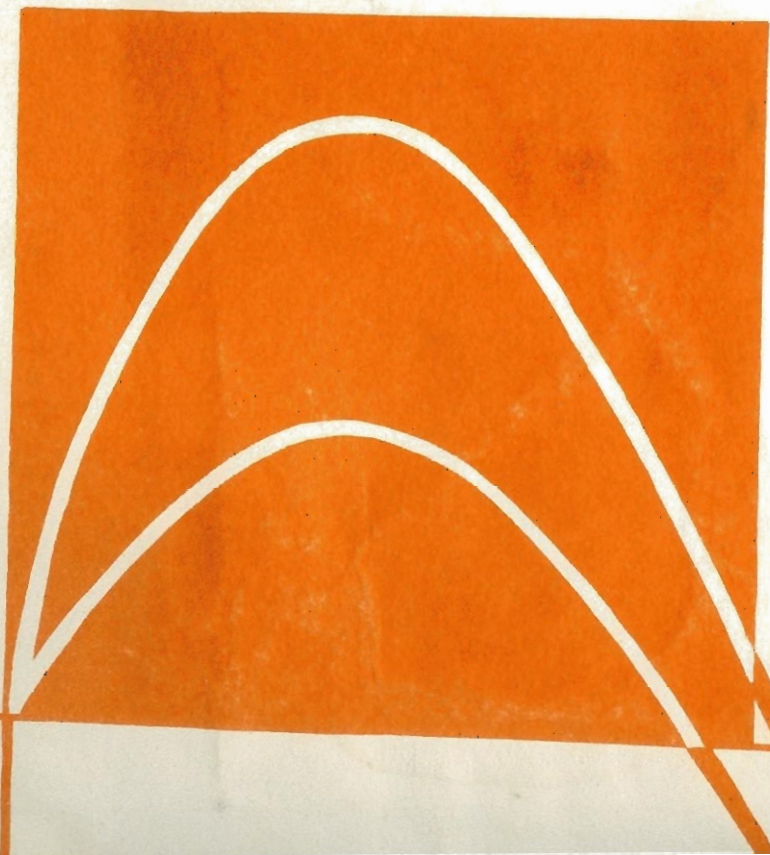


Цена 25 коп.

В23
У650

Б. В. ЧИРИКОВ

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС



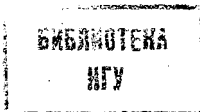
Чириков ВВ.

Нелинейный резонанс. Учебное пособие.
НГУ, 1977, I-82

Учебное пособие по теории нелинейного резонанса знакомит читателя с современными методами теории нелинейных колебаний гамильтоновых систем. Основное внимание уделено явлению нелинейного резонанса и взаимодействию нескольких резонансов, приводящему к своеобразной стохастической неустойчивости. Подробно рассмотрен критерий возникновения такой неустойчивости при перекрестии нескольких резонансов. Описаны примеры применения теории к анализу устойчивости конкретных колебательных систем.

Предполагается знание читателем общего курса теоретической механики а, в частности, техники канонических преобразований, а также теории функций комплексного переменного и знакомство со специальными функциями.

Учебное пособие рассчитано на студентов старших курсов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в области механики и физики.



© Новосибирский государственный университет, 1977

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано по материалам спецкурса, читаемого автором для студентов III-У курсов физического факультета Новосибирского университета по специальностям "Ядерная физика" и "Физика плазмы".

Основная цель учебного пособия — познакомить слушателя с последними достижениями а современными методами теоретического анализа нелинейных колебаний гамильтоновых систем, еще не вошедшими в учебники и лишь частично отраженными в монографиях и обзорных статьях. Дается краткое изложение современной теории устойчивости нелинейных колебаний (§ 4.5), использующей специальную теорию возмущений Колмогорова, которая обеспечивает сверхсходимость последовательных приближений (§ 2.2). Основное внимание уделено, однако, полукачественной физической теории устойчивости, основанной на анализе отдельных нелинейных резонансов (гл. 3) и их взаимодействия (гл. 4). Последнее приводит, при определенных условиях, к своеобразной стохастической неустойчивости нелинейных колебаний, которая представляет, с одной стороны, принципиальный интерес как механизм возникновения статистических законов в динамической системе, а с другой стороны, важна как приложение как одна из наиболее распространенных и опасных неустойчивостей нелинейных колебаний. Подробно анализируется критерий стохастической неустойчивости (§ 4.1: 4.2). Рассмотрены конкретные примеры нелинейных колебаний (§ 4.3), представляющие также самостоятельный интерес.

Учебное пособие предполагает знание читателем основных понятий теоретической механики, в частности техники канонических преобразований, основ теории функций комплексного переменного и элементов теории специальных функций.

Материал пособия основан в значительной степени на оригинальных работах группы сотрудников Института ядерной физики СО АН СССР. Начало этим работам было положено много лет назад идеей

нашего учителя академика Андрея Михайловича Будкера о том, что при достаточно высокой частоте бетатронных колебаний частицы в ускорителе с жесткой фокусировкой следует ожидать возникновения процессов диффузионного типа.

Представления автора по многим вопросам современной физики, включая и проблемы, затронутые в настоящей работе, сформировались в значительной мере под влиянием постоянных и исключительно плодотворных для автора дискуссий с Андреем Михайловичем, дискуссий, которые уже нельзя продолжить...

Б.В.Чириков

Академгородок
13 июля 1977 г.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

Помимо открытия фундаментальных законов природы еще очень важно уметь извлекать из них следствия, т.е. предсказывать или хотя бы понимать конкретные проявления этих законов. Эта проблема оказалась намного сложнее, чем можно было ожидать. За 300 лет своего существования классическая механика все еще не в состоянии сделать полный шаг от задачи двух тел, блестяще решенной Ньютоном, до "чуть-чуть" более сложной задачи трех тел, не говоря уже о задаче четырех тел, где совсем недавно обнаружены качественно новые типы движений (см. вступительную статью Д.В.Аносова в /33/). Только сейчас мы начинаем понимать масштаб и причины этих неожиданных трудностей. Оказывается, что все дело в исключительно сложной структуре движения (фазового пространства) этих, казалось бы, простых механических систем. Первопричиной такой сложности являются так называемые гомоклинические, или гиперболические области. Основной "подвох" здесь связан, грубо говоря, с тем, что близкие траектории в этих областях очень быстро (экспоненциально по времени) расходятся друг от друга, т.е. движение является локально неустойчивым. Если при этом движение остается финитным, например вследствие сохранения энергии, то экспоненциальная локальная неустойчивость приводит к такому перемешиванию траекторий, что система движется так, как будто на нее действуют какие-то случайные силы, хотя всем известно, что в задаче трех тел никаких случайных сил нет, и движение системы определяется чисто динамическими уравнениями.

В последнее время математическая теория динамических систем вообще и гамильтоновых систем классической механики в частности переживает бурное развитие. Сейчас уже можно сказать, что, по крайней мере для гамильтоновых систем, мы понимаем в общих чер-

тах структуру их движения. Грубо говоря, она сводится к следующему. В одном предельном случае движение является полностью устойчивым (квазипериодическим), во всяком случае для большинства начальных условий. В этом случае траектория движения остается все время на поверхности некоторого N -мерного тора (N — число степеней свободы системы, см. § 3.4), а спектр движения — дискретный с N основными частотами. Одним из наиболее значительных достижений последнего времени было установление того факта, что такой тип движения сохраняется под действием достаточно малого возмущения (теория устойчивости Колмогорова-Арнольда-Мозера, § 4.5)^ж.

В противоположном предельном случае динамическая картина движения является очень сложной, так что говорят о стохастическом ("случайном") движении. В частности, спектр такого движения оказывается непрерывным. Однако в этом случае возможно относительно простое статистическое описание некоторых средних характеристик движения. Математическая теория этого предельного случая (эргодическая теория) сейчас хорошо разработана. Однако она предъявляет столь жесткие требования к динамическим характеристикам системы, что в большинстве реальных систем этот предельный случай никогда не осуществляется. Фактически единственной механической системой, попадающей в этот предельный класс, является система двух или более шариков, упруго сталкивающихся внутри ящика, а также некоторые вариации этой системы /10/. Подчеркнем, что, как показывает пример Синая, статистическое поведение и статистические законы возможны в очень простых механических системах всего с несколькими (≥ 2) степенями свободы. Этот пример опровергает, в частности, глубоко укоренившуюся (особенно среди физиков) идею, что статистические законы действуют только в системах с очень большим числом степеней свободы.

Большинство реальных механических систем можно условно отнести к третьему типу, который характеризуется так называемым "разделенным фазовым пространством", разделенным на устойчивые

ж) Отметим, что аналогичные идеи были высказаны независимо Ферми, Паста и Уламом /36/ на основании численных экспериментов. Эти эксперименты дали толчок к развитию очень интересной теории полностью интегрируемых систем (см., например, /13/ и ниже).

и стохастические компоненты, или области. Так как граница стохастической области образуется стохастическими же траекториями, нетрудно понять, что структура такого разделенного пространства является чрезвычайно сложной; оно состоит из причудливо перемежающихся устойчивых областей все более и более мелкого масштаба (см. конец § 4.3). Ввиду такой "иерархической сложности", представляется сомнительной самая возможность полной классификации различных типов движения подобных систем.

Причину такого многообразия движений можно пояснить и по-другому. В точной формулировке классической механики движение системы полностью задается начальными условиями, т.е. набором нескольких действительных чисел. Говоря языком теории информации, каждое такое число содержит бесконечную информацию о прошлом и будущем данной траектории. Существенно, что разность информации для двух сколь угодно близких траекторий также бесконечна, т.е. две траектории представляют, вообще говоря, совершенно различное динамическое движение системы. Отсюда и возникает неисчерпаемое разнообразие и сложность динамической картины движения. Однако для устойчивых систем, которыми, в основном, только и занимается классическая механика до недавнего времени, все это потенциальное разнообразие процессов не реализуется, а движение имеет uniformly однообразный вид, лишь слабо зависящий от начальных условий. Под действием же локальной неустойчивости, особенно экспоненциальной, неумовимые различия в начальных условиях выходят "наружу" и полностью изменяют динамическую картину движения.

Единственная математическая теория, которая в настоящее время изучает подобные системы, это так называемая теория гладких динамических систем /33/, а не дифференциальная динамика /34/. Несмотря на огромные успехи этой теории, превратившейся в последнее время фактически в самостоятельный раздел математики, она дает лишь хвастающее описание движения. В этих условиях естественно использовать физические методы исследования, основанные на системе приближенных моделей, разумных экстраполяциях и правдоподобных допущениях, направляемых и подкрепляемых широким экспериментом. При этом речь идет не столько о "настоящих" экспериментах с реальными механическими системами (хотя есть и Тап), сколько о так называемых численных экспериментах, т.е. численном интегрировании уравнений движения различных динамичес-

так называемый стохастический слой. Система таких слоев приводит к универсальной неустойчивости многомерных колебаний (§ 4.5). Следует отметить, что имеются такие исключительные системы, к которым развиваемая теория совершенно неприменима — это так называемые полностью интегрируемые системы (см., например, обзор /13/). Эти системы обладают скрытой симметрией, проблема обнаружения которой является в настоящее время одной из интереснейших и совершенно нерешенных задач теории динамических систем.

Поскольку мы рассматриваем гамильтоновы системы (без диссипации), то область приложения теории ограничена, в основном, движением заряженных частиц в электромагнитных полях и движением небесных тел (планет, звезд, космических кораблей и т.п.). Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний оказывается, как правило, вредным явлением, с которым следует, по возможности, бороться. Интересно отметить, однако, что в некоторых специальных случаях она может быть использована, например, для ускорения заряженных частиц. В свое время советские физики Бурштейн, Векслер и Коломенский предложили так называемый стохастический метод ускорения частиц. Для осуществления этого метода предполагалось заменить в ускорителе высокочастотное поле "случайным". Попытки создания таких ускорителей показали, однако, что не так-то легко сделать ускоряющее поле случайным. Современная теория нелинейных колебаний позволяет осуществить стохастическое ускорение в периодическом поле достаточно высокой частоты /9/. Интересно, что такой метод был успешно использован для нагрева плазмы в одной из термоядерных установок Института ядерной физики СО АН СССР /35/.

Глава 2

ЧТО ТАКОЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ? НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ПРИМЕРОВ

Рассмотрим вначале несколько простых примеров нелинейных колебаний с одной степенью свободы с целью помочь читателю войти в круг идей современной теории нелинейных консервативных систем^{*}. Мы продемонстрируем важнейшее свойство нелинейного осциллятора — его неизохронность, т.е. изменение периода свободных колебаний с изменением их амплитуды, или энергии. В § 2.2 будут описаны основные идеи и практическое применение современной теории возмущений, основанной на последовательных канонических заменах динамических переменных. Наконец, в § 2.4 мы рассмотрим особую траекторию нелинейного осциллятора — так называемую сепаратису, которая играет первостепенную роль в проблеме устойчивости нелинейных колебаний.

§ 2.1. Маятник

Колебания маятника являются одним из наиболее старых примеров колебаний вообще и нелинейных колебаний в частности. Многовековая история изучения этой, казалось бы, простой системы показала неожиданное разнообразие ее движений. Так, еще сравнительно недавно было обнаружено новое явление динамической устойчивости маятника /III/, явление, на котором основана работа современных гигантских ускорителей заряженных частиц. Для нас простая модель маятника будет играть особую роль. Мы увидим ниже, что с помощью этой модели можно объяснить, а качественно и даже количественно, многие общие свойства нелинейных колебаний (§ 3.3).

Рассмотрим вначале свободные колебания маятника. Запишем га-

* Прекрасный обзор этого круга вопросов дан в статье Арнольда /2/.

мильтониан системы в виде

$$H(p, \varphi) = \frac{p^2}{2M} - U_0 \cos \varphi, \quad (2.1)$$

где φ — угол отклонения маятника от нижнего (устойчивого) положения равновесия; $p = M\dot{\varphi}$ — момент импульса маятника, $M = m\ell^2$ — момент инерции; а частота (ω_0) малых колебаний маятника вокруг положения устойчивого равновесия $\varphi = 0$ связана с амплитудой потенциальной энергии U_0 соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{U_0}{M}. \quad (2.2)$$

Заметим, что для свободного вращения маятника (при $U_0 = 0$) момент импульса p является переменной действия. В дальнейшем по-ложим для простоты $M = 1$.

Как хорошо известно (см., например, /4/), уравнения движения маятника точно интегрируются в эллиптических функциях. При этом существуют два режима движения — колебания и вращение.

Разрешая уравнение $H(p, \varphi) = \text{const}$ относительно $p = \dot{\varphi}$, найдем

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2(H + U_0 \cos \varphi)}. \quad (2.3)$$

Прямое интегрирование этого уравнения при $H < U_0$ (режим колебаний) дает (см., например, /12/)

$$\varphi = 2\omega_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \text{cn}(\omega_0 t), \quad (2.4)$$

где $\text{cn}(u)$ — эллиптический косинус Якоби; φ_0 — амплитуда отклонения маятника, а момент времени $t = 0$ соответствует прохождению точки $\varphi = 0$ с положительной скоростью. Интегрируя почленно ряд Фурье для $\text{cn}(u)$, найдем

$$\varphi(t) = 4\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n \text{ch}(K' \frac{\omega_n}{\omega_0})}. \quad (2.5)$$

Здесь $K' = K(k')$ — полный эллиптический интеграл первого рода; $k' = \sqrt{1-k^2}$; $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$. Период колебаний $T = 2\pi/\omega$, где

$$\omega(H) = \frac{\pi \omega_0}{2K}. \quad (2.6)$$

Частоты спектра колебаний

$$\omega_n = (2n-1)\omega \quad (2.7)$$

В режиме вращения ($H > U_0$) решение имеет вид

$$\begin{aligned} \pm \varphi(t) &= 2 \operatorname{am}(\omega_r t) = \\ &= 2\omega_r t + 4\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n \operatorname{ch}(K' \frac{\omega_n}{\omega_r})} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\operatorname{am}(u)$ — эллиптическая амплитуда Якоби; $k = \sqrt{2U_0/(H+U_0)} = \omega_0/\omega_r$, где

$$\omega_r = \sqrt{\frac{H+U_0}{2}}. \quad (2.9)$$

Мы ввели половинную частоту среднего вращения

$$\omega(H) = \frac{\pi \omega_r}{2K}, \quad (2.10)$$

чтобы выражения (2.5), (2.8) были максимально похожи друг на друга — это потребуется нам в § 2.4. Спектр частот при вращении

$$\omega_n = 2n\omega. \quad (2.11)$$

Выражение (2.6) характеризует наиболее важное в проблеме устойчивости свойство нелинейного осциллятора — его *нелинейность*, т.е. зависимость частоты колебаний от их амплитуды, или энергии. Чтобы более наглядно представить себе эту зависимость, рассмотрим случай малых колебаний маятника ($\varphi_0 \ll 1$). Аргумент эллиптического интеграла $k = \sin \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$ выразим через энергию маятника E , которую будем отсчитывать от минимума потенциальной энергии $U_{\min} = -U_0$. Получим

$$E = 2k^2 U_0. \quad (2.12)$$

Разлагая выражение $[K(k)]^{-1}$ в ряд по k^2 , найдем

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{E}{U_0}\right) - \frac{5}{256} \left(\frac{E}{U_0}\right)^2 - \frac{11}{2048} \left(\frac{E}{U_0}\right)^3. \quad (2.13)$$

Такая точность потребуется нам в следующем параграфе для сравнения с результатом теории возмущений. При $E \ll U_0$ достаточно ограничиться первыми двумя членами.

Введем безразмерный параметр нелинейности

$$\alpha = \frac{I}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dI}. \quad (2.14)$$

Мы определяем его через производную от частоты по действию I , поскольку в дальнейшем мы будем использовать, как правило, переменные действия — угол (I, θ) . В приближении $\omega/\omega_0 \approx 1 - E/8\omega_0^2$

можно положить $I \approx E/\omega_0$ как для гармонического осциллятора. Тогда

$$\alpha \approx -\frac{I}{8\omega_0}. \quad (2.15)$$

Так как в рассматриваемом случае $I \ll \omega_0$, то нелинейность малых колебаний мала ($\alpha \ll 1$).

Другим характерным свойством нелинейных колебаний является их *ангармоничность*, т.е. наличие высших гармоник основной частоты ω (2.5). В случае малых колебаний $K' \approx$

$$\ln(4/k) = \frac{1}{2} \ln \frac{32U_0}{E} \quad \text{и (2.5) принимает вид}$$

$$\varphi(t) \approx \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\omega t}{2n-1} \left(\frac{E}{32U_0}\right)^{n-1}. \quad (2.16)$$

Амплитуды высших гармоник, таким образом, очень малы, т.е. малые колебания маятника почти гармоничны.

Совсем другой характер имеет движение маятника в обратном предельном случае быстрого вращения ($H \approx E \gg U_0$). В этом случае $k = \omega_0/\omega_r \ll 1$ и Фурье-разложение (2.8) принимает вид

$$\varphi(t) \approx 2\omega_r t + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\omega_r t}{n} \left(\frac{\omega_0}{4\omega_r}\right)^{2n}. \quad (2.17)$$

Хотя это движение и является почти равномерным вращением, которое можно рассматривать как гармонические колебания, частота этого вращения $2\omega_r \approx \rho$ зависит от энергии. Учитывая, что в этом случае $\rho \approx I$ (действие), получим, что параметр нелинейности $\alpha \approx 1$, т.е. нелинейность вращения не мала, хотя ангармоничность и может быть сколь угодно малой при достаточно быстром вращении: $\omega_0/\omega_r \rightarrow 0$.

§ 2.2. Канонические преобразования и сверхсходимости

Несмотря на большие успехи в поисках точно интегрируемых нелинейных систем [13], последние являются все же, по нашему убеждению, исключительными. Во всяком случае, задачи, которые мы собираемся рассматривать ниже, не относятся к интегрируемым. Поэтому для аналитического исследования необходим какой-то приближенный метод, скажем, какой-то вариант теории возмущения. Последняя возможна, разумеется, только в том случае, когда в задаче есть малый параметр. В соответствии с этим мы сделаем обычное предположение, что гамильтониан нашей системы можно разбить на две части:

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta), \quad (2.18)$$

первая из которых характеризует "невозмущенную" систему и имеет интеграл движения $\bar{I}$ (действие). Основным "свойством" невозмущенной системы является то, что мы знаем ее движение в той или иной форме. Нашей задачей, однако, будет изучение движения "возмущенной" системы с гамильтонианом $H(I, \theta)$, но "возмущение"

$\varepsilon V(I, \theta)$ мы будем считать малым ($\varepsilon \ll 1$). Характерным свойством возмущения является его зависимость от фаз θ невозмущенного движения. Именно эта зависимость приводит к изменению не возмущенного действия $\bar{I}$. Заметим, что разделение гамильтониана на невозмущенную часть и возмущение условно и зависит, в частности, от нашего математического искусства.

Предположим, что мы не знаем эллиптических функций и попробуем приближенно найти движение маятника, выбрав в качестве невозмущенной системы просто гармонический осциллятор (уж его-то знают все!):

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \varphi^2}{2} = \omega_0 I. \quad (2.19)$$

Целью этих упражнений является демонстрация на простом примере современной теории возмущения гамильтоновых систем.

Давно известно (см., например, [14]), что эффективным методом аналитического исследования гамильтоновых систем является последовательная каноническая замена динамических переменных в гамильтониане без обращения к уравнениям движения. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы найти такие новые переменные $(\bar{I}, \bar{\theta})$, в которых возмущение, т.е. часть гамильтониана, зависящая от угла θ , обратилась бы в нуль, исчезла. Иначе говоря, задача состоит в том, чтобы "уничтожить" возмущение заменой переменных. Тогда новое $\bar{I}$ есть интеграл движения. Для консервативного осциллятора с одной степенью свободы это не такое уж большое достижение, так как всегда есть интеграл энергии. Однако для неконсервативной системы (т.е. при явной зависимости гамильтониана от времени, см. гл. 3, 4) даже с одной степенью свободы, а также для консервативных систем с несколькими степенями свободы, такое полное уничтожение возмущения означало бы интегрируемость системы. Действительно, в новых переменных гамильтониан зависит только от действия $\bar{H} = \bar{H}(\bar{I})$. Отсюда общее решение уравнений движения:

$$\bar{I} = I_0 = \text{const}; \quad \bar{\theta} = \omega(\bar{I}) \cdot t + \theta_0; \quad \omega = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{I}}. \quad (2.20)$$

Поэтому даже для консервативного осциллятора с одной степенью свободы знание точного действия $\bar{I}$ больше, чем знание энергии, так как при этом уравнения движения непосредственно интегрируются (2.20). В частности, зная $\bar{I}$, можно найти частоту движения как функцию $\bar{I}$ или энергии.

Нахождение $\bar{I}$ эквивалентно полному решению задачи и поэтому в общем случае невозможно в явной форме. В классической теории возмущений последовательность канонических преобразований $(I, \theta) \rightarrow (I_1, \theta_1) \rightarrow \dots (I_n, \theta_n) \rightarrow \dots (\bar{I}, \bar{\theta})$ строится таким образом, чтобы на каждом шаге возмущение уменьшалось на одну степень малого параметра: $\varepsilon V \rightarrow \varepsilon^2 V_1 + \dots + \varepsilon^{n+1} V_n \rightarrow 0$. Однако такие последовательности, как правило, расходятся, и это ограничивает применимость теории возмущения относительно коротким интервалом времени движения.

Решающий успех в этом направлении был достигнут с помощью новой теории возмущений, предложенной Колмогоровым [1], который заметил, что последовательные канонические преобразования можно построить таким образом, чтобы каждое следующее возмущение было бы порядка квадрата предыдущего:

$$\varepsilon V \rightarrow \varepsilon^2 V_1 \rightarrow \varepsilon^4 V_2 \rightarrow \dots \varepsilon^{(2^n)} V_n \rightarrow 0$$

Посмотрим, как работает эта техника на простом примере маятника. Представим гамильтониан (2.1) в виде ($M = \omega_0 = 1$)

$$H(p, \varphi) \approx \frac{p^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{\varphi^8}{8!}. \quad (2.22)$$

Возьмем первые два слагаемых в качестве невозмущенного гамильтониана (2.19) и перейдем в H_0 к переменным (I, θ) . Тогда $(p^2 + \varphi^2)/2 = I$; $\varphi = \sqrt{2I} \cos \theta$. Подставляя эти выражения в (2.22), получим

$$H(I, \theta) \approx I - \frac{4I^2}{4!} \cos^4 \theta + \frac{8I^3}{6!} \cos^6 \theta - \frac{16I^4}{8!} \cos^8 \theta. \quad (2.23)$$

Малым параметром здесь служит само $I = \varepsilon$; $H_0 = \varepsilon$; $V \sim H_0$ (ср. (2.18)).

Ограничимся задачей нахождения частоты маятника как функции его энергии $\omega(H)$. Первую поправку к невозмущенному значению частоты $\omega_0 = 1$ можно найти непосредственно из (2.23). Для этого разложим возмущение на постоянную и переменную части по не-

возмущенной фазе θ :

$$\begin{aligned} \varepsilon V(I, \theta) = & -\frac{4I^2}{4!} \cos^4 \theta + \frac{8I^3}{6!} \cos^6 \theta - \frac{16I^4}{8!} \cos^8 \theta = \\ = & -\frac{I^2}{16} + \frac{I^3}{9.32} - \frac{I^4}{9.2^{10}} - \frac{I^2}{6} \left(\cos^4 \theta - \frac{3}{8} \right) + \\ & + \frac{I^3}{90} \left(\cos^6 \theta - \frac{5}{16} \right) - \frac{I^4}{28.90} \left(\cos^8 \theta - \frac{35}{128} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

и используем так называемый метод усреднения (см., например, /4/), т.е. попросту отбросим переменную часть возмущения. Тогда усредненный гамильтониан принимает вид

$$\langle H(I, \theta) \rangle \approx I - \frac{I^2}{16} + \frac{I^3}{288} - \frac{I^4}{9216} \quad (2.25)$$

Основанием для такого усреднения служит правильное само по себе представление о том, что переменная часть возмущения вызывает лишь "малые" осцилляции. Последними можно пренебречь, однако лишь с определенной точностью. В частности, как мы увидим ниже, m а последних члена в (2.25) уже превышают точность усреднения и являются поэтому неправильными.

Чтобы решить задачу более аккуратно, произведем каноническое преобразование к новым переменным $(I, \theta \rightarrow I_1, \theta_1)$ такое, чтобы не просто произвольно отбросить переменную часть возмущения, а законно уменьшить ее. При этом нам нужно заботиться об уменьшении только переменной части, так как постоянная часть возмущения не нарушает инвариантности (сохранения) I , а лишь изменяет частоту колебаний.

Будем искать производящую функцию канонического преобразования $(I, \theta \rightarrow I_1, \theta_1)$ в виде

$$F(I_1, \theta) = I_1 \theta + \Phi(I_1, \theta). \quad (2.26)$$

Такая форма автоматически обеспечивает малое отличие новых переменных от старых, если только функция Φ мала. Действительно

$$I = \frac{\partial F}{\partial \theta} = I_1 + \Phi_{\theta}; \quad \theta_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \theta + \Phi_{I_1}. \quad (2.27)$$

Подставим теперь первое из этих выражений в (2.23) (с учетом (2.24)) и подберем $\Phi(I_1, \theta)$ таким образом, чтобы оставшееся возмущение было $\sim \varepsilon^2 V \sim I^3$. Для этого, очевидно, достаточно

положить

$$\Phi_{\theta} = \frac{I_1^2}{6} \left(\cos^4 \theta - \frac{3}{8} \right). \quad (2.28)$$

Существенно, что это выражение не содержит постоянной составляющей по θ , которую мы предварительно выделили (член $-I^2/16$). В противном случае интегрирование (2.28) дало бы так называемый секулярный член, неограниченно возрастающий со временем, и разность $(\theta_1 - \theta)$ не была бы малой (2.27). По этой же причине нельзя уничтожить этим же преобразованием (2.27) члены $\sim I^3$, так как при подстановке (2.28) в член $-\frac{I^2}{6} \left(\cos^4 \theta - \frac{3}{8} \right)$

появляется постоянная составляющая $\sim I^3$. Теперь видно, какую точность дает метод усреднения, непосредственно примененный к исходному гамильтониану (2.24). Эта точность ограничивается порядком постоянных членов, которые остаются после выполнения канонического преобразования. Для исходного гамильтониана это члены $\sim I^3$ (2.29). Поэтому в выражении (2.25) можно использовать только первые m а слагаемых. Для получения большей точности необходимо произвести новое каноническое преобразование, предварительно выделив постоянную часть.

Выпишем теперь аккуратно получившийся после преобразования переменных новый гамильтониан, который обозначим $H_1(I_1, \theta_1)$. Так как исходный гамильтониан (2.22) взят с точностью до членов $\sim I^4$, то и H_1 достаточно вычислить с той же точностью:

$$\begin{aligned} H_1(I_1, \theta) = & I_1 - \frac{I_1^2}{16} + \frac{I_1^3}{9.32} - \frac{I_1^4}{9.2^{10}} - \\ & - I_1^3 \left(\frac{f_4}{48} - \frac{f_6}{90} + \frac{f_4^2}{18} \right) + \\ & + I_1^4 \left(\frac{f_4}{9.64} - \frac{f_8}{28.90} - \frac{f_4^2}{9.64} - \frac{f_4^3}{6^3} + \frac{f_4 f_6}{180} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где мы ввели общее обозначение

$$f_n(\theta) = \cos^n \theta - \langle \cos^n \theta \rangle; \quad \langle \cos^{2k} \theta \rangle = \frac{C_{2k}^k}{2^k} \quad (2.30)$$

и $C_{2k}^k = (2k)! / (k!)^2$ - число сочетаний из $2k$ по k .

нечетных n среднее $\langle \cos^n \theta \rangle = 0$. Возмущение (члены, зависящие от θ) стало теперь меньше ($\sim I^3$), но, к сожалению, сложнее. И это еще не все, нужно еще заменить θ на θ_1 с помощью (2.27). Так как $\theta_1 - \theta = \Phi_{I_1} \sim I_1$ (2.28), то замену

$\theta \rightarrow \theta_1$ достаточно произвести только в членах $\sim I^3$. Тогда в гамильтониане (2.29) появятся дополнительные слагаемые

$$H_1(I_1, \theta) \rightarrow H_1(I_1, \theta_1) + \frac{I_1^4}{18} \left[\frac{f_4'}{8} - \frac{f_6'}{15} + \frac{(f_4')^2}{3} \right] \cdot F_4, \quad (2.31)$$

где $f_n' \equiv df_n/d\theta$ и $dF_n/d\theta = f_n$, причем $\langle F_n \rangle = 0$.

Выделив в (2.31) постоянную часть, мы можем произвести новую замену переменных: $(I_1, \theta_1) \rightarrow (I_2, \theta_2)$. В классической теории возмущений мы выбрали бы эту замену таким образом, чтобы уничтожить переменное возмущение $\sim I_1^3$. Оказывается, однако, что с помощью этой же замены переменных можно уничтожить также и возмущение $\sim I_1^4$. Действительно, новое $\Phi^{(1)} \sim I_1^3$. При подстановке в (2.29) наибольшая постоянная составляющая оказывается $\sim I_1^2 \Phi^{(1)} \sim I_1^5$. Это значит, что в новом гамильтониане $H_2(I_2, \theta_2)$ возмущение будет $V_2 \sim I_2^5$. Повторяя эти рассуждения, найдем, что возмущение в $H_3(I_3, \theta_3)$ будет $V_3 \sim I_3^9$. Вообще, если на n -м шаге последовательных приближений $V_n \sim I_n^{k_n}$, то на следующем шаге $V_{n+1} \sim I_{n+1}^{k_{n+1}}$, $\Phi^{(n)} \sim I_{n+1}^{k_n-1}$, т.е. $k_{n+1} = 2k_n - 1$, откуда $k_n = 2^n + 1$. Это и есть сверхсходимость последовательных приближений по Колмогорову. Свойство сверхсходимости позволяет строить сходящиеся ряды теории возмущений. Это, в свою очередь, позволило решить ряд принципиальных вопросов теории динамических систем (см. § 4.5). Для практических расчетов, использующих несколько первых приближений, вопрос сходимости, как правильно замечено в [4], не является существенным. Тем не менее нам кажется, что метод Колмогорова оказывается и в этом случае более эффективным, чем классическая теория возмущений, так как он уменьшает необходимое число канонических преобразований для получения заданной точности решения. Во всяком случае, метод этот еще сравнительно мало известен, а его возможности недостаточно изучены. Отметим, что Боголюбов обобщил этот метод на неконсервативные системы [15].

Вернемся теперь к нашему маятнику и найдем оба члена постоянной части, как "обычный", $\sim I_1^3$, так и "лишний", $\sim I_1^4$. Они определяются средними:

$$\langle f_4^2 \rangle = \frac{17}{128}; \quad \langle f_4^3 \rangle = \frac{3}{128}; \quad \langle f_4 f_6 \rangle = \frac{33}{256}.$$

При вычислении средних с F_4 интегрированием по частям находим

$$\langle f_n' F_m \rangle = - \langle f_n f_m' \rangle. \quad (2.32)$$

Окончательно усредненный гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} \langle H_1 \rangle &\approx I_1 - \frac{I_1^2}{16} - I_1^3 \left(\frac{\langle f_4^2 \rangle}{18} - \frac{1}{9 \cdot 32} \right) - \\ &- I_1^4 \left(\frac{1}{9 \cdot 2^{10}} + \frac{5}{9 \cdot 64} \langle f_4^2 \rangle + \frac{5}{27 \cdot 8} \langle f_4^3 \rangle - \frac{\langle f_4 f_6 \rangle}{27 \cdot 4} \right) = \\ &= I_1 - \frac{I_1^2}{16} - \frac{I_1^3}{256} - \frac{5}{2^{13}} I_1^4. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Откуда частота колебаний

$$\omega = 1 - \frac{I_1}{8} - \frac{3}{256} I_1^2 - \frac{5}{2048} I_1^3. \quad (2.34)$$

Разрешая (2.33) относительно I_1 с точностью до E^3 ($E = \langle H_1 \rangle$), получим

$$I_1 = E + \frac{E^2}{16} + \frac{3}{256} E^3.$$

Подставляя это выражение в (2.34), получим точное разложение по E (2.13).

§ 2.3. Кубическая нелинейность

В качестве другого примера рассмотрим степенной гамильтониан

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4, \quad (2.35)$$

где a_2, a_3 — произвольные постоянные коэффициенты, характеризующие квадратичную и кубическую нелинейности соответственно. Последние термины отражают зависимость силы $f = -\partial H / \partial x$ от координаты x .

Аналогично предыдущему параграфу выберем невозмущенный гамильтониан $H_0 = (p^2 + x^2) / 2$ и перейдем к переменным (I, θ) . Тогда (см. (2.30))

$$H(I, \theta) = I + \frac{3}{8} a_3 I^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} a_2 I^{3/2} f_3 + a_3 I^2 f_4. \quad (2.36)$$

Заметим, что постоянную составляющую дает только кубическая нелинейность. Параметр возмущения в этой задаче $\varepsilon \sim I^{1/2}$ существенно больше, чем в предыдущей, за счет квадратичной нелинейности. Первая замена переменных уничтожает только член $\sim I^{3/2}$ (см. ниже), так что применять метод усреднения к исходному гамильто-

ниану (2.36) вообще нельзя^{*}). Производящая функция получается аналогично предыдущему параграфу:

$$\Phi_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} a_2 I_1^{3/2} f_3. \quad (2.37)$$

Если мы собираемся ограничиться только одним каноническим преобразованием переменных, то вычисление нового возмущения $\varepsilon^2 V_1$ ($V_1 \sim H \sim I$) достаточно произвести с точностью до членов $\sim I^{5/2}$ включительно, так как после второго преобразования возмущение $\varepsilon^4 V_2 \sim I^3$. Подставляя $I = I_1 + \Phi_0$ в (2.36), получим гамильтониан первого приближения

$$H_1(I_1, \theta) = I_1 + I_1^2 \left(\frac{3}{8} a_3 - \frac{4}{3} a_2^2 f_3^2 + a_3 f_4 \right) + I_1^{5/2} \left(-\frac{a_2 a_3}{\sqrt{2}} f_3 + \frac{2\sqrt{2}}{9} f_3^3 - \frac{4\sqrt{2}}{3} a_2 a_3 f_3 f_4 \right). \quad (2.37)$$

В членах $\sim I_1^2$ необходимо заменить фазу $\theta = \theta_1 - \Phi_{I_1} = \sqrt{2} a_2 I_1^{1/2} F_3$, где $dF_3/d\theta = f_3$. Дополнительные члены в гамильтониане имеют вид

$$H_1(I_1, \theta) \rightarrow H_1(I_1, \theta_1) + \sqrt{2} F_3 I_1^{5/2} \left[a_3 f_4' - \frac{4}{3} a_2^2 (f_3^2)' \right]. \quad (2.38)$$

Нетрудно проверить, что единственное среднее, отличное от нуля, есть $\langle f_3^2 \rangle = 5/16$. Поэтому усредненный гамильтониан

$$\langle H_1 \rangle = I_1 + I_1^2 \left(\frac{3}{8} a_3 - \frac{5}{12} a_2^2 \right). \quad (2.39)$$

Откуда частота колебаний

$$\omega = 1 + I_1 \left(\frac{3}{4} a_3 - \frac{5}{6} a_2^2 \right). \quad (2.40)$$

Из этого выражения видно, что бо́льшая по величине квадратичная нелинейность вызывает смещение частоты того же порядка, что и кубичная. При определенном соотношении коэффициентов

$$a_3 = \frac{10}{9} a_2^2, \quad (2.41)$$

смещение частоты компенсируется и система становится аномально изохронной. Смещение частоты не превышает в этом случае $\sim I^2$.

Рассмотрим еще чисто кубическую нелинейность с гамильтонианом

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^4}{4}. \quad (2.42)$$

^{*} Точнее, получается тривиальный результат: $\langle H \rangle = I$.

Ее можно рассматривать как предельный случай системы (2.35) при очень большой амплитуде колебаний. Система (2.42), так же как и маятник и система (2.35), допускает точное решение в эллиптических функциях:

$$\frac{x(t)}{a} = cn(at) = \frac{\pi\sqrt{2}}{K_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\omega t}{ch[\pi(n-\frac{1}{2})]} \approx \approx .9550 \cos(\omega t) + \frac{\cos(3\omega t)}{23} + \frac{\cos(5\omega t)}{23^2} + \dots \quad (2.43)$$

Здесь a — амплитуда колебаний; $K_0 = K(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1.8541$. Интересной особенностью рассматриваемой системы является весьма малый вклад в движение высших гармоник, несмотря на значительную нелинейность. Частота колебаний равна:

$$\omega = \frac{\pi a}{2K_0} = \beta a = \sqrt{2} \beta H^{1/4}; \quad \beta \approx .8472. \quad (2.44)$$

Она оказывается пропорциональной амплитуде колебаний. Переменную действия можно найти из соотношения $\omega = \partial H / \partial I$, откуда

$$I = \int_0^H \frac{dH}{\omega(H)} = \frac{2\sqrt{2}}{3\beta} H^{3/4} = \frac{a^3}{3\beta} \quad (2.45)$$

Параметр нелинейности (2.14) равен:

$$\alpha = \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} = \frac{I}{\omega} \frac{d^2 H}{dI^2} = \frac{1}{3}. \quad (2.46)$$

§ 2.4. Сепаратриса

Вернемся теперь к маятнику и рассмотрим траекторию его движения, пограничную между вращением и колебаниями. Эта траектория называется сепаратрисой, или разделяющей траекторией. Она разделяет качественно различные режимы движения. Нетрудно представить себе, что движение в близкой окрестности сепаратрисы должно быть сильно неустойчивым, так как небольшие возмущения могут переобразовывать маятник из колебательного режима во вращательный и наоборот. Именно поэтому нас будет особенно интересовать движение в этой области. Оказывается, что именно здесь возникает и отсюда распространяется неустойчивость нелинейных колебаний (§ 4.3).

Сепаратриса соответствует значению энергии $H = U_0$ (2.1), откуда фазовая траектория сепаратрисы ($M = 1$; $-\pi \leq \varphi \leq \pi$)

$$p_{sx} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (2.47)$$

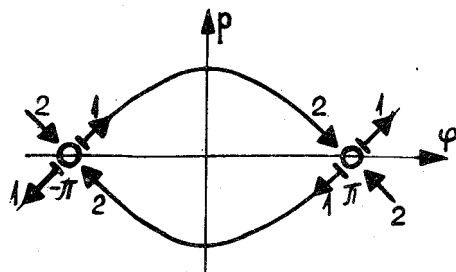


Рис. 2.1. Сепаратриса: О - усатый тор (точка); 1 - выходящие усы; 2 - входящие усы.

Следнее следует рассматривать как отдельную траекторию, так как в отсутствие возмущений маятник остается в этом положении неопределенно долго. Отсюда ясно, что движение по сепаратрисе должно иметь характер асимптотического приближения (или удаления) к точке неустойчивого равновесия. Уравнение (2.47) интегрируется и дает

$$\varphi_{sx}(t) = 4 \operatorname{arctg}(e^{\omega_0 t}) - \pi, \quad (2.49)$$

где время отсчитывается от момента прохождения положения устойчивого равновесия ($\varphi = 0$). Выражение (2.49) ясно демонстрирует асимптотический характер движения по сепаратрисе: $\varphi_{sx} \rightarrow \pm \pi$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

По образной терминологии Арнольда [2] ветви сепаратрисы называются "усами", которые "прикреплены" к "усатому тору". В рассматриваемом случае консервативной системы с одной степенью свободы "усатый тор" имеет нулевую размерность и вырождается в точку - положение неустойчивого равновесия ($\varphi = \pm \pi$). Для дальнейшего существенно различать входящий и выходящий усы (см. рис. 2.1), которые в данном случае сливаются на каждой из двух ветвей сепаратрисы. По терминологии Пуанкаре [6] усы называются двойко-асимптотическими траекториями, так как в обе стороны по времени ($t \rightarrow \pm \infty$) они асимптотически приближаются к некоторой траектории. Для нашей системы эта предельная траектория - неустойчивая неподвижная точка $\varphi = \pm \pi$ - одна и та же в обоих пределах: $t \rightarrow \pm \infty$. В этом случае усы называются гомоклинными траекториями.

Разные знаки соответствуют двум ветвям сепаратрисы - двум направлениям движения маятника. На фазовой плоскости сепаратриса образует характерный "крест" (рис. 2.1):

$$p = \pm \omega_0 (\pi - \varphi) \quad (2.48)$$

Точка "пересечения" ветвей сепаратрисы определяет положение неустойчивого равновесия. По-

Рассмотрим движение маятника вблизи сепаратрисы. Будем характеризовать расстояние по сепаратрисе относительной энергией

$$w = \frac{H - U_0}{U_0} \approx \frac{p^2}{2U_0} + \frac{(\pi - \varphi)^2}{2} \ll 1. \quad (2.50)$$

С помощью формул § 2.1 находим, что как в колебательном ($w < 0$), так и во вращательном ($w > 0$) режимах $k \approx \sqrt{|w|/2}$,

$K(k) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{32}{|w|}$; $K' \equiv K(k') \approx \pi/2$. Кроме того, введенная для вращательного режима частота (2.9) $\omega_r \approx \omega_0$. Поэтому в обоих режимах, т.е. по обе стороны от сепаратрисы, решение будет иметь вид (см. (2.5), (2.8))

$$\varphi(t) \approx 4 \sum_n \frac{\sin(n\omega t)}{n \cdot \operatorname{ch}(\frac{\pi n \omega}{2\omega_0})}, \quad (2.51)$$

причем во вращательном режиме присутствуют только четные гармоники, а в колебательном - только нечетные. Частота колебаний

$$\omega(w) \approx \frac{\pi \omega_0}{\ln \frac{32}{|w|}} \quad (2.52)$$

неограниченно уменьшается при приближении к сепаратрисе ($|w| \rightarrow 0$), хотя и логарифмически. Из вида спектра гармоник (2.51) можно заключить, что движение вблизи сепаратрисы примерно такое же, как и на сепаратрисе, за исключением конечного периода (2.52).

Найдем еще действие вблизи сепаратрисы. Аналогично (2.45) можно написать

$$I(w) = I_{sx} + \int_0^w \frac{U_0 dw}{\omega(w)}.$$

Действие на сепаратрисе I_{sx} получим, интегрируя (2.47):

$$I_{sx} = \frac{1}{2\pi} \oint p_{sx} d\varphi = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{sx} d\varphi = \frac{8\omega_0}{\pi}.$$

Окончательно находим

$$I(w) = \frac{8\omega_0}{\pi} \left(1 + \frac{w}{8} \ln \frac{32e}{|w|} \right). \quad (2.53)$$

Полагая $I \approx I_{sx}$, найдем параметр нелинейности колебаний в окрестности сепаратрисы:

$$\alpha = \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \approx \frac{8}{w (\ln \frac{32}{|w|})^2}. \quad (2.54)$$

При приближении к сепаратрисе нелинейность неограниченно возрастает.

Глава 3

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС

Свободные колебания нелинейного консервативного осциллятора с одной степенью свободы, рассмотренные в предыдущем разделе, всегда устойчивы при условии, конечно, что движение финитно. Ничего особенно интересного в этом случае не происходит. Что же произойдет, если включить внешнее возмущение? Гамильтониан системы можно записать в этом случае в виде

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t). \quad (3.1)$$

Явная зависимость гамильтониана от времени и характеризует здесь внешнее возмущение. Ниже мы будем предполагать, что возмущение является периодическим по времени с периодом T а основной частотой $\Omega = 2\pi/T$. В этом случае спектр возмущения имеет частоты $n\Omega$. Почти периодическое возмущение с произвольным дискретным спектром (Ω_n) не приводит к каким-либо качественно новым эффектам. Ограниченное во времени возмущение с непрерывным спектром (импульс возмущения) не представляет особого интереса, так как вызывает лишь малое ($\varepsilon \ll 1$) изменение энергии колебаний. Наконец, стационарное возмущение с непрерывным спектром, например, нерегулярная последовательность импульсов, вызывает в системе процесс диффузионного типа. Теория таких процессов, очень важных для приложений, составляет сейчас обширный раздел теории колебаний, линейных и нелинейных. Это выходит, однако, за рамки нашего пособия. Итак, будем считать, что возмущение является периодическим. Введем фазу возмущения

$$\tau = \Omega t + \tau_0, \quad (3.2)$$

где τ_0 — начальная фаза. Разложим возмущение в двойной ряд Фурье:

$$H(I, \theta, \tau) = H_0(I) + \varepsilon \sum_{m, n} V_{mn}(I) e^{i(m\theta + n\tau)}. \quad (3.3)$$

Действие различных Фурье-компонент возмущения будет тем сильнее, чем медленнее изменяется их фаза

$$\psi_{mn} = m\theta + n\tau. \quad (3.4)$$

В предельном случае постоянной фазы мы имеем резонанс

$$m\omega(I) + n\Omega = 0. \quad (3.5)$$

Это соотношение определяет набор резонансных значений частоты ω и соответственно набор резонансных значений энергии колебаний (или I). Резонансные значения ω_{mn} образуют, в общем случае, всюду плотное множество. Тем не менее мы начнем с обратного предельного случая, когда сумма в (3.3) состоит всего из одного слагаемого (точнее, из двух комплексно сопряженных). Иначе говоря, мы рассмотрим в этом разделе свойства одиночного (изолированного) нелинейного резонанса. Нашей целью является установление наиболее общих свойств нелинейного резонанса, которые помогут нам ориентироваться в сложном случае взаимодействия многих резонансов (гл.4). Мы начнем с двух простых примеров — внешнего (§ 3.1) и параметрического (§ 3.2) резонансов, которые неоднократно рассматривались в различных приложениях, например в теории ускорителей /16/.

§ 3.1. Внешний резонанс

Рассмотрим движение маятника вблизи положения равновесия, т.е. при малых амплитудах колебаний ($\varphi_0 \ll 1$), в присутствии внешнего возмущения. В качестве последнего выберем гармоническую внешнюю силу с частотой Ω . Тогда дополнительный член в гамильтониане будет иметь вид

$$- \varphi F_0 \cos \tau = - \frac{\sqrt{2I} F_0}{2} [\cos(\theta - \tau) + \cos(\theta + \tau)].$$

Здесь $F_0 \ll 1$ — малая амплитуда момента силы; последнее выражение получается после перехода к переменным (I, θ) и подстановки в возмущение невозмущенного решения $\varphi = \varphi_0 \cos \theta$. Даже в этом простейшем случае возмущение содержит два члена. Отбросим быстроосциллирующий второй, а основную часть гамильтониана возьмем в приближении (2.25) (с точностью $\sim I^2$)

$$H(I, \theta, \tau) \approx I - \frac{I^2}{16} - \frac{F_0 \sqrt{I}}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \tau). \quad (3.6)$$

Попробуем сначала уничтожить возмущение заменой переменных. Производящую функцию ищем в виде

$$F(I_1, \theta) = I_1 \theta + \Phi \sin(\theta - \tau). \quad (3.7)$$

В отличие от задач гл.2 производящая функция зависит теперь от времени, поэтому после замены переменных гамильтониан изменится на величину $\partial F / \partial t$. Подставляя $I = I_1 + \Phi \cos(\theta - \tau)$ в (3.6) и учитывая член $\partial F / \partial t$, потребуем, чтобы члены первого порядка по малому параметру ε уничтожились:

$$(1 - \frac{I_1}{8})\Phi - \frac{F_0 \sqrt{I_1}}{\sqrt{2}} - \Omega \Phi = 0.$$

Откуда

$$\Phi = \frac{F_0 \sqrt{I_1}}{\sqrt{2}(1 - \frac{I_1}{8} - \Omega)}. \quad (3.8)$$

Мы видим, что уничтожение возмущения возможно лишь вдали от резонанса $\Omega = 1 - \frac{I_1}{8}$. Это оправдывает, кстати, отбрасывание нерезонансных (быстро осциллирующих) членов в гамильтониане. Однако сейчас нас интересует именно резонанс ($\Omega \approx 1$), когда уничтожение возмущения невозможно из-за появления малого резонансного знаменателя.

Отказавшись от уничтожения возмущения, попробуем освободиться от явной зависимости гамильтониана (3.6) от времени, которая приводит к изменению энергии системы. Для этого введем новую фазу, а канонически сопряженный с ней импульс оставим прежним (I):

$$\psi = \theta - \tau. \quad (3.9)$$

Производящая функция такого преобразования переменных имеет вид

$$F(I, \psi, \tau) = -I(\psi + \tau). \quad (3.10)$$

В новых переменных гамильтониан (3.6) принимает вид

$$H_r(I, \psi) = I \Delta - \frac{I^2}{16} - \frac{F_0 \sqrt{I}}{\sqrt{2}} \cos \psi, \quad (3.11)$$

где $\Delta = 1 - \Omega$ — расстройка частоты возмущения по отношению к линейным колебаниям. Новый гамильтониан не зависит явно от времени и потому сохраняется. Это значит, что система (3.11) интегрируема. Гамильтониан H_r будем называть резонансным. Заметим, что величину H_r можно было бы назвать также квазиэнергией, так как это классический аналог квантовой квазиэнергии, введенной Зельдовичем и Ритусом [17].

Пусть вначале $\Omega = 1$, т.е. возмущение настроено в резонанс с колебаниями очень малой ("нулевой") амплитуды. Тогда $H_r = 0$ (3.11). Представим резонансный гамильтониан в виде

$$-H_r = \sqrt{I} \left(\frac{I^{3/2}}{16} + \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cos \psi \right) = 0.$$

Максимальное значение I_m найдем, приравняв нулю выражение в скобках. Учитывая, что $I > 0$, получим

$$I_m = 4 \cdot 2^{1/3} F_0^{2/3} \approx 5.04 F_0^{2/3}. \quad (3.12)$$

Таким образом, положение равновесия в этом случае неустойчиво. Существенно, однако, что при малом F_0 амплитуда возникающих под действием возмущения колебаний остается малой. В этом состоит кардинальное отличие нелинейного резонанса от линейного. В последнем случае при точном резонансе амплитуда колебаний неограниченно возрастает. Нелинейность же как бы стабилизирует движение за счет изменения частоты колебаний и выхода системы из резонанса. С другой стороны, действие слабого ($F_0 \rightarrow 0$) возмущения в резонансе оказывается значительно сильнее ($\sim F_0^{2/3}$), чем вне резонанса ($\sim F_0 \sqrt{I}$, см. (3.6)). Это показывает важность резонансных явлений и для нелинейных колебаний.

Интересно отметить, что максимальное I соответствует не частоте $\Omega = 1$, а несколько меньшему значению Ω . Это понятно, так как частота колебаний уменьшается с ростом амплитуды. Чтобы найти этот максимум, поступаем следующим образом. Так как $H_r = 0$, записываем уравнение $H_r / \sqrt{I} = 0$ в виде (см. (3.11))

$$f(\sqrt{I}) = \sqrt{I} \Delta - \frac{I^{3/2}}{16} = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \cos \psi. \quad (3.13)$$

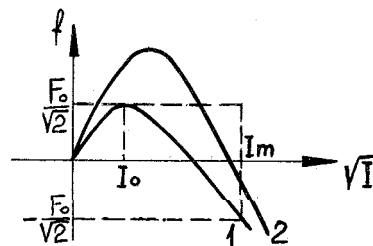


Рис. 3.1. Исследование внешнего резонанса (3.13): 1 — $\Delta = \Delta_1$ (3.14); 2 — $\Delta > \Delta_1$.

Построим график функции f (рис.3.1). Максимальное значение I_m соответствует $\cos \psi = -1$ и растет с ростом $\Delta > 0$. Однако при $\Delta > \Delta_1$ область изменения I разбивается на два участка, не связанных между собой (рис. 3.1). Если мы интересуемся возбуждением колебаний от нулевой амплитуды, то наибольшее I соответствует хаса-

нию кривой $f(\sqrt{I})$ и прямой $f = F_0/\sqrt{I}$ при некотором $I = I_0$ (кривая 1). Вычисляя максимум f , найдем критическое значение расстройки

$$\Delta_1 = \frac{3}{16} I_0 = \frac{3}{4 \cdot 2^{1/3}} F_0^{2/3} \approx .60 F_0^{2/3}. \quad (3.14)$$

Решение кубического уравнения $\sqrt{I_m} \cdot \Delta_1 - I_m^{3/2}/16 = -F_0/\sqrt{I}$ дает

$$I_m \approx 12.7 F_0^{2/3}, \quad (3.15)$$

что приблизительно в 25 раз больше значения (3.12).

Как видно из рис.3.1 (кривая 2), при $\Delta > \Delta_1$ появляется область изменения I , изолированная от $I = 0$, причем I в этой области растет с ростом Δ . Рассмотрим ее подробнее. Для этого сделаем новую каноническую замену переменных, оставив прежнюю фазу ψ и введя новый импульс

$$p = I - I_r; \quad \omega(I_r) = 1 - \frac{I_r}{2} = \Omega. \quad (3.16)$$

Соответствующая производящая функция равна (ср. (3.10)):
 $F(I, \psi, \tau) = -(I - I_r)(\psi + \tau)$. Величина I_r есть резонансное значение действия. Гамильтониан системы (3.6) принимает теперь вид

$$H_r(p, \psi) = I_r - \frac{I_r^2}{16} - \frac{p^2}{16} - \frac{F_0 \sqrt{I_r + p}}{\sqrt{2}} \cos \psi. \quad (3.17)$$

Допустим, что $|p| \ll I_r$, тогда в последнем члене можно положить в первом приближении $p = 0$, и с точностью до постоянного слагаемого получается гамильтониан маятника с "массой" $M = -8$. Отрицательная "масса" означает просто, что положение устойчивого равновесия соответствует не минимуму "потенциальной энергии" ($\psi = 0$), а максимуму ($\psi = \pi$). Заметим, что "масса" M связана с нелинейностью осциллятора простым соотношением

$$M^{-1} = \frac{d\omega}{dI}. \quad (3.18)$$

Область нелинейного резонанса соответствует колебаниям "маятника" (ограниченное изменение фазы ψ) и расположена внутри сепаратрисы (§ 2.4). Максимальное p равно:

$$p_m = 4(4I_r)^{1/4} F_0^{1/2}. \quad (3.19)$$

Частота малых колебаний "маятника" равна:

$$\Omega_\phi^2 = \frac{F_0 \sqrt{2I_r}}{16} \quad (3.20)$$

Пользуясь терминологией из теории ускорителей заряженных частиц, мы будем называть Ω_ϕ частотой фазовых колебаний (колебаний резонансной фазы ψ). "Приближение маятника" справедливо при условии $p_m \ll I_r$. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы частота фазовых колебаний была достаточно мала: $\Omega_\phi \ll \omega \approx 1$, где ω — частота колебаний осциллятора. В противном случае член $\cos(\theta + \tau)$ в исходном гамильтониане уже не будет быстроосциллирующим (по сравнению с членом $\cos(\theta + \tau)$) и его нельзя отбрасывать даже в первом приближении. Оба условия можно записать в виде двойного неравенства:

$$\frac{1}{\varepsilon} \gg \alpha \gg 4\varepsilon, \quad (3.21)$$

которое мы будем называть условием умеренной нелинейности.

§ 3.2. Параметрический резонанс

Рассмотрим опять колебания маятника малой амплитуды с гамильтонианом (2.22)

$$H \approx \frac{p^2 + \omega_0^2 \varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24}. \quad (3.22)$$

Параметрический резонанс возникает при периодическом изменении параметра системы ω_0^2 , определяющего частоту колебаний. Пусть

$$\omega_0^2(\tau) = 1 + \varepsilon \cdot \cos \tau; \quad \tau = \Omega t + \tau_0; \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.23)$$

В качестве невозмущенного гамильтониана выберем $H_0 = (p^2 + \varphi^2)/2$. Переходя к переменным (I, θ) для H_0 , получим

$$H(I, \theta, \tau) = I + \varepsilon I \cos^2 \theta \cdot \cos \tau - \frac{I^2}{6} \cos^4 \theta \rightarrow \\ \rightarrow I + \frac{\varepsilon I}{4} \cos(2\theta - \tau) - \frac{I^2}{16}. \quad (3.24)$$

В последнем выражении мы произвели усреднение, т.е. отбросили осциллирующие члены, кроме резонансного с фазой

$$\psi = 2\theta - \tau. \quad (3.25)$$

Дальше действуем аналогично предыдущему параграфу. Для исследования возбуждения колебаний от нулевой амплитуды выбираем фазу (3.25) за новую переменную. Взяв производящую функцию в виде $F(I, \psi, \tau) = -I(\psi + \tau)/2$ ($-\partial F/\partial I = \theta$), находим новый

импульс

$$\dot{J} = -\frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{I}{2}. \quad (3.26)$$

Заметим, что появление множителя $1/2$ связано с сохранением фазового объема при каноническом преобразовании $dI d\theta = dJ d\psi$.

В новых переменных резонансный гамильтониан

$$H_r(J, \psi) = J \cdot \Delta - \frac{J^2}{4} + \frac{\varepsilon J}{2} \cos \psi = \text{const} \quad (3.27)$$

$$\Delta = 2 - \Omega.$$

Анализ этого гамильтониана еще проще, чем для внешнего резонанса (§ 3.1). Если вначале $\dot{J} = 0$, то $H_r = 0$. Сокращая последнее равенство на $\dot{J}$ (так как нас не интересует тривиальное решение $\dot{J} \equiv 0$), получим

$$J = 4 \left(\Delta + \frac{\varepsilon}{2} \cos \psi \right). \quad (3.28)$$

При точном резонансе ($\Delta = 0$) $I_{\max} = 4\varepsilon$. Однако, как и для внешнего резонанса, амплитуда возбуждаемых колебаний увеличивается при $\Delta > 0$ и достигает максимума при $\Delta = \varepsilon/2$. Это значение определяется из условия достижения $\dot{J} = 0$ при $\cos \psi = -1$. Максимальная амплитуда равна:

$$I_m = 8\varepsilon. \quad (3.29)$$

Она мала при достаточно малом ε , т.е. нелинейность стабилизирует параметрическую неустойчивость. Для линейного осциллятора член с J^2 в гамильтониане (3.27) отсутствует, и мы получаем уравнение $J(\Delta + \frac{\varepsilon}{2} \cos \psi) = \text{const}$, определяющее зону неустойчивости $|\Delta| \leq \varepsilon/2$, в которой амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

С первого взгляда может показаться, что эффект от параметрического резонанса (3.29) того же порядка, что и от нерезонансного возмущения ($\sim \varepsilon$). Однако из (3.24) видно, что в последнем случае изменение действия (ΔI) содержит дополнительный малый множитель $I \ll 1$: $\Delta I \sim \varepsilon I$. Поэтому и для параметрического возмущения наиболее важен резонансный случай.

Возвращаясь к нелинейному параметрическому резонансу, рассмотрим большую расстройку $\Delta \gg \varepsilon/2$. В этом случае область биемной амплитуды ограничена снизу (3.28). Введем новый п-

пульс

$$p = J - J_r = \frac{I - I_r}{2}. \quad (3.30)$$

Тогда

$$H_r(p, \psi) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + \frac{\varepsilon(J_r + p)}{2} \cos \psi. \quad (3.31)$$

При $|p| \ll J_r = 2\Delta$ мы снова получаем гамильтониан маятника с "массой" $M = -2$. Можно проверить, что условие этого приближения аналогично (3.21).

§ 3.3. Универсальное описание нелинейного резонанса

Теперь мы можем рассмотреть более широкий класс резонансов. Выделим произвольный член Фурье-разложения (3.3) и запишем гамильтониан в виде

$$H(I, \theta, \tau) = H_0(I) + \varepsilon V_{mn}(I) \cos(m\theta - n\tau). \quad (3.32)$$

Мы перешли здесь к действительным функциям и изменили знак перед n , чтобы подчеркнуть резонансный характер выделенного члена. Вводим новую (резонансную) фазу

$$\psi = m\theta - n\tau \quad (3.33)$$

и выбираем производящую функцию в виде

$$F(I, \psi, \tau) = - (I - I_r) \frac{\psi + n\tau}{2}. \quad (3.34)$$

Тогда новый импульс равен:

$$p = \frac{I - I_r}{m}. \quad (3.35)$$

Разложим невозмущенный гамильтониан $H_0(I)$ до члена $\sim p^2$ и учтем добавку к гамильтониану $\partial F / \partial \tau = -np\Omega$. Имеем

$$H_r(p, \psi) \approx \frac{p^2}{2M} + \varepsilon V_{mn}(I_r) \cos \psi. \quad (3.36)$$

Мы отбросили здесь постоянный член $H_0(I_r)$ и пренебрегли следующими членами разложения $V_{mn}(I)$ по p . Величина I_r выбрана таким образом, чтобы линейные по p члены сократились:

$$m\omega_0(I_r) - n\Omega = 0, \quad (3.37)$$

т.е. I_r соответствует точному резонансу. Масса "маятника" определяется нелинейностью невозмущенных колебаний:

$$M^{-1} = m^2 \frac{d\omega_0}{dI} \Big|_{I=I_r} \equiv m^2 \omega_0' \quad (3.38)$$

Частота (малых) фазовых колебаний равна:

$$\Omega_\phi = \sqrt{\frac{\varepsilon V_{mn}}{M}} \sim \sqrt{\varepsilon \alpha} m \omega_0 \quad (3.39)$$

Последняя оценка написана в предположении $V_{mn} \sim \omega_0 I_r$; $\alpha = I_r \omega'_0 / \omega_0$.

Запишем уравнение сепаратрисы "маятника" (3.36) в исходных переменных I, θ, τ . Заметим, что величину τ можно рассматривать как дополнительную координату фазового пространства системы, движение по которой задано: $\tau = \Omega t + \tau_0$. В таком случае фазовое пространство становится трехмерным. Иногда говорят поэтому, что система имеет 1,5 степени свободы. Уравнение сепаратрисы принимает вид (ср. (2.47) а рис.2.1)

$$I_s = I, \pm (\Delta I)_r \sin \frac{m\theta - n\tau}{2} \\ (\Delta I)_r = 2m \sqrt{\varepsilon M V_{mn}} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} I_r. \quad (3.40)$$

Полный размер области по I , занятой нелинейным резонансом, равен $2(\Delta I)_r$. Найдем еще полуширину нелинейного резонанса по частоте

$$(\Delta \omega)_r = (\Delta I)_r \cdot \omega'_0 = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{\varepsilon V_{mn}}{M}} = \frac{2\Omega_\phi}{m} \sim \sqrt{\varepsilon \alpha} \omega_0. \quad (3.41)$$

Отметим, что опять-таки эффект резонансного возмущения ($\sim \sqrt{\varepsilon}$) больше, чем нерезонансного ($\sim \varepsilon$).

Неустойчивое положение равновесия "маятника" (3.36) ($\psi = 0$; $\omega'_0 > 0$) превращается в исходных переменных в замкнутую спираль $\theta = n\tau/m$, топологически эквивалентную кольцу. Эта кривая и есть "усатый тор" Арнольда размерности 1 (§ 2.4), к которому "прикреплены усы" (3.40).

Универсальное описание резонанса в приближении маятника (3.36) ограничено, во-первых, условием малости отброшенных при разложении членов $m\tau \ll I_r$, или (3.40) $\varepsilon \ll \alpha$. Во-вторых, необходимо потребовать, чтобы частота фазовых колебаний Ω_ϕ была бы достаточно мала, чтобы можно было пренебречь нерезонансными слагаемыми в гамильтониане, считая их быстроосциллирующими. В § 3.1 мы приняли условие $\Omega_\phi \ll \omega_0$. В общем случае (3.1), однако, это условие должно быть значительно усилено, так как частоты нерезонансных членов (m_n) могут быть значительно меньше ω_0 . Это так называемые малые знаменатели (см. п.4.5). Поэтому запишем

условие приближения маятника в виде

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\omega_m}{m\omega_0} \right)^2. \quad (3.42)$$

Первое из этих неравенств есть условие малости области резонанса, тогда как второе необходимо для пренебрежения влиянием нерезонансных членов, или соседних резонансов. Эта проблема будет подробно обсуждаться в гл.4.

Условие резонанса (3.37) для гармоники (m, n) будет выполняться также и для гармоник $(\ell m, \ell n)$, где ℓ — любое целое число $\neq 0$. Поэтому приближение маятника ограничено также условием малости высших гармоник $V_{\ell m, \ell n} \ll V_{mn}$ ($\ell > 1$). Пример системы, для которой это условие не выполняется и приближение маятника несправедливо, рассмотрен в § 4.2.

При выполнении всех этих условий возможно весьма простое описание поведения осциллятора вблизи отдельного нелинейного резонанса. Обратим внимание еще раз на интересный факт, что случай малой нелинейности ($\alpha \approx \varepsilon$) оказывается более сложным и разнообразным (§ 3.1, 3.2), чем случай умеренной нелинейности, что прекрасно демонстрируется на примере любопытной системы, изученной в [18], для которой неустойчивость имеет место при любом сколь угодно малом возмущении (см. § 4.1).

3.4. Резонанс многомерных колебаний

Рассмотрим резонанс многомерных нелинейных колебаний. Предположим, что гамильтониан системы можно представить в виде

$$H(I, \theta, \tau) = H_0(I) + \varepsilon V_m e^{i(m, \theta + n\tau)}. \quad (3.43)$$

Здесь I, θ, τ — вектора, например, $I = (I_1, \dots, I_N)$; N — число степеней свободы системы; $m, \theta = m_i \theta_i$ — скалярное произведение^{*}; $\tau = \Omega t + \tau_0$.

Согласно (3.43), невозмущенная система $H_0(I)$ является полностью интегрируемой, т.е. у нее имеется полный набор N переменных действия и сопряженных им фаз $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Движение такой системы является квазипериодическим с N основными частотами $\omega_k = \partial H_0 / \partial I_k$, или короче $\omega = \partial H_0 / \partial I$. Нелинейность

* Здесь и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

системы характеризуется матрицей

$$\partial\omega/\partial I \equiv \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial I_k} \right) = \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_k} \right). \quad (3.44)$$

Фазовое пространство системы представляет собой прямое произведение N -мерного пространства действий на N -мерное пространство фаз. Невозмущенная фазовая траектория системы лежит на N -мерном торе $I = \text{const}$, который в пространстве действий изображается точкой $I = \text{const}$. Вместо пространства действий удобно рассматривать связанное с ним пространство частот, каждая точка которого также соответствует тору в фазовом пространстве. Связь обоих пространств является взаимно-однозначной при условии невырожденности системы, когда детерминант матрицы (3.44) отличен от нуля [14].

Условие резонанса записывается в виде

$$m, \omega(I) + n\Omega \equiv m_i \omega_i + n\Omega = 0. \quad (3.45)$$

При $n=0$ имеют место резонансы связи, соответствующие обмену энергией между степенями свободы невозмущенной системы. Структура резонансов наиболее наглядна в пространстве частот, где каждый из резонансов (3.45) есть просто плоскость, перпендикулярная вектору m . Действительно, сместимся в любом направлении в резонансной плоскости на вектор $\delta\omega$, тогда из (3.45) вытекает $m, \delta\omega = 0$. В пространстве действий каждый резонанс определяет некоторую поверхность. Сместимся вдоль этой поверхности на малый вектор dI . Из (3.45) получаем $m_i \frac{\partial\omega_i}{\partial I_k} dI_k \equiv m, \partial\omega/\partial I, dI = 0$. Следовательно, нормаль к резонансной поверхности в пространстве действий направлена по вектору $m, \partial\omega/\partial I \equiv m_i \partial\omega_i/\partial I_k$.

Как и в предыдущих параграфах этой главы, рассмотрим влияние только одного резонанса. В этом случае возмущение зависит только от одной определенной комбинации фаз

$$\psi_i = m, \theta + n\tau. \quad (3.46)$$

Значит, остальные $(N-1)$ линейно-независимые комбинации фаз являются циклическими переменными, что дает $N-1$ интегралов движения. Наглядное представление об этих резонансных интегралах можно получить из уравнений движения

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\varepsilon m V_m e^{i\psi_i}. \quad (3.47)$$

Отсюда видно, что направление вектора I постоянно и совпадает с направлением вектора m . Отметим, что для резонансов связи ($n=0$) оба вектора ($\dot{I}; m$) лежат в гиперплоскости, касательной к поверхности постоянной энергии $H_0 = \text{const}$ в любой точке ее пересечения с резонансной поверхностью (3.45). Это означает, в свою очередь, что резонансное возмущение сохраняет невозмущенную энергию H_0 . Можно рассуждать и иначе: в случае единственного резонанса возмущение $V(\theta) = \text{const}$ ($\psi_i = \text{const}$), но тогда и $H_0 = \text{const}$ из-за $H = \text{const}$.

Ввиду наличия $(N-1)$ интегралов движения многомерная система вырождается в случае единственного резонанса в систему с одной степенью свободы.

Произведем каноническую замену переменных, выбрав в качестве новых координат N линейно-независимых комбинаций фаз

$$\psi_k = m_{kl} \theta_l + n_k \tau. \quad (3.48)$$

Пусть ψ_i совпадает с интересующей нас резонансной фазой (3.46), остальные — произвольны. Выберем производящую функцию в виде, аналогичном (3.34): $F(I, \psi, \tau) = -(I - I^r)$, $\theta(\psi, \tau)$, где точка I^r лежит на резонансной поверхности. Введем матрицу L_{ik} , обратную к m_{kl} , т.е. $L_{ik} m_{kl} = \delta_{il}$. Тогда

$$\theta_i = L_{ik} (\psi_k - n_k \tau). \quad (3.49)$$

Окончательно, производящая функция принимает вид

$$F(I, \psi, \tau) = -(I_i - I_i^r) L_{ik} (\psi_k - n_k \tau). \quad (3.50)$$

Откуда новые импульсы

$$p_k = (I_i^r - I_i) L_{ik}. \quad (3.51)$$

В случае одного резонанса $(N-1)$ импульсов $p_k = \text{const}$, т.е. являются интегралами движения. Их можно записать также в виде

$$I_i L_{ik} = \text{const}; \quad k=2, \dots, N. \quad (3.52)$$

Подобные резонансные интегралы хорошо известны, например в теории ускорителей [16].

Пусть точка резонансной поверхности I^r лежит также на траектории движения системы, тогда все интегралы $p_k = 0$, и единственной переменной величиной остается p_i . Обращая систему (3.51), найдем

$$I_i = I_i^r + p_k m_{ki} \rightarrow I_i^r + p_i m_{ii}. \quad (3.53)$$

Последнее выражение учитывает, что все $p_k = 0$, кроме p_1 .

Вследствие явной зависимости F от ε через ε преобразованный гамильтониан изменится на величину

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = (I_\varepsilon - I_\varepsilon^r) \varepsilon_{ik} n_k \Omega = \Omega p_k n_k \rightarrow \Omega p_1 n_1. \quad (3.54)$$

Подставляя (3.53) в (3.43) и разлагая по p до квадратичных членов, получим резонансный гамильтониан в виде

$$H_r(p, \psi) \approx (m, \partial\omega/\partial I, m) \frac{p^2}{2} + \varepsilon V_m(I^r) \cos \psi. \quad (3.55)$$

Мы опустили здесь индекс у ψ и p и записали возмущение в действительной форме.

Линейные по p члены в резонансе всегда сокращаются, что как раз и означает, что резонансная фаза ψ остается постоянной с точностью до нелинейности колебаний, связанной с квадратичными членами ($\dot{\psi} = \partial H_r / \partial p$). Резонансный гамильтониан не зависит от времени и потому сохраняется.

Сравнивая полученный резонансный гамильтониан для многомерных колебаний с одномерным (3.36), мы видим, что отличие связано только с выражением для массы маятника. В многомерном случае

$$M^{-1} = m, \partial\omega/\partial I, m. \quad (3.56)$$

Это отличие, однако, может привести к существенным последствиям. Именно, может оказаться, что для какого-то резонанса m эффективная нелинейность $M^{-1} = 0$. В таком случае не только нарушается условие приближения маятника (3.42), но и вообще пропадает стабилизирующее действие нелинейного резонанса. Причину этого нетрудно понять. Выше мы видели, что нормаль к резонансной поверхности направлена по вектору $m, \partial\omega/\partial I$, тогда как изменение вектора I направлено по вектору m . Условие $M^{-1} = m, \partial\omega/\partial I, m = 0$ означает, что вектор I остается на резонансной поверхности. Иначе говоря, движение системы под действием резонансного возмущения таково, что она не выходит из резонанса, а значит, нет и стабилизации, нелинейность "не работает", нелинейная система ведет себя, как изохронная. Будем называть этот случай к в а з и - и з о х р о н н ы м. Ясно, что такая ситуация невозможна для нелинейной системы с одной степенью свободы. В случае $M^{-1} = 0$ можно продолжить разложение гамильтониана по p в надежде, что высшие члены разложения стабилизируют резонансное возмущение.

Чтобы более ясно представить себе картину нелинейной стабилизации в этом случае, заменим "кинетическую" энергию маятника $T \approx p^2/2M$ в (3.55) точным выражением

$$T(m, p) = H_0(I^r + m p) - H(I^r) + n \Omega p. \quad (3.57)$$

Для стабилизации резонансного возмущения необходимо, чтобы $|T| > 2\varepsilon V_m$. Максимальное $p_{\max}$ определяется как раз из условия $T(m, p_{\max}) = 2\varepsilon V_m$. Например, при $T = a p^k$ $p_{\max} = (2\varepsilon V_m/a)^{1/k}$. Стабилизация отсутствует при любом $\varepsilon \rightarrow 0$, если $T(m, p) \equiv 0$. Последнее как раз и означает, что условие резонанса (3.45) не зависит от p :

$$\frac{dT}{dp} = \partial H_0 / \partial I, m + n \Omega = \omega, m + n \Omega \equiv 0.$$

Квази-изохронный случай $dT/dp \equiv 0$ является, конечно, исключительным. Действительно, разлагая функцию $T(m, p)$ в ряд Тейлора по p , мы видим, что квази-изохронность возможна лишь при выполнении бесконечного числа условий на функцию $T(m, p)$, между тем как имеется лишь конечное число (N) свободных параметров (m_i), к тому же еще и целочисленных. Тем не менее для простых степенных гамильтонианов такой исключительный случай возможен. Пусть, например:

$$H_0(I) = I_1^2 + I_2^2 - \lambda I_3^2 \quad (3.58)$$

Рассмотрим резонансную поверхность с вектором $m = (m_1, m_2, m_3)$, проходящую через точку $I^r = (j_1, j_2, j_3)$. Вектор частот в этой точке равен $\omega = (2j_1, 2j_2, -2\lambda j_3)$. Подставляя $I = I^r + m p$ в (3.58), найдем, что квази-изохронность имеет место, если: а) $j_1 m_1 + j_2 m_2 - \lambda j_3 m_3 = 0$ (условие резонанса); б) $m_1^2 + m_2^2 - \lambda m_3^2 = 0$. Последнее равенство возможно только при $\lambda > 0$, т.е. при отрицательной энергии по одной из степеней свободы системы. Пусть λ удовлетворяет условию б) для некоторого резонанса m . Подставляя ее значение из б) в а), получим уравнение квази-изохронной поверхности (плоскости)

$$m_3 m_1 j_1 + m_3 m_2 j_2 = 2 j_3 (m_1^2 + m_2^2),$$

на которой отсутствует нелинейная стабилизация резонанса m .

Явление квази-изохронности было отмечено в [19]. Общее исследование структуры нелинейных резонансов выполнено Нехорошевым [20].

Он называет такие исключительные гамильтонианы некрутыми. В противоположном случае, т.е. когда $dT/dp \neq 0$ и, следовательно, нелинейная стабилизация резонансного возмущения имеет место, говорят, что $H_0(I)$ — крутая функция. В общем случае проверка условий крутизны затруднительна. Достаточным, более сильным, условием является выпуклость поверхности энергии $H_0(I) = \text{const}$. Еще более сильным является условие квазивыпуклости функции $H_0(I)/20$, которое означает, что выпуклость обеспечивается квадратичными членами вблизи точки касания поверхности $H_0(I) = \text{const}$ с плоскостью. В последнем случае справедливо приближение маятника (3.55).

Рассмотрим еще один гамильтониан, взятый из работы [21]:

$$H_0(I) = I_1 + I_2 - I_1^2 + I_2^2 - 3I_1 I_2.$$

Очевидно, что эта функция не является квазивыпуклой. Тем не менее оказывается, что нелинейная стабилизация имеет место для любого резонанса. Действительно, условие квазизохронности имеет, как можно проверить, вид $m_2^2 = m_1^2 + 3m_1 m_2$. Но это уравнение не имеет решения в целых числах, так как решение уравнения $x^2 = 3x + 1$ есть $x_{1,2} = m_2/m_1 = (3 \pm \sqrt{13})/2$. Следовательно, квазизохронность невозможна.

Если $M^{-1} \neq 0$, можно использовать выражения (3.39), (3.40) § 3.3 с "массой" (3.56), причем величины I ; m понимаются теперь как векторы.

Для дальнейшего важно представить себе структуру резонанса в пространстве частот. Из (3.40) получаем вектор фазовых колебаний $(\Delta\omega)^r$, соответствующий $(\Delta I)^r$

$$(\Delta\omega)^r = (\partial\omega/\partial I, m) p_r; \quad p_r = 2\sqrt{\varepsilon M V_m} = 2M \Omega_\phi. \quad (3.59)$$

Этот вектор, вдоль которого происходят фазовые колебания вектора ω , не параллелен, вообще говоря, нормали к резонансной поверхности $m/|m|$, где $|m|^2 = (m, m)$. Проекция $(\Delta\omega)^r$ на нормаль определяет полуширину резонансного слоя

$$(\Delta\omega)_r = \frac{m, (\Delta\omega)^r}{|m|} = \frac{2}{|m|} \sqrt{\varepsilon V_m} = \frac{2\Omega_\phi}{|m|}. \quad (3.60)$$

Аналогичным образом можно исследовать движение в окрестности кратного резонанса, когда для некоторого $I = I^r$ одновременно выполняются k резонансных условий вида (3.45) с k линейно-не-

зависимыми векторами $m^{(i)} (i=1, \dots, k \leq N)$ и разными, вообще говоря, целыми n_i . Резонанс кратности k соответствует пересечению k резонансных поверхностей (3.45). Число резонансных интегралов сокращается в этом случае до $N - k$. Вектор I изменяется соответственно в k -мерном подпространстве, образованном векторами $m^{(i)}$. Резонансный гамильтониан будет описывать теперь систему с k степенями свободы.

В качестве примера многомерного нелинейного резонанса рассмотрим систему двух связанных осцилляторов с кубической нелинейностью (§ 2.3)

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2, \quad (3.61)$$

где μ — малый параметр связи. Перейдем к переменным действие-угол и воспользуемся тем, что невозмущенная система ($\mu = 0$) является почти гармонической (§ 2.3): $x_i \approx a_i \cos \theta_i$ ($i=1, 2$). Тогда

$$H(I, \theta) \approx A(I_1^{4/3} + I_2^{4/3}) - \frac{\mu a_1 a_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.62)$$

Здесь $A = (3\beta/2\sqrt{2})^{4/3} \approx 8.671$, и мы оставили в возмущении только одно слагаемое, соответствующее резонансу связи $\omega_1^r = \omega_2^r$, который мы и собираемся исследовать.

Невозмущенный гамильтониан является квазивыпуклым, так как обе вторые производные $\partial^2 H_0 / \partial^2 I_k = 4A/gI_k^{2/3} > 0$. В качестве новых фаз возьмем

$$\psi_1 = \theta_1 - \theta_2; \quad \psi_2 = \theta_1 + \theta_2. \quad (3.63)$$

Полагая $I^r = (I_0, I_0)$, найдем новые импульсы (3.51)

$$p_1 = \frac{I_1 - I_2}{2} = p; \quad p_2 = \frac{I_1 + I_2}{2} - I_0 = 0. \quad (3.64)$$

Интеграл движения p_2 мы положили равным нулю, и это определяет константу I_0 . Резонансный гамильтониан имеет стандартный вид (3.55) с параметрами

$$M^{-1} = \frac{8A}{9I_0^{2/3}} = \frac{2\beta^2}{a^2}; \quad |\varepsilon V_m| = \frac{\mu}{2} a^2(I_0) = \mu \sqrt{A} I_0^{2/3}. \quad (3.65)$$

Частота фазовых колебаний равна:

$$\Omega_\phi = \beta \sqrt{\mu} \quad (3.66)$$

Ввиду симметрии системы (оба осциллятора одинаковы) вектор $(\Delta\omega)^r$ направлен по нормали к линии резонанса (по вектору $m = (1, -1)$)

и равен

$$(\Delta\omega)^r = m\Omega_\phi; \quad |(\Delta\omega)^r| = \sqrt{2}\Omega_\phi = (\Delta\omega)_r. \quad (3.67)$$

Последняя величина определяет полуширину резонанса по частоте.

Заметим, что устойчивым положением "маятника" для рассматриваемого резонанса связи является "точка" $\theta_1 = \theta_2$ (3.62).

Фактически, это — периодическая траектория, соответствующая синфазным колебаниям обоих осцилляторов. Усатый тор (пересечение сепаратрис) определяется в данном случае условием $\theta_1 - \theta_2 = \pi$;

$I_1 = I_2$ (колебания в противофазе).

Глава 4

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗОНАНСОВ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Под взаимодействием резонансов понимается одновременное действие на систему нескольких резонансов, т.е. нескольких гармоник возмущения в (3.3) или, в многомерном случае, в (3.43). Каждая такая гармоника определяет "свой" резонанс в соответствующей области фазового пространства. Каким будет движение системы при одновременном действии многих резонансов? До недавнего времени этот фундаментальный вопрос оставался практически без ответа. На первый взгляд может показаться, что если система находится вблизи одного из резонансов, то остальные члены возмущения являются нерезонансными и могут быть уничтожены заменой переменных (§ 3.1). Действительно, давно известно, что всегда можно построить такую, вообще говоря, бесконечную последовательность замен переменных, которая уничтожает нерезонансные члены. В пределе получается интегрируемая система, движение которой является квазипериодическим, т.е. устойчивым. Однако это — формальный математический прием. Реальная устойчивость движения зависит от того, будет ли такая последовательность переменных сходящейся, или, иначе говоря, существует ли тот предел, в котором движение является формально устойчивым. До недавнего времени считалось, что, вообще говоря, такой предел не существует, т.е. нелинейные колебания являются в общем случае неустойчивыми. Подобные представления опирались, в частности, на теорему Пуанкаре /6/ об отсутствии, в общем случае, аналитических интегралов движения, кроме энергии^{*}). Сейчас мы знаем, что такое понимание этой теоремы ошибочно (§ 4.5). Относительно недавно в работах Колмогорова /1/, Арнольда /2/ и Мозера /3/ была разработана новая теория устойчивости динамических систем (теория КАМ), в которой удалось

^{*}) И, разумеется, всех остальных аддитивных интегралов, в общем случае: импульса, момента и интеграла центра инерции.

построить сходящиеся ряды теории возмущения и показать, что в общем случае существует некоторое критическое значение малого параметра возмущения, определяющее границу устойчивости движения. Краткое представление об основных идеях теории КАМ будет дано в § 4.5. Основной результат этой теории — существование границы устойчивости для нелинейных колебаний — имеет фундаментальное значение для общей теории динамических систем.

Можно подойти к проблеме с другой стороны, попытаться качественно, мы бы даже сказали, наглядно проанализировать конкретные механизмы, приводящие, с ростом возмущения, к разрушению интегралов движения и к неустойчивости. Описанию такого подхода и посвящена настоящая глава. Оказывается, что весьма общим механизмом возникновения неустойчивости движения является так называемое перекрытие нелинейных резонансов [9]. Изучение этого механизма позволяет сформулировать весьма эффективный, хотя и не строгий, критерий неустойчивости. С помощью такого критерия удается в ряде случаев получить оценки границы устойчивости, весьма близкие к действительным.

Неустойчивость нелинейных колебаний, возникающая при перекрытии резонансов, имеет весьма специфическую природу — она приводит к нерегулярному, или стохастическому движению системы. Такой режим механического движения был предметом длительных поисков в связи с попытками обоснования статистической механики. Именно отсюда возникла эргодическая теория динамических систем [27]. Довольно неожиданным результатом изучения нелинейных колебаний оказалась возможность статистического поведения очень простых динамических систем.

§ 4.1. Два резонанса; критерий перекрытия

Простейшим случаем взаимодействия резонансов является взаимодействие всего двух резонансов. По-видимому, первый пример такой системы детально изучен аналитически и численно Уолкером и Рордом [21]. Мы рассмотрим другой пример, более простой в вычислительном отношении.

Пусть на осциллятор с кубической нелинейностью (§ 2.3) действует внешняя возмущающая сила с двумя частотами Ω_1, Ω_2 . Гамильтониан системы имеет вид

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x(f_1 \cos \tau_1 + f_2 \cos \tau_2) \quad (4.1)$$

$$\tau_1 = \Omega_1 t + \nu_1; \quad \tau_2 = \Omega_2 t + \nu_2,$$

где ν_1, ν_2 — постоянные фазы; f_1, f_2 — малые амплитуды возмущения. Перейдем к переменным I, θ по невозмущенному гамильтониану, примем приближенно $x \approx a \cos \theta$ (§ 2.3) и оставим только резонансные слагаемые. Получим

$$H(I, \theta, \tau_1, \tau_2) \approx A I^{3/2} - \frac{a}{2} [f_1 \cos(\theta - \tau_1) + f_2 \cos(\theta - \tau_2)] \quad (4.2)$$

Каждый из двух членов возмущения создает свой резонанс в разных областях фазового пространства по I : $\omega_{1,2}(I) = \Omega_{1,2}$ или $a_{1,2} = \Omega_{1,2} / 1.85$ (2.44). Если имеется только один резонанс, т.е. если $f_1 = 0$ или $f_2 = 0$, система является, как мы знаем, интегрируемой, а движение устойчивым и ограниченным областью резонанса. Мы можем легко найти эту область, следуя технике § 3.3 (см. также § 3.4). В данном случае $M^{-1} = \frac{4A}{9I^{3/2}} = \frac{f^2}{2a}$ (3.56). Полуширина резонанса по частоте равна (3.41):

$$(\Delta \omega)_r = \beta \sqrt{\frac{2f_0}{a}}. \quad (4.3)$$

Пусть области двух резонансов (4.2) достаточно удалены друг от друга, т.е. разность $|\Omega_1 - \Omega_2|$ достаточно велика. Тогда, имея в виду, что возмущение мало, разумно предположить, что движение системы будет по-прежнему локализовано в области одного из резонансов в зависимости от начальных условий. Второй же член возмущения будет лишь незначительно искажать траекторию по сравнению со случаем единственного резонанса. Это предположение хорошо подтверждается численными экспериментами. С другой стороны, ясно, что если резонансные области начнут сближаться, например при уменьшении разности частот $|\Omega_1 - \Omega_2|$, то в конце концов влиянием второго резонанса уже нельзя будет пренебречь. Ясно, что при достаточном сближении резонансов траектория движения уже не будет больше локализована в одном из резонансов, а система сможет, вообще говоря, переходить из одного резонанса в другой. Сам по себе такой переход вряд ли можно было бы квалифицировать как неустойчивость (по крайней мере для двух резонансов, см. § 4.2), если бы не качественное изменение характера движения. Как показывают численные эксперименты, движение становится при этом нерегулярным, как будто бы на систему действуют какие-то случайные силы, хотя на самом деле никаких таких сил нет (4.1). Поэтому такой режим движения получил название **стохастического**. Характерной особенностью движения в этом режиме

является сильная локальная неустойчивость. Последняя означает, что близкие траектории расходятся в среднем экспоненциально во времени.

Правдоподобным условием возникновения такой стохастической неустойчивости представляется условие сближения резонансов на расстояние порядка их размера. Такое сближение получило естественное название **перекрывания резонансов**. Более определенно можно сказать, что перекрывание резонансов начинается тогда, когда их сепаратрисы касаются друг друга. То, что при этом система может переходить из одного резонанса в другой, достаточно очевидно. Трудность в другом — как количественно найти условия касания сепаратрис с учетом возмущения их соседним резонансом? Простейший довольно грубый метод состоит в том, чтобы использовать невозмущенные параметры резонансов, т.е. считать каждый из них таким, как будто бы другого не было. Ясно, что при этом можно рассчитывать лишь на оценку по порядку величины. Именно такая простая процедура имеется в виду, когда говорят о критерии перекрывания резонансов. Критерий этот оказывается, таким образом, весьма грубым, но зато очень эффективным, так как указанная процедура может быть легко выполнена даже для довольно сложных систем (§ 4.4).

Критерий перекрывания резонансов имеет и более серьезный дефект. Дело в том, что, например, для системы (4.2) число резонансов равно 2 только в первом приближении. Это связано с тем, что θ зависит от времени линейно только в нулевом приближении. С учетом действия возмущения ее зависимость от времени становится очень сложной, что приводит к появлению новых резонансов. В общем случае имеют место резонансы $m\omega + n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2 = 0$ с любыми целыми m, n_1, n_2 , т.е. система резонансов оказывается всюду плотной (§ 4.5). Поэтому ясно, что отсутствие перекрывания резонансов первого приближения есть лишь необходимое, но недостаточное условие устойчивости движения. Можно сказать также, что критерий перекрывания резонансов дает лишь верхнюю границу устойчивости (по величине возмущения). Более того, возникает фундаментальный вопрос, а есть ли вообще область устойчивости? Не приведет ли вся эта всюду плотная система резонансов к неустойчивости движения при любых значениях параметров системы, коль скоро последняя не является точно интегрируемой (как, например, в слу-

чае одного резонанса)? Ясно, что ответ на этот вопрос нельзя получить лишь путем наглядных рассуждений типа приведенных выше. На него можно ответить либо с помощью эксперимента, в том числе и численного, либо с помощью строгой теории. Первый ответ имеет обычные для эксперимента ограничения, например конечный интервал времени, на котором можно убедиться (и убедить других) в устойчивости движения. Второй ответ ограничен упрощениями теоретического анализа (особенно строгого) (§ 4.5). Забегая вперед, скажем, что только для системы с двумя степенями свободы удастся доказать абсолютную, или вечную, устойчивость движения. При $N > 2$ движение в некотором смысле всегда неустойчиво.

Вернемся теперь к гамильтониану (4.2) и применим к нему критерий перекрывания резонансов. Пусть $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2| \ll \Omega_1, f_1 = f_2 = f_0$. Условие касания сепаратрис резонансов имеет простой вид

$$(\Delta\omega)_r \approx \frac{\Delta\Omega}{2}. \quad (4.4)$$

Заметим, что фазовые соотношения резонансов (фазы ψ_1, ψ_2) в данном случае несущественны, так как из-за разности частот $\Delta\Omega$ разность резонансных фаз $\psi_1 - \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ будет изменяться с течением времени. Поэтому касание сепаратрис нужно считать по их максимальной ширине $(\Delta\omega)_r$. Из (4.4) и (4.3) находим критическое значение $f_0 = f_T$, соответствующее касанию невозмущенных сепаратрис

$$f_T = \frac{\omega(\Delta\Omega)^2}{8\beta^3}, \quad (4.5)$$

где $\omega \approx \Omega_1 \approx \Omega_2$.

Сравним полученные оценки для критического возмущения с результатами численных экспериментов [22]. Критерием неустойчивости служила величина и характер изменения гамильтониана (4.1). Поскольку при перекрывании резонансов ожидалось стохастическое поведение системы, вычислялся "коэффициент диффузии"

$$D_n = \frac{1}{\Delta t_n} (\overline{\Delta H})^2, \quad (4.6)$$

Здесь $\overline{H}$ — значение гамильтониана, усредненное по времени на интервале $\Delta t_n = 10^n$ единиц времени системы (4.1); ΔH — разность средних значений H на соседних интервалах времени, т.е. среднее изменение H за время Δt_n ; вторая черта означает усреднение ΔH по многим интервалам. Усреднение гамильто-

изменяя H производилось для уменьшения влияния ограниченных колебаний H и выделения накапливающихся изменений энергии системы. Типичное время счета составляло $t = 10^6$, а интервалы усреднения $\Delta t_4 = 10^4$ и $\Delta t_5 = 10^5$. На рис.4.1 приведена зависимость скорости диффузии (D_4, D_5) от величины возмущения f_0 для $\Omega_1 = 0.217$; $\Omega_2 = 0.251$. Начальные условия движения соответствуют частоте

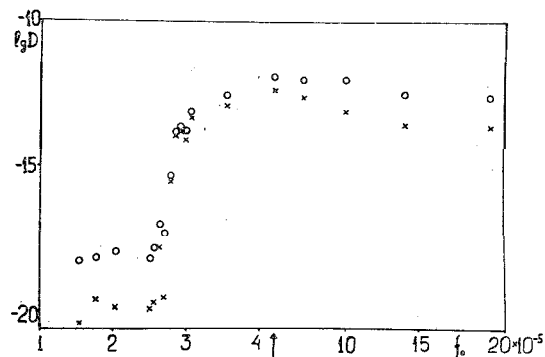


Рис.4.1. Стохастическая неустойчивость при перекрытии двух резонансов. Масштаб по оси f_0 разный по обе стороны от стрелки.

$\omega = 0.234$ ($\alpha = 0.276$), лежащей посередине между Ω_1, Ω_2 . Видно, что в относительно узком интервале изменения $f_0 = (2.8 \pm 2.6) \times 10^{-5}$ коэффициент диффузии (D_5) падает на 6 порядков. Это ли не истинная граница устойчивости! Положение границы устойчивости можно принять при

$$f_E \approx 2.55 \times 10^{-5}; \quad f_T = 5.76 \times 10^{-5} \quad (4.7)$$

Здесь f_E — экспериментальное значение (по данным рис.4.1), f_T — теоретическое значение (по формуле (4.5)). Согласие между f_E и f_T можно считать удовлетворительным, учитывая сделанные выше замечания о грубости критерия перекрытия. Тем не менее отметим, что экспериментальное значение оказывается существенно ниже теоретического ($f_T/f_E \approx 2.26$). Это также соответствует качественным представлениям, изложенным выше.

Выше границы устойчивости, скажем, при $f_0 > 2.7 \times 10^{-5}$, оба коэффициента D_4, D_5 приблизительно равны, что как раз и указывает на диффузионный характер изменения энергии системы. Отметим, что в работе [21] нерегулярный характер движения при перекрытии резонансов представлен очень наглядно на фазовых картинках движения и резко отличается от регулярного поведения траекторий в отсутствие перекрытия. Ниже границы устойчивости ($f_0 < 2.6 \times 10^{-5}$) коэффициенты D_4, D_5 различаются на 2 порядка, так что изменение энергии в этой области носит явно недиффузионный характер и определяется, главным образом, квазипериодическими колебаниями энергии системы под действием возмущения, а также ошибками счета.

Интересно отметить, что в области перекрытия резонансов скорость диффузии не растет с ростом f_0 , а даже несколько падает, причем оба коэффициента опять расходятся. Это указывает на уменьшение роли диффузии с ростом f_0 . Такое несколько странное на первый взгляд поведение можно понять, если представить себе предельный случай $(\Delta\omega)_r \gg A\Omega$. Поведение системы в этом случае особенно наглядно, если $\Delta\Omega \rightarrow 0$. Тогда оба резонанса сливаются в один с двойной амплитудой, и система становится снова интегрируемой. Отсюда видно, что система наиболее неустойчива (в случае двух резонансов) как раз вблизи границы перекрытия: $(\Delta\omega)_r \approx \frac{A\Omega}{2}$.

Диффузия при перекрытии двух резонансов не может вызвать большого изменения невозмущенных интегралов движения (I), так как область стохастичности ограничена "слившейся" областью двух резонансов.

В качестве другого относительно простого примера перекрытия резонансов рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - x_1 f_0 (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad (4.8)$$

представляющую собой два связанных осциллятора с кубической нелинейностью (§ 3.4), на один из которых действует внешняя сила с двумя частотами (4.1). Расположение резонансных полос для этой системы на плоскости частот ω_1, ω_2 схематически показано на рис.4.2. В данном случае резонанс связи ($\omega_1 = \omega_2$) пересекает оба внешних резонанса ($\omega_1 = \Omega_1$; $\omega_1 = \Omega_2$). Поэтому всегда есть две стохастические области, соответствующие этим пересечениям: 1) $\omega_1 = \omega_2 = \Omega_1$, 2) $\omega_1 = \omega_2 = \Omega_2$. При определенных условиях, однако, появляется новая возможность — переход системы из одного внешнего резонанса в другой через резонанс связи. Для этого

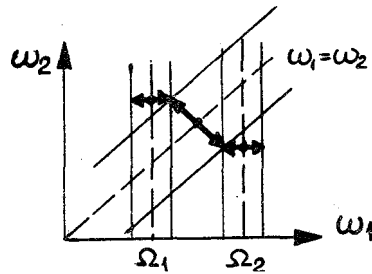


Рис.4.2. Перекрытие Трех резонансов: стрелками показаны вектора фазовых колебаний $(\Delta\omega)^r$ для каждого резонанса.

необходимо замыкание цепочки векторов $(\Delta\omega)^r$, вдоль которых происходят фазовые колебания в резонансе. На рис.4.2 показана критическая ситуация, соответствующая началу такого замыкания. Условие замыкания имеет вид $(\Delta\omega)_1^{(1)} + (\Delta\omega)_1^{(2)} + 2(\Delta\omega)_1^{(3)} = |\Omega_1 - \Omega_2|$, где $(\Delta\omega)_1^{(1)}, (\Delta\omega)_1^{(2)}$ - проекции векторов фазовых колебаний внешних резонансов на ось ω_1 , а $(\Delta\omega)_1^{(3)}$ -

то же самое для резонанса связи. Используя (4.3) и (3.66), (3.67), получим условие перекрытия (касания) сепаратрис трех резонансов в виде

$$\sqrt{\mu} + \sqrt{\frac{2f_0}{\alpha}} = \frac{\Delta\Omega}{2\beta}, \quad (4.9)$$

где μ считаем для простоты параметр двух внешних резонансов одинаковыми. При заданном $f_0 < f_E$ (4.7) это соотношение определяет критическое значение μ , при котором все три резонанса оказываются связанными между собой общим (стохастическим) движением системы.

Характерная особенность рассмотренных примеров - существование критического возмущения, ниже которого нелинейные колебания являются устойчивыми даже при наличии резонанса в системе. Эта устойчивость связана с разделением резонансных областей в фазовом пространстве при достаточно малом возмущении. Уже отмечалось выше, в случае пересечения резонансных поверхностей такое разделение не происходит, и в окрестности пересечения сохраняется стохастическая область при сколь угодно малом возмущении. Если невозмущенная система нелинейна ($\alpha \neq 0$, см. (2.14)), то размер этой стохастической области уменьшается пропорционально размеру нелинейного резонанса, т.е. как $\sqrt{\varepsilon/\alpha}$ (3.40). Если, однако, $\alpha \sim \varepsilon$, т.е. нелинейность колебаний тоже определяется возмущением, а линейные частоты системы удовлетворяют двум резонансным соотношениям, то и размер стохастической области не уменьшается при $\varepsilon \rightarrow 0$, растет только время развития неустойчивости. Это интересное явление было обнаружено Фордом и Лансфордом /18/. Гамильтониан "скон-

струированной" ими системы имеет вид

$$H = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \varepsilon \left[\mu I_1 \sqrt{I_2} \cos(2\theta_1 - \theta_2) + \nu \sqrt{I_1 I_2 I_3} \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) \right] \quad (4.10)$$

Постоянные частоты линейной невозмущенной системы связаны двумя независимыми резонансными соотношениями $2\omega_1 = \omega_2$; $3\omega_1 = \omega_3$. Как показано в /18/, малый параметр возмущения ε определяет в этих условиях только скорость развития неустойчивости. Размер стохастической области зависит от отношения ν/μ и при $\nu = 4/\mu$ достигает 80% площади поверхности $H = \text{const}$.

§ 4.2. Много резонансов; отображения

Перекрытие двух или небольшого числа резонансов может и не вызывать сильной неустойчивости в системе в том смысле, что образуемая при перекрытии резонансов область стохастичности ограничена в фазовом пространстве системы. Поэтому изменение энергии колебаний или обмен энергией между степенями свободы консервативной системы тоже ограничен и мал при малом возмущении. Совсем другое дело, когда резонансов много. Тогда по системе перекрывшихся резонансов траектория движения может уйти очень далеко от начального положения, так что возникает не только локальная неустойчивость движения, но и неустойчивость "в большом". В этом параграфе мы рассмотрим предельный случай бесконечного числа резонансов. Удобной моделью является система, движение которой задается разностными уравнениями, или отображением. Рассмотрим, пока в качестве примера, двумерное отображение $(I, \theta) \rightarrow (\bar{I}, \bar{\theta})$ где

$$\bar{I} = I + K f(\theta); \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}, \quad (4.11)$$

K - постоянный параметр, $f(\theta)$ - некоторая функция. Это отображение является каноническим с производящей функцией

$$F(\bar{I}, \theta) = \bar{I}\theta + \frac{\bar{I}^2}{2} + K V(\theta); \quad f(\theta) = -\frac{dV}{d\theta}. \quad (4.12)$$

При $K \ll 1$ разностные уравнения (4.11) можно приближенно заменить дифференциальными $\dot{I} \approx \frac{K}{T} f(\theta)$; $\dot{\theta} \approx \frac{I}{T}$, и мы получаем консервативную систему; T - период времени, соответствующий отображению. В общем случае разностные уравнения (4.11) также можно записать в виде дифференциальных, но с δ^1 -функцией

$$\dot{I} = \Omega K f(\theta) \delta_{2\pi}^1(\alpha); \quad \dot{\theta} = \frac{I}{T},$$

где $\tau = \Omega t + \tau_0$; $\Omega = 2\pi/\tau$; периодическая (с периодом 2π) δ -функция определяется Фурье-разложением

$$\delta_{2\pi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\tau \right). \quad (4.13)$$

Введем новый импульс $J = I/\tau$, тогда уравнения движения принимают вид

$$\dot{J} = \frac{K\Omega^2}{2\pi} f(\theta) \delta_{2\pi}(\tau); \quad \dot{\theta} = J. \quad (4.14)$$

Эта система является канонической с гамильтонианом

$$H(J, \theta, \tau) = \frac{J^2}{2} + \frac{K\Omega^2}{2\pi} V(\theta) \delta_{2\pi}(\tau). \quad (4.15)$$

Заметим, что хотя переменные J, θ являются каноническими, преобразование переменных $(I, \theta) \rightarrow (J, \theta)$ не является каноническим, так как якобиан $a(J, \theta)/\partial(I, \theta) = 1/\tau \neq 1$.

Так как система уравнений (4.14) эквивалентна исходному отображению (4.11), мы видим, что отображение описывает периодическое (с периодом T) внешнее возмущение. Это возмущение представляет собой последовательность коротких "толчков" (4.13), что приводит к бесконечной системе резонансов (4.14).

Пусть $V(\theta) = \cos \theta$; $\Omega = 1$ ($\tau = 2\pi$), мы получаем тогда маятник, на который действует периодическое возмущение

$$H(J, \theta, \tau) = \frac{J^2}{2} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - n\tau), \quad (4.16)$$

где $k = K/(2\pi)^2$ - новый параметр. Считая его малым, получаем систему резонансов первого приближения

$$J_r = n. \quad (4.17)$$

Все эти резонансы совершенно одинаковые, за исключением сдвига по J . Это видно также непосредственно из исходного отображения (4.11): при переходе от одного резонанса к другому I в (4.11) изменяется на целое кратное 2π , так как $I = 2\pi J$ (4.13). Отметим, что приближенная замена разностных уравнений (4.11) дифференциальными соответствует учету только одного резонанса $J_r = 0$.

Полуширина сепаратрисы каждого из резонансов по J та, что для данной системы то же самое, что невозмущенной частоте $\omega = \dot{\theta} = J$ равна: $(\Delta\omega)_r = (\Delta J)_r = 2\sqrt{k}$. Расстояние же между соседними резонансами по частоте (или по J) равно 1 (4.17). Из условия касания сепаратрис $(\Delta\omega)_r = 1/2$ находим критическую величину

возмущения

$$k_r = \frac{1}{16}; \quad K_r = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.5. \quad (4.18)$$

Эта оценка дает правильный порядок критического возмущения, но так же, как и в случае двух резонансов (§ 4.1), существенно завышает его величину. Численные эксперименты приводят к значению $K_r \approx 1/31$. Отметим, что отношение $K_r/K_e \approx 2.47$ близко к аналогичной величине $f_r/f_e \approx 2.26$ для двух резонансов (§ 4.1).

Так как в данной модели все резонансы перекрываются одновременно, возникает неустойчивость, в результате которой импульс системы J изменяется с течением времени сколь угодно сильно. В отсутствие перекрытия изменение J ограничено размером сепаратрисы резонанса: $|\Delta J| \leq 2\sqrt{k}$.

Рассмотрим теперь ту же модель (4.11), но с иной потенциальной энергией

$$V(\theta) = \frac{1/a}{1 - a \cos \theta} \rightarrow \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma m} \cos m\theta}{m}. \quad (4.19)$$

В последнем выражении мы опустили постоянное слагаемое, так как оно не влияет на движение системы. Фурье-амплитуды $V(\theta)$ легко вычисляются с помощью вычетов, так как функция $V(\theta)$ имеет простые полюса в точках $\cos \theta_0 = \frac{1}{a} = \cosh \sigma$, где $\theta_0 = \pm i\sigma + 2\pi n$. Контур интегрирования показан на рис. 4.3. Получаем

$$\sigma = \ln \left(\frac{a}{1 - \sqrt{1 - a^2}} \right) \approx \begin{cases} \ln \frac{2}{a}; & a \ll 1 \\ \sqrt{1 - a^2}; & a \rightarrow 1 \end{cases}. \quad (4.20)$$

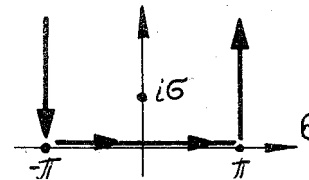


Рис. 4.3. Контур интегрирования для вычисления коэффициентов Фурье функции (4.19).

Отметим, что экспоненциальное убывание Фурье-амплитуд является общим свойством аналитической функции (см., например, [2]). Показатель σ определяется шириной полосы аналитичности функции в комплексной плоскости, т.е. расстоянием ближайшей особенности функции до действительной оси. Функция (4.19) представляет для нас интерес именно потому, что при $a \rightarrow 4$ она имеет много гармоник (ср. § 4.4). Гамиль-

тониан "непрерывной" системы (4.15) имеет вид ($\Omega = 1$)

$$H(j, \theta, \tau) = \frac{j^2}{2} + \frac{2k}{a\sqrt{1-a^2}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sigma_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta - nt) \quad (4.21)$$

Мы будем говорить, что гамильтониан (4.21) описывает полную систему резонансов

$$j_r = \frac{n}{m} \quad (4.22)$$

К этой системе приближение маятника неприменимо. Действительно, если система находится в резонансе (n_0/m_0), то она одновременно находится и во всех резонансах ($\ell n_0/\ell m_0$), где ℓ - любое целое число. Это значит, что, рассматривая единственный резонанс (n_0/m_0), мы должны оставить в гамильтониане (4.21) не один член, а все те члены, которые удовлетворяют условию $n/m = n_0/m_0$.

Это будет сумма

$$v_r = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\sigma_{m_0 \ell}} \cos \ell \psi; \quad \psi = m_0 \theta - n_0 t \quad (4.23)$$

Сравнивая ее с суммой в (4.19), мы видим, что с точностью до не существенного постоянного слагаемого v_r пропорциональна $V(\theta)$ с параметром $\sigma_m = \sigma_{m_0}$ и соответственно с другим $a_m = a(\sigma_m)$ (4.20):

$$v_r \rightarrow \frac{\sqrt{1-a_m^2}}{2(1-a_m \cos \psi)}; \quad a_m = \frac{1}{ch(\sigma_{m_0})} \quad (4.24)$$

Следуя технике § 3.3, производим каноническую замену переменных $j, \theta \rightarrow p, \psi$; $p = (j - j_r)/m_0$ и находим резонансный гамильтониан

$$H_r(p, \psi) \approx \frac{(m_0 p)^2}{2} + \frac{k}{a\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-a_m^2}}{1 - a_m \cos \psi} \quad (4.25)$$

Полуширина резонанса равна:

$$(\Delta j)_m = \sqrt{\frac{2k}{a}} \sqrt{\frac{1-a_m^2}{1-a^2}} \left(\frac{1}{1-a_m} - \frac{1}{1+a_m} \right) = \frac{2\sqrt{k/a}}{\sqrt{sh \sigma} \cdot sh(\sigma_{m_0})} \quad (4.26)$$

Найдем теперь суммарную ширину всех резонансов, попадающих на отрезок $(0, 1)$, т.е. резонансов, для которых $G < j_r \leq 1$. Как уже отмечалось выше, для исследования устойчивости достаточно рассмотреть только такие резонансы, так как остальные резонансы тождественны с ними за исключением смещения по j . Суммарная ширина резонансов равна:

$$S(k, \sigma) = 2 \sum_{m_0=1}^{\infty} \sum_{n_0=1}^{m_0} (\Delta j)_m = \frac{4\sqrt{k}}{\sqrt{sh \sigma}} \sum_{m_0=1}^{\infty} \frac{m_0}{\sqrt{sh(\sigma_{m_0})}} \quad (4.27)$$

Последняя сумма сходится при любом σ вследствие экспоненциального убывания амплитуд гармоник возмущения. В этом состоит простое, хотя и не очень корректное, объяснение важной особенности нелинейных колебаний, состоящей в том, что всюду плотная система резонансов совсем не обязательно ведет к неустойчивости, если только амплитуды высоких гармоник убывают достаточно быстро. Некорректность простого объяснения связана с тем, что сумма (4.27) построена на резонансах первого приближения. В следующих приближениях теории возмущения Фурье-амплитуды гармоник изменяются (вообще говоря, возрастают), так как низкие гармоники дают вклад в высшие резонансы. Кроме того, возникают, вообще говоря, новые по сравнению с (4.22) резонансы на частотах фазовых колебаний.

Тем не менее можно попытаться использовать и в этом случае простой критерий перекрытия резонансов. Граница стохастичности соответствует условию $S(k, \sigma) \approx 1$, т.е. суммарная ширина всех резонансов равна ширине всего интервала по j . В наиболее интересном случае большого числа гармоник ($\sigma \ll 1$) сумму в (4.27) можно заменить интегралом. В результате для критической величины возмущения получаем

$$k_0 \approx \frac{\sigma^5}{16C^2}; \quad C = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{sh x}} \approx 5.82 \quad (4.28)$$

Отметим, что если бы мы использовали приближение маятника для каждого из резонансов (4.22), то вместо (4.26) получили бы $(\Delta j)_m \approx 2\sqrt{2k/\sigma} e^{-\sigma_m} (4.21)$, а вместо (4.28)

$$k_0^* \approx \frac{\sigma^5}{16(C^*)^2}; \quad C^* = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 2, \quad (4.28a)$$

что почти на порядок больше (4.28), однако вид зависимости $k_0(\sigma)$ сохраняется.

Простую оценку (4.28) можно несколько улучшить. Прежде всего заметим, что сумму в (4.27) нужно брать не по всем m_0, n_0 , как это было сделано выше для простоты, а только по таким из них, которые образуют несократимые дроби n_0/m_0 . Остальные гармоники возмущения уже учтены в выражении (4.25) для гамильтониана одиночного резонанса. Как показано в Дополнении А, число таких неприводимых резонансов составляет в среднем 2/3 от всех резонансов (с любыми m, n). Это повышает оценку (4.28), но не изменяет зависимости k_0 от малого параметра σ :

$$k_0 \approx \frac{\sigma^5}{7C^2} \quad (4.29)$$

Более существенным оказывается неравномерность расположения резонансов, т.е. неравномерность резонансных значений $\gamma_r = \frac{n_0}{m_0}$ на отрезке $(0,1)$. Рассмотрим, например, целый резонанс $m_0 = 1$. Ясно, что ближайший к нему резонанс гармоники m_1 будет находиться от него на расстоянии $(\delta\omega)_1 = 1/m_1$. Между тем среднее расстояние между неприводимыми резонансами с $m_0 < m_1$ равно: $\langle \delta\omega \rangle \approx 3/m_1^2$, так как полное число комбинаций $n \leq m \leq m_1$ равно $m_1^2/2$. Поэтому простое суммирование ширины всех резонансов (4.27) занижает k_T . В частности, ширина целого резонанса $(\delta\gamma)_1 = \frac{2\sqrt{k}}{a \cdot \text{sh } \delta}$ (4.26) должна быть достаточно большой, чтобы перекрыть аномально широкую "щель" $(\delta\omega)_1$. Размер последней определяется такими гармониками возмущения (m_1) , амплитуда которых еще достаточна, чтобы перекрыть остальной промежуток $(0,1)$. Эффективное число резонансов, участвующих в перекрытии, можно грубо оценить из (4.27) как $m_1 \delta = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{\text{sh } x}} = C$ ($\delta \ll 1$). Тогда условие перекрытия "щели" $(\delta\omega)_1$ принимает вид $(\delta\gamma)_1 \approx 2\sqrt{k}/\delta \approx \approx \delta/C$, откуда критическое значение возмущения

$$k_1 \approx \frac{\delta^4}{4C^2}; \quad K_1 \approx \left(\frac{\pi}{C}\right)^2 \delta^4 \approx 0.36 \delta^4. \quad (4.30)$$

Более аккуратно величину m_1 можно оценить следующим образом. Потребуем, чтобы резонансы с гармониками $m_0 > m_1$ перекрывали некоторый участок $(\delta\omega)_2$, непосредственно примыкающий к целому резонансу. Определение размера этого участка представляет известные трудности. Однако при $\delta \ll 1$ и соответственно при $m_1 \gg 1$ этот размер не войдет в условие перекрытия, так как число резонансов с различными n_0 (при заданном m_0), попадающих в этот известный участок, также будет пропорционально его размеру. Поэтому условие перекрытия можно записать в виде $S(m_1)(\delta\omega)_2 \approx (\delta\omega)_2$, где $S(m_1)$ — полная ширина резонансов с $m_0 > m_1$ на участке $(0,1)$ (4.27). Отсюда при $\delta \ll 1$ получаем $(8\sqrt{k}/3\delta^{3/2})F(x) = 1$, где $F(x) = \int_x^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{\text{sh } x}}$. Но $2\sqrt{k}/\delta = 1/m_1$ (условие перекрытия "щели" $(\delta\omega)_1$), или $2\sqrt{k}/\delta^2 = 1/x$. Подставляя это выражение в первое условие, получим уравнение $F(x_1) = 3\sqrt{\delta} x_1/4$. При $x_1 \gg 1$; $F(x_1) \approx 2\sqrt{x_1+2} e^{-x_1/2}$ и $x_1 \approx \ln \frac{128}{9\delta} \equiv L$. Это выражение можно уточнить, положив $1+2/x_1 \approx 1+2/L$, тогда $x_1 \approx L + 4/L$. Критическое значение k находится, таким

образом, из соотношения

$$k_T \approx \frac{\delta^4}{4x_1^2}; \quad K_T \approx \left(\frac{\pi}{x_1}\right)^2 \delta^4; \quad x_1 = L + \frac{4}{L}; \quad L = \ln \frac{128}{9\delta}. \quad (4.31)$$

"Щели" с увеличенной по сравнению со средней шириной существуют и при других резонансах: $m_1 \gg m_0 > 1$. Однако они уже не изменяют оценки (4.31). Как показано в Дополнении А, среди любой группы резонансов с гармониками $m = m_i, m_{i+1}, \dots, m_{i+m_0-1}$ существует такой, расстояние которого до резонанса n_0/m_0 равно $\delta = \left| \frac{n_0}{m_0} - \frac{n}{m} \right| = \frac{1}{m \cdot m_0}$. Это расстояние уменьшается с m_0 быстрее, чем ширина резонанса n_0/m_0 : $(\delta\gamma)_m \approx \frac{2\sqrt{k}}{\delta \sqrt{m_0}}$ (4.26). Поэтому при условии $k > k_1$ (4.30) все эти щели также перекрываются.

При достаточно малых δ значение $k_1 > k_0$. Для неустойчивости "в большом", т.е. произвольного изменения импульса γ , необходимо, чтобы $k > k_1$. Это обеспечивает перекрытие всего интервала $(0,1)$ по γ . При $k < k_1$ неустойчивость носит локальный характер, т.е. изменение γ ограничено каким-то участком интервала $(0,1)$, при этом $(\delta\gamma)_m \lesssim 1$. Такая ограниченная неустойчивость сохраняется при любом $k \rightarrow 0$, так как всегда найдутся резонансы достаточно высокой гармоники, которые касаются (и даже попадают внутрь) любого заданного резонанса.

В гл.3 мы выяснили, что основной особенностью одиночного резонанса является стабилизация резонансного возмущения. Механизм перекрытия многих резонансов ликвидирует такую стабилизацию, позволяя системе "блуждать" по резонансам. Развивающаяся при этом стохастическая неустойчивость является основным препятствием на пути использования нелинейных колебаний для подавления резонансных возмущений.

Исследованию нелинейных отображений посвящено огромное количество работ. В некоторых случаях отображения использовались как простой приближенный метод описания движения непрерывной системы, например в различных задачах об ускорении заряженных частиц [23-25]. В ряде работ исследовались отображения, полученные по так называемому методу поверхности сечения Пуанкаре. Такие отображения точно, хотя и не полно, описывают движение консервативной системы с двумя степенями свободы (см. § 4.3). Этот случай особенно интересен, так как он показывает, что отображения являются

Вполне адекватным методом описания движения систем достаточно широкого класса, хотя этот метод и кажется с первого взгляда искусственным и формальным. Более того, отображения очень удобны для численных экспериментов или для представления результатов численного счета, даже если интегрируются дифференциальные уравнения движения [26, 18]. Отображения проще и для теоретического анализа. Для нахождения отображения, описывающего непрерывную динамическую систему, нужно только проинтегрировать уравнения движения на некотором (обычно небольшом) интервале времени. Часто это оказывается значительно более легкой задачей, чем анализ исходных уравнений движения, тем более, что можно ограничиться приближенным интегрированием.

Отображения, рассмотренные в этом параграфе (4.11), кажутся весьма специальными. В частности, характерной особенностью таких отображений является их линейность по импульсу. Мы сейчас увидим, однако, что они описывают движение вполне реальных механических систем.

§ 4.3. Движение в окрестности сепаратрисы

Важным случаем использования отображения типа (4.11) является движение в окрестности сепаратрисы, например сепаратрисы маятника (§ 2.4) или сепаратрисы нелинейного резонанса (§ 3.3). Покажем, как можно построить отображение для рассматриваемой задачи. Пусть мы имеем маятник под действием периодического параметрического возмущения (ср. § 3.2) с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(p, \varphi, \tau) &= \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 (1 - \varepsilon \cos \tau) \cdot \cos \varphi = \\ &= H_0(p, \varphi) + \varepsilon V(\varphi, \tau); \quad H_0 = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos \varphi \quad (4.32) \\ \varepsilon V &= \varepsilon \omega_0^2 \cos \varphi \cdot \cos \tau = \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} [\cos(\varphi - \tau) + \cos(\varphi + \tau)] \\ \tau &= \Omega t + \tau_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр возмущения; Ω, τ_0 — частота и начальная фаза возмущения соответственно. В отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$) мы имеем свободные колебания маятника (§ 2.1). Для малых колебаний ($|\varphi| \ll 1$) при отношении частот $\Omega/\omega_0 = 2$ имеет место хорошо известный параметрический резонанс (§ 3.2). Если же частоты Ω, ω_0 не находятся в резонансном отношении,

то возмущение вызывает лишь малые ($\varepsilon \ll 1$) дополнительные осцилляции, которыми в первом приближении можно пренебречь. Даже при $\varepsilon \sim 1$ эти осцилляции малы, если только частота возмущения достаточно велика ($\Omega \gg \omega_0$). Как известно (§ 2.2), метод усреднения как раз и состоит в том, чтобы отбрасывать такие быстро осциллирующие (нерезонансные) члены возмущения. Сейчас мы увидим, что вблизи сепаратрисы этот метод перестает работать.

Построим отображение, описывающее динамическое состояние системы (4.32) в моменты прохождения положения устойчивости равновесия, т.е. на поверхности (фазового пространства системы) $\varphi = 0$. Для этого проинтегрируем уравнения движения (4.32). Найдем сначала изменение энергии системы (ΔH) за полупериод колебаний или за период вращения маятника. Так как $dH/dt = \partial H/\partial t = \varepsilon \partial V/\partial t$, то $\Delta H = \varepsilon \int dt \partial V/\partial t$. Если система находится достаточно близко к сепаратрисе, то можно положить приближенно $\varphi(t) \approx \varphi_{sx}(t)$ (2.49) и интегрировать по t в бесконечных пределах. Оставив пока в возмущении (4.32) одно из слагаемых ($\cos(\varphi - \tau)$), найдем

$$\begin{aligned} \Delta H &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\varepsilon \omega_0^2 \Omega}{2} \sin(\varphi_{sx} - \tau) = -\frac{\varepsilon \omega_0 \Omega}{2} A_2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \sin \tau_0 \approx \\ &\approx -4\pi \varepsilon \Omega^2 e^{-\frac{\pi \Omega}{2 \omega_0}} \sin \tau_0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Здесь $A_m(\lambda)$ — интеграл Мельникова-Арнольда, который вычисляется в Дополнении В, а последнее выражение дает его приближенное значение при $\Omega/\omega_0 \gg 1$. Начало отсчета времени соответствует прохождению системы через поверхность сечения $\varphi = 0$, так что τ_0 есть значение фазы возмущения на этой поверхности.

Интегралы такого типа, характеризующие возмущение сепаратрисных траекторий, использовались впервые, по-видимому, Мельниковым, а также Арнольдом, хотя качественное исследование возмущения сепаратрисы проводилось еще Пуанкаре [6].

Вместо изменения полного гамильтониана (4.32) можно найти изменение невозмущенной энергии H_0 . Имеем

$$\frac{dH_0}{dt} = \{H, H_0\} = -\varepsilon p \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

где $\{, \}$ — скобки Пуассона. Последнее выражение имеет простой физический смысл: мощность внешней силы $-\varepsilon \partial V/\partial \varphi$, так как скорость $\dot{\varphi} = p$. Опять-таки заменяя приближенно $p(t) \approx p_{sx}(t) = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2)$ (2.47) и интегрируя в бесконечных пре-

делах по t , найдем

$$\Delta H_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt \varepsilon \omega_0^3 \sin(\varphi_{sx} - \tau) \cdot \cos \frac{\varphi_{sx}}{2} =$$

$$= -\frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} \sin \tilde{\tau}_0 (A_1 + A_3) = -\frac{\varepsilon \omega_0 \Omega}{2} A_2 \sin \tilde{\tau}_0, \quad (4.34)$$

что в точности совпадает с (4.33). В последнем равенстве мы использовали рекуррентное соотношение для интеграла Мельникова-Арнольда (В.10).

Совпадение $\Delta H_0 = \Delta H$ объясняется специальным определением интеграла Мельникова-Арнольда (см. Дополнение В), а именно тем, что мы пренебрегли осциллирующей периодической по φ, τ частью интеграла. Последняя не существенна в рассматриваемой задаче, так как ее колебания ограничены и поэтому она не может привести к неустойчивости движения. В нашем случае разность $H - H_0 = \varepsilon V(\varphi, \tau)$ является именно такой периодической как по φ , так и по τ функцией (4.32), изменение которой ограничено и мало ($\varepsilon \ll 1$).

При вычислении интегралов (4.33), (4.34) мы принимали $\dot{\varphi}_{sx} > 0$, что справедливо для одного из полупериодов колебаний маятника или для вращения в одном направлении. Если $\dot{\varphi}_{sx} < 0$, то учтенный член возмущения ($\cos(\varphi - \tau)$) дает малый вклад при $\Omega \gg \omega_0$ (см. Дополнение В), которым мы в дальнейшем будем пренебрегать. Однако второй член возмущения ($\cos(\varphi + \tau)$) дает в этом случае точно такой же вклад, как первый для $\dot{\varphi}_{sx} > 0$. Таким образом, при симметричном возмущении (4.32) каждый полупериод колебания маятника, и для обоих направлений вращения изменение энергии дается выражением (4.33) или (4.34). Изменение энергии зависит от фазы возмущения $\tilde{\tau}_0$ в момент, когда $\varphi = 0$. Изменение этой фазы между двумя последовательными прохождениями поверхности $\varphi = 0$ определяется приближенно частотой колебаний маятника (см. § 2.4)

$$\tilde{\tau}_0 = \tau_0 + \frac{\pi \Omega}{\omega(\tilde{\omega})} \approx \tau_0 + \frac{\Omega}{\omega_0} \ln \frac{3\varepsilon}{|\tilde{\omega}|}, \quad (4.35)$$

где ω - частота колебания маятника; $\tilde{\omega} = \frac{H_0}{\omega_0^2} - 1$ - относительная энергия колебаний после прохождения поверхности $\varphi = 0$ с фазой $\tilde{\tau}_0$. Заметим, что при $\Omega \gg \omega_0$ изменение $\tilde{\omega}$ происходит на относительно малом интервале времени $\sim 1/\Omega \ll 1/\omega_0 < 1/\omega$ при прохождении поверхности $\varphi = 0$.

Комбинируя (4.34), (4.35), запишем отображение, характеризующее движение маятника вблизи сепаратрисы под действием параметрического возмущения

$$\tilde{\omega} = \omega - 4\pi\varepsilon\lambda^2 e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \sin \tilde{\tau}_0; \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0 + \lambda \ln \frac{3\varepsilon}{|\tilde{\omega}|}, \quad (4.36)$$

где $\lambda = \Omega/\omega_0 \gg 1$. Это отображение является каноническим.

В силу малости изменения $\tilde{\omega}$ мы можем линеаризовать отображение по $\tilde{\omega}$ (но не по $\tilde{\tau}_0$!). В результате получается стандартное отображение

$$\bar{P} = P + K \cdot \sin \tilde{\tau}_0; \quad \bar{\tau}_0 = \tau_0 + \bar{P} \quad (4.37)$$

с параметром

$$K = \frac{4\pi\varepsilon\lambda^3}{\omega_r} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}. \quad (4.38)$$

Новый импульс равен:

$$P = -\frac{\lambda}{\omega_r} (\omega - \omega_r), \quad (4.39)$$

а резонансные значения ω_r определяются из условия $\lambda \ln \frac{3\varepsilon}{|\tilde{\omega}|} = 2\pi r$ и равны (r - целое)

$$|\omega_r| = 3\varepsilon e^{-2\pi r/\lambda} \quad (4.40)$$

Отметим, что при любом $\lambda \rightarrow \infty$ в достаточно малой окрестности сепаратрисы ($\omega_r \rightarrow 0$) параметр $K > 4$ и, следовательно, возникает стохастическая неустойчивость. Эта область получила название стохастического слоя [9]. Метод усреднения (отбрасывание нерезонансных гармоник) становится здесь неприменимым. При $\Omega \gg \omega_0$ (условие усреднения) стохастический слой экспоненциально мал, и это свидетельствует о высокой точности метода усреднения.

Сравнивая гамильтониан рассмотренной системы (4.32) с гамильтонианом (4.16) непрерывной системы, эквивалентной стандартному отображению, можно заметить, что при $\varepsilon = 2$ возмущение в (4.32) содержит два ближайших по частоте члена возмущения (4.16). Поскольку действие остальных экспоненциально мало (4.33), то полученные выше результаты непосредственно распространяются и на систему (4.16), т. е. на случай взаимодействия многих резонансов. При этом величина ω_0 играет роль частоты фазовых колебаний $\Omega_\varphi = \sqrt{K}$ (для (4.16)), а Ω - расстояние между взаимодействующими резонансами. При $\lambda = \Omega/\Omega_\varphi \gg 1$ взаимодействие резонан-

сов является слабым, и мы вправе рассматривать каждый из резонансов независимо (§ 4.1). Мы видим, что это действительно справедливо всюду, за исключением малой окрестности сепаратрисы, где взаимодействие резонансов всегда существенно. Это и есть универсальная неустойчивость нелинейных колебаний. В системе с одной степенью свободы типа (4.32) эта неустойчивость не приводит к каким-либо серьезным последствиям. Вдали от перекрытия резонансов стохастические слои малы, а неустойчивое движение локализовано внутри этих тонких слоев. Однако для многих степеней свободы картина движения существенно изменяется: стохастические слои образуют единую протяженную сеть, по которой траектория может уходить очень далеко от начального положения. В этом случае универсальная неустойчивость становится реальной (см. § 4.5).

Если исходный гамильтониан (4.32) описывает некоторый нелинейный резонанс, то стандартное отображение (4.34) описывает так называемые резонансы второго уровня $/3I/$, т.е. резонансы возмущения с фазовыми колебаниями на резонансе (4.32) (первого уровня). В теории ускорителей заряженных частиц такие резонансы называются синхротронными. Как было отмечено выше, стандартное отображение (4.34) описывает также и резонансы второго уровня самого стандартного отображения (с другим параметром и переменными, конечно). Поэтому резонансы третьего уровня исходной системы, т.е. резонансы возмущения с фазовыми колебаниями на резонансах системы (4.34), снова описываются некоторым стандартным отображением и т.д. Возникает бесконечная иерархия резонансов разных уровней, которая может быть рекурсивно описана отображением одного а того же вида — стандартным отображением.

Учет резонансов более высоких (или, быть может, лучше сказать более глубоких) уровней очень важен в проблеме устойчивости движения. Пусть гамильтониан (4.32) описывает некоторый нелинейный резонанс в "приближении маятника" (§ 3.3). Тогда частота малых фазовых колебаний (первого уровня) $\omega_0 \sim \sqrt{\mu}$, где μ — некоторый малый параметр возмущения исходной системы. Параметр (4.38) отображения второго уровня (4.34) $K \sim \exp(-C/\sqrt{\mu})$, где C — некоторая постоянная. Сейчас принято говорить, что эффекты такого (экспоненциально малого) порядка недостижимы с по-

мощью какой-то асимптотической теории, т.е. теории, использующей формальные, вообще говоря, расходящиеся ряды по степеням малого параметра возмущения (см. начало гл.4). Верно, что функция вида $\exp(-C/\sqrt{\mu})$ не может быть представлена как ряд по степеням μ . Было бы однако ошибочным заключить отсюда, что выражение (4.38) получено с помощью какой-то мощной неасимптотической теории. Совсем не так! Все, что мы сделали, — это последовательный учет всех резонансов в системе, включая и резонансы более глубоких уровней. Мы не использовали ничего большего, чем простой метод усреднения, который является, кстати, обычным способом построения асимптотических рядов. Таким образом, существенным является не столько вид ряда теории возмущений (асимптотический или сходящийся), сколько природа самого параметра возмущения, по которому производится разложение. В частности, для резонансов второго уровня малый параметр возмущения $K \sim \exp(-C/\sqrt{\mu})$ является с самого начала неаналитической функцией параметра возмущения исходной системы μ при $\mu \rightarrow 0$.

Мораль этих рассуждений состоит в том, что подход, основанный на последовательном учете всех резонансов в комбинации даже с простым методом усреднения, приводит к решению задач, которые обычно считаются неразрешимыми для такого подхода. Эта теория может быть названа поэтому резонансной теорией возмущения как специальный случай общей асимптотической теории возмущения.

§ 4.4. Многомерные колебания

В этом параграфе мы приведем некоторые грубые оценки условий стохастической неустойчивости многомерных колебаний, главным образом, для сравнения критерия перекрытия резонансов с теорией КАМ (§ 4.5). Характеристики изолированного резонанса многомерных колебаний получены в § 3.4. Ниже мы ограничимся автономной системой, т.е. только резонансами связи $m, \omega = 0$. Для удобства читателя выпишем снова гамильтониан системы (3.43) ($n = 0$).

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon V_m e^{im \cdot \theta} \quad (4.41)$$

и напомним, что величины I, θ, ω, m являются N -мерными векторами. Далее мы предположим для простоты, что $H_0(I) = |I|^2/2$,

тогда $\omega = I$, а матрица нелинейности $\partial\omega/\partial I$ становится единичной. Положение границы стохастической неустойчивости существенно зависит от поведения Фурье-амплитуд при больших m . Мы рассмотрим m а случая.

В первомположим

$$V_m \sim V_1 e^{-\sigma M}; \quad M = \sum_{i=1}^N |m_i|, \quad (4.42)$$

где V_1 - порядок низших гармоник возмущения. Этот случай соответствует аналитическому возмущению $V(\theta)$ (см., например, /2/, а также § 4.2). Ниже нас будут интересовать малые значения параметра σ , когда возмущение имеет много гармоник (ср. § 4.2).

Второй тип возмущения, который мы будем называть гладким, определяется зависимостью

$$V_m \sim \frac{V_1}{M^{\ell+2}}. \quad (4.43)$$

Параметр ℓ характеризует гладкость функции $V(\theta)$. Для целого ℓ это наибольший порядок непрерывной частной производной по компонентам вектора θ (зависимость возмущения от I считаем аналитической). При этом говорят, что такая функция $V(\theta)$ принадлежит классу C^ℓ . Поведение ее коэффициентов проще всего понять на примере функции одной переменной. Дифференцируя ее $(\ell+2)$ раз, получим функцию, у которой коэффициенты Фурье не зависят от номера гармоники, т.е. δ -функцию или что-то в этом роде. Значит, $(\ell+1)$ -я производная исходной функции терпит разрыв ($\sim V_1$), а ℓ -я производная и все предыдущие непрерывны. Для функции многих переменных вида (4.43) коэффициенты Фурье производной $\frac{\partial^{\ell+2}}{\partial \theta_1^{n_1} \dots \partial \theta_N^{n_N}} V(\theta)$ ($n_1 + \dots + n_N = \ell+2$) зависят только от отношения номеров гармоник (m_i/m_j), но не от их величины.

Полуширина отдельного резонанса $m_i \omega = 0$ зависит от соответствующей Фурье-амплитуды возмущения V_m и при сделанных выше предположениях относительно H_0 равна (3.60):

$$(\Delta\omega)_r = 2\sqrt{\varepsilon V_m}. \quad (4.44)$$

Объем резонансного слоя в пространстве частот имеет порядок

$$\nu_r \sim (\Delta\omega)_r |\omega|^{N-1} \sim \sqrt{\varepsilon} V_m^{1/2} |\omega|^{N-1}. \quad (4.45)$$

Мы опускаем в оценках все численные факторы, оставляя только зависимость от параметров. Как мы видели в § 4.2, только для таких

грубых оценок можно пользоваться приближением маятника (4.44) для отдельного резонанса.

Рассмотрим сначала гладкое возмущение (4.43). Для заданного M имеется $n_m \sim M^{N-1}$ различных резонансов, общий объем которых в пространстве частот $\nu_m \sim \nu_r n_m$. Полный объем, занятый всеми резонансами $\nu \sim \sum_m \nu_m$, а средний коэффициент заполнения пространства частот резонансными слоями

$$\mu \sim \frac{\nu}{|\omega|^N} \sim \sqrt{\varepsilon} \frac{V_1^{1/2}}{|\omega|} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{\ell/2+2-N}}. \quad (4.46)$$

При $\mu \gg 1$ все пространство заполнено резонансами и имеет место стохастическая неустойчивость; при $\mu \ll 1$ неустойчивость развивается только в окрестности пересечения резонансных слоев, тогда как для большинства начальных условий движение устойчиво.

Сумма в (4.46) сходится при условии

$$\ell > \ell_c = 2N-2. \quad (4.47)$$

Последнее равенство определяет критическое значение гладкости возмущения. При $\ell \leq \ell_c$ резонансы перекрываются при сколь угодно малом возмущении $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. такая система всегда неустойчива.

В случае аналитического возмущения (4.42) аналогичным образом получаем

$$\mu \sim \sqrt{\varepsilon} \frac{V_1^{1/2}}{|\omega|} \sum_{M=1}^{\infty} M^{N-1} e^{-\sigma M/2} \sim \sqrt{\varepsilon} \frac{V_1^{1/2}}{|\omega|} \left(\frac{N}{\sigma}\right)^N. \quad (4.48)$$

Последняя оценка справедлива при $N \gg 1$; $\sigma \ll 1$. Для аналитического возмущения всегда существует критическое возмущение ε_c , ниже которого резонансы не перекрываются. Оно соответствует коэффициенту заполнения $\mu \sim 1$, откуда

$$\varepsilon_c \sim \frac{H_0}{V_1} \left(\frac{\sigma}{N}\right)^{2N}, \quad (4.49)$$

где мы использовали соотношение $H_0 = |I|^2/2 = |\omega|^2/2$ (см. выше).

Оценим теперь отношение H_0/V_1 . Для этого отнормируем малый параметр ε таким образом, чтобы

$$H_0^2 = \langle V^2 \rangle = \sum_m |V_m|^2, \quad (4.50)$$

где усреднение производится по фазам θ . Последнее выражение

написано на основании равенства Парсеваля. Для спектра (4.42)

$$\langle V^2 \rangle \sim \sum_{M=1}^{\infty} V_1^2 M^{N-1} e^{-2\sigma M} \sim V_1^2 \left(\frac{N}{\sigma}\right)^N,$$

откуда $H_0/V_1 \sim (N/\sigma)^{N/2}$ и $\varepsilon_c \sim \left(\frac{\sigma}{N}\right)^{\frac{3}{2}N}$. (4.51)

Это и есть окончательная оценка критического возмущения в смысле зависимости его от параметра аналитичности σ и числа степеней свободы. Напомним, что последняя оценка очень грубая, в ней не только отсутствует численный множитель, который может быть весьма большим, но и не учитывается неравномерность расположения резонансных слоев в пространстве частот. Это может привести к уменьшению показателя (4.51), т.е. к повышению ε_c (ср. § 4.2).

§ 4.5. Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (теория КАМ)

Строгая оценка границы устойчивости движения для системы с гамильтонианом вида (4.41) дается теорией КАМ. Как уже отмечалось (см. введение к гл.4), задачу об устойчивости нелинейных колебаний удалось решить лишь сравнительно недавно. Решение оказалось возможным благодаря двум фундаментальным идеям Колмогорова /1/. О первой из них мы уже говорили подробно в § 2.2 - это новая теория возмущений, обеспечивающая сверхсходимость последовательных приближений. Вторая идея связана с изменением самой постановки задачи. Чтобы понять ее, сделаем в (4.41) замену переменных, уничтожающих возмущение $\sim \varepsilon$ (§ 2.2). Выбирая производящую функцию в виде

$$F(I_1, \theta) = I_1 \theta + \varepsilon \Phi_m e^{im, \theta} \quad (4.52)$$

и подставляя $I = I_1 + i\varepsilon m \Phi_m e^{im, \theta}$ в (4.41), найдем Фурье-амплитуды

$$\Phi_m = \frac{i V_m}{m, \omega(I_1)}, \quad (4.53)$$

Характерной особенностью этого выражения являются малые знаменатели $\omega_m = (m, \omega)$, которые обращаются в нуль на резонансных поверхностях. Так как последние образуют в общем случае всюду плотное множество, легко понять масштаб трудностей, связанных с построением сходящихся рядов теории возмущения. Эта трудность хорошо известна из задач небесной механики. Первая проблема состоит в том, чтобы просто не попасть на резонансную поверхность.

Если, как это обычно делалось, решается задача о поведении траектории с фиксированными начальными условиями ($I(0) = I_0$; $\theta(0) = \theta_0$), то уже I_1 в (4.53) может оказаться на резонансной поверхности. Если даже этого не случится, то после следующего канонического преобразования возможно, что $m, \omega(I_2) = 0$. Поскольку нужно сделать бесконечное число преобразований, то совершенно неясно, как можно гарантировать, что система никогда не окажется на резонансной поверхности, не говоря уже о том, что она может подойти к ней достаточно близко, чтобы совершенно испортить сходимость рядов. Для преодоления этой трудности Колмогоров изменил постановку задачи: вместо исследования поведения траектории с фиксированными начальными условиями он исследует траектории с фиксированным набором частот $\omega = \omega^* = \text{const}$ во всех приближениях. Так как, вообще говоря, частота в каждом приближении несколько изменяется за счет $\langle V(I, \theta) \rangle$ (см. § 2.2), необходимо смещаться по начальным условиям для компенсации этих изменений. Чтобы эти смещения не были слишком большими и их последовательность сходилась, нелинейность системы не должна быть слишком малой - условие, похожее на одно из неравенств умеренной нелинейности $\alpha \gtrsim \varepsilon$ (3.42). Можно сказать также, что в подходе Колмогорова исследуется поведение под действием возмущения инвариантного тора невозмущенной системы с заданным набором частот. В устойчивом случае тор слегка ($\sim \varepsilon$) деформируется, в неустойчивом - разрушается, превращаясь в нечто очень сложное и непонятное.

Вторая проблема состоит в оценке малых знаменателей снизу, что также необходимо для построения сходящихся рядов. Эта задача очень похожа на получение критерия перекрытия резонансов (§ 4.4). В самом деле, мы можем исключить некоторые окрестности резонансных поверхностей (резонансные слои) и тем самым ограничить снизу малые знаменатели. Поскольку частоты фиксированы, такое ограничение будет справедливо апriori всех приближений. Отличие от задачи о перекрытии резонансов состоит в том, что там ширина резонансов была задана динамикой системы, в то время как здесь мы можем выбирать ширину "опасных" слоев произвольно, а значит и оптимально. Конечно, ширина слоев должна как-то убывать с ростом номеров резонансных гармоник, чтобы полный объем "выбороченной" области частот остался конечным (и малым). Из оценки

(4.46) видно, что закон убывания можно выбрать степенным. Рассмотрим этот вопрос подробнее, поскольку в литературе не всегда используются оптимальные оценки.

Пусть

$$\omega_m = m, \omega = \frac{\delta}{M^k} = |m| \cdot (\Delta\omega)_d, \quad (4.54)$$

где $(\Delta\omega)_d$ — полуширина резонансного слоя (перпендикулярного резонансной плоскости), а δ — некоторая постоянная размерности частоты. Прежде всего найдем связь между $|m|$ и M , имеем

$$M^2 = |m|^2 + \sum_{i \neq j} |m_i| \cdot |m_j| = |m|^2 \left(1 + \frac{\sum_{i \neq j} |m_i| \cdot |m_j|}{|m|^2} \right). \quad (4.55)$$

Выражение в скобках принимает максимальное значение при $|m_1| = |m_2| = \dots = |m_N| = \frac{M}{N}$, в чем можно легко убедиться, приравняв нулю частные производные по $|m_i|$. Отсюда следует, что $|m| \leq M \leq \leq |m| \sqrt{N}$. Из (4.54) получаем

$$(\Delta\omega)_d < \frac{\delta \sqrt{N}}{M^{k+1}}. \quad (4.56)$$

Отсюда аналогично оценкам предыдущего параграфа находим относительную долю объема выброшенных частот

$$\mu \approx \frac{\delta}{|\omega|} \sqrt{N} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^{k+2-N}}. \quad (4.57)$$

Сходимость этой суммы определяет минимальную степень в законе убывания малых знаменателей (4.54):

$$k > k_{\min} = N - 1. \quad (4.58)$$

Для аналитического возмущения сходимость рядов почти "очевидна", так как малые знаменатели (4.54) убывают значительно медленнее Фурье-амплитуд (4.42). Однако подробное изложение доказательства этого "очевидного" результата занимает более половины объемистой книги /32/. Впрочем, краткое и ясное изложение схемы доказательства имеется в прекрасном обзоре Арнольда — автора доказательства /2/. Подчеркивая принципиальную важность строгого доказательства существования критического возмущения, ниже которого движение устойчиво, необходимо отметить, что получающиеся оценки для критического возмущения сильно занижены, и мы не будем их здесь приводить (см. /32/, § 7.10).

Техника построения сходящихся рядов теории возмущения была усовершенствована Мозером, которому удалось распространить ее

на главное возмущение. В первой работе было рассмотрено отображение, похожее на отображения в § 4.2, а попутно критическое значение параметра гладкости возмущения $\ell_c = 333$. Хотя само это значение явно нереально, отказ от требования аналитичности возмущения имеет принципиальное значение. Для решения этой задачи Мозер использует аппроксимацию гладких функций тригонометрическими полиномами конечной степени. Интересно отметить, что идея такого подхода упоминается еще Боголюбовым и Митропольским (см. /4/, с.168, § I3), хотя в дальнейшем Митропольский и Самойленко использовали при исследовании гладкого возмущения другую технику (сглаживающий оператор) /15/.

Наилучшая оценка для отображения получена Руссманом: $\ell_c = 6$. В /3/ утверждается (без доказательства), что эту оценку можно улучшить до $\ell_c = 4$, и высказывается гипотеза, что на самом деле $\ell_c = 3$. С другой стороны, известно (см. /3/), что при $\ell = 2$ отображение всегда неустойчиво*). Таким образом удается получить весьма эффективные оценки, по крайней мере в отношении достаточной гладкости возмущения. Отметим, что критерий перекрытия резонансов дает для отображения $\ell_c = 2$. Это значение получается из (4.47) при $N = 2$, так как по числу резонансов отображение эквивалентно системе с двумя степенями свободы.

Возвращаясь к непрерывной системе с гамильтонианом (4.41), отметим прежде всего, что недостаточно потребовать, чтобы Фурье-амплитуды V_m убывали быстрее малых знаменателей в (4.53). Это привело бы к $\ell_c = N - 3$ в явном противоречии с нижней оценкой по перекрытию резонансов (4.47). Даже для сходимости ряда $I - I_1 = i\epsilon \sum_m \Phi_m e^{im\theta}$ первой замены переменных нужно потребовать, чтобы $\ell > 2N - 2$, так как

$$|I - I_1| \leq \epsilon \sum_m \frac{M \cdot M^{N-1}}{M^{\ell+2-k}} = \epsilon \sum_m \frac{1}{M^{\ell+2-N-k}} \quad (4.59)$$

*) Обратим внимание, что все приведенные выше значения ℓ для отображения на единицу больше, чем в /3/, так как у нас параметр ℓ характеризует гладкость гамильтониана (или производящей функции), тогда как в /3/ ℓ характеризует возмущение самого отображения ("силы").

и $k > N-1$ (4.58). В следующих приближениях число непрерывных производных возмущения уменьшается из-за малых знаменателей, и если не пользоваться специальной техникой сглаживания, то через конечное число последовательных приближений ряды будут расходиться. Аппроксимация возмущения аналитическими функциями позволяет справиться с этой трудностью, и Мозер получает (см. /3/)

$$\ell_c = 2N+2. \quad (4.60)$$

Сравнение к критерию перекрытия резонансов (4.47) ($\ell_c = 2N+2$) показывает, что достаточная оценка Мозера (4.60) весьма эффективна.

Более мощную технику построения сходящихся рядов в случае гладкого возмущения можно использовать и для улучшения оценок в аналитическом случае. Для этого заметим, что аналитическое возмущение вида (4.42) можно оценить сверху гладким:

$$V_1 e^{-\sigma M} = \frac{V_1}{M^{\ell+2}} \cdot M^{\ell+2} e^{-\sigma M} \leq \frac{V_1}{M^{\ell+2}} \left(\frac{\ell+2}{e\sigma} \right)^{\ell+2}. \quad (4.61)$$

Но по теореме Мозера последнее возмущение не разрушает инвариантные торы при условии $\ell > 2N+2$ и $\varepsilon V_1 \left(\frac{\ell+2}{e\sigma} \right)^{\ell+2} < \varepsilon_0 H_0$, где ε_0 — некоторая (неизвестная) константа, не зависящая от σ . Отсюда граница устойчивости движения исходной системы (4.41) с аналитическим возмущением (4.42) соответствует

$$(\varepsilon V_1)_c \sim \left(\frac{\sigma}{2N+4} \right)^{\ell+2} \varepsilon_0 H_0; \quad \ell > 2N+2. \quad (4.62)$$

Используя далее нормировку ε согласно соотношению (4.50), получим при $N \gg 1$, пренебрегая численными факторами

$$\varepsilon_c \sim \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^p; \quad p > \frac{3}{2}N+4, \quad (4.63)$$

что очень близко к оценке (4.51) по перекрытию резонансов. Подчеркнем, что в силу принятой нормировки ε условие (4.63) характеризует достаточную с р е а н е к в а д р а т и ч н у ю по фазам θ малость возмущения. Такая нормировка удобна тем, что она не зависит от фазовых соотношений Фурье-гармоник возмущения.

Выясним теперь более подробно, что собственно означает граница устойчивости вида (4.63) в теории КАМ. Буквально она означает, что некоторые ("хорошие") инвариантные торы невозмущенной

системы

$$I = \text{const}; \quad \theta = \omega(I) \cdot t + \theta_0 \quad (4.64)$$

лишь слегка деформируются под действием возмущения, но не разрушаются, т.е. остаются топологически торами. "Хорошие" торы определяются вектором частот ω , для которого малые знаменатели не слишком малы: $\omega_m = m, \omega > \delta/M^k$; $k > N-1$. (4.54). Объем дополнительной области, занятой "плохими" торами, сохранение которых не гарантируется теорией, мал при достаточно малом возмущении (4.57). Однако "плохие" торы заполняют всюду плотное множество резонансных слоев. Задача о поведении такой системы становится поэтому некорректной, ибо практически невозможно локализовать начальные условия движения в "хорошей" области. Тем не менее оказывается /2/, что для системы с двумя степенями свободы устойчивость движения при достаточно малом возмущении может быть гарантирована, независимо от упомянутой некорректности задачи. Это связано с особой топологией фазового пространства такой системы. Именно оказывается, что двумерные инвариантные торы, как говорят, делают трехмерную гиперповерхность постоянной энергии. Это значит, что переход от одного тора к другому возможен только через промежуточные торы. В частности, переход между двумя резонансными торами возможен только через нерезонансные. Но так как нерезонансные торы сохраняются, то ясно, что что бы не случилось с траекторией внутри резонансного слоя, она не может проникнуть через ближайший сохраняющийся тор и оказывается, таким образом, запертой между хотя и не всюду плотной, но достаточно плотной системой сохраняющихся торов. Это и означает устойчивость движения. Максимальное расстояние между соседними сохраняющимися торами порядка ширины резонансного слоя, т.е. $\sim \sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Особая топология фазового пространства в случае двух степеней свободы связана с тем, что размерность энергетической поверхности как раз на единицу больше размерности тора. Говорят еще, что торы вложены друг в друга на энергетической поверхности. Структура энергетической поверхности такой системы напоминает, как заметил американский физик Дж.Форд, русскую матрешку. Эта структура может быть также наглядно представлена на поверхности частот системы. Проекция энергетической поверхности на поверхность частот есть линия, каждая точка которой соответствует

определенному и разному отношению частот системы. Ясно поэтому, что, оставаясь в пределах резонансного слоя, система может сдвинуться по линии постоянной энергии лишь на расстояние порядка ширины слоя. Исключением являются лишь такие особые системы, у которых линии постоянной энергии идут вдоль линий резонанса. Это так называемые некрутые, или квази-изохронные системы (см. § 3.4).

Сохранение инвариантных торов означает также сохранение полного набора (N) интегралов движения, причем точные интегралы возмущенной системы мало отличаются от невозмущенных интегралов. Однако эти точные интегралы разрушаются внутри всюду плотной системы резонансных слоев. Поэтому их зависимость от динамических переменных оказывается всюду разрывной. Этим выясняется смысл старой теоремы Пуанкаре, согласно которой, в общем случае, гамильтонова система не имеет аналитических интегралов движения, кроме энергии (и, конечно, импульса и момента) /6/. Тем не менее для двух степеней свободы это не оказывает реального влияния на движение системы и, таким образом, теорема Пуанкаре не имеет на самом деле того значения, которое ей придавали до теории КАМ.

Аналогичная ситуация имеет место и для системы с одной степенью свободы, находящейся под действием периодического возмущения. Опять-таки двумерные инвариантные торы делят трехмерное фазовое пространство (если ввести дополнительную фазу, пропорциональную времени, см. § 3.3), или более наглядно: на линии частоты ω резонансные значения ω разделены между собой нерезонансными.

При числе степеней свободы $N > 2$ инвариантные торы размерности N уже не делят энергетическую поверхность размерности $2N - 1$, так как разность размерностей $2N - 1 - N = N - 1 > 1$. Иным выражением этого факта является объединение резонансных слоев в связанную систему на энергетической поверхности. Действительно, в пространстве частот размерности N пересечения резонансной поверхности размерности $N - 1$ с энергетической (также размерности $N - 1$) имеют размерность $N - 2 > 0$ (при $N > 2$) и, следовательно, также, вообще говоря, пересекаются между собой, образуя связанную и всюду плотную резонансную сеть, или паутину, охватывающую всю энергетическую поверхность. В пространстве между этой паутиной расположены инвариантные торы, которые сохраняются.

Однако для начальных условий внутри паутины система может, в принципе, обходить всю энергетическую поверхность, все время оставаясь внутри того или иного резонансного слоя. Эта общая гипотеза была высказана Арнольдом после того, как он построил пример движения системы вдоль резонансного слоя /5/. Отметим, что эта своеобразная неустойчивость, получившая название диффузии Арнольда, является по существу универсальной неустойчивостью многомерных нелинейных колебаний, универсальной в том смысле, что она в той или иной мере имеет место при любом возмущении. Этим диффузия Арнольда отличается от стохастической неустойчивости, для которой требуется перекрытие резонансов, т.е. достаточно сильное возмущение.

Дополнение А: АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОНАНСОВ

Системы резонансных частот определяются набором целых чисел и потому обладают рядом специфических свойств. Рассмотрим некоторые из них.

1. Число неприводимых резонансов отображения (4.II)

Пусть $0 < \omega/\Omega \leq 1$; оценим число различных резонансных значений $\omega/\Omega = n/m$ с ограниченным знаменателем $m < m_1$. Для данного $m < m_1$ полное число резонансов в интервале $(0, 1)$ равно m ($n = 1, 2, \dots, m$). Все резонансы объединяются в группы по $R(m_0, m_1)$ совпадающих друг с другом (приводимых) резонансов $\omega/\Omega = r n_0 / r m_0$ ($r = 1, 2, \dots, R$); n_0/m_0 — несократимая дробь. Целое $R = [m_1/m_0] = \frac{m_1}{m_0} - \rho$, где ρ — дробная часть (m_1/m_0). Пусть $I(m_0)$ — число неприводимых резонансов гармоник m_0 , т.е. число несократимых дробей $n_0/m_0 < 1$ с фиксированным знаменателем. Тогда полное число резонансов равно:

$$\sum_{m_0=1}^{m_1} I(m_0) R(m_0, m_1) = \sum_{m_0=1}^{m_1} m_0 = \frac{m_1(m_1+1)}{2}. \quad (\text{A.I})$$

При $m \gg 1$ решение этого уравнения имеет вид

$$I(m) \approx \frac{m}{2 - \langle \rho \rangle} \approx \frac{2}{3} m, \quad (\text{A.2})$$

где $\langle \rho \rangle \approx 1/2$ — среднее значение дробной части. Точность этой оценки $\sim 1/m$. Например, для $m = 10$ из полного числа 55 резонансов 32 являются неприводимыми, что составляет 58% вместо асимптотического значения 67%.

2. Расстояние между резонансами отображения (4.II)

Найдем минимальную ширину "щели" между двумя резонансами:

$$\delta = \left| \frac{n_0}{m_0} - \frac{n}{m} \right| = \frac{|m n_0 - n m_0|}{m \cdot m_0} \quad (\text{A.3})$$

с заданными n_0, m_0, m и произвольным n . Дробь n_0/m_0 — несократимая (неприводимый резонанс), а n/m — любая, кроме $n/m = n_0/m_0$. Целое n выбирается таким образом, чтобы получить минимальное $\delta \neq 0$. При этом условии числитель $\rho = m n_0 - n m_0$ может иметь m_0 разных значений, включая $\rho = 0$ и $|\rho| \leq m_0 - 1$. Будем изменять $m \rightarrow m \pm k$ и подбирать соответствующее $n \rightarrow n + \ell$. Тогда ρ изменяется на целое число $\Delta \rho = k n_0 - \ell m_0$. Для $k = 1, 2, \dots, m_0$ все $\Delta \rho$ разные, так как в противном случае $\Delta k \cdot n_0 = \Delta \ell \cdot m_0$ и дробь $\frac{n_0}{m_0} = \frac{\Delta \ell}{\Delta k}$ оказывается сократимой ($\Delta k < m_0$). Следовательно, среди m_0 разных значений ρ найдется по крайней мере одно с $|\rho| = 1$ и $\delta = 1/m m_0$. Номер гармоники этого ближайшего резонанса $\leq m$.

Дополнение В: ИНТЕГРАЛ МЕЛЬНИКОВА-АРНОЛЬДА

Рассмотрим интеграл

$$A_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos\left(\frac{m}{2} \varphi(t) - \lambda t\right), \quad (\text{B.I})$$

где функция

$$\varphi(t) = 4 \operatorname{arctg}(e^t) - \pi \quad (\text{B.2})$$

описывает движение по сепаратрисе маятника (2.49), а m и λ — параметры. Ввиду антисимметричности аргумента косинуса ($\varphi(-t) = -\varphi(t)$) можно написать

$$A_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp i\left(\frac{m}{2} \varphi - \lambda t\right). \quad (\text{B.3})$$

Далее, пусть $x = 2 \operatorname{arctg}(e^t)$, тогда $e^t = \operatorname{tg}(x/2) = (e^{ix} - 1)/i(e^{ix} + 1)$, откуда

$$e^{\frac{i\varphi}{2}} = -ie^{ix} = \frac{1 + ie^t}{i + e^t} \quad (\text{B.4})$$

и интеграл (B.3) равен:

$$A_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\lambda t} \left[\frac{1 + ie^t}{i + e^t} \right]^m. \quad (\text{B.5})$$

Полюса подынтегрального выражения расположены в точках

$$e^{\tau} = i; \quad \tau_p = -\frac{i\pi}{2} + 2\pi i p; \quad p - \text{целое.} \quad (\text{В.6})$$

При целых $m > 0$ интеграл вычисляется с помощью вычетов. Для $\lambda > 0$ контур интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости τ . Эта операция требует некоторого пояснения. Мы можем замкнуть контур, например, по двум прямым: $\operatorname{Re} \tau = \pm T$. Интеграл (В.3), взятый по этим прямым, не равен, вообще говоря, нулю, а пропорционален при $T \rightarrow \infty$ выражению $\sin(\frac{m\pi}{2} - \lambda T)$, т.е. осциллирует с T . Это влечет за собой асимптотическое поведение неопределенного интеграла

$$\int d\tau e^{i(\frac{m\pi}{2} - \lambda\tau)} \rightarrow \frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda\tau \pm \frac{\pi m}{2}} \quad \text{при } \tau \rightarrow \pm \infty.$$

Такие осцилляции легко уничтожаются канонической заменой переменных (§ 2.2), поэтому мы можем просто отбросить их, оставив в выражении для интеграла Мельникова-Арнольда только аperiодическую часть.

Вводя новую переменную $z = e^{\tau - \tau_p}$ и вычисля вычеты в (В.5), получаем (контур интегрирования проходит в отрицательном направлении)

$$A_m(\lambda) = -\frac{2\pi i}{i^m(m-1)!} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2\pi i p} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[e^{-i\lambda z} \left(z \frac{1+e^z}{1-e^z} \right)^m \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{(m-1)!} \cdot \frac{e^{\frac{\pi\lambda}{2}}}{\operatorname{sh}(\pi\lambda)} (2\lambda)^{m-1} [1 + f_m(\lambda)]; \quad \lambda > 0, \quad (\text{В.7})$$

где мы ввели новые функции $f_m(\lambda)$ (см. ниже).

При $\lambda < 0$ контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости τ и проходим его в положительном направлении. Ближайший к действительной оси полюс расположен теперь в точке $\tau_0 = 3\pi i/2$. Все остальные соотношения сохраняются. Поэтому можем сразу написать

$$A_m(\lambda < 0) = (-1)^m A_m(|\lambda|) e^{-\pi i \lambda}. \quad (\text{В.9})$$

При больших $|\lambda|$ величина интеграла в этом случае существенно меньше. Для вычисления функции $f_m(\lambda)$ удобно воспользоваться рекуррентным соотношением для $A_m(\lambda)$, найденным О.В. Жировым,

$$A_{m+1} = \frac{2\lambda}{m} A_m - A_{m-1}. \quad (\text{В.10})$$

Оно получается, если проинтегрировать (В.5) по частям и пренебречь выражением

$$\frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda\tau} \left[\frac{1+ie^{\tau}}{i+e^{\tau}} \right]^m \Big|_{-T}^T \rightarrow -\frac{2}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi m}{2} - \lambda T\right).$$

Но это как раз тот самый осциллирующий член, который мы уже отбросили, как это было объяснено выше. Из (В.10) и (В.7) получаем рекуррентное соотношение для функции $f_m(\lambda)$

$$f_{m+1} = f_m - (1 + f_{m-1}) \frac{m(m-1)}{4\lambda^2}. \quad (\text{В.11})$$

Приведем несколько первых f_m :

$$f_1 = f_2 = 0; \quad f_3 = -\frac{1}{2\lambda^2}; \quad f_4 = -\frac{2}{\lambda^2}; \quad (\text{В.12})$$

$$f_5 = -\frac{5}{\lambda^2} + \frac{3}{2\lambda^4}; \quad f_6 = -\frac{10}{\lambda^2} + \frac{23}{2\lambda^4}.$$

При $|\lambda| \gg m$ f_m дает малые поправки к основному члену в (В.7):

$$A_m(\lambda) \approx \frac{4\pi(2\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}; \quad \lambda \gg m. \quad (\text{В.13})$$

Полученные выражения можно сравнить с точным разложением решения для маятника вблизи сепаратрисы (2.51):

$$\frac{\dot{\varphi}}{2\omega_0} = \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{2\omega}{\omega_0} \sum_n \frac{\cos(\lambda_n \omega_0 t)}{\operatorname{ch}(\frac{\pi\lambda}{2})}; \quad \lambda_n = \frac{n\omega}{\omega_0}. \quad (\text{В.14})$$

Коэффициенты этого Фурье-разложения определяются интегралом (колебательный режим):

$$C_n \approx \frac{2\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos \frac{\varphi_{sx}}{2} \cos \lambda_n \omega_0 t = \frac{\omega}{\pi\omega_0} [A_1(\lambda) + A_1(-\lambda)] = \frac{2\omega}{\omega_0 \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad (\text{В.15})$$

что в точности совпадает с (В.14).

Для действительных (нецелых) значений параметра m интеграл (В.5) может быть вычислен приближенно при больших $|\lambda| \gg m$. Интегрирование производится вокруг разреза вдоль мнимой оси τ до ближайшей к действительной оси особенности. Для $\lambda > 0$ такой особенностью является полюс в точке $\tau_0 = -\frac{\pi i}{2}$. (В.6). Вводя новую переменную y по формуле $\tau = \tau_0 - iy/\lambda$, найдем

$$e^{-i\lambda\tau} = e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} e^{-y}; \quad \frac{1+ie^{\tau}}{i+e^{\tau}} \approx -\frac{2\lambda}{y}; \quad y \ll \lambda.$$

Интеграл (В.5) принимает вид

$$A_m(\lambda) \approx -\frac{i}{\lambda} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} (2\lambda)^m \int_C dy (-y)^{-m} e^{-y}. \quad (\text{В.16})$$

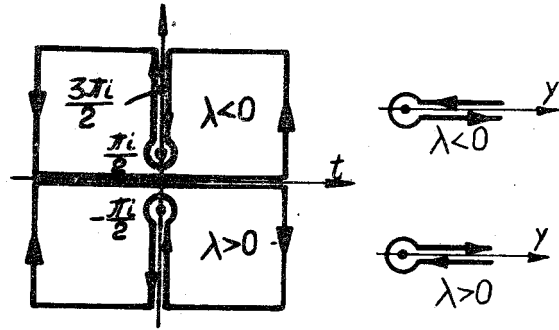


Рис. В.1. Контура интегрирования при вычислении интеграла Мельникова-Арнольда.

Контура интегрирования по z и по y изображены на рис.В.1. Последний интеграл выражается через гамма-функцию $\Gamma/2$, в результате получаем

$$A_m(\lambda) \approx \frac{4\pi(2\lambda)^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\frac{\pi\lambda}{2}}. \quad (\text{В.17})$$

Для целых m это выражение совпадает с приближенной формулой (В.13) и имеет, таким образом, точность $\sim (m/\lambda)^2$ (см. (В.11)).

Для $\lambda < 0$ а нецелых m ближайшей к действительной оси особенностью является точка ветвления (нуль) подынтегральной функции: $1 + ie^{z_0} = 0$; $z_0 = -\frac{\pi i}{2}$. Полагая аналогично предыдущему случаю $z = z_0 + iy/|\lambda|$, найдем

$$e^{-i\lambda z} = e^{-\frac{\pi|\lambda|}{2}} e^{-y}; \quad \frac{1 + ie^z}{i + e^z} \approx -\frac{y}{2|\lambda|}; \quad y \ll |\lambda|$$

в окрестности особой т.о.в. Интегрируя вокруг разреза (рис. В.1), получим

$$\begin{aligned} A_m(\lambda < 0) &\approx - \int_C \frac{idy}{|\lambda|} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi|\lambda|}{2}}}{(2|\lambda|)^m} e^{-y} (-y)^m = \\ &= - \frac{4e^{-\pi|\lambda|/2}}{(2|\lambda|)^{m+1}} \Gamma(m+1) \sin \pi m. \end{aligned} \quad (\text{В.18})$$

Это выражение становится неприменимым вблизи целых m , где $A_m(\lambda < 0)$ дается выражением (В.9). При $|\lambda| \gg m$ для любых m величина интеграла много больше для положительных, чем для отрицательных λ .

До сих пор мы считали $m > 0$ и $\dot{\varphi}_{sx} > 0$ (В.2). Исходное представление интеграла показывает, что существенны относительные знаки величин $m\dot{\varphi}$; λ ; наибольшее значение интеграла соответствует $m\lambda\dot{\varphi} > 0$.

В заключение отметим, что при $|\lambda| \gg 1$ основное значение интеграла набирается на интервале $\sim 1/|\lambda|$ симметрично вокруг $z = 0$.

Л и т е р а т у р а

1. Колмогоров АН ДАН 98 (1954) 527; Общая теория динамических систем и классическая механика. Международный математический конгресс в Амстердаме. М., Физматгиз, 1961, с.187.
2. Арнольд В.И. УМН 18:6 (1963) 91; Arnold V.I., Avez A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, 1968).
3. Moser J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* (University Press, Princeton, 1973).
4. Боголюбов Н.Н.; Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. Арнольд В.И. ДАН 156 (1964) 9; Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М., "Мир", 1968.
6. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. М., "Наука", 1971.
7. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики, АН СССР. М., 1950.
8. Мельников В.К. ДАН 144 (1962) 747; 148 (1963) 1257.
9. Заславский Г.М., Чириков Б.В. УФН 105 (1971) 3.
10. Синай Я.Г. УМН 25:2 (1970) 141.
11. Капица П.Л. ЖЭТФ 21 (1951) 588.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. Zakharov. The Method of Reverse Scattering Problem. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1977.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., "Наука", 1974.
15. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, "Наукова думка", 1969.
16. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.

телей. М., Физматгиз, 1962.

17. Зельдович Я.Б. ЖЭТФ 51 (1966) 1492; Ритус В.И., там же, с.1544.

18. Ford J., Lunsford G.H. *Phys.Rev.* A1 (1970) 59.

19. Ханаев М.М. ДАН 193 (1970) 46; Маркеев А.П. Прикладная математика и механика, 37 (1973), 753.

20. Нехорошев Н.Н. Метод последовательных канонических замен переменных. Добавление в книгу: Ю.Мозер. Лекции о гамильтоновых системах. М., "Мир", 1973; УМН 32:6 (1977).

21. Walker G.H., Ford J. *Phys. Rev.* 188 (1969) 416.

22. Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М., Чириков Б.В. Предварительные численные эксперименты по диффузии Арнольда. Новосибирск, препринт ИЯФ 74-49, 1974.

23. Заславский Г.М., Чириков Б.В. ДАН 159 (1964) 306.

24. Мелехин В.Н., ЖЭТФ 61 (1971) 1319; 68 (1975) 1601.

25. Lieberman M.A., Lichtenberg A.J. *Phys.Rev.* A5 (1972) 1852.

26. Garren A. et al., Individual Particle Motion and the W-fect of Scattering in an Axially Symmetric Magnetic Field, *Proc. 2nd Intern. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy* 31 (1958) 65.

27. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.

28. Hastie R.J., Hobbs G.D., Taylor J.B. Non-Adiabatic Behaviour of Particles in Inhomogeneous Magnetic Fields, *Proc. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Novosibirsk, 1968* (Int. Atom. Energy Agency, Vienna, 1969) v.1, p.389.

29. Крушкаль Е.М. ЛТФ 42 (1972) 2288.

30. Сердюк О.В. ЖТФ 46 (1976) 2136.

31. Chirikov B.V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems, *Physics Reports*.

32. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. М., "Наука", 1965.

33. Гладкие динамические системы, реп. Л.В.Аносов. М., "Мир", 1977.

34. Нитенки З. Введение в дифференциальную динамику. М., "Мир", 1975.

35. Волосов В.М., Комин А.В. ЖТФ 38 (1968) 846; Bocharov V.N.

Volosov V.I., Komin A.V., Panosyuk VM, Yudin Yu.N. Plasma Containment in a Stellarator for Different Free Path Lengths. Proc. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Novosibirsk. 1968 (Int. Atom. Energy Agency. Vienna. 1969). v.1, p.561.

36. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of Nonlinear Problems I. Los Alamos Scientific Report LA-1940. 1955; Ферми Э., Научные труды. М., "Наука", 1972. Т.2, с.647.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 2. ЧТО ТАКОЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ? НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ПРИМЕРОВ	10
§ 2.1. Маятник	10
§ 2.2. Канонические преобразования и сверх- сходимость	13
§ 2.3. Кубическая нелинейность	19
§ 2.4. Сепаратриса	21
Глава 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС	24
§ 3.1. Внешний резонанс	25
§ 3.2. Параметрический резонанс	29
§ 3.3. Универсальное описание нелинейного резонанса	31
§ 3.4. Резонанс многомерных колебаний	33
Глава 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗОНАНСОВ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ	41
§ 4.1. Два резонанса; критерий перекрытия	42
§ 4.2. Много резонансов; отображения	49
§ 4.3. Движение в окрестности сепаратрисы	56
§ 4.4. Многомерные колебания	61
§ 4.5. Теория Колмогорова-Арнольда-Мозера (теория КАМ)	64
Дополнение А: Арифметические свойства резонансов	72
Дополнение В: Интеграл Мельникова-Арнольда	73
Литература	78