

Feynman Lectures on Gravitation

Richard P. Feynman

Fernando B. Morinigo • William G. Wagner

Edited by Brian Hatfield

With a Foreword by
John Preskill and Kip S. Thorne

Addison-Wesley Publishing Company
Advanced Book Program

Р.Ф.Фейнман
Ф.Б.Мориниго
У.Г.Вагнер

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ГРАВИТАЦИИ

под редакцией Б.Хатфилда

Введение Дж.Прескилла и К.С.Торна

Перевод
с английского языка
д.ф.-м.н. А.Ф.Захарова



Москва
«Янус-К»
2000



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского Фонда Фундаментальных Исследований
согласно проекту 99-02-30023

ББК 33.313

Ф 36

УДК 530.12

Р.Ф.Фейнман, Ф.Б.Мориниго, У.Г.Вагнер. Фейнмановские лекции по гравитации. Перев. с англ. А.Ф.Захарова. – М.: «Янус-К», 2000. – 296 с.
ISBN 5-8037-0049-5

Нобелевский лауреат, крупнейший американский физик-теоретик Ричард Фейнман известен не только как выдающийся ученый, внесший огромный вклад в квантовую электродинамику, но и как талантливый педагог, на книгах которого воспитано не одно поколение физиков. Работы Фейнмана, в особенности его курсы лекций (например, "Фейнмановские лекции по физике"), хорошо известны в нашей стране. Несомненно, что знание основ общей теории относительности является необходимым не только для специалистов по теории поля и физике элементарных частиц, но и для астрономов. Предлагаемые лекции Р. Фейнмана по гравитации удачно сочетают оригинальный и яркий педагогический подход автора и точный отбор материала, который позволил кратко изложить основы теории гравитации с теоретико-полевого точки зрения.

Для специалистов, работающих в области теоретической физики и астрономии, для студентов и аспирантов физических и математических специальностей.

Научное издание

Ричард Ф.Фейнман, Фернандо Б.Мориниго, Уильям Г.Вагнер
Фейнмановские лекции по гравитации

Сдано в набор 30.12.99. Подписано в печать 19.04.2000.

Формат 60x88/16. Бумага офсетная N 1. Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 20,2. Физ.п.л. 18,5. Тираж 1000. Заказ N 4119

ООО "Янус-К" 109316, г. Москва, ул. Стройковская, д. 12,
корп. 2, пом. правления

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ
140010, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

«Янус-К»

Лицензия на издательскую деятельность ЛР N 064784 от 02.10.96

Оригинал-макет изготовлен А.Ф. Захаровым в пакете $\text{\LaTeX}$

ISBN 5-8037-0049-5

-
- © 1995 by California Institute of Technology,
Fernando B. Morinigo and William G. Wagner
 - © 1995 Foreword by Addison-Wesley
Publishing Company
 - © А.Ф. Захаров, перевод, примечания, предисло-
вие, 2000

Оглавление

Предисловие к русскому переводу	9
Предисловие	12
Квантовая гравитация	43
Лекция 1.	56
1.1. Полевое приближение гравитации	56
1.2. Характеристики феномена гравитации	58
1.3. Квантовые эффекты в гравитации	68
1.4. О философских проблемах в квантовании макроскопических объектов	70
1.5. Гравитация как следствие других полей	74
Лекция 2.	76
2.1. Постулаты статистической механики	76
2.2. Трудности гипотетических теорий	81
2.3. Обмен одним нейтрино	84
2.4. Обмен двумя нейтрино	85
Лекция 3.	90
3.1. Спин гравитона	90
3.2. Амплитуды и поляризации в электродинамике, типичной полевой теории	92
3.3. Амплитуды для обмена гравитона	96
3.4. Физическая интерпретация в терминах амплитуд	99
3.5. Лагранжиан для гравитационного поля	103
3.6. Уравнения гравитационного поля	104
3.7. Определение символов	106
Лекция 4.	108
4.1. Связь между рангом тензора и знаком поля	108
4.2. Тензор энергии-импульса для скалярной материи	110
4.3. Амплитуды для рассеяния (скалярная теория)	112
4.4. Подробные свойства плоских волн. Эффект Комптона	113
4.5. Нелинейные диаграммы для гравитонов	115

4.6. Классические уравнения движения гравитирующей частицы	117
4.7. Орбитальное движение частицы вокруг звезды	120
Лекция 5.	123
5.1. Орбиты планет и прецессия Меркурия	123
5.2. Замедление времени в гравитационном поле	126
5.3. Космологические эффекты, связанные с замедлением времени. Принцип Маха	130
5.4. Принцип Маха в квантовой механике	132
5.5. Собственная энергия гравитационного поля	136
Лекция 6.	138
6.1. Билинейные члены тензора энергии-импульса	138
6.2. Формулировка теории, справедливой во всех порядках	141
6.3. Построение инвариантов по отношению к инфинитезимальным преобразованиям	143
6.4. Лагранжиан теории, справедливой во всех порядках	147
6.5. Уравнение Эйнштейна для тензора энергии-импульса	149
Лекция 7.	151
7.1. Принцип эквивалентности	151
7.2. Некоторые следствия принципа эквивалентности	155
7.3. Максимальные скорости хода часов в гравитационных полях	157
7.4. Собственное время в общих координатах	160
7.5. Геометрическая интерпретация метрического тензора	162
7.6. Кривизна в двух и четырех измерениях	165
7.7. Число величин, инвариантных под действием преобразований общего вида	167
Лекция 8.	170
8.1. Преобразования компонент тензора в неортогональных координатах	170
8.2. Уравнения, определяющие инварианты $g_{\mu\nu}$	173
8.3. О предположении, что пространство есть в точности плоское	175
8.4. О соотношениях между различными подходами к теории гравитации	177
8.5. Кривизна как величина, относящаяся к касательному пространству	179

8.6. Кривизна как величина, относящаяся к произвольным координатам	182
8.7. Свойства Великого Тензора Кривизны	184
Лекция 9.	187
9.1. Модификация электродинамики, требуемая принципом эквивалентности	187
9.2. Ковариантные производные тензоров	188
9.3. Параллельный перенос вектора	192
9.4. Связь между кривизной и материей	197
Лекция 10.	200
10.1. Полевые уравнения гравитации	200
10.2. Действие для классических частиц в гравитационном поле	205
10.3. Действие для материальных полей в гравитационном поле	209
Лекция 11.	217
11.1. Кривизна в окрестности сферической звезды	217
11.2. О связи между материей и кривизной	219
11.3. Метрика Шварцшильда, поле вне сферической звезды	220
11.4. Сингулярность Шварцшильда	222
11.5. Размышления о понятии кротовой норы	226
11.6. Проблемы теоретических исследований кротовых нор	228
Лекция 12.	230
12.1. Проблемы космологии	230
12.2. Предположения, приводящие к космологическим моделям	233
12.3. Интерпретация космологической метрики	236
12.4. Измерения космологических расстояний	239
12.5. О характеристиках закрытой или открытой вселенной	240
Лекция 13.	243
13.1. О роли плотности вселенной в космологии	243
13.2. О возможности неоднородной и несферической вселенной	246
13.3. Исчезновение галактик и сохранение энергии	248
13.4. Принцип Маха и граничные условия	250
13.5. Тайны на небесах	252

Лекция 14.	255
14.1. Проблема сверхзвезд в общей теории относительности	255
14.2. Значение решений и их параметры	258
14.3. Некоторые численные результаты	260
14.4. Планы и предположения для дальнейших исследований сверхзвезд	262
Лекция 15.	264
15.1. Физическая топология решений Шварцшильда	264
15.2. Орбиты частиц в поле Шварцшильда	265
15.3. О будущем геометродинамики	268
Лекция 16.	271
16.1. Связь между полями вещества и гравитацией	271
16.2. Завершение теории: простой пример гравитационного излучения	274
16.3. Излучение гравитонов при распаде частиц	276
16.4. Излучение гравитонов при рассеянии частиц	278
16.5. Источники классических гравитационных волн	281
Список литературы	284
Предметный указатель	292

Предисловие к русскому переводу

В начале 90-х годов (когда в нашей стране издавалось крайне мало научных книг вообще и по общей теории относительности в частности) автору перевода стало известно о существовании машинописного издания записей лекций Р.Фейнмана по гравитации, прочитанных им в Калифорнийском Технологическом Институте. Автор этих лекций удостоен нобелевской премии за выдающийся вклад в развитие квантовой электродинамики и хорошо известен российскому читателю по многочисленным переводам его лекций. Его книги всегда вызывали большой интерес читателей и признание специалистов. Согласно опубликованному в начале 2000 г. опросу, определявшему 100 самых крупных физиков за всю историю науки, проведенному журналом "*Physics World*" Британского Института Физики, Р.Фейнман занимает 7-ое место, вслед за Эйнштейном, Ньютоном, Максвеллом, Бором, Гейзенбергом и Галилеем, опережая таких ученых, как Дирак, Шредингер и Резерфорд [Wrig 2000*].¹

Несмотря на то, что оригинальное машинописное издание Калифорнийского Технологического Института "Лекций по гравитации" Р.Фейнмана было малодоступно и продавалось только в книжном магазине КАЛТЕХ'а (как рассказывается в предисловии к английскому изданию этой книги), оно имеется во многих институтских научных библиотеках в Европе и Америке, где работают специалисты по теории гравитации или в смежных разделах науки, а также в научных библиотеках многих западных специалистов, которые занимаются развитием или использованием методов теории гравитации. Более того, часто можно было услышать довольно высокую оценку использованного Р. Фейнманом оригинального подхода к изложению основ общей теории относительности, что в первую очередь связано, по-видимому, с тем, что (для специалистов, привыкших к геометрическому подходу) автору лекций удалось взглянуть нетрадиционным образом на теорию гравитации. Обсуждение некоторых философских и мировоззренческих вопросов, связанных с основаниями не только теории гравитации, но и физики в целом, усиливали интерес к записям этих лекций. При обсуждении этих записей невольно возникла ассоциация с тем живым интересом к другим лекциям Фейнмана [Feyn 63a, Feyn 67], который имел место в нашей стране в конце 60-х и начале 70-х годов, когда эти лекции читали и обсуждали самые широкие круги, начиная от старшеклассников, интересующихся физикой, и школьных учителей физики и заканчивая физиками-профессионалами. Нет сомнения, что под влиянием чтения этих книг многие школьники и студенты выбрали физику своей профессией.

За годы, прошедшие со времени прочтения этих лекций, теория гра-

¹Библиографические ссылки, отмеченные знаком "звездочка", были добавлены в русский перевод книги.

витации перестала быть уделом исключительно релятивистов (сидящих, по словам Синга, в "башне из слоновой кости" [Синг 63*]), а стала в большой степени наукой, тесно связанной с экспериментом и астрономическими наблюдениями. В качестве примеров можно привести исследование анизотропии фонового микроволнового (реликтового) излучения, что позволяет поставить ограничения на параметры используемых космологических моделей; наблюдения гравитационных линз и микролинзирования, что дает нам возможность обнаружения скрытой массы [Заха 97*], [Заха 98*]. Заметим, что наблюдения последних лет дают указание на то, что вклад Λ -члена в критическую плотность вещества может иметь существенное значение. В самом начале следующего тысячелетия начнут работать крупные гравитационно-волновые детекторы – лазерные интерферометры: американский LIGO, франко-итальянский VIRGO, немецко-британский GEO, японский TAMA и австралийский AIGO, а одним из самых перспективных источников гравитационного излучения являются такие релятивистские объекты, как двойные черные дыры и нейтронные звезды. Основываясь на эволюционных расчетах, можно прийти к выводу, что несмотря на то, что системы двойных черных дыр встречаются реже систем двойных нейтронных звезд, системы двойных черных дыр являются существенно более мощными источниками гравитационного излучения, так что, возможно, более вероятно обнаружение гравитационно-волнового сигнала от системы двойных черных дыр [ЛПП 97*]. Читатель может ознакомиться с обширной литературой по астрофизическим аспектам детектирования гравитационных волн, используя, например, обзоры К. Торна [Thor 95*].

Сделаем некоторые замечания относительно используемых в лекциях обозначений. Некоторые из них нельзя признать удачными (что, видимо, было вызвано тем, что они использовались при прочтении лекций, а не при написании книги), например, иногда буква λ используется в одной и той же формуле или в соседних формулах одновременно и как множитель, и как индекс, по которому проводится суммирование. Однако подобные неудачные обозначения не исправлялись (исправлены только обнаруженные опечатки), тем самым сохранен авторский стиль и обозначения, использованные при чтении лекций.

Сделаем некоторые библиографические замечания, адресованные читателю русского перевода лекций Фейнмана, поскольку указанные библиографические ссылки в английском издании книги ориентированы на читателя, которому легко доступны указанные англоязычные издания. Нам представляется необходимым дополнить список литературы важными источниками, имеющимися на русском языке, а также другими важными ссылками, которые могут быть доступны российскому читателю.

С основами римановой геометрии и тензорного анализа можно ознакомиться по книгам Б.Л.Дубровина, С.П.Новикова и А.Т.Фоменко [ДНФ 86*] П.К.Рашевского [Раше 67*], Б.Шутца [Шутц 84*], Л.Эйзенхарта [Эйзе 48*], И.Сокольниковой [Соко 71*]. Изложение основ теории поля (знание которых может помочь более глубоко освоить содержание фейнмановских лекций

по гравитации) можно найти в учебнике Н.Н. Боголюбова и Д.В. Ширкова [БоШи 80*], "проникнутое духом педагогического новаторства" изложение теории возмущений для квантованных полей имеется в лекциях [Фейн 78*], а доступное даже школьникам популярное изложение основ классической и квантовой электродинамики, в том числе фейнмановских диаграмм, приведено в небольшой брошюре Фейнмана [Фейн 88*].

Достаточно простое и ясное изложение основ общей теории относительности имеется в классическом учебнике Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [LaLi 51], лекциях А.В. Беркова и И.Ю. Кобзарева [БеКо 89*], книгах П. Бергмана [Берг 47*], Р.Утиямы [Утия 79*], В. Паули [Паул 83*], Э. Шредингера [Шред 86*], однако более подробное и полное изложение теории можно найти в книгах Ч. Мизнера, К. Торна и Дж.А. Уилера [MTW 73], С. Вейнберга [Wein 72], Дж. Синга [Синг 63*], В.А. Фока [Фок 61*]. Эти книги удачно дополняет задачник [ЛППТ 79*]. Достаточно простое изложение принципов теории относительности, основанное на современном инвариантном геометрическом подходе, предложено в книге У. Берке [Берк 85*].

Сборник статей [Эйнш 79*] содержит подборку фундаментальных публикаций как самого А. Эйнштейна, так и других ученых, внесших существенный вклад в развитие теории гравитации. Современное изложение теории черных дыр объектов можно найти в замечательных книгах С. Чандрасекара [Чанд 86*] и В.П. Фролова и И.Д. Новикова [FrNo 98*] (см. также [Заха 99*]), а теории черных дыр и других релятивистских объектов в книге С. Шапиро и С. Тьюколски [ШаТю 85*]. Краткое изложение космологии можно найти в книге А.Д. Долгова, Я.Б. Зельдовича и М.В. Сажина [ДЗС 88*] и в более популярной книге Д. Шама [Шама 73*], а весьма обстоятельное изложение основ космологии – в книге Пибблса [Рееб 93*].

Переводы статей по полевой теории гравитации таких классиков науки, как Дж. Бирхгоф, В. Тирринг, Дж. Калман, С. Дезер, Р. Фейнман, имеются в дискуссионном журнале "Гравитация" [Грав 96*], где опубликован русский перевод статьи Р. Фейнмана [Feun 63b]. Теоретико-полевой подход к изложению теории гравитации использован в работах группы А.А. Логунова [Логу 89*]. В этих работах рассмотрена, в частности, возможность того, что гравитон имеет массу, например $10^{-66} - 10^{-65}$ г, и в этом случае объекты типа черных дыр не образуются, а ненулевой массе гравитона соответствует ненулевое значение космологической постоянной, плотность которой составляет существенную часть критической плотности.

Несмотря на то, что в настоящее время на русском языке имеется довольно много содержательных книг по теории гравитации, не остается ни малейшего сомнения в том, что фейнмановские лекции по гравитации следует рекомендовать как учебное пособие для студентов, научных работников, желающих ознакомиться с основами теории гравитации, что позволит взглянуть свежим взглядом на общую теорию относительности.

Автор перевода благодарит Е.Ф. Захарову и А.А. Захарову за неоценимую помощь при работе над текстом перевода.

Предисловие

В течение 1962-63 академического года Ричард Фейнман прочитал курс гравитации в Калифорнийском Технологическом Институте в городе Пасадина, США. Используя нетрадиционный подход к данному предмету, Р. Фейнман предназначал этот курс перспективным аспирантам и молодым докторам философии,¹ для которых привычны методы релятивистской квантовой теории, в частности, фейнмановские диаграммы теории возмущений в квантовой электродинамике. Два молодых доктора философии Фернандо Б. Мориниго и Уильям Г. Вагнер записали этот курс лекций. Записи этого курса лекций были отпечатаны и их копии продавались в книжном магазине КАЛТЕХ'а в течение многих лет.

Эти записи лекций не были опубликованы, но были довольно широко распространены, и благодаря их уникальному и глубокому взгляду на основания физики они оказали огромное влияние на многих ученых, которые их прочитали. Мориниго и Вагнер проделали большую работу по сохранению в столь хорошем виде этой части научного наследства Р. Фейнмана. Теперь, благодаря усилиям Брайана Хатфилда, эти лекции наконец опубликованы и стали легко доступны более широкой аудитории. При подготовке записок лекций для публикации Хатфилд исправил небольшие ошибки и улучшил обозначения, но в целом он следовал оригинальному машинописному тексту, подготовленному Мориниго и Вагнером. (Только два коротких фрагмента полностью опущены в тексте книги.)²

Фейнман прочитал всего 27 лекций, по одной лекции в неделю в течении полного 1962-63 академического года. Слушатели встречали лектора на третьем этаже Лаборатории Ист Бридж КАЛТЕХ'а в крошечной аудитории, в которой было только два ряда стульев; не более, чем 15 слушателей посещали каждую лекцию. (По крайней мере, двое из студентов, посещавших эти лекции, Джеймс Бардин и Джеймс Хартль позднее внесли свой существенный вклад в теорию гравитации). Эти лекции записывались на магнитофон, но поскольку лекции читались в высшей степени неформально, Мориниго и Вагнер сочли необходимым существенным образом пересмотреть материал

¹ Ученая степень доктора философии в США обычно считается соответствующей степени кандидата наук в нашей стране. (*Прим. перев.*)

² Пропущенные фрагменты содержат неправильное выражение для действия вещества в заключении 8.7 (правильное выражение имеется в разделе 10.2) и некоторые неверные утверждения о ньютоновской теории звездной устойчивости в третьем параграфе раздела 14.3.

для того, чтобы выпустить записи лекций в читаемом виде. По большей части Вагнер работал над математической стороной изложения, а Мориниго работал над текстом. Получившиеся в результате лекции просматривались Фейнманом, он делал различные поправки и добавления, затем записи лекций распространялись среди студентов. Эти лекции были проникнуты духом Фейнмана, окроплены его шутками, но неминуемо его причудливое использование языка было только частично сохранено.

Только 16 лекций включены в эту книгу; они соответствуют, грубо говоря, первым 16 из 27 лекций, которые Фейнман прочитал. Мориниго и Вагнер подготовили записи всех 27 лекций, но в конце академического года Фейнман просмотрел и исправил только первые 11 лекций. Очевидно, что он отвлекся на различные другие проекты и больше уже не возвращался к редактированию записей лекций. Таким образом, записи только первых 11 лекций распространялись среди студентов в течении 1962-63 годов и были размножены для продажи в книжном магазине КАЛТЕХ'а в последующие годы.

В июле 1971 года готовилось новое воспроизведение записей лекций для распределения через книжный магазин, и Фейнман разрешил включить в новое издание дополнительно еще пять лекций. Новые лекции предварялись своеобразным "отказом от ответственности":

Широкий интерес к этим лекциям по гравитации привел к третьему воспроизведению этих записей. Тогда, когда готовилось это издание, профессор Фейнман любезно разрешил включить еще пять лекций. Эти лекции должны были продолжить предыдущие одиннадцать лекций, распространенных в 1962-63 годах, однако они никогда удовлетворительным образом не редактировались и не исправлялись так, чтобы профессор Фейнман мог считать, что они могут быть включены в текст лекций.

Эти лекции сохраняют их грубую форму: за исключением небольших ошибок, исправленных при копировании, они остаются в том же самом виде, в котором они были восемь лет назад: профессор Фейнман не проверял их. Выражается надежда, что читатель будет держать это в уме и рассматривать следующие лекции как рассказ о том, о чем профессор Фейнман размышлял в то время, а не воспринимать этот текст как разрешенное и полностью обработанное воспроизведение его работы.

Действительно, кажется верным, что Фейнман не исправлял детально новые лекции. Например, лекция 14 содержит неправильные утверждения (обсуждаемые ниже), и в 1971 году (или даже в течении нескольких недель после чтения этой лекции) он мог бы легко

убедиться в том, что эти утверждения неправильны и проверить их. Таким образом, мы призываем читателя держать приведенный выше "отказ от ответственности" в уме при чтении лекций 12 – 16.

Поскольку Фейнман никогда не разрешал распространение записей Мориниги и Вагнера последних 11 лекций, они не публикуются в этом томе. Эти последние лекции главным образом касаются радиационных поправок в квантовой гравитации и теории Янга – Миллса. Мы предполагаем, что Фейнман не хотел, чтобы они распространялись, поскольку он не был удовлетворен их содержанием.

Замечательно, что одновременно с этим курсом по гравитации, Фейнман также создавал и читал новаторский курс физики для студентов-второкурсников, который был увековечен как второй и третий том "Фейнмановских лекций по физике" [Feyn 63a]. Каждый понедельник Фейнман читал свою лекцию для второкурсников утром и лекцию по гравитации после ланча. Позднее на неделе следовала вторая лекция для второкурсников и лекция для научных работников в исследовательских лабораториях Хьюджа в Малибу. Кроме педагогической нагрузки и его собственных научных исследований, Фейнман работал в экспертном совете по рассмотрению учебников для Калифорнийского государственного совета по образованию, т.е. был увлечен проблемами преподавания, что поглощало его целиком, как это красочно описано в книге "Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман?" [Feyn 85].¹ Стивен Фраучи, принимавший участие в лекциях по гравитации в качестве молодого ассистента КАЛТЕХ'а, вспоминал позже, что "Фейнман был полностью истощен" к концу 1962–63 академического года.

Курс Фейнмана никогда не был предназначен на то, чтобы быть достаточно полным введением в общую теорию относительности, и некоторые из этих лекций серьезным образом устарели. Большая часть материала в лекциях 7 – 12 покрывается более систематическим и в значительной степени более детальным изложением в других книгах. Почему же эти лекции должны были бы быть сейчас опубликованы? Существует, по крайней мере, три серьезных аргумента для подобной публикации. Во-первых, еще не было подобного педагогического опыта столь необычного подхода к основаниям общей теории относительности, который впервые был предложен Фейнманом (среди других авторов). Этот подход, представленный в лекциях 3 – 6, развивает теорию безмассового поля спина 2 (гравитона), взаимодействующего с тензором энергии-импульса вещества, и демонстрирует,

¹Русский перевод некоторых глав этой книги опубликован в УФН [Фейн 86*]. (Прим. перев.)

что усилия, направленные на то, чтобы сделать теорию самосогласованной, неизбежно приводят к эйнштейновской теории относительности. (Именно благодаря этому, записи лекций стали хорошо известными в физическом сообществе). Во-вторых, записи лекций содержат увлекательные отступления и отклонения по поводу оснований физики и других вопросов, что делает эти записи лекций поучительными и интересными для чтения. В-третьих, эти записи имеют историческую ценность. В то время, когда Фейнман читал эти лекции, он напряженно размышлял в течении нескольких лет о фундаментальных проблемах гравитации, и представляется полезным иметь записи его размышлений и его точки зрения того времени. Некоторые из его взглядов кажутся нам сейчас, 32 года спустя, весьма проницательными, в то время как другие его гипотезы, естественно, кажутся наивными или неверными. В некоторых случаях его взгляды быстро эволюционировали в процессе чтения этих лекций. Это, в частности, верно для материала лекции 14 о релятивистских звездах, о чем ниже мы поговорим несколько подробнее.

Эти лекции представляют особую ценность для того, чтобы обучить нас точке зрения Фейнмана на гравитацию, но они не являются самым удачным текстом для обучения начинающего студента современной геометрической формулировке общей теории относительности или вычислительному аппарату и приложениям теории. Такие книги, как написанные Волдом [Wald 84], Шутцем [Schu 85], и Мизнером, Торном и Уилером [MTW 73], решают эту педагогическую задачу значительно лучше. Даже догматически негеометрическая точка зрения, которую предпочитал Фейнман, более систематически и полно изложена Вейнбергом [Wein 72]. Но нет другого источника, который бы содержал уникальные размышления Фейнмана и его подход к основаниям данного предмета.

Эти записи лекций могут быть прочитаны на нескольких различных уровнях читателями, имеющими различный уровень начальной подготовки:

- Для того, чтобы понять лекции полностью, читатели должны иметь продвинутый уровень подготовки в области теоретической физики. Фейнман предполагал, что для его аудитории привычны методы квантовой теории поля в такой степени, что эти знания позволяют получить информацию о том, как извлечь фейнмановские правила из действия и как использовать эти правила для того, чтобы вычислить древесные диаграммы. Тем не менее, эти методы теории поля серьезным образом используют только в лекциях 2–4 и 16, и даже в них ключевые идеи могут

схвачены без столь высокого уровня подготовки. Кроме того, другие лекции могут быть прочитаны более или менее независимо от этих лекций.

- Читатели с солидной подготовкой по физике могут найти эти лекции в большой степени понятными для себя, благодаря педагогическому мастерству Фейнмана. Тем не менее, такие читатели должны обладать некоторым эвристическим умением ухватить некоторые более технические детали изложения.
- Для почитателей Фейнмана, которые не имеют достаточного уровня подготовки по физике, эти лекции также содержат много ценного, хотя для того, чтобы извлечь это ценное потребуются значительное ознакомление с техническим материалом, который разбросан среди более земных интуитивных догадок и рассуждений.

Оставшаяся часть этого введения и следующий раздел, написанный Брайаном Хатфилдом, представляют собой краткое изложение лекций и обсуждение того, как они связаны с предшествующими исследованиями и последующим развитием теории. Как и сами лекции, это краткое изложение может быть прочитано на различных уровнях. Для того, чтобы помочь читателям, которые не имеют достаточного уровня подготовки в области теоретической физики, отмечены некоторые особенно технические разделы, которые читатели могут пропустить или только бегло просмотреть.¹

Вывод полевого уравнения Эйнштейна

В период чтения этих лекций по гравитации Фейнман стремился к тому, чтобы проквантовать гравитацию, т.е. создать синтез общей теории относительности и фундаментальных принципов квантовой механики. В целом подход Фейнмана к общей теории относительности сформирован его желанием получить квантовую теорию гравитации настолько непосредственным образом, насколько это возможно. Для этой цели тонкости геометрического подхода кажутся отвлечением от основной темы; в частности, общепринятый геометрический подход к гравитации затемнен разговором об аналогии между гравитацией и электромагнетизмом.

Используя ретроспективный взгляд, мы можем получить классическую электродинамику Максвелла, исходя из того наблюдения, что

¹ В русском переводе эти фрагменты набраны более мелким шрифтом. (Прим. перев.)

фотон является безмассовой частицей спина 1. Вид квантовой теории безмассовой частицы со спином 1, взаимодействующей с заряженной материей, в большой степени ограничивается фундаментальными принципами такими, как Лоренц-инвариантность и сохранение вероятности. Самосогласованная версия квантовой теории – квантовая электродинамика определяется в классическом пределе классическими полевыми уравнениями Максвелла.

Ободренный этой аналогией, Фейнман рассматривает квантовую теорию гравитации "просто как другую квантовую теорию поля", такую как квантовая электродинамика. Так, в лекциях 1 – 6 он задает вопрос: можем ли мы найти разумную квантовую теорию поля, описывающую безмассовые кванты со спином 2 (гравитоны), взаимодействующие с веществом в обычном плоском пространстве-времени Минковского? Классический предел такой квантовой теории должен был бы определяться уравнением поля эйнштейновской теории относительности. Поэтому, для того, чтобы убедиться в виде классической теории, Фейнман привлекает внимание к характерные особенности квантовой теории, которые должны лежать в основании теории. Геометрические идеи проникают в обсуждение Фейнмана только через "черный вход" и развиваются первоначально как технические средства для того, чтобы помочь в построении приемлемой теории. Так, например, тензор кривизны (Римана), являющийся узловым пунктом общепринятой формулировки общей теории относительности, вводится Фейнманом первоначально (6.4) только как средство для построения членов в гравитационном действии, удовлетворяющем требуемым свойствам инвариантности. Действительно, только в лекции 9 (разделе 9.3) лекций Фейнман показывает, что кривизна имеет интерпретацию через параллельный перенос касательного вектора по искривленному пространственно-временному многообразию.

Критической особенностью квантовой теории является то, что безмассовый гравитон со спином 2 имеет только два состояния спиральности. Таким образом, классическое гравитационное поле также должно иметь только две динамические степени свободы. Тем не менее, классическое гравитационное поле, которое соответствует частице со спином 2, является симметричным тензором $h_{\mu\nu}$ с десятью компонентами. На самом деле, четыре из этих компонент h_{00} , h_{0i} (при $i = 1, 2, 3$) являются нединамическими связанными переменными, так что у нас остается только шесть динамических компонент h_{ij} для того, чтобы описать состояния с двумя физическими спиральностями. Из-за того, что есть несоответствие между числом состояний частицы и числом полевых компонентов, следует, что квантовая теория поля и отсюда также и соответствующая классическая

теория являются в большой степени теориями со связями.

Для того, чтобы разрешить это несоответствие, необходимо включить в теорию избыточность так, чтобы многие различные классические полевые конфигурации описывали одно и то же физическое состояние. Другими словами, это должна быть калибровочная теория. Для безмассового поля спина 2 может быть показано, что необходимый калибровочный принцип является условием общей ковариантности, что приводит к эйнштейновской теории.

В лекции 3 Фейнман построил квадратичное действие безмассового поля спина 2, которое линейным образом связано с сохраняющимся тензором энергии-импульса. Он объясняет калибровочную инвариантность результирующего линейного полевого уравнения в разделе 3.7 и дает комментарий в разделе 4.5 о том, что можно сделать вывод о нелинейном самовзаимодействии поля, основываясь на требовании калибровочной инвариантности амплитуд рассеяния. Но Фейнман не доводит эту программу до конца. (Он только замечает, что это довольно трудно было бы сделать.) Вместо этого, он использует довольно отличный от этого подхода метод для того, чтобы получить эйнштейновское нелинейное классическое полевое уравнение, метод, основное внимание в котором сосредоточено на *непротиворечивости*. Так как линейное полевое уравнение для свободного безмассового поля со спином 2 с необходимостью имеет калибровочную инвариантность (для того, чтобы устранить ненужные состояния спиральности), общие модификации такого полевого уравнения (такие, как модификации, которые возникают тогда, когда поле спина 2 связано с материей) не допускают никаких решений. Новые члены в модифицированном уравнении должны удовлетворять нетривиальному условию *непротиворечивости*, которое существенным образом является требованием того, что новые члены удовлетворяют калибровочной симметрии. Это условие непротиворечивости оказывается достаточным при указании пути в направлении специфического эйнштейновского множества нелинейных связей и соответствующего нелинейного полевого уравнения.

Более подробно: задача, как она сформулирована в разделе 6.2, состоит в том, чтобы найти функционал действия $F[h]$ для поля спина 2 такого, что гравитационное полевое уравнение

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu} \quad (\text{П.1})$$

согласуется с уравнением движения вещества. Здесь $T^{\mu\nu}$ есть тензор энергии-импульса вещества. В лекции 3 Фейнман находит квадратичное выражение для F , которое удовлетворяет согласованному линейному полемому уравнению до тех пор, пока сохраняется тензор энергии-импульса вещества (для случая специальной теории относительности) $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$. Беспорядок возникает тогда, когда поле $h_{\mu\nu}$ взаимодействует с веществом так, что вещество действует как источник $h_{\mu\nu}$, уравнение движения вещества модифицируется гравитационными силами и величина $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ не оказывает

ся более нулевой. Таким образом, полевое уравнение для $h_{\mu\nu}$ и уравнение движения вещества оказываются несовместными; эти уравнения не допускают одновременных решений. В этом состоит проблема непротиворечивости (линейной теории).

Используя требования того, что полевое уравнение удовлетворяется тензором $h_{\mu\nu}$ совместно с уравнением движения материи, Фейнман сделал вывод о том, что нелинейные поправки более высокого порядка должны быть добавлены к действию F . Требование непротиворечивости может быть облачено в форму принципа инвариантности, которому удовлетворяет действие, (с учетом этого принципа действие есть инвариант при общих координатных преобразованиях). После этого фейнмановский анализ стал довольно общепринятым и привел к заключению о том, что достаточно общее согласованное полевое уравнение, которое включает в себя не более двух производных, есть уравнение Эйнштейна (с космологической постоянной).

Результатирующие нелинейные поправки имеют приятную физическую интерпретацию. Без этих поправок гравитация не имеет связи сама с собой. Когда нелинейные поправки включаются в рассмотрение, источник для гравитационного поля (как он рассматривается в плоском пространстве-времени Минковского) есть полный тензор энергии-импульса, включающий вклад, обусловленный собственно гравитационным полем. Другими словами, удовлетворяется (сильный) принцип эквивалентности. Закон сохранения, удовлетворяемый энергией-импульсом вещества, становится эйнштейновским ковариантным законом, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, который в сущности допускает обмен энергией и импульсом между веществом и гравитацией.

Мы знаем из фейнмановских комментариев, сделанных в 1957 году на конференции в Чепел Хилл [DeWi 57], что уже тогда он работал над вычислениями, описанными в лекциях 2 – 6. Мюррей Гелл-Манн сообщал [Gell 89], что Фейнман и он обсуждали различные вопросы квантовой гравитации в течение рождественских каникул в 1954 – 55 годах, и что уже тогда Фейнман достиг "значительного прогресса" в этой области.

Требование того, что единственная разумная теория взаимодействующего безмассового поля спина 2 является по существу общей теорией относительности (или хорошо аппроксимируется общей теорией относительности в низкоэнергетическом пределе), довольно часто высказывается и сегодня. (Например, доказывалось, что так как теория суперструн содержит безмассовые частицы спина 2, это может быть теория гравитации). Фактически, Фейнман не был самым первым, кто высказал это требование.

Полевое уравнение для свободного безмассового поля спина 2 было написано Фиртцем и Паули в 1939 году [FiPa 39]. С того времени идея рассмотрения эйнштейновской гравитации, как теории поля спина 2 в плоском пространстве, изредка встречалась в литературе. Тем не менее, насколько мы знаем, первая опубликованная попытка вывести нелинейные связи в теории Эйнштейна в рамках такого подхода появилась в работе Сурая Гу-

пты в 1954 году [Gupt 54]. Гупта заметил, что действие в теории должно подчиняться нетривиальному условию непротиворечивости, которое удовлетворяется в общей теории относительности. Тем не менее, он не привел никакого детального аргумента в пользу *единственности* полевого уравнения Эйнштейна.

Грубо говоря, аргумент Гупты состоит в следующем. Мы хотим построить теорию, в которой "источник", связанный с безмассовым полем спина 2, есть тензор энергии-импульса, *включающий* энергию-импульс самого поля спина 2. Если выбрать источник поля таким образом, что он есть тензор энергии-импульса ${}^2T^{\mu\nu}$ теории свободного поля (которая квадратична по $\hbar$), то связь этого источника с тензором $h_{\mu\nu}$ приводит к появлению кубического члена в лагранжиане. Из этого кубического члена в лагранжиане может быть выведен соответствующий кубический член ${}^3T^{\mu\nu}$ в тензоре энергии-импульса, который тогда включается в источник. Этим порождается член четвертого порядка ${}^4T^{\mu\nu}$ и так далее. Эта итерационная процедура порождает бесконечные ряды, которые могут быть просуммированы для того, чтобы получить полные нелинейные уравнения Эйнштейна. Гупта кратко описал эту процедуру, но на самом деле не довел ее до завершения. Первая полная (и особенно элегантная) версия была опубликована Дезером в 1970 году [Dese 70]. Дезер также заметил, что теория Янга – Миллса может быть выведена, исходя из подобного подхода.

За несколько лет до работы Гупты, Роберт Крайчман, тогда 18-летний студент Массачусетского Технологического Института, также изучал проблемы вывода общей теории относительности как непротиворечивой теории безмассового поля спина 2 в плоском пространстве. Он описал свои результаты в неопубликованной диссертации на степень бакалавра [Krai 47]. Крайчман продолжил исследования по этой проблеме в Институте Перспективных Исследований в 1949 – 1950 годах. Он вспоминает, что хотя он и получил некоторое одобрение от Брайса Де Витта, очень немногие из его коллег поддерживали его усилия. Эта группа определенно включала в себя самого Эйнштейна, который пришел в ужас от такого подхода к гравитации, отвергавшего его собственное геометрическое понимание, полученное им в результате огромной проделанной работы. Крайчман не публиковал никакие из своих результатов до 1955 года [Krai 55, Krai 56], когда он наконец нашел вывод, который его удовлетворил. В отличие от Гупты, Крайчман *не предполагал*, что гравитация взаимодействует с полным тензором энергии-импульса. Скорее всего он, как и Фейнман, выводил свой результат как следствие непротиворечивости полевых уравнений. Кажется вероятным, что Фейнман совершенно ничего не знал о работах Гупты и Крайчмана.

Мы должны были бы указать на то, что анализ Фейнмана весьма далек от наиболее общего анализа, который можно было бы провести (анализ Фейнмана является существенно менее общим, чем анализ Крайчмана). Фейнман предполагал некоторый частный вид для действия вещества (которое соответствует действию для релятивистской частицы) и далее

предполагал строго линейную связь поля вещества спина 2 (которая была бы невозможна для более общего действия для материи). В частности, отметим, что все физические предсказания теории не меняются, если проводится нелинейное локальное переопределение поля спина 2; мы вольны сделать замену $h_{\mu\nu}(x)$ на $\bar{h}_{\mu\nu}(h(x)) = h_{\mu\nu}(x) + O(h(x)^2)$. Фейнман косвенным образом устранил эту свободу для того, чтобы делать подобные переопределения исходя из требования, что взаимодействие с материей должно быть линейно по h . (Полевые переопределения рассматривались детально Боуларом и Дезером [BoDe 75].) Значительно более общий анализ условия непротиворечивости для полевого уравнения проводился позднее Волдом [Wald 86] и привел его в конце концов к заключениям, аналогичным тем, к которым пришли Крайчман и Фейнман.

Совершенно другой подход к выводу формы гравитационного взаимодействия был разработан Вейнбергом [Wein 64a, Wein 64b]. Сделав весьма разумные предположения об аналитических свойствах амплитуд рассеяния при гравитон-гравитон взаимодействии, Вейнберг показал, что теория взаимодействующей безмассовой частицы со спином 2 может быть лоренц-инвариантной, только если частицы взаимодействуют с материей (включая взаимодействие с самой собой) с некоторой универсальной силой, другими словами, только если удовлетворяется сильный принцип эквивалентности. До известной степени аргументация Вейнберга – наиболее глубокая и мощная, так как свойство того, как гравитон взаимодействует с тензором энергии-импульса, выводится из других более общих принципов. Как только принцип эквивалентности установлен, можно продолжить построение эйнштейновской теории [Wein 72].

Наконец, существует вопрос о том, как должны быть исключены члены в лагранжиане, включающие в себя производные выше второго порядка от тензора $h_{\mu\nu}$. В лекциях Фейнмана этому вопросу уделено очень мало внимания, за исключением замечания в разделе 6.2, что включение членов с двумя производными (или менее) приведет к "наипростейшей" теории. (См. также в разделе 10.3 связанное с этим замечание в слегка другом контексте.) Фейнман, по-видимому, не предвосхитил современную точку зрения [Wein 79], что члены с более высокими производными обязательно присутствуют в лагранжиане, но эти члены оказывают пренебрежимо малое влияние на предсказания теории, когда кривизна пространства-времени мала. Философия, лежащая в основе этой точки зрения, состоит в том, что лагранжиан эйнштейновской теории является просто "эффективным лагранжианом", который описывает низко-энергетическую феноменологию более фундаментальной теории – теории, которая могла бы включать в себя новые степени свободы (суперструны?) на масштабах длины порядка планковской длины $L_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33}$ см. В эффективном лагранжиане допускаются все члены, согласованные с общими принципами, включая члены с произвольным числом производных. Тем не менее, основываясь на соображениях размерности, член с более высокими производными имеет коэффициент, пропорциональный более высокой степени L_P . Таким образом,

в процессе, включающем в себя характерный радиус кривизны порядка L , члены в лагранжиане с четырьмя производными дают эффекты, которые подавлены по сравнению с эффектами, вызываемыми членами со второй производной, подавлены множителем порядка $(L_P/L)^2$, который чрезвычайно мал для любых разумных процессов. В таком случае мы можем понять, почему усеченная теория, включающая только члены со второй производной и ниже, была бы в замечательном согласии с экспериментом.

С другой стороны, то же самое рассуждение также приводит к ожиданию появления "космологического" члена (в котором нет производных) с коэффициентом порядка 1 в единицах L_P . То, что космологическая постоянная является фактически необычайно малой сравнительно с такими наивными ожиданиями, остается одной из великих неразрешенных тайн физики гравитации [Wein 89].

Геометрия

После проведения исследований в целях построения разумной теории, которая описывает взаимодействия безмассовых полей спина 2 в плоском пространстве, Фейнман не отказался от того, чтобы высказать восхищение (как в разделе 8.4), что получившаяся в результате теория имеет геометрическую интерпретацию: "... этот факт состоит в том, что поле спина 2 имеет геометрическую интерпретацию; это не является чем-то легко объяснимым, это является просто удивительным." В лекциях 8 – 10 при развитии теории используется геометрический язык, который является более традиционным, чем тот подход, который использовался в его более ранних лекциях.

В разделе 9.3 Фейнман замечает, что он не знает геометрической интерпретации тождества Бианки, и он кратко описывает, как можно было бы обнаружить этот геометрический смысл. Геометрическая интерпретация, которую он представляет, была в явном виде описана в работе французского математика Эли Картана в 1928 году [Cart 28]; тем не менее, она была неизвестна широким кругам физиков, даже кругам профессиональных релятивистов в 1962 году. Эта геометрическая интерпретация была высказана на языке дифференциальных форм, на котором Фейнман не говорил. Интерпретация Картана состояла в том, что "граница границы равна нулю", как было в конце концов извлечено из идей Картана Чарльзом Мизнером и Джоном Уилером в 1971 году, что сделало эту интерпретацию широко доступной; см. например, часть 15 монографии [MTW 73] на техническом уровне и часть 7 книги [Whee 90] на популярном уровне.

Космология

Некоторые из идей Фейнмана о космологии имеют современное звучание. Хороший пример – это его внимание к вопросу о происхождении материи. Идея о непрерывном образовании вещества в стационарной

космологической модели серьезно не раздражает его (он замечает в разделе 12.2, что в космологии Большого Взрыва существует проблема (причем довольно неприятная), как объяснить, откуда берется вся материя в *самом начале*). В разделе 1.2 и вновь в разделе 13.3 он подчеркивает, что полная энергия вселенной могла бы быть в действительности равной нулю, и что образование вещества возможно, поскольку энергия покоя вещества на самом деле сокращается энергией гравитационного потенциала. "Дух захватывает от мысли о том, что *ничего* не стоит образовать новую частицу...". Это близко к популярному взгляду на то, что вселенная есть "бесплатный обед", ничто или почти ничто взрывается до космологического размера, проходя через чудо инфляции [Guth 81]. Фейнман беспокоился более о необходимости несохранения барионного числа, если вселенная возникает из "ничего".

Фейнман также выразил предпочтение для "критического" значения плотности в разделе 13.1, и этот предрассудок довольно широко распространен сейчас [LiBr 90]. В разделе 13.2 он дал интересный (и качественно правильный) аргумент в поддержку того, что плотность близка к критической: он замечает, что существование скоплений и сверхскоплений галактик приводит к тому, что "гравитационная энергия того же самого порядка, что и кинетическая энергия расширения, это позволяет мне предположить, что средняя плотность должна быть очень близка к критической плотности всюду." В 1962 году это был довольно непривычный аргумент.

Очевидно, что уже в начале 60-х годов Фейнман признал необходимость новых фундаментальных принципов физики, которые могли бы обеспечить нас предварительным описанием начальных условий вселенной. В начале этих лекций, в разделе 2.1, он отклоняется на обсуждение оснований статистической механики, чтобы выразить убеждение в том, что второй закон термодинамики должен иметь космологическое происхождение. Отметим его утверждение "...вопрос состоит в том, как в квантовой механике описать ту идею, что состояние вселенной в прошлом было чем-то особенным." (Подобная интуитивная догадка также появилась в книгах "*Фейнмановские лекции по физике*" [Feyn 63a] и "*Характер физических законов*" [Feyn 67], которые были датированы тем же самым периодом.) Таким образом, по-видимому, Фейнман предвидел то увлечение квантовой космологией, которое начало овладевать вниманием значительной части физического сообщества около двадцати лет назад. Он также выражает в разделах 1.4 и 2.1 неприемлемость копенгагенской интерпретации квантовой механики в космологическом контексте.

Сверхзвезды

В 1962 – 63 годах, когда Фейнман читал свои лекции по гравитации, КАЛТЕХ был взволнован новыми открытиями "сильных радиоисточников".

В течение 30 лет астрономы были озадачены выяснением природы этих наиболее сильных из всех объектов, излучающих в радиодиапазоне. В 1951 году Уолтер Бааде [Baad 52] использовал новый оптический 200-дюймовый телескоп КАЛТЕХ'а на горе Паломар для того, чтобы открыть наиболее яркий из радиоисточников – Лебедь А (Cygnus A), который не являлся (как это ожидали астрономы) звездой в нашей собственной Галактике, но был связан с некоторой особенной, довольно удаленной галактикой. Двумя годами позже Р.К.Дженнисон и М.К.Дас Гупта [JeDG 53], изучая источник Лебедь А с помощью нового радиоинтерферометра в Джодрелл Бенк, Англия, открыли, что большая часть радиоволн приходит не от внутренней части галактики, а от двух гигантских полостей, расположенных с противоположных сторон от галактики, которые имеют размер около 200 000 световых лет и около 200 000 световых лет между этими полостями. Радиоинтерферометр КАЛТЕХ'а, расположенный в ущелье Оуэнса, вошел в строй в конце 50-х годов, и в 1962–63 годах, времени чтения лекций Фейнмана, этот интерферометр использовался совместно с оптическим 200-дюймовым телескопом на горе Паломар для того, чтобы идентифицировать многие другие радиоисточники с двойными полостями. Некоторые, как и Лебедь А, размещены в центре галактик; другие объекты размещены на звездо-подобных точечных источниках света (которые, как обнаружил 5 февраля 1963 сотрудник КАЛТЕХ'а Мартин Шмидт, имеют гигантские значения красного смещения [Schm 63], а позже в том же году Хонг Йи Чиу, назвал эти объекты *квазарами*). В 1962 году и в начале 1963 года, тогда как астрономы КАЛТЕХ'а соревновались друг с другом для того, чтобы провести новые и лучшие наблюдения этих странных объектов и проинтерпретировать их спектры, астрофизики соревновались в построении моделей этих объектов.¹

Одна особенно многообещающая модель была представлена летом 1962 года сотрудником Кембриджа Фредом Хойлом и сотрудником КАЛТЕХ'а Уильямом Фаулером [HoFo 63]. В рамках этой модели предполагается, что мощность для каждого сильного радиоисточника приходит от сверхмассивной звезды в центре галактики. Громадная величина энергии радиополостей (оцененная Джеоффри

¹Для ознакомления с дальнейшими историческими деталями, см., например, часть 9 [Thor 94] и ссылки в этой книге.

Бербиджем как $10^{58} - 10^{60}$ эрг, т.е. эквивалент энергии $10^4 - 10^6$ солнечных масс) требует, чтобы эта система управлялась бы сверхмассивной звездой, имеющей массу $\sim 10^6 - 10^9$ солнечных масс. По сравнению с верхним пределом массы нормальных звезд, равным ~ 100 солнечных масс, эти объекты Хойла – Фаулера были на самом деле "сверхмассивными." Эти объекты стали называться в некоторых кругах *свертзвездами*.

Где-то в начале 1963 года (вероятно в феврале или марте) Фред Хойл делал доклад на семинаре (SINS)¹ в Лаборатории излучения (Лаборатории Келлога) КАЛТЕХ'а о модели сверхзвезды для сильных радиоисточников. Во время, когда задавали вопросы, Ричард Фейнман высказал возражение о том, что эффекты общей теории относительности должны были бы делать все сверхзвезды неустойчивыми, по крайней мере, в том случае, если они невращающиеся. Они должны были бы коллапсировать для того, чтобы образовать то, что в настоящее время называется черными дырами.

Хойл и Фаулер находились в сомнении, но в течение нескольких месяцев они и независимо от них Ико Ибен [Iben 63] (старший научный сотрудник в Лаборатории Келлога, в которой работал Фаулер) проверили и убедились в том, что Фейнман наиболее вероятно был прав. С. Чандрасекар из Чикагского Университета независимо открыл неустойчивость в рамках общей теории относительности и вполне определенным образом проанализировал эту неустойчивость.

По словам Хойла и Фаулера замечание Фейнмана было "громом среди ясного неба", полностью неожиданным и не имело видимого основания, за исключением изумительной физической интуиции Фейнмана. На Фаулера это произвело такое впечатление, что он описывал этот семинар и интуитивную догадку Фейнмана многим коллегам по всему миру, добавляя, тем самым, еще одну (правдивую) историю к легенде Фейнмана.

На самом деле интуиция Фейнмана не возникала без труда. Здесь, как и где-нибудь в другом месте, эта интуиция основывалась на огромном объеме детальных вычислений, проводимых из-за любознательности Фейнмана. И в этом случае, в отличие от других, Фейнман оставил нам моментальный снимок его напряженной работы, в результате которой им было сделано открытие: это лекция 14 в этом томе.

Мы собрали вместе обстоятельства, окружающие лекцию 14, главным образом основываясь на записках января 1963 года Ико Ибена и

¹"Stellar Interiors and Nucleosynthesis" – "внутреннее строение звезд и нуклеосинтез" – серия семинаров, которые организовал и проводил Фаулер.

на его воспоминаниях, кроме того, на беседе между Фейнманом и Торном, произошедшей где-то в районе 1971 года, и фрагментах воспоминаний Джеймса Бардина, Стивена Фраучи, Джеймса Хартля и Уильяма Фаулера.

Где-то в конце 1962 года или в начале января 1963 года Фейнману должно было придти в голову, что на сверхзвезды Хойла – Фаулера должны были бы оказывать сильное влияние силы общей теории относительности. Согласно запискам Ибена, Фейнман пришел в его комнату в Лаборатории Келлога где-то до 18 января, поднял вопрос о том, как влияет общая теория относительности на сверхзвезды, показал Ибену уравнения общей теории относительности, которые описывают структуру сверхзвезды и которые Фейнман выписал для самого себя, исходя из первых принципов, и спросил о том, как астрофизики, такие как Ибен, действуют при построении ньютоновских звездных моделей из аналогичных ньютоновских уравнений. После этого обсуждения, Фейнман ушел и вернулся где-то на неделе (21 – 25 января). "Фейнман ошарашил меня", вспоминал Ибен, "тем, что он пришел и сказал мне, что он [уже] решил ... уравнения. Он сказал мне, что он провел некоторые консультации с компьютерной фирмой и решил эти уравнения в реальное время, как это должно было бы быть сделано на поколении компьютеров типа рабочей станции".

В понедельник 28 января, имея только несколько дней для того, чтобы обдумать численные решения (и, предположительно, затратив достаточно много времени на различные другие дела, так как он должен был готовить лекцию для второкурсников в тот же самый понедельник), Фейнман прочитал лекцию 14 из этой книги. (Заметим, что это было всего за восемь дней до открытия Мартином Шмидтом красных смещений квазаров.)

Лекция 14 пришлась на середину усилий Фейнмана, направленных на то, чтобы представить себе, как должны вести себя сверхзвезды, эта лекция была до того, как он осознал, что эффекты общей теории относительности дестабилизируют эти сверхзвезды. Как результат, посвященные интерпретации фрагменты лекции 14 (разделы 14.3 и 14.4) в большой степени неверны, но несмотря на это представляется интересным указать те пути, которые использовал Фейнман при своем интуитивном подходе к решению этой задачи.

Фейнман никогда не просматривал напечатанную Мориниги и Вагнером версию лекции 14; и в 1971 году, когда он одобрил лекции 12 – 16 для распространения, он скорее всего забыл, что часть лекции 14, связанная с интерпретацией, представляет собой отчет о рассуждениях, которые однако не принесли достойного плода.

Фейнман начал свою лекцию 14 введением модели сверхзвезды, "которая очень проста, но может, тем не менее, обладать огромным множеством атрибутов реальных процессов. После того, как мы поймем, как обходиться с решением такой простой задачи, мы можем позаботиться об усовершенствованиях в модели." (Усовершенствования – это учет влияния электрон-позитронных пар, испускания нейтрино, ядерного горения, вращения, неустойчивостей – будут добавлены позднее в 1963–64 годах Ибеном [Iben 63], Куртисом Майклом [Mich 63], Фаулером [Fowl 64] и Бардиным [Bard 65] при значительных обсуждениях с Фейнманом и постановке им некоторых задач.)

Поскольку цель Фейнмана состояла в изучении эффектов общей теории относительности, его модель сверхзвезды была полностью общерелятивистская, в отличие от предыдущих моделей Хойла – Фаулера, которые были ньютоновыми. С другой стороны, там, где Фаулер и Хойл включили в рассмотрение вклад и газа, и излучения в давление звезды и внутреннюю плотность энергии, Фейнман упрощает модель, игнорируя вклад газа в давление $p_{\text{газ}}$ и во внутреннюю энергию $\epsilon_{\text{газ}}$. Это представляется разумным, так как основное внимание Фейнмана сосредоточено на сверхзвезде с массой $M = 10^9 M_{\text{sun}}$, а Хойл и Фаулер показали, что в ньютоновском пределе сверхзвезды сильно радиационно-доминированы при

$$\beta \equiv \frac{p_{\text{газ}}}{p_{\text{излучение}}} = \frac{2\epsilon_{\text{газ}}}{\epsilon_{\text{излучение}}} = 8.6 \left(\frac{M_{\text{sun}}}{M} \right)^{1/2} \simeq 3 \times 10^{-4} \left(\frac{10^9 M_{\text{sun}}}{M} \right)^{1/2} \quad (\text{П.2})$$

(Здесь для простоты мы предполагаем, что газ является чистым водородом). Поскольку такие звезды в большой степени являются конвективными, их энтропия на нуклон есть величина, не зависящая от радиуса, что означает в свою очередь, что величина β есть $8 \times (\text{Постоянная Больцмана})/(\text{энтропия на нуклон})$, есть также величина, не зависящая от радиуса; и этот факт остается справедливым и для общерелятивистского случая, как отдавал себе в этом отчет Фейнман, хотя уравнение (П.2) меняется на множитель порядка единицы.

Пренебрегая вкладом $p_{\text{газ}}$ и $\epsilon_{\text{газ}}$, Фейнман приступил в разделе 14.1 и 14.2 лекции 14 к построению общерелятивистских уравнений, описывающих структуру сверхзвезд, он сообщает, что он проинтегрировал их численно и представил результаты в таблице 14.1. Эта таблица может быть проинтерпретирована с помощью уравнений (14.2.1), в которых параметр Фейнмана τ есть

$$\tau = \frac{4/3}{\text{энтропия на нуклон}} = \left(\frac{\text{масса покоя нуклона}}{\text{Постоянная Больцмана}} \right) \frac{\beta}{6} \simeq 1800\beta, \quad (\text{П.3})$$

так как Фейнман использует единицы, в которых масса покоя нуклона и температура 10^9 °К кладутся равными единице.

При обсуждении моделей Фейнмана и его (неверной) интерпретации их, полезно было бы использовать рисунок П.1. Этот рисунок показывает некоторые признаки семейства моделей сверхзвезд, которые построил Фейнман (толстая кривая), совместно с их продолжением на ультрарелятивистский режим (верхняя тонкая линия) и их продолжением на почти ньютоновский режим (нижняя тонкая линия) – эти продолжения были вычислены позднее Ибеном [Iben 63], Фаулером [Fowl 64], Бардиным [Bard 65] и Тупером [Toor 66]. По вертикальной оси откладывается гравитационная энергия связи звезды со знаком "минус"; по горизонтальной оси откладывается радиус звезды. В практически ньютоновском режиме (затененная область кривой связи энергии), который Фейнман не исследует, нельзя пренебрегать величинами $p_{\text{газ}}$ и $\epsilon_{\text{газ}}$, энергия связи задается (как показал Фаулер [Fowl 64], как отклик на "гром среди ясного неба" Фейнмана) следующим тонким балансом между газовым давлением (первым членом) и эффектами общей теории относительности (второй член):

$$\frac{M - M_{\text{rest}}}{M_{\text{rest}}} \simeq -\frac{3\beta}{8} \left(\frac{2M}{R} \right) + 1.3 \left(\frac{2M}{R} \right)^2. \quad (\text{П.4})$$

Здесь $2M$ – радиус Шварцшильда черной дыры с той же самой массой, что и масса сверхзвезды.

При интерпретации моделей в разделе 14.3 Фейнман начал с того, что спросил об эволюции сверхзвезды, состоящей из фиксированного количества нуклонов (т.е. фиксированной нуклонной массы покоя M_{rest}), которая постепенно излучает тепловую энергию, что, тем самым, приводит к уменьшению полной массы M и делает звезду более плотно связанной. Он обнаружил странную эволюцию: когда звезда излучает, ее радиус увеличивается (движение вниз и направо по толстой кривой на рис. П.1) и ее температура в центре уменьшается. Это противоречит поведению большей части других звезд, которые, когда они излучают, сжимаются и нагреваются, в том случае, если в них не происходит горения термоядерного топлива. (Если вместо того, чтобы иметь дело с полностью релятивистской областью слева от точки минимума кривой связи, Фейнман сохранил бы учет влияния газа и провел вычисления в почти ньютоновской области справа, он обнаружил бы противоположное поведение: сверхзвезда должна была бы сжиматься и нагреваться, когда она излучает).

Фейнман поставил вопрос о том, являются ли его модели сверхзвезд устойчивыми. "Устойчивость нашей звезды не изучена [количественно]", подчеркивает он и затем продолжает представлять исходные рассуждения по данному вопросу: "[Модели, которые имеют] одно и то же количество нуклонов и одно и то же значение τ [одно и то же значение энтропии], могут сравниваться как по значению радиуса, так и по температуре в центре. Факт, состоящий в том, что очевидно имеется минимальное значение радиуса [наиболее левый изгиб на рис. П.1], ... является очень соблазнительным; звезда может иметь устойчивую конфигурацию". Здесь Фейнман интуитивно идет к методу анализа устойчивости, создание которого было

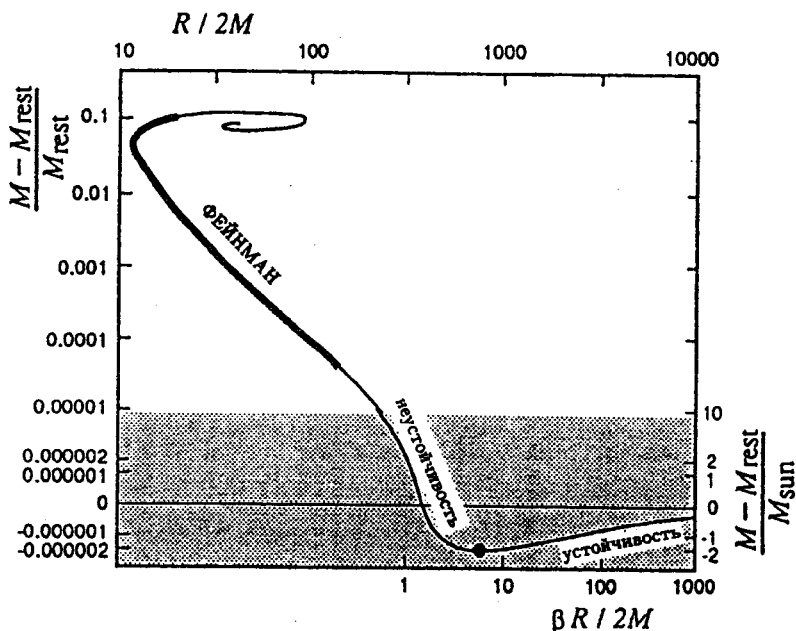


Рис. II.1. Энергия связи звезды, состоящей из водорода. На вертикальной оси слева отложена отрицательная величина относительной энергии связи, т.е. $(M - M_{\text{rest}})/M_{\text{rest}}$, где M — полная масса звезды и M_{rest} — полная масса покоя всех нуклонов звезды; по горизонтальной (верхней) оси отложен радиус звезды в единицах радиуса Шварцшильда $2M$ черной дыры с той же самой массой. Масштабы, отложенные на левой оси и верхней оси, справедливы в белой области для сверхзвезд любой массы, но в (почти ньютоновской) затененной области только при $M = 10^6 M_{\text{sun}}$. На вертикальной правой оси отложена отрицательная величина от относительной энергии связи в единицах массы Солнца M_{sun} ; на нижней горизонтальной оси отложена величина $R/2M$, умноженная на отношение β газового давления и полного давления. Правый и нижний масштабы оказываются справедливыми для сверхзвезд любой массы в почти ньютоновской затененной области, но они оказываются неверными в полностью релятивистской белой области. Вертикальный масштаб является арктангенсом, т.е. он почти линеен при $|(M - M_{\text{rest}})/M_{\text{sun}}| \lesssim 1$, и логарифмическим при $|(M - M_{\text{rest}})/M_{\text{sun}}| \gtrsim 1$. Толстая часть кривой следует из вычислений Фейнмана, изложенных в лекции 14, тонкие части связаны с работами Ибена [Iben 63], Фаулера [Fowl 64], Бардина [Bard 65] и Тупера [Toop 66].

завершено год или более спустя Джеймсом Бардиным, когда он стал аспирантом Фейнмана. Завершенная Бардиным версия аргумента Фейнмана [Bard 65, BTM 66] показала, что когда мы движемся вдоль кривой, описывающей энергию связи, ограничивая себя только фиксированными значениями массы M_{rest} , энтропия меняется от одной модели к другой, за исключе-

нием области в окрестности каждого минимума или максимума связи, где конфигурация является стационарной. Это означает, что звезда обладает модой деформации с нулевой частотой для каждого значения минимума или максимума, модой, которая переносит сверхзвезду от одной равновесной модели к другой с тем же самым значением энтропии, энергии связи и массой покоя. Это в свою очередь означает, что одна мода радиальных колебаний меняет устойчивость в каждом экстремуме связи. Анализируя эти конфигурации и рассматривая моды собственных функций, которые должны иметь место, Бардин выводит, что если кривая связи поворачивается по часовой стрелке, когда по ней перемещаемся через экстремум, тогда эта мода становится неустойчивой; если эта кривая поворачивается против часовой стрелке, тогда эта мода становится устойчивой. (Это утверждение является справедливым вне зависимости от того направления, в котором мы движемся по кривой.) Анализ Бардина, приложенный к рис. П.1, показывает, что практически ньютоновские модели в нижнем правом углу (которые сжимаются, когда они излучают) являются устойчивыми, и они должны терять устойчивость и коллапсировать для того, чтобы образовать черную дыру, когда они достигают минимума кривой связи; эти модели за точкой минимума (включая все модели Фейнмана) обладают одной неустойчивой модой радиальной пульсации; эти модели за первым пиком в кривой связи (верхняя левая часть рис. П.1) обладают двумя неустойчивыми модами и т.д.

Фейнман, конечно, не отдавал себе в этом отчет 28 января 1963 года; так что он приступил к лекции 14 для того, чтобы достичь понимания относительно устойчивости его моделей с помощью других методов. Он представляет себе, что взята одна из таких моделей сверхзвезды с барионной массой покоя M_{rest} и затем этот объект раскалываем на две сверхзвезды, каждая из которых имеет массу покоя $M_{\text{rest}}/2$, в то время как сохраняется фиксированное значение энтропии на один нуклон. "Получим ли мы работу в результате этого процесса, или мы должны затратить работу для того, чтобы получить [звезду], расколотую на две части?" Из его таблицы 1 и уравнений (14.2.1a–14.2.1b) он выводит, что "два объекта ... должны были быть более массивными; требуется работа для того, чтобы расколоть такую систему. Это наводит на мысль о том, что звезда не могла бы выбрасывать вещество, но сохранялась бы в одном коме", т.е. звезда могла бы быть устойчивой.

На первый взгляд это кажется убедительным аргументом. Тем не менее, на самом деле этот аргумент является обманчивым (как осознал Фейнман предположительно где-то между этой лекцией и семинаром Хойла). Эти две новые звезды, которые Фейнман образовал, расколов свою первоначальную звезду, находятся много выше толстой кривой энергии связи, изображенной на рис. П.1, т.е. они много более релятивистские, чем первоначальная звезда. Тем не менее, имеются также две звездных модели с теми же самыми значениями массы покоя и энтропии на нуклон, на устойчивой, почти ньютоновской ветви кривой связи в нижнем правом углу рис. П.1.

Если первоначальная звезда разбивается на эти две звезды, то будет выделяться энергия, что правильно наводит на мысль о том, что первоначальная звезда является на самом деле неустойчивой. Фейнман пропустил эту аргументацию потому, что ни он, ни кто-либо 28 января 1963 еще не знали вида кривой связи в затененной области. Разумно сделать предположение, тем не менее, что он сделал достаточно много предположений, связанных с этим вопросом, до того, как на семинаре Хойла была замечена его ошибка.

Проведя неверный анализ устойчивости звезд, Фейнман переходит в разделе 14.4 к тому, чтобы предложить направления дальнейших исследований сверхзвезд. Он начинает с предложения вариационного принципа, с помощью которого можно построить равновесные модели полностью релятивистских, изэнтропических сверхзвезд: "найти конфигурацию с наименьшей массой, исходя из заданного числа нуклонов" (и с заданной энтропией на нуклон). Два года спустя работающий в Париже Джон Кок [Cock 65] разработал, предположительно независимо от предложения Фейнмана, детальный вариационный принцип, эквивалентный фейнмановскому (в котором сохраняется масса и число нуклонов и максимизируется энтропия), и использовал этот принцип для построения общерелятивистских звездных моделей.

Фейнман в разделе 14.4 продолжает свои рассуждения словами: "После того, как мы исследовали статические решения, мы можем повернуть наше внимание к полной динамической задаче. Дифференциальные уравнения выглядят ужасающе". Фактически, Фейнман выписал сам такие уравнения. Они впоследствии были выведены независимо и решены численно М.А. Подурцом [Podu 64] в СССР¹ и Майклом Мейем и Ричардом Уайтом [MaWh 66] в США, с использованием потомков компьютерных алгоритмов, которые были разработаны для создания ядерного оружия. Этот результат хорошо известен: звезды, которые испытывают релятивистскую неустойчивость Фейнмана – Чандрасекара, взрываются внутрь для того, чтобы образовать черные дыры.

В течении примерно 10 лет после прочтения Фейнманом лекции 14 вращающиеся сверхзвезды остаются сильным соперником на рынке всевозможных моделей квазаров и сильных радиоисточников, характеризующихся огромным энерговыделением. Постепенно в 1970-х годах модели, основанные на быстро вращающихся сверхмассивных черных дырах, приобрели господство; и сегодня сверхмассивные звезды обычно рассматриваются как достаточно привлекательные, но

¹ Вид уравнений, решаемых по разностной схеме, которая была составлена В.Л. Загускиным, в работе М.А. Подурца следует признать неудачным из-за наличия в них корневой особенности, и их нельзя использовать в случаях, когда сжатие может смениться расширением. Впоследствии эта особенность была устранена более удачным выбором переменных [ННП 78*]. (Прим. перев.)

нестационарные объекты в ядрах галактик, движущиеся (по эволюционной траектории) в сторону образования сверхмассивных черных дыр, что впоследствии приводит к их преобладанию над сверхмассивными звездами [Thor 94].

Черные дыры

Понятие черной дыры только появлялось в начале 60-х годов, и взгляды Фейнмана могли быть слегка позади концепций, существовавших в то время. Таким образом, наиболее серьезно устаревшими являются вероятно лекции 11 и 15, в которых рассматривается решение Шварцшильда и его приложения.

В некотором смысле то, что мы теперь называем черной дырой, уже было известно в 1916 году, когда Карл Шварцшильд нашел свое решение полевых уравнений Эйнштейна [Schw 16]. Но в течении десятилетий большая часть физиков упорно сопротивлялись таким "возмутительным" приложениям решения Шварцшильда. (Эта часть физиков включала в себя и самого Эйнштейна, который написал в 1939 году вызывающую сожаление статью, в которой доказывал, что черные дыры не могут существовать [Eins 39]). Даже замечательный и вполне определенный анализ (опубликованный также в 1939 году) гравитационного коллапса, проведенный Оппенгеймером и Снайдером [OpSn 39], оказывал удивительно малое влияние на научную общественность в течении многих лет. Оппенгеймер и Снайдер изучили коллапс сферически симметричной "звезды" с однородной плотностью и нулевым давлением и заметили, что такой взрыв звезды внутрь, как это видит стационарный наблюдатель, который остается вне коллапсирующей звезды, будет медленно приближаться и, в конце концов, застынет, когда поверхность звезды приблизится к сфере Шварцшильда. Кроме того, они ясно показали, что никакого такого "застывания" коллапса не видели бы наблюдатели, движущиеся вместе с коллапсирующей материей, такие наблюдатели должны были бы пересечь критическую поверхность за конечное собственное время, и с того времени они не могли бы послать сигнал, который мог бы достигнуть наблюдателя, находящегося вне коллапсирующей звезды. Это предельное отличие между описанием в двух различных системах отсчета доказывается исключительно сложно для легкого восприятия. Эти два описания не были приведены в соответствие до 1958 года, когда Давид Финкельштейн [Fink 58] проанализировал решение Шварцшильда, используя координатную систему, что позволило наглядно представить себе одновременно мировые линии полевых частиц, которые падают внутрь критической поверхности, и мировые линии выходящих фотонов, которые застывают на критической

поверхности. Этот анализ открыл необычную "структуру причинности" пространства Шварцшильда: ничто, находящееся внутри "горизонта", не может избежать того, чтобы быть затянутым внутрь сферы все меньшей и меньшей площади. Появившаяся картина указала (некоторым ученым), что как только звезда падает через критическую поверхность, ее сжатие, которое приводит к образованию пространственно-временной сингулярности, становится неизбежным. То, что это на самом деле верно независимо от любых предположений, идеализирующих картину, таких как сферическая симметрия и нулевое давление, было доказано Роджером Пенроузом в 1964 году [Penr 65].

Таким образом, время чтения лекций Фейнмана по гравитации является неудачным. "Золотая эпоха" исследований черных дыр только начиналась, в течение следующего десятилетия было достигнуто значительное понимание сути физики этого явления. Эти результаты, которые не могли быть предугаданы в 1962 – 63 году, полностью преобразовали изучение общей теории относительности и способствовали созданию новой дисциплины – релятивистской астрофизики.

В 1962 – 63 году взгляды Фейнмана на решение Шварцшильда находились под большим влиянием Джона Уилера. Уилер в течение многих лет считал, что заключения Оппенгеймера и Снайдера не могут вызывать доверия; он находил их физически неразумными. Даже в 1958 году он отстаивал то, что если при анализе гравитационного коллапса использовать более реалистичное уравнение состояния, то могут быть получены качественно отличные результаты [HWW 58]. (Эта точка зрения оказалась менее надежной, когда структура причинности геометрии черной дыры стала соответствующим образом понята). Постепенно, тем не менее, Уилер пришел к тому, чтобы принять неизбежность гравитационного коллапса, приводящего к образованию черной дыры в соответствии с заключениями Оппенгеймера и Снайдера. (Этому сдвигу точки зрения Уилера способствовали результаты Мартина Крускала [Krus 60], который независимо от Финкельштейна, также прояснил структуру причинности черной дыры; фактически, столь значительная статья Крускала была в большой степени написана Уилером, хотя некоторые интуитивные догадки и вычисления принадлежали Крускалу). Но в течение тех лет, когда он был скептически настроенным, Уилер реагировал довольно специфическим способом, он редко упоминал результаты Оппенгеймера - Снайдера в своих публикациях. Это обнаруживается, когда в разделе 11.6 Фейнман делает замечание о том, что стоило

бы поинтересоваться изучением коллапса пыли. Он кажется не знающим того, что Оппенгеймер и Снайдер детально изучили коллапс пыли 23 года тому назад! В разделе 15.1 он рассуждает, основываясь на (неверных!) размышлениях лекции 14, что звезда, образованная из "реального вещества", не может коллапсировать внутрь ее критической поверхности.

Фейнман приводит несколько ссылок на программу "геометродинамики", которую Уилер развивал, начиная с середины 50-х годов, и все еще продолжал ее развивать (может быть менее энергично) в 1962 году; см. [Whee 62]. Уилер и его соавторы надеялись проинтерпретировать элементарные частицы как геометрические объекты, возникающие из (квантовых версий) классических решений гравитационных полевых уравнений при отсутствии материи. Уилер в особенности был увлечен концепцией "заряда без заряда"; он отмечал, что если силовые линии электрического поля захватываются нетривиальной топологией "кратовой норы" в пространстве, то каждая горловина кратовой норы должна была бы появляться как точечный заряженный объект для наблюдателя, чье разрешение оказывается недостаточным для того, чтобы ощутить эту малюсенькую горловину [MiWh 57]. Уилер подчеркивал, что решение Шварцшильда обладает пространственными сечениями, в которых две асимптотически плоских области связываются узкой горловиной, и таким образом, реализует модель геометрии кратовой норы, которую Уилер представлял себе.

Фейнман явным образом был влюблен в понятие кратовой норы, он описывает эти идеи кратко в разделе 11.5 и затем в разделах 15.1 и 15.3. Заметим, что Фейнман называет звезду, ограниченную внутри своего гравитационного радиуса, "кратовой норой"; термин "черная дыра" не был придуман (Уилером) до 1967 года. Для того, что мы называем теперь "горизонтом" черной дыры, Фейнман использует более старый термин "сингулярность Шварцшильда". Это особенно неудачный оборот речи, поскольку при этом имеется риск внести путаницу с действительной сингулярностью, областью в центре черной дыры, где имеется бесконечная кривизна. Фейнман никогда подробно не обсуждает эту настоящую сингулярность.

К 1962 году структура причинности решения Шварцшильда была достаточно хорошо понята. Она достаточно хорошо пояснена Фаллером и Уилером в работе [FuWh 62], т.е. в работе, на которой, как упоминает Фейнман, основано изложение в разделе 15.1. (В этой работе, одной из очень немногих, цитируемых в лекциях Фейнмана, использовались координаты Крускала для того, чтобы построить полную,

аналитически продолженную геометрию Шварцшильда, и представляется "диаграмма Крускала", которая явно демонстрирует свойства времениподобных и нулевых геодезических). Фейнман цитирует основной вывод: решение Шварцшильда не является на самом деле кротовой норой того рода, которым интересуется Уилер, поскольку горловина кротовой норы является на самом деле динамическим объектом и сожмется до того, как любая частица сможет пересечь эту горловину. Тем не менее, в работе Фаллера и Уилера не упоминались никакие более широкие приложения этой структуры причинности для проблемы гравитационного коллапса, и Фейнман не демонстрирует понимание таких приложений.

Можно также увидеть из комментариев Фейнмана, сделанных в разделах 15.2 и 15.3, что он не понимал структуры причинности решения ("Райсснера – Нордстрема"), описывающего заряженную черную дыру, которая рассматривалась в работе Грейвса и Брилла 1960 года [GrBr 60]. Приведем замечание "... не представляется немыслимым, что может оказаться, что отраженная частица вылетает наружу раньше, чем она влетает внутрь!" Фактически, в аналитически продолженной геометрии геодезическая проходит в "новую вселенную" за конечное собственное время скорее, чем выходит обратно из черной дыры (см., например, [HaEl 73]). Тем не менее, известно, что внутренняя часть этого решения является неустойчивой при действии общих возмущений [ChHa 82]; для "реалистического" случая заряженной черной дыры, образуемой в процессе гравитационного коллапса, ситуация является качественно отличной и остается все еще не понятой до конца, хотя кажется в высшей степени вероятным, что ядро дыры является настолько сингулярным, что ничто не может перейти в "новую вселенную", по крайней мере в области общей теории относительности [BBIP 91].

Гравитационные волны

Очень давно в 1957 году на конференции в Чепел Хилле еще было возможно проводить серьезное обсуждение того, предсказывает ли теория Эйнштейна существование гравитационного излучения [DeWi 57]. Это недоумение возникло в значительной степени потому, что это довольно тонкая материя, как определить строго энергию, переносимую гравитационной волной, затруднение состоит в том, что гравитационная энергия не может быть выражена через интеграл локально измеряемой плотности.

На этой конференции в Чепел Хилле Фейнман направил этот вопрос в прагматическое русло, описывая, как антенна гравитационных волн могла бы быть в принципе сконструирована так, чтобы она

могла бы поглощать энергию, "переносимую" этой волной [DeWi 57, Feyn 57]. В лекции 16 он явным образом приводит к описанию варианта такого прибора, когда эти записки резко обрываются: "Следовательно, мы покажем, что они [гравитационные волны] могут на самом деле нагревать стену, так что нет вопроса относительно содержания энергии в гравитационных волнах". Вариант антенны Фейнмана был опубликован Бонди [Bond 57] вскоре после конференции в Чепел Хилле (заметим иронически, что когда-то Бонди высказывался скептически относительно реальности гравитационных волн), но Фейнман никогда ничего не публиковал на эту тему. Наилучшее оставшееся описание этой работы содержится в письме к Виктору Вайскопфу, написанному в феврале 1961 года [Feyn 61]. Это письмо содержит кое-что из того же материала, что и был изложен в лекции 16, но затем Фейнман продвигается несколько дальше и выводит формулу для мощности, излучаемой в квадрупольном приближении (этот результат также цитировался на конференции в Чепел Хилле). Затем это письмо описывает фейнмановский детектор гравитационных волн: это просто две бусинки, свободно скользящие (но с малым трением) по твердому стержню. Когда волны проходят через стержень, атомные силы оставляют длину стержня фиксированной, но соответствующее расстояние между двумя бусинками осциллирует. Таким образом, две бусинки трут стержень, выделяя в результате тепло. (Фейнман включил это письмо в Вайскопфу в материал, который он распространял среди студентов, слушающих его курс лекций).

Несмотря на то, что заключения Фейнмана могли казаться спорными некоторым участникам конференции в Чепел Хилле, эти выводы о гравитационных волнах едва ли были новыми. На самом деле, в классическом учебнике Ландау и Лифшица, который был написан на русском языке в 1939 году и появился в английском переводе в 1951 году [LaLi 51], имеется несколько разделов, посвященных теории гравитационных волн. Их изложение было ясным и правильным, однако было проведено в характерной сжатой манере. В письме к Вайскопфу Фейнман вспоминает конференцию 1957 года и комментирует ее: "Для меня было удивительным обнаружить, что целый день на конференции был посвящен этому вопросу и что "эксперты" были смущены. Это обсуждение возникло из поисков тензоров, сохраняющих энергию и т.д., вместо того, чтобы спрашивать о том, "могут ли эти волны производить работу?" "

На самом деле, несмотря на его глубокое почтение к Джону Уилеру, Фейнман испытывал в конце 50-х годов и начале 60-х нескрываемое презрение к сообществу специалистов по общей теории отно-

сительности. Это возможно наиболее резко выразилось в письме к его жене Гвенет, которое он написал с конференции в Варшаве в 1962 году [Feyn 88]:

Я ничего не получил на этой конференции. Я не узнал ничего нового. Поскольку в этой области нет экспериментов, эта область науки находится в неактивном состоянии, так что только очень немногие из лучших людей работают в ней. Результат состоит в том, что здесь имеется огромное количество дурмана и это сказывается неблагоприятным образом на моем артериальном давлении: такие бессмысленные вещи говорятся и серьезным образом обсуждаются, что я спорю с участниками вне формальных сессий (скажем, на ланче) всякий раз, когда кто-либо задает мне вопрос или начинает мне рассказывать о своей "работе". Эта "работа" всегда является: (1) полностью непонятной, (2) неясной и неопределенной, (3) кое-что правильно, что является ясным и самоочевидным, но что разрабатывается с помощью длинного и трудного анализа и представляется как важное открытие, или это (4) некоторая претензия, основанная на глупости автора, относительно некоторого очевидного и правильного факта, принятого и проверенного много лет назад; фактически, претензия, которая является неверной (это является хуже всего: никакие доводы не убедят глупца), (5) попытка сделать что-либо, вероятно, невозможна, но определено не имеет никакой пользы, и эта попытка, как в конце концов обнаруживается, приводит к провалу или (6) очевидным образом является неверной. В эти дни проводится огромная "деятельность в этой области", но эта деятельность главным образом состоит в демонстрации того, что предыдущая "деятельность" кого-то еще приводит к ошибке или не приводит ни к чему полезному или приводит к чему-то, что подает надежды. Это выглядит как множество червяков, пытающихся вылезти из бутылки, переползающих один через другого. Это не потому, что задача трудна, это потому, что лучшие люди занимаются другими вещами. Напомни мне о том, чтобы не ездить больше ни на какие конференции по гравитации!

Столь экстремальная оценка не могла бы быть полностью оправдана даже в 1962 году, и не кажется вероятным, что это письмо отражает истинные ощущения Фейнмана со 100-процентной точностью. Брайс Де Витт, который принимал участие в конференциях в Чапел Хилле и Варшаве, предложил такой комментарий:

Я могу определенным образом симпатизировать реакции Фейнмана к конференции в Варшаве, потому что у меня были подобные ощущения. (У меня жив в памяти выход там его

эмоций, которые выплеснулись в сторону Иваненко через самую изощренную брань, какую я только слышал). Но те, кто опубликовал его частное письмо без описания полной картины, наносят ущерб исторической правде. Хотя он и думал, что некоторая часть дискуссии на конференции в Чепел Хилл не имела смысла (как впрочем думал и я), я считаю, что у него там было достаточно много полезно проведенного времени. Я помню, что он был довольно заинтересован, когда я показывал ему, что его интеграл по траекториям в искривленном конфигурационном пространстве приводит к уравнению Шредингера со скалярным членом Риччи в нем. Специалисты, которые были на этой конференции (такие как Бонди, Хойл, Шиамма, Меллер, Розенфельд, Уилер), не являлись глухими и достаточно умно вели беседу с Фейнманом. (Я сам выбирал участников конференции – это была закрытая конференция). Определенно, что опыт Фейнмана его участия на конференции в Чепел Хилле должен был оказать какое-то влияние на его намерение принять приглашение для участия в конференции в Варшаве (эта конференция была открытой). Даже на конференции в Варшаве он и я проводили обсуждения вне формальных сессий, и я пытаюсь не верить тому, что он на самом деле определил меня в одну из шести категорий, упоминаемых в его письме.

Однако, эмоциональные комментарии Фейнмана, могли ли бы они иметь или не иметь место в 1962 году, должны были бы вскоре прекратиться. Начинаясь заря "золотой эры" исследований черных дыр.

Философия

Замечательной особенностью этих лекций является то, что Фейнман часто обращается к философским вопросам. (Он обычно высказывал презрение к философам науки и к слову "философский", которое он любил насмешливо произносить как "фило-ЗАВ-ский", тем не менее, он почитается, по крайней мере, физиками за свои философские рассуждения). Например, в разделе 1.4 он рассуждает о том, действительно ли необходимо применять квантовую механику к макроскопическим объектам. (Аргумент, который он кратко описывает там для того, чтобы поддержать требование того, что квантование гравитации в действительности необходимо, был представлен на конференции в Чепел Хилле в 1957 году, где это вызвало оживленную дискуссию). Другой пример – это его пристрастие к принципу Маха. Идея Маха, состоящая в том, что инерция возникает из взаимодействия тела с удаленными телами, порождает неясное сходство с интерпретацией электродинамики, предложенной Фейнманом и Уилером, когда Фей-

нман был студентом [WhFe 45, WhFe 49], состоящей в том, что сила реакции излучения, действующая на ускоряющийся заряд, возникает от взаимодействия с удаленными зарядами вместо того, чтобы возникать от взаимодействия с локальным электромагнитным полем. Так что не слишком удивительно, что в разделах 5.3 и 5.4 кажется, что Фейнман выражает симпатию ко взглядам Маха. Он нащупывает квантово-механическую формулировку принципа Маха в разделе 5.4 и вновь рассматривает принцип Маха в космологическом контексте в разделе 13.4. Нежелание Фейнмана в разделах 9.4 и 15.4 принять идею кривизны без источника вещества также отдает идеями Маха.

Философские размышления выходят на первый план в большом числе кратких отвлечений от основной темы. В разделе 8.3 Фейнман оценивает значение утверждений, что пространство является "в действительности" искривленным или плоским. В разделе 7.1 он объясняет, почему второй закон Ньютона не есть просто тавтология (а определение "силы"). Он делает несколько попыток обсуждения строгости построения теории в разделе 10.1 ("факты составляют существо дела, а не доказательства") и в разделе 13.3 ("нет такого способа показать математически, что физическое заключение является неверным или непоследовательным"). А в разделе 13.4 он подвергает сомнению то представление, что простота должна быть руководящим принципом в поиске истины о Природе: "... простейшее решение, намного превосходящее все остальные решения, было бы такое решение, где нет *ничего*, так что не было бы совсем ничего во вселенной. Природа много более изобретательна, чем такая картина, так что я отвергаю то, чтобы носиться с мыслью о том, что Природа всегда должна быть просто устроена."

Это также обнаруживается, когда Фейнман упрямо занимается обсуждением в разделах 2.3 и 2.4 бесперспективной идеи, состоящей в том, что гравитация вызвана обменом нейтрино. Это предметный урок того, как Фейнман понимает то, как ученый должен реагировать на появление нового экспериментального феномена: он должен всегда внимательно искать объяснение на языке известных принципов перед тем, как начать увлекаться рассуждениями о новых законах. Несмотря на это, в то же самое время Фейнман подчеркивает снова и снова важность сохранения скептицизма относительно принимаемых идей и сохранения мысли открытой для идей, которые "падают хлопьями". Квантовая механика может потерпеть неудачу (разделы 1.4 и 2.1), вселенная может быть неоднородной на больших масштабах (разделы 12.2 и 13.2), может оказаться, что верна модель стационарной вселенной (раздел 13.3), может быть оправдана интуиция Уилера

относительно кротовых нор (раздел 15.3) и т.д.

Однопетлевая квантовая гравитация

Исследования Фейнмана в области квантовой гравитации привели его в конце концов к конструктивному открытию (которое, тем не менее, не описано в этой книге, за исключением краткого упоминания в разделе 16.2). Это открытие состоит в том, что поле "духа" должно вводиться в ковариантную квантованную теорию для того, чтобы сохранить унитарность в однопетлевом порядке теории возмущений. Время этого открытия может быть установлено довольно точно. Фейнман докладывал этот результат в своем сообщении на конференции в Варшаве в июле 1962 года [Feyn 63b] и привел комментарий относительно того, что проблема унитарности в однопетлевом порядке была "полностью приведена в порядок только за неделю до того, как я приехал сюда". Таким образом, все эти результаты получены им до того, как он читал лекции по гравитации.

Вычисляя однопетлевые амплитуды с использованием наивных ковариантных правил, Фейнман обнаружил, что вклады состояний нефизической поляризации гравитона не удается полностью сократить, что приводит к нарушению унитарности. Некоторое время он был не в состоянии решить эту загадку. Затем Мюррей Гелл-Манн посоветовал Фейнману, чтобы тот попытался проанализировать простейший случай безмассового поля теории Янга – Миллса (Гелл-Манн напоминает, что он высказал это предложение в 1960 году [Gell 89].) Фейнман обнаружил, что он мог бы решить эту проблему в теории Янга – Миллса в однопетлевом приближении, и затем, что можно использовать этот метод для гравитации. В своем сообщении в Варшаве Фейнман докладывает, что он решил проблему унитарности в однопетлевом приближении, но теперь он вновь застрял и не знает как обобщить этот метод на случай двух и более петель. Тем не менее, он возражает: "Джентльмены, у меня была всего одна неделя". Однако он никогда не разрешил эту проблему.

Был интересный обмен мнениями во время, когда задавали вопросы по докладу Фейнмана в Варшаве [Feyn 63b],¹ и Брайс Де Витт давил на Фейнмана для выяснения больших деталей относительно того, каким образом унитарность достигается в однопетлевом порядке, а Фейнман сопротивлялся. Но Де Витт настаивал, и наконец Фейнман смягчился и предложил длинное объяснение, предварив его комментарием "Сейчас я покажу вам, что тоже могу написать уравнения, которые никто не сможет понять." Это было забавно, поскольку в конце концов именно Де Витт [DeWi 67a, DeWi 67b] (а также независимо Фаддеев и Попов [FaPo 67]) решили проблему обобщения ковариантного квантования теории Янга – Миллса и гравитации на произвольный петлевой порядок. Стоит заметить, что собственная техника Фейнмана интегрирования по траекториям оказала решающее значение для получения этой общей формулировки и что наиболее полные

¹Русский перевод этого доклада опубликован в журнале [Грав 96*]. (Прим. перев.)

результаты Де Витта и Фаддеева – Попова явным образом были вызваны построением Фейнмана для однопетлевого приближения.

Последние лекции Фейнмана по теории гравитации (которые не воспроизведены в этой книге) имеют отношение к петлевым поправкам в квантовой гравитации и теории Янга – Миллса. Он описывал результаты в однопетлевом приближении, которые докладывались в Варшаве, и его попытки обобщить эти результаты на более высокие порядки. По общему мнению эти лекции были переусложнены и трудны для того, чтобы следовать ходу их рассуждений, и иногда в лекциях очевидным образом ощущалось крушение планов. Мы предполагаем, что Фейнман испытывал замешательство от того, что проваливались его попытки найти удовлетворительную формулировку обобщения теории возмущений, поэтому он никогда не разрешал распространение записей этих лекций.

Фейнман написал детальный отчет о своих результатах только много позднее [Feyn 72] в двух статьях для тома в честь 60-летнего юбилея Джона Уилера. Эти статьи никогда не были бы написаны, если бы не было постоянного приставания одного из нас (К. Торна). По взаимному соглашению Торн звонил Фейнману домой раз в неделю в заранее условленное время для того, чтобы напомнить ему, что необходимо поработать над статьей для праздничного тома в честь Джона Уилера. Это продолжалось до тех пор, пока статьи не были полностью завершены. Было ясно, что Фейнман вернулся к квантовой гравитации только с некоторыми страданиями и сожалением.

Одна из целей Фейнмана состояла в том, чтобы навести порядок в вопросе о перенормируемости этой теории. На конференции в Варшаве он говорил, что он не уверен в том, что эта теория может быть перенормируема, но в разделе 16.2 он приводит более сильное утверждение: "Я полагаю, что эта теория не перенормируема." Даже это утверждение Фейнмана звучит сейчас для нас удивительно осторожно. В любом случае Фейнман всегда относился неохотно к тому, чтобы использовать перенормируемость в качестве критерия для оценки теории, и он открыто заявляет в разделе 16.2, что он не знает, является ли перенормируемость "действительно существенным возражением".

Заключение

Любая книга по гравитации, подготовленная более 30 лет тому назад, неизбежно сегодня оказывается устаревшей, по крайней мере, в некоторых аспектах. Ясно, что эта книга не является исключением. Более того, мы считаем, что эти лекции не оправдали бы собственных ожиданий Фейнмана даже в то время, в которое они читались.

У него была надежда, что чтение этого курса поможет привести его работу по квантовой гравитации к связному заключению, но этого не произошло. В конце академического года (1962 – 63) стало очевидным для студентов, что Фейнман чувствует себя обескураженным и расстроенным. Таким образом, в соответствии с собственными пожеланиями Фейнмана лекции (от 17 до 27), которые были нацелены на обсуждение вопросов квантовой гравитации, не включены в эту книгу.

Однако, мы думаем, что в этой книге, содержащей лекции 1 – 16, много того, что будет оценено по достоинству физиками, студентами, историками и почитателями Фейнмана. Более того, эти лекции очень веселы. Многие отрывки предлагают мимолетный взгляд великого ума, обладающего большой глубиной обсуждения проблемы, и бросающие вызов вопросы, возникающие из рассмотрения проблемы в истинном свете. Фейнман размышлял долго и напряженно в течении нескольких лет, однако по этому вопросу он публиковал крайне мало. Это умные лекции и обладают характерной (для творчества Фейнмана) ясностью, и эти лекции являются содержательным добавлением к его уже опубликованному наследию, появление которых можно было бы приветствовать.

Мы благодарны Джиму Бардину, Стенли Дезеру, Брайсу Де Витту, Уилли Фаулеру, Стиву Фраутчи, Джуди Гудстейн, Джиму Хартлю, Ико Ибену, Бобу Крайчману, Чарльзу Мизнеру, Фернандо Мориниго, Джиму Пиблсу, Аллану Сендеджу и Биллу Вагнеру за ценную помощь, которая была использована при подготовке этого предисловия.

КАЛТЕХ, май 1995 года

Джон Прескилл и Кип С. Торн

Квантовая гравитация

Фейнман читал свои лекции по гравитации в КАЛТЕХ'е в 1962 – 63 годах, в конце того периода, на который он часто ссылался как на его "фазу гравитации". Основной мотивировкой для проведения исследований по гравитации в то время был его интерес к квантовой гравитации. Он говорил мне в 1980 году, что он думал в 50-х годах, что следствия квантовой гравитации могли быть тем "куском торта", который стоил того, чтобы над ним поработать. В конце концов, гравитация на самом деле *слаба*. После грандиозного успеха пертурбативной Квантовой Электродинамики, он рассчитывал, что нет особой нужды разрабатывать что-либо, что находится за пределами первого порядка теории возмущений. Конечно, он ожидал, что могли бы быть трудности при определении согласованной квантовой теории (например, величина гравитационной константы является препятствием для перенормировки). Тем не менее, его идея заключалась *не* в том, чтобы попытаться построить полную и согласованную теорию квантования и затем получить результаты, а вместо этого двигаться в другом направлении. Суть состоит в том, чтобы вычислить пертурбативные амплитуды для определенных процессов, таких как комптоновское рассеяние гравитоном, а затем биться над любыми интересными трудностями, которые могут возникать одна за другой. По определению "интересные" трудности могут быть новыми и необычными проблемами, связанными с гравитацией, которые не возникали ранее в квантовой теории поля. Таким образом, первоначально Фейнман игнорировал ультрафиолетовые расходимости и вопросы перенормировки и только позже напряженно размышлял над этими проблемами. В конце концов, отсутствие формулировки перенормируемости привело к отказу от пертурбативной квантовой теории. Но характерно, что "план атаки" Фейнмана привел его к важному открытию в теории поля, а именно к необходимости введения ковариантных духов для того, чтобы сохранить унитарность в однопетлевом приближении (см. обсуждение этого вопроса во введении, написанном Прескиллом и Торном).

Эти лекции появились более 30 лет назад. Мы можем посмотреть на некоторые аспекты анализа Фейнмана вопросов квантовой гравитации и взглянуть в тех направлениях, в которых были проведены исследования.

Связь геометрии и квантовой теории поля

Стандартный и исторический подход к классической гравитации со-

У него была надежда, что чтение этого курса поможет привести его работу по квантовой гравитации к связному заключению, но этого не произошло. В конце академического года (1962 – 63) стало очевидным для студентов, что Фейнман чувствует себя обескураженным и расстроенным. Таким образом, в соответствии с собственными пожеланиями Фейнмана лекции (от 17 до 27), которые были нацелены на обсуждение вопросов квантовой гравитации, не включены в эту книгу.

Однако, мы думаем, что в этой книге, содержащей лекции 1 – 16, много того, что будет оценено по достоинству физиками, студентами, историками и почитателями Фейнмана. Более того, эти лекции очень веселы. Многие отрывки предлагают мимолетный взгляд великого ума, обладающего большой глубиной обсуждения проблемы, и бросающие вызов вопросы, возникающие из рассмотрения проблемы в истинном свете. Фейнман размышлял долго и напряженно в течении нескольких лет, однако по этому вопросу он публиковал крайне мало. Это умные лекции и обладают характерной (для творчества Фейнмана) ясностью, и эти лекции являются содержательным добавлением к его уже опубликованному наследию, появление которых можно было бы приветствовать.

Мы благодарны Джиму Бардину, Стенли Дезеру, Брайсу Де Витту, Уилли Фаулеру, Стиву Фраутчи, Джуди Гудстейн, Джиму Хартлю, Ико Ибену, Бобу Крайчману, Чарльзу Мизнеру, Фернандо Мориниго, Джиму Пиблсу, Аллану Сендеджу и Биллу Вагнеру за ценную помощь, которая была использована при подготовке этого предисловия.

КАЛТЕХ, май 1995 года

Джон Прескилл и Кип С. Торн

Квантовая гравитация

Фейнман читал свои лекции по гравитации в КАЛТЕХ'е в 1962 – 63 годах, в конце того периода, на который он часто ссылался как на его "фазу гравитации". Основной мотивировкой для проведения исследований по гравитации в то время был его интерес к квантовой гравитации. Он говорил мне в 1980 году, что он думал в 50-х годах, что следствия квантовой гравитации могли быть тем "куском торта", который стоил того, чтобы над ним поработать. В конце концов, гравитация на самом деле *слаба*. После грандиозного успеха пертурбативной Квантовой Электродинамики, он рассчитывал, что нет особой нужды разрабатывать что-либо, что находится за пределами первого порядка теории возмущений. Конечно, он ожидал, что могли бы быть трудности при определении согласованной квантовой теории (например, величина гравитационной константы является препятствием для перенормировки). Тем не менее, его идея заключалась *не* в том, чтобы попытаться построить полную и согласованную теорию квантования и затем получить результаты, а вместо этого двигаться в другом направлении. Суть состоит в том, чтобы вычислить пертурбативные амплитуды для определенных процессов, таких как комптоновское рассеяние гравитоном, а затем биться над любыми интересными трудностями, которые могут возникать одна за другой. По определению "интересные" трудности могут быть новыми и необычными проблемами, связанными с гравитацией, которые не возникали ранее в квантовой теории поля. Таким образом, первоначально Фейнман игнорировал ультрафиолетовые расходимости и вопросы перенормировки и только позже напряженно размышлял над этими проблемами. В конце концов, отсутствие формулировки перенормируемости привело к отказу от пертурбативной квантовой теории. Но характерно, что "план атаки" Фейнмана привел его к важному открытию в теории поля, а именно к необходимости введения ковариантных духов для того, чтобы сохранить унитарность в однопетлевом приближении (см. обсуждение этого вопроса во введении, написанном Прескиллом и Торном).

Эти лекции появились более 30 лет назад. Мы можем посмотреть на некоторые аспекты анализа Фейнмана вопросов квантовой гравитации и взглянуть в тех направлениях, в которых были проведены исследования.

Связь геометрии и квантовой теории поля

Стандартный и исторический подход к классической гравитации со-

стоит в том, чтобы начать с рассмотрения принципа эквивалентности и развивать в дальнейшем геометрическую точку зрения. Фейнман гордился тем, что он редко следовал стандартному подходу. В углу доски в своем служебном кабинете он написал "Что я не могу создать, я не понимаю." Это выражение фактически оставалось нетронутым в углу этой доски в течении более 7 лет. Я впервые увидел его в конце 1980 года, и оно все еще оставалось там в феврале 1988 года (см. [Feyn 89]). Таким образом, не удивительно, что Фейнман воссоздает общую теорию относительности, исходя не с геометрической точки зрения. Практическая сторона такого подхода состоит в том, что не стоит с самого начала изучать некоторые выкрутасы ("fancy-schmanzy", как он любил называть это) дифференциальной геометрии для того, чтобы выучить физику гравитации. (На самом деле, существует *только* необходимость изучить некоторые аспекты квантовой теории поля). Тем не менее, когда конечной целью стала проблема квантования гравитации, Фейнман почувствовал, что геометрическая интерпретация как раз и находится у него на пути. С точки зрения теории поля можно было бы действительно избежать определения таких вещей, как физическое значение квантовой геометрии, флуктуирующая топология, пространственно-временная пена и т.д., а вместо этого посмотреть геометрическое понимание после квантования. (См., например, вопрос Сакса и ответ Фейнмана в работе [Feyn 63b]). Фейнман определенно чувствовал, что геометрическая интерпретация является "удивительной" (раздел 8.4), но тот факт, что безмассовое поле спина 2 может интерпретироваться как метрика, было просто "совпадением", которое "может быть понято как представление некоторого вида калибровочной инвариантности".

Сейчас у нас есть геометрическая интерпретация классических калибровочных теорий, таких как электродинамика и теория Янга – Миллса (см., например, [Yang 77]). Векторные потенциалы A_μ^a являются коэффициентами связности на главном расслоенном пространстве, где структурная группа есть калибровочная группа ($U(1)$ для электромагнетизма, $SU(2)$ для полей Янга – Миллса и $SU(3)$ для классической хромодинамики). Напряженности поля $F_{\mu\nu}$ (т.е. электрические и магнитные поля в электродинамике) являются компонентами кривизны, ассоциированными со связностями (потенциалами). Заряженное вещество, которое поле связывает, ассоциируется с векторным расслоением (см., например, [DrMa 77]). Отсюда следует, что интуитивная догадка Фейнмана о связи между геометрией и калибровочной инвариантностью оказывается правильной. С точки зрения фейнмановского интеграла по траекториям, квантовая элек-

тродинамика и квантовая хромодинамика равнозначно интегралам по пространству связностей на главном расслоенном пространстве. В то время, как может быть показано, что геометрическая интерпретация калибровочных полей не помогает решить проблемы квантовой электродинамики (КЭД) или квантовой хромодинамики (КХД) (т.е. адекватным образом вычислить или оценить эти интегралы), это несомненно приводит ко многим полезным интуитивным догадкам о топологических аспектах этих теорий (например, неоднозначность Гривова, инстантоны, вакуумный угол и топологически неэквивалентные вакуумы) и к построению новых калибровочных теорий типа Янга – Миллса с топологическими массами.

Спин гравитона и антигравитация

Выгодность теоретико-полевого развития теории гравитации состоит в том, что то, что (находящийся в оболочке) гравитон является безмассовым и имеет спин 2, получается непосредственно без того, чтобы начинать с полностью согласованной, полностью ковариантной теории, т.е. без привлечения Принципа Общей Ковариантности. Это выглядит как построение теории гравитации снизу вверх, вместо того, чтобы строить сверху вниз, используя полный геометрический аппарат. Развитие теории начинается в разделе 2.3 лекций и продолжается в разделах 3.1 – 3.4. Краткое изложение этого аргумента состоит в следующем.

В квантовой теории поля точечных частиц сила между двумя частицами передается путем обмена виртуальными (или безоболочечными) частицами. С каждой силой ассоциируется заряд. Заряженные частицы чувствуют силу путем связи или взаимодействия с частицами, которые переносят эту силу. Наиболее привычным примером является электродинамика. Частицы, которые чувствуют силу, переносят электрический заряд. Электромагнитная сила передается путем обмена фотонами со спином 1. Сами фотоны незаряжены и, следовательно, напрямую не взаимодействуют друг с другом. Получившиеся в результате полевые уравнения являются линейными. В КХД, теории сильного взаимодействия, построенной из калибровочной теории Янга – Миллса (сильное взаимодействие ответственно за сдерживание вместе нуклонов и, таким образом, за существование атомных ядер), этот заряд называется цветом. Фундаментальные частицы, которые чувствуют сильное взаимодействие, являются цветными кварками, а частицы, которые переносят силу, называются глюонами. Сами глюоны являются частицами с цветовым зарядом, отсюда следует, что в отличие от фотона, они могут напрямую взаимодействовать друг с другом, и результирующие полевые уравнения

являются нелинейными. Заряд, связанный с гравитацией, есть масса, которая, как мы полагаем, исходя из специальной теории относительности, должна быть эквивалентна энергии. Так как мы знаем почти все, что имеет энергию, то гравитация должна взаимодействовать со всем. Частица, которая переносит гравитационную силу, называется гравитоном. Так как гравитон имеет энергию, гравитоны должны непосредственно взаимодействовать друг с другом.

Если теория поля используется для описания гравитации, тогда эта теория должна воспроизводить Закон Всемирного Тяготения Ньютона в соответствующем статическом нерелятивистском пределе, т.е. мы должны вновь получить

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (K.1)$$

путем обмена гравитоном между частицами 1 и 2, разделенными расстоянием r в соответствующем пределе. Как хорошо известно, гравитационная сила – дальнодействующая (сила пропорциональна $1/r^2$, а потенциал пропорционален $1/r$), отсюда следует, что находящийся в оболочке или свободный изолированный гравитон должен быть безмассовым, точно также, как и для случая фотона. Однако, в отличие от случая электромагнетизма, одинаковые заряды в гравитации притягиваются.

Для того, что воспроизвести *статическую* силу, а не просто рассеяние, излучение или поглощение одиночного гравитона другой частицей должно оставлять обе частицы в одном и том же внутреннем состоянии. Это исключает возможность того, что гравитон переносит полуцелый спин (например, связанный с тем фактом, что он имеет вращение на угол 720° для того, чтобы возвратиться себе назад волновую функцию спина $1/2$). Следовательно, гравитон должен иметь целый спин. Далее, для того, чтобы решить, какие значения целого спина оказываются возможными, мы разберем два случая, когда частица 2 является идентичной частице 1 и когда частица 2 является античастицей частицы 1, так что будучи заряженными, эти частицы переносят одинаковый и противоположные заряды соответственно. Когда вычисляется потенциал для обоих случаев и взяты соответствующие пределы, мы находим, что когда частица, с помощью которой переносится взаимодействие, переносит целый нечетный спин, похожие заряды отталкиваются и противоположные заряды притягиваются, точно также, как в случае электродинамики. С другой стороны, когда частица, с помощью которой переносится взаимодействие, переносит четный целый спин, то потенциал определяет универсальным образом притяжение (похожие заряды и противополож-

ные заряды притягиваются). Отсюда следует, что спин гравитона должен быть равным 0, 2, 4,...

Для того, чтобы исключить возможность спина 0, мы замечаем, что эксперимент Этвеша и его недавние усовершенствования эмпирически показывают, что гравитация действительно взаимодействует с содержащейся в объектах энергией, отсюда следует, что на такие объекты, как фотоны, действует гравитация, например, они должны "падать" в гравитационном поле. Если мы предполагаем, что частица, которая переносит взаимодействие, имеет спин 0, тогда мы теряем взаимодействие гравитации с фотоном со спином 1. Так как мы знаем, что фотон отклоняется массивным объектом, например Солнцем, то гравитон не может иметь спин 0.

На качественном языке теории поля функции Грина для распространения частицы, с помощью которой передается взаимодействие от частицы 1 к частице 2 в импульсном пространстве, есть

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\sim 1/k^2, & \text{скалярное поле,} \\ \Delta_1 &\sim \eta_{\mu\nu}/k^2, & \text{векторное поле,} \\ \Delta_2 &\sim \eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}/k^2, & \text{тензорное поле,}\end{aligned}\tag{K.2}$$

где k^2 есть квадрат 4-импульса, переносимого виртуальной частицей, осуществляющей перенос взаимодействия, и $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика плоского пространства Минковского. Скалярное поле представляет спин 0, векторное поле спин 1 и соответствующим образом спроектированное тензорное поле представляет спин 2. Для вычисления амплитуды для обмена мы помещаем пропагаторы Δ между тензорами $T^{\mu\nu}(1)$ и $T^{\alpha\beta}(2)$ для двух частиц. При обмене частицей со спином 0 пропагатор Δ_0 не содержит никаких множителей $\eta_{\mu\nu}$ в числителе для того, чтобы свернуть индексы $T^{\mu\nu}(1)$ с индексами $T^{\alpha\beta}(2)$, отсюда следует, что мы должны сами свернуть индексы отдельно у этих тензоров энергии-импульса. Таким образом, при обмене частицей со спином 0 амплитуда пропорциональна величине

$$T^\mu{}_\mu(1)(1/k^2)T^\alpha{}_\alpha(2).\tag{K.3}$$

Другими словами, гравитон со спином 0 взаимодействует только со следом тензора энергии-импульса. Тем не менее, тензор энергии-импульса для электромагнитного поля в пространстве Минковского является бесследовым, отсюда следует, что скалярные гравитационные поля не связывают гравитацию со светом, так что гравитон не может быть частицей спина 0.

Так как гравитон не является бесспиновой частицей, то следующей возможностью является спин, равный 2. Классическим путем

не найдено ничего такого, что позволило бы нам исключить случай спина, равный 2, так что привлекая правило "если это работает, не ремонтируй это", возможностями существования более высоких значений спина пренебрегаем. Тем не менее, несмотря на это мы еще не совсем закончили (наше рассуждение). Общее тензорное поле содержит части, которые мы все еще хотим исключить. Например, антисимметричная часть ведет себя как взаимодействие полей со спином 1 (напомним, что напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ являются антисимметричными) и, следовательно, должна быть отброшена. Таким образом, остается симметричное тензорное поле.

В качестве резюме скажем, что гравитон безмассовый, поскольку гравитация является дальнедействующей силой, и он обладает спином 2 для того, чтобы он мог взаимодействовать с содержащейся в веществе энергией путем универсального взаимодействия.

В разделе 1.2 Фейнман кратко обсуждает поведение гравитации и антивещества, популярно называемого "антигравитацией". Был только один эксперимент, представляющий собой попытку непосредственно измерить поведение гравитации и антивещества для случая, когда частица и античастица не являются идентичными. Этот эксперимент, проводился В. Файербенком и Ф. Виттерборном [WiFa 67, FWWL 74], и очевидно был инициирован комментарием Де Витта на конференции в Чепел Хилле в 1957 году (см. Предисловие, [DeWi 57]), где Файербенк принимал участие (см. также [NiGo 91], где также обсуждается этот вопрос), и это превосходный пример тех трудностей, с которыми сталкиваются в экспериментальной гравитационной физике. В разделе 1.2 Фейнман упоминает два из аргументов против антигравитации, основанные на обсуждении распада каона [Good 61] и на поляризации вакуума в КЭД [Schi 58, Schi 59]. Если бы пертурбативная программа проквантовать гравитацию (программа, которая представлялась Фейнманом в этих лекциях) принесла бы согласованную теорию, тогда этот вопрос был бы приведен в порядок, и здесь антигравитации бы не было. Так как пертурбативная теория квантовой гравитации исходит из пространства Минковского, то мы могли бы ожидать, что СРТ - теорема оказывается справедливой во всех порядках и, следовательно, частица и античастица должны были бы иметь одну и ту же массу. К тому же, свойства гравитона, обсуждаемые выше, должны были бы не меняться, что привело бы к универсальности силы притяжения, включая антивещество.

К сожалению, пертурбативная теория не является согласованной теорией, и огромное количество творческой энергии было затрачено в целях поиска согласованной квантовой гравитации. Хотя мы ожи-

даем, что при низкой энергии, больших расстояниях, предел слабого поля квантовой гравитации был бы общей теорией относительности [Wein 64a, Wein 64b], Природа может потребовать для непротиворечивости гравитационных различий между веществом и антивеществом на очень маленьких расстояниях. Такие эффекты легко могут быть меньше, чем доступные в настоящее время экспериментальные пределы, и оставляют стороне аргументы против антигравитации, но это не значит, что мы когда-нибудь увидим что-либо "падающим вверх".

Калибровочная инвариантность и принцип эквивалентности

Другой выгодой использования теоретико-полевого подхода к теории гравитации является то, что мы приходим к Принципу Эквивалентности, фундаментальному принципу, лежащему в основании общей теории относительности, как к следствию калибровочной инвариантности. Так как мы строим теорию гравитации снизу вверх эта калибровочная инвариантность входит в теорию казалось бы безобидным образом.

Свободный гравитон является безмассовым и движется со скоростью света, так что мы никогда не сможем найти систему отсчета, в которой бы он находился в покое. Следовательно, существует инвариантное понятие проектирования его спина на направление движения и направление, противоположное движению. Безмассовый гравитон должен появиться с двумя поляризациями или с двумя спиральностями и не более. В общем случае, поле симметричного тензора будет иметь более двух *динамических* степеней свободы. Следовательно, поле ранга 2 только с двумя степенями свободы *не есть* тензорное поле, и у нас появляется опасность потери Лоренц-инвариантности. Эта ситуация аналогична той, которая имеет место в электродинамике. Выход из этой дилеммы состоит в том, чтобы включить в теорию калибровочную инвариантность. Отсюда следует, что когда мы строим действие в пространстве Минковского для того, чтобы описать безмассовые гравитоны со спином 2, то мы будем должны ввести калибровочную симметрию для того, чтобы уменьшить число динамических степеней свободы до 2. Если мы не делаем этого, то квантовая теория не будет Лоренц-инвариантной. Действие, которое содержит необходимую калибровочную симметрию и в котором имеются до второй производной поля, есть действие Фирца – Паули [FIPA 39]. Этого оказывается достаточным для того, чтобы начать и продолжить построение общей теории относительности (см. краткое резюме во Введении). В конце концов, мы получаем Принцип Эквивалентности как результат калибровочной инвариантности.

Калибровочная симметрия возникает с самого начала для того, чтобы квантовая теория свободного безмассового гравитона со спином 2 была *лоренцевым* инвариантом.

Сражение с бесконечностями

Не являлось секретом то, что объединение гравитации и квантовой механики должно быть сопряжено с огромными усилиями. Когда поле квантуется, каждая мода поля обладает энергией нулевой точки. Так как поле формируется бесконечным числом мод, вакуумная энергия квантового поля является бесконечной. От этой бесконечности легко отделаться нормальным упорядочиванием полевых операторов. Оправдание этому в том, что мы просто переопределяем нулевую точку масштаба энергии, который прежде всего является произвольным. Тем не менее, так как гравитация взаимодействует со всей энергией, то когда мы добавляем гравитацию, то мы не можем больше уйти от этого. Вакуумные флуктуации квантованных полей действительно порождают физические эффекты, так что даже если мы обрезаем некоторое количество мод, плотность энергии вакуума от энергии нулевых точек оставшихся мод может быть очень большой. Такая плотность вакуумной энергии будет появляться в теории гравитации как космологическая постоянная. Так как космологическая постоянная очень мала, то это составляет большую проблему [Wein 89].

Далее, константа гравитационного взаимодействия в единицах, где $\hbar = c = 1$, имеет размерность (энергия)⁻². Теории, где константа взаимодействия имеет положительное значение, часто оказываются конечными, в то время как те теории, в которых константа является неопределенной величины, являются кандидатами на то, чтобы быть перенормируемыми. Теории с отрицательными значениями этих констант обычно имеют расходимости по всем местам, где требуется бесконечное число параметров для того, чтобы устранить все расходимости, и, следовательно, эти теории являются перенормируемыми. Квантовая общая теория относительности попадает в эту последнюю категорию.

В процессе перенормировки, контрчлены порождаются для того, что сократить высокоэнергетические или ультрарелятивистские расходимости, которые встречаются в отдельных членах теории возмущений. Когда процесс перенормировки является успешным, контрчлены приводят к построению конечного эффективного действия, что может мыслиться как классическая полевая теория, которая содержит все квантовые эффекты (см., например, [Hatf 92]). Возможные контрчлены согласуются с симметриями исходного "обнаженного"

действия. Другими словами, внутренние симметрии сильно ограничивают типы контрчленов, которые могут породиться и, следовательно, число соответствующих расхождений. Таким образом, теории с большей симметрией, как правило, обладают лучшей сходимостью.

Имеется чрезвычайно много возможных контрчленов, которые согласуются с известными симметриями для пертурбативной квантовой гравитации, например, члены пропорциональные R^2 , $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, R^3 и т.д. Лишь только была обнаружена необходимость введения ковариантных духов и стали известны ковариантные правила для вычисления членов теории возмущений до произвольного порядка ([DeWi 67a, DeWi 67b], [FaPo 67]), стало очевидным, что в полной мере будет иметь место закон Мерфи для квантовой теории поля (если нет симметрии для того, чтобы "убить" контрчлен, тогда будет иметь место расходимость), и теория наиболее вероятно будет неперенормируема. Проблеск надежды на таком пути появился, когда было показано, что чистая квантовая гравитация в однопетлевом приближении (первая квантовая поправка) является *конечной* [tHVe 74], [Kore 74]. Контрчлены для плотности лагранжиана есть

$$\mathcal{L}^{(1)} = \sqrt{g} \left[\frac{1}{120} R^2 + \frac{7}{20} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right], \quad (\text{K.4})$$

На классическом уровне эти контрчлены обращаются в нуль для чистой гравитации, так как тогда мы имеем $R = 0$ и $R_{\mu\nu} = 0$. Тем не менее, нет основания для того, чтобы чистая однопетлевая квантовая гравитация являлась бы конечной. Основание для того, чтобы теория являлась бы конечной, состоит в том, что $\mathcal{L}^{(1)}$ может исчезать в однопетлевом приближении при переопределении метрики, отсюда следует, что ее эффекты не являются физически наблюдаемыми. Напомним, что для чистой гравитации вариационный принцип

$$\frac{\delta \mathcal{L}^{(0)}}{\delta g_{\mu\nu}} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}, \quad (\text{K.5})$$

который, используя Принцип Наименьшего Действия, порождает классические полевые уравнения для чистой гравитации. Если мы переопределим метрику следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g_{\mu\nu} \propto \frac{7}{20} R_{\mu\nu} - \frac{11}{60} R g_{\mu\nu}, \quad (\text{K.6})$$

тогда

$$\mathcal{L}^{(0)}(g) + \mathcal{L}^{(1)}(g) = \mathcal{L}^{(0)}(g') + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{K.7})$$

где $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ – двупетлевые процессы, отсюда следует, что однопетлевая теория является конечной. Когда материальные поля взаимодействуют с гравитацией, однопетлевая теория не является более конечной, даже на классическом уровне.

Надежда состояла в том, что имелся некоторый вид скрытой симметрии, что делало результат в однопетлевом приближении конечным, и что эта симметрия сможет представить чисто гравитационный сектор конечной теории. Тем не менее, компьютерное вычисление двупетлевых поправок дало расходящийся результат [GoSa 86], разрушающий эту надежду. Недавние обзоры по ультрафиолетовым расходимостям можно найти в работах [Wein 79] и [Alva 89].

Единственный способ получить улучшенное поведение теории в ультрафиолетовой области состоит в том, чтобы иметь больше симметрии, встроенной в теорию. Таким образом, обобщения или модификации общей теории относительности для того, чтобы улучшить квантовое поведение теории, основываются главным образом на дополнительных симметриях. Один из популярных подходов называется "супергравитацией" (см., например, [vanN 81]). Этот подход основан на симметрии между бозонными и фермионными полями и называется "суперсимметрией". Когда суперсимметричная теория калибруется таким образом, что эта суперсимметрия становится локальной (различные преобразования суперсимметрии разрешаются в каждой точке пространства-времени), калибровочная инвариантность с необходимостью включает в себя Принцип Общей Ковариантности и, следовательно, гравитацию. По существу, каждое бозонное поле имеет суперсимметричного фермионного партнера и обратно. Ультрафиолетовое поведение теории улучшается, поскольку часто обычный расходящийся бозонный (фермионный) вклад от петель сокращается фермионным (бозонным) вкладом суперпартнера. Другими словами, суперсимметрия строго ограничивает типы контрчленов, которые могут быть порождены. К сожалению, когда размерность пространства-времени равна 4, имеются еще потенциальные контрчлены (начиная с семи петель в наилучшем случае). В то же самое время никто не знает наверняка какого-либо рода дополнительную или скрытую симметрию или какое-либо волшебство, возникающее для того, чтобы сделать теорию конечной.

В настоящее время наиболее многообещающим кандидатом теории квантовой гравитации является струнная теория. Струнная теория есть квантовая теория, в которой составной частью являются одномерные протяженные объекты (как противопоставление точечным частицам в обычной квантовой теории поля), см., например, [GSW 87], [Haf 92]). Если струнная теория используется для того, чтобы унифицировать все фундаментальные силы (т.е. это "теория всего"), тогда основная идея состоит в том, что вещество делается из очень маленьких струн, чей размер порядка длины Планка. На

обычных энергетических масштабах такие струны будут неразрешимы и неотличимы от точек. Унификация достигается в том, что все частицы, которые мы находим, являются только возбуждениями одной и той же струны. Одна мода осцилляций струны является безмассовой со спином, равным 2, и может идентифицироваться как гравитон, отсюда следует, что струнная теория с необходимостью содержит квантовую гравитацию. Такое возбуждение в струнной теории проистекает из открытия того, что существуют пертурбативные решения, которые математически самосогласованы или свободны от аномалий, и оказываются *конечными* порядок за порядком в рядах теории возмущений.

Интуитивно улучшенное ультрафиолетовое поведение струнной теории возникает потому, что струнная теория включает в себя гигантскую симметрию (модулярную инвариантность). Теория струн модифицирует гравитацию точечной частицы на малом расстоянии путем обмена состояниями массивной струны, что подобно тому, как теория электрослабого взаимодействия улучшает ультрарелятивистское поведение старой 4-фермионной теории слабого взаимодействия путем замены 4-фермионной вершины с заменой массивных калибровочных бозонов $W^\pm$ и Z^0 . Константа связи в старой теории Ферми обладает отрицательной величиной массы, и эта теория неперенормируема. Калибровочная теория электрослабого взаимодействия заменяет эту связь безразмерными константами связи, связанными с обменом бозоном, и теория становится перенормируемой. Струнная теория также вводит новую константу связи, натяжение струны T , которое в обычных единицах эквивалентно обратному квадрату длины $L = \sqrt{\hbar/\pi T}$. Напомним, что единственный масштаб длины, который может быть построен с помощью гравитационной постоянной G , $\hbar$ и скоростью света c , это планковский масштаб $L_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$. Естественный выбор единиц для струны делает скорость света и натяжение струны безразмерными, $c = 1$ и $T = 1/\pi$. В этих единицах (исключая $\hbar$ из приведенных выше выражений для L и L_p), гравитационная константа будет безразмерной, $G = (L_p/L)^2$.

Одним любопытным свойством теории струн, которое сильно отличает ее от теории точечных частиц, состоит в том, что размерность пространства-времени не является внутренним свойством самой теории. На самом деле, размерность пространства-времени есть свойство частного решения. Свободные от аномалий решения при $N=1$ мировом листе суперсимметрии могут быть найдены при размерности пространства-времени D меньшей или равной, чем так называемая критическая размерность D_c , которая равна быть может 10.

К сожалению, в то время как отдельные члены в рядах теории возмущений являются конечными, сумма ряда расходится [GrPe 88]. И в то время, как теория струн является вероятно единственной в своем роде, решения этой теории определенно не являются такими. Не существует пертурбативного механизма для того, чтобы выбрать частное решение или выбрать правильный вакуум. В этом смысле, пертурбативная формулировка теории струн теряет свою предсказательную силу. Подобно этому, мир не является суперсимметричным при обычных значениях энергии. Нет такого пертурбативного механизма, чтобы выбрать решения, которые бы допускали несуперсимметричные низкоэнергетичные спектры.

Непертурбативная гравитация

В настоящее время оказывается, что нет согласованной и конечной пертурбативной формулировки квантовой гравитации. При определении пертурбативного разложения в общем случае мы должны сделать выбор, какая фоновая метрика на пространственно-временном многообразии будет выбираться для того, чтобы, используя эту метрику, начать развивать теорию возмущений. При непертурбативной формулировке квантовой гравитации все аспекты пространства-времени должны были бы определяться из решений этой теории. Например, предполагается, что в теории струн движение струн через пространство-время определяет то, какова есть метрика пространства-времени. Отсюда следует, что можно было бы предпочесть, чтобы метрика пространства-времени не появлялась бы при формулировке теории. На этом основании и для того, чтобы обойти проблемы, упомянутые выше, в настоящее время проводятся поиски непертурбативной формулировки теории струн.

При отсутствии надежд, связанных с пертурбативной квантовой гравитацией, вновь возник интерес к определению того, имеет ли смысл непертурбативная квантовая гравитация, основанная на общей теории относительности. Возможно несогласованности вводятся пертурбативной формулировкой. Канонический подход к квантовой общей теории относительности с использованием уравнение Уилера – Де Витта и канонических переменных зашел в тупик, что обусловлено сложностью уравнений, которые должны быть решены. Недавно, однако, переформулировка общей теории относительности на языке новых переменных [Asht 86, Asht 87] привела к новому петлевому представлению квантовой общей теории относительности [JaSm 88], [RoSm 88], где уравнения много проще для решения, и некоторое продвижение вперед было достигнуто. Эти новые переменные имеют прямую родственную связь между общей теорией относительности и

теорией Янга – Миллса, что возможно может быть использовано.

Последнее замечание: Фейнман и индексы

Фейнман однажды говорил мне, что постановка знаков минус, множителей i , 2 и π правильным образом является чем-то таким, о чем стоит беспокоиться только тогда, когда настанет время опубликования результата. Видимо, правила для индексов и общепринятые стандартные соглашения также попадают в эту категорию. От начала до конца в первых шести лекциях, фактически *каждый* индекс опускается (см. также [Feyn 63b]). Тем самым производятся необычные обозначения такие, что $x_\mu = (t, z, y, x)$ и $x^\mu = (t, -z, -y, -x)$. Игнорирование правила индексов не будет допустимо, когда пространство-время не является более плоским. Я отрегулировал использование индексов таким образом, чтобы стандартные правила индексов выполнялись, и использовал практически стандартный символ $\eta_{\mu\nu}$ для метрики Минковского (Фейнман использовал $\delta_{\mu\nu}$).

В Пасадине у Фейнмана был фургон, на боках которого и сзади были нарисованы фейнмановские диаграммы. Изображение этого фургона приведено в книге [Syke 94]. Когда я впервые увидел этот фургон в 1981 году на стоянке вблизи Аудитории Бекмана в КАЛТЕХ'е, я не знал, что он принадлежит Фейнману. Потребовалось всего несколько секунд, чтобы понять, что этот фургон принадлежал Фейнману потому, что (1) номерной знак содержал неправильно написанное слово QUANTUM, которое было написано как "QANTUM",¹ и (2) диаграмма на задней стороне фургона, единственная диаграмма с обозначениями, имела все индексы в нижнем положении. Фейнман утверждал, что КЭД уже имеет свой номерной знак и что слово QUANTUM является слишком длинным. (С другой стороны, я помню, что Фейнман довольно часто писал слово "gauge" ("калибровка") как "guage"). На этой диаграмме величина $\eta_{\mu\nu}$ была пропущена у пропагатора для фотона, отсюда следует, что гамма-матрицы, связанные с вершинами, должны были размечаться с одним индексом сверху и одним индексом внизу. Заглянув в одно из окон фургона и увидев там сзади кипу сена, мое подозрение, что этот фургон принадлежит Фейнману, подтвердилось.

Брайен Хатфилд

¹Занятно было бы заметить, что если перевести эту историю на русский язык, то у Фейнмана на номерном знаке вместо слова "КВАНТ" было написано слово "КАНТ", хотя, конечно, всем известно, что фамилия этого крупнейшего философа на немецком (и английском) языке пишется иначе. (Прим. перев.)

Лекция 1

1.1. Полевое приближение гравитации

В этой серии лекций обсудим гравитацию во всех ее аспектах. Фундаментальный закон гравитации, открытый Ньютоном, утверждает, что гравитационные силы пропорциональны гравитирующим массам и обратно пропорциональны квадратам расстояний. Этот закон впоследствии был модифицирован Эйнштейном так, чтобы он стал релятивистским. Изменения, которые необходимо сделать для того, чтобы теория была релятивистская, фундаментальны. Нам известно, что массы частиц не являются постоянными в теории относительности, таким образом, фундаментальный вопрос заключается в том, как изменение массы меняет закон гравитации.

Эйнштейн сформулировал свой закон гравитации в 1911 г., тем самым, предмет нашего обсуждения не нов, и физические результаты, которые мы должны объяснить, впервые были замечательно объяснены уже самим Эйнштейном. Поэтому обычный курс теории гравитации начинается с установления основных законов теории, т.е. так, как это было сделано Эйнштейном. Такая процедура, однако, не является универсальной, и по педагогическим соображениям в настоящих лекциях будет использоваться несколько другой подход для изложения теории. В настоящее время студенты-физики знают кое-что о квантовой теории, мезонах и других элементарных частицах, которые не были известны в то время, когда Эйнштейном была создана общая теория относительности. Физика в большой степени состояла из теории гравитации и электродинамики, и именно электродинамика вызвала к жизни создание теории относительности, так что проблема состояла в том, чтобы внести теорию гравитации в общую канву открытий, сделанных при изучении электродинамики.

Эйнштейновская теория гравитации, которая, как утверждается, явилась величайшим открытием в теоретической физике, заключается в красивых соотношениях, связывающих гравитационные эффекты с геометрией пространства, что было довольно увлекательной идеей. Видимая простота гравитационных и электрических сил, например состоящая в том, что и те, и другие следуют закону обратных квадратов, который может понять любой ребенок, приводит к тому, чтобы у каждого из этих "детей" появилась мечта о том, что когда он подрастет, он найдет дорогу к геометризации электродинамики. Таким образом, поколения физиков делали попытки создания так называемых единых теорий поля, которые могли бы объединить гравитацию

и электродинамику в рамках единой теории. Ни одна из созданных теорий не была успешной, и мы не будем обсуждать их в этих лекциях. Большая часть из этих теорий являлась просто математическими игрушками, создаваемыми математически мыслящими людьми, у которых было довольно слабое знание физики, большая часть из этих теорий непонимаема. Сам Эйнштейн также работал над этими теориями, и его сочинения на эту тему, по крайней мере, имеют некоторый смысл, тем не менее, успешной теории поля, которая бы объединяла гравитацию и электродинамику, не существует.

В случае создания подобной единой теории такой успех был бы кратковременным, поскольку в настоящее время в физике заключено существенно больше, чем только электродинамика и гравитация, и нам нужно было бы побеспокоиться об объединении мезонов, каонов и нейтрино и всех других тридцати и более элементарных частиц, которые сейчас известны. Таким образом, подобное объединение электродинамики и гравитации не было бы таким великим достижением, как это представлялось ранее, поскольку в мире есть много другого, кроме электричества и гравитации.

Наш педагогический подход является наиболее близким для теоретиков, специалистов в физике элементарных частиц, которые довольно часто используют различные поля, так что для них довольно просто понять, что вселенная образована двадцатью девятью или тридцатью одним полями, объединенными в одном уравнении; феномен гравитации добавляет еще одно поле в общий "котел"; это такое поле, которое было пропущено при предыдущих рассмотрениях; гравитационное поле является только одним из тридцати других, поэтому объяснение гравитации состоит в объяснении трех процентов всех известных полей.

Мы даже можем описать наш подход, пользуясь приемами научной фантастики. Представим себе, что в некоторой малой области вселенной, скажем, на такой планете, как Венера, живут ученые, которые знают все о других тридцати полях во вселенной, которые уже знают все, что знаем мы о нуклонах, мезонах и др., но не знают о гравитации. И вдруг производится новый замечательный эксперимент, который показывает, что большие незаряженные массы притягиваются друг к другу с очень-очень слабой силой. И что стали бы тогда делать венериане для того, чтобы объяснить этот замечательный дополнительный экспериментальный факт? Они вероятно попытались бы интерпретировать новый эксперимент в терминах теории поля, что было бы для них весьма привычным.

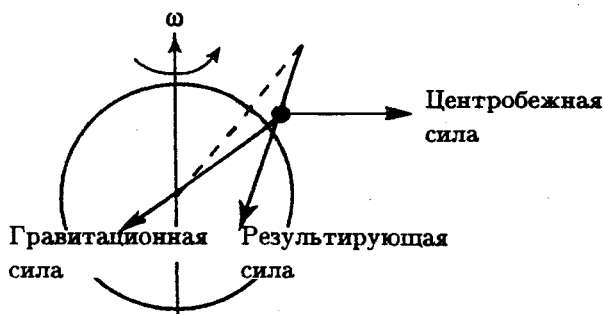


Рис. 1.1.

1.2. Характеристики феномена гравитации

Рассмотрим некоторые экспериментальные факты, которые венериканский теоретик должен был бы обсудить при создании теории, объясняющей этот новый замечательный эксперимент.

Прежде всего фактом является то, что сила притяжения определяется законом обратных квадратов расстояний. Что касается наших знаний об этом законе, то он известен очень-очень точно на основании изучения орбит планет. Кроме того, мы знаем, что сила пропорциональна массам объектов. Этот факт был известен Галилео Галилею, который обнаружил, что все тела падают с одинаковым ускорением. Насколько хорошо нам это известно? В принципе, что надо делать, абсолютно ясно; сначала мы определяем массу как инерцию данного объекта, которую мы измеряем, прикладывая к ней известные силы и измеряя ускорения. Затем мы измеряем притяжение, обусловленное гравитацией, например взвешиванием, и затем сравниваем результаты. Такие эксперименты, измеряющие силы и ускорения, должны были бы быть очень трудными для их проведения с достаточной точностью, однако имеются другие пути проверки закона Галилея с точностью до 10^{-8} , один из которых был проделан Этвешем. Такой эксперимент может быть реализован путем сравнения гравитационной силы Земли с центробежной силой, обусловленной вращением Земли. Ясно, что возникновение центробежной силы представляет собой чистый эффект инерции. В принципе гири отвеса, находящегося на некоторой широте, не равной 0° или 90° , направлена не на центр Земли. Действительно, гири отвеса не направлены к центру также и потому, что Земля имеет несферическую форму, но все эти факторы могут быть учтены при проведении сравнения сил. В любом случае, при некотором промежуточном значении широты (не совпадающим с экваториальным или полярным) гири отвеса отклоняется в направлении, которое определяется результатом действия гравитационной

и центробежной силы. Если же сделать гирию отвеса из некоторого другого материала, который имеет другое отношение инерциальной и гравитационной массы, то отвес мог бы отклониться на несколько отличный от первоначального угол. Мы можем, таким образом, сравнивать различные вещества; например, если сделать первую гирию из меди, а вторую из водорода (конечно, может оказаться трудным изготовить гирию из чистого водорода, однако без труда ее можно было бы изготовить из полиэтилена), мы можем проверить постоянство инерциальной и гравитационной массы.

В реальном эксперименте не измеряются разности столь малых углов, а измеряются вращающие моменты; такие малые вращающие моменты являются более удобными для измерений потому, что кварцевые нити обладают для этого весьма подходящими свойствами, являясь достаточно тонкими и в то же время способными выдерживать достаточно большую нагрузку. Как это обычно делается, два тела, сделанные из двух различных материалов, подвешиваются на концах стержня, а стержень подвешивается в своей средней точке; если компоненты сил, перпендикулярные гравитационным силам, не равны, то имеется некоторый результирующий вращающий момент, который может быть измерен. Опубликованные результаты недавнего эксперимента Дикке показали, что эффекта нет, и сделан вывод, что отношение инерциальной массы к гравитационной является константой с точностью 10^{-8} для самых различных веществ от кислорода до свинца.

Подобный эксперимент может быть проведен путем сравнения гравитационной силы, обусловленной влиянием Солнца, с инерциальными силами, связанными с нашим орбитальным движением вокруг Солнца. Находясь на Земле, мы вовлечены во вращение в пространстве с фантастической скоростью вдоль орбиты Земли, и единственная причина не замечать этого движения состоит в том, что все другие объекты, нас окружающие, также движутся по той же орбите; если бы гравитационное притяжение не было бы в точности то же самое для различных объектов, то эти объекты должны были бы стремиться к тому, чтобы иметь различные орбиты, и существовали бы эффекты, которые были бы связаны с этими различиями. Общий эффект выглядел бы как наличие небольшой силы в направлении Солнца. Такой эффект искался через попытки обнаружения некоторой суточной осцилляции, которая могла бы быть найдена по поведению баланса закручивающего момента для пары масс в ночное и дневное время. Естественно отличия были измерены, некоторые из этих отличий были обусловлены тем, что различные стороны здания имеют

различные температуры – трудность проведения таких экспериментов с очень маленькими эффектами заключается в том, что необходимо быть уверенными, что измеряется на самом деле то, о чем идет речь, а не что-либо иное. Тем не менее, можно сделать заключение из этих экспериментов, что все объекты также хорошо сбалансированы на своих орбитах, как и Земля, с точностью 10^{-8} . Такая точность 10^{-8} уже может сообщить нам множество очень интересных вещей; например энергия связи в ядре порядка 6 Мэв на нуклон, а массы нуклонов порядка 940 Мэв, или, грубо говоря, энергия связи порядка одного процента общей энергии. Тогда точность 10^{-8} говорит нам, что отношение инерциальной и гравитационной массы *энергии связи* является константой с точностью 10^{-6} . Мы можем даже проверить отношение энергии связи для электронов, находящихся на нижних уровнях, поскольку 10^{-8} массы нуклона составляет порядка 9 эв. Если в дальнейших экспериментах будет достигнута точность 10^{-10} , что, как предполагается, будет сделано в ближайшем будущем, мы будем иметь пяти процентную точность на возможный диапазон значений энергии химической связи, которая порядка двух вольт.

С такой же точностью у нас есть также проверка гравитационного поведения антиматерии. Поразительное сходство электрических и гравитационных сил, заключающееся в зависимости от расстояний по закону обратных квадратов, заставило некоторых ученых придти к заключению, что было бы замечательно, если бы антиматерия отталкивала материю; они говорят, что поскольку в электричестве тела с одинаковым зарядом отталкиваются, а противоположные притягиваются, то было бы замечательно, если бы в гравитации похожие тела притягивались, а непохожие отталкивались; и единственный кандидат для гравитационной "непохожести" – антиматерия. Но с точностью 10^{-8} мы можем проверить гравитационное поведение поправок к энергии взаимодействия K -электронов в свинце, обусловленной поляризацией вакуума, которая включает виртуальные пары и антивещество. Можно сказать, что в данном случае нет абсолютно никаких свидетельств, которые заставляли бы предположить, что материя и антиматерия отличаются в проявлении гравитационных эффектов. Более того, все свидетельства, экспериментальные и даже некоторые теоретические, оказывается демонстрируют то, что гравитационные эффекты определяются количеством энергии, вовлеченным в гравитацию, и следовательно, так как и материя, и антиматерия характеризуется положительными значениями энергии, гравитация не делает различия между ними.

Другой аргумент следует из того факта, что свет "падает" в гра-

витационном поле в соответствии с соотношениями, которые определяются нашей теорией; свет отклоняется Солнцем на измеряемую величину, которая будет вычислена в дальнейшем. Но фотон является своей собственной античастицей, так что мы должны заключить, что и частицы, и античастицы в этом случае ведут себя одинаково с точки зрения гравитации. Может быть забавным упражнением для некоторых людей попытаться построить теорию, в которой фотоны, исходящие из электрона, отличаются от фотонов, исходящих от позитронов. Но так как нет абсолютно никаких свидетельств того, что такая теория необходима для объяснения какого-либо явления, то довольно мало смысла заключено в попытке создания подобной теории; она должна была бы объяснять все известные эффекты также хорошо, как и существующая теория, и очень вероятно, что можно будет показать, что новая теория неверна, поскольку некоторые новые эффекты, предсказываемые новой теорией, не будут обнаружены при экспериментах.

Наиболее прямое свидетельство того, что материя и антиматерия действительно ведут себя идентично по отношению к гравитационным эффектам, приходит из экспериментов по распаду K_0 и $\bar{K}_0$, проведенных в Массачусетском Технологическом Институте (MIT). Сам по себе этот эксперимент не без своих собственных недостатков, но его результаты возможно могут быть использованы для того, чтобы исключить теорию, в которой возможно было бы неодинаковое поведение материи и антиматерии. Эти аргументы были приведены М. Гудом [Good 61].

Предположим, что гравитация действует на K_0 и $\bar{K}_0$, в противном случае данный аргумент не работает. Эти две частицы являются античастицами друг для друга. Итак посмотрим, что происходит, если одна из них притягивается, а другая отталкивается гравитацией. Эти частицы имеют две моды распада, которые могут описываться как

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 + \bar{K}_0), \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 - \bar{K}_0).$$

Амплитуды для распада по этим модам интерферируют, эксперимент обнаружил эту интерференцию и установил значение Δm разности масс такое, что $\Delta m < \hbar/(10^{-10} \text{ с})$. Эта величина не согласуется с идеей, что вещество притягивается, а антивещество отталкивается, поскольку данный эксперимент проводился в гравитационном поле Земли, и если гравитационный потенциал есть ϕ , то имеется увеличение или уменьшение массы для одной моды $m\phi$ и $-m\phi$ для другой, и такая разность масс была бы больше, чем ограничение, полученное

в эксперименте МТТ. Если мы рассмотрим гравитационный потенциал не Земли, а Солнца, который больше Земного, или рассмотрим даже Галактический потенциал, то получим все более и более лучшие пределы на степень того, насколько гравитационное взаимодействие должно быть одинаковым для материи и антиматерии. Однако подобная аргументация может быть отвергнута теми, кто считает, что антиматерия отталкивается, но для этого ими должно быть признано, что K_0 и $\bar{K}_0$ не являются гравитирующими частицами, а для этого уже требуется ввести новое специальное предположение. Очевидно, что любой единичный экспериментальный факт может быть проигнорирован, если мы готовы придумать особенную причину тому, почему данный эксперимент должен показывать такой результат, какой наблюдается.

Известно также, что одиночные свободные нейтроны падают в гравитационном поле так, как это ожидается. Этот факт известен с превосходной точностью, поскольку он должен учитываться при создании нейтронных интерферометров; медленные нейтроны из реактора могут коллимироваться в узкие пучки и детектироваться на некотором расстоянии от него, которое порядка нескольких сотен футов. Обнаружено, что они падают в гравитационном потенциале Земли так же, как и любые другие частицы, которые мы можем измерить. Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что первый изумительный факт, связанный с гравитацией, заключается в том, что отношение инерциальной и гравитационной массы постоянно, где бы мы его ни проверяли.

Второй изумительный факт, связанный с гравитацией, заключается в том, что это взаимодействие очень слабое. Сила гравитационного взаимодействия настолько слаба, что если венериане называют взаимодействия при β -распаде "слабыми" взаимодействиями, то открытие гравитации вызвало бы гигантские затруднения. Очевидно, что гравитация играет очень важную роль в нашей жизни, хотя силы гравитации, действующие на наше тело, сравнимы с силами мускулов наших ног; а это значит, что гравитационные силы очень слабы сравнительно с другими силами, существующими между частицами. Это сравнение предположительно более универсально, чем сравнение сил гравитации с силой человека. Давайте для примера вычислим отношение гравитационной и электрической силы между двумя электронами. Тогда получаем следующий результат:

$$F_{\text{гравит}}/F_{\text{электр}} = 1/(4.17 \times 10^{42}),$$

Другими словами, сила гравитации действительно слаба. Подоб-

ное сравнение на языке отношения сил является более значимым, чем обычное сравнение на языке констант взаимодействия; например, часто говорят, что электромагнитные силы являются "слабыми", потому, что величина $e^2/\hbar c$ — мала, а именно $1/137$. Но ссылка на значение константы $1/137$ не является слишком значимой, т.к. мы могли бы также хорошо представить, что более значимой величиной для ссылки являлся бы безразмерный заряд электрона, который равен $\sqrt{(4\pi^2/\hbar c)} = 0.31$, что выглядит весьма отлично от величины $1/137$, но имеет то же самое физическое содержание. Таким образом, когда говорится, что слабое взаимодействие (взаимодействие при β -распаде) должно быть слабым потому, что сила взаимодействия есть "малая величина" $GM_p^2 = 10^{-5}$, мы можем спросить, почему в данное соотношение включается масса протона? Если слабое взаимодействие передается с помощью некоторого мезона, называемого в настоящее время В-мезоном, то может быть более естественным учесть в предыдущем соотношении массу В-мезона, которая может быть много больше, чем масса нуклона, достаточная для того, чтобы константа взаимодействия была весьма отличной от "малой" константы 10^{-5} .

Все другие поля, которые нам известны, являются много более сильными, чем гравитация, что приводит к тому предположению, что гравитация никогда не может быть объяснена как некоторая поправка, как некоторые члены, которыми ранее пренебрегали в теории, которая бы объединяла все другие поля, которые нам известны. Число 10^{42} так чрезвычайно велико, что появляется весьма заманчивая перспектива поискать другие большие числа, которые могут быть связаны с этим числом. Подобная идея первоначально была предложена А. Эддингтоном [Eddi 31, Eddi 36, Eddi 46].¹ Существование одного большого числа весьма загадочно, в случае существования двух таких чисел ситуация была бы еще хуже, и ситуация могла бы быть улучшена для нас, если бы эти числа были связаны так, что большая величина одного приводила бы к большой величине другого; существование же одной большой величины могло бы быть объяснено значительно более просто, чем двух больших чисел. Эддингтон предположил, что $10^{42} = 2^{137}$, однако некоторые части его книги настолько непонятны, что можно было бы сказать, что книга Эддингтона не содержит полезной теории, поскольку изложение крайне туманно. Мы будем искать объяснения большого числа 10^{42} в другом направлении. Мы знаем о других таких больших числах,

¹Интересное обсуждение возможности совпадения больших чисел и некоторых других вопросов, рассматриваемых в лекции, приведено в книге П.Девиса [Девис 85*]. (Прим. перев.)

например числе атомов или частиц в нас, но как и ранее, нам бы хотелось уйти от нашей человеческой природы при проведении подобных сравнений. Интересно, что гравитационные силы играют определяющую роль для движения таких огромных объектов, как галактики, так что можно было бы поискать связь между величиной гравитационных сил и размером вселенной.

В настоящее время размер вселенной очень большой, и ее границы нельзя считать хорошо известными, однако можно определить некоторую величину, которая называется радиусом вселенной. Существует наблюдательный факт, что свет, приходящий от удаленных звезд и галактик, сдвигается в сторону более низких частот, как будто они разбегаются от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям от нас до этих объектов. Этот факт может быть объяснен в рамках так называемой теории Большого Взрыва Вселенной. Как мы увидим, теория гравитации очень важна при рассмотрении космологических моделей, и мы будем обсуждать их позднее в нашем курсе. Однако сейчас предположим, что галактики образованы из материи, которая начала двигаться из некоторого пятна в Большом Взрыве; тогда пропорциональность между скоростью от центра и расстоянием получается довольно естественно, поскольку вещество, которое находится дальше, движется быстрее. Такая пропорциональность имеет вид $R/V = T$, где T – время, прошедшее с момента такого гипотетического взрыва. Это время (обратная величина которого известна как постоянная Хаббла) характеризуется величиной порядка 13×10^{10} лет. Ошибка в этой величине составляет довольно существенную часть, несколько лет назад для этой величины приводилось значение 2×10^{10} лет. Ошибки определения этой величины связаны с ошибками определения расстояний; доплеровские сдвиги измеряются значительно проще, чем расстояния до далеких галактик.

Эта константа описывает время жизни вселенной; не обязательно мы должны верить в то, что вселенная образовалась T лет назад, скорее эта величина характеризует фундаментальную размерность вселенной, причем значительно в большей степени, чем величина e^2/mc^2 представляет "радиус электрона". Аналогично, величина Tc описывает некоторую длину, которая может называться "радиусом" вселенной. Посмотрим, как можно было бы получить коэффициент порядка 10^{42} каким-либо образом из постоянной Хаббла. Мы можем взять для примера отношение времени, которое требуется свету, чтобы пройти расстояние, равное комптоновской длине волны электрона $\hbar/mc^2$ или протона $\hbar/M_p c^2$, к постоянной Хаббла, кроме того, мы надеемся, что эта величина представляет собой нечто более значитель-

ное, чем просто некоторое количество секунд в нашей человеческой шкале измерений. Эти времена равны соответственно $\hbar/mc^2 = 10^{-21}$ с, или $\hbar/M_p c^2 = 10^{-24}$ с, время жизни вселенной $T = 10^{17}$ сек, таким образом, это отношение порядка 10^{41} для протонов, и можно сказать, пользуясь подобными соотношениями, что эта величина находится не слишком далеко от отношения электрических и гравитационных сил для протона, которое примерно равно 10^{36} . Если мы рассмотрим электроны, то это отношение равно 10^{38} , что также не слишком близко к величине 10^{42} , но мы должны иметь в виду, что мы пустились на самые смелые размышления с целью посмотреть на то, получим ли мы хоть какие-то осмысленные результаты. Можно напомнить такой факт, что П. Дирак [Dira 37, Dira 38] пытался построить некоторую теорию гравитации, в которой гравитационная константа была бы в точности этой величины. Одна из трудностей такой теории состоит в том, что необходимо вводить зависимость от времени силы гравитации, так как вселенная все время стареет в единицах времени, соответствующих комптоновской длине волны. Однако очень трудно определить, что значит сказать, что силы гравитации зависят от времени, в то время как все остальное "остаётся тем же самым". Так как эти значимые величины являются безразмерными отношениями некоторых физических величин, то эту ситуацию можно было бы описывать, предполагая, что электрический заряд зависит от времени, так что теория на самом деле, не является хорошо определенной. В данный момент попытаемся взглянуть поверх этих трудностей теории и посмотреть, хотя бы интуитивно, какие мы можем вывести следствия из зависимости от времени гравитационной константы. Некоторые ученые говорят, что этот факт может помочь объяснить землетрясения, поскольку, когда гравитационные силы слабеют, Земля слегка вытягивается, и могут возникать трещины. Однако, альтернативная теория, в которой рассматриваются токи в магме, находящейся внутри Земли, лучше описывает то, почему землетрясения происходят в высоко локализованных областях Земной коры. Итак, приятным является то, что некоторые выводы могут использоваться в теории землетрясений.

Можно было бы попытаться опровергнуть идею об изменении гравитационной постоянной G , основываясь на следствиях теории звезд; мы не будем детально изучать звезды, однако вкратце можно сказать, какие процессы в них происходят. Вещество звезды падает к центру, выделяемая гравитационная энергия нагревает вещество до температуры, при которой происходят ядерные реакции, а в результате давление сохраняет звезду в состоянии равновесия, энергетические

потери компенсируются энерговыделением при ядерных реакциях, и давление не позволяет веществу коллапсировать дальше. Если мы предполагаем, что гравитационная константа зависит от времени и имела большее значение в прошлом, мы должны предположить, что скорость энерговыделения в прошлом была выше для того, чтобы компенсировать больший вес; детальное рассмотрение показывает, что мы могли бы ожидать, что светимость звезды зависит от гравитационной постоянной как G^6 ; качественно, если постоянная больше, то больше и центральная температура, необходимая, чтобы силы газового давления поддерживали больший вес вещества, так что ядерные реакции происходят с большим энерговыделением. Мы можем спросить, какое влияние все это могло бы оказать на наше Солнце и отсюда на поверхностную температуру Земли; мы утверждаем, что имеются некоторые ограничения на поверхностную температуру Земли, исходя из того факта, что на нашей планете жизнь существует (по крайней мере, в каком-то виде) уже 10^9 лет. Если гравитационная константа раньше была больше, то светимость Солнца была бы больше, согласно закону G^6 , и орбита Земли должна была бы быть ближе к Солнцу, чем сейчас. В этом случае световой поток, падающий на Землю, должен был бы быть пропорционален G^8 . Сейчас мы можем сделать некоторую оценку земной температуры; получить точную оценку довольно трудно, потому что плохо известна отражающая способность поверхности Земли (альбедо), достаточно трудно учесть влияние облаков и другие усложнения подобного рода, но мы можем получить оценку, основываясь на предположении, что Земля является черным телом. Черное тело испускает энергию, зависящую от температуры поверхности как T^4 , и поскольку Земля вращается, температура приходит в равновесие с энергией, получаемой от Солнца. Если сравнить полученные оценки с имеющимися данными об измеренных температурах поверхностей планет, то это сравнение показывает, что простая оценка оказывается весьма точной (во всех тех случаях, когда поверхностная температура известна). Итак, мы можем использовать эту оценку для получения оценки температуры земной поверхности миллиард лет тому назад, предполагая, что гравитационная константа была в то время на 8 % больше. Энергия, падающая на поверхность Земли, связана с температурой в соответствии с законом T^4 , эта энергия связана с гравитационной постоянной как G^8 , таким образом температура поверхности Земли пропорциональна G^2 и на 16%, или на 48°C , была выше миллиард лет тому назад, чем сейчас.

Теперь можно спросить геофизиков и биохимиков, что было бы, если бы температура земной поверхности была бы такая, как 75°C .

Эта температура еще не достаточно высока, чтобы моря закипели, так что мы еще не можем отвергнуть полностью такую теорию. Можно предположить, что жизнь действительно зародилась при такой температуре воды. Известны некоторые места на Земле, такие как горячие источники в Йеллоустоне, где некоторые бактерии живут в воде при аналогичных температурах. Это была бы довольно странная жизнь, которая могла бы существовать при таких температурах; найденные древнейшие ископаемые остатки не демонстрируют никаких особенностей, которые могли бы быть разумным свидетельством существования таких больших температур, тем не менее, насколько я знаю, мы не можем предъявить решающего свидетельства против более высокой температуры в более ранние времена.

Существенно большая светимость звезд в том случае, если бы гравитационная постоянная была больше в прошлом, поменяла бы эволюционные масштабы времени некоторых звезд. Я знаю, что некоторые астрономы пытаются увидеть, согласуются ли эти выводы с наблюдениями, но я не знаю, получили ли они на этот счет строгое заключение.

Другое замечательное совпадение, связывающее гравитационную константу с размером вселенной, получается из рассмотрения полной энергии. Полная гравитационная энергия всех частиц вселенной есть что-то вроде GMM/R , где $R = Tc$ и T – хаббловское время. На самом деле, если вселенная является сферой с постоянной плотностью, необходимо учесть множитель $3/5$, но мы будем пренебрегать им, поскольку наша космологическая модель не во всем хорошо известна. Мы сравним эту величину с общей массой вселенной, Mc^2 . И вдруг, о чудо! Мы получаем замечательный результат, $GM^2/R = Mc^2$, так что полная масса вселенной равна нулю.¹ На самом деле, мы не знаем ни плотности вещества, ни радиуса во вселенной с достаточной точностью для того, чтобы говорить о равенстве, но тот факт, что эти два больших числа должны были бы иметь одинаковые порядки величин, представляет собой поистине замечательное совпадение. Отсюда можно прийти к весьма смелой мысли, что это "ничто" рождает новые частицы, так как мы можем создать их в центре вселенной, где имеется отрицательная гравитационная энергия, равная Mc^2 .

В этих оценках именно плотность вселенной является наиболее трудным для определения параметром. Мы можем видеть звезды и галактики, видеть их достаточно много, но не иметь ясной идеи о том, насколько много темных звезд находится там, звезд, в которых

¹ Другое решение этого уравнения $M = c^3 T/G$ Фейнман не обсуждает. (Прим. перев.)

перестали идти реакции ядерного горения. Не знаем мы и плотность межзвездного газа. У нас имеются некоторые мысли о том, как оценить плотность натрия в пространстве между галактиками, основываясь на измерении поглощения излучения в линиях D , испускаемого удаленными звездами. Однако натрий возможно составляет лишь небольшую часть общей массы, и нам необходимо знать плотность водорода. Путем изучения движения спиральных рукавов галактик, шаровых скоплений, выясняется, что галактики имеют в своих центрах большое количество скрытой массы. Все это не позволяет получить надежную оценку средней плотности во вселенной. А.Эддингтон для своих оценок в 20-х годах использовал значение 1 атом водорода в см^3 для галактик. Радиоастрономы, которые недавно изучили Галактику в "свете водорода", привели несколько меньшую оценку, скажем 0.7 атома водорода в см^3 . Нет никаких достоверных данных о плотности межгалактического вещества; космологи предполагают величины в 10^5 меньшие, чем галактическая плотность, 10 атомов водорода в кубическом метре. Пользуясь этой оценкой, мы получаем чрезвычайно интересный результат, что полная энергия вселенной равна нулю. Почему так должно быть, является одной из величайших тайн – и, следовательно, одним из важнейших вопросов физики. После всего этого можно задать вопрос, что мы должны были бы изучать в физике, если подобные тайны не являются столь важными, чтобы их исследовать.

Все приведенные выше размышления о возможных связях между размером вселенной, количеством частиц и гравитацией не оригинальны и обсуждались ранее. Ученые, обсуждавшие подобные предположения, делятся на два типа: или это очень серьезные математики, играющие в игры, заключающиеся в построении математических моделей, или скорее всего шутники, забавляющиеся тем, что обращают внимание на некие забавные численные курьезы со смутной надеждой на то, что все это возможно когда-нибудь и будет иметь какой-то смысл.

1.3. Квантовые эффекты в гравитации

В следующих нескольких лекциях мы начнем строить квантовую теорию гравитации. Было бы весьма полезно для нас держать в уме, что могли бы представлять из себя любые наблюдательные эффекты в такой теории. Вначале давайте рассмотрим гравитацию как теорию возмущений на атоме водорода. Ясно, что дополнительное притяжение между электроном и протоном приводит к малому изменению в энергии связи водорода; мы можем вычислить это изменение энергии из теории возмущений и получить значение ϵ . Известна зави-

сящая от времени волновая функция атома водорода $\psi = \exp(-iEt)$, где E – такая величина, которая соответствует частоте порядка 10^{16} Гц. Теперь для того, чтобы наблюдать какие-либо эффекты, обусловленные влиянием ϵ , мы должны были бы ждать какое-то время до тех пор, пока истинная волновая функция могла бы быть отличима от невозмущенной волновой функции, например на 2π в фазе. Однако величина ϵ настолько мала, что для этого необходимо ждать время в 100 раз большее, чем возраст вселенной T . Таким образом, гравитационные эффекты в атомах ненаблюдаемы.

Рассмотрим другую возможность, когда атом удерживается только гравитационными силами. Например, мы хотели бы иметь два нейтрона в связанном состоянии. Когда мы вычисляем радиус Бора такого атома, то получаем, что он должен быть равным 10^8 световых лет, и энергия связи должна быть равна 10^{-70} р.¹ Таким образом, надежда обнаружить влияние гравитационных эффектов на системах, которые являются достаточно простыми для того, чтобы можно было провести вычисления в квантовой механике, слишком мала.

Другое предсказание квантовой механики и гравитации должно состоять в том, что гравитационная сила могла бы передаваться виртуальным обменом некоторыми частицами, которые обычно называются гравитонами. Следовательно, мы могли бы ожидать, что при определенных обстоятельствах мы могли бы видеть гравитоны, подобно тому, как мы можем наблюдать фотоны. Я хотел бы напомнить, что хотя свет наблюдался существенно раньше в истории человечества (возможно впервые Адамом), до 1898 г. не было осознанного понимания того, что это электромагнитные волны, а квантовые аспекты этих волн наблюдались еще позже. Мы наблюдаем гравитацию в том смысле, что мы знаем, что она влияет на Землю, но классические гравитационные волны до сих пор не наблюдались; это не является несогласованным с нашими ожиданиями, поскольку гравитация настолько слаба, что нет эксперимента, который мог бы быть сделан сегодня и быть достаточно чувствительным, чтобы обнаружить гравитационные волны, по крайней мере, от таких ожидаемых сильнейших источников, которые могут быть рассмотрены, как быстро вращающиеся двойные звезды. Квантовый аспект гравитационных волн в миллион раз дальше от порога детектирования, поэтому видимо нет даже надежды наблюдать гравитон.

¹Напомним, что внесистемная единица 1 Ридберг выражается следующим образом: $1\text{Р.} = 13.6 \text{ эВ.}$ (Прим. перев.)

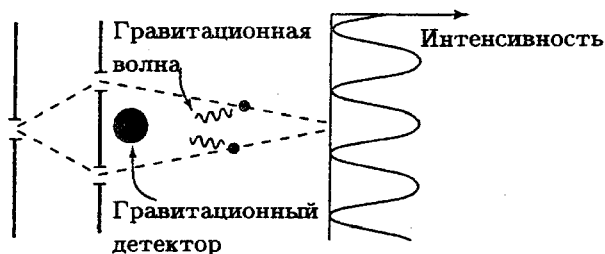


Рис. 1.2.

1.4. О философских проблемах в квантовании макроскопических объектов

Экстремальная слабость квантовых гравитационных эффектов могла бы теперь поставить некоторые философские проблемы; может быть природа пытается сказать нам что-либо новое, может быть мы не должны пытаться квантовать гравитацию. Возможно ли, что мы не должны настаивать на единообразии природы, чтобы все могло бы быть проквантовано? Возможно ли, чтобы было так, что гравитация не квантуется, а все остальное в мире квантуется? Существуют некоторые аргументы, которые были приведены в прошлом, что мир не может быть полуклассическим и полуквантовым. Теперь постулат, который определяет квантово-механическое поведение, заключается в том, что существует амплитуда для различных процессов. Не может быть, следовательно, чтобы частица, которая описывается амплитудой, такая как электрон, имела взаимодействие, которое описывается не амплитудой, а вероятностью. Мы рассмотрим дифракционный эксперимент с двумя щелями и вставим гравитационный детектор, который, как мы предполагаем, является классическим, который в принципе может сказать нам, через какую щель прошел электрон (рис. 1.2). Представим себе, что детектор еще не получил сигнал, говорящий нам, через какую щель прошел электрон; положение электрона описывается амплитудой, половина которой проходит через верхнюю щель, а половина через нижнюю. Если гравитационное взаимодействие передается полем, то отсюда следует, что гравитационное поле должно было бы также иметь амплитуду; половина которой соответствует гравитационному полю электрона, проходящему через каждую щель. Но все это в точности характеристика квантового поля, которое должно было бы описываться амплитудой предпочтительнее, чем вероятностью! Таким образом, кажется, что должно быть невозможным нарушить квантовую природу полей.

Несмотря на эти аргументы, мы хотели бы быть свободными от предубеждений. Ведь все еще остается возможность, что кванто-

вая теория абсолютно не гарантирует, что гравитация *должна* быть квантуема. Я хочу, чтобы здесь я был правильно понят, отсутствие предубеждений не значит отсутствие всяких убеждений. Я имею ввиду, что возможно, если мы рассматриваем альтернативные теории, которые не кажутся нам *a priori* оправданными, и мы вычисляем, что бы имели, если бы такая теория была верна, возможно было бы неожиданным открытием, что такой путь в действительности существует! Мы никогда не сделаем это открытие с позиции, что "конечно, всегда необходимо наслаждаться возможностью сомнений", а действовать и вычислять только с одним предубеждением. Рассуждая в этом духе, я хотел бы предположить, что квантовая механика не выполнима при больших расстояниях и для больших объектов. Теперь следите за моими утверждениями, я не говорю, что квантовая механика будет не выполняться на больших расстояниях, я только сказал, что это не является несогласованным с тем, что мы знаем. Если такая несостоятельность квантовой механики связана с гравитацией, то умозрительно рассуждая, мы могли бы ожидать, что это происходит для масс таких, что $GM^2/\hbar c = 1$, или $M \sim 10^{-5}$ г, что соответствует приблизительно 10^{18} частиц. Квантовая механика дает довольно глупые ответы для объектов такого размера; если мы вычислим вероятность того, что песчинка перепрыгнула через стену, то получим такие ответы как $10^{-260000}$, которые представляются довольно нелепыми. Следовательно, мы не должны пренебрегать рассмотрением того, что возможно квантовая механика не верна для больших масштабов и не выполнима для объектов нормального (немикроскопического) размера. В этой связи мы могли бы обсудить, как теория наблюдения и измерения создает некоторые проблемы. Для примера давайте поговорим о придуманном Шредингером парадоксе кота. Это не настоящий парадокс в том смысле, что имеется два различных ответа при использовании соответствующих логических рассуждений, это означает, что необходимо отметить наличие философской трудности в квантовой механике, и каждый физик должен решить, какой ответ он предпочитает.

Представим себе закрытый ящик, в который помещен живой кот и подвешено ружье; причем кот размещен таким образом, что если ружье выстрелит, то кот умрет. Ружье выстреливает с помощью счетчика Гейгера, который считает частицы от радиоактивного распада; предположим, что источник такой, что мы ожидаем один отсчет в час. Имеется следующий вопрос: Какова вероятность того, что кот остался жив спустя один час, если мы оставили его запертым в ящике?

Ответ, получаемый из квантовой механики чрезвычайно прост; имеется два возможных конечных состояния, которые мы рассматриваем; амплитуда равна

$$\text{Амплитуда} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{кот жив}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{кот мертв}).$$

Когда мы думаем об этом ответе, то у нас появляется ощущение, что кот не видит эти вещи таким же образом; он не чувствует, что у него $1/\sqrt{2}$ жизни и $1/\sqrt{2}$ смерти, а чувствует или одно, или другое. Итак, то, что может соответствующим образом описываться амплитудой внешнего наблюдателя, не обязательно описывается аналогичной амплитудой, когда наблюдатель составляет часть этой амплитуды. Таким образом, внешний наблюдатель обычной квантовой механики находится в выделенном положении. Для того, чтобы убедиться в том, жив кот или мертв, он делает маленькую дырочку в ящике и наблюдает; и только после этого он делает свое измерение, что система находится в хорошо определенном конечном состоянии; но ясно с точки зрения внутреннего наблюдателя, что результаты такого измерения внешнего наблюдателя определяются вероятностью, но не амплитудой. Таким образом, мы видим, что при традиционном описании квантовой механики мы имеем встроенное в теорию расхождение между описанием, включающим внешнего наблюдателя, и описанием без наблюдения.

Такого рода парадокс возникает всякий раз, когда мы рассматриваем усиление атомного события, так что мы узнаем, как это событие влияет на вселенную в целом. Традиционное описание общей квантовой механики всего мира чудовищно сложной волновой функцией (которая описывает всех наблюдателей), удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

приводит к невероятно сложной бесконечности амплитуд. Если я играю в азартные игры в Лас Вегасе и собираюсь поставить некоторые деньги на номер 22 в рулетке, и ближайшая ко мне девушка выливает на меня свой напиток, потому что она увидела кого-то, кого она знает, и я останавливаюсь перед тем, как сделать ставку, и приходит число 22 на рулетке, я могу увидеть, что все течение вселенной для меня зависело от того факта, что некоторый маленький фотон попадет в нервное окончание сетчатки глаза девушки. Таким образом, вся вселенная бифурцирует на каждом атомном событии. В

настоящее время некоторые ученые, которые настаивают на том, чтобы свести всю квантовую механику к букве, удовлетворены подобной картиной; так как нет внешнего наблюдателя для волновой функции, описывающей вселенную в целом, они утверждают, что правильное описание мира включает в себя все амплитуды, которые, таким образом, бифурцируют в каждом атомном событии. Но тем не менее, мы, которые являемся частью такой вселенной, знаем, какой путь вселенной бифурцировал для нас, так что можем следовать треку нашего прошлого. Теперь философский вопрос для нас состоит в том, что когда мы делаем наблюдение нашего трека в прошлом, становится ли результат нашего наблюдения реальным в том смысле, что конечное состояние было бы определено, если бы внешний наблюдатель сделал бы наблюдение? Все это весьма смущает, особенно когда мы считаем, что даже хотя мы можем согласованно рассматривать себя всегда в качестве внешнего наблюдателя, когда мы смотрим на весь остальной мир, остальной мир в то же самое время наблюдает нас, и очень часто мы согласны с тем, что мы видим друг в друге. Означает ли это, что мои наблюдения становятся реальными только тогда, когда я наблюдаю наблюдателя, наблюдающего, как что-либо происходит? Это ужасная точка зрения. Seriously ли вы обдумываете мысль, что без наблюдателя нет реальности? Какого наблюдателя? Любого наблюдателя? Является ли наблюдателем муха? Является ли звезда наблюдателем? Отсутствует ли реальность во вселенной за 10^9 лет до н.э., т.е. до зарождения жизни? Или являетесь ли вы тем самым наблюдателем? Тогда нет реальности в мире после вашей смерти? Я знаю большое число уважаемых физиков, которые покупают страховку на случай смерти. Какой философией была бы понята вселенная без человека?

Для того, чтобы придать некий смысл рассуждениям, мы должны относиться без предубеждений к вероятности того, что для достаточно сложных процессов амплитуды становятся вероятностями. Факт, что именно амплитуды добавляются, может быть обнаружен только процессами, которые детектируют разность фаз и интерференцию. Теперь фазовые соотношения для очень сложных объектов могли бы быть чудовищно сложны, так что наблюдать интерференцию можно было бы только в том случае, если фазы всех частей сложного объекта эволюционируют очень, очень точным образом. Если существует некоторый механизм, с помощью которого эволюция фазы слегка изменяется, так что не является абсолютно точной, тогда наши амплитуды становятся вероятностями для очень сложных объектов. Но можно быть уверенным, что если фазы действительно имели та-

кое встроенное в теорию смещение, должны были бы быть некоторые следствия, связанные с этим смещением. Если одно такое следствие состояло бы в существовании гравитации самой по себе, не было бы квантовой теории гравитации, что было бы ужасающей идеей для остальных лекций.

Все это представляет собой весьма смелые рассуждения, и бесполезно продолжать их дискутировать; однако мы всегда должны помнить о том, что существует некоторая вероятность того, что квантовая механика может не выполняться, так как у нас есть определенные трудности с философскими предрассудками относительно измерений и наблюдений.

1.5. Гравитация как следствие других полей

Вернемся к построению теории гравитации, как это могли бы сделать наши друзья венериане. В общем случае, мы ожидаем, что должны быть две школы мысли о том, как работать с этим новым феноменом. Имеются следующие возможности:

1. Что гравитация – новое поле, номер 31.
2. Что гравитация – следствие чего-то, что мы уже знаем, но что мы еще точно не вычислили.

Мы рассмотрим кратко вторую точку зрения для того, чтобы посмотреть, какие в этом случае имеются возможности. Факт универсального притяжения может напомнить нам ситуацию в молекулярной физике; мы знаем, что все молекулы притягиваются друг к другу с силой, которая на больших расстояниях ведет себя как $1/r^6$. Этот факт мы понимаем в терминах дипольных моментов, которые индуцируются флуктуациями в распределении заряда молекул. То, что это универсальный закон, хорошо известно из того факта, что все вещества могут конденсироваться при соответствующем охлаждении. Итак, одна возможность состоит в том, что гравитация может быть некоторым притяжением, обусловленным подобными флуктуациями в чем-либо, мы пока не знаем в чем, возможно обладающим зарядом.

Если мы беспокоимся о том факте, что квантовая механика не выполняется тогда, когда очень часто возникают бесконечности при суммировании по всем состояниям, мы могли бы поискать связь между гравитацией, размером вселенной и неприменимостью квантовой механики. Бесконечности всегда появляются, когда мы суммируем все дроби $\sum_n 1/(E - E_n)$. Теперь мыслится так, что если мы должны рассмотреть всю вселенную, то мы не должны суммировать по всем виртуальным состояниям обычным образом, а мы должны суммировать только те виртуальные состояния, для которых мы можем взять достаточно энергии из остальной части вселенной. Теория, которая не

могла бы разрешать виртуальные состояния, если энергия нарушения больше, чем общая энергия вселенной, была бы слегка отличной от той, которая предполагает, что общая энергия бесконечна. Здесь были бы отличия от обычной теории, но я подозреваю, что ничто другое, кроме как гравитация, не может быть следствием из такой теории.

Мы могли бы рассмотреть вопрос о том, могут ли гравитационные силы возникать вследствие виртуального обмена частицей, которую мы уже знаем, такой как нейтрино. Все-таки при поверхностном взгляде взаимодействие имеет правильные свойства, так как нейтрино – незаряженная частица с нулевой массой, то это взаимодействие должно было бы зависеть от расстояния как $1/r$, и это взаимодействие будет очень слабым.

В следующей лекции мы будем заниматься этой нейтринной теорией гравитации и обнаружим, что такая теория неприменима. Тогда мы начнем строить теорию гравитации как 31-ое поле, которое должно быть обнаружено.

Лекция 2

2.1. Постулаты статистической механики

При построении возможных вариантов нашей теории гравитации мы должны остерегаться от слишком поспешного принятия (без достаточных на то оснований) многих из предрассудков нынешнего научного мировоззрения. В предыдущей лекции мы увидели, что имеется что-то не вполне удовлетворительное в том, что вероятности появляются при нашей интерпретации вселенной. Если мы действительно думаем, что вселенная описывается великой волновой функцией без внешнего наблюдателя, то ничто не может быть когда-либо вероятно, так как никакого измерения даже не может быть сделано! Это обстоятельство физики имеют ввиду, несмотря на экспериментальное свидетельство оправданности подобного описания для подобластей вселенной, которые могут для наших целей довольно детально описываться волновыми функциями, амплитуды которых представляют вероятности результатов измерений.

Подобным образом, существуют трудности с описанием статистической механики в простом учебнике; хотя этот пример не слишком близко связан с теорией гравитации, но он связан с космологическими вопросами, которые мы будем обсуждать ниже. Довольно часто постулируют *a priori*, что все состояния равновероятны. Этот постулат не является истиной в нашем мире, как мы видим его. Этот мир не описывается правильно физикой, в которой предполагается выполнение этого постулата. В мире живут люди – не физики – такие как геологи, астрономы, историки, биологи, которые готовы поставить высокую ставку на то, что когда мы наблюдаем еще ненаблюдаемую область вселенной, мы найдем определенную организацию, которая не предсказывается физикой, которой мы призываем верить. В соответствии с нашим опытом как наблюдателей, мы обнаруживаем, что если мы заглянем в книгу с заглавием на обложке "Наполеон", то действительно, шансы на то, что внутри книги будет что-либо о Наполеоне, очень велики. Мы определенно не ожидаем найти систему в термодинамическом равновесии, когда мы открываем эти страницы. Но физики не нашли способа, как учесть подобные шансы для ненаблюдаемых областей вселенной. Современные физики никогда не могли бы предсказать так же хорошо, как геолог, шансы на то, что когда мы взглянем внутрь определенных камней, мы найдем ископаемое топливо.

Подобным образом, историки астрономии и астрономы находят,

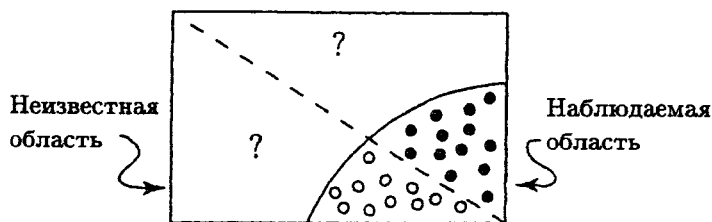


Рис. 2.1.

что всюду во вселенной, которую мы наблюдаем, мы видим звезды, которые горячее внутри и холоднее снаружи, т. е. системы, которые, на самом деле, весьма далеки от термодинамического равновесия.

Мы можем понять насколько невероятна такая ситуация с точки зрения обычных предсказаний термодинамики, путем рассмотрения простых упорядочений. Рассмотрим ящик в качестве вселенной, в которой имеется два типа частиц, белые и черные. Предположим, что в определенной области вселенной, подобной маленькому углу ящика, мы видим, что все белые частицы отделены от черных частиц диагональю (точнее плоскостью, проходящей через диагонали на противоположных сторонах, см. рис. 2.1). Априорная вероятность того, что такая картина имеет место, должна быть очень, очень мала, и мы должны, исходя из наших нынешних предубеждений, приписать этому состоянию статистическую флуктуацию, которая довольно невероятна. Что мы предсказываем для остальной части вселенной? Это предсказание состоит в том, что если мы взглянем на другую область, то мы должны были бы наиболее вероятно найти, что эта другая область имеет значительно менее упорядоченное распределение белых и черных частиц. Но фактически, мы такого не обнаруживаем, и в каждой новой области мы наблюдаем то же самое упорядочение, как и в предыдущем случае. Так, если я сяду в свою машину и поеду в горы, которые я до этого никогда не видел, я найду деревья, которые выглядят в точности также, как те деревья, которые я знаю. Если рассматриваются системы с экстремально большим количеством частиц, то вероятности таких наблюдений в терминах обычной статистической механики фантастически малы.

Наилучшим объяснением флуктуации, которая наблюдается, является то только, что многое флуктуировало, и что остальное находится в случайном состоянии. Если все состояния равновероятны *a priori*, и если найден кусочек мира, который столь односторонен, то остальная часть мира должна была бы быть равномерно перемешана, поскольку тогда была бы меньше флуктуация. Можно было бы возразить, что события и структуры коррелированы; они все имели

одно и то же прошлое! Но это другая теория, чем та, которая лежит в основании описания вселенной в рамках статистической механики. Это та противоположная теория, которая утверждает, что в прошлом мир был более организован, чем сейчас, и что наиболее вероятное состояние не есть состояние равновесия, а некоторое особое состояние, которое динамически эволюционирует. В этом заключается общепризнанное предположение, которое принимается всеми историками, палеонтологами и другими.

Вероятностные аргументы могут быть использованы как тест для теории и могут быть применены следующим образом. Предположим, что на *априорной* основе мы хотим приписать очень, очень низкие шансы той гипотезе, что вселенная не должна описываться как тщательно подобранная флуктуация от полного хаоса, характеризующего термодинамическое равновесие; например, предположим, что *априорная* вероятность представления, что все состояния равновероятны, есть $1 - 10^{-100}$. Затем давайте опишем число упорядоченных состояний в соответствии с некоторой схемой; например, предположим, что мы перечислим все состояния, которые упорядочены менее, чем миллионом слов. Теперь мы определим оставшуюся *априорную* вероятность 10^{-100} для гипотезы, что вселенная эволюционирует от одного из этих специально упорядоченных состояний в прошлом. Другими словами, мы предполагаем, что все состояния равновероятны, но хотим допустить возможность того, что наблюдательные тесты могут опровергнуть гипотезу равновесия.

Теперь мы начинаем делать наблюдения мира вокруг нас и мы наблюдаем состояния с описываемым порядком. Каждый из нас этим утром видел, что земля была внизу, а воздух был сверху, но одного такого наблюдения достаточно, чтобы увеличить шансы для упорядоченных состояний в *апостериорном* суждении о вероятности начальной ситуации. И если мы делаем все больше и больше наблюдений, это увеличение в конце концов достигнет даже 10^{-100} способом, который может вычисляться в соответствии с теоремой: если *априорная* вероятность ситуации A есть P_a и если *априорная* вероятность ситуации B есть P_b , и если сделано наблюдение, которое более вероятно, если A имеет место, и менее вероятно, если B имеет место, то *апостериорная* вероятность A увеличивается отношением, по которому результат измерения является более вероятным, если A имеет место.

Если делается наблюдение угла вселенной, причем наблюдение макроскопическое, то можно обнаружить, что это состояние весьма далеко от равновесия. Шансы на то, что это может быть флуктуа-

ция, экстремально малы; требуется только одиночное наблюдение макроскопического порядка, чтобы уменьшить вероятность до 10^{-2000} , для которой только 5000 молекул должны быть упорядочены. Таким образом, совершенно очевидно, что только специальные состояния могли бы порождать огромную степень упорядочения, которую мы видим в мире.

Как тогда работает термодинамика, если ее постулаты вводят в заблуждение? Фокус состоит в том, что мы всегда упорядочиваем объекты таким образом, что мы не делаем эксперименты над объектами, когда мы их находим, а только после того, как мы выбрасываем все те ситуации, которые могли бы привести к нежелательным упорядочениям. Если мы должны проводить эксперименты над газами, которые первоначально помещены в металлический кан, мы должны заботиться о том, чтобы "дождаться того момента, когда термодинамическое равновесие установится" (как часто мы слышали *эту фразу!*), и мы выбрасываем все те ситуации, в которых что-либо случается с аппаратурой, что электричество отключается вследствие того, что сгорел предохранитель, или что кто-либо ударил по кану молотком. Мы никогда не проводим экспериментов над вселенной, как таковой, но скорее мы контролируем обстоятельства, чтобы подготовить более тщательно системы, над которыми мы экспериментируем.

Более удовлетворительный способ представления постулатов статистической механики может быть следующим. Предположим, что мы действительно знаем все детали (классической) системы, такие как масса газа, с бесконечной точностью; это означает, что мы знаем положения и скорости всех частиц в некоторый момент времени $t = 0$. Тогда мы можем (игнорируя действительные трудности в практике) вычислять точно, если мы знаем законы природы в точности, и узнать поведение и состояние всех других частиц в любой момент времени в будущем. Но сейчас предположим, что имеется некоторая небольшая неопределенность в наших измерениях или в нашем знании какого-либо одного фактора, который включен в вычисление, положение, скорости любой выделенной частицы или в небольшой неопределенности в точность, с которой мы знаем взаимодействие частиц. Не имеет значения (за исключением контрпримеров, построенных математиками), с чем связана эта неопределенность. Если такая неопределенность существует, мы должны будем описать финальное состояние усреднением этой неопределенности, и если прошло достаточно большое время, которое будет короче, чем наиболее длинное время неопределенности и наиболее длинное время системы, предсказания измерений будут очень близки к тем, которые даются канонической

Скорость частицы
номер 6 при
 $t=30$ мин.,
вычисленная для
различных значений
положения частицы
номер 133



Число значений
скорости частицы
номер 6, лежащих
в заданном интервале

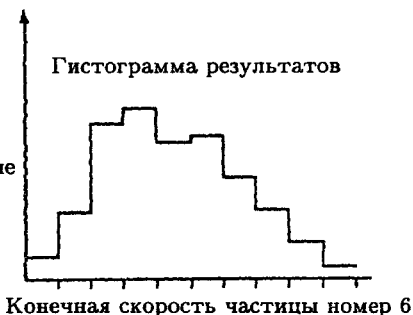


Рис. 2.2.

теорией термодинамического равновесия.

Если для примера мы нарисуем скорость молекулы номер 6 в момент времени $t = 30$ мин. как функцию любой другой начальной переменной в системе, например, такой как начальное положение или скорость частицы номер 133, мы найдем экстремально сложную кривую с очень, очень тонкими деталями, которые должны усредняться к "равновесным" результатам, как только мы усредняем по начальной конечной неопределенности выбранной переменной в данной задаче. Другими словами, распределение начальных значений в рассматриваемом диапазоне должно быть очень похоже на "равновесное" распределение (рис. 2.2).

Физически удовлетворительное обсуждение термодинамики и статистической физики может быть достигнуто, если признать, что проблема состоит в том, чтобы определить условия в системе, в которой различные события происходят при очень различных скоростях. Только если эти скорости существенно различны, термодинамика может быть использована. Таким образом, термодинамика должна различить медленные и быстрые процессы. Когда мы говорим о термодинамическом равновесии для нашей массы газа, мы не ждем беско-

нечное время, а ждем время достаточно продолжительное по сравнению с некоторым классом взаимодействий (например, молекулярных столкновений), который и производит тот тип равновесия, который мы рассматриваем. При изучении кислорода в металлическом канале, мы не ждем так долго, чтобы стенки канала могли бы окислиться или чтобы металл испарился бы в пространство, как в конце концов должно было бы произойти, так как он имеет конечное давление пара, также как мы не рассматриваем всех ядерных реакций, которые время от времени (в согласии с нашей теорией) имеют место для сталкивающихся молекул.

Мы должны быть внимательны при интерпретации этих результатов наших теорий, когда они исследуются с полной математической строгостью. У нас нет физической строгости, которая была бы достаточно хорошо определена. Если имеется что-либо слегка неправильное в нашем определении рассматриваемых теорий, тогда полная математическая строгость может трансформировать эти ошибки в нелепые выводы.

Вопрос заключается в том, как в квантовой механике описать ту идею, что состояние вселенной в прошлом было каким-то особенным. Очевидный путь состоит в том, чтобы сказать, что волновая функция мира (если таковая существует) была определенной ψ_0 при $t = -$ (возраст вселенной). Но это означает, что волновая функция ψ в настоящее время говорит нам не только о нашем мире, но в равной степени и обо всех других возможных вселенных, которые могли эволюционировать из того же самого начала. Это парадокс кота на большом масштабе. Эквивалентно представляется "наш мир" плюс все другие мертвые коты, чья смерть была квантовой контролируемой случайностью. Из этого "наш мир" может быть получен "редукцией волнового пакета". Каков механизм этой редукции? Вы должны или предположить, что наблюдаемые создания делают что-либо, не описываемое квантовой механикой (т.е. уравнением Шредингера), или что все возможные миры, которые могли бы эволюционировать из прошлого, являются одинаково "реальными". Это не значит сказать, что тот или иной выбор является "плохим", но значит только отметить, что я верю, что теперешняя квантовая механика подсказывает тот или иной выбор.

2.2. Трудности гипотетических теорий

При построении новой теории мы должны побеспокоиться о том, чтобы добиться того, чтобы построенные теории были точными, дающими описание, из которого могут быть сделаны определенные заключения. Мы не хотим следовать моде, которая позволила бы нам

менять детали теории в любом месте, в котором мы найдем, что теория противоречит экспериментам или нашим начальным постулатам. Любая неясная теория, которая не является полным абсурдом, может быть поправлена более неясным разговором в каждом случае, в котором возникают несогласованности – и если мы начинаем верить в такой разговор более, чем в (экспериментальное) доказательство, мы будем находиться в плачевном состоянии. Нечто подобного рода происходит с вариантами единой теории поля. Например, может быть, что одна такая теория говорила, что имеется тензор $J_{\mu\nu}$, который "ассоциируется" с электромагнитным тензором. Но что значит такое "ассоциирование"? Если мы устанавливаем, что эти два объекта идентичны, то такая теория предсказывает неверные эффекты. Но если мы не уточнили, что значит "ассоциировано", мы не знаем, что сказано. И разговор о том, что такая "ассоциация" означает "предлагать" некоторое новое соотношение, приводит в никуда. Такие неверные предсказания приписываются неверным "предложениям" скорее, чем неверной теории, и люди сохраняют намерение добавлять новую часть некоторого антисимметричного тензора, которое могло бы как-нибудь устранить недостатки теории. Такой умозрительный разговор заслуживает доверия не больше, чем разговор исследователей чисел, которые ищут случайные соотношения между определенными величинами, которые должны были бы непрерывно модифицироваться в том случае, если бы значения этих величин измерялись все с большей и большей точностью сначала первоначально выбранных величин, а затем все более и более мелких долей этих величин для того, чтобы предлагаемые соотношения не отставали от все более и более малых неопределенностей в измеряемых величинах.

В этой связи я хотел бы рассказать анекдот, который был частью беседы, произошедшей после коктейля в Париже несколько лет тому назад. Это случилось в то время, когда все дамы таинственным образом исчезли, и я столкнулся лицом к лицу со знаменитым профессором, который торжественно сидел в кресле, окруженный своими студентами. Он спросил: "Скажите мне, профессор Фейнман, почему Вы уверены в том, что фотон не имеет массы покоя?" Я ответил: "Конечно, это зависит от массы; очевидно, что если эта масса бесконечно мала, то этот эффект нигде не мог бы проявиться, и я не мог бы опровергнуть его существование, но я был бы рад обсудить, что эта масса не является равной определенной конечной величине. Но условие обсуждения состоит в том, что после того, как я дам аргументы о невозможности такого значения массы, должно быть против правил менять значение массы". Тогда профессор выбрал значение

10^{-6} массы электрона.

Мой ответ состоял в том, что, если мы согласны с тем, что масса фотона связана с частотой как $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$, фотоны с различными длинами волн должны были бы путешествовать с различными скоростями. Тогда при наблюдении затменной двойной звезды, которая от нас достаточно удалена, мы должны были бы наблюдать затмение в голубом и красном диапазоне в различное время. Поскольку ничего подобного не наблюдается, мы можем положить верхний предел на эту массу, который, если использовать числа, порядка 10^{-9} массы электрона. Мой ответ был переведен профессору. Тогда он захотел узнать, чтобы я сказал, если бы он сказал 10^{-12} массы электрона. Переводивший студент был смущен таким вопросом, я протестовал, что это против наших правил, но согласился попробовать снова.

Если фотоны имеют малую массу, одинаковую для всех фотонов, большие относительные различия от поведения безмассовых фотонов ожидаются в тех случаях, когда длина волны больше. Так что из резкости известного отражения импульсов радара, мы можем положить верхний предел на массу фотона, который несколько лучше, чем предел, получаемый из аргумента двойной затменной звездной системы. Оказывается, что эта масса должна быть меньше 10^{-15} массы электрона.

После этого, профессор снова захотел изменить значение массы и сделать ее равной 10^{-18} массы электрона. После этого вопроса все студенты забеспокоились, я запротестовал, поскольку он нарушает правила, делая эту массу все меньше и меньше, я не смог бы привести аргументы в некотором случае. Тем не менее, я попытался снова. Я спросил его, согласен ли он с тем, что если фотон имеет малую массу, то из аргументов теории поля потенциал фотона зависит от расстояния как $\exp(-mr)/r$. Он согласился. Тогда Земля имеет статическое магнитное поле, которое, как известно, продолжается в пространство на некоторое расстояние (что известно из поведения космических лучей), на расстояние, по крайней мере, равное нескольким Земным радиусам. Но это значит, что масса фотона должна быть величиной меньшей, чем та, которая соответствует длине распада порядка 8000 миль или 10^{-20} массы электрона. В этом месте, к моему облегчению, беседа закончилась.

Мы не должны поступать подобным образом при попытках построить теорию гравитации из *известных* полей, модифицируя величины взаимодействий или вводя новые постулаты в каждом месте, в котором мы обнаружим трудности; мы должны быть готовы выдвинуть определенные теории, использующие *известное* поведение



Рис. 2.3.

наших полей, и подготовиться к тому, чтобы отвергнуть их, если они окажутся неадекватными.

2.3. Обмен одним нейтрино

Посмотрим можем ли мы получить силу, чем либо похожую на гравитацию, обменом одним нейтрино. Эти пробные теории, которые мы обсуждаем, неточно сформулированы и не полностью исследованы потому, что они не кажутся подходящими, когда мы делаем первые несколько оценок. Может быть, возможно преодолеть эти трудности, которые заставляют нас отвергнуть эти оценки, но я чувствую, что предпочтительнее упорно придерживаться тех правил, относительно которых мы договорились, что мы должны пытаться дать объяснение в терминах *известных* свойств частиц без каких бы то ни было новых постулатов. Это мне не удалось.

Обмен нейтрино может обладать потенциалом, который зависит от расстояния как $1/r$, поскольку его масса равна нулю. Но так как нейтрино имеет полуцелый спин, одиночный обмен не приводит к статической силе, поскольку после одиночного обмена источник нейтрино не находится больше в том же самом состоянии, в котором он был первоначально. Для того, чтобы получить из обмена силу, а не только рассеяние, необходимо, чтобы диаграмма, включающая этот обмен, могла бы интерферировать с диагональными членами в амплитуде рассеяния, что состоит в том, что произошло бы добавление к амплитуде, которая соответствует тому, что ничего не происходит (2.3). Таким образом, возможность обмена одним нейтрино управляется тем фактом, что половина единицы углового момента не может быть испущена объектом, который остается в том же самом внутреннем состоянии, в котором находился исходно.

Бесспиновый мезон с нулевой массой мог бы привести к потенциалу, пропорциональному $1/r$. Наиболее просто вычислить дополнительную энергию взаимодействия в координатном пространстве по сравнению с импульсным пространством. Импульсный пропагатор для такой частицы был бы $1/k^2$. Нейтринный пропагатор имеет вид $1/k$ или k/k^2 , таким образом имеет более высокую степень k в числи-

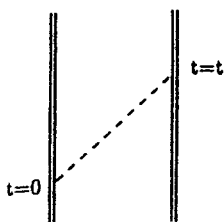


Рис. 2.4.

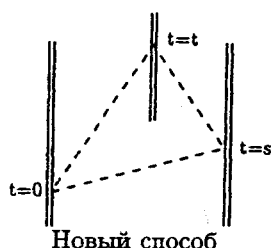
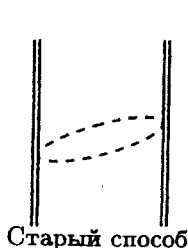


Рис. 2.5.

теле; было бы даже еще труднее связать такой пропагатор с силой типа гравитационной. Для мезона с нулевым спином мы вычисляем диаграмму, интегрируя по всем возможным моментам времени, в которые происходит испускание, и по всем моментам времени захвата, в которые происходит захват мезона, пропагатор $\delta_+ = 1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$ (рис. 2.4), дополнительная энергия есть (опуская множители)

$$E \propto \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)} \propto \frac{1}{r}. \quad (2.3.1)$$

В последнем соотношении интегрирование проводится только по времени испускания (или только по времени захвата); повторное интегрирование вводит временной множитель, который представляет нормальное опережение фазы, так что он не представляет энергии взаимодействия.

Мы не установили точно только, как мы ожидаем, чтобы массы появились как множители, но имеется весьма мало смысла делать это, поскольку мы не знаем никаких бесспиновых нейтрино. Эта теория убивается половиной единицы углового момента, переносимого при взаимодействии.

2.4. Обмен двумя нейтрино

Может быть мы все еще можем получить теорию гравитации путем обмена двух нейтрино, так что они могут иметь диагональные расчетные элементы. Нет ясного пути, идя по которому, можно увидеть, почему энергия взаимодействия между двумя большими объектами должна была бы быть в точности пропорциональна их массам, хотя очевидно, что она была бы, по крайней мере, грубо пропорциональна числу частиц в каждом из них. Оставляя в стороне это обстоятельство (или возвращаясь назад, если что-либо работает не так, как следует), мы будем говорить, что взаимодействие двух объектов пропорционально произведению $m_1 \cdot m_2$, умноженному на взаимодействие одной пары частиц. Мы продвигаемся много дальше, чем в предыдущем случае, но делаем это несколько более аккуратно, поскольку

результаты более интересные. Амплитуда того, что испускается пара нейтрино за время dt , есть $G' dt$. Амплитуда того, что одно нейтрино испускается из одной точки в другую равна $1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$. Мы введем массы взаимодействующих частиц m_1, m_2 , говоря, что эти массы должны представлять общее число частиц так, что энергия между двумя массами равна

$$E = m_1 m_2 G'^2 \int \frac{i dt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)^2}. \quad (2.4.1)$$

Этот интеграл может быть весьма легко взят, либо вычислением вычетов в полюсах или простым дифференцированием интеграла (2.3.1), так что энергия равна

$$E = m_1 m_2 \frac{G'^2 \pi}{2} \frac{1}{r^3}, \quad (2.4.2)$$

где r расстояние, разделяющее частицы. Таким образом, мы обнаруживаем, что обмен двумя нейтрино приводит значение энергии, которое неправильно зависит от расстояния. Это заключение приводит к выводу, что теория выглядит безнадёжно. Но надежда возникает вновь, если мы анализируем ситуацию несколько дальше. Оказывается, что мы можем получить член, который зависит как $1/r$, рассмотрением обмена между тремя массами. Три частицы могут обмениваться двумя нейтрино между любыми из трех пар и новым способом (рис. 2.5). Положим, что первое испускание имело место при $t = 0$, а другие вершины имели место в моменты времени t и s . Тогда во взаимодействие вовлечена была бы энергия

$$G'^3 m_1 m_2 m_3 i^2 \int \frac{ds dt}{(s^2 - r_{12})(t^2 - r_{23})[(s - t)^2 - r_{31}]}. \quad (2.4.3)$$

Этот интеграл может быть вычислен последовательным интегрированием в каждом из полюсов и результат равен

$$E = -G'^3 m_1 m_2 m_3 \pi^2 \frac{1}{(r_{12} + r_{23} + r_{13})r_{12}r_{23}r_{13}}. \quad (2.4.4)$$

Если одна из масс, скажем масса номер 3, существенно удалена, так что r_{13} много больше, чем r_{12} , то мы, действительно, получаем, что взаимодействие между массами номер 1 и номер 2 обратно пропорционально величине r_{12} .

Что же такое масса m_3 ? Это, очевидно, может быть некоторая эффективная средняя величина по всем другим массам во вселенной.

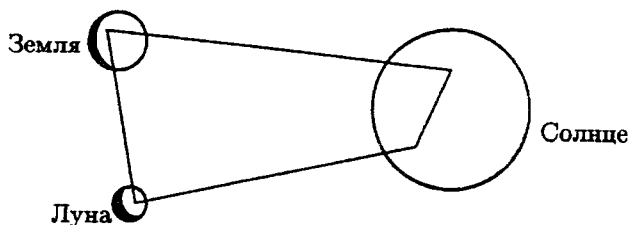


Рис. 2.6.

Влияние удаленных масс, сферически распределенных вокруг масс 1 и 2, проявилось бы как интеграл по средней плотности; мы бы имели

$$E = -\frac{G'^3 m_1 m_2 \pi^2}{r_{12}} \int \frac{4\pi \rho(R) R^2 dR}{2R^3}, \quad (2.4.5)$$

где R – большое значение расстояния $R \approx r_{12} \approx r_{23}$. Для простой оценки мы можем взять плотность, равной константе внутри сферы; мы выполним интегрирование от некоторого начального значения радиуса, которое, тем не менее, достаточно большое по сравнению со значением r_{12} . Вклад всех масс вне сферы с этим минимальным значением радиуса является чем-то типа

$$E = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}} 2\pi^3 G'^3 \ln \left(\frac{R_0}{R_i} \right) \rho. \quad (2.4.6)$$

Этот логарифм является некоторой величиной, которая не может быть многим больше, чем 50 или 100, так как характерное значение внешнего радиуса может быть равно $Tc = 10^{10}$ световых лет $= 10^{28}$ см. Такая энергия действует подобно гравитация; можем ли мы опровергнуть это? Да, и двумя способами. Во-первых, величина этого логарифмического члена становится сравнимой с величиной всей силы (2.4.2), пропорциональной $1/r^3$, на расстояниях больших, чем те, на которых ньютоновский закон гравитации уже проверен. Более того, если мы рассматриваем влияние Солнца на гравитационное взаимодействие между Землей и Луной, мы обнаруживаем, что это влияние должно было бы приводить к наблюдаемым отклонениям в орбитальном движении, так как расстояние от Земли до Солнца меняется при движении Земли вдоль своей орбиты. Мы оцениваем этот эффект следующим образом. Мы хотим сравнить вклад Солнца во взаимодействие Земля – Луна со вкладом всех остальных звезд. Это влияние зависит от массы и обратно пропорционально кубу расстояния. Для логарифма меньшего, чем 1000, вклад Солнца превосходит в 10^{12} вклад звезд для любой разумной оценки плотности звезд! Таким

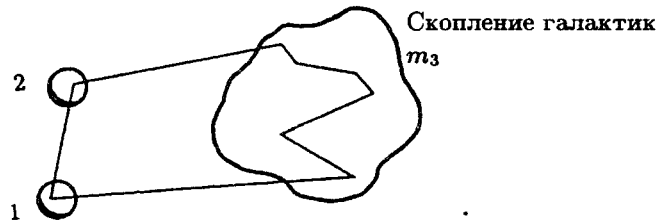


Рис. 2.7.

образом, мы можем пренебречь вкладом звезд. Но таких больших возмущений, которые бы соответствовали изменению эффективной гравитационной константы, которое бы возникало от ± 2 процентной вариации расстояния между Землей и Солнцем, не наблюдалось в системе Земля – Луна.

Но можно ли все-таки спасти эту теорию? Представляется, что процессы более высокого порядка могли бы снять эти трудности, например процесс, включающий 4 нейтринных линии или даже более высокие порядки, мог бы быть вычислен. Ясно, что член, изображенный на рис. 2.6, мог бы дать вклад порядка m_3^2 , т.е. квадрата числа частиц окружающих масс, и, следовательно, влияние удаленной туманности могло бы значительно превзойти влияние Солнца. Этот факт мог бы быть еще более справедливым для более высоких порядков теории. Мы должны, следовательно, суммировать диаграммы различных порядков, типа изображенных на рис. 2.7.

Тем не менее, насколько я могу судить из статистики Ферми, члены различных порядков оказываются противоположными по знаку и никакого удовлетворительного результата не получается.

Чтобы объяснить эту идею более формально, мы полагаем, что в теории (где есть, скажем, скаляр ψ) с квадратичной связью $\bar{\psi}\phi^2\psi$ математическое ожидание для произведения двух полевых переменных $\phi(1)\phi(2)$ в состоянии при наличии многих туманностей может определяться соотношением

$$\langle \phi(1)\phi(2) \rangle = \delta_+(S_{12}^2) + C, \quad (2.4.7)$$

где первый член есть обычный вакуумный член, а C возникает от взаимодействия с удаленной туманностью. Величина C практически не зависит от 1 и 2, если они (1 и 2) близки по сравнению с радиусом вселенной.

Тем не менее, я думаю, что для спина $1/2$ не может возникать C . Для фотонов такой член, даже если он возникает, не имел бы желаемого эффекта, т.к. насколько я могу видеть, этот член не является квадратичным для связи фотонов.

Итак, теория с двойной нейтринной парой не привела к плодотворному результату. Однако, мы научились кое-чему, работая с этой теорией от начала до конца, что представляет собой весьма замечательную идею. Если мы построим теорию гравитации, основанную на взаимодействии трех тел, в которой одно тело достаточно далеко удалено от других двух тел, закон $1/r$ будет выполняться, если квант поля имеет целый спин, и величина потенциала будет пропорциональна количеству вещества в удаленном теле. Эти туманности, которые до сих пор не влияли на наши физические законы, могут играть важную роль в гравитационном взаимодействии!

Тем не менее, для того, чтобы построить такую теорию, мы должны были бы предположить существование бозона с нулевой массой, который взаимодействует квадратично со всей остальной материей во вселенной, и должны были бы вернуться к вопросу, почему сила в точности пропорциональна массе. Но кажется, что нет смысла следовать по такому извилистому пути, когда мы не достигли цели с использованием известных частиц. Если предположить существование новой частицы, мы можем построить абсолютно хорошую теорию, предполагая существование частицы с нулевой массой и со спином 2, которая взаимодействует линейно с веществом.

Лекция 3

3.1. Спин гравитона

Ранее мы обсуждали с точки зрения воображаемых венерианских ученых возможные интерпретации гравитации на языке известных полей. Мы предполагаем, что эти ученые знают общие свойства различных вариантов теории поля; они пытаются отыскать поля, обладающие характеристиками гравитации. Для того, чтобы сделать различие между разными возможностями, нам необходимо вспомнить следующие свойства гравитации; что большие массы притягивают с силой, пропорциональной инерции и обратно пропорциональной квадрату расстояния; также, что масса и инерция характеризуют значение энергии, так что энергия связи атомов и ядер имеет гравитационное поведение, аналогичное энергии покоя.

Мы можем представить себе, что одна группа теоретиков, специалистов по теории поля, пыталась интерпретировать гравитацию в терминах известных частиц, как мы это делали на предыдущей лекции, и эта попытка провалилась. Другая группа теоретиков, специалистов по теории поля, начала выводить некоторые свойства нового поля, которое вело бы себя как гравитация.

Во-первых, обнаруживается, что гравитация обладает дальностью, что автоматически означает, что энергия взаимодействия зависит от расстояния как $1/r$. Не существует другой подобной возможности в теории поля. Это поле переносится посредством обмена частицей, которую ниже будем называть гравитоном. Она должна иметь массу $m = 0$, так что сила, пропорциональная $1/r^2$, следует из данного взаимодействия. Следующая догадка, которую мы должны сделать перед тем, как мы сможем начать работать в теории поля, состоит в том, что необходимо определить спин гравитона. Если спин равен $1/2$ или полуцелый, то мы столкнемся с трудностями, которые обсуждались в последней лекции (разделе 2.3), и где не было обнаружено интерференции между амплитудами одиночного обмена и не было обмена взаимодействием. Таким образом, спин гравитона должен быть целым, т.е. некоторое число из последовательности $0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Любое из этих значений спина давало бы взаимодействие, пропорциональное $1/r$, так как радиальная зависимость определяется исключительно массой. Для того, чтобы выбрать между различными возможными значениями спина, мы должны посмотреть на более тонкое различия между эффектами, обусловленными гравитонами с различными значениями спина. Мы можем себе представить, что на-

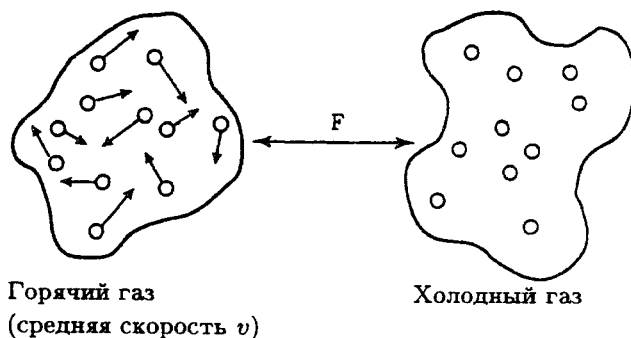


Рис. 3.1.

ша группа теоретиков, специалистов по теории поля, разделила между собой эту работу так, что одни вывели возможные заключения из гипотезы, что спин равен нулю, другие анализировали возможность того, что спин равен 1, другие, что спин равен 2, 3 или даже 4. Затраты труда, связанные с обсуждением деталей теории для более высоких значений спина, значительно больше, чем для более низких значений спина, так что мы будем обсуждать эти значения в порядке возрастания.

Теория, в которой спин частицы равен 1, в большой степени то же самое, что и электродинамика. Нет ничего такого, что запрещало бы существование двух полей со спином 1, но гравитация не может быть одним из этих полей, потому что одно из следствий спина 1 заключается в том, что одинаковые заряды отталкиваются, а противоположные притягиваются. Это фактически свойство всех теорий с нечетным спином; и наоборот, обнаружено, что теории с четным спином описывают силы притяжения, так что нам надо рассматривать только значения спинов 0 или 2 и возможно 4, если теория со спином 2 окажется неудовлетворительной; нет нужды работать с более сложными вариантами теории до той поры, пока не обнаружено, что более простые теории оказываются неадекватными.

Отклонение теорий гравитации со спином гравитона, равным 0, делается на основании гравитационного поведения энергии связи. Мы не намереваемся обсуждать здесь все детали до конца; мы приведем аргументы по аналогии, а затем приступим напрямую к построению теории со спином гравитона, равным 2. Зададим следующий вопрос: каково притяжение между движущимися объектами; больше оно или меньше, чем для статических объектов? Мы можем, например, вычислить взаимное притяжение двух масс газа; экспериментальное исследование гравитации приводит к выводу, что эта сила больше в том случае, если газ горячее (рис. 3.1).

Мы знаем, как это происходит в электродинамике. Электрические силы не меняются при случайном движении частиц. Теперь энергия взаимодействия пропорциональна ожидаемому значению оператора γ_t , который равен $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Так как потенциал, следующий из этого оператора, не является зависимым от скорости, то коэффициент пропорциональности должен быть $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Это означает, что энергия взаимодействия, следующая из оператора 1, соответствующего полю со спином 0, была бы пропорциональна $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Другими словами, теория со спином гравитона, равным 0, предсказывала бы, что взаимодействие между массами горячего газа было бы *меньше*, чем для холодного газа. Аналогичным способом может быть показано, что теория со спином гравитона, равным 2, приводит к энергии взаимодействия, которая имеет $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ в знаменателе, что согласуется с экспериментальными результатами о влиянии на гравитацию энергии связи. Таким образом, теория со спином гравитона 0 должна быть отвергнута, и нам необходимо рассматривать спин гравитона 2 для того, чтобы иметь теорию, в которой взаимодействие будет пропорционально величине энергии.

3.2. Амплитуды и поляризации в электродинамике, типичной полевой теории

Сейчас наша программа состоит в том, чтобы построить теорию со спином гравитона 2 по аналогии с другими теориями поля, которые у нас есть. В этом месте мы могли бы перейти на взгляд Эйнштейна на теорию гравитации, так как он получил правильную теорию, но будет более поучительно и проще для нас изучить свойства теории, если мы поддерживаем фантазию венерианских ученых для того, чтобы предположить свойства правильной теории. Поэтому, предполагая, что многие ученые *сегодня* могут придти к правильной теории гравитации, мы отнюдь не умаляем достижение Эйнштейна. В настоящее время у нас есть ретроспективный, хорошо развитый формализм, которого не было пятьдесят лет назад, и у нас есть указание Эйнштейна на правильное направление теории. Очень трудно представить себе, чтобы мы делали, если бы мы не знали того, что мы знаем, когда мы знаем то, что знаем, но давайте продвинемся дальше и сделаем предположения о правильной теории по аналогии с электродинамикой.

В теориях со скалярным, векторным и тензорным полями (другой способ обозначения спина 0, 1, 2) поля описываются скалярной, векторной или тензорной потенциальными функциями

Спин 0	X	Скалярный потенциал
Спин 1	A_μ	Векторный потенциал
Спин 2	$h_{\mu\nu}$	Симметричный тензорный потенциал

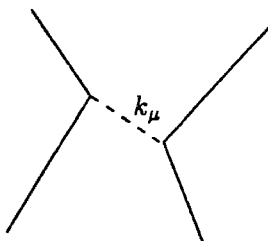


Рис. 3.2.

Другая теория могла бы следовать из предположения, что тензор – антисимметричный; это не привело бы к чему-то, напоминающему гравитацию, скорее к теории, напоминающей электромагнетизм; шесть независимых компонент антисимметричного тензора могли появиться как два пространственных вектора.

Источник электромагнетизма – векторный ток j_μ , который связывается с векторным потенциалом уравнением

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2} j_\mu. \quad (3.2.1)$$

Сделаем преобразование Фурье и используем импульсное представление. Оператор Даламбера в импульсном представлении есть просто k^2 . Вычисление амплитуд в электромагнетизме делается с помощью пропагаторов, связывающих токи, способом, изображенным диаграммами, такими, как на рис. 3.2. Вычислим амплитуды для таких процессов как функцию релятивистских инвариантов, и ограничим наш ответ, как предписывается законами сохранения импульса и энергии. Суть электромагнетизма состоит в детальном описании взаимодействия между током и полем, т.е. $j^\mu A_\mu$; на языке источников это становится взаимодействием между двумя токами

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu. \quad (3.2.2)$$

Координатные оси могут быть выбраны таким образом, что вектор k_μ может быть выражен как

$$k^\mu = (\omega, \kappa, 0, 0). \quad (3.2.3)$$

Заметим, что мы используем упорядочение индекса 4, 3, 2, 1 так, что

$$x^\mu = (t, z, y, x), \quad A_\mu = (A_4, A_3, A_2, A_1). \quad (3.2.4)$$

Тогда ток-ток взаимодействие, когда незаряженные частицы имеют 4-импульс k^μ , задается соотношением

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2} \right) j^\mu = \frac{-1}{\omega^2 - \kappa^2} (j'_4 j_4 - j'_3 j_3 - j'_2 j_2 - j'_1 j_1). \quad (3.2.5)$$

Закон сохранения заряда, который утверждает, что четыре-дивергенция тока равна нулю, в пространстве импульсов становится ограничением

$$k_\mu j^\mu = 0. \quad (3.2.6)$$

В этой специальной системе координат, которую мы выбрали, это ограничение связывает третий и четвертый компонент этих токов соотношениями

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0, \quad \text{или} \quad j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4. \quad (3.2.7)$$

Если мы подставляем выражение для j_3 в выражение амплитуды (3.2.5), мы получаем, что

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{\kappa^2} \right) j^\mu = \frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (j'_1 j_1 + j'_2 j_2). \quad (3.2.8)$$

Теперь мы можем дать интерпретацию двум членам этого уравнения. Четвертый компонент тока есть просто плотность заряда; в этой ситуации, когда у нас есть стационарные заряды, это единственный ненулевой компонент. Первый член не зависит от частоты, и когда мы делаем обратное преобразование Фурье для того, чтобы преобразовать выражение в пространство взаимодействия, мы находим, что полученное соотношение представляет мгновенно действующий кулоновский потенциал

$$(F.T.)^{-1} \left[\frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} \right] = \frac{e^2}{4\pi r} \delta(t - t'). \quad (3.2.9)$$

Это выражение всегда представляет собой главный член в пределе малых скоростей. Этот член кажется мгновенным, но это только потому, что разделение на два члена, которое мы сделали, очевидно, не является ковариантным. Общее взаимодействие на самом деле ковариантная величина; второй член представляет поправки к мгновенному кулоновскому взаимодействию.

Во взаимодействие между двумя токами всегда вовлечены виртуальные фотоны. Мы можем узнать кое-что о свойствах реальных фотонов из анализа полюсов амплитуды взаимодействия, которая имеет место при $\omega = \pm \kappa$. Конечно, любой фотон, который участвует в физическом эффекте, может рассматриваться как виртуальный фотон, так как он не наблюдается до тех пор, пока не произойдет взаимодействие, так что наблюдаемые фотоны никогда не характеризуются соотношением $\omega = \pm \kappa$. Тем не менее, нет трудностей в приближении к этому пределу; физически мы знаем фотоны, которые приходят от Луны или Солнца, для которых относительная разница между величинами ω и κ — очень, очень мала. Если мы полагаем, что мы

наблюдаем фотоны от удаленных галактик, которые находятся от наблюдателя на расстоянии в миллионы световых лет, мы понимаем, что это должно придать тот физический смысл, чтобы думать, что мы близки к полюсу так, что для этих фотонов не может быть никакого физического эффекта не являющимся похожим на полюсный член. Вычет полюсного члена при $\omega = \kappa$ есть сумма двух членов, каждый из которых есть произведение двух множителей. Кажется, что существует один тип фотонов, которые взаимодействуют с токами j_1 и j'_1 , и другой тип фотонов, которые взаимодействуют с токами j_2 и j'_2 . Пользуясь обычным языком, мы описываем данную ситуацию, говоря, что имеются две независимые поляризации для фотонов.

Круговая поляризация есть ничто иное, как линейные комбинации плоскополяризованных фотонов, соответствующих разделению суммы произведений $(j'_1 j_1 + j'_2 j_2)$ в различном базисе, таким образом мы имеем

$$(j'_1 j_1 + j'_2 j_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + i j_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 + i j'_2)^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - i j_2) \frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 - i j'_2)^*. \quad (3.2.10)$$

По-прежнему, мы видим здесь, что имеется два типа фотонов. Преимущество такого разделения становится очевидным, когда мы рассматриваем вращение координатной системы вокруг направления движения фотона 3. Фотоны с круговой поляризацией вращаются вокруг себя, потому что они меняют только фазу при повороте системы координат на угол θ ; эти фазы равны $\exp(i\theta)$ и $\exp(-i\theta)$.

Квантово-механические правила, описывающие поведение систем под действием вращения, говорят нам, что системы, имеющие такое свойство, находятся в состоянии с определенным значением углового момента; фотоны, которые меняют фазу как $\exp(i\theta)$, имеют проекцию углового момента 1, а фотоны с изменением фазы $\exp(-i\theta)$ — проекцию, которая равна -1 .

Мы могли бы ожидать, что если фотоны имеют спин, равный 1, то мог бы существовать третий тип фотонов, имеющих проекцию спина, равную 0. Тем не менее, может быть показано, что для релятивистской теории частиц с нулевой массой покоя разрешены только два состояния проекции, имеющие максимальное и минимальное значения проекции вдоль направления распространения. Этот общий результат, справедливый для частиц с любым спином, был доказан Вигнером. Мы не будем приводить здесь это доказательство, но просто для тех случаев, которые нас интересуют, фотона сейчас и гравитона ниже, покажем существование этих двух состояний точным

разделением этого взаимодействия.

Можно было бы возразить, что мы показали существование двух состояний для *токов*, которые являются операторами источника в большей степени, чем для самих фотонов. Но одно влечет за собой другое, так как амплитуда процесса испускания фотон с круговой поляризацией -1 задается оператором тока $(j_1 + ij_2)/\sqrt{2}$ и т.д. Если мы вращаем систему координат, то амплитуда для процесса излучения не должна бы меняться, так что, мы приходим к требованию соответствующего изменения фазы для самих фотонов. Действительная поляризация фотонов, возможно, наилучшим образом определяется проекциями векторного потенциала в выделенных направлениях, таких как e_μ (e_μ – единичный вектор). Взаимодействие такого фотона с током j^μ , т.е. амплитуда поглощения или испускания такого фотона задается соотношением

$$-e_\mu j^\mu = (\text{проекция } j^\mu \text{ вдоль } e_\mu) \quad (3.2.11)$$

3.3. Амплитуды для обмена гравитона

Выпишем амплитуды для обмена гравитоном по простой аналогии с электродинамикой. Мы должны будем обратить особое внимание на мгновенные нерелятивистские члены, так как только эти члены являются в существующих экспериментальных наблюдениях гравитации. Полная теория дает нам как члены, описывающие мгновенное взаимодействие (аналогичное кулоновскому взаимодействию), так и поправки, которые появляются как запаздывающие волны; мы должны будем разделить эти запаздывающие эффекты для вычислений наблюдаемых эффектов.

Мы предполагаем, что оператор Даламбера в импульсном пространстве есть k^2 ; по простой аналогии с уравнением (3.2.1) мы ожидаем, что тензор поля устанавливает соотношение с тензором источника следующим образом

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} T_{\mu\nu}. \quad (3.3.1)$$

Какое это может быть взаимодействие? Так как электродинамика описывает токи, предположим, что тензоры источника появляются в энергии взаимодействия следующим образом

$$T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu\nu}. \quad (3.3.2)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы описать частные характеристики тензора T так, чтобы воспроизводились характеристики гравитации. *A priori* возможно, что тензор T включает в себя градиенты, который и есть вектор k . Если в тензор включены только

градиенты, то в результирующей теории нет монополей; простейшими объектами могут быть диполи. Мы хотим, чтобы тензор T был таким, как в нерелятивистском пределе, а плотность энергии появлялась по аналогии с плотностями заряда j_4 . Как хорошо известно, мы имеем в электромагнетизме тензор давления, чья компонента T_{44} является в точности плотностью энергии электромагнитного поля. Следовательно, очень вероятно, что имеется некоторый общий тензор, чей компонент T_{44} является плотностью полной энергии; это будет задавать ньютоновский закон гравитации в пределе малых скоростей, энергия взаимодействия при этом

$$\frac{-T'_{44} T_{44}}{\kappa^2}. \quad (3.3.3)$$

Затем, для того, чтобы иметь правильную релятивистскую теорию, необходимо следовать тому, чтобы амплитуда включала в себя полный тензор T , как мы предполагали в соотношении (3.3.2).

Имеется свойство этого тензора, которое мы не еще упомянули. След симметричного тензора – инвариантная величина, не обязательно равная нулю. Таким образом, при вычислениях, основываясь на симметричном тензоре с ненулевым следом, мы могли бы взять теорию, которая есть смесь теорий со спином равным 0 и со спином равным 2. Если мы выписываем теорию, использующую этот тензор, мы найдем, когда мы придем к разделению взаимодействия на его поляризации, что очевидно имеется три поляризации вместо двух, которые допустимы для безмассовой частицы со спином 2. Для того, чтобы быть более точными, мы можем получить кроме взаимодействия (3.2.2) другую возможную инвариантную форму, пропорциональную $T^\mu{}_\mu (1/k^2) T^\nu{}_\nu$. Мы попытаемся установить соотношения между этими двумя инвариантами таким образом, чтобы не было обмена реальными гравитонами с угловым моментом, равным нулю.

Выпишем в точности все различные члены следующим образом

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (T'_{44} T_{44} - 2T'_{43} T_{43} - 2T'_{42} T_{42} - 2T'_{41} T_{41} + 2T'_{23} T_{23} + 2T'_{31} T_{31} + 2T'_{21} T_{21} + T'_{33} T_{33} + T'_{22} T_{22} + T'_{11} T_{11}). \quad (3.3.4)$$

В электродинамике мы получили упрощение, используя закон сохранения заряда. Здесь мы получаем упрощение, используя закон сохранения энергии, который может быть выражен в импульсном пространстве следующим образом

$$k^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.5)$$

В нашей обычной системе координат, где компоненты k^1 и k^2 равны нулю, получаем связь компонентов нашего тензора с индексами 3 и 4

$$\omega T_{4\nu} = -\kappa T_{3\nu}. \quad (3.3.6)$$

Используя это соотношение для исключения компонентов с индексом 3, мы находим, что амплитуда разделяется на часть, описывающую мгновенное взаимодействие, имеющую характерный числитель κ^2 , и запаздывающую часть со знаменателем $(\omega^2 - \kappa^2)$. Для "мгновенного" члена мы получаем

$$-\frac{1}{\kappa^2} \left[T'_{44} T_{44} \left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right) - 2T'_{41} T_{41} - 2T'_{42} T_{42} \right], \quad (3.3.7)$$

и для "запаздывающего" члена

$$\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (T'_{11} T_{11} + T'_{22} T_{22} + 2T'_{21} T_{21}). \quad (3.3.8)$$

Трансверсальные компоненты тензора $\mathbf{T}$ предположительно независимы, так что они представляют сумму трех независимых произведений или трех поляризаций. Мы видим, что такая теория содержит смесь спина 0 и спина 2. Для того, чтобы исключить часть, соответствующую спину нуль, мы должны добавить к нашей амплитуде член вида

$$\alpha T'^{\nu}{}_{\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu}{}_{\mu}. \quad (3.3.9)$$

В "запаздывающем" члене добавляются компоненты тензора следующим образом

$$\alpha \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} (T'_{11} + T'_{22})(T_{11} + T_{22}).$$

Мы можем выбрать параметр α так, что "запаздывающий" член содержит только сумму двух независимых произведений. Соответствующее значение параметра α равно $-1/2$ для того, чтобы сделать запаздывающий член равным

$$\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2} \left[\frac{1}{2} (T'_{11} - T'_{22})(T_{11} - T_{22}) + 2T'_{12} T_{12} \right]. \quad (3.3.10)$$

Имеется два направления поляризации, которые порождаются этими комбинациями элементов тензора

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11} - T_{22}) \quad \text{и} \quad \sqrt{2}(T_{12}). \quad (3.3.11)$$

Различная нормализация есть результат симметрии нашего тензора; мы можем восстановить симметрию, записывая

$$\sqrt{2}T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12} + T_{21}). \quad (3.3.11a)$$

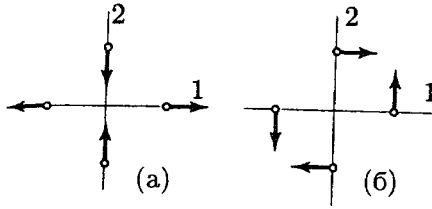


Рис. 3.3.

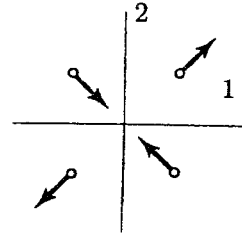


Рис. 3.4.

Следовательно, возможное решение типа плоской волны, представляющее наш гравитон, имеет вид

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik_\sigma x^\sigma), \quad (3.3.12)$$

где тензор поляризации $e_{\mu\nu}$ имеет следующие ненулевые компоненты

$$e_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.3.13)$$

Наше взаимодействие в общем виде

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T'^{\mu}{}_{\mu} \frac{1}{k^2} T^{\nu}{}_{\nu}$$

может быть записано как $T'^{\sigma\tau} P_{\sigma\tau,\mu\nu} T^{\mu\nu}$, где $P_{\sigma\tau,\mu\nu}$ — пропагатор для гравитона описывается следующим соотношением:

$$P_{\sigma\tau,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\tau}) \frac{1}{k^2}.$$

Для простоты мы обычно будем предпочитать записывать этот пропагатор как простой множитель $1/k^2$ и представлять взаимодействие виртуальными гравитонами, испущенными источником с амплитудой

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^{\sigma}{}_{\sigma} \right)$$

и со связью $h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ для поглощения.

Амплитуда для излучения реального гравитона поляризации $e_{\sigma\tau}$, если $e^{\sigma}{}_{\sigma} = 0$, как в соотношении (3.3.13), задается внутренним (скалярным) произведением $e_{\sigma\tau} T^{\sigma\tau}$.

3.4. Физическая интерпретация в терминах амплитуд

Поляризация гравитона есть тензорная величина. Мы можем наглядно представить это понятие с помощью картинок, подобных тем, которые мы использовали в описании давлений; мы рисуем стрелки, показывающие направление, которое ассоциировано с нормалью к поверхности, к осям координат. В этой плоскости, перпендикулярной

направлению распространения, мы имеем два давления, изображенные на рис. 3.3. Имеется только две возможности для квадрупольного давления; давления, представляемые стрелками, направленными к началу координат (или от начала координат), представляют собой тип давления в жидкости, которое соответствует спину, равному нулю. "Давления" (в действительности вращения), представляемые всеми стрелками, поворачивающимися в направлении по часовой стрелке (или против часовой стрелки), соответствует спину 1.

Давление, представленное на рис. 3.3(а), может относиться к осям, которые повернуты на угол 45° от исходных осей координат; в этом случае картинка на рис. 3.4 есть ничто иное, как то же самое давление, изображенное на рис. 3.3(а), повернутое на угол 45° . Отсюда мы находим, что эти поляризации поворачиваются одна в другую при повороте осей на угол 45° . Если мы поворачиваем на угол 90° , то каждая поляризация переходит в себя; стрелки меняют свое направление, но мы должны думать об осциллирующей зависимости от времени, которая связана с этими поляризациями. Двигаясь этим путем, мы видим, что полное вращение на угол 360° соответствует двум полным циклам фазы – спин равен двум. Существуют две ортогональных линейных комбинации этих двух поляризаций, чьи изменения вращательной фазы ведут себя как $\exp(2i\theta)$ и $\exp(-2i\theta)$. Это просто различное разделение "запаздывающего" члена; методом проб и ошибок мы можем просто представить эти две части

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (T'_{11} - T'_{22} + i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} - i2T_{12}) \\ & + \frac{1}{4} (T'_{11} - T'_{22} - i2T'_{12})(T_{11} - T_{22} + i2T_{12}). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Эти части характеризуются спином 2, проекция ± 2 тензоров очевидна, когда мы сравниваем форму этих произведений с произведением гармонических многочленов; мы знаем, что $(x \pm iy)(x \pm iy)$ очевидно характеризуются спином 2 и проекцией ± 2 ; эти произведения равны $(xx - yy \pm 2ixy)$, которые имеют ту же структуру, что и члены в соотношении (3.4.1). Таким образом, мы приходим к выводу, что при $\alpha = -1/2$, наши гравитоны имеют только две возможных поляризации. Эта возможно правильная теория, эквивалентная теории поля спина 2, которую ранее рассматривали теоретики Паули и Фирц и выразили на языке полевых лагранжианов [FiPa 39].

Мы подходим к теории со спином 2, исходя из аналогий с теорией со спином 1; таким образом мы без объяснений предполагаем существование гравитонных плоских волн; так как плоские волны фотона представляются полюсами пропагатора, и пропагатор гравитона

также имеет полюсы $\omega = \pm \kappa$. Но соответствующие наблюдательные свидетельства отсутствуют; мы не наблюдали ни гравитонов; ни даже классических гравитационных волн.

Имеются некоторые проблемы, которыми мы пренебрегли полностью в настоящее время, но к которым мы вернемся позднее. Источники электромагнетизма сохраняются, и энергия также сохраняется, которая есть источник гравитации. Но это сохранение совершенно другого характера, так как фотон — незаряжен, следовательно, он не является источником самого себя, тогда как гравитон содержит энергию, равную $\hbar\omega$, и следовательно, он сам является источником гравитонов. Мы говорим об этом, как о нелинейности гравитационного поля.

В электромагнетизме мы можем вывести полевые уравнения (уравнения Максвелла), которые несогласованы, если заряд не сохраняется. До сих пор мы избегали обсуждения полевого уравнения для гравитации, поскольку мы беспокоились только об амплитудах, но не о самих полях. Также нам необходимо уже обсудить, является ли теория, которую мы можем написать, зависимой от калибровки, и можем ли мы написать вообще полевое уравнение, соответствующее максвелловским уравнениям $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu = j^\mu$.

Имеются некоторые физические свойства нашей теории, которые могут быть обсуждены без полевых уравнений, просто из рассмотрения формы взаимодействия. Запишем полное выражение, соответствующее $\alpha = -1/2$:

$$\begin{aligned} & 2 \left[T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T'^{\nu}{}_{\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu}{}_{\mu} \right] \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \left[T'_{44} T_{44} \left(1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right) + T_{44} (T'_{11} + T'_{22}) \right. \\ &\quad \left. + T'_{44} (T_{11} + T_{22}) - 4T'_{41} T_{41} - 4T'_{42} T_{42} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\kappa^2 - \omega^2} [(T'_{11} - T'_{22})(T_{11} - T_{22}) + 4T'_{12} T_{12}]. \quad (3.4.2) \end{aligned}$$

(Если потребуется, то член $(\omega^2/\kappa^2)T'_{44}T_{44}$ может заменяться на $T'_{43}T_{43}$ или на $(T_{44}T'_{33} + T_{33}T'_{44})$). Мы уже обсудили запаздывающий член и его поляризации. Теперь проанализируем первый член. Тензор T — тензор давления; для медленных частиц пространственные компоненты порядка v/c , так что ньютоновский закон представляется только одним своим произведением $T'_{44}T_{44}$. Другие произведения представляют собой что-то подобное магнетизму. Заметим, что при таком разделении они появляются как члены, описывающие мгновенное взаимодействие. Запаздывающие эффекты, движущиеся волны появля-

ются только при четных степенях v/c .

Мы можем думать, что члены, описывающие мгновенное взаимодействие типа магнитного, могли бы давать наблюдаемые эффекты, например, могло бы быть небольшое изменение в гравитационном взаимодействии между двумя колесами, если мы вращаем их все быстрее и быстрее. Рассматриваемая теория действительно предсказывает подобные эффекты, но практически подобные силы не только были бы очень, очень малы, но они также были бы скрыты множеством других эффектов. Магнитные силы, такие как притяжение между двумя проводящими ток проволочками, достаточно просто наблюдать только потому, что эффекты кулоновского взаимодействия взаимно уничтожаются очень, очень точно при наличии равных величин положительного и отрицательного зарядов. Но все гравитационные силы притягивающие, так что нет надежды на подобное взаимное уничтожение этих сил. Для вращающихся колес трудность была бы в том, что упругое давление вещества вносило бы добавку в члены, описывающие энергию взаимодействия, колеса бы управлялись слегка по разному и т.д. В добавление к этому, мы можем думать, что обычное гравитационное взаимодействие довольно трудно измерить, и что эффекты типа магнитных могут быть меньше на некоторое отношение $(v/c)^2$ такое, как отношение магнитных сил к кулоновским. Силы между проволочками, проводящими ток, порядка грамма веса, в то время как кулоновские взаимодействия между частицами в проволочках (в случае, если бы они взаимно не уничтожались) порядка миллиардов миллионов тонн.

Возможно пронаблюдать эффекты, обусловленные таким членом типа магнитного, если мы рассмотрим гравитационное взаимодействие частиц, движущихся со скоростью света или с близкой к ней скоростью. Предположим, что $T'_{\mu\nu}$ обусловлен стационарным источником, таким как Солнце, так что остается только компонент T'_{44} , и мы рассмотрим гравитационное взаимодействие между Солнцем и быстрой частицей, которая движется со скоростью v , близкой к скорости света c , так что ее тензор давления имеет компоненты, такие как $T_{11} = (v^2/c^2)T_{44}$. Затем в соотношении (3.4.2) мы видим, что энергия взаимодействия больше, чем обусловленная только T_{44} на множитель $1 + v^2/c^2$ или на множитель 2 для фотона. Таким образом, так как фотон движется в сильном гравитационном поле, то он движется как частица, обладающая большей энергией, чем можно было бы предсказать, исходя из ньютоновской теории. Отклонение луча света звезды тогда, когда луч проходит вблизи поверхности Солнца, в два раза больше, чем величина, получаемая при анализе изменения

импульса в рамках ньютоновской теории гравитации. Земляне провели подобный эксперимент и обнаружили, что наблюдаемая величина угла отклонения больше, чем величина, получаемая в рамках ньютоновской теории, на множитель, который очень близок к 2. И хотя данный наблюдательный факт достаточно несовершенен и не во всем согласован, он предполагает действительный эффект в направлении, предсказываемом нашей теорией.¹

В этом месте мы могли бы приступить к вычислению в деталях таких эффектов, как и рассмотренный выше, а также многих других задач, таких как комптоновское рассеяние гравитонов, эффектов, связанных с движением Меркурия вокруг Солнца, для того, чтобы найти порядки величин гравитационных эффектов и определить, какие эксперименты могли бы быть возможными. Тем не менее, возможно предпочтительнее приступить к описанию самого гравитационного поля на языке полевого лагранжиана и полевых уравнений, чем на языке амплитуд.

3.5. Лагранжиан для гравитационного поля

Теперь мы будем изучать нашу теорию на языке лагранжиана, исследуя сами поля, а не просто амплитуды. Сначала вновь рассмотрим ситуацию в электродинамике. Здесь действие есть

$$S_E = - \int d\tau \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right) + j^\mu A_\mu \right]. \quad (3.5.1)$$

Именно из такого лагранжиана мы в конце концов выводим полевые уравнения; мы хотим получить гравитационный аналог соотношения $A_\mu = -(1/k^2)j_\mu$.

Нетрудно сделать предположение о форме второго члена, описывающего взаимодействие. Мы предполагаем, что этот член равен $-\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$. Здесь аналогия для членов, в которые вовлечены производные, не так очевидна; просто имеется слишком много индексов, которые могут быть переставлены слишком большим числом способов. Мы будем должны написать общую форму для лагранжиана, как сумму по всем возможным способам записи полевых производных, подставляя произвольные коэффициенты перед каждым членом, т.е. записывая его следующим образом:

$$a \left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) + b \left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right) + c \left(\frac{\partial h^\mu{}_\mu}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial h^\sigma{}_\sigma}{\partial x_\sigma} \right) + \dots \quad (3.5.2)$$

¹В 1970-х годах были проведены наблюдения по измерению отклонений гравитационным полем Солнца положений радиоисточников с помощью радиоинтерферометров с очень большой базой и предсказания ОТО были подтверждены с точностью до 1 – 3 % процентов [Заха 97*]. (Прим. перев.)

Наша теория не будет полна до тех пор, пока мы не придумаем некоторый критерий для определения значений коэффициентов $a, b, c, d, e, \dots$

Возможно мы можем сделать предположение по некоторой аналогии с электромагнетизмом. Если мы вычисляем вариацию общего лагранжиана (3.5.1) по отношению к A , мы получаем дифференциальное уравнение, связывающее поля и ток

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu = j_\mu. \quad (3.5.3)$$

Для экономии записи далее мы будем показывать такие дифференцирования (градиенты), просто указывая индексы координат после запятой; уравнение, которое приведено выше, имеет следующий вид:

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu} = j_\mu. \quad (3.5.4)$$

Закон сохранения заряда выражается вычислением дивергенции j_μ , равной нулю. Но мы можем заметить, что уравнения Максвелла для этого поля несогласованы, за исключением закона сохранения заряда, и что градиент от выражения в левой части соотношения (3.5.4) *тождественно* равен нулю. С использованием правильного лагранжиана электромагнитного поля, закон сохранения заряда может быть выведен как следствие полевых уравнений. Так как *левая* часть уравнения (3.5.4) удовлетворяет этому *тождеству*, его дивергенция также равна нулю:

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu\mu} - A_{\nu,\mu}{}^{,\nu\mu} = 0. \quad (3.5.5)$$

Подобное условие используется для того, чтобы определить величину коэффициентов $a, b, c, d, e, \dots$ относительно друг друга. Мы будем выписывать общий лагранжиан, выводить дифференциальные полевые уравнения путем вариации лагранжиана и требовать, что, так как дивергенция тензора T обращается в нуль, полевые величины, которые равны этому тензору, должны иметь дивергенцию, которая равна нулю тождественно. Это условие будет влиять на однозначный выбор значений коэффициентов. Мы проведем ниже алгебраические вычисления подробно, устанавливая значения коэффициентов таким образом, что полевые уравнения согласованы, если только

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (3.5.6)$$

3.6. Уравнения гравитационного поля

Вывод уравнений начнем с выписывания всех возможных произведений нашего полевого тензора $h_{\mu\nu}$. На каждом шагу имеют место значительные упрощения, если мы используем симметрию тензора

$h_{\mu\nu}$ при комбинации различных членов. Если два тензорных индекса отличны от индекса производной, мы имеем два различных произведения

$$1. \quad h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma} \quad 2. \quad h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\sigma,\nu}$$

Если имеются два индекса, которые равны, мы можем иметь три возможных произведения

$$3. \quad h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} \quad 4. \quad h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu} \quad 5. \quad h^{\nu}{}_{\nu,\mu} h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\mu}$$

Не все пять произведений необходимо рассматривать, произведение п. 2 может быть опущено, поскольку оно может быть преобразовано в произведение п. 3 интегрированием по частям. Таким образом, предполагаем, что лагранжиан имеет следующий вид

$$S = \int d\tau [a h^{\mu\nu,\sigma} h_{\mu\nu,\sigma} + b h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + c h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu} + d h^{\nu}{}_{\nu,\mu} h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\mu} - \lambda T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}]. \quad (3.6.1)$$

Теперь мы варьируем эту сумму четырех произведений по отношению к тензору $h_{\alpha\beta}$ для того, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее полевые производные с тензором источника $T_{\alpha\beta}$. Таким образом, приходим к следующему результату (необходимо помнить, что $\delta h_{\alpha\beta}$ симметричен по индексам α, β , так что симметричная часть его коэффициентов должна быть равна нулю)

$$a 2 h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} + b (h_{\alpha\sigma,\beta}{}^{,\sigma} + h_{\beta\sigma,\alpha}{}^{,\sigma}) + c (h^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} h^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}) + d 2 \eta_{\alpha\beta} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu} = -\lambda T_{\alpha\beta}. \quad (3.6.2)$$

Мы берем производную каждого из этих членов по отношению к индексу β , тогда требование, что дивергенция левой части должна быть равна нулю, приводит к следующему уравнению

$$2a h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta} + b h^{\alpha\sigma,\beta}{}_{,\sigma\beta} + b h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\sigma\beta} + c h^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + c h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}{}^{\alpha} + 2d h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu\alpha} = 0. \quad (3.6.3)$$

Теперь объединяем члены с одним и тем же множителем и берем значение соответствующего коэффициента равным нулю; получаем следующие соотношения, которые включают в себя перестановку и смену индексов:

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta} (2a + b) &= 0, \\ h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{\beta\sigma} (b + c) &= 0, \\ h^{\sigma}{}_{\sigma,\beta}{}^{\alpha\beta} (c + 2d) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Если мы выбираем масштаб для наших результатов такой, что $a = 1/2$, мы получаем

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -\frac{1}{2}. \quad (3.6.5)$$

Предположительно, теперь мы получили правильный лагранжиан для гравитационного поля. Как следствие из этого лагранжиана мы получим в конце концов полевое уравнение.

3.7. Определение символов

Манипуляции с тензорными величинами становятся все более скучными в той работе, которой мы занимаемся; и для того, чтобы не увязнуть в алгебре со многими индексами, могут быть разработаны некоторые упрощающие приемы. В настоящее время не очевидно, что определения, которые мы делаем, полезны; подтверждение этому проявится в их более позднем использовании.

Определим оператор "черта" для произвольного тензора второго ранга следующим образом:

$$\bar{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} X^{\sigma}_{\sigma}. \quad (3.7.1)$$

Для симметричного типа, такого как h , это правило проще, потому что два члена в первой скобке равны

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{\sigma}_{\sigma}, \quad (3.7.2a)$$

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}. \quad (3.7.2b)$$

Заметим, что оператор "черта" является своим собственным обратным оператором для симметричного тензора.

Определим также использование неиндексированного тензорного символа, чтобы представить его след

$$h = \text{Tr}(h) = h^{\sigma}_{\sigma},$$

$$\bar{h}^{\sigma}_{\sigma} = -h. \quad (3.7.3)$$

Используя такие обозначения, можно записать полевые уравнения (3.6.2) с учетом (3.6.5) в симметризованном варианте

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu}. \quad (3.7.4)$$

Для того, чтобы получить соотношение для $T_{\mu\nu}$, мы просто берем оператор "черта" от обеих частей последнего уравнения.

Следующим шагом мы попробуем найти что-либо аналогичное свойствам калибровочной инвариантности электродинамики для того, чтобы упростить решение уравнения (3.7.4). В электродинамике полевые уравнения имеют вид:

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - A_{\nu}{}^{,\nu\mu} = j^{\mu}, \quad (3.7.5)$$

следствие которых состоит в возможности описания полей так же хорошо на языке нового четырех вектора A'_μ , получаемого из вектора A_μ добавлением градиента скалярной функции X

$$A'_\mu = A_\mu + X_{,\mu}. \quad (3.7.6)$$

Какое свойство было бы аналогичным свойством тензорного поля? Мы предполагаем, что следующее свойство может быть справедливым: (мы должны быть внимательны для того, чтобы сохранить наши тензоры симметричными) подстановка

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} \quad (3.7.7)$$

в левую часть уравнения (3.7.4) не меняет вид этого уравнения. Доказательство этого факта оставляем в качестве упражнения.

С использованием свойства калибровочной инвариантности, было бы проще получить уравнения для полей в определенной калибровке, что более подходяще, что-то типа лоренцевой калибровки в электродинамике. По аналогии с выбором

$$A^\nu{}_{,\nu} = 0, \quad (3.7.8)$$

мы сделаем следующий выбор (который будем называть условием Лоренца)

$$\bar{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma} = 0. \quad (3.7.9)$$

Таким образом, получаем полевые уравнения, связывающие оператор "черта" от тензора T с полями

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} = -k^2 h^{\mu\nu} = -\lambda \bar{T}^{\mu\nu}, \quad (3.7.10)$$

или решая $h_{\mu\nu} = (\lambda/k^2) \bar{T}_{\mu\nu}$. Немедленно получаем, что амплитуда взаимодействия такого тензора h с другим источником $T'_{\mu\nu}$ от $\lambda h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ в лагранжиане, имеет следующее выражение

$$\lambda^2 T'_{\mu\nu} \left[\frac{1}{k^2} \right] \bar{T}^{\mu\nu}.$$

Итак, мы получили в точности то, что мы получили прежде при обсуждении амплитуд непосредственно.

Лекция 4

4.1. Связь между рангом тензора и знаком поля

Мы хотели бы вывести некоторые полезные общие свойства полей, используя свойства лагранжевой плотности. Для гравитационного поля мы определим в данном месте константу взаимодействия и нормализацию плоских волн, которые мы будем отныне использовать. Мы положим

$$\lambda = \sqrt{8\pi G}. \quad (4.1.1)$$

Здесь, G – обычная гравитационная постоянная в естественных единицах ($\hbar = c = 1$); квадратный корень включается в определение с тем, чтобы константа λ стала аналогична заряду электрона e в электродинамике, что предпочтительнее того, чтобы подобная величина была пропорциональна квадрату заряда. Множитель $\sqrt{8\pi}$ служит для того, чтобы исключить не относящиеся к делу множители из большей части полезных соотношений. Для того, чтобы представить плоско-волновые гравитоны, мы будем использовать поля

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik \cdot x), \quad (4.1.2)$$

с вектором поляризации $e_{\mu\nu}$, нормализованным таким образом, что

$$e_{\mu\nu} \bar{e}^{\mu\nu} = 1. \quad (4.1.3)$$

Действие, которое описывает общую энергию полей гравитации, вещество и взаимодействие между веществом и гравитонами, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int dV \left(h^{\mu\nu, \lambda} \bar{h}_{\mu\nu, \lambda} - 2 \bar{h}^{\mu\lambda}{}_{, \lambda} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{, \nu} \right) \quad (\text{поля}) \\ + \int dV (h_{\mu\nu} T_{\mu\nu}) \quad (\text{член взаимодействия}) \\ + S_M \quad (\text{материя}). \quad (4.1.4) \end{aligned}$$

Мы можем вывести из лагранжианов полей некоторые важные свойства, например, мы можем понять, почему гравитация притягивает как частицы, так и античастицы, в то время как в электричестве одинаковые заряды отталкиваются, а противоположные притягиваются. Может быть показано, что это свойство связано со знаком лагранжиана, так что если мы изменим знак лагранжиана $S \rightarrow -S$, сила

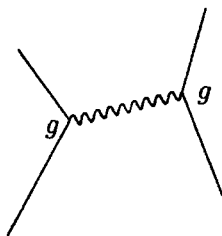


Рис. 4.1.

меняет знак. Знак констант взаимодействия λ или e , или g не дает отличий в теории, так как он появляется в квадрате в любой диаграмме, которая представляет поправку к энергии; всегда вовлечены две вершины. Мы можем поменять знак энергии, соответствующей диаграмме такой, как изображенной на рис. 4.1, только, если мы можем ввести множитель i в каждой вершине, например, если мы должны использовать поля $i\phi$ вместо ϕ .

Тем не менее, поля ϕ должны представлять соответствующие плоские волны, которые согласовано определены так, что установившиеся волны в большой коробке имеют положительные значения энергии и квантово-механические осцилляторы, которые представляют эти установившиеся волны, ведут себя правильно. Скалярные поля имеют плоские волны

$$\phi = a \exp(ik \cdot x). \quad (4.1.5)$$

Амплитуда a для квантового поля появляется как координата квантово-механического осциллятора. Если значения кинетической энергии таких осцилляторов, которые пропорциональна $\dot{a}^2$, должны представлять положительные значения энергии, мы обязаны записать нашу теорию последовательным образом, и замена $\phi \rightarrow i\phi$ была бы ошибкой.

Для электромагнитных волн именно компоненты в трансверсальном направлении, перпендикулярном направлению распространения, ограничиваются при подобном рассмотрении. Отрицательный знак появляется в связанной энергии потому, что энергия включает в себя пространственные индексы в скалярное произведение двух векторов, которое мы определили как

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - (A_3 B_3 + A_2 B_2 + A_1 B_1). \quad (4.1.6)$$

Знак кулоновских сил связан со знаком временных компонент в лагранжиане. Для гравитационных волн также имеются трансверсальные компоненты, которые заключены в определенные пределы, а при

свертке по двум индексам (или даже по четному числу индексов) знаки сокращаются, знак временных компонентов h_{44} противоположен случаю, рассматриваемому в случае электричества, и мы имеем притяжение.

4.2. Тензор энергии-импульса для скалярной материи

Прежде, чем мы сможем вычислять наблюдаемые эффекты и делать предсказания другие, чем закон "обратных квадратов", и то, что "одинаковые тела" притягиваются с силой, пропорциональной его энергии, мы должны определить, как материя определяет тензор давления $T_{\mu\nu}$. Сначала мы проведем в некоторых деталях вычисления, основанные на простейшем предположении, что материя может быть представлена скалярной функцией ϕ . Позднее нам понадобится рассматривать функции более высокого ранга; возможно в конце курса мы рассмотрим вещество со спином $1/2$, поскольку такое вещество имеет свойства, существенно отличающиеся от вещества, характеризующегося целым спином. Для исследования свойств материи с целыми значениями спина 1 и 2 требуются более сложные алгебраические преобразования, однако никаких принципиальных нововведений привлечь не требуется.

Как сделать обобщение плотности энергии-импульса для скалярного поля ϕ . Если заглянуть в книгу Вентцеля [Went 49] по теории поля, мы обнаружим, что предлагается следующая процедура. Предположим, что лагранжиан зависит от полей и их производных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^i, \psi^i_{,\nu}). \quad (4.2.1)$$

Компонент с индексами $\{44\}$ тензора энергии-импульса должен представлять плотность энергии, которая есть гамильтониан. Поэтому используя обычное классическое описание для выражения гамильтониана из лагранжиана

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}, \quad (4.2.2)$$

получаем следующее соотношение

$$T^\mu{}_\nu = \psi^i_{,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{, \mu}} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \quad (4.2.3)$$

Это правило не является корректным в общем случае. Во-первых, оно не обязательно приводит к выражению, симметричному по индексам μ и ν . Если тензор $T_{\mu\nu}$ – несимметричен, то результирующая

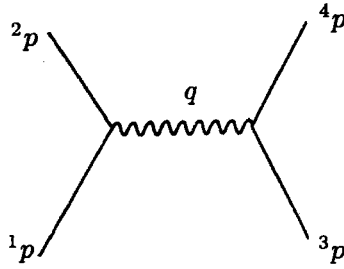


Рис. 4.2.

теория – патологическая (например, нет способа определить угловой момент в таком поле). Закон сохранения энергии в общем случае не выполняется, поскольку в дивергенцию включены члены, которые не являются больше равными

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq T^{\nu\mu}{}_{,\nu}. \quad (4.2.4)$$

В нашем частном скалярном случае правило (4.2.3) действительно приводит к тому, чтобы получить удовлетворительную симметричную форму. Мы получаем лагранжиан и действие

$$S(\text{Скалярная материя}) = \frac{1}{2} \int dV (\phi^{\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2), \quad (4.2.5)$$

который дает следующее выражение для тензора давления

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\nu} \phi_{,\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \phi^{\sigma} \phi_{,\sigma} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu}. \quad (4.2.6)$$

С учетом тензора давления для скалярной материи (4.2.6) член, описывающий взаимодействие в лагранжиане, имеет следующий вид:

$$-\lambda h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\lambda \left[h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\phi^{\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) \right]. \quad (4.2.7)$$

В наших компактных обозначениях, использующих оператор "черта", последнее соотношение может быть переписано следующим образом:

$$-\lambda \left[\bar{h}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} h m^2 \phi^2 \right]. \quad (4.2.8)$$

Теперь мы можем использовать член, описывающий взаимодействие, для того, чтобы получить амплитуды для рассеяния при обмене гравитоном.

4.3. Амплитуды для рассеяния (скалярная теория)

Амплитуда рассеяния, соответствующая обмену одним гравитоном, представлена на диаграмме, изображенной на рисунке 4.2, и может быть записана из исследования диаграммы, так как мы знаем форму пропагатора и для каждой вершины у нас есть член, описывающий взаимодействие, задаваемое лагранжианом (4.2.7). Заменим градиенты компонентами 4-импульса в импульсном представлении

$$i\phi_{,\nu} = p_\nu, \quad (4.3.1)$$

так что член, описывающий взаимодействие, становится следующим для одной из вершин

$$2\lambda \left[\frac{1}{2} p_\mu^2 p_\nu^2 - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (p^\sigma p_\sigma - m^2) \right]. \quad (4.3.2)$$

Мы пишем подчеркивание под произведением $p_\mu p_\nu$ для того, чтобы напомнить, что мы должны использовать соответствующим образом симметризованную версию, так как $h_{\mu\nu}$ – симметричен. Более точно,

$$\underline{A_\mu B_\nu} \equiv \frac{1}{2} [A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu]. \quad (4.3.3)$$

Для второй вершины нам также необходима "черта" для выражения, которое имеет следующий вид

$$2\lambda \left[\underline{\frac{3}{2} p_\mu^4 p_\nu^4} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \right]. \quad (4.3.4)$$

Тогда полное выражение для амплитуды есть следующее

$$4\lambda^2 \left[\underline{\frac{3}{2} p_\mu^4 p_\nu^4} - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \right] \frac{1}{q^2} \left[\frac{1}{2} p_\mu^2 p_\nu^2 - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (p^\sigma p_\sigma - m^2) \right] \quad (4.3.5)$$

Выбранные обозначения ("черты", "подчеркивания" и т.п.) приведут к упрощениям в алгебраических манипуляциях в более сложных вычислениях, которые необходимо будет выполнять, так что стоит ими воспользоваться.

Наша теория дала нам выражение для амплитуды гравитационного рассеяния одной частицы другой. Для того, чтобы вычислить что-нибудь, что имеет измеримую величину, мы должны придти к очень большим значениям массы, и для того, чтобы наблюдать эффект, который не определяется ньютоновским законом, нам необходимо использовать движения со скоростями, близкими к скорости света. Мы можем, например, вычислить угол отклонения тела малой массы,

движущегося с очень большой скоростью ($v \approx c$), которое отклоняется звездой, такой как Солнце. Здесь нам необходимо обосновать замену суммы амплитуд от всех частиц в звезде одной амплитудой, соответствующей массе M ; подобная замена является аппроксимацией, но она дает правильный ответ в первом порядке некоторого типа. Такой угол больше, чем его величина в рамках ньютоновской теории, и отличается на множитель $(1 + v^2/c^2)$.

Нельзя говорить о том, что этот результат соответствует отклонению света Солнца, потому что фотон не является скалярной частицей, отсюда следует, что он не может представляться скалярным массовым полем ϕ . Для рассеяния двух идентичных частиц такая амплитуда должна содержать обменный член, но для случая звезды — частицы, очевидно, не идентичны.

В нашей теории до сих пор не рассматривалась возможность того, что мы могли бы добавить член с нулевой дивергенцией к нашему тензору давления $T_{\mu\nu}$; это соответствовало бы другому распределению в пространстве масс и давлений. Этот и связанные с ним вопросы в дальнейшем будут подробно обсуждаться. Даже для скалярной материи, как мы увидим, у нас есть действительная двусмысленность при определении тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Эта трудность также возникает в электродинамике, когда мы пытаемся записать взаимодействие фотонов с заряженными векторными мезонами.

4.4. Подробные свойства плоских волн. Эффект Комптона

Мы можем изучить свойства гравитационных волн в отсутствии материи; варьируя лагранжиан, получим уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{\sigma} = 0, \quad (4.4.1)$$

которое аналогично уравнению Максвелла в пустом пространстве. Если мы используем решения типа плоских волн

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(iq \cdot x), \quad (4.4.2)$$

то уравнение принимает следующий вид

$$q^2 e_{\mu\nu} - q_\nu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} - q_\mu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} = 0. \quad (4.4.3)$$

Мы интересуемся случаями, когда $q^2 \neq 0$ и $q^2 = 0$. Если $q^2 \neq 0$, мы можем разделить на q^2 и переставить члены уравнения так, что

$$e_{\mu\nu} = q_\nu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} \right) + q_\mu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} \right). \quad (4.4.4)$$

Такое разделение вектора на два слагаемых в точности выражает вектор $e_{\mu\nu}$ как симметризованный градиент

$$e_{\mu\nu} = \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu}. \quad (4.4.5)$$

Ранее мы обсудили, как калибровочная инвариантность гравитационного поля означает, что добавление члена такого вида не приводит к отличиям в физике явления. Отсюда следует, что всегда можно добавить некоторый член к $e_{\mu\nu}$ так, что $e_{\mu\nu} = 0$. Мы будем называть такие волны с $q^2 \neq 0$ "калибровочными волнами"; эти волны не связаны ни с какими физическими эффектами и могут быть всегда устранены калибровочным преобразованием.

Если $q^2 = 0$, то из уравнения (4.3.3) следует, что

$$q^\sigma \bar{e}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.4.6)$$

Это так называемые свободные волны *должны* удовлетворять лоренцеву калибровочному условию. Дело не только в выборе

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (4.4.7)$$

для удобства в случаях, в которых волна не свободна. Этот факт имеет свой электромагнитный аналог, для фотонов величина $q^\mu e_\mu$ должна быть равна нулю.

Мы можем вывести действительный вид тензора поляризации $e_{\mu\nu}$ в системе координат такой, что 4-вектор импульса равен

$$q^\mu = (\omega, \omega, 0, 0). \quad (4.4.8)$$

Если мы выбираем

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + q_\mu \chi_\nu + q_\nu \chi_\mu \quad (4.4.9)$$

и требуем, что $e'_{\mu\nu}$ должна иметь компоненты только в трансверсальном направлении, мы получаем систему уравнений, которая может быть разрешена и получен ответ

$$e'_{11} = -e'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e'_{12} = e'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.10)$$

Для того, чтобы получить соотношения (4.4.10), заметим, что из уравнения (4.4.6) следует, что $\bar{e}_{\mu 4} = -\bar{e}_{\mu 3}$, так что только компоненты с индексами 4, 1 и 2 являются независимыми. Компоненты с индексом 4 могут быть удалены, если требуется, с помощью

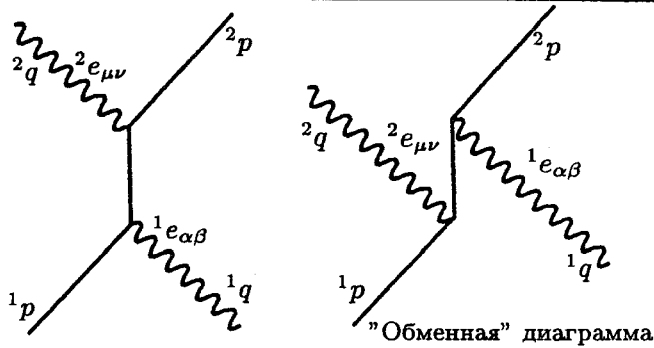


Рис. 4.3.

преобразования (4.4.9). Например, $e'_{14} = e_{14} + \omega\chi_1$, тогда выберем $\chi_1 = -e_{14}/\omega$, $\chi_2 = e_{24}/\omega$. Тогда $e'_{43} = e_{43} + \omega\chi_4 - \omega\chi_3$, выберем $\chi_3 - \chi_4 = -e_{34}/\omega$, тогда $e'_{43} = \bar{e}'_{43} = \bar{e}'_{44} = \bar{e}'_{33} = 0$. Выбирая $\chi_4 = -e_{44}/2\omega$, сделаем следующую величину равной нулю $e'_{44} = e_{44} + 2\omega\chi_4 = 0$. Тогда, так как величина $\bar{e}'_{44}$ также равна нулю, то след e'^{σ}_{σ} равен нулю, следовательно, равны нулю также и e'_{33} и $e'_{11} + e'_{22}$. Поэтому остались ненулевыми среди величин $e'_{\mu\nu}$ только компоненты с индексами $\mu, \nu = 1$ или 2 и для них $e'_{11} = -e'_{22}$. Имеется только две линейно независимые нормализованные комбинации (4.4.10).

Амплитуда для комptonовского рассеяния гравитона частицей массы m соответствует диаграммам, изображенным на рис. 4.3. Поляризации гравитона представляются тензором $e_{\mu\nu}$; для скалярной массы компоненты импульса в каждой вершине $-{}^1p_\mu$, $({}^1p_\nu + {}^1q_\nu) = ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu)$ и ${}^2p_\mu$. На языке этих величин мы имеем для первой диаграммы

$$4\lambda^2 {}^2\bar{e}^{\mu\nu} \left[{}^2p_\mu ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu) - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} \right] \frac{1}{({}^1p + {}^1q)^2 - m^2} \times {}^1\bar{e}^{\alpha\beta} \left[{}^1p_\alpha ({}^2p_\beta + {}^2q_\beta) - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\alpha\beta} \right]. \quad (4.4.11)$$

Пропагатор написан таким образом, что подходит для скалярной частицы. Некоторые ограничения в этой формуле следуют из ограничения для плоских волн $q^2 = 0$ и $q^\nu \bar{e}_{\nu\mu} = 0$.

4.5. Нелинейные диаграммы для гравитонов

Из калибровочной инвариантности мы ожидаем, что замена ${}^1e_{\mu\nu}$ на ${}^1e_{\mu\nu} + {}^1q_\mu a_\nu + {}^1q_\nu a_\mu$ не должна бы влиять на комptonовскую амплитуду. Однако прямая подстановка показывает, что это утверждение не является верным. Что же ошибочно в наших рассуждениях?

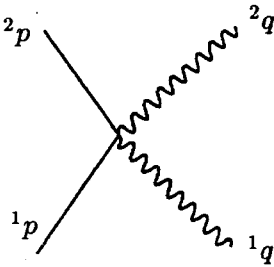


Рис. 4.4.

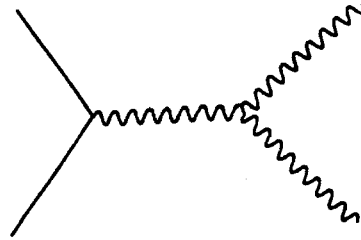


Рис. 4.5.

При комптоновском рассеянии фотонов электронами имеется третья диаграмма, изображенная на рис. 4.4, которая неаналогична ни одной из диаграмм, изображенных на рис. 4.3. Эта диаграмма соответствует квадратичному взаимодействию в A^2 , которое появляется в лагранжиане для того, чтобы сделать теорию калибровочно инвариантной. По аналогии с ситуацией в электродинамике мы могли бы полагать, что при рассмотрении только пары диаграмм, изображенных на рис. 4.3, мы делали приближение к правильному описанию путем линеаризации. Существование амплитуды с квадратичным взаимодействием, соответствующим диаграмме, изображенной на рис. 4.3, может быть выведено в электродинамике требованием того, чтобы калибровочная подстановка

$$e'_1 = e_1 + qa \quad (4.5.1)$$

не должна была бы приводить к изменению в амплитуде в заданном порядке. Такая процедура состоит просто в приравнивании членов одного и того же порядка амплитуд, полученных из e_1 и e'_1 , с коэффициентами перед каждым членом, которые должны быть определены. Может быть возможно вывести форму квадратичного члена гравитона аналогичным способом, но это пока еще не было сделано, поскольку самовзаимодействие гравитона делает анализ довольно сложным во втором порядке, и мы получим правильные выражения, используя другой подход.

Может быть интересным попытаться вывести эти члены, применяя прямой подход, так что сделаем несколько замечаний об этом.

Если мы рассматриваем добавление к комптоновскому рассеянию не только амплитуд, таких, какие представлены на рис. 4.4, но также амплитуд, соответствующих диаграмме, изображенной на рис. 4.5, у нас вероятно не будет условий для того, чтобы определить все неизвестные параметры более полной теории. Если мы рассмотрим взамен нашей задачи комптоновское рассеяние виртуального гравитона, мы можем увеличить число регулируемых величин, и может быть

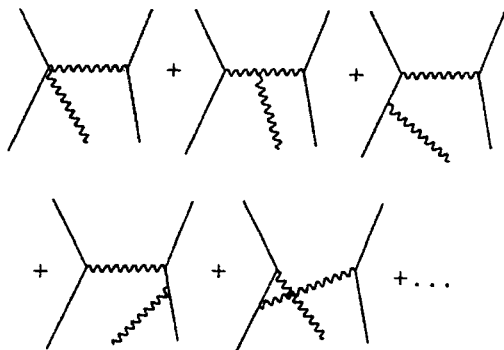


Рис. 4.6.

возможно вновь получить правильную теорию. Включенные в анализ диаграммы могут быть типа изображенных на рис. 4.6, и мы могли бы попытаться сделать сумму калибровочно инвариантной. На самом деле, мы будем решать эти проблемы другим способом, тем не менее, такой подход может быть полезным для того, чтобы изучить детали нашей полевой теории, подходя к решению различными путями.

4.6. Классические уравнения движения гравитирующей частицы

Для того, чтобы вычислить некоторые классические эффекты в нашей теории, например, орбиты планет, движущихся вокруг звезды, нам необходимо свести нашу квантовую теорию к ее классической форме. Это возможно сделать, выписывая классическую теорию, как результат вариационного принципа на интеграле по траекториям, который включает в себя действия или временной интеграл от лагранжиана. Движение, описываемое частицей, задается минимумом интеграла по траекториям, например, для свободной частицы это минимум интеграла

$$- \int \sqrt{(ds)^2} = - \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = - \int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha}} d\alpha. \quad (4.6.1)$$

Что-то должно быть добавлено к интегральному выражению для того, чтобы представить гравитационные эффекты. Имеется более, чем один вариационный принцип, который может дать классическую теорию, так что мы будем использовать вариационный принцип, который дает более удобные интегралы по траекториям (фактически, принцип, приводящий к уравнению Клейна – Гордона методом интегрирования по траекториям в квантовой механике). Для заряженных

частиц мы можем получить уравнения движения, варьируя интеграл

$$-\frac{m}{2} \int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx_\mu}{d\alpha} \right) - e \int d\alpha A_\mu(x) \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right). \quad (4.6.2)$$

После того, как мы проделаем некоторые преобразования, приходим к следующему соотношению

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\alpha^2} = e F_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right), \quad (4.6.3)$$

где $F_{\mu\nu}$ есть ротор от вектора A_μ . Из этого уравнения, умножая на $dx_\mu/d\alpha$, так как тензор $F_{\mu\nu}$ – антисимметричен, мы находим, что

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha} \right)$$

обращается в нуль, или

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx_\mu}{d\alpha} = \left(\frac{ds}{d\alpha} \right)^2$$

есть константа, так что величина α пропорциональна собственному времени (и мы можем взять ее равным собственному времени, если m_0 есть масса покоя частицы). Далее мы должны включить наш тензор $T_{\mu\nu}$ в подынтегральное выражение соответствующим образом для того, чтобы получить правильные гравитационные уравнения. В электродинамике вектор, связанный с полем, есть просто производная смещения по отношению к 4-скаляру, т.е. скорость ($dx^\mu/d\alpha$). Мы предполагаем, что тензор $T_{\mu\nu}$ есть не что иное, как тензор, порожденный двумя такими скоростями, и подбираем мультипликативную константу так, что компонента с индексами 44 правильно описывает плотность энергии. Мы полагаем

$$T^{\mu\nu} = m_0 \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right), \quad (4.6.4)$$

где $\alpha = s =$ "собственное время". Компонент с индексами 44 есть на самом деле плотность энергии; он имеет множитель $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ для того, чтобы учесть увеличение энергии со скоростью, и другой множитель для того, чтобы учесть одновременное сокращение объема из-за лоренцева сжатия.

Следовательно, интеграл от лагранжиана или действие, которое должно быть провариировано, имеет следующий вид:

$$m_0 \left[-\frac{1}{2} \int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx_\mu}{d\alpha} \right) - \lambda \int d\alpha h_{\mu\nu}(x) \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} \right) \right]. \quad (4.6.5)$$

Введем новый тензор для того, чтобы записать действие в более компактном виде

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}(x), \quad (4.6.6)$$

так что действие может быть записано в виде

$$m_0 \left[-\frac{1}{2} \int d\alpha g_{\mu\nu}(x) x'^{\mu} x'^{\nu} \right]. \quad (4.6.7)$$

Начиная с последнего соотношения и ниже, обозначаем производную по отношению к параметру α знаком "штрих". Поскольку мы варьируем функционал (действие) по отношению к координатам траектории, мы получаем два равных члена от каждого из множителей x'^{μ} , x'^{ν} и один от тензора $g_{\mu\nu}$; уравнение движения имеет вид

$$-\frac{d}{d\alpha} (g_{\sigma\nu} x'^{\nu}) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0. \quad (4.6.8)$$

Существуют другие способы записи уравнений, которые могут быть иногда полезны. Сначала мы перегруппируем члены, в которых имеются две скорости, с одной стороны равенства

$$g_{\sigma\nu} x''^{\nu} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] x'^{\mu} x'^{\nu}. \quad (4.6.9)$$

Теперь мы расщепляем второй член на две равные части и переобозначаем индексы суммирования $\mu \leftrightarrow \nu$ в одной части для того, чтобы получить комбинацию, которая задается специальным символом, поскольку он часто повторяется

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right]. \quad (4.6.10)$$

Уравнение движения, выраженное через такую скобку (называемую ковариантными коэффициентами связности), становится довольно простым

$$g_{\sigma\nu} x''^{\nu} = -[\mu\nu, \sigma] x'^{\mu} x'^{\nu}. \quad (4.6.11)$$

Имеется одно следствие этого уравнения, которое немедленно получается дифференцированием по параметру α произведения $g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}) = 2g_{\mu\nu} x'^{\mu} x''^{\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} x'^{\mu} x'^{\nu} x'^{\sigma}. \quad (4.6.12)$$

Если мы перепишем произведение $g_{\mu\nu}x''^{\mu}x''^{\nu}$ в первом члене в правой части его выражением (4.6.9) и переобозначим индексы суммирования, мы находим, что производная тождественно равна нулю. Таким образом, произведение $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$ есть скалярная константа. Если мы определим новый параметр s следующим соотношением

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2,$$

то s – аналог собственного времени для задач гравитации. Так как $ds/d\alpha$ есть константа, мы выберем ее равной единице и обозначим ниже все производные по переменной s точкой. В частности, тогда

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1. \quad (4.6.13)$$

4.7. Орбитальное движение частицы вокруг звезды

Уравнение движения может быть записано через полевой тензор следующим образом (что следует из соотношения (4.6.8))

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma} + 2\lambda h_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}) = \lambda \frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} \dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\sigma}. \quad (4.7.1)$$

Перед решением уравнения движения следует заметить, что нам необходимы соответствующие выражения для гравитационных полей. Мы интересуемся этими выражениями в области, где нет источников массы. Таким образом, полевое уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda} = \lambda\bar{T}_{\mu\nu} \quad (4.7.2)$$

может быть решено способом, аналогичным решению уравнения Максвелла, если мы используем лоренцеву калибровку $\bar{h}_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} = 0$. Вспомогательное определение даламбертиана $\square = (\partial/\partial t)^2 - \nabla^2$, получаем

$$\square h_{\mu\nu} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu}. \quad (4.7.3)$$

Для гравистатического случая, когда временная зависимость имеет нулевую частоту, мы должны иметь ньютоновский закон для силы; компонент T_{44} пропорционален массе. Другие компоненты равны нулю. Полевой тензор есть

$$\bar{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}, \quad \bar{h} = 0, \quad (\nu, \mu \neq 4, 4). \quad (4.7.4)$$

Тензор без черты получается вычислением оператора "черты" от обеих частей

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{h}^\sigma{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{8\pi} \frac{M}{r} & \text{если } \mu = \nu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7.5)$$

Подставляем такой полевой тензор в уравнения движения и используем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda h_{44}, \\ \psi &= 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Для данного случая ясно, что $\phi = \psi = -2MG/r$, но в последней лекции мы будем иметь возможность рассмотреть случай, для которого это неверно, так что мы останавливаемся на таком различии в выражении, но предполагаем, что величины ϕ и ψ являются функциями только r .

Процедура решения уравнений, описывающих орбиты, аналогична методу решения уравнений для ньютоновского поля. Мы разделяем уравнения на пространственные координаты и временные координаты, исключаем время и параметр α для того, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее бесконечно малые перемещения по радиальной и угловой координате. Мы исходим из четырехмерного уравнения (4.7.1). Пространственные координаты ($\nu = 3, 2, 1$) ведут себя согласно следующему уравнению

$$\frac{d}{ds} (-\dot{x} + \psi \dot{x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{t}^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right]. \quad (4.7.7)$$

Уравнение для времени имеет вид

$$\frac{d}{ds} (\dot{t} + \phi \dot{t}) = 0. \quad (4.7.8)$$

Мы имеем интеграл движения, следующий из уравнения (4.6.13)

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1, \quad (4.7.9)$$

которое приводит для нашего случая к следующему соотношению

$$\dot{t}^2 (1 + \phi) - (1 - \psi) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1. \quad (4.7.10)$$

Из уравнения для времени (4.7.8) следует, что

$$(1 + \phi) \frac{dt}{ds} = K, \quad (4.7.11)$$

где K есть константа (пропорциональная энергии). Это соотношение используется для исключения производной dt/ds из уравнения для пространственных компонент (4.7.7). Так как величины ϕ , ψ зависят только от r , правая часть уравнения (4.7.7) ориентирована по оси x . Из этого следует, что

$$\frac{d}{ds} [(1 - \psi)(\dot{x}y - \dot{y}x)] = 0.$$

Таким образом, если мы предполагаем, что движение происходит полностью в плоскости $z = 0$ и используем полярные координаты r, θ в плоскости xy , мы имеем дополнительную константу движения L , связанную с угловым моментом

$$(1 - \psi)r^2\dot{\theta} = L. \quad (4.7.12)$$

Уравнение для радиального движения может быть получено из уравнения (4.7.10), записанного в полярных координатах

$$\frac{K^2}{1 + \phi} - (1 - \psi)(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) = 1. \quad (4.7.13)$$

Меняя производную $(dr/d\theta)$ на отношение (dr/ds) и $(d\theta/ds)$, мы получаем дифференциальное уравнение для орбиты

$$\frac{K^2}{1 + \phi} - \frac{L^2}{(1 - \psi)r^4} \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] = 1. \quad (4.7.14)$$

Традиционная подстановка $u = 1/r$ приводит к уравнению, которое можно удобно рассмотреть, анализируя малые возмущения ньютоновских уравнений

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2}{1 + \phi^2} - 1 \right) \frac{1 - \psi}{L^2}. \quad (4.7.15)$$

Мы полагаем, что $\phi = \psi = -2MG/r = -2MGu$. Для нерелятивистских движений K близка к 1 и $K^2/(1 + \phi) - 1 = K^2 - 1 + 2MGu$, если величина ϕ предполагается малой, так что в пределе малых значений ϕ, ψ правая часть уравнения (4.7.15) как раз и есть $L^{-2}(K^2 - 1 + 2MGu)$. Это выражение такое же, как и в ньютоновской теории, где правая часть уравнения равна $(E + 2MGu)L^{-2}$, где E – энергия частицы. В релятивистском случае имеются модификации, где мы не пренебрегаем членами более высокого порядка. Их мы обсудим в следующей лекции.

Лекция 5

5.1. Орбиты планет и прецессия Меркурия

Поскольку мы уже достигли некоторого прогресса в развитии более сложных теорий, мы должны взглянуть на более тонкие детали наших предсказаний для того, чтобы иметь критерии для оценки нашей теории. У нас есть полевая теория, которая сводится к ньютоновской теории в статическом пределе и включает в себя полное содержание энергии, и оказывается способной правильно предсказывать "падение" фотонов в поле звезды. Экспериментальное свидетельство, которое заставит нас отказаться от ньютоновского приближения, касается прецессии перигелия планеты Меркурий. Мы продолжаем вычисление орбит планет. Начнем с уравнения

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2 - 1 - \phi}{1 + \phi}\right) \left(\frac{1 - \psi}{L^2}\right),$$
$$u = \frac{1}{r}, \quad K = (1 + \phi) \frac{dt}{ds}, \quad r \left(\frac{d\theta}{ds}\right) = L = (1 - \psi) r^2 \frac{d\theta}{ds}, \quad (5.1.1)$$

где символы ψ и ϕ представляют собой диагональные элементы тензора $h_{\mu\nu}$, $\phi = 2\lambda h_{44}$ и $\psi = 2\lambda h_{ii}$, $i = 1, 2, 3$. Согласно нашей теории, которую мы разработали к настоящему времени, мы имеем $\phi = \psi = -2GM/r = -2GMu$. Однако, как мы вскоре увидим, наша теория неверна, и, чтобы не проделывать всю работу вновь после исправления теории, мы запишем

$$\phi = \alpha(-2GMu) + a(-2GMu)^2 + \dots,$$
$$\psi = \beta(-2GMu) + b(-2GMu)^2 + \dots, \quad (5.1.2)$$

в наших уравнениях, но для того, чтобы найти следствия нашей существующей теории, мы должны положить $a = b = 0$ и $\alpha = \beta = 1$ в этих формулах в самом конце. В случае нашей скалярной теории $\alpha = \beta = 1$ и $\phi = -2GM/r$. Предположим, что потенциал ϕ в естественных единицах нашей задачи mc^2 много меньше 1, так что мы можем разложить множитель $1/(1 + \phi)$ в ряд по ϕ ; тогда уравнение движения принимает следующий вид:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{L^2}(K^2 - 1 - \phi)(1 - \phi + \phi^2 - \dots)(1 - \psi). \quad (5.1.3)$$

Перепишем теперь правую часть этого уравнения как ряд по степеням u . Сохраняя только первый и второй степени малого потенциала, $2GMu$ и $K^2 - 1$, мы имеем

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = A + Bu + Cu^2 + \dots, \quad (5.1.4)$$

где

$$A = \frac{1}{L^2} (K^2 - 1); \quad B = \frac{2GM}{L^2} [(K^2 - 1)(\alpha + \beta) + \alpha];$$

$$C = \frac{(2GM)^2}{L^2} [K^2 \alpha^2 + K^2 \alpha \beta - K^2 a - (K^2 - 1)b].$$

Продифференцируем по переменной θ ; после сокращения общих множителей уравнение принимает такой вид, для которого довольно просто найти возмущенные решения

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2}B + Cu + \dots, \quad (5.1.5)$$

Когда $C = 0$, это уравнение имеет решения типа простых конических сечений ньютоновских теорий. Переменная u испытывает гармонические осцилляции около точки $B/2$ как функция θ . Для эллиптических орбит частота равна 1, так что радиальная координата r возвращается к своему начальному значению при изменении значения угла θ на 2π ; движение в точности циклическое. Когда C не равно нулю, частота равна $\omega = \sqrt{1 - C}$. Угловой период в этом случае больше, так что перигелий поворачивается при угловом изменении $T = 2\pi/\omega = 2\pi(1 + C/2 + \dots)$. Угол πC представляет прецессию перигелия за один планетарный год, так как $C \ll 1$.

Для нерелятивистской планеты мы получаем значение прецессии довольно просто; нерелятивистский предел имеет место, когда общая энергия K близка к 1 (в естественных единицах mc^2). В этом случае легко показывается, что уравнение (5.1.5) сводится в точности к ньютоновскому уравнению, как это и должно быть. То, что наша теория должна иметь правильный нерелятивистский предел, является более важным, чем то, что она даст правильное значение для прецессии! Когда $K^2 - 1 \approx 0$, прецессия за планетарный год равна

$$\pi C = (\alpha^2 - a + \alpha\beta)4\pi M^2 G^2 L^{-2}. \quad (5.1.6)$$

При существующей теории $\alpha = \beta = 1$, $a = 0$, эта величина получается равной 57 секунд дуги в столетие (в земных годах) для планеты Меркурия. Для других планет эти значения значительно меньше, как например, 4 секунды дуги в столетие для случая рассмотрения орбиты Земли. Астрономические наблюдения для прецессии перигелия Меркурия дают значение $5270''$ дуги в столетие. Однако, почти вся эта величина может быть объяснена влиянием возмущений вследствие влияния других планет. Когда же аккуратно делаются поправки (с использованием чисто ньютоновской теории), отличие между наблюдаемой и вычисленной прецессией оказывается равным 41 ± 2 секунд. Наша теория дает ответ, который, очевидно, слишком велик (по сравнению с отличием между наблюдаемым значением прецессии и вычисленной величиной в рамках ньютоновской теории), и множитель, который характеризует различие между отличием наблюдаемой

и вычисленной (в рамках ньютоновской теории) прецессией и вычисленным нами в рамках слабого приближения эйнштейновской теории гравитации смещением перигелия, имеет значение порядка $4/3$.¹

Результаты оказались настолько близки, что перед тем, как заняться уточнением нашей теории, мы могли бы тщательно проверить наблюдательные данные и вычисления для того, чтобы быть уверенными в том, что эти различия действительно имеют место. Такая проверка была проводилась неоднократно, и величина для отличия наблюдаемой и предсказываемой в рамках ньютоновской теории прецессии Меркурия осталась прежней (т.е. равной $41 \pm 2''$). Мы могли бы рассмотреть возможность физических объяснений. Если бы имелась ненаблюдаемая до сих пор планета внутри орбиты Меркурия, или если бы Солнце имело существенно квадрупольное распределение массы, так что оно было бы более сплюснуто, то дополнительная прецессия могла бы иметь место. Когда мы действительно делаем оценки для того, чтобы понять, насколько же велика должна быть такая деформация, мы приходим к величинам, которые много больше тех, которые могли бы быть приняты как физически разумные. Солнце вращается слишком медленно для того, чтобы иметь квадрупольный момент достаточной величины. Были сделаны также оценки для того, чтобы объяснить расхождение наличием внутренних планет, и было показано, что подобное объяснение также не является удовлетворительным. Отсюда мы должны заключить, что наша теория неверна.

Перед обсуждением того, что неверно в нашей нынешней теории, мы можем использовать анализ орбит для того, чтобы получить количественный результат для отклонения очень быстрых частиц при прохождении их вблизи Солнца. Релятивистский предел получается, когда $K^2 \gg 1$, т.е. полная энергия много больше, чем энергия покоя. Импульс равен $p = \sqrt{K^2 - 1}$. В пределе $K \gg 1$ можно показать, что уравнения могут быть приведены к виду, аналогичному тому, который имеет место в ньютоновской теории, за исключением того, что потенциал умножается на величину $(\beta + \alpha)$. Так как $\beta = \alpha$, то наши предсказания для угла отклонения в общем случае дают величину, которая в два раза больше, чем величина угла, получаемая в ньютоновской теории.

Численное предсказание состоит в том, что очень быстрые ча-

¹В последнее время достигнуто существенно более точное соответствие предсказаний ОТО и наблюдений. Так, например, в книге Вейнберга [Wein 72] приведены следующие данные: предсказание в рамках ОТО дает значение $43.03''/\text{столетие}$, а различие наблюдений и предсказания в рамках ньютоновской теории гравитации дает результат $43.11 \pm 0.45''/\text{столетие}$. ((Прим. перев.)

стицы ($v = c$), проходящие вблизи поверхности Солнца, должны бы отклоняться на угол $1.75''$. Были проведены измерения отклонения лучей света, испускаемого звездами, при прохождении лучей вблизи поверхности Солнца, и полученные результаты оказались обнадеживающе близки к теоретическим предсказаниям. Наблюдения в принципе являются прямыми, но достаточно сложно увидеть какие бы то ни было звезды, когда на небо выходит Солнце, не говоря о том, что оно должно быть достаточно близко к этим звездам. Для анализа берутся изображения областей неба и сравниваются с изображениями, которые получаются в течение полного солнечного затмения. Когда поле звезд, наблюдаемое во время солнечного затмения, налагается на исходное поле звезд, наблюдаемое тогда, когда Солнце находится вдали от этого поля звезд, то можно определить сдвиг от Солнца положений звезд, который тем больше, чем ближе было исходное положение к солнечному диску (на небесной сфере). Анализ данных может быть достаточно продолжительным; два таких эксперимента давали значения, соответствующие отклонениям 2.01 и 1.70 секунд дуги для света, проходящего вблизи поверхности Солнца, так что предсказание для угла отклонения, равного 1.75 секундам, вообще говоря, согласуется с этими наблюдениями.¹

5.2. Замедление времени в гравитационном поле

На настоящий момент у нас имеется теория, которая, очевидно, согласуется с наблюдениями за исключением того, что мы переоценили величину прецессии орбит планет на множитель порядка $4/3$. Мы можем представить, как и венерианские теоретики, что пока идет обсуждение остаточных возмущений или пока делаются более точные измерения, разумно продолжить развитие теории в ее нынешней форме для того, чтобы обнаружить некоторые новые эффекты, которые могли бы быть проверены, или обнаружить скрытые противоречия теории.

Если мы сравниваем дифференциальные уравнения движения частиц в электрическом и гравитационном полях, мы обнаруживаем, что уравнения движения в гравитационном поле имеет качественно отличный новый признак; не только градиенты, но и сами потенциа-

¹ Наблюдения с помощью методов радиоинтерферометрии подтвердили формулу Эйнштейна для отклонения лучей света с точностью до 1% [Заха 97*, Соуп 74*, Фома 76*]. (Прим. перев.)

лы появляются в уравнениях движения

$$\begin{aligned} \text{Электромагнетизм : } \quad \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} &= -\frac{e}{m_0} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{dx^\nu}{ds}, \\ \text{Гравитация : } \quad \frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Таким образом, даже хотя дифференциальные уравнения для самих полей весьма близки, существует различие в их интерпретации. Например, эти уравнения не говорят одно и то же в области с постоянным потенциалом и в области с нулевым потенциалом, хотя ускорения в обоих случаях равны нулю. Во вселенной вклад в потенциал, обусловленный удаленными скоплениями,¹ должен быть практически постоянным по большим областям пространства, так что используем такое приближение.

Вернемся к формулировке теории в терминах лагранжиана и вариационного принципа для того, чтобы увидеть новые соотношения с величайшей простотой и общностью. Будем предполагать, что в некоторой подобласти пространства гравитационный тензор $g_{\mu\nu}$ не зависит от координат и имеет следующее значение

$$g_{44} = 1 + \epsilon; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \quad (5.2.2)$$

Мы предполагаем отрицательный потенциал, обусловленный влиянием удаленных масс, $\epsilon < 0$. Имеем следующее выражение для действия

$$\begin{aligned} -\frac{m_0}{2} \int d\alpha \, g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\alpha} \frac{dx^\nu}{d\alpha} &= -\frac{m_0}{2} \int d\alpha \left[(1 + \epsilon) \left(\frac{dt}{d\alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\alpha} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Очевидно, что простая подстановка $t' = t\sqrt{1 + \epsilon}$ восстанавливает выражение для интервала в его предыдущей алгебраической форме. Ясно, что влияние постоянного потенциала подобно изменению масштаба времени так, чтобы заставить физические процессы протекать более медленно в областях более низкого гравитационного потенциала.

Аргумент на языке только свободных частиц не является значимым, поскольку мы не можем утверждать, что скорость, при которой ничего не происходит, может меняться. Мы должны взглянуть

¹Мы будем пользоваться термином "скопления" наряду с используемым Фейнманом словом "nebulae" – "туманности", что ранее обозначало всякий неподвижный на небе объект. (Прим. перев.)

на поведение взаимодействующих частиц. С этой целью мы продолжим использование нашей теории скалярного вещества; интеграл действия равен

$$\frac{1}{2} \int d^4x (\phi^{\cdot\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) - \lambda \int d^4x h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (5.2.4)$$

где

$$T^{\mu\nu} = \phi^{\cdot\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.2.4')$$

Мы можем явно разделить пространственные производные и производные по времени в градиентах и также выделить время в элементе объема d^4x . Мы предполагаем, что поправки ϵ меньше 1, так что разложение разрешено, и мы получаем следующее выражение для интеграла действия

$$\frac{1}{2} \int d^3x dt \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 (1 - \epsilon/2) - (\nabla \phi)^2 (1 + \epsilon/2) - m^2 \phi^2 (1 + \epsilon/2) \right]. \quad (5.2.5)$$

Снова оказывается, что при $dt' = dt = \sqrt{1 + \epsilon} \approx dt(1 + \epsilon/2)$ действие возвращается к своей первоначальной алгебраической форме. Ясно, что замедление времени имеет место для наших скалярных мезонов, представляемых ϕ . Можно показать, что замедление времени должно иметь место для всех взаимодействий, безотносительно к точной природе лагранжиана. Мы можем доказать с помощью формулы Вентцеля (5.2.4') для $T^{\mu\nu}$. Гравитационное взаимодействие может быть явно отделено от остальной части лагранжиана, какой бы он ни был

$$\mathcal{L}(\text{общ}) = \mathcal{L}_0 - \lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (5.2.6)$$

При использовании выражение (5.2.4') и $g_{\mu\nu}$ из (5.2.2) так, что $\lambda h_{44} = \epsilon/2$, полный лагранжиан равен $\mathcal{L} - (\epsilon/2) T_{44}$ или

$$\mathcal{L}(\text{общ}) = \mathcal{L}(1 + \epsilon/2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,t}} \psi_{,t} (\epsilon/2). \quad (5.2.7)$$

Предположим поэтому, что полный лагранжиан (включающий наш постоянный гравитационный потенциал) включает в себя только поле ψ и его градиенты. Интеграл действия, выраженный через переменную t' , по крайней мере, в первом порядке по ϵ , равен

$$\text{Действие} = \int d^3x dt' \mathcal{L}(\psi_{,t'}, \psi, \psi_{,x}), \quad (5.2.8)$$

так как $\psi_{,t'} = (1 + \epsilon)^{-1/2} \psi_{,t}$,

$$\text{Действие} = \int d^3x (1 + \epsilon)^{1/2} dt \mathcal{L}((1 + \epsilon)^{-1/2} \psi_{,t}, \psi, \psi_{,x}).$$

Результат всего этого состоит в том, что любые члены в лагранжиане, в которые включены градиенты по времени $\psi_{,t}$, имеют свои собственные множители $\sqrt{1 + \epsilon}$, так что подстановка $t' = t\sqrt{1 + \epsilon}$ в

точности воспроизводит влияние постоянного гравитационного поля. Следовательно, вся физика остается той же самой, за исключением замедления времени.

Гравитационные потенциалы отрицательны, так что часы должны были бы идти медленнее в том случае, если они приближаются ближе к массивному объекту, такому как звезда. Можно было бы задать вопрос о том, имеется ли возможность того, что величина $(1 + \epsilon)$ будет отрицательной, так как $\epsilon = -2GM/r$. Практически такой вопрос никогда не возникает, поскольку величина G очень мала. Для звезды с солнечной массой мы бы имели $\epsilon = -1$, только если эта масса была бы сосредоточена внутри сферы с радиусом порядка 1.5 километров. Тем не менее, математическая возможность $\epsilon < -1$ имеется в нашей теории, и мы будем обсуждать ниже возможность того, как даже в улучшенной теории возникают подобные трудности.

Таким образом, мы имеем новое предсказание наших гравитационных теорий, часы должны были бы идти более медленно в областях с более низким гравитационным потенциалом. Земляне провели такой эксперимент, в котором производилось испускание фотонов вблизи поверхности Земли с высоты 24 метров. Фотоны испускались на вершине и поглощались на дне; использовались предельно узкие линии, открытые Мессбауэром, связанные с ядерными переходами в кристаллах. Небольшое изменение в частоте, связанное с падением фотонов в гравитационном поле (1 часть из 10^{15}), компенсируется искусственным эффектом Допплера. Когда поглощение, как функция относительных скоростей кристаллов, используется для того, чтобы определить сдвиг частоты, то результаты согласуются с теоретическими предсказаниями в пределах экспериментальной неопределенности порядка десяти процентов. Часы, которые идут более медленно в этом случае, являются ядерным устройством, которое производит фотоны с определенными частотами; относительная разность в частотах часов на вершине и на дне есть $(\Delta\omega/\omega) = (\epsilon/2) =$ разность гравитационного потенциала, деленная на c^2 .

Такое предсказание сдвига частоты в действительности не требует приведенной техники нашей теории гравитации, так как это подразумевается в экспериментальных результатах Этвеша, что гравитационные силы (потенциалы) пропорциональны величине энергии. Таким образом, сдвиг частоты соответствует доли гравитационной энергии в энергии фотона. Согласно Этвешу, возбужденное ядро тяжелее на величину $(E_0/c^2)g$, если E_0 – энергия возбуждения, поскольку, как мы знаем из ядерных экспериментов, его масса равна $M + E_0/c^2$, если M – масса в положении, когда ядро находится на

поверхности Земли. Если возбужденное ядро поднимается на высоту h , оно содержит энергии на величину $E_0 + (E_0/c^2)gh + Mgh$ больше, чем невозбужденное ядро, находящееся на нулевой высоте. Если мы возбуждаем ядро, находящееся в более низком положении, требуется только энергия E_0 . После того, как более высоко расположенное ядро совершило переход, его полная энергия должна была бы превосходить полную энергию более низко расположенного ядра только на величину Mgh . Так как частота фотона связана с энергией соотношением $E = \hbar\omega$, частота испущенного фотона есть $\omega = \omega_0(1 + gh/c^2)$. Таким образом, очевидно, что сдвиг частоты требуется из закона сохранения энергии. Если такого сдвига частоты не было бы в подобной ситуации, мы могли бы сконструировать вечный двигатель, используя такие ядерные переходы. Мы возбуждаем ядро на вершине башни фотонами с энергией E_0 , но мы получаем механическую энергию $(M + E_0/c^2)gh$ при опускании возбужденного ядра. Так как поднятие невозбужденного ядра требует затраты энергии только Mgh , то мы получаем $(E_0/c^2)gh$ высвобождаемой энергии на каждом цикле! Тогда наша теория не является непротиворечивой, и это наводит на мысль, что сдвиг частоты, требуемый законом сохранения энергии, должен рассматриваться как общее свойство всех физических процессов, т.е. они протекают более медленно в областях с более низкими значениями гравитационного потенциала.

Здесь нет ничего похожего на "парадокс близнецов" в специальной теории относительности. Человек на вершине горы живет и стареет быстрее, чем мы, мы видим его движущимся быстрее. Когда он смотрит на нас, он видит нас, движущимися медленнее, чем он. Это не похоже на замедление времени при больших относительных скоростях, когда каждый наблюдатель видит другого движущимся медленнее. Однако не существует пути значительного увеличения нашего времени жизни, двигаясь в Долину Смерти, так как скорости изменения старения меняются очень мало. Тем не менее, мы должны были бы быть значительно более внимательными в будущем, говоря о возрасте объектов, таких как Земля, так как центр Земли должен бы быть на день или два моложе, чем ее поверхность.

5.3. Космологические эффекты, связанные с замедлением времени. Принцип Маха

Ранее мы заметили, что вселенная могла бы быть приближенно описана как сферически симметричное распределение массы, и чтобы гравитационные потенциалы были бы возможно такой величины, что значения гравитационной энергии были бы равны энергии покоя частиц вблизи центра. Если бы это было так, и если наша формула

для замедления времени была бы правильной, то физические процессы должны были бы остановиться в центре вселенной, так как время там не шло бы совсем. Это не только физически неприемлемое предсказание; так как мы могли бы ожидать, что вещество вблизи края вселенной должно было бы взаимодействовать быстрее, то свет от удаленных галактик должен был бы иметь фиолетовое смещение. На самом деле, хорошо известно, что он сдвинут в сторону более низких, более красных частот. Таким образом, наша формула для замедления времени очевидно нуждается в том, чтобы быть обсужденной в дальнейшем в связи с анализом возможных моделей вселенной. Последующая дискуссия является чисто качественной и предназначена только для того, чтобы стимулировать более мудрые мысли по этому поводу.

Возможно, что поправки к нашей простой формуле могли бы прийти от пространственных элементов тензора $h_{\mu\nu}$. Мы рассмотрели только компонент h_{44} ; могло бы быть так, что если бы мы включили в рассмотрение h_{11} и h_{22} и h_{33} , мы могли бы предсказать не просто замедление времени, но и некоторое одновременное сжатие вдоль пространственных осей, что позволило бы разрешить каким-либо образом обсуждаемые трудности. Другая возможность состоит в том, что 1, которая появляется в формуле для замедления времени, есть ошибка в рассуждении. Мы записали формулу, которая применяется только в том случае, когда разности потенциалов ϕ много меньше 1, так что константа 1 может каким-либо образом представлять нормализованный вклад в распределение массы удаленных скоплений. Другими словами, мы вывели, что гравитационные поправки к общей энергии частицы есть поправки к ее инерции. Это предположение является концептуально простым обобщением того рассуждения, при котором предполагается, что возможно частицы не имеют собственной инерции, так что вся инерция представляет сумму гравитационных взаимодействий с остальной частью вселенной. Мы немедленно приходим к количественным трудностям. Предположим, что мы пытаемся сказать, что вблизи Солнца одиночная планета имеет полную потенциальную энергию, которая есть сумма потенциала Солнца и приближающегося к константе распределения, обусловленного влиянием оставшегося вещества

$$\phi = \phi(\text{Солнце}) + \phi(\text{вещество}). \quad (5.3.1)$$

У нас нет возможности идентификации $\phi(\text{удаленное вещество})$ с 1, так как поправка $\phi(\text{Солнце})$ может быть с противоположным знаком.

Хотя показано, что эта не слишком усложненная попытка обсуждения провалилась, может быть стоит обсудить этот вопрос более

детально. Идея, что инерция представляет эффекты взаимодействия с распределением удаленного вещества, была впервые высказана Эрнстом Махом в XIX веке, и это была одна из тех мощных идей, которые Эйнштейн держал в голове при создании своей теории гравитации.

Мах чувствовал, что концепция абсолютного ускорения относительно "пространства" не имеет глубокого смысла; что вместо этой концепции обычные абсолютные ускорения классической физики должны быть перефразированы как ускорения относительно распределения удаленного вещества. Подобно этому, понятие вращения должно быть вращением относительно чего-либо, "абсолютное вращение" также является понятием, лишенным смысла. Когда мы рассматриваем это понятие, как фундаментальное предположение или постулат, оно известно как принцип Маха. Возможно, что эта концепция сама по себе может привести к глубоким физическим результатам, многие из которых могут быть получены на том же самом пути, что и принцип относительности, связывающий системы отсчета с постоянной относительной скоростью, который использовался Гюйгенсом как инструмент для того, чтобы вывести законы, описывающие столкновения бильiardных шаров. Предположим, что мы наблюдаем лобовое столкновение, так что бильiardные шары, имеющие равные и противоположно направленные импульсы, затем меняют значения своих импульсов на противоположное. Гюйгенс представил этот же самый эксперимент, как проводимый на лодке, имеющей постоянную скорость относительно берега. Используя принцип относительности, Гюйгенс получил правильный закон для столкновения гладких бильiardных шаров, имеющих произвольные начальные скорости.

Принцип Маха глубоко бы изменил законы механики, так как обычная механика предполагает, что неускоренное прямолинейное движение должно быть "естественным" движением в отсутствии сил. Когда ускорения определяются как ускорения относительно других объектов, траектория частицы при "отсутствии ускорения" зависит от распределения других объектов в пространстве, и определение сил между объектами изменялось бы всякий раз, когда бы мы меняли распределение других объектов в пространстве.

5.4. Принцип Маха в квантовой механике

Утверждение принципа Маха для квантовой теории включает в себя новые эффекты, так как мы не можем говорить о прямолинейных траекториях; мы увидим, что надлежащее утверждение включает в себя до некоторой степени развитие понятия "время".

У Маха была проблема, связанная с тем, как частица "знает", что она ускоряется. Мах думал, что это обусловлено влиянием распреде-

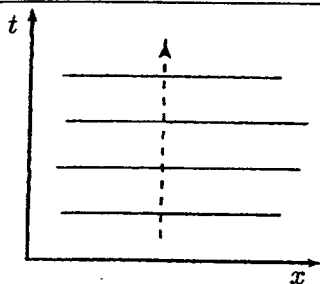


Рис. 5.1.

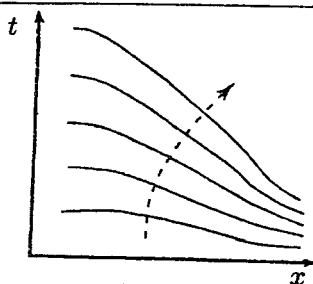


Рис. 5.2.

ления удаленных масс, таким влиянием, что ускорение относительно них требует силы. С появлением квантовой механики новый "абсолют" стал определяемым; абсолютный масштаб длины или времени. 10^{24} атомов водорода при нулевой энергии в кубе имеют как раз некоторый определенный абсолютный размер, молекула NH_3 вращается с определенным временем между циклами.¹ В вакууме два одинаковых фотона, сталкивающихся друг с другом, не делают ничего особенного до тех пор, пока длина волны не станет меньше, чем $2\pi \cdot 3.68 \times 10^{-11}$ см, когда могут быть образованы пары электронов. Как фотоны "знают", каковы их длины волн в абсолютных единицах с тем, чтобы решить, образовывать ли им пары? Каждый объем пространства должен содержать естественную меру размера (или времени).

Принимая философию Маха, мы могли бы сказать, что вышесказанное есть нонсенс, что размер не есть абсолют, если нет ничего, с чем можно было бы его сравнить. Это могло бы быть влияние "туманностей", которое определяет масштаб времени в каждой точке пространства. Скажем, комптоновская длина волны относительно размера Вселенной зависит от того, как много "туманностей" находится в ней. Если они частично удалены, то масштаб длины должен был бы предположительно меняться.

Мы предположим, следовательно, что естественный масштаб времени, скажем, величина $\hbar/mc^2$ (или любая другая комбинация для других фундаментальных частиц, а мы предполагаем, что все они пропорциональны некоторой единице длины) определяется некоторой удаленной "туманностью". Теперь мы покажем, что инерциальная система отсчета также автоматически определяется этой "туманностью", и феномен инерции для ускорений относительно этой "туманности" может быть понят, если принимается "определяющий длину принцип". Следовательно, принцип Маха эквивалентен утверждению, что фундаментальные единицы длины и времени в точке есть

¹ Обсуждение некоторых простейших свойств молекулы аммиака, основанное на квантово-механическом подходе, можно найти в "Фейнмановских лекциях по физике" [Feyn 63a] (т. 8 русского перевода, 1966, с. 145). (Прим. перев.)

результат влияния удаленной "туманности".

Предположим, что частица находится в покое, тогда в квантовой механике она характеризуется следующей зависимостью от времени $\exp(-imc^2t/\hbar)$. Принцип инерции есть утверждение о том, что временной масштаб не зависит от координаты x ; классические траектории интерпретируются так, чтобы следовать нормальным линиям постоянной фазы. В пространстве двух измерений мы рисуем линии постоянной фазы перпендикулярно оси времени, как на рис. 5.1.

Если временные масштабы в различных частях пространства не являются теми же самыми, то линии постоянной фазы в таких диаграммах являются кривыми и соответствующие классические траектории – кривые, соответствующие ускоренному движению по направлению к области с меньшим масштабом, как показано на рис. 5.2. Так как звезды производят такое уменьшение характерного времени для фазы, они должны вызывать ускорения. В квантовой механике плоско-параллельные решения существуют, когда поверхности постоянной фазы параллельны; если этого нет, то волновые пакеты будут стремиться следовать градиенту фазы. Теперь, если удаленная "туманность" определяет в основном этот масштаб и если нет ближайших звезд, масштаб $\hbar/mc^2$ будет почти равным в двух ближайших точках 1 и 2, потому что 1 и 2 находятся практически на одинаковом расстоянии от всех "туманностей". Следовательно, естественная частота (разделение линий постоянной фазы) в точках 1 и 2 была бы практически равной. Таким образом, если частица первоначально имела бы равную фазу в точках 1 и 2, это всегда было бы так, и это состояние оставалось бы в покое, не ускорялось бы (более точно, длинный волновой пакет оставался бы в покое). Неравные начальные фазы дают наклонные линии, постоянная наклона по времени связана с постоянной скоростью. Отсутствие ускорения есть следствие наличия естественной временной шкалы, которая одинакова во всех точках в области пространства. Это постоянство понятно, если "туманности" определяют естественную шкалу для области пространства очень малой по сравнению с размерами распределения влияющих "галактик" (размерами вселенной), никаких вариаций в масштабе не могло бы ожидать.

Имеются некоторые числовые совпадения, которые мы можем упомянуть здесь для того, чтобы навести на мысль о том, как "естественные" масштабы длины могут быть в некотором смысле извлечены из космологии. Такое совпадение не содержит в себе "теорию", как таковую, оно просто используется для того, чтобы проиллюстрировать связь, которая могла бы быть в конце концов предсказана подробной теорией. Мы предполагаем, что в некоторой системе временных

единиц, которые "естественны" для вселенной, соответствующий инвариант (элемент длины) для частицы, находящейся в покое, есть

$$(ds)^2 = g_{44}(dt)^2. \quad (5.4.1)$$

Координатная временная единица t должна быть (R/c) , где R – радиус вселенной. Мы предполагаем, что атомные единицы определяются ds , мы серьезно берем в качестве абсолютного размера $g_{\mu\nu}$, тогда одна единица ds является фундаментальной длиной. Какова фундаментальная длина? Все масштабы длины пропорциональны, но мы попробуем использовать комптоновскую длину волны $\hbar/Mc$. Тогда s от 1 означает одну осцилляцию волновой функции протона, а t от 1 – масштаб, равный размеру Вселенной.

Предположим затем, что вклад в величину g_{44} , обусловленный каждым протоном, есть просто $1/r$ (r есть в координатных единицах радиус вселенной). Тогда удаленные "туманности", которые имеют N_0 протонов и которые удалены на характерное расстояние $R = 1$, дают вклад в величину g_{44} порядка N_0 . В окрестности звезды на расстоянии r , содержащей n протонов, элемент дуги имеет следующий квадрат:

$$(ds)^2 = \left(N_0 + \frac{n}{r}\right) (dt)^2. \quad (5.4.2)$$

Совпадение состоит в том, что если T – возраст вселенной, то он численно связан со временем протона $(\hbar/M_p c^2) \approx T/\sqrt{N_0}$. Вместе с другим совпадением, о котором уже было упомянуто, что $2M_{\text{всел}}G/R \approx 1$, когда мы вновь переходим к произвольной системе единиц, такой как сантиметры и секунды, получаем

$$(ds)^2 = \left(N_0 + \frac{2mG}{r}\right) (cdt)^2, \quad (5.4.3)$$

где m – масса звезды, грубо говоря $m = nM_p$. За исключением катастрофического появления знака (+) вместо знака (–), этот результат идентичен "правильному" выражению для длины дуги. Мы преуспели в получении правильных размеров путем жонглирования космологическими числами.

Вероятно, в таком совпадении нет какого-либо глубокого значения. Одно положение, которое неверно, состоит в том, что мы предположили вклад $(1/r)$ от каждой протонной массы, но зависимость $(1/r)$ есть правильное выражение для поправок к полной энергии, обусловленной влиянием близких частиц, и это выражение, возможно, неверно для частиц в удаленных галактиках. Другая серьезная трудность состоит в том, что мы не пытались учесть эффекты, связанные с другими членами тензора $h_{\mu\nu}$, например h_{11} . Однако такое жонглирование служит тому, чтобы показать, как теории гравитации неизбежно приводят к рассмотрению вовлеченных в теорию времени

и инерции; мы получаем представление о том, как взаимодействие, выраженное через число удаленных частиц, может привести к наблюдаемой инерции такого объекта, как протон. Во всяком случае, делается намек на то, что абсолютная величина тензора $g_{\mu\nu}$ взята серьезно; эта величина может иметь смысл. Плоское пространство может быть $g_{44} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = \xi$, где ξ – имеющее глубокий смысл число, которое не берется просто равным 1.

5.5. Собственная энергия гравитационного поля

Вернемся к менее спекулятивной и более точной материи. При развитии и проведении модификаций нашей полевой теории мы пренебрегали тем, чтобы проверить, является ли наша теория внутренне непротиворечивой. Мы написали полный лагранжиан, имеющий полевой член, член, описывающий материю, и член, характеризующий взаимодействие. Мы получили полевое уравнение, используя условие, что дивергенция тензора энергии-импульса должна быть равна нулю. Такая процедура очевидно некорректна, так как мы написали тензор давления, который не включал в себя энергию самого гравитационного поля. Таким образом, наша нынешняя теория не выдерживает критики с точки зрения физики, так как энергия вещества не сохраняется.

Мы попробуем исправить этот теоретический недостаток путем поиска нового тензора, который складывается со старым тензором $T^{\mu\nu}$, который мог бы разрешить эту проблему, так что

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{;\nu} = 0, \quad (5.5.1)$$

и в то же самое время полная энергия поля правильно учтена. Как мы найдем этот член? Мы могли бы попытаться построить правильный полный тензор, используя формулу Вентцеля и полный лагранжиан. Результат дает несимметричный тензор, если мы проведем его симметризацию, проведем также вычисления, то оказывается, что выражение для прецессии перигелия Меркурия получается неверным. Это другой пример эмпирического определения физических теорий: теории, не возникающие из некоторого рода вариационного принципа, такого как принцип минимального действия, могут в конечном счете приводить к волнениям и противоречиям.

Сделаем попытку другого рода согласно общей линии нашего построения, заключающегося в испытаниях различных теорий в последовательном порядке увеличения сложности. Физически мы знаем, что мы пытаемся описать нелинейный эффект: гравитационное поле образовано энергией, энергия этого поля есть источник других полей. Здесь мы можем приступить к получению важного результата. Конечно возможно, что такая нелинейность может приниматься в

расчет для малого остаточного отличия в прецессии перигелия Меркурия. Мы будем требовать, чтобы полевые уравнения получались из вариации некоторого действия, и будем задавать себе вопрос о том, какого вида член должен быть добавлен к лагранжиану для того, чтобы получить член, похожий на член $\chi^{\mu\nu}$, чтобы придти к уравнению движения

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} - 2\bar{h}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{,\nu\sigma} = -\lambda(\bar{T}^{\mu\nu} + \bar{\chi}^{\mu\nu}), \quad (5.5.2)$$

и такого, что соотношение (5.5.1) оказывается выполненным? Как может выглядеть выражение $\chi^{\mu\nu}$, если оно представляет вид гравитационной энергии? Несомненно, что, по крайней мере, частично эта величина пропорциональна квадратам полевых сил; это есть произведение двух градиентов потенциалов. Возможно, поэтому, $\chi^{\mu\nu}$ есть сумма членов, похожих на $h^{\mu\sigma}{}_{,\lambda}h^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}$ + т.д., каждый из которых с двумя компонентами h и двумя производными.

Мы будем требовать, чтобы наши уравнения были выводимы из вариационного принципа такого, как наименьшее действие. Когда мы варируем эти произведения, мы уменьшаем число компонент h , так что для лагранжиана, который используется для вычисления вариации действия, требуется связывающий член третьего порядка по $h_{\mu\nu}$, который будем называть F^3 ; мы будем пытаться сделать преобразования так, что вариация F^3 приводит к члену $\chi^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta F^3}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda \chi^{\mu\nu}. \quad (5.5.3)$$

Алгебраическое выражение F^3 должно быть таким, чтобы оно включало в себя произведения трех компонентов h и имело два индекса, по которым берется производная. Типичный член F^3 может быть вида

$$F^3 = a h_{\mu\nu} h^{\mu\sigma,\lambda} h_{\sigma\lambda}{}^{,\nu} + \dots \quad (5.5.4)$$

Когда мы записываем все возможные такие произведения, мы находим, что их 24. Мы могли бы в дальнейшем уменьшить это число, замечая, что некоторые члены могут быть сведены к комбинациям других интегрированием дважды по частям, эти соображения приводят нас к тому, чтобы записать 18 различных и независимых выражений. Следовательно, мы приходим к выражению для $\chi^{\mu\nu}$ через компоненты h и 18 независимых констант.

Дальнейшая процедура очевидна. Мы пытаемся определить константы, исходя из условия, что

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \quad (5.5.5)$$

Эти условия дают множество более, чем 18 уравнений для 18 констант. Тем не менее, оказывается, что все уравнения совместны и 18 констант определяются однозначно. Когда мы сделаем это, у нас будет уточненная теория, которая правильно учитывает энергию самого гравитационного поля во втором порядке по $h_{\mu\nu}$.

Лекция 6

6.1. Билинейные члены тензора энергии-импульса

Наша нынешняя теория линейна в том смысле, что мы написали уравнение относительно гравитационного поля $h_{\mu\nu}$, связывающего его с тензором давления $T_{\mu\nu}$

$$\overline{h_{\mu\nu,\lambda}{}^{\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{\lambda}} = -\lambda T_{\mu\nu}. \quad (6.1.1)$$

Но мы определили $T_{\mu\nu}$, выразив его только через распределение материи, как будто на материю не действует гравитация, как будто энергия гравитационного поля сама по себе не является источником полей. Эффекты, связанные с влиянием гравитации на материю, которые мы хотели бы включить в рассмотрение, могут быть проиллюстрированы рассмотрением того, что может произойти, когда мы соединяем массы объектов 1 и 2 вместе в присутствии третьего объекта. Часть работы, которая произведена, может пойти на нагревание третьего объекта, так что энергия не сохраняется при рассмотрении только масс объектов 1 и 2 и полей, которые они порождают. Таким образом, энергия не сохранялась бы, если бы мы рассматривали только подсистемы; ящики, показанные штриховыми линиями на рис. 6.1, не имели бы одинаковый вес. Нелинейный эффект, обусловленный влиянием энергии поля, является более знакомым; мы вычислили поля, обусловленные распределением массы, как первое приближение; следующее приближение состоит в том, чтобы включить поля первого порядка как источники, и так мы приходим к самосогласованному решению.

Мы построим новый тензор давления из нашего старого тензора добавлением члена, который будет выводим из той части лагранжиана, которой пренебрегали ранее, и который обозначим F^3 , путем вариации

$${}^{\text{new}}T^{\mu\nu} = {}^{\text{old}}T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu}, \quad \lambda\chi^{\mu\nu} = \frac{\delta F^3[h]}{\delta h_{\mu\nu}}, \quad (6.1.2)$$

и надеемся, что эти трудности будут устранены, по крайней мере, в более высоких порядках по $h_{\mu\nu}$.

Так как мы пытаемся построить $\chi^{\mu\nu}$ для того, чтобы устранить тот недостаток тензора энергии-импульса ${}^{\text{old}}T^{\mu\nu} \equiv {}^0T^{\mu\nu}$, связанный с сохранением энергии ${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$, мы получаем намек на структуру $\chi^{\mu\nu}$, вычисляя дивергенцию ${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$. Дивергенция $\chi^{\mu\nu}$ взаимно уничтожила бы ненулевую часть этой дивергенции ${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, по крайней

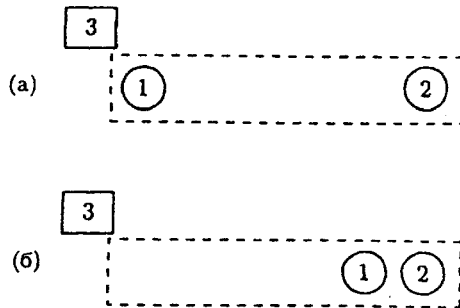


Рис. 6.1.

мере, в первом ненулевом порядке. Для того, чтобы вычислить эту дивергенцию, мы сначала перепишем тензор ${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ для движущейся частицы в новой форме, которая выглядит сначала непривычной, но с которой проще проводить преобразования. На языке интеграла по скалярному параметру, который также может быть собственным временем s (мы обозначаем точками производные по собственному времени s), получаем следующее выражение для этого тензора

$${}^{\circ}T^{\mu\nu}(x) = m_0 \int ds \delta^4(x - z(s)) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu. \quad (6.1.3)$$

То, что это выражение для тензора ${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ эквивалентно тому, которое было использовано ранее, может быть проверено сравнением соответствующих членов действия

$$\lambda \int d^4x {}^{\circ}T^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x) = \lambda m_0 \int ds h_{\mu\nu}(z) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu. \quad (6.1.4)$$

Существует простой физический путь для интерпретации смысла δ -функции в соотношении (6.1.3); в этом выражении попросту утверждается то, что нет энергии взаимодействия, за исключением того места, где на самом деле находится частица. Возможно проще понять, насколько удачно подобраны эти выражения, переписывая обычную электродинамику на том же самом языке; член в лагранжиане, описывающий взаимодействие, есть объемный интеграл от $-j^\mu A_\mu$, а j^μ связывается со скоростью частицы следующим образом:

$$j^\mu(x) = e \int ds \delta^4(x - z(s)) \dot{z}^\mu, \quad S(\text{внутр}) = -e \int ds A_\mu(z) \dot{z}^\mu. \quad (6.1.5)$$

Параллелизм с нашими гравитационно-полевыми выражениями (6.1.3) и (6.1.4) очевиден.

Вычислим дивергенцию ${}^{\circ}T^{\mu\nu}_{,\nu}$ из соотношения (6.1.3). Сначала проверим, что δ -функция симметрична по переменным x и z , так что

производная по переменной x^ν может быть заменена (со знаком "—") производной по переменной z^ν . Тогда мы будем использовать следующее тождество

$$\dot{z}^\nu \frac{\partial}{\partial z^\nu} f[z(s)] = \frac{d}{ds} f[z(s)] \quad (6.1.6)$$

для того, чтобы получить выражение для дивергенции тензора ${}^0T^{\mu\nu}$

$${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = m_0 \int ds \delta^4(x - z(s)) \ddot{z}^\mu. \quad (6.1.7)$$

Мы видим, что эта дивергенция есть плотность ускорения. Здесь мы будем предполагать, что мы уже правильно включили в наш лагранжиан все взаимодействия, отличные от гравитации, так что ускорение $\ddot{z}^\mu$ представляет влияние гравитации, задаваемое уравнением движения

$$g_{\mu\lambda} \ddot{z}^\mu = -\frac{1}{2} [g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}] \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu = -[\mu\nu, \lambda]_z \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu. \quad (6.1.8)$$

Нижний индекс z на скобке напоминает нам, к какой переменной относятся индексы. Теперь умножим дивергенцию, полученную в соотношении (6.1.7), на $g_{\mu\lambda}(x)$ и заменим $g_{\mu\nu} \ddot{z}^\mu$ на $-[\mu\nu, \lambda]_z \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu$. Заметим, что из-за наличия δ -функции величина $[\mu\nu, \lambda]_z$ приводит к тому же эффекту, что и $[\mu\nu, \lambda]_x$. Это означает, что знак скобки может быть вынесен за знак интеграла, приводя нас к выражению, в которое включена только дивергенция ${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ и исходный тензор ${}^0T^{\mu\nu}$:

$$g_{\sigma\lambda}(x) {}^0T^{\sigma\nu}{}_{,\nu}(x) = -[\mu\nu, \lambda] {}^0T^{\mu\nu}(x). \quad (6.1.9)$$

Это точное уравнение, которому должен удовлетворять тензор ${}^0T^{\mu\nu}$. В настоящее время мы используем его только в первом порядке малости по $\hbar$. Мы можем разделить тензор $g_{\sigma\lambda}$ на два слагаемых $\eta_{\sigma\lambda} + 2\lambda h_{\sigma\lambda}$ и получить уравнение,¹ которое говорит нам, что дивергенция ${}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ начинается с линейного члена по константе связи λ :

$${}^0T_{\lambda\nu}{}^{,\nu} = -[\mu\nu, \lambda] {}^0T^{\mu\nu} - 2\lambda h_{\sigma\lambda} {}^0T^{\sigma\nu}{}_{,\nu}, \quad (6.1.10)$$

так как знак "скобка" включает в себя производные, которые делают нулевой порядок $\eta_{\mu\nu}$ тензора $g_{\mu\nu}$ не играющим никакой роли.

Когда мы сравниваем это соотношение с требованием, что новый тензор ${}^{\text{new}}T^{\mu\nu} \equiv {}^nT^{\mu\nu}$ должен иметь нулевую дивергенцию,

$${}^nT^{\mu\nu}{}_{,\nu} = {}^0T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \chi^{\mu\nu}{}_{,\nu}, \quad (6.1.11)$$

¹ При переводе мы не меняли не очень удачные обозначения Фейнмана, когда λ обозначает одновременно как индекс, так и множитель, т.е. две совершенно различные величины. (Прим. перев.)

и если мы предполагаем, что само выражение для $\chi^{\mu\nu}$ – билинейно по полям, мы видим, что дивергенция $\chi^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ должна иметь следующее выражение:

$$\chi_{\mu\nu}{}^{,\nu} = [\sigma\nu, \mu]^{\circ} T^{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\lambda^2) \dots \quad (6.1.12)$$

Знание дивергенции не определяет для нас $\chi^{\mu\nu}$. У нас есть дополнительное требование, используя которое мы надеемся вывести $\chi^{\mu\nu}$ из вариации F^3 по отношению к $h_{\mu\nu}$, согласно соотношению (6.1.2). Если мы возьмем F^3 как сумму по всем возможным независимым произведениям, включающим в себя всевозможные трилинейные произведения полевых компонент и два независимых индекса, по которым берутся производные, то эти два требования определяют величину F^3 однозначно. Мы не будем проводить здесь определение 18 констант, но отметим, что это результат больших и трудоемких алгебраических вычислений

$$F^3 = -\lambda \left[h^{\alpha\beta} \bar{h}^{\gamma\delta} \bar{h}_{\alpha\beta, \gamma\delta} + h_{\gamma}^{\beta} h^{\gamma\alpha} \bar{h}_{\alpha\beta, \delta}{}^{,\delta} - 2h^{\alpha\beta} h_{\beta\delta} \bar{h}_{\alpha\gamma}{}^{,\gamma\delta} + 2\bar{h}_{\alpha\beta} \bar{h}^{\sigma\alpha}{}_{,\sigma} \bar{h}^{\tau\beta}{}_{,\tau} + \left(\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} h^{\alpha}{}_{\alpha} h^{\beta}{}_{\beta} \right) \bar{h}^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau} \right]. \quad (6.1.13)$$

Теперь для нас оказывается возможным, используя метод малых возмущений, вычислить все эффекты, которые рассматривались ранее. Для случая движения планет включение выражения для F^3 в интеграл от лагранжиана приводит к следующим выражениям ϕ и ψ , которые должны быть использованы для вычислений орбит:

$$\phi = \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 + \dots, \quad \psi = \Phi - \frac{3}{8} \Phi^2 + \dots, \quad \Phi = -\frac{2MG}{r}. \quad (6.1.14)$$

Эти поправки приводят к полному согласию нашей теории с наблюдениями по прецессии перигелия Меркурия, так что последнее оставшееся расхождение между теорией и наблюдениями исчезает.

6.2. Формулировка теории, справедливой во всех порядках

Мы достаточно преуспели в нашей задаче, которую мы поставили перед собой в самом начале, построить полевую теорию гравитации по аналогии с другими хорошо известными полевыми теориями, которые бы адекватно описывали все известные характеристики феномена гравитации. Таким образом, наша воображаемая венерианская точка зрения оказалась плодотворной. Имеются некоторые слабые места в нашей теории; мы могли бы представить себе, что самые трудолюбивые венерианские теоретики могли бы не удовлетвориться теорией, в

которой оставлены неопределенными эффекты третьего порядка малости, и некоторые из них могли бы продолжить исследование функций F^4 и F^5 и т.д., которые должны быть добавлены к интегралу от лагранжиана для того, чтобы сделать теорию согласованной в более высоких порядках. Этот подход есть невероятно сложная процедура вычисления ненаблюдаемых поправок, и мы не будем соревноваться с нашими воображаемыми венерианами в этом отношении.

В физических теориях подчас возникает такая ситуация, что хотя поправки более высокого порядка в полном разложении удручающе скучно вычислять, возможно построить теорию, в которой суммируются все поправки более высокого порядка, для того, чтобы получить ответ, который является достижимым. Таким образом, представим себе честолюбивого и самоуверенного венерианина, который решил сделать попытку вывести полное разложение для функции $F = F^2 + F^3 + F^4 + F^5 + \dots$. Мы будем искать функционал F , описывающий действие, которое должно быть провариировано, по следующим эмпирическим причинам: по-видимому, не существует достаточно удовлетворительной теории, которая не является выводимой с использованием вариационного принципа, первый этап применения которого заключается в выписывании функционала, связанного с лагранжианом или гамильтонианом (обе формулировки являются эквивалентными).

В настоящее время нет определенности относительно того, отражают ли неудачи нелагранжевых теорий некоторую фундаментальную истину о природе. Возможно, что фундаментальная истина может быть в том, что физические процессы происходят согласно принципу минимальной фазы и что действия в классической физике или квантовой физике есть выражения для этой фазы, которые верны в некотором приближении. Амбициозная попытка облечь гравитацию в нелагранжеву формулировку была сделана Бирхгоффом [Birk 43]. Он сохранил линейные уравнения для полей, но изменил уравнения движения для частиц. Полученная в результате классическая теория была совершенно удовлетворительна, но она не позволяла непротиворечивого квантования. Было показано, что волновое движение волновых пакетов не следует постулированным классическим уравнениям, но следует уравнениям Эйнштейна! Кажется вероятным, что эта попытка квантования открыла некоторую скрытую несогласованность в этих полевых уравнениях.

Следовательно, мы будем искать полный функционал F ,

$$F = F^2 + F^3 + F^4 + \dots, \quad (6.2.1)$$

который определяется из требования того, что результирующее урав-

нение есть уравнение движения

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda T^{\mu\nu}, \quad (6.2.2)$$

которое автоматически имеет следствием условие на дивергенцию $T^{\mu\nu}$ (6.1.9). Функционал F должен, следовательно, удовлетворять следующему дифференциальному функциональному уравнению:

$$g_{\sigma\lambda} \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right)_{,\nu} + [\mu\nu, \lambda] \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} \right) = 0, \quad (6.2.3)$$

которое мы должны решить. Это в общем случае представляет чрезвычайно трудную задачу, и нет процедуры для получения решений таких уравнений. Мы должны будем положиться на нашу изобретательность в придумывании функционалов, которые есть решения в том смысле, что они удовлетворяют уравнению (6.2.2) при подстановке в него. Нет единственного общего решения этого уравнения, даже если мы добавим, что для малого значения h мы будем выбирать такое решение, главные члены которого F^2 и F^3 выводятся нами другими методами. Тем не менее, имеется очевидное "наипростейшее" решение (включающее наименьшее число производных метрического тензора $g_{\mu\nu}$ — только две производных). Мы выбираем это решение. Когда этот выбор сделан, мы придем к теории, которая идентична эйнштейновской. С этого места мы откажемся от венерианской точки зрения и приступим к изучению теории гравитации с земной точки зрения, которая была изложена Эйнштейном.

6.3. Построение инвариантов по отношению к инфинитезимальным преобразованиям

Для того, чтобы решить задачу построения решений, удовлетворяющих уравнению (6.2.3), мы преобразуем это уравнение в некоторое эквивалентное утверждение о свойствах функционала F . Вначале заметим, что уравнение (6.2.3) есть векторное уравнение. Если мы возьмем скалярное произведение этого уравнения с произвольным вектором $A^\lambda(x)$ и проинтегрируем по всему пространству, то мы получим уравнение, которое выглядит несколько иначе

$$\int d\tau \left[A^\lambda(x) g_{\sigma\lambda}(x) \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right)_{,\nu} + A^\lambda(x) [\sigma\nu, \lambda] \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right) \right] = 0. \quad (6.3.1)$$

Если функционал F удовлетворяет уравнению (6.3.1) для произвольного вектора A_λ , тогда этот функционал удовлетворяет уравнению (6.2.3). Теперь мы можем проинтегрировать по частям первый член в

подынтегральном выражении, так что мы избавляемся от градиента по отношению к ν . Мы получаем, что

$$\int d\tau \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} \right) \left[- (A^\lambda(x) g_{\lambda\sigma}(x))_{,\nu} + [\sigma\nu, \lambda] A^\lambda(x) \right] = 0. \quad (6.3.2)$$

Мы поместили черту под дифференциалом $d\tau$ для того, чтобы он напоминал нам, что мы должны взять усреднение этого интеграла, и в соответствующем интеграле, имеющем индексы σ и ν , происходит чередование индексов, а так как тензор $h_{\sigma\nu}$ – симметричен, то имеющее смысл математическое тождество получается только в том случае, если скобка также симметрична по индексам σ и ν . Мы можем проинтерпретировать это уравнение (6.3.2) другим способом. Мы замечаем, что если мы делаем замену в первом порядке в тензоре h , скажем, пусть $h_{\sigma\nu}$ меняется на $h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}$, то величина функционала F меняется следующим образом:

$$F[h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}] = F[h_{\sigma\nu}] + \xi_{\sigma\nu} \frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}} + \dots \quad (6.3.3)$$

Следовательно, наше уравнение (6.3.2) говорит нам, что для инфинитезимального $\xi_{\sigma\nu}$ и в форме, появляющейся в уравнении (6.3.2), величина F остается неизменным.

Пусть тензорное поле $h_{\mu\nu}$ меняется инфинитезимальным преобразованием A^λ на тензор $h'_{\mu\nu}$. Выражаем $h'_{\mu\nu}$ согласно правилу, подразумеваемому в соотношении (6.3.2), как показано в следующем соотношении (мы должны помнить, что надо симметризовать выражение по индексам $\sigma\nu$ и использовать явное выражение для $[\sigma\nu, \lambda]$):

$$h'_{\sigma\nu} = h_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu, \lambda} A^\lambda - \underline{g_{\lambda\sigma} A^\lambda}_{,\nu}. \quad (6.3.4)$$

Положим для удобства $-\lambda A^\nu = \zeta^\nu$ и запишем уравнение через $g_{\mu\nu}$ вместо $h_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$g'_{\sigma\nu} = g_{\sigma\nu} + g_{\sigma\lambda} \zeta^\lambda_{,\nu} + g_{\nu\lambda} \zeta^\lambda_{,\sigma} + \zeta^\lambda g_{\sigma\nu, \lambda}. \quad (6.3.5)$$

Тогда наша задача становится следующей: найти выражение для функционала F от метрики $g_{\mu\nu}$ такое, что при инфинитезимальных преобразованиях, описываемых соотношениями (6.3.5), которые меняют тензор $g_{\mu\nu}$ на тензор $g'_{\mu\nu}$, функционал F не меняется в первом порядке малости по ζ^λ при любом $\zeta^\lambda(x)$. Методы для решения уравнений, аналогичных исследуемому нами, были разработаны математиками¹, работающими в дифференциальной геометрии (фактически очень близкая задача решается в дифференциальной геометрии), итак мы будем

¹См., например, книгу Веблена [Vebl 27].

предполагать, как и хорошо образованные венерианские физики, что книги, дающие нам намеки на то, как приступить к решению, являются доступными.

Фактически, можно проверить, что преобразование, определяемое соотношением (6.3.5), есть преобразование тензорного поля при инфинитезимальном преобразовании координат $x^\lambda = x'^\lambda + \zeta^\lambda$. Однако, мы будем продолжать играть в нашу игру и попытаемся вывести наши результаты как венериане, не осознающие никакой геометрической интерпретации. Конечно, мы будем возвращаться назад и обсуждать геометрическую точку зрения при обсуждении точки зрения Эйнштейна.

Теперь приступим к нахождению желаемого инвариантного выражения для F . Для того, чтобы найти это выражение, полезно определить матрицу, которая обратна $g_{\mu\nu}$, используя верхние индексы вместо нижних, что оказывается в данном случае предпочтительным, т.е.

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu, \quad (6.3.6)$$

где теперь δ_σ^μ — правильный символ Кронекера, который равен 1, если $\mu = \sigma$, и нулю, если $\mu \neq \sigma$.

Обратная к матрице $A' = A + B$, если B — инфинитезимальна, задается следующим выражением:

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots \quad (6.3.7)$$

Так как вектор ζ^λ — инфинитезimalен, мы можем легко построить тензор, обратный к тензору $g'_{\sigma\nu}$, согласно правилу, выраженному в соотношении (6.3.7)

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \zeta^\alpha{}_{,\nu} g^{\nu\beta} - \zeta^\beta{}_{,\nu} g^{\nu\alpha} - \zeta^\lambda g^{\alpha\sigma} g^{\beta\nu} g_{\sigma\nu,\lambda} + \dots \quad (6.3.8)$$

Теперь исследуем кратко один инвариант, который может быть легко найден, для того, чтобы понять используемые методы, а в следующем разделе построим более сложный инвариант, который приведет нас к нашей полной теории.

Рассмотрим, как меняется определитель матрицы, если мы слегка меняем матрицу. Мы используем следующее выражение для определителя:

$$\text{Det } A = \exp(\text{Tr } \log A). \quad (6.3.9)$$

Мы не будем останавливаться здесь для обсуждения доказательства такого равенства,¹ однако для того, чтобы показать, что оно выгля-

¹Это равенство является простым следствием из утверждения о существовании матричного логарифма невырожденной матрицы, которое доказано, например, в книгах [Гант 88*, Белл 76*]. (Прим. перев.)

дит разумным, мы могли бы заметить, что это утверждение становится тривиальным справедливым утверждением в случае, если матрица записана в диагональном виде:

$$\text{Det } A = A_{11}A_{22}A_{33}\dots = \exp(\log A_{11} + \log A_{22} + \dots) = \exp(\text{Tr} \log A). \quad (6.3.10)$$

Теперь мы применяем правило, выраженное соотношением (6.3.9), для вычисления определителя матрицы $(A+B)$, где B — инфинитезимальная матрица. Нам необходимо вычислить матричный логарифм матрицы $A+B$; соответствующее разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[A \left(1 + \frac{1}{A} B \right) \right] &= \text{Det } A \cdot \text{Det} \left(1 + \frac{1}{A} B \right) = \\ &= \text{Det } A \exp[\text{Tr}(\log(1 + \frac{1}{A} B))] = \text{Det } A \exp(\text{Tr} \frac{1}{A} B). \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Теперь мы используем это правило для того, чтобы вычислить определитель $g'_{\mu\nu}$ и взять логарифм результирующего выражения

$$\log(-\text{Det } g') = \log(-\text{Det } g) + 2\zeta^\lambda{}_{,\lambda} + \zeta^\lambda g_{\sigma\nu,\lambda} g^{\sigma\nu}. \quad (6.3.12)$$

Произведение матриц g в последнем члене может быть связано с определителем следующим образом:

$$g_{\sigma\nu,\lambda} g^{\sigma\nu} = [\log(-\text{Det } g)]_{,\lambda} \quad (6.3.13)$$

Наше достижение состоит в том, что мы получили новое соотношение, в которое включены ξ^λ и его градиенты совместно с числами, но не матрицами. Мы положим $C = \log(-\text{Det } g)$ и перепишем получившееся в результате уравнение как

$$C' = C + 2\zeta^\lambda{}_{,\lambda} + C_{,\lambda} \zeta^\lambda. \quad (6.3.14)$$

Если бы это выражение было бы полной производной, мы могли бы проинтегрировать по всему пространству для того, чтобы получить наш инвариант. Вид последних двух членов наводит на мысль, что $\exp(C/2)$ есть интегрирующий множитель. Следовательно, мы ищем инвариант вида $\exp(\alpha C')$, регулируя соответствующим образом параметр α . Так как вектор ξ^λ — инфинитезimalен, то разложение, в котором сохранены только первые члены, дает

$$\begin{aligned} \exp(\alpha C') &= \exp[\alpha(C + 2\zeta^\lambda{}_{,\lambda} + C_{,\lambda} \zeta^\lambda)] \\ &= \exp(\alpha C) + \exp(\alpha C) (2\alpha \zeta^\lambda{}_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda} \zeta^\lambda). \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Второй член этого выражения имеет вид, который может быть преобразован в полную производную; мы замечаем, что

$$(\exp(\alpha C)\zeta^\lambda)_{,\lambda} = \exp(\alpha C)\zeta^\lambda_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda}\zeta^\lambda \exp(\alpha C), \quad (6.3.16)$$

что есть такая же величина, как и второй член выражения для (6.3.15) при $\alpha = 1/2$. Когда мы интегрируем выражение (6.3.15) по всему пространству, то при $\alpha = 1/2$ интеграл от второго члена обращается в нуль, и мы приходим к равенству

$$\int d\tau \exp(C'/2) = \int d\tau \exp(C/2). \quad (6.3.17)$$

Инвариантное решение, выраженное через матрицу $g_{\mu\nu}$, есть, следовательно,

$${}^\circ F = \int d\tau \sqrt{-\text{Det } g}. \quad (6.3.18)$$

6.4. Лагранжиан теории, справедливой во всех порядках

Инвариант ${}^\circ F$, полученный в предыдущем разделе, есть на самом деле решение дифференциального функционального уравнения (6.2.3), но это не есть то решение, которое необходимо для нашей теории, так как это решение не включает в себя производные. В данном разделе мы будем строить решение, необходимое для нашей теории, аналогичным методом. Успех этих манипуляций основан на нахождении точной дивергенции, которая может быть интегрирована по всему пространству.

Исходная точка наших рассуждений есть вновь уравнение (6.3.5), в которое включены вектор ζ_λ и его первые производные. Используемое нами правило есть следующее: мы надеемся найти комбинации $g_{\mu\nu}$ и их производные, причем эти комбинации не включают в себя ζ (или, по крайней мере, полный дифференциал от этой величины), когда они преобразуются. Мы имеем в уравнении (6.3.5) первые производные ζ . Если мы вычисляем $g'_{\mu\nu,\sigma}$, то появляются вторые производные, такие как $\zeta^\lambda_{,\sigma\nu}$ и т.п. Выглядит это так, как будто сложность даже увеличилась. Но если производная самого высокого порядка есть $\zeta^\lambda_{,\sigma\nu}$ и этот порядок появляется только в одном отдельном члене, мы можем исключить этот член путем вычитания члена с переставленными индексами. (На самом деле, в нашем случае мы не будем делать этого, выражение для $\zeta^\lambda_{,\sigma\nu}$ само по себе автоматически симметрично, но мы делаем аналогичную манипуляцию с более высокими производными.) Тогда сначала образуем выражение $g'_{\mu\nu,\sigma}$, которое дает вторые производные ζ вида $\zeta^\lambda_{,\sigma\nu}$, но имеется две таких

производных, $\zeta^{\lambda}_{,\nu\sigma}$ и $\zeta^{\lambda}_{,\mu\sigma}$. Мы попытаемся преобразовать их, комбинируя с другими производными, такими как $g'_{\mu\sigma,\nu}$. Получается, что мы можем избавиться от двух членов, но появляется равное число новых членов, так что никакого упрощения не достигается. Но когда мы рассмотрим третье возможное упорядочение индексов $g'_{\nu\sigma,\mu}$, мы получаем путем сложений и вычитаний новое соотношение, в котором два члена могут добавляться, потому что они являются такими же. Одна трудность состоит в том, что так как мы вычисляем производные произведений, число членов стремительно растет, например

$$g'_{\mu\nu,\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\lambda,\sigma}\zeta^{\lambda}_{,\nu} + g_{\nu\lambda,\sigma}\zeta^{\lambda}_{,\mu} + g_{\mu\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\nu\sigma} + g_{\nu\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\mu\sigma} + \zeta^{\lambda}g_{\mu\nu,\lambda\sigma} + \zeta^{\lambda}_{,\sigma}g_{\mu\nu,\lambda}, \quad (6.4.1)$$

но когда все операции сложения и вычитания, жонглирования индексами проведены, выполнена симметризация, мы находим

$$[\mu\nu, \sigma]' = [\mu\nu, \sigma] + [\mu\lambda, \sigma]\zeta^{\lambda}_{,\nu} + [\nu\lambda, \sigma]\zeta^{\lambda}_{,\mu} + [\mu\nu, \lambda]\zeta^{\lambda}_{,\sigma} + \zeta^{\lambda}[\mu\nu, \sigma]_{,\lambda} - g_{\sigma\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\mu\nu}, \quad (6.4.2)$$

где появляется только одна вторая производная $\zeta^{\lambda}_{,\mu\nu}$. Теперь мы должны избавиться от компонент метрического тензора с нижними индексами, умножая на обратную матрицу. Сначала введем новое обозначение, которое упростит преобразования. Мы положим

$$g^{\tau\sigma}[\mu\nu, \sigma] = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}. \quad (6.4.3)$$

Если мы умножаем соотношение (6.4.2) на $g^{\sigma\tau}$ для того, чтобы отделить оставшуюся вторую производную, то соотношение принимает вид, где используются новые символы (называемые коэффициентами голономной связности или символами Кристоффеля)

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}' = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}_{,\lambda} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\lambda}\zeta^{\lambda} - \zeta^{\tau}_{,\mu\nu}. \quad (6.4.4)$$

Это соотношение автоматически симметрично по $\mu\nu$. Для того, чтобы продвинуться дальше в наших рассуждениях, продифференцируем еще раз. Если мы дифференцируем это соотношение по новому индексу ρ и вычитаем соответствующее уравнение, имеющее переставленные индексы ρ и ν , то только следующие члены остаются не сокращенными при этом вычитании

$$\begin{aligned} \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho}' - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho,\nu}' &= \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda,\rho}\zeta^{\lambda}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda,\rho}\zeta^{\lambda}_{,\mu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho\lambda}\zeta^{\lambda} + \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}\zeta^{\lambda}_{,\mu\nu} \\ &\quad - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}_{,\lambda\rho} - \text{минус члены, где индексы } \nu \text{ и } \rho \text{ переставлены.} \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Теперь трюк заключается в том, чтобы избавиться от двух вторых производных. Они умножаются на индексы Кристоффеля. Но в соотношении (6.4.4) мы имеем выражение, которое дает как раз $\zeta^\lambda_{,\mu\nu}$. Мы будем использовать это выражение для того, чтобы заместить члены на те, которые стоят в соотношении (6.4.5). Это может быть выполнено путем вычисления произведения двух соотношений, таких как (6.4.4); мы видим, что индексы у символов Кристоффеля Γ одного члена такие же, как и индексы у ζ в *другом* члене; так что взяв произведения двух соотношений (6.4.4), одно из которых берется со множеством индексов $(\tau\rho\lambda)$, другое со множеством $(\lambda\mu\nu)$, переставляя (τ, μ, ν) и складывая с соотношением (6.4.5), вторые производные сокращаются.

Введем новую величину $R^\tau_{\mu\nu\rho}$, определенную следующим образом

$$R^\tau_{\mu\nu\rho} = \Gamma^\tau_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^\tau_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\rho}. \quad (6.4.6)$$

Заметим, что этот тензор явно антисимметричен по индексам ρ и ν . Используя это обозначение, получаем наконец следующее соотношение

$$R^{\tau\tau}_{\mu\nu\rho} = R^\tau_{\mu\nu\rho} + \zeta^\lambda_{,\nu}R^\tau_{\mu\lambda\rho} + \zeta^\lambda_{,\rho}R^\tau_{\mu\nu\lambda} + \zeta^\lambda_{,\mu}R^\tau_{\lambda\nu\rho} + \zeta^\tau_{,\lambda}R^\lambda_{\mu\rho\nu} + \zeta^\lambda R^\tau_{\mu\nu\rho,\lambda}. \quad (6.4.7)$$

То, что мы должны теперь делать, это обращаться с этим уравнением так же, как мы обращались с уравнением (6.3.5), которое имеет ту же самую форму, исключая то, что тензор в последнем соотношении предпочтительнее включать тензор $R^\tau_{\mu\nu\rho}$, а не $g_{\sigma\nu}$. Процедура, полностью аналогичная той, которая была рассмотрена ранее, приводит к ответу для инвариантной величины F :

$$F = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d\tau g^{\mu\nu} R^\tau_{\mu\nu\rho} \sqrt{-\text{Det } g_{\alpha\beta}}. \quad (6.4.8)$$

Эта величина, как мы увидим ниже, есть часть действия в теории, справедливой во всех порядках.

6.5. Уравнение Эйнштейна для тензора энергии-импульса

Функционал F , который был только что выведен, дает результаты в венерианской теории гравитации, идентичные тем, которые были получены Эйнштейном. Если мы делаем разложение функционала, когда гравитационные поля слабы, мы получаем главные члены нашего разложения такие же, как F^2 и F^3 в нашей более ранней теории.

Мы можем сказать, следовательно, что наша венерианская точка зрения была успешна в достижении нашей цели построения самосогласованной теории гравитации посредством успешных логических шагов, предполагаемых по аналогии, но без видимого требования сверхчеловечески острой интуиции. Сам Эйнштейн, конечно, пришел к тому же самому лагранжиану, но без помощи развитой теории поля, и я должен допустить, что у меня даже нет идеи, как он отгадал конечный результат. У нас было достаточно волнений при получении нашей окончательной теории, но я чувствую, что он создал свою теорию, плавая под водой, будучи с завязанными глазами и с руками, находящимися сзади! Тем не менее теперь, когда мы пришли к эквивалентной теории, мы откажемся от венерианской точки зрения и обсудим земную точку зрения согласно Эйнштейну.

Будем использовать следующее стандартное обозначение для трех тензоров, выведенных из нашего тензора $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$, умножением на тензор $g_{\alpha\beta}$ и свертыванием:

$$\begin{aligned} g_{\tau\sigma} R^{\tau}_{\mu\nu\rho} &= R_{\sigma\mu\nu\rho} & \text{Антисимметричен по индексам } (\sigma\mu) \text{ и } (\nu\rho), \\ R^{\tau}_{\mu\nu\tau} &= R_{\mu\nu}, & g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R. \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Величина $R_{\sigma\mu\nu\rho}$ есть тензор (тензор Римана). Он антисимметричен при перемене индексов ν и ρ , также антисимметричен при перемене σ и μ и симметричен, если пара $(\sigma\mu)$ меняется с $(\nu\rho)$. $R_{\mu\nu}$ (тензор Риччи) – симметричен.

Вариация функционала F , описываемого соотношением (6.4.8), по отношению к $g_{\mu\nu}$ приводит к следующему соотношению:

$$2 \frac{\delta F}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right), \quad (6.5.2)$$

где $g \equiv \text{Det } g_{\mu\nu}$. Последняя величина в соотношении (6.5.2) есть тензор энергииимпульса нашей теории (см. соотношение (6.2.2)) и удовлетворяет следующему соотношению

$$g_{\sigma\lambda} T^{\lambda\nu}_{;\nu} = -[\mu\nu, \sigma] T^{\mu\nu} \quad (\text{или } T^{\lambda\nu}_{;\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}), \quad (6.5.3)$$

если сделана замена $T^{\mu\nu}$, как мы требовали это сделать. Отсюда следует, что полные уравнения гравитационного поля, правильные во всех порядках, являются следующими:

$$\sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \lambda^2 T^{\mu\nu}, \quad (6.5.4)$$

где $T^{\mu\nu}$ – наш тензор энергии вещества. Это уравнение и есть уравнение, полученное Эйнштейном.

Лекция 7

7.1. Принцип эквивалентности

В наших нынешних планах будет описание относительности и гравитации с точки зрения, которая в большей степени находится в согласии с подходом Эйнштейна. Мы надеемся, что, рассматривая теорию с различных выгодных точек зрения, мы лучше поймем теорию в целом. Теория гравитации, как она рассматривалась в рамках идей Эйнштейна, есть нечто настолько удивительно волнующее, что мы будем испытывать искушение попытаться сделать так, чтобы все остальные поля выглядели как гравитация, что является пожалуй предпочтительнее, чем продолжать исследование гравитации с венерианского направления, делающего гравитацию похожей на другие поля, которые нам привычны. Мы будем сопротивляться этому искушению.

Истоки подхода Эйнштейна должны быть найдены в физике, известной во время создания им теории гравитации, в электродинамике и ньютоновской механике. Чувствуется, что идея, преобладающая в мыслях Эйнштейна во время создания им его теорий, заключалась в том, что все разделы физики должны были бы быть согласованы; он нашел путь, чтобы уладить лоренц-инвариантность классической электродинамики с видимой галилеевой инвариантностью ньютоновской механики, и много новых физических результатов было достигнуто после этого. Аналогично, именно загадочный феномен гравитации привел Эйнштейна к теории гравитации, когда он преобразовал этот феномен в физический принцип.

Центральная идея гравитации, наиболее убедительный факт о том, как она действует, состоит в том, что вес и масса в точности пропорциональны, так что все объекты ускоряются гравитацией в точности с одной и той же скоростью независимо от состава вещества, из которого состоят эти тела. Эксперимент Этвеша показал, как центробежная сила добавляется к гравитационной силе так, что результат неотличим от чисто гравитационного эффекта. Возможно такие эксперименты навели Эйнштейна на мысль о том, что может быть такой физический принцип, который заставляет ускорения имитировать гравитацию во всех отношениях. Совершенно очевидно, что механические эксперименты, проводимые внутри ускоряющегося ящика, дают результаты, которые неотличимы от результатов, которые могли бы быть получены в том случае, если ящик находился в покое, но имелось бы гравитационное поле. Во времена Эйнштейна

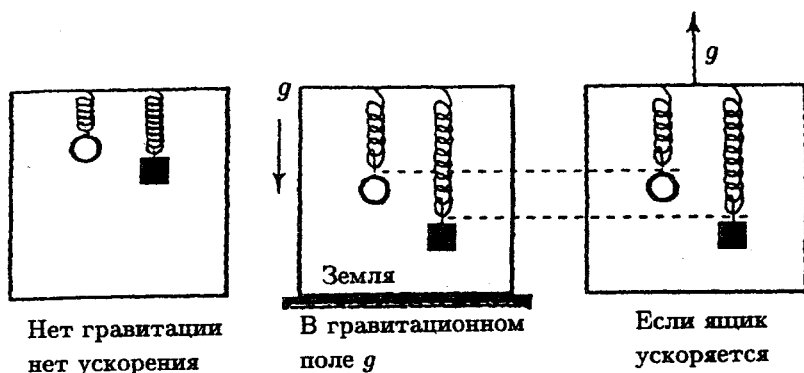


Рис. 7.1.

не было прямых проверок этого факта, но теперь нам хорошо знакома невесомость в спутниках, которая возникает вследствие того, что гравитационная сила и центробежная оказываются одинаковыми по абсолютной величине и противоположными по знаку. Возможность возникновения подобного рода невесомости есть суть принципа эквивалентности.

Перед тем, как мы извлечем полезную физику из этой идеи, мы должны иметь утверждение, которое является более точным и которое включает в себя определенные измеряемые величины. Более точное утверждение, которое имело бы смысл в рамках ньютоновской механики, могло бы включать в себя силы, действующие на стационарные объекты. Если мы осуществляем движение ящика с постоянным ускорением g , то на все тела, которые находятся в ящике, должна действовать сила, которая в точности пропорциональна весу; например, силы давления на подставки или силы натяжения пружины, поддерживающей эти тела внутри ящика, являются теми же самыми, что и силы, вызываемые однородным гравитационным полем, характеризуемым ускорением g . Так как сила давления на подставку не является напрямую измеряемой величиной, то возможно предпочтительнее рассуждать о весе тел, подвешенных на пружинах. Смещения от величины длины пружины в нерастянутом состоянии для заданных масс, подвешенных на заданных пружинах, должны быть в точности равны, когда (1) ящик находится в стационарном гравитационном поле, характеризуемом ускорением g , или (2) ящик ускоряется с постоянным ускорением g в области, где гравитационное поле равно нулю, как показано на рис. 7.1.

Это утверждение принципа эквивалентности является более физическим, но мы пока говорим на элементарном уровне без определения природы сил более точно. Возможно ли сделать физически значимые

утверждения без определения природы сил? Мы можем напомнить ситуацию в механике Ньютона. Часто говорится, что второй закон Ньютона

$$F_z = m\ddot{x}, \quad (7.1.1)$$

есть просто определение сил, так что этот закон не несет в себе никакой реальной физики, поскольку содержит в себе рассуждение, проводимое по логическому кругу. Но очевидно, что теория Ньютона целиком не является логическим кругом, так как она правильно предсказывает орбиты Луны и планет. Что Ньютон имел в виду, говоря нам, что мы должны вычислять силы в соответствии с (7.1.1), было то, что если существует ускорение, мы должны оглядеться по сторонам в поисках какой-либо физической причины, которая вызывает такую силу. Будущее физики лежит в нахождении того, как окружение объекта связано с силами, которые мы подставляем в левую часть уравнения (7.1.1) так, чтобы соответствовать наблюдаемым ускорениям.

Когда Ньютон приходит к своему третьему закону

$$F(\text{действие}) = -F(\text{противодействие}), \quad (7.1.2)$$

он делает физическое утверждение, так как он приводит детальные характеристики связи между силами и физическими объектами. Ньютонский закон гравитации есть другая детальная характеристика того, как окружение объекта связывается с его ускорениями. Второй закон Ньютона задается в духе "*cherchez la femme*": Если мы видим силу, то мы должны искать "виновный" объект, который вызывает эту силу.

Аналогичным способом наша простая формулировка принципа эквивалентности дает физическое утверждение о том, как окружение влияет на тела; оно не зависит от правильности второго закона Ньютона (7.1.1). Окружение в этом случае состоит из масс, которые образуют гравитационные поля, или внешние силы создают ускорения.

Невозможно полностью исключить гравитационные эффекты однородными ускорениями. Представим себе ящик на орбите земли, т.е. спутник. Так как гравитационное поле не является однородным, имеется только одна точка вблизи центра масс спутника, где гравитационные эффекты в точности скомпенсированы ускорением. Если мы удаляемся достаточно далеко от центра масс, гравитационное поле Земли меняет или свою величину, или направление, так что будут существовать малые нескомпенсированные компоненты гравитационных сил. Если ящик не очень велик, эти дополнительные силы очень

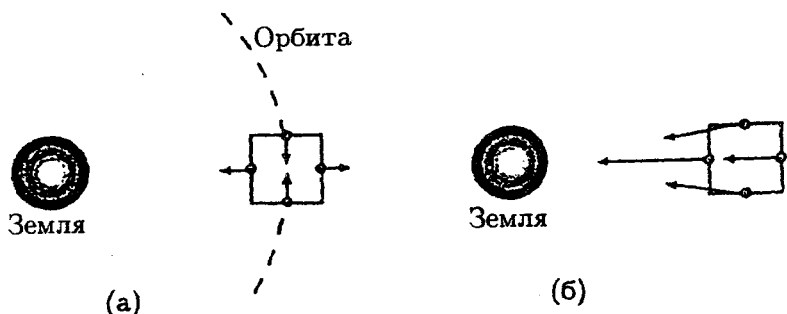


Рис. 7.2.

близки к пропорциональности расстоянию от центра этого ящика и имеют квадрупольный характер, как показано на рис.7.2(а). Силы, подобные этим, вызывают приливы на Земле, так что мы можем называть их приливными силами. Мы можем рассмотреть также ящик, который помещен в подобное неоднородное поле, но не ускоряется, как показано на рис.7.2(б). Принцип эквивалентности говорит нам теперь, что мы можем создать ситуацию, физически неотличимую от той, которая происходит внутри спутника, если мы поместим большие массы достаточно далеко, так что мы накладываем однородное поле, которое в точности компенсирует гравитацию в центре ящика.

Попробуем посмотреть, как мы могли бы сделать еще лучшее утверждение эквивалентности: одно гравитационное поле внутри ускоряемого ящика эквивалентно другому гравитационному полю и другому ускорению ящика. Мы можем исключить гравитацию в любой отдельной точке и в любой отдельный момент времени; в некоторой малой области, окружающей данную точку, остаточные отличия должны быть пропорциональны расстоянию от точки, где ускорения скомпенсированы. Становится очевидным, что при создании нашей теории мы будем рассматривать преобразования, которые можем символически записать как

$$(\text{гравитация})' = (\text{гравитация}) + (\text{ускорение}). \quad (7.1.3)$$

Вследствие этой возможности, мы не будем способны сказать в любом абсолютном смысле, что один эффект является гравитационным или вызывается силами инерции; невозможно определить "истинную" гравитацию, так как мы не можем даже точно определить, какая часть наблюдаемой силы вызывается гравитацией и какая обусловлена действием сил инерции. Оказывается верным то, что мы не можем имитировать гравитацию ускорениями всюду, что проявляется в том случае, когда мы рассматриваем ящики больших размеров. Тем не менее, рассматривая преобразования (7.1.3) в инфинитезимальных

областях, мы надеемся узнать, как описать эту ситуацию в дифференциальном виде; только затем мы будем беспокоиться о граничных условиях или описании гравитации в больших областях пространства.

В специальной теории относительности проводится интенсивное использование инерциальных систем отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью и прямолинейно. Но, как только мы допускаем существование гравитирующих масс всюду во Вселенной, концепция такого истинного неускоренного движения становится невозможной, поскольку всюду будут гравитационные поля.

Если мы проводим эксперименты внутри ящика, который не находится в свободном падении, то будет возможно определить наличие сил типа гравитации, например, экспериментами с применением пружин. Тем не менее, мы не можем сказать, находясь внутри ящика, ускоряемся ли мы относительно "туманности", или эти силы обусловлены массами, находящимися в окрестности ящика. Именно этот характерный факт о гравитационных силах дает намек на постулат, который в конце концов приводит нас к полной теории.

Мы постулируем: будет невозможно посредством какого бы то ни было эксперимента, проводимого внутри такого ящика, детектировать различие между ускорением относительно "туманности" и гравитацией. Таким образом, ускоряющийся ящик в некотором гравитационном поле неотличим от покоящегося ящика в некотором другом гравитационном поле, если наблюдатель находится внутри ящика.

Это звучит так похоже на рассуждения Эйнштейна, так напоминает его постулат специальной теории относительности! Мы знаем, что принцип эквивалентности работает для пружин (как мы знали, что специальная теория относительности работает для электродинамики) и мы распространяем его *по соглашению* на какие бы то ни было эксперименты. Мы привыкли использовать такие процедуры к настоящему времени, но каким удивительным являлся этот принцип в 1911 году – таким удивительным человеком был Эйнштейн.

7.2. Некоторые следствия принципа эквивалентности

Принцип эквивалентности говорит нам о том, что свет отклоняется (от прямолинейного движения) в гравитационном поле. Величина этого отклонения, когда свет проходит заданное расстояние в области однородного гравитационного поля, может быть очень легко вычислена путем анализа движения света в ускоряемом ящике; если ящик ускоряется, то свет движется по прямой линии в неускоряемой системе отсчета, т. е. рассматривается простая кинематика для вычисления траектории света внутри ящика. Для такого эксперимента

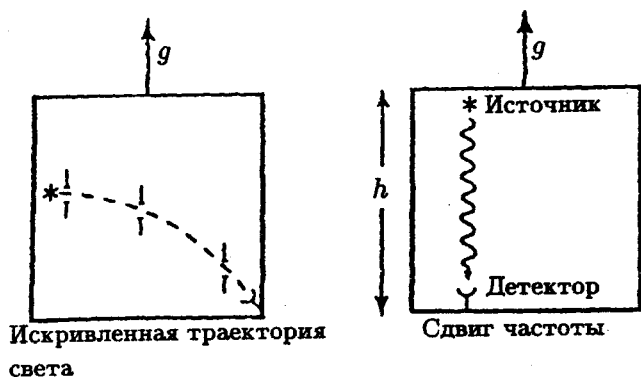


Рис. 7.3.

необходимы только источник света и детектор, и ряд разрезов для того, чтобы определить траекторию движения света, как проиллюстрировано на рис. 7.3.

Мы не можем использовать такие простые средства для вычисления отклонения света звездой, поскольку поле звезды неоднородно; подобное простое вычисление было бы неверным на множитель, равный 2, если мы просто используем ньютоновские потенциалы; для правильного вычисления необходимо использовать соответствующие релятивистские поля.

Принцип эквивалентности также говорит нам о том, что ход часов изменяется гравитацией. Свет, который испускается из вершины ускоряемого ящика, будет выглядеть смещенным в фиолетовую часть, если мы смотрим на него со дна ящика. Давайте сделаем некоторые вычисления, соответствующие малым скоростям. Время, за которое свет проходит от верха ящика до дна, составляет в первом приближении h/c , где h – высота ящика на рис. 7.3. В то же самое время дно ящика приобрело небольшую дополнительную скорость $v = gh/c$. Чистый эффект состоит в том, что приемник движется относительно излучателя, так что частота смещается

$$f_{\text{погл}} = f_{\text{испущ}}(1 + v/c) = f_{\text{испущ}}(1 + gh/c). \quad (7.2.1)$$

Таким образом, приемник на дне получит фотон с частотой, отличной от частоты, с которой испускался фотон. Заметим, что это заключение не зависит от энергии $E = mc^2$ и существования энергетических уровней, что необходимо было постулировать в соответствии с аргументами, которые были приведены ранее. Это заключение основано на ожидаемом поведении классических объектов; вычисление следует из геометрии и кинематики и дает прямое физическое предсказание, следующее из постулата эквивалентности. Как и ранее, этот вывод

не является парадоксом; часы выглядят более голубыми на вершине ящика, человек, живущий на вершине ящика, выглядит более голубым, чем человек, живущий на дне ящика. Аналогично предыдущему, мы можем вычислить сдвиг частоты для света, испускаемого человеком, живущим внизу. Так как в этом случае приемник удаляется от источника, человек, живущий внизу, выглядит краснее, когда его рассматривают сверху.

Один из способов описания этой ситуации состоит в том, чтобы сказать, что время течет быстрее на вершине ящика; течение времени различно при различных гравитационных потенциалах, так что течение времени не одинаково в различных частях нашего мира. Как велико это различие хода времени может быть в различных точках пространства? Для того, чтобы вычислить это различие, мы сравниваем ход времени с абсолютными временными интервалами, определенными через собственное время ds . Предположим, что имеется два события, происходящие на вершине, о которых сообщается, что они разделены временем dt , тогда

$$\phi = gh; \quad ds = dt(1 + \phi/c^2), \quad (7.2.2)$$

в пределе малых скоростей. Величина ϕ есть просто разность потенциалов между положением событий и точкой отсчета. Более точное вычисление дает нам выражение, которое может быть использовано при всех скоростях

$$ds = dt\sqrt{1 + 2\phi/c^2}. \quad (7.2.3)$$

Вновь мы должны напомнить, что мы не просто используем ньютоновские потенциалы в этом выражении; наше определение ϕ должно быть релятивистски точным.

7.3. Максимальные скорости хода часов в гравитационных полях

Теперь, поскольку мы заключили, что гравитационные эффекты приводят к тому, что часы идут быстрее в областях с более высоким потенциалом, мы можем поставить забавный вопрос. Мы знаем, что часы должны идти быстрее, если мы перемещаем их вверх от поверхности Земли. С другой стороны, когда мы перемещаем их, они должны замедляться, вследствие влияния эффектов специальной теории относительности. Вопрос состоит в том, как мы должны были бы передвигать часы вверх и вниз вблизи поверхности Земли, чтобы сделать эту разницу по времени как можно больше? Для простоты рассмотрим эту задачу в предположении, что Земля имеет однородное гравитационное поле и рассматривается движение только в одном

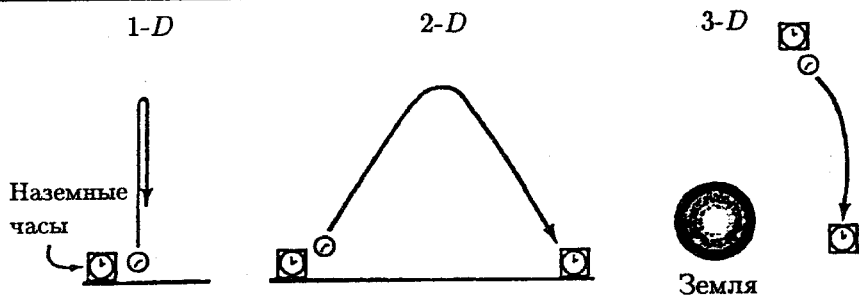


Рис. 7.4.

измерении. Ясно, что эта задача имеет решение. Если мы движемся очень быстро, со скоростью света, часы не обгоняют наземные часы вовсе, и мы получаем время меньшее, чем время наземных часов. Если мы поднимаем часы на очень небольшую высоту и держим их там, то будет некоторый избыток времени по сравнению с наземными часами. Ясно, что имеется некоторый оптимальный путь движения часов так, чтобы этот избыток времени был наибольшим для заданного интервала времени на Земле. Правила состоят в том, что мы должны принести часы назад для того, чтобы сравнить их с показаниями наземных стационарных часов.

Мы дадим ответ немедленно, хотя было бы хорошим упражнением проделать вычисление во всех деталях. Для того, чтобы сделать так, чтобы движущиеся часы ушли вперед наибольшим образом в заданный интервал наземного времени, скажем за один час, мы должны бросить их вверх с такой скоростью, чтобы они свободно падали все время и вернулись назад ровно через один час. См. рис. 7.4. Задача будет более сложной, если мы попытаемся проделать это в большем числе измерений, однако получается тот же самый ответ; если мы хотим сделать так, чтобы часы вернулись назад, но на другое место на Земле, мы должны осуществить движение часов по баллистической траектории. Такой же самый ответ получается для случая неоднородного гравитационного поля. Если мы должны "выстрелить" часами с одного спутника Земли на другой, то истинная орбита часов это та, которая соответствует максимальному собственному времени.

При работе с подобными задачами возникает некоторое беспокойство, поскольку мы не сделали точных определений. Например, решения типа свободного падения не обязательно являются единственными; задача о баллистическом движении "пушечного ядра" в общем случае имеет два решения, что означает, что два значения угла и два значения начальной скорости будут давать максимум (орбита спутника может проходить длинный путь вокруг Земли). Тем не менее, любое из этих решений соответствует максимуму времени пролета

для движущихся часов. Имеется ли для этих траекторий относительный максимум или абсолютный не столь важно для наших целей, но что важно, так это то, что эти решения наводят на мысль о том, как мы можем получить механику из вариационного принципа.

Чтобы понять значение максимальной величины времени пролета, мы можем рассмотреть, что происходит в пределе малых скоростей. Время пролета есть интеграл от ds , который представляет скорость тикания этих часов. В нерелятивистском пределе интеграл, который должен быть максимизирован, есть

$$\int ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right), \quad (7.3.1)$$

при

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Первый член интегрируется по разности времени в заданной системе отсчета ($t_1 - t_0$). Другие два члена могут быть переписаны, чтобы иметь вид, который должен быть очень привычным, умножая на массу частицы и меняя знак, получим

$$\int ds = (t_1 - t_0) - \frac{1}{mc^2} \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2} mv^2 - m\phi \right). \quad (7.3.2)$$

Для того, чтобы максимизировать это выражение для фиксированной величины интервала времени ($t_1 - t_0$), мы берем минимум интеграла в правой части последнего соотношения. Но этот интеграл есть не что иное, как классическое действие для частицы массы m в гравитационном потенциале ϕ . Мы видим, что требование того, что собственное время должно иметь максимальное значение, эквивалентно принципу наименьшего действия в классическом пределе.

Эти результаты наводят нас на мысль о том, как мы могли бы получить закон механики (эквивалентный, грубо говоря, второму закону Ньютона), который бы был релятивистским. Этот принцип состоит в том, что вариация $\int ds$ должна быть равна нулю, т.е.

$$\delta \int_1^2 ds = 0. \quad (7.3.3)$$

Именно Эйнштейн высказал гипотезу, что этот принцип будет описывать движение в присутствии гравитационных полей. С использованием этого принципа была решена задача нахождения уравнений движения, задаваемого этим полем. Оставшаяся проблема сейчас состоит в том, чтобы связать потенциал ϕ , который появляется в этом

выражении, с окружающей средой. Это было огромной проблемой до Эйнштейна. Как мы можем получить правильное выражение для потенциала ϕ ? Что происходит, если мы используем неверную теорию гравитации, как если бы мы работали в системе, в которой имеются центробежные силы, но мы не знали бы этого? Мы видели, что гравитационные силы запутанно смешены с силами инерции, так что мы не можем сделать универсально правильного разделения на эти две силы.

Догадка Эйнштейна и состояла в том, что в подобных ситуациях не должно иметь значения, рассматриваем ли мы универсально правильное значение потенциала ϕ или нет; если этот потенциал корректно определен, то описание физики должно быть независимо от того, каким частным образом мы разделили инерциальные и гравитационные эффекты. Таким образом, для того, чтобы сконструировать формулу для ϕ , которая бы удовлетворяла этому свойству, мы должны изучить очень тщательно способ, пользуясь которым, интервал собственного времени ds выражается в различных координатных системах, когда мы применяем преобразования такие, которые мы символически записывали как "гравитация" = гравитация + ускорение". Такое изучение может позволить нам построить выражение для ds , которое является инвариантным при всех возможных преобразованиях.

7.4. Собственное время в общих координатах

Для того, чтобы получить формулу Эйнштейна для $(ds)^2$, мы должны рассмотреть системы отсчета, которые не только ускоряются, но также находятся под действием сил, которые искажают их форму произвольным образом. Мы хотим получить общую формулу для координат, которая аналогична определению координатных систем, вращающихся друг относительно друга

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t, & z' &= z, \\y' &= y \cos \omega t - x \sin \omega t, & t' &= t.\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

Мы описываем ускорение общего вида и растяжение произвольного вида, устанавливая, как каждая из четырех координат одной системы зависит от всех координат другой системы

$$\begin{aligned}x &= x(x', y', z', t'), & z &= z(x', y', z', t'), \\y &= y(x', y', z', t'), & t &= t(x', y', z', t').\end{aligned}\tag{7.4.2}$$

Рассмотрим вначале ситуацию, которая возникает, когда $\phi = 0$. В этом случае мы знаем, что собственное время в нескрученной системе

есть просто (здесь мы положим $c = 1$)

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (7.4.3)$$

Для того, чтобы описать собственное время в штрихованных координатах, мы просто переписываем дифференциалы следующим образом:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad (ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7.4.4)$$

Это определяет метрический тензор $g'_{\alpha\beta}$, который содержит описание длины дуги ds в произвольном образом скрученной и ускоренной системе

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \quad (7.4.5)$$

Заметим, что $g'_{\alpha\beta}$ представляет десять функций координат (x', y', z', t'), так как имеется десять билинейных произведений $dx^\alpha dx^\beta$. Метрический тензор — симметричен. Как только мы имеем эти десять функций точно определенными, то нахождение траекторий, для которых собственное время достигает максимума, должно будет представлять собой чисто математическое упражнение.

Что же происходит, когда гравитация не равна нулю? В простом случае, который мы рассматривали в предыдущем разделе, мы нашли, что собственное время задается чем-то вроде следующего соотношения

$$(ds)^2 = (1 + 2\phi/c^2)(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (7.4.6)$$

Это выражение только слегка отличается от случая, когда гравитационное поле равно нулю. Именно Эйнштейну принадлежала идея о том, что полное описание гравитации могло бы быть всегда определено метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, таким как

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (7.4.7)$$

Случай нулевого поля соответствует частной простой форме для метрического тензора $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. При изменении координатной системы новый метрический тензор задается соотношением:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (7.4.8)$$

Как и ранее, движение частиц задается требованием, чтобы собственное время достигало максимального значения на траектории движения. Если возможно, используя некоторый разумный способ выбора преобразований, привести тензор к виду $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, тогда мы можем

сделать заключение, что гравитационного поля нет и что также нет и ускорения. Но это не может быть сделано в общем случае, так как общий тензор $g_{\alpha\beta}$ представляет десять предположительно независимых функций, и только четыре функции могут быть точно определены при преобразовании координат (7.4.2). Только при очень специфических условиях ускорения могут устранить все недиагональные члены всюду и привести этот тензор к виду $\eta_{\mu\nu}$. Если же на самом деле имеется некоторое вещество в окружающей среде, приведение этого тензора к виду $\eta_{\alpha\beta}$ невозможно. В этом случае все возможные тензоры $g_{\alpha\beta}$, связываемые соотношениями (7.4.8), будут эквивалентны, так как ни один из них не приводит к очень простым выражениям для $(ds)^2$.

Каковы же наши успехи в изучении характера описания гравитационных сил? В ньютоновской теории соответствующее положение есть утверждение, что сила задается градиентом скалярной функции

$$\text{Ньютоновская гравитация: } m\ddot{x} = F_x, \quad F_x = -\nabla\phi,$$

$$\text{Теория Эйнштейна: } \delta \int ds = 0, \quad (ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7.4.9)$$

Вторая часть теории соответствует точному определению того, как потенциалы (ϕ или $g_{\mu\nu}$) связаны с веществом. В ньютоновской теории мы имеем

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho. \quad (7.4.10)$$

В конце концов мы придем к точному определению тензора $g_{\mu\nu}$, выраженному через характеристики вещества. Основная идея состоит в том, что поскольку материя есть физическая категория, в то время как системы координат нет, вещество должно быть описано таким образом, чтобы результаты решения уравнения движения не зависели от какого-либо специального выбора системы координат, тем самым ожидается, что имеющие физический смысл свойства тензора $g_{\mu\nu}$ должны быть инвариантными величинами при произвольных преобразованиях.

7.5. Геометрическая интерпретация метрического тензора

Тензор $g_{\mu\nu}$ может иметь геометрическую интерпретацию. Для приобретения необходимой интуиции мы будем изучать вкратце значение метрического тензора в случае двух измерений, чтобы понять какие инварианты включены в теорию. В случае однородных гравитационных полей мы видели, что тензор $g_{\mu\nu}$ описывает, как масштаб времени отличается при различных положениях точки в пространстве. В более широком смысле этот тензор представляет, как масштабы

меняются от точки к точке не только во времени, но также и при изменении пространственных координат. В ортогональных декартовых координатах двумерная длина дуги ds задается следующим соотношением

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (7.5.1)$$

Если использовать на плоскости полярные координаты, то длина дуги задается соотношением:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2. \quad (7.5.2)$$

Очевидно, что не имеет значения, какие символы мы используем для координат, и физика на плоскости должна быть одинакова независимо от того, используем мы декартовы координаты или полярные координаты для описания геометрии на плоскости. Это означает, что если мы находим, что описание длины дуги в некоторой системе, которую мы выбрали, корректно задается соотношением:

$$(ds)^2 = y^2(dx)^2 + (dy)^2, \quad (7.5.3)$$

нет глубокого смысла в том, что кажется, будто длина x меняется при изменении координаты y , поскольку простое координатное преобразование сохраняет декартово выражение для длины дуги (7.5.1).

Теперь рассмотрим более интересный случай. Представим себе, что мы – жуки, ползающие по полу, который, как мы всегда предполагали, замощен квадратными кафельными плитками, и всю нашу жизнь мы думали, что геометрия пола правильно задается подсчетом плиток и использованием евклидовского правила (7.5.1), что интервалы dx или dy соответствуют величине длины плитки. Но некоторые остроумные жуки начали проверять это, используя линейки, и после серии измерений пришли к результату, что измеренные длины дуг соответствуют количеству плиток следующим образом:

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{1 + ar^2}, \quad (7.5.4)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Предположим, что эти остроумные жуки очень тщательно измеряли отношение длины окружности к величине радиуса круга, прикладывая свои линейки вдоль кривых с постоянным значением r и от центра круга вдоль одной из осей. Их результаты дали бы следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{Длина окружности} &= \int ds = \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta}{(1 + ar^2)} = \frac{2\pi r}{(1 + ar^2)}, \\ \text{Радиус круга} &= \int_0^r ds \Big|_{y=0} = \int_0^r \frac{dx}{(1 + ax^2)} = b \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{b} \right) = R, \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

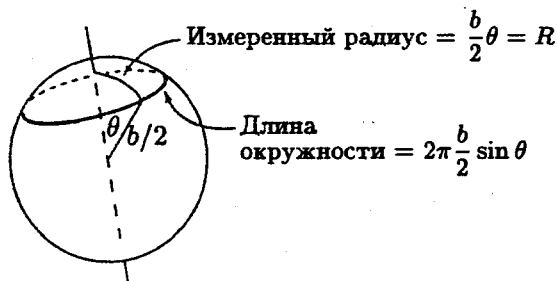


Рис. 7.5.

где $b^2 = 1/a$. Экспериментальный результат для отношения длины окружности к радиусу должен был бы давать в этом случае

$$\frac{1}{R} \frac{2\pi b \operatorname{tg}(R/b)}{1 + \operatorname{tg}^2(R/b)} = 2\pi \frac{\sin(R/b)}{(2R/b)}. \quad (7.5.6)$$

Это отношение становится равным 2π только в пределе, когда радиус окружности стремится к нулю. Именно это измеряемое соотношение и является существенным физическим результатом.

Эта частная модель, которую мы обсудили, имеет простую геометрическую интерпретацию, но мы снова подчеркиваем, что именно экспериментальные результаты очень важны и они полностью зависят от правильной формулы для длины дуги; и вовсе не имело бы значения, что мы не можем привести простую формулу геометрического смысла, который мы можем легко представить.

Мы можем сказать, что все это время жуки живут на поверхности сферы, не зная этого. Теперь, когда мы предположили это, мы легко понимаем, почему наши измерения окружностей давали частный результат, приведенный в соотношении (7.5.6). Если сфера имеет радиус $(b/2)$, то результат, данный соотношением (7.5.6), представляет отношение длины окружности круга к длине вдоль поверхности меридиана, как показано на рис. 7.5.

Наша предыдущая точка зрения на гравитацию может быть сравнима с той, которая могла бы проводиться более консервативными жуками. Кафельные плитки являются "реальными" квадратами, но линейки изменяются, если мы двигаем их от места к месту, поскольку имеется поле, которое может привести к этому эффекту. Наша более новая геометрическая точка зрения будет состоять в том, что мы не можем определять "кафельные плитки", как "реальные" квадраты; мы живем в мире, который, вообще говоря, неевклидов, имеет кривизну, которая измеряется проведением подходящих экспериментов. Нет нужды думать о процессах, как происходящих в пространстве, которое есть истинно евклидово, так как нет ничего физического,

что могло бы быть даже измерено в этом воображаемом пространстве. Кафельные плитки просто представляют нанесение координатных меток, и любое другое нанесение меток может быть также произведено, как и предыдущее.

7.6. Кривизна в двух и четырех измерениях

Инвариантной величиной, которая характеризует геометрию способом, не зависящим от специального выбора системы координат, является кривизна. Очень просто представить себе смысл кривизны, когда мы рассматриваем двумерную поверхность: плоское неискривленное пространство, такое как плоскость, или искривленное пространство, такое как кривая поверхность. Хотя в нашей последующей работе нам понадобится работать с кривизной аналитически, сейчас следует немного поработать с двумерной геометрией, которую мы можем очень просто представить; определения кривизны в более высоких измерениях есть точные аналоги определения кривизны поверхности.

В общем случае длина дуги на двумерной поверхности задается соотношением

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + 2g_{12}dx dy + g_{22}(dy)^2. \quad (7.6.1)$$

Хотя очевидно, что три функции g_{ab} включены в это выражение, инвариантная геометрия определяется только одной функцией координат; оказывается, что мы имеем определенную свободу в выборе координат, например, мы можем сделать их ортогональными; мы обладаем достаточной свободой для того, чтобы наложить два условия на функции g_{ab} , для этого у нас есть две функции, с помощью которых мы можем делать координатные преобразования. В частности, всегда можно выбрать координаты таким образом, что

$$1. \quad g_{12} = 0, \quad 2. \quad g_{22} = g_{11}.$$

Это означает, что для целей изучения геометрических измерений на двумерной поверхности наиболее общим выражением для длины дуги является следующее соотношение:

$$(ds)^2 = f(x, y) ((dx)^2 + (dy)^2). \quad (7.6.2)$$

С одной точки зрения, функция $f(x, y)$ представляет собой множитель, на который меняются линейки, когда мы движемся по поверхности. С другой точки зрения, она очевидно определяет кривизну пространства.

Забавный пример физической ситуации, которая в точности соответствует этим геометриям, придуман одним из студентов Робертсона. Представим себе, что человек делает измерения с помощью линейки на раскаленной пластине, которая в некоторых местах горячее, чем в других. Линейка растягивается или сжимается в зависимости от того, где делаются измерения, в более горячих или более холодных областях на плоскости; очевидно, что соответствующая функция $f(x, y)$ определяется локальной температурой и коэффициентом теплового расширения линейки.

Локальная кривизна поверхности в точке может быть определена с помощью некоторого математического критерия, включающего в себя предельный случай измерений, продельваемых со все более и более маленькими объектами. Мы могли бы, например, выбрать для сравнения отношения длины окружности к радиусу, отношения площадей кругов к квадратам радиусов; для случая сферических поверхностей эти отношения отличаются от тех, которые получаются на плоской поверхности, на множители $(\sin \theta)/\theta$, где θ – отношение измеряемого радиуса к радиусу сферы. В пределе все меньших и меньших кругов эта величина отличается от единицы на величину, пропорциональную площади круга. Этот коэффициент пропорциональности есть $1/R^2$ для сферы (умноженный на 3). Это число (коэффициент, характеризующий изменение площади при отклонении длины окружности от 2π) подходит для описания локальной кривизны, известной как Внутренняя Кривизна или также как Гауссова Средняя Кривизна Площади сферической поверхности, поскольку математика всех этих понятий восходит к Гауссу.

Мы можем легко рассмотреть другие кривые поверхности. Например, легко увидеть, что цилиндрическая поверхность имеет нулевую кривизну, так как цилиндрическая поверхность может быть развернута на плоскость без растяжения, очевидно, что отношение длины окружности к радиусу должно быть в точности равно 2π . Для более сложных случаев, если поверхности гладкие, они должны выглядеть как или параболоиды, или как гиперболические параболоиды по инфинитезимальным областям, в которых мы определили внутреннюю кривизну.

Эти поверхности описываются двумя линейными параметрами, радиусами кривизны в двух перпендикулярных плоскостях. В этом случае внутренняя кривизна определяется соотношением $1/(R_1 R_2)$. Эта величина положительная, если поверхность параболлическая, или отрицательная, если поверхность – гиперболический параболоид. Мы видим, что эта величина дает правильное значение кривизны для спе-

циальных случаев сферических поверхностей и цилиндрических поверхностей; для сферы оба радиуса равны; для цилиндра один радиус равен бесконечности.

Кривизна четырехмерного пространства будет определяться аналогичным математическим критерием. Тем не менее, мы едва ли можем ожидать, что мы окажемся в состоянии мысленно построить такие простые картинки и мы должны будем полагаться главным образом на аналитические методы, поскольку наша интуиция вероятно будет нас обманывать. Очень трудно думать о четырехмерном пространстве специальной теории относительности, даже обладая хорошей интуицией, я считаю, что очень трудно наглядно представить то, что достаточно близко к нему, поскольку имеется знак минус в сигнатуре метрики. А представить себе такое пространство с кривизной было бы еще труднее. Кривую двумерную поверхность удобно представлять, как кривую поверхность, погруженную в трехмерное пространство. Но аналогичное описание для кривизны трехмерного пространства требует концептуального погружения в пространство с шестью измерениями, а проделывая эту процедуру для четырех измерений, мы должны думать о четырехмерном пространстве, которое погружено в десятимерный мир. Таким образом, кривизна пространства-времени значительно сложнее, чем кривизна поверхности.

7.7. Число величин, инвариантных под действием преобразований общего вида

В четырехмерной геометрии имеются двадцать коэффициентов, которые описывают кривизну способом, аналогичным тому, которым одна величина $1/(R_1 R_2)$ описывает внутреннюю кривизну двумерной поверхности. Эти двадцать величин определяют физически значимые свойства тензора $g_{\mu\nu}$; то же, что мы должны сделать, так это упростить тензор $g'_{\mu\nu}$ разумным выбором координат, таким же способом, каким стало возможным определить геометрию двух измерений одной функцией $f(x, y)$ в соотношении (7.6.2).

Мы видели, что вообще говоря, мы не можем устранить гравитационные поля суперпозицией ускорений, за исключением одной точки. Так как кривизна может быть задана точным определением того, что происходит в инфинитезимальной области вокруг заданной точки, целесообразно изучить соответствующим образом в какой степени может быть упрощен тензор $g_{\mu\nu}$. По аналогии с двумерным случаем мы можем полагать, что возможно выбрать координаты (называемые нормальными координатами Римана) таким образом, что пространство вокруг этой точки – плоское, за исключением членов второго

порядка малости от расстояния до этой точки. Другими словами, кривая поверхность отрывается от плоскости, которая является касательной к этой поверхности, причем отклонение поверхности от плоскости характеризуется величиной, которая квадратична от значений координат, измеряемых от точки касания; мы ожидаем, что аналогичная ситуация имеет место в четырехмерном пространстве.

Давайте подсчитаем, сколько величин мы можем точно определить при преобразованиях и насколько мы можем упростить $g'_{\mu\nu}$, если мы делаем разложение в ряд функции $g'_{\mu\nu}$ в окрестности некоторой точки x_0 . Пусть любая точка в пространстве есть x , тогда имеет-ся следующее разложение в ряд Тейлора функции $g'_{\mu\nu}$ в окрестности точки x_0

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2} g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma) + \dots \quad (7.7.1)$$

Мы должны вычислить метрический тензор $g'_{\mu\nu}(x_0)$ и его производные согласно правилу, выраженному соотношением (7.4.8), это приводит к

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0}, \\ g'_{\alpha\beta,\tau}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu,\tau} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0}, \\ g'_{\alpha\beta,\tau\sigma}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu,\tau\sigma} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau \partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdot g_{\mu\nu} \right]_{x_0} \\ &+ \text{другие члены.} \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Мы видим, что для упрощения $g'_{\mu\nu}$ мы рассматриваем только разложение до второго порядка малости, мы должны выбрать наши преобразования таким образом, чтобы частные производные, появляющиеся в соотношениях (7.7.2), имели определенные значения. Мы можем точно определить следующие величины в нашем преобразовании

1. Шестнадцать величин $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right]_{x_0}$
2. Сорок величин $\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right]_{x_0}$
3. Восемьдесят величин $\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \right]_{x_0}$

(7.7.3)

(Заметим, что порядок производных не имеет значения.) Другая сторона медали состоит в том, что количество величин и производных метрического тензора является следующим:

1. Имеется 10 компонент $g'_{\mu\nu}(x_0)$.
2. Имеется сорок первых производных $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$.
3. Имеется сто вторых производных $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$.

(7.7.4)

Сначала мы можем попытаться сделать так, чтобы выполнялось равенство $g'_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}$. Это соотношение включает в себя только первые производные $[\partial x^\mu / \partial x'^\alpha]_{x_0}$. У нас есть 10 условий, которым необходимо удовлетворить с помощью 16 свободных параметров. Мы можем легко удовлетворить этим условиям, и у нас останется еще свободными 6 степеней свободы. Эти шесть параметров являются параметрами специальной теории относительности, преобразований Лоренца и вращений (вектор скорости, ось вращения и угол), которые могут определять преобразования, оставляющие $\eta_{\mu\nu}$ неизменным. Далее мы можем сделать так, чтобы все 40 производных $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ в точности обращались в нуль, используя сорок величин

$$\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right]_{x_0}.$$

Производная $g_{\mu\nu}$ появляется в уравнении движения для минимального действия $\int ds$. То, что эти производные могут в некоторой точке обращаться в нуль, означает, что все гравитационные силы могут быть устранены в любой выделенной точке пространства и в некоторый момент времени выбором подходящих ускорений.

Получившийся в конце концов результат состоит в том, что остаются двадцать линейных комбинаций вторых производных типа $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$, которые не могут быть устранены таким преобразованием. Это те величины, которые должны описывать детальное поведение приливных сил. В следующей лекции мы приступим к построению этих двадцати величин через компоненты тензора $g_{\mu\nu}$, заданные в какой бы то ни было системе координат, которую мы выбрали для исходного анализа.

Лекция 8

8.1. Преобразования компонент тензора в неортогональных координатах

В большей части предыдущих рассуждений можно было использовать упрощенное обозначение для суммирования тензорных компонент, поскольку мы всегда имели дело с координатными системами, которые были ортогональны. В частности, мы всегда использовали правило суммирования по повторяющимся индексам

$$A_\mu B^\mu = A_4 B^4 - A_3 B^3 - A_2 B^2 - A_1 B^1. \quad (8.1.1)$$

В ортогональных координатных системах эти суммы являются инвариантными скалярными величинами; хорошо знакомый частный случай представляет собой суммирование, которое определяет собственное время в специальной теории относительности

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (8.1.2)$$

Для более общих координатных систем, рассматриваемых нами теперь, которые ускоряются, скручиваются и сжимаются, собственное время определяется через произведения координатных смещений и метрический тензор (7.4.7); мы видим, что конструкция скалярных инвариантов следует правилу, которое более сложно, чем правило, задаваемое соотношением (8.1.1). Координатные смещения являются прототипами того, что мы будем называть контравариантными компонентами вектора. Для удобства обозначений будем записывать компоненты с помощью верхних индексов, например dx^μ . Что является важным, так это закон преобразования этих контравариантных векторных компонентов при изменении системы координат. Для координатных интервалов этот закон описывается следующим соотношением:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (8.1.3)$$

Определим векторную функцию, которая представляет собой набор четырех переменных, которые имеют характер координатных смещений и преобразуются таким же самым образом, как мы меняем координаты

$$A^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x). \quad (8.1.4)$$

Мы называем величины A^μ контравариантными компонентами вектора. Мы можем очень легко распространить эти определения на тензоры более высокого ранга; например, тензор есть функция, которая преобразуется таким же самым образом, как и скалярное произведение двух векторов, т.е.

$$T^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (8.1.5)$$

Когда мы сравниваем закон преобразования для метрического тензора с определением (8.1.5), мы видим, что $g_{\mu\nu}$ не есть величина такого же рода, так как производные появляются в "перевернутом виде". Тем не менее, мы определили матрицу, которая является обратной к матрице $g_{\mu\nu}$,

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^\nu_\beta. \quad (8.1.6)$$

Нетрудно показать, что эта обратная матрица на самом деле составляет контравариантный тензор, так что и надлежит записывать его с двумя индексами, как мы и предчувствовали.

Аналогично предыдущему, нетрудно показать, что суммы

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (ds)^2 \quad (8.1.7)$$

и $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ являются скалярными инвариантами; это происходит потому, что производные появляются в правильном порядке в одном случае и в "перевернутом виде" в другом случае, так что после суммирования получаются δ -символы Кронекера.

Это наводит на мысль, что мы можем использовать метрический тензор $g_{\mu\nu}$ для того, чтобы определить векторные компоненты иного рода, имеющие другой закон преобразования

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad A_\beta &= g_{\alpha\beta} A^\alpha, \\ \text{(б)} \quad A_\beta(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} A_\mu(x), \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

которые мы будем называть ковариантными компонентами вектора. Скалярные инварианты, которые могут быть порождены суммированием, есть

$$A_\beta B^\beta. \quad (8.1.9)$$

При преобразованиях с индексами, которые мы проводим, будет важно следить за верхними и нижними индексами; в общем случае,

будут допустимы суммирование только по одному нижнему и одному верхнему индексу. Например, в специальном случае ортогональных координат специальной теории относительности собственное время может быть теперь записано, как

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8.1.10)$$

Тензор $\eta_{\mu\nu}$ – диагональный и имеет компоненты $(1, -1, -1, -1)$.

Всякий раз, когда векторная величина появляется в физической задаче, например векторный потенциал в электродинамике, эта величина будет появляться в качестве или ковариантного, или контравариантного вектора. Но мы можем всегда построить один из другого, используя метрический тензор; мы можем всегда опустить или поднять индексы по своему желанию, умножая на величины $g_{\mu\nu}$ или на компоненты матрицы, обратной к этой матрице. Можно построить тензоры, которые были бы частично ковариантны, частично контравариантны; такие тензоры имеют несколько верхних индексов, несколько нижних, и важно записать эти индексы таким образом, чтобы не было вопроса относительно их порядка

$$g_{\mu\alpha} T^{\mu\nu} = T_\alpha{}^\nu. \quad (8.1.11)$$

Для специального типа симметрических тензоров $g_{\mu\nu}$ или $g^{\mu\nu}$ мы можем ослабить это правило, так как поднятие или опускание индекса производит просто δ -символ Кронекера

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \delta_\nu{}^\mu. \quad (8.1.12)$$

Мы не будем утомлять себя тем, чтобы вновь рассматривать доказательства этих соотношений, поскольку они получены много лет тому назад и могут быть найдены во множестве книг. Все они использовались Эйнштейном, который придумал эти обозначения, что упростило работу с ними, и он является "надежным малым" ("reliable guy"), когда придумывает подобные штуки. Перемещение индексов, поднятие их или опускание, есть нечто мнемонические, так как это соответствует перемещению индексов в производных, которые определяют эти преобразования, в соотношениях (8.1.3), (8.1.4), (8.1.5) и (8.1.8).

Нет фундаментального физического различия между ковариантными и контравариантными компонентами вектора; они имеют одинаковое физическое содержание и меняется только их представление. Для случая двух измерений мы можем легко показать графически, как представления векторов отличаются. Так как преобразования

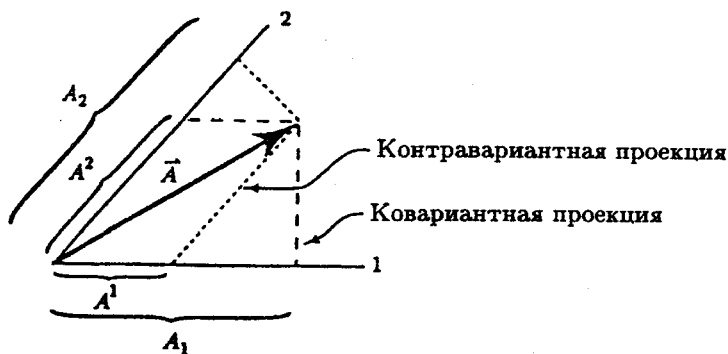


Рис. 8.1.

определяются как инфинитезимальные перемещения, нам нет нужды беспокоиться о кривизне пространства; все, что здесь заключено, это наличие ортогональности или ее отсутствия. Если оси координат не пересекаются под прямым углом, то имеется два способа проектирования физического смещения на оси: или перпендикулярно на ось, или параллельно другим осям, как показано на рис. 8.1. Мы видим, что тензорные компоненты $g_{\mu\nu}$ описывают отсутствие ортогональности координат в заданной точке.

8.2. Уравнения, определяющие инварианты $g_{\mu\nu}$

Теперь, когда у нас есть лучшее понимание роли метрического тензора, мы можем приступить к изучению того, какие величины могут быть построены из него, причем величины, остающиеся инвариантными при инфинитезимальных координатных преобразованиях.

То, что мы собираемся сделать сейчас, в точности совпадает с тем, что мы делали некоторое время назад при построении лагранжиана. Предположим, что мы делаем небольшое изменение в координатах

$$x^\mu = x'^\mu + \zeta^\mu(x'), \quad (8.2.1)$$

где предполагается, что ζ^μ достаточно малы, так что нам необходимо сохранять только члены первого порядка малости по ζ^μ . Тогда для производных справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu}. \quad (8.2.2)$$

Когда мы вычисляем новые компоненты $g'_{\mu\nu}$, мы получаем произведение двух таких производных

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x' + \zeta) \left(\delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\beta + \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} \right). \quad (8.2.3)$$

Если мы оставляем только члены нулевого порядка и первого порядка малости по ζ^μ , то получаем

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + g_{\alpha\nu} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta} \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma} \zeta^\sigma. \quad (8.2.4)$$

Новые компоненты $g'_{\mu\nu}$ равны старым компонентам $g_{\mu\nu}$ плюс некоторые члены порядка ζ^μ . Когда теперь мы спрашиваем, какие функции $g_{\mu\nu}$ допускаются, если настаиваем, чтобы их форма осталась инвариантной, мы видим, что мы приходим к той же самой задаче, которую решили в лекции 6. Математическая задача является той же самой как и тогда, когда мы пытались найти лагранжиан, который приводил к сохраняющемуся тензору энергии-импульса.

Таким образом, имеется более чем одна точка зрения, которая приводит к одному и тому же уравнению и которая имеет то же самое физическое содержание. Мы обнаружили, что преобразование, которое возникло тогда, когда мы искали лагранжиан для гравитации, появляется также в решении чисто геометрической задачи. Мы предполагаем, следовательно, что некоторые физические и геометрически звучащие критерии эквивалентны; самосогласованность предыдущего подхода, к которому мы пришли, исходя из требования равной нулю дивергенции, должна быть эквивалентна тому условию, которое мы накладываем сейчас. В чем состоит физическая значимость инвариантов $g_{\mu\nu}$?

Уравнения движения могут быть выведены из вариационного принципа

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} = 0. \quad (8.2.5)$$

Эти вычисления могут быть проведены до конца путем введения параметра u , так что квадратный корень под интегралом становится более точно определенной величиной

$$\int du \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}}. \quad (8.2.6)$$

Когда решение вариационной задачи проведено до конца, получается следующее уравнение геодезических

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\sigma\tau}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\tau}{ds}, \quad (8.2.7)$$

где

$$\Gamma_{\sigma\tau}^\mu = g^{\mu\nu}[\sigma\tau, \nu].$$

Так как вид этого уравнения остается неизменным при изменении метрического тензора при произвольном преобразовании, то эти уравнения должны быть инвариантами метрики $g_{\mu\nu}$, которая содержит в себе физику данной проблемы.

8.3. О предположении, что пространство есть в точности плоское

Давайте попробуем обсудить, что мы узнали при выяснении того, что различные подходы, которые мы использовали, приводят к одним и тем же результатам. Точка зрения, которой мы до сих пор придерживались, состоит в том, что пространство описывается как пространство специальной теории относительности, которое для удобства мы будем называть галилеевым. В таком галилеевом пространстве могут существовать гравитационные поля $h_{\mu\nu}$, которые приводят к тому, что линейки меняются в своей длине и скорости хода часов увеличиваются или уменьшаются. Так что говоря о результатах экспериментов мы вынуждены делать различия между масштабами действительных измерений, физическими масштабами и масштабами, с использованием которых написана эта теория, т.е. галилеевыми масштабами.

Теперь положение состоит в том, что именно физические координаты должны всегда воспроизводить одни и те же результаты. Может быть удобным для того, чтобы написать теорию в начале, предположить, что измерения делаются в пространстве, которое в принципе галилеево, но после того, как мы получим предсказываемые реальные эффекты, мы видим, что галилеево пространство не имеет смысла.

Это приводит к тому, что для нас не имеет смысла заявлять, что выбор координат, который сделал кто-либо другой, является сумасшедшим и бестолковым просто потому, что этот выбор не выглядит для нас галилеевым. Если он настаивает на трактовке такого выбора как галилеева и приписывает кривизну полям, он также абсолютно оправдывается, и это наше пространство выглядит бестолковым для него. Для любого физического результата получается один и тот же ответ независимо от того, какое исходное нанесение меток задано для положений объектов. Следовательно, мы видим, что это может быть философское улучшение, если мы могли бы сформулировать нашу теорию от начала таким способом, что нет галилеева пространства, которое входит в точное определение физики; мы всегда имеем дело с физическим пространством действительных измерений.

Мы можем снова порассуждать о человеке, который делает измерения с помощью физической линейки на раскаленной пластине.

Линейка очевидно меняет длину при ее передвижении от более горячих областей к более холодным. Но все это имеет смысл только потому, что мы знаем нечто, что может измерять расстояния без такой зависимости от температуры, а именно свет. Если мы с помощью световых измерений можем вписать "истинно евклидову" координатную систему на пластину, человек на раскаленной пластине мог бы оценить для нас величину температурного поля, т.е. поля, которое могло бы описывать, как линейка меняет свою длину при передвижении ее по раскаленной пластине. Если, тем не менее, мы обманываем его и вписываем искаженную систему координат на пластине, но продолжаем говорить ему, что система координат евклидова, он даст описание другого температурного поля. Но нет способа, с помощью которого мы могли бы одурачить его, вписывая произвольные координатные системы на пластине, так что мы будем всегда менять результаты физических измерений, которые он продельвает полностью самостоятельно. Пока он использует только длины линеек в приведенных расстояниях, он будет всегда приходить к одним и тем же ответам независимо от того, к каким бы сумасшедшим температурным полям он мог бы придти, используя координаты, которые мы могли бы ему определить.

Эта ситуация совершенно ясна для случая раскаленной пластины, как для евклидова, так и неевклидова пространства, но только потому, что мы предположили, что тепло не оказывает влияния на световые измерения. Для случая гравитации, однако, мы знаем, что нет масштаба, который бы не искажался, т.е. нет такого "света", который бы не искажался гравитацией, и с помощью которого мы могли бы определить галилееву координатную систему. Таким образом, все координатные системы эквивалентны, и они отличаются только тем, что различные величины для полей необходимы для описания скорости хода часов или масштабов длин. Как только мы сконцентрировались на описании физических измерений, координатная система, используемая вначале, исчезает, так как она служит только для удобной расстановки меток, как метки в книгохранилище.

Есть один случай, в котором имеет смысл галилеева или евклидова координатная система, это предельный случай нулевой гравитации или предельный случай однородной температуры на раскаленной пластине. В этом случае физические и евклидовы расстояния описываются одной и той же геометрией. Если мы первоначально исходили из искривленного нанесения меток положений, то мы могли бы обнаружить, что некоторое координатное преобразование не позволяет нам описать измерения без использования поля. Это существенное

упрощение, но вновь это упрощение не обусловлено внутренней справедливостью евклидова описания геометрии, но тем фактом, что она соответствует определенной физической ситуации, которая обладает определенной физической простотой.

Если силы равны нулю всюду, то и символы Γ должны быть равны нулю всюду. Если эти силы не всюду равны нулю, то нет возможности определения "наилучшей" системы координат. Однако возможно сделать их локально равными нулю (согласно принципу эквивалентности!).

8.4. О соотношениях между различными подходами к теории гравитации

Одна из своеобразных особенностей теории гравитации состоит в том, она имеет и полевую интерпретацию, и геометрическую интерпретацию. Так как эти интерпретации на самом деле являются двумя аспектами одной и той же теории, мы могли бы предположить, что венерианские ученые, после развития их полной полевой теории гравитации, могли бы в конце концов придти к геометрической точке зрения. Мы не можем быть абсолютно уверены в этом, так как никто никогда еще не смог объяснить индуктивное рассуждение, никто не смог объяснить как продолжить анализ, когда мы знаем очень мало, для того, чтобы знать существенно больше.

В любом случае истина состоит в том, что поле спина 2 имеет геометрическую интерпретацию; это не является чем-то легко объяснимым, это удивительный факт. Геометрическая интерпретация не является действительно необходимой или существенной для физики. Возможно, что такое полное совпадение может быть понято как представление некоторого рода калибровочной инвариантности.

Возможно, что отношения между этими двумя точками зрения на гравитацию могли бы стать ясными после того, как мы обсудим третью точку зрения, исходя из которой, мы должны исследовать общие свойства полевых теорий при преобразованиях. Такая точка зрения будет рассматриваться нами много позже, мы обсуждаем этот вопрос здесь для того, чтобы получить ощущения тех возможных направлений, которые должны быть учтены при попытках понять, как гравитация может быть и геометрией, и полем.

Давайте сейчас и рассмотрим, что такое калибровочная инвариантность. Как обычно утверждается в электродинамике, это означает, что если мы заменяем векторный потенциал A на

$$A' = A + \nabla X, \quad (8.4.1)$$

уравнения поля и физические эффекты остаются неизменными, вы-

раженными через новый векторный потенциал A' . Этот факт может быть связан со свойством фазовой инвариантности амплитуд. Давайте теперь посмотрим, что происходит с квантово-механическими амплитудами; совершенно ясно, что если мы используем

$$\psi' = \exp(ia)\psi,$$

при вычислении вероятности, то ничего не меняется в предсказываемой физике. В общем константа a не приводит к появлению различий в предсказаниях. Что же происходит, если вместо константы a мы используем функцию X , которая меняется от точки к точке в пространстве? Уравнения всегда включают в себя градиенты ψ' , которые есть

$$\nabla\psi' = \exp(iX)(\nabla\psi + i\psi\nabla X). \quad (8.4.2)$$

Однако оператор $(\nabla - iA')$ оставляет функцию такой, что она изменилась только по фазе

$$(\nabla - iA')\psi' = \exp(iX)(\nabla - iA)\psi. \quad (8.4.3)$$

Так что если имеется векторное поле, которое взаимодействует так, как мы предполагали, уравнения являются инвариантными при зависящих от пространства-времени фазовых преобразованиях этих ψ полей.

Теория векторного мезона Янга – Миллса является попыткой распространить идею калибровочного преобразования рассмотрением таким же способом инвариантности ядерного взаимодействия при изменении изотопического спина. Если амплитуда протона представляется величиной ψ , тогда

$$\psi' = \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\psi, \quad (8.4.4)$$

описывает объект, который частично является протоном, частично нейтроном. Если $\mathbf{a}$ есть постоянный вектор в изоспиновом пространстве, то инвариантность ядерных сил по отношению к изменениям изотопического спина означает, что новый объект ψ' действует во всех ядерных реакциях как ψ . Предложение Янга и Миллса состоит в том, что поле должно быть добавлено к лагранжиану таким способом, чтобы пространственно-зависимая фазовая замена ($\mathbf{a} \rightarrow X$) не приводила к различиям в уравнениях.

Как такие идеи могут быть связаны с гравитацией? Уравнения физики являются инвариантными, когда мы делаем координатные замены с любыми постоянными значениями a^μ

$$x' = x^\mu + a^\mu. \quad (8.4.5)$$

Для того, чтобы сделать формально более похожими фазовые и изоспиновые преобразования, можно было бы воспользоваться импульсным представлением, так что оператор сдвига есть

$$\exp(ip_\mu a^\mu).$$

С другой стороны, возможно исследовать, каким образом уравнения физики могут быть сделаны инвариантными в том случае, когда мы допускаем зависящие от координат в пространстве *переменные* смещения ($a^\mu \rightarrow \zeta^\mu$). Исследование будет проводиться для более полного лагранжиана; новые члены, которые необходимы, являются в точности теми же самыми, что и для гравитационного поля. Таким образом, гравитация является тем полем, которое соответствует калибровочной инвариантности по отношению к преобразованиям смещения.

8.5. Кривизна как величина, относящаяся к касательному пространству

Мы можем рассмотреть данный вопрос геометрически, как Эйнштейн, и обратиться к кривизне и таким понятиям, которые выражаются на языке предельного перехода для величины радиуса и длины окружности. Только для того, чтобы показать, что подобный подход не является слишком сложным, мы используем его. Теперь, когда мы осознаем, что мы делаем, мы можем сделать более общие координатные преобразования. Мы говорили о том, каково было число производных. У нас была возможность сказать, что мы можем положить

$$g_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu} \quad (8.5.1)$$

путем соответствующего выбора шестнадцати первых производных $\partial x^\alpha / \partial x'^\nu$. Мы предполагаем также, что мы можем выбрать сорок вторых производных ($\partial^2 x^\alpha / \partial x'^\mu \partial x'^\nu$) таким образом, что все первые производные $g_{\mu\nu}^0$ равны нулю. Тогда имеется восемьдесят выбранных третьих производных и сотня вторых производных величины $g_{\mu\nu}$. Есть двадцать линейных комбинаций этих вторых производных, причем эти комбинации могут иметь геометрическое определение. Они не могут быть устранены преобразованием координат. То, что мы будем искать — это выражение для двадцати таких величин на языке исходных величин $g_{\mu\nu}$. Мы делаем данную процедуру в три шага, возвращаясь назад, так сказать. Сначала мы предполагаем, что выбрали первые и вторые производные (в выбранной точке путем преобразования к римановым нормальным координатам) таким образом, что $g_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu,\sigma}^0 = 0$, и находим выражение для двадцати величин. Затем мы будем беспокоиться о том, как мы можем добиться

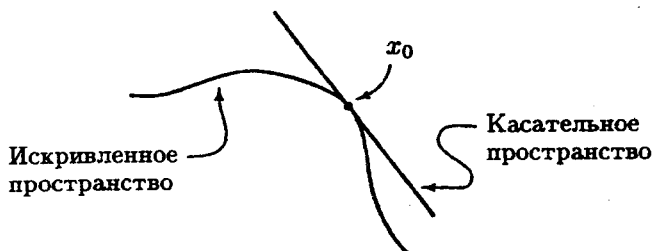


Рис. 8.2.

выполнения этих условий и так выбрать новые координаты, исходя из произвольных начальных координат, чтобы получить эти двадцать величин через исходные величины $g_{\mu\nu}$.

Сначала мы обсудим геометрически определяемые величины в терминах координат в касательном пространстве в точке. То, что мы делаем в пространстве с четырьмя измерениями, аналогично следующей ситуации в двумерном пространстве. Искривленное пространство можно рассматривать как поверхность и сравнить геометрию поверхности в данной точке с геометрией, рассматриваемой с касательной плоскостью, как показано на рис. 8.2. Исходные координаты на искривленном пространстве вообще говоря неортогональны и не являются соответствующим образом ориентированными для того, чтобы допустить простейшее описание геометрии на языке инварианта $1/(R_1 R_2)$. Первый шаг состоит в том, чтобы определить эту внутреннюю кривизну на языке исходной геометрии.

Только вторые производные начинают описывать в данной точке отклонение искривленного пространства от плоского. Величины, характеризующие кривизну пространства, являются в точности мерой рассогласования между поверхностью и касательной плоскостью. Эти величины дают описание самого существенного характера пространства в заданной точке. Так как мы включили в рассмотрение только первые, вторые и третьи производные координат, то мы имеем достаточно общее преобразование в следующем виде:

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2} a^\alpha_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu + \frac{1}{6} b^\alpha_{\mu\nu\sigma} x'^\mu x'^\nu x'^\sigma. \quad (8.5.2)$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать двадцать существенных комбинаций. Для первых производных мы имеем следующие выражения:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + a^\alpha_{\mu\nu} x'^\nu + \frac{1}{2} b^\alpha_{\mu\nu\sigma} x'^\nu x'^\sigma. \quad (8.5.3)$$

В этом частном касательном пространстве метрические тензоры мо-

гут быть записаны в достаточно общем виде как

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^0_{\alpha\beta, \sigma\tau}, \\ g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^{\sigma} x^{\tau} g^0_{\alpha\beta, \sigma\tau}. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Верхний индекс "0" означает то, что рассматриваемая величина берется в точке касания x_0 . Мы получаем соответствующие инвариантные комбинации, рассматривая то, что мы имеем две произвольные системы координат в касательном пространстве, и требуем, что одни и те же формулы должны выполняться в обоих случаях. Так как эти пространства – касательные, то производные координат могут отличаться только квадратичными членами, так что

$$a^{\alpha}_{\mu\nu} = 0. \quad (8.5.5)$$

Тогда необходимо только подставить одно преобразование в другое. Подставляя закон преобразования $g_{\mu\nu}$, используя соотношения (8.5.3) для производных, находим

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g^0_{\alpha\beta, \sigma\tau} + \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}_{\beta\sigma\tau} + \eta_{\beta\nu} b^{\nu}_{\alpha\sigma\tau}) x'^{\sigma} x'^{\tau}. \quad (8.5.6)$$

Для вторых производных величин $g_{\mu\nu}$ имеем следующие соотношения

$$g'^0_{\alpha\beta, \sigma\tau} = g^0_{\alpha\beta, \sigma\tau} + b_{\alpha\beta\sigma\tau} + b_{\beta\alpha\sigma\tau}, \quad (8.5.7)$$

где

$$b_{\alpha\beta\sigma\tau} \equiv \eta_{\alpha\nu} b^{\nu}_{\beta\sigma\tau}.$$

Теперь, когда мы имеем эти соотношения, мы хотим получить линейные комбинации вторых производных компонентов метрики, которые не имели бы величин $b_{\alpha\beta\sigma\tau}$. Мы используем тот факт, что величины $b_{\alpha\beta\sigma\tau}$ полностью симметричны по их трем последним индексам, в то время как $g_{\alpha\beta, \sigma\tau}$ симметричны только по индексам $\sigma\tau$. Переставим индексы ($\beta \leftrightarrow \sigma$) и, вычитая соответствующие выражения, получим

$$g'^0_{\alpha\beta, \sigma\tau} - g'^0_{\alpha\sigma, \beta\tau} - g^0_{\alpha\beta, \sigma\tau} + g^0_{\alpha\sigma, \beta\tau} = b_{\beta\alpha\sigma\tau} - b_{\sigma\alpha\beta\tau}. \quad (8.5.8)$$

Индексы ($\alpha\tau$) входят абсолютно симметрично в правую часть этого соотношения, но это утверждение не обязательно для левой части.

Следовательно, при антисимметрировании по индексам $(\alpha - \tau)$ мы получаем следующее соотношение

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\sigma\tau}^0 - g_{\alpha\sigma,\beta\tau}^0 - g_{\tau\beta,\sigma\alpha}^0 + g_{\tau\sigma,\beta\alpha}^0), \quad (8.5.9)$$

величину, которая равна самой себе в штрихованной системе координат. Таким образом, имеется двадцать линейных комбинаций, которые мы искали. Эта величина не является тензором; она не является достаточно общей; она определяется только в месте, в котором обращаются в нуль результирующие поля. Эти линейные комбинации являются несократимыми частями гравитационного тензора, теми, которые не могут быть устранены преобразованием системы координат. Они представляют чисто приливные силы. Таким образом, теперь мы имеем определенный рецепт для нахождения кривизны. Сначала найти преобразование (к римановым нормальным координатам), которое связывает величины $g_{\mu\nu}$ с величинами $\eta_{\mu\nu}$, причем первые производные компонент $g_{\mu\nu}$ равны нулю. Тогда выраженные через преобразованные компоненты $g_{\mu\nu}$ величины, определяющие кривизну, задаются соотношениями (8.5.9). Эти соотношения остаются теми же самыми в любой координатной системе. Оставшаяся задача состоит в том, чтобы выразить $R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ через исходные производные координаты и исходные компоненты $g_{\mu\nu}$.

8.6. Кривизна как величина, относящаяся к произвольным координатам

Вывод выражений для кривизны через общие координаты происходит наиболее гладким образом при использовании способа, состоящего в последовательном восхождении по ступенькам к искомому результату. Далее, мы снимаем ограничение на первые производные (которые теперь могут быть не равными нулю), но оставляем координаты локально ортогональными; тогда выражения $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ следующие

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta,\mu}^0 x^\mu + \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma,\mu\nu}^0 x^\mu x^\nu, \\ g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta,\sigma\tau}{}^0 x'^\sigma x'^\tau. \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

Величина g' есть та же самая, что и была ранее с нулевыми первыми производными. Так как мы уже выбрали вторые производные, нам необходимо только рассмотреть преобразование типа

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2} a^\alpha{}_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu. \quad (8.6.2)$$

Кубические члены не будут влиять на правильность приводимого ниже результата. Выражение для первых производных

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + a^\alpha_{\mu\nu} x'^\nu \quad (8.6.3)$$

вставляем в уравнение, выражающее g' через g ,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau &= \eta_{\alpha\beta} + (g^0_{\alpha\beta,\sigma} + a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma}) x'^\sigma \\ &+ x'^\sigma x'^\tau \left[a^\rho_{\alpha\sigma} a_{\rho\beta\tau} + a^\rho_{\alpha\tau} g^0_{\rho\beta,\sigma} + a^\rho_{\beta\tau} g^0_{\rho\alpha,\sigma} + \frac{1}{2} a^\rho_{\sigma\tau} g^0_{\alpha\beta,\rho} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma\tau} \right], \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

где $a_{\alpha\beta\sigma} = \eta_{\alpha\mu} a^\mu_{\beta\sigma}$. Члены, соответствующие первым производным, будут равными нулю при следующем выборе $a^\alpha_{\mu\nu}$:

$$a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma} = -g^0_{\alpha\beta,\sigma}. \quad (8.6.5)$$

Нам необходимо решить это уравнение таким образом, чтобы $a^\alpha_{\mu\nu}$ было выражено через $g^0_{\alpha\beta,\sigma}$ исходной системы координат. Эта процедура делается с использованием обычных приемов; вычитаем уравнение, полученное перестановкой (α, σ) , затем собираем подобные члены и т.д., и получаем следующее соотношение:

$$a_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [g^0_{\sigma\alpha,\beta} + g^0_{\sigma\beta,\alpha} - g^0_{\alpha\beta,\sigma}] = -[\alpha\beta, \sigma]^0. \quad (8.6.6)$$

Из соотношения (8.6.4) видно, что $g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ есть (удвоенное) выражение в квадратных скобках в правой части соотношения (8.6.4) с заменой $a_{\sigma\alpha\beta}$ в соответствии с соотношением (8.6.6). Эти величины $g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ теперь могут быть заменены на $g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ в соотношении (8.5.9) для того, чтобы найти компоненты кривизны, выписанные через старые координаты (ограниченные только тем, что они должны быть локально ортогональными), следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\tau\beta\sigma} &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g_{\tau\beta,\alpha\sigma} + g_{\tau\sigma,\alpha\beta}) \\ &+ [\rho\sigma, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\beta, \lambda] - [\rho\beta, \alpha] \eta^{\rho\lambda} [\tau\sigma, \lambda]. \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

Осталось только ортогонализировать первоначально произвольные координаты. Это может быть сделано линейным преобразованием:

$$x^\alpha = L^\alpha_\mu x'^\mu. \quad (8.6.8)$$

Все, что осталось нам сделать, состоит в том, чтобы выбрать

$$g'^0_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad (8.6.9)$$

и переписать все соотношения еще раз. Производные при выбранном преобразовании определяются матрицей L^α_μ , и мы имеем

$$g'_{\mu\nu} = L^\alpha_\mu L^\beta_\nu g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}. \quad (8.6.10)$$

Среди соотношений, которые могут быть получены, имеется следующее соотношение:

$$\eta^{\alpha\beta} L_\alpha^\sigma L_\beta^\mu = g^{\sigma\mu}. \quad (8.6.11)$$

Что же происходит с различными членами? Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = L^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (8.6.12)$$

то, следовательно, (в последующих соотношениях латинские индексы соответствуют штрихованным координатам)

$$g'_{mn,st} = L^\sigma_s L^\tau_t L^\mu_m L^\nu_n g_{\mu\nu,\sigma\tau}, \quad (8.6.13)$$

$$a'_{rmn} = L^\rho_r L^\mu_m L^\nu_n a_{\rho\mu\nu}, \quad (8.6.14)$$

$$\eta'^q a'_{rmn} a'_{qst} = \eta'^q L^\rho_r L^\lambda_s L^\mu_m L^\nu_n L^\sigma_s L^\tau_t a_{\rho\mu\nu} a_{\lambda\sigma\tau}. \quad (8.6.15)$$

Когда мы вставляем эти соотношения в выражения для компонент R , мы получаем, что R не является более инвариантом. Окончательное выражение для R (при выводе которого используется соотношение (8.6.11)) имеет следующий вид:

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g_{\tau\beta,\alpha\sigma} + g_{\tau\sigma,\alpha\beta}) + [\rho\sigma, \alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\beta, \lambda] - [\rho\beta, \alpha] g^{\rho\lambda} [\tau\sigma, \lambda], \quad (8.6.16)$$

а закон преобразования имеет вид:

$$R'_{mnst} = L^\mu_m L^\nu_n L^\sigma_s L^\tau_t R_{\mu\nu\sigma\tau}. \quad (8.6.17)$$

8.7. Свойства Великого Тензора Кривизны

Хотя величины $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ не являются инвариантами, они образуют тензор, как можно было бы заключить из закона преобразования (8.6.17). Легко можно показать, что тензор определяется только двадцатью

величинами, как мы ранее и утверждали. Выражения (8.5.9) были получены путем антисимметризации по индексам (α, τ) и впоследствии по (β, σ) . Имеются следующие симметрии для компонент тензора:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\tau\beta\sigma} &= -R_{\tau\alpha\beta\sigma}, & (a) \\ &= -R_{\alpha\tau\sigma\beta}, & (б) \\ &= +R_{\beta\sigma\alpha\tau}. & (в) \end{aligned} \quad (8.7.1)$$

Следующее алгебраическое соотношение содержится неявно в соотношении (8.5.9) (и, следовательно, в соотношении (8.6.16)):

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} + R_{\alpha\sigma\tau\beta} + R_{\alpha\beta\sigma\tau} = 0. \quad (8.7.2)$$

Давайте посчитаем число независимых компонент тензора кривизны. Первый индекс может не быть равным второму, третий не может быть равным четвертому. Только антисимметричные комбинации могут быть не равны нулю – мы напоминаем, что имеется шесть возможно ненулевых компонент для антисимметричного тензора второго ранга, так что за исключением симметрии, связанной с перестановкой первой пары и второй пары, здесь имелось бы 36 компонент; последняя же симметрия (8.7.1в) уменьшает это число до $(6 \times 7)/2 = 21$. Алгебраическое соотношение, определяемое (8.7.2), содержит только одно нетривиальное ограничение. Если два индекса являются одинаковыми, то соотношение (8.7.2) является тождеством, поскольку имеются симметрии в соотношениях (8.7.1). Например,

$$R_{1\tau 1\sigma} + R_{1\sigma 1\tau} + R_{11\sigma\tau} = R_{1\tau 1\sigma} - R_{1\tau 1\sigma} + 0 = 0. \quad (8.7.3)$$

Так что все индексы должны быть различными для того, чтобы это алгебраическое соотношение имело смысл. Но когда все индексы различны (1,2,3,4), то имеется только одно дополнительное уравнение. Итак, в общем случае имеется только двадцать независимых компонент Великого Тензора Кривизны (Тензора Римана).

То, в чем мы нуждаемся для построения нашей теории, это не тензор, а полностью инвариантная величина, которая может быть подставлена в лагранжиан. (Вместо этого, Эйнштейн говорил, что Тензор Энергии-Импульса равен другому тензору, который получается из тензора кривизны.) Принцип наименьшего действия должен включать в себя интеграл по всему пространству, который должен быть полностью инвариантным под действием преобразований. Подынтегральное выражение должно быть мировой скалярной величиной

$$\int dx \, dy \, dz \, dt \, (\text{Скаляр}) = (\text{Скалярный инвариант}). \quad (8.7.4)$$

Мы получим такой скаляр, поднимая индексы тензора кривизны и свертывая по парам верхних и нижних индексов. Мы можем, например, поднять первый индекс

$$g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R^{\lambda}_{\tau\beta\sigma}. \quad (8.7.5)$$

Но если в этом месте мы проведем свертывание по первой паре индексов, то эта величина, к сожалению, обращается в нуль

$$R^{\tau}_{\tau\beta\sigma} \equiv 0. \quad (8.7.6)$$

То, что необходимо сделать сначала, состоит в уменьшении ранга тензора и свертывании по первому и последнему индексам

$$g^{\alpha\sigma} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R_{\tau\beta}. \quad (8.7.7)$$

(Заметим, что одну и ту же букву R удобно использовать для всех тензоров, получаемых из тензора кривизны.) Этот тензор второго ранга (тензор Риччи) — симметричен. Затем мы вновь уменьшаем ранг тензора для того, чтобы получить нашу скалярную величину ("скалярную кривизну") для подынтегрального выражения

$$g^{\alpha\sigma} g^{\tau\beta} R_{\alpha\tau\beta\sigma} = g^{\tau\beta} R^{\sigma}_{\tau\beta\sigma} = R^{\sigma\beta}_{\beta\sigma} = R. \quad (8.7.8)$$

Теперь интеграл по объему от этого скаляра не является инвариантом, поскольку элемент объема не является скаляром; величина $dx dy dz dt$ меняется при изменении координат, причем это изменение определяется определителем матрицы L_{α}^{μ} . Таким образом, интеграл от инварианта есть

$$\int dx dy dz dt R \sqrt{-g}. \quad (8.7.9)$$

Это выражение определяет действие Эйнштейна—Гильберта для пустого пространства [Hilb 15].

Лекция 9

9.1. Модификация электродинамики, требуемая принципом эквивалентности

Принцип Эквивалентности постулирует, что ускорение будет неотличимым от гравитации в каком бы то ни было эксперименте. В частности, ускорение не может быть отличимо от гравитации по наблюдению электромагнитного излучения. В этом месте у нас возникает некоторое беспокойство, так как мы унаследовали предрассудок, что ускоренно движущийся заряд должен излучать, тогда как мы не ожидаем, что заряд, находящийся в гравитационном поле, излучает. Тем не менее, это обусловлено не ошибкой в нашем утверждении эквивалентности, а тем фактом, что закон, описывающий мощность излучения ускоренно движущегося заряда

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2, \quad (9.1.1)$$

вводит нас в заблуждение. Обычно этот закон выводится из вычисления потока из теоремы Пойнтинга вдали от заряда, и это справедливо только для круговых движений или, по крайней мере, движений, для которых характерен бесконечный рост во времени (как имеет место для постоянного ускорения). Этого закона оказывается недостаточно для того, чтобы сказать нам, "когда" электромагнитная энергия излучается. Ответ на этот вопрос может определяться только путем нахождения силы радиационного трения, которая есть $(2/3) \cdot (e^2/c^3) \dot{a}$. Работа против этой силы представляет собой потери энергии. Для постоянного ускорения эта сила равна нулю. Вообще говоря, работа, совершаемая против этой силы, может быть записана в виде

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}), \quad (9.1.2)$$

дающая правильное выражение для dW/dt . Для круговых или ограниченных движений средний вклад последнего члена по достаточно большому времени мал или равен нулю (через один цикл, так как величина $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ сохраняет свое значение, то его вклад равен нулю) и для вычисления мощности излучения достаточно более простого соотношения (9.1.1).

Конечно, в гравитационном поле законы электродинамики Максвелла должны быть модифицированы для того, чтобы удовлетворить

принцип относительности. В конце концов законы Максвелла предсказывают, что фотон должен двигаться по прямой линии, и обнаружено, что фотон искривляется звездой ("падает на звезду"). Ясно, что некоторое взаимодействие между гравитацией и электродинамикой должно быть включено в более точную формулировку законов электричества для того, чтобы сделать их согласованными с принципом эквивалентности.

Мы не будем завершать построение нашей теории гравитации до тех пор, пока мы не обсудим такие модификации электродинамики, а также механизмы излучения, приема и поглощения гравитационных волн.

9.2. Ковариантные производные тензоров

В предыдущей лекции мы видели, как понятие кривизны возникает при обсуждении геометрических измерений. Мы можем получить более интересное представление о том, как четырехмерная кривизна будет влиять на наш взгляд на физику, рассматривая более удачное приближение, которое состоит в том, чтобы определить кривизну как величину, описывающую, что происходит с вектором при перемещении его в пространстве. Давайте представим вновь наш двумерный мир. Если мы используем плоские евклидовы координаты, то постоянное векторное поле, существующее в пространстве, описывается постоянными компонентами. Если мы используем некоторые другие координаты, в общем случае искривленные, постоянное векторное поле описывается компонентами, которые меняются от точки к точке. Хорошо знакомый пример состоит во введении на плоскости полярных координат, в которых постоянный вектор описывается компонентами

$$\begin{aligned}(A \cos \theta + B \sin \theta) &= F_r, \\ (B \cos \theta - A \sin \theta) &= F_\theta.\end{aligned}\tag{9.2.1}$$

Первое, что мы должны сделать состоит в том, чтобы получить соотношения, которые позволят нам сравнить физически значимое различие между тензором в данной точке и его значением в окружающих точках. По сути дела мы хотим описать изменение тензора, которое до известной степени исключало бы изменения компонентов, вызываемые произвольным выбором координат. Например, мы хотим сравнить вектор в точке x^μ с другим вектором, находящимся в точке, характеризуемой инфинитезимальным смещением dx^μ от заданной точки, перенесением одного из векторов, остающегося постоянным (более точно, остающегося параллельным самому себе) в некоторую другую точку.

Для скалярной функции (тензора нулевого ранга) подобная проблема не составляет проблем. Обычное градиентное преобразование определяется соотношением

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\sigma}}, \quad (9.2.2)$$

так что градиент скаляра есть очевидно ковариантный вектор. Тем не менее, обычные градиенты векторов или тензорных величин более высокого порядка не являются тензорами; в этом случае в законе преобразования имеются члены, зависящие от случайности при выборе координат. Мы выводим соответствующее выражение для производной путем рассмотрения, как такие объекты выглядят в касательном пространстве. Так как касательное пространство – плоское, производные компонентов не содержат членов, обусловленных искривлением координат, и градиенты векторов по отношению к плоским координатам являются тензорами. Мы получим соотношение для этих тензоров в любых координатах, делая обратное преобразование от плоского пространства к произвольным координатам. Как обычно, мы употребляем разложения для того, чтобы получить такие соотношения. ("Штрихованные" координаты соответствуют плоскому пространству.) Пусть

$$\begin{aligned} x^{\nu} &= x'^{\nu} + \frac{1}{2} a^{\nu}_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} + \dots, \\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} &= \delta^{\nu}_{\mu} + a^{\nu}_{\sigma\tau} x'^{\sigma} + \dots \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Используя первые члены разложения, получим

$$A_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'_{\nu}(x').$$

Поскольку мы можем переписать выражение для производной, используя соотношение (9.2.3), то получим

$$A_{\mu}(x) = A'_{\mu}(x') + a^{\nu}_{\mu\lambda} x'^{\lambda} A'_{\nu}(x') + \dots \quad (9.2.4)$$

Теперь возьмем градиент этого выражения по отношению к произвольным координатам и вычислим эту величину в начале координат

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right)_0 &= \frac{\partial}{\partial x'^{\tau}} \left(A'_{\mu}(x') + a^{\nu}_{\mu\lambda} x'^{\lambda} A'_{\nu}(x') \right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\sigma}} \right)_0 \\ &= \frac{\partial A'_{\mu}(x')}{\partial x'^{\sigma}} + a^{\nu}_{\mu\sigma} A'_{\nu}(x'). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Именно поскольку эта величина берется в начале координат, все члены, линейные по x' , равны нулю. Таким образом, мы получаем производную "для плоского пространства" на языке произвольных координат

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - a^\nu_{\mu\sigma} A_\nu \right] = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\sigma}. \quad (9.2.6)$$

Если теперь мы запишем $a^\nu_{\mu\sigma}$ через метрические тензоры, то мы получаем соотношение для "более правильной" производной. Эта величина является тензором и известна как ковариантная производная вектора A_τ . Для того, чтобы отличить эту производную от градиентов, мы будем использовать точку с запятой для обозначения ковариантного дифференцирования

$$A_{\mu;\tau} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma. \quad (9.2.7)$$

Доказательство того, что эта величина есть тензор, достаточно утомительно, но очень просто; все, что для этого требуется, состоит в том, чтобы преобразовать все координаты к координатам в плоском пространстве, непосредственно вычислить производную и затем проверить полученный закон преобразования. Правило для дифференцирования контравариантного вектора аналогично предыдущему

$$A^\mu_{;\sigma} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} A^\tau. \quad (9.2.8)$$

Последнее соотношение может быть доказано более просто, если мы исходим из соотношения (9.2.7) и используем метрический тензор для поднятия и опускания индексов; перестановка метрических тензоров приводит к тому, что величина Γ меняет знак. Для того, чтобы вычислять ковариантную производную тензора, имеющего много индексов, получаем следующее правило

$$T^{\mu\nu}_{\rho;\sigma} = \frac{\partial T^{\mu\nu}_\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\lambda\nu}_\rho + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} T^{\mu\lambda}_\rho - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} T^{\mu\nu}_\sigma. \quad (9.2.9)$$

Другими словами, каждый индекс приводит к тому, что добавляется член, который включает в себя Γ и сам тензор. Вряд ли нужно какое-либо другое мнемоническое правило; ковариантная производная вычисляется одинаково для верхних и нижних индексов, причем вычисление производной для верхних индексов идентифицируется со знаком "+", а для нижних индексов со знаком "-", тем самым только это и надо запомнить.

Наиболее хорошо известный пример таких преобразований – это формула для ротора вектора в сферических координатах; эти формулы всегда включают в себя обычные производные, умноженные на величины компонентов этого вектора.

Полезно еще одно соотношение для ковариантных производных. Так как ковариантные производные метрического тензора равны нулю, как легко может быть показано,

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} = 0, \quad (9.2.10)$$

то следующее правило применимо для произведения

$$(A^\mu B^\nu)_{;\sigma} = A^\mu B^\nu{}_{;\sigma} + A^\mu{}_{;\sigma} B^\nu. \quad (9.2.11)$$

Для того, чтобы показать, что подобные соотношения действительно связывают тензорные величины, всегда допустимо так выбрать координаты, чтобы сделать доказательство проще; тензоры являются такими математическими величинами, что тензорные соотношения, доказанные в одной координатной системе, остаются справедливыми для всех других координат. Последнее соотношение легко может быть доказано при использовании перехода к плоскому касательному пространству; ковариантная производная равна обычной производной в таком пространстве.

Одно из действий кривизны состоит в том, что вторая ковариантная производная не коммутирует с первой. Мы можем явно вычислить такие величины путем повторяющегося использования соотношения (9.2.9). Сначала получаем, что

$$A^\mu{}_{;\sigma;\tau} = [A^\mu{}_{;\sigma}]_{;\tau} = \frac{\partial [A^\mu{}_{;\sigma}]}{\partial x^\tau} + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda} [A^\lambda{}_{;\sigma}] - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau} [A^\mu{}_{;\lambda}], \quad (9.2.12)$$

и повторное дифференцирование дает нам

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{;\sigma;\tau} = & \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\tau} (\Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} A^\lambda) + \\ & + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda} \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\rho} A^\rho \right) - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} A^\rho \right). \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Некоммутативность порядка операций взятия ковариантных производных видна, когда мы вычисляем их разность

$$A^\mu{}_{;\sigma\tau} - A^\mu{}_{;\tau\sigma} = [\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho,\tau} - \Gamma^\mu{}_{\tau\rho,\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\tau}] A^\rho. \quad (9.2.14)$$

Множитель, на который умножается вектор A^ρ , должен быть тензором, поскольку величина в левой части последнего соотношения

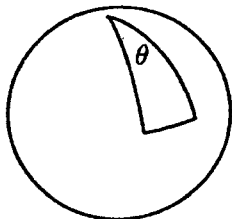


Рис. 9.1.

является разностью тензоров. Этот множитель в точности является тензором кривизны, так что

$$A^{\mu}{}_{;\sigma\tau} - A^{\mu}{}_{;\tau\sigma} = R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau} A^{\rho}. \quad (9.2.15)$$

9.3. Параллельный перенос вектора

Тот факт, что тензор кривизны появляется в связи с вычислением второй ковариантной производной, служит нам той путеводной нитью, которая позволяет нам дать другую полезную геометрическую интерпретацию кривизны. Свойство некоммутативности вторых производных представляет собой предел разности векторов в том случае, если мы вначале перемещаем его вдоль оси σ , затем вдоль оси τ или сначала вдоль оси τ , затем вдоль оси σ . Если координаты плоские, то для постоянного вектора нет отличий. Если мы имеем искривленное пространство и если мы делаем такие перемещения в различном порядке, то мы находим некоторый результирующий вектор. Значимость подобных рассмотрений для получения физических утверждений становится очевидной, когда мы осознаем, что мы не имеем физического способа определения "подлинно постоянного" векторного поля, за исключением того, чтобы сказать, что это такое векторное поле, чьи компоненты имеют нулевые производные в касательном пространстве.

Как кривизна появляется при рассмотрении переноса вектора, остающегося параллельным самому себе при перемещении его по поверхности, хорошо иллюстрируется в сферической геометрии. Мы будем представлять себе, что мы переносим маленький вектор с северного полюса по меридиану до экватора, затем вдоль экватора на угол θ и возвращаем его назад на северный полюс, как показано на рис. 9.1, причем всегда переносим вектор таким образом, чтобы он оставался параллельным самому себе и был направлен на юг. Когда мы возвращаем вектор назад на северный полюс, мы видим, что наш вектор повернулся на угол θ . Кривизна K поверхности определяется через угол, на который вектор поворачивается в том случае, если

мы рассматриваем перенос этого вектора вдоль инфинитезимальной замкнутой траектории. Для поверхности

$$\delta\theta = (\text{Площадь внутри замкнутой кривой}) \cdot K. \quad (9.3.1)$$

Для случая треугольника на сферической поверхности этот угол в точности есть превышение (над величиной 180°) суммы углов треугольника. Для сферической поверхности эта кривизна просто равна $1/R^2$.

Обобщенное определение кривизны многомерной поверхности будет даваться через изменение вектора при его переносе вдоль замкнутой кривой, причем при таком переносе, который оставляет вектор параллельным самому себе. Так как ориентация траектории, лежащей на определенной плоскости, зависит от двух осей координат, то мы видим, что кривизна в общем случае является тензором четвертого ранга. В трехмерном пространстве мы могли бы разбить сферическую поверхность проведением "радиально" внешней части от точки для заданного измеренного расстояния вдоль наикратчайших измеренных траекторий (геодезических). Компоненты кривизны вдоль различных направлений должны бы соответствовать незначительному отклонению от 2π длин больших кругов сферической поверхности.

Наглядное представление понятия кривизны на языке более простого пространства, погруженного в пространство с более высокой размерностью, требует введения одного дополнительного измерения для каждого независимого компонента метрического тензора. Для двумерных пространств имеется три компонента метрики, и отсюда следует, что достаточно трех измерений. Для трех измерений метрический тензор имеет шесть независимых компонентов и для четырех измерений имеется десять независимых компонентов.

Определение компонентов кривизны на языке изменения вектора при переносе его вдоль траектории является более общим, чем определение через дефекты в окружностях, которое не воспроизводит все признаки кривизны.

Связь со второй ковариантной производной может быть легко вычислена, когда мы рассматриваем последовательные перемещения вектора, сохраняя его параллельным самому себе. Так как мы проходим вдоль траектории на рис. 9.2, разность в этом векторе, получающаяся при прохождении вдоль этой траектории, должна быть

$$\delta^2 A^\mu = R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} A^\nu \Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau. \quad (9.3.2)$$

Так как кривизна есть тензор, антисимметричный по индексам (σ, τ) , билинейные произведения $\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau$ могут быть заменены на вели-

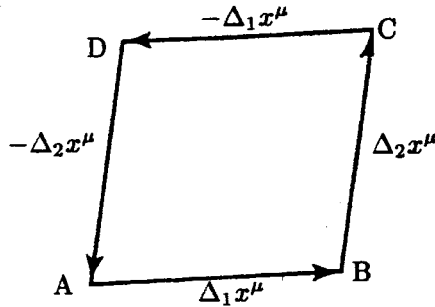


Рис. 9.2.

чину $1/2(\Delta_1 x^\sigma \Delta_2 x^\tau - \Delta_1 x^\tau \Delta_2 x^\sigma)$, которые являются половиной компонентом площади параллелограмма. Индексы тензоров имеют значение, которое нетрудно описать словесно; если мы рассматриваем перемещение векторов вдоль небольшой петли в плоскости $(\sigma\tau)$, компонент μ вектора меняется на величину, пропорциональную сумме по другим компонентам A^ν , $R^\mu_{\nu\tau\sigma} A^\mu$ и площади петли.

Мы уже очень много говорили о перемещении вектора параллельно самому себе, не делая это понятие математически определенным. При использовании более интуитивных терминов, это просто означает, что мы переносим конец стрелки и основание стрелки на некоторое равное смещение так близко, как только мы можем вдоль прямой линии, которая есть геодезическая. Математическое определение может быть наилучшим образом понято путем рассмотрения уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds}. \quad (9.3.3)$$

Ясно, что вектор (dx^μ/ds) вдоль геодезической представляет тангенциальную скорость Δt^μ вдоль геодезической, которая есть "физическая" прямая линия. Вторая производная $(d^2 x^\mu/ds^2)$ представляет собой изменение этой скорости за интервал времени Δs

$$\Delta s \left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) = \Delta t^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma} t^\nu \Delta x^\sigma. \quad (9.3.4)$$

Это изменение пропорционально самому вектору t^ν и перемещениям Δx^σ . Определение параллельного переноса аналогично; мы говорим, что вектор A'^μ есть результат переноса параллельно самому себе

$$A'^\mu = A^\mu + \delta A^\mu,$$

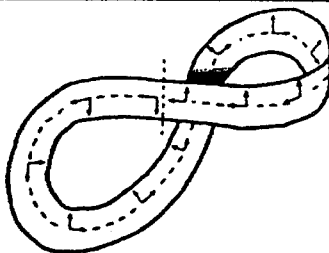


Рис. 9.3.

где

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu A^\sigma \Delta x^\nu. \quad (9.3.5)$$

Легко может быть показано, что когда мы перемещаем множество векторов вдоль замкнутой кривой, перемещая каждый из них параллельно самому себе, соотношения между векторами не меняется, так что целое пространство, определенное множеством векторов, поворачивается при движении вдоль петли, это задает полное изменение, вызванное перемещениями. Доказательство этого утверждения состоит в проверке того, что все инвариантные скаляры

$$B^\mu A^\nu g_{\mu\nu}, \quad (9.3.6)$$

остаются неизменными. Это означает, что длины векторов и углы между векторами сохраняются. Единственное преобразование, которое допускает это, выглядит как поворот целого пространства.

Возможно, что топологические свойства пространства не полностью определяются локальной кривизной. Например, мы получили, что длины векторов сохраняются и углы между векторами сохраняются, когда мы переносим пространство параллельно самому себе. Все же нет гарантии, что для длинной замкнутой траектории отражение недопустимо, также как и вращение. Двумерный пример таких отражений (например, неориентируемая поверхность) имеет место в ленте Мебиуса (рис. 9.3). Если мы возьмем два вектора, один из которых параллелен, другой перпендикулярен центральной линии ленты Мебиуса, и обойдем один раз ленту, двигаясь налево от вертикальной пунктирной линии, показанной рис. 9.3, то пространство не переходит само в себя, а испытывает отражение, обусловленное "скрученностью" поверхности, а не просто поворот.

Теперь, когда мы определили такое понятие, как перенос вектора параллельно самому себе, мы можем получить важную формулу для тензора кривизны при движении по траектории $ABCD$ на рис. 9.2. Разности в векторах при каждом инфинитезимальном перемещении

задаются символами Кристоффеля Γ . Но так как эти разности не являются в точности теми же самыми вдоль (AB) и (CD) , и даже, если бы эти перемещения были бы противоположны одно другому, вектор не вернулся бы к своей исходной величине. Мы можем понять, каким образом символы Кристоффеля оказываются вовлечены в доказательство этого факта. Выполняя алгебраические преобразования, приходим к соотношению (9.2.14).

Можно показать, что тензор кривизны удовлетворяет тождеству Бианки

$$R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta;\gamma} + R^\mu{}_{\sigma\beta\gamma;\alpha} + R^\mu{}_{\sigma\gamma\alpha;\beta} = 0. \quad (9.3.7)$$

Сейчас без подготовки я не стал бы говорить о геометрическом значении тождества Бианки. Имеется обычное уравнение электродинамики, которое может быть записано в виде, идентичном виду тождества Бианки, за исключением числа измерений. Тензор поля задается через векторный потенциал следующим соотношением:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (9.3.8)$$

другими словами $F_{\mu\nu}$ — ротор некоторого вектора. Но свойства $F_{\mu\nu}$, содержащиеся в утверждении, что $F_{\mu\nu}$ есть ротор, эквивалентным образом также хорошо описываются тождеством

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \quad (9.3.9)$$

которое имеет вид, похожий на тождество Бианки. Свойства ротора могут быть связаны с криволинейным интегралом, если мы используем теорему Стокса¹

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int (\text{rot } \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (9.3.10)$$

где интеграл в правой части соотношения представляет собой поверхностный интеграл по любой поверхности, ограниченной замкнутой кривой Γ .

Для случая гравитации аналогия может быть следующая: криволинейный интеграл представляет изменение вектора, когда мы перемещаем его, оставляя параллельным самому себе, вдоль замкнутой кривой Γ . Такое общее изменение возможно связывается с интегралом по любой двумерной гиперповерхности, ограниченной кривой Γ .

¹Мы используем более распространенное обозначение в отечественной литературе для ротора ("rot"), а не "curl", как в лекциях Фейнмана (*Прим. перев.*)

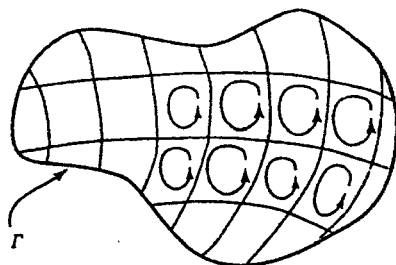


Рис. 9.4.

Доказательство такого утверждения может быть получено по аналогии с доказательством теоремы Стокса, в котором рассматривается разделение конечной поверхности инфинитезимальной сеткой, например, как показано на рис. 9.4; показывается, что сумма вкладов от любой инфинитезимальной сетки равна криволинейному интегралу. Когда рассматривается аналогия для этой ситуации в пространстве более высоких размерностей, то мы можем лучше понять значение тождества Бианки для описания сущности кривизны пространства.

9.4. Связь между кривизной и материей

Мы видели, как эффекты, связанные с действием гравитационных полей, могут быть описаны в рамках нашей геометрической интерпретации через тензор кривизны $R^\mu_{\nu\sigma\tau}$. Осталась только одна задача, состоящая в том, чтобы связать тензор кривизны с источниками гравитации, материи и энергии. Первое, что мы делаем для этого, мы производим свертку тензора кривизны по первому и последнему индексам и получаем тензор, который называется тензором Риччи

$$R_{\nu\sigma} = R^\mu_{\nu\sigma\mu}. \quad (9.4.1)$$

В этом соотношении указан единственный способ, каким можно свернуть один раз тензор кривизны. Следующий намек приходит из рассмотрения обобщенного закона сохранения энергии и импульса, который гласит, что свернутая ковариантная производная или, иначе говоря, ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса, должна быть равна нулю.

Мы ищем вид соотношения, включающего в себя тензор Риччи таким образом, что его свернутая ковариантная производная является тождественным нулем. Ответ получается из свертывания дважды тождества Бианки (9.3.7). Свертывание по индексам $(\mu\beta)$ приводит к выражению, включающему в себя тензоры Риччи

$$R_{\sigma\alpha;\gamma} - R_{\sigma\gamma;\alpha} + R^\mu_{\sigma\gamma\alpha;\mu} = 0. \quad (9.4.2)$$

Свертывая по индексам (σ, α) , мы получаем

$$R_{;\gamma} - R^{\sigma}{}_{\gamma;\sigma} - R^{\mu}{}_{\gamma;\mu} = 0. \quad (9.4.3)$$

Таким образом, тензорная величина, которая имеет нулевую ковариантную производную, есть

$$\left(R^{\mu}{}_{\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\gamma} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (9.4.4)$$

Гипотеза Эйнштейна состояла в том, что эта величина в точности есть тензор энергии-импульса. Для того, чтобы записать это в эйнштейновской форме, мы просто поднимаем один индекс для того, чтобы записать дважды ковариантный тензор

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \lambda^2 T^{\mu\nu}, \\ G^{\mu\nu}_{;\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

Первое уравнение (9.4.5) определяет полный закон гравитации Эйнштейна; т.е. это отправная точка всей нашей работы. $G^{\mu\nu}$ часто называется тензором Эйнштейна.

После того, как мы установили связь между тензором энергии-импульса и тензором кривизны, возникает интересный вопрос. Наша интуиция могла бы предполагать, что если повсюду в пространстве нет материи и давлений, геометрия должна бы быть плоской, описываемой метрикой Минковского специальной теории относительности. Тем не менее, оказалось возможным получить решения такие, что

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad \text{всюду и, несмотря на это,} \quad R^{\sigma}{}_{\rho\tau\nu} \neq 0. \quad (9.4.6)$$

Наиболее интересным из таких решений является решение А.Тауба. Это решение наиболее интересно, поскольку оно не зависит от времени. Тем не менее, могут быть другие решения такой задачи, так мы можем спросить, можем ли мы иметь гравитацию без того, чтобы имелись источники?

Ответ на этот вопрос вероятно будет аналогичным ответу, который дается на аналогичный вопрос в электродинамике. Если разрешается зависимость от времени, то уравнения допускают существование полей без источников (т.е. движущиеся волны), до сих пор мы никогда не сталкивались с физическими трудностями, предполагая, что все наблюдаемое излучение действительно приходит от заряженных источников, которые и испускают это излучение. Можно

построить статические поля, например, имеющие потенциалы

$$\begin{aligned}\phi &= x, \\ \phi &= x^2 + y^2 - 2z^2,\end{aligned}\tag{9.4.7}$$

которые являются бездивергентными, а потому не имеют источников. Обычная интерпретация таких решений состоит в том, что такие поля вызываются зарядами, лежащими вне некоторого объема, внутри которого соотношения (9.4.7) оказываются справедливыми, и для этого требуется все большее и большее количество заряда, находящегося вне рассматриваемой области для того, чтобы сделать такого рода решения приемлемыми, когда мы пытаемся увеличить объем, в котором выполнены приведенные выше решения.

Не проверяя в деталях решения А. Тауба, я полагаю, что он столкнулся с аналогичной ситуацией. Для того, чтобы объяснить наличие кривизны в отсутствии материи, мы должны взять предельный случай решений, которые имеют ясную физическую интерпретацию на малых областях, и затем разрешить этим областям стать бесконечно большими. Цена, которая при этом должна быть заплачена, состоит в том, чтобы неограниченно отсрочить объяснение растущего количества "внешней" материи, которая нам требуется.

Лекция 10

10.1. Полевые уравнения гравитации

Мы нашли тензор, называемый тензором кривизны, который определяется исходя из того, что происходит, когда мы переносим векторы по некоторой замкнутой кривой в нашем пространстве. Поскольку эта величина является тензором, мы можем использовать ее для того, чтобы образовать величины, которые должны быть использованы при написании ковариантных уравнений. Мы не получили никакой физики, просто записывая эти уравнения, тем не менее, мы должны точно определить связь этих уравнений с реальным материальным миром. То, что сделал Эйнштейн, состоит в том, что он попросту предположил, что такая связь есть. Не существует способа вывести эту связь из более фундаментальных принципов. Каждая возможная гипотеза имеет свои характерные свойства, поэтому возможно для более позднего исследователя предположить наличие некоторого критерия, который бы делал выбор единственным, но это по сути дела некий обман.

Некоторая подсказка, которая может помочь нам, состоит в том, что гравитация взаимодействует с плотностью энергии, так что поскольку плотность энергии в теории относительности есть компонент (44) тензора второго ранга, то в уравнениях нам необходимо иметь тензор второго ранга. Кривизна является тензором четвертого ранга, так что мы сворачиваем его (по верхнему и нижнему индексу) один раз и используем тензор Риччи. Первая гипотеза Эйнштейна состояла в том, что тензор энергии-импульса попросту равен тензору Риччи $\lambda^2 T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Тем не менее, возможен другой выбор; мы можем добавить к тензору Риччи метрический тензор, умноженный на скалярную кривизну (свернутый тензор Риччи). Таким образом, получаем то, что в конце концов выбрал Эйнштейн:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \lambda^2 T_{\mu\nu}. \quad (10.1.1)$$

Существует хороший аргумент в пользу того, почему такой выбор лучше. Если мы вычислим ковариантную дивергенцию уравнения (10.1.1), то ответ состоит в том, что эта величина тождественно равна нулю. Это означает, что закон сохранения энергии есть попросту следствие вида уравнения (10.1.1). Если мы положим тензор энергии-импульса равным только вектору Риччи (а не тензору Эйнштейна), то закон сохранения энергии был бы тогда физическим

постулатом, который принес бы больше информации и привел бы к меньшей свободе. В действительности выбор метрических тензоров не является однозначным; когда мы работаем с ними, у нас есть возможность свободы выбора четырех функций, соответствующих четырем функциям, которые описывают общее преобразование, задающее новые координаты через старые. Так как закон сохранения энергии есть тождество, то выбор четырех функций в метрике является полностью свободным.

Насколько хорошо выбор Эйнштейна соответствует Природе? Как мы получаем тензор $T^{\mu\nu}$ и каково значение этих уравнений и кривизны? Для того, чтобы ответить на эти вопросы, мы поработаем с этими уравнениями некоторое время. Прежде всего мы попытаемся понять связь этих уравнений с остальной физикой и с вариационными принципами.

Для того, чтобы записать принцип действия в релятивистском виде, нам необходим интеграл, который есть скалярный инвариант. Мы выбираем, что действие для гравитационного поля есть

$$S_g = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x R \sqrt{-g}. \quad (10.1.2)$$

В тех выражениях, которые мы выписываем, мы обозначаем $d^4x = dx dy dz dt$. Действие S_g есть скаляр, поскольку R есть скаляр и $\sqrt{-g} d^4x$ есть скаляр. Мы можем показать последнее, исходя из рассмотрения того, что собственное время есть скалярный инвариант

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (10.1.3)$$

Вследствие того, что $g_{\mu\nu}$ есть симметричный тензор, мы всегда можем ввести вращение таким образом, что тензор будет диагональным; в этом случае

$$(ds)^2 = D(dt)^2 - C(dz)^2 - B(dy)^2 - A(dx)^2. \quad (10.1.4)$$

Отсюда мы видим, что элемент объема d^4x не является инвариантом; должным образом выбранный инвариантный элемент объема есть

$$\sqrt{ABCD} dx' dy' dz' dt' = \sqrt{-g} d^4x', \quad (10.1.5)$$

где $g' = \text{Det } g'_{\mu\nu}$. Если мы делаем ортогональные преобразования, то $d^4x = d^4x'$ и также определитель $\text{Det } g_{\mu\nu}$ равен $\text{Det } g'_{\mu\nu}$. Таким образом, общее выражение для инвариантного элемента объема есть

$$\sqrt{-g} d^4x. \quad (10.1.6)$$

Величина $\sqrt{-g}$ есть скалярная плотность. Это означает, что ее изменение при координатном преобразовании получается умножением на якобиан преобразования

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right| \sqrt{-g}. \quad (10.1.7)$$

Тензор кривизны появляется тогда, когда мы вычисляем вариацию величины S_g по отношению $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right). \quad (10.1.8)$$

Это происходит из-за того, что мы можем использовать интеграл от R как действие гравитационной части полной задачи.

Позвольте мне отметить, что поскольку этот тензор давления появляется при таком подходе из вариационного принципа, его ковариантная дивергенция с необходимостью равна нулю (это утверждение впервые, я считаю, было отмечено Эддингтоном). Мы увидели эту связь с другого направления, заключающегося в том, что мы могли бы вывести вариационный принцип при условии, что мы исходим из тензора с нулевой дивергенцией. Доказательства, которые мы предлагаем, не являются строгими; мы не беспокоимся о строгости, поскольку факты составляют существо дела, а не их доказательства. Физика может развиваться без доказательств, но мы не можем продолжать развивать теорию без фактов. Доказательства полезны в том смысле, что они являются хорошими упражнениями; если факты верны, тогда доказательства являются предметом игры с корректным использованием алгебры.

Мы хотим показать, что если функционал

$$S_g = \int d^4x \Sigma[g_{\mu\nu}], \quad (10.1.8')$$

есть инвариант при координатных преобразованиях, тогда ковариантная дивергенция вариации S_g по отношению $g_{\mu\nu}$ тождественно равна нулю. Делая инфинитезимальное преобразование и переходя к штрихованным координатам $x^\mu \rightarrow x'^\mu$,

$$x^\mu = x'^\mu + h^\mu(x'), \quad (10.1.9)$$

изменение $g_{\mu\nu}$ задается соотношением

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + h^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x') + h^\alpha{}_{,\mu} g_{\nu\alpha}(x') + h^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}(x'). \quad (10.1.10)$$

Выражая действие в новых координатах, опуская штрихи у переменных, по которым ведется интегрирование, инвариантное действие выражается в виде

$$S_g = \int d^4x \Sigma[g'_{\mu\nu}] = \int d^4x \Sigma[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \frac{\delta \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} (h^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha} + h^\alpha{}_{,\mu} g_{\nu\alpha} + h^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (10.1.11)$$

Когда мы производим интегрирование по частям второго слагаемого в правой части этого выражения, мы преобразуем его к выражению, которое включает в себя функциональные производные функции Σ . Мы кладем его равным нулю, так как мы знаем, что изменение в действии должно быть равно нулю при любом h^α вследствие вида функции Σ

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\nu\alpha} \right] - \frac{1}{2} \frac{\delta \Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (10.1.12)$$

Обозначим $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ вариацию величины $2\lambda^2 S_g$ по отношению к $g_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = 2\lambda^2 \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (10.1.13)$$

Величина $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ есть контравариантная тензорная плотность второго ранга. Используя это определение, уравнение (10.1.12) можно переписать в виде

$$(g_{\alpha\mu} \mathcal{G}^{\mu\nu})_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0, \quad (10.1.14)$$

которое эквивалентно утверждению, что ковариантная дивергенция $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ равна нулю

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (10.1.15)$$

Для демонстрации эквивалентности некоторых соотношений, включающих в себя ковариантные производные, удобно использовать некоторые соотношения, которые мы приведем сейчас для того, чтобы в дальнейшем их использовать. Вначале вычислим свернутые символы Кристоффеля.

Используя определение, получим

$$\Gamma^\mu_{\epsilon\mu} = g^{\mu\sigma} [\mu\epsilon, \sigma] = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} [g_{\sigma\mu,\epsilon} + g_{\sigma\epsilon,\mu} - g_{\mu\epsilon,\sigma}]. \quad (10.1.16)$$

Второй и третий члены взаимно сокращаются, так как тензор $g_{\mu\nu}$ – симметричен. Оставшийся член содержит обратную матрицу $g^{\mu\nu}$, умноженную на градиент $g_{\mu\nu}$. Из хорошо известной теоремы об определителях следует, что алгебраическое дополнение $M^{\mu\nu}$ матрицы $g_{\mu\nu}$ связывается с соответствующим элементом обратной матрицы соотношением

$$g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} / g, \quad (10.1.17)$$

и таким образом

$$g_{,\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} M^{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda} g^{\mu\nu} g. \quad (10.1.18)$$

Следовательно,

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} = [\log(-g)]_{,\lambda}, \quad (10.1.19)$$

и свернутый символ Кристоффеля равен следующему соотношению

$$\Gamma_{\epsilon\mu}^{\mu} = [\log(-g)]_{,\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g})_{,\epsilon}. \quad (10.1.20)$$

Кроме того, имеются следующие полезные формулы для ковариантных производных. Для скалярных функций ковариантные градиенты оказываются равными обычным градиентам

$$\phi_{;\nu} = \phi_{,\nu}. \quad (10.1.21)$$

Для контравариантного вектора ковариантная дивергенция есть

$$A^{\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^{\nu})_{,\nu}. \quad (10.1.22)$$

Ковариантный ротор оказывается равным обычному ротору

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \quad (10.1.23)$$

Для тензоров второго ранга ответы оказываются различными (в зависимости от симметрии), для антисимметричных тензоров

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\mu})_{,\nu}, \quad \text{если } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (10.1.24a)$$

Для симметричных тензоров

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (T^{\nu}_{\mu} \sqrt{-g})_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta}, \quad \text{если } T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (10.1.24b)$$

Используя эти соотношения, путем прямых вычислений можно получить, что соотношения (10.1.14) и (10.1.15) эквивалентны. Таким образом, мы видим, что инвариантность действия приводит к построению тензорной плотности, которая автоматически имеет нулевую ковариантную дивергенцию. Так как ковариантная производная метрического тензора $g_{\mu\nu}$ обращается в нуль, то ковариантная производная $(\sqrt{-g})_{;\lambda}$ также обращается в нуль. (Заметим для точности, что обычная производная $(\sqrt{-g})_{,\lambda}$ есть не то же самое, что ковариантная производная, поскольку $\sqrt{-g}$ есть скалярная плотность, а не скаляр). Тензор, ассоциированный с тензорной плотностью $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, также является бездивергентным,

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} / \sqrt{-g}, \quad G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (10.1.25)$$

В этой связи нам следует прояснить некоторое положение, которое достаточно кратко, но иногда оказывается довольно запутанным. В лекции 6 мы работали с функциональными уравнениями (например, соотношение (6.2.3) того же вида, что и соотношение (10.1.2)); решения этих уравнений являются в действительности тензорными *плотностями*, а не тензорами. Тензорная плотность $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \mathcal{T}^{\alpha\beta}, \quad (10.1.26)$$

где $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu}$, но тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет следующему соотношению

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2g} g_{,\alpha} T^{\mu\alpha}. \quad (10.1.27)$$

10.2. Действие для классических частиц в гравитационном поле

Следующее, что мы обсудим, это то, как записать общий закон физики, который описывает не только гравитационные поля, но также и вещество. Мы предполагаем, что такой закон может быть выведен из принципа наименьшего действия; математическая формулировка которого состоит в том, что вариация действия равна нулю

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots] = 0. \quad (10.2.1)$$

Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ содержит различные виды полей, например, поле тензора гравитации $g_{\mu\nu}$, электромагнитное поле A_μ и,

если вещество есть скаляр, поле вещества скаляра ϕ . Когда мы варьируем это действие по отношению к различным полям, мы получаем уравнения распространения для соответствующих полей. Мы написали одну часть этого действия; давайте обозначим ту часть действия, которая ранее была пропущена, через S_m , которая зависит от полей материи ϕ и электромагнитных полей A_μ и всех других полей, какие мы только знаем. Когда мы вычисляем вариацию от действия

$$S = S_g + S_m = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m, \quad (10.2.2)$$

по отношению к $g_{\mu\nu}$, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] = -\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (10.2.3)$$

Тензорная плотность энергии-импульса вещества $T^{\mu\nu}$ должна быть вариационной производной S_m

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (10.2.4)$$

в том случае, если тензор $T^{\mu\nu}$ должна быть источником гравитационного поля. Теперь нам понадобится несколько примеров тензора $T^{\mu\nu}$. Если мы не можем вычислить тензор $T^{\mu\nu}$, исходя из некоторого физического принципа, тогда нет теории гравитации, так как мы не знаем, каким образом поля связываются с любым другим объектом.

Существуют некоторые требования непротиворечивости, подобные тем, которые мы находим в электродинамике. Для того, чтобы решить уравнения Максвелла, нам необходимо иметь токи. Это должны быть сохраняющиеся токи, а не просто произвольные токи. Сохраняющиеся токи источника, имеющие столь важное значение, получаются путем решения некоторых других задач физики, описываемых некоторым независимым законом, таким как Закон Ома, или Закон Гука, или уравнение Шредингера для таких и подобных систем. Если у нас не было таких других законов, то теория электромагнитных полей была бы бесполезной и не имела бы никакого значения.

Для гравитации ситуация более сложная. В тензоре $T^{\mu\nu}$ заключено и движение материи, отсюда следует, что у нас должен быть закон, которому следует материя, включая закон Ома и закон Гука; но также тензор $T^{\mu\nu}$ будет заключать в себе поля гравитации $g_{\mu\nu}$, обстоятельство, которое запутывает подобные задачи существенно в большей степени, чем в электромагнетизме. Вообще говоря, невозможно написать каким-либо согласованным образом тензор $T^{\mu\nu}$ за

исключением вакуума, если не решена уже полная запутанная задача. Беспокойство вызвано тем, что любое точно определенное выражение для тензора $T^{\mu\nu}$ не будет давать решение подобной задачи, за исключением специальных случаев метрического тензора $g_{\mu\nu}$; полное релятивистское решение должно было бы выполняться вне зависимости от частного выбора координат и кривизны. Даже для очень простых задач у нас нет идей относительно того, каким путем надо следовать, чтобы записать правильным образом тензор $T^{\mu\nu}$. Мы не знаем, как записать тензор $T^{\mu\nu}$ для того, чтобы описать вращающийся стержень, так что мы не можем вычислить в точности излучение им гравитационных волн. Мы не можем вычислить тензор $T^{\mu\nu}$ для системы, состоящей из Земли и Луны, поскольку приливные силы и силы упругости Земли существенно влияют на гравитационные поля. Если мы предположим, что Земля абсолютно твердая, то эти уравнения окажутся несогласованными. Если мы предположим, что Земля есть точка, то уравнения окажутся слишком сингулярными для того, чтобы иметь решения. И несмотря на это, материальный шар с заданной жесткостью, такой как Земля, будет вращаться вокруг Луны другой массы и жесткости вне зависимости от того, являются ли рассматриваемые уравнения точно определенными.

В этом месте теория гравитации оказывается достаточно уязвимой, поскольку одна часть уравнения теории гравитации является замечательно красивой и геометрической, а другая часть нет, она содержит всю "грязь" закона Гука и других законов, которые определяют поведение материи, которые не являются ни красивыми, ни геометрическими. Очень многие физики оказались настолько загипнотизированными красотой одной части этих уравнений, что они игнорируют другую часть. Тем самым, у них нет физики, которую необходимо было бы исследовать.

Мы должны провести некоторое изучение для того, чтобы понять возможные виды для действия, соответствующего вкладу материи S_m . В качестве исходной точки полезно рассмотреть классические пределы. Если мы правильно запишем классическое действие, то обычно не очень трудно увидеть, каким образом можно обобщить формулы, чтобы они стали инвариантными при произвольных координатных преобразованиях. Удобный способ породить такие обобщенные формулы состоит в том, чтобы возвратиться назад к локально падающей (свободно падающей) касательной координатной системе, разгадать, как добавить в качестве множителей $g_{\mu\nu}$ и $R^{\mu\nu}$ так, чтобы все выражение оказалось инвариантом. Например, свободная

частица, на которую не действуют силы, характеризуется действием

$$S_m = -\frac{m_0}{2} \int ds \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz_\mu}{ds}. \quad (10.2.5)$$

Этот пример иллюстрирует процедуру решения подобных задач; обнаруживается обычно, что такой подход оказывается весьма плодотворным. Мы записываем выражения такими, как они выглядят в плоских координатах, переходим к криволинейным координатам и видим, в какие места входят величины $g_{\mu\nu}$. Часто бывает очевидно, какая общая форма будет приводить к результатам в плоском пространстве. Если $z^\mu(s)$ – орбита частицы, которая свободно падает, то соответствующее слагаемое в действие есть

$$S_m = -\frac{m_0}{2} \int d^4x ds \delta^4(x - z(s)) g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds}. \quad (10.2.6)$$

Тензорная плотность энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ получается путем вариирования этого слагаемого действия по отношению $g_{\mu\nu}$, что дает

$$T^{\mu\nu} = m_0 \int ds \delta^4(x - z(s)) \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds}. \quad (10.2.7)$$

Аналогия с результатами в электродинамике является настолько сильной, что этот результат не выглядит неожиданным. У нас нет волнений, связанных с противоречивостью определения $T^{\mu\nu}$. Поскольку мы исходили из инвариантных выражений, тензорная плотность $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет соответствующему условию на ковариантную производную.

Интересно исследовать связь между уравнениями движения и бездивергентным тензором энергии-импульса с противоположной точки зрения. При записывании действия мы по существу утверждали, что частица движется вдоль геодезической. Таким образом, результирующая тензорная плотность энергии-импульса является бездивергентной. Теперь мы хотим показать обратное. Предположим, что тензор $T^{\mu\nu}$ – ненулевой только в нитеобразной области пространства-времени. Тогда мы можем показать, что эта нитеобразная область есть на самом деле геодезическая при условии, что мы предполагаем нечто эквивалентное сферической симметрии частицы, когда мы смотрим на нее с очень близкого расстояния. Идея состоит в том, чтобы начать с рассмотрения условия, которое связывает обычную дивергенцию $T^{\mu\nu}$ с самой тензорной плотностью $T^{\mu\nu}$, и произвести интегрирование по частям для того, чтобы преобразовать интегрирование по объему в интегрирование по пространству

$$\int d^4x T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta}. \quad (10.2.8)$$

Если тензорная плотность $T^{\mu\nu}$ равна нулю всюду, за исключением нитеобразной области, вклад в поверхностный интеграл равен нулю за исключением тех мест, где нить пересекает поверхность, и которые соответствуют импульсу частицы "до" и "после", если эти поверхности берутся в постоянный момент времени. Преобразуя этот результат к дифференциальной форме, в конце концов получаем результат, заключающийся в том, что движение следует уравнению геодезических:

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dz^\alpha}{ds} \frac{dz^\beta}{ds} = 0. \quad (10.2.9)$$

Возможность такого вывода приводит к утверждению, что уравнения Эйнштейна одновременно определяют движение материи и гравитационных полей. Это утверждение вводит в заблуждение и совершенно не выглядит так замечательно, как это может показаться с первого взгляда. Давайте вспомним, что если у нас есть свободная частица, движущаяся сама по себе вдали от каких-либо других тел, тогда законы сохранения энергии и количества движения определяют полностью ее движение. В теории гравитации свободно падающая частица становится эквивалентной свободной частице, так что вновь наличие закона сохранения энергии оказывается достаточным для того, чтобы полностью определить движение. Но обычная физическая ситуация не является настолько простой, как описанная выше. Когда мы имеем нечто большее, чем только гравитация и частица, уравнения движения не следуют только из законов сохранения энергии и импульса. В электродинамике сохранение заряда должно содержаться в каждом решении уравнений Максвелла, так что можно сказать, что этот закон сохранения есть следствие уравнений Максвелла. Но это условие не дает всего необходимого для того, чтобы построить уравнения движения для зарядов, полей, которые они задают, и сил, с которыми эти заряды действуют друг на друга. Подобно этому в теории гравитации имеет место сохранение энергии и количества движения, но этого не достаточно, чтобы определить движение планет и Луны для случая, когда эти объекты не являются точками, и законы физики, отличные от закона сохранения энергии, требуются для того, чтобы уяснить их поведение в гравитационном поле.

10.3. Действие для материальных полей в гравитационном поле

Следующее, что мы рассмотрим – подготовим переход к квантовой теории. Если скалярные частицы описываются скалярным полем ϕ ,

тогда соответствующий вклад в действие есть

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x (\phi_{,\nu} \phi^{,\nu} - m^2 \phi^2). \quad (10.3.1)$$

Легко может быть сделано обобщение на случай криволинейных координат; мы предполагаем, что

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2). \quad (10.3.2)$$

Это выражение является очевидным образом инвариантным при произвольных координатных преобразованиях, это есть одно из налагаемых на него требований, и приводится к соответствующему выражению для плоского пространства. Тем не менее, мы можем написать другие выражения, которые являются идеально правильными инвариантами, квадратичными по полям ϕ , и которые включают в себя тензор кривизны. Все эти выражения обращаются в нуль в том случае, когда пространство становится плоским. Возможно, что действие должно содержать пропорции α и β соответствующих членов, например,

$$-\alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2 + \beta \int d^4x \sqrt{-g} (R^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}). \quad (10.3.3)$$

Мы видим, что действие, которое мы записываем, не является единственным. Первое слагаемое, которое мы записали, должно здесь присутствовать, так как только оно и приводит к правильному результату для плоского пространства. И нет экспериментального свидетельства о приливных силах и т.д. и т.п., что могло бы быть причиной для включения или невключения других слагаемых, таких как в выражении (10.3.3). Единственная разумная вещь, которую мог бы сделать физик теперь, состоит в том, чтобы выбрать некоторые слагаемые, которые являются "проще", чем другие слагаемые, пренебречь более сложными членами в действии и посмотреть, какого рода теорию он получил в результате. В некотором смысле возможно производные есть более сложные объекты, чем просто поля, поэтому член с множителем β является более сложным, поскольку он содержит четыре производных, две в полях и две в тензоре $R^{\mu\nu}$. Слагаемое с множителем α содержит только две производных, тем не менее обе производных по полю $g_{\mu\nu}$. Однако трудно определить усложнение теории, которое было бы сделано недвусмысленным образом; всегда возможно провести интегрирование по частям, так что производные исчезают в одном месте и вновь появляются в другом — простота, которая очевидна в случае, если начать формулировать

теорию с одной исходной точки, может не соответствовать простоте, которая получилась бы, если теорию формулировали бы, исходя из другой начальной точки. Если нами используется построение квантовой механики, исходя из уравнения Шредингера, то простейшее действие, по-видимому, должно быть таким, которое соответствует $\alpha = 0$. Но так как мы начали формулировать квантовую механику, задаваемую через интегралы по траекториям, то простейшее действие кажется должно быть таким, которое соответствует $\alpha = 1/6$. Каждая из возможностей выбора значения α кажется наипростейшей с соответствующей точки зрения. Я не знаю никакого удовлетворительного способа определить величину α и считаю, что определение действия для скалярного поля является неоднозначным.¹

Значение члена, такого как член со множителем β в соотношении (10.3.3), состоит в том, что он характеризует то, должны ли мы иметь дело с частицей, которая может чувствовать гравитационное поле вне области, достаточно большой по сравнению с той, которая характеризуется локальной кривизной. Если частица имеет структуру, которая в некотором смысле инфинитезимально мала, тогда она не может чувствовать кривизну. Но если, что скорее всего, частица, двигаясь, совершает движение типа штопора в окрестности своего положения, то член, включающий в себя локальную кривизну, может быть очень хорошо представлен.

Мы приведем пример, рассматривая ситуацию в электродинамике, как иное исходное положение приводит к иному ответу достаточно безобидным путем. Здесь принцип минимального электромагнитного взаимодействия приводит к замене

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \quad (10.3.4)$$

в лагранжиане. Предположим теперь, что перед тем, как мы сделали такую замену, мы записали интеграл от лагранжиана следующим образом:

$$S = \int dV \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi - \int dV \bar{\psi} m \psi + \epsilon \int dV \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi. \quad (10.3.5)$$

Последнее слагаемое не записывается при обычном изложении теории, поскольку оно тождественно равно нулю, причем потому, что

¹ Современное рассмотрение этой проблемы, включающее в себя обсуждение проблемы спектра атома водорода см. в [Klei 89].

оно в точности равно нулю, не может быть никакого твердого и надежного правила относительно того, как отбросить этот член. Тем не менее, когда мы делаем замену градиента в соответствии с соотношением (10.3.4) для того, чтобы включить электромагнетизм, результирующий лагранжиан оказывается не тем же, каким он был до преобразования; лагранжиан имеет дополнительное слагаемое,

$$e\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}, \quad (10.3.6)$$

где $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Этот член есть член аномального момента, открытого Паули. (Впервые это было сообщено мне Вентцелем.)

Электродинамика частиц спина 1 усложняется также аномальными квадрупольными моментами. Очевидно, не существует более простого выражения для лагранжиана, который можно записать, так что в теоретических работах должны представляться вычисления с альтернативными теориями, которые соответствуют различным аномальным моментам.

В нашей теории гравитации ситуация аналогична. Это как если бы частица обладала аномальным моментом инерции, добавляемым к обычному моменту инерции, обусловленному распределением массы.

В электромагнетизме подобные неоднозначности не появляются при описании частиц с нулевым спином – они впервые появляются при описании частиц со спином $1/2$. С другой стороны, в гравитации трудности возникают даже при обсуждении простейшего случая скалярных частиц. Не существует решения для преодоления таких трудностей – мы должны признать, что множество альтернативных теорий (различных значений α) оказывается возможным.

Движение частицы в заданном гравитационном поле описывается уравнением, которое получается, когда мы варьируем действие по отношению к полю ϕ . В зависимости от того, как мы переходим к квантовой механике, различные варианты действия приводят к простейшим результатам. Таким образом, мы не можем доказать, что что-либо проще, если это не приводит к одновременной простоте при решении множества различных задач. Для различных задач необходимо выбрать различные значения α для того, чтобы упростить решение, или для того, чтобы отказаться от производных. Если положить $\alpha = 0$, то тогда мы приходим к ковариантной простоте только в том смысле, что требуется меньше алгебраических вычислений при таком исходном положении. При этом нет какой-либо подразумеваемой физической простоты, так как все значения α приводят к различным степеням сложности или в той, или в другой задаче.

Давайте приступим к получению уравнений движения поля материи ϕ . Исходя из соотношения (10.3.2), мы можем использовать

следующие вариации обратной матрицы и квадратного корня от детерминанта:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (10.3.7)$$

для того, чтобы получить следующее выражение для $T^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = & \sqrt{-g} \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\phi_{;\alpha} \phi^{;\alpha} - m^2 \phi^2) \\ & - \alpha \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \phi^2 - 4\alpha \phi \phi_{;\beta} \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu;\beta}}. \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

Далее мы вычисляем вариацию по отношению к полю ϕ и кладем вариацию равной нулю для того, чтобы получить нечто, что является аналогичным уравнению Клейна – Гордона

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{;\nu})_{;\mu} + \sqrt{-g} m^2 \phi + 2\alpha R \sqrt{-g} \phi = 0. \quad (10.3.9)$$

Получим уравнение, в котором тензоры появляются путем деления на скалярную плотность $\sqrt{-g}$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi_{;\nu})_{;\mu} + m^2 \phi + 2\alpha R \phi = 0. \quad (10.3.10)$$

Используя соотношения (10.1.20) и (10.1.21), мы видим, что последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\phi_{;\mu}^{;\mu} + (m^2 + 2\alpha R) \phi = 0. \quad (10.3.11)$$

Связь с уравнением Клейна – Гордона может быть замечена при рассмотрении случая $\alpha = 0$; обычный даламбертиан просто заменен на его ковариантный аналог, ковариантный даламбертиан.

Предшествующие шаги дали нам вполне определенную теорию, поскольку мы точно определили, как движется материя и какой есть тензор источника. Легко проверить, что для тензора, который мы выписали, ковариантная дивергенция $T^{\mu\nu}_{;\nu}$ равна нулю, трюк здесь состоит в том, чтобы использовать каждый раз, когда это необходимо, сами полевые уравнения. Таким образом, ход рассуждений оказывается последовательным, все соответствующие тензоры являются бездивергентными, и это оказывается достаточно существенным, чтобы в рассуждениях исходить из этого. Для того, чтобы построить более полную теорию, мы добавляем дополнительные члены к действию так, чтобы представить другие известные поля. Мы записали сначала действие в плоском пространстве, так как мы знаем это; исходя из

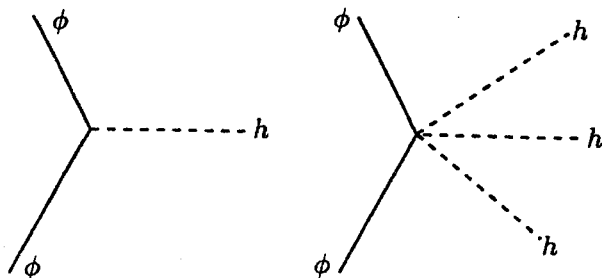


Рис. 10.1.

некоторого вида критерия, мы выберем наипростейшую форму для действия, которое есть инвариант. Требование, что действие должно быть инвариантом, приводит к ковариантным уравнениям для полей. Это не является ограничением на то, какие известные поля мы можем включить в рассмотрение, поскольку все известные законы физики могут быть ковариантным образом записаны. Дифференциальные законы обладают этим свойством. Любой закон, записанный как дифференциальное уравнение, может быть легко преобразован к ковариантной форме; мы предполагаем, что в касательном пространстве этот закон оказывается тем же самым, каким мы его знаем, затем мы вращаем и растягиваем координаты. Результирующие уравнения включают в себя производные полей вплоть до второй производной метрического тензора.

Как только мы проделали эти выкладки сначала в дифференциальной форме, затем в ковариантной форме, тогда мы можем использовать нашу теорию для того, чтобы вычислить, например, уравнение движения вещества в звезде. Рассмотренные процессы могут описываться законами, характеризующими непрозрачность, законами рассеяния и т.д. Что не является допустимым, так это использование законов, которые могли бы нарушить сохранение энергии. Мы не можем, например, сказать "до свидания" тем нейтрино, которые образовались; эти нейтрино теряют энергию из-за наличия гравитационного потенциала, когда они покидают звезду, и последовательная теория не может быть написана, если мы пренебрегаем этим эффектом и влиянием плотности энергии нейтрино на модификацию гравитационного поля. Следовательно, не будет достаточным записать интегральные уравнения диффузии со свободными траекториями с конечным средним, но мы должны следовать уравнениям движения частиц диффузии, которые описываются полными законами, записанными в виде дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы сделать выражения для нас проще, запишем здесь подынтегральную функцию в выражении для действия для полей не-

посредственно через метрический тензор. Наши предыдущие выражения выглядят проще, поскольку они определяются через комбинации метрического тензора, но этот вид часто оказывается более полезным

$$-R\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{4} g_{\nu\lambda,\sigma} g_{\mu\rho,\tau} (g^{\nu\lambda} g^{\sigma\tau} g^{\mu\rho} - g^{\nu\mu} g^{\lambda\rho} g^{\sigma\tau} + 2g^{\nu\mu} g^{\lambda\tau} g^{\sigma\rho} - 2g^{\tau\mu} g^{\rho\sigma} g^{\nu\lambda}) + [\sqrt{-g} g_{\nu\sigma,\mu} (g^{\sigma\nu} g^{\rho\mu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma})]_{,\rho}. \quad (10.3.12)$$

Последний член есть производная, поэтому его интегрирование в выражении для действия дает в результате нуль, так что часто мы можем вполне обоснованно выбросить этот член из рассмотрения. Для многих задач будет достаточно записать действие как интеграл от первого члена, обозначаемого как H , так что

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\lambda^2} \delta \int d^4x H,$$

где

$$H = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}]. \quad (10.3.13)$$

Теперь мы снова готовы построить квантовую теорию, после того как мы имеем теорию с эйнштейновской точки зрения. Эта теория является более полной, чем та, которую мы обсуждали с венерианской точки зрения – мы имеем полный лагранжиан, включающий взаимодействие с материей, и который оказывается правильным во всех порядках. Если мы ограничим наше рассмотрение вселенной, которая содержит только гравитационные поля и скалярную материю, то теория поля получается путем анализа разложений через константу взаимодействия:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}. \quad (10.3.14)$$

В этом лагранжиане члены, которые квадратичны, соответствующим образом относятся к пропагаторам, члены, включающие в себя произведения двух ϕ и одного h , и члены, включающие в себя три h и два ϕ , соответствуют диаграммам, которые показаны на рис. 10.1. Таким путем мы приходим к предписанию для вычисления амплитуд квантовой механики для движения материи после того, как мы начали рассмотрение с геометрической точки зрения.

Когда придет время, мы будем пользоваться классической теорией для того, чтобы обсудить движение классических моментов и обсудить космологические вопросы, и мы будем использовать квантовую теорию для того, чтобы вычислить излучение гравитационных волн.

Третья альтернативная точка зрения на гравитацию будет представлена после того, как мы обнаружим пути, пользуясь которыми, мы приходим к выводу, что квантово-механическая теория запутывает нас.

Рассматривая эти члены в действии, мы могли бы проанализировать, почему полевое слагаемое может не включать в себя определенную пропорцию Λ величины $\int d^4x \sqrt{-g}$. Эта величина должна быть интегралом, пропорциональным объему Вселенной, который предположительно есть константа. Получившееся в результате уравнение для такого поля ведет себя до некоторой степени так же, как если бы гравитоны имели массу и универсальный источник. Рассмотрение предельно большого радиуса действия гравитационных сил делает довольно бессмысленным введение такого слагаемого в действие, даже если бы это приводило к согласованной теории. Уравнения движения, получающиеся из подобного рассмотрения, есть

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \lambda^2 T_{\mu\nu}. \quad (10.3.15)$$

Постоянная Λ известна как "космологическая постоянная". Эйнштейн хотел, чтобы Вселенная была замкнутой, так что он определил эту постоянную как значение, которое допускает для такой Вселенной стационарные решения. Позднее Эйнштейн ссылаясь на введение космологической постоянной как на свою Великую Ошибку; хотя он выбрал ее значение равным нулю, он мог бы прийти к заключению, что Вселенная могла бы расширяться (или сжиматься). И только позднее Хабблом было открыто, что удаленные галактики движутся от нас и Вселенная расширяется. С того времени, как такое изменение эйнштейновской теории вселенной было введено, космология была "испорчена" трудностями, связанными с определением значения космологической постоянной. Я согласен со второй гипотезой Эйнштейна и думаю, что значение $\Lambda = 0$ является наиболее вероятным.

Лекция 11

11.1. Кривизна в окрестности сферической звезды

Теперь мы обратим внимание на нахождение решений уравнений Эйнштейна для некоторых случаев, которые представляют физический интерес. Оказывается, что имеется очень небольшое число наблюдений, связанных с гравитацией, которые не могут быть адекватно объяснены ньютоновской теорией гравитации, и имеются только два решения уравнений Эйнштейна, которые пытались найти.¹ Одно из них есть решение, которое описывает гравитационное поле в окрестности звезды (которое должно точно определять отклонение луча света и прецессию орбиты Меркурия). Другое решение связано с описанием распределений массы, близких к однородным, и тем самым, это есть решение, которое представляет интерес при рассмотрении космологических моделей.

Если мы предполагаем наличие сферической симметрии, мы ожидаем, что метрический тензор будет давать в результате выражение возможно следующего вида для квадрата интервала собственного времени

$$(ds)^2 = A(dt)^2 + Bdr dt - C(dr)^2 - D((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) r^2, \quad (11.1.1)$$

где символы A , B , C , D обозначают функции, которые могут зависеть от координат (r, t) , но не от (θ, ϕ) . Такое решение допускает динамические решения, в которых движение материи является чисто радиальным.

Можно уменьшить число неизвестных функций, сделав разумный выбор новых координат. Например, заменим масштаб координаты r согласно следующему правилу:

$$r' = \sqrt{D(r, t)} r, \quad (11.1.2)$$

получившееся в результате выражение $(ds)^2$ через r' и dr' вместо r и dr имеет тот же самый вид, но новая функция D есть в точности $D = 1$. Таким образом, функция D оказывается излишней, так как $D = 1$ соответствует нашей задаче без потери общности.

¹ В настоящее время известно очень много точных решений уравнений Эйнштейна. Например, большое число точных решений можно найти в книге [КШМХ 82*]. (Прим. перев.)

Второе преобразование делается путем замены масштаба времени. Мы положим

$$t' = t'(t, r). \quad (11.1.3)$$

Используя это преобразование, мы вводим новую функцию, которая может быть выбрана так, что коэффициент при произведении $dr dt'$ равен нулю. Это означает, что если положить $B = 0$, то потери общности не происходит.

Обычно с этого места, чтобы продвинуться в вычислениях, принято работать не с функциями A и C , а с новыми функциями ν и λ , которые определяются следующим образом:

$$A = e^\nu, \quad C = e^\lambda, \quad (11.1.4)$$

(в этих обозначениях мы следуем Шварцшильду). Метрический тензор является диагональным, и если мы выберем обозначения индексов (1,2,3,4) для координат (r, θ, ϕ, t) , то компоненты метрического тензора являются следующими:

$$g_{44} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (11.1.5)$$

Поскольку тензор является диагональным, элементы обратного тензора $g^{\mu\nu}$ являются обратными элементами соответствующих компонентов $g_{\mu\nu}$; более точно имеем следующие выражения:

$$g^{44} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (11.1.6)$$

Теперь может быть проведено вычисление элементов тензора кривизны. Эти вычисления напрямую приводят к цели, однако они скучны и утомительны, поскольку в символах Кристоффеля имеется достаточно много производных и должно быть вычислено довольно много сумм.

Когда все это проделано, то компоненты тензора кривизны могут быть вычислены через функции ν и λ и их производные по отношению ко времени t и радиальной координате r . Для того, чтобы запись была более экономной, мы используем штрихи и точки для обозначения производных следующим образом:

$$\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad \dot{\nu} = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \text{и т. д.} \quad (11.1.7)$$

и т.д. Точные выражения для тензора Римана являются следующими:

$$\begin{aligned} R^{42}_{41} &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{1}{4} \lambda' \nu' \right) + e^{-\nu} \left(\frac{1}{2} \dot{\lambda} + \frac{1}{4} (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{\nu} \right), \\ R^{42}_{42} &= R^{43}_{43} = -\frac{1}{2r} \nu' e^{-\lambda}, \quad R^{21}_{21} = R^{31}_{31} = \frac{1}{2r} \lambda' e^{-\lambda}, \\ R^{32}_{32} &= -\frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1), \quad R^{42}_{12} = R^{43}_{13} = -\frac{1}{2r} \dot{\lambda} e^{-\nu}. \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

Все остальные компоненты равны нулю, за исключением тех, которые могут быть получены тривиальной перестановкой индексов некоторого элемента в соотношениях (11.1.8).

11.2. О связи между материей и кривизной

Именно тензоры, которые выводятся из тензора кривизны, связаны с тензором энергии-импульса. Комбинации, включающие в себя тензор кривизны и необходимые нам в дальнейшем, есть следующие

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\nu} R. \quad (11.2.1)$$

Компоненты тензора G^{μ}_{ν} имеют довольно простые выражения через суммы элементов $R^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$. Например, диагональные элементы есть

$$\begin{aligned} G^4_4 &= R^{12}_{12} + R^{13}_{13} + R^{23}_{23}, \\ G^1_1 &= R^{42}_{42} + R^{43}_{43} + R^{32}_{32}. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Другими словами, каждый из этих компонентов включает в себя сумму по таким элементам $R^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, в индексы которых не включен диагональный индекс. Для недиагональных элементов мы также получаем очень простые выражения. Например,

$$G^4_1 = R^{24}_{12} + R^{34}_{13}, \quad G^2_1 = R^{32}_{13} + R^{42}_{14}, \quad (11.2.3)$$

и по аналогии с этими компонентами мы можем легко записать соответствующие выражения для других компонентов.

Простота выражений рассмотренных сумм может навести нас на мысль об интерпретации кривизны через характеристики распределения вещества. Мы ранее обсудили кривизну двумерной поверхности через относительное изменение длины окружности или площади круга по отношению к их величинам в плоском пространстве через измеренную величину их радиуса:

$$\text{Длина окружности} = 2\pi r(1 - K \times \text{площадь}), \quad (11.2.4)$$

где K – коэффициент. Для трехмерного мира изменение длины окружностей зависит от плоскости, на которой рисуются круги, о которых идет речь, но можно определить среднюю кривизну посредством измерения отклонения от $4\pi r^2$ площади сферы радиуса r . Получаемый результат должен быть следующим

$$\text{площадь} = 4\pi r^2 \left(1 + \frac{1}{9} r^2 R \right), \quad (11.2.5)$$

где R – скаляр, получаемый двойной сверткой тензора кривизны.

Связь этой идеи с теорией гравитации может быть получена, если мы попытаемся придать концептуальное значение сумме $R^{12}_{12} + R^{23}_{23} + R^{13}_{13}$, что есть компонент тензора G^4_4 , который равен компоненту 44 тензора энергии-импульса.

Эта сумма есть в точности то, что мы должны называть средней кривизной трехмерного пространства, которое перпендикулярно оси времени. Таким образом, мы можем дать словесную интерпретацию теории гравитации следующим образом: рассмотрим небольшую трехмерную сферу с заданной площадью поверхности. Ее действительный радиус превышает радиус, вычисляемый в евклидовой геометрии ($\sqrt{\text{площадь}/4\pi}$), на величину, которая пропорциональна количеству вещества внутри этой сферы ($r - \sqrt{\text{площадь}/4\pi} = G/3c^2 m_{\text{внутри}}$) (один ферми на 4 миллиарда метрических тонн).

Эта интерпретация используется прямо для компонента 44, который есть плотность вещества (или энергии) для вещества внутри этой сферы. Другие компоненты тензора кривизны правильно выводятся, когда мы требуем, чтобы один и тот же результат получался в любой координатной системе независимо от ее скорости.

11.3. Метрика Шварцшильда, поле вне сферической звезды

Выражения для компонентов тензора G^μ_ν через функции ν и λ являются следующими

$$\begin{aligned} G^4_4 &= \frac{1}{r} \lambda' e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r (e^{-\lambda} - 1)), \\ G^1_1 &= -\frac{1}{r} \nu' e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1), \\ G^4_1 &= \frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-\nu}, \quad G^1_4 = -\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{-\lambda}, \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

$$G^2_2 = \frac{e^{-\lambda}}{2r} (\lambda' - \nu') - \frac{e^{-\lambda}}{4} (2\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu') + \frac{e^{-\nu}}{4} (2\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}).$$

Только выражение для компонента G^2_2 является громоздким, но так происходит, что его точное выражение редко бывает необходимо ис-

пользовать. Важное положение состоит в том, что дивергенция этого тензора должна быть равна нулю. Если мы имеем выражение для других компонентов, то требование обращения в нуль дивергенции часто помогает избежать использования точного выражения для G^2_2 .

В этом месте могут быть предложены следующие упражнения.

- 1) Доказать, что если нет материи внутри сферы радиуса b и распределение материи вне этой сферы является сферически симметричным, то пространство внутри сферы – плоское с метрикой $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.
- 2) Доказать, что если тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ известен всюду внутри сферы радиуса b , то каким бы он ни был вне этой сферы, это не повлияет на физику внутри сферы радиуса b . (Предполагается, что вне этой сферы тензор энергии-импульса характеризуется сферически симметричным распределением.)

Решение вне сферически симметричного распределения массы получается, если мы положим $T_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$ и решим получившиеся дифференциальные уравнения.

Мы начнем с того, что заметим, что G^4_4 зависит только от λ . Так как G^4_4 равен нулю, то мы получаем

$$r(e^{-\lambda} - 1) = \text{constant} = -2m. \quad (11.3.2)$$

Множитель 2 взят для удобства, так что постоянная величина m есть полная масса звезды, умноженная на ньютоновскую гравитационную постоянную. Если внутри сферы радиуса a , где находится вся масса, нет особенностей, то постоянная должна быть равна

$$\int_0^a dr r^2 G^4_4 = 2m. \quad (11.3.3)$$

Мы уверены, что зависимость от времени отсутствует, поскольку

$$G^1_4 = 0 = -\frac{1}{r} \dot{\lambda} e^{\lambda},$$

так что λ вообще не зависит от времени. Последняя задача состоит в том, чтобы получить выражение для ν . Мы делаем это, приравнявая G^1_1 и G^4_4 , так как обе эти величины равны нулю. Отсюда приходим к выводу, что

$$\nu' = -\lambda', \quad (11.3.4)$$

которое может происходить только в том случае, если функция ν имеет следующий вид:

$$\nu = -\lambda + f(t), \quad (11.3.5)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Тем не менее, так как функция ν появляется в коэффициенте при величине $(dt)^2$ в метрике следующим образом:

$$e^\nu (dt)^2 = e^{-\lambda} e^{f(t)} (dt)^2,$$

мы можем исключить множитель $\exp(f(t))$, изменяя масштаб временной координаты. Другие элементы метрического тензора не изменяются при такой замене, так как в них включена только функция $\lambda(r)$. Полученный результат известен как метрика Шварцшильда

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2m/r} - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2). \quad (11.3.6)$$

Интересно, что полученная метрика не зависит от времени, хотя мы никогда не говорили о том, что мы ищем статическое решение. Отсутствие зависимости от времени метрики Шварцшильда следует из предположения о сферической симметрии и того, что мы рассматриваем метрику в области с нулевой плотностью давления.

Для случая реальной звезды такой, как Солнце, точной сферической симметрии нет, поскольку имеется вращение и поскольку имеется утолщение (балдж) на экваторе. Тем не менее, эти отличия вызывают лишь небольшие отклонения от случая сферической симметрии. Если имеется световой поток от звезды, то будут появляться другие поправки, поскольку плотность энергии не будет равной нулю в пространстве вне звезды. Тем не менее, решение Шварцшильда достаточно точно описывает ситуацию с Солнцем, так что прецессия перигелия Меркурия задается правильно в пределах ошибок измерения.

11.4. Сингулярность Шварцшильда

Метрика, представленная в соотношении (11.3.6), имеет особенность при $r = 2m$. Для того, чтобы узнать, является ли эта особенность, причиняющей беспокойство и имеющей физический смысл, мы должны посмотреть, соответствует ли эта особенность физическому значению измеряемого радиуса от начала координат (что не есть то же самое, что наша координата r)

$$R = f(r). \quad (11.4.1)$$

Мы получаем ответ, рассматривая эту метрику с использованием другого подхода. Мы могли бы предположить, что правильное описание сферически симметричной метрики должно было бы иметь следующий вид:

$$(ds)^2 = H(R)(dt)^2 - F(R) ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2), \quad (11.4.2)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Метрика Шварцшильда приводится к такому виду путем подстановки

$$r = R + \frac{m^2}{4R} + m, \quad (11.4.3)$$

используя которую, получаем следующее выражение

$$(ds)^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2R}\right)^2} (dt)^2 - \left(1 + \frac{m}{2R}\right)^4 ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2). \quad (11.4.4)$$

Особенность в интервале собственного времени исчезла. Мы видим, что это было следствием особенности в определении радиальной координаты r . Тем не менее, метрика (11.4.4) выделяет частное значение радиуса $R = m/2$ как положение, в котором обращается в нуль коэффициент при $(dt)^2$. Нам еще следует исследовать, что происходит с физическими процессами в этой точке.

Эти результаты не нуждаются ни в каком непосредственном наблюдательном следствии. Когда мы подставляем величины, соответствующие массе Солнца, мы находим, что такой критический радиус существовал бы, если бы масса Солнца была сосредоточена внутри сферы, имеющей радиус, равный всего 1.5 км. Тем не менее, хотя очевидно эта ситуация не будет иметь место в Солнечной системе, разумно исследовать это критическое значение радиуса как свойство нашей теории.

Физическая интерпретация этого особого значения радиальной координаты связана со скоростью, на которой процессы, происходящие вблизи Солнца, проявлялись бы для удаленных наблюдателей. Ранее мы вычислили, как свет из областей с более низким гравитационным потенциалом сдвигается вниз по частоте, так что все объекты выглядят краснее. Радиус $R = m/2$ соответствует потенциалу, который настолько низок, что свет не был бы достаточно энергичен для того, чтобы покинуть звезду, так что никакой свет не достиг бы наблюдателя, который находится на большом расстоянии от звезды.

Мы можем увидеть, происходит ли что-либо катастрофическое с геометрией пространства в этой точке, в точности вычисляя компоненты тензора кривизны. Получено, что эти компоненты равны

$$\begin{aligned} R^{12}_{12} = R^{13}_{13} = -m/r^3, \quad R^{23}_{23} = 2m/r^3, \\ R^{42}_{42} = R^{43}_{43} = -m/r^3, \quad R^{41}_{41} = 2m/r^3. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

Мы видим, что пространство в этой критической точке – гладкое. Такая "особенность" не может быть ничем иным как результатом частного способа выбора координат. В нашем примере с жуком, ползающим по поверхности сферы, была особенность в описании сферы при пересечении экватора. Но конечно, в физическом смысле (предполагается, что) пространство является в точности таким же гладким в окрестности этой особенности, как всюду на действительной сфере.

Результат, который мы только что получили, что кривизна пропорциональна $1/r^3$, выглядит настолько просто, что мы можем попробовать поискать простой способ получения этого результата. У меня всегда было ощущение, что простой результат следовало бы получать простым способом. Следовательно, мы будем рассматривать геометрическую аргументацию, которая воспроизведет зависимость $1/r^3$ для рассматриваемого случая. Нам снова понадобится понятие средней кривизны в трехмерном пространстве, определяемого путем рассмотрения четырехмерного пространства для фиксированного момента времени. В этом подпространстве компоненты кривизны аналогичны компонентам давления. Для давлений (или угловых моментов) кривизна определяет нечто в плоскости, и мы можем пометить компоненты или парами индексов, которые определяют плоскость, или индексом оси, перпендикулярной плоскости. Таким образом, у нас есть следующее отождествление

$$R^{12}_{12} \rightarrow P^3_{3,}, \quad R^{13}_{13} \rightarrow P^2_{2,}, \quad (11.4.6)$$

и т.д. Далее мы покажем, что требование, что дивергенция таких "давлений" обращается в нуль, эквивалентно тождеству Бианки;

$$P^3_{3,3} + P^3_{1,1} + P^3_{2,2} = 0, \quad (11.4.7)$$

которое означает, что в этом пространстве (о котором идет речь), такое "давление" приводит к нулевой результирующей силе. Верхние индексы соответствуют плоскости, в которой рассматриваются компоненты кривизны.

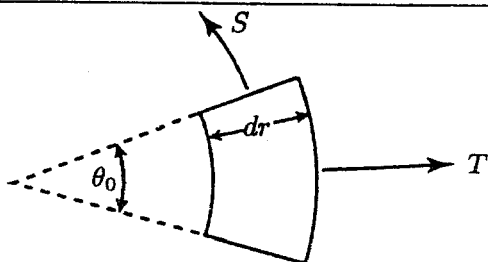


Рис. 11.1.

Когда мы имеем дело с давлениями, след тензора давления есть давление. В нашем случае след нашего давления есть средняя кривизна, которая в свою очередь есть плотность вещества. Мы получаем зависимость от $1/r^3$, требуя в полярных координатах, чтобы физическое равновесие было бы в месте, где давление равно нулю. Мы должны быть внимательны в определении площадей поперек направлений действия давлений, поскольку это должны быть физические площади, измеряемые вдоль геодезических. Мы определяем расстояние вдоль дуги при постоянном значении r как $\theta_0 r$, где θ_0 — небольшой угол. Измерение величины θ_0 хорошо определено, так как если мы обходим окружность один раз, то называем полный угол 2π . Если радиальное давление обозначим буквой T , а давление в перпендикулярном направлении как S (см. рис. 11.1), мы имеем для элемента объема $r^2 dr \theta(\sin(\theta) d\phi)$, для которого $\theta_0 = \sin(\theta) d\phi$, что эти силы оказываются неуравновешенными, если не выполнены следующие условия

$$d(T r^2 \theta_0^2) = 2S r \theta_0^2 dr.$$

Если для величины T допускается зависимость только от r , мы получаем следующее дифференциальное уравнение, связывающее величины T и R

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2S}{r} - \frac{2T}{r}, \quad (11.4.8)$$

которое выполняется в общем случае. Теперь мы можем рассмотреть ситуацию в пустом пространстве, в котором след тензора равен нулю

$$\text{След} = T + 2S = 0, \quad T = -2S. \quad (11.4.9)$$

Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3T}{r}, \quad (11.4.10)$$

отсюда получаем решение $T = 1/r^3$.

Двигаясь таким путем, мы видим, почему выполнение тождества Бианки означает, что компоненты кривизны всюду пропорциональны $1/r^3$. Связь функции $\exp(-\lambda)$ с величиной T может быть получена с использованием аналогичных простых рассуждений, которые приводят к заключению, что $\exp(-\lambda)$ отличается от 1 на множитель, обратно пропорциональный r^3 (11.4.5).

11.5. Размышления о понятии кротовой норы

Рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, показали нам, как сферически симметричное распределение массы в достаточно небольшом объеме приводит к возникновению компонентов тензора кривизны, пропорциональных всюду m/r^3 . Двумерный аналог такой ситуации мог бы быть использован жуком, ползающим по поверхности, имеющей форму "водоворота". Давайте представим кривую, вращающуюся вокруг оси z , причем эта кривая пересекает ось xy под прямыми углами, как показано на рис. 11.5. Такая поверхность может представлять наше пространство при заданном моменте времени ($dt = 0$) и при определенном значении азимутального угла, скажем $\phi = 0$. Если уравнение поверхности задается функцией $z(r)$, то длина дуги при постоянном значении θ задается следующим соотношением:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 (dr)^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right] (dr)^2. \quad (11.5.1)$$

Мы можем положить множитель перед величиной $(dr)^2$ равным соответствующей величине в метрике Шварцшильда

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1 - 2m/r} \quad (11.5.2)$$

и определить отсюда функцию $z(r)$. Можно легко получить ответ в этом случае

$$z^2(r) = 8m(r - 2m). \quad (11.5.3)$$

Другими словами, пространство – параболическое, "горловина" которого расположена на расстоянии $r = 2m$ от начала координат.

Существуют некоторые в высшей степени соблазнительные аспекты этого результата. В области $r > 2m$ пространство в точности такое, которое могло бы описываться как результат, вызываемый действием массы m , находящейся в начале координат (или более точно, масса распределена сферически симметрично в малой окрестности

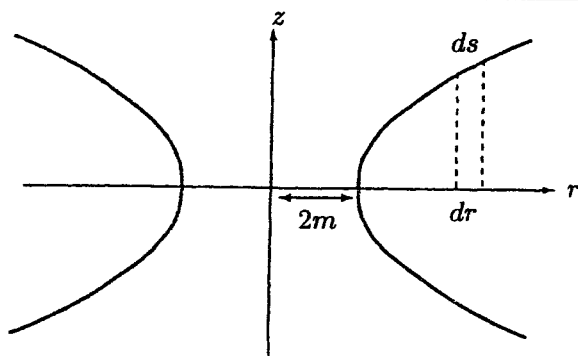


Рис. 11.2.

начала координат). Если мы приближаемся к началу координат, мы никогда не можем достичь расстояния $r < 2m$, но можем перейти к пространству, которое есть двойник тому пространству, в котором мы исходно находились. Это рассмотрение приводит к идее (разработанной, в частности, Уилером), что эффекты, которые мы называли "массовыми", могут быть ничем иным, как особенностью топологии пространства, в котором мы находимся, и что нигде нет "истинных" источников гравитации.

Любопытно было бы предположить, что все частицы с массой должны иметь такие горловины радиуса $2m$, ассоциированные с ними, и может оказаться так, что элементарные частицы есть ничто иное, как области пространства, через которые мы можем перейти в другое пространство, протискиваясь через дыру. Эти дыры названы Дж.А. Уилером "кротовыми норами". Если частицы заряжены, силовые линии электрического поля могут быть непрерывны вдоль этой поверхности, входя на одной стороне кротовой норы и выходя на другой стороне, так что существование двойного пространства может быть связано с существованием пар частица – античастица.

Пока оказалось невозможным получить согласованную качественную картину элементарных частиц, как такие кротовые норы. Вероятно, нет никакого возможного экспериментального наблюдения какого бы то ни было эффекта, обусловленного существованием кротовых нор. Мы не знаем никаких звезд, которые достигали бы такой плотности массы, необходимой для того, чтобы критический радиус был близок к действительному радиусу. Если бы существовала звезда с радиусом меньшим, чем их критическое значение, мы не могли бы увидеть эту звезду, поскольку свет не может покинуть эту поверхность, так что до сих пор считается, что такие объекты могут существовать. Все известные элементарные частицы имеют из-

вестную структуру, много большую, чем диаметр, ассоциированной с этой частицей кротовой норы. Например, для нейтрона мы имеем $r = 2m \approx 10^{-33}$ см, примерно в 10^{20} меньше, чем известный радиус нейтрона. Можно было бы взять частицу с массой 10^{-5} грамм, чтобы диаметр кротовой норы был бы той же величины, что и комптоновская длина волны $\hbar/mc$.

11.6. Проблемы теоретических исследований кротовых нор

Имеются различные вопросы, которые могут быть заданы, и эти вопросы образуют основу для теоретических исследований. Эти проблемы стоило бы исследовать, поскольку они имеют очень большое значение. Прежде всего, мы можем, используя наше нынешнее знание о поведении материи, спросить, возможно ли, чтобы достаточно большая масса оказывалась в достаточно малом объеме и коллапсировала в область, радиус которой меньше критического радиуса? Предположим, что в качестве начальной конфигурации имела пыль, распределенная практически однородно по достаточно большой области пространства. В этой конфигурации начался бы гравитационный коллапс, вещество стало бы нагреваться, начались бы сначала химические, а затем ядерные реакции. Когда масса оказывается в достаточно большой степени сжата, то имела бы точка, в которой электроны производили бы гигантское давление, препятствующее сжатию, так как они не могут быть сжаты вместе ближе, чем это допустимо принципом запрета (принципом Паули). Но для достаточно больших масс гравитационное притяжение является достаточно сильным для того, чтобы выдавить электроны и позволить нуклонам сохранять сжатие.

Детально процесс такого сжатия все еще не исследован теоретически. Мне кажется, что перед тем, как мы что-либо узнаем о наших кротовых норах, нам необходимо решить задачи классической теории гравитации, в которых анализируется поведение очень больших масс. Если коллапс некоторого объекта внутрь сферы с радиусом меньшим, чем критическое значение, возможен, то мы никогда не увидим, находясь вне этой сферы, этот объект, поскольку свет (предполагаем, что он излучает в оптическом диапазоне) становится все краснее и краснее, затем становится инфракрасным, затем излучаемым в радиодиапазоне, и наконец, обнаруживается только по непосредственной связи с ним (по его гравитационному полю). Существует физический смысл в вопросе о том, каким он будет, став частью коллапсирующей массы.

Давайте посмотрим, как мы могли бы взяться за описание физических процессов, происходящих в относительной системе отсчета, движущейся с падающей материей. Уравнение состояния включало

бы в себя давление p и плотность вещества ρ . В статическом случае мы бы имели

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^4_4 = \rho. \quad (11.6.1)$$

Как выглядит этот тензор для движущегося элемента материи? Используя величины

$$u = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \rho_0 = \rho + p, \quad (11.6.2)$$

мы находим, что

$$\begin{aligned} T^4_4 &= \rho_0 w^2 + p, & T^1_1 &= -\rho_0 u^2 - p, \\ T^2_2 &= T^3_3 = -p, & T^4_1 &= -\rho_0 u w. \end{aligned} \quad (11.6.3)$$

Для того, чтобы решить задачу о сжатии пылевого облака, мы можем действовать следующим образом. Сначала мы предполагаем, что ситуация описывается функциями λ и ν , зависящими от радиальной координаты и времени. Мы предполагаем, что состояние материи описывается плотностью вещества ρ и давлением p . Нам необходимо также уравнение состояния, связывающее p и ρ ;

$$p = f(\rho). \quad (11.6.4)$$

В качестве первой попытки мы можем посмотреть, что происходит, если давление p и плотность ρ связаны адиабатическим законом. Позднее мы можем посмотреть, что происходит, если мы предполагаем охлаждение, как следствие светового излучения, нагрев ядерными реакциями и т.д. В результате мы хотим получить функцию, описывающую радиальную скорость элемента вещества — $u(r, t)$.

Задача, в которую мы включили рассмотрение тепловых потоков и непрозрачности, и много другой всякой всячины, не должна быть слишком переусложненной, так что ответ должен быть получаем как решение системы уравнений с частными производными. Надежда в том, что эта система будет согласованной и соответствующие зависимости могут быть распутаны, так что уравнения могли бы быть решены в соответствии с некоторой процедурой. Было бы слишком хорошо надеяться на то, что решения могут быть получены в замкнутом виде. Тем не менее, если дифференциальные уравнения распутываются, мы могли бы надеяться, что компьютеры могли бы обеспечить нас численными решениями этой системы дифференциальных уравнений.

Лекция 12

12.1. Проблемы космологии

В предыдущей лекции мы кратко обрисовали одну из задач классической теории гравитации, состоящую в описании сферически симметричного распределения массы, что представляет собой идеализированную модель звезды. Вторая задача, над которой мы бьемся, используя классическую теорию гравитации, – это космология, или "наука о вселенной".¹ Все остальные задачи в теории гравитации мы будем исследовать, используя квантовую теорию; для того, чтобы получить классические следствия относительно макроскопических объектов, мы будем брать классические пределы для квантовых решений.

Очень трудно установить, что есть космология. Вообще говоря, она имеет дело со всем, что нам может быть известно о том, что происходит, если характерный масштаб является гигантским, то есть достаточно большим для того, чтобы даже галактики могли бы рассматриваться как объекты, инфинитезимальные по своему размеру. Космология может иметь дело также с вопросом о том, из чего образовалось видимое вещество, исходя из заданной начальной гипотезы, такой как "в самом начале все вещество состояло из водорода".

Один из аспектов космологии имеет дело с настоящей географией вещества; важный вопрос состоит в исследовании того, где находится вещество и что там происходит. Соответствующие наблюдения помогают нам ответить на вопрос о том, сколько галактик в направлении на восток или на запад и в каком направлении они движутся. Мы убеждены, что движение галактик определяется исключительно гравитацией, так что если однажды мы увидели или измерили распределение вещества и его скоростей, то простая физическая задача состоит в том, чтобы предсказать, что будет происходить потом. Космологические задачи другого рода возникают, когда мы переходим к таким гигантским масштабам, что подробная структура должна исчезнуть. Задача о том, что происходит затем, может быть в принципе решена путем задания каких бы то ни было любых начальных условий. Когда все детальное движение усредняется, мы можем задать вопрос, является ли вселенная статической или эволюционирующей, устойчивой или неустойчивой, конечной или бесконечной. Одно из интригующих предложений состоит в том, что вселенная имеет структуру, аналогичную той, которую имеет сферическая поверхность. Если мы движемся в любом направлении по такой поверхности, мы никогда не встретим границы или конца, несмотря на то, что поверхность ограничена и конечна. Могло бы быть так, что наше трехмерное пространство есть такой же объект, трех-

¹ Следуя лекциям Фейнмана, мы пишем слово "вселенная" с маленькой буквы (как это делали и ранее), подразумевая не единственную Вселенную, в которой мы живем, а относительно простую модель этого объекта (*Прим. перев.*)

мерная поверхность четырехмерной сферы. Такое устройство вселенной и распределение галактик, которое мы могли бы тогда увидеть, было бы чем-то аналогичным распределению пятен на шаре.

Оказывается, что одна теория гравитации (без привлечения других теорий) не дает ответ, который ограничивает возможные распределения по сфере, и не позволяет ей опровергнуть или доказать, что вселенная ограничена или бесконечна как гиперболический параболоид. Таким образом, задачи космологии всегда завязаны с некоторыми фундаментальными предположениями. Наиболее надежный способ проверить справедливость таких предположений состоит в том, чтобы вывести некоторые следствия и сравнить результаты с наблюдениями.

Наблюдения по исследованию географии вещества, которое расположено очень далеко от нас, являются весьма трудными и довольно неопределенными даже при использовании современных методов исследования. Следует также помнить, что какая-то область неба блокирована для исследований влиянием нашей собственной Галактики, которая содержит так много пыли, что не позволяет производить наблюдения в направлениях вдоль галактической плоскости. Несмотря на эти трудности и возможные ограничения, в настоящее время имеются свидетельства того, чтобы предположить, что вселенная повсюду однородна с галактиками, распределенными здесь и там, где-то больше, где-то меньше, но так, что любая заданная большая область очень сильно похожа на любую другую большую область. Для того, чтобы получить двумерный аналог, мы скажем, что это выглядит так, как если бы машина проехала по луже и разбрызгала грязные пятна случайным образом по стене и мы сидим на одном из этих грязных пятен и смотрим на все другие пятна.

Распределение скоростей оказывается весьма интересным, если мы сравниваем скорости галактик с их видимым расстоянием до нас. Давайте пропустим трудности, связанные с определением расстояний, несмотря на то, что эти трудности являются весьма существенными. Астрономы получили некоторые расстояния всеми правдами и неправдами, например, используя предположения о статистическом распределении яркости, и готовы ссылаться на них с некоторой неопределенностью, которая все время становится меньше. В то же время у нас есть измерения скоростей галактик по доплеровскому сдвигу частот спектра. Эти результаты оказываются согласованными в том смысле, что они показывают, что в оптических линиях наблюдаемого объекта имеется сдвиг в направлении меньших (более красных) частот спектральных линий, причем этот сдвиг пропорционален расстоянию, на которое удален от нас этот объект.

В лекции 1 мы обсудили простую модель для того, чтобы интерпретировать эти факты. Если все массы во вселенной есть осколки от взрыва, который произошел время T назад, и мы предполагаем, что гравитационные силы — слабы, тогда мы ожидаем, что осколок, который двигался со скоростью V относительно центра, сейчас должен находиться на расстоянии $R = VT$ от центра. Это соотношение выполняется вне зависимости

от того, какое может быть значение скорости V , так что все осколки мы ожидаем время $(R/V) = T$, это есть универсальная постоянная. Наблюдения согласуются с этой постоянной T и принимают значения в интервале $(10 - 13) \times 10^9$ лет. Неопределенности в оценке связаны не с измерениями скорости, а с измерениями расстояний. Наиболее далекие объекты, которые мы наблюдаем, удаляются от нас со скоростью $(v/c) = 0.48$.¹ Такое значение красного смещения есть одно из ключевых наблюдений, которое говорит нам кое-что о вселенной.

Другие наблюдения касаются распределения галактик. Хотя все видимые части неба оказываются замечательным образом похожими, галактики не распределены случайным образом, а сосредоточены в сгустках или скоплениях. Мы могли бы сказать, что галактики случайным образом расположены, если бы мы обнаружили, что для различных областей вселенной, имеющих заданные размеры, есть постоянная величина N с разбросом $\pm\sqrt{N}$. В среднем расстояния между галактиками равны их диаметрам, умноженным примерно на десять. Наша Галактика имеет диаметр примерно 10^5 световых лет, так что среднее межгалактическое расстояние равно примерно 10^6 световых лет. Число галактик, распределенных внутри кубов с ребрами большими, чем 10^6 световых лет, не равно $N \pm \sqrt{N}$ (для любого расположения кубов с заданным размером). Найдено, что галактики сосредоточены преимущественно в скоплениях примерно по 50 галактик в скоплении, это есть типичное число галактик в скоплениях. Кроме того, найдены скопления скоплений. Тем не менее, говорят, что не обнаружены скопления скоплений скоплений галактик — это означает, что если мы идем к масштабам длины, которые велики по сравнению с масштабом 10^8 световых лет, вселенная кажется имеющей почти "случайное" распределение галактик.

Так как предполагается, что скопление галактик и скопление скоплений обусловлено гравитационным взаимодействием между ними, предполагается, что отсутствие скоплений с радиусом большим, чем несколько единиц, умноженных на 10^8 световых лет, есть свидетельство "обрезания" гравитационной силы на масштабе, порядка этой величины. Мы не будем принимать такую точку зрения потому, что мы не хотим модифицировать нашу теорию; если только не обнаружатся эффекты, в действительности опровергающие эту теорию; отсутствие скоплений скоплений скоплений не кажутся мне тем, что было бы противоречием нашей теории. Мы возьмем эту характерную величину в качестве меры масштаба длины, по которому мы должны усреднить плотность вещества, если мы хотим рассматривать вселенную, как являющуюся в некотором смысле однородной.

Имеются ли какие-либо вариации в однородном распределении плотности в областях, находящихся на различном расстоянии от нас? С помощью

¹ В настоящее время известны галактики, движущиеся с существенно более высокими скоростями относительно нас и имеющие значениями красного смещения $z > 5.5$, и тогда $(v/c) = (z^2 + 2z)/(z^2 + 2z + 2) > 0.95$. Эти "рекордные" данные постоянно обновляются. (Прим. перев.)

наблюдений делается попытка подсчитать количество галактик в оболочках, имеющих внутренний радиус R и внешний радиус $R + \Delta R$. Полученные результаты наводят на мысль о том, что здесь могут быть небольшие вариации плотности в зависимости от расстояния, что делает вселенную более плотной в отдаленных областях. Тем не менее, неопределенности подобного распределения плотности велики сравнительно с относительными вариациями от постоянного значения плотности; теория вселенной, предсказывающая или предполагающая постоянное распределение плотности, не оказалась бы в рассогласовании с имеющимися в настоящее время оценками.

12.2. Предположения, приводящие к космологическим моделям

Так как наблюдения не являются достаточно точными для того, чтобы ясно навести на мысль об определенных характеристиках, мы должны полагаться на нашу изобретательность и сделать определенные гипотезы о структуре вселенной. Основная гипотеза, которую делает почти каждый космолог, состоит в том, что вселенная (на основном космологическом масштабе большем, чем 10^8 световых лет) выглядит одинаково вне зависимости от того, где этот космолог находится во вселенной, причем не обязательно в один и тот же момент времени. Это означает, что в любой точке во вселенной будет время или было время, в которое вселенная будет выглядеть или выглядела так, как она выглядит для нас сейчас. Это означает, что при условии, если мы сдвигаем временные масштабы для того, чтобы попасть соответствующим образом в заданные моменты времени, эволюция вселенной следует одной и той же траектории вне зависимости от того, с какого места мы наблюдаем за ней.

Предположение, которое мы только что упомянули, подразумевает очень сильную однородность пространства во вселенной. Это абсолютно произвольная гипотеза, насколько я ее понимаю, и конечно она вовсе не представляет собой предмет какой бы то ни было наблюдательной проверки. Так как мы были и будем продолжать быть ограниченными в очень небольшой области в окрестности нашей Галактики, зависимость вселенной от времени следует "космологической" шкале времени, которая в миллиард раз более продолжительная, чем масштаб нашей человеческой жизни. Я подозреваю, что предположение об однородности вселенной отражает предрассудок, родившийся как следствие ниспровержения геоцентрических идей. Когда люди допустили, что Земля не есть центр вселенной, они склонились на время к идее гелиоцентрической вселенной, только чтобы обнаружить, что Солнце является обычной звездой, очень сильно похожей на любую другую звезду, и находится Солнце на самом обычном (не центральном!) месте внутри нашей Галактики, которая не является какой-либо необычной галактикой, а является похожей на многие и многие другие галактики. Таким образом, предполагается, что наше положение во вселенной должно быть в точности похоже на любое другое место во вселенной, как некоторое продолжение последовательности рассуждений,

которую я привел. Было бы довольно затруднительно после обнаружения того, что мы живем на обычной планете, движущейся вокруг обычной звезды, находящейся в обычной галактике, найти, что наше положение во вселенной является необычным или является центром, или местом с наименьшей плотностью, или местом с наибольшей плотностью и т.д. и т.п. Для того, чтобы избавиться от этого затруднения, мы склоняемся к гипотезе об однородности.

Однако мы не должны принимать такую гипотезу без того, чтобы узнать, для чего берется такая гипотеза. Моя точка зрения будет иллюстрироваться с помощью аналогии. Если мы прыгаем с парашютом с самолета, пролетающего в случайном месте над землей, и приземляемся в березовой роще, об этом месте мы можем утверждать, что мы приземлились в случайном месте, и из того, что нет ничего уникального в этом месте, мы приходим к выводу о том, что земля *всюду* покрыта березовыми деревьями. Это заключение было бы ложным вне зависимости от идеальной случайности места, где мы могли бы приземлиться. Однако возможно, что мы имеем дело с такой же ситуацией при построении нашего фундаментального предположения о космологии.

Мы упомянем только три космологических теории. Имеется космологическая теория по Милну [Miln 34], в которой полностью пренебрегается гравитационными силами; это достаточно хорошая теория в том случае, если средняя плотность вселенной достаточно мала. Существует теория, первоначально предложенная Эйнштейном и затем рассматриваемая другими авторами, которая возникла из предположения, что вселенная является скорее статической, чем динамической. Это предположение предшествовало наблюдениям Хабблом красного смещения, пропорционального расстоянию. Статическая модель вселенной не могла бы быть построена без добавления члена к тензору давления в уравнениях Эйнштейна, как показано в следующих уравнениях:

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\nu} R = K T^{\mu}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}_{\nu}. \quad (12.2.1)$$

Мультипликативная константа Λ известна как "космологическая постоянная". Мы обсуждали возможное появление таких членов, оно возникает из той части действия, которая есть

$$\Lambda \int d\tau \sqrt{-g}. \quad (12.2.2)$$

Если бы Эйнштейн решил, что такой член не может содержаться в его уравнениях, то он предсказал бы возможность существования эволюционирующей вселенной, которая наблюдалась Хабблом. После открытия Хаббла Эйнштейн более не интересовался такой космологической теорией, которая была дискредитирована, несмотря на то, многие авторы продолжают работать с подобными теориями, рассматривая различные значения космологической постоянной. Мы будем рассматривать только теории, для которых $\Lambda = 0$.

Весьма оригинальная космологическая теория была создана Хойлом [Hoyl 48], который предположил не только то, что вселенная эволюционирует всюду по сходной траектории, но что на самом деле вселенная находится в стационарном состоянии, она выглядит всюду и во все моменты времени одинаково. Для того, чтобы построить такую вселенную, в которой звезды и планеты постоянно создаются из космической пыли, должно быть постоянное создание вещества всюду во вселенной, так что хотя плотные галактики удаляются друг от друга, средняя плотность остается постоянной. Никакого механизма для подобного создания вещества не определено, эта теория пренебрегает тем, чтобы рассматривать детали сохранения энергии; например, не описан механизм, с помощью которого можно было бы понять, какое состояние или какая скорость вещества характеризует вещество в момент его создания. Хотя в обычных обстоятельствах физик должен был бы восставать против теории, которая столь бесцеремонно игнорирует законы сохранения, такие как сохранение вещества и энергии, необходимо помнить, что мы имеем дело не с обычной, а с космологической проблемой. Другие космологические теории замечают проблему создания вещества под ковер, просто предполагая момент, в который вещество уже существует, и говоря только о том, что происходит потом. Для подобного создания вещества не приводится никакого механизма, так что стационарная теория едва ли может быть обвинена в неразумности на этом основании. Следовало бы также держать в голове, что вселенная настолько огромная, что скорость создания вещества могла бы быть экстремально малой, много меньше той величины, которая могла бы быть непосредственно наблюдаема. Если только один атом водорода в одной кубической миле пространства будет создаваться каждый год, то это могло бы поддерживать вселенную в стационарном состоянии.

Мы будем сначала обсуждать теорию с $\Lambda = 0$, в которой не предполагается, что вселенная выглядит одинаковой во все моменты времени, но в которой предполагается, что вселенная развивается идентичным образом во всех местах. Если мы выбираем временные масштабы, соответствующие различному выбору начала координат так, что соответствующие этапы эволюции обозначаются одним и тем значением координаты t , то метрика Робертсона — Уолкера, которая определяет геометрию, является следующей

$$(ds)^2 = (dt)^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2} [(dr)^2 + r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2)]. \quad (12.2.3)$$

Давайте установим некоторые простые свойства этой метрики. Если мы находимся в одном и том же месте, то $ds = dt$, вне зависимости от того, где мы находимся. Если мы смотрим на вселенную в заданный момент времени $dt = 0$, то трехмерное пространство в заданный момент времени является сферически симметричным, но может иметь некоторую кривизну. Идея однообразия пространства требует эту сферическую симметрию, так как сферическая поверхность есть единственный вид поверхности, которая

выглядит одинаково вне зависимости от того, где мы на ней находимся. Таким образом, мы записываем метрику, которая соответствует трехмерной поверхности постоянной кривизны, которая является изотропной при наблюдении ее из любой точки. При $k > 0$ метрика соответствует трехмерной сфере, при $k = 0$ мы имеем плоское пространство, при $k < 0$ мы имеем отрицательную кривизну и неограниченную вселенную.

Давайте посмотрим, как мы могли бы описать трехмерную поверхность, которая является сферической. Мы используем математику, аналогичную двумерной сферической поверхности, которая описывается двумя углами θ и ϕ ; поверхность находится на постоянном расстоянии b от начала координат и углы определены, так что

$$\begin{aligned} z &= b \cos \theta, & x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x &= b \sin \theta \cos \phi, & y &= b \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

В четырехмерном пространстве все, что мы делаем, состоит во введении третьего угла ξ , такого, что

$$\begin{aligned} w &= a \cos \xi, & z &= a \sin \xi \cos \theta, \\ x &= a \sin \xi \sin \theta \cos \phi, & y &= a \sin \xi \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

При использовании такого угла ξ метрика на трехмерной поверхности $dt = 0$ пропорциональна квадрату радиуса и следующей величине

$$(d\xi)^2 + \sin^2 \xi ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2). \quad (12.2.6)$$

Для того, чтобы сделать переход к метрике (12.2.3) через радиальную координату, мы попросту вводим преобразование такое, что $(r^2 \neq x^2 + y^2 + z^2)$,

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi}{\sin \xi}, \quad (12.2.7)$$

которое приводит к выражению для $\cos \xi$

$$\cos \xi = \left[\frac{1 - kr^2/4}{1 + kr^2/4} \right]. \quad (12.2.8)$$

Когда мы сравниваем выражения, мы находим, что метрика (12.2.3) правильно представляет трехмерную поверхность, которая на самом деле является сферической. $R(t)$ является преобразующим множителем между координатными дифференциалами и длинами дуги, который меняется со временем; так что метрика в общем случае не является статической.

12.3. Интерпретация космологической метрики

Первый вопрос, который мы должны были бы исследовать, состоит в том, какова динамика объектов в такой метрике. Будут ли покоящиеся объекты оставаться в покое? Для таких объектов только u^t не равно нулю и уравнение движения сводится к следующему соотношению:

$$du^\alpha$$

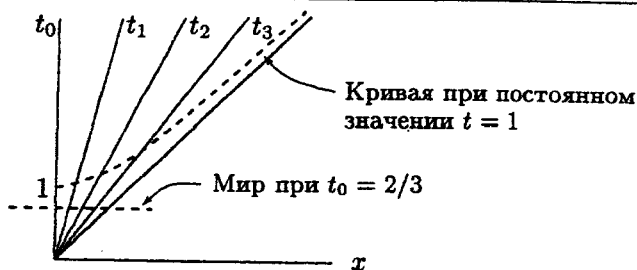


Рис. 12.1.

Так как $\Gamma_{tt}^{\alpha} = 0$, такая система координат может быть реализована набором массивных частиц.

Используя выражение метрики (12.2.3), мы должны были бы иметь возможность сделать некоторые предсказания относительно наблюдаемых величин на языке функции $R(t)$. Может быть тогда возможно будет построить модель вселенной, в которой точно определяется функция $R(t)$. Например, стационарная вселенная Хойла соответствует такой функции $R(t)$, которая экспоненциально зависит от времени. Вселенная Милна соответствует такой функции $R(t)$, которая попросту пропорциональна времени t .

Давайте кратко рассмотрим некоторые свойства вселенной Милна для того, чтобы только понять, что вселенная выглядит одинаково в соответствующие моменты времени с точки зрения наблюдателя, расположенного в различных местах пространства. Мы говорили, что такая модель соответствует нулевой гравитации. Например, возможно переопределить координаты таким образом, чтобы получившаяся в результате метрика была плоской. Тем не менее, когда мы переписали метрику, оказалось, что наша трехмерная поверхность имеет кривизну. Мы можем понять источник этой кривизны, рассматривая множество часов с идентичными маятниками, которые расходятся с разными скоростями от заданного начала координат в заданный момент времени $t = 0$. Если мы рассмотрим диаграмму Минковского, мировые линии различных часов представляют временные оси различных координатных систем. Таким образом, поверхности равных моментов времени искривляются (см. рис. 12.1). Трехмерная поверхность "при заданном времени" соответствует подобной гиперболической поверхности и, следовательно, имеет некоторую кривизну. Тем не менее, четырехмерное пространство точно такое же плоское, как и было ранее.

Более близкая операционистская точка зрения на такую кривизну касается измерения радиуса и длины окружности. Если мы измеряем их в подпространстве "сейчас", то найдем, что длина окружности равна $2\pi R$. Измерения при постоянном значении t соответствуют измерениям, проведенным так, как если бы локальная галактика, убегающая наружу со скоростью, пропорциональной расстоянию, находилась в покое. Таким образом, радиус измеряется стержнями, движущимися вдоль своей длины. Длина окружности измеряется стержнями, движущимися перпендикулярно своей длине, откуда это наблюдение эффективной кривизны.

Теперь, когда мы прояснили значение трехмерных поверхностей при постоянном значении t , давайте посмотрим, что мы можем вывести, что

детектируемое изменение в видимой частоте сигнала, который испускается где-нибудь в другом месте, причем это изменение выразим через функцию $R(t)$. Мы должны спросить, какой интервал соответствует времени приема, если мы точно определили время испускания сигнала и координату r . Траектория светового сигнала задается следующим соотношением $(ds)^2 = 0$. Если свет движется вдоль радиуса, мы имеем

$$(ds)^2 = 0 = (dt)^2 - \frac{R^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2} (dr)^2,$$

из которого следует, что

$$\frac{dt}{R(t)} = \frac{dr}{(1 + kr^2/4)}. \quad (12.3.1)$$

Если мы обсуждаем часы при постоянном значении координаты r , тогда dt есть интервал собственного времени; число тиканий часов есть попросту $\int dt$. Для того, чтобы сравнить частоты, мы должны вычислить отношение продолжительности времени испускания сигнала ко времени его приема. Если мы посылаем сигнал, причем начинаем посылать сигнал в момент времени t и заканчиваем в момент времени $t + \Delta t$, то начало приема сигнала соответствует времени t_0 и его прием заканчивается в момент времени $t_0 + \Delta t_0$. Интегрируя вдоль световой траектории, определяемой соотношением (12.3.1), от начальной точки испускания до начальной точки приема, получаем

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^r \frac{dr}{1 + kr^2/4} = \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt'}{R(t')}, \quad (12.3.2)$$

поскольку координата r есть постоянная величина для заданной галактики. Какова бы ни была длина интервала $t_0 - t$, если обе величины Δt и Δt_0 малы сравнительно с изменениями функции $R(t)$, то из уравнения (12.3.2) следует, что

$$\frac{\Delta t}{R(t)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)}. \quad (12.3.3)$$

Таким образом, сравнение частот определяется функцией $R(t)$; полученный результат определяется соотношением:

$$w_{\text{приема}} = \frac{R(t)}{R(t_0)} \cdot w, \quad w = \text{естественная частота}. \quad (12.3.4)$$

Очевидно, что функция $R(t)$ – масштабный фактор для вселенной. Если $R(t)$ есть монотонно возрастающая зависимость от t , что соответствует расширяющейся вселенной, то все принимаемые частоты имеют красное смещение. Величина этого смещения будет приблизительно пропорциональна $(t_0 - t)$, если этот интервал мал по сравнению с интервалом, на котором происходит изменение функции $R(t)$.

Перед тем, как мы сможем связать это красное смещение с хаббловским красным смещением, мы должны придумать схему для задания расстояний, соответствующих различным значениям координаты r .

12.4. Измерения космологических расстояний

Давайте представим себе, что мы пытаемся определить расстояние до удаленной галактики, рассматривая ее видимый угловой диаметр. Предположим, что галактика имеет диаметр L ; тогда, если мы наблюдаем угловую протяженность $\Delta\theta$, расстояние до галактики D_0 должно задаваться следующим соотношением

$$\Delta\theta \cdot D_0 = L, \quad \text{т.е.,} \quad D_0 = \frac{L}{\Delta\theta}. \quad (12.4.1)$$

Предполагается, что L есть длина в равные моменты времени, т.е. $dt = 0$. Мы предполагаем, что величина ϕ остается постоянной и что $\Delta\theta$ может рассматриваться как инфинитезимальная величина. Интервал является времени-подобным:

$$-(ds)^2 = \frac{R^2(t_0)}{(1 + kr^2/4)^2} r^2 (\Delta\theta)^2 = L^2, \quad (12.4.2)$$

так что

$$D_0 = \frac{R(t_0)r}{(1 + kr^2/4)}. \quad (12.4.3)$$

При диапазоне значений расстояний много меньших, чем $1/\sqrt{k}$, величина r будет соответствовать расстоянию, измеряемому таким способом с масштабным множителем $R(t)$. Мы видим также, что при использовании расстояний, измеряемых таким способом, красное смещение удаленных галактик должно быть пропорционально их расстоянию от нас (закон Хаббла) как результат, получаемый в первом порядке.

Другой достаточно общий метод оценивания расстояний основан на использовании видимой яркости галактик. Предполагается, что галактики имеют постоянную среднюю "стандартную" яркость, что соответствует испусканию заданного числа фотонов заданной энергии в каждую секунду. Этот метод аналогичен оцениванию расстояний по методу стандартной свечи, при котором говорится, что $D^2 = (\text{Стандартная интенсивность} / \text{Видимая интенсивность})$, поскольку интенсивность удовлетворяет закону обратных квадратов. Для нашей нынешней задачи видимый телесный угол есть (L^2/D^2) , где L — есть диаметр галактики; мы должны включить также множитель, учитывающий замедление времени, поскольку N фотонов, испущенных в нашем направлении в интервале времени Δt , должны будут наблюдаться в интервале Δt_0 , связанном с интервалом Δt соотношением (12.3.3). Если мы сравниваем интенсивности, мы должны включить множитель, который учитывал бы уменьшение энергии фотонов вследствие наличия красного смещения, выражение для которого приведено в соотношении (12.3.4). Конечный результат, описывающий соотношение между расстоянием D и r , есть

$$D = \frac{R^2(t_0)r}{R(t)(1 + kr^2/4)}. \quad (12.4.4)$$

Соотношение (12.4.4) отличается от соотношения (12.4.3) на множитель $R(t_0)/R(t)$, так что числа D_0 и D не совпадают. Тем не менее, возможно связать все это вместе и получить выражение для $R(t)$ в идеальном случае; эти рассуждения являются стимулом для наблюдений, которые делаются с помощью 200-дюймового телескопа на горе Паломар; большую часть времени этого телескопа астрономы используют, наблюдая галактики, измеряя их диаметры, интенсивности, красные смещения в целях поиска наилучших обоснований характера функции $R(t)$ в том случае, если рассматриваемая в настоящее время модель является правильным описанием эволюции вселенной.

Если мы задаем вопрос о числе галактик, которым следовало бы находиться в оболочке толщины dr на расстоянии r от нас, мы получим, конечно, различные выражения в зависимости от того, означает ли r расстояние D_0 -типа или расстояние D -типа. Несмотря на это, ответ оказывается следующим

$$\text{Число галактик между } (r) \text{ и } (r + dr) = \frac{dr r^2 R^3(t)}{(1 + kr^2/4)^3} \cdot K \quad (12.4.5)$$

в предположении, что галактики имеют одну и ту же среднюю плотность массы при всех значениях радиуса (K – константа).

Должно быть подчеркнуто, что все такие методы исследования структуры вселенной имеют встроенные в теорию предположения, которые могут быть в большой степени неверными. При определении расстояния из видимой яркости галактик предполагается, что нет существенного изменения яркости галактики с возрастом. Некоторые астрономы пытались вычислить сложные поправки для предполагаемой эволюции звезд, но по правде говоря, мы не знаем точно, как интенсивности эволюционируют в старой галактике. Должны ли мы предпочитать измерять диаметры галактик? Нет, поскольку не только трудно измерять диаметры для удаленных галактик, но мы также не знаем увеличиваются или уменьшаются диаметры галактик с возрастом. Дальнейшие трудности связаны с тем, что когда галактики становятся очень тусклыми, то почти невозможно быть уверенным в том, как много мы их теряем вследствие их тусклости. Эти трудности не затрагивают полученных результатов при условии, что мы предполагаем, что модель Хойла правильно описывает эволюцию вселенной; эта модель является единственной полностью детализированной космологической моделью, в рамках этой модели безоговорочно определяется, что галактики в среднем должны быть одинаковыми, так как вселенная находится в стационарном состоянии.

12.5. О характеристиках закрытой или открытой вселенной

Детальная динамика моделей вселенной (называемых моделями Фридмана, когда $\Lambda = 0$, и моделями Леметра в противном случае) может быть изучена на языке компонентов тензора энергии-импульса. Если мы вычисляем эти компоненты из тензора кривизны, выведенного из выражения для метрики (12.2.3), мы получаем для компонента с индексами 44

$$T^4_4 = 3 \left(\frac{k + \dot{R}^2}{R^2} \right) = 8\pi G\rho + \Lambda, \quad (12.5.1)$$

где ρ – средняя плотность вещества. Для другого диагонального элемента имеется следующее выражение

$$T^1_1 = \frac{2\ddot{R}^2}{R} + \frac{k + \dot{R}^2}{R^2} = -8\pi Gp + \Lambda. \quad (12.5.2)$$

В этом соотношении величина p есть усредненное давление. Оно включает в себя все давления, обычное газовое давление, давление излучения и любое другое давление, обусловленное каким бы то ни было другим процессом. Для нашего обсуждения мы будем предполагать, что газовое давление настолько много больше любого другого давления, что всеми другими видами давления можно будет пренебречь. Но это давление является очень маленьким, поскольку оно по порядку величины $(\rho v^2)/2$, где (v/c) – средняя скорость газа, которая является совершенно малой величиной и мы будем предполагать, что оно не играет роли при определении динамики вселенной. Мы получаем описание динамики прямо из плотности ρ , требуя, чтобы тензор T удовлетворял условию равенства нулю дивергенции. В результате получаем следующее соотношение между p и ρ

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3pR^2 \frac{dR}{dt}. \quad (12.5.3)$$

Это уравнение и есть как раз $T^\mu{}_{4;\mu} = 0$. Другая независимая ковариантная дивергенция $T^\mu{}_{1;\mu} = 0$ дает $p_{,r} = 0$, то есть то, что и ожидалось, так как вселенная – изотропна. Этот результат имеет очень простую структуру и он имеет очевидное классическое значение, если мы называем R радиусом вселенной. Величина ρR^3 пропорциональна полной массе, которая есть содержание энергии в однородном шаре с радиусом R . Член, стоящий в правой части уравнения (12.5.3), определяет скорость совершения работы, так как он представляет собой давление, умноженное на объем. Это уравнение имеет точно такую же структуру, если вместо целой вселенной мы возьмем меньшую область, радиус которой равен величине a , пропорциональной R . В этом случае

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3pa^2 \frac{da}{dt}. \quad (12.5.4)$$

Если $p = 0$, то количество вещества внутри сферы не меняется;

$$\frac{4\pi}{3} \rho R^3 = M \quad (12.5.5)$$

есть постоянная величина. Мы можем решить эти уравнения для того, чтобы получить

$$(k + \dot{R}^2) = 2G \frac{M}{R}. \quad (12.5.6)$$

Это дифференциальное уравнение может быть решено для того, чтобы найти функцию $R(t)$. Поведение возможных решений легко понять, оставаясь

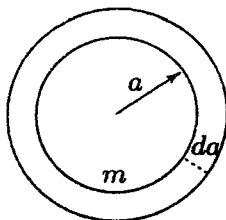


Рис. 12.2.

все еще в пределах ньютоновской механики. То, что может происходить, могло бы быть легко рассмотрено на языке того, что может происходить с оболочкой толщины da вне сферически симметричного распределения m (см. рис. 12.2). Может быть рассмотрено, каким образом происходит свободное падение в поле массы, находящейся внутри, которая есть постоянная величина, и это движение описывается уравнением свободного падения тела. Закон сохранения энергии говорил бы нам в ньютоновской механике, что

$$-\frac{Gm}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} = \text{постоянная} = \text{Энергия/Масса}. \quad (12.5.7)$$

В зависимости от величины этой энергии, возможны три типа решений.

- 1) Если энергия положительна, то оболочка продолжает расширение вечно и сохраняет расширение бесконечное время.
- 2) Если энергия равна нулю, то оболочка расширяется асимптотически к статической вселенной бесконечного разжижения.
- 3) Если энергия отрицательна, то движение ограничено и циклично.

Эти решения ньютоновской задачи соответствуют возможным типам вселенной; 1) соответствует открытой вселенной с отрицательной кривизной; 3) соответствует замкнутой вселенной с положительной кривизной.

Почему эти ньютоновские решения оказались достаточно хорошими для того, чтобы охарактеризовать ответы на наши вопросы? Это происходит потому, что в сферически симметричной задаче движение конечной оболочки вещества определяется только массой, находящейся внутри. Масса, находящаяся вне, образует внутри пространство, эквивалентное плоскому. Таким образом, рассматривая движение конечной оболочки, мы получаем описание поведения всей вселенной. Здесь мы снова видим мощь предположения о космологической однородности.

Лекция 13

13.1. О роли плотности вселенной в космологии

Теперь мы увидели, как постулат об однородности приводит к различным возможностям вселенной, которая может быть как открытой, так и закрытой. Мы видим, что один из наиболее интересных космологических вопросов состоит в том, является ли наша вселенная неограниченной и расширяющейся вечно или она ограничена. Мы рассчитываем ответить на этот вопрос на основе наблюдений. Какие же есть факторы, относящиеся к этой проблеме? Центральный вопрос есть следующий: являются ли скорости галактик достаточно большими, чтобы они неограниченно разбегались, или эти скорости настолько малы, что движение финитное? Давайте сделаем некоторые оценки на основе ньютоновской механики, которые достаточно близки к релятивистским оценкам для нашей задачи. Если радиальная скорость оболочки с радиусом r пропорциональна величине r , достаточно ли кинетической энергии для неограниченного разбегания? Из-за сферической симметрии мы, при выписывании закона сохранения энергии, рассматриваем только массу, находящуюся внутри оболочки. Если мы предполагаем однородную плотность ρ во вселенной, то критическое значение для чисто финитной и чисто инфинитной вселенной есть условие, что

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{GM}{r}, \quad \text{где} \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho r^3. \quad (13.1.1)$$

Мы можем произвести это вычисление для какого бы то ни было любого значения r . Теперь мы положим $v = r/T$, где T есть хаббловское время, одна из тех величин, которые мы должны определить. Критическое значение может быть тогда выражено через значение плотности

$$\rho = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{GT^2}. \quad (13.1.2)$$

Если мы принимаем нынешнее значение хаббловского времени $T = 13 \times 10^9$ лет, мы вычисляем критическую среднюю плотность, которая оказывается равной $\rho = 1 \times 10^{-29} \text{ г/см}^3$. Мы не будем знать, является ли вселенная финитной или инфинитной до тех пор, пока мы не измерим среднюю плотность с достаточной точностью для того, чтобы иметь обоснованное сравнение с критическим значением.

К сожалению, измерения плотности вселенной являются предельно трудными и предельно неопределенными, произвести их намного труднее, чем измерения постоянной Хаббла, которая сама может иметь существенную неопределенность. Как уже упоминалось, всего-навсего несколько лет назад возраст вселенной T считался меньшим примерно в 2.4 раза. Для получения исправленной оценки возраста вселенной было затрачено существенно больше усилий, чем для получения первоначальной оценки, так что ис-

правленная оценка может быть более надежной, тем не менее, не являясь невообразимым, что нынешнее значение может быть вновь изменено на аналогичный множитель. Как обычно, конечный результат является очень чувствительным к величине, которая измеряется для многих сложных случаев измерения, а именно, тех галактик, которые находятся на пределе чувствительности наших телескопов. Соответствующие расстояния оцениваются на основе анализа яркости скоплений вместо того, чтобы делать это на основе анализа яркости галактик, и нет гарантии, что такие наблюдаемые скопления являются типичными в рассматриваемой нами области и что они по своей интенсивности сопоставимы со скоплениями, близкими к нам. Таким образом, конечные оценки T оказываются случайными в зависимости от правильности длинной цепочки предположений, каждое из которых вносит существенный вклад в возможную ошибку в конечном результате. Какова же ситуация, связанная с оценками средней плотности? Если мы считаем галактики и предполагаем, что они более и менее такие же, как ближайшие к нам галактики, полная плотность такого рода видимого вещества около 10^{-31} г/см³. Эта величина представляет некоторого рода нижний предел на плотность вещества, так как видимое вещество должно быть некоторой частью полной плотности вещества. Плотность вещества в межгалактических областях оценивается по измерениям интенсивности различных узких спектральных линий, как функция расстояния до источника. Предположительно, поглощение излучения в таких линиях есть мера количества атомов заданного типа в области между излучателем и наблюдателем. Имеется огромное число предположений и поправок, которые должны быть сделаны для того, чтобы привести полученные данные к численной оценке, так что также не ожидается, что конечный результат будет определенным, за исключением возможно оценки по порядку величины. Измерения по количеству натрия явились достаточно успешными, но ключевой величиной при таких измерениях является количество водорода, которое предположительно получается из наблюдений поглощения в линии водорода 21 см. Радиоастрономы работают над такими измерениями; их результаты, полученные к настоящему времени, указывают на то, что видимое вещество составляет на самом деле лишь очень небольшую часть полной плотности вещества. Критическая величина плотности $\rho = 1 \times 10^{-29}$ г/см³ всегда находится в пределах диапазона любой оценки, тем не менее, эти данные являются достаточно грязными, так что если в теории потребуются плотность настолько высокая как $\rho = 1 \times 10^{-27}$ г/см³, то наблюдения не могли бы исключить такую величину, теория не могла бы быть опровергнута на основе того, что плотность, предсказываемая такой теорией, оказывается слишком высокой.

В этом месте я хотел бы сделать замечание о нынешнем состоянии наблюдений, относящихся к космологии. Когда физик читает статью типичного астронома, то он обнаруживает необычный стиль при работе с неопределенностями и ошибками. Хотя работы, в которых приводятся вычисления и измерения, очень часто бывают аккуратны при перечислении и

обсуждении источников ошибки и даже при оценивании степени согласия, с которой мы могли бы сделать определенные ключевые предположения, когда возникает время для оценивания такой величины, как хаббловский возраст вселенной, то физик не находит оценку полной неопределенности, например, в виде обычной оценки $\pm \Delta T$, используемой физиками. Такие авторы, очевидно, не имеют намерения в точности установить вероятность, соответствующую тому, что их величина оказывается правильной, хотя они очень тщательно приводят многие источники ошибок, и хотя совершенно ясно, что эта ошибка составляет существенную часть этой величины. Беда заключается в том, что часто другие космологи или астрофизики берут это число без относительно возможной ошибки, рассматривая его как астрономическое наблюдение, являющееся настолько точным, как и период планеты. Например, подобная беда имеет место при работе с космологическими моделями, где все модели предсказывают красное смещение с практически линейной зависимостью от расстояния. Только ускорение далеких галактик есть та величина, с помощью которой различия между космологическими моделями становятся существенными. Оказывается, что если ускорение выражается как параметр q , который, как показывают наблюдения и вычисления, должен быть, например,

$$\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = q = 1.2, \quad (13.1.3)$$

то это число оказывается непригодным для того, чтобы сравнивать его с предсказаниями теории. Даже если модель Хойла должна предсказывать $q = -0.5$, Хойл мог бы быть все-таки прав потому, что ускорение может иметь гигантские ошибки, например 1.2 ± 5.0 . Тем не менее, это именно то место, где некоторые авторы сбиваются с пути, работая с величинами без указания их ошибок, как будто это величины известны предельно точно. Когда-нибудь, конечно, ошибки могут быть много меньше, так как гигантские усилия предпринимаются многими астрономами для того, чтобы получить все более точные величины.

Развязка всего этого состоит в том, что критическая плотность является наилучшей плотностью, для использования в космологических задачах. Этот факт имеет огромное множество очень приятных свойств, например, эта плотность, при которой создание вещества в центре вселенной (который находится всюду, согласно принципу космологической однородности) ничего не стоит. Если плотность вещества есть ρ , тогда мы знаем, что пространство имеет положительную кривизну, обусловленную непосредственно плотностью вещества. С другой стороны, трехмерное пространство в эквивалентные моменты собственного времени при эволюции галактики имеет отрицательную кривизну; критическая плотность уравнивает величину кривизны таким образом, чтобы сделать трехмерное пространство плоским. Критическая плотность также разделяет случай вселенной с конечным числом галактик от вселенной с бесконечным их числом. С учетом всех волшебных свойств этой величины заманчиво было бы пораз-

мышлять, что эта величина, на самом деле, есть "истинная" плотность. Тем не менее, мы не должны обманывать самих себя думая, что такой замечательный результат более надежен просто благодаря своей "красоте", которая есть частично искусственный результат наших предположений.

13.2. О возможности неоднородной и несферической вселенной

Так как все наши заключения серьезным образом основаны на постулате однородной космологии, мы могли бы проанализировать природу такого свидетельства. Если мы исследуем область вселенной, находящейся в пределах 1.3×10^8 световых лет от нас, мы без труда находим одно скопление, скопление Девы (Virgo), другими словами, вещество распределено в значительной степени довольно несимметричным способом. Отсутствие симметрии в этой области является таким значительным, что оно не может быть объяснено небольшими отклонениями от симметрии. Например, это не может быть обусловлено потемнением, вызванным галактической пылью, которое может задевать только ту область неба, которая лежит в пределах нескольких градусов от галактического экватора. Однородности должна выделяться при исследовании областей, которые больше, чем 10^8 световых лет, так как число галактик в обычном скоплении является слишком большим для того, чтобы их можно было достаточно точно описать как флуктуация плотности. Что обнадеживает, так это то, что оказывается, что очень удаленные области неба населены очень регулярными и компактными скоплениями скоплений, включающими в себя возможно тысячи галактик, причем все они роятся как пчелы вокруг центра масс сверхскоплений. Измерения дисперсии красных смещений показывают, что скорости относительно центра масс должны быть порядка 1000 км/с. Эта дисперсия служит в качестве весьма полезной меры массы скопления. Очевидно, что такие скопления образуются гравитационным притяжением, и что они являются объектами, которые имеют долгую жизнь, они являются устойчивыми финитными системами. Из этой информации мы выводим массу, поскольку знаем, что скоростей 1000 км/с недостаточно для того, чтобы галактика, обладающая такой скоростью, покинула систему. Существует некоторое беспокойство, вызванное использованием такой поправки; если, например, мы делаем подобное вычисления для массы скопления Девы, мы получаем массу примерно в 30 раз меньше, чем величина, получаемая другими способами. Однако, удаленные сверхскопления являются больше скопления Девы, так что такое вычисление может быть более надежным.

Само существование скоплений показывает, что галактики притягиваются друг к другу с достаточной силой, так что такие системы находятся вместе в течение времени, сравнимого со временем вселенной. Очень интересно отметить, что почти все галактики находятся в скоплениях; и оказывается, что только очень небольшая их часть находится не в скоплениях. Вывод состоит в том, что почти все видимое вещество во вселенной не дает достаточной кинетической энергии для того, чтобы вещество могло бы

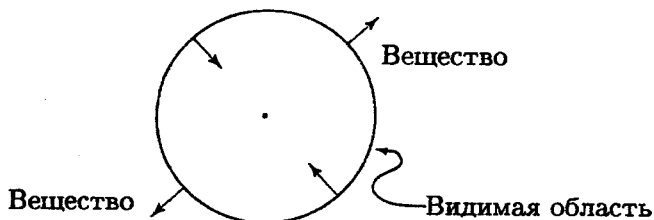


Рис. 13.1.

освободиться из гравитационного поля окружающей материи. Ввиду этого факта, мне кажется, что очень невероятным, чтобы средняя плотность вселенной много меньше, чем критическая плотность. Если плотность много меньше, чем критическая плотность, то образование скоплений должно быть приписано локальным флуктуациям, которые делают вещество более плотным в некоторых областях. На основе статистической модели это было бы довольно трудно, в этом случае должно быть достаточно локальных флуктуаций правильного вида, так чтобы почти все вещество было сосредоточено в скоплениях. Может быть доказано, что в более ранние моменты времени, когда плотность была выше, такие флуктуации могут быть образованы более легко, но я не вижу количественного доказательства, основанного на этой идее. Неизбежный вывод состоит в том, что большая часть вещества затягивается в скопления, поскольку гравитационная энергия того же порядка, что и кинетическая энергия расширения, это наводит на мысль, что средняя плотность всюду должна быть почти равной критической плотности.

Предыдущие предположения о средней плотности не дают никакой поддержки гипотезе однородности. Может все еще оставаться вопрос, который касается того, является ли скопление вещества в заданных областях чисто локальным эффектом и меняется ли ситуация от области к области. Космологический принцип может изучаться только путем проведения детального сравнения плотности вещества и нелинейной зависимости красного смещения, которая представляет ускорение галактик. Это есть величины, которые в принципе измеряемы независимо, хотя определенное соотношение между ними предсказывается теориями, в которых принимается космологический принцип. Если вариация плотности от радиальной координаты была бы измерена с большой точностью, то мы могли бы обнаружить, что вещество может быть имеет большую плотность во внутренней области, так что космологический принцип не может выполняться.

Даже если космологический принцип был бы неверен, может оказаться, что вселенная имеет сферическую симметрию. Предпочтение в пользу космологического принципа отражает наше удивление от обнаружения того, что мы находимся в таком месте, которое выглядит как центр вселенной. Давайте предположим, что видимая область почти симметрична, но что вне ее имеется довольно много вещества, распределенного достаточно кривобоко. Каково бы было в этом случае отличие от симметричного рас-

пределения вещества? Мы могли бы ожидать поправки первого порядка к движению удаленной галактики, которые были бы обусловлены влиянию приливных сил, как это проиллюстрировано на рис. 13.1. (Если видимая область ускоряется как целое, то мы не могли бы отдавать себе отчет в этом ускорении!) Этот результат соответствовал бы поправке к красному смещению, имеющему квадрупольный характер; красное смещение было бы краснее в двух полярных областях и более голубое в экваториальной области.

Предшествующая дискуссия показала нам, как мало релятивистская теория гравитации говорит нам о космологии. Главные проблемы космологии могут быть решены только тогда, когда мы на самом деле знаем, как же "действительно" выглядит вселенная, когда мы имеем точные зависимости красного смещения и плотности как функции расстояния и положения на небесной сфере.

13.3. Исчезновение галактик и сохранение энергии

Давайте кратко напомним некоторые другие загадки космологии и космологических моделей. Возможно ли, чтобы некая галактика исчезла, если мы смотрим на нее с позиции вечности? Если мы используем нашу нынешнюю теорию, то наш ответ на этот вопрос является отрицательным вне зависимости от того, является ли плотность больше или меньше критической, не существует галактики, которая сейчас является видимой и которая когда-нибудь полностью исчезнет, хотя она может становится все более и более красной. Не имеет смысла беспокоиться о возможности галактик удаляться от нас со скоростью, превышающей скорость света, чтобы это не означало, так как эти галактики никогда не могли бы быть наблюдаемыми в соответствии с используемой нами теорией.

В теории Хойла галактики, находящиеся вдали от нас, действительно исчезают; его выражение для скорости удаления является таким, что объем куба, определяемый восемью заданными галактиками, удваивается в каждый временной интервал определенной величины. Таким образом, для того, чтобы получить такое увеличение, постулируются такие скорости, что некоторые галактики должны ускоряться до скоростей больших, чем скорость света c . Тем не менее, теория Хойла не претендует на то, чтобы объяснить движение галактики на языке сил. Она попросту устанавливает кинематическое правило для вычисления вполне определенных положений как функции времени, эти определения положений являются такими, что галактики действительно исчезают со временем. Мало смысла в поисках такой силы в природе, которая могла приводить к расширению Хойла, эта сила должна была бы быть необычного вида, так как нет финитных сил, которые когда-нибудь приводили бы к такому движению в рамках существующей механики.

Я унаследовал предрассудок моего учителя проф. Дж. Уилера, который считал, что это против правил объяснять результат, делая удобные изменения в теории, когда нынешняя теория не полностью исследована. Я

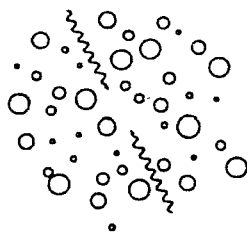


Рис. 13.2.

говорю это, поскольку было высказано предположение, что сила расширения, которая должна бы стремиться ускорить галактики так, как этого хочет Хойл, должна бы возникать в том случае, если положительные заряды не были бы в точности равными отрицательным зарядам. Так как у нас есть превосходная теория электродинамики, в которой e^+ в точности противоположен e^- , такое предположение кажется бесполезным. Мы не намереваемся опровергать очень красивую теорию электродинамики для того, чтобы обеспечить механизм для кинематической модели, которая может просто оказаться неверной, как только мы проведем точные измерения. Все еще остается возможность, что Хойл прав, но мы узнаем это прежде всего из наблюдений вселенной такой, какая она есть.

Давайте скажем также кое-что о том, чего ученые, которые беспокоятся о математических доказательствах и противоречиях, кажется, не знают. Нет способа показать математически, что некоторое физическое заключение является неверным или противоречивым. Все, что может быть показано, состоит в том, что математические предположения ложны. Если мы находим, что определенные математические предположения приводят к логически противоречивому описанию Природы, мы меняем эти предположения, а не Природу.

Я говорю все это потому, что я не уверен в том, в каких пунктах теория вселенной, в соответствии с теорией Хойла, может не вполне совпадать со многими другими предположениями, которые мы, физики, обычно делаем. Например, может быть есть некоторое затруднение в возможности передачи сигнала, что составляет очень большую часть размышлений в релятивистских теориях. Если заданная галактика исчезает из вида, действительно ли она исчезает из вселенной для нас? Возможно ли, что мы можем спросить друга с некоторого внешнего края (доступного для общения с нами) о том, как эта другая галактика себя ведет, пока этот друг остается для нас на виду и галактика находится у него на виду? Или это есть общий заговор детальной кинематики для того, чтобы сохранить это релятивистское правило, что скорость вблизи c в координатной системе, движущейся относительно нас со скоростью вблизи c , всегда приводит к тому, что сумма меньше, чем c ?

Давайте кратко поговорим о законе сохранения энергии. В теории Хойла вещество создается в покое в "центре" вселенной, и мы говорили, что нет всеобщего образования энергии, поскольку отрицательная гравитаци-

онная энергия попросту уравнивает энергию массы покоя. Такого рода сохранение энергии состоит в том, что если мы берем ящик конечного размера где бы то ни было, никакого вещества не появляется внутри ящика, исключая возможный поток энергии и вещества через стенки этого ящика. Другими словами, только локальный закон сохранения оказывается значимым. Если энергия может исчезать в одном месте и одновременно вновь появляться в некотором другом месте без течения чего бы то ни было между этими местами, мы не можем вывести никаких физических следствий из всеобщего "сохранения". Следовательно, давайте интерпретировать образование вещества согласно модели Хойла следующим образом. Мы представим себе конечную вселенную, имеющую большие массы, распределенные в сферической оболочке, как показано на рис. 13.2. Мы представляем себе пары частиц нулевой массы, падающих из внешней относительно оболочки части внутрь этой оболочки. Мы могли бы думать о том, что подобно фотонам, или гравитонам, или нейтрино, могут существовать некоторые новые частицы, некоторые шмутрино,¹ которые не доставляют нам беспокойство, связанное с анализом сохранения барионного заряда. Когда они встречаются другое шмутрино, падающее внутрь с противоположной стороны с противоположным значением импульса, эти частицы могут иметь достаточно энергии для того, чтобы образовать атом водорода. Таким образом, у нас может быть и образование вещества, требуемое в модели Хойла, и локальное сохранение энергии, так как вещество создается из энергии, втекающий внутрь и переносимой шмутрино. Если поток шмутрино является очень большим и сечение для образования вещества будет конечным, в точности выше порога, мы можем понять, почему вещество должно бы создаваться в покое относительно некоторого среднего в этой галактике. Идея состоит в том, что если поток является достаточно большим, как только шмутрино имеет достаточную энергию, это шмутрино будет находить другую такую же частицу, прилетающую с противоположного направления и будет приступать к созданию вещества; если максимальная энергия, которую шмутрино могут приобрести при падении, есть в точности такая же, как и порог для образования вещества, то материя будет создаваться "в покое". Каким-то таким способом мы можем одновременно иметь и закон сохранения энергии, и теорию Хойла. Конечно, имеется большое число оставшихся проблем: мы еще должны рассмотреть, почему барионное число может не сохраняться.

13.4. Принцип Маха и граничные условия

Классическая теория гравитации не приводит нас к ответу на вопрос о том, справедлив ли принцип Маха? Мы можем спросить, например, предсказывает ли теория гравитации силы Кориолиса, если в целом галактики обладают некоторым результирующим вращением вокруг нас. К этой за-

¹ Возможно, что это название гипотетической частицы взято Р. Фейнманом от слова Shmoo – Шму или Пузанчик, который является персонажем юмористических картинок. Тогда шмутрино – это маленькие пузанчики. (Прим. перев.)

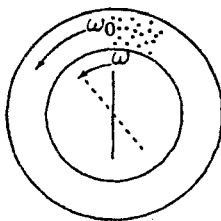


Рис. 13.3.

даче подходят следующим способом. Мы представляем себе находящуюся на большом расстоянии от нас вращающуюся оболочку, образованную веществом, как показано на рис. 13.3. Спросим себя, будут ли силы в центре так влиять на качающийся маятник, чтобы он следовал движению оболочки. Эта задача решается подстановкой в граничные условия $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ на бесконечно больших расстояниях. Тогда результат (полученный Тиррингом [Thir 18])

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{GM}{Rc^2} \right). \quad (13.4.1)$$

Величина $GM/(Rc^2)$ всегда меньше, чем 1, так что маятник или что бы то ни было другое не совсем следуют вращающемуся веществу. Всегда возможно, что этот результат может быть негодным из-за особенного выбора граничных условий. Все, что мы знаем, состоит в том, что $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ в областях, где гравитационный потенциал равен константе; но у нас нет гарантии того, что $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$, когда гравитационные потенциалы равны нулю. Таким образом, может быть, что видимый неуспех принципа Маха вызывается нашим выбором неверного граничного условия. Мы могли бы сравнить эту ситуацию со случаем электростатики; оказывается возможным решить уравнения, положив $E_z = 1$ на больших расстояниях в качестве граничного условия. Мы можем продолжить эти решения на все большие и большие области, однако, мы делаем это за счет того, что представляем себе все большее и большее количество заряда, однородно распределенного вдоль плоскостей, перпендикулярных оси z во внешней области. Из того, что мы предполагаем $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ на бесконечности, может следовать, что бесконечно большое количество вещества однородно распределено "со внешней стороны от бесконечности". Таким образом, это показывает мне, что мы могли бы узнать о том, согласуется ли принцип Маха с нашей теорией путем изучения смысла граничных условий.

При предыдущем обсуждении принципа Маха мы строили догадки о том, что возможно величина компонент $g_{\mu\nu}$ в метрике

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (13.4.2)$$

есть имеющая физическое значение величина, если мы измеряем собственное время в естественных единицах, таких как хаббловская величина cT , и

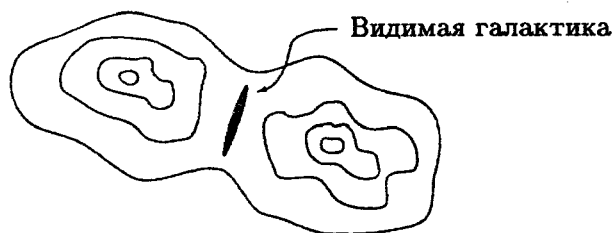


Рис. 13.4.

длины в некоторых природных единицах, таких как комптоновская длина волны; для длины волны протона $g_{\mu\nu}$ есть величина порядка 10^{-84} . Специальная теория относительности приходит на ум, если имеет место частный случай $g_{\mu\nu} = \text{const}$, для которого масштабы времени и длины могут быть приведены к лабораторным измерениям. Находящиеся вблизи нас массы, такие как Солнце, вносят небольшой вклад в величину $g_{\mu\nu}$, который наблюдается иным способом, чем вклад от удаленных распределений массы, поскольку локально эта величина быстро меняется сравнительно с вариациями вклада от удаленных галактик. Мы видели также, что если мы постулируем равный вклад от каждого бариона, появляется оценка для этой величины порядка 10^{-84} . Есть ли у нас какая-либо информация о таком барионном числе? Например, что эта величина сохраняется? Что она бесконечна? Может быть не барионное число в наблюдаемой области вселенной приводит к некоторым следствиям, влияющим на физические процессы?

Ответы на все эти вопросы могут быть непростыми. Я знаю, что есть некоторые ученые, которые ходят вокруг того утверждения, что Природа всегда выбирает наипростейшие решения. Тем не менее, простейшее решение, намного превосходящее все остальные решения, было бы такое решение, где нет ничего, так что не было бы совсем ничего во вселенной. Природа много более изобретательна, чем такая картина, так что я отвергаю то, чтобы носиться с мыслью о том, что Природа всегда должна быть просто устроена.

13.5. Тайны на небесах

Была старая головоломка в космологии (называемая парадоксом Ольберса), состоящая в том, что если вселенная бесконечна и всюду имеется светящаяся материя, почему же небеса не становятся бесконечно яркими? Очевидно, имеется действительная возможность того, что количество звезд — конечно. Если же количество звезд не является конечным, небеса не обязательно должны быть бесконечно яркими, поглощение света или красное смещение и гравитационное красное смещение могут сделать так, что даже бесконечная вселенная имеет темное небо. Несмотря на это, на небе имеются некоторые объекты, обладающие поистине удивительной интенсивностью. Радиоастрономы, чьи инструменты позволяют наблюдать наиболее удаленные от нас объекты (по сравнению с другими способами

наблюдений), нашли некоторое число радиоисточников, имеющих весьма своеобразную структуру. Рис. 13.4 есть грубый эскиз линий постоянной интенсивности. Имеется 20 или 25 таких объектов, о которых уже сделаны сообщения и приведены их карты. Когда астрономы поворачивают свои телескопы в эту область пространства, они находят в центре такой структуры галактику, видимую с ребра. Время от времени также находят радиоисточники, чьи линии уровня, соответствующие постоянным значениям интенсивности, имеют единственный фокус, и в этом фокусе имеется галактика, видимая с той стороны, с которой галактика кажется больше. Это предположительно представляет объект того же самого типа, что и предыдущая галактика, только видимая под другим углом. Что поистине является удивительным, так это количество энергии, излучаемой такими объектами. Когда радиоастрономы интегрируют интенсивность по *из* наблюдаемому спектру, не делая никаких экстраполяций на ненаблюдаемые частоты, они находят, что такие объекты излучают энергию, соответствующую мощности 10^{44} эрг/с. Если оценить нижний предел для времени жизни таких объектов путем измерения их размеров и разделив на скорость света, то находим, что энергия, излучаемая такими объектами, порядка 10^{60} эрг, что является эквивалентом массы от 10^6 до 10^8 звезд размера нашего Солнца. Энергия, излучаемая в видимом диапазоне, есть дополнительная величина того же порядка. Это означает, что происходило такое энерговыделение, как будто бы от 10^6 до 10^8 звезд полностью аннигилировали. Где источник такой энергии?

Обычные ядерные процессы, которые превращают протоны в железо, могут обеспечить энерговыделение, соответствующее лишь незначительной доли их массы. Количество звезд в обычной галактике в среднем примерно 10^9 , так что 10^8 звезд не могут аннигилировать вследствие действия ядерных процессов в звездах. Мы можем сделать такое сравнение, поскольку галактики, имеющие гало с гигантской интенсивностью излучения, выглядят в точности, как другие галактики в видимом свете. Даже взрыв всех таких звезд в обычной галактике едва ли сможет обеспечить столь высокое энерговыделение. Кажется имеется только один способ получить энерговыделение с такой огромной мощностью, состоящий в том, что необходимо иметь миллион звезд, которые аннигилируют с миллионом звезд, образованных из антивещества. Альтернативные объяснения включают в себя некоторый вид структуры в центре таких галактик, некоторые исполинские звезды, в которых выделение энергии следует путем весьма отличным от тех, которым следует выделение энергии в обычных звездах. Структура, изображенная на рис. 13.4, интерпретируется как наличие поглощения радиочастот темной пылью, сосредоточенной вдоль галактической плоскости.

Один из интересных фактов об обыкновенных звездах заключается в том, что они мало различаются по своему размеру; их массы всегда того же порядка, что и масса нашего Солнца, возможно, самое большее в 10 раз больше. Не очень трудно установить, что может быть возможно есть есте-

ственный предел для размера звезды, путем рассмотрения одновременно требований принципа исключения Паули и скоростей, необходимых для выхода из системы; нам необходимо начать заполнять энергетические уровни для электронов (скажем, мы делаем это при температуре 0° Кельвина) в море Ферми и проводить добавление масс протонов внутри заданного объема. При массе порядка (1.5) массы Солнца, вершина моря Ферми является критически высоким. Тем не менее, обычная звезда не является достаточно массивной для того, чтобы релятивистские решения очень сильно отличались бы от нерелятивистских решений.

Если мы пытаемся иметь дело с конденсацией сверхзвезды с массой, содержащей 10^9 солнечных масс, гравитационные процессы могут быть в большей степени релятивистскими. Модель охлаждения излучением и коллапс внутренней части, приводящий к повышению температур, может оказаться несправедливой для сверхзвезды. При достаточно высоких давлениях предпочтительное направление ядерных процессов может быть связано с обратными β распадами протонов

$$p + e \rightarrow n + \nu. \quad (13.5.1)$$

Эволюция звезды с такой большой массой и обогащенной такими нейтронами может быть совершенно отлична от эволюции нашего Солнца. Я убежден в том, что совершенно необходимо перед тем, как мы создадим новые теории для объяснения подобных процессов, предпринять серьезную попытку использования всех знаний нашей существующей физики для того, чтобы понять, что может происходить при столь своеобразных обстоятельствах.

Лекция 14

14.1. Проблема сверхзвезд в общей теории относительности

В этой лекции я хочу обсудить решение проблемы сверхзвезд, в которых имеется вещество с массой примерно 10^9 солнечных масс, что обсуждали в своей работе Фаулер и Уилер [HoFo 63]. Мы берем модель, которая очень проста, но может, тем не менее, обладать огромным множеством атрибутов реальных процессов. После того, как мы поймем, как обходиться с решением такой простой задачи, мы можем позаботиться об усовершенствованиях в модели. Начальный пункт нашего анализа – это дифференциальное уравнение общей теории относительности, уравнение Эйнштейна

$$8\pi G T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (14.1.1)$$

Правая часть этого уравнения есть "геометрическая" часть, здесь мы представляем выражения для кривизны через компоненты метрического тензора. Если мы предполагаем статические, сферически симметричные решения, тогда элементы метрического тензора в точности определяются функциями $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ такими, что

$$(ds)^2 = e^\nu (dt)^2 - e^\lambda (dr)^2 - r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2). \quad (14.1.2)$$

Левая часть уравнения (14.1.1) есть физическая часть, которая включает в себя тензор энергии-импульса. Если мы предполагаем, что вещество газообразное, этот тензор включает в себя только давление p и плотность ρ в любой точке. При обозначении координат (r, θ, ϕ, t) индексами в порядке (1,2,3,4) и производных по отношению к координате r штрихами, уравнение Эйнштейна сводится к следующей системе уравнений, выраженных на языке функций $\nu(r)$, $\lambda(r)$ и давления, и плотности:

$$G^1_1 = -e^{-\lambda} \nu'/r - (e^{-\lambda} - 1)/r^2 = -8\pi G p, \quad (14.1.3a)$$

$$G^2_2 = -e^{-\lambda} (\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + (\nu')^2/4 + (\nu' - \lambda')/2r) = -8\pi G p, \quad (14.1.3б)$$

$$G^4_4 = -e^{-\lambda} \lambda'/r - (e^{-\lambda} - 1)/r^2 = 8\pi G \rho. \quad (14.1.3в)$$

Модель, которую мы будем использовать, будет задаваться теми выражениями, которые мы подставим для давления p и плотности ρ . Эти величины представляют давление и плотность, которые могли бы быть действительно измерены наблюдателем, стоящим в какой-либо выделенной точке. Мы не получим правильных решений до тех пор, пока мы не проследим за тем, чтобы наш физический тензор $T_{\mu\nu}$ удовлетворял законам сохранения.

Для нашего случая сферической симметрии только радиальная компонента дивергенции тензора имеет значение; мы должны иметь

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \nu' (T^1_1 - T^4_4) + \frac{1}{r} (T^1_1 - T^2_2) = 0 = -\frac{1}{2} \nu' (p + \rho) - p', \quad (14.1.4)$$

что по сути дела утверждает то, что давления в радиальном направлении уравновешены, как это и должно быть в нашем статическом решении. Это уравнение (равенства нулю дивергенции) служит тому, чтобы исключить ν' . Далее мы получаем соотношение для того, чтобы исключить $\exp(-\lambda)$. Сначала мы перепишем G^4_4 через новую функцию $M(r)$, как показано в следующих соотношениях

$$G^4_4 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})]. \quad (14.1.5a)$$

Если мы положим

$$M(r) = \frac{1}{2} [r(1 - e^{-\lambda})], \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (14.1.5b)$$

тогда

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 G\rho. \quad (14.1.5в)$$

Оказывается, что функция $M(r)$ пропорциональна массе звезды, так как это есть интеграл плотности ρ . Тем не менее, интерпретация не является настолько прямой, поскольку имеются особенности координат, через которые измеряется функция ρ . Мы обсудим это ниже. Подставляя выражения для ν' и $\exp(-\lambda)$ в уравнение (14.1.3a), получаем

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = -(p + \rho) \left(4\pi G\rho + \frac{M}{r^3}\right). \quad (14.1.6)$$

Вместе с дифференциальным уравнением для $M(r)$ и с уравнением состояния, связывающим величины p и ρ , мы имеем систему связанных уравнений, которые могут быть в принципе разрешены для функций $M(r)$, p и ρ ; с подходящими граничными условиями они могли бы описывать сверхзвезду в приближении статического решения.

Какого рода уравнение состояния мы возьмем? Масса, образованная из 10^9 солнечных масс, является очень сильно разреженной, будучи размазанной по области с галактическими размерами; даже при температуре несколько единиц 10^9 градусов Кельвина, газовое давление является довольно низким. Тем не менее, оказывается, что плотность излучения, которая пропорциональна T^4 , дает существенную часть энергии массы покоя нуклонной плотности. Мы получаем осмысленное приближение, пренебрегая газовым давлением по сравнению с давлением излучения; в том же

самом духе, мы пренебрегаем небольшим увеличением массы нуклона, вызываемым их скоростями. В единицах энергии массы покоя нуклона мы имеем тогда, если s – плотность нуклонов, что

$$\rho = s + \epsilon, \quad (14.1.7a)$$

$$p = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (14.1.7b)$$

Эти уравнения связывают p и ρ , но мы все еще нуждаемся в том, чтобы в точности определить ϵ для того, чтобы иметь уравнение состояния. Мы делаем адиабатическое приближение, которое делает каждый, пытающийся иметь дело с такими проблемами, такое, что распределение температуры является тем же самым, как будто это есть величина, которая падает вместе с первоначально однородным распределением без всякого перемешивания или переноса энергии между различными областями. Если мы сжимаем вещество внутри ящика, все частоты вырастают на один и тот же множитель, обратно пропорциональный длине ящика. Так как энтропия является постоянной для адиабатического процесса, то температура должна увеличиваться таким же образом. Таким образом, плотность нуклонов пропорциональна кубу температуры, и плотность энергии излучения пропорциональна T^4 . На языке температуры, измеренной в единицах 10^9 градусов, и энергии, в единицах массы покоя нуклона, имеем

$$\epsilon = aT^4, \quad s = a\tau T^3. \quad (14.1.8)$$

Величина $a\tau m_n$, где m_n есть масса нуклона, есть константа, имеющая значение 8.4 г/см^3 ; τ – параметр, связанный с не зависящей от радиуса энтропией на барион соотношением (энтропия на барион) = $4/(3\tau)$. Эти результаты могут быть выведены также из общего условия для адиабатического сжатия, которое может быть выражено как

$$s^2 \frac{d(\epsilon/s)}{ds} = p = \frac{\epsilon}{3}. \quad (14.1.9)$$

Эти соотношения между давлением, плотностью и адиабатическими процессами получены в связи со звездными задачами в классическом случае. Звезды, в которых и давление, и плотность следуют степенным зависимостям от температуры всюду, известны как политропы.

На языке новой температуры $t = T/\tau$ и новых единиц таких, что $8\pi G m_n a \tau^4 = 1$, система уравнений принимает следующий вид:

$$\rho = a\tau^4 [t^4 + t^3], \quad (14.1.10a)$$

$$p = a\tau^4 \left[\frac{1}{3}t^4 \right], \quad (14.1.10b)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2} [t^4 + t^3] r^2, \quad (14.1.10в)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2} \left(\frac{3}{4} + t \right) \left(\frac{1}{3} t^4 + \frac{2m}{r^3} \right) / \left(1 - \frac{2m}{r} \right). \quad (14.1.10г)$$

Какие же условия мы выбираем в качестве граничных? Мы предполагаем определенную температуру в центре и то, что поверхность является много холоднее, по существу температура равна нулю по сравнению с температурой в центре звезды. Входные величины для нахождения решений $t(r)$ и $m(r)$ попросту являются следующими:

$$m = 0, \quad t = t_c, \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (14.1.11)$$

Эта задача сформулирована таким способом, что численное решение такой задачи получается очень легко. Мы начинаем решение от центра, где мы знаем, что $m(r) = 0$ и $t(r) = t_c$; мы вычисляем (dm/dr) из соотношения (14.1.10в), и вычисляем (dt/dr) из соотношения (14.1.10г), и затем прыгаем вперед и назад между этими уравнениями для того, чтобы получить функции $m(r)$ и $t(r)$. Так как производная (dt/dr) будет всегда отрицательна при положительном t , то в некоторой точке r_0 , t обращается в нуль. Мы останавливаем решение в этой точке и предполагаем, что более физическое решение изменило бы только наиболее внешние слои звезды для того, чтобы сделать его убывающим более гладко по направлению к нулевой плотности, без изменения решения во внутренней части области какого угодно большого размера. Таким образом, предполагается, что радиус r_0 — есть радиус звезды, а величина $m_0 = m(r_0)$ — полная масса звезды.

14.2. Значение решений и их параметры

Решение, которое мы описали, оказывается справедливым для многих типов звезд, таким образом, звезды описываются всевозможными значениями параметра τ . Для того, чтобы дать идею определения величин m_0 и r_0 для интересующих нас случаев, мы даем коэффициенты перевода к более обычным единицам:

$$M \equiv \text{Масса звезды} = (27 \times 10^6 \text{солнечная масса}) 2m_0/\tau^2, \quad (14.2.1а)$$

$$R \equiv \text{Радиус звезды} = (8 \times 10^{12}) r_0/\tau^2, \quad (14.2.1б)$$

$$T_c \equiv \text{Температура в центре звезды} = t_c \tau (10^9 \text{градусов}), \quad (14.2.1в)$$

$$M_{\text{rest}} \equiv \text{Масса нуклонов звезды}$$

$$= (27 \times 10^6 \text{солнечная масса}) 2N/\tau^2. \quad (14.2.1г)$$

Существуют различные способы, пользуясь которыми мы можем увидеть, что наши уравнения описывают то, что наша интуиция одобряет. Например, для случая, когда масса $m(r)$ никогда не становится слишком большой, давление меняется в зависимости от радиуса в соответствии с ньютоновским правилом:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \rho. \quad (14.2.2)$$

Интересный момент связан с полным числом нуклонов. Хотя мы могли бы иметь искушение записать попросту $4\pi \int dr sr^2$, нам бы следовало вспомнить и написать соответствующие инвариантные выражения. Правильное выражение есть

$$N = \int_0^{r_0} s^4 \sqrt{-g} dr d\theta d\phi, \quad \sqrt{-g} = e^{\nu/2} e^{\lambda/2} r^2 \sin \theta, \quad (14.2.3)$$

где s^4 есть временной компонент четыре-вектора s^μ . Мы можем вычислить эту величину и провести интегрирование в системе, в которой нуклоны находятся в покое, в этой системе только временной компонент оказывается не равным нулю, так что мы приходим к выводу о том, что

$$s^\mu s_\mu = (s)^2 = g_{44} s^4 s^4, \quad s^4 = s e^{-\nu/2}. \quad (14.2.4)$$

Итак, имеем следующий результат для полного числа нуклонов

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} dr sr^2 [1 - 2m/r]^{-1/2}. \quad (14.2.5)$$

Давайте вновь посмотрим на выражение для массы звезды и попытаемся понять его более полным образом. Плотность ρ есть сумма двух членов, энергии, соответствующей массе покоя s , и энергии излучения ϵ . Когда мы выписываем явно массу как интеграл по правильным образом выбранным инвариантным элементам, мы видим, что плотность ρ умножается на некоторую величину, из которой вычисляется квадратный корень,

$$m \leq m_0 = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - 2m/r}} \rho \sqrt{1 - 2m/r}. \quad (14.2.6)$$

Это в точности тот результат, который мы могли бы ожидать из релятивистской теории, множитель с квадратным корнем вносит поправку, учитывающую изменение плотности энергии, обусловленное влиянием гравитационной энергии.

Когда мы берем температуру выше, чем 10^9 градусов, мы должны остерегаться попыток использования таких решений, поскольку новые физические процессы, которые имеют место при столь высоких температурах, могут сделать наше уравнение состояния полностью неадекватным. Например, если нейтринные пары могут рождаться при электрон-электронных

Таблица 14.1.

t_c	r_0	$2m_0$	$2N$
0.01	1100	8.45	8.45
0.10	114	6.23	6.19
0.20	59	4.71	4.62
0.40	36	3.13	2.97
0.60	28	2.39	2.19
1.00	32	1.87	1.66

столкновениях, они могут уносить большое количество энергии, так что наши приближения могут быть полностью несправедливыми. Может оказаться, что такие процессы будут важны при температуре 10^9 градусов, температуре, которая достаточно велика для того, чтобы существенная часть частиц имела достаточную кинетическую энергию для того, чтобы образовать электронные пары. Возможность образования таких пар будет изменять соотношения, связывающие величины ν и ϵ и величины ϵ и p . Тем не менее, в этом адиабатическом приближении эти связи полностью определяются величиной γ (давление p пропорционально s^γ), и обнаружено, что величина γ не очень сильно меняется при изменении температуры. Она имеет одну и ту же величину для обоих экстремальных предельных случаев; для обоих случаев $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$ имеем $\gamma = 1.333$. Имеется минимальное значение γ между этими предельными случаями температур, которое соответствует величине $\gamma = 1.270$. Это наводит на мысль о том, что поправки, обусловленные влиянием электронных пар, не будут менять качественные аспекты наших ответов.

14.3. Некоторые численные результаты

Предварительные вычисления дали результаты, приведенные в таблице 14.1, для заданной величины τ при изменении только температуры в центре. В таблице приводятся значения температуры в центре t_c , радиуса r_0 , массы звезды m_0 и "число нуклонов N ". Что же интересного можно сказать об этих величинах? Для того, чтобы понять, что происходит с заданной звездой, мы могли бы спросить, какая последовательность значений радиуса и центральной температуры соответствует одному и тому же числу нуклонов, если полная энергия на один нуклон падает. Мы ожидаем, что это может моделировать ситуацию в звезде, в которой излучение медленно уносит энергию. Числа в таблице не дают в достаточной степени полное представление, так чтобы мы могли быть в этом уверены, тем не менее, мы видим, что энергия на нуклон уменьшается при уменьшении температуры в центре; это есть действительно описание того, что звезда охлаждается, если она излучает энергию.

Будут ли такие звезды самопроизвольно "размазываться" по пространству? Устойчивость нашей звезды еще не изучена. В рамках того же самого решения вычисления, которые приводят к одному и тому же числу нуклонов и одному и тому же значению τ , могут сравниваться как

по значениям радиуса, так и по значениям температуры в центре. Факт, что очевидно имеется минимум значения r_0 при значениях температуры в центре где-то между 0.4 и 1.0, заставляет задуматься; звезда может иметь устойчивое решение. Другой способ изучения устойчивости состоит в том, чтобы рассмотреть "взрывы". Предположим, что мы вычисляем полную энергию числа N нуклонов с определенной энтропией на нуклон, т.е. определенным значением τ , и затем разламываем эти нуклоны на две звезды с одним и тем же значением τ , сохраняя сумму N постоянной. Можем ли мы получить работу из этого процесса или мы должны затратить работу для того, чтобы получить конфигурацию из двух звезд? Предполагается, что величина τ является той же самой, поскольку считается, что все вещество двигается вместе из одной и той же начальной конфигурации. Можем ли мы найти какую-нибудь информацию о таком процессе, основываясь на приводимых выше числах? Если N уменьшается, мы находим, что избыток массы *увеличивается*. Это означает, что два объекта с меньшими значениями N могут быть более массивными, поэтому требуется работа для того, чтобы разделить такую систему. Это наводит на мысль, что звезда может не выбрасывать вещество, а сохранять его в одном коме.

Предшествующие рассуждения также показали нам, что звезды, которые следуют описанию в нашей модели, не могут на самом деле сформироваться; все они обладают большей энергией, чем энергия покоя нуклона, следовательно, требуется некоторая энергия для того, чтобы собрать их вместе.

Один из фактов, который мы можем обнаружить, состоит в том, что в любом случае поправки, обусловленные общей теорией относительности, являются значительными и очень важными. В каком направлении электронные пары будут изменять наше решение? Они стремятся сделать звезду более похожей на такую, в которой в центре становится теплее при том, что электроны способствуют охлаждению внешней части звезды.

Должны ли мы всегда волноваться по поводу гравитационного радиуса? Мы написали наши уравнения таким образом, что $m(r) = 0$ в начале координат, и масса увеличивается при увеличении r . Если мы всегда получаем столь большие массы такие, что почти выполняется равенство $2m(r) = r$, то наше дифференциальное уравнение (14.1.10r) показывает, что вблизи критического значения величины r величина t должна была бы логарифмически стремиться к $-\infty$. Таким образом, перед тем, как мы дойдем до такой точки, что температура упала бы до нуля, мы в нашей схеме должны были бы остановиться в этой точке. Тем не менее, численные результаты для массы и радиуса оказываются настолько далекими от критических значений, что возможно у нас нет нужды в настоящее время беспокоиться по поводу этой проблемы.

14.4. Планы и предположения для дальнейших исследований сверхзвезд

Имеется другое математическое определение проблемы звезд, которое может быть пригодно для изучения. Мы получили, что полное число нуклонов в звезде задается соотношением

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{sr^2 dr}{\sqrt{1 - 2m/r}}, \quad (14.4.1)$$

где

$$m = 4\pi \int_0^r dr' \rho r'^2,$$

и плотность $\rho = \rho(s)$ известна через постулированное уравнение состояния, такое как наш "адиабатический" закон

$$s \frac{d\rho}{ds} = p + \rho. \quad (14.4.2)$$

Задача определения равновесия состоит в том, чтобы определить конфигурацию с минимальной массой, исходя из заданного числа нуклонов. Мы можем получить такую же информацию, фиксируя значение массы и задавая вопрос о максимальном значении нуклонов. Математическая формулировка состоит в вариационном дифференциальном функциональном уравнении

$$\frac{\delta N}{\delta s(r)} = 0. \quad (14.4.3)$$

Если мы справляемся с решением этого уравнения, мы получаем экстремальные решения $s(r)$. Весьма приятно для меня чувствовать, что даже очень сложные проблемы пытаются выглядеть просто, будучи выраженными на языке соответствующим образом выбранных принципов! Мы найдем решения с минимальной массой, если экстремум $N[s(r)]$ действительно является максимумом.

После того, как у нас будут исследованы статические решения, мы можем обратить наше внимание к полной динамической задаче. Дифференциальные уравнения выглядят устрашающе. По мере того, как мы рассматриваем их чудовищно сложную структуру и начинаем делать сравнения с классическим пределом, значение многих членов становится более очевидным. В наипростейшем случае газовой динамики уравнения описывают распространение звука в неоднородной среде; это нелинейный звук, так что в среде могут образовываться ударные волны и т.д. Не вызывает удивления то, что объект нашего исследования настолько сложен. Наиболее простая модель исследований может касаться небольших колебаний в окрестности статических решений; действительные частоты обозначали бы то, что наши предыдущие решения, однажды сформировавшись, были бы на самом деле устойчивыми, и мнимые частоты говорили бы нам о том, что наши решения были бы неустойчивыми.

Усовершенствованные вычисления нуждаются также в лучших выражениях для "физической" стороны уравнений. Что происходит, если мы учитываем испускание нейтрино из центра звезды? Будет ли происходить падение вещества к центру в этом случае или происходит что-либо другое? В случае, когда звезда является в большой степени релятивистской, тогда эти нейтрино могут уносить большую часть полной энергии и, таким образом, могут привести к существенному уменьшению гравитационного притяжения. Классическая теория звезд основана на довольно прочном основании, когда масса покоя частиц определяет почти полностью значение энергии. В этом случае уносящаяся из центра звезды энергия приводит к дальнейшему коллапсу, что ведет к тому, что центр звезды становится горячее. Если центр становится горячее, то ядерные реакции доставляют больше энергии, которая должна быть унесена, чтобы звезда осталась устойчивой. Если же центр становится настолько горячим, что горение ядерного топлива производит энергии больше, чем может быть унесено из звезды, ситуация становится неустойчивой и звезда взрывается. В сильно релятивистском случае, тем не менее, новые качественные признаки начинают появляться, когда энергия излучения составляет большую часть полной массы. Здесь, когда центр звезды "охлаждается" потерей энергии, энергия, соответствующая притяжению звезды, становится меньше, поскольку существенная часть массы уносится. Таким образом, может быть так, что для достаточно большой массы, может не быть процессов, приводящих ко взрыву.

Я полагаю, что решения данной задачи покажут, что для масс, больших, чем несколько единиц, умноженных на 10^8 солнечных масс, сферически симметричные решения для конденсирующейся материи не приводят к коллапсу, но "сортируют грязь", влетающую в звезду и вылетающую из звезды, в окрестности определенного наиболее предпочтительного значения радиуса. Обычные процессы звездной эволюции могут иметь место, если распределение становится несферическим. Двигаясь в этом направлении, потом возможно мы сможем найти объяснение тому факту, что оказывается, что все видимые звезды имеют почти одинаковый размер. Решение полной динамической задачи может привести нас к тому, чтобы понять, как вещество, однородно распределенное, может начать конденсироваться симметричным образом, и тогда в определенной точке оказывается предпочтительным формирование сгустков, которые могут конденсироваться дальше. Результаты могут оказаться очень высоко чувствительными к любому количеству углового момента, которым первоначально обладает конденсирующаяся масса. Например, планеты содержат почти 95% полного углового момента нашей Солнечной системы. Может быть так, что конденсирующаяся масса может сформировать шары, к которым переносится большая часть углового момента.

Лекция 15

15.1. Физическая топология решений Шварцшильда

В предыдущей лекции у нас были сделаны некоторые предположения о том, что распределение действительного вещества не может сконденсировать вещество внутри сферы с радиусом меньшим, чем величина гравитационного радиуса $2m$; даже если мы в порядке рабочей гипотезы приходим к выводу о том, что "кротовые норы" не могут быть образованы из реального вещества, остается вопрос, который касается того, действительно ли решение Шварцшильда представляет случай, в котором тензор G^μ_ν равен нулю *всюду*, случай, в котором вещества нет вовсе, может выглядеть как вещество, которое рассматривается с расстояния. Следовательно, давайте попытаемся продолжить решение Шварцшильда внутрь критического радиуса $2m$. Мы полагаем, что это должно быть возможным потому, что хотя метрика

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - 2m/r} - r^2((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \quad (15.1.1)$$

имеет очевидную сингулярность при $r = 2m$, компоненты тензора кривизны являются гладкими в этой точке. Компоненты тензора кривизны становятся сингулярными в начале координат $r = 0$, так что действительно происходит что-то ужасное с пространством в начале координат. Космический корабль, падающий в начало координат, может быть катастрофическим образом искривлен, потому что приливные силы становятся бесконечными, это есть тип ужасного поведения, который следует из сингулярности тензора кривизны. Все, что происходит при $r = 2m$, состоит в том, что коэффициенты перед членами $(dt)^2$ и $(dr)^2$ меняют знак в соотношении (15.1.1), тем не менее, пространство остается по-прежнему с сигнатурой три и один, так что пространство чувствует себя совершенно нормально.

Давайте рассмотрим разложение пространства в окрестности сингулярной точки. Предположим, что мы меняем координаты в окрестности $r = 2m$, и рассмотрим плоскости $d\phi = 0$, $d\theta = 0$. На языке новой переменной x , мы имеем

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2m/r), \\ r &= 2m(1 + x) \quad \text{при малых значениях } x, \\ (ds)^2 &= x(dt)^2 - (2m)^2 \frac{(dx)^2}{x}, \end{aligned} \quad (15.1.2)$$

вблизи сингулярной точки. Хотя пространство меняет знак, когда x меняет знак, при $x > 0$ метрика может быть заменена вновь таким образом, что она становится плоской; простое координатное преобразование приводит

метрику к "полярному" виду

$$x = R^2 \rightarrow (ds)^2 = R^2(dt)^2 - (4m)^2(dR)^2, \quad (15.1.3)$$

с использованием этого соотношения метрика легко может быть преобразована в метрику Минковского путем подстановки

$$\begin{aligned} v &= 4mR \cosh(t/4m), \\ u &= 4mR \sinh(t/4m), \\ \rightarrow (ds)^2 &= (du)^2 - (dv)^2. \end{aligned} \quad (15.1.4)$$

Эти результаты показывают, что пространство вблизи сингулярной точки ведет себя совершенно хорошо, так что сингулярность Шварцшильда есть особенность координат, которые мы определили. Для того, чтобы связать геодезические, проходящие через точку $r = 2m$, уравнение (15.1.4) подсказывает подстановку

$$x = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = -\frac{(u^2 - v^2)}{(4m)^2}, \quad \frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right), \quad (15.1.5)$$

на языке координат u и v пространство и метрика являются гладкими с обеих сторон $r = 2m$. Подобное преобразование использовалось Фуллером и Уилером [FuWh 62] для того, чтобы получить пересечение промежутка, где имела координатная особенность. Геодезические, правильно соединяющиеся через значение $r = 2m$, показывают, что частицы, падающие по направлению к гравитирующей массе, при значениях координаты r меньших, чем ее критическое значение $2m$, не отражаются в какое бы то ни было "новое" пространство на другой стороне любой горловины, а сохраняют свое падение по направлению к началу координат. Здесь нет противоречия с рассмотрениями, которые привели к предположениям о кротовых норах. Топология типа горловины получается путем разрезания пространства неким особым способом, если положим $dt = 0$. Тем не менее, движение реальных частиц не происходит в пространстве, в котором $dt = 0$, и нет основания тому, почему топология подпространства $dt = 0$ должна бы соответствовать общему свойству четырехмерного пространства. Тороидальный пончик может быть вырезан из целого куска даже тогда, когда нет ничего тороидального у этого целого куска. Для физических задач топология, которой мы интересуемся, касается геодезических, и здесь не существует времениподобных геодезических, которые бы проходили через кротовую нору.

15.2. Орбиты частиц в поле Шварцшильда

Поучительно получить описание радиального движения частиц как функции собственного времени s . Как обычно для задач описания движения в поле центральных сил, движение происходит в одной плоскости (мы выбираем ее таким образом, что $\theta = \pi/2$), и радиальное движение определяется двумя параметрами K и L , связанными с полной энергией и угловым моментом, которые есть первые интегралы уравнения для времени

и уравнения для угла, как следует из следующих уравнений: уравнения геодезических

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (15.2.1)$$

может быть тривиальным образом проинтегрировано, когда $\nu = 3, 4$ (координаты ϕ, t), поскольку метрический тензор не зависит от ϕ и t , и, следовательно, правая часть уравнения (15.2.1) равна нулю. Из этого условия определяются следующие интегралы:

$$K = (1 - 2m/r) \frac{dt}{ds}, \quad L = r^2 \frac{d\phi}{ds}. \quad (15.2.2)$$

Уравнение для описания изменения радиальной координаты может быть получено, если мы положим $\nu = 1$ в уравнении (15.2.1), но это требует больше работы, чем это необходимо. Легче получить уравнение для описания изменения радиальной координаты из условия

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1, \quad (15.2.3)$$

которое может быть явным образом записано через величины L и K следующим образом:

$$\frac{K^2}{(1 - 2m/r)} - \frac{1}{(1 - 2m/r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = 1. \quad (15.2.4)$$

Собственное время, соответствующее пролету частицы от значения радиуса r_0 до значения радиуса r_1 , задается следующим соотношением:

$$\int ds = \int_{r_0}^{r_1} dr \left(K^2 - (1 - 2m/r)(1 + L^2/r^2) \right)^{-1/2}. \quad (15.2.5)$$

Необходимо заметить, что более не происходит ничего ужасного при $r = 2m$, подынтегральное выражение ведет себя хорошо, нет никакой задачи соединения траектории, проходящей через какой-либо промежуток (содержащий координатную особенность $r = 2m$). Если бы мы сначала изучали орбитальные движения и не беспокоились по поводу метрики, мы могли бы не заметить сингулярности в координатах Шварцшильда и могли бы получить правильные ответы, просто используя соотношение (15.2.5).

Появление квадратного корня является довольно обычным при рассмотрении орбитальных движений, и анализ поведения выражения, стоящего под квадратным корнем, является весьма важным. Интегрирование прекращается в том случае, если выражение, стоящее под квадратным корнем, становится отрицательным, меньшие значения радиуса никогда не могут быть достигнуты частицами (движущимися по этим геодезическим). Если угловой момент L достаточно велик, то квадратный корень становится мнимым при значении радиуса большем, чем $2m$, и орбиты имеют такое же

качественное поведение, что и в ньютоновском случае.¹ С другой стороны, если энергия и угловой момент являются такими, что частица должна пересечь значение радиуса $2m$, то выражение, стоящее под знаком квадратного корня, не должно стать отрицательным при значениях радиальной координаты меньших, чем $r = 2m$, и это означает то, что все частицы продолжают свое падение к началу координат. Фактически, как только частица оказалась внутри области $r = 2m$, частицы с большим угловым моментом L падают быстрее, "центробежная сила" очевидно действует скорее как притяжение, чем как отталкивание.

В этом месте я хочу упомянуть некоторые своеобразные результаты, которые получаются, когда делается предположение, что поле Шварцшильда соответствует заряженному объекту, на который смотрят с расстояния. Легко может быть показано, что единственное изменение в метрике заключено в следующей замене

$$(1 - 2m/r) \rightarrow (1 - 2m/r + q^2/r^2), \quad (15.2.6)$$

где q – видимый заряд. Когда такое выражение подставлено в соответствующий интервал собственного времени (15.2.5), квадратный корень неизбежно является мнимым для достаточно малых значений радиуса, так что частица никогда не попадает в начало координат, а всегда отражается назад. Это отталкивание не обусловлено действием электрической силы между частицами, оно является присущим этой метрике свойством, если мы настаиваем на том, что поля должны бы соответствовать таким полям, которые образует при больших значениях радиуса r заряженная частица, находящаяся в начале координат. Таким образом, это отталкивание должны были бы чувствовать даже нейтральные частицы, падающие в заряженный центр.

Метрика, соответствующая заряженной массе и определяемая соотношением (15.2.6), очевидно имеет две сингулярные точки. Представляет некоторый интерес изучить продолжение геодезических падающей частицы через эти две сингулярности; не представляется немислимым, что частица может вылететь наружу так, что отраженная частица выходит наружу раньше, чем она начала двигаться по направлению к такому объекту! Я предполагаю такую возможность, потому что очевидно, что падающей частице требуется бесконечное время для того, чтобы достичь первую особенность (с точки зрения внешнего наблюдателя), хотя целая траектория, входящая в данный объект и выходящая из него с точки зрения самой частицы, может занимать конечное время.

¹В метрике Шварцшильда полное решение задачи о сечении захвата частицы, обладающей произвольной скоростью на бесконечности, приведено в работе [Заха 88*] (а обобщение этих соотношений на случай заряженной черной дыры получено в работе [Zakh 94*]). (Прим. перев.)

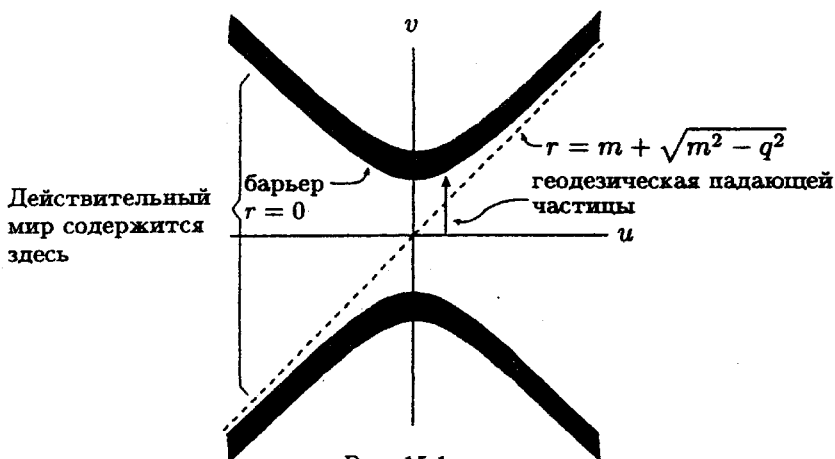


Рис. 15.1.

15.3. О будущем геометродинамики

Длительные обсуждения, которые мы проводили по исследованию решений Шварцшильда, являются симптомом того, что мы имеем теорию, которая не исследована полностью. Настало время переходить к изучению других тем, однако, я хочу представить вам мои соображения, каковы могут быть ответы, как только теория будет более полно исследована. Оригинальные размышления Дж.А. Уилера о кротовых норах были основаны на идее, что возможно построить решения уравнений Эйнштейна, для которых $G^\mu{}_\nu = 0$ всюду, и которые, тем не менее, действовали бы или чувствовали бы (гравитационное поле), как будто они являются настоящими массами. Топология кротовых нор такова, что было интуитивно ясно, что линии электрического поля, входящие в кротовую нору и выходящие где-то из кротовой норы, должны были бы очень хорошо соответствовать существованию положительных и отрицательных зарядов в точности одной и той же величины. Даже хотя мы продемонстрировали то, что топология геодезического пространства является не такой как топология кротовой норы, идея того, что вещество и заряд есть проявление топологии пространства, очень красивая и заманчивая, и никак не дискредитируется тем, что она не приносит никакого количественного результата, выраженного на языке решения Шварцшильда. На самом деле было бы очень замечательно иметь $G^\mu{}_\nu = 0$ всюду, так чтобы, говоря словами, используемыми недавно для описания геометродинамики, материя возникла из того, что не есть материя, и заряд возник из того, что не есть заряд.

В ближайшем будущем можно исследовать свойства решения Шварцшильда в начале координат $r = 0$. Я полагаю, что невозможно продемонстрировать то, что $G^\mu{}_\nu = 0$ всюду, но предпочтительнее $G^\mu{}_\nu = \delta(x)$ или что-либо такого рода. Объяснение поведения зарядов будет требовать дальнейшего детального изучения; я уверен в том, что такое "отталкивание" в начале координат будет являться неверным заключением, в общем

обусловленным имеющейся противоречивостью в предположении точечного заряда; плотность заряда в окрестности точечного заряда растет как E^2 или $1/r^4$, что означает, что масса, находящаяся внутри шара любого конечного радиуса, должна быть бесконечной. Если масса не является бесконечной, то мы должны записать нечто вроде

$$\text{Масса внутри} = (\text{Константа}) - \frac{q^2}{2r}. \quad (15.3.1)$$

Если нет отрицательной массы внутри шара любого радиуса, то тогда нам не разрешается двигаться внутрь шара радиуса a , где a определяется условием $(\text{Константа}) = q^2/2a$. Величина этой константы могла бы быть произвольной, если масса, находящаяся в начале координат, не являлась бы чисто электромагнитной. В области вне шара радиуса a , мы могли бы иметь следующие выражения для гравитационного поля и потенциала:

$$\text{Поле} = -\frac{q^2}{2r^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right), \quad \text{Потенциал} = \frac{q^2}{2r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2r} \right). \quad (15.3.2)$$

Если мы возьмем константу не бесконечной и в явном виде, то мы не можем получить отталкивания. На языке новых координат u и v весь действительный мир содержится в подобласти, и геодезические падающих частиц попадают в *барьер* при $r = 0$. Доставляющий беспокойство промежуток при $r = m + \sqrt{m^2 - q^2}$ соответствует совершенно хорошо ведущей себя области пространства, где геодезические даже не имеют петли (см. рис. 15.1). Большой интерес представляет изучение геометрии такой заряженной массы, в том случае, если мы делаем ее все меньше и меньше.

Хотя геометродинамика, как она развивается Дж.А. Уилером и его соавторами, не принесла еще никаких количественных результатов, эта теория содержит ростки уверенных представлений, которые, все же, могут привести к эффектным успехам в нашем понимании физики. Необходимо дать кредит Уилеру для действительного понимания этих признаков наших нынешних теорий, которые до конца неисследованы, но кажутся многообещающими. В течение некоторого времени я был ассистентом Дж.А. Уилера, я многократно получал пользу от гения его интуиции для понимания того, в каком направлении лежит ответ. Одно время я пытался построить теорию классической электродинамики, в которой заряды взаимодействуют только с другими зарядами, вместо взаимодействия с другими полями, я чувствовал, что поля должны бы исчезать, оставаясь как способ проследивания запаздывания. Все очень хорошо продвигалось вперед до тех пор, пока не пришло время объяснить реакцию излучения, в которой сила чувствуется ускоряющейся частицей задолго до того, как эти поля имели время путешествовать к другим зарядам и обратно. Когда я рассказал Уилеру о моих проблемах, он сказал "Почему Вы не используете опережающий потенциал?" Опережающий потенциал? Это было нечто такое, что каждый выбрасывал как ненужное. Было очевидно, что это понятие лишено физического смысла, предполагать его использование было беспрецедентно

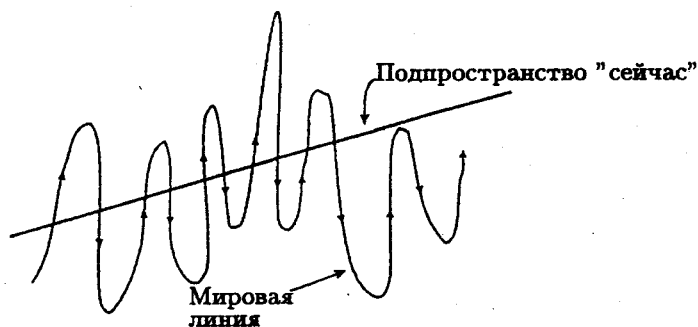


Рис. 15.2.

смелым поступком. Тем не менее, некоторое время спустя количественная теория использования опережающего потенциала была разработана, и мы имели теорию электродинамики, в которой заряды действовали только на другие заряды, путем использования потенциала, половина из которого запаздывающий потенциал и половина опережающий потенциал.

В другом случае был телефонный звонок от него в середине ночи, когда он сказал мне: "Я знаю, почему все электроны и позитроны имеют одинаковый заряд!" Затем он объяснял мне дальше: "Все они являются одним и тем же электроном!" Его идея состояла в том, что если один и тот же объект имеет мировую линию, которая является предельно сложной, то когда мы смотрим на него в подпространстве "сейчас", мы видим его во многих разных местах (См. рис. 15.2.) Позднее, я оказался способен создать качественную идею такого сорта, путем интерпретации позитрона как существование электрона, чья фаза изменяется обратным образом от времени, и развития упрощенных методов для вычисления матричных элементов, включающих в себя аннигиляцию и образование пар. Было бы действительно очень замечательно, если бы идея кротовых нор и геометродинамики могла бы быть завершена для того, чтобы усовершенствовать наше понимание Природы, и зная Уилера, мне не кажется невероятным то, что его интуиция может когда-нибудь подтвердиться.

Этими комментариями о проблемах, представляющих значительный интерес в настоящее время, мы заканчиваем обсуждение классической теории гравитации.

Лекция 16

16.1. Связь между полями вещества и гравитацией

В лекции 10 мы выписали члены действия, соответствующие распространению свободных частиц и полей. Все, что не вошло ранее в полное действие, может быть рассмотрено как взаимодействие между полями, и мы можем приступить к вычислению различных процессов путем использования теории возмущений. В этом случае нет необходимости в том, чтобы оправдываться в использовании возмущений, так как гравитация намного слабее других полей, для которых кажется, что теория возмущений дает предельно точные предсказания. Известные части общего действия являются следующими:

$$-\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2) - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2. \quad (16.1.1)$$

Первое приближение, которое мы сделаем, состоит в том, что мы положим коэффициент α равным нулю. Если оставить такой член в действии, то обычно ухудшается ситуация, связанная со многими проблемами расходимости, с которыми мы столкнемся позже, и в этом случае увеличивается объем вычислений. Поскольку любой выбор этого коэффициента может быть произвольным в нынешнем состоянии искусства эксперимента, мы выбираем значение, которое упрощает вычисления наиболее удобным для нас образом. Второй шаг состоит в том, чтобы вытащить член, представляющий пропагатор этих полей, путем введения разложения

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}. \quad (16.1.2)$$

После того, как мы записали действие на языке полей $h_{\mu\nu}$ и скалярного материального поля, мы получаем следующее соотношение:

$$\text{Действие} = \int d^4x F^2[h_{\mu\nu}] + \int d^4x I[h_{\mu\nu}, \phi] + \int d^4x M[\phi], \quad (16.1.3)$$

где

$$F^2[h^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \left[h^{\mu\nu, \lambda} \bar{h}^{\mu\nu}_{, \lambda} - 2 \bar{h}^{\mu\lambda}_{, \lambda} \bar{h}^{\mu\nu}_{, \nu} \right],$$

$$M = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2).$$

Вариации функции I по отношению к полям $h_{\mu\nu}$ или ϕ представляют члены источника в дифференциальных уравнениях полей. Эти уравнения могут

быть записаны в следующем виде в пространственном и импульсном представлениях:

$$\square \phi - m^2 \phi = - \left(\frac{\delta I}{\delta \phi} \right) \rightarrow \phi = - \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} I \left(\frac{\delta I}{\delta \phi} \right),$$

$$-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} + \bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda} + \bar{h}_{\nu\lambda,\mu}{}^{,\lambda} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad S^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\delta I}{\delta h_{\mu\nu}} \right). \quad (16.1.4)$$

Заметим, что $S_{\mu\nu}$ есть та величина, которую мы называли $T_{\mu\nu}^{\text{new}}$ в лекции 6 (см. соотношение (6.1.2)). Что мы должны делать дальше? Из-за тщательного построения первоначального действия как инвариантного интеграла может быть показано, что обыкновенная дивергенция тензора источника $S_{\mu\nu}$ тождественно равна нулю. В импульсном представлении

$$k^\nu S_{\mu\nu} = 0. \quad (16.1.5)$$

Тензор источника содержит в себе и источники материи, и источники гравитации. Из-за свободы, которую мы имеем в выборе калибровки, мы можем сделать тензор с чертой $\bar{h}_{\mu\nu}$ бездивергентным и, таким образом, получить решение

$$k^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow k^2 h_{\mu\nu} = \lambda \bar{S}_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \frac{\lambda}{k^2 + i\epsilon} \bar{S}_{\mu\nu}. \quad (16.1.6)$$

Тензор, стоящий справа, есть не просто тензор неизвестного источника: теперь он хорошо определен на языке первоначального действия (16.1.1) и разложения (16.1.2), так что уравнения являются совместными и энергия сохраняется. Раз у нас есть разложение по степеням константы связи λ , мы можем, используя обычные правила теории возмущения, приступить к вычислению всех диаграмм каждого заданного порядка λ . Ключевыми разложениями являются разложение $g^{\mu\nu}$ и разложение $\sqrt{-g}$. Первое легко может быть выписано по аналогии с разложением $(1+x)^{-1}$, когда x есть малая величина. Мы имеем

$$g^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + 4\lambda^2 h^\mu{}_\beta h^{\beta\nu} - 8\lambda^3 h^{\mu\beta} h_{\beta\tau} h^{\tau\nu} + \dots, \quad (16.1.7)$$

где необходимо помнить правило суммирования для плоского пространства-времени, как в соотношении (4.1.6). Выражение для разложения $\sqrt{-g}$ может быть вычислено посредством манипуляций, описанных в лекции 6. Используя соотношение (6.3.11) при

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\beta} \left(\delta^\beta{}_\nu + 2\lambda h^\beta{}_\nu \right),$$

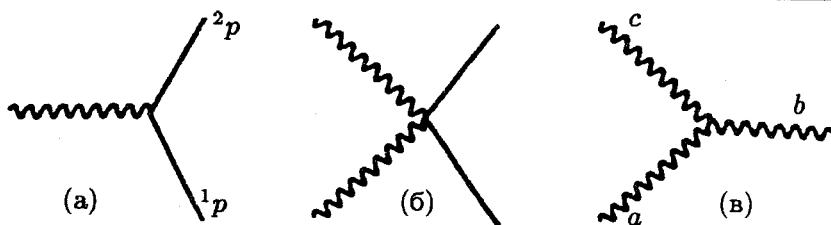


Рис. 16.1.

мы имеем

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-\text{Det } g_{\mu\nu}} &= \\
 &= \sqrt{-\text{Det } \eta_{\mu\nu}} \exp \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \log(\delta^\beta_\nu + 2\lambda h^\beta_\nu) \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \left(2\lambda h^\beta_\nu - \frac{1}{2} (2\lambda)^2 h^\beta_\tau h^\tau_\nu + \frac{1}{3} (2\lambda)^3 h^\beta_\tau h^\tau_\sigma h^\sigma_\nu + \dots \right) \right] \\
 &= \exp \left[\frac{1}{2} \left(2\lambda h^\beta_\beta - \frac{1}{2} (2\lambda)^2 h^\beta_\tau h^\tau_\beta + \frac{1}{3} (2\lambda)^3 h^\beta_\tau h^\tau_\sigma h^\sigma_\beta + \dots \right) \right] \\
 &= 1 + \lambda h^\beta_\beta - \lambda^2 \left(h^\beta_\rho \bar{h}^\rho_\beta \right) + \dots
 \end{aligned} \quad (16.1.8)$$

Подставляя эти выражения для $\sqrt{-g}$ и для $g^{\mu\nu}$ в действие, мы получаем явные выражения для связи материи и гравитации; результат для второго члена соотношения (16.1.1) есть, например, следующий:

$$\begin{aligned}
 S_m &= \frac{1}{2} \int \left[(\eta^{\mu\nu} - 2\lambda h^{\mu\nu} + (2\lambda)^2 h^{\mu\beta} h_\beta^\nu + \dots) (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) - m^2 \phi^2 \right] \\
 &\quad \left(1 + \lambda h^\rho_\rho - \lambda^2 (h^\sigma_\rho \bar{h}^\rho_\sigma) + \dots \right) d^4x \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x (\phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - \lambda \int d^4x h^{\mu\nu} \left[\overline{\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu} \right] \\
 &\quad - \lambda^2 \int d^4x \left[\frac{1}{2} h^\lambda_\rho \bar{h}^\rho_\lambda (\phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - m^2 \phi^2) - 2h^{\mu\rho} \bar{h}_\rho^\nu \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right].
 \end{aligned} \quad (16.1.9)$$

Члены самого низкого порядка включают в себя взаимодействия двух полей ϕ и одного h , что соответствует вершине, показанной на рис. 16.1(а). В каждой вершине мы требуем, чтобы импульсы сохранялись. Это правило происходит от объемного интегрирования в действии: нет вклада от члена, полная фаза которого не равна нулю. Запишем решение типа плоской волны следующим образом:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(iq \cdot x), \quad \phi = \exp(ip \cdot x); \quad (16.1.10)$$

на языке тензора поляризации $e_{\mu\nu}$, амплитуда в вершине первого порядка

$$-2\lambda \left[e^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} e^\rho_\rho (p_\tau p^\tau - m^2) \right]. \quad (16.1.11)$$

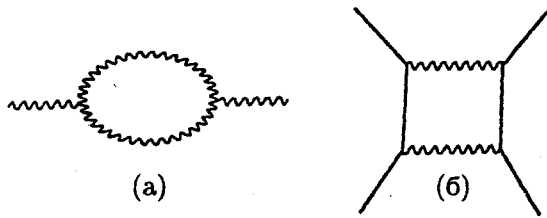


Рис. 16.2.

Любая диаграмма, которая включает в себя только такие вершины, теперь могла бы быть вычислена путем простой подстановки в соответствующие амплитуды в каждой вершине и пропагаторы частиц и гравитонов между вершинами в точности так же, как и в электродинамике.

Давайте посмотрим на следующий порядок. Члены, показанные в (16.1.9), включают в себя произведения двух h и ϕ , так что две прямых и две волнистых линии сходятся вместе в некоторой точке, как показано на рис. 16.1 (б). Имеются также члены, возникающие от разложения первого члена в соотношении (16.1.1), включающего в себя произведения трех h , соответствующие диаграммам, в которых три волнистых линии сходятся в точке, как показано на рис. 16.1 (в). Обилие неявных сумм по трем индексам приводит к членам, которые очень и очень громоздки, когда они записаны явным образом. Например, один из членов, в котором три волнистых кривых сходятся вместе, есть $h_{\mu\nu,\beta} h^{\mu\beta} h^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}$; когда мы переводим это на язык импульсов и компонент поляризации, мы получаем члены, соответствующие всем перестановкам трех гравитонов, например,

$${}^a q_\beta {}^a e_{\mu\nu} {}^b e^{\mu\beta} {}^c q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + {}^b q_\beta {}^b e_{\mu\nu} {}^a e^{\mu\beta} {}^c q_\alpha {}^c e^{\nu\alpha} + \\ + {}^b q_\beta {}^b e_{\mu\nu} {}^c e^{\mu\beta} {}^a q_\alpha {}^a e^{\nu\alpha} + \dots \quad (16.1.12)$$

Эта сложность сопровождает одиночную вершину, которая всегда соответствует одной части амплитуды; когда мы соединяем эти выражения, как, например, при вычислении диаграммы, подобной показанной на рис. 16.2 (а), мы можем получить ни много ни мало как 108 членов.

16.2. Завершение теории: простой пример гравитационного излучения

В предыдущем разделе мы привели полное описание теории. Осталось продолжить вычисления соответствующих диаграмм для любых физических процессов в соответствии с теми же самыми правилами, которые используются в электродинамике. Характерные примеры некоторых простейших диаграмм были разрешены в лекции 4; например, амплитуда рассеяния при обмене одиночным гравитоном задается в соотношении (4.3.5). На практике, при соответствующей симметризации некоторых выражений необходима определенная тщательность, но при наличии некоторого опыта это становится довольно простым, и обозначения типа "черты" очень полезны для того, чтобы избежать чрезмерных алгебраических вычислений.

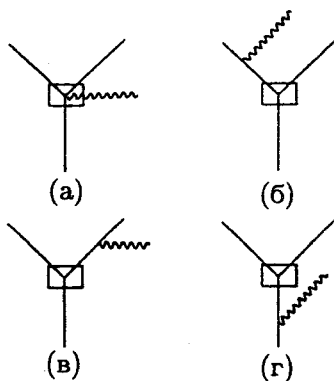


Рис. 16.3.

В самом низком порядке теория завершается путем этого уточнения. Все процессы, подходящим образом описываемые "древесными" диаграммами, не имеют трудностей для описания. "Древесными" диаграммами являются такие диаграммы, которые не содержат ни пузырей, ни замкнутых петель типа изображенных на рис. 16.2. Такое название очевидным образом связывается с тем фактом, что ветви дерева никогда сами по себе не замыкаются.

В более высоких порядках, когда мы допускаем пузыри и петли в диаграммах, теория оказывается неудовлетворительной, так как в этом случае она приводит к глупым результатам. Методы лечения этой болезни оказываются успешными только для одно-кольцевых диаграмм. Для того, чтобы обсудить эти средства лечения, для нас было бы проще изучить вкратце теорию векторного мезона Янга – Миллса, которая вызывает такие же трудности, но с этими трудностями значительно проще работать. Некоторые из этих трудностей имеют дело с отсутствием унитарности некоторых сумм диаграмм. Мы обсудим группу соотношений, которые выполнены между различными видами диаграмм. Эти соотношения не имеют прямых тестов, связанных с экспериментами по гравитации, но некоторые из них оказываются привычными по работе с другими полевыми теориями.

Я не знаю, возможно ли развить подобное средство лечения для анализа мультикольцевых диаграмм. Я полагаю, что нет; другими словами, я полагаю, что теория неперенормируема. Является ли это существенным возражением против теории, когда мы утверждаем, что она является неперенормируемой, я не знаю.

Наиболее интересная из тех проблем, с которыми мы будем иметь дело, это, возможно, проблема излучения гравитационных волн. Давайте в качестве исходного примера рассмотрим излучение одиночного гравитона, следующего распаду некоторых подходящих частиц. Так как мы будем использовать скалярную теорию вещества, возможно будет наилучшим то, что мы рассматриваем некоторый распад скалярных частиц, таких как $K \rightarrow 2\pi$. Испускание низкочастотных гравитонов необходимо для того,

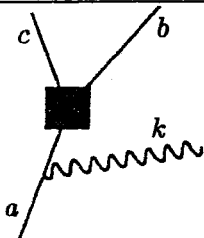


Рис. 16.4.

чтобы сказать гравитационным образом внешнему миру, что распад произошел, в основном так же, как фотон низкой энергии должен быть испущен при аналогичном распаде, когда некоторый заряд ускоряется. Вклад многих диаграммы, которые могут быть записаны так, что в них гравитон выходит из вершины распада, обычно много меньше, так что нам не нужно рассматривать этот случай сначала. В качестве упражнения могло бы быть полезным разрешить последние три диаграммы, показанные на рис. 16.3.

16.3. Излучение гравитонов при распаде частиц

Связь гравитонов с материей является настолько слабой, что поистине нет надежды пронаблюдать квантовые гравитационные эффекты, связанные с событиями, происходящими с элементарными частицами. В этом смысле вычисления, о которых мы говорим, что мы должны их делать, оказываются абсолютно не имеющими никакого отношения к практике. Тем не менее, мы предложили определенную теорию, и эти ненаблюдаемые процессы являются простейшими эффектами, которые наша теория предсказывает; они могут быть наблюдаемыми и важными в том случае, если взаимодействие будет сильнее.

Существует много одногравитонных диаграмм при распаде частицы. Для иллюстрации мы берем в рис. 16.4 $a \rightarrow b + c$. Амплитуда в вершине a -гравитона задается соотношением

$$-2\lambda e^{\mu\nu} \left[{}^1p_\mu {}^2p_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^1p_\alpha {}^2p^\alpha - m^2) \right], \quad (16.3.1)$$

где предшествующие верхние индексы 1 и 2 обозначают материальную частицу до и после вершины. После испускания частица a движется с импульсом $({}^ap - k)$ к вершине распада, отсюда ${}^2p^\alpha = ({}^ap - k)^\alpha$. Если мы положим, что амплитуда распада представляется величиной A , зависящей от импульса трех частиц (a, b, c), чьи траектории проникают в черный ящик, выражение для амплитуды есть

$$-2\lambda e^{\mu\nu} \left[{}^ap_\mu ({}^ap - k)_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} ({}^ap \cdot ({}^ap - k) - m_a^2) \right] \frac{1}{({}^ap - k)^2 - m_a^2} \left[A({}^ap - k, {}^bp, {}^cp) \right]. \quad (16.3.2)$$

Для наших целей точная природа амплитуды A не важна; она представляет собой все, что здесь происходило бы без гравитона.

Амплитуда, описываемая соотношением (16.3.2), оказывается большой только в том случае, когда пропагатор имеет очень маленькую величину, т.е. когда k много меньше, чем ${}^ap$, то движение соответствует движению практически свободной частицы. В предельном случае слабых гравитонов этот процесс идентичен процессу торможения излучения, тормозному излучению слабых фотонов; этот процесс тесно связан с классическим пределом, так как он зависит от того, как зарядовые (массовые) токи движутся. Знаменатель есть $-2{}^ap \cdot k$, и в пределе, когда частоты ω величины k являются очень малыми, мы можем положить $k = 0$ в числителе. Если мы выносим множитель λ/ω , то второй множитель в амплитуде имеет определенный предел, зависящий только от направления гравитона, его поляризации и амплитуды распада

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{e^{\mu\nu} {}^ap_\nu {}^ap_\mu}{{}^ap \cdot k/\omega} \cdot A({}^ap, {}^bp, {}^cp). \quad (16.3.3)$$

Имеется три похожих диаграммы, соответствующих испусканию гравитона из любой из этих трех частиц (a, b, c). Диаграмма, соответствующая гравитону, выходящему из черного ящика, как может быть легко показано, много меньше по значению; это происходит потому, что почти нет свободной частицы, которая бы двигалась, отсюда следует, что нет "мало-го" знаменателя, который бы увеличил этот член. Если мы пренебрегаем этим членом и более высокими порядками, мы находим, что амплитуда испускания некоторого количества гравитонов есть

$$\frac{\lambda}{\omega} \cdot a \cdot A({}^ap, {}^bp, {}^cp); \quad a = \sum_i {}^ip_\mu {}^ip_\nu (-); \frac{e^{\mu\nu}}{p \cdot (k/\omega)}, \quad (16.3.4)$$

где i представляет частицу, соединенную с вершиной гравитона, и где $(-)$ есть множитель, равный $+1$ для входящей частицы и -1 для выходящей частицы. Величина a есть кинематический и геометрический множитель. Для того, чтобы вычислить вероятность перехода, мы возводим в квадрат амплитуду, подставляем множитель плотности состояния $k^2 dk d\Omega/(2\pi)^3$ и множитель нормализации, который есть $\pi/(2E_i)$, где E_i есть энергия каждой частицы. Получаем следующий результат

$$P = a^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\lambda^2}{4\pi^2}, \quad (16.3.5)$$

задающий вероятность испускания гравитона при одном распаде. Множитель λ^2 делает эту вероятность предельно малой, настолько малой, что шансы весьма и весьма велики против того, чтобы был зарегистрирован измеряемый отскок в камере Вильсона, в водородной пузырьковой камере или соответствующее событие в искровой камере. Множитель с обратной зависимостью от энергии $1/\omega$ приводит к тому, что эта величина очень велика при экстремально малых значениях энергии гравитона; тем не менее,

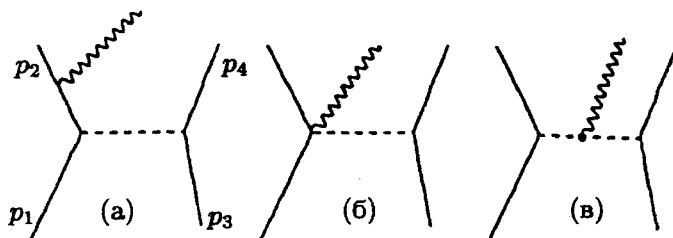


Рис. 16.5.

этот факт почти не относится к делу, так как величина λ^2/ω становится близкой к 1 только при значениях энергии настолько низких, что длина волны гравитона должна была бы превосходить радиус вселенной на некоторый множитель, такой как 10^{39} .

Хотя мы разрабатывали теорию, предполагающую наличие скалярных частиц, в низкоэнергетическом пределе ответ оказывается тем же самым вне зависимости от того, какой может быть спин частиц. Это происходит потому, что в низкоэнергетическом пределе к делу относятся только массовые токи и движение масс. В нашем ответе, конечно, имеется инфракрасная расходимость, так что вероятность испускания гравитона (если его энергия не относится к нашему рассмотрению) оказывается бесконечно большой. Это беспокойство является не более серьезным, чем инфракрасная расходимость для излучения низкоэнергетических фотонов, и эти проблемы могут быть устранены теми же самыми трюками, как и в низкочастотном "тормозном излучении."

16.4. Излучение гравитонов при рассеянии частиц

Мягкий гравитон может быть испущен, когда две частицы рассеиваются при любом процессе, включающим в себя обмен гравитоном. Диаграммы первого порядка, которые описывают такие процессы, показаны на рис. 16.5. В низкоэнергетическом пределе важны только диаграммы типа (а), которые являются такими диаграммами, где вершина гравитона соединена со свободной частицей. Процессы, описываемые двумя другими диаграммами, являются много менее вероятными, если импульс гравитона много меньше, чем перенос импульса q ; в диаграмме (б), например, почти нет свободной частицы, которая бы двигалась, отсюда следует, что нет малого знаменателя. В диаграмме (в) второй пропагатор есть величина порядка $1/(q - k)^2 \approx 1/q^2$. Насколько мы интересуемся излучением, точная природа процессов общего рассеяния не важна. Я подчеркиваю это последнее утверждение, потому что всегда найдутся какие-нибудь теоретики, которые постоянно приводят какие-то мистические аргументы, для того чтобы утверждать, что излучение не происходит, если рассеяние является гравитационным – нет оснований для таких утверждений; что касается этого вопроса, излучение гравитационных волн является настолько реальным, насколько это возможно; вращение в системе Солнце – Земля может быть источником гравитационных волн. На самом деле, в этом разделе мы, воз-

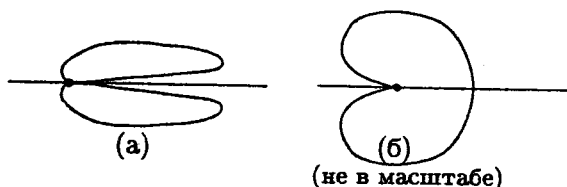


Рис. 16.6.

можно, должны ограничить наши размышления рассеяниями частиц; для движений таких больших объектов, как планеты или звезды, может быть более последовательно работать в классическом пределе. Гравитация не всегда является пренебрежимо слабой, это происходит только в процессах атомных столкновений.

Структура четырех амплитуд, соответствующих диаграммам, таким как показанные на рис. 16.5(a), является такой же, как и при распадах частиц. Если мы описываем поляризацию гравитона тензором e , то полная амплитуда пропорциональна амплитуде рассеяния в отсутствии гравитона, некоторым энергетическим множителям и величине

$$a = \sum_i (-)^i \frac{p \cdot e \cdot i v}{1 - i v \cos \theta}. \quad (16.4.1)$$

Знаменатель представляет собой произведение $i p \cdot k = E\omega - p \cdot k$, когда значения энергии E и ω вынесены в качестве множителей. Так как $p = Ev$, верхние индексы i относятся к каждой из четырех частичных ветвей в столкновении. Числитель содержит свернутое произведение тензора поляризации $e_{\mu\nu}$ с двумя импульсами (до и после) частицы, с которой он связан, это единственный физический тензор второго порядка, который может быть построен для скалярной частицы.

Ответы, которые мы получили, являются весьма близкими к тем, что имеют место при испускании фотона; существенное различие состоит в том, что взаимодействие в электромагнетизме осуществляется вектором, в то время как в гравитации тензором. Для быстро движущейся частицы $v \approx c$, так что знаменатель в соотношении (16.4.1) может быть очень мал и амплитуда может становиться очень большой вблизи $\theta \approx 0$. С другой стороны, тензор поляризации всегда поперечен к импульсу гравитона. В электромагнетизме вектор поляризации также поперечен импульсу фотона; существует только одно скалярное произведение в числителе, так что когда величина θ мала и $v \approx c$,

$$a_{e.m} \rightarrow \frac{p \cdot e}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \approx \frac{2}{\theta}. \quad (16.4.2)$$

Излучение фотона может быть очень большим для малых углов. На самом деле взрыва не происходит, поскольку величина v никогда не бывает в точности равной c . Диаграмма направленности, соответствующая одиночной

частице, имеет две полости, как показано на рис. 16.6. В гравитации взаимодействие осуществляется тензорным полем и таким образом является вдвойне трансверсальным; в пределе $\theta \rightarrow 0$ и $v = 1$,

$$a_g \rightarrow \frac{p \cdot e \cdot p}{1 - v \cos \theta} \propto \frac{\sin^2 \theta}{1 - v \cos \theta} \approx 2, \quad (16.4.3)$$

так что диаграмма направленности не направлена строго вперед, но в целом более однородна по сравнению с электромагнетизмом (рис. 16.6 (б)). Это различие может быть замечено интуитивно, будучи следствием того факта, что при формировании излучения спин два требует больше "трансверсальности", чем спин, равный единице.

Имеется одна амплитуда с угловой структурой такой же, как и на рис. 16.6(б), в окрестности каждого из четырех направлений частиц в задаче рассеяния. Интенсивность испускания гравитона является квадратом суммы четырех амплитуд, так что в общем случае это выражение выглядит достаточно симметричным образом.

Для медленно движущихся частиц $v \ll c$ знаменатель не играет существенной роли, и диаграмма направленности определяется исключительно числителем. Эта величина может быть выражена как свернутое произведение двух тензоров

$$\sum_i (-)_i {}^i p \cdot e \cdot {}^i v = e^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \\ S_{\alpha\beta} = \sum_i (-)_i p_\alpha v_\beta. \quad (16.4.4)$$

Характер излучения полностью определяется тензором $S_{\alpha\beta}$, который представляет давление, производимое при столкновении. Мы узнаем, что форма этого выражения в точности аналогична форме давления в движущейся жидкости

$$\text{Давление} = \rho v_\alpha v_\beta, \quad (\rho = \text{плотность массы}). \quad (16.4.5)$$

Если мы имеем столкновение между двумя частицами, давление $S_{\alpha\beta}$ имеет простое выражение на языке средних скоростей (до и после) сталкивающихся частиц. Мы положим передачу импульса равной $Q = p_2 - p_1 = -p_4 + p_3$ (см. рис. 16.5). Запишем средние скорости

$$v = (p_2 + p_1)/2m, \quad v' = (p_3 + p_4)/2m'. \quad (16.4.6)$$

На языке этих комбинаций может быть легко показано после соответствующей симметризации, что

$$S_{\alpha\beta} = 2(v' - v)_\alpha Q_\beta. \quad (16.4.7)$$

С помощью этой формулы мы можем теперь ответить на интересный вопрос: при столкновении между легкой и тяжелой частицами, какая из них

дает наибольший вклад в излучение? Приведенная формула говорит нам, что если $v' \ll v$, излучение зависит только от v . При рассмотрении излучения от скользящих столкновений очень легкой частицы с массивным объектом, мы теперь знаем наверняка, что разрешено рассматривать массивную частицу, как всегда находящуюся в покое. Это правило работает при условии, что ускорение почти перпендикулярно скорости так, что $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \approx 0$.

Эта формула применяется здесь и для упругих, и для неупругих столкновений, которые могут оставлять одну или обе массы в возбужденном состоянии.

16.5. Источники классических гравитационных волн

Теперь мы переходим к описанию классического гравитационного излучения. Так же, как в квантово-механическом случае, мы найдем, что излучателем гравитационных волн также является давление. Исходная точка в нашем обсуждении есть дифференциальное уравнение

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \lambda S_{\mu\nu}. \quad (16.5.1)$$

Это решение продолжается в точности также, как и в электродинамике, для решений векторных потенциалов, создаваемых произвольными токами. Если мы предполагаем гармоническое изменение от времени, такое как $\exp(-i\omega t)$, для всех величин, то векторный потенциал задается соотношением:

$$A_\mu(1) = \int dV_2 \frac{j_\mu(2) \cdot \exp(i\omega r_{12})}{4\pi r_{12}}, \quad (16.5.2)$$

где индексы 1 и 2 относятся к различным пространственным положениям; (1) есть место, в котором мы вычисляем потенциалы A_μ , (2) есть места, где находятся токи, и r_{12} — расстояние между этими точками. Один из наиболее простейших случаев излучения соответствует осциллирующему диполю такому, что токи ограничиваются небольшой областью пространства. Довольно непосредственными выкладками проводим вычисления пространственных компонент A_x, A_y, A_z ; временной компонент или скалярный потенциал наиболее легко получается из дивергентного условия на A_μ

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \rightarrow i\omega A_t = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (16.5.3)$$

Эта ситуация в точности аналогична той, которая имеет место в гравитации. Временные части полей $\bar{h}_{\mu\nu}$ наиболее легко получаются из дивергентных условий после вычислений пространственных частей по следующему правилу:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int dV_2 S_{\mu\nu}(2) \frac{\exp(i\omega r_{12})}{r_{12}}. \quad (16.5.4)$$

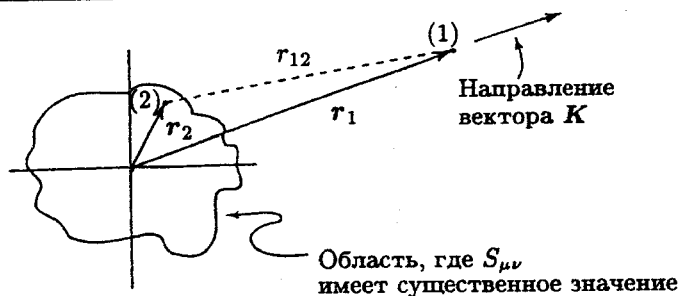


Рис. 16.7.

Для того, чтобы вычислить такие величины, как мощность излучаемых гравитационных волн, мы рассмотрим точку (1), расположенную достаточно далеко от системы, на некотором расстоянии, которое много больше, чем размеры области, где, как ожидается, величина $S_{\mu\nu}(2)$ является достаточно большой, как это показано на рис. 16.7. Мы можем разложить расстояние r_{12} , как степенные ряды от радиальных расстояний точек (1) и (2) от некоторого начала координат вблизи точки (2), и мы находим, что

$$r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta} = r_1 \sqrt{1 - (2r_2/r_1) \cos \theta + \dots} \approx r_1 - r_2 \cos \theta + \dots, \quad (16.5.5)$$

когда $r_2 \ll r_1$. Здесь $\cos \theta$ — косинус угла между векторами r_2 и r_1 . Так как любые волны, наблюдаемые в точке (1), будут иметь вектор импульса, направленный вдоль r_1 , мы получаем следующее выражение для $\bar{h}_{\mu\nu}(1)$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi r_1} \exp(i\omega r_1) \int d^3r_2 S_{\mu\nu}(2) \exp(-iK \cdot r_2). \quad (16.5.6)$$

Интеграл, появляющийся в соотношении (16.5.6), теперь не зависит от точки (1), мы видим, что тензор давления $S_{\mu\nu}(2)$ является источником сферических волн.

В случае электромагнетизма наипростейшие случаи излучения часто соответствуют дипольному приближению, которое представляет собой первый ненулевой член в последовательности интегралов, соответствующих разложению экспоненты. Поскольку источник гравитационных волн является тензором вместо того, чтобы быть вектором (как в случае электромагнетизма), первый ненулевой член в гравитации имеет квадрупольный характер. Использование этого разложения оказывается оправданным, если частоты такие, что $K \cdot r_2$ много меньше, чем 1, в области, где величина $S_{\mu\nu}$ оказывается значимой. Для всех вращающихся масс таких, как двойные звезды или системы типа звезда — планета, периоды движения (скажем, ~ 1 год для системы Земля — Солнце) много больше, чем время, которое требуется гравитации для того, чтобы пройти расстояние порядка размера системы (~ 16 минут для системы Земля — Солнце), так что члены разложения очень быстро становятся все меньше и меньше. Таким

образом, почти во всех случаях, представляющих астрономический интерес, длины волн много больше, чем размеры объекта. Результат состоит в том, что поля $\bar{h}_{\mu\nu}$ пропорциональны интегралам поперечных давлений (полное поперечное давление)

$$\bar{h}_{ab} = -\lambda \frac{\exp(i\omega r)}{4\pi R} S_{ab}, \quad \text{где} \quad S_{ab} = \int d^3r S_{ab}(r). \quad (16.5.7)$$

Значения давления в направлении *вдоль* волнового вектора не относятся к делу. Любое качественное правило, которое полезно в электромагнетизме, целиком переносится в гравитацию.

Какова мощность, испускаемая такой волной? Существует огромное количество специалистов, которые в силу многолетнего предрассудка, что гравитация является чем-то таинственным и отличным от всего остального, напрасно обеспокоены этим вопросом; они считают, что гравитационные волны не переносят энергии совсем. Мы можем определенно показать, что гравитационные волны могут на самом деле нагреть стенку, так что нет вопроса об энергосодержании в гравитационных волнах. Эта ситуация в точности аналогична той, которая имеет место в электромагнетизме, и в квантовой интерпретации каждый испускаемый гравитон уносит величину энергии $\hbar\omega$.

Список литературы

- [Alva 89] Alvarez, Enrique (1989). "Quantum gravity: an introduction to some recent results," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 561–604.
- [Asht 86] Ashtekar, A. (1986). "New variables for classical and quantum gravity," *Physical Review Letters*, **57**, 2244–2247.
- [Asht 87] Ashtekar, A. (1987). "A new Hamiltonian formulation of general relativity," *Physical Review D*, **36**, 1587–1603.
- [Baad 52] Baade, Walter. (1952). "Report of the Commission on Extragalactic Nebulae," *Transactions of the International Astronomical Union*, **8**, 397–399.
- [Bard 65] Bardin, James M. (1965). "Stability and dynamics of spherically symmetric masses in general relativity," unpublished Ph.D. thesis, California Institute of Technology.
- [BBIP 91] Balbinot, Roberto, Brady, Patric R., Israel, Werner, and Poisson, Eric (1991). "How singular are black-hole interiors?", *Physics Letters A*, **161**, 223–226.
- [Birk 43] Birkhoff, G. (1943). "Matter, electricity, and gravitation in flat space-time," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, **29**, 231–239.
- [BTM 66] Bardeen, James M., Thorne, Kip S., and Meltzer, David W. (1966). "A catalog of methods for studying the normal modes of radial pulsation of general relativistic stellar models," *Astrophysical Journal*, **145**, 505–513.
- [Bond 57] Bondi, Hermann. (1957). "Plane gravitational waves in general relativity," *Nature*, **179**, 1072–1073.
- [BoDe 75] Boulware, David G. and Deser, Stanley (1975). "Classical general relativity derived from quantum gravity," *Annals of Physics*, **89**, 193–240.
- [Cart 28] Cartan, Elie. (1928). "*Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*," Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule IX (Gauthier-Villars, Paris, France).
- [Chan 64] Chandrasekhar, S. (1964). "Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Physical Review Letters*, **12**, 114–116.
- [ChHa 82] Chandrasekhar, S. and Hartle, James B. (1982). "On crossing the Cauchy horizon of a Reissner-Nordström black hole," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **384**, 301–315.
- [Cock 65] Cocke, W. John (1965). "A maximum entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres," *Annales de l'Institut Henri Poincaré, A*, **2**, 283–306.
- [Dese 70] Deser, Stanley. (1970). "Self-interaction and gauge invariance," *General Relativity and Gravitation*, **1**, 9–18.
- [Dese 87] Deser, Stanley. (1987). "Gravity from self-interaction in curved background," *Classical and Quantum Gravity*, **4**, L99–L105.
- [DeWi 57] DeWitt, Cecile M. (1957). *Conference on the Role of Gravitation in Physics* at the University of North California, Chapel Hill, March 1957; WADC Technical Report 57-216 (Wright Air Development Center, Air Research and Development Command, United States Air Force, Wright Patterson Air Force Base, Ohio).

- [DeWi 67a] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, II," *Physical Review*, **162**, 1195–1239 (имеется русский перевод в книге: Левитт Б. *Динамическая теория групп и полей* (1987), (Наука, Москва), 239.
- [DeWi 67b] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, III," *Physical Review*, **162**, 1239–1256.
- [DeWi 94] DeWitt, Bryce S. (1994). Private Communication.
- [Dira 37] Dirac, P. A. M. (1937). "The cosmological constants," *Nature*, **139**, 323.
- [Dira 38] Dirac, P. A. M. (1938). "New basis for cosmology," *Proc. R. Soc. London A*, **165**, 199–208.
- [DrMa 77] Drechsler, W. and Mayer, M. E. (1977). *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories* (Lecture Notes in Physics, Volume 67, Springer-Verlag, New York).
- [Eddi 31] Eddington, A. (1931). "Preliminary note on the masses of the electron, the proton, and the universe," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **27**, 15–19.
- [Eddi 36] Eddington, A. (1936). *Relativity Theory of Protons and Electrons* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Eddi 46] Eddington, A. (1946). *Fundamental Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Eins 39] Einstein, Albert (1939). "On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses," *Annals of Mathematics*, **40**, 922–936.
- [FaPo 67] Faddeev, L. D. and Popov, V. N. (1967). "Feynman diagrams for the Yang-Mills Field," *Physics Letters B*, **25**, 29–30.
- [Feyn 57] Feynman, Richard P. (1957). "Conference on the Role of Gravitation in physics, an expanded version of the remarks by R. P. Feynman on the reality of gravitational waves, mentioned briefly on page 143 of the Report [DeWi 57]," typescript in Box 91, File 2 of The Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.
- [Feyn 61] Feynman, Richard P. (1961). Unpublished letter to Victor F. Weisskopf, January 4–February 11, 1961; in Box 3, File 8 of the Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.
- [Feyn 63a] Feynman, Richard P., Leighton, Robert B., and Sands, Matthew (1963). *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts) (Имеется русский перевод: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. (1965–1967) *Фейнмановские лекции по физике, тт. 1–9* (Мир, Москва).
- [Feyn 63b] Feynman, Richard P. (1963). "Quantum theory of gravitation", *Acta Physica Polonica*, **24**, 697–722.
- [Feyn 67] Feynman, Richard P. (1967). *The Character of Physical Law* (M.I.T., Cambridge). (Имеется русский перевод: Фейнман Р. (1968) *Характер физических законов* (Мир, Москва)).
- [Feyn 72] Feynman, Richard P. (1972). "Closed loop and tree diagrams" and "Problems in quantizing the gravitational field, and the massless Yang-Mills

- field," in *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, edited by John R. Klauder (W.H. Freeman, San Francisco), pp. 355–408.
- [Feyn 85] Feynman, Richard P., as told Leighton, Ralph (1985). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (W.W. Norton, New York).
- [Feyn 88] Feynman, Richard P., as told Leighton, Ralph (1988). *What Do You Care What Other People Think?* (W.W. Norton, New York).
- [Feyn 89] "Feynman's office: The last blackboards," *Physics Today*, **42** (2), 88 (1989).
- [FiPa 39] Fierz, M. and Pauli, W. (1939). "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **173**, 211–232.
- [Fink 58] Finkelstein, David (1958). "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," *Physical Review*, **110**, 965–967.
- [Fowl 64] Fowler, William A. (1964). "Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation," *Reviews of Modern Physics*, **36**, 545–555.
- [FuWh 62] Fuller, Robert W. and Wheeler, John A. (1962). "Causality and multiply connected space-time," *Physical Review*, **128**, 919–929.
- [FWML 74] Fairbank, W., Witteborn, F., Madey, J., and Lockhart, J. (1974). "Experiments to determine the force of gravity on single electrons and positrons," *Experimental Gravitation: Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course LVI, B. Bertotti, ed. (Academic Press, New York) 310–330.
- [Gell 89] Gell-Mann, Murray (1989). "Dick Feynman—The guy in the office down the hall," *Physics Today*, **42** (2), 50–54.
- [Good 61] Good, M.L. (1961). " K_2^0 and the equivalence principle," *Physical Review*, **121**, 311–313.
- [GoSa 86] Goroff, M. and Sagnotti, A. (1986). *Nuclear Physics B*, **266**, 709.
- [GrBr 60] Graves, John C. and Brill, Dieter R. (1960). "Oscillatory character of Reissner-Nordström metric for an ideal charged wormhole," *Physical Review*, **120**, 1507–1513.
- [GSW 87] Green, M., Schwarz, J., and Witten, E. (1987). *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England).
- [GrPe 88] Gross, D. and Periwal, V. (1988). "String perturbation theory diverges," *Physical Review Letters*, **60**, 2105–2108.
- [Gupt 54] Gupta, Suraj N. (1954). "Gravitation and electromagnetism," *Physical Review*, **96**, 1683–1685.
- [Guth 81] Guth, Alan H. (1981). "Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems," *Physical Review D*, **23**, 347–356.
- [HaEl 73] Hawking, Stephen W. and Ellis, George F.W. (1973). *The Large Scale Structure of Space-time*, (Cambridge University Press, Cambridge, England). (Имеется русский перевод: Хокинг С., Эллис Дж. (1977) *Структура пространства-времени* (Мир, Москва)).
- [Hatf 92] Hatfield, B. (1992). *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, (Addison-Wesley, Reading, MA).
- [Hilb 15] Hilbert, D. (1915). "Die Grundlagen der Physik," *Königl. Gesell. d.*

- Wiss. Göttingen, Nachhr. Math.-Phys. Kl.*, 395–407. (Имеется русский перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, (1979), с. 133–145 (Мир, Москва)).
- [HoFo 63] Hoyle, Fred, and Fowler, William A. (1963). "On the nature of strong radio sources," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **125**, 169–176.
- [Hoyl 48] Hoyle, Fred (1948). "A new model for the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **108**, 372–382.
- [HWWWh 58] Harrison, B. Kent, Wakano, Masami, and Wheeler, John A. (1958). "Matter-energy at high density; endpoint of thermonuclear evolution," in *Onzieme Conseil de Physique Solvay, La Structure et l'Evolution de l'Univers*, (Editions R. Stoops, Brussels), pp. 124–148.
- [Iben 63] Iben, Icko, Jr. (1963). "Massive stars in quasistatic equilibrium," *Astrophysical Journal*, **138**, 1090–1096.
- [JaSm 88] Jacobson, T. and Smolin, L. (1988). "Nonperturbative quantum geometries," *Nuclear Physics B*, **299**, 295–345.
- [JeDG 53] Jennison, R. C. and Das Gupta, M. K. (1953). "Fine structure of the extra-terrestrial radio source Cygnus 1," *Nature*, **172**, 996–997.
- [Klei 89] Kleinert, H. (1989). "Quantum mechanics and path integrals in spaces with curvature and torsion," *Modern Physics Letters A*, **4**, 2329–2337.
- [Kore 74] Корепин, Владимир (1974). Неопубликованный диплом, Ленинградский Государственный Университет.
- [Krai 47] Kraichnan, Robert H. (1947). "Quantum theory of the linear gravitational field," unpublished B.S. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Krai 55] Kraichnan, Robert H. (1955). "Special relativistic derivation of generally covariant gravitation theory," *Physical Review*, **98**, 1118–1122.
- [Krai 56] Kraichnan, Robert H. (1956). "Possibility of unequal gravitational and inertial masses," *Physical Review*, **101**, 482–488.
- [Krus 60] Kruskal, Martin (1960). "Maximal extension of the Schwarzschild metric," *Physical Review*, **119**, 1743–1745.
- [LaLi 51] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1951). *The Classical Theory of Fields*, translated by M. Hammermesh (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts) (Имеются оригинальные русские издания, например, Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (1988) *Теория поля* (Наука, Москва)).
- [LiBr 90] Lightman, Alan and Brawer, Roberta (1990). *Origins: The Lives and Worlds of Modern Cosmologists*, (Harvard University Press, Cambridge).
- [MaWh 66] May, Michael M. and White, Richard H. (1966). "Hydrodynamical calculations of general relativistic collapse," *Physical Review*, **141**, 1232–1241.
- [Mich 63] Michael, F. Curtis (1963). "Collapse of massive stars," *Astrophysical Journal*, **138**, 1097–1103.
- [Miln 34] Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 64; McCrea, W. and Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 73.
- [MiWh 57] Misner, Charles W. and Wheeler, John A. (1957). "Classical physics

- as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space," *Annals of Physics*, **2**, 525–603 reprinted in [Whee 62].
- [MTW 73] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., and Wheeler, John A. (1973). *Gravitation*, (W.H. Freeman, San Francisco). (Имеется русский перевод Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. (1977) *Гравитация*, тт. 1–3 (Мир, Москва)).
- [NiGo 91] Nieto, M. and Goldman, T. (1991). "The arguments against "antigravity" and the gravitational acceleration of antimatter," *Physics Reports*, **205**, 221–281.
- [OpSn 39] Oppenheimer, J. Robert and Snyder, Hartland (1939). "On Continued Gravitational Contraction," *Physical Review*, **56**, 455–459. (Имеется русский перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, (1979), 353–361 (Мир, Москва)).
- [Penr 65] Penrose, Roger (1965). "Gravitational collapse and spacetime singularities," *Physical Review Letters*, **14**, 57–59. (Имеется русский перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, (1979), 390–395 (Мир, Москва)).
- [Podu 64] Подурец М. А. (1964). "Коллапс звезды с учетом противодавления," *Доклады Академии Наук*, **154**, 300–301.
- [RoSm 88] Rovelli, C. and Smolin, L. (1988). "Loop representation for quantum general relativity," *Nuclear Physics B*, **331**, 80–152.
- [Schi 58] Schiff, L. (1958). "Sign of the gravitational mass of the positron," *Physical Review Letters*, **1**, 254–255.
- [Schi 59] Schiff, L. (1959). "Gravitational properties of antimatter," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45**, 69–80.
- [Schm 63] Schmidt, Maarten A. (1963). "3C 273: A star-like object with large red-shift," *Nature*, **197**, 254–255.
- [Schu 85] Schutz, Bernard F. (1985). *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [Schw 16] Schwarzschild, Karl (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie," *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik*, **1916**, 189–196. (Имеется русский перевод в сб.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, (1979), 199–207 (Мир, Москва)).
- [Syke 94] Sykes, Christopher (1994). *No ordinary genius: the illustrated Richard Feynman* (W. W. Norton, New York).
- [Thir 18] Thirring, H. (1918). "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 33–39; Thirring, H. and Lense, J. (1918). "Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 156–163; Thirring, H. (1921). "Berichtigung zu meiner Arbeit: 'Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie'," *Phys. A.*, **22**, 29–30.

- [tHVe 74] t'Hooft, G. and Veltman, M. (1974). *Ann. Inst. Henri Poincare*, **20**, 69.
- [Thor 94] Thorne, Kip S. (1994). *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, (W. W. Norton, New York).
- [Toop 66] Tooper, Robert F. (1966). "The 'standard model' for massive stars in general relativity," *Astrophysical Journal*, **143**, 465–482.
- [vanN 81] van Nieuwenhuizen, Peter (1981). "Supergravity," *Physics Reports*, **68**, 189–398.
- [Vebl 27] Veblen, O. (1927). *Invariants of Quadratic Differential Forms*, (Cambridge Tracts in Math and Math Phys., Cambridge University Press, London). (Имеется русский перевод: Веблен О. (1948) *Инварианты дифференциальных квадратичных форм* (Гостехиздат, Москва)).
- [Wald 84] Wald, Robert M. (1984). *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago).
- [Wald 86] Wald, Robert M. (1986). "Spin-two fields and general covariance," *Physical Review*, **D33**, 3613–3625.
- [Wein 64a] Weinberg, Steven (1964). "Derivation of gauge invariance and the equivalence principle from Lorentz invariance of the S-matrix," *Physics Letters*, **9**, 357–359.
- [Wein 64b] Weinberg, Steven (1964). "Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass," *Physical Review*, **135**, B1049–B1056.
- [Wein 72] Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York). (Имеется русский перевод Вейнберг С. (1975) *Гравитация и космология* (Мир, Москва)).
- [Wein 79] Weinberg, Steven (1979). "Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation," in *General Relativity: An Einstein Centenary Volume*, edited by S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, England), pp. 790–831. (Имеется русский перевод в сб.: *Общая теория относительности*, сс. 407–455, (Мир, Москва, 1983)).
- [Wein 89] Weinberg, Steven (1989). "The cosmological constant problem," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 1–22.
- [Went 49] Wentzel, G. (1949). *Quantum Theory of Fields*, (Interscience, New York).
- [Whee 62] Wheeler, John A. (1962). *Geometrodynamics*, (Academic Press, New York).
- [Whee 90] Wheeler, John A. (1990). *A Journey into Gravity and Spacetime* (Scientific American Library, W. H. Freeman, New York).
- [WhFe 45] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1945). "Interaction with the absorber as the mechanism of radiation," *Reviews of Modern Physics*, **17**, 157–181.
- [WhFe 49] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1949). "Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action," *Reviews of Modern Physics*, **21**, 425–433.
- [WiFa 67] Witteborn, F. and Fairbank, W. (1967). "Experimental comparison

- of the gravitational force on freely falling electrons and mettalic electrons," *Physical Review Letters*, **19**, 1049–1052.
- [Yang 77] Yang, C. N. (1977). *Ann. New York Acad. Sci.*, **294**, 86.
- [Белл 76*] Беллман Р. (1976) *Введение в теорию матриц* (Наука, Москва).
- [Берг 47*] Бергман П.Г., (1947) *Введение в теорию относительности* (Гос. издат. иностр. лит., Москва).
- [Берк 85*] Берке У. (1985) *Пространство-время, геометрия, космология* (Мир, Москва).
- [БеКо 89*] Берков А.В., Кобзарев И.Ю. (1989) *Теория тяготения Эйнштейна. Общие принципы и экспериментальные следствия* (МИФИ, Москва); Берков А.В., Кобзарев И.Ю. (1990) *Приложения теории тяготения Эйнштейна к астрофизике и космологии* (МИФИ, Москва).
- [БоШи 80*] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. (1980) *Квантовые поля* (Наука, Москва).
- [Гант 88*] Гантмахер Ф.Р. (1988) *Теория матриц* (Наука, Москва).
- [Грав 96*] *Гравитация. Дискуссионный журнал*, **2**, вып. 2 (1996, Санкт-Петербург).
- [Леви 85*] Левин П. (1985) *Случайная Вселенная* (Мир, Москва).
- [ДЗС 88*] Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. (1988) *Космология ранней Вселенной* (МГУ, Москва).
- [ДНФ 86*] Дубровин Б.Л., Новиков С.П., Фоменко А.Т. (1986) *Современная геометрия* (Наука, Москва).
- [Заха 88*] Захаров А.Ф. (1988), "Об эффективном сечении захвата частиц черной дырой Шварцшильда", *Астрон. ж.*, **65**, 877–879.
- [Заха 97*] Захаров А.Ф. (1997) *Гравитационные линзы и микролинзы* (Янус-К, Москва).
- [Заха 98*] Захаров А.Ф., Сажин М.В. (1998), "Гравитационное микролинзирование", *Успехи физ. наук*, **168**, 1041–1082.
- [Заха 99*] Захаров А.Ф. (1999), "Физика черных дыр", *Успехи физ. наук*, **169**, 1041–1045.
- [КШМХ 82*] Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херлт Э. (1982) *Точные решения уравнений Эйнштейна* (Энергоиздат, Москва).
- [ЛПНТ 79*] Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. (1979) *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (Мир, Москва).
- [ЛПП 97*] Липунов В.М., Постнов К.А., Прохоров М.Е. (1997), "Черные дыры и гравитационные волны: возможность одновременного обнаружения лазерными интерферометрами первого поколения", *Письма в астрон. ж.*, **23**, 563–568.
- [Логу 89*] Логунов А.А., Мествиришвили М.А. (1989) *Релятивистская теория гравитации* (Наука, Москва); Логунов А.А. (1995), *Успехи физ. наук*, **165**, 187 – 203; Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. (1996) "Energy-momentum tensor of matter as a source of the gravitational field", in *Proceedings of the XVIII Workshop on High Energy Physics and Field Theory: Quanta, Relativity, Gravitation*, pp. 65–86.
- [ННП 78*] Надежин Д.К., Новиков И.Д., Полнарев А.Г. (1978) "Гидродина-

- мика образования первичных черных дыр", *Астрон. ж.*, **55**, с. 216–230.
- [Паул 83*] Паули В. (1983) *Теория относительности* (Наука, Москва).
- [Раше 67*] Рашевский П.К. (1967) *Риманова геометрия и тензорный анализ* (Наука, Москва).
- [Синг 63*] Синг Дж. (1963) *Общая теория относительности* (Изд. Иностранной литературы, Москва).
- [Соко 71*] Сокольников И. (1971) *Тензорный анализ* (Наука, Москва).
- [Утия 79*] Утияма Р. (1979) *Теория относительности* (Атомиздат, Москва).
- [Фейн 78*] Фейнман Р. (1978) *Теория фундаментальных процессов* (Наука, Москва).
- [Фейн 86*] Фейнман Р.Ф. (1986), "Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман?", *Успехи физ. наук*, **148**, 509–526.
- [Фейн 88*] Фейнман Р. (1988) *КЭД – странная теория света и вещества* (Наука, Москва).
- [Фок 61*] Фок В.А. (1961) *Теория пространства-времени и тяготения* (Физматгиз, Москва).
- [Чанд 86*] Чандрасекар С. (1986) *Математическая теория черных дыр т. 1,2* (Мир, Москва).
- [Шама 73*] Шама Д.В. (1973) *Современная космология* (Мир, Москва).
- [ШаТю 85*] Шапиро С., Тьюколски С. (1985) *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды т. 1,2* (Мир, Москва).
- [Шред 86*] Шредингер Э. (1986) *Пространственно-временная структура Вселенной* (Наука, Москва).
- [Шутц 84*] Шутц Б. (1984) *Геометрические методы математической физики* (Мир, Москва).
- [Эйзе 48*] Эйзенхарт Л. (1948) *Риманова геометрия* (Наука, Москва).
- [Эйнш 79*] Альберт Эйнштейн и теория гравитации (сборник статей) (Мир, Москва).
- [Coun 74*] Counselman C.C. et al. (1974), "Solar gravitational deflection of radio waves measured by very-long-baseline interferometry" *Phys. Rev. Lett.*, **33**, p. 1621.
- [Foma 76*] Fomalont E.B., Sramek R.A. (1976), "Measurements of the solar gravitational deflection of radio waves in agreement with general relativity," *Phys. Rev. Lett.*, **36**, p. 1475.
- [FrNo 98*] Frolov V.P., Novikov I.D. (1998) *Black hole physics* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London).
- [Peeb 93*] Peebles P.J.E. (1993) *Principles of physical cosmology* (Princeton University Press, Princeton).
- [Thor 95*] Thorne K.S. (1995) "Gravitational waves", gr-qc/9506086; Thorne K.S. (1995) "Gravitational waves from compact bodies", gr-qc/9506084.
- [Wrig 2000*] Wright Alison (editor) (2000). "Einstein tops physicist pop chart," *CERN Courier*, **40**, p. 11.
- [Zakh 94*] Zakharov A.F. (1994), "Particle capture cross sections for a Reissner–Nordström black hole" *Classical and Quantum Gravity*, **11**, 1027.

Предметно-именной указатель

- Антигравитация 45
Антиматерия и гравитация 60
- Бианки тождество 22, 196
 аналогия с электродинамикой 196
 использование при образовании величины тензора кривизны с нулевой ковариантной производной 197
- Больших чисел гипотеза 63
- Времени замедление в гравитационном поле 126
- Гауссова кривизна 166
- Геодезических уравнение 174, 194, 209
 и параллельный перенос касательного вектора 188
- Геометродинамика 34, 268
- Гидростатическое (ньютоновское) равновесие 262
- Гравитационная постоянная
 гипотеза Дирака о зависимости от времени 65
 связь с размером вселенной 67
- Гравитационное волны
 амплитуда для испускания при распаде частицы 275
 и калибровочная инвариантность 114
- Гравитационное излучение
 амплитуда для одиночного испускания гравитона 274
 вероятность испускания гравитона при распаде частицы 275
 гравитона в распаде частицы 276
 схема: гравитация против электродинамики 279
- Гравитационное красное смещение рассматриваемое как следствие принципа эквивалентности 157
 следствие замедления времени 129–130
 следствие сохранения энергии 131
- Гравитационное поведение антивещества 60
- Гравитационное поле
 действие для взаимодействия со скалярным веществом на плоской метрике 271, 273
 действие Эйнштейна—Гильберта 150, 186, 201, 210
 действие Эйнштейна—Гильберта для взаимодействия со скалярным веществом 271
 замедление времени 126
 калибровочная инвариантность 106, 114, 177
 лагранжиан (линеаризованный) 103, 106, 110, 128
 лагранжиан (чисто гравитационный, нелинейный) 149, 186
 лоренцева калибровка (линеаризованная) 114
 нелинейный член в лагранжиане наимизшего порядка 138
 сведение к ньютоновскому закону 122
 уравнения (вывод) 16–22
 уравнения (линеаризованные) 105–107, 113, 120, 138
 уравнения (полные нелинейные) 150, 198, 200, 255
 уравнения взаимодействия со скалярной материей 273, 281
 уравнения линеаризованные (непротиворечивость) 18
 уравнения с космологической

- постоянной 234
- Гравитационные волны 35, 101, 110, 113–115, 281
- волновое уравнение со скалярными полями в источнике 283
- гравистатический случай 120
- квадрупольный характер 99–100, 282
- удаленное поле 281–282
- Гравитационные магнитные силы 102
- Гравитационный коллапс 228
- Гравитация
- без всяких источников (энергии-импульса)? 198
- как возмущение на атоме водорода 68
- может ли быть проквантована? 70
- слабость взаимодействия 62
- Гравитирующая частица
- лагранжиан 117
- сравнение нерелятивистской (ньютоновской) и релятивистской (эйнштейновской) теорий 162
- уравнения движения 117, 123, 174
- Гравитон 69
- амплитуда для испускания от скалярного поля 274
- амплитуда для комптоновского рассеяния 115
- амплитуда для одиночного обмена 112
- вероятность испускания гравитона при распаде частицы 277
- пропагатор 101
- решения типа плоской волны и поляризация 95, 108, 113–115
- частица со спином два 44–48, 91
- Давление в движущемся поле 280
- Древесные диаграммы 275
- Духи 40, 43
- Инвариантный пространственно-временной интервал
- с наличием гравитации и без нее 161
- Инвариантный элемент объема 201
- Интервал собственного времени
- связь с метрическим тензором 161
- Калибровочная инвариантность 106, 115, 116, 177
- и принцип эквивалентности 49
- Каонный гравитационный эксперимент 61
- Квадрупольный характер спина два 99–101
- Квантовая гравитация
- внутренний наблюдатель против внешнего 72
- дифракционный эксперимент с двумя щелями 70
- и Маха принцип 133
- может ли гравитация быть проквантована? 70
- невыполнима на больших расстояниях 71
- однопетлевая конечная 52
- перенормируемость? 50–53, 275
- петлевое представление 55
- усилители становятся зондами для сложных процессов 72
- Квантовая теория поля
- статическая сила от бесспинового мезона 84
- энергия обмена бесспиновым мезоном 85
- энергия обмена двумя нейтрино 85–89
- Клейна—Гордона уравнение в гравитационном поле 213

- Ковариантная дивергенция
 - через определитель метрики 204
- Ковариантная нулевая дивергенция
 - определитель метрики 205
 - связь с координатной инвариантностью действия 205
- Ковариантная производная 190
 - некоммутативность второй производной 191
- Ковариантной связности коэффициенты $[\mu, \sigma]$ 119
- Ковариантные тензоры и индексы 171
 - при произвольных координатных преобразованиях 171
- Комптоновское рассеяние
 - гравитона частицей 115
 - и калибровочная инвариантность 115
- Контравариантные тензоры и индексы 170
 - при координатных преобразованиях 170
- Космологическая постоянная 19, 50, 216, 234
- Космологические модели
 - гипотеза об однородности 233
 - и проблема сохранения энергии 235
 - критическая плотность 243
 - Леметра модели 240
 - масштабного фактора уравнение изменения 242
 - масштабный фактор вселенной 239
 - Милна модель 234
 - открытая, закрытая, плоская 236, 240
 - параметр замедления 245
 - Фридмана модели 240
 - Хойла стационарная модель 235, 237, 240, 245–250
- Космологических расстояний измерения 239
- Космологической плотности измерения 243
 - скупывание галактик наводит на мысль о том, плотность близка к критической 247
- Кривизна скалярная 186
- Кристоффеля символы 148
 - свернутые 203
- Кронекера символ δ 145
- Кротовые норы 34, 226–228, 268
 - отсутствие времениподобных геодезических подлетающих достаточно близко и вылетающих из кротовой норы 265
- Максимальные скорости хода часов и принцип наименьшего действия 157–162
- Масса фотона 83
- Маха принцип 130–132
 - в квантовой механике 132–136
 - выполнимость и граничные условия 250–252
- Мебиуса лента 195
- Метрика трехмерной сферы и сферические координаты 235–236
- Метрический тензор 162
 - геометрическая интерпретация 165
 - инварианты=физика 175
 - определитель и инвариантный элемент объема 201
 - производная определителя 204
 - равенство нулю ковариантной производной 191
 - связь с интервалом собственного времени 161
 - связь с линеаризованным гравитационным полем 120
 - тензор, обратный метрическому 171

- число независимых инвариантных величин для второй производной 169
- Нейтринный обмен (пример) 84–89
- Непротиворечивость линеаризованной гравитации 18
- Ольберса парадокс 252
- Оператор черта $\bar{X}_{\mu\nu}$ 111
- Орбитальное движение частицы в геометрии Шварцшильда 265
- уравнения движения 123, 140
- Отклонение света рассматриваемое как следствие принципа эквивалентности 156
- Солнцем 125
- Параллельный перенос вектора 192–197
- вдоль замкнутой траектории 194
- и топологические свойства 195
- связь с кривизной 193
- Политропы 257
- Поляризация гравитон 99–101, 113–115
- и спин 92, 99
- нормализация 108
- фотоны 95
- Прецессия перигелия Меркурия 123–125, 141
- Принцип эквивалентности 152, 155
- ограничение на инфинитезимальные области 154
- Радиогалактики 253
- Расслоенное пространство (пучок) 44
- Римана нормальные координаты 168, 179
- Римана тензор 150, 185
- Бианки тождество 196
- в римановых нормальных координатах 179
- связь с некоммутативностью второй ковариантной производной 192
- связь с параллельным переносом вдоль замкнутой траектории 193
- симметрии 185
- число независимых компонент 185
- Риччи тензор 150, 186, 197
- Робертсона—Уолкера метрика 235
- траектория света и сдвиг частоты 239
- Сверхзвезды 24–32, 255
- взрывы? 261
- уравнение состояния 27, 256
- устойчивость 27–31
- численные результаты 260
- численный алгоритм 258
- Силы притяжения связанные с лагранжианом 110
- связанные со спином частицы 44, 90
- Слабость гравитации 62
- Супергравитация 52
- Суперсимметрия 52
- Суперструны 52–54
- Тензорные плотности 203, 205
- когда автоматически ковариантно бездивергентны 205
- Тока сохранение 94
- Уилера гипотеза об электронах и позитронах 269–270
- Хаббла время 232, 243
- Хаббла закон 239
- Хаббла постоянная 64

Черные дыры 32–35

Шварцшильда метрика 220, 264
и тождество Бианки 226
кривизна при $r = 2m$ 224
особенность при $r = 2m$ есть результат выбора координат 224, 264
с зарядом 267

Шмутрино 250

Шредингера парадокс с котом 71, 81

Эддингтона гипотеза больших чисел 63

Эйнштейна тензор 198
интерпретация 44 компоненты с помощью средней кривизны трехмерной сферы и массы внутри 220
нулевая ковариантная дивергенция 198, 203

Эйнштейна—Гильберта действие 150, 186, 201
взаимодействие со скалярным веществом 271
записанное (обобщенное) на языке метрики и ее производных 210

Эквивалентности принцип 187–188
ограничение на инфинитезимальные области 188

Электродинамика
векторный потенциал, образованный произвольными токами 281
и принцип эквивалентности 188
калибровочная инвариантность 107
лагранжиан 103
магнитные силы 102
полевые уравнения 104
тока сохранение 94

уравнение движения заряженной частицы 127

Энергии-импульса тензор
для идеальной жидкости 229
для идеальной жидкости в приложении к космологическим моделям 241
для скалярной материи (поля) 111, 128, 210
для скалярной материи (поля) в гравитационном поле 210, 213
для статической жидкости в приложении к сверхзвездам 256
для частицы 118, 139, 208
для частицы в гравитационном поле 208
изменение при координатном преобразовании 171
неединственность для скалярных полей в гравитационном поле 210–211
нулевая ковариантная дивергенция 139–141, 150, 200
сохранение энергии 97, 197
трудности при вычислении в гравитационном поле 206

Энергии-импульса тензорная плотность 206
выражение для ковариантной дивергенции 205
для скалярной материи (поля) в гравитационном поле 213
для частицы 208

Энергия обмена
бесспиновым мезоном 84
двумя нейтрино 85–89

Этвеша эксперимент 58, 129, 151

Янга—Миллса теория 40, 178, 275

