(\lambda - 1)y^2 + 1 - 2\lambda]dy}{(\lambda - 1 + y^2)\sqrt{R(y)}} . \qquad (3.83)$$

Из (3.79) следует, что

$$\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\sqrt{1 - (\lambda + 1)y^2}}{\lambda - 1 + y^2} . \qquad (3.84)$$

Соотношения (3.83) и (3.84) позволяют определить при любых начальных условиях величины x_1 и x_2 как функции от y, а следовательно, с помощью (3.81) — как функции t. Интегралы, входящие в квадратуры (3.81) и (3.83), в общем случае эллиптические, так как степень полинома $R(y)$ равна четырем. Следует [130] различать четыре диапазона изменения величины λ: $\lambda > 1$; $0 < \lambda < 1$; $-1 < \lambda < 0$; $\lambda < -1$. Предельные значения $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$ сводят задачу от четырех вихрей к двум и не представ-

Таблица 5

λ	$\tau(\psi)$	$X_1(\psi),\ X_2(\psi)$
$\lambda > 1$ $\chi = 1/\lambda$ $y=\sqrt{\dfrac{\chi}{1+\chi}}\cos\psi$	$\dfrac{2}{\chi(1-\chi^2)}E(\chi,\psi)-\dfrac{2}{\chi}F(\chi,\psi)-$ $-\dfrac{\chi}{1-\chi}\dfrac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-\chi^2\sin^2\psi}}$	$\dfrac{2}{1-\chi^2}E(\chi,\psi)-\left[\dfrac{\chi^2}{1-\chi^2}\cos\psi\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{\chi(1+\chi)}\right]\dfrac{\sin\psi}{\sqrt{1-\chi^2\sin^2\psi}}$
$0<\lambda<1$ $y=\sqrt{\dfrac{1-\lambda^2\sin^2\psi}{1+\lambda}}$	$-\dfrac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}E(\lambda,\psi)+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\mathrm{tg}\psi\cdot$ $\cdot\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}$	$-\dfrac{2}{1-\lambda^2}E(\lambda,\psi)+2F(\lambda,\psi)+$ $+\left(\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}{1-\lambda}\mp\sqrt{1+\lambda}\right)\mathrm{tg}\psi$
$-1<\lambda<0$ $\chi=-\lambda$ $y=\sqrt{\dfrac{1-\chi^2\sin^2\psi}{1-\chi}}$	$\dfrac{2\chi^2}{1-\chi^2}E(\chi,\psi)+$ $+\dfrac{\chi}{1+\chi}\mathrm{tg}\psi\sqrt{1-\chi^2\sin^2\psi}$	$\dfrac{2}{1-\chi^2}E(\chi,\psi)-2F(\chi,\psi)-$ $-\left(\sqrt{\dfrac{1-\chi^2\sin^2\psi}{1+\chi}}\mp\sqrt{1-\chi}\right)\mathrm{tg}\psi$
$\lambda<-1$ $\chi=-1/\lambda$ $y=\sqrt{\dfrac{1+\chi}{\chi}}\dfrac{1}{\cos\psi}$	$-\dfrac{2}{\chi(1-\chi^2)}E(\chi,\psi)+\dfrac{2}{\chi}F(\chi,\psi)+$ $+\dfrac{1}{\chi}\left(\dfrac{1}{1-\chi}\mathrm{tg}\psi-\dfrac{1}{1+\chi}\mathrm{ctg}\psi\right)\cdot$ $\sqrt{1-\chi^2\sin^2\psi}$	$-\dfrac{2\chi}{1-\chi^2}E(\chi,\psi)+(\dfrac{1}{1-\chi}\mathrm{tg}\psi+$ $+\dfrac{1}{1+\chi}\mathrm{ctg}\psi\mp\dfrac{1}{\sqrt{\chi(1+\chi)}\sin\psi}\cdot$ $\sqrt{1-\chi^2\sin^2\psi}$
$\lambda=1$ $y=\cos\psi/\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{2}\sin\psi+\dfrac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\psi}-\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}\sin\psi+\dfrac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\psi}\mp\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\psi+$ $+\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)$
$\lambda=-1$ $y=\sqrt{2}/\cos\psi$	$\dfrac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\psi}-\dfrac{1}{2\sin\psi}+\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)$	$\dfrac{\mathrm{tg}\psi}{\cos\psi}+\dfrac{1}{2\sin\psi}\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{ctg}\psi-$ $-\ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)$

ляют интереса. Все случаи представлены в табл. 5, где $F(\chi,\psi)$, $E(\chi,\psi)$ — интегралы Лежандра первого и второго родов [80]. Решение задачи имеет вид

$$t=\tau(\psi)-\tau(\psi_0);\quad x_j=X_j(\psi)-X_j(\psi_0)+x_j^{(0)};$$

$$y_1=1+y;\quad y_2=1-y;\quad y_0=\frac{y_1^{(0)}-y_2^{(0)}}{2}. \qquad (3.85)$$

Начальные значения $x_1^{(0)}$ и y_1^0 должны удовлетворять инвариантам (3.79), что с учетом y_0 определяет значение параметра λ.

1. $\lambda > 1$. Уравнения (3.85) существенно упрощаются при $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$, $y_1^{(0)} = 1 + \sqrt{\chi/(1+\chi)}$, $y_2^{(0)} = 1 - \sqrt{\chi/(1+\chi)}$, $\psi_0 = 0$, т.е. когда вихревые пары находятся в одной плоскости. Через время $t = T/4$ вихри *1* и *2* расположены на прямой $y = 1$ и имеют при этом равные скорости. Это положение вихрей соответствует максимальному удалению пар. В момент времени $t = T/2$ вихревые пары располагаются снова в одной плоскости $x = X/2$, а вихри *1* и *2* меняются местами по сравнению с моментом $t = 0$. Именно в этот момент происходит проскакивание пары *1*; *3* внутри пары *2*; *4*. Далее процесс повторяется, и к моменту $t = T$ вихревые пары опять располагаются в одной плоскости $x = X$, а их координаты y_i совпадают с исходными. Процесс чехарды вихревых пар, таким образом, при отсутствии вязкости идет до бесконечности.

Несмотря на движение всей системы пар в положительном направлении оси x возможны ситуации, когда одна из пар совершает возвратное движение. Это определяется знаком скорости $\dot{x}_1$ на интервале времени $0 \ldots T$. Используя формулы (3.85), нетрудно показать, что при $\chi > (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618$ скорости вихрей всегда положительны. Если $\chi < 0{,}618$, то имеется участок отрицательной скорости. Траектории вихрей имеют при этом точки самопересечения. В предельном случае $\chi = (\sqrt{5} - 1)/2$ траектория имеет пик. Вопрос о других характерных точках на траектории, в частности точках перегиба, подробно исследован в [130], где показано, что в зависимости от величины λ кривые траектории могут иметь либо три ($1 < \lambda < 1{,}4873$), либо одну ($1{,}4873 < \lambda < 2/(\sqrt{5} - 1)$ точки перегиба. При ($\lambda > 2/(\sqrt{5} - 1)$ точек перегиба нет. Два таких характерных случая воспроизведены на рис. 29. Характерные начальные параметры ситуации, приведенной на рис. 29, *а* : $\lambda = 4$, $y_1^{(0)} = 1{,}45$, $y_2^{(0)} = 0{,}55$, а на рис. 29, *б* $\lambda = 1{,}25$, $y_1^{(0)} = 1{,}66$, $y_2^{(0)} = 0{,}34$. Данные этих рисунков показывают чехарду вихревых пар, которая с уменьшением λ растягивается по длине и времени. При $\lambda \to 1$ имеем $T \to \infty$, $X \to \infty$

2. $0 < \lambda < 1$. В этом случае чехарды вихревых пар не будет, хотя вихри движутся в одном направлении. Выбирая $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$; $y_1^{(0)} = 1 + 1/\sqrt{1+\lambda}$; $y_2^{(0)} = 1 - 1/\sqrt{1+\lambda}$; $\psi_0 = 0$ приходим к движению, типичная траектория которого изображена для $y_1^{(0)} = 1{,}71$; $y_2^{(0)} = 0{,}29$; $\lambda = 0{,}96$ на рис. 30. Здесь нет периодической чехарды и пары движутся с неотрицательной скоростью в положительном направлении оси x. С ростом t траектории асимптотически приближаются сверху и снизу к прямым $y = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ и $y = 1 - \sqrt{1-\lambda}$.

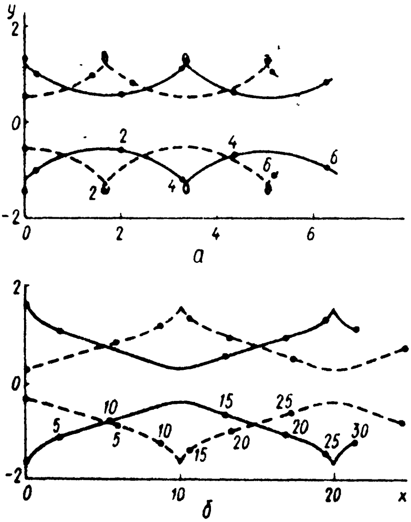


Рис. 29

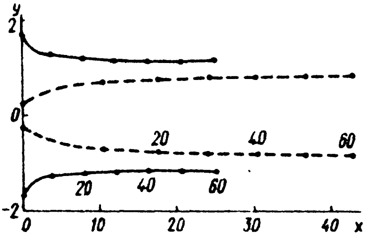


Рис. 30

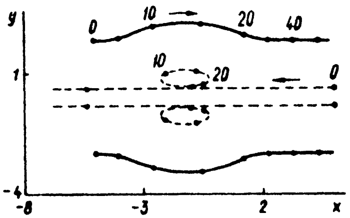


Рис. 31

3. $\lambda = 1$. Этот случай граничный для обоих типов взаимодействия вихревых пар. Движение происходит аналогично случаю $\lambda < 1$, однако пары стремятся к одной асимптоте $y = 1$.

4. $-1 < \lambda < 0$. Как только инвариант λ принимает отрицательное значение, вихрь *2*, согласно условиям (3.74), имеет в процессе движения значения координат $y_2 < 0$, а вихрь *4* — $y_4 > 0$. Таким образом, первоначальное движение пар *1*; *3* и *2*; *4* направлено в противоположные стороны.

Рассмотрим случай, когда вихревые пары удалены друг от друга на значительное расстояние. При этом $\psi_0 \approx -\pi/2$. Анализ компонент скоростей вихрей в направлении оси x показывает, что $\dot{x}_1$ на всем протяжении движения будет положительна, а $\dot{x}_2$ при $\chi > (\sqrt{5}-1)/2$ вначале будет отрицательна, а затем в области взаимодействия положительна в течение некоторого времени, а далее отрицательна на всем оставшемся пути. При этом траектория вихря *2* имеет одну точку самопересечения. В случае, когда $\chi < (\sqrt{5}-1)/2$, $\dot{x}_2$ на всем протяжении отрицательна. При $t \to \pm\infty$ траектории вихрей асимптотически приближаются к прямым $y = 1 \pm \sqrt{1+x}$. На рис. 31 приведены траектории вихрей 1 и 4 для случая $\lambda = -0{,}8$; $y_1^{(0)} = 2{,}34$; $y_2^{(0)} = 0{,}34$; $x_1^{(0)} = -5$; $x_2^{(0)} = -5$.

5. $\lambda < -1$. В отличие от предыдущих случаев, вихри никогда не могут располагаться в одной плоскости. Кроме того, для получения

таких значений λ начальные условия должны быть таковыми, что $x_1^{(0)} < 0$, $x_2^{(0)} > 0$. Величина ψ изменяется в пределах от ψ_0, определяемая по начальным значениям до $\pi/2$. При $\psi_0 \to 0$ вихревые пары расположены на бесконечном удалении друг от друга. Вначале они движутся практически не взаимодействуя равномерно навстречу друг другу по прямым: пара *1*; *3* — по прямой $y = \pm(1 + \sqrt{1-\lambda})$, пара *2*; *4* — по прямой $y = \pm(1 - \sqrt{1-\lambda})$. По мере приближения наступает взаимодействие вихрей, состоящее во взаимном удалении вихрей каждой пары друг от друга, что приводит в итоге к образованию новых пар *1*; *4* и *2*; *3*. Эти пары движутся в положительном направлении оси x, асимптотически приближаясь к наклонным к оси x прямым. Для вихрей *1*; *4* эти прямые соответственно имеют вид

$$x = \sqrt{\frac{\chi}{1+\chi}}\, y + \frac{2\chi}{1-\chi^2} E(\chi) \mp \frac{1}{\sqrt{\chi(1-\chi)}} .$$

На рис. 32 приведена ситуация для $\lambda = -2$; $x_1^{(0)} = -5$; $x_2^{(0)} = 5$; $y_1^{(0)} = 2{,}73$; $y_2^{(0)} = -0{,}73$.

6. $\lambda = -1$. В этом важном частном случае имеем движение навстречу друг другу полностью симметричных пар *1*; *3* и *2*; *4*. Взаимодействие пар приводит к тому, что образуются новые пары *1*; *4* и *2*; *3*, удаляющиеся от начала координат, причем расстояние между вихрями *1* и *4* с течением времени стремится к *2*. Траектории этих вихрей асимптотически приближаются к прямым $x = \pm 1$, перпендикулярным к оси x (рис. 33). Отметим, что такая задача решена другим методом в [129]. Траектории движения вихрей гиперболы $x_4^2 + y_4^2 = x_4^2 y_4^2$.

Итак, суммируя исследования процесса взаимодействия двух одинаковых по интенсивности коаксиальных вихревых пар, следует подчеркнуть несколько моментов. Во-первых, отсутствие хаоса в системе четырех вихрей — решение выражается как функция времени и инвариантов c и λ (3.74). Во-вторых, в системе возможна периодическая чехарда при движении пар в одном направлении. В-третьих, при начальном движении пар в противоположных направлениях возможны два типа столкновения: прямое, выражаемое схематично формулой *1*; *3* + *2*; *4* — *1*; *3*; + 2; 4 (см. рис. 31); обменное рассеяние, формула которого имеет вид *1*; *3* + *2*; *4* — *1*; *4* + *2*; *3* (см. рис. 32).

Определяющим достоинством аналитического решения нелинейных уравнений, описывающих динамику точечных вихрей, является ключ к нахождению и классификации характерных типов взаимодействия. Кроме того, наличие аналитических решений является дополнительным важным тестом корректности различных численных методов. Особенно важна проверка такой корректности для достоверного

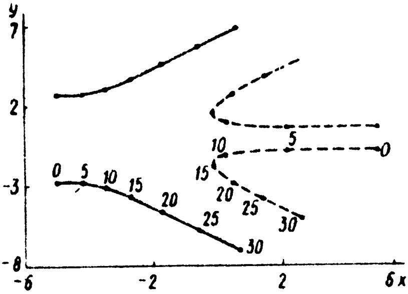


Рис. 32

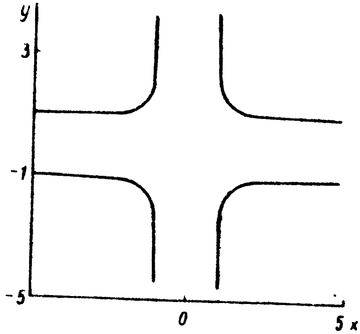


Рис. 33

численного описания взаимодействия точечных вихрей в более сложных случаях, в том числе в случаях детерминированного хаоса.

Наличие плоскости симметрии сводит задачу к интегрируемой лишь в случае двух пар. В случае трех коаксиальных пар [112] возможно как упорядоченное движение, так и хаотическое. Задача в этой работе решалась численно для пар одинаковой интенсивности при начальных координатах вихрей (0, 1); (0, 0,5); (a, 0,75). Изменение положения третьего вихря показало, что при $a > 0{,}102$ система имеет упорядоченное движение с периодической чехардой, а при $a \le 0{,}102$ в системе возникает хаотическое нерегулярное движение, предсказание которого на большом временном интервале невозможно.

Взаимодействие четырех вихрей при наличии центра симметрии. Интегрируемую систему динамики четырех вихрей можно получить и при другом типе симметрии задачи, а именно при центральной. При этом расположении вихрей на комплексной плоскости и их интенсивности должны удовлетворять соотношениям

$$-z_1 = z_3;\quad -z_2 = z_4;\quad \kappa_1 = \kappa_3;\quad \kappa_2 = \kappa_4. \tag{3.86}$$

Используя уравнения движения (3.2), нетрудно показать, что если в начальный момент $t = t_0$ такая симметрия имеет место, то она сохраняется и на всем протяжении движения. При этом инварианты Г.Кирхгофа $Q = P = 0$, т.е. имеет место безимпульсное движение жидкости. Двух других инвариантов I и H оказывается достаточно, чтобы с учетом (3.86) решить задачу в квадратурах.

Отметим, что вопреки предположению Х.Арефа [88] об отсутствии анализа частного движения вихревых пар с центром симметрии, имеется недостаточно известная, но богатая по содержанию работа Д.Н. Горячева [19]. В современных работах [51, 93, 122] исследовались различные случаи $\kappa_1 = \pm\kappa_2$ в предположении центральной симметрии.

Общий случай движения кратко рассмотрен в [165]. Выбрав начало координат, совпадающее с неподвижным центром симметрии, и учитывая равенства $r_{12} = r_{34}$; $r_{23} = r_{14}$; $r_{13} = 2r_1$; $r_{24} = 2r_2$, систему уравнений для относительного движения точечных вихрей (3.17) можно представить в виде

$$\frac{d r_{12}^2}{dt} = \frac{\gamma A}{\pi}\left[\kappa_1 (r_{23}^{-2} - r_{13}^{-2}) + \kappa_2 (r_{24}^{-2} - r_{23}^{-2})\right];$$

$$\frac{d r_{23}^2}{dt} = \frac{\gamma A}{\pi}\left[\kappa_1 (r_{13}^{-2} - r_{12}^{-2}) + \kappa_2 (r_{12}^{-2} - r_{24}^{-2})\right];$$

$$\frac{d r_{13}^2}{dt} = \frac{2\gamma A}{\pi}\kappa_2 (r_{12}^{-2} - r_{14}^{-2});$$

$$\frac{d r_{24}^2}{dt} = \frac{2\gamma A}{\pi}\kappa_1 (r_{23}^{-2} - r_{12}^{-2}), \qquad (3.87)$$

где A — одинаковая в данном случае для всех трех вихрей площадь треугольника, $A = \frac{1}{2}\sqrt{-\ r_{24}^4 - r_{23}^4 - r_{13}^4 + 2r_{12}^2 r_{23}^2 + 2\, r_{23}^2 r_{13}^2 + 2\, r_{12}^2 r_{13}^2}$.

Значение $\gamma = \pm 1$ определяется ориентацией треугольника вихрей.

Система уравнений (3.87) содержит четыре неизвестных — стороны и диагонали параллелограмма. Отличные от нуля интегралы Г.Кирхгофа дают

$$\kappa_1 r_{13}^2 + \kappa_2 r_{24}^2 = 2I \equiv L = \mathrm{const};$$

$$(r_{12}^2)^{2\kappa_1\kappa_2} (r_{13}^2)^{\kappa_1^2} (r_{24}^2)^{\kappa_2^2} = c^{-4\pi H} \equiv G = \mathrm{const}. \qquad (3.88)$$

В дальнейшем все параметры задачи — безразмерные величины.

Поскольку четыре вихря в процессе движения всегда образуют параллелограмм, то справедливо геометрическое соотношение

$$2(r_{12}^2 + r_{23}^2) = r_{13}^2 + r_{24}^2. \qquad (3.89)$$

Три уравнения (3.88), (3.89) связывают четыре искомых функции, поэтому система (3.87) может быть в принципе сведена к дифференциальному уравнению первого порядка, содержащему только одну неизвестную функцию.

Выбрав, например, в качестве определяющей величину $r_{13}^2 = u$, после несложных преобразований, связанных с выражением величин A, $r_{12}^{-2} - r_{23}^2$ через u, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = \frac{\gamma\kappa_2}{\pi}\,\frac{\sqrt{(l + bu)^2 - 4gu^{-\varepsilon_1}(2l - \chi u)^{-\varepsilon_2}}}{gu^{-\varepsilon_1}(2l - \chi u)^{-\varepsilon_2}} \times$$

$$\times \sqrt{4 g u^{-\varepsilon_1} (2l - \chi u)^{-\varepsilon_2} - [l + (b-1)u]^2}\ , \qquad (3.90)$$

где

$$b = \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{2\kappa_2}; \quad l = \frac{L}{2\kappa_2}; \quad g = G^{(2\kappa_1\kappa_2)^{-1}};$$

$$\chi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\kappa_1^2}{2\kappa_1\kappa_2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\kappa_2^2}{2\kappa_1\kappa_2}.$$

Геометрический смысл параметра u заключается в равенстве $r = \sqrt{u/2}$, т.е. получаем все искомые величины как функции радиуса — вектора положения вихря 1.

В частном случае $L = 0$ уравнение для u значительно упрощается:

$$\dot{u} = \frac{\gamma\kappa_2}{16}\sqrt{\frac{(u^\alpha - A)(B - u^\alpha)}{u^\alpha}};$$

$$\alpha = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{2\kappa_1\kappa_2}; \quad A = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{16\kappa_2 g};$$

$$B = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{16\kappa_1 g}. \qquad (3.91)$$

Из уравнения (3.88) следует, что условие $L = 0$ может иметь место лишь тогда, когда κ_1 и κ_2 имеют противоположные знаки. При этом $\alpha < -1$. Для случая $\alpha > 0$ из уравнения (3.91) следует, что величина u осциллирует в интервале $A^{\alpha-1} < u < B^{\alpha-1}$ с периодом

$$T = \frac{\pi\kappa_2}{16}\int_A^B \frac{u^\alpha\, du}{\sqrt{(u^\alpha - A)(B - u^\alpha)}}.$$

Некоторые соображения качественного характера о типе движения в этом случае содержатся в [165]. Предельный случай $\alpha = -1$, получаемый при $\kappa_2 = \kappa_1$, рассмотрен в [19, 201]. Ниже такое движение будет описано из более общих соображений, когда $L \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то правая часть уравнения (3.91) становится постоянной. В зависимости от ее знака величина u либо линейно увеличивается, либо уменьшается. В последнем случае все четыре вихря за конечное время, определяемое начальными условиями, стягиваются в точку. Подчеркнем, что ситуация $L = 0$ и $\alpha = 0$ отвечает общим необходимым условиям автомодельных решений (3.21).

Рассмотрим последовательно все возможные ситуации взаимодействия коллинеарных вихрей при равенстве интенсивностей κ_1 и κ_2 по их абсолютной величине.

1. $\kappa_2 = -\kappa_1 = \kappa$. В этом случае имеет место движение коллинеарных вихревых пар 1; 2 и 3; 4 навстречу друг другу. Причем в начальный момент времени пары имеют параллельные траектории движения. Общая схема явления представлена на рис. 34. Будем считать, что вихрь *1* вначале всегда расположен в первом квадранте, т.е. $l > 0$. Интуитивно ясно, что в случае $f >> d$ пары будут претерпевать лишь отклонение от своего пути: так называемое прямое столкновение (качественная формула 1; 2 + 3; 4 → 1; 2 + 3; 4). При близких значениях f и d в зависимости от первоначального расстояния L возможно как обменное столкновение (1; 2 + 3; 4 1; 4 + 2; 3), так и явление взаимного захвата. В последнем случае система вихрей не может решить вопрос о дальнейшем образовании пар, и наблюдается вращение всех вихрей вокруг их центра тяжести.

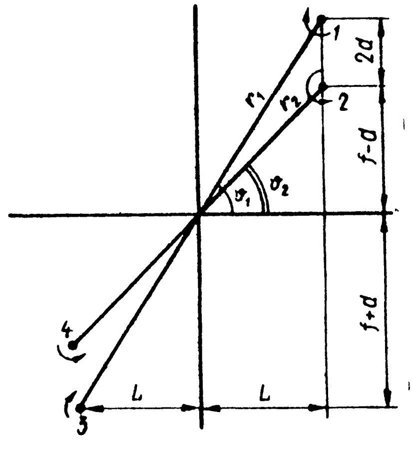


Рис. 34

Уравнения движения (3.7) вихревых пар в этом случае имеют вид

$$r_1 \dot r_1 = - r_2 \dot r_2 = \frac{\kappa}{2\pi}\left(r_{14}^{-2} - r_{12}^{-2} \right) r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$r_1 \dot\varphi_1 = -\frac{\kappa}{4\pi r_1} + \frac{\kappa}{2\pi}\left[\frac{r_1 - r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_1 + r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2} \right];$$

$$r_2 \dot\varphi_2 = \frac{\kappa}{4\pi r_2} + \frac{\kappa}{2\pi}\left[\frac{r_2 - r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_2 + r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2} \right], \tag{3.92}$$

где r_{12}^2, r_{14}^2 — расстояния между вихрями *1* и *2* и *1* и *4* соответственно, $r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $r_{14}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

В конкретном случае в силу симметрии инварианты I и H переходят в

$$r_1^2 - r_2^2 = 2c = \text{const};$$

$$\left[(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right] (r_1 r_2)^{-1} = 4 h_{(-)} = \text{const}, \tag{3.93}$$

где $h_{(-)}$, c — безразмерные константы, определяемые начальным расположением вихрей,

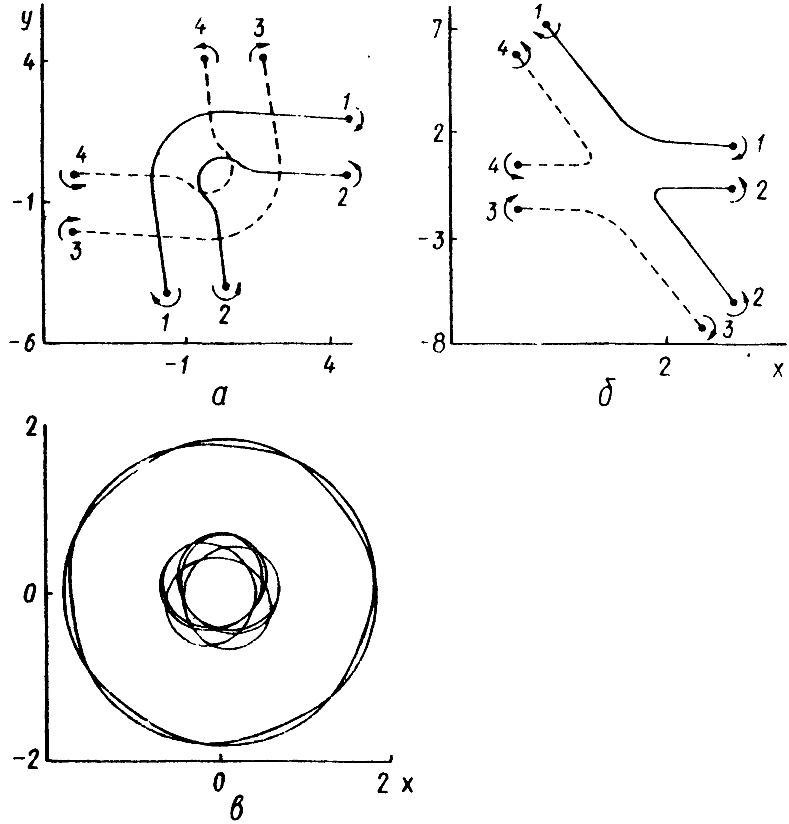


Рис. 35

$$h_{(-)} = \frac{4(\bar{L}^2 + \bar{f}^2)}{[\bar{L}^2 + (\bar{f} + 1)^2]^{1/2} [\bar{L}^2 + (\bar{f} - 1)^2]^{1/2}};$$

$$c = 2\bar{f}; \quad \bar{L} = L/d, \quad \bar{f} = f/d. \tag{3.94}$$

Здесь и далее все геометрические параметры отнесены к положительной величине d (без введения дополнительных обозначений). Уравнения (3.92) допускают взятие квадратур

$$t = \pm\, h_{(-)} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi^2}{\sqrt{F(\xi)}}\, d\xi;$$

$$\varphi_{1,2} = \pm \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{c\,(2\xi^2 - h_{(-)}\xi + 2c^2) \mp h_{(-)}(\xi - 2c^2)\sqrt{\xi^2 + c^2}}{4\xi\sqrt{F(\xi)}}\, d\xi + \varphi_{1,2}^{(0)};$$

$$r_1^2 = \sqrt{\xi^2 + c^2} + c; \quad r_2^2 = \sqrt{\xi^2 + c^2} - c;$$

$$F(\xi) = (\xi^2 - h_{(-)}\xi + c^2)(h_{(-)}\xi - c^2)(\xi^2 + c^2);$$

$$\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\xi^2 - h_{(-)}\xi + c^2}{\xi^2}; \; \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{h_{(-)}\xi - c^2}{\xi^2}. \quad (3.95)$$

Выбор знака перед интегралом определяется требованием возрастания времени и увеличением угла φ_1. Начальные значения $\varphi_{1,2}^{(0)}$ и ξ определяются согласно рис. 34 следующим образом:

$$\varphi_{1,2}^{(0)} = \operatorname{arctg}\frac{\bar{l} + 1}{\bar{L}}; \quad \xi_0 = \sqrt{[\bar{L}^2 + (\bar{l} - 1)^2][\bar{L}^2 + (\bar{l} + 1)^2]}. \quad (3.96)$$

Используя соотношения (3.95), видим, что значение $h_{(-)}\xi - c^2$ всегда неотрицательно. Поэтому поведение подынтегрального выражения будет определяться значениями корней трехчлена $\xi^2 - h_{(-)}\xi + c^2$ и начальным значением ξ_0.

Если $h < 2c$, то этот трехчлен не имеет действительных к рней и интегрирование в (3.95) идет от ξ_0 до ∞. Здесь имеет место прямое столкновение. Частный случай такого движения представлен на рис. 35, а при $\bar{L} = 5$; $\bar{l} = 1$; $h_- = 1{,}93\,c$. Отметим, что в процессе взаимодействия вихревые пары существенно изменили траекторию своего движения. Полный угол поворота определяется соотношением (3.95), когда верхний предел стремится к бесконечности.

Если $h_{(-)} > 2c$, то трехчлен имеет действительные корни $\xi_1 = h_{(-)}/2 + \sqrt{h_{(-)}/4 - c^2}$; $\xi_2 = h_{(-)}/2 - \sqrt{h_{(-)}/4 - c^2}$ и возможны два типа взаимодействия. Первый тип — обменное столкновение происходит, когда $\xi_0 \geq \xi_1$. На рис. 35, *б* показан пример такого взаимодействия двух пар точечных вихрей при $\bar{L} = 5$; $\bar{l} = 0{,}5$; $h_{(-)} = 3{,}85\,c$. Поскольку при больших величинах $\bar{L} >> 1$, как видно из соотношений (3.92), условие $h_{(-)} > 2c$ выполнимо при $\bar{l} > 1$. Здесь имеет место случай малого отклонения первоначально удаленных пар от коаксиального положения. Поэтому обменное столкновение в этом случае качественно схоже с представленным на рис.33. Отметим, что такое взаимодействие получается в предельном случае $\bar{l} = 0$. Второй тип — взаимный захват происходит, когда начальное значение ξ_0 попадает в интервал $c^2/h_{(-)}^2 \leq \xi_0 \leq \xi_2$. Пример такого движения представлен на рис. 35, *в* для $\bar{L} = 0{,}584$;

$\gamma = 0{,}7$; $h_{(-)} = 2{,}01\ c$. Здесь для удобства восприятия приведены траектории движения только пары 1; 2. При этом траектории вихрей всюду плотно заполняют концентрические окружности, радиусы которых

$$r_{1\,\min} = [\, c\,(\sqrt{1 + c^2/h^2_{(-)}} + 1)\,]^{1/2}; \quad r_{1\,\max} = [\, c\,(\sqrt{1 + \xi_2^2/c^2} + 1\,)\,]^{1/2};$$

$$r_{2\,\min} = [\, c\,(\sqrt{1 + c^2/h^2_{(-)}} - 1)\,]^{1/2}; \quad r_{2\,\max} = [\, c\,(\sqrt{1 + \xi_2^2/c^2} - 1\,)\,]^{1/2}.$$

Таким образом, тип взаимодействия и характер движения двух пар, одинаковых по интенсивности, полностью определяются двумя безразмерными параметрами, связанными с начальным расположением вихрей, а именно: $h_{(-)}/c$ и ξ_0.

2. $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. В этом случае вихри не могут неограниченно удаляться друг от друга, система вихрей всегда оказывается в состоянии взаимного захвата. Уравнения относительного движения (3.7) принимают вид

$$r_1 \dot{r}_1 = - r_2 \dot{r}_2 = \frac{\kappa}{2\pi}\,(r_{14}^{-2} - r_{12}^{-2})\, r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$r_1 \dot{\varphi}_1 = \frac{\kappa}{4\pi r_1} + \frac{\kappa}{2\pi}\left[\frac{r_1 - r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_1 - r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2}\right];$$

$$r_2 \dot{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{4\pi r_2} + \frac{\kappa}{2\pi}\left[\frac{r_2 - r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_2 - r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2}\right]. \tag{3.97}$$

Первые интегралы системы (3.97) после введения соответствующей нормировки линейных параметров можно представить в виде

$$r_1^2 + r_2^2 = 2;$$

$$[\,(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4 r_1 r_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)\,]\, r_1 r_2 = 4 h_{(+)}, \quad h_{(+)} > 0\,. \tag{3.98}$$

По аналогии с предыдущим случаем можно выразить время и углы φ_1 и φ_2 через квадратуры

$$t = \mp\, h_{(+)} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi}{\sqrt{f(\xi)}}\, d\xi;$$

$$\varphi_{1,2} = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi\,(3 h_{(+)} \pm 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}\,)}{(1 + \sqrt{1 - \xi^2}\,)\sqrt{f(\xi)}}\, d\xi + \varphi_{1,2}^{(0)}; \tag{3.99}$$

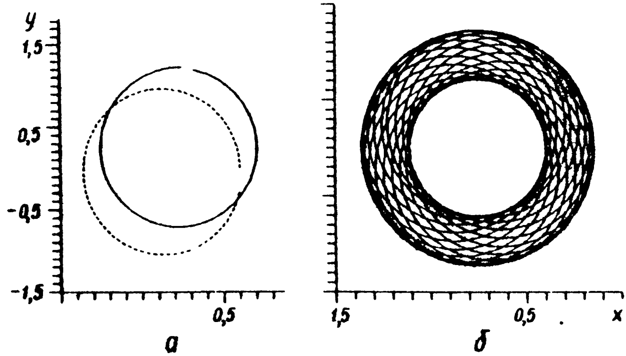


Рис. 36

$$f(\xi)=(\xi^3-\ \xi+h_{(+)})(\xi-\ h_{(+)})(1-\ \xi^2);$$

$$r^2_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\ \xi^2};$$

$$\cos^2(\varphi_1-\ \varphi_2)=\frac{\xi-\ h_{(+)}}{\xi^3},\quad \sin^2(\varphi_1-\ \varphi_2)=\frac{\xi^3-\ \xi+h_{(+)}}{\xi^3}. \qquad (3.100)$$

Выбор знака перед интегралами определяется теми же обстоятельствами, что и в случае $\kappa_1=\kappa_2$.

Для физически реализуемого движения вихрей, описываемого уравнениями (3.97), необходимо, чтобы многочлен $f(\xi)$, стоящий под знаком радикала, имел положительную величину. Так как $\xi\le 1$, а по формуле (3.100) $\xi\ge h_+$, то при действительном движении всегда должно быть $h_{(+)}\le 1$, $\xi^3-\xi+h\ge 0$. Все разнообразие движения вихрей будет определяться свойствами корней трехчлена $\xi^3-\xi+h_{(+)}$, один из корней которого всегда отрицателен. Два других будут действительны, когда $h_{(+)}\le h_1=2\sqrt{3}/9$. При $h_{(+)}=h_1$ корни равны, $\xi_1=\xi_2=\sqrt{3}/2$. Если $h_1<$ $<h_{(+)}\le 1$, то оба корня будут мнимыми. Если $h_1<h\le 1$, траектории всех вихрей будут располагаться внутри кольца, образованного концентрическими окружностями с радиусами $r_{\substack{\max\\ \min}}=\sqrt{1\pm\sqrt{1-h^2}}$.

На рис. 36 показаны траектории движения вихрей 1 и 2 для случая $h_{(+)}=0{,}866>h_1$. Начальные условия при этом составили $r_1=1{,}225$; $r_2=$ $=0{,}707$; $\varphi_1^{(0)}=\pi/2$; $\varphi_2^{(0)}=0$. В начальный момент времени вихри образуют ромб и находятся на своих граничных окружностях. С началом движения r_1 будет уменьшаться, а r_2 — увеличиваться до тех пор, пока они не расположатся снова на граничных окружностях. Величины $\dot r_1$ и $\dot r_2$ изменяют знаки при $\xi=h_{(+)}$. Как видно из формулы (3.100), угловое

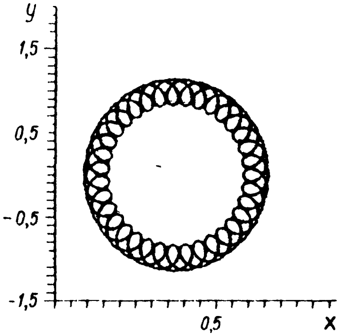


Рис. 37

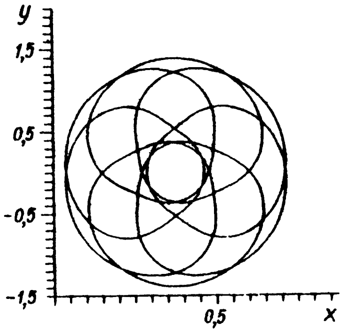


Рис. 38

расстояние между вихрями в момент их нахождения на граничных окружностях $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$. Период, требуемый для того, чтобы вихри *1* и *2* опять вышли на свою первоначальную окружность, определяется по формуле

$$T = h_{(+)} \int_{h_{(+)}}^{1} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} \quad .$$

Представленные на рис. 36, *а* траектории ограничены по времени значением $T = 3{,}86$. На рис. 36, *б* показана траектория только вихря *1* за время $t = 76T$. Траекториями вихрей *1* и *2* являются одни и те же кривые, только повернутые на определенный угол.

Отметим, что в предельном случае $h_{(+)} = 1$ будем иметь $\xi = 1$; $r_1 = r_2 = 1$. При этом вихри будут двигаться вокруг начала координат с постоянной скоростью $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = 3/4$ к, а угловое расстояние между ними будет равно $\pi/2$.

Если $h_{(+)} \le h_1$, то в зависимости от начального значения ξ_0 возможны две ситуации. Когда ξ_0 находится в пределах $\xi_1 \ge \xi_0 \ge 1$, то вихри *1* и *2*, как и в предыдущем случае, будут двигаться внутри кольца, образованного концентрическими окружностями радиусов $r_{\substack{\max\\ \min}} = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \xi^2}}$. Так как значения $\dot r_1$ и $\dot r_2$ ни при каком положении между граничными окружностями не обращаются в нуль, то каждый из вихрей будет последовательно переходить с одной граничной окружности на другую. Вихри 1 и 2 будут находиться на этих окружностях в один и тот же момент времени. Угловое расстояние будет определяться $\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, а следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$. Таким образом, вихри будут находиться на одной прямой. Период определяется как и в предыдущем случае. Траектории вихрей *1* и *2* представляют собой одни и те же кривые, повернутые на некоторый угол. На рис. 37 показана траектория вихря 1 для случая $r_1^{(0)} = 1{,}151$; $r_2^{(0)} = 0{,}822$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Такое начальное расположение вихрей определяет $h = 0{,}1$, при этом $\xi_0 = \xi_1 = 0{,}146$ и выполняется неравенство $1 \le \xi_0 \le \xi_1$. Траектория движения рассчитана до безразмерного времени $t = 42$.

Для объяснения появления петель на траекториях вихрей обратимся к уравнениям (3.99). Если имеет место

$$4\xi^4 - 4\xi^2 + 9h_{(+)}^2 = 0, \qquad (3.101)$$

то положительные его корни определяют значения ξ, при которых $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ обращаются в нуль. При этом, если $h_{(+)} < h_2 = \dfrac{4\sqrt{5}}{27}$, то один из корней (3.101) ξ заключен в интервале $\xi_1 < \hat{\xi} < 1$. Следовательно, при изменении ξ от l до $\hat{\xi}$ угол φ_1 возрастает, а при изменении ξ в пределах от ξ до ξ_1 — уменьшается. При значениях $h_{(+)}$, близких к h_2, петли, которые образуют траектории вихрей, уменьшаются, а при достижении значения h_2 на траекториях появляются точки возврата. Если h_+ находится в интервале $h_2 < h_{(+)} < h_1$, то углы φ_1 и φ_2 будут все время возрастать и, следовательно, траектории вихрей не будут образовывать петель внутри концентрических окружностей. Внутри этих пределов траектории вихрей будут иметь вид, аналогичный указанному на рис. 36.

Особые ситуации возникают для данного класса в случае $h_{(+)} = h_1$. Здесь имеем $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{3}/3$ и ситуация зависит от значения ξ_0. Если $\xi_0 = \xi_1$, то из уравнений (3.98) и (3.100) определим

$$r_1^2 = \frac{3-\sqrt{6}}{3};\ r_2^2 = \frac{3+\sqrt{6}}{3};\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0;\ \dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0;\ \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \frac{3}{4\pi}\,\kappa .$$

Относительное расположение вихрей с течением времени изменяться не будет. Они будут равномерно двигаться по концентрическим окружностям.

Если при $h_{(+)} = h_1$ в начальный момент времени $\xi_0 = 1$, то при $t = 0$ имеем

$$r_1^{(0)} = r_2^{(0)} = 1;\quad \cos^2(\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}) = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{9} = 1 - h_1 .$$

Значение ξ с течением времени будет убывать от $\xi_0 = 1$ до $\xi_1 = \sqrt{3}/3$. На основании первого уравнения (3.97) значение r_1 с течением времени будет уменьшаться, а r_2 — возрастать. При $\xi = \xi_1$ имеем $r_{1\,2}^2 = 1 \mp \sqrt{1-\xi^2} = \dfrac{3 \mp \sqrt{6}}{3}$. Интеграл, входящий в формулу (3.99), при $\xi_1 = \xi_2$ обращается в эллиптический, причем подынтегральная функция имеет множителем рациональную функцию переменного ξ, которая при $\xi = \xi_1$ обращается в бесконечность. Следовательно, радиусы r_1 и r_2 достигают своего предельного значения лишь при $t \to \infty$.

Рассмотрим последний случай, когда $h_{(+)} \le h_1$ и $\xi_2 \le \xi_0 < h$. В этом случае траектории вихрей *1* и *2* расположены каждый внутри своих колец. Вихрь *1* не выходит за пределы кольца, образованного концентрическими окружностями,

$$r_{1\max} = \sqrt{1 + \sqrt{1 - h_{(+)}^2}} \quad \text{и} \quad r_{1\min} = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \xi_2^2}},$$

а вихрь *2* — окружностями

$$r_{2\max} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - h_{(+)}^2}} \quad \text{и} \quad r_{2\min} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \xi_2^2}}.$$

На рис. 38 показан данный случай движения при $r_1^{(0)} = 1{,}389$; $r_2^{(0)} = 0{,}352$; $\varphi_1^{(0)} = \pi/2$; $\varphi_2^{(0)} = 0$. Такое расположение вихрей определяет ситуацию $h_{(+)} = 0{,}37 < h_1$ и $\xi_0 = \xi_2 = 0{,}482$. В процессе движения всякому положению одного из вихрей на внешней границе своего кольца будет соответствовать положение второго вихря на внутренней границе своего кольца. Время, требуемое для перемещения каждого вихря с одной граничной окружности на другую, запишем в виде

$$T = \int\limits_{h_{(+)}}^{\xi_2} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}.$$

Так как в данном случае на протяжении всего движения переменная ξ — положительная величина, то угол φ_1 все время возрастает. Перемена знака $\dot{\varphi}_2$ может происходить лишь при значениях ξ, определяемых уравнением (3.101). Корни этого уравнения равположены в данном случае вне пределов изменения ξ. Таким образом $\dot{\varphi}_2$ нигде не может обратиться в нуль. Верхний предел ξ_2 переменного ξ всегда меньше, $\xi_2 < \frac{2}{2} h_{(+)}$. Как видно из (3.100), разница $\varphi_1 - \varphi_2$ при этом будет постоянно убывать. Причем всякий раз при переходе вихрей со своих граничных окружностей эта разница убывает на угол $\pi/2$. Если $h_+ = h_2$, то $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{3}/2$. В подынтегральной функции в выражении для T множителем будет рациональная функция переменного ξ, которая при $\xi = \xi_2$ обращается в бесконечность, следовательно, в этом случае $T = \infty$. Это означает, что вихри *1* и *2*, находящиеся соответственно на наружной и внутренней граничных окружностях, будут вращаться по

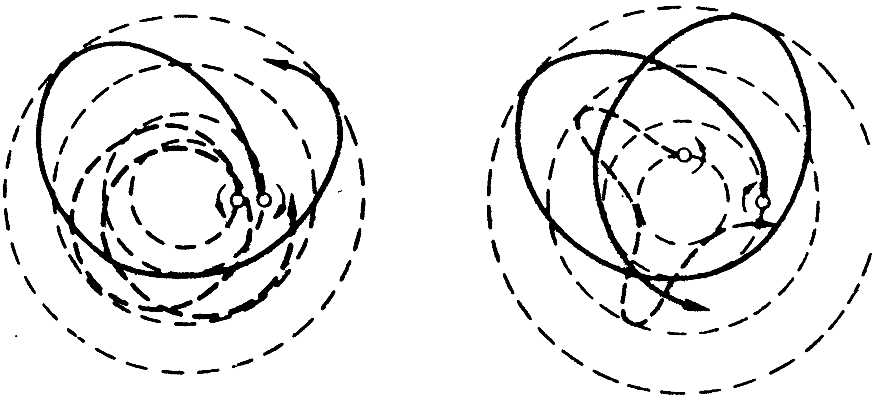
Таблица 6

h	ξ_0	r_1, r_2
$0 < h_{(-)} < 2$	$\frac{1}{h_{(-)}} \le \xi_0 < \infty$	$r_1^2 \ge 1 + \frac{\sqrt{h_{(-)}^2 + 1}}{h_{(-)}}$
ξ_1 и ξ_2 — мнимые		$r_2^2 \ge -1 + \frac{\sqrt{h_{(-)}^2 + 1}}{h_{(-)}}$
$h_{(-)} > 2$	$\xi_1 \le \xi_0 < \infty$	$r_1^2 \ge 1 + \sqrt{1 + \xi_1^2}$
		$r_2^2 \ge -1 + \sqrt{1 + \xi_1^2}$
	$\frac{1}{h_{(-)}} \le \xi_0 \le \xi_2$	$\frac{\sqrt{1 + h_{(-)}^2}}{h_{(-)}} + 1 \le r_1^2 \le \sqrt{1 + \xi_2^2} + 1$
		$\frac{\sqrt{1 + h_{(-)}^2}}{h_{(-)}} - 1 \le r_2^2 \le \sqrt{1 + \xi_2^2} - 1$
$h_{(-)} = 2$	$\xi_0 \ge \xi_1 = \xi_2 = 1$	$\sqrt{2} + 1 \le r_1^2 \le \sqrt{1 + \xi_0^2} + 1$
		$\sqrt{2} - 1 \le r_2^2 \le \sqrt{1 + \xi_0^2} - 1$
$\frac{2\sqrt{3}}{9} < h_{(+)} \le 1$	$h_{(+)} \le \xi_0 \le 1$	$1 - \sqrt{1 - h_{(+)}^2} \le \frac{r_1^2}{r_2^2} \le 1 + \sqrt{1 - h_{(+)}^2}$
ξ_1 и ξ_2 мнимые		
$h_{(+)} < \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\xi_1 \le \xi_0 \le 1$	$1 - \sqrt{1 - \xi_1^2} \le \frac{r_1^2}{r_2^2} \le 1 + \sqrt{1 - \xi_1^2}$
	$h_{(+)} \le \xi_0 \le \xi_2$	$1 + \sqrt{1 - \xi_2^2} \le r_1^2 \le 1 + \sqrt{1 - h_{(+)}^2}$
		$1 - \sqrt{1 - h_{(+)}^2} \le r_2^2 \le 1 + \sqrt{1 - \xi_2^2}$
$h_{(+)} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \le \xi_0 \le 1$	$\frac{3 - \sqrt{6}}{3} \le r_1^2 \le 1$
		$1 \le r_2^2 \le \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$

спиралям, асимптотически приближаясь к своим соответственно внутренней и наружной граничным окружностям.

В заключение приведем табл. 6, которая позволяет классифицировать типы движения четырех вихрей одинаковой по модулю интенсивности, симметричных относительно центра завихренности.

Остановимся кратко на важном случае, когда наряду с нулевым импульсом $Q = P = 0$ движение четырех вихрей обладает и нулевым моментом импульса $I = 0$. Хотя такой вопрос и был кратко затронут выше



а *б*

Рис. 39

здесь целесообразно дать наглядную картину движения. Ход выкладок полностью аналогичен изложенному выше и подробности содержатся в работе [19].

Для того, чтобы $I = 0$, необходимо иметь разные знаки интенсивности κ_1 и κ_2. Положив $\kappa_1 = -\mu^2\kappa_2 = \kappa$, где $\mu > 1$ (в противном случае вихри можно перенумеровать), из инварианта $I = 0$ имеем, что в процессе движения всегда $r_2 = \mu r_1$.

Инвариант энергии дает соотношение

$$\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{(\mu^2+1)\,r_1^\beta - h}{4\mu^2 r_1^\beta}; \quad \beta = \frac{4\mu^2 - \mu^4 - 1}{\mu^2} < 2\,. \quad (3.102)$$

Окончательно система уравнений, описывающая такое движение, принимает вид

$$r_1\dot{r}_1 = \frac{\kappa}{2\pi h\mu^2}\sqrt{[(\mu^2+1)^2 r_1^\beta - h][h - (\mu^2-1)^2 r_1^\beta]}\,;$$

$$r_1\dot{\varphi}_1 = \frac{\kappa}{2\pi h\mu^2}[2(\mu^4-1)r_1^\beta + h(\mu^2-2)];$$

$$r_1\dot{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{2\pi h\mu^4}[2\mu^2(\mu^4-1)r_1^\beta + h(2\mu^2-1)] \qquad (3.103)$$

с соответствующими начальными условиями.

Из формулы (3.102) следует, что радиус — вектор вихря 1 всегда заключен в интервалах

$$\frac{h}{(\mu^2+1)^2} \le r_1^\beta \le \frac{h}{(\mu^2-1)^2}, \quad \beta \neq 0.$$

При этом траектории вихрей заключены внутри четырех граничных концентрических окружностей соответствующих радиусов. При движении вихри последовательно переходят с одной окружности на другую. Всякий раз, когда r_1^β достигает максимального значения, все вихри располагаются на одной прямой, при минимальном значении r_1^β вихри лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Из уравнений (3.103) следует, что $\dot{\varphi}_2 > 0$, т.е. угол φ_2 постоянно возрастает и траектория вихря *2* не образует петель. Что же касается вихря 1, то $\dot{\varphi}_1$ может обращаться в нуль при $r_1^\beta = (2-\mu^2)h[2(\mu^4-1)]^{-1}$ и на траектории этого вихря не будет петель при $\mu_2 > (\sqrt{17} - 1)/2$, а появятся таковые при $\mu_2 \le (\sqrt{17} - 1)/2$. В первом случае при $2+\sqrt{3} > \mu_2 > (\sqrt{17} - 1)/2$ траектория вихря *1* будет касаться граничных окружностей либо выпуклой, либо вогнутой стороной (рис. 39, *а*), для $\mu^2 > 2+\sqrt{3}$ — только выпуклой стороной (рис. 39, *б*).

Движение пяти вихрей. Будем полагать, что в начальный момент времени вихри 1 и 3 имеют равные интенсивности κ_1 и симметрично расположены на одной прямой, проходящей через начало координат $r_1^{(0)} = r_3^{(0)}$. Аналогично вихри 2 и 4 имеют равные интенсивности κ_2 и также расположены на одной прямой относительно начала координат $r_2^{(0)} = r_4^{(0)}$. Вихрь *5*, имеющий интенсивность κ^*, расположен в начале координат. Из уравнения движения (3.2) следует, что в процессе движения будут выполняться соотношения симметрии

$$z_3(t) = -z_1^*(t); \quad z_4(t) = -z_2^*(t); \quad z_5(t) = 0, \qquad (3.104)$$

т.е. пятый вихрь, не двигаясь, дает некоторую динамическую нагрузку на остальные четыре. Интересно оценить влияние такой нагрузки на динамику вихрей. Такое исследование выполнено Д.Н.Горячевым [19], который, используя условия (3.104), упростил исходную систему десяти действительных уравнений, сведя ее к системе четырех уравнений относительных полярных координат вихрей 1 и 2:

$$r_1 = \frac{\kappa_2}{2\pi}(r_{14}^{\;2} \quad r_{12}^{\;2})\, r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$r_2 = \frac{\kappa_1}{2\pi}(-r_{14}^{\;2} + r_{12}^{\;2})\, r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2);$$

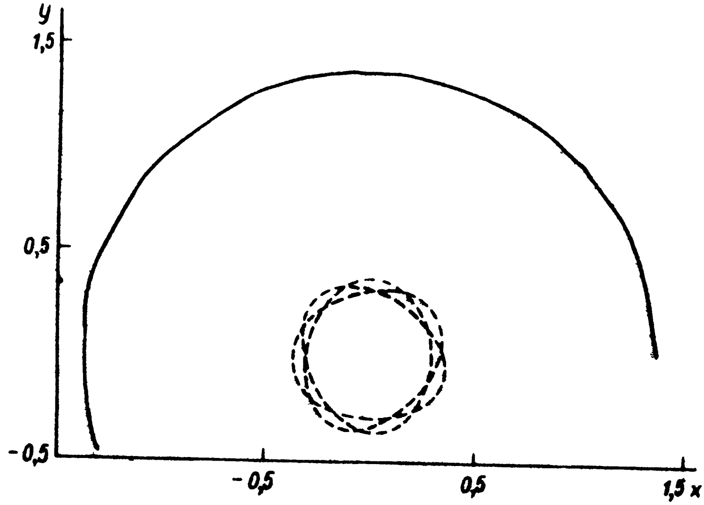


Рис. 40

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\kappa_1 + 2\kappa^*}{4\pi r_1^2} + \frac{\kappa_2}{2\pi r_1}\left[\frac{r_1 - r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_1 + r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2}\right];$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\kappa_2 + 2\kappa^*}{4\pi r_2^2} + \frac{\kappa_1}{2\pi r_2}\left[\frac{r_2 - r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{12}^2} + \frac{r_2 + r_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_{14}^2}\right].$$

(3.105)

где r_{12} и r_{14} соответственно расстояния между первым и вторым (четвертым) вихрями, определяемые через искомые функции по теореме косинусов.

Для конкретного случая интегралы Q и P в силу симметрии тождественно удовлетворяются, а интегралы I и H имеют вид

$$\kappa_1 r_1^2 + \kappa_2 r_2^2 = 2c = \mathrm{const};$$

$$[(r_1^2 + r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)]\, r_1^{\frac{\kappa_1 + 2\kappa}{\kappa_2}}\, r_2^{\frac{\kappa_2 + 2\kappa}{\kappa_1}} = 4h = \mathrm{const} > 0.$$

(3.106)

Остановимся лишь на отдельных типичных случаях.

1. $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa^*/\chi = \kappa$. Как и раньше, задачу будем рассматривать в безразмерном виде, подобрав соответствующие масштабы длины и времени.

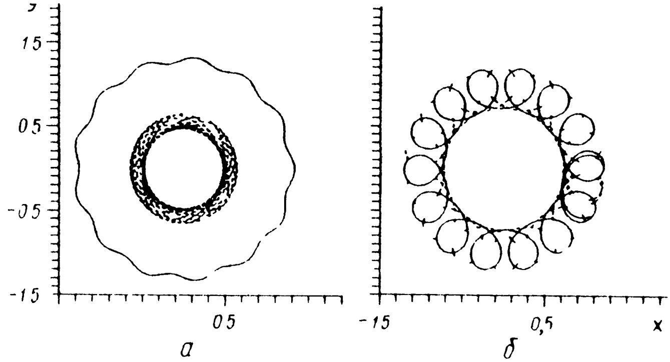


Рис. 41

Уравнение (3.107) допускает квадратуру

$$t = \pm\ h \int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}\ ;$$

$$f(\xi) = (\xi^{2\chi+3} - \xi^{2\chi+1} + h)(\xi^{2\chi+1} - h)(1 - \xi^2)\ ;$$

$$r^2_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \xi^2}\ ; \quad \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = (\xi^{2\chi+1} - h)\,\xi^{-2\chi-3}\ . \tag{3.107}$$

Рассмотрим случай $\chi = -1$. Как показано в [19], при этом следует разделять ситуации $h > 1$; $h < 1$.

Если $h > 1$, то переменная ξ изменяется в интервале $\xi_1 \le \xi \le h^{-1}$. Траектории вихрей *1* и *2* проходят внутри концентрических колец:

$$1 + \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{h} \le r_1^2 \le 1 + \sqrt{1 - \xi_1^2}\ ;$$

$$1 - \sqrt{1 - \xi_1^2} \le r_2^2 \le 1 - \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{h}\ ;$$

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{h_2^2 + 4} - h}{2}\ ,$$

заполняя их всюду плотно. Каждый из вихрей последовательно переходит с одной граничной окружности своего кольца на другую. При этом положению одного вихря на окружности минимального радиуса в точности соответствует положение на окружности максимального радиуса.

На рис. 40 представлены траектории вихрей 1 и 2 для начального расположения вихрей: $r_1^{(0)} = 1{,}382$; $r_2^{(0)} = 0{,}299$; $\varphi_1^{(0)} = \varphi_2^{(0)} = 0$. Оно дает следующие значения определяющих параметров движения: $h = 2$; $\xi_1 = 0{,}414$. В представленной ситуации наблюдается непрерывный рост значений φ_1 и φ_2 и траектории не образуют петель. Отметим, что вихри 1 и 2, имеющие одинаковую интенсивность, из-за влияния пятого центрального вихря движутся в противоположных направлениях. В работе [19] показано, что на траектории второго вихря, движущегося внутри малого кольца, возможны петли, соответствующие периодической смене знака угловой скорости $\dot\varphi_2$. Такие обратные движения образуются в ситуациях, когда $h > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155$. В случае $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ на траекториях вихря 2 появляются точки возврата.

Обратимся теперь к ситуации $h < 1$. В этом случае действительное движение возможно, если переменная ξ находится в интервале $\xi_1 \le \xi \le 1$. Траектории вихрей 1 и 2 расположены внутри одного и того же кольца, ограниченного концентрическими окружностями $r^2_{1,2\,\substack{\max\\\min}} = 1 \pm \sqrt{1 - \xi_1^2}$. Положение одного из вихрей на наружной граничной окружности будет соответствовать положению другого вихря на граничной внутренней окружности. Траектории вихрей — это одинаковые кривые, повернутые относительно друг друга на некоторый угол. Движение будет периодическим и траектории будут образовывать петли.

Пример движения вихрей 1 и 2 для случая $\chi = -3/2$ приведен на рис. 41,*а*. В момент времени $t = 0$ вихри находились на одной прямой на граничных окружностях, при этом определяющие параметры задачи имели значения $h = 1{,}5$; $\xi_0 = 0{,}632$. Особенность данной ситуации состоит в том, что вихри 1 и 2 движутся внутри своих граничных окружностей в противоположные стороны. Из анализа уравнений движения следует, что на всем пути φ_1 возрастает, а φ_2 — убывает. Причем, в момент нахождения вихря 1 на наружной границе значение $\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, а при его положении на внутренней границе $\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Следовательно, за время перехода вихря с одной границы на другую разность $\varphi_1 - \varphi_2$ возрастает на $\pi/2$.

При $h < 1$ вихри 1 и 2 будут перемешиваться внутри одного кольца, ограниченного окружностями радиусов

$$1 - \sqrt{\frac{h}{h+1}} \le r^2_{1,2} \le 1 + \sqrt{\frac{h}{h+1}} .$$

Форма траекторий вихрей будет одинаковой и они будут отличаться лишь сдвигом по фазе. Движение будет периодическим.

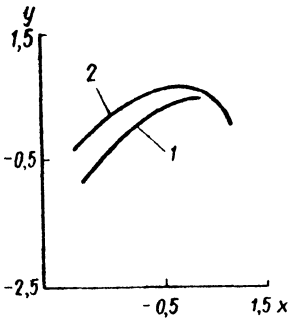


Рис. 42

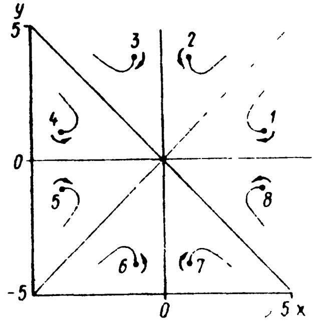


Рис. 43

На рис. 41,*б* приведены траектории вихрей 1 и 2 при $h = 0{,}3$ и $\xi_0 = 0{,}8777$. Оба вихря совершают петлеобразное движение в одном направлении, противоположном тому, которое происходило бы, если бы отсутствовал вихрь 5. С течением времени траектории вихрей будут плотно заполнять кольцо указанных выше радиусов.

Как и в задаче о взаимодействии четырех центральносимметричных вихрей, представляет интерес ситуация равенства нулю суммарного момента импульса $\kappa_1 r_1^2 + \kappa_2 r_2^2 = 0$. Вводя обозначения $\kappa_1 = -a^2\kappa_2 = \kappa$; $m = \chi\kappa$, получаем $r_1 = ar_2$. Для определенности будем считать, что $a \geq 1$. Выкладками, аналогичными случаю четырех вихрей, получаем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$r_1 \dot{r}_1 = \frac{\kappa}{2\pi h a^2}\sqrt{[(a^2+1)^2 r_1^\alpha - h][h - (a^2-1)^2 r_1^\alpha]};$$

$$r_1 \dot{\varphi}_1 = \frac{\kappa}{4\pi h a^2}[2(a^4-1)r_1^\alpha + h(2\chi a^2 + a^2 - 2)];$$

$$r_1 \dot{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{4\pi h a^4}[2a^2(a^4-1)r_1^\alpha + h(2\chi a^2 + 2a^2 - 1)], \qquad (3.108)$$

где

$$\alpha = [4a^2 - a^4 - 1 - 2\chi a^2(a^2-1)]a^{-2}.$$

Наличие пятого вихря в центре симметрии может привести к ситуации, когда $\alpha = 0$. При этом, как следует из (3.108), траекториями вихрей будут логарифмические спирали, причем движение по ним будет таким, что $\varphi_1 - \varphi_2 =$ coust. Если $h = (a^2-1)^2$, то вихри находятся на одном радиусе-векторе и движутся по концентрическим окружностям. Если $h = (a^2 + 1)^2$, то вихри движутся также по концентрическим окружностям, но их угловое расстояние $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$. При $\alpha \neq 0$ траектории каждого вихря лежат внутри колец, образованных концентрическими окружностями с центром в начале координат. Заметим, что указанные кольца могут взаимно налагаться.

В случае $a = 1$ вихри *1* и *2* имеют равные по значению и противоположные по знаку интенсивности и находятся на одинаковых расстояниях от начала координат. При этом $\alpha = 2$ независимо от значения χ. Уравнения движения (3.108) существенно упрощаются и их решение при начальных условиях $r_1^{(0)} = \sqrt{h}/2$; $\varphi_1^{(0)} = \pi/2$; $\varphi_2^{(0)} = 0$ имеют вид

$$r_1^2 = \frac{h}{4} + \frac{1}{h} t^2; \quad \mathrm{tg}\, \frac{2\varphi_1 - \pi}{2\chi - 1} = \frac{1}{h} t; \quad \mathrm{tg}\, \frac{2\varphi_2}{2\chi + 1} = \frac{1}{h} t.$$

Траектории движения вихрей для разных α представлены на рис. 42. Видно, что во всех случаях вихри *1* и *2* образуют пару и неограниченно удаляются от покоящегося вихря, асимптотически приближаясь к некоторым прямым. Отметим, что при $\chi = 1/2$ и $\chi = 3/2$ траектория вихря 1 есть прямая на всем протяжении движения.

Движение 2*n* вихрей, симметричных относительно *n* плоскостей. Естественным обобщением задачи о движении вихревой пары, т.е. двух вихрей одинаковой по модулю интенсивности и симметричных относительно одной плоскости, является движение $2n$ вихрей, объединенных в n пар, симметричное относительно n плоскостей. Эти плоскости образовывают между собой равные углы π/n. Такая задача впервые рассмотрена В.Гребли [130] и А.Гринхиллом [129], которые показали, что условия симметрии позволяют свести задачу к одной квадратуре и получить траекторию каждого вихря в явном виде. Общая схема расположения пар вихрей показана на рис. 43 для случая $n = 4$.

Рассматривая задачу в полярных координатах, центр которой совпадает с общей точкой пересечения n плоскостей симметрии, для координат z_k^+ и z_k^- k-й пары вихрей интенсивности $\pm$ к можно записать

$$z_k^{\pm} = r\, e^{i[(k-1)2\pi/n \pm \theta]}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом инварианты P, Q, I будут тождественно равны нулю, а инвариант энергии H остается постоянным, если выполнено равенство

$$r \sin n\theta = \mathrm{const}. \tag{3.109}$$

Кривая, задаваемая уравнением (3.109), называется спиралью Коатса. Она описывает траекторию каждого вихря внутри двухгранного угла π/n, причем константа в (3.109) определяется начальным расположением вихрей. С учетом условий симметрии уравнения движения имеют вид

$$r\dot{\theta}=\frac{\kappa}{4r},\quad \dot{r}=\kappa n\ \mathrm{ctg}\, n\frac{\theta}{4r}.$$

Поскольку $r^2\dot{\theta} = -\kappa/4 = \mathrm{const}$, то вихрь описывает ту же кривую, по которой двигалась бы материальная точка, испытывающая отталкивание от центра, обратно пропорциональное кубу расстояния и интенсивности $\kappa^2(n^2-1)/16$. Пример траекторий вихрей дан на рис. 43.

Движение $2n$ вихрей, симметричных относительно центра. Еще один интегрируемый случай движения нескольких вихрей обеспечивает требование симметрии движения относительно неподвижного центра. Такая задача рассматривалась в работе Х.Арефа [87], где показано, что движение, обладающее центром симметрии, сводится к гамильтоновой задаче о движении двух тел и, следовательно, всегда является интегрируемой.

Рассмотрим систему, состоящую из $2n$ точечных вихрей. Первая группа состоит из n вихрей, имеющих одинаковую циркуляцию κ_1 и расположенных в начальный момент в вершинах правильного многоугольника. Вторая группа n вихрей имеет интенсивность κ_2 и также расположена в начальный момент в вершинах другого правильного n-угольника, имеющего, однако, общий центр с первым. Обозначая координаты первых вихрей на плоскости через $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а вторых — $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, уравнения движения (3.2) в данном случае $2n$ точечных вихрей имеют вид

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\beta=1}^{n}{}' \frac{\kappa_1}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\kappa_2}{z_\alpha - \zeta_\beta}\right);$$

$$\dot{\zeta}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\kappa_1}{\zeta_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}{}' \frac{\kappa_2}{\zeta_\alpha - \zeta_\beta}\right). \tag{3.110}$$

Учитывая начальное расположение вихрей, решение уравнений (3.110) будем искать в виде

$$z_\alpha(t) = z(t)\, e^{\frac{i2\pi(\alpha-1)}{n}};\quad \zeta_\alpha(t) = \zeta(t)\, e^{\frac{i2\pi(\alpha-1)}{n}},\quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{3.111}$$

с комплексными функциями $z(t)$ и $\zeta(t)$, одинаковыми для обеих групп. Иными словами, будем предполагать, что расположение вихрей, симметричное относительно неподвижного центра в начальный момент, таковым и остается в течение всего процесса движения.

Используя тригонометрические тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{1-\gamma e^{\frac{i2\pi(\alpha-1)}{n}}} = \frac{n}{1-\gamma^n}, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{1-e^{\frac{i2\pi(\alpha-1)}{n}}} = \frac{n-1}{2}$$

и подставляя искомое решение (3.111) в (3.110), находим два уравнения

$$\dot{z}^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\kappa_1(n-1)}{2z} + \frac{\kappa_2 n z^{n-1}}{z^n - \zeta^n}\right);$$

$$\dot{\zeta}^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\kappa_2(n-1)}{2\zeta} + \frac{\kappa_1 n \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n}\right) \qquad (3.112)$$

относительно функции z и ζ. Их решения с соответствующими начальными условиями полностью описывают движение системы вихрей.

Обращаясь к инвариантам Кирхгофа (3.9), видим, что P и Q тождественно обращаются в нуль, а инварианты момента импульса и энергии сводятся к соотношениям

$$\kappa_1 |z|^2 + \kappa_2 |\zeta|^2 = I = \text{const};$$

$$\left(|z|^{\kappa_1^2}|\zeta|^{\kappa_2^2}\right)^{(n-1)} |z^n - \zeta^n|^{2\kappa_1\kappa_2} = h = \text{const}. \qquad (3.113)$$

Детальное исследование различных свойств ее решения в зависимости от n и отношения $\tau = \kappa_1/\kappa_2$ дано в [157], где с применением современных математических методов проведен анализ топологических характеристик движения и их устойчивость.

В важном частном случае $\kappa = -\kappa_2 = \kappa$, вводя полярные координаты

$$z(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}, \quad \zeta(t) = \rho(t)\, e^{i\theta(t)},$$

из (3.112) получаем систему

$$\dot{r} = \frac{n\kappa K}{2\pi}\rho \sin n\psi; \quad r^2\dot{\varphi} = \frac{\kappa}{2\pi}\left\{\frac{n-1}{2} - nKr\rho\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^n - \cos n\psi\right]\right\};$$

$$\dot{\rho} = \frac{n\kappa K}{2\pi} r \sin n\psi; \quad \rho^2\dot{\theta} = -\frac{\kappa}{2\pi}\left\{\frac{n-1}{2} - nKr\rho\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \cos n\psi\right]\right\};$$

$$K \equiv h^{\kappa^{-2}} = \frac{(r\rho)^{n-1}}{r^{2n} - 2r^n\rho^n \cos n\psi + \rho^{2n}}, \quad \psi = \varphi - \theta. \qquad (3.114)$$

Система уравнений (3.114) допускает решение, отвечающее *равномерному* вращению ($\varphi = \theta$) вихрей, расположенных на окружностях постоянных радиусов ($r = \rho = 0$). Такое решение найдено в работе [133], посвященной обобщению задачи о вихревой дорожке Кармана на случай конечного числа вихревых пар, расположенных по окружностям. Как видно из структуры уравнений (3.114), система равномерно вращающихся вихрей существует лишь когда $\sin n\phi = 0$, т.е. $\sigma = \cos n\psi = \pm 1$. Более детальный анализ [87] показал, что при $\sigma = -1$ решение будет существовать только при $\tau = -1$, а отношение радиусов $x = r/\rho$ удовлетворяет уравнению

$$(n-1)x^{n+2} - (n+1)x^n - (n+1)x^2 + n - 1 = 0. \quad (3.115)$$

Иными словами, система колец существует лишь для «шахматного»,чередующегося их расположения с фиксированным отношением радиусов. Угловая скорость вращения определяется при этом соотношением $\Omega = -\kappa^2/2\pi l$. Отметим, что в отличие от равномерно движущейся (хотя и неустойчивой) симметричной дорожки Кармана симметричной конфигурации колец не существует. Дальнейшее обсуждение этой ситуации содержится в [87]. В статье [157] исследован более общий случай $\tau \neq -1$ и показано, что здесь возможны как симметричные ($\sigma = 1$), так и чередующиеся ($\sigma = -1$) равномерно вращающиеся сочетания точечных вихрей, правильно расположенных на двух окружностях. Отмечено, что при $n = 4$, если $X = \sqrt{6}/(\sqrt{7} + 1) \approx 0{,}67$, равномерно вращающаяся конфигурация с $\sigma = -1$ существует при любом τ! Этот факт дополняет приведенные в [157] данные о некоторых однородных типах движений точечных вихрей, существующих независимо от их интенсивности.

Общий случай интегрирования системы (3.114) приведен в [87]. Он основан на введении новой независимой переменной $y = \ln (r/\rho)$ и исключении с помощью инвариантов функции ψ. Важным для анализа является значение параметра $\alpha = \kappa/lK$. Установлено, что если параметр α равен величине

$$\alpha = \alpha_n \equiv \frac{\operatorname{ch} n y_n + 1}{\operatorname{sh} y_n}\ ; \quad y_n = \ln \zeta_n > 0\,,$$

где ξ_n — наибольший из двух корней уравнения (3.115), то удаленные друг от друга симметричные относительно центра вихревые пары с течением времени будут собираться в двойное кольцо. Для случая, когда

$$z(0) = -L + i\left(s + \frac{d}{2}\right);\ \zeta(0) = L + i\left(s - \frac{d}{2}\right);\ L >> d, |s|$$

(d — расстояние между вихрями в паре, S — параметр соударения), имеют место соотношения, $I \approx 2\chi s d$; $K \approx (n d)^{-2}$, откуда $\frac{d}{s} = \frac{2\kappa}{n^2 I K} = \frac{2\alpha_n}{n^2}$.

При критических значениях α_n возможен и обратный процесс — вихревые пары, организованные в «двойные чередующиеся кольца», могут сказаться неустойчивыми (когда уравнения (3.175) выполнены, однако $\kappa < 0$) и кольцо распадается на n независимых пар, удаляющихся от центра.

Движение $2n + 1$ вихрей при наличии центра симметрии. Рассмотрим ситуацию, когда n точечных вихрей, имеющих одинаковые интенсивности κ, расположены в начальный момент в вершинах некоторого правильного многоугольника; другой набор n точечных вихрей, имеющих интенсивности λ, расположены в вершинах другого правильного многоугольника. Оба многоугольника имеют общий центр, совпадающий с началом координат, в котором расположен вихрь, имеющий интенсивность γ.

Обозначая координаты первых n вихрей в процессе движения через $z_\alpha(t)$, вторых — $\zeta_\alpha(t)$ и одиночного вихря — $\xi(t)$, можно записать общие уравнения

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\beta=1}^{n}{}' \frac{\kappa}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\lambda}{z_\alpha - \zeta_\beta} + \frac{\gamma}{z_\alpha - \xi}\right);$$

$$\dot{\zeta}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\kappa}{\zeta_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}{}' \frac{\lambda}{\zeta_\alpha - \zeta_\beta} + \frac{\gamma}{\zeta_\alpha - \xi}\right);$$

$$\dot{\xi}^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\kappa}{\xi - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\lambda}{\xi - \zeta_\beta}\right). \qquad (3.116)$$

Учитывая начальную симметрию, решение этих уравнений будем искать в виде

$$z_\alpha(t) = z(t)\, e^{\frac{i 2\pi(\alpha - 1)}{n}};$$

$$\zeta_\alpha(t) = \zeta(t)\, e^{\frac{i 2\pi(\alpha - 1)}{n}}, \qquad \xi(t) = 0. \qquad (3.117)$$

Подстановка (3.117) в (3.116) показывает, что движение будет симметричным с покоящимся в центре вихрем, если функции $z(t)$ и $\zeta(t)$ удовлетворяют двум уравнениям

$$\dot{z}^* = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\kappa(n-1)+2\gamma}{2z} + \frac{\lambda n z^{n-1}}{z^n - \zeta^n}\right];$$

$$\dot{\zeta}^* = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\lambda(n-1)+2\gamma}{2\zeta} + \frac{\kappa n \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n}\right]. \qquad (3.118)$$

Как и в случае движения $2n$ вихрей, симметричных относительно центра, нелинейная система (3.118) оказывается гамильтоновой и имеет два инварианта

$$h = |z|^{\kappa[2\gamma+(n-1)\kappa]}|\zeta|^{\lambda[2\gamma+(n-1)\lambda]}|z^n - \zeta^n|^{2\kappa\lambda};$$
$$I = \kappa|z|^2 + \lambda|\zeta|^2. \qquad (3.119)$$

Остановимся на случае, когда вихри имеют одинаковые по модулю интенсивности $\alpha = -\kappa$ и нулевой момент импульса $I = 0$. Иными словами, в начальный момент все $2n$ вихрей расположены на одной окружности радиусом r_0, образуя n вихревых пар, причем углы между радиусами — векторами одинаковы и равны π/n. Полагая в этом случае $\gamma = \chi\kappa$; $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, $\zeta(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, уравнения (3.118) позволяют получить квадратуры

$$r^2 = 1 + n^2 t^2; \quad \mathrm{tg}\frac{n\varphi - \pi}{2\chi - 1} = nt; \quad \mathrm{tg}\frac{n\theta}{2\chi + 1} = nt.$$

Траектории первых вихрей обоих семейств ($\alpha = 1$) в представлении (3.117) имеют вид

$$r\cos\frac{n\varphi - \pi}{2\chi - 1} = 1; \quad r\cos\frac{n\theta}{2\chi + 1} = 1.$$

Вихри равных знаков, лежащие в начальный момент на окружности, образовывают вихревые пары и с течением времени «эжектируются» от центра на бесконечность. Их траектории асимптотически приближаются к прямым. Особый интерес представляют частные значения величины $\chi = 1/2$, $(n-1)/2$, $(n+1)/2$. В этих случаях траектории одного из семейств вихрей прямые. Такие типы движения для $n = 4$ изображены на рис. 44.

В заключение отметим, что более общий случай движения $2n + 1$ вихрей исследуется с использованием инвариантов (3.119). В частности, очень интересен анализ возможности процесса «слияния» вихревых пар в равномерно вращающееся двойное кольцо при наличии дополнительного вихря в центре. Другой тип движения вихрей по логарифмическим спиралям $r = r_0 \exp(c\varphi)$ при соотношении между интенсивностями

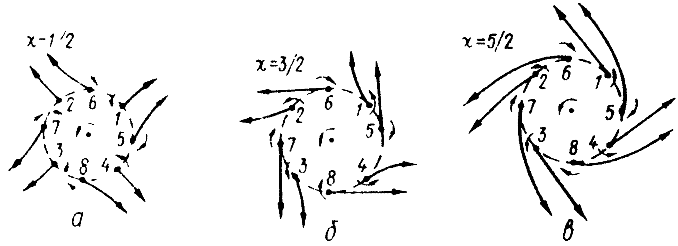


Рис. 44

$$n(a^2-1)+2\chi a^2(a^2-1)-a^4-1=0; \quad a^2=-\frac{\lambda}{\kappa}, \quad \chi=\frac{\gamma}{\kappa}$$

и нулевом моменте импульса кратко обсужден в [19].

Равномерное вращение вихрей равной интенсивности. В работе [244] сформулирован вопрос о возможности существования такого частного класса движений N точечных вихрей одинаковой интенсивности, при котором система вращается как целое с некоторой постоянной скоростью Ω. Такой класс вихревых движений наряду с поступательным движением всех вихрей без изменений относительной конфигурации системы в работе [244] назван «вихревой статикой» и разрабатывался в связи с концепцией теории вихревых атомов. Эта теория, впоследствии оставленная, тем не менее позволила получить ряд интересных результатов, касающихся состояний равномерного вращения конфигураций вихрей. Однако в последующем обнаружилась глубокая связь этих движений с гидродинамикой сверхтекучего He. В работе [196] показано, что в такой жидкости вихревое движение может концентрироваться в виде прямолинейных вихревых нитей, причем их интенсивность $\kappa = h/m$, где h — постоянная Планка; m — масса атома He. В работе [261] по визуализации картины равномерного вращения нескольких идентичных вихрей сделан вывод о возможности определения фундаментальной постоянной h/m по измерениям макроскопических величин, характеризующих установившееся гидродинамическое течение.

Математически задача вихревой статики сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, которая получается при предположении об установившемся вращении, т.е.

$$z_\alpha(t)=Z_\alpha e^{i\Omega t}; \quad Z_\alpha=\mathrm{const}. \tag{3.120}$$

Тогда система (3.2) при подстановке (3.120) переходит в алгебраическую

$$\frac{2\pi\Omega}{\kappa} Z_\alpha^* = \sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{1}{Z_\alpha - Z_\beta}, \quad \alpha=1,2,\dots,N. \tag{3.121}$$

Для решения таких систем в настоящее время существуют хорошо разработанные надежные численные методы. Однако частный класс решений получен еще в работе Дж.Дж.Томсона, удостоенной премии Адамса в 1883 г. [238]. Таким частным классом решений было расположение точечных вихрей в вершинах правильного N-угольника, т.е.

$$Z_\alpha = R_0 e^{-\frac{i2\pi(\alpha-1)}{N}}, \quad \Omega = \frac{\kappa(N-1)}{4\pi R_0^2},$$

причем решение существует для всех N. Важным является вопрос об устойчивости вращения такой конфигурации с постоянной угловой скоростью Ω. Ответ на этот вопрос дан в [238], где доказана теорема (впоследствии названная теоремой Дж.Дж.Томсона) о том, что такая конфигурация при $N \le 6$ будет устойчивой относительно малых линейных возмущений положения вихрей и неустойчивой при $N > 7$. Исчерпывающий анализ устойчивости таких правильных точечных N-угольников в общем случае произвольных (не малых) отклонений проведен в [78], в которой доказана справедливость теоремы Дж.Дж.Томсона и в общем случае.

Существует другой класс решений уравнений (3.121), когда N одинаковых точечных вихрей расположены на одной прямой. Их положения на прямой определяются нулями полинома Эрмита N-й степени. Впервые такое решение получено Стильтьесом и заново переоткрыто в работе Ф.Калоджеро [104] в связи с глубокими и обширными исследованиями интегрируемости задач многих тел и нулей классических полиномов.

Задача отыскания устойчивых состояний равномерного вращения одинаковых точечных вихрей исследовалась в работе [105], где на основе вариационного принципа показано, что для любого N существует по крайней мере одно устойчивое состояние вращения и составлен обширный так называемый «Лос Аламосский» каталог установившихся вращений, т.е. координат Z_α на плоскости для $N = 1$, 2,...,30, 37, 50. Оказалось,что в таких устойчивых состояниях вихри располагаются на одной или нескольких концентрических окружностях — «атомных оболочках» по терминологии Кельвина. Отметим, что в некоторых ситуациях вращательной симметрии относительно центра координат обнаружено не было. Так, например, для $N = 11$ две устойчивые конфигурации 2 + 9 и 3 + 8 (по числу вихрей на двух концентрических окружностях) имеют только плоскость симметрии.

С проблемой равномерно вращающихся вихревых конфигураций тесным образом связан эксперимент А.М.Майера [181] с плавающими магнитами, анализ которого приведен в [243], где установлена прямая аналогия между определенным классом магнитных явлений и вращением точечных вихрей. В работе [181] несколько (до семи) одинаково намагниченных иголок были воткнуты в маленькие пробочки одноименным полюсом. Эта система помещалась в кювету с водой.

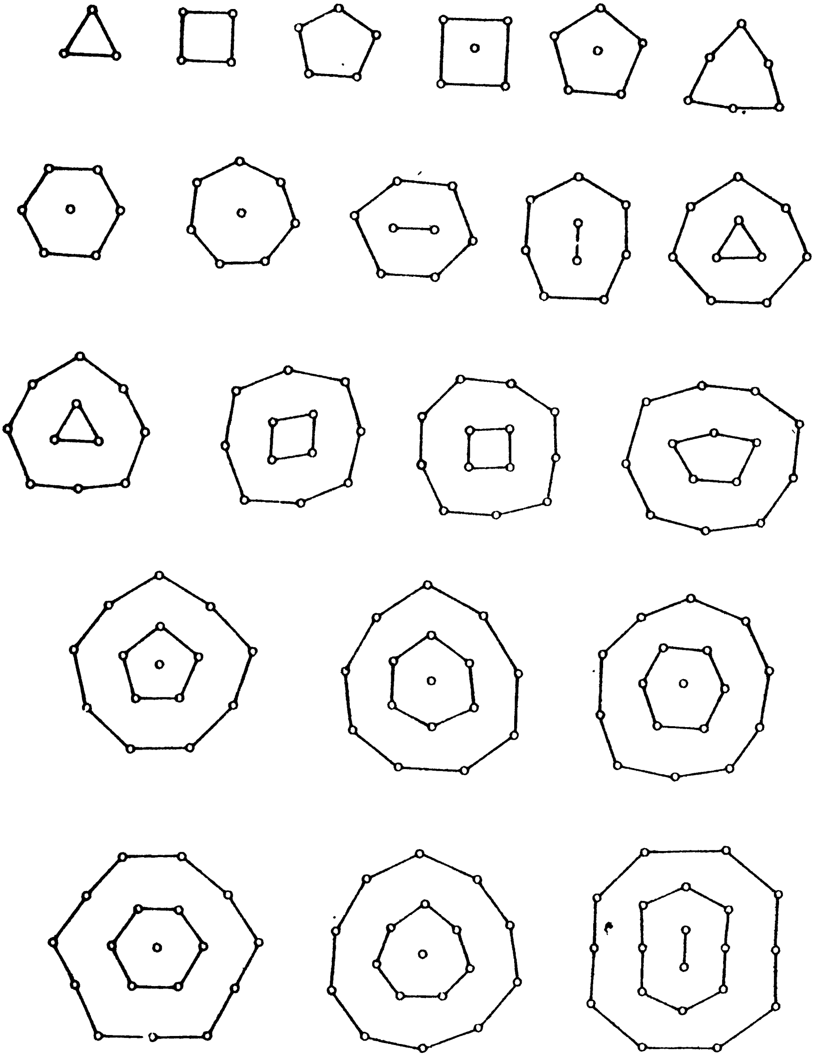


Рис. 45

При этом наблюдалось взаимное отталкивание одноименных полюсов плавающих магнитов. При приближении сверху сильного соленоидального магнита противоположной полярности возникало притяжение плавающих магнитов к точке пересечения поверхности воды с перпендикуляром, опущенным из центра большего магнита. Противоборство сил отталкивания и притяжения приводит к тому, что система плавающих магнитов располагается в некоторой равновесной конфигурации, которая полностью совпадает со стационарной конфигурацией вращающихся N точечных вихрей.

В последующей публикации [182] приведены фигуры устойчивого расположения вихрей (по аналогии с указанным выше назовем их «Гарвардским каталогом»). На рис.45 воспроизведен фрагмент этого каталога. Видно, что два, три, четыре и пять вихрей образуют правильный многоугольник, вершины которого лежат на одной окружности. Для $N = 11$ система обладает плоскостью симметрии. Сравнение с данными численных расчетов [105], несколько фигур из которых представлены в работе [88], показывает полную их тождественность. Конфигурации, принимаемые плавающими магнитами для $N \leq 42$, систематизированы А.М.Майером в виде таблицы [74]. Идея систематизации состоит в упорядочении числа магнитов по числу групп или классов, близких к окружностям линий — «орбит», на которых расположены магниты. При этом устойчивые конфигурации одного класса образуют «ядра» последующих. Так, когда число магнитов не больше пяти, то они расположены в углах правильного многоугольника. Когда их число больше пяти, то расположение становится иным. Шесть магнитов располагаются устойчиво не на углах шестиугольника, но делятся на две системы ($6 = 1 + 5$), так что один находится в центре, а пять — по окружности в углах правильного пятиугольника. Такое состояние оказывается более устойчивым, чем состояние $6 = 3 + 3$. Расположение на двух «орбитах» продолжается до тех пор, пока число магнитов не достигнет пятнадцати, когда получается три группы: $15 = 1 + 5 + 9$; при двадцати семи магнитах возможны комбинации $27 = 5 + 9 + 13$ и $27 = 1 + 5 + 9 + 12$ и осуществляется переход к четырем «орбитам» и т.д. Такое поведение плавающих магнитов — образование одной или нескольких устойчивых конфигураций, упорядоченных по кольцевым «орбитам», — на рубеже XIX — XX в. стимулировало ученых на построение неквантовой модели атома по такой схеме [49]. Эти построения впоследствии оставлены, но несмотря на это многие замечательные мысли и наблюдения, относящиеся к периодичности строения вещества, ни в коем случае не утратили своего значения.

Выдающийся американский экспериментатор Р.Вуд [257] предложил существенную модификацию опытов А.М.Майера. В кювету с ртутью помещали стальные шарики подшипников и к ним подносили мощный электромагнит. Достоинство такой методики заключалось в большей степени однородности системы.

Несмотря на значительное число численных и экспериментальных исследований, в этой задаче остается без должного теоретического понимания ряд вопросов. К ним относятся, например, выяснение причин образования плоскости симметрии, распределение вихрей по концентрическим окружностям и т.д.

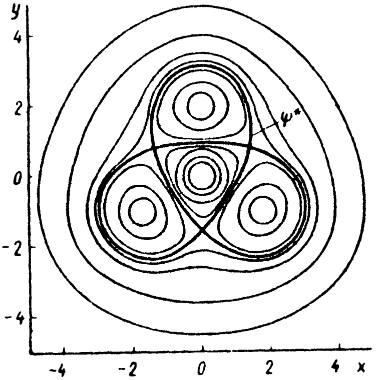


Рис. 46

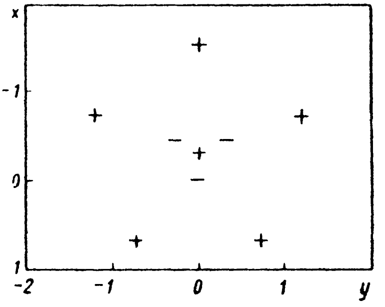


Рис. 47

Неподвижные конфигурации вихрей. Вопрос о возможности устойчивых стационарных вращающихся конфигураций N точечных вихрей произвольной интенсивности чрезвычайно сложен и в настоящее время мало изучен. Вместе с тем вопрос о неподвижных конфигурациях вихрей одинаковой по модулю интенсивности исследован более подробно. При этом вихри генерируют такое поле скоростей, что жидкость вокруг них находится в движении. Исследование и нахождение таких ситуаций позволяют глубже проникнуть в особенности нелинейной вихревой динамики.

Впервые факт подобной конфигурации вихрей установлен в работе [73]: кроме очевидной ситуации одного покоящегося вихря возможна комбинация из четырех покоящихся вихрей. Это возможно, когда три вихря одного знака расположены в вершинах равностороннего треугольника, а вихрь противоположного знака расположен в центре этого треугольника. Анализ суммарных векторов наведенных скоростей в каждом из вихрей показывает, что они тождественно равны нулю. Таким образом, конфигурация остается неподвижной.

Интересен вопрос о том, как происходит движение в жидкости для указанного случая неподвижной конфигурации вихрей. Для этого, воспользовавшись соотношениями для функции тока $\psi(x, y)$, образованной в произвольной точке (x, y), найдем характерные области такого течения. Для определения линий, отвечающих постоянным значениям $\psi(x, y) = c$, задача в случае четырех неподвижных вихрей сводится к решению алгебраических уравнений шестого порядка:

$$x^2 + y^2 = c_1\left[x^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2\right] \times$$

$$\times\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2\right],$$

где a — сторона треугольника; $c_1 = \exp(c4\pi/\kappa)$.

Распределение линий тока для неподвижной конфигурации из четырех вихрей представлено на рис. 46. Отметим, что граничная линия ψ^* (обозначена более жирной линией) делит течение на пять областей: четыре внутренних для трех вихрей интенсивности κ и вихря противоположного вращения ($-\kappa$), а также одну внешнюю, в которой на некотором удалении от точек расположения вихрей поле течения стремится к круговым линиям тока, соответствующим полю одного точечного вихря интенсивностью 2κ.

Общая методика определения неподвижных конфигураций точечных вихрей приведена в работе [91]. Пусть имеется N^+ одинаковых точечных вихрей интенсивности κ, расположенных неподвижно в точках z_α ($\alpha = 1, 2,..., N^+$) на комплексной плоскости z. Аналогично N^- точечных вихрей интенсивностью ($-\kappa$) расположены в точках ξ_β ($\beta = 1,2,..., N^-$). Образуем два полинома комплексной переменной z степени N^+ и N^-:

$$P(z)=\prod_{\alpha=1}^{N^+}(z-z_\alpha); \quad Q(z)=\prod_{\alpha=1}^{N}(z-\zeta_\beta).$$

Корнями будут величины z_α и ζ_β. В работе [91] показано, что с учетом неподвижности вихрей (постоянство величин z_α и ζ_β) эти полиномы удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$QP''+PQ''=2P'Q' \tag{3.122}$$

(здесь штрихи означают производные по z).

Это чрезвычайно эффектное уравнение дает возможность отыскать методом Фробениуса полиномы P и Q, корни которых определяют координаты неподвижных вихрей.

Сравнивая коэффициенты при наивысшей степени $z^{N^++N^--2}$ полиномов, входящих в правую и левую части уравнения (3.122), приходим к соотношению

$$N^+(N^+-1)+N^-(N^--1)=2N^+N^-, \tag{3.123}$$

которое связывает число положительных и отрицательных вихрей (целые числа N^+ и N^-). Записав (3.123) в виде

$$(N^+)^2-N^+(2N-1)+(N^-)^2-N^-=0,$$

нетрудно показать, что оно будет целочисленное решение, когда его дискриминант будет представлять квадрат целого нечетного числа, т.е. $8N^- + 1 = (2n - 1)^2$. Отсюда

$$N^+ = \frac{n(n+1)}{2}; \quad N^- = \frac{n(n-1)}{2}; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.124)$$

Таким образом, пары (N^+, N^-) образуют семейство «магических» чисел (1;0), (3;1), (6;3), (10;6) и т.д. Первые две пары чисел представляют собой описанные выше ситуации.

Определим в качестве примера координаты вихрей для следующего по сложности случая, а именно для $n = 3$. При этом $N^+ = 6$; $N^- = 3$. Помещая один из отрицательных вихрей в начало координат, приходим к общему представлению для полиномов:

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + z^6;$$

$$Q(z) = q_1 z + q_2 z^2 + z^3, \qquad (3.125)$$

где p_i и q_i — неопределенные числовые коэффициенты.

Вычисляя необходимые производные и приравнивая в уравнениях (3.122) числовые коэффициенты при одинаковых степенях полиномов, приходим к нелинейной системе алгебраических уравнений относительно $p_0,\ldots,p_5$ и q_1, q_2. После очевидных, но громоздких выкладок находим

$$p_0 = p_1 \frac{q_2}{3}; \quad p_2 = 0; \quad p_3 = \frac{5}{9} q_2^3; \quad p_4 = \frac{5}{3} q_2^2; \quad p_5 = 2 q_2; \quad q_1 = \frac{q_2^2}{3},$$

т.е. коэффициенты полиномов выражаются через остающиеся произвольными величины p_1 и q_2. Нетрудно показать, что полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ в данном случае сводятся к виду

$$P(z) = q_2^6 \left[\frac{\bar{p}_1}{3} + \bar{p}_1 \bar{z} + \frac{5}{9} \bar{z}^3 + \frac{5}{3} \bar{z}^4 + 2 \bar{z}^5 + \bar{z}^6 \right];$$

$$Q(z) = q_2^3 \left[\frac{\bar{z}}{3} + \bar{z}^2 + \bar{z}^3 \right];$$

$$\bar{z} = \frac{z}{q_2}; \quad p_1 = \frac{\bar{p}_1}{q_2^5}. \qquad (3.126)$$

Отыскивая численным методом Ньютона комплексные нули полиномов $P(z)$ и $Q(z)$, приходим к положению стационарной неподвижной конфигурации (рис.47, $\bar{p}_1 = 1$). Из соотношений (3.126) видно, что с точностью до линейного масштаба q_2 имеется однопараметрическое (зависящее от $\bar{p}_1$) семейство стационарных конфигураций. При изменении $\bar{p}_1$ происходит аффинное расширение или стягивание системы вихрей N^+ относительно неизменного положения системы вихрей N^-. Метод отыскания более сложных конфигураций тот же и основан на решении дифференциального уравнения (3.122). При этом целесообразно использовать стандартные программы компьютерной алгебры для отыскания коэффициентов при различных степенях z. В работе [91] приведена «ореолообразная» конфигурация, отвечающая 36 положительным и 28 отрицательным точечным вихрям.

5. Хаотическое движение четырех точечных вихрей

Предпосылки возникновения хаоса. Изученные выше интегрируемые случаи движения нескольких точечных вихрей представляют собой исключение в общем неинтегрируемом случае нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2). Неинтегрируемость любых уравнений является обычным делом и до недавнего времени казалось, что разработанные многочисленные эффективные вычислительные алгоритмы — методы Рунге — Кутта, Адамса — Бошфорта и другие — полностью обеспечивают анализ поведения динамической системы на любом промежутке времени. Однако, начиная с работы Э.Лоренца [170], в научное сознание глубоко вошла идея о возможности хаотического поведения в детерминированных нелинейных системах даже с малым числом степеней свободы. В работе исследовалась общая задача термоконвекции применительно к образованию крупномасштабных вихревых структур. Используя уравнения Навье — Стокса, записанные в так называемом приближении Буссинеска [103] *, и раскладывая их по стандартной процедуре метода Бубнова — Галеркина, Э.Лоренц получил свою знаменитую систему трех обыкновенных нелинейных уравнений. При определенных значениях параметров, отражающих физические характеристики исходной задачи, найдены необычные, хаотические свойства ее решений, названные «странным аттрактором».

Работа Э.Лоренца относилась к диссипативным системам. Для консервативных систем, связанных с одномерными точечными отображениями, явление хаоса подробно исследовал М.Фейгенбаум [77,125]. Современное понимание проблематики и свойств детерминированного хаоса изложено в работах [32, 42, 47, 58, 61, 79, 203]. Проблема хаоса столь многообразна, что нашла отражение не только в физике, но и в других областях естествознания (химии, биологии, медицине). Философские аспекты проблемы глубоко освещены в [60].

---

* Применительно к задаче термоконвекции правильнее называть его приближением Обербека — Буссинеска, поскольку оно впервые по строено в статье [94] Это название чаще используется в зарубежной литературе.

Под детерминированным хаосом понимается высокая чувствительность решения системы нелинейных дифференциальных уравнений к малому изменению начальных условий. Это связано с так называемым экспоненциальным разбеганием траекторий и приводит к тому, что, зная поведение системы при невозмущенных параметрах, поведение возмущенной системы невозможно предвидеть по прошествии значительного времени. Для обозначения такой ситуации выработан термин «горизонт предсказуемости». Такой круг вопросов в свете трехсотлетнего развития механики Ньютона обсужден в работе Дж.Лайтхилла [161].

Стохастическое поведение консервативных гамильтоновых систем известно из работы [136], где показано, что неинтегрируемость некоторой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы приводит к возникновению хаоса. Обзор проблемы хаоса в гамильтоновых системах дан в [200], в которой проведено интенсивное сопоставление старых и новых взглядов на вопросы интегрируемости. Учитывая некоторую аналогию между задачами небесной механики и движением точечных вихрей, можно предположить, что и в последнем случае будет иметь место хаотическое поведение. Поэтому усилия многих современных исследователей направлены на выяснение вопросов: как, где и почему хаотическое поведение «входит» в динамику точечных вихрей? В исследованиях [55, 56, 93] рассмотрены типичные задачи этого класса. Важной особенностью хаотического движения в задачах вихревой динамики на плоскости является то, что хаос здесь возникает из полных уравнений движения Эйлера, сведенных к гамильтоновой форме, а не в результате модовых (галеркинских) аппроксимаций. Использование таких аппроксимаций является «ахиллесовой пятой» многих работ по изучению перехода к турбулентности. В частности, если в задаче Лоренца использовать большее число базисных функций, т.е. учесть следующие гармоники полей скорости и температуры, то полученная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений уже не обладает «аттракторными» свойствами.

Проблема хаотического движения точечных вихрей на плоскости тесно связана с общим вопросом: представляют ли уравнения Эйлера для плоских течений идеальной жидкости интегрируемую динамическую систему? Для случая гладкого начального распределения завихренности в некоторых областях на плоскости частично ответ на этот вопрос дает теорема Волибнера [255], утверждающая, что при таких условиях поле завихренности не будет иметь сингулярностей за конечное время. В случае точечных вихрей такая сингулярность поля завихренностей, согласно уравнению (3.2), существует в системе и в начальный момент времени. Поэтому вопрос о построении гладких решений для точечных вихрей требует дальнейшего изучения.

Как отмечалось, при $N > 3$ система (3.2) неинтегрируема. В случае даже четырех точечных вихрей имеется значительное разнообразие

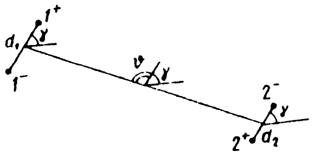


Рис. 48

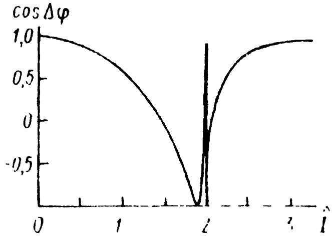


Рис. 49

интенсивностей и относительных положений вихрей. Это затрудняет перебрать все возможные варианты, поэтому остановимся на примерах двух простейших (но далеко не простых) ситуаций.

Взаимодействие двух вихревых пар. Характерное свойство такого движения — равенство нулю суммарной интенсивности Г. Следовательно, центр завихренности системы расположен на бесконечности. Наиболее общий случай двух вихревых пар произвольных интенсивностей $\pm\kappa_1$ и $\pm\kappa_2$ и произвольного начального расположения рассмотрен в работах Б.Екхардта и Х.Арефа [122, 123]. В первом из них предложена общая методика, основанная на применении скобок Пуассона, которая позволяет в случае n нейтральных пар каноническими преобразованиями свести гамильтонову систему с $N = 2n$ степенями свободы к системе с $N - 2$ степенями свободы. Таким образом, при $n = 2$ задача сводится к двум нелинейным дифференциальным уравнениям относительно некоторых комплексных комбинаций расположения вихрей. Отличительной особенностью предложенного подхода явилось выделение кроме инвариантов H, P, Q, I еще некоторых определяющих параметров задачи. К ним относятся величины

$$\varepsilon = \sqrt{\kappa_1/\kappa_2}\,; \qquad \Xi = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}\,.$$

В статье [123] рассмотрен случай, когда в начальный момент вихревые пары расположены параллельно друг другу, расстояния между вихрями в парах d_1 и d_2. Геометрические параметры задачи приведены на рис.48. Вводя дополнительные параметры $D = \sqrt{d_1 d_2}$ и $\delta = \sqrt{d_1/d_2}$ инварианты Кирхгофа записываются в виде

$$Q = \Xi D\,(\mathrm{P} - \mathrm{P}^{-1})\cos\gamma; \qquad P = \Xi D\,(\mathrm{P} - \mathrm{P}^{-1})\sin\gamma;$$

$$I = 2\,\Xi D^2\,(\mathrm{P} + \mathrm{P}^{-1})\,R\cos\theta; \qquad \mathrm{P} = \varepsilon\,\delta\,.$$

Геометрические параметры задачи позволяют ввести параметр соударения $b = 2DR\cos\theta$. Для фиксирования значений Ξ ε, δ, R и γ изменение угла υ изменяет значение энергии и момента импульса, ос-

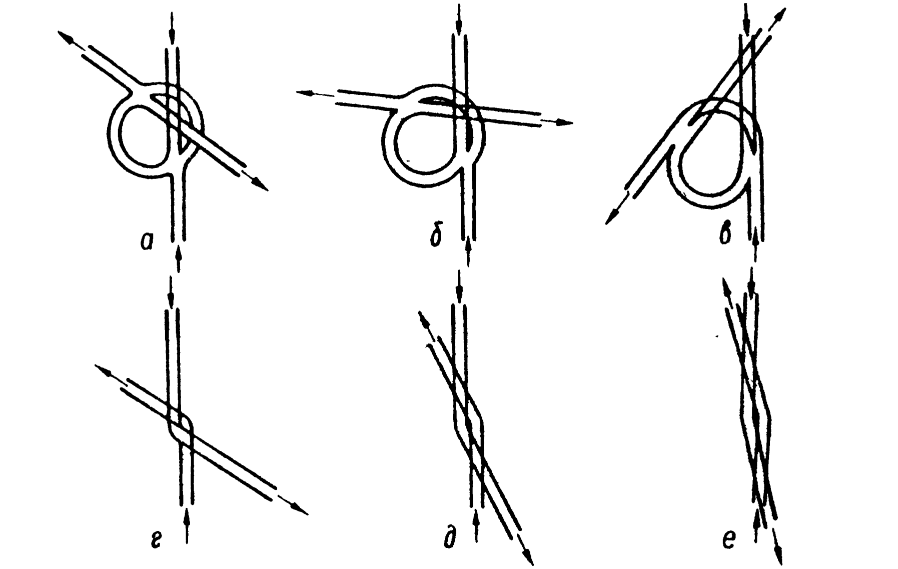


Рис. 50

тавляя компоненты импульса без изменений. В конечном итоге важным оказывается безразмерный параметр $\hat{I}$, вводимый по формуле

$$\hat{I} \equiv \frac{I}{\Xi D^2} = (P + P^{-1})\,\hat{b}\,; \qquad \hat{b} = \frac{b}{D}\,.$$

Анализ возможных ситуаций взаимодействия проведен в терминах зависимостей $\cos \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$ — изменение угла начальной ориентации вихревой пары) от $\hat{I}$. Установлено, что возможны три случая взаимодействия: прямое рассеяние, обменное и взаимный захват. Под прямым рассеянием понимают случай, когда в процессе близкого взаимодействия каждая пара сохраняет свою идентичность. При обменном рассеянии в процессе близкого взаимодействия в парах происходит перекрестный обмен вихрями. Если $\varepsilon \neq 1$, то с течением времени вихри составляют первоначальные пары и удаляются на бесконечность. Это происходит потому, что удаляться на бесконечность могут только пары, суммарная интенсивность которых равна нулю. *Взаимным захватом* называется такое состояние, когда четыре вихря, первоначально составляющие пары, вращаются вокруг неподвижного центра. В некоторых случаях обменного рассеяния вихри могут находиться в состоянии взаимного захвата конечное время. При $\varepsilon = 1$ взаимный захват может длиться бесконечное время.

Типичный интегрируемый случай для $P = 1$ и $\varepsilon = 0{,}9$ представлен на рис.49 [123]. Левая ниспадающая часть кривой отвечает ситуации обменного рассеяния, спайк в районе $I = 2$ соответствует неустойчивому взаимному захвату, а восходящая правая часть — прямому рассеянию. Эти состояния иллюстрируют траектории движения и взаимодействия вихревых пар на рис.50. Отметим, что, несмотря на наличие спайка, поведение системы имеет регулярный характер.

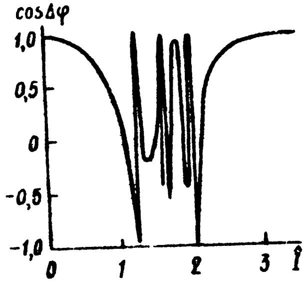


Рис. 51

Иная ситуация наблюдается в неинтегрируемом случае, когда $P \neq 1$. На рис. 51 [123] кривая в диапазоне $1{,}25 < I < 2$ имеет резко осциллирующий характер, указывая на сильную чувствительность угла $\Delta\varphi$ от I. Такое обстоятельство является предпосылкой для появления хаоса в системе. При увеличении масштаба разрешения графика по I изрезанный характер зависимости не исчезает, т.е. имеет место фрактальность.

Вихри одинаковой интенсивности. Впервые возможность хаотического движения четырех одинаковых вихрей отмечена в работах Е.А.Новикова [55, 56]. Математическое доказательство хаотизации решения системы нелинейных дифференциальных уравнений применительно к четырем вихрям, основанное на использовании теоремы Мельникова, дано в [31]. Наиболее детальное исследование, базирующееся на прямом численном моделировании, проведено в работе Х.Арефа и Н.Памфри [93].

Для случая N вихрей одинаковой интенсивности к величина

$$\Theta = \left(\frac{2I}{\kappa(N-1)}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{4\pi H/\kappa^{2}}; \quad \Theta \geq 1$$

является инвариантом движения. Задача нахождения минимального значения Θ_{min} для системы N одинаковых вихрей далеко не тривиальна. Найдено, что для случая, когда три вихря образуют равносторонний треугольник, значение $\Theta^{(3)}_{min}$. В случае четырех вихрей, расположенных в вершинах квадрата, $\Theta^{(4)}_{min}$. В работе [93] введен параметр $\Lambda^2 = \Theta^{(N)}_{min}/\Theta$, лежащий в пределах $0 < \Lambda \leq 1$.

В работе [56] высказана гипотеза, что процесс хаотизации решения зависит лишь от одного параметра Λ. Причем движение является квазипериодическим в диапазоне $\Lambda < \Lambda_c$ и $2\Lambda_c < \Lambda$ 1. Хаотическое движение происходит при $\Lambda_c < \Lambda$ $2\Lambda_c$. Здесь $\Lambda_c = 2/3\sqrt{3}$ ($\approx 0{,}3849$). Однако детальные численные эксперименты, дающие как траекторию одного из вихрей, так и сечения Пуанкаре в специальных координатах,

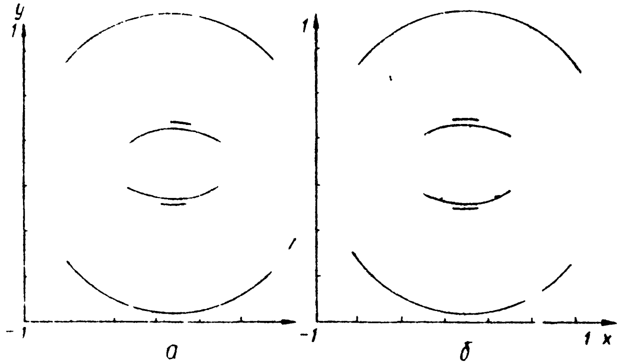


Рис. 52

показывают, что такое предположение не выполняется. Такая ситуация видится естественной, так как трудно ожидать, что в неинтегрируемой системе все многообразие возможных движений можно классифицировать одним определяющим параметром, связанным с начальными условиями. Наглядной иллюстрацией такого утверждения является работа [90], в которой рассмотрены два случая начального расположения четырех одинаковых вихрей:

$$1)\ z_1 + z_3 = 0\,, \quad z_2 + z_4 = 0\,;$$

$$2)\ z_1 + z_3 = 0{,}01\,, \quad z_2 + z_4 = 0\,.$$

Первый случай, обладающий симметрией относительно точки, является, как показано выше, полностью интегрируемым. Во втором случае траектории вихрей совершенно нерегулярно заполняют область, близкую к круговой. Особенно четко различия этих случаев можно проследить на рис.52, показывающем сечения Пуанкаре — положение вихря 2 на плоскости в те моменты времени, когда вихрь 1 пересекает положительную ось y. Подчеркнем, что исследование при помощи сечений Пуанкаре при финитном движении вихрей является мощным средством для идентификации хаотических и квазиупорядоченных движений.

6. Движение точечных вихрей в ограниченных областях

Общие уравнения. Проблемы взаимодействия содержащих точечные вихри течений жидкости с неподвижными твердыми границами возникли еще на раннем этапе исследования вихревых структур. Простейший случай движения одного точечного вихря в идеальной жидкости, ограниченной одной плоскостью, рассмотрен Г.Гельмгольцем [135]. При этом показано, что замена плоской границы жидкостью, в которой вихрь противоположной по знаку интенсивности зеркально симметрично расположен к исходному, позволяет обеспечить тождественное равенство нулю нормальной скорости. По аналогии с задачами электростатики такой способ инверсии (зеркальных отображений) с тех пор широко использовался в работах конца XIX в. Рассмотрено множество модельных задач для канонических областей [30, 129, 169], обзор которых содержится в [138, 171] и многие из которых в дальнейшем вошли в учебники [15, 46, 53]. Однако общая теория движения вихрей в произвольной области заложена в работе Э.Рауса [220] и детально разработана Ц.Ц.Линем [162]. В настоящее время наличие мощных компьютеров позволило численно моделировать различные течения, связанные со сложной формой границ и сдвиговыми течениями за острой кромкой. Другой интересной задачей является анализ влияния размеров и формы границ на возможность возникновения хаотических режимов движения нескольких точечных вихрей.

Наличие в жидкости твердых границ требует модифицирования основных уравнений движения точечных вихрей (3.2), справедливых для безграничной жидкости. Такая модификация должна обеспечивать выполнение на всех границах нулевых условий для нормальной составляющей скорости, обусловленной движением вихрей.

Рассмотрим движение точечных вихрей интенсивностей κ_α ($\alpha = 1, 2,...,n$), расположенных в точках P_α (X_α, y_α) идеальной несжимаемой жидкости, которая занимает ограниченную область D. Эта область может иметь ряд внутренних границ C_k ($k = 1,2,...,m$) и быть ограниченной замкнутой кривой C_0, неограниченной или ограниченной кривой, простирающейся в бесконечность. Границы области являются твердыми стенками, на которых нормальная колебательная скорость жидкости обращается в нуль. В самом общем случае будем считать, что в области существует внешнее стационарное потенциальное течение, удовлетворяющее всем граничным условиям и задаваемое функцией тока $\psi(x, y)$. Ставится задача определения уравнения движения точечных вихрей P_α (x_α, y_α) в такой области и общей функции тока $\psi(x, y, x_1, y_1,..., x_n, y_n)$ для течения.

Для заданной области и ее границ строится функция Грина $G(P, P_0)$, зависящая от координат двух точек $P(x, y)$ и $P(x_0, y_0)$, лежащих в области D, и удовлетворяющая трем условиям.

1. Функция $g(x, y; x_0, y_0$, вводимая в формулу

$$g(x, y; x_0, y_0) = G(x, y; x_0, y_0) - (2\pi)^{-1} \ln r_0,$$

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

является гармонической всюду в области D, за исключением P_0.

2. На внутренних границах C_k функция G принимает постоянные значения. Кроме того, контурный интеграл от нормальной производной $\partial G/\partial n$ по любому аналитическому контуру $C_k^!$, охватывающему только границу C_k и не содержащему внутри точку P_0, равен нулю.

3. Если область охвачена снаружи замкнутой кривой C_0, то на ней

$$G(P, P_0) = 0 .$$

Если область D неограниченно тянется в бесконечность во всех направлениях, то на круге радиуса $r_0 \to \infty$

$$G(P, P_0) = (2\pi)^{-1} \ln r_0 + O(r_0^{-1});$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = O(r_0^{-2}); \quad \frac{\partial G}{\partial n} = (2\pi r_0)^{1} + O(r_0^{2}).$$

Если область D имеет границу C_0, простирающуюся в бесконечность, то на конечном участке $G(P, P_0) = 0$, а при $r \to \infty$

$$G(P, P) = O(1).$$

Такая функция существует и она единственна.

Тогда движения точечных вихрей по-прежнему описываются уравнениями Кирхгофа, в которых выражение для гамильтониана имеет вид

$$H(P_1, P_2) = \sum_{\alpha=1}^{n} \kappa_\alpha \psi_0(P_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta-1}^{n}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta G(P_\alpha, P_\beta) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \kappa_\alpha^2 g(P_\alpha, P_\alpha). \quad (3.127)$$

В частном случае безграничной жидкости и отсутствия внешних течений функция $g = 0$, $G(P_\alpha, P_\beta) \equiv (2\pi)^{-1} \ln r_{\alpha\beta}$ и выражение (3.127) сводятся к обычному гамильтониану Кирхгофа (3.5).

Функция тока течения, обусловленного движением точечных вихрей и внешним потоком, дается формулой

$$\psi(P, P_1, \ldots, P_n) = \psi_0(P_0) + \sum_{\alpha-1}^{n} \kappa_\alpha G(P, P_\alpha).$$

Система (3.4) в этом случае имеет только один инвариант — энергию взаимодействия H. Другие инварианты Кирхгофа, основанные на инвариантности гамильтониана относительно сдвигов, здесь уже отсутствуют. Это обстоятельство уменьшает число вихрей, для которых задача является интегрируемой. Согласно предположению [56] для общего вида односвязной области только движение одного вихря дает интегрируемую систему. Строгое доказательство отсутствует, хотя для определенного типа симметрии области (например круга) такое число равно двум.

Конформное отображение и теорема Рауса. Как и в других задачах, связанных с отысканием гармонических функций на комплексной плоскости, при изучении движения точечных вихрей естественен вопрос о возможностях метода конформного отображения. Другими словами, пусть известно движение вихрей в области D комплексной плоскости $z = x + iy$. Требуется определить характеристики вихревого движения в области E, плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, получаемой из D с помощью конформного отображения $\zeta = f(z)$. Зная ответ на этот вопрос, можно существенно расширить классы задач о движении точечных вихрей в ограниченной области, используя определенные, хорошо известные решения в плоскости z, и различные аналитические функции $f(z)$. Применительно к плоским задачам гидродинамики точечных вихрей в идеальной жидкости такой подход описан Э.Раусом [220] и более детально Н.Е.Жуковским [30]. Суть этого подхода выражает теорема Рауса, утверждающая, что при конформном отображении точечные вихри переходят в точечные вихри той же интенсивности. При этом, если функция тока $\psi(x_1, y_1)$ определяет движение вихря $P(x_1, y_1)$ интенсивности κ на плоскости z, то функция

$$\chi(\xi_1, \eta_1) = \psi(x_1, y_1) + \frac{\kappa}{4\pi}\ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{z_1}, \quad \zeta_1 = f(z_1)$$

определяет движение вихря $\Pi(\xi_1, \eta_1)$ на плоскости ζ. При отображении из плоскости z в плоскость ζ движение точечных вихрей в точках Π_α, $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ описывается системой

$$\kappa_\alpha \dot{\xi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \eta_\alpha}; \quad \kappa_\alpha \dot{\eta}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha},$$

где гамильтониан определяется соотношением

$$H(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = H(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n) +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\kappa_\alpha^2}{4\pi}\ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{z_\alpha}, \quad \zeta_\alpha = f(z_\alpha).$$

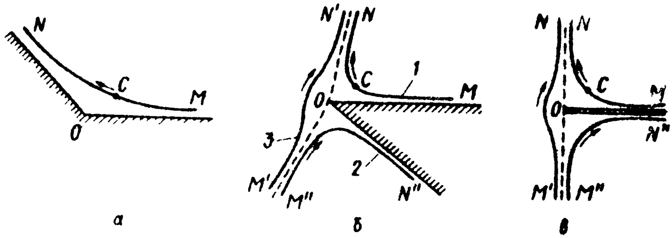


Рис. 53

Следует отметить, что речь здесь идет о функциях тока и гамильтонианах, относящихся только к движению самих вихрей; функция тока течения преобразуется по иным законам. Отметим также, что неподвижный вихрь в плоскости z уже может оказаться движущимся в плоскости ζ.

В частном случае конформного отображения заданной односвязной области на единичный круг гамильтониан и уравнения движения имеют вид

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha^2 \ln \frac{|g'(z_\alpha)|}{1-|g(z_\alpha)|^2} - \frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln \frac{|g(z_\alpha)-g(z_\beta)|}{|1-g(z_\alpha)g(z_\beta^*)|};$$

$$\kappa_\alpha \dot{z}_\alpha^* = 2i\frac{\partial H}{\partial z_\alpha}.$$

При этом для случая наличия только одного вихря уравнение

$$\left|\frac{1-|g(z_1)|^2}{|g'(z_1)|}\right| = \text{const}$$

определяет его траекторию в исходной области D.

Движение одного вихря в двугранном угле. В качестве примера применения теоремы Рауса рассмотрим случай движения точечного вихря в области, ограниченной двумя прямыми, которые образуют двугранный угол $\alpha = \mu\pi$. Такая задача решена в работе [30], где в зависимости от значения величины μ решение дает два типичных случая движения.

В случае $\mu > 1$, когда граница области не имеет острой кромки, в качестве исходного известного движения в z плоскости было выбрано движение одного вихря в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ с твердой границей. Траектория движения вихря в полярных координатах дается соотношением $\rho_1 \sin \theta_1 - R = \text{const}$, где постоянная R определяется начальным положением вихря. Пример такой траектории приведен на рис. 53. При этом траектория имеет асимптотами стороны угла, ограничивающего рассматриваемое течение. Для целых значений μ такое решение получено методом отражений [129, 130].

Для случая $1/2 < \mu < 1$, т.е. когда граница имеет острую кромку, приведенное выше решение дает бесконечно большую скорость на острие клина. Чтобы избежать такого парадокса, необходимо выбрать несколько иное течение в z-плоскости, состоящее из движения точечного вихря в полуплоскости при наличии дополнительного равномерного внешнего потока. Выбирая скорость этого потока такой, чтобы при отображении на ζ плоскость в вершине она обращалась в нуль (именно здесь, по нашему мнению, лежат истоки условия Жуковского — Кутта — Чаплыгина на острой кромке), после некоторых преобразований получаем уравнение траектории

$$\rho_1 (1 - 4 \mu \sin^2 \mu \theta_1)^{\frac{1-\mu}{2\mu}} \sin \mu \theta_1 = R .$$

В зависимости от соотношения начального угла и угла $\beta = (\arcsin \sqrt{\mu})/\mu$ возможны три типа траекторий — кривые 1 — 3 на рис. 53,б. Асимптотами этих траекторий являются стороны клина и прямые, наклоненные к сторонам клина под углом β.

В предельном случае $\mu = 1/2$ — твердой полуплоскости — имеем

$$\rho_1 \sqrt{\cos \theta_1} \sin \frac{\theta_1}{2} = R .$$

Траектории движения изображены на рис. 53,*в*.

Отмеченное свойство траекторий точечного вихря позволило Н.Е.Жуковскому объяснить, почему нельзя разрезать вихревой шнур, по длине поднося к нему острый нож. Поднесение ножа приведет центр вихря в движение по одной из трех траекторий (рис.53,*в*) и вихрь будет всегда «убегать» от острия.

Движение нескольких точечных вихрей вблизи плоской границы. Как уже отмечалось, случай движения одного точечного вихря в полуплоскости представляет собой вполне интегрируемую задачу, сводящуюся фактически к движению вихревой пары в безграничной жидкости. Аналогично два вихря сводятся к задаче о движении коаксиальных вихревых пар, подробно изученной выше. Практический интерес представляет задача о приближении вихревой пары нормально к твердой границе $y = 0$. Задача обладает дополнительной симметрией и описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x_1^2}{y_1 (x_1^2 + y_1^2)} ; \quad \dot{y}_1 = - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{y_1^2}{x_1 (x_1^2 + y_1^2)}$$

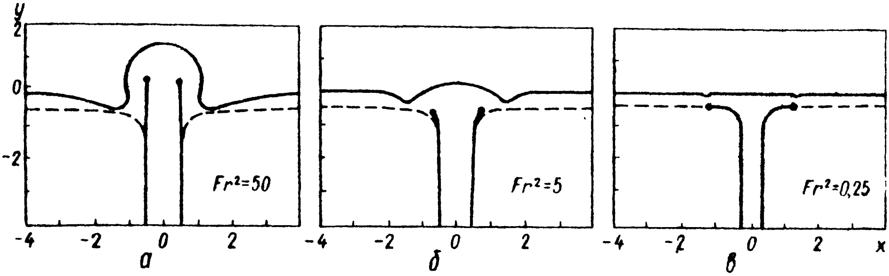


Рис. 54

относительно вихря 1 в правом квадранте, имеющего интенсивность κ. Интеграл данной системы имеет вид

$$a^2 (x_1^2 + y_1^2) = 4 x_1^2 y_1^2 , \quad a^2 = \frac{4 l^2 d^2}{l^2 + 4 d^2} \qquad (3.128)$$

и определяет гиперболу — траекторию вихрей. Здесь l — начальное расстояние между вихрями, d — начальное удаление вихрей от стенки.

Анализ формулы (3.128) показывает, что, приближаясь к твердой границе, вихри будут удаляться друг от друга, причем расстояние между ними и твердой стенкой будет асимптотически стремиться к $a/2$. Однако тщательный лабораторный эксперимент [96], выполненный в жидкости, показал, что вихревая пара будет «отскакивать» от твердой границы после того, как расстояние между вихрями превысит приблизительно учетверенное начальное. Такое расхождение между теорией и экспериментом показывает ограниченную применимость для слабо вязкой жидкости (воды) модели точечных вихрей. Дальнейший анализ этой задачи должен быть связан с учетом конечности размеров вихревых пар.

Задача о взаимодействии вихревой пары со свободной границей представляет значительно большие трудности даже для точечных вихрей. В статье [237] проведен детальный численный анализ этого процесса. Установлено, что в зависимости от значения числа Фруда $\mathrm{Fr} = \kappa/\sqrt{g^3}$, характеризующего влияние силы тяжести на деформацию свободной поверхности, возможны различные ситуации. Для значений $\mathrm{Fr} > 1$ вихревая пара имеет значительную начальную скорость, движется практически прямолинейно и, приблизившись к свободной поверхности, «выпрыгивает» из воды. Аналогичные результаты получены экспериментально [12] для осесимметричного случая вихревого кольца. Для значений $\mathrm{Fr} \sim$ имеет место промежуточная стадия, сопровождаемая генерацией поверхностной волны. И, наконец, при $\mathrm{Fr} < 1$ движение вихревой пары не отличается от случая твердой стенки. Некоторые количественные данные [237] воспроизведены на рис.54 для разных чисел Фруда. Штриховой линией показана траектория вихревой пары при наличии твердой стенки, сплошной — движение пары до определенного момента времени. Эта задача весьма интересна для численного моделирования на цветном дисплее компьютера — нового направления современной вычислительной гидродинамики [91, 263].

Интересна с точки зрения рассмотренного вопроса о переходе от упорядоченного движения к хаотическому задача о движении трех одинаковых вихрей вблизи твердой границы. Различные варианты такого движения подробно исследованы в [81, 112]. Фактически эта задача сводится к коаксиальному движению трех вихревых пар. Установлено, что в зависимости от начального расположения вихрей возможны как квазиупорядоченное движение, сопровождающееся чехардой [81], так и полностью хаотическое их движение [112]. Результаты иллюстрируются сечениями Пуанкаре, траекториями вихрей относительно подвижного центра завихренности и спектральными характеристиками траекторий. В совокупности эти данные показывают, что физическая картина движения значительно усложняется при добавлении всего одной коаксиальной вихревой пары. Это обстоятельство указывает на необходимость строгого обоснования широко применяемых при конкретных расчетах моделей «дискретных вихрей» с точки зрения хаотизации процесса.

Движение вихрей в прямолинейном канале. Наличие второй параллельной стенки горизонтального канала приводит к тому, что задача о движении одного или нескольких точечных вихрей может быть сведена к случаю безграничного пространства при наличии бесконечной последовательности вихрей соответствующей интенсивности, расположенных на одних вертикалях с исходными. Такие задачи детально рассмотрены в[15, 163]. В случае одного вихря задача допускает решение в квадратурах. При этом установлено, что вихрь равномерно движется внутри канала по прямой, параллельной стенкам, причем скорость зависит от местоположения в канале. При этом, если вихрь расположен строго посередине канала, то его скорость равна нулю и он покоится. Случай двух вихрей [17] также является интегрируемым, однако траектории движения будут значительно более сложными — наряду с поступательной чехардой при определенных начальных положениях будет иметь место своеобразное «запирание» движения, когда вихри движутся по замкнутым траекториям. Движение нескольких точечных вихрей в канале и связанная с этим задача вихревого сопротивления обтекаемого тела детально исследовались в [218].

Движение вихря в прямоугольнике. Такая задача [129] представляет интерес как нетривиальный пример ограниченной области, для которой не удается построить в конечном виде отображение на единичный круг. Это обстоятельство во многом предопределяет те сложности, с которыми приходится сталкиваться при рассмотрении такой, казалось бы, канонической области. Рассматривая вихрь интенсивности к в точке $P_0(x, y)$ прямоугольника $0 \le x \le 2a$, $0 \le y \le 2b$ легко убедиться, что располагая положительные изображения (интенсивности к) вихря в точках $P^+_{mn}(4ma + x, 4nb + y)$ и $Q^+_{mn}(4ma - x, 4nb - y)$, а отрицательные (интенсивности к) — в точках $P^-_{mn}(4ma - x, 4nb + y)$ и $Q^-_{mn}(4ma + x, 4nb - y)$ (здесь m и n — положительные и отрицательные целые числа, не обращающиеся одновременно в нуль), можно тождественно выполнить нулевые граничные условия на всех четырех сторонах прямоугольника. Тогда функция тока $\psi(x, y)$ определяется формулой

$$\psi(x, y) = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \prod_{m=n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(4m^2a^2 + 4n^2b^2)[(2ma - x)^2 + (2nb - y)]^2}{[(2ma - x)^2 + 4n^2b^2][4m^2a^2 + (2nb - y)^2]} . \tag{3.129}$$

показывает, что сомножитель $m = n = 0$ отсутствует.

Используя представления для эллиптических функций [80], бесконечное произведение (3.129) удается свернуть к компактному виду

$$\psi(x, y) = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{H\left(\frac{x + iy}{\sqrt{\lambda}}\right) H\left(\frac{x - iy}{\sqrt{\lambda}}\right)}{H^2\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) H^2\left(\frac{iy}{\sqrt{\lambda}}\right)} , \tag{3.130}$$

где $H(\nu)$ — функция Якоби, отношение действительных полупериодов Ω и Ω которой определяется пропорцией $\Omega/a = \Omega/b = \lambda^{-1/2}$.

Учитывая соотношение между эллиптическими функциями, выражение (3.130) дает неожиданно простое уравнение для траектории вихря:

$$\cot^2 am\left(K\frac{x}{a}\right) + \cot^2 am\left(K'\frac{y}{b}\right) = e^{\frac{4\pi\psi(x,y)}{\kappa}} - 1 = \text{const} . \tag{3.131}$$

Вид замкнутой траектории, задаваемой соотношением (3.131), частично проанализирован в [15]. В работе [84], в которой приведены некоторые дополнительные данные, характеризующие период обращения вихря, получена система уравнений

$$F\dot{x} = \frac{\kappa}{4\pi}\sqrt{4(F - p)^3 - g_2(F - p) + g_3} ;$$

$$F\dot{y} = -\frac{\kappa}{4\pi}\sqrt{4(F-p)^3 - g_2(F-p) - g_3},$$

где $p = \rho(x)$; $g = \omega(y)$ $F = p + g = \mathrm{const}$

ρ и ω — функции Вейерштрасса со стандартными параметрами g_2 и g_3.

Период обращения T определяется интегралом

$$T = \frac{8\pi}{\kappa}\int_{e_1}^{F+e_3}\frac{F\,dz}{\sqrt{(4z^2+g_2 z - g_3)[4(F-z)^3 - g_2(F-z)+g_3]}},$$

где e_1 и e_3 наименьший и наибольший действительные корни полинома $4z^3 - g_2 z - g_3$.

В частном случае, когда вихрь расположен строго в центре прямоугольника (a, b), он будет оставаться в покое. При небольшом отклонении от этого положения вихрь будет двигаться по эллипсу, причем период обращения постоянен:

$$T = \frac{8\pi^2}{\kappa\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}.$$

Задача о движении уже двух вихрей в прямоугольной области за исключением некоторых симметричных случаев начального расположения будет приводить к хаосу.

Движение точечных вихрей в круговой области. Характерной особенностью круговой области является возможность выполнить нулевые условия для нормальной составляющей скорости на границе, убирая окружность и добавляя к исходной системе n точечных вихрей дополнительные n вихрей. Они располагаются на продолжениях радиусов — векторов исходных, причем их радиусы R_α связаны с исходными радиусами r_α и радиусом круга a соотношением $R_\alpha r_\alpha = a^2$, а интенсивности равны и противоположны по знаку. Такая «зеркальная» инверсия позволяет рассмотреть многие интересные ситуации. И хотя такие задачи впервые рассмотрены на ранних этапах развития вихревой динамики [129, 169], в последнее время наблюдается устойчивый интерес к движению нескольких точечных вихрей в круговой области [90, 131, 153, 154]. Этот интерес связан с попыткой понять влияние границ на природу порядка и хаоса в динамике точечных вихрей. Не ставя целью охарактеризовать все полученные в этом направлении результаты (многие из рисунков цитированных работ обладают не только научной, но и эстетической ценностью, показывая, как причудливо и красиво организовано упорядоченное движение двух вихрей), дадим лишь общую постановку и приведем ряд любопытных данных, характеризующих специфические особенности движения при дополнительных ограничениях симметрии.

Уравнения, описывающие изменения во времени положений $z_\alpha(t)$ точечных вихрей интенсивности κ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$, которые расположены в круге $|z| \le a$, имеют вид

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{\beta=1}^{N}{}' \frac{\kappa_\beta}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^{N} \frac{(-\kappa_\beta)}{z_\alpha - \dfrac{a^2}{z_\beta^*}}\right]. \tag{3.132}$$

Отметим, что хотя при инверсии относительно окружности получается система $2N$ точечных вихрей в безграничной жидкости, уравнения (3.132) записываются только для основных вихрей. Это связано с тем, что остальные не являются свободными, а должны всегда «отслеживать» позицию исходных для выполнения условия на границе.

Система (3.132) имеет два инварианта I и H, вводимых по формулам

$$I = \sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha |z_\alpha|^2;$$

$$H = -\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{\alpha=1}^{N} \kappa_\alpha^2 \ln \frac{1}{a^2 - |z_\alpha|^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N}{}' \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln\left|\frac{z_\alpha - z_\beta}{1 - z_\alpha z_\beta^*}\right|\right]. \tag{3.133}$$

Наличие двух инвариантов (3.133) делает систему (3.132) интегрируемой для случая двух вихрей произвольной интенсивности. В работе [153] представлены данные, характеризующие движение вихревой пары и одинаковых вихрей в цилиндре. Построены фазовые траектории — зависимости величин $\eta_{1,2} = (\rho_1^2 \pm \rho_2^2)/2$, где $\rho_\alpha = r_\alpha/a_\alpha$, соответственно от разности углов $\theta_1 - \theta_2$ при различных значениях параметров I и $G = \exp(4\pi H)$. В зависимости от I фазовые кривые ведут себя различно, образуя как замкнутые, так и разомкнутые кривые. Для типичных точек построены траектории и проведена классификация типов движения в зависимости от начального расположения вихрей.

Остановимся на частном случае, когда в круге имеется n вихревых пар, расположенных в начальный момент времени симметричным чередующимся образом, т.е. координаты положительных вихрей $(\rho_0, 2\pi(\alpha - 1)/n + \theta_0)$, а отрицательных — $(\rho_0, 2\pi(\alpha - 1)/n - \theta_0)$, $0 \le \theta_0 \le \pi/n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае инвариант I будет тождественно равен нулю, а инвариант H приводит к соотношению между значениями ρ и θ:

$$\frac{\rho^2(\rho^{2n} - 1)^2 \sin^2 n\theta}{\rho^{4n} - 2\rho^{2n}\cos 2n\theta + 1} = \text{const}.$$

Вихри в каждом из секторов π/n совершают движения по замкнутым траекториям. На рис. 55 вихри представлены при $n = 1$ для некоторых начальных значений ρ_0, θ_0. Отметим, что для значения $\theta_0 = \pi/2n$, т.е. когда вихри лежат на биссектрисах соответствующих углов, а H удовлетворяет условию $1 - \rho_o^{4n} = 4n\rho_o^{2n}$, т.е.

$$\rho_0 = \left(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n \right)^{1/2n},$$

все вихри будут покоиться. Состояние равновесия при этом является устойчивым относительно симметричных возмущений [129, 169].

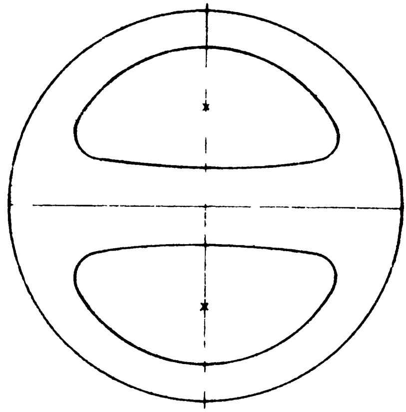


Рис. 55

Другие случаи при $N \geq 3$ будут приводить к хаотическим движениям.

7. Адвекция частиц жидкости в поле точечных вихрей

Адвекция частиц в поле точечного вихря. Во всех рассмотренных ранее плоских задачах о точечных вихрях в идеальной жидкости исследовались вопросы движения самих вихрей (изменение во времени их траекторий). Не меньший интерес представляет анализ движения окружающей эти вихри жидкости. При этом частицы жидкости находятся в потенциальном поле скорости и, на первый взгляд, их движения должны быть достаточно простыми. С движением именно этой области связаны практические вопросы о переносе пассивной примеси в атмосфере и океане, взбалтывании и перемешивании недиффундирующих жидкостей, визуализации потоков. И хотя об этой проблеме упомянул В.Гребли, активное изучение проблемы, носящее общее название проблемы адвекции, началось лишь благодаря работе Х.Арефа [89]. Благодаря работам [94, 127, 226], посвященным моделированию спектров двухмерной турбулентности, оказалось, что проблема адвекции весьма сложна. Эта ситуация, в первую очередь, связана с неустановившимся потенциальным полем скоростей, обусловленным движением точечных вихрей.

Математически постановка задачи о плоской адвекции выглядит так. Необходимо отыскать решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u(x, y, t); \quad \dot{y} = v(x, y, t);$$

большей для тех частиц, радиальная координата которых имеет меньшее значение.

Формулы (3.135) позволяют представить деформацию пятна, имеющего в начальный момент круговую форму в любой момент времени. Анализ результатов показал, что можно выделить три временных диапазона. В области времен $0 < t \le 2\pi\varepsilon^2/\kappa$ пятно слабо меняет свою форму. Область $2\pi\varepsilon^2/\kappa \le t \le 2\pi R^2/\kappa$ отвечает процессу закручивания вокруг вихря ближайшей к нему области пятна. Начиная с времени $t > 2\pi R^2/\kappa$ практически вся область пятна находится в закрученном спиралевидном состоянии.

Адвекция частиц в поле вихревой пары. Впервые деформацию прямолинейной линии, соединяющей в начальный момент времени два вихря вихревой пары, рассмотрел Е.Рике [215]. Впоследствии эта картина была воспроизведена в [3]. Ниже представлены дополнительные результаты по адвекции частиц жидкости и растяжении материальных линий и областей внутри и вне атмосферы вихревой пары.

Пусть в безграничной идеальной жидкости движется вихревая пара, координаты которой на комплексной плоскости определяются соотношениями

$$Z_1(t) = \frac{\kappa}{4\pi a} t + ia; \quad Z_2(t) = \frac{\kappa}{4\pi a} t - ia.$$

Ставится задача определения траектории движения $z(t) = x(t) + iy(t)$ частицы жидкости, занимающей в начальный момент $t = 0$ положение $z_0 = x_0 + iy_0$.

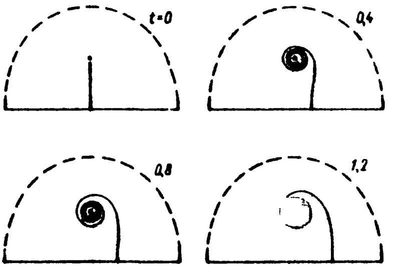
Уравнение движения частицы в потенциальном двухмерном поле скорости, индуцируемом двумя расположенными в точках $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ вихрями интенсивности $\pm\kappa$, имеет вид

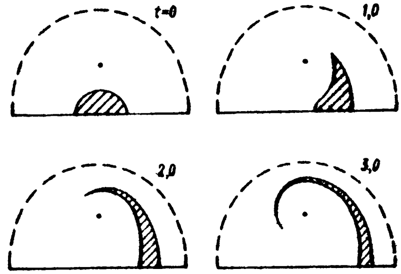
$$\dot{Z}^* = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\kappa}{z - Z_1} - \frac{\kappa}{z - Z_2}\right). \qquad (3.136)$$

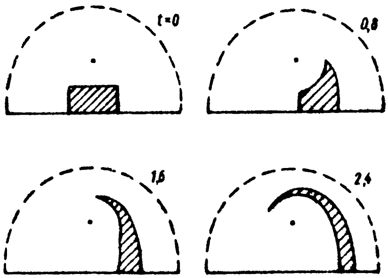
Учитывая закон движения (3.136), вводя безразмерные координаты $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\tau = (\kappa/\pi a^2)t$ и разделяя действительную и мнимую части в (3.214), получаем систему [24]

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\xi^2 - \eta^2 + 1}{[\xi^2 + (\eta - 1)^2][\xi^2 + (\eta + 1)^2]} - \frac{1}{4};$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{2\hat{\xi}\eta}{[\hat{\xi}^2 + (\eta - 1)^2][\xi^2 + (\eta + 1)^2]}; \quad \hat{\xi} = \xi - \frac{\tau}{4}. \qquad (3.137)$$







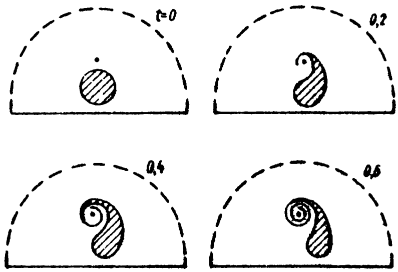


Рис. 56
Рис. 58

Рис. 57
Рис. 59

Автономная динамическая система (3.137) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$\psi(\hat{\xi}, \eta) = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{\hat{\xi}^2 + (\eta + 1)^2}{\xi^2 + (\eta - 1)^2} - \eta\right].$$

Соотношение

$$\ln\frac{\hat{\xi}^2 + (\eta + 1)^2}{\xi^2 + (\eta - 1)^2} - \eta = 4\psi(\xi_0 \eta_0) = \mathrm{const} \tag{3.138}$$

дает связь между координатами ξ и η в момент времени τ для исходной частицы. Таким образом можно последить за траекториями частиц, находящихся в поле вихревой пары. При практических расчетах интегрируемая система (3.137) решалась численно, а соотношение (3.138) использовалось в качестве контрольного.

Исследованы конкретные ситуации расположения некоторых областей жидкости как внутри, так и снаружи атмосферы вихревой пары. Для определения общей тенденции поведения частиц в поле

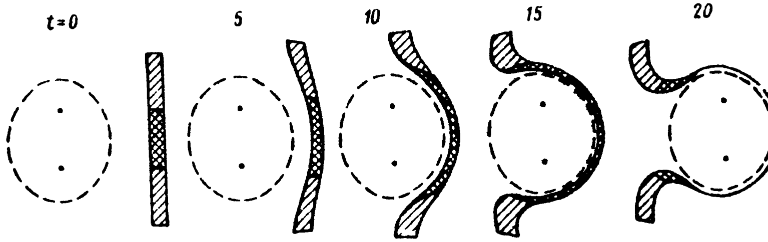


Рис. 60

вихревой пары произведены расчеты растяжения прямолинейного в начальный момент (здесь и далее показана только верхняя полуплоскость) отрезка, соединяющего оба вихря. На рис.56 показаны последовательные в различные моменты времени положения этого отрезка. Видно, что часть отрезка, расположенная вблизи вихрей, растягивается и закручивается внутри него, а остальная часть сносится к передней границе атмосферы. При этом длина отрезка $L(t) \sim t$ при $t \to \infty$.

На рис. 57 показана деформация круга радиусом $1/\sqrt{\pi}$, расположенного симметрично относительно двух вихрей. Здесь отчетливо проявляется тенденция вытягивания в спираль отмеченной области. При этом форма перемещенной области при больших временах качественно слабо зависит от своей начальной формы. Это подтверждает рис.58, где показаны положения в различные моменты времени квадрата, имеющего ту же площадь, что и рассмотренный выше круг. Влияние близости области к тому или иному вихрю отражает рис. 59. Здесь внутри атмосферы помещен круг радиусом 0,25, центр которого удален от верхнего вихря на расстояние 0,5. При этом картина деформирования такой круговой области показывает слабое влияние на нее второго вихря и практически совпадает с рассмотренным выше случаем адвекции в поле одного вихря. Справедливы также приведенные выше оценки для характерных временных масштабов Наконец, на рис. 60 показана деформация прямоугольной области, расположенной вне атмосферы пары вблизи ее передней границы. Здесь реализуется гладкое движение, характерное для потенциального обтекания овального твердого тела.

Рассмотренные ситуации являются наиболее простыми примерами интенсивно развивающегося в настоящее время [124, 151, 198, 254]направления гидромеханики — взбалтывании и перемешивании недиффундирующих жидкостей. Значительно более сложным примером является ситуация хаотической адвекции, например, движение частиц в поле трех точечных вихрей. Различные возможные картины движения частиц представлены в [9?].Такое хаотическое движение называется лагранжевой турбулентностью и представляется многообещающим для дальнейших исследований.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

О хаос, скрытый в недрах вещества...

М. А. Волошин «Путями Каина»

Следующим после плоских вихревых движений обширным классом являются осесимметричные структуры. Характерным для этих образований является то, что вихревые линии здесь представляют собой замкнутые окружности, центры которых расположены на одной и той же прямой. Впервые такой класс движений вихрей в идеальной безграничной жидкости рассмотрен Г.Гельмгольцем [135]. Он изучил общие свойства торообразной области завихренности (одиночного кольца) и в случае кольца малого конечного поперечного сечения показал, что оно движется, не изменяя радиуса центра тяжести поперечного сечения, с постоянной, но весьма большой скоростью, направленной в ту же сторону, в какую жидкость течет сквозь кольцо. В дальнейшем эта вихревая структура являлась предметом многочисленных исследований. Прежде всего это объясняется сравнительной легкостью формирования такого кольца, часто встречающегося и в природе. Удивительным свойством была неоднократно отмечавшаяся способность кольца продвигаться на значительные расстояния, сохраняя во времени свою устойчивую форму. Так, например, отмечалось [5], что холостой выстрел из пушки производит вихревое кольцо диаметром 1...2 м, движущееся со скоростью приблизительно 30 м/с и проходящее в среднем 450 м и способное благодаря своей энергии сбивать различные препятствия.

Теоретические исследования движения осесимметричных вихревых структур в идеальной жидкости, выполненные в прошлом столетии, позволили установить аналитическую формулу для скорости вихревого кольца (вызвавшую, согласно [69], много споров), обнаружить предельный случай — сферический вихрь Хилла [144] — и тщательно исследовать установившиеся движения одиночного кольца немалого поперечного сечения [121]. Вновь возникший интерес к проблеме взаимодействия вихревых структур в настоящее время объясняется стремлением более глубокого проникновения в природу различных гидродинамических явлений, а также их описания и понимания не с точки зрения параметров макродвижения, а при помощи законов, обусловленных внутренними процессами. Здесь необходимо отметить исследования когерентных структур в турбулентных течениях [147], образования взаимодействующих пространственных структур в следах за летящими птицами [207]. Кроме того, известен ряд исследований, в которых при помощи системы взаимодействующих вихревых колец моделировалась эволюция осесимметричных течений во времени [82, 110].

Предметом основного внимания в данной главе будут осесимметричные вихревые кольца, взятые в процессе их взаимодействия. Несмотря на подобное ограничение, в этих задачах можно встретить значительное разнообразие различных физических ситуаций. Прежде всего это относится к совмещенным концепциям порядка и хаоса в гамильтоновых динамических системах.

1. Уравнения движения

Как отмечено в первой главе, осесимметричное движение жидкости без закрутки в цилиндрической системе координат (r, ϑ, z) описывается вектором скорости $u=[u(r, z, t)0,\ u_z(r, z, t)]$. Такое допущение о поле скорости приводит к единственной отличной от нуля окружной компоненте вектора завихренности $\omega=[0,\ \omega(r, z, t), 0]$, где

$$\omega=\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}. \tag{4.1}$$

Уравнения Гельмгольца, записанные покомпонентно в табл.3, для осесимметричного случая движения сводятся к одному скалярному

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega}{r}\right)=0. \tag{4.2}$$

Условие несжимаемости жидкости позволяет ввести функции тока $\psi(r, z, t)$ для осесимметричного случая и записать

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z};\quad u_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{4.3}$$

Для идеальной жидкости ($\vartheta=0$) уравнения (4.1) и (4.2) с учетом (4.3) могут быть записаны в терминах ω—ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=r\,\omega;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left(\frac{\omega}{r}\right)=0. \tag{4.4}$$

В случае, если распределение $\omega(r, z, t)$ из каких-либо соображений известно, то первое из уравнений (4.4) можно свести к уравнению Пуассона относительно функции $r^{-1}\psi\cos\vartheta$ с плотностью $\omega\cos\vartheta/4\pi$, занимающей ту же область, что и завихренность. Отсюда следует представление

$$\psi(r, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S G(r, r', z - z')\,\omega(r', z', t)\,dr'dz';$$

$$G(r, r', z - z') = r'^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta' d\theta}{r^2 + r' - 2rr'\cos\theta' + (z - z')^2}\,. \qquad (4.5)$$

Здесь G — функция тока , обусловленная круговой вихревой нитью циркуляции $4\pi r$, которая проходит через точку (r', z'), а S — меридиональное поперечное сечение области завихренности.

В важном частном случае установившегося движения, когда $\partial/\partial t \equiv 0$, второе из уравнений (4.4) выполнимо при

$$\frac{\omega}{r} = F(\psi), \qquad (4.6)$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

Проблема отыскания установившихся осесимметричных движений завихренности чрезвычайно сложна — задача при этом сводится к совместному рассмотрению уравнений (4.5) и (4.6). При этом получается нелинейное интегральное уравнение с неизвестной границей ∂S области S. Различные современные подходы, основанные на асимптотических и численных методах, к анализу этой проблемы в случае вихревого кольца немалого конечного сечения изложены в [126, 190].

Возвращаясь к общему случаю движения и исключая в (4.4) завихренность ω, получаем уравнение только для функции тока ψ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right] = 0\,. \qquad (4.7)$$

Решение этого уравнения полностью определяет характер осесимметричного движения при соответствующих начальных и граничных условиях или условиях покоящейся на бесконечности безграничной жидкости. Отметим, что отыскание точных решений уравнений (4.7) представляется весьма нелегкой проблемой и к настоящему времени известно лишь одно такое решение — сферический вихрь Хилла [144].

Для дальнего поля $R \to \infty$ функция тока имеет вид [245]

$$\psi = \frac{r}{4\pi R}\left\{\frac{C}{R^2} + H(t)\frac{z}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\left[\left(\frac{5r^2}{R^2} - 4\right)I_1(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{5z^2}{R^2} - 1\right)I_2(t)\right] + O(R^{-5})\right\} \quad, R^2 = r^2 + z^2,$$

где

$$C = \pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^2 \omega(r, z, t)\, dr\, dz = \mathrm{const};$$

$$I_1(t) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^2 [\pi r^2 \omega_\theta]\, dr\, dz;$$

$$I_2(t) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} z^2 [\pi r^2 \omega_\theta]\, dr\, dz;$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} r^2 z \omega\, dr\, dz\, 2\pi.$$

Отсюда, используя (4.3), можно определить дальнее поле скорости при осесимметричном распределении завихренности.

2. Установившееся движение одиночных осесимметричных вихрей

Сферический вихрь Хилла. Прежде чем перейти к описанию взаимодействия нескольких осесимметричных вихрей, необходимо и интересно рассмотреть процесс движения одиночной осесимметричной вихревой структуры. В отличие от плоского движения, где одиночный вихрь не будет изменять координаты своего центра тяжести, осесимметричный вихрь будет двигаться поступательно вдоль оси z. Знание процессов такого движения — необходимая предпосылка для анализа более сложного процесса взаимодействия нескольких осесимметричных структур.

Впервые возможность ситуации, когда в безграничной идеальной жидкости существует движущаяся осесимметричная область с отличной от нуля завихренностью, обсуждалась М.Хиллом [143]. В работах В.Хикса [139, 140] с привлечением созданной теории тороидальных функций рассмотрены различные варианты движения и колебаний одиночных вихревых колец конечного сечения. Эти результаты позволили уточнить приведенную в [111, 238] приближенную формулу для скорости движения вихревого кольца. По богатству идей и фактического материала интересна работа Ф.Дайсона [121] (впоследствии Королевского астронома, получившего при наблюдении полного солнечного затмения 1919 г. данные, подтверждающие общую теорию относительности). Эту работу можно поставить в один ряд с работой В.Гребли по плоским вихрям.

М.Хилл [144] предложил выбрать частное решение уравнения (4.7), записанное в терминах функции тока для безграничной идеальной жидкости, в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 10\,\frac{k\,r^2}{a}, \tag{4.8}$$

где (a, k) — произвольные постоянные.

При этом уравнение (4.7), очевидно, удовлетворено тождественно. Частным решением уравнения (4.8) выступает выражение

$$\psi = r^2\left\{\frac{k}{a^2}(r^2 - a^2) + \frac{k}{a^2}(z - Z)^2 - \frac{1}{2}\dot{Z}\right\}, \tag{4.9}$$

где Z — произвольная функция только времени t.

Функция тока (4.9) позволяет легко определить все кинематические и динамические характеристики поля течения

$$u_r = 2\,\frac{k}{a^2}\,r\,(z - Z);$$

$$u_z = -\,2\,\frac{k}{a^2}(z - Z)^2 - 2\,\frac{k}{a^2}(2r^2 - a^2) - \dot{Z};$$

$$\omega = \frac{10\,k}{a^2}\,r. \tag{4.10}$$

Формулы (4.10) показывают, что кинематические характеристики неограниченно увеличиваются с ростом r. При этом компонента завихренности изменяется по линейному закону. Чтобы получить физически содержательное решение, М.Хилл предположил, что характер поля течения вида (4.10) справедлив только внутри сферы радиуса a, центр которой движется со скоростью $\dot{Z}$ вдоль оси z. Вне этой области жидкость образует потенциальное поле течения, соответствующее обтеканию твердой сферы радиуса a идеальной жидкостью. Такое решение хорошо известно.

Условие непрерывности на поверхности движущейся сферы нормальной составляющей скорости и давления приводит к необходимости выполнения условия $2k=3\dot{Z}/2$, которое показывает, что построенное сферическое образование (вихрь Хилла) будет существовать при постоянной скорости движения.

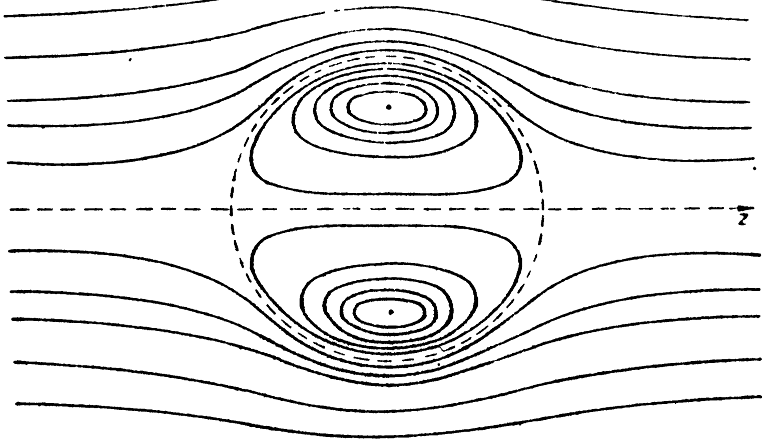


Рис. 61

Сведем в табл.7 итоговые результаты, полностью характеризующие движение сферического вихря Хилла через его параметры — радиус a и скорость Z=const. Здесь $R^2=r^2+(z-Z$ — расстояние от точки наблюдения (r, z) до центра сферы.

На рис. 61 представлена картина меридионального сечения сферического вихря, движущегося с постоянной скоростью в жидкости. Сплошные линии отвечают осесимметричным поверхностям, содержащим одни и те же жидкие частицы. Замкнутые линии внутри вихря отвечают кривым

$$r^2(R^2 - a^2) = - d^4 = \text{const}; \quad 0 \le d^4 \le \frac{a^4}{4},$$

а разомкнутые — задаются уравнением

$$r^2[1 - (a/R)^3] = d^2 = \text{const}; \quad 0 \le d^2 \le \infty .$$

Видно, что внутри вихря частицы движутся по замкнутым траекториям, имеющим в качестве центра точку $r=0{,}71a$, $z-Z=0$. Период полного оборота частицы по замкнутой траектории удается вычислить аналитически и выразить через эллиптические интегралы. Установлено [144], что при уменьшении d^4 от $a^4/4$ до 0 время полного оборота возрастает с $4a\pi/3Z$ до ∞. Последнее значение связано с наличием критических точек P^+ и P^- на сепаратрисе — поверхности сферы.

Вне сферы возмущения, обусловленные наличием вихревой области, быстро убывают с ростом r (например, при удалении от оси на расстояние $10\,a$ траектория частиц отклоняется от прямой $r=10a$ не больше, чем на $a/200$).

Таблица 7

Параметры	Вихревое движение	
	внутри сферы ($r\leq a$)	вне сферы
Скорость		
радиальная	$3Zr(z-Z)/2a$	$3a^3Zr(z-Z)/2R^5$
осевая	$Z[5a^2-3(z-Z)^2-6r^2]/2a^2$	$a^3Z[3(z-Z)^2-R^2]/2R^5$
Функция тока	$3Zr^2(R^2-\frac{5}{3}a^2)/4a^2$	$-a^3Zr^2/2R^3$
Поверхности, содержащие одни и те же частицы	$3Zr^2(R^2-a^2)/4a^2=\text{const}$	$Zr^2(R^3-a^3)/2R^3=\text{const}$
Потенциал скорости	—	$-a^3Z(z-Z)/2R^3$
Завихренность	$15Zr/2a^2$	—
Кинетическая энергия	$23\pi a^3Z^2/21$	$\pi\rho a^3Z^2/3$

Попытка рассмотреть стационарно движущийся, имеющий завихренность эллипсоид вращения, несмотря на возможность построения замкнутых аналитических выражений для поля скорости в такой канонической области [144], не привела к успеху. При этом не достигнута непрерывность давления на поверхности эллипсоида, что привело к необходимости учитывать периодическую деформацию разделяющей поверхности в процессе движения. Более детальные результаты содержатся в [132].

Построенное точное решение — сферический вихрь Хилла — вызвало у ученых [43] вопрос о возможности наблюдения такого объекта. В работах [186, 202] исследовалась «реакция» сферического вихря Хилла на некоторые осесимметричные возмущения его поверхности. Как аналитически (методом возмущения формы границы) [186], так и численно [202] установлены достаточно нетривиальные результаты. Так, при незначительном растяжении сферы вдоль оси движения, т.е. когда вихрь Хилла в начальный момент имеет форму вытянутого сфероида, определенная часть завихренной жидкости вытягивается в виде данного шлейфа вниз по течению, а основная масса завихренной жидкости к сферической форме. Если начальная форма вихря является сплющенным сфероидом, то картина будет иной. Безвихревая жидкость будет захватываться через кормовую точку P^-, продвигаться внутри вихря и почти достигать носовой точки P^+. В дальнейшем эта жидкость будет циркулировать вблизи границы вихревой области. В конечном итоге картина асимптотически приближается к почти стационарному движению вихревого кольца немалого поперечного сечения, параметры которого зависят от начальной деформации. Большое число рисунков, показывающих последовательность процесса разрушения сферического вихря, приведено в [202] на основании тщательного численного расчета. В совокупности эти данные показывают возможный механизм формирования вихревого кольца из сферической капли. Эти вопросы тесно связаны с задачами движения пузырьков, капель и термиков в жидкостях.

Суммируя сказанное, отметим, что сферический вихрь Хилла образует предельный случай семейства установившихся осесимметричных вихревых образований, движущихся не меняя своей формы в безграничной идеальной жидкости. Другим типом такой вихревой структуры является вихревое кольцо.

Одиночное вихревое кольцо. Впервые такую задачу с учетом свойств завихренности внутри кольца рассмотрел В.Хикс [139, 140]. Основываясь на использовании разложений искомых функций тока внутри и вне вихревого кольца в ряды по полной системе тороидальных функций для главного члена разложения скорости движения кольца W, для случая равномерной завихренности в кольце (ω/r=const) В.Хикс получил равенство

$$W = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right), \qquad (4.11)$$

где R — расстояние от оси z до центра тяжести поперечного сечения вихревого кольца; a — радиус поперечного сечения кругового кольца равной площади с исходным; κ — общая интенсивность завихренности в кольце.

В то же время для вихревого кольца с однородной завихренностью малого кругового сечения в [111, 160, 168, 238] были выписаны главные члены разложения эллиптических интегралов, входящих в выражение (4.5) для функции тока, и на этой основе предложена формула для скорости поступательного движения кольца:

$$W = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} - 1\right). \qquad (4.12)$$

Поскольку $8R/a >> 1$, то различие между численными значениями скорости, вычисленными по (4.11) и (4.12), весьма мало. Однако это расхождение имеет принципиальный характер, так как ранее В.Томсон [240], исходя из работы Г.Гельмгольца [135], на основе элементарных соображений получил формулу (4.11).

Корректное решение этой задачи сделал Ф.Дайсон [121]. Хотя в этой работе содержатся исчерпывающие сведения обо всех характеристиках установившегося движения вихревого кольца конечного сечения, в 1970 г. независимо опубликованы статьи [126, 221], посвященные данной проблеме. Наконец, в [190] проведен детальный численный анализ движения вихревого кольца и подтверждена надежность асимптотических разложений Ф.Дайсона.

Рассмотрим вихревое кольцо меридионального сечения S (рис.62), расположенное в безграничной идеальной жидкости. Принимая, что

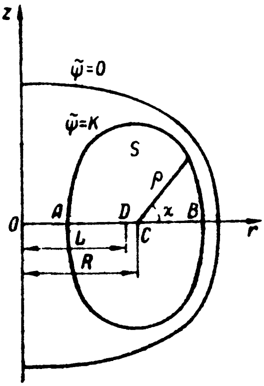


Рис . 62

форма сечения кольца близка к круговой, в местной полярной системе координат (ρ, χ) с началом в центре тяжести сечения c можно записать параметрическое уравнение границы кольца:

$$\rho = a\,(\,1 + \beta_1 \cos\chi + \beta_2 \cos 2\chi + \ldots\,)\,,$$

где a — средний радиус сечения; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ — малые величины.

Расположение начала координат в центре тяжести приводит к равенству

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} \rho \cos\chi\, \rho\, d\rho\, d\chi = 0\,,$$

откуда следует, что

$$\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_4 = \ldots = 0\,.$$

Как показано в [121], $\beta_2 = O(\sigma^2)$, $\beta_3 = O(\sigma^3)$ и так далее, поэтому $\beta_1 = O(\sigma^5)$, где $\sigma = a/R < 1$. Следовательно, с точностью до членов σ^4 уравнение поперечного сечения кольца имеет вид

$$\rho = a\,(\,1 + \beta_2 \cos 2\chi + \beta_3 \cos 3\chi + \beta_4 \cos 4\chi\,)\,. \qquad (4.13)$$

Принимая равномерное распределение завихренности внутри кольца $(\omega/R = \Omega = \text{const})$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (4.2), для определения функции тока $\psi(r, z)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \begin{cases} -\ \Omega r^2 & \text{внутри } S, \\ \ \ 0 & \text{вне } S \end{cases} \qquad (4.14)$$

при условиях непрерывности ψ и $\partial\psi/\partial n$ на границе вихревого кольца и убывания на бесконечности.

Как отмечалось выше, решение уравнения (4.14) для точек r, z вне вихревого кольца может быть записано в виде

$$\psi(r, z) = \frac{\Omega}{4\pi}\, r \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_s \frac{r'^2 \cos\theta\, dr'dz'd\theta}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2 + (z - z')^2}}\,, \qquad (4.15)$$

где интегрирование проводится по всей области, занятой вихревым кольцом. Ф.Дайсон [121] развил эффективный способ вычисления интегралов (4.15), предвосхищающий операционный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных в теории теплопроводности и упругости.

Вводя замену $r'=R-x'$, формулу (4.15) можно формально записать в виде

$$\psi(r,z)=\frac{\Omega}{4\pi}r\int_S e^{-\left(x'\frac{d}{dr}+z'\frac{d}{dz}\right)}dx'dz'\int_0^{2\pi}\frac{R^2\cos\theta}{\sqrt{r^2-2Rr\cos\theta+R^2+z^2}}$$

и при вычислении двойного интеграла по области S, задаваемой по (4.13), рассматривать d/dr и d/dz как константы.

После громоздких, но очевидных выкладок приходим к асимптотическому ряду

$$\psi(r,z)=\frac{\kappa r}{2\pi}\left[I+a_1(aR)\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)I+a_2(aR)^2\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^2 I+\right.$$

$$\left.+a_3(aR)^3\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^3 I+\ldots\right], \qquad (4.16)$$

где

$$a_1=\frac{\frac{3\sigma}{8}+\frac{5\sigma}{4}\beta_2}{1+\frac{\beta_2^2}{2}};$$

$$a_2=\frac{\frac{\sigma^2}{64}+\beta_2\left(\frac{1}{2}-\frac{5\sigma^2}{16}\right)-\beta_3\frac{5\sigma}{8}}{1+\frac{\beta_2^2}{2}};$$

$$a_3=\frac{-\frac{\sigma^3}{3072}+\beta_2\frac{\sigma}{8}-\frac{\beta_3}{6}}{1+\frac{\beta_2^2}{2}};$$

$$\sigma=\frac{a}{R};\quad I=\int_0^{\pi}\frac{R^2\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2-2rR\cos\theta+R^2+z^2}};\quad \kappa=\Omega\pi a^2R\left(1+\frac{\beta_2^2}{2}\right).$$

Если кольцо находится в установившемся движении со скоростью в положительном направлении оси z, то на поверхности кольца $r=R+\rho\cos\chi$, $z=\rho\sin\chi$ должно выполняться равенство

$$\tilde{\psi} \equiv \psi - \frac{1}{2} W r^2 = \text{const}, \qquad (4.17)$$

которое отражает тот факт, что при наложении на исходное течение постоянного поля $(0, 0, W)$ с функцией тока $-\frac{1}{2}Wr^2$ вихревое кольцо будет покоиться и не изменять форму границы. Комбинируя соотношения (4.13), (4.16) и (4.17) и собирая подобные члены при $\cos\chi$, $\cos 2\chi$ и так далее, получаем нелинейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных β_2, β_3, β_4, решение которой [121] имеет вид

$$W = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{4} - \frac{12\lambda + 9}{32}\sigma^2\right);$$

$$\beta_2 = -\frac{12\lambda + 7}{32}\sigma^2 + \frac{72\lambda + 77}{3072}\sigma^4;$$

$$\beta_3 = -\frac{168\lambda + 63}{1024}\sigma^3;$$

$$\beta_4 = \frac{84\lambda^2 + 111\lambda + 41}{512}\sigma^4; \quad \lambda = \ln\frac{8R}{a} - 2. \qquad (4.18)$$

Уравнения (4.18) дают скорость движения кольца при установившемся движении и форму его поперечного сечения. Поперечное сечение слегка вытянуто в направлении движения кольца, но значения β_3 и β_4 обычно очень малы. Например, для σ=0,3 (случай весьма толстого кольца)

$$W = \frac{\kappa}{4\pi R} 2{,}96; \quad \beta_2 = -0{,}063; \quad \beta_3 = -0{,}006; \quad \beta_4 = 0{,}005.$$

Нетрудно видеть, что для такого случая применение формулы (4.12) дает погрешность 25%.

Современные асимптотические подходы к этой задаче [126, 252] дали аналогичные (4.18) разложения, однако малый параметр α при этом выбирался иным и учитывалось достаточно произвольное распределение завихренности $\omega = F(\psi)$ внутри кольца. Для случая равномерной завихренности получены асимптотические формулы для скорости W, импульса жидкости P вдоль оси z и кинетической энергии T:

$$W = \frac{\kappa}{4\pi L}\left[\left(\ln\frac{8}{\alpha} - \frac{1}{4}\right) + \alpha^2\left(-\frac{3}{2}\ln\frac{8}{\alpha} + \frac{15}{32}\right)\right] + O(\delta^4);$$

Таблица 8

σ	V_2	E_1/E_0, %	E_2/E_0, %	E_3/E_0, %
0,0005	0,56 R^3	0,3	70,4	29,3
0,0116	1,362 R^3	0,7	72,4	26,9
0,05	1,685 R^3	2,6	67,0	30,4
0,1	2,18 R^3	5,2	62,8	32,0

$$P=\rho\kappa\pi L^2\left[1+\frac{3}{4}\alpha^2\right]+O(\delta^4);$$

$$T=\frac{1}{2}\rho\kappa^2 L\left[\left(\ln\frac{8}{\alpha}-\frac{7}{4}\right)+\frac{3}{8}\alpha^2\ln\frac{8}{\alpha}\right]-O(\delta^4), \qquad (4.19)$$

где $\delta=\alpha\ln\dfrac{8}{\alpha}$: L — средний радиус кольца, определяемый полусуммой наибольшего OB и наименьшего OA удаления границ поверхности кольца от оси z (рис.62).

Безразмерный параметр α вводится так, чтобы площадь сечения кольца S была равна площади круга радиуса $L\alpha$, т.е. $\alpha^2=|S|/\pi L^2$. Для тонких колец параметры σ и α практически совпадают, при более толстых — существенно различны. Отметим, что α изменяется в пределах от 0 до $\sqrt{2}$. Последний случай отвечает сферическому вихрю Хилла. Отметим, что скорость вихря Хилла, вычисленная согласно асимптотической формуле (4.19), отличается от точной всего на 6%.

Отметим, что в [221] на основе общих соотношений для функции тока и энергии, приведенных в [46, 135], получены следующие соотношения для скорости W и энергии T произвольного распределения завихренности, но только в тонком кольце кругового поперечного сечения:

$$W=\frac{\kappa}{4\pi R}\left[\ln\frac{8R}{a}-\frac{1}{2}+\int_0^a\Gamma^2(S)\frac{dS}{S}\right]+O\left(\frac{\kappa a}{R^2}\ln\frac{a}{R}\right);$$

$$T=\frac{\rho}{2}\kappa R^2\left[\ln\frac{8R}{a}-2-\int_0^a\Gamma^2(S)\frac{dS}{S}\right]+O\left(\kappa^2 a\ln\frac{a}{R}\right);$$

$$\Gamma(S)=\frac{2\pi}{\kappa}\int_0^S\rho\,\omega_0(\rho)\,d\rho,\quad \Gamma(a)=1. \qquad (4.20)$$

Для частного случая равномерной завихренности, когда $\omega_0(\rho)=\kappa/\pi a^2$ $(0\le\rho\le a)$ (вращение как твердого тела) $\Gamma(S)=S^2/a^2$, приходим к формуле Кельвина (4.11).

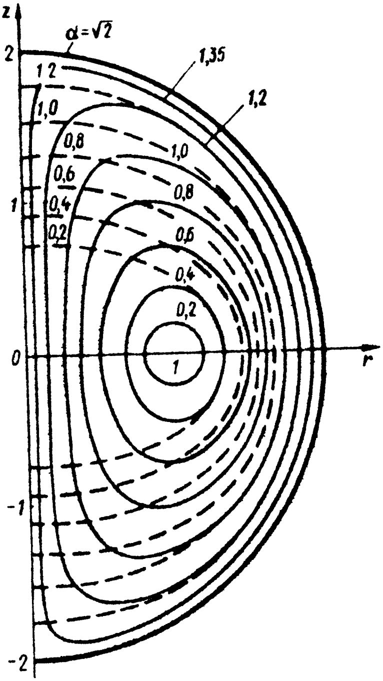


Рис. 63

Важной особенностью установившегося движения вихревого кольца является перенос вместе с ним некоторой массы жидкости. Границей области для массы служит уравнение $\psi=0$, выражающее тот факт, что осевая скорость частиц на границе равна скорости движения кольца. В отличие от овальной по форме атмосферы вихревой пары возможны три различных по связности конфигурации данной области, а именно: тороид, целиком охватывающий вихревое кольцо, лемнискатная поверхность с особой точкой, расположенной строго на оси кольца, и сплющенный сфероид [8, 43]. Однако первые две формы чрезвычайно трудно реализовать в экспериментах ввиду необходимости создания очень тонкого кольца. Нетрудно показать (впервые это сделал В.Хикс [141]), что тороидальная область будет иметь место лишь для $\sigma < 0{,}0116$. Лемнискатной поверхности отвечает предельное значение $\sigma = 0{,}0116$.

Таким образом, все пространство, занятое идеальной жидкостью, в которой движется с постоянной скоростью осесимметричное вихревое кольцо, можно разбить на три области. Область I — непосредственно вихревое кольцо; внутренняя II — безвихревая жидкость, движущаяся вместе с кольцом; наружная III — безвихревая жидкость, покоящаяся на бесконечности. В работе [141] при относительно малых значениях σ, когда форму установившегося движения кольца можно считать круговой, изучены соотношения объемов и кинетических энергий для каждой из этих областей.

В табл.8 приведены объемы V_{II} области II и кинетическая энергия каждой из областей E_i/E_0, где E_0 — общая кинетическая энергия. Анализ полученных численных данных табл.8 показывает интересную закономерность в распределении энергий — наибольший вклад в суммарную энергию дает область II, движущаяся вместе с кольцом. Этим и объясняется возможность передачи вихревым кольцом большой энергии на значительные расстояния.

Приведенные результаты относятся исключительно к ситуации тонких вихревых колец, когда их сечение при установившемся сечени круговое. В работе [190] проведен полный и подробный анализ на основе численного решения нелинейного интегрального уравнения (4.5) для случая равномерной завихренности ω/r=const. Как и в [126], кольца параметризовались по параметру α. На рис.63 представлены характерные ситуации для различных значений α. Сплошными линиями обозначены формы границ сечения вихревого кольца, штриховые линии отвечают границам внутренней области II, движущейся вместе с кольцом. Видно, и данные расчета это подтверждают, что с увеличением α от 0 до приблизительно 0,3 объем области II увеличивается, а затем монотонно уменьшается, стремясь к нулю при $\alpha \to \sqrt{2}$. Предельное значение $\alpha = \sqrt{2}$ отвечает рассмотренному выше сферическому вихрю Хилла. Примечательно, что этот вихрь не вовлекает с собой в движение безвихревую массу жидкости.

3. Взаимодействие коаксиальных вихревых колец

Уравнения движения. Задачи о взаимодействии круговых вихревых колец принадлежат к числу наиболее интересных проблем динамики завихренности. С момента опубликования работы [135], где приводится качественное описание совместного движения двух коаксиальных вихревых колец, постоянный интерес к этой области обусловлен не только внутренней красотой задач, но и прямым применением полученных при их решении результатов к объяснению природы различных физических явлений. Решение задачи для общего случая движения нескольких произвольно ориентированных вихревых колец наталкивается на огромные математические трудности и в настоящее время отсутствует. Важный частный случай взаимодействия коаксиальных тонких вихревых колец представляется более доступным для математической трактовки и анализа результатов. Тем не менее, благодаря сложной картине взаимодействия нельзя, рассмотрев какие-либо конкретные случаи, предсказать поведение системы коаксиальных колец в общем виде. Поэтому будем придерживаться такой линии описания, которая будет использовать любую возможность классифицировать процессы взаимодействия по характерным начальным условиям.

Как и при взаимодействии плоских вихревых структур, в пространственном осесимметричном движении весьма вероятны неупорядоченные хаотические ситуации. В данном параграфе рассмотрим общие положения движения системы из N коаксиальных вихревых колец, а также детально ситуацию, когда взаимодействуют два коаксиальных вихревых кольца произвольных начальных параметров.

Пусть в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, имеется N коаксиальных круговых вихревых колец интенсивностей κ_i с координатами Z_i, R_i (используется цилиндрическая система координат). Здесь R_i — радиус i-го вихревого кольца — расстояние от оси z до центральной линии сечения кольца, представляющей собой окружность. Предположим, что на всем протяжении движения сохраняется условие малости кругового поперечного сечения колец радиусом $a_i (a_i << R_i)$. Требуется определить в любой момент времени положение в пространстве каждого вихревого кольца.

Уравнения движения относительно функции тока имеют в этом случае в цилиндрических координатах вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r^2 f_i(\psi) = 0, \quad i = 1, N, \tag{4.21}$$

где в областях, занятых кольцами, $f_i(\psi) \neq 0$, а везде вне области колец $f_i(\psi) = 0$.

Функции ψ и ее производные непрерывны на поверхности колец. Для осесимметричного случая однородной завихренности ($\omega/r = \mathrm{const}$) всегда $f_i(\psi) \equiv M_i = \mathrm{const}$.

Для решения задачи выберем на поверхности i-го кольца произвольную точку P_i, координаты которой

$$r_i' = R_i - a_i \cos\alpha;$$

$$z_i' = Z_i + a_i \sin\alpha.$$

Здесь α — угол радиусом кольца R_i и нормалью, проведенной к поверхности кольца через точку P_i.

Величина функции тока ψ для точки P_i будет состоять из части ψ_i, связанной непосредственно с распределением завихренности R_i, и части $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \psi_j$, связанной с распределением завихренности остальных N—1 колец.

Величина ψ_i определяется из (4.21) стандартным образом:

$$\psi_i = \frac{M_i r_i'}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{r^2 \cos\theta \, dz \, dr \, d\theta}{\sqrt{(z_i' - z)^2 + r^2 - 2r_i' r \cos\theta + r'^2}}.$$

Интегрирование ведется по объему вихревого кольца V.

Проинтегрировав это выражение по окружной координате ϑ, получим выражение

$$\psi_i = \frac{M_i r_i'}{4\pi} \iint\limits_S \frac{4 r^2}{\sqrt{(z_i' - z)^2 + (r' + r)^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2}{k^2} \left[K(k) - E(k) - \frac{1}{k} K(k) \right] \right\} dz \, dr;$$

$$k^2 = \frac{4\zeta' r}{(\zeta' - z)^2 + (\zeta' + r)^2} . \qquad (4.22)$$

В точке P_i, расположенной на поверхности кольца, модуль $k^2 \approx 1$. В этом случае эллиптические интегралы представляются, согласно [80], в виде степенных рядов:

$$K(k) = \ln\frac{4}{k'} + \left(\ln\frac{4}{k'} - 1\right)\frac{k'^2}{4} + \ldots \quad ;$$

$$E(k) = 1 + \left(\ln\frac{4}{k'} - 1\right)\frac{k'^2}{2} + \ldots , \qquad (4.23)$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Подставив (4.23) в выражение (4.22) и представив подынтегральную функцию в виде ряда по степеням a_i/R_i, получим

$$\psi_i = \frac{M_i a_i^2 R_i}{2\pi}\left\{\ln\frac{8R_i}{a_i} - 2 - \left(\ln\frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4}\right)\frac{a_i}{2R_i}\cos\alpha + \ldots\right\} .$$

Для определения вклада ψ_j от j-го кольца в точку P_i воспользуемся выражением закона Био — Савара (1.35) в виде

$$\psi_j = \frac{M_j a_j^2 R_j}{2\pi}\left\{I_{ij} + a_i \sin\alpha\frac{\partial I_{ij}}{\partial Z_i} - a_i\cos\alpha\frac{\partial I_{ij}}{\partial R_i}\right\} ,$$

где $I_{ij} = \sqrt{R_i R_j}\, C(k)$;

$$C(k) = \left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij}\right)K(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}}E(k_{ij}) ;$$

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_i R_j}{(Z_i - Z_j)^2 + (R_i + R_j)^2} .$$

Введем очевидную замену $\varkappa_i = \pi M_i a_i^2 R_i$. Тогда суммарное значение функции тока на поверхности i-го кольца в точке P_i с точностью до членов второго порядка запишем в виде

$$\psi = \frac{\varkappa_i R_i}{2\pi}\left[\left(\ln\frac{8R_i}{a_i} - 2\right) - \left(\ln\frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4}\right)\frac{a_i}{2R_i}\cos\alpha\right] +$$

$$+ \frac{\varkappa_j}{2\pi}\left(I_{ij} + a_i\sin\alpha\frac{\partial I_{ij}}{\partial Z_i} - a_i\cos\alpha\frac{\partial I_{ij}}{\partial R_i}\right) +$$

$$+\frac{\kappa_l}{2\pi}\left(I_{il}+a_i\sin\alpha\frac{\partial I_{il}}{\partial Z_i}-a_i\cos\alpha\frac{\partial I_{il}}{\partial R_i}\right)+\ldots. \qquad (4.24)$$

Теперь, используя выражение (4.24), нетрудно перейти к уравнениям, описывающим изменение параметров колец в результате их взаимодействия. В процессе движения кольцо i будет двигаться со скоростью $\dot{Z}_i$; его радиус будет изменяться со скоростью $\dot{R}_i$. При этом, поскольку кольца в процессе движения сохраняют свой объем ($a_i^2R_i=\mathrm{const}$), радиус поперечного сечения i-го кольца изменится как $\dot{a}_i=-a_i\dot{R}_i/2R_i$. Так как $a_i/R_i<<1$, то и $\dot{a}_i/\dot{R}_i<<1$.

Нормальная скорость, взятая в любой точке на поверхности кольца,

$$W_n=\dot{Z}_i\sin\alpha-\dot{R}_i\cos\alpha-\dot{a}_i.$$

Кроме того, нормальная скорость на поверхности кольца есть величина $W_n=r^{-1}\partial\psi/\partial S$, где S — направление нормали. Следовательно, на поверхности i-го кольца

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=r\,(\dot{Z}_i\sin\alpha-\dot{R}_i\cos\alpha-\dot{a}_i), \qquad (4.25)$$

откуда

$$\psi=\int_s(\dot{Z}_i\sin\alpha-\dot{R}_i\cos\alpha-\dot{a}_i)\,r\,ds=$$

$$=\int_\alpha(\dot{Z}_i\sin\alpha-\dot{R}_i\cos\alpha-\dot{a}_i)(R_i-a_i\cos\alpha)\,a_i\,d\alpha=$$

$$=a_iR_i\dot{Z}_i\cos\alpha-a_iR_i\dot{R}_i\sin\alpha+\ldots. \qquad (4.26)$$

Приравнивая выражения (4.26) и (4.24), окончательно получаем

$$\dot{Z}_i=\frac{\kappa_l}{4\pi R_i}\left(\ln\frac{8R_i}{a_i}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{\kappa_iR_i}\frac{\partial U}{\partial R_i};$$

$$\dot{R}_i=-\frac{1}{\kappa_iR_i}\frac{\partial U}{\partial Z_i}, \qquad (4.27)$$

где $U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}{}'\kappa_i\kappa_jI_{ij}$, а штрих при знаке суммирования означает, что $i \neq j$.

Уравнения (4.27) вместе с условием постоянства объема колец

$$a_i^2 R_i = \text{const} \qquad (4.28)$$

и соответствующими начальными условиями полностью описывают движение системы N колец в терминах Z_i и R_i. Нетрудно видеть, что первое слагаемое первого уравнения (4.27) представляет собой самоиндуцированную скорость вихревого кольца, т.е. с такой скоростью кольцо двигалось бы, если бы отсутствовали в жидкости другие кольца. Составляющие, в которые входит функция U, представляют собой компоненты наведенной на i-е кольцо скорости от остальных $N—1$ колец. В выражении для функции U отсутствует в явном виде параметр конечного сечения вихревого кольца a. Это не означает, что кольца, от которых наводится скорость, рассматриваются как бесконечно тонкие круговые нити интенсивности κ_j. Величину κ_j можно записать в виде

$$\kappa_j = \int\limits_S \omega_j \, dS .$$

Отсюда видно, что элементы площади кругового сечения колец входят в данном случае в выражение интенсивности завихренности. Единственное допущение, которое имеет место при выводе уравнений (4.27) в рамках идеальной жидкости, есть предположение о сохранении кольцами кругового по форме сечения на всем протяжении пути. Как показано в [82, 259], такое допущение при модельных оценках приемлемо.

Записанные в виде (4.27) уравнения движения отражают, на первый взгляд, лишь кинематику процесса. Однако эти уравнения являются одновременно решением системы динамических уравнений Гельмгольца для завихренности.

Первые интегралы. Система уравнений (4.27), (4.28) обладает двумя независимыми инвариантами. Первый получается следующим образом. Поскольку U является функцией от $Z_i—Z_j$, то очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{N} \partial U/\partial Z_i = 0$. Тогда из второго уравнения (4.27) получаем $\sum\limits_{i=1}^{N} \kappa_i R_i \dot{R}_i = 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \kappa_i R_i^2 \equiv I = \text{const} . \qquad (4.29)$$

Сумма (4.29) с точностью до постоянного множителя совпадает с импульсом поля течения, обусловленного наличием системы вихревых колец [8]. Закон сохранения импульса в виде (4.29) установлен еще в работе [135]. Отметим, что запись данного закона в представленном виде справедлива как для модели идеальной жидкости, так и для течений с учетом вязкости [221].

Второй инвариант впервые установлен в [121]. Умножая первое уравнение в (4.27) на $\kappa_i R_i R_i$, второе — на $(-\kappa_i R_i Z_i)$ и проводя суммирование, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i^2}{4\pi} R_i \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} R_i + \frac{\partial U}{\partial Z_i} Z_i \right) = 0$$

Учитывая условие постоянства объема (4.28) и отсутствие явной зависимости функции U от времени, в результате интегрирования получаем условие

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i^2 R_i}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U \equiv T = \text{const} . \qquad (4.30)$$

Это и есть второй инвариант движения. Здесь слагаемые, находящиеся под знаком суммы, выражают (с точностью до постоянного множителя) кинетическую энергию жидкости, обусловленную изолированными вихревыми кольцами, а функция U — кинетическую энергию взаимодействия колец. Запись закона сохранения кинетической энергии в виде (4.30) справедлива только в рамках модели идеальной жидкости [221].

Важно отметить, что система (4.27) сводится к гамильтоновой системе относительно канонических переменных $p_i = R_i^2$, $q_i = Z_i$

$$p_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (4.31)$$

с независящим от времени гамильтонианом

$$H(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i p_i^{1/2}}{2\pi} \left(\ln \frac{8p_i^{3/4}}{A_i^{(0)}} - \frac{7}{4} \right) + \sum_{i,j=1}^{N}{}' \frac{\kappa_j p_i^{1/4} p_j^{1/4}}{\pi} C(k_{ij}) ,$$

где $k_{ij}^2 = \dfrac{4p_i^{1/2} p_j^{1/2}}{(p_i^{1/2} + p_j^{1/2})^2 + (q_i - q_j)^2}$; $A_i^{(0)\,2} = n_i^{(0)\,2} R_i^{(0)}$; $n_i^{(0)} = \dfrac{a_i^{(0)}}{R_i^{(0)}}$.

Возможность сведения системы уравнений (4.27) к гамильтоновому виду (4.31) отмечалась также в работах [45, 192].

Гамильтонова система (4.31) кроме H имеет еще один первый интеграл $\sum \kappa_{(i)} p_i = \mathrm{const}$, поэтому, согласно теореме Лиувилля [32], для $N=2$ такая система всегда интегрируема. При $N \geq 3$ система (4.31) ввиду отсутствия дополнительных первых интегралов не интегрируема. В связи с этим в зависимости от начальных условий становятся возможными как квазиупорядоченные, так и хаотические решения.

4. Два вихревых кольца в безграничной жидкости

Движение колец в одном направлении. Картина взаимодействия двух одинаковых вихревых колец качественно описана Г.Гельмгольцем [135]. При движении колец в одном направлении она заключается в попеременном проскакивании (чехарде) одного кольца внутри другого. Радиус впереди движущегося кольца увеличивается, при этом скорость его уменьшается. Следовавшее за ним кольцо, наоборот, сужается и, согласно (4.11), скорость его увеличивается. После проскакивания кольца меняются местами и их схема движения периодически повторяется. Если два совершенно одинаковых кольца движутся навстречу друг другу, то при их сближении будет наблюдаться увеличение радиусов. Кольца не смогут проскочить одно внутрь другого, а скорости их асимптотически стремятся к нулю при увеличении времени.

Несмотря на то, что описание такого процесса взаимодействия почти дословно цитировалось в учебниках по гидромеханике [8, 46, 64], до последнего времени недоставало полноты описания явления при произвольных начальных параметрах колец. Ряд конкретных ситуаций количественно был исследован Ф.Дайсоном [121]; иные частные случаи движения рассмотрены в [11, 142]. Подробные классификации взаимодействия двух вихревых колец, движущихся как в одном направлении, так и навстречу друг другу, приведены в работах [22, 23, 185].

Рассмотрим различные типы движения двух колец, движущихся в одном направлении. В этом случае ясно, что не всегда будет наблюдаться взаимная чехарда колец. Если кольца обладают несоизмеримыми энергетическими параметрами, то, вероятней всего, они слабо прореагируют друг на друга. В связи с этим возникает вопрос: при каких начальных параметрах колец возможно их периодическое взаимодействие? Ответ на этот вопрос можно было бы получить путем вычислительного эксперимента, незначительно изменяя каждый раз начальные параметры колец. Однако учитывая, что даже в такой простейшей задаче придется варьировать как минимум тремя определяющими параметрами $\chi=\kappa_1/\kappa_2$ $\rho_0 = R_1^{(0)}/R_2^{(0)}$; $Z_0 = |Z_1^{(0)} - Z_2^{(0)}|$, становятся очевидными трудоемкость и слабая отдача такого исследования. Поэтому, как и в ситуации взаимодействия трех точечных вихрей, целесообразно исследовать параметры относительного движения, а именно, определить зависимости радиусов колец от их относительного расстояния при заданных значениях κ_i.

Рассмотрим два произвольных коаксиальных тонких вихревых кольца, имеющих в начальный момент времени параметры κ_1, $a_1^{(0)}$, $R_1^{(0)}$ и κ_2, $a_2^{(0)}$, $R_2^{(0)}$ соответственно и находящихся на расстоянии $Z_0 = Z_2^{(0)} - Z_1^{(0)}$ друг от друга. Для определенности будем считать, что $Z_1^{(0)} \le Z_2^{(0)}$.

Запишем инварианты (4.29) и (4.30) в безразмерном виде, пронормировав все линейные параметры на величину $R_2^{(0)}$. С учетом соотношений (4.28), позволяющих исключить величины a_i, получаем

$$\chi \rho_1^2 + \rho_2^2 = \chi \rho_0^2 + 1 \; ; \tag{4.32}$$

$$\chi^2 \rho_1 \left(\frac{3}{2} \ln \rho_1 + B_1 - \frac{3}{2} \ln \rho_0 \right) + \rho_2 \left(\frac{3}{2} \ln \rho_2 + B_2 \right) + 2 \chi \sqrt{\rho_1 \rho_2}\; C(k) =$$

$$= \chi^2 \rho_0 B_1 + B_2 + 2 \chi \sqrt{\rho_0}\; C(k_0) \; ; \tag{4.33}$$

где

$$\rho_i = \frac{R_i}{R_2^{(0)}} \; ; \quad \rho_0 = \frac{R_1^{(0)}}{R_2^{(0)}} \; ; \quad \zeta = \frac{Z_2 - Z_1}{R_2^{(0)}} \; ; \quad \zeta_0 = \frac{Z_0}{R_2^{(0)}} \; ;$$

$$B_i = \ln \frac{8}{n_i^{(0)}} - \frac{7}{4} \; ; \quad k^2 = \frac{4 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 + \zeta^2} \; ; \quad k_0^2 = \frac{4 \rho_0}{(\rho_0 + 1)^2 + \zeta_0^2} \, .$$

Уравнения (4.32) и (4.33) связывают три переменные величины ρ_1, ρ_2, ζ и дают возможность построить фазовые траектории движения системы двух произвольных вихревых колец $\rho_1\zeta$ и $\rho_2\zeta$. В случае положительных значений χ оба кольца имеют одинаковую по направлению завихренность и, следовательно, существует возможность их попеременного чередования (чехарды).

В работе [142] отмечено, что взаимная чехарда колец независимо от начального удаления ζ_0 возможна только в том случае, когда на бесконечности кольца имеют одинаковые самоиндуцированные скорости. В противном случае либо заднее кольцо не догонит переднего, либо (в силу симметрии задачи по z) заднее кольцо догонит переднее, пройдет сквозь него, но после этого расстояние между ними будет неограниченно увеличиваться. Исходя из требования равенства скоростей колец на бесконечности, для любого положительного значения χ можно определить область допустимых начальных значений (ζ_0, ρ_0), при которых кольца будут образовывать связанную систему. Обозначая безразмерные радиусы колец на бесконечности $\rho_{1\infty}$ и $\rho_{2\infty}$ соответственно, находим, что для данного ρ_0 область допустимых для чехарды начальных значений определяют соотношения

$$\frac{\chi}{\rho_{1\infty}}\left(\frac{3}{2}\ln\rho_{1\infty}-\frac{3}{2}\ln\rho_0+\ln\frac{8}{n_1^{(0)}}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\rho_{2\infty}}\left(\frac{3}{2}\ln\rho_{2\infty}+\ln\frac{8}{n_2^{(0)}}-\frac{1}{4}\right);$$

$$\chi\rho_{1\infty}^2+\rho_{2\infty}^2=\chi\rho_0^2+1;$$

$$\chi^2\rho_{1\infty}\left(\frac{3}{2}\ln\rho_{1\infty}+B_1-\frac{3}{2}\ln\rho_0\right)+\rho_{2\infty}\left(\frac{3}{2}\ln\rho_{2\infty}+B_2\right)\le$$

$$\le\chi^2\rho_0 B_1+B_2+2\chi\sqrt{\rho_0}\,C(k_0); \qquad (4.34)$$

Неравенство в последнем соотношении (4.34) обусловлено с учетом неотрицательности функции $C(k)$ тем физически ясным обстоятельством, что подведенная к системе начальная энергия не должна быть меньше энергии вихревых колец на бесконечном удалении. Нетрудно показать, что соотношения (4.34) независимо от значения ξ_0 выполнены при значениях

$$\rho_{1\infty}=\rho_0^*=\chi\frac{\ln\dfrac{8}{n_1^{(0)}}-\dfrac{1}{4}}{\ln\dfrac{8}{n_2^{(0)}}-\dfrac{1}{4}},$$

$$\rho_{2\infty}=1.$$

Таким образом, прямая $\rho_0=\rho_0^*$ всегда принадлежит области допустимых для чехарды параметров колец.

На основании системы (4.34) можно построить области допустимых значений ξ_0, ρ_0 для любых соотношений $n_i^{(0)}$. Результаты такого построения для $n_1^{(0)}=n_2^{(0)}=0{,}01$ представлены на рис.64. Здесь заштрихованы области *1* — *3* допустимых для чехарды колец начальных параметров ξ_0, ρ_0 соответственно для значений $\chi=2$; 1; 0,5. Видно, что площадь заштрихованной области увеличивается с ростом χ и чехарда возможна при любом положительном значении χ. Эти данные обобщают результаты работ [11, 142], полученные для частного случая колец одинаковой интенсивности $\chi=1$, равного объема и расположенных в начальный момент времени в одной плоскости ($\xi_0=0$). Отметим, что при равенстве $n_1^{(0)}=n_2^{(0)}$ кольца всегда будут участвовать в чехарде, если начальное отношение их радиусов $\rho_0=\chi$ независимо от начального расстояния между ними. При этом для случая $\chi=1$ (одинаковые кольца) Ф.Дайсон [121] доказал теорему, что максимальное удаление двух колец достигается строго при равенстве их текущих радиусов $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$.

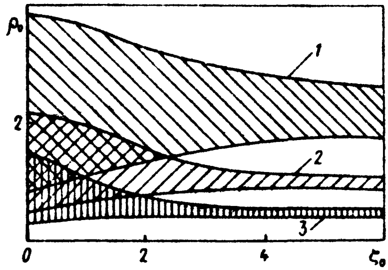


Рис. 64

Рассмотрим суть процесса взаимодействия двух колец на нескольких характерных примерах. Как и ранее, анализ будем проводить пока только на основании безразмерных инвариантов (4.32) и (4.33). Вначале обратимся к классическому случаю двух колец равной интенсивности $\chi = 1$ одинаковых начальных радиусов $\rho_0 = 1$ и объемов $(n_1^{(0)} = n_2^{(0)} = 0{,}01)$. На рис. 65,*а* приведены фазовые траектории движения — зависимости $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ для трех начальных значений ξ_0, характеризующих по существу начальную энергию взаимодействия колец. Чем больше эта энергия, тем на меньшее расстояние удаляются друг от друга кольца. Характерным для такого типа движения является совпадение фазовых относительных траекторий $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$. Относительный характер движения показан стрелками на рис. 65,*а*. Кольцо 1 (точка S_1) движется на графике против часовой стрелки, а кольцо 2 (точка S_2) — по часовой стрелке.

Рис. 65,*б* позволяет сделать некоторые выводы о применимости модели идеальной жидкости для качественных оценок движения системы колец. Здесь для сравнения с теоретическими кривыми, вычисленными по (4.32) и (4.33), приведены результаты тщательно проделанной экспериментальной работы [260], в которой исследовалось взаимодействие двух дымовых колец $\rho_0 = 1$, $\zeta_0 = 1{,}23$ в воздухе при Re = 1710. Последовательное положение радиусов колец, полученных в эксперименте, обозначено одинаковыми цифрами для одних и тех же моментов времени. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показало, что движение системы по крайней мере в течение первой четверти периода обращения удовлетворительно описывается в рамках модели идеальной жидкости. В дальнейшем начинает сказываться влияние вязкости, уменьшаются период обращения колец и максимальное расстояние между ними. Тем не менее качественно картина одного полного обращения колец при указанных числах Re удовлетворительно предсказывается теорией идеальной жидкости. Любопытно отметить, что первоначальные эксперименты [178] с двумя вихревыми кольцами в жидкости полностью опровергали традиционные представления о чехарде колец.

Во всех остальных случаях $\chi > 0$, $\chi \neq 1$ относительные фазовые траектории $\rho_1(\zeta)$ и $\rho_2(\zeta)$ совпадать не будут. Анализ полученных при различных комбинациях χ и ρ_0 результатов показал, что если выполняются условия чехарды колец, то независимо от начальных параметров находящееся первоначально сзади кольцо обязательно будет про-

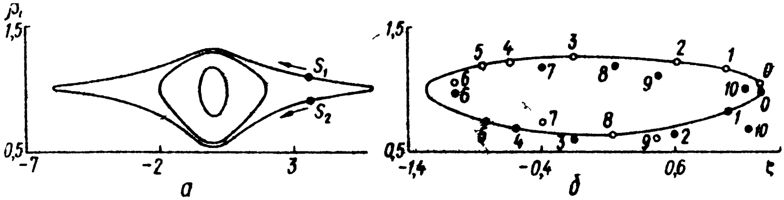


Рис. 65

скакивать внутри переднего, для чего ему иногда приходится двигаться в направлении, обратном основному движению. На рис. 66,*а* (приведены только правые части фазовых траекторий вследствие симметрии относительно линии $\zeta = 0$) показан пример движения, когда кольцо 1 имеет меньшую интенсивность и скорость движения, чем кольцо (2 $\chi = 0{,}5$; $\rho_0 = 1$). На рисунке траектории $\rho_1(\zeta)$ обозначены сплошной линией, а $\rho_2(\zeta)$ — штриховой. Начиная с некоторого значения ζ_0 при данном ρ_0 не образуется область взаимной связанности и фазовые траектории представляют собой разомкнутые линии.

На рис. 66,б представлена относительная фазовая картина для случая $\chi = 2$; $\rho_0 = 2$. В этой ситуации, как указано выше, чехарда обязательна, о чем и свидетельствует рисунок. Однако в отличие от случая $\chi = 1$, $\rho_0 = 1$ траектории $\rho_1(\zeta)$ и $\rho_2(\zeta)$ не совпадают.

До сих пор использовалась только система инвариантов (4.32) и (4.33). Она для двух колец позволяет полностью исследовать относительное движение. Получение же траекторий движения $R_1(t)$ и $R_2(t)$ возможно лишь при интегрировании уравнений движения (4.27). Эти уравнения решались численно. Использовалась программа решения задачи Коши, основанная на формулах Рунге — Кутта — Фельберга четвертого порядка. Как и при исследовании относительного движения, линейные параметры будем относить к R_2^0, а за масштаб времени примем величину $R_2^0\,2/4\pi\kappa_2$. На рис. 67,а показан фрагмент участка чехарды двух колец при $\chi = 1$, $\rho_0 = 1$ и $\zeta = 1$. На рис. 67, б — для случая $\chi = 0{,}5$, $\rho_0 = 1$ и $\zeta_0 = 0{,}6$. Оба этих рисунка демонстрируют изменение координат колец во времени, соответствующее относительным траекториям, представленным на рис. 66,а,б. На рис. 67 на траекториях кружочками отмечены одинаковые промежутки безразмерного времени $\Delta\tau = 0{,}5$. Ситуация отсутствия чехарды колец при $\chi = 0{,}5$, $\rho_0 = 1$ и $\zeta_0 = 1{,}6$ показана на рис. 68.

Движение колец навстречу друг другу. В случае, когда $\chi < 0$, будет иметь место движение колец в противоположные стороны. Такая задача, за исключением классического случая двух совершенно симметричных колец, имеющих интенсивность разных знаков, до последнего времени менее изучена. Покажем, что при $\chi < 0$ возможно как

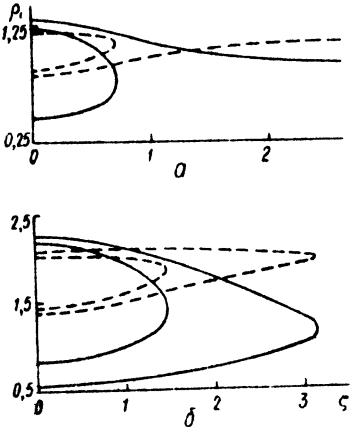


Рис. . 66

проникновение одного кольца внутри другого, так и явление взаимного захвата [22].

Анализ проблем проводился численным решением системы уравнений (9.10) при варьировании начальными параметрами колец. Точность вычислений контролировалась выполнением законов сохранения (4.32) и (4.33). Начальными определяющими параметрами задачи принимались величины

$$\chi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}; \quad \rho_0 = \frac{R_1^{(0)}}{R_2^{(0)}};$$

$$\zeta_0 = \frac{|Z_1^{(0)} - Z_2^{(0)}|}{R_2^{(0)}}, \quad t = 0 .$$

Для удобства положим, что независимо от своих начальных радиусов кольца в момент времени t_0 имеют равные отношения $n_1^0 = n_2^0 = 0{,}01$. Кроме того, условимся, что, исследуя характер движения для всевозможных комбинаций $\chi < 0$ и ρ_0, будем удерживать постоянное значение величины $\zeta_0 = 50$. Такое значение ζ_0 выбрано для того, чтобы в начальный момент кольца слабо влияли друг на друга. Как будет показано ниже, ситуация взаимного захвата оказывается возможной только для $\zeta << 1$. Она и составит исключение в общем анализе явления.

Все возможное многообразие столкновений двух вихревых колец при конкретных указанных параметрах ζ_0 и ρ_0 можно классифицировать при помощи диаграммы, приведенной на рис. 69. Координатами здесь приняты параметры χ и ρ_1^*. Параметр ρ_1^* означает максимальное значение безразмерного радиуса первого кольца в момент пребывания колец в одной плоскости. Отметим, что выбор координаты ρ_1^* имеет произвольный характер, поскольку можно в анализ включить как величину ρ_2^*, так и, например, ζ^* — место встречи колец на оси ζ (при этом необходимо построить другие диаграммы). На диаграмме рис. 69 приведено несколько разорванных кривых. Каждой из них соответствует конкретное значение начального отношения ρ_0 (на рисунке цифрами 1 — 7 показаны зависимости $\rho_1^*(\chi)$ для $\rho_0 = 1{,}4; 1{,}2; 1{,}0; 0{,}8; 0{,}6; 0{,}4; 0{,}2$).

Совместное исследование формы кривых рис. 69 и конкретных траекторий движения позволяет выделить четыре возможных случая столкновения движущихся навстречу друг другу вихревых колец.

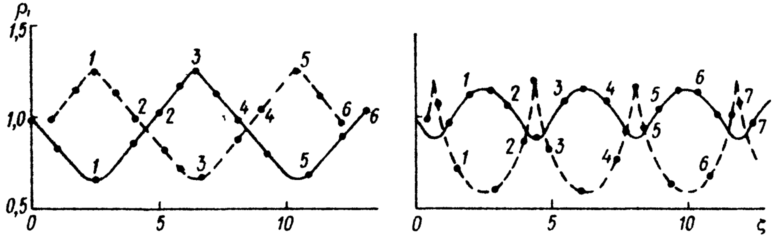


Рис. 67

Первым типом столкновения является хорошо известный и изученный случай встречного движения двух совершенно симметричных относительно плоскости вихревых колец. Начальные параметры колец имеют значение $\chi=-1$; $\rho_0=1$. При сближении колец их радиусы бесконечно увеличиваются, а расстояние между ними непрерывно уменьшается. Однако кольца никогда не проходят одно через другое. Малейшее отклонение одного из параметров от предельной ситуации приводит к взаимному проникновению колец. Этот тип движения рассмотрим ниже при описании процесса взаимодействия вихревого кольца с твердой стенкой.

Второй тип столкновения определяется параметрами χ и ρ_0, находящимися на участке кривой $\rho_1^*(\chi)$ слева от линий разрыва (рис. 69). В этом случае кольцо 1 в момент встречи пропускает внутри себя кольцо 2. Характерная картина взаимодействия в этой области приведена на рис. 70,*а* где показан фрагмент траекторий колец в области встречи для случая $\chi=-0,6$; $\rho=0,6$. Изменение во времени радиуса $\rho_1(t)$ показано сплошной линией, а радиуса $\rho_2(t)$ — штриховой. Для того, чтобы можно было оценить скорости движения колец, на траекториях обозначены безразмерные моменты времени $\dot{\tau}$.

Третий тип столкновения отличается тем, что теперь кольцо 1 проникает внутри кольца 2. Область параметров χ, ρ_0, определяющих данный тип взаимодействия, лежит на кривой $\rho_1^*(\chi)$ справа от линии разрыва. На рис. 70,*б* приведена картина взаимодействия колец при $\chi = -0,8$; $\rho_0 = 0,6$, характерная для этого случая.

Анализ начальных состояний колец показал, что характер движения во втором и третьем типе столкновения определяется тем, что кольцо, имеющее большую самоиндуцированную энергию, всегда проникает внутрь слабого кольца.

При значениях χ и ρ_0, близких к точкам разрыва кривых $\rho_1^*(\chi)$, кольца вычерчивают при сближении спиралевидные траектории. Это объясняется тем, что начальные самоиндуцированные энергии обоих колец примерно равны и проблему взаимного проникновения им

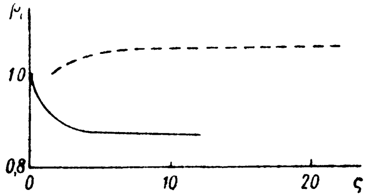


Рис. 68

приходится решать с определенными трудностями. В ситуациях, когда начальные энергии колец существенно отличаются, взаимное проникновение происходит плавно и траекторий в виде спиралей не наблюдается.

Последний тип столкновения состоит в явлении взаимного захвата. При этом кольца, несмотря на противоположные знаки интенсивностей, будут двигаться в одном направлении. Область параметров, соответствующую данному типу, так же можно отыскать на рис. 69. Для этого необходимо построить фазовые относительные траектории (зависимости $\rho_1(\zeta)$ и $\rho_2(\xi)$) от расстояния между кольцами $\zeta=|\zeta_1-\zeta_2|$ для конкретных значений χ и ρ_0, при которых имеет место разрыв кривой $\rho_1^*(\chi)$ на рис. 69.

Для построения фазовых относительных траекторий снова воспользуемся инвариантами (4.32) и (4.33). Одна из этих ситуаций приведена на рис. 71 для случая $\chi=-0{,}695$ $\rho_0=0{,}6$. Как видно, здесь имеет место неоднозначность траекторий конкретным *1* и *T*. Так, цифрой *1* обозначены истинные фазовые траектории, соответствующие указанным начальным параметрам и $\zeta_0=50$; цифрой *2* обозначены замкнутые фазовые кривые, имеющие равные импульс и кинетическую энергию с кривыми *1*, но их начальные параметры ρ_0 и ζ_0 будут иметь другие значения.

Отметим, что такой вид фазовых относительных траекторий можно получить только из законов сохранения (4.32) и (4.33). Интегрируя детерминированную по времени систему исходных уравнений (4.27), для указанного случая получаем только кривые *1* (рис. 71).

Выберем в качестве начальных параметров ρ_0 и ζ_0 значения, лежащие на кривых *2*. Решая с ними систему уравнений (4.27), получаем траектории движения колец, иллюстрирующие явление взаимного захвата (рис.72). В конкретном случае начальными параметрами принимались $\chi=-0{,}695$; $\rho_1=1{,}13$; $\rho_2=1{,}28$; $\zeta_0=0$. Максимальные и минимальные значения радиусов $\rho_1(t)$ для случая взаимного захвата соответствуют максимальным и минимальным значениям $\rho_1^*(\chi)$ на участках разрыва диаграммы (см.рис. 69). Явление взаимного захвата возможно только при очень малых $\zeta_0 << 1$, причем когда начальные энергии колец близки друг другу.

Прежде чем сделать заключительные замечания, рассмотрим подробнее картину образования замкнутых фазовых относительных траекторий, когда интенсивности колец имеют противоположные знаки, используя систему инвариантов (4.32) и (4.33). Для понимания ситу-

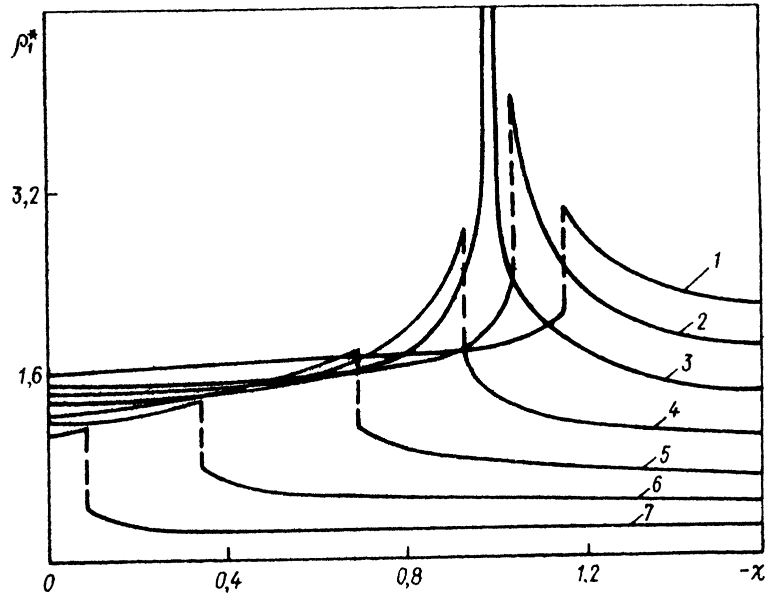


Рис. 69

ации обратимся к рис. 73. Здесь кривые *1* соответствуют значениям $\chi = -0{,}4$; $\rho = 0{,}5$; $\zeta_0 = 50$. Видно, что поведение колец при этом достаточно традиционно: при монотонном сближении их радиусы плавно увеличиваются. Совершенно иным оказывается поведение колец при $\chi = -0{,}5$; $\rho = 0{,}5$; $\zeta_0 = 50$. В области встречи фазовые траектории имеют две точки перегиба и участки взаимного удаления колец при увеличении их радиусов. Дальнейшая тенденция достаточно ясна: при изменении χ от $-0{,}5$ до $-0{,}6$ происходят дальнейшее искривление фазовых траекторий и их разрыв с образованием замкнутой области. Детальный анализ показал, что кривые *1* и *2* соединяются при $\zeta_0=0$ на плоскости чисто мнимых значений ρ_1 и ρ_2. Точки, лежащие на замкнутых кривых *2* (см.рис.71), являются также корнями системы (4.32) и (4.33).

Таким образом, при $\kappa < 0$ существуют такие характерные комбинации инвариантов *I* и *T*, при которых возможно как проскакивание одного кольца внутри другого, так и явление взаимного захвата. В отличие от плоского взаимодействия вихрей захват при осесимметричном движении состоит во вращении колец вокруг подвижного центра завихренности.

Суммируя изложенное, отметим, что рассмотрены практически все возможные случаи взаимодействия двух коаксиальных вихревых ко-

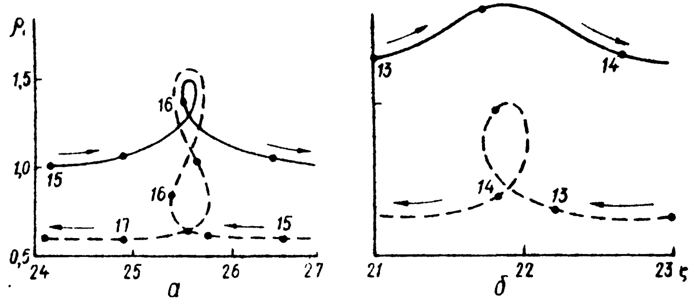


Рис. 70

лец (как с одинаковым, так и с противоположным направлением вращения) в идеальной жидкости при одинаковых начальных соотношениях $n_i^0 = a_i^0/R_i^0 = 0{,}01$. Об отличиях, которые могут наблюдаться при варьировании этой величиной, речь будет идти далее.

Влияние относительной толщины вихревых колец. Известно, что на скорость движения изолированного вихревого кольца влияет относительный размер его ядра $n=a/R$. Однако вопрос о том, как относительная толщина колец влияет на взаимодействующую систему, ранее глубоко не исследовался. Рассматривалось такое влияние лишь на относительные параметры взаимодействия [121].

Анализ этого вопроса на тестовом примере движущихся в одном направлении двух колец одинаковой завихренности и начальных радиусов рассмотрен в [21]. Дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействия вихревых колец (4.27) получены в предположении, что $R/a \gg 1$. Поэтому рассмотрим относительную толщину кольца $n=0{,}1$ в качестве нижнего предела исследований. Фактически таким же значением относительной толщины рекомендовал ограничиться и Ф.Дайсон [121].

Система уравнений (4.27) решалась численно при варьировании параметром R/a в пределах от 10 до 10^3. Результаты вычислений контролировались соблюдением законов сохранения (4.32) и (4.33). Изменение параметров системы рассмотрим в безразмерном виде. Все линейные параметры отнесем к $R_0 = R_1^{(0)} = R_2^{(0)}$, а время, учитывая $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$, к величине $R_0^2/4\pi\kappa$. Не будем вводить в этой тестовой задаче дополнительных обозначений для безразмерных величин. Начиная с этого момента будем считать, что они отнесены к соответствующим масштабам.

В начальный момент времени кольца имеют радиусы $R_0=1$ и находятся на расстоянии $Z_0=1{,}0$. На рис. 74 показаны относительные фазовые траектории находящихся в чехарде колец при начальных зна-

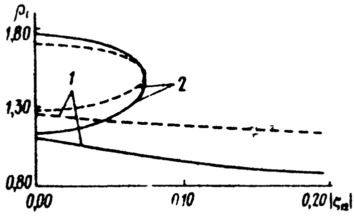


Рис. 71

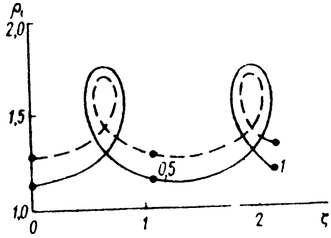


Рис. 72

чениях $R_0/a_0=10$ (сплошная линия) и $R_0/a_0=10^3$ (штриховая). Здесь приведены только правые части траекторий в силу симметрии задачи относительно $Z_{12}=0$. Для рассматриваемого случая равенства интенсивностей фазовые относительные траектории $R_1(Z_{12})$ и $R_2(Z_{12})$ совпадают, а максимальное расстояние, на которое расходятся кольца, достигается при равенстве $R_1=R_2$. Приведенные на рис. 74 результаты показывают, что на картине относительного движения изменение толщины колец оказывает слабое влияние. Это, по-видимому, привело к заключению [121], что движение системы вихревых колец слабо зависит от их относительных поперечных размеров.

Более существенные различия в поведении колец можно увидеть на рис. 75, где построены зависимости $R_1(t)$ и $R_2(t)$ вдоль пути движения, полученные при решении системы (4.27). Здесь также сплошной линии соответствуют траектории обоих колец при $R_0/a_0=10$, а штриховой — при $R_0/a_0=10^3$. Для того, чтобы можно было оценить изменение радиусов колец во времени, цифрами на траектории обозначены безразмерные моменты времени. Интересен тот факт, что при совершенно очевидной большей скорости системы колец с большим отношением R_0/a_0 характерные точки на траекториях в одинаковые моменты времени не совпадают для двух вариантов движения. При этом относительные расстояния между кольцами слабо зависят от их толщины.

Одним из важных параметров, характеризующих движение системы, является период обращения колец T. На рис. 76 представлена зависимость периода обращения системы двух коаксиальных одинаковых вихревых колец от начальных отношений n_0. Значения периодов отнесены к периоду обращения T_{100} для системы, у которой $R_0/a_0=100$. Как видно, существенные изменения в периоде обращения наблюдаются при уменьшении относительной толщины колец менее $n_0\leq 0{,}01$, т.е. когда взаимодействуют очень тонкие кольца. В диапазоне изменений значений $0{,}01 < R_0/a_0 < 0{,}1$ толщина колец слабо сказывается на периоде обращения.

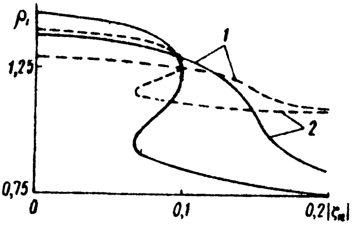


Рис. 73

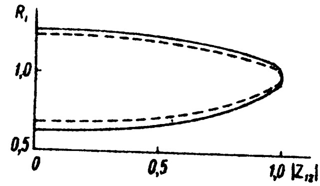


Рис. 74

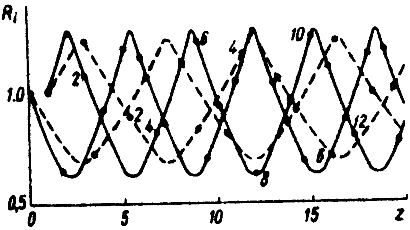


Рис. 75

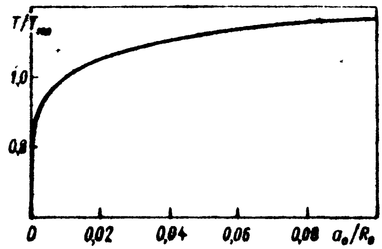


Рис. 76

Отметим, что приведенные результаты могут служить в качестве оценок при описании начальной стадии взаимодействия вихревых колец в реальной жидкости с учетом конечности сечения их ядер (в экспериментах, как правило, наблюдаются кольца с отношениями R_0/a_0 от 40 до 10).

В заключение отметим, что скорость изолированного кольца не может равняться нулю. Такое предположение принято, например, в работе [20] для моделирования трехмерной вихревой пелены.

Из (4.30) следует, что при таком предположении энергия взаимодействия колец U должна быть неизменной величиной. Это, в свою очередь, приводит к парадоксу для встречного движения двух одинаковых колец. Нетрудно показать, что из-за неотрицательности выражения $C(k)=(2/k-k)K(k)-2E(k)/k$ игнорирование самоиндуцированной скоростью приведет к уменьшению радиусов колец при их сближении, что не согласуется с экспериментальными [259] и теоретическими [135] оценками. Указанное замечание показывает, с какой осторожностью следует подходить особенно к проблеме моделирования физических явлений.

5. Вихревое кольцо вблизи твердых границ

Взаимодействие с плоской стенкой. При определенном типе симметрии твердых границ поведение вблизи них вихревого кольца можно рассматривать как результат взаимодействия нескольких колец, причем

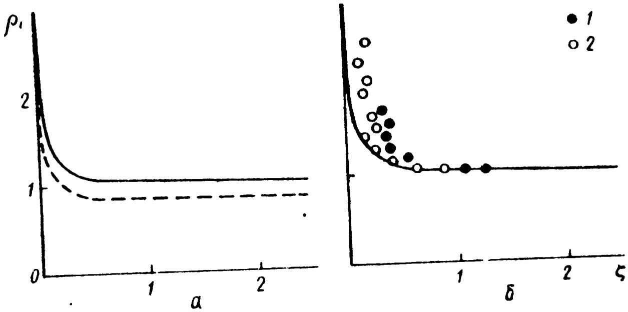


Рис. 77

действие твердых стенок заменяется эквивалентным действием вихревых колец. Идея такой замены применительно к описанию движения круглого вихревого кольца по направлению к твердой границе приведена в [135], где воздействие твердой стенки заменяется реакцией полностью симметричного относительно плоскости стенки вихревого кольца противоположной по знаку интенсивности. Соотношения для параметров вихревых колец, соответствующие замене взаимодействия вихревого кольца со сферой, приведены в [168]. Эти примеры показывают, что исследование движения вихревых структур в окрестности твердых границ при определенных условиях можно свести к задаче о взаимодействии нескольких вихревых колец, начальные параметры которых задаются определенными законами.

В работе [39] показано, как при помощи преобразования инвариантов (4.32) и (4.33) к специальному виду можно исследовать задачу о взаимодействии вихревого кольца с твердой границей, рассматривая по существу взаимодействие двух колец.

Рассмотрим вначале классический случай движения вихревого кольца к плоской стенке или к свободной поверхности жидкости. Для этого в уравнениях (4.32) и (4.33) достаточно положить $\chi=-1$ и $\rho_0=1$. Плоскость симметрии, которая делит пополам расстояние между двумя кольцами, и будет твердой стенкой. При этом уравнения (4.32) и (4.33) примут более простой вид

$$\rho_1^2=\rho_2^2=\rho\,; \tag{4.35}$$

$$\rho\left(\frac{3}{2}\ln\rho+B\right)-\ \rho\,C(k)=B-\ C(k_0)\,. \tag{4.36}$$

Полученные из этих выражений траектории движения вихревого кольца ($R_0/a_0=100$) вблизи твердой стенки при $\zeta_0=0{,}2$ (штриховая линия) и ζ_0=100 (сплошная линия) показаны на рис. 77,*а*. Характерной особенностью данной ситуации является то, что и относительные в терминах $\rho(\zeta)$, и истинные фазовые траектории колец совпадают. Траектория, нанесенная на рис. 77,*а* штриховой линией, проходит также через значения $\zeta > 0{,}2$. Вид траектории при таких значениях ζ означает, что направления завихренности заданы так, чтобы кольца взаимно удалялись от точки ζ_0=0,2. Кольца независимо от их начального расстояния от стенки (важно, чтобы было $\zeta_0 > a_0$) при приближении к этой точке будут расширяться. При бесконечно малом расстоянии между вихрем и стенкой радиус кольца становится бесконечно большим. При этом происходит деформация вихревого кольца таким образом, что уменьшается текущий радиус поперечного сечения a. Причем ядро кольца никогда не соприкасается с твердой поверхностью.

В данной постановке отсутствует влияние сил вязкости, имеющихся в реальной жидкости, поэтому интересно сравнить полученные оценочные результаты с экспериментальными для обычной жидкости — воды [259]. В указанной статье исследовалось движение вихревых колец вблизи свободной поверхности жидкости в широком диапазоне чисел $Re=uR/\vartheta$=480...4130, где u — скорость кольца.

На рис. 77,*б* нанесены экспериментально зафиксированные значения радиусов вихревого кольца в различные моменты времени при Re=480(*1*) и Re=4130(*2*), а также проведена расчетная кривая, полученная по (4.35) и (4.36). Анализ приведенных данных показал, что на некотором участке движения в окрестности твердой стенки распределение экспериментальных точек удовлетворительно согласуется с поведением относительной траектории кольца. При приближении к системе все больше сказывается влияние вязкости, в результате чего возникает колебательное движение кольца вниз и вверх. Это происходит благодаря воздействию образовавшихся в результате действия сил вязкости вторичных вихрей. Тем не менее общая количественная тенденция движения происходит, как и предсказано, в рамках теории идеальной жидкости.

Взаимодействие со сферой. Рассмотрим еще один пример движения вихревого кольца вблизи твердых границ, а именно: движение кольца в жидкости, ограниченной внутри сферической поверхностью. Причем оси кольца и сферы лежат на одной линии.

В работе [168] показано, что сферу в таком случае можно заменить некоторым эквивалентным вихревым кольцом. Так как сфера в процессе движения предполагается неподвижной, параметры внешнего вихревого кольца и кольца, эквивалентного по воздействию сфере, должны быть связаны так, чтобы везде на поверхности сферы выполнялось условие равенства нормальной составляющей скорости нулю. Это условие удовлетворяется тогда, когда кольцо 1 (κ_1, R_1) является отображением внешнего кольца 2 (κ_2, R_2) относительно сферы.При этом параметры колец на протяжении всего движения связаны соотношением

$$\kappa_1 R_1^{1/2} + \kappa_2 R_2^{1/2} = 0 . \qquad (4.37)$$

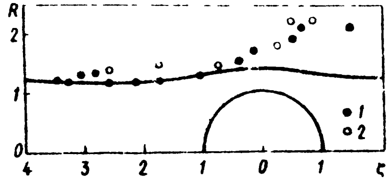


Рис. 78

При $n_1^{(0)} = n_2^{(0)} = n_0$ инвариант энергии (4.33) примет вид

$$\frac{3}{2}\rho_2 \ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + 2\rho_2 B - 2\rho_2 C(k) = B\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\rho_0 + 1\right) - 2\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\rho_0} - C(k_0) . \qquad (4.38)$$

Картина обтекания сферы тонким вихревым кольцом при $R_0/a_0=100$ показана на рис. 78. Здесь же нанесены экспериментальные результаты, представленные в работе [70]; обозначены данные при числах Рейнольдса для кольца Re=1260 (*1*) и Re=4200 (*2*). При этом отношение радиусов кольца и сферы для обеих серий опытов оставалось одинаковым. Сравнение модельной (по (4.37) и (4.38)) кривой и экспериментальных данных показало, что на участке движения кольца до миделя неподвижной сферы имеется количественное и качественное согласование результатов. После прохождения кольцом миделевого сечения сферы в реальной жидкости существенное влияние оказывают вязкостные эффекты (в экспериментах возникали вторичные течения), и дальнейшие оценки характера движения в рамках предлагаемой модели неточны.

Отметим, что при рассмотрении конкретных случаев взаимодействия кольца с твердой стенкой мы практически не прибегали к интегрированию дифференциальных уравнений (4.27), а все исследование провели при помощи первых интегралов или инвариантов (4.32) и (4.33). Решение задачи при таком подходе возможно при помощи простейшего микрокалькулятора.

6. Порядок и хаос в динамике вихревых колец

Основные понятия. Динамика завихренности представляет собой один из многообещающих теоретических подходов к пониманию природы явления турбулентности. В случае невязкой жидкости она также обеспечивает физический пример нелинейных гамильтоновых систем бесконечной размерности и представляет интерес в связи с современными работами по динамическим системам и хаотическим явлениям.

Для успешного моделирования реальных физических процессов интересно исследование наиболее простых случаев взаимодействия вихревых структур при предъявлении высоких требований к строгости и точности результатов. Если имеет место взаимодействие более двух вихревых колец, то, как правило, такая система весьма чувствительна к хаотизации во времени поля течений *. Это объясняется сильной нелинейностью уравнений Эйлера и вытекающей из них динамической гамильтоновой системы. Отметим, что нелинейность является одним из необходимых, но недостаточных условий образования хаоса.

Рассмотрим, как концепции хаоса проявляются при взаимодействии нескольких вихревых колец. Эта задача в рамках модели идеальной жидкости принадлежит к классу консервативных физических систем, к которым относятся все динамические системы классической механики. Особенностью этих систем и их отличием от диссипативных является сохранение их фазового объема. В большинстве случаев движение простых гамильтоновых систем даже с небольшим числом степеней свободы имеет чрезвычайно сложный нерегулярный характер [32, 47, 79].

Как же определить, имеет ли место хаос в конкретной системе вихревых колец? При анализе движения в первую очередь рассмотрим траектории колец. В случае, если они имеют нерегулярный или непериодический характер, будем констатировать наличие хаоса. Кроме того, для подтверждения или уточнения вывода о характере движения можно воспользоваться рядом способов. Во-первых, использовать отображение Пуанкаре. Оно получается при пересечении траектории в d-мерном фазовом пространстве с $(d-1)$-мерной гиперплоскостью. Хаос в данном случае будет характеризоваться неупорядоченной картиной точек пересечения. Во вторых, важной количественной характеристикой хаотического движения является показатель Ляпунова

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{N} \ln\left|\frac{f^N(x_0-\varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon}\right| = $$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln\left|\frac{d f^N(x_0)}{d x_0}\right|, \qquad (4.39)$$

который является мерой экспоненциального разбегания первоначально близких траекторий.

При $\lambda=0$ движение упорядоченное, при $\lambda > 0$ — хаотическое. И, наконец, третий способ, которым мы будем пользоваться, заключается в анализе спектрального распределения. Непрерывный спектр будет характеризовать хаотическое движение.

---

* Первоначально понятие «хаос» появилось в древнегреческой мифологии и означало бесконечное пространство, в котором из беспорядочного скопления маатериальных элементов мира возникли Гея (земля), Эрос (любовь), Эреб (мрак) и Нюкта (ночь), давшие начало всему существующему. Современное понимание состоит в том, что хаос означает состояние неупорядоченности и нерегулярности.

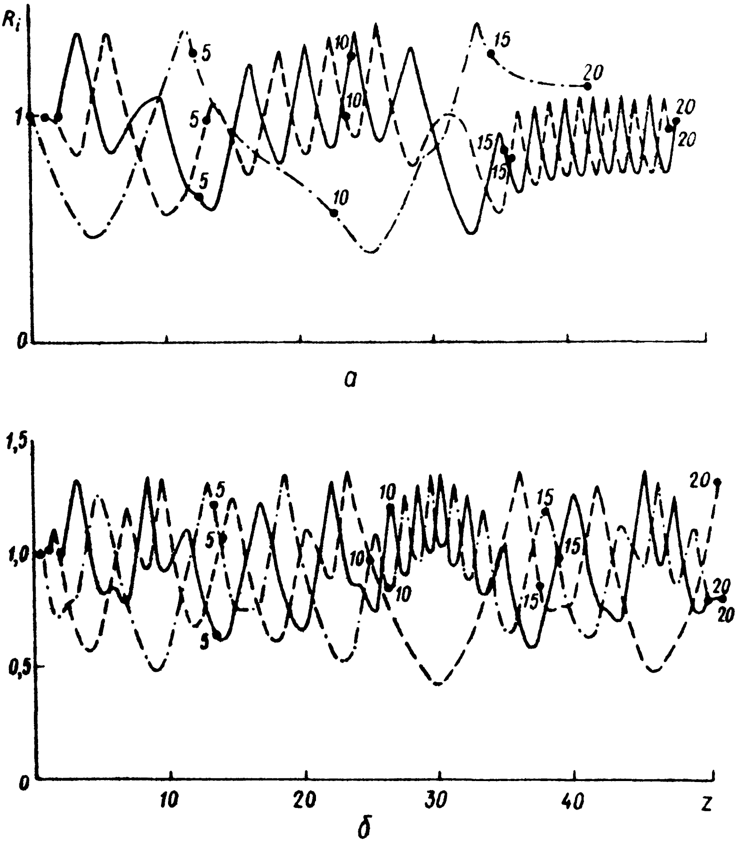


Рис. 79

Случай взаимодействия двух колец подробно рассмотрен выше.

При таком взаимодействии хаотическое движение отсутствует. Здесь возможно как периодическое движение системы (чехарда), так и разовое взаимодействие колец. Во всех ситуациях максимальный показатель Ляпунова λ_1 стремится к нулю, сечение Пуанкаре состоит из нескольких точек. При этом число параметров, определяющих движение двух коаксиальных вихревых колец, сводится к трем — χ, ρ_0, ζ_0. Если во взаимодействии принимают участие три кольца, то число определяющих параметров увеличивается до шести. При таком их числе чрезвычайно сложно дать общую классификацию взаимодействия, тем более, что с каждым новым увеличением числа взаимодействующих колец задача классификации будет еще более усложняться. Поэтому ограничимся здесь характерными частными примерами движения колец при $N > 2$ и покажем, в каких ситуациях возможно упорядоченное движение. Используем только безразмерные величины. Как и ранее, линейные параметры относим к R_0, а время — $\pi R_0^2/\kappa$. Во всех ситуациях принимаем $a_i^0 = 0{,}01 R_i^{(0)}$.

Движение трех колец. Рассмотрим вначале взаимодействие системы колец N=3. Простейший вариант начальных условий составим в следующем виде: $\kappa_i = 1$; R_i=1; z=0; z_2=1; z_3=2 в момент времени t=0. Траектории движения при таких начальных условиях представлены на рис. 79,*а*. Характерные положения колец в моменты времени $t = 0$; 5; 10; 15; 20 на рисунке отмечены точками. Вначале, примерно до значения t=15, система демонстрирует неупорядоченное хаотическое движение. В дальнейшем наблюдается выход на чехарду колец 2 и 3 при окончательном отставании от них кольца 1. Траектории кольца 1 обозначены сплошной линией; кольца 2 — штриховой; кольца 3 — штрихпунктирной.

На рис. 79,*б* показан случай взаимодействия, когда лишь изменена координата z_1 первого кольца; здесь вдвое уменьшено расстояние z_{12} и координата z_1=0,5. Как видно из приведенных результатов, кольца на протяжении такого же промежутка времени находятся близко друг к другу, движутся вперед совместно, а само движение нерегулярное, непериодическое.

Сопоставление этих рисунков подтверждает приведенное выше утверждение о невозможности при наличии хаоса предсказать заранее характер движения системы по имеющимся результатам для случая с близкими начальными условиями. Вспомним, что для двух коаксиальных колец предсказать характер взаимодействия не представляет трудностей.

Образование порядка из хаоса в виде чехарды двух колец при отставании третьего возможно также и в системе разных по интенсивности колец. На рис. 80 представлены три возможных ситуации варьирования значениями κ при условии, что одно из колец должно обладать интенсивностью вдвое большей, чем два остальных. При этом начальные координаты для всех случаев остаются одинаковыми: R_i=1; Z_1=0; Z_2=1; Z_3=2. Распределение интенсивностей для представленных случаев происходило следующим образом: κ_1=1; κ_2=1; κ_3=2 (рис.80,*а*), κ_1=1; κ_2=2; κ_3=1 (рис.80,*б*) и κ_1=2; κ_2=1; κ_3=1 (рис.80,*в*). Все комбинации приводили к образованию пары колец, причем при обязательном участии в паре кольца, имеющего большую начальную энергию (κ=2).

С точки зрения методологии интересно исследование перехода от квазиупорядоченного движения к хаотическому для систем колец, которые в начальный момент времени представляли бы подобные конфигурации. Одним из примеров [52] системы, обладающей в начальный момент времени автомодельностью по геометрическим пара-

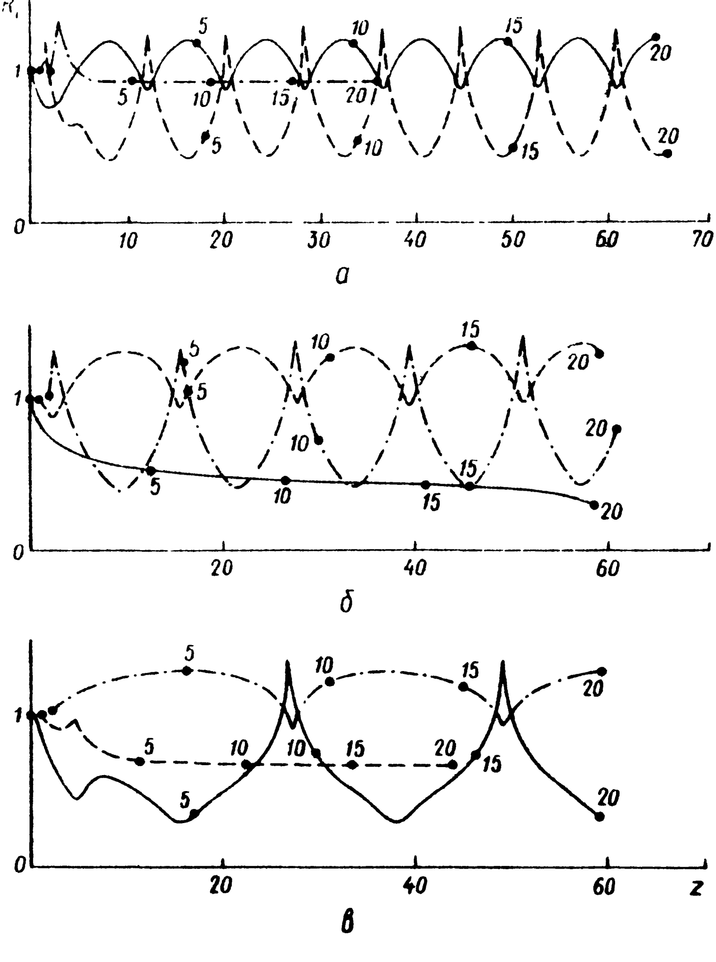


Рис. 80

метрам, является система колец одинаковой интенсивности с начальными координатами

$$R_i^{(0)} = 1 - \rho_0 \cos \frac{\pi (2i - 1)}{N};$$

$$Z_i^{(0)} = 1 + \rho_0 \sin \frac{\pi (2i - 1)}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (4.40)$$

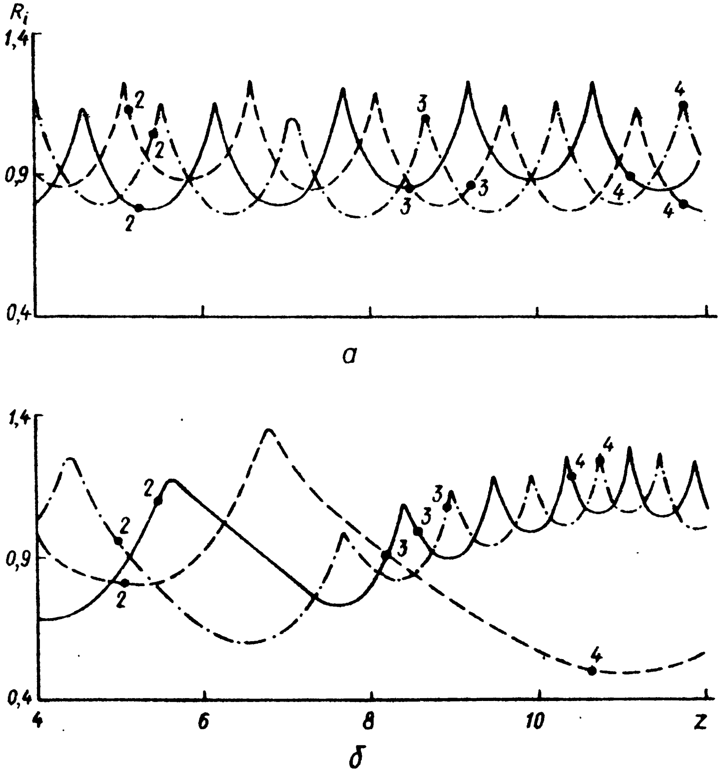


Рис. 81

При $t=0$ кольца равноудалены от динамического центра завихренности. Центры сечений колец при этом равномерно размещены на мысленной поверхности одного кольца радиуса $R_0=1$ круглого поперечного сечения ρ_0.

Подробные численные исследования движения системы колец, имеющей в начальный момент координаты (4.40), проделаны для $N=3; 4; 5; 8$. Поведение такой нелинейной системы сильно зависит как от точности задания начальных условий, так и от точности вычисления параметров задачи. Так как эти операции можно осуществить только с конечной точностью, то малейшие отклонения в определяемых параметрах приводят к экспоненциальному накоплению ошибок в процессе счета для систем, чувствительных к хаосу.

Для конкретного случая $N=3$ были проделаны оценки метода Рунге — Кутта — Фельберга относительно чувствительности к точности определения параметров задачи. Оказалось, что до безразмерного момента времени $t^*=20$ значения траекторий для одних и тех же началь-

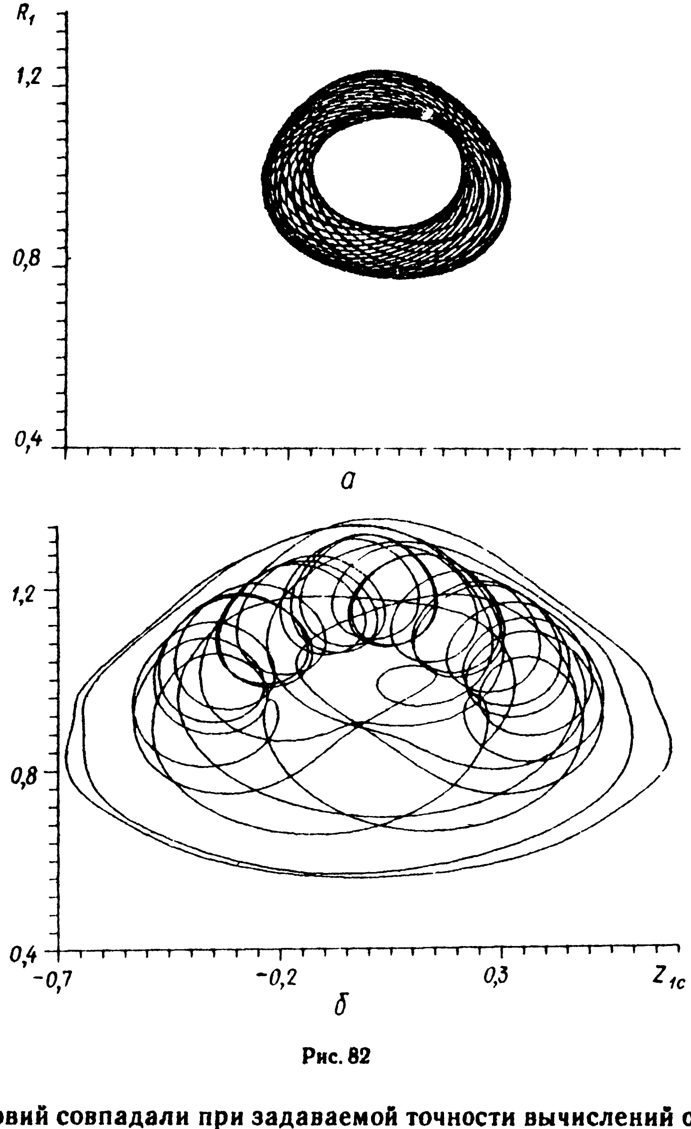


Рис. 82

ных условий совпадали при задаваемой точности вычислений от 10^{-10} до 10^{-13}. При $t > 20$ наблюдались отклонения в траекториях, несмотря на одинаковые начальные условия, в случаях, когда кольца расположены близко друг к другу. Поэтому в анализе проблемы выбрали величину $t^*=20$ в качестве контрольной и вычисляли координаты с точностью 10^{-13}. Для $N=3$ было установлено, что квазиупорядоченное периодическое движение системы из трех колец наблюдается пр" $\rho_0 < 0{,}23$. В интер-

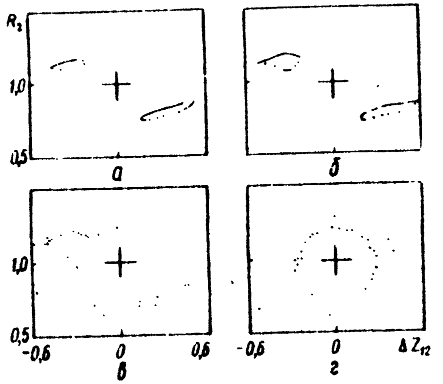


Рис. 83

вале $0{,}23 < \rho < 0{,}35$, начиная с некоторого момента времени t_c, периодичность траектории нарушается, но все три кольца движутся связанной системой.

Отметим, что упорядоченное движение наблюдалось и когда в начальный момент центральному кольцу давалось незначительное отклонение начальной координаты $\Delta R_2^0 = 0{,}02$, т.е. в начальный момент система образовывала поверхность в виде эллиптического кольца. При $0{,}35 < \rho_0 < 0{,}7$ снова имеет место квазипериодическое движение, при котором два кольца совершают чехарду, а одно движется независимо. И, наконец, при $\rho_0 > 0{,}7$ все три кольца настолько удалены друг от друга в начальный момент времени, что каждое движется независимо. На рис.81 приведено сравнение двух ситуаций, когда ρ_0=0,2 (рис. 81,*а*) и ρ_0=0,3 (рис. 81,*б*). Точками на траекториях обозначены моменты времени t = = 2; 3; 4. Для этих случаев на рис. 82 приведены картины, вычерчиваемые одним из колец относительно движущегося динамического центра завихренности системы, координаты которого

$$Z_c = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \kappa_i R_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \kappa_i} \right)^{1/2} ; \quad R_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \kappa_i R_i^2 Z_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \kappa_i R_i^2} .$$

На рисунке хорошо прослеживается разница в упорядоченном и хаотическом движении колец относительно точки (Z_c, R_c).

Явление возникновения хаоса наглядно иллюстрируется отображениями (сечениями) Пуанкаре. Для конкретного случая системы трех колец, имевших в начальный момент времени координаты (4.40), сечения Пуанкаре представляли собой координаты кольца 2 на плоскости (R_2, Z_{12}) в моменты времени, когда R_1=1 (рис. 83, Z_{12} — расстояние между кольцами 1 и 2). При наличии квазиупорядоченного регулярного движения системы точки на сечениях Пуанкаре располагаются в окрестности некоторой области и образуют определенные фигуры. Верхние области на рис. 83,*а*,*б* (ρ_0 = 0,2; 0,22) соответствуют координатам кольца 2 в моменты, когда кольцо 1 сжимается, а нижние — когда кольцо 1 расширяется. Ситуации, представленные на

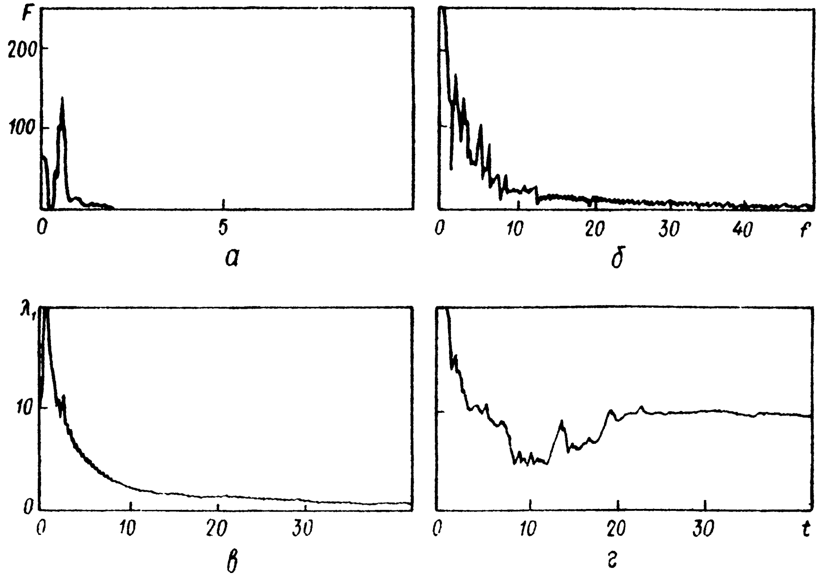


Рис. 84

рис. 83,*в*,*г*, соответствуют случаям $\rho_0 = 0{,}26$; 0,3 и наглядно отражают отсутствие упорядоченного взаимодействия колец.

Отметим, что три кольца при начальных координатах (4.40) и $\rho_0 = 0{,}2$ будут двигаться квазиупорядоченно, если радиус одного из них изменить на небольшую величину $\Delta = 0{,}02$. Естественно, траектории движения колец в этом случае будут отличаться.

Помимо наглядной картины сечений Пуанкаре более строго можно идентифицировать хаос и порядок при помощи определения показателя Ляпунова и построения спектра. На рис. 84 показаны спектральное распределение $R_2(t)$ для ρ_0=0,5 (порядок, рис. 84,*а*) и $\rho_0 = 0{,}3$ (хаос, рис.84,*б*), а также изменение во времени максимального показателя Ляпунова $\lambda_1(t)$ для $\rho_0 = 0{,}2$ (порядок, рис. 84,*в*) и $\rho_0 = 0{,}3$ (хаос, рис. 84,*г*).

Движение четырех колец. При увеличении числа колец, участвующих во взаимодействии и имеющих начальные координаты (4.40), совместное квазиупорядоченное движение системы наблюдается в более ограниченных интервалах ρ_0 и t. Так, для случая $N = 4$ даже при $\rho_0 = 0{,}2$ начинается хаотическое взаимодействие с $t = 5{,}3$. Оно заключается в том, что одно кольцо начинает взаимодействовать с системой из остальных трех колец. Причем взаимодействие в системе трех колец не имеет упорядоченной картины. Упорядоченное движение наблюдалось лишь при $\rho_0 = 0{,}1$.

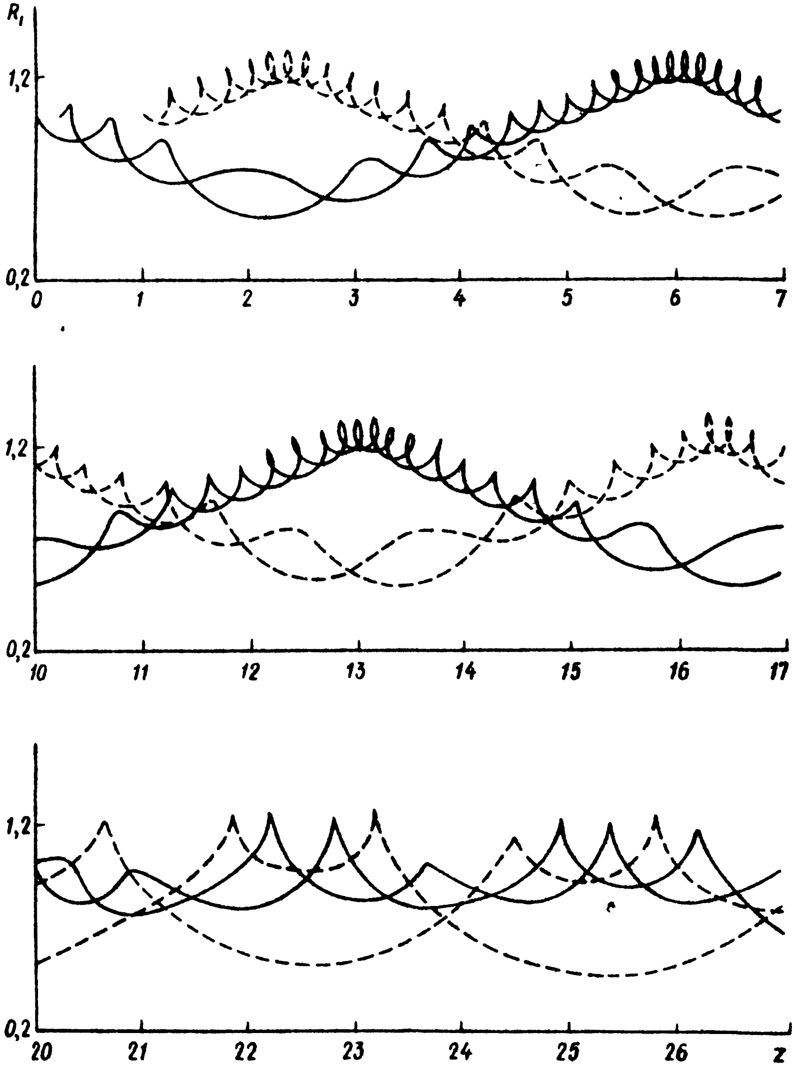


Рис. 85

В качестве еще одного параметра перехода от порядка к хаосу приведем траектории колец для задачи, которая ранее рассмотрена иным способом [83]. Одинаковые в начальный момент кольца образовывали разнесенные по оси z одинаковые пары, а именно: $R_l^{(0)} = 1$;

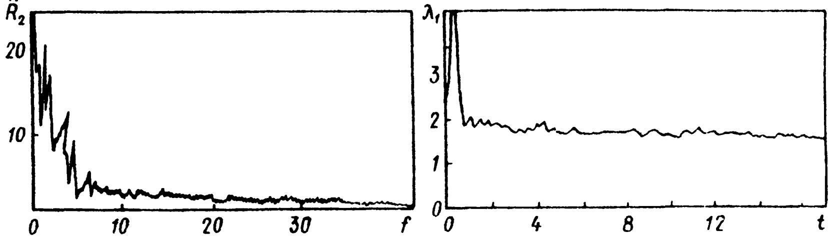


Рис. 86

$Z_{12}^{(0)} = Z_{34}^{(0)} = 0{,}2$; $Z_{23}^{(0)} = 0{,}8$. Картина такого движения показана на рис. 85. На первом этапе движения имела место чехарда как двух пар колец 1; 2 и 3; 4, так и внутри каждой пары. В дальнейшем происходила стохастизация движения. Процесс перехода к хаосу подтверждается спектральным распределением $R_2(t)$ и зависимостью от времени максимального показателя Ляпунова $\lambda_1(t)$ (рис. 86).

Если расстояние между двумя парами колец z_{23} уменьшить в два раза, то движение практически с самого начала становится хаотическим. Будет наблюдаться взаимодействие одного кольца с системой трех колеблющихся колец.

В случае полностью симметричной системы четырех коаксиальных вихревых колец, а это возможно при наличии у расположенных на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии колец интенсивностей противоположного знака, происходит упорядоченное движение. Пример такой ситуации приведен на рис. 87. Кольца вычерчивают симметричные траектории относительно плоскости симметрии. Причем внутри каждой системы колец наблюдается чехарда. При приближении к плоскости симметрии чехарда прекращается и кольца в каждой системе движутся последовательно одно за другим.

При увеличении числа взаимодействующих колец и отсутствии в системе полной симметрии движение системы становится еще более чувствительным к хаосу. Лишь в ситуациях, когда расстояния между кольцами достаточно велики по сравнению с их размерами, возможны случаи упорядоченного движения. Важный вывод этой главы состоит в том, что желаемое описание явления при моделировании его системой вихревых колец [82] возможно лишь на некотором конечном интервале времени.

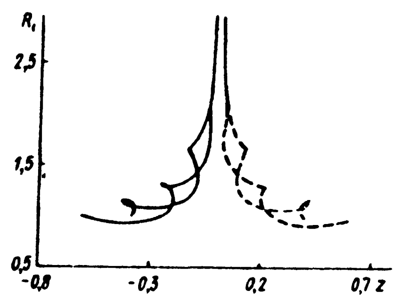


Рис. 87

ФОРМИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

> Из вихрей и противоборств возник
> Мир осязаемых
> И стойких равновесий.
> И равновесье стало веществом.
> Но этот мир разумный и жестокий
> Был обречен природой на распад.
>
> *М.А.Волошин «Путями Каина»*

Изложенные выше теоретические исследования исходили из предположения о наличии в жидкости сформировавшихся локализованных или распределенных вихревых образований. Дальнейшая их эволюция описывалась уравнениями Гельмгольца, что позволило получить хорошее количественное согласование с имеющимися экспериментальными данными. Однако при этом совершенно не затрагивался вопрос об образовании вихревых структур — вопрос, представляющийся и сегодня одним из самых сложных в вихревой динамике. Сложность здесь заключается, в первую очередь, в построении адекватной модели, позволяющей объяснить возникновение вихрей в первоначально покоящейся жидкости и в ее согласовании с требованиями теоремы Лагранжа для идеальной жидкости.

Существуют различные способы образования вихревых структур, которые во многом определяют их дальнейшее поведение. В книге не ставилась цель рассмотреть все возможные случаи генерации вихрей, особенно в природных явлениях — смерчи, циклоны, торнадо, грибовидные структуры в океанических течениях и т.д. Остановимся лишь на некоторых закономерностях формирования вихревых структур в жидкостях. Изложение носит обзорный характер, целью которого — проследить преемственность научных идей, тонких экспериментов и гипотез в столь сложном и интересном физическом явлении.

1. Механизмы возникновения завихренности в идеальной жидкости

Теоремы Гельмгольца утверждают сохраняемость вихревого движения в идеальной жидкости. Однако они ничего не говорят о возможности и условиях его возникновения, скажем, в первоначально покоящейся жидкости. Более того, согласно теореме Лагранжа, в такой жидкости вообще невозможно появление завихренности. Обращаясь к теореме В.Томсона, можно утверждать, что завихренность может возникать лишь в том случае, когда условия теоремы нарушаются. Для идеальной жидкости это возможно, когда плотность неоднородна, хотя жидкость остается несжимаемой; движение не баротропно; внешние силы не потенциальны; нарушается непрерывность поля скоростей.

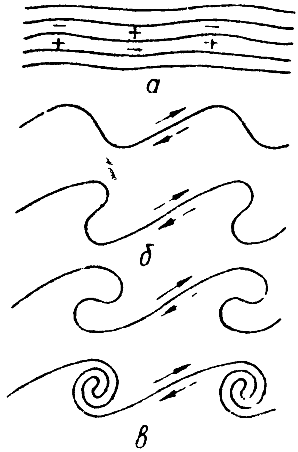


Рис. 88

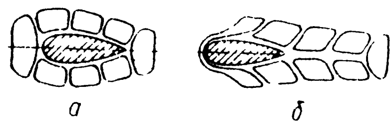


Рис. 89

Первый случай возникновения завихренности рассмотрен в [248], где уравнения Гельмгольца обобщены на случай, зависящий только от координат плотности. В современных обозначениях эти уравнения в векторной форме с неизбежным учетом силы веса имеют вид

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\operatorname{grad}\rho}{\rho} \times \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} - g\frac{\operatorname{grad}\rho}{\rho} \times \boldsymbol{k}.$$

В работе [114] проведен детальный анализ уравнений для двухслойной несжимаемой жидкости плотностей ρ_1 и ρ_2 при наличии горизонтального слоя перехода толщиной δ. Установлено, что вертикальное движение вихревой пары, состоящей из точечных вихрей интенсивности $\pm\chi$ на расстоянии d, характеризуется двумя безразмерными параметрами — a A/δ и R, где A$(\rho_2—\rho_1)/(\rho_2+\rho_1)$ и $R=a^3 g/\chi^2$. Для разных значений A и R проведены тщательные эксперименты и их результаты сопоставлены с данными численных расчетов.

Случаи нарушения баротропности (бароклинные жидкости) чаще всего встречаются в океанологии и динамической метеорологии. Непотенциальность внешних сил наиболее ярко проявляется в жидкостях, вращающихся как единое целое. Эти явления имеют непосредственную связь с глобальной циркуляцией океана и атмосферы.

Остановимся более подробно на случае, когда в идеальной жидкости может нарушаться непрерывность поля скорости. Г.Гельмгольц и Г.Кирхгоф показали, что модель идеальной жидкости допускает разрыв касательной составляющей вектора скорости вдоль поверхности разрыва при непрерывности на ней нормальной составляющей и давления. На такой поверхности будет отлична от нуля и касательная составляющая вектора завихренности, равного нулю во всей остальной области. Таким образом, поверхность разрыва является и вихревой поверхностью — вихревой пеленой. Однако эта поверхность будет неустойчивой — малейшее ее отклонение от плоскости (или от прямой в двухмерном течении) приводит к экспоненциальному росту во времени возмущений. Это составляет существо явления, названного *неустойчивостью Гельмгольца — Кельвина.* Начальный линейный процесс роста малых синусоидальных возмущений длиной λ на поверхности разрыва двух однородных жидкостей, имеющих скорости $\pm u$, показан на рис. 88,*а*. Без учета сил поверхностного натяжения и различий в плотностях отклонение нарастает по закону $\exp\{\pi ut/\lambda\}$, т.е. начальная « мелкая » синусоидальная волна становится все круче. Дальнейший процесс роста возмущений носит существенно нелинейный характер. Процесс сворачивания вихревой поверхности в спиральные кривые схематично показан на рис. 88,*б* и *в*. Хотя качественная картина данного явления в плоском случае достаточно ясна, количественные результаты получены недавно. Математически задача сводится к необходимости решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с неизвестной границей относительно функции, выражающей зависимость вектора завихренности от длины дуги.

Возвращаясь к возможности образования ненулевой циркуляции при обтекании твердого тела с острой задней кромкой при наличии в идеальной жидкости (например, крыла) поверхности разрыва, обратимся к рис. 89,*а*, где показано покоящееся тело и приведен ряд замкнутых жидких контуров, имеющих нулевую циркуляцию. Казалось, что и при безотрывном движении крыла циркуляция останется нулевой и движение будет безвихревым. Однако в этом случае имеет место сближение ранее разделенных жидких элементов верхних и нижних контуров (рис. 89,*б*) вблизи задней острой кромки. Вдоль пунктирной линии касательная составляющая скорости жидкости терпит разрыв и при сохранении сплошности жидкости без нарушения теоремы В.Томсона в ней возникает поверхностное распределение завихренности — вихревая пелена. Этому возможны возражения, состоящие в том, что обтекание с разрывом скорости не является единственно возможным. В идеальной жидкости допустимо «перетекание» жидких контуров за острую кромку с сохранением потенциальности поля скорости и отсутствием завихренности. Такое решение может иметь смысл с математической точки зрения. Однако оно приводит к бесконечному значению скорости и бесконечному отрицательному давлению на кромке. Данная ситуация не может существовать с физической точки зрения, поскольку жидкости не выдерживают отрицательных давлений — возникают кавитация и разрыв сплошности. Требование конечности скорости на задней кромке в

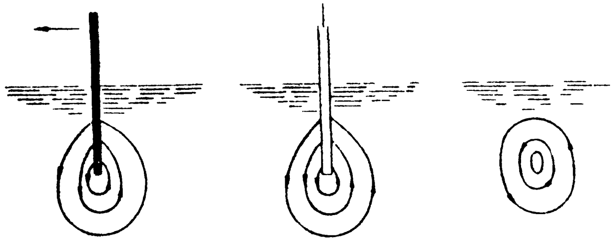


Рис 90

рамках модели идеальной жидкости составляет содержание *постулата Жуковского — Кутта — Чаплыгина.* Он дает основу, оставаясь в рамках модели идеальной жидкости, для объяснения появления циркуляции и подъемной силы в начально безвихревом потенциальном течении.

Близкий способ образования завихренности вследствие мгновенного разрыва скорости, как отмечено еще в работе Г.Гельмгольца [135], можно наблюдать в чашечке кофе (или чая), где движение круглых вихревых колец легко наблюдать в действительности, если быстро провести на небольшое расстояние параллельно поверхности воды наполовину погруженный в нее кружок (или имеющий приблизительно форму полукруга кончик ложки), а затем быстро его извлечь. Тогда в жидкости остаются половинки вихревых колец, ось которых лежит на свободной поверхности и которые будут двигаться поступательно в том же направлении, в каком двигалась ложка.

Наиболее простое качественное объяснение этому явлению дано в работе Ф.Клейна [156], где указано, что для плоского случая при движении в воде погруженной пластины вокруг нее возникает потенциальное течение. При внезапном извлечении пластины из воды на ее месте возникает разрыв сплошности. Затем под воздействием сил давления частицы жидкости, находящиеся слева и справа от пластины, сливаются, образуя вихревой слой (рис. 90). Эти рассуждения легко обобщены Ф.Клейном и на трехмерный случай для весла конечных размеров. При этом образуется вихревое полукольцо, замыкающееся на поверхности жидкости.

Количественный расчет параметров трехмерного осесимметричного вихревого кольца при внезапном извлечении из идеальной жидкости круглого тонкого диска сделал Дж.Тейлор [236]. Приравнивая импульс и кинетическую энергию жидкости при потенциальном безотрывном обтекании диска радиуса c, движущегося со скоростью U, импульсу и кинетической энергии вихревого кольца с интенсивностью κ, средним радиусом R и радиусом поперечного сечения a, получаем

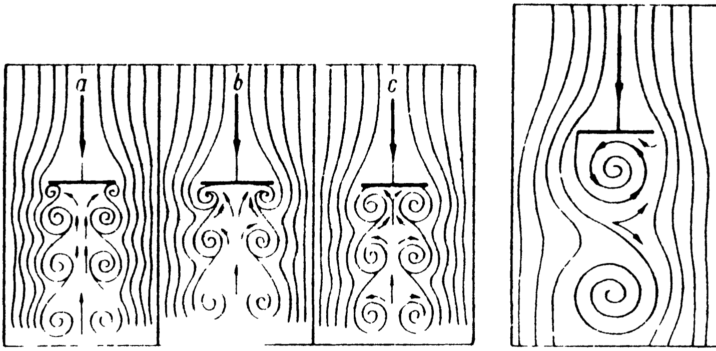


Рис. 91

$$\frac{8}{3}\rho\, c^3 U = \pi \rho \kappa R^2 ;$$

$$\frac{4}{3}\rho\, c^3 U^2 = \frac{\kappa^2 R \rho}{2}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right). \qquad (5.1)$$

Условие, что при внезапном извлечении диска вихревой слой радиуса c определяет значение циркуляции χ, позволяет записать

$$c = \int_0^c \frac{4U r}{\pi\sqrt{c^2 - r^2}}\, r\, d r = \frac{4c U}{\pi} . \qquad (5.2)$$

Решая уравнение (5.1) с учетом (5.2), находим размеры вихревого кольца $R = 0{,}816\, c$; $a = 0{,}152\, c$; $R/a = 5{,}37$ и его скорость

$$V = \frac{\kappa}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right) = 0{,}436\, U .$$

Таким образом, параметры κ, a, R, V вихревого кольца полностью определяются через скорость U и радиус c диска, мгновенно выдернутого из идеальной жидкости. Важно подчеркнуть, что для образования вихревого полукольца необходим разрыв сплошности, образующийся лишь при мгновенном (или сравнительно быстром) удалении ложечки.

2. Возникновение завихренности при обтекании твердых тел

Наличие острой кромки вовсе не является необходимостью для возникновения циркуляции при обтекании твердого тела маловязкой жидкостью. Предложенная в 1904 г. Л.Прандтлем концепция по-

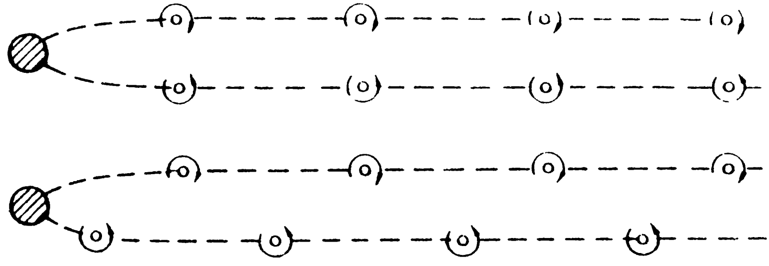


Рис. 92

граничного слоя позволила примирить противоречие, существующее между изучением вихревых явлений в идеальной жидкости и теоремами Лагранжа и Гельмгольца об отсутствии причин к возникновению вихрей. Согласно Л.Прандтлю, картина обтекания твердого тела маловязкой жидкостью выглядит следующим образом. Прилипая к телу на его поверхности, жидкость образует прилегающий к этой поверхности весьма тонкий (при малой вязкости) пограничный слой. В нем на относительно небольшой толщине совершается резкий переход относительной скорости жидкости от нулевого значения на поверхности тела к значению, отвечающему условиям потенциального свободного обтекания. Движение жидкости в пограничном слое имеет отличную от нуля завихренность и дает фактическое начало отделяющимся от тела вихрям — дорожкам Кармана. Отметим, что образование за твердым телом двойных рядов вихрей наблюдалось и до Т.Кармана. Известны работы А.Маллока [175] и А.Бенара [98], в которых экспериментально отмечалось наличие за пластиной, расположенной поперек потока, системы вихрей разного направления. На рис. 91 [175] показаны различные стадии образования двойных рядов. Схожие наблюдения сделаны А.Бенаром, однако он ставил перед собой задачу исследовать структуры потока вихрей в различных вязких жидкостях. Первая работа Т.Кармана [148] ставила конкретную цель — объяснить механизм сопротивления движения твердых тел, связанный с вихревым следом. При этом установлена возможность существования двойных рядов вихрей, одинаковых по модулю, но разных по знаку интенсивностей, выстроенных либо в симметричном, либо в асимметричном (шахматном) порядке (рис. 92). Успешное объяснение этого механизма, связанное с устойчивым шахматным расположением вихрей, получило широкую известность, а само явление двойного ряда вихрей получило название дорожки Кармана*.

Открытие вихревых дорожек, вошедшее впоследствии практически во все учебники по гидромеханике [15, 45], дало начало самостоятель-

---

* Т. Карман отмечал [149], что такая дорожка была известна задолго до его рождения, и указывал при этом на изображение в одной из церквей Болоньи св. Христофора, переносящего младенца Христа через поток. Вокруг его ног художник показал чередующиеся вихри.

ному направлению исследований, связанному с изучением процессов вихреобразования за плохообтекаемыми телами.*

3. Формирование вихревых структур при падении капель на поверхность жидкости

Первая экспериментальная работа, детально рассматривающая все тонкие стадии процесса образования завихренности в покоящейся жидкости, принадлежит основателю Массачусетского технологического института В.Роджерсу [217] и написана в один год с работой Г.Гельмгольца [135]. Несмотря на ссылки в некоторых публикациях [108, 195, 253], эта замечательная работа остается мало известной, поэтому в приложении представлен перевод указанной статьи, позволяющей с учетом накопленных знаний оценить проникновение ученых прошлого в фундаментальные физические явления.

Следующими были две публикации Ч.Томлинсона [246, 247] о процессах формирования вихревых структур в зависимости от физико-химических параметров жидкостей капли и резервуара. В работах проиллюстрированы различные по форме и поведению вихревые структуры, образовавшиеся из капли. На форму этих структур влияют плотность, вязкость, смачиваемость и поверхностное натяжение пар жидкостей. На рис. 93 [246] показаны различные ситуации образования вихревых структур, когда плотности обеих жидкостей различаются мало. При этом в зависимости от физико-химических параметров жидкостей возможны различные конфигурации.

Первый («арочный») тип структур показан на рис. 93, *а,б,е*. Вначале после взаимодействия капли со свободной поверхностью образовывается вихревое кольцо. В дальнейшем оно порождает в себе новые кольца меньшего диаметра, которые движутся с большой скоростью. При этом сплошность первого основного кольца не нарушается. Образование новых колец объясняется как неустойчивостью движения, так и неравномерной концентрацией подкрашивающих частиц внутри жидкости капли.

Второй тип вихревых образований наблюдался в керосине и бензоле (рис. 93, *в — д*). Вначале капля сплющивалась в диск («блюдо»), не образуя вихревого кольца, затем в случае кротоновой капли обод «блюда» оставался в первоначальном положении, а дно, вытягиваясь, образовывало в конечном итоге кольцо. В случае сивушной капли «блюдо» очень быстро прощелкивало, образуя своеобразный «шатер». При этом вершина шатра оставалась неподвижной, а его стенки вытягивались в четырех направлениях, образуя новые шатры. Отметим, что «арочные» и «шатровые» структуры характеризуются явным на-

* По свидетельству С. П. Тимошенко [72], доклад Т. Кармана на V Международном математическом конгрессе (Кембридж, 1912 г.) вызвал некоторое неприятие Г. Ламба, недовольного тем, что такая блестящая работа выполнена не в Англии.

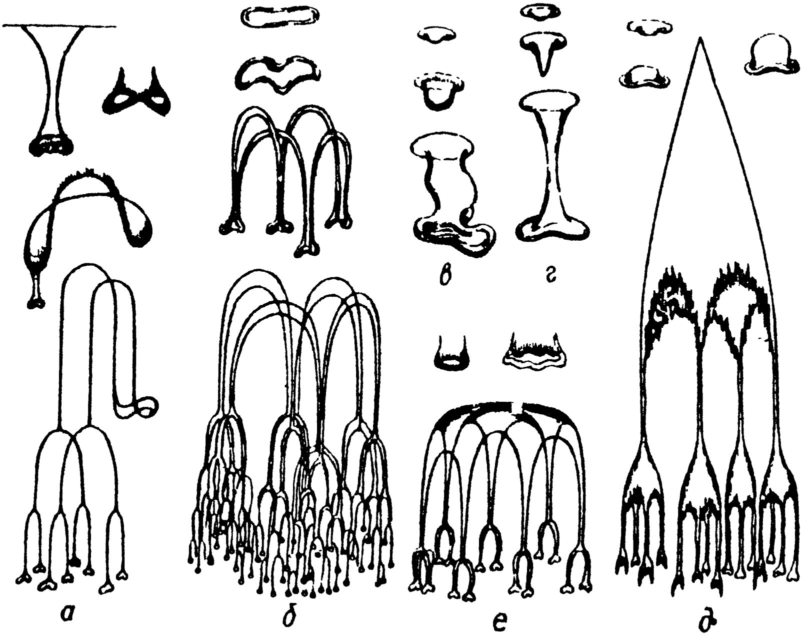


Рис. 93

личием фрактальности, самостоятельный интерес к которым в настоящее время чрезвычайно возрос [230].

Ч.Томлинсон [247] рассмотрел дополнительные возможные случаи образования вихревых структур из капель в нагретой жидкости. В случае, когда плотность жидкости больше плотности капли (рис. 94,*а*), наблюдается ее всплытие с образованием вихревых колец, начиная с момента, когда ее кинетическая энергия падения не в состоянии противодействовать потенциальной энергии сил плавучести. Новую информацию о форме вихревых образований дают рис. 94, *б* — *ж*. Общее для всех приведенных на нем ситуаций — наличие опускающейся капли, сохраняющей некоторое время свою форму, и тонкой шейки, соединяющей ее со свободной поверхностью. В зависимости от свойств жидкости (все они представляют различные и редкие в настоящее время масла) возможна либо трансформация капли внутри жидкости в вихревое кольцо (рис. 94, *е,д*), либо возникновение вихревого кольца внутри капли (рис. 94, *б,в,ж*), либо проникновение окружающей жидкости внутрь капли в виде своеобразного «язычка» (рис. 94, *г*). Ценность этой работы, сохраняющаяся и по сей день, состоит, на наш взгляд, в иллюстрации многообразия формы структур в различных по своим свойствам жидкостях.

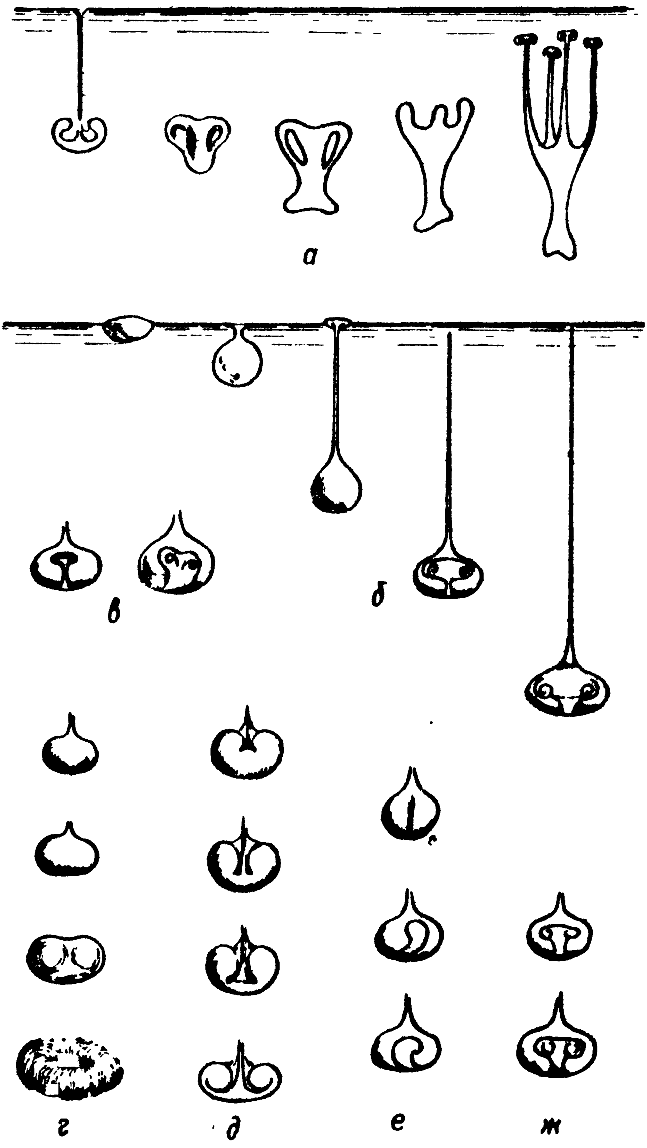


Рис. 94

В ряду исследований формирования вихревых колец из капель отметим работу О.Рейнольдса [209], в которой дано качественное описание известного морякам явления — успокаивающегося действия дождя на волны в море. Путем эксперимента в сосуде с водой с подкрашиванием верхнего слоя толщиной в несколько дюймов показано, что падающая капля, образуя вихревое кольцо, вовлекает с собой в движение и переносит вглубь сосуда значительное количество подкрашенной воды из верхнего слоя. Это, по существу, первое экспериментальное наблюдение «атмосферы» вихревого кольца. В статье [248] предложен иной способ визуализации вихревых колец. Индикатором при этом служила размещенная на поверхности измельченная алюминиевая пудра. Падающая капля, пробивая поверхность, захватывала часть пудры, образуя при подсветке яркое вихревое кольцо.

Дж.Дж.Томсон и М.А.Ньюэлл [239] тщательно исследовали процесс образования вихревых колец. Показано, что капиллярность не играет существенной роли в формировании вихревых колец.

Установлено, что все жидкости делятся на четыре класса, различающиеся по характеру образующихся вихревых колец. Оказалось, что эти классы допускают упорядочение и по кинематической вязкости ν. Приняв в качестве единицы кинематическую вязкость для воды, авторы дали следующую классификацию.

Класс I ($\nu \leq 0{,}7$): эфир, хлороформ и бисульфит углерода дают очень нечеткие кольца — капля разбивается и движется иррегулярно.

Класс II ($1<\nu<3$): вода, спирт, скипидар, керосин дают хорошие кольца.

Класс III ($3<\nu<8...10$): бутиловый спирт, разведенный глицерин. При этом кольца образуются очень медленно.

Класс IV ($15<\nu<30$): раствор сахара, поташ, глицерин. Здесь кольца не образуются вообще, если не взять очень крупных капель.

Отмечено, что сама величина ν не может быть определяющим параметром, поскольку это размерная величина (длина^2× скорость). В качестве нормировки длины естественно взять диаметр капли: установлено, что уменьшение капли дает тот же эффект, что и увеличение ν. Нормировка по скорости проведена не была.

Более кратко рассмотрена задача падения капли одной жидкости в цилиндрический сосуд с другой. Здесь отмечено, что разрушение и деление вихревых колец зависит от движений в столбе жидкости, вносящих нерегулярность в кольцо и приводящих к быстрой диссипации завихренности; разницы в плотностях жидкостей, благодаря которой части вихревого кольца, где собралось больше вещества, падают в виде капель более быстро и образуют вихревые кольца таким же образом, как было сформировано первоначальное кольцо. Исследованы также случаи движения капли для жидкостей с небольшим поверхностным натяжением и малой высоты падения. Опытным путем установлено, что для случая разных жидкостей хорошие кольца образуются тогда, когда жидкости могут смешиваться.

Исследовался важный вопрос об оптимальной высоте падения капель, для которой четко сформированное вихревое кольцо проходит наибольший путь. Установлен периодический характер зависимости глубины прохождения кольца от высоты падения капли, причем расстояние между соседними максимумами высоты хорошо коррелировали с пересчитанным на длину периодом собственных колебаний капли относительно сферической формы. Причины образования вихревых колец при падении капли на свободную поверхность жидкости объяснены следующим образом [239]. Движение окружающей каплю жидкости вначале очень схоже с движением жидкости вокруг твердой сферы того же размера. Когда сфера движется, то касательная скорость ее отличается от касательной скорости сферы, поскольку жидкость обтекает последнюю. Если сфера жидкая, как и среда, в которой она движется, то не будет резкого разрыва в скорости, а только очень быстрое ее изменение, т.е. будет происходить конечное изменение скорости на исчезающе малом расстоянии. Такое изменение эквивалентно вихревому слою, покрывающему сферу, причем вихревые линии являются горизонтальными окружностями, и если жидкость вязкая, то завихренность в слое диффундирует внутрь и вовне. По мере падения капли сопротивление делает ее более плоской, пока она не станет дискообразной. К этому времени, однако, она будет наполнена вихревым движением, и поскольку дискообразная форма имеет неустойчивую конфигурацию завихренности, диск должен превратиться в устойчивую конфигурацию в виде яркого кольца. Наиболее важным свойством жидкости является ее вязкость. Когда капля станет дискообразной, то внутри нее должно быть достаточно вихревого движения, чтобы привести его к превращению в кольцо. Если вязкость слишком мала, то вихревое движение не будет иметь достаточно времени для удаления от поверхности капли, пока она дискообразна, и, таким образом, капля будет продолжать сплющиваться и превратится в тонкий слой с полосками вихревого движения вместо превращения в кольцо; если вязкость слишком большая, то вихревое движение продиссипирует прежде, чем капля станет дискообразной.

На основании кинограмм [107] предложено эмпирическое условие наилучшего образования вихревого кольца из капли: капля в момент контакта со свободной поверхностью должна иметь сферическую форму, переходя в процессе колебания при падении от сплошного к вытянутому сфероиду. Количественно исследовано влияние начального числа Рейнольдса (отнесенного к диаметру кольца) на глубину проникновения кольца в жидкость. Экспериментально обнаружено, что капля бензина или метилового спирта при вертикальном падении порождает не одно, а два вихревых кольца, двигающихся с малым углом к вертикали.

Интерес к исследованиям явления падения капель на поверхность жидкости имеет место и в настоящее время. Помимо чисто научных вопросов он обусловлен наличием этого эффекта в ряде технологических производств. В работах [107, 216] обращено внимание на необходимость определения безразмерных критериев для классификации эволюции движения после падения капли на поверхность. Рассматривалось, при каких условиях из капли одной и той же жидкости образуются либо вихревые кольца, либо выпрыгивающие с поверхности вверх струи и брызги. В качестве критерия принимались числа Фруда $Fr=U/\sqrt{g}D$ и Рейнольдса $Re=UD/\delta$, где U — скорость капли в момент контакта с поверхностью жидкости, D — диаметр капли, g — ускорение свободного падения. На основании многочисленных экспериментов в зависимости от Fr и Re установлена область перехода от струи к вихревым кольцам. Существенным моментом оказалась слабая зависимость от числа Fr в интервале значений $4<Fr<20$; все в основном определялось числом Рейнольдса, критическое значение которого $Re_c \approx 3000$. В работе [107] приведена диаграмма, определяющая область перехода в зависимости от диаметра капель и скорости их падения. В диапазоне диаметров от 0,5 до 5 мм (верхний предел — очень большой диаметр для капли и капля должна быть неустойчивой) область перехода представляет собой близкую к гиперболе кривую, имеющую координаты U=2,2 м/с при D=1 мм и U=0,9 м/с при D=5 мм. Значения скорости, лежащие выше этой кривой, соответствуют брызгам и струям, а значения скорости, лежащие ниже — образованию вихревых колец. Отметим, что капли с D>6 мм разваливаются [13].

В работе [146] обобщены многие полученные ранее результаты и подходы. Отмечено, что определяющим критерием вихревых колец и струй в случае совпадения жидкостей в капле и сосуде является число Вебера $We=U\sqrt{\rho}D/T$, где T — коэффициент поверхностного натяжения. Показано, что в широком диапазоне чисел Фруда $4<Fr<20$ критическим значением является $We_c \approx 8$. Для капель при $We>We_c$ образуется струя, а при $We<We_c$ — образуются вихревые кольца. В эту схему хорошо укладываются экспериментальные результаты [107, 216], а также данные, полученные для воды [40].

На рис. 95 (см. вклейку) представлены сделанные в лабораторных условиях фотограммы различных стадий движения вихревого кольца, образовавшегося в результате падения капли воды (подкрашенной перманганатом калия) на свободную поверхность воды. Вначале формируется очень четкое вихревое кольцо. Через некоторое время за счет неустойчивости, связанной в первую очередь с отклонениями от равномерного распределения завихренности по всей длине кольца, на его поверхности образуются неоднородности в виде утолщений и утоньшений поперечного сечения. Первоначально круговая форма кольца становится синусоидальной. На более тонких участках кольца самоиндуцированная скорость движения возрастает. Эти участки вытягиваются вниз и на них образуются кольца меньших размеров. Такой процесс неоднократно повторяется и в конечном счете приводит к красивой гирлянде, устойчиво существующей в течение десятка минут. В спокойной воде резервуара эти гирлянды имели весьма симметричную форму. При последовательном падении двух капель удавалось наблюдать два коаксиальных кольца, причем заднее четко проскакивало через переднее, однако затем процесс становился трудно идентифицируемым. На рис. 95 представлены ситуации, когда We=2,84 и Fr=2,58. При увеличении высоты падения капли и соответственно увеличении числа We на поверхности воды наблюдались всплеск и брызги (рис. 96). Вначале образовалась воронка, затем из нее поднималась вверх вертикальная струя, на конце которой появлялась сферическая капля меньшего, чем первоначальный, диаметра. При достижении струей максимальной высоты эта капля отрывалась от нее и падала на поверхность. При этом возникали два слабовыраженных кольца, обусловленные как первым ударом капли о свободную поверхность, так и вторичным эффектом разрушения струи. Число We для рис. 96 (см.вклейку)соответствует We=10,97. Проделанные эксперименты при варьировании числа Вебера от We=2 до We=15 хорошо коррелировали с выводами работы [146].

В заключение отметим, что несмотря на большое число экспериментальных данных строгой математической модели, основанной на решении уравнений Эйлера или Навье — Стокса, пока нет.

4. Производство вихревых колец при помощи импульсных струй

Образование вихревых колец при помощи импульсных струй описано в работе Е.Ройша [208], где основное внимание уделено физическому объяснению образования вихревых колец при истечении из трубки импульсных струй. Перевод этой работы дается в приложении. Идеи Е.Ройша были широко использованы в последующих исследованиях. В работе А.Обербека [193] подробно представлены различные ситуации образования колец при истечении импульсных струй и их эволюции в зависимости от начальных и граничных условий. Экспериментальная установка представляла собой сосуд, заполненный водой, в дно которого была встроена небольшая стеклянная трубка так, чтобы жидкость из нее поступала вертикально вверх. Трубка при помощи гибкого шланга соединялась с другим сосудом, в котором находился слабо концентрированный раствор фуксина. Удельные веса раствора и воды были практически равны. Цель исследований А.Обербека состояла в определении границ истекающей струи и исследовании ее воздействия на окружающую жидкость. В частности, подвергались сомнению экспериментальные результаты Г.Магнуса о том, что струя вовлекает в движение всю покоящуюся ранее в сосуде жидкость. Показано, что на истечение струй существенно влияют силы трения. Благодаря им наблюдается четкая граница между покоящейся жидкостью и струей. На рис. 97 приведены некоторые фигуры из [193]. Струи истекали при небольшом избыточном давлении (разница уровней в сосудах изменялась от 5 до 20 мм). Течения отличались большой устойчивостью,

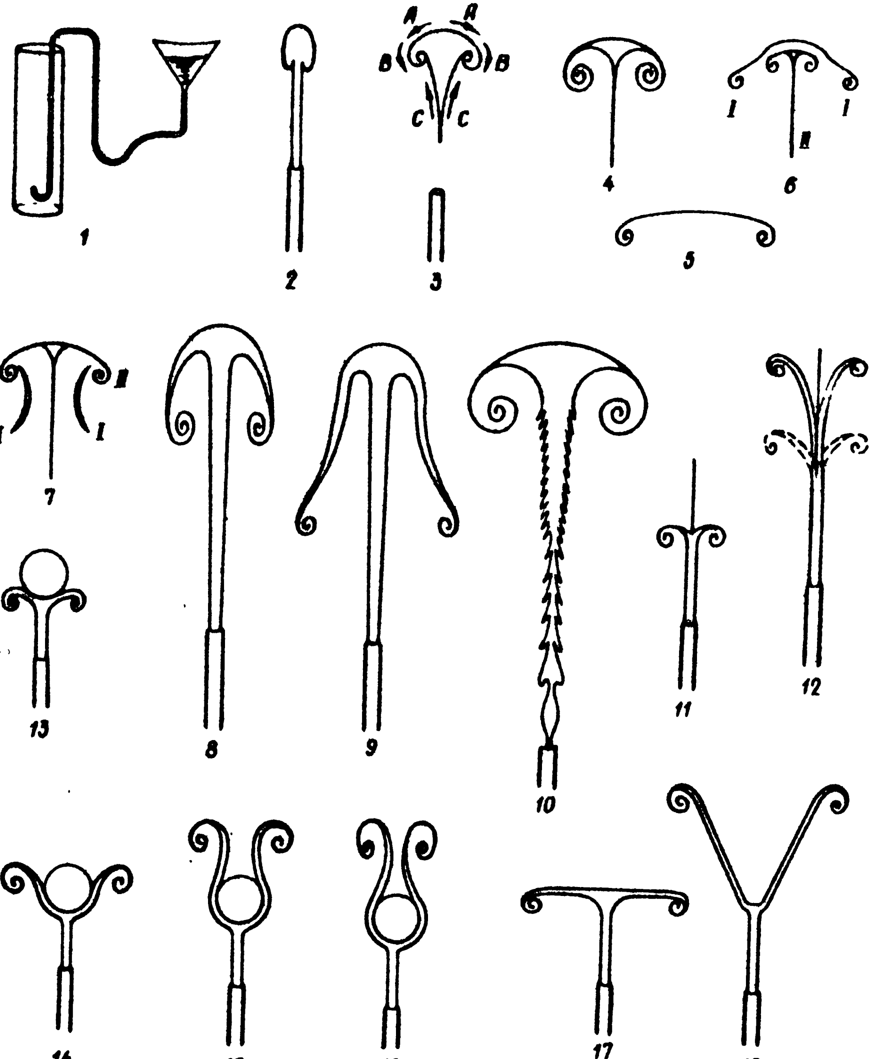


Рис. 97

незначительные возмущения быстро затухали. При открытии крана на передней границе струи возникала особая вихревая поверхность — грибовидная структура [208]. Струя всплывала лишь до определенной высоты, которая была связана с разницей уровней в сосудах.

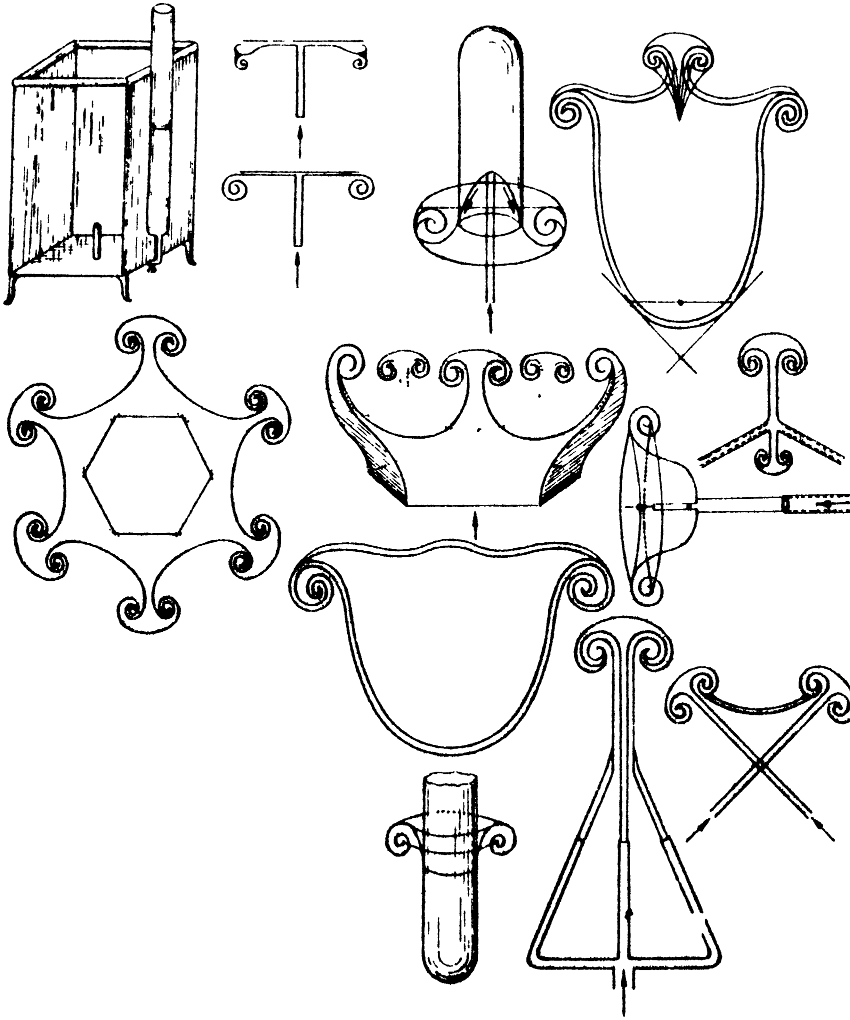


Рис. 98

На максимальной высоте подкрашенная жидкость в струе расширяется и затем диффундирует вниз. На рис. 97 (*8,9*) показаны струи с одинаковыми начальными данными: колоколообразная форма струи во втором случае объясняется незначительным перепадом температуры в сосуде. Форма струи (10) образовалась в результате легкого периодического передавливания каучукового шланга. После окончания надавливания струя быстро приходит в первоначальную форму.

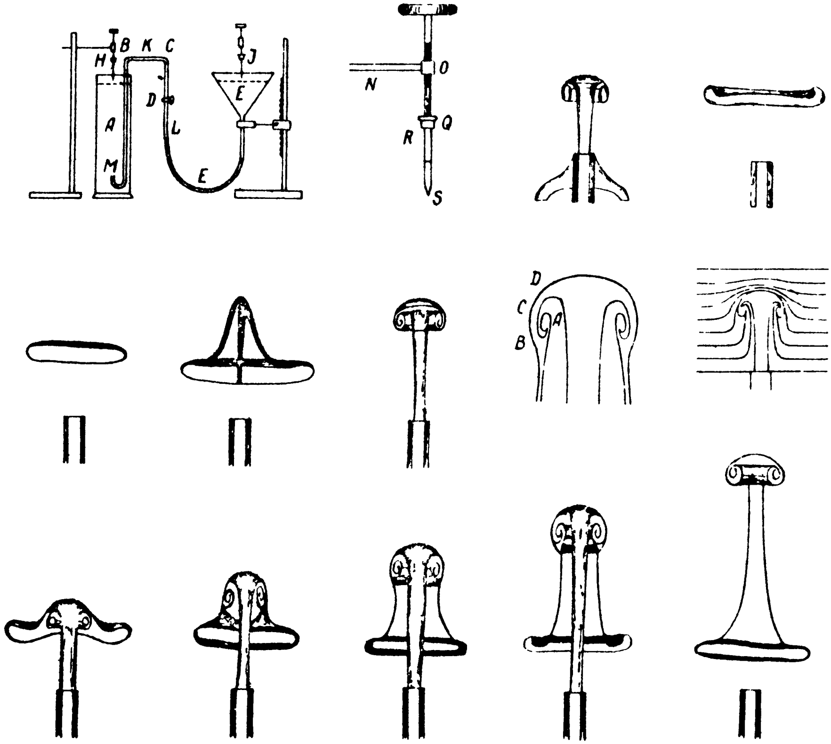


Рис. 99

Лишь начиная с Δh=(80...90) мм струи становятся более чувствительными, что приводит к нарушению их сплошности.

Если открыть кран на краткий промежуток времени, то образуется резко ограниченная область подкрашенной жидкости. Ее первоначальная форма благодаря действию трения и вовлечению покоящейся бесцветной жидкости окончательно трансформируется в движущееся вихревое кольцо. Процесс образования кольца схематически показан на рис. 97 (*2 — 5*), где приведена схема (3) сворачивания струи в кольцо. В покоящейся жидкости образовываются два типа течения. Первое, обозначенное стрелками *A* и *B*, генерируется поступательным движением подкрашенной области твердого тела; второе, обозначенное стрелками *C* и *D*, обусловлено трением. Образование спиралевидной вращательной поверхности есть необходимое следствие взаимодействия этих течений.

А.Обербек [193] рассмотрел процесс чехарды двух (*I, II*) колец (рис. 97, *6, 7*) и ряд ситуаций образования вихревых структур при обтекании струями твердых препятствий. Он указал, что в природе можно найти целый ряд примеров, аналогичных описанным в лабораторном эксперименте процессам. Что касается современных результатов, то наиболее ярким стало открытие грибовидных течений благодаря фотографиям из космоса в океане [76, 231].

Впоследствии на аналогичных установках получены новые результаты. Так, Г.Кётшау [158] рассмотрел обтекание струями препятствий различной геометрической формы с внутренними отверстиями, а также случаи образования грибовидных структур благодаря взаимодействию двух и трех тонких струй (рис. 98). К.Мак [174] в отличие от предыдущих исследователей привел фотографии явления образования структур. Он исследовал процесс прохождения струи сквозь образовавшийся ранее в сосуде горизонтальный слой в виде кольца (рис. 99).

Суммируя в целом изложенные результаты, получаем основной вывод, что вихревые кольца образуются лишь тогда, когда имеет место разрыв течения. В перечисленных исследованиях это определялось кратковременным (импульсным) выпуском жидкости из трубки.

Если трубка расположена горизонтально в лабораторном лотке, то процесс возникновения вихревых структур будет иметь определенные различия. В первую очередь они обусловлены тем, что струи не будут останавливаться в результате дефицита давления. В статье [145] экспериментально исследован процесс импульсной генерации вихревого кольца в линейно стратифицированной жидкости. Установлена важная роль стратификации в процессе образования вихревого кольца, хотя теоретически данный процесс понят еще не до конца. Обзор работ по генерации вихревых колец при горизонтальном расположении трубки содержится в [11].

Детально с помощью фотографии исследованы условия генерации и эволюции колец в воде [191]. Жидкость находилась в стеклянном лотке, а для производства колец использовалась цилиндрическая трубка («ружье») диаметром 7,7 см и длиной 6,6 см. Один торец трубки был наглухо закрыт, а на другом устанавливались металлические диски с одним (1 см) либо с двумя (0,85 см) отверстиями. В трубку наливалась подкрашенная фенолфталеином вода и с помощью электромагнитной системы по ней наносился короткий удар. Таким образом генерировались вихревые кольца, движущиеся в лотке со скоростью примерно 2 м/с. На пути их следования размещалась группа плавающих мелких частиц либо натянутый на раму кусок шифона или промокательной бумаги. Отмечено, что такие препятствия не изменяют характера движения вихревого кольца, которое просачивается сквозь них. Наиболее любопытным было расположение на пути кольца серебряной цепочки для карманных часов. Цепь начинает изгибаться еще до непосредственного контакта с кольцом, что подтверждает наличие у него «атмосферы» — эллипсоидальной области жидкости, движущейся вместе с кольцом и обладающей значительной кинетической энергией.

Детально изучен и процесс отражения вихревого кольца от свободной поверхности воды при различных углах падения. Экспериментально найдено, что если угол между начальным направлением движения вихревого кольца и поверхностью воды меньше 22°, то кольцо отражается. В других случаях кольцо «прорывает» поверхность и образует фонтан воды над ней. При анализе движения вихревого кольца в двухслойной жидкости (нижний слой — более тяжелая соленая вода) наблюдалось явление преломления, весьма схожее с оптическими законами.

Особый интерес представлял следующий эксперимент. На поверхности воды помещался подкрашенный слой керосина (5...10 см). Вихревое кольцо генерировалось в бесцветной воде и двигалось снизу перпендикулярно границе раздела. После ее пересечения в керосине возникало подкрашенное кольцо, которое после отражения от верхней поверхности в конечном итоге оказывалось в воде. Появление окрашенного вихревого кольца в воде выглядело весьма эффектно. Интересны фотографии, связанные с генерацией двух одинаковых вихревых колец, расположенных в начальный момент одно над другим. В процессе движения кольца сближались, а затем перезамыкались и образовывали одно большое кольцо, колеблющееся около круговой оси. В совокупности результаты показывают, что весьма тонкие закономерности движения вихревых колец доступны для наблюдения с помощью самых простых средств. Эта ситуация хорошо просматривается и в исследованиях по вихревым кольцам в воздухе [95, 208, 256], где установлен ряд их характерных свойств. В частности, экспериментально обнаружена «упругость» вихревых колец при косом ударе, когда два дымовых вихревых кольца отскакивали друг от друга и начинали колебаться, как это происходит при соударении в воздухе двух каучуковых колец. Еще одним замечательным свойством дымовых вихревых колец является их отклонение от приближаемого к ним сбоку острия ножа.

К.Круч [159] исследовал процессы развития и эволюции колец при различных диаметрах трубок. Причем, специально рассматривался вопрос движения турбулентных вихревых колец. Он использовал специальный способ подкрашивания колец, заключающийся в нанесении по всему внутреннему периметру передней кромки трубки концентрированного раствора краски. Кольца генерировались при помощи движения поршня, помещенного внутри трубки. Ценность этой работы в том, что получены количественные результаты по развитию турбулентных вихревых колец. Показано, что и при горизонтальном движении колец неустойчивость приводит к многократно изогнутой форме поверхности кольца.

В многочисленных экспериментах по эволюции вихревых структур, образовавшихся при истечении импульсных струй, большое внимание уделялось исследованию их внутреннего строения. Турбулентные вихревые кольца подробно исследовал Т.Максуорси [178, 179, 180].

Он описал эволюцию колец, провел анализ устойчивости, рассмотрел вопросы их взаимодействия. Аналогичное исследование для вихревых пар провел Дж.Ву [258]: пары образовывались истечением импульсной плоской струи из узкой щели. В статье приведены зависимости развития пар во времени. Детальные исследования влияния начальных условий конкретных параметров экспериментальных установок на дальнейший процесс образования и развития вихревых колец провели Б.А.Луговцов [48], В.А.Владимиров и В.Ф.Тарасов [16].

Исследовался процесс формирования вихревого кольца, который наглядно показан на рис. 100. Кольца генерировались из трубки диаметром 2 см. Трубка имела горизонтальный участок и была изогнута под углом 90°. Верхней частью она соединялась с баком, который находился над поверхностью воды в бассейне. В баке был раствор обезжиренной алюминиевой пудры. В результате кратковременного открытия клапана из трубки выталкивалось «облако» раствора, которое двигалось поступательно благодаря начальному импульсу. Затем на передней его границе формировалось резко закрученное вихревое кольцо. Скорость движения частиц в кольце значительно превышала скорость частиц в оставшейся части облака. Через несколько секунд после начала движения кольцо окончательно отрывалось от оставшейся массы. Процесс отрыва в данной ситуации аналогичен явлению разрыва теста в результате скручивания. Кольца, полученные таким способом, имели довольно правильную форму и сохраняли ее сравнительно долго — в течение 15...20 мин. При этом диаметры колец изменялись от 5...6 до 10...12 см.

Описанные выше эксперименты показывали, что наиболее часто вихревое кольцо в однородной жидкости образуется импульсным выталкиванием поршнем массы жидкости из цилиндрического канала. При этом техника эксперимента настолько усовершенствована [115, 180], что удавалось зафиксировать не только общее время движения поршня, но и задавать программу скорости его одновременного движения, тем самым изменяя проходимый путь. Несмотря на большое число экспериментальных данных, важный и очевидный вопрос о том, каким будет вихревое кольцо (ламинарным, турбулентным или ламинарным, претерпевшим развитие неустойчивости и переходящим впоследствии в турбулентное в зависимости от параметров поршневого движения), в литературе до недавнего времени не обсуждался. Данный вопрос обстоятельно рассмотрен в статье [128]. Наряду с детальным описанием экспериментальной установки, содержащей многочисленные технические усовершенствования для отработки наилучшего способа генерации вихревых колец, и высокоскоростных (2000 и 4000 кадров/с) кинокамер для их визуализации, статья содержит и теоретические построения для изучения сложного физического явления.

В процессе одномерного движения по цилиндрическому каналу

Рис. 95

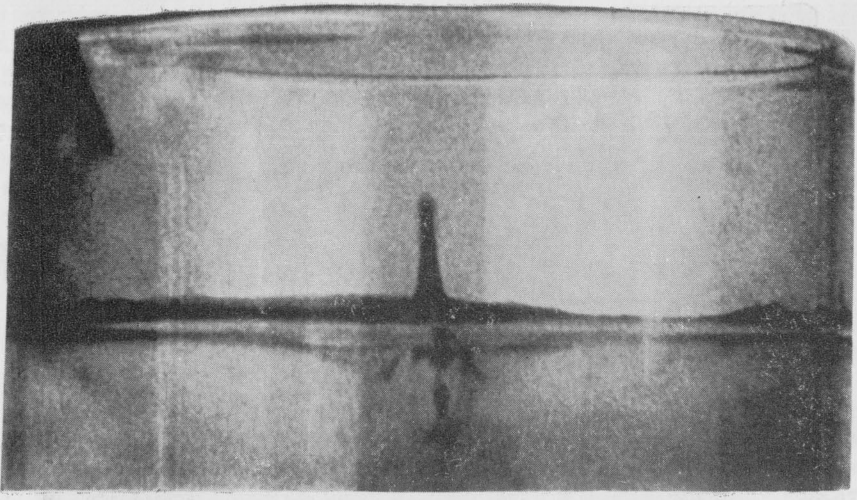


Рис. 96

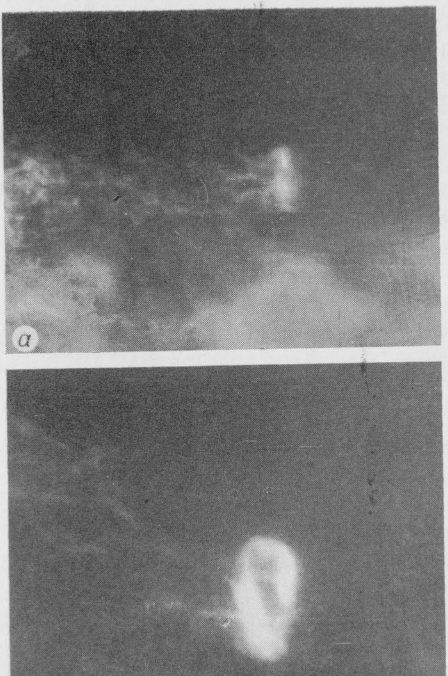


Рис. 100

диаметром D_0 с бесконечным фланцем поршень движется со скоростью $u_0 t$. За время T_0 он проходит путь

$$L_0 = \int_0^{T_0} u_0(t)\,dt = \bar{u}_0 T_0 . \tag{5.3}$$

Здесь

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T_0} u_0(t)\,dt . \tag{5.4}$$

Достигая в момент T_0 положения заподлицо с горизонтальным фланцем канала, поршень площадью $A = \pi D_0^2/4$ сообщает вытолкнутой жидкости плотностью ρ импульс

$$I = \rho A \int_0^{T} u_0^2(t)\,dt . \tag{5.5}$$

Важной безразмерной величиной, характеризующей движение, является фактор программы скорости

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{1} \frac{u_0^2(t)}{\bar{u}_0^{\,2}}\,dt . \tag{5.6}$$

Очевидно, что $P \geq 1$. Используя (5.3) — (5.6), выражение для импульса можно представить тремя различными способами:

$$I = \rho A P \bar{u}_0^{\,2} T_0 = \rho A P \bar{u}_0 L_0 = \rho A P \frac{L_0^2}{T} . \tag{5.7}$$

Вводя характерные масштабы длины L и времени T, согласно формулам $L=(I/\rho\nu)^{1/2}$, $T=I/\rho\nu^2$, где ν — кинематическая вязкость, из соображений размерности находим, что функция тока Ψ, описывающая осесимметричное поле скорости в полупространстве $z \geq 0$ с вихревым кольцом, имеет вид

$$\psi = \left(\frac{\nu I}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} f\left[r\left(\frac{\rho \nu}{I}\right)^{\frac{1}{2}} ,\, z\left(\frac{\rho \nu}{I}\right)^{\frac{1}{2}} ,\, t\,\frac{\rho \nu^2}{I} ,\, J ,\, P ,\, \frac{L_0}{D_0} \right] . \tag{5.8}$$

где

$$J \equiv \frac{I}{\rho \nu A} - P \frac{\bar{u}_0 L_0}{\nu} \qquad (5.9)$$

представляет собой число Рейнольдса вихревого кольца.

В случае турбулентного вихревого кольца в соотношении (5.8) необходимо исключить вязкость, умножив все соотношения на соответствующие степени $t\rho\nu^2/I$. В итоге запишем

$$\psi_T - \left(\frac{I^3}{\rho^3 t}\right)^{\frac{1}{4}} f_T\left[r\left(\frac{\rho}{I t}\right)^{\frac{1}{4}}, z\left(\frac{\rho}{I t}\right)^{\frac{1}{4}}, J, P, \frac{L_0}{D_0}\right]. \qquad (5.10)$$

Важной характеристикой вихревого кольца является его начальная циркуляция Γ_0. Анализируя мгновенный поток завихренности через плоскость отверстия цилиндра с помощью теории пограничного слоя, нетрудно показать, что его мгновенное значение равно $u^2_0(t)/2$. Таким образом, имеем

$$\Gamma_0 = \int_0^{T_0} \frac{u_0^2(t)}{2} d t = P \frac{\bar{u}_0^{\,2} T}{2} = P \frac{\bar{u}_0 L_0}{2} = P \frac{L_0}{2T_0}. \qquad (5.11)$$

Сравнивая эти выражения с (5.9), находим

$$J = 2\Gamma \nu^{-1}.$$

Поскольку $P \geq 1$, то при заданных значениях u_0 и T_0 (или L_0, T_0) любое отклонение программы движения поршня от равномерной будет приводить к увеличению циркуляции и импульса кольца. Значение циркуляции измерялось [115] с помощью лазерного допплеровского измерителя скорости в оторвавшемся от отверстия вихревом кольце при нескольких значениях L_0/D_0 и P. Оказалось, что измеренное значение Γ на 30 — 40 % больше значения Γ_0, вычисленного согласно (5.11). Предложены качественные соображения, связанные со вторичной генерацией завихренности при остановке поршня и эффектами формирования пограничного слоя. Проведен [204] расчет циркуляции Γ и диаметра D вихревого кольца на основе автомодельных решений о сворачивании вихревой пелены при степенном законе $u_0(t) \sim t^m (m \geq 0)$ изменения скорости поршня. В случае трубки без фланца (одно из часто встречающихся устройств для генерации вихревых колец) найдено, что

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = K\left(\frac{L_0}{D_0}\right)^{-\frac{2}{3}}; \quad \frac{D}{D_0} = 1 + 0{,}32\left(\frac{L_0}{D_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad (5.12)$$

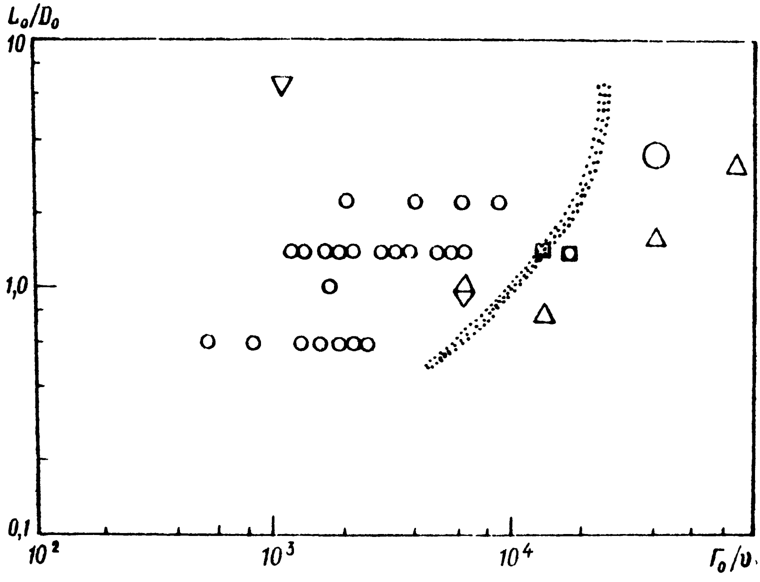


Рис. 101

где постоянная K принимает значения 1,41; 1,64; 1,74 для m = 0; 0,5; 1 (P = 1; 1,125; 1,333).

Сравнение этих формул при m=0 с данными эксперимента [180] показывает разумное согласование для $L_0/D_0 \le 2$. При больших значениях L_0/D_0 формулы (5.12) дают завышенные результаты.

Возвращаясь к вопросу об условиях ламинарных или турбулентных вихревых колец, укажем, что [128] на основе обработки данных многих тщательных измерений, используя безразмерные переменные L_0/D_0 и Γ_0/ν, удалось четко определить полосу, служащую границей раздела. Этот график воспроизведен на рис. 101. На него хорошо ложатся данные других экспериментов [128]. Дополнительные кинокадры дают возможность проследить почти мгновенный (до 150 мс) характер турбулизации вихревого кольца. Они показали, что окружная неустойчивость вихревого кольца, с которой традиционно связывались распад кольца и возникновение турбулентности, не всегда такова. В целом, несмотря на значительные усилия многих исследователей, этот сложнейший процесс понят в настоящее время далеко не до конца.

РАННИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВИХРЕЙ

Чтение оригинальных трудов дает изучающему любой предмет большое преимущество, ибо наука наиболее полно всегда усваивается в стадии зарождения.

Д.К.Максвелл «Трактат об электричестве и магнетизме»

В современной гидромеханике теория вихревых движений является вполне сложившейся дисциплиной. Однако в отличие от механики твердого деформируемого тела, где в капитальных трудах [6, 71] весьма детально отражено становление этой науки, задача создания истории динамики завихренности еще даже не ставилась. Правда, в конце XIX — начале XX вв. успехи в данной области суммировались в обзорных статьях [10, 85, 100, 138, 171]. Эти работы описывали в основном теоретические результаты Г.Гельмгольца, Д.Стокса, В.Томсона, Дж.Дж.Томсона, В.Хикса и др. Меньше внимания уделялось ранним экспериментальным исследованиям [27, 62, 95, 208 — 213, 217], содержащим тонкие моменты в описании динамики вихревых течений реальной жидкости. Интересно попытаться проанализировать впечатления авторов этих публикаций, которые оказались бы в современной лаборатории. Вероятно их могла бы смутить сложность экспериментальной аппаратуры для визуализации вихрей и возможности компьютеров для обработки результатов измерений. Однако они, несомненно, активно участвовали бы в обсуждении особенностей вихревых движений, а их собственные результаты вполне соответствовали современным научным требованиям.

Ниже приведены переводы трех статей, особая роль которых отмечена как в классическом учебнике Г.Ламба [46] и лекции Д.Рэлея [206], так и в современных публикациях [180, 253]. Здесь типичным является присущий великим ученым контраст между простотой и доступностью экспериментальных средств и глубиной осмысления полученных при этом результатов.

В.Роджерс

О ФОРМИРОВАНИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ КОЛЕЦ ВОЗДУХОМ И ЖИДКОСТЯМИ при определенных условиях вытекания *

Давно известно, что газовые пузырьки фосфоресцированного водорода, состоящего из PH_3 с примесью PH_2, при взрывном горении образу-

* Перевод с англ. В. В. Мелешко, статьи [217].

ют в воздухе кольцо белого пара. Это кольцо при подъеме проявляет вращение каждого своего вертикального сечения вокруг криволинейной оси. Аналогичное движение иногда различимо в дыме от пушки и в резких выхлопах паровой трубы, а также, как знают опытные курильщики, такие вращающиеся кольца легко получаются, если табачный дым выпускать из сложенных трубочкой губ.

Изучая недавно явление воздушных струй, я пришел к необходимости критического изучения условий, при которых получены эти выхлопные кольца. Используя подходящее оборудование, мне удалось не только проследить развитие колец, образующихся в выдуваемом сквозь отверстие воздухе, но и выявить аналогичное движение в тех кольцах, которые возникают, когда лопается обычный мыльный пузырь. Более того, мне удалось путем определенной изобретательности сформировать в воде и других жидкостях аналогично устроенные кольца и соотнести их с теми же механическими причинами, которые приводят к возникновению колец в воздухе. Поскольку методы эксперимента, которые я применил, и большинство наблюдений являются, по-видимому, новыми и поскольку к механизму этих замечательных эффектов ранее, как я абсолютно уверен, не обращались, то полагаю, что последующие подробности можно рассматривать как небезынтересное дополнение к нашим знаниям в этой области исследований.

I. О воздушных кольцах, образованных кратковременными залпами из отверстия

1. Способ создания воздушных колец. Чтобы в этих случаях форму и внутреннее движение вытекающего воздуха сделать четко видимым, я использовал большой стеклянный резервуар (рис.102,*1*), в котором воздух был непрозрачным благодаря постоянному производству нашатыря.

К верху сосуда с помощью измельченного цемента была приклеена цинковая или стеклянная крышка с тремя отверстиями: центральным круговым диаметром в один дюйм и двумя другими значительно меньших размеров, снабженных короткими патрубками, поднимающимися над крышкой. Из двух последних отверстий одно предназначено для соединения с разрядными трубками и держится закрытым, когда используется центральное отверстие. Второе имеет тонкую стеклянную трубку, изогнутую под прямым углом и проникающую вовнутрь сосуда, не достигая двух дюймов до его дна. На своем наружном конце она соединена с гибким шлангом, через который, нагнетая воздух в нижнюю часть сосуда, экспериментатор может по своему желанию выпустить нужный объем облачного воздуха через любое отверстие. Для этого он может воспользоваться как своим ртом, так и резиновой грушей, прикрепленной к концу шланга, причем первый путь во многих случаях предпочтительнее. На равных расстояниях от центрального отверстия к нижней поверхности крышки прикреплены

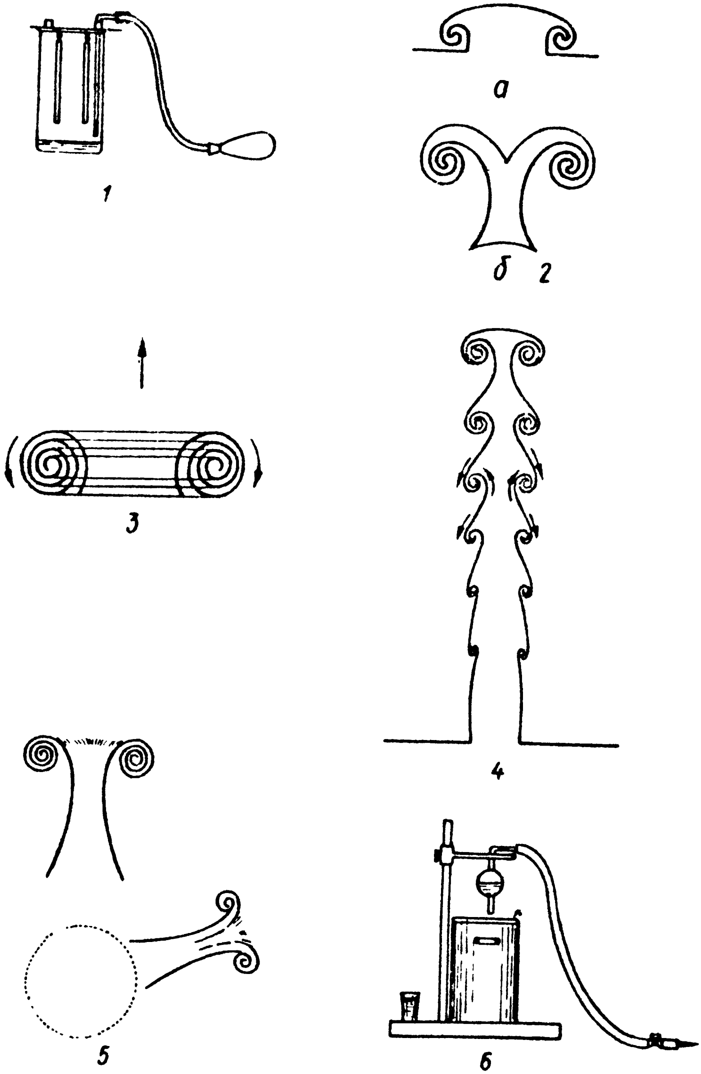


Рис. 102

два крючка, с которых свешиваются два длинных отрезка толстой хлопчатой ткани.

Для подготовки аппарата к эксперименту снимается крышка и в сосуд наливается обычная соляная кислота до глубины полдюйма и к ней добавляется один или два кубических дюйма азотной кислоты. Отрезки хлопчатой ткани после погружения в сильный раствор аммония вешаются на крючки. Крышка ставится в исходное положение с легким нажимом, чтобы получить плотное соединение, не пропускающее воздуха.

Воздух внутри сосуда быстро становится непрозрачным с густым облаком хлорида. Прикладывая губы к свободному концу гибкого шланга, из оставшегося незакрытым отверстия можно извлечь либо клубы, либо непрерывную струю дыма. Излишне говорить, что в процессе проведения эксперимента окружающий воздух должен быть практически неподвижным, поскольку малейшее его движение вблизи отверстия приведет к нарушению симметрии эффекта.

2.Стадии формирования кольца. Когда в результате сравнительно сильного импульса облачный воздух выходит из сосуда в виде быстрых, но не резких клубов, то каждое маленькое облачко принимает около отверстия форму кольца. Это кольцо, постепенно расширяясь при подъеме, тем не менее сохраняет свою симметрию до тех пор, пока не достигнет высоты двух, а иногда даже трех футов над отверстием.

При более мягком и менее внезапном импульсе кольцо по мере продвижения несет за собой шлейф облачного воздуха, *образующий тянущееся вниз продолжение внутренней части кольца.*

С помощью еще более легкого выдыхания воздуха губами можно вытолкнуть его столь мягкой волной, что будет заметно, как уходящее облако медленно сворачивается от отверстия, не теряя при этом связи с основной массой — все в целом напоминает вершину колонны, украшенной волютой. В этом эксперименте кольцо не генерируется, но зато можно наблюдать зарождение такого движения и проследить за механическими движениями, создающими кольцо. На рис. 102,*2* показаны ранняя стадия и полностью сформированное кольцо с частью присоединенного шлейфа, причем в обоих случаях даны лишь поперечные сечения кольца.

Когда залп производится импульсом более сильным, чем в первом из упомянутых случаев, результирующее кольцо устремляется вверх столь быстро, что убегает от шлейфа. Последнему остается либо медленно тянуться в виде бесформенной массы, либо, сохранив достаточную скорость, испустить из себя второе меньшее кольцо, быстро следующее за первым. Прилагая еще более энергичные усилия, можно заставить вытолкнутый воздух образовывать три, четыре и даже большее число четко сформированных колец.

Размер первоначально сформировавшегося кольца зависит главным образом от ширины отверстия и в некоторой степени от силы удара. С отверстием диаметром в полтора дюйма и большой подводящей трубкой легко с помощью подходящего импульсного выдоха генерировать совершенно симметричные кольца от двух до трех дюймов в диаметре, которые имеют энергию, достаточную для подъема без разрушения на высоту шести — семи футов. Таким способом можно сделать эти красивые явления видимыми для широкой аудитории, заставляя дымовые клубки гнаться друг за другом до тех пор, пока они не расплющатся об потолок.

Если вместо рта использовать упругую грушу для выталкивания облачного воздуха, то в результате быстрого сжатия и последующего отпускания рукой образуются очень симметричные кольца, которые обычно не сопровождаются никаким шлейфом. Последний результат, очевидно, связан со внезапным расширением груши и, следовательно, со втягиванием последней части облачной массы обратно в резервуар. Продолжая сдавливать грушу так, чтобы предотвратить ее расширение, можно воспроизвести те же фазы явления, что и в случае импульса, сообщаемого выдохом.

3. Вращение и структура воздушных колец. Чтобы получить определенное представление о движении и внутренней структуре кольца, необходимо смотреть на него в почти горизонтальном направлении и в сильном проходящем свете. Это удобно сделать, поместив аппарат на столе немного ниже уровня газовой лампы, но на значительном расстоянии от нее. Тогда видно, что вращение кольца как в зарождающемся состоянии с присоединенным шлейфом, так и в уже сформированном и отделенном всегда имеет одно направление: внутренние завитки движутся вперед (при обычном способе проведения эксперимента — вверх), а наружные — в противоположном направлении (рис. 102,*3*). Чтобы глаз мог легко следить за этим движением внутри кольца, воздух внутри сосуда должен быть средней облачности, а выталкивающее усилие — быстрым, но не резким. При этих обстоятельствах видно, что *кольцо состоит из витков облачного воздуха, между которыми свернута аналогичная спираль прозрачной атмосферы.*

Когда кольцо имеет шлейф, то легко распознать, что облачная спираль непрерывно связана с этой сопровождающей массой и спираль действительно исходит из нее вблизи внутренней окружности кольца. Еще в более ранней стадии движения удается отметить начало такой двухслойной спирали, наблюдая как каждый вытягиваемый из основной массы завиток захватывает порцию чистого воздуха и заключает его между своими изгибами.

4. Происхождение вращения. Оно, очевидно, связано с комбинированным воздействием внешнего импульса и сопротивления, которое испытывают края вытекающей массы со стороны ребра отверстия и со стороны воздуха, в котором эта масса движется. Внешний импульс благодаря распространяющемуся по резервуару растяжению должен до некоторой степени действовать в наружном направлении, в то время как сопротивление действует примерно противоположным образом. Поэтому в итоге будет произведен реверс или заворачивание выходящего облака вокруг отверстия, которое, поскольку воздействие продолжается, будет развиваться в описанные выше расширяющиеся завитки и в конце концов в совершенное и быстро вращающееся кольцо.

Расширение кольца при его подъеме оказывается естественным результатом растягивающего характера импульса, воздействующего на воздух по мере его выхода из отверстия.

5. Горизонтальные полоски кольца. Изучая кольцо с четко различимыми чистыми и облачными спиралями, обнаружено появление *чередующихся слоев или полос облачного и сравнительно чистого воздуха, расположенных горизонтально,* которые наиболее сильно заметны вблизи вершины и основания кольца и практически исчезают в его середине. Когда применяемый воздух является лишь слегка облачным, а кольца большими и хорошо развитыми, то возникающие полосы восхитительно проявляются в мягком прошедшем свете и немало добавляют к красоте вращающегося и расширяющегося клубка.

Легко видеть, что эта очевидная структура есть *оптический обман,* обусловленный прохождением света поочередно через облачные слои большей и меньшей толщины составного кольца. Поэтому можно заметить (рис. 102,*3*), что приходящие к расположенному в горизонтальной плоскости глазу лучи, прошедшие через верхнюю часть облачной спирали, будут преломлены значительно сильнее, чем те, которые прошли в параллельной плоскости непосредственно через чистое пространство. При этом первые должны пройти значительную часть пути в облачном слое, в то время, как вторые проходят немногим более чем удвоенную толщину. Такое же соотношение должно иметь место для следующих внутренних завитков, но по мере того, как витки спирали становятся тоньше, разность между толщинами чистого и облачного воздуха, через которые проходит свет, постепенно уменьшается и вблизи экватора становится неощутимой. Следовательно, полосы, столь сильно заметные вблизи вершины и основания кольца исчезают по мере приближения к его среднему сечению.

6. Об эффектах, производимых непрерывным выдувом. Слегка *удлиняя* импульс либо от рта, либо от груши так, чтобы вытолкнуть сравнительно большое количество облачного вещества при средней скорости, удается заметить частичное формирование второго кольца в распухшей части шлейфа, который все еще сопровождает первое кольцо и даже третье, хотя и более несовершенное, в шлейфе, сопровождающем второе кольцо. Причем, все это формирование по-прежнему образует единую массу.

При *непрерывном и равномерном выдуве* средней силы явления бывают более любопытными и поучительными. В этом случае столб воздуха, сохраняя свою гладкую цилиндрическую наружную границу только на небольшом расстоянии над отверстием, обнаруживает выше вдоль поверхности на почти одинаковых дистанциях последовательность завитков или волют все более и более развитых по мере продвижения вверх и часто заканчивающихся на вершине почти совершенным отдельным кольцом (рис. 102,*4*). При увеличении выдува с нарастающей скоростью эти боковые отметины на столбе становится менее заметными и наблюдаются повсюду, переходя в пределе в ряд маленьких выступов, изгибами спускающихся вниз подобно низшему и наименее сформировавшемуся завитку в предыдущем эксперименте.

Анализируя эти боковые отклонения (рис. 102,*4*), можно увидеть, что каждое из них образовано за счет смежных частей столба как выше, так и ниже этих завитков. Стрелки внутри, расходящиеся кверху, показывают направление, в котором внутренние части потока отклоняются, чтобы соединиться с более широкой частью спирали. Наружные стрелки, направленные вниз, обозначают относительное возвратное движение, обусловленное сопротивлением, действующим на сторонах, и показывают траекторию входящих в спираль сверху частиц.

Казалось бы, эти движения должны иметь эффект, по крайней мере внешний, состоящий в разделении колонны на чередующиеся полосы разреженного и сгущенного воздуха. При этом первые расположены примерно посередине между соответствующими витками, а вторые — непосредственно выше тех мест, где витки соединяются с основной массой. Эти регулярные чередования, фактически эквивалентные генерируемым в вытекающем потоке системам волн или колебаний, показывают аналогию в условиях для больших потоков газообразного вещества и тонких струй, в которых наличие такого колебательного движения уже указывалось и которое может иметь отношение к последнему явлению. По крайней мере они дают убедительные доказательства того, что даже *сильный поток газа, вытекаемого при постоянном давлении, не течет с непрерывной однородностью, а образует область периодических движений с равно повторяющимися интервалами.*

II. О движении воздуха при разрыве и взрыве пузырей

Поскольку прекрасные кольца, образуемые при взрывном горении фосфоресцированного водорода, формируются под воздействием значительно более мощных сил, чем те, которые проявляются при разрыве пузырька обычного воздуха, важно определить, каким будет эффект от простого разрыва пузырька без учета какого-либо взрывного действия. Я провел многочисленные эксперименты с пузырьками обычного воздуха, сделав их облачными, как и в предыдущих опытах. Меня особенно заинтересовал тот факт, что во всех этих случаях *различимое вращательное движение происходит аналогично тому, как это описано для воздушных колец.*

7. Проведение экспериментов с плавающими пузырьками воздуха. Для того, чтобы наблюдать движение воздуха, вызванное разрывом пузырька, я использовал глубокую стеклянную чашу, в которую была налита вода, содержащая столько мыла, сколько необходимо для обеспечения достаточной продолжительности существования образованных на водной поверхности пузырьков. Наибольшего размера чаша для ополаскивания пальцев после десерта вполне соответствует этой цели. Ставя ее на стол около «кольцевого» аппарата (рис. 102,*1*), предварительно заряженного очень непрозрачным воздухом, я присоединил к отверстию сосуда с патрубком гибкий шланг, заканчивающийся стеклянной трубкой диаметром примерно в одну десятую дюйма. Погрузив конец трубки в мыльную воду так, чтобы набрать небольшой объем жидкости, далее я держал ее отвесно вблизи поверхности воды. Затем, осторожно выдыхая воздух сквозь второе малое отверстие в сосуде, я создавал плавающий пузырь любого размера от половины до трех дюймов в диаметре. Когда это было проделано, стеклянный «клюв» мягко подымался вверх, а чаша накрывалась стеклянной пластинкой, надвигаемой на нее скользящим движением. Пузырек теперь не должен подвергаться возмущениям в течение пятнадцати или двадцати секунд для того, чтобы его содержимое и воздух в чаше успокоились. Было также видно, что за это время непрозрачное облако в пузырьке отошло немного от его верхушки, оставаясь над уровнем поверхности воды.

Поскольку для удовлетворительного наблюдения необходимо, чтобы разрыв пузырька начался строго у вершины и расширялся симметрично вокруг нее и так как в спонтанном взрыве это может происходить лишь случайно, целесообразно не ожидать разрыва, а форсировать его с помощью проволочки, вводимой вертикально в верхушку и быстро удаляемой. При этом сначала стеклянная крышка должна быть мягко сдвинута. Когда это проделано без лишних возмущений, то виден облачный столб, поднимающийся на несколько дюймов над водой и сворачивающийся в изящные завитки на вершине.

При наличии пузырька диаметром от одного до полутора дюймов симметрия результирующего столба весьма поразительна и *не будет ошибочным его соответствие в движении и форме уже описанному случаю ранней стадии формирования кольца.* Во многих случаях на вершине формируется почти отделенное совершенное кольцо и когда воздух не слишком замутнен, то четко различимы чередующиеся спирали и горизонтальные полосы. Но из-за слабости вращения эти проявления длятся лишь мгновения. Когда пузырек имеет в диаметре два или три дюйма, то поднимающиеся и опускающиеся изгибы и завитки на верхушке облачной массы все еще доступны наблюдению, хотя и значительно менее заметны, чем в предыдущем случае. Когда лопаются очень маленькие пузырьки, то движение слишком быстро, а облако слишком мало для удовлетворительного наблюдения.

8. Возникновение вращения. Оказывается, что возникающие при механическом разрушении плавающих пузырьков силы по типу и общему направлению схожи с силами, действующими при выталкивании кольца из отверстия. Одна из них, очевидно, представляет собой *силу поверхностного натяжения жидкой пленки,* управляющая движением воздушного облака сквозь отверстие, другая — *сопротивление окружающего воздуха,* куда выталкивается эта масса. Первая сила соответствует эффекту растяжения, распространяющемуся по сосуду в предыдущих экспериментах, а вторая — одинакова в обоих случаях. При этом расширяющееся отверстие пузырька, через которое как бы выталкивается воздух, можно рассматривать как соответствующее отверстие в крышке сосуда.

Такой взгляд на действие пленки подтверждается очень любопытным эффектом, возникающем при прокалывании пузырька сбоку. В результате прикосновения кончика проволоки к основанию пузырька из отверстия вырывается почти горизонтальный поток облачного воздуха. Если проткнуть пузырек на промежуточной высоте, то воздух движется наклонно вверх. Следовательно, едва ли можно сомневаться в том, что во всех случаях *пузырек разрушается из-за нарастающего регулярного расширения первоначально сделанного отверстия. Это происходит достаточно медленно, в результате чего отверстие успевает сформировать направление растягивающей силы.*

9. Кольца, генерируемые от сферических пузырей. Описанные выше эффекты осуществляются в еще более потрясающей манере при разрыве пузырьков полностью сферической формы. В этом, как и в предыдущих экспериментах, должна быть тщательная предосторожность с целью оградить воздух от сотрясений. При этом созданный пузырек должен располагаться на дне стеклянной чаши на кусочке мягкой шерсти или хлопковой ткани и оставаться невозмущенным в течение десяти или пятнадцати секунд. После прокалывания его на вершине очень тонкой проволокой *содержимое пузырька внезапно выстреливается вверх на несколько дюймов* облачным столбом, верхушка которого образует *яркое отдельное кольцо,* которое иногда поднимается столь быстро, что отделяется от общего шлейфа.

Эффект наилучшим образом виден для пузырька диаметром от трех четвертей до одного дюйма. Когда окружающий воздух совершенно спокоен, кольцо сохраняет свою форму даже выше краев чаши, давая ясный, хотя и кратковременный вид своих спиралей, горизонтальных полос и направления вращения. Если проколоть пузырек сбоку, то, как и следовало ожидать, он выбросит свое содержимое в направлении проволоки, обнаруживая, хотя и менее совершенно, но ту же конфигурацию. Оба эти эффекта схематично показаны на рис. 102,*5*.

Поскольку эти эксперименты по разрушению пузырьков могут встретить большой интерес, я могу предложить их легко повторить, образуя пузырьки в виде сегментов или замкнутых сфер из табачного дыма, выдуваемого из носика обычной трубки в мыльную воду. Однако следует помнить, что даже легкое движение окружающего воздуха будет портить наблюдение.

Едва ли мне нужно добавлять, что поверхностное натяжение криволинейных жидких пленок, столь ярко показанное в этих явлениях, проиллюстрировано профессором Дж.Генри в серии интересных экспериментов, резюме которых опубликовано несколько лет назад.

В данном случае наиболее важный вывод из результатов состоит в том, что пузырьки нарушаются не из-за резкого нерегулярного снижения сцепления по всей пленке, а благодаря равномерному постепенному расширению начального отверстия, в результате чего пленка непрерывно стягивается к краю.

10. О кольцах, образованных при взрыве плавающих пузырьков фосфоресцированного водорода. В том, что мы уже наблюдали, имеет место действие простого механического разрушения пузырька, причем в качестве причины выступает растягивающая сила на пленке или, что эквивалентно, саморасширение содержимого пузырька, освобожденного от оболочки, в которой оно содержалось. Но в данном случае разрушение начнется не раньше, чем возникнет химическая реакция большой интенсивности между заключенным внутри газом и воздухом. Эта реакция, начавшись обычно у вершины и распространяясь *симметрично* вниз и в стороны, дает начало мощной растягивающей силе, направленной всюду наклонно вверх. Продукты горения таким образом выбрасываются в окружающий сравнительно спокойный воздух в условиях, аналогичных предыдущим экспериментам при энергичном залпе из «кольцевого» аппарата. Сопротивление по сторонам восходящего вверх и расширяющегося столба, соединенного с импульсом вверх от содержимого внутри, дает начало *аналогичному вращению облачной массы,* сворачивая ее в спирально закрученное кольцо после окончания взрыва.

Отметим, что взрывные кольца значительно быстрее в продвижении и вращении колец, созданных механическим залпом, поскольку они образованы силами с большей энергией. Можно ожидать, что кольца второго вида более схожи с первыми в тех случаях, когда для их генерации применен более энергичный импульс.

В большинстве случаев клубы фосфорной кислоты столь непрозрачны, что затрудняют изучение внутренней структуры колец. Однако, когда они слабее, то удается проследить внутри этих колец, как и в других случаях, двухслойную спираль облачной и чистой атмосферы.

В экспериментах со взрывающимися пузырями можно заметить частые нерегулярности и неудачи в воспроизведении кольца. Это естественное следствие разрушения, начинающегося вместо верхушки пленки либо сбоку, либо в нескольких местах одновременно. Соответственно в этих случаях заметно, что пламя и дым вырываются в сторону, образуя разорванные и почти бесформенные клубы.

III. О формировании жидких колец

Возникновение жидких колец в результате падения последовательности капель часто, хотя и весьма случайно, наблюдалось в ходе лабораторных работ. В то же время, как мне представляется, до сих пор не было попыток определить структуру и движение этих колец или точных условий, при которых они генерируются. Мое внимание к этому классу эффектов было привлечено несколькими замечаниями профессора Хорсфорда о кольцах, формируемых осажденным сульфатом свинца. После нескольких попыток с этим и другими осадками я пришел к выводу, что химическое действие не важно для рассматриваемого частного явления и что можно использовать подкрашенную цветным веществом воду. Среди использованных материалов можно отметить хромово-кислый свинец, карбонат свинца, сернокислый свинец, сернокислый барий, голубой кобальт и разбавленный раствор сульфата индиго. Из них первые два и последний приводят, по-видимому, к наиболее совершенным результатам.

11. Генерация жидких колец с помощью капель. Удобный аппарат для этих экспериментов состоит (рис. 102,*б*) из круглой пипетки примерно двух дюймов в диаметре, закрепленной на кронштейне, который можно свободно поворачивать в горизонтальной плоскости, и большого цилиндрического сосуда, заполненного чистой водой почти до краев. Носик пипетки примерно в один дюйм длиной имеет гладкое закругленное отверстие диаметром в одну десятую дюйма. Верхняя трубка, изогнутая под прямым углом, прикреплена к гибкому шлангу длиной около восемнадцати дюймов. К другому концу шланга с помощью маленького запорного крана и короткой резиновой трубки прикреплена тонкая стеклянная трубка с капиллярным каналом.

Чтобы наполнить пипетку, поворачиваем горизонтальный кронштейн в удобное положение и подносим малый сосуд с подкрашенной жидкостью к носику пипетки. Затем, стягивая соединительную резиновую трубку, прикладываем губы к запорному крану, втягиваем порцию подкрашенной жидкости и, быстро закрывая кран, ставим на место резиновую и капиллярную трубки. После того как упадут одна или две капли, течение успокаивается и пипетка может быть повернута строго над центром резервуара. Открывая запорный кран частично или полностью, можно контролировать скорость расхода жидкости, а также заставить капли следовать друг за другом так медленно, как захотим.

Следует отметить, что пузырьки воздуха, заносимые каплей в жидкость, приводят нерегулярное движение, разрушающее желаемый эффект. Следовательно, носик пипетки должен располагаться только на небольшом удалении от поверхности. Расстояние, не превышающее полутора дюймов, вполне этому соответствует, причем при расстояниях от половины до одного дюйма получается превосходная однородность результатов. На самом деле для получения нужного эффекта вовсе не обязательно, чтобы капля достигала поверхности с какой-либо заметной скоростью, поскольку хорошо сформированное кольцо получается, если просто *положить каплю на воду*, вплотную приблизив к поверхности носик пипетки.

Поскольку для проведения совершенного эксперимента важно иметь совершенно спокойную жидкость в резервуаре, то ее масса должна быть велика и после каждой капли следует дать жидкости возможность успокоиться, прежде чем следующая капля упадет на поверхность.

Действуя с учетом этих предосторожностей и наблюдая за результатом с места, расположенного несколько ниже уровня жидкости, видим, что капля, вскоре после слияния с жидкостью, порождает исключительно симметричное кольцо, которое вращается и расширяется по мере опускания точно тем же способом, что и описанные газовые кольца. В некоторых случаях кольцо, пройдя без разрушений всю глубину жидкости, разворачивается на дне в плоское кольцо тяжелой подкрашенной жидкости. Но обычно после прохождения четырех или пяти дюймов кольцо разрушается со сферическим выделением незакрученного движения, образуя ряд круглых сплющенных областей, от наружных точек которых отходят многочисленные тонкие полоски красителя.

12. Движение и структура жидких колец. Вращение жидкого кольца вокруг его круговой оси направлено вверх на внешней окружности и вниз — на внутренней; или если смотреть с точки зрения переноса массы, то имеет место движение вперед во внутренней области и возвратное движение назад на внешней периферии. Таким образом, вращение идентично вращению газового кольца, вытолкнутого в нисходящем направлении. Более того, жидкое кольцо напоминает газовое в том отношении, что оно состоит из спирали подкрашенной жидкости, заключающей в себе параллельно неподкрашенную спираль. В самом деле, будучи достаточно прозрачным, кольцо обнаруживает весьма отчетливо горизонтальные полосы, которые в случае колец облачного воздуха, как показано выше, являются оптическим эффектом такой двухслойной структуры. Соответствие между этими явлениями делается еще более полным благодаря тому, что за жидким кольцом следует остаточная подкрашенная масса, которая остается привязанной к нему как шлейф, если образующий импульс является слабым.

13. Образование жидких колец импульсным залпом. Наблюдаемое тождество движений и структуры в двух классах колец привело меня к попытке произвести жидкие кольца механическим процессом, аналогичным тому, который использован при формировании колец воздуха. С этой целью я опустил носик пипетки под поверхность жидкости резервуара и, закрыв запорный кран, внезапно и резко сжал пальцами гибкую трубку. Эксперимент был проведен корректно. Было видно, как подкрашенная жидкость, вытолкнутая таким образом, проносится вниз в форме совершенного кольца, во всех отношениях напоминающее уже описанное, за исключением того, что его вращение и распространение было более быстрым. Модифицируя оборудование путем прикрепления к запорному крану маленькой, но толстой резиновой груши, я обнаружил, что ею легко регулировать импульс так, чтобы создать по желанию медленные кольца и таким образом воспроизвести с помощью подкрашенной жидкости все стадии явления, ранее отмеченные в случае колец в воздухе. Мягким и постепенным усилием я смог заставить выталкиваемую жидкость сворачиваться в боковые завитки или, увеличивая действие, формировать кольцо с присоединенным к нему шлейфом, или при более быстром и сильном импульсе я смог заставить кольцо быстро двигаться вниз, оставляя шлейфу возможность либо нерегулярно разрушаться, либо формировать своим собственным движением второе, меньшее кольцо, как в случае залпа в воздухе.

Таким образом, сформированные кольца в толще жидкости будут, конечно же, различаться по размерам в соответствии с количеством жидкости, выталкиваемой каждым импульсом. Поскольку это количество никогда не будет столь малым как для капли, а скорость воздействия сравнительно велика, то сформированные таким способом кольца всегда больше колец, образованных при падении капель. Следовательно, они лучше подходят для наблюдения внутренних движений и двойной структуры жидкого кольца. Как бы ни формировалось кольцо, в таких наблюдениях важно частично использовать прозрачную жидкость, такую как разбавленный раствор сульфата индиго или слабый раствор голубого кобальта, и наблюдать кольцо в сравнительно сильном свете. При таких условиях двойная спираль и горизонтальные полосы прекрасно видны.

14. Происхождение жидкого кольца и его вращение. Рассматривая полное соответствие в структуре и движениях жидкого кольца механически образованному кольцу в воздухе, естественно заключить, что с этим связаны и аналогичные силы. Это очевидно для колец, генерируемых последним описанным способом, когда отверстие находится ниже или на уровне резервуара. Здесь импульс или залп, действующий вниз и в поперечном направлении, и сопротивление отверстия и смежной среды, действующей назад, обеспечивают в точности такую же комбинацию сил, которая согласно предыдущего объяснения действует при производстве колец воздуха.

Что касается формирования колец при падении капель, то механические условия, хотя внешне и отличные, будут, как мне кажется, приводить к той же комбинации движений, что и в описанных выше случаях. Рассматривая способ действия капли, удобно различать случаи, когда капля *падает на поверхность* среды с заметной скоростью и когда капля *просто лежит на ней,* соединяясь с носиком пипетки. В первом случае капля ударяется о поверхность, имея некоторый импульс и, проникая в жидкость как будто через круговое отверстие, формирует протяженную колонну. Жидкость в центральной части этой колонны движется вперед, в то время как движение вблизи боковой поверхности замедляется из-за сопротивления окружающей среды. При этом результирующее действие сил должно, очевидно, быть таким же как при импульсном залпе жидкости из погруженного носика пипетки. Во втором случае, когда капля просто лежит на поверхности жидкости, сила тяжести вещества капли и натяжение искривленной поверхности объединяются, давая капле импульс вниз. В то же время поверхность контакта с жидкостью образует как бы быстро увеличивающееся круговое отверстие, сохраняя симметрию движущейся массы. По мере своего продвижения эта масса будет, конечно, подвергаться созидательному воздействию только что описанных импульсных и замедляющих сил, которые, как отмечалось, придают образованным механическим залпом кольцам воздуха и воды идентичность формы и движения.

Э.Ройш

ОБ ОБРАЗОВАНИИ КОЛЕЦ В ЖИДКОСТЯХ*

Некоторые курильщики обладают умением выпускать табачный дым изо рта в виде колец. Эти кольца можно, однако, получить при помощи аппарата, который изготовляется за несколько минут. Необходимо взять шесть игральных карт и, загнув их тонкие края, сделать полый кубик. В одной из сторон делается отверстие диаметром около одного сантиметра. Кубик заполняется табачным дымом. Теперь легким щелчком ударяем по одной из граней и из отверстия вылетает колечко.

Наблюдая за тем, как при каждом ударе по упругой поверхности одной из граней кубика происходит вначале уменьшение внутреннего его пространства, а затем сразу же следует его увеличение, я решил сконструировать более совершенный аппарат, позволяющий наблюдать процесс, происходящий в табачном дыме. Он представляет собой стеклянную трубку (рис. 103,*1*) диаметром 6 см и длиной 12 см, один конец которой закрыт мембраной *M* из тонкого вулканизированного каучука, а другой закрыт круглой шайбой *SS'*, зажатой в металлической оправе *FF'*. Шайба сделана из картона или жести и имеет отверстие *O*. Если аппарат заполнить дымом и резко надавить на мембрану, то из отверстия вылетит дымовое кольцо. В момент ослабления давления на мембрану можно наблюдать, как внутри начинает двигаться кольцо из чистого воздуха сквозь дымовое пространство по направлению к мембране. При одном быстром нажатии на мембрану можно отчетливо наблюдать дымовое кольцо в воздухе и одновременно воздушное кольцо в дыме. Причем оба кольца движутся в противоположные стороны.

С еще большим удовольствием можно наблюдать за вихревыми образованиями, если аппарат изготовлен из стеклянной трубки, либо ящика длиной 15...20 см, внизу которого имеется отверстие. Тогда кольца будут спокойно опускаться вниз, при этом они не так быстро будут разрушаться из-за имеющихся в окружающем воздухе течений. При слабом надавливании можно увидеть особенные образования в виде перевернутых грибов с ножками, при более сильном появляются кольца, вытянутые в вертикальном направлении, при очень быстром надавливании образуются кольца круглого сечения, диаметр которых

* Перевод с нем. М. Ю. Константинова статьи [208].

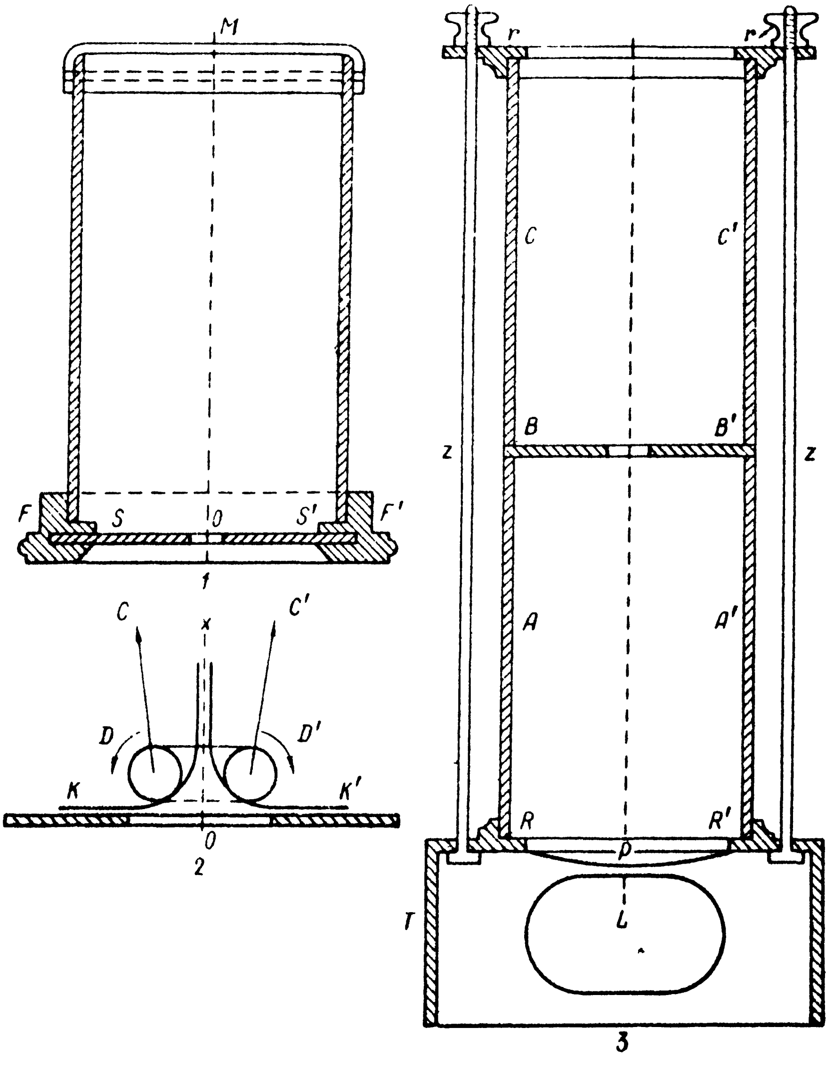


Рис. 103

увеличивается при поступательном движении. Сразу после выхода кольца из отверстия происходит их завихрение и дальнейшее движение осуществляется с вращением. Весьма искусное зрелище происходит, если сразу за первым кольцом образовать второе. Оно зачастую пронизывает первое, причем после этого за ним следует дымовая завеса в виде коноидального вихря.

Объяснение этого непростого явления я вижу в следующем. При кратковременном импульсе из отверстия выталкивается шайбочка дыма, совпадающая размерами с отверстием. Еще во время ее прохождения через отверстие находящиеся снаружи и вокруг частички воздуха приводятся в противоположное движение, поскольку боковое давление движущегося воздуха меньше, чем покоящегося. Как только шайба полностью выйдет, частицы воздуха устремятся со всех сторон в оставленное пустым пространство и уравновесятся там (так как одновременно следует такое же поступательное движение) заостренным воздушным коноидом KK'(рис. 106,*2*), который пробивает дымовую шайбу снизу.

При совершенном образовании кольца это явление сопровождается двумя дальнейшими эффектами. Во-первых, частицы дыма, которые вначале двигались параллельно оси x, из-за проникновения воздушного коноида, которое сопровождается боковым внутренним давлением, расходятся, и их дальнейшее движение происходит в направлениях C и C'. Диаметр кольца в процессе всего поступательного движения увеличивается.

Кроме того, вихревое кольцо в целом перемещается за счет вращения, направленного изнутри наружу, как это показано стрелками D и D'. Проникший внутрь воздушный коноид окрашивается за счет внутренней части кольца и вовлекается во вращение вокруг круговой центральной линии.

Эти явления наблюдаются лучше, когда образование колец происходит при сгорании газообразного фосфорного водорода. При этом имеют место те же обстоятельства, что и при табачных кольцах. Образовавшиеся из гидрата фосфорной кислоты кольца более объемны, диаметр их часто достигает размеров, близких одному футу. На кольцах отчетливо видно вращение, особенно если во вращение вовлекаются массовые частицы (а это бывает часто). Эти частицы изящно обвивают кольцо.

Я также исследовал влияние длины патрубков на процесс образования колец. Если они короткие, то образование колец происходит хорошо, если же они превышают диаметр в пять раз, то тогда разрушаются как внутренние, так и внешние кольца.

Еще одно свойство колец можно обнаружить при помощи карточного кубика, если заменять карту с отверстием. Кольца будут оставаться круглыми независимо от того,будет ли сечение отверстия треугольным, квадратным, либо слабо вытянутым прямоугольным.

Из некруглых отверстий я более всего исследовал прямоугольное. Отверстия были вырезаны в картонной шайбе, установленной в аппарате (рис. 103,*1*). У всех отверстий была постоянная ширина 5 мм. Длина отверстий изменялась в интервале от 2-, 3-, до 7-кратной ширины. Обозначим отверстия по этим числам кратности. Тогда можно приблизительно охарактеризовать следующее явление. Из отверстия 2 всегда получались круглые кольца. Из отверстия 3 можно часто наблюдать формы, похожие на лемнискаты двойной кривизны.

Этим формам свойственны колебания при поступательном движении. Такое явление повторяется и при более удаленных отверстиях. Кроме того, при отверстиях 4 и 5 можно зачастую наблюдать образование двух колец, а при отверстиях 6 и 7 — даже трех колец, центр тяжести которых движется в одной из плоскостей, перпендикулярных длине отверстия. В случае трех колец иногда движущееся в центре вертикальное кольцо разрушается. Я обратил внимание на то, что для образования многих колец требуется определенный навык, а также необходимо, чтобы мембрана не была сильно натянута.

При круглом сечении отверстия все набегающие течения частичек воздуха полностью симметричны относительно оси. Если имеет место мгновенная устойчивость, то описанный выше воздушный коноид состоит из системы нитей, которые имеют в гомологических точках одинаковые скорости при одной и той же их ориентировке относительно оси. При всех других некруговых отверстиях частички воздуха не ориентируются точно относительно оси и движутся не с одинаковыми скоростями в симметричных областях. Однако при малых отклонениях отверстия от круга или правильного многоугольника направления и значения скоростей быстро компенсируются устойчивым воздушным коноидом. При отверстиях более вытянутого сечения граничная поверхность коноида в момент его наибольшего развития представляет собой два или три рога. После этого происходит разрыв коноида. Иными словами, коноид разрывается так, что каждая лемнискатообразная структура превращается за счет вторичных явлений в большее число колец.

Меня можно упрекнуть за то, что я не смог найти лучшее объяснение этому сложному явлению. Но еще не создана теория, которая описывает разнообразные явления при непрерывном истечении капельных жидкостей; в этом отношении газы еще менее изучены. Еще больше трудностей должно возникнуть при ударном истечении и образовании при этом течений и вихрей.

Наблюдения за дымовыми кольцами заставили меня задуматься, не будет ли происходить аналогичного образования колец при внезапном воздействии на капельные жидкости. Это явление я исследовал при помощи простейшего аппарата, принцип действия которого описан выше. Сечение его представлено на рис. 106,*3*. Внизу аппарата расположен металлический барабан TT' высотой 6 см и диаметром 9 см. Верхнее отверстие барабана RR' закрывается тонкой цельнокованой пластиной P, припаянной к кольцу. К пластине прилегает находящийся в цилиндрической оправе пустой объем L. При нажатии на него происходит короткое подпрыгивающее движение пластины вверх и возвращение ее на место. Ее передвижение можно регулировать в зависимости от того, где производить больший нажим — в центре или на периферии. На кольце барабана RR' установлен стеклянный сосуд AA' диаметром 6 см и высотой 10 см. На него положены металлическая шайба и такой же формы стеклянный сосуд CC', который закреплен сверху при помощи металлического кольца $ГГ'$ и трех либо четырех подъемных шестов, жестко закрепленных снизу.

Нальем в нижний цилиндр подкрашенную воду, а верхний заполним прозрачной. При каждом щелчке увидим образование и движение подкрашенного колечка в прозрачной жидкости. Если нижняя жидкость будет слабо подкрашена, то при каждом возвратном движении пластины можно наблюдать в нижнем сосуде опускание светлого кольца. Можно насыпать в верхний цилиндр порошкообразный янтарь так, чтобы он находился во взвешенном состоянии. Тогда при каждом щелчке находящиеся вблизи промежуточной пластины BB' частички янтаря будут вовлекаться вместе с вихрем в движение.

Очень красивые, но, к сожалению, кратковживущие кольца получаются, если снизу находится вода, а вверху — подсолнечное масло. Водяные кольца в масле выглядят особенно прекрасно, если смотреть на них сверху. Разумеется они исчезают довольно быстро, причем при сильном импульсе распадаются на множество шариков, а при слабом импульсе быстро принимают шарообразную форму. При этом часть среды, в которой они были образованы, замыкается. При очень медленном импульсе вверх поднимаются грибовидные области, на которые почти всегда влияет неполное кольцевое образование. Провансальское масло, с которым я оперировал, а также вязкое холодное подсолнечное масло в большинстве случаев образовывали бесформенные фигуры.

Если вылить масло из верхнего цилиндра и наполнить его водой так, чтобы на промежуточной пластине остался тонкий слой масла, то после щелчка, особенно при обратном движении, увидим изящные бисеринки, состоящие из вращающихся капелек масла.

Я также делал опыты с подсолнечным маслом и спиртом, водой и эфиром. При первой комбинации я получил масляные кольца в спирте, однако они слабо вращались. Еще менее благоприятно показала себя вторая пара. Возможно существует иной, более счастливый выбор двух жидкостей; сильная разница в удельных плотностях и нерастворяемость одной жидкости в другой, как мне кажется, наиболее благоприятны для образования колец.

Об образовании колец в капельных жидкостях, я думаю, следует отметить, что все соображения, высказанные об образовании дымовых колец, переносятся и на этот случай; все обстоятельства там такие же, как и здесь. В связи с этим я не проводил опыты в воде с различными сечениями отверстий, так как вряд ли получил бы что-нибудь новое. При этом я сделал иной удачный, весьма важный эксперимент, который развил мой взгляд на морфологическое значение образования колец. Промежуточная пластина BB' была заменена другой, состоящей из двух круглых центральных отверстий. Она была снабжена металлической пластиной, которая защемляла каучуковую прокладку. Находящаяся над отверстиями металлической пластины свободная часть каучуковой мембраны была разделена при помощи крестообразного сечения на четыре квадранта. Нижний цилиндр был заполнен маслом, подкрашенным алькамой в красный цвет, в верхнем находилось неподкрашенное масло. При такой конструкции истекающее отверстие образовывалось только в момент щелчка. Это позволило мне наблюдать прекраснейшие красные кольца в бесцветном масле. Каучуковая прокладка позволяет хорошо управлять соседними жидкостями и весьма благоприятна для образования перфорированного коноида. К сожалению, мембрана не долго находилась в рабочем состоянии из-за того, что становилась изогнутой либо в одном, либо в другом направлении.

На этом эксперимент можно закончить и сделать вывод, что образование колец имеет место, если произвести щелчок по мембране. Также можно предположить, что форма щели не очень влияет на процесс образования кольца. Из одной и той же щели под действием различных обстоятельств можно вызвать одновременно много колец. Остается открытым вопрос, почему не всегда образовываются совершенные кольца или вообще выталкивается бесформенная масса.

Профессор Магнус, которому я давал предполагаемое сочинение в рукописи, обратил мое внимание на неизвестное, к сожалению, мне сообщение В.Роджерса [217] о таких же вещах. Роджерс исследовал более подробно кольца при других отношениях и в особенности подверг тщательному анализу лопающиеся пузыри всплывающих колец. Обе эти работы дополняют друг друга с разных сторон. Что касается самой теории, то тут я вынужден уступить физикам право разобраться какая из них, либо развитая Роджерсом, либо моя, лучше объясняет явление в целом.

О.Рейнольдс

О СОПРОТИВЛЕНИИ, ИСПЫТЫВАЕМОМ ВИХРЕВЫМИ КОЛЬЦАМИ, И СВЯЗЬ МЕЖДУ ВИХРЕВЫМИ КОЛЬЦАМИ И ЛИНИЯМИ ТОКА ДИСКА*

Я думаю, что сравнительно малый успех, достигнутый почти во всех попытках соотнести разнообразные движения жидкостей с фундаментальными законами, может быть связан, главным образом, с нашим игнорированием многих наиболее важных обстоятельств движения, присущих явлению, которое мы хотим рассмотреть.

Можно видеть как движется поверхность жидкости, однако наблюдение внутренних движений нам неподвластно, поскольку нет

* Перевод с англ. доклада [210] на заседании Британской ассоциации развития наук в августе 1876 г. Доклад иллюстрировался наиболее интересными экспериментами движения вихревых колец в большом желобе с водой (перевод В. В. Мелешко).

никаких средств для того, чтобы их почувствовать. Уже сделанные шаги к успеху в большей части относились к явлениям на поверхности или к движениям, которые случайно удалось сделать видимыми. Моя цель в данном случае заключается в описании некоторых результатов, полученных при помощи окрашивания частей воды внутри бака так, чтобы сделать их видимыми. Эти результаты несколько странные и я осмеливаюсь считать, что в некоторых аспектах они идут дальше, чем считалось до сих пор. Однако здесь они приводятся скорее для иллюстрации возможности метода, чем для объяснения их смысла.

Причина сопротивления движению твердых тел в воде неизвестна. Развитие теории линий тока, с которой так тесно связано имя покойного профессора Рэнкина, оказалось большим продвижением вперед в теоретическом изучении движения жидкости. Эта теория, однако, прямо применима лишь к гипотетическим жидкостям без вязкости и ее результаты применительно к воде очень далеки от данных экспериментальной проверки.

Поэтому, как ясно показано Фрудом в прошлом году на заседании секции А*, твердое тело должно двигаться сквозь невязкую жидкость без сопротивления, причем жидкость течет от носа тела к его корме по нитям или линиям тока, которые, соединяясь сзади, вызывают давление, в точности уравновешивающее давление впереди. В действительности вода оказывает очень большое сопротивление быстрому движению в ней твердых тел. Если способный плавать шарик бросить в воду с большой высоты, то он проникнет в нее на очень малую глубину, и если достигнуть скоростей, близких к скоростям выстрела, слой воды толщиной в один фут будет оказывать примерно такое же сопротивление, как и один дюйм железа. Хотя теория линий тока приводит к противоположным результатам, это не должно подрывать веру в ее истинность, поскольку в ней не учитывается вязкость воды. Однако ясно, что прежде чем мы сможем извлечь практическую пользу из этой теории при рассмотрении реальных жидкостей, следует узнать, каким образом вязкость влияет на поведение этих жидкостей, чтобы учесть ее в применении теории. Именно это и является тем моментом, который мне хотелось бы осветить, делая движение воды видимым.

Теория линий тока применяется к вихревому кольцу. Идея подкрашивать воду, чтобы сделать ее движение видимым, несомненно навеяна прекрасным явлением дымового кольца. Дымовое кольцо дает пример, когда весьма важная форма движения жидкости случайно стала видимой. В ином случае такое движение скорее всего осталось бы незаметным, хотя оно привлекло внимание математиков и работы сэра Вильяма Томсона, профессоров Тэйта и Гельмгольца дали очень важные результаты.

---

* Секция А — математическая и физическая секция Британской ассоциации развития наук.

Что является наиболее удивительным в дымовом кольце, так это регулярность и исключительная красота его внутренней структуры. Наше близкое знакомство с объектами, быстро движущимися в воздухе, уменьшает наше удивление той легкостью, с которой эти кольца движутся. Однако, когда мы видим такие кольца в воде, их быстрое движение и малое возмущение, которое они производят даже на расстоянии нескольких дюймов от поверхности, являются, как мне думается, наиболее удивительными вещами в данном явлении.

Вихревые кольца в воде демонстрировались Диконом в Эдинбурге в 1871 г., но только в очень малых размерах, порождаемые одной каплей. Примерно три года назад я испробовал метод их образования, очень схожий с методом, используемым профессором Тэйтом для дымовых колец. Этот метод полностью себя оправдал. Из отверстия 3/4 дюйма в диаметре мне удавалось посылать кольца на всю длину желоба (20 футов) со скоростями столь большими, что в течение первой части их пути не удавалось проследить за ними. Казалось бы, что из-за отсутствия всякого возмущения как позади кольца, так и на поверхности воды, кольца должны двигаться без сопротивления. И все же, на первый взгляд, это находится в противоречии с тем обстоятельством, что скорость колец уменьшается по мере их продвижения как в воде, так и в воздухе. Имеется, однако, причина для такого уменьшения скорости, которую нельзя просто назвать сопротивлением. Кольца по мере продвижения увеличиваются в размерах, постоянно присоединяя к себе все новые количества окружающей воды, на которые должен распределяться первоначальный импульс. Из-за этого скорость падает и остается единственный вопрос, связанный с сопротивлением: будет ли это объяснение достаточным либо несмотря на потерю скорости импульс движущейся массы остается постоянным?

Для того, чтобы это установить, я измерил (с помощью лучших средств, которые мне удалось создать) импульс ряда одинаковых колец на различных расстояниях от источника. Результат состоял в том, что в пределах точности экспериментов все кольца, пройдя расстояние 15 футов, имеют одинаковый импульс и движутся со скоростью не большей, чем 3 дюйма в секунду, в то время как у колец, находящихся на расстоянии 2 футов от начала скорость была более 5 футов в секунду. Следовательно, я заключаю, что эти кольца движутся без какого-либо заметного сопротивления.

Когда такое отсутствие сопротивления рассматривается наряду с внутренним движением жидкости внутри и вокруг этих колец, то оказывается, что они дают нам пример, и я верю — единственный, в котором теория линий тока хорошо применима к движению в вязкой жидкости. Форма массы движущейся вперед жидкости не совпадает с массой кольца, а имеет вид сплющенного сфероида, намного большего, чем кольцо, которое он охватывает. Этот сфероид подобно кольцу постоянно увеличивается, однако в любой момент имеет определенную форму, и движение воды, его окружающей, является таким же, как было бы на основе теории линий тока для твердого сфероида и идеальной жидкости.

Сфероидальная форма граничной поверхности, которая, будучи жидкой, является идеально гибкой, противодействует неравномерному распределению давления окружающей воды путем движения воды внутри. Это движение таково, что создает в каждой точке поверхности такое же давление, как и давление при движении наружной воды.

Действие вязкости на движение кольца. Движение внутренней воды кроме поддержания формы граничной поверхности в каждой точке этой поверхности идентично снаружи и внутри. Поэтому не только граничная поверхность в каждый момент определена по форме, но и каждая точка поверхности находится в точно таком движении, что и контактирующая с ней вода.

Действие вязкости воды проявляется в постепенном увеличении кольца и его сопровождающая масса не «привязана» к граничной поверхности, а простирается в движущуюся воду как вне, так и внутрь этой поверхности. Имеется постепенное уменьшение скорости движения воды вдоль линий тока от центра наружу во всех направлениях, поскольку движение распространяется на окружающую воду и, как хорошо известно, когда скорость потока изменяется от точки к точке в сечении поперек направления движения, эффект вязкости направлен на выравнивание скорости. Следовательно, в случае вихревого кольца действие вязкости будет заключаться в диффузии движения наружу для того, чтобы уменьшить скорость вращения в центре, где она наибольшая, и увеличить область, в которой вода движется, т.е. уменьшить скорость и увеличить размер каждого элемента кольца.

Оказывается, что эффект уменьшения скорости и увеличения размеров кольца является единственным влиянием вязкости. Иначе говоря, если вода в какое-то мгновение потеряет вязкость, то кольцо будет двигаться вперед точно так же, как оно двигалось до сих пор, поскольку внутреннее движение было бы столь же необходимо для уравновешивания внешних давлений и формы ограничивающей поверхности как в жидкости без трения, так и в воде и, следовательно, тот же закон между внутренними и внешними движениями должен выполняться.

Предположим, что в определенный момент времени одно из вихревых колец превратилось в лед и далее нет трения между поверхностью льда и окружающей водой. Каким бы ни оказалось сопротивление идеально гладкого льда, ясно, что его действительное сопротивление должно превосходить то, которое кораблестроители называют сопротивлением трения — сопротивление воды, движущейся вдоль поверхности. Оно может быть оценено исходя из сопротивления плоской поверхности, равной площади, движущейся сквозь воду острием вперед, и таким образом не является слишком большим.

Однако это только один из эффектов поверхностного трения. Какое бы сопротивление трения ни возникало на поверхности, оно равно сопротивлению движущейся вдоль тела воды и, таким образом, пове рхностное трение помогает диффузии в уменьшении скорости, с которой вода двигалась бы по линиям тока вблизи поверхности, и стремится увеличить возмущение линий тока в корме тела.

В действительности мы находим, что сопротивление, обусловленное возмущением линий тока, в десятки раз больше, чем просто поверхностное сопротивление, и поэтому твердое тело, которое имеет форму ограничивающей вихревое кольцо поверхности, приведенное в свободное движение, сразу же остановится и замрет в воде.

То, что описанное выше возмущение линий тока в действительности имеет место, обнаруживается, если мы подкрасим воду. Если вначале приведем в движение твердое тело, то увидим несколько нерегулярное вихревое кольцо позади него, которое быстро растет и затем разрушается, после чего вся вода позади тела перемешивается и сопровождает его движение. В то же время, если в воде, через которую движется вихревое кольцо, имеются цветные полоски подкрашенной жидкости, то кольцо сохраняет расстояния между ними почти без изменений. Следовательно, такое возмущение линий тока оказывается главной причиной испытываемого твердым телом сопротивления, превосходящего сопротивление трения.

Этот эффект зависит от кривизны линий тока и поэтому можно видеть, что тело, имеющее хорошую корму (подобное рыбе), испытывает значительно меньшее сопротивление, чем тело, подобное сфероиду.

Связь между вихревым кольцом и линиями тока диска. Другая тема, которую мне хотелось бы несколько прояснить, подкрашивая воду, относится к форме линий тока тонкой поверхности типа диска. Я считаю общеизвестным, что теория линий тока показывает, что все тела будут двигаться без сопротивления в идеальной жидкости и тонкие поверхности не являются исключением из общего правила. Однако я не уверен, что какой-либо удовлетворительный рисунок линий тока таких тел дан в настоящее время.

То, что я хочу продемонстрировать, поднимает два очень важных вопроса, связанных с теорией линий тока даже применительно к идеальной жидкости. Во-первых, оказывается, что тонкая открытая поверхность не имеет линий тока на своей поверхности, за исключением тех, которые она могла захватить, будучи частью, образующей замкнутую поверхность. И во-вторых, оказывается, что замкнутая поверхность может принимать форму цилиндра бесконечной длины, боковая поверхность которого непрерывно простирается от тонкой твердой поверхности диска. При этом тонкая поверхность или лопасть не может двигаться свободно даже в невязкой жидкости. Если мы поместим диск впереди одного из вихревых колец, то кольцо будет двигаться до тех пор, пока диск не коснется ограничивающей его поверхности, а затем кольцо будет нести диск вместе с собой. Несколько удивительно видеть плоский диск, движущийся свободно сквозь воду. Я не сомневаюсь, что тонкий плоский диск является почти наихудшей формой тела для движения в воде. И таким он в действительности есть, за исключением того случая, когда диск имеет сзади вихревое кольцо.

Если скорость диска поддерживать постоянной, то благодаря росту кольца оно постепенно окажется позади диска и возмущение, созданное впереди, будет разрушать кольцо. Однако если диску разрешить двигаться вместе с кольцом, то он будет двигаться свободно до тех пор, пока движется кольцо. Диск, начиная двигаться, образует свое кольцо. Поэтому, если диск прикреплен к легкому деревянному стержню, то когда стержень сдвинуть вперед, диск вначале испытывает значительное сопротивление, но вскоре это сопротивление движению исчезает. Если теперь убрать стержень, то диск будет двигаться постоянно вперед с постепенно уменьшающейся скоростью.

Немного краски в воде показывает, как формируется кольцо и как оно движется впереди и позади диска.

Сопротивление наклонной лопасти. Тот факт, что диск будет инициировать свое собственное, тесно связанное с поверхностью, кольцо, связан с симметрией кольца относительно его поверхности. С половиной диска этого не будет происходить, значительно слабее будет кольцо при движении наклоненного сфероида.

Если провести краем диска или плоской поверхности по воде, образуется непрерывный вихревой цилиндр, который, формируясь на передней точке лопасти, тянется назад. Вращательное движение воды несколько нарушено трением лопасти, скользящей по воде. Однако, захватывая с лопастью немного воздуха в воду, можно показать центральную линию вихрей длиной несколько футов.

Если же мои соображения правильны, то эти факты несколько расходятся с общими представлениями теории линий тока, и во всех случаях результаты содержат определенные моменты, которые мы должны объяснить. Однако я сам с большой робостью осмеливаюсь предложить мое собственное объяснение перед таким авторитетным собранием, как секция А, и моей главной целью было проиллюстрировать метод изучения движения жидкости с помощью наблюдений за частично подкрашенной водой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи : Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : Пер. с англ. — Харьков: ГНТИ Украины, 1939. — 719 с.

3. *Андреев Н. Н.* Вихревое движение // БСЭ. — 1-е изд. — М., 1930. — Т. 11. — С. 339 — 350.

4. *Афанасьев Я.Д., Воропаев С.И.* Модель грибовидных течений в стратифицированной жидкости при кратковременном действии источника импульса // Изв. АН СССР. Физ.атм.океана. — 1989. — 25, № 8. — С. 843 — 851.

5. *Бачинский А.* Вихревые движения // Энциклопедический словарь / Гранат. — 7-е изд. — М., Б.г. — Т.11. — Стб. 376 — 378.

6. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. — М. : Наука, 1984. — 2 т.

7. *Беляев С.Т., Краснов Ю.К.* О собственной массе сингулярной вихревой пары // ДАН СССР. — 1989. — 306, № 3. — С. 566 — 570.

8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 758 с.

9. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. : Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 244 с.

10. *Бобылев Д.* Об успехах теории движения жидкостей за последние 30 лет. — С.-Пб.: Эрлих, 1887. — 23 с.

11. *Бояринцев В.И., Савин А.С.* Исследование вихревых колец в однородных и стратифицированных жидкостях. — М., 1987. — 64 с. — (Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 299).

12. *Бузуков А.А., Кузавов В.Т.* «Выпрыгивающие» вихри // Динамика сплошной среды. — 1969. — Вып. 3. — С. 70 — 73.

13. *Бялко А.В.* Наша планета — Земля. — М. : Наука, 1989. — 240 с. — (Библиотечка Квант. — Вып. 29).

14. *Васильев Н.С.* Движение бесконечно тонких вихрей. — Одесса : Коммерческая тип. Сапожникова, 1913. — 188 с.

15. *Вилля А.* Теория вихрей : Пер. с фр. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 266 с.

16. *Владимиров В.А., Тарасов В.Ф.* Формирование вихревых колец // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1980. — № 3. — Вып. 1. — С. 3 — 11.

17. *Гешев П.И., Ездин Б.С.* Движение вихревой пары между параллельными стенками // ПМТФ. — 1983. — № 5. — С. 62 — 67.

18. *Гиббс Д.В.* Термодинамика. Статистическая механика. — М.: Наука, 1982. — 584 с.

19. *Горячев Д.Н.* О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей. — М.: Университет. тип., 1898. — 106 с.

20. *Гоман О.Г., Карплюк В.И., Ништ М.И.* К вопросу о движении кольцевых вихрей в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 3. — С. 68 — 75.

21. *Гуржий А.А., Константинов М.Ю.* Влияние относительных размеров ядер коаксиальных вихревых колец на характеристики их взаимодействия // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — № 3. — С. 40 — 43.

22. *Гуржий А.А., Константинов М.Ю.* О столкновении двух вихревых колец в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1989. — № 4. — С. 60 — 64.
23. *Гуржий А.А., Константинов М.Ю., Мелешко В.В.* Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // Там же. — 1988. — № 2. — С. 78 — 84.
24. *Гуржий А.А., Мелешко В.В.* Двумерное движение частиц идеальной жидкости в поле скорости вихревой пары // Гидромеханика. — 1990. — Вып. 62. — С. 60 — 64.
25. *Донелли Р.Дж.* Сверхтекучая турбулентность // В мире науки. — 1989. — № 1. — С. 46 — 54.
26. *Жизнь науки.* Антология вступлений к классике естествознания / Сост. С.П.Капица. — М.: Наука, 1973. — 600 с.
27. *Жуковский Н.Е.* Работы по механике // Герман фон Гельмгольтц (1821 — 1891 гг.): Публичные лекции, читанные в Императорском Московском Университете в пользу Гельмгольтцовского фонда. — М.: Московский Ун—т. — 1892. —С. 37 — 57.
28. *Жуковский Н.Е.* Кинематика жидкого тела // Полн. собр. соч. — М. — Л.: ОНТИ, 1935. — 2. — С. 7 — 148.
29. *Жуковский Н.Е.* Лекции по гидродинамике // Там же. — С. 149 — 331.
30. *Жуковский Н.Е.* К вопросу о разрезании вихревых шнуров // Там же. — 1936. — 3. — С. 387 — 405.
31. *Зиглин С.Л.* Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // ДАН СССР. — 1990. — 250, № 6. —С. 1296 — 1300.
32. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
33. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Черников А.А.* Стохастичность линий тока в стационарных течениях // ЖЭТФ. — 1988. — 94, № 2. — С. 102 — 115.
34. *Капица П.Л.* Научные труды. Физика и техника низких температур. — М.: Наука, 1989. — 392 с.
35. *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. — М.: АН СССР, 1962. — 403 с.
36. *Ковалевская С.В.* Научные работы. — М.: АН СССР, 1949. — 368 с.
37. *Коновалюк Т.П.* Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости // Гидромеханика. — 1990. — Вып. 62. — С. 64 — 71.
38. *Константинов М.Ю., Мелешко В.В.* Движение двух пар точечных вихрей в идеальной жидкости // Там же. — 1988. — Вып. 58. — С. 52 — 55.
39. *Константинов М.Ю., Мелешко В.В.* Движение вихревого кольца в идеальной жидкости вблизи твердых границ // Там же. — 1989. — Вып. 60. — С. 56 — 60.
40. *Константинов М.Ю., Мелешко В.В.* Образование вихревых колец при падении капель на поверхность стратифицированной жидкости // Тез. докл. III Всесоюз. школы-семинара «Методы гидрофизических исследований» (Светлогорск, 16 — 25 мая 1989 г.). — Калининград : Калининградский техн. ин-т рыбной пром-ти и хоз-ва, 1989. — Ч. 2. — 41 с.
41. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. — М.: АН СССР, 1961. — 426 с.
42. *Кратчфилд Д.П., Фармер Д.Д., Пакард Н.Х., Шоу Р.С.* Хаос // В мире науки. — 1987. — № 2. — С. 16 — 28.
43. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1977. — 408 с.
44. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика : Пер. с фр. — М.; Л.: ОНТИ, 1950. — 440 с.
45. *Ладиков-Роев Ю.П.* Уравнения Гамильтона для системы вихрей // Уч. записки Орского пед. ин-та: Математика. — 1971. — Вып. 10. — С. 75 — 82.
46. *Ламб Г.* Гидродинамика : Пер. с англ. — М.; Л: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. — 928 с.
47. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
48. *Луговцов Б.А.* Турбулентные вихревые кольца // Нестационарные проблемы гидродинамики. — 1979. — Вып. 38. — С. 71 — 88.
49. *Льоцци М.* История физики : Пер. с итал. — М.: Мир, 1970. — 464 с.
50. *Мелешко В.В., Коновалюк Т.П.* Взаимодействие вихревой пары с точечным вихрем в безграничной идеальной жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — № 7. — С. 43 — 47.

51 *Мелешко В В Константинов М Ю* Столкновение двух пар коллинеарных точечных вихрей в безграничной идеальной жидкости // Там же — № 4 — С 33 - 37
52 *Мелешко В В Константинов М Ю, Гуржий А А* Упорядоченное и хаотическое движение в динамике трех коаксиальных вихревых колец // Теорет и прикл механика — 1990 - Вып 21 - С 100 - 104
53 *Милн Томсон Л М* Теоретическая гидродинамика — М Мир, 1964 — 655 с
54 *Новиков Е А* Динамика и статистика системы вихрей // ЖЭТФ — 1975 — 68, вып 5 — С 1868 1882
55 *Новиков Е А Седов Ю Б* Стохастические свойства системы четырех вихрей // Там же 1978 — 75, № 3 — С 868 876
56 *Новиков Е А, Седов Ю Б* Стохастизация вихрей // Письма в ЖЭТФ — 1979 — 29 № 12 - С 737 740
57 *Новиков Е А Седов Ю Б* Коллапс вихрей // ЖЭТФ — 1979 — 77, вып 2 (8) — С 558 - 597
58 *Паркер Т С Чжуа Л О* Введение в теорию хаотических систем для инженеров // ТИИЭР Тр Ин та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике — 1987 — 75, № 8 Темат вып «Хаотические системы» - С 6 — 40
59 *Планк М* Введение в механику деформируемых тел Пер с нем — М — Л ГИЗ 1929 — 208 с
60 *Пригожин И Р, Стенгерс И* Порядок из хаоса Новый диалог человека с природой Пер с англ — М Прогресс, 1986 — 431 с
61 *Рабинович М И, Сущик М М* Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН — 1990 - 160, вып 1 — С 3 - 64
62 *Розенберг В Л* Несколько опытов вихревых движений // Журн Русского физ хим о ва, 1889 — 21 - С 21 - 25
63 *Розенбергер Ф* История физики Ч III История физики за последнее (XIX) столетие Пер с нем Под ред И Сеченова — М — Л ОНТИ НКТП СССР, 1935 — 402 с
64 *Саткевич А А* Аэродинамика как теоретическая основа авиации — Петроград Ин т инж путей сообщ, 1923 — VIII + 579 с
65 *Саткевич А А* Теоретические основы гидроаэродинамики Ч II Динамика жидких тел — Л М ОНТИ НКТП СССР, 1934 — Ч II — 468 с
66 *Седов Л И* Механика сплошной среды — М Наука, 1976 — 2 т
67 *Серрин Дж* Математические основы классической механики жидкости — М ИЛ, 1963 — 256 с
68 *Сретенский Л Н* О диффузии вихревой пары // Изв АН СССР Отд техн наук — 1947 — № 3 — С 271 — 300
69 *Сэффмен Ф* Динамика завихренности // Современная гидродинамика Успехи и перспективы — М Мир, 1984 — С 77 — 90
70 *Тацуми Т* Явление турбулентности — Токио Токе дайгаку сюпганкай, 1986 — 660 с — (Яп)
71 *Тимошенко С П* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений — М Гостехтеоретиздат, 1957 — 536 с
72 *Тимошенко С П* Воспоминания — Париж Изд во об ния С Пб политехников, 1963 — 418 с
73 *Ткаченко В М* О вихревых решетках // ЖЭТФ — 1965 — 49, вып 6 (12) — С 1875 — 1883
74 *Томсон Дж Дж* Электричество и материя Пер с англ — М — Л Госиздат, 1928 — 263 с
75 *Уиттекер Е Т* Аналитическая динамика Пер с англ — М — Л ОНТИ, 1937 — 500 с
76 *Федоров К Н, Гинзбург А И* Приповерхностный слой океана —Л Гидрометеоиздат, 1988 — 304 с
77 *Фейгенбаум М* Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН — 1983 — 141, вып 2 — С 343 - 374
78 *Хазин Л Г* Правильные многоугольники из точечных вихрей и резонансная не

устойчивость стационарных состояний // ДАН СССР 1976 230 № 4 С 799 802
79 *Шустер Г* Детерминированный хаос Введение М Мир 1988 240 с
80 *Янке Е, Эмде Ф, Леш Ф* Специальные функции Пер с нем М Наука 1977 — 344 с
81 *Acton E* The modelling of large eddies in a two dimensional shear layer // J Fluid Mech — 1976 — 76, pt 4 — P 561 — 592
82 *Acton E* A modeling of large eddies in an axisymmetric jet // Ibid — 1980 — 98 pt 1 — P 1 — 31
83 *Aksman M J, Novikov E A, Orszag S A* Vorton method in three dimensional hydrodynamics // Phys Rev Lett — 1986 — 54, № 22 — P 2410 — 2413
84 *Andrade C* Sur le mouvement d'un vortex rectilique dans un liguide contenudans un prisme rectangle de longueur indefinite // C R Acad Sci Paris — 1891 — 112 — P 418 — 421
85 *Auerbach F* Wirbelbewegung // Handbuch der phys u technisch Mechanik / Herausgeg von Auerbach F u Hort W // Bd 5 — 1928 — S 115 — 156
86 *Aref H* Motion of Three Vortices // Phys Fluids — 1979 — 22, № 3 — P 393 — 400
87 *Aref H* Point vortex motions with a center of symmetry // Ibid — 1982 — 25, № 12 — P 2183 — 2187
88 *Aref H* Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two dimensional flows // Ann Rev Fluid Mech — 1983 — 15 — P 345 — 389
89 *Aref H* Stirring by chaotic advection // J Fluid Mech — 1984 — 143 — P 1 — 21
90 *Aref H* Chaos in the dynamics of a few vortices — fundamentals and applications // Theor and appl mechanics Proc 16 th Int Congr Theor Appl Mech, Lyngby, Denmark, 19 — 25 Aug 1984 — N Y Elsevier — North Holland, 1985 — P 43 — 68
91 *Aref H* The numerical experiment in fluid mechanics // J Fluid Mech — 1986 — 173 — P 15 — 41
92 *Aref H, Kambe T* Report on the IUTAM symposium Fundamental aspects of vortex motion // Ibid — 1988 — 190 — P 571 — 595
93 *Aref H, Pomphrey H* Integrable and chaotic motions of four vortices I The case of identical vortices // Proc R Soc London — 1982 — A 380, № 1779 — P 359 — 387
94 *Babiano A, Basdevant C, Legras B, Sadourny R* Vorticity and passive scalar dynamics in two dimensional turbulence // J Fluid Mech — 1987 — 183 — P 379 — 397
95 *Ball R* Account of experiments upon the resistance of air to the motion of vortex rings // Phil Mag Ser 4 — 1871 — 42, № 279 — P 208 — 210
96 *Barker S J, Crow S C* The motion of two — dimensional vortex pairs in a ground effect // J Fluid Mech — 1977 — 82, pt 4 — P 659 — 671
97 *Basset A B* A treatise on hydrodynamics — London Deighton, Bell & Co — 1888 — 2 vol
98 *Bénard H* Formation de centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement // C R Acad Sci Paris — 1908 — 147 — P 839 — 842
99 *Bertrand J* Théoreme rélatif au mouvement le plus general d'un fluid // Ibid — 1867 — 66 — P 1227 — 1230
100 *Brillouin M* Questions d'hydrodynamique // Annales Facultes Sci Univ Toulouse — 1887 — 1 — P 1 — 80
101 *Buttke T F* The observation of singularities in the boundary of patches of constant vortisity // Phys Fluids — 1989 — A 1, № 7 — P 1283 — 1285
102 *Boussinesq J* Sur la manière dout les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'etat de repos, et sur leur effet' pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses // C R Acad Sci Paris — 1880 — 90, № 15 — P 735 — 739
103 *Boussinesq J* Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grand section — Paris Gauthier — Villars, 1897 — 117 p
104 *Calogero F* Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related «solvable» many body problems // Nuovo Cimento — 1978 — B 43 — P 177 — 241
105 *Campbell L J* Transverse normal modes of finite vortex arrays // Phys Rev — 1981 — A 24, № 2 — P 514 — 534

106. *Cantwell B., Rott N.* The decay of viscous vortex pair // Phys. Fluids. — 1988. — **31**, № 11. — P. 3213 — 3224.
107. *Carroll K., Mesler R.* Splashing liquid drops form vortex rings and not jets at low Froude numbers // J. Appl. Phys. — 1981. — 52, № 1. — P. 507 — 511.
108. *Chapman D.S., Critchlow P.R.* Formation of vortex rings from falling drops // J. Fluid Mech. — 1967. — **29**, № 1. — P. 177 — 185.
109. *Chien W.—L., Rising H., Ottino J.V.* Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows // J. Fluid Mech. — 1986. — **170**. — P. 355 — 377.
110. *Chung J.N., Troutt T.R.* Simulation of particle dispersion in an axisymmetric jet // Ibid — 1988. — **186**. — P. 192 — 222.
111. *Coates C.V.* On circular vortex rings // Quart. J. Pure Apple. Math. — 1879. — **16**, № 62. — P. 170 — 179.
112. *Conlisk A.T., Guezennec Y.G., Elliott Y.S.* Chaotic motion of an array of vortices above a flat wall // Phys. Fluids. — 1989 — A 1, № 4. — P. 704 — 717.
113. *Couder I., Basdevant C.* Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows // J. Fluid Mech. — 1986. — **173**. — P. 225 — 251.
114. *Dahm W.J.A., Scheil C.M., Tryggvason G.* Dynamics of vortex interaction with a density interface // Ibid. — 1989. — **205**. — P. 1 — 43.
115. *Didden N.* On the Formation of Vortex Rings: Rolling—up and Production of Circulation // ZAMP. — 1979. — **30**, № 1. — P. 101 — 116.
116. *Dombre T., Frisch U., Greene J.M. et al.* Chaotic streamlines in the ABC-flows // J. Fluid Mech. — 1986. — **167**. — P. 353 — 391.
117 *Dritschel D.G.* The stability and energetics of corotating uniform vortices // Ibid. — 1985. — **157**. — P. 95 — 134.
118. *Dritschel D.G.* The nonlinear evolution of rotating configurations of uniform vorticity // Ibid. — 1986. — **172**. — P. 157 — 182.
119. *Dritschel D.G.* The repeated filamentation of two-dimensional vorticity interfaces // Ibid. — 1988. — **194**. — P. 511 — 547.
120. *Dryden H.L., Murnaghan F.D., Bateman H.* Hydrodynamics. — N.Y.: Dover, 1956. — 634 p.
121. *Dyson F.* The potential of an anchor ring. Pt. 2 // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1893. — A 184. — P. 1041 — 1106.
122. *Eckhardt B.* Integrable four-vortex motion // Phys. Fluids.— 1988. — **31**, N 10. — P. 2796 — 2801.
123. *Eckhardt B., Aref H.* Integrable and chaotic motions of four vortices. II. Collision dynamics of vortex pairs // Phil.Trans. R. Soc. Lond. — 1988. — A **326**, N 1593. — P. 655 — 696.
124. *Falcioni M., Paladin G., Valpiani A.* Regular and chaotic motion of fluid particles in a two-dimensional fluid // J. Phys. Ser. A. — 1988. — **21**, N 17. — P. 3451 — 3462.
125. *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. — 1978. — **19**, N 1. — P. 25 — 52.
126. *Fraenkel L.E.* Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. — 1972. — **51**, p. 1. — P. 119 — 135.
127. *Gilbert A.D.* Spiral structures and spectra in two-dimensional turbulence // Ibid. — 1988. — **193**. — P. 475 — 497.
128. *Glezer A.* The formation of vortex rings // Phys. Fluids. — 1988. — **31**, N 12. — P. 3532 — 3542.
129. *Greenhill A.G.* Plane vortex motion // Quart. J. Pure Appl. Math. — 1877/78. — **15**, N 58. — P. 10 — 27.
130 *Gröbli W.* Specialle Probleme über die Bewegung geredliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Geselsch. Zürich. —1877 —**22**. — S. 37 — 81, 129 — 165.
131. *Hardin J.C., Mason J.P.* Periodic motion of two and four vortices in a cylindrical pipe // Phys. Fluids. — 1984. — **27**, N 7. — P. 1583 — 1589.
132. *Hargreaves R.* An ellipsoidal vortex // Proc. Lond. Math. Soc. — 1896. — 27, N 553/555. — P. 299 — 327.
133. *Havelock T.H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag Ser.7. — 1931. — **11**, N 70. — P. 617 — 633.

134. *Heijst G.J.F. van, Flor J.B.* Dipole formation and collisions in a stratified fluid // Nature. — 1989. — 340, № 6230. — P. 212 —215.
135. *Helmholtz H.* Uber Integrale hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. reine angew. Math. — 1858. — 55. — S. 25 — 55. Ibid // Phil. Mag. 4. — 1867. — 33, N 226. — P. 485 — 512. То же // Г. Гельмгольц. Два исследования по гидродинамике. — М., 1902. — С. 5 — 51. То же // Int. J. Fussion Energy. — 1978. — 1, N 3/4. — P. 41 — 68.
136. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments // Astron. J. — 1964. — 69, N 1. — P. 73 — 79.
137. *Henon M.* Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particular // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. — 1966. — A 262. — S. 312 — 314.
138. *Hicks W.M.* Report on recent progress in hydrodynamics // Rep. Brit. Assos. Adv. Sci. — 1882. — 52. — P. 39 — 70.
139. *Hicks W.M.* On the steady motion and small vibrations of a hollow vortex // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1884. — 175, pt. 1. — P. 161 — 195.
140. *Hicks W.M.* Researches on the theory of vortex rings // Ibid. — 1885. — 176, pt. 2. — P. 725 — 780.
141. *Hicks W.M.* The mass carried forward by a vortex // Phil. Mag. Ser. 6. — 1919. — 38, N 227. — P. 597 — 612.
142. *Hicks W.M.* On the mutual threading of vortex rings // Proc. R. Soc. Lond. — 1922. — A 102, N 714. — P. 111 — 131.
143. *Hill M. J.* On the motion of fluid, part of which is moving rotationally and part irrotationally // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1884. — 175, pt. 2. — P. 363 — 409.
144. *Hill M.J.M.* On a spherical vortex // Ibid. — 1894. — A 185. — P. 213 — 245.
145. *Hopfinger E.J., Van Atta C.W.* Vortex ring instability and collapse in a stably stratified fluid // Exper. Fluids. — 1989. — 7. — P. 197 — 200.
146. *Hsiao M., Lichter S., Quintero L.G.* The critical Weber number for vortex and jet formation for drops impinging on a liquid pool // Phys. Fluids. — 1988. — 31, N 12. — P. 3560 —3562.
147. *Hussain A.K.M.F.* Coherent structures and turbulence // J. Fluid Mech. — 1986. — 173. — P. 303 — 356.
148. *Kármán Th. von, Rubach H.* Über den Mechanismus des Flussigkeits und Luftwiderstandes // Phys. Zeit. — 13, N 2. — S. 49 — 59.
149. *Kármán Th. von.* Aerodynamics. Selected topics in the light of their historical development. — N.Y.: Cornell Univ. press, 1954. — 203 p.
150. *Kaufmann W.* Uber die Ausbreitung kreiszylindrischer Wirbel in zahen (viskosen) Flussigkeiten // Ing.— Arch. — 1962. — 31. — S. 1 — 9.
151. *Khakhar D.V., Rising H., Ottino J.M.* Analysis of chaotic mixing in two model systems // J. Fluid Mech. — 1986. — 172. — P. 419 — 451.
152. *Kimura Y.* Similarity solution of two-dimensional point vortices // J. Phys. Soc. Japan. — 1987. — 56, N 6. — P. 2024 — 2030.
153. *Kimura Y.* Motion of two point vortices in a circular domain // Ibid. — 1988. — 57, N 5. — P. 1641 —1649.
154. *Kimura Y., Kusumoto Y., Hasimoto H.* Some particular solutions for symmetric motion of point vortices in a circular cylinder // Ibid. — 1984. — 53, N 9. — P. 2988 — 2995.
155. *Kimura Y., Zawadzki I., Aref H.* Vortex motion, sound radiation and complex time singularities // Phys. Fluids. — 1990. — A 2, N 2. — P. 214 — 219.
156. *Klein F.* Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flussigkeiten // Z. Math. Phys. — 1910. — 58. — S. 259 — 262.
157. *Koiller J., Pinto de Carvalho S., Rodrigues da Silva R., Gonçalves de Oliveira L.C.* On Aref's vortex motions with a symmetry center // Physica D. — 1985. — 16, N 1. — P. 27 — 61.
158. *Kötschau G.* Studien über Flüssigkeitsbewegungen // Ann. Phys. Chem. — 1885. — 26, N 12. — S. 530 — 546.
159. *Krutzsch C.—H.* Über eine experimentell beobachtete Erscheinung an Wirbelringen bei ihrer translatorischen Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten // Ann. Phys. — 1939. — 35. — S. 497 — 523.
160. *Lichtenstein L.* Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener,

unzusammendruckbarer reibungsloser Flussigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsatze // Math Zeitschrift 1925 23 - S 89 - 154
161 *Lighthill J* The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // Proc R Soc Lond 1986 - A 407 N 1832 - P 35 - 50
162 *Lin C C* On the motion of vortices in two dimensions // Proc Nat Acad Sci USA — 1941 — 27, N 12 - P 570 - 577
163 *Lagally M* Ideale Flussigkeiten // Handbuch der Physik / H Geiger, K Scheel — Berlin, 1927 — Bd 7 — S 1 - 90
164 *Laura E* Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono N vortici elementari // Atti della Reale Accad Torino — 1902 - 37 — P 469 — 476
165 *Laura E* Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elemantari, rettilinei e paralleli in un fluido imcompressibile indefinito // Ibid — 1905 - 40 — P 296 — 312
166 *Leonard A* Vortex methods for flow simulation // J Comp Phys — 1980 — 37 - P 289 — 355
167 *Leonard A* Computing three dimensional incompressible flowe with vortex elements // Ann Rev Fluid — 1985 — 17 - P 523 — 559
168 *Lewis T C* On the images of vortices in a spherical vessel // Quart J Pure Appl Math — 1879 - 16, N 64 — P 338 — 347
169 *Lewis T C* Some cases of vortex motion // Messenger of Math — 1879 — 9, N 6 — P 93 — 95
170 *Lorenz E N* Deterministic nonperiodic flow // J Atmos Sci — 1963 — 20, N 2 P 130 — 141
171 *Love A F H* On recent English researches in vortex motion // Math Annalen — 1887 — 30 — S 326 — 344
172 *Love A E H* On the motion of paired vortices with a common axis // Proc Lond Math Soc — 1893/94 — 25, N 486/487 — P 185 — 194
173 *Lugt H J* Vortex flow in nature and technology — N Y Wiley, 1983 — 297 p
174 *Mack K* Experimentelle Untersuchung gewisser Stromungsgebilde in Flussigkeiten // Ann Phys Chem — 1899 - 68, N 6 — S 183 — 195
175 *Mallock A* On the resistance of air // Proc R Soc Lond — 1907 - A 79, N 530 P 262 - 273
176 *Maxwell J C* On the displacement in a case of fluid motion // Proc Lond Math Soc — 1870 — 3, N 26 - P 82 — 87
177 *Maxwell J C* Molecules // Nature - 1873 — 8 N 204 — P 437 — 441, То же Молекулы // Д К Максвелл Статьи и речи — М Наука, 1968 — С 71 - 90 Maxwell J C Atom // Encyclopedia Britannica — 9 ed — London, 1878 — Vol 3 — P 36 — 48, То же Атом // Д К Максвелл Статьи и речи — М Наука, 1968 - С 121 — 164
178 *Maxworthy T* The structure and stability of vortex rings // J Fluid Mech — 1972 — 51, pt 1 — P 15 - 32
179 *Maxworthy T* Turbulent vortex rings // Ibid — 1974 — 64, pt 2 - P 227 — 229
180 *Maxworthy T* Some experimental studies of vortex rings // Ibid — 1977 — 81, pt 3 — P 465 — 495
181 *Mayer A M* Floating magnets // Nature - 1877/78 - 17, N 442 — P 487
182 *Mayer A M* Floating magnets // Ibid — 1878 — 18, N 453 — P 258 — 260
183 *Mc Williams J C* The emegrence of isolated coherent vortices in turbulent flow // J Fluid Mech — 1984 — 146 — P 21 — 43
184 *Melander M V, Overman F A & Zabusky W J* Computational vortex dynamics in two and three dimensions // Numerical Fluid Dynamics/ Ed R Vichnevetsky - Amsterdam Elsevier Sci Publ D V (North—Holland), 1987 - P 59 — 80
185 *Meleshko V V Konstantinov M Yu* Order and chaos in the dynamics of the coaxial vortex rings // Nonlinear world Proc IV Int workshorp on nonlinear and turbulent processes in physics, Kiev, Oct 9 — 22 1989 — Kiev Nauk Dumka 1989 - 2 — P 395 — 398
186 *Moffatt H K Moore D W* The response of Hill s spherical vortex to a small axisymmetric disturbance // J Fluid Mech - 1978 — 87, pt 4 — P 749 - 760
187 *Moreau J —J* Sur deux théorèmes généraux de la dynamique d un milieu incompressible illimité // C R Acad Sci Paris - 1948 - 226 - P 1420 - 1422

188. *Moreau J.—J.* Constantes d'un ilot tourbillonnaire en fluid parfait barotrope // Ibid. — 1961. — A 252 – P. 2810 — 2812.

189. *Morton W.B.* On the displasements of the particles and their paths in some cases of two-dimentional motion of a frictionless liquid // Proc Roy Soc London. — 1913. — **A 89, N 607. — P. 106 — 124.**

190. *Norbury J.* A family of steady vortex rings // J. Fluid Mech — 1973. — **57**, pt. 3. — P. 417 — 431.

191. *Northrup E.P.* A photographic study of vortex rings in liquids // Nature. — 1911/12. — **88**, N 2205. — P. 463 — 468.

192. *Novikov E.A.* Hamiltonian description of axisymmetric vortex flows and the system of vortex rings // Phys. Fluids. — 1985 — **28**, N 9. — P 2921 – 2922

193. *Oberbeck A.* Ueber diskontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen // Ann. Phys. Chem. — 1877. — **2**, N 9. — S. 1 — 16.

194. *Oberbeck A.* Ueber die Warmeleitung der Flüssigkeiten bei Berucksichtigung der Stromungen infolge von Temperaturdifferenzen // Ibid — 1879. — **7**, N 6 – S 271 — 292.

195. *Oguz H.N.. Prosperetti A.* Surface-tension effects in the contact of liquid surfaces // J. Fluid Mech. — 1989. — **203**. — P. 149 — 171.

196. *Onsager L.* Statistical hydromagnetics // Nuove Cimento — 1949. — **6**. — S. 279 — 287.

197. *Oseen C. W.* Über Wirbelbewegung in einer reibenden Flüssigkeit // Arkiv för Matem. Astron. Fys. — 1911/12. — 7, N 14 – S. 1 — 11.

198. *Ottino J.M., Leong C.W., Rising H., Swanson P.D.* Morphological structures produced by mixing in chaotic flows // Nature — 1988. — **333**, N 6172 — P. 419 — 425.

199. *Painleve P.* Lecons sur la théorie des equations différentielles. — Paris: Hermamn, 1897. — 263 p.

200. *Persival I.C.* Chaos in hamiltonian system // Proc. R. Soc Lond. — 1987. — **A 413**. — P. 131 — 144.

201. *Poincaré H.* Théorie des tourbillous — Paris: Carré, 1893. – 205 p.

202. *Pozrikidis C.* The nonlinear instability of Hill's vortex // J Fluid Mech. — 1986. — **168**. — P. 337 — 367.

203. *Procaccia I.* Universal properties f dinamically complex systems: the organization of chaos // Nature. — 1988. — **333**, N 6174. — P 618 – 623

204. *Pullin D.I.* The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets // J. Fluid Mech. — 1978. — 88, pt. 3. — P. 401 — 430.

205. *Rankine W.J.M.* On the thermal energy of molecular vortices // Phil. Mag. Ser. 4. — 1870. — **39**, N 260. — P. 211 — 221.

206. *Rayleigh, Lord.* Fluid motions // Nature. — 1914. — **93**, N 2327. — P. 364 — 365.

207. *Rayner J.M.V.* A vortex theory of animal flight // J. Fluid Mech. — 1979. — **91**, pt 4. — P. 687 — 763.

208. *Reusch E.* Ueber Ringbildung in Flüssigkeiten // Ann Phys. Chem. — 1860. — **110**, N 6. — S. 309 — 316.

209. *Reynolds O.* On the action of rain to calm the sea // Nature. — 1874/75. — **11**, N 275. — P. 279 — 280.

210. *Reynolds O.* On the resistance encountered by vortex rings and the relation between vortex rings and the stream-lines of disk // Ibid. — 1876. — **14**, N 361. — P. 477 — 479.

211. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous and the law of resistance in parallel chanals // Proc. R Soc. Lond. – 1883. — **A 35**, N 224 — P. 84 — 99.

212. *Reynolds O.* Study of fluid motion by means of coloured bands // Nature. — 1894. — **50**, N 1285. — P. 161 — 164.

213. *Reynolds O.* On various forms of vortex motions // Reynolds O. Paper on mechanical and physical subjects. — Cambridge: Univ. Press. — 1900. — Vol. I. — P. 183 — 191.

214. *Reynolds O.* The sub-mechanics of Universe // Ibid — Vol. **III**. — P. I — 205.

215. *Riecke E.* Beiträge zur Hydrodynamik // Ann. Phys. Chem. ser. 2. — 1889. — **36**, N 2. — S. 322 — 334.

216. *Rodriguez F., Mesler R.* Some drops don't splash // J. Colloid Interface Sci. — 1985. — **106**, N 2. — P. 347 — 352.
217. *Roders W.B.* On the formation of rotating rings by air and liquids under certain conditions of disharge // Amer. J. Sci. Ser. 2. — 1858. — **26**, N 77. — P. 246 — 258.
218. *Rosenhead L.* The Kármán street of vortices in a channel of finite breadth // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1929. — A **228**, N 665. — P. 275 — 329.
219. *Rott N.* Three-vortex motion with zero total circulation // ZAMP. — 1989. — **40**, N 4. — P. 473 — 494.
220. *Routh E.J.* Some applications of conjugate functions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1881. — **12**, N 170/171. — P. 73 — 89.
221. *Saffman P.G.* The velocity of viscous vortex rings // Stud. Appl. Math. — 1970. — **49**, N 4. — P. 371 — 380.
222. *Saffman P.G.* Perspectives of vortex dynamics// Phys. Chem. Hydrodynamics. — 1985. — **6**, N 5/6. — P. 711 — 726.
223. *Saffman P.G.* Vortex dynamics // Appl. Math. Sciences: Vol. 58: Theoretical Approach to turbulence / Ed.: Dwoyer D.L., Hussaini M.Y., Voigt R.G. — Berlin: Springer, 1985. — P. 263 — 277.
224. *Saffman P.G., Baker G.R.* Vortex interactions // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1979. — **11**. — P. 95 — 122.
225. *Saint-Venant A.-J.-C.-B. de.* Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une liquide, ou solide ductile, contenué dans un vase à parois verticales, pendant son ecoulement par orifice horizontal intérieur // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1869. — **68**. — P. 221 — 237.
226. *Santangelo P., Benzi R., Legras B.* The generation of vortices in high-resolution, two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of selfsimilarity // Phys. Fluids. — 1989. — A **1**, N 6. — P. 1027 — 1034.
227. *Silliman R.H.* William Thomson: Smoke rings and nineteenth-centure atomism // ISIS. — 1963. — **54**, N 178. — P. 461 — 474.
228. *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // Trans. Cambr. Phil. Soc. — 1845. — **8**. — P. 287 — 319.
229. *Stokes G.G.* On the dynamical theory of diffraction // Ibid. — 1849. — **9**. — P. 1 — 62.
230. *Sreenivasan K.R., Meneveau C.* The fractal facets of turbulence // J. Fluid Mech. — 1986. — **173**. — P. 357 —386.
231. *Stern M.E., Voropayev S.I.* Formation of vorticity fronts in shear flow // Phys. Fluids. — 1984. — **27**, N 4. — P. 848 — 855.
232. *Synge J. L.* On the motion of three vortices // Can. Journ. Math. — 1949. — **1**. — P. 257 — 270.
233. *Tabor M.* Modern dynamics and classical analysis // Nature. — 1984. — **310**, N 5962. — P. 277 — 282.
234. *Tavantzis J., Ting L.* The dynamics of three vortices revisited // Phys. Fluids. — 1988. — **31**, N 6. — P. 1392 — 1409.
235. *Taylor G.I.* On the decay of vortices in a viscous fluid // Phil. Mag. ser. 6. — 1923. — **46**, N 275. — P. 671 — 674.
236. *Taylor G.I.* Formation of a vortex ring by giving and impulse to a circular disk and then dissolving it away // J. Appl. Phys. — 1953. — **24**. — P. 104.
237. *Telste J.G.* Potential flow about two counter-rotating vortices approaching a free surface // J. Fluid Mech. — 1989. — **201**. — P. 259 — 278.
238. *Thomson J.J.* A treatise on the motion of vortex rings. — London: Macmillan, 1883. — 124 p.
239. *Thomson J.J., Newall M.A.* On the Formation of Vortex Ring by Drops falling into liquids, and some allied Phenomena // Proc. R. Soc. Lond. — 1885/86. — A **39**, N 241. — P. 417 — 436.
240. *Thomson W.* The translatory velocity of circular vortex ring // Phil. Mag. ser. 4. — 1867. — **33**, N 226. — P. 511 — 512.
241. *Thomson W.* On the vortex atoms // Ibid. — **34**, N 227. — P. 15 — 24.

242 *Thomson W* On vortex motion // Trans R Soc Edinbourgh - 1869 25 - P 217 — 260
243 *Thomson W* Floating magnets // Nature — 1878 — 18, N 444 — P 13 — 14
244 *Thomson W* Vortex statics // Phil Mag Ser 5 - 1880 10 N 59 — P 221 - 237
245 *Ting L* On the application of the integral invariants and decay laws of vorticity distributions // J Fluid Mech — 1983 — 127 — P 497 - 506
246 *Tomlinson C* On a new variety of the cohesion figures of liguids // Phil Mag Ser 4 — 1864 — 27, N 184 — P 425 — 432
247 *Tomlinson C* On the cohesion figures of liquids // Ibid - 1864 - 28, N 190 - P 354 - 364
248 *Trowbridge J* On liquid vortex rings // Phil Mag Ser 5 -- 1877 — 3, N 18 P 290 — 295
249 *Truckenbrodt E* Stromungsmechanik — Berlin Springer, 1968 — 532 s
250 *Truesdell C* The kinematics of vorticity - Bloomington Indiana University Press, 1954 — 232 p
251 *Widnall S E* The structure and dynamics of vortex filements // Ann Rev Fluid Mech — 1975 — 7 — P 141 — 165
252 *Widnall S E , Bliss D , Zalay A* Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair // Aircraft wake turbulence and its detection Proc of a Symposium on Aircraft Wake Turbulence held in Seattle, Washington, 1- 3 Sept 1970 - New York-London Plenum Press , 1971 — P 305 — 338
253 *Widnall S E , Sullivan J P* On the stability of vortex rings // Proc R Soc Lond - 1973 — A 332, N 1590 — P 335 — 353
254 *Wiggins S* Stirred but not mixed // Nature - 1988 - 333, N 6172 — P 395 — 396
255 *Wolibner W* Une theorème sur l'existence du mouvement plan d un fluid perfait, homogene, incompressible, pendant un temps infinitnent long // Math Zeifschrift - 1933 - 37, N 4 — S 698 — 726
256 *Wood R W* Vortex rings // Nature — 1901 — 63, N 1635 — P 418 — 420
257 *Wood R W* Equilibrium-figures formed by floating magnets // Phil Mag Ser 5 - 1898 — 46, N 278 — P 162 — 164
258 *Wu J* Turbulent vortex pairs in neutral surroundings // Phys Fluids — 1977 - 20, N 12 — P 1967 — 1974
259 *Yamada H , Konsaka T , Yamabe H , Matsui T* Flowfield produced by a vortex ring near a plane wall // J Phys Japan — 1982 — 51, N 5 - P 1663 — 1670
260 *Yamada H , Matsui T* Mutial slip through of a pair of vortex rings // Phys Fluids - 1979 — 22, N 7 — P 1245 — 1249
261 *Yarmchuk E J , Gordon M J V , Packard R E* Observation of stationary arrays in rotating superfluid Helium // Phys Rev Lett — 1979 - 43 - P 214 - 217
262 *Zabusky N J , Hughes V H , Roberts K V* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions // J Comput Phys — 1979 - 30 — P 96 - 106
263 *Zabusky N J* Vizualizing mathematics evolution of vortical flows // Physica — 1986 — D 18, N 1/3 — P 15 — 25

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наукове видання

Академія наук України
Інститут гідромеханіки

Мелешко Вячеслав Володимирович
Константинов Михайло Юрійович

ДИНАМІКА ВИХРОВИХ СТРУКТУР

Київ, видавництво «Наукова думка»
(Російською мовою)

Художній редактор *І.П. Антонюк*

Технічний редактор *В.О. Краснова*

Коректори *Л. Г. Бузіашвілі, І. В. Точаненко*

Комп'ютерна верстка *З. О. Лухтман*

Підп. до друку 26.02.93. Формат 60×84/16. Папір друк № 2. Літ. гарн. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 17,5 + 1 вкл. на крейд. бум. Ум.друк.арк.16,38. Ум.фарб.-відб. 16,38.
Обл.-вид.арк. 17,91. Тираж 500 пр. Зам. 3-114 .

Видавництво «Наукова думка». 252601 Київ 4, вул. Терещенківська, 3