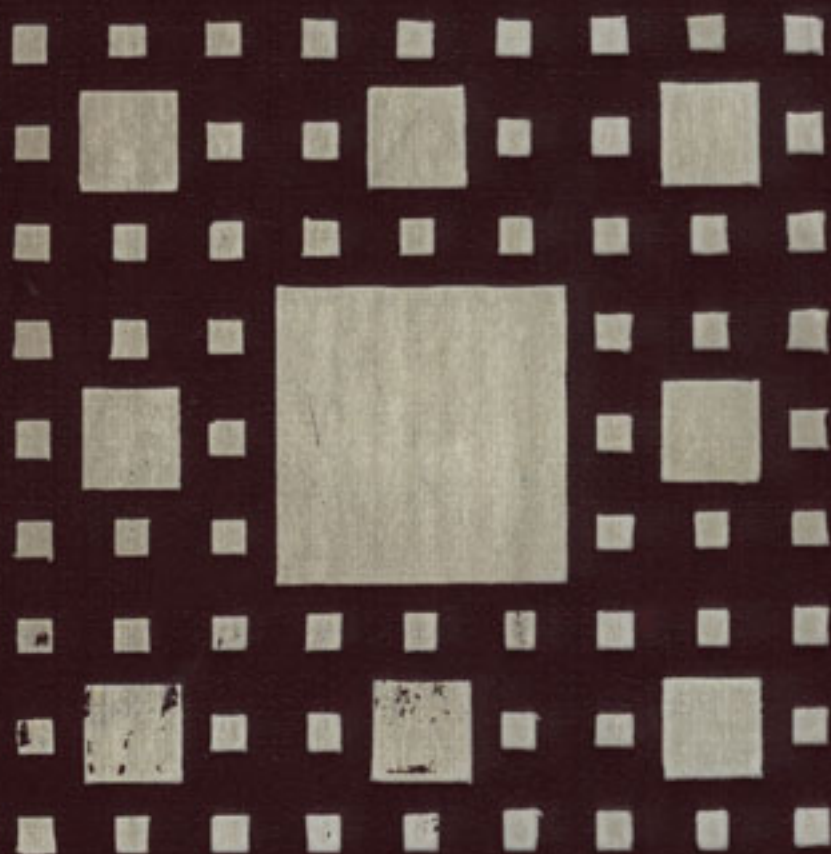


Е. Федер

---

# Фракталы



Издательство «Мир»

# ФРАКТАЛЫ

# FRACTALS

Jens Feder

Department of Physics  
University of Oslo  
Oslo, Norway

PLENUM PRESS • NEW YORK AND LONDON

Е.Федер

# Фракталы

*Перевод с английского  
Ю. А. Данилова и  
А. Шукурова*



Москва «Мир» 1991

ББК 22.3  
Ф32  
УДК 530.1

Переводчики: Данилов Ю. А. (предисловие, гл. 1–7 (разд. 7.1–7.5)), Шукуров А. (гл. 7 (разд. 7.6–7.9)–14).

**Федер Е.**

**Ф32** Фракталы: Пер. с англ.–М.: Мир, 1991.–254 с., ил.  
ISBN 5-03-001712-7

В книге известного норвежского физика дается ясное и простое изложение математических свойств фракталов и описываются приложения теории фракталов в гидродинамике, океанологии, гидрологии, в исследовании перколяционных процессов и пр. Кроме того, приводятся методы компьютерной графики.

Для научных работников, аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с теорией фракталов и применять ее при описании различных явлений – от биологических до квантовомеханических.

Ф  $\frac{1604010000-375}{041(01)-91}$  34-90

**ББК 22.3**

*Редакция литературы по физике и астрономии*

ISBN 5-03-001712-7 (русск.)  
ISBN 0-306-42851-2 (англ.)

© 1988 Plenum Press, New York  
© перевод на русский язык, Дани-  
лов Ю. А., Шукуров А., 1991

# Предисловие

Эту замечательную книгу ждет заслуженный успех. Она не нуждается ни в чьих рекомендациях, но ее автор попросил меня написать несколько слов, а другу не принято отказывать. Вопросам фрактальной геометрии и ее приложений уже посвящено несколько превосходных обзоров умеренного объема, и, если судить по слухам и имеющимся рукописям, нам вскоре предоставится возможность познакомиться с монографическим изложением более широкого круга проблем. Но тем, кто занимается преподаванием, этих обзоров и монографий недостаточно, и насущная потребность в более доступных руководствах общепризнана. Создать такое руководство — задача не из легких, но Энс Федер успешно справился со всеми трудностями. Его подход сочетает в себе стремление древних викингов преодолевать одновременно многие препятствия на своем пути и способность современных норвежцев достигать тонкого равновесия в удовлетворении противоречивых потребностей. Я особенно признателен Энсу Федеру за изложение основных фактов относительно  $R/S$ -анализа долговременной зависимости. С выходом его книги научная общественность получает возможность ознакомиться с большим циклом моих работ, бывших до того достоянием лишь узкого круга наиболее близких друзей и знакомых.

Нельзя не упомянуть и о том, что мы все благодарны Энсу за предоставленную без ложной скромности возможность ознакомиться с многими превосходными результатами, полученными его группой. Энс не пытается рассказать все, что знает, но то, что он рассказывает, просто великолепно.

Йорктаун-Хайтс  
шт. Нью-Йорк  
США

*Бенуа Мандельброт*

## От автора

Эта книга выросла из исследований фазовых переходов, агрегации иммуноглобулина и проводившихся в последнее время работ по изучению образования вязких пальцев при вытеснении жидкости в пористых средах. Все эти исследования можно рассматривать как частные случаи общего вопроса: как микроскопическое поведение систем связано с тем, что мы наблюдаем в макроскопическом масштабе? Я считаю, что фракталы, устанавливающие взаимозависимость между геометриями в различных масштабах, существенны для описания и понимания этой связи. Мой друг Торстейн Йоссанг и я на протяжении многих лет пытались постичь взаимосвязь между физикой микроскопического мира и макроскопическими явлениями с помощью экспериментов, теории и численного моделирования. Многим из того, что я знаю, я обязан сотрудничеству с Торстейном. Он также принял участие в конспектировании первых лекций и докладов о фракталах. Однако, по его мнению, монографию о фракталах должен был написать я. Нам с ним вместе выпала также удача работать с многими талантливыми студентами.

В этой книге собраны некоторые из вопросов, показавшихся мне особенно интересными и важными в процессе преподавания и в ходе наших исследований. Многие другие идеи и интересные особенности фракталов читатель найдет в книгах Мандельброта и в быстро растущей журнальной литературе. Я хотел бы принести извинения всем коллегам, чьи работы не упомянуты в настоящей книге. Дело в том, что в мои намерения входило написать введение, которое было бы полезно для тех, кто захочет воспользоваться фракталами в своих исследованиях, а не исчерпывающий обзор.

Интересные явления, возникающие при вытеснении жидкостей в пористых средах, оказались в центре наших исследований, проводимых совместно с акционерным обществом «Норвежская государственная нефтяная компания» («Статойл»). Это сотрудничество поставило перед нами множество вопросов, представляющих практический интерес, которые быстро переросли в вопросы, имеющие фундаментальное значение. Наши исследования и студенты получали щедрую поддержку от VISTA (совместного исследовательского проекта Норвежской академии наук и литературы и фирмы «Статойл»), созданного по инициативе Хенрика Агер-Ханссена.

Д-р Пер Стокке из фирмы «Статойл» поднял много интересных вопросов и попросил составить несколько отчетов о возможных приме-

нениях фракталов в геологии, геохимии и других областях знания, представляющих непосредственный интерес для разведки и разработки нефтяных месторождений. Составление этих отчетов по существу стало началом работы над этой книгой. Обучение студентов приложениям фракталов в значительной мере способствовало осуществлению замысла и поставило передо мной множество новых вопросов.

Аммон Аарони оказывал мне поддержку в работе над этой книгой, и я извлек немало полезного для себя из его многочисленных поучительных замечаний. Ивар Гьевер прочитал предварительный вариант и высказал много тонких соображений и предложений, которые я попытался учесть при дальнейшей работе над книгой. Весьма полезными для меня оказались беседы с Полом Микином. Енс Лоте прокомментировал несколько разделов книги. Кроме того, я обязан ему как своему научному руководителю. Гарри Томасу принадлежат комментарии по поводу моих первых публикаций о фракталах. Летом 1986 г. я посетил Эрлинга Питта из Научно-исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона фирмы IBM, и он высказал немало предложений, способствовавших улучшению книги. Бенуа Мандельброт прочитал тем же летом предварительные варианты рукописи этой книги, и мы провели с ним немало интересных бесед. С присущим ему юмором и терпением он отметил мои ошибки и заблуждения, высказал ценные замечания и всячески поощрял меня к воплощению замысла. Я признателен ему за поддержку и помощь.

Ян Фройланд внес немалый вклад в анализ статистики высоты волн. Ему удалось получить также многие из приведенных в гл. 13 случайных поверхностей переноса. Многие из студентов, занимавшихся в группе, которую вели Йоссанг и я, также внесли вклад в создание этой книги. Кнут Йорген Молёй проявил изобретательность в постановке экспериментов с вытеснением жидкости в пористых средах. Унни Оксаль провел эксперименты по вытеснению жидкости в микромоделях с контролируемой геометрией. Эйнар Хинриксен выполнил численное моделирование ограниченной диффузией агрегации и высказал много полезных замечаний по поводу рукописи. Финн Богер принял участие в анализе экспериментальных результатов. Он также составил программы, которые «нарисовали» фрактальные ландшафты и облака, представленные на иллюстрациях в этой книге. Лив Фуруберг с помощью численного моделирования воспроизвела процессы перколяции и вычертила многие из иллюстраций к гл. 7.

Большинство иллюстраций к книге выполнила Лив Федер. Она оказывала мне помощь и во многом другом, и без ее поддержки и терпения эта книга вообще не была бы написана.

Предлагаемая вашему вниманию книга, несомненно, может быть усовершенствована. Если у вас появятся какие-нибудь комментарии или предложения, то я буду рад ознакомиться с ними.

# Введение

Геометрия встречающихся в природе объектов самых различных размеров – от атомных масштабов до Вселенной – занимает центральное место в моделях, которые мы строим, чтобы «понять» природу. Геометрия траекторий частиц; линий тока в гидродинамике, волн, обводов корабельных корпусов и береговых линий; ландшафтов, гор, островов, рек, ледников и отложений; зерен в скалистых породах, металлах и композитных материалах; растений, насекомых и живых клеток, а также геометрическая структура кристаллов, молекул химических веществ и, в частности, протеинов, – короче говоря, геометрия природы занимает центральное место в различных областях естествознания, и поэтому мы склонны считать геометрические аспекты чем-то само собой разумеющимся. Каждая область стремилась развить свои приспособленные к ее потребностям понятия (например, такие, как морфология, четырехмерное пространство, текстура, конформация и дислокация), интуитивно используемые учеными, работающими именно в этой области. По традиции основой интуитивного понимания геометрии природы служили евклидовы прямые, окружности, сферы и тетраэдры.

Математики разработали и математические понятия, выходявшие за рамки традиционной геометрии, но, к сожалению, в прошлом эти понятия не привлекли к себе должного внимания со стороны представителей естественных наук из-за весьма абстрактного и «педантичного» изложения и из-за предостережений относительно «опасности», связанной с использованием такого рода нетрадиционных геометрических представлений.

Своими яркими и фундаментальными работами Бенуа Б. Мандельброт пробудил всеобщий интерес к *фрактальной геометрии* – понятию, введенному самим Мандельбротом. В частности, он поведал миру об объектах, названных им фракталами, избрав для этого весьма необычную и весьма стимулирующую читателя к самостоятельной творческой работе форму изложения. Книга Бенуа Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы» (The Fractal Geometry of Nature, 1982) – общепризнанный стандартный справочник по фракталам и содержит как элементарные понятия, так и необычайно широкий круг новых и отнюдь не элементарных идей (как, например, мультифракталы), находящихся сейчас в центре внимания тех, кто занимается геометрией фракталов. Синтетические фрактальные пейзажи выглядят настолько правдоподоб-

но, что большинство людей принимают их за естественные. Появление в последние годы недорогих компьютеров и компьютерной графики привело к исследованию нетрадиционных геометрических объектов во многих областях естественных наук.

Мандельброт написал огромное количество научных работ, посвященных геометрии явлений, наблюдаемых во многих областях человеческой деятельности. Он исследовал фрактальную геометрию изменений цен и распределений заработной платы, статистики ошибок при вызовах на телефонных станциях, частот слов в печатных текстах, различных математических объектов и многого другого. Мандельброт написал три книги<sup>1)</sup> о фрактальной геометрии, сделавшие более доступными его специальные работы и вдохновившие многих на применение фрактальной геометрии в области собственных исследований:

1. Фрактальные объекты, форма, случай и размерность [131].
2. Фракталы: форма, случай и размерность [133].
3. Фрактальная геометрия природы [134].

Последняя книга представляет собой современное издание с весьма впечатляющими иллюстрациями, ставшими возможными благодаря существенно возросшим возможностям компьютерной графики.

Понятие «фракталы» захватило воображение ученых, работающих во многих областях науки, и работы, в которых фракталы обсуждаются с самых различных позиций, появляются теперь почти ежедневно. Книги Мандельброта замечательны в нескольких отношениях. И прежде всего — они междисциплинальны: автор рассматривает геометрию деревьев, русел рек, легких, а также изменения уровней водной поверхности, турбулентность, экономику, частоты появления слов и многое-многое другое. Все эти, казалось бы, разнородные вопросы Мандельброт связывает со своими геометрическими представлениями. В своих книгах он умышленно избегает введений и заключений, тем самым подчеркивая свое глубокое убеждение в том, что по мере расширения работ в области фрактальной геометрии его идеи позволят все более глубоко постигать самую суть геометрии природы. Он предлагает лишь пробное определение понятия «фрактал» и тут же поспешно заявляет, что предложенное им определение отнюдь не является окончательным! Более того, впоследствии он отказывается от своего определения. В своих книгах Мандельброт пытается убедить читателя в том, что фрактальная геометрия важна для описания природы, но ускользает от читателя, когда тот пытается проследить за деталями аргументации автора. Математические доказательства перемежаются на страницах книг Мандельброта с

---

<sup>1)</sup> В настоящее время (речь идет о 1988 г.) Мандельброт работает над новой книгой, в которую войдут его работы, выполненные в 1967, 1972, 1974, 1985 и 1986 гг. (см. список литературы в конце книги), а также его другие работы по мультифракталам, опубликованные в труднодоступных изданиях. Эти работы составят содержание первого тома «Избранных трудов» Мандельброта. Ожидается выход и других томов, в которые, возможно, войдут его работы по R/S-анализу.

анекдотами и историческими сведениями. Различнейшие вопросы перемешаны в его книгах так, что разделить их практически невозможно. Но, вооружившись терпением, любознательный читатель найдет в книгах Мандельброта необычайно широкий спектр замечательных идей, глубоких замечаний и сможет почерпнуть в них подлинное вдохновение — эти книги поистине замечательны!

Наиболее сильное впечатление производят цветные иллюстрации. На них изображены фрактальная «планета», восходящая над горизонтом своей луны, горы, долины и острова, которых никогда не было. Эти иллюстрации, выполненные Р. Ф. Фоссом, получены с помощью алгоритмов, обеспечивающих фрактальную природу пейзажей. Все пейзажи выглядят очень естественно, по-видимому, фракталы каким-то образом схватывают суть топографии земной поверхности. Каким образом «нарисованы» эти поразительные картины, в тексте не говорится, но Мандельброт [131] замечает по их поводу следующее:

«Чтобы предметы отбрасывали тени, необходимо проявить недюжинную изобретательность. Тома пондобились бы, чтобы описать все подробности. Кроме того, используемый алгоритм сильно зависит от того, на каком компьютере он реализуется: повторить проделанную работу можно только на таком же компьютере, который был использован нами» (см. цветную вклейку). Фосс [213, 214] недавно описал более или менее подробно те идеи, которые были заложены им в программы, позволившие создать великолепные пейзажи. Компьютерная графика, используемая при создании красивых фрактальных объектов, частично описана в Трудах секции компьютерной графики Ассоциации вычислительной техники [57]. В них обращают на себя внимание замечательные фрактальные деревья, построенные Оппенгеймером [167].

В новой книге Пейтгена и Рихтера «Красота фракталов» [173] собраны действительно красивые картинки, использующие фрактальную природу итерационных отображений и решений дифференциальных уравнений. Пейтген является также редактором издания «Искусство фракталов. Введение в компьютерную графику» [172].

Чтобы понять, как создаются фрактальные пейзажи, мы построили несколько таких пейзажей, используя описанные в гл. 13 методы. Всякий, кто сталкивается с необходимостью выполнения столь сложных вычислений, понимает, как необходимы различного рода приемы и ухищрения, позволяющие сократить объем вычислений, и почему Мандельброт обсуждает множество различных возможных схем. «Я рассмотрел и сравнил десятки стационарных алгоритмов и надеюсь когда-нибудь опубликовать результаты сравнения» [134]. Мы обнаружили, что простые модели пейзажей и береговых линий могут быть получены быстро даже при весьма ограниченных вычислительных возможностях. Мы многому научились, пытаясь самостоятельно «рисовать» компьютерные пейзажи, и рекомендуем читателю испробовать свои силы на этом поприще.

Чтобы заложить основу для различных применений фракталов к

экспериментальным результатам, начнем гл. 2 с рассмотрения простых фракталов и фрактальной размерности. Там же мы обсудим связанное с фрактальной размерностью понятие скейлинговой размерности, или размерности подобия.

В гл. 3 рассмотрим фрактальные свойства кластеров и приведем соответствующие экспериментальные результаты. Показано, что агрегация частиц приводит к возникновению фрактальных кластеров. Многочисленные натурные и численные эксперименты, проведенные в последнее время, позволили выяснить свойства кинетики агрегации, гелеобразования и осаждения. При исследовании этих явлений применялись различные экспериментальные методы, и использование фрактальной геометрии позволило осмыслить большие массивы экспериментальных данных. Один из последних на эту тему – обзор Микина [156].

Вытеснение жидкости в пористой среде обычно приводит к формированию фронта вытеснения. Если одна жидкость вытесняется другой, менее вязкой жидкостью, то фронт вытеснения чрезвычайно неустойчив. Такие фронты были широко исследованы и экспериментально, и теоретически. В настоящее время ясно, что с математической точки зрения вытеснение жидкости менее вязкой жидкостью или газом аналогично кинетике процесса агрегации, о котором заведомо известно, что он приводит к фрактальным геометриям. Теоретические основы вытеснения жидкости и экспериментальные результаты приведены в гл. 4.

Покинув прочную основу традиционной геометрии, мы оказываемся в зоопарке фрактальных объектов во всем их разнообразии. В качестве пропедевтики мы рассматриваем в гл. 5 простой пример канторовского множества. В гл. 6 обсудим физические явления, происходящие на фракталах, и распределения, сосредоточенные на фракталах, и введем в наши простые примеры новые понятия фрактальных мер и мультифракталов. Затем воспользуемся теми же идеями при анализе некоторых недавних экспериментальных результатов по тепловой конвекции и динамике образования вязких пальцев.

Случайность – существенная составная часть большинства происходящих в природе явлений. В гл. 7 мы рассмотрим процессы перколяции, которые могут служить особенно хорошо понятными примерами случайных фракталов. Сначала сосредоточим внимание на фрактальной геометрии процессов перколяции, а затем перейдем к обсуждению экспериментальных результатов, полученных при вытеснении жидкости.

Многие экспериментальные сигналы обладают фрактальной статистикой, анализ которой может быть произведен с помощью эмпирического  $R/S$ -анализа, предложенного Мандельбротом и Уоллисом [142] на основе загадочных наблюдений Херста. Этот метод мы излагаем в гл. 8. Как показывает  $R/S$ -анализ, экспериментальные сигналы, получаемые при наблюдении многих природных явлений, имеют фрактальную зависимость от времени. Более подробное обсуждение случайных блужданий в гл. 9 послужит основой для понимания фрактальных временных рядов и введением в понятие фрактального броуновского движения.

Анализ фрактальной структуры временных сигналов показывает, что необходимо различать фракталы самоаффинные и самоподобные. Недавно выяснилось, что для получения осмысленных размерностей в случае самоаффинных фракталов необходимо соблюдать величайшую осторожность. Некоторые из трудностей, возникающих при этом, обсуждаются в гл. 10. Анализ «стратегии смелой игры» приводит к интересному примеру самоаффинной кривой, имеющему непосредственное отношение к рассмотренным в гл. 6 фрактальным мерам. Применение  $R/S$ -статистики к самоаффинному временному ряду мы рассмотрим в гл. 11 на примере статистики высоты океанских волн.

Отношению периметр–площадь для фрактальных объектов посвящена гл. 12. Приводимые в этой главе сведения позволяют понять наблюдение Лавджоя [116], согласно которому поверхность облаков имеет фрактальную размерность  $D = 2,34$ . Вычисленная из «первых принципов» Хентшелем и Прокаччей [88] фрактальная размерность  $D$  для облаков на основе модели турбулентной диффузии оказалась заключенной в диапазоне от 2,37 до 2,41. Некоторые наблюдения относительно соотношения между длиной реки и площадью бассейна реки указывают на фрактальный характер речных систем. Этому вопросу посвящается заключительный раздел гл. 12.

Фрактальным поверхностям посвящена гл. 13. В основу рассмотрения положено соотношение между фрактальными кривыми и поверхностями. Определяя и используя случайные фрактальные поверхности переноса, нам удалось построить фрактальные прибрежные ландшафты и береговые линии. Используемый Фоссом метод случайного сложения служит эффективным алгоритмом построения фрактальных поверхностей с заранее заданными свойствами. Мы приводим несколько примеров таких поверхностей.

Недавняя дискуссия о фрактальных размерностях на основе топографических измерений поверхности отражена в гл. 14. Там же приведены и аналогичные «наблюдения» фрактальных размерностей различных объектов, встречающихся вокруг. Недавно было показано, что поверхности порошков и других пористых сред фрактальны. Многие из этих результатов мы также обсуждаем. Фрактальная природа поверхностей должна иметь важные следствия для катализа и для свойств пористых сред. Не вдаваясь в подробности, можно утверждать, что фрактальная размерность  $D$  пористого вещества является свойством материала и в свою очередь должна определять многие его свойства.

Многие очень интересные и важные вопросы не вошли в нашу книгу. Например, фракталы естественно возникают в динамических системах, и мы настоятельно рекомендуем читателю ознакомиться с этим кругом вопросов по одной из многих книг, имеющих ныне. Для начального ознакомления с предметом очень подходит книга Пейтгена и Рихтера [173]. Другая область очень активных исследований – различные процессы, происходящие во фрактальных геометриях. Например, электропроводность, шумы и механические свойства перколяционных систем явля-

ются важными примерами мультифрактального поведения. Заслуживает дальнейшего обсуждения столь важная тема, как случайное блуждание по многомерным фракталам или с фрактальными шагами. Список тем можно было бы легко продолжить. Почему бы не рассмотреть фрактальную структуру турбулентности, образования галактик и распределения трещин в металле или в горной породе? Почему исследовательская деятельность в этой области не ведется широко и во все возрастающих масштабах? Много интересных вопросов, связанных с фракталами, обсуждалось на конференциях, труды которых вышли под редакцией Фэмили и Ландау [59]; Пинна и Шелторпа [181]; Стэнли и Островского [203]; Пьетронеро и Тозатти [177]; Пинна и Ристе [180]. При выборе тем, затронутых в нашей книге, мы руководствовались главным образом интересами наших исследований, а также потребностями и запросами наших студентов. Предмет исследований изменяется весьма быстро, и сообщения об интересных результатах и приложениях публикуются ежедневно. Кроме того, многие вопросы были рассмотрены в книгах Мандельброта, и мы даже не стремились упоминать о них. Его книги и поныне остаются основными справочными руководствами по фракталам, и читатель данной книги найдет в них много новых идей, заслуживающих внимания.

# Фрактальная размерность

## 2.1. Береговая линия Норвегии

Сколь велика длина береговой линии Норвегии? Взгляните на рис. 2.1. В масштабе карты хорошо видны глубокие фиорды на западном побережье. Более мелкие детали очертаний побережья к северо-востоку от южной оконечности различимы хуже, но смею уверить вас в том, что на картах, которыми я пользуюсь, плавающая на яхте в тех краях, береговая линия выглядит так же, как западное побережье на рис. 2.1. Идя под парусом, вы то и дело встречаете скалы, острова, бухты, обрывы и узкости, которые похожи друг на друга, даже если они не обозначены на моих подробных картах. Прежде чем ответить на вопрос, с которого начинается эта глава, необходимо решить, стоит ли включать в береговую линию острова. Как быть с реками? В каком месте фиорд перестает быть фиордом и где именно он переходит в реку? Ответить на этот вопрос иногда легко, иногда не очень. Но даже если мы сумеем удовлетворительно ответить на все вопросы такого рода, одна трудность все же остается. Дело в том, что я мог бы придать циркулю раствор, соответствующий  $\delta$  км, и сосчитать число шагов  $N(\delta)$ , которые понадобились бы мне, чтобы пройти по карте из конца в конец все побережье. В спешке я мог бы выбрать раствор циркуля настолько большим, что мне не понадобилось бы заботиться даже о самых глубоких фиордах, и принять за длину береговой линии величину  $L = N(\delta) \cdot \delta$ . Если бы мне возразили, что такая оценка неточна, то я выбрал бы несколько меньший раствор циркуля  $\delta$  и повторил все сначала. На этот раз в длину береговой линии вошли бы и наиболее глубокие фиорды, но юго-восточное побережье по-прежнему было бы пройдено за несколько шагов. Для еще более точного подсчета длины береговой линии мне понадобились бы такие карты, которыми пользуются соседи при решении вопросов о том, где должен проходить забор между земельными участками, или о том, как далеко по реке простираются границы рыбной ловли. Ясно, что при решении такого рода вопросов уточнения можно вносить бесконечно. Всякий раз, когда мы будем увеличивать разрешающую способность, длина береговой линии будет разрастаться. Кроме того, при использовании циркуля у нас будут возникать проблемы с островами и реками. Альтернативный способ измерения длины береговой линии состоит в том, чтобы покрыть карту сеткой, как показано в верхней части рис. 2.1. Пусть квадратные ячейки сетки имеют размеры  $\delta \times \delta$ . Число  $N(\delta)$  таких ячеек, необходимых,

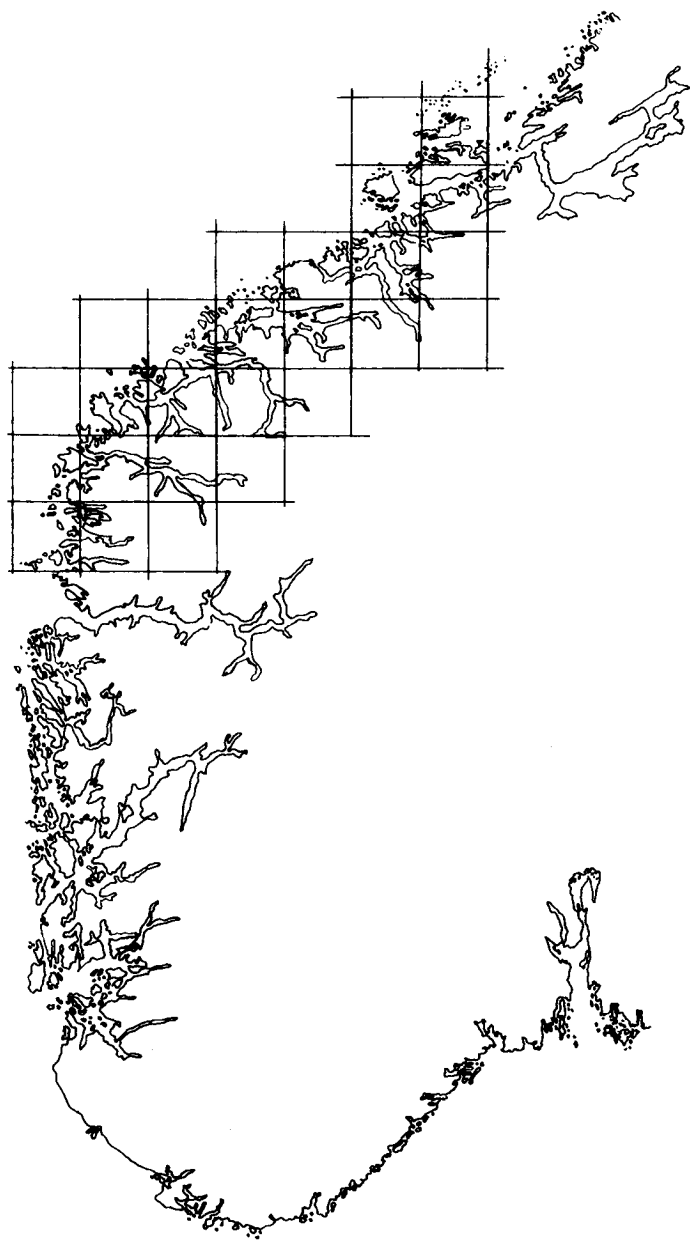


РИС. 2.1. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из  $1800 \times 1200$  ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг  $\delta \sim 50$  км.

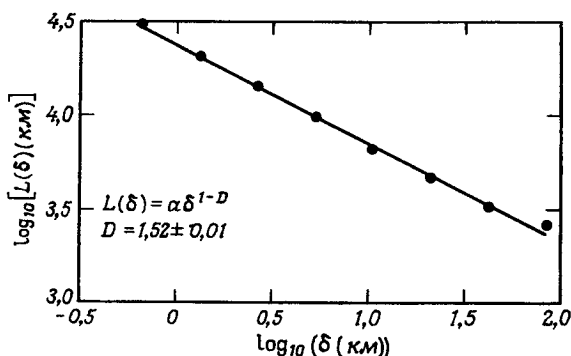


РИС. 2.2. Измеренная длина береговой линии, изображенной на рис. 2.1, как функция шага  $\delta$  (км) — длины стороны  $\delta \times \delta$  квадратных ячеек, образующих покрытие береговой линии на карте. Прямая на графике в дважды логарифмическом масштабе соответствует зависимости  $L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}$ , где  $D \approx 1,52$ .

чтобы покрыть береговую линию на карте, приблизительно равно числу шагов, за которое можно обойти по карте береговую линию циркулем с раствором  $\delta$ . Уменьшение  $\delta$  приводит к увеличению числа ячеек, необходимых для покрытия береговой линии. Если бы береговая линия Норвегии имела вполне определенную длину  $L_N$ , то можно было бы ожидать, что число шагов циркуля или число квадратных ячеек  $N(\delta)$ , необходимых для покрытия береговой линии на карте, будет обратно пропорционально  $\delta$ , а величина  $L(\delta) = N(\delta) \times \delta$  при уменьшении  $\delta$  будет стремиться к постоянной  $L_N$ . Но нашим ожиданиям не суждено сбыться.

Как видно из рис. 2.2, при уменьшении длины  $\delta$  шага измеренная длина возрастает. График на этом рисунке выполнен в дважды логарифмическом масштабе и показывает, что при уменьшении  $\delta$  измеренная длина береговой линии отнюдь не стремится к постоянному значению. Наоборот, измеренная длина прекрасно описывается приближенной формулой

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}. \quad (2.1)$$

Для обычной кривой можно было бы ожидать, что  $a = L_N$  (по крайней мере при достаточно малых  $\delta$ ) и показатель  $D$  равен единице. Но для береговой линии Норвегии, как видно из графика,  $D \approx 1,52$ . Береговая линия — фрактал с фрактальной размерностью  $D$ . Подробнее мы обсудим это в разд. 2.3.

В книге Мандельброта [134] есть глава «Чему равна длина береговой линии Британии?» В ней автор анализирует данные, собранные Ричардсоном, и на рис. 2:3 воспроизведен график из этой главы, на котором показана кажущаяся длина береговых линий и сухопутных границ [127]. Все точки выстраиваются (в дважды логарифмическом масштабе) вдоль прямых. Угловой коэффициент этих прямых равен  $1 - D$ , где  $D$  — фрак-

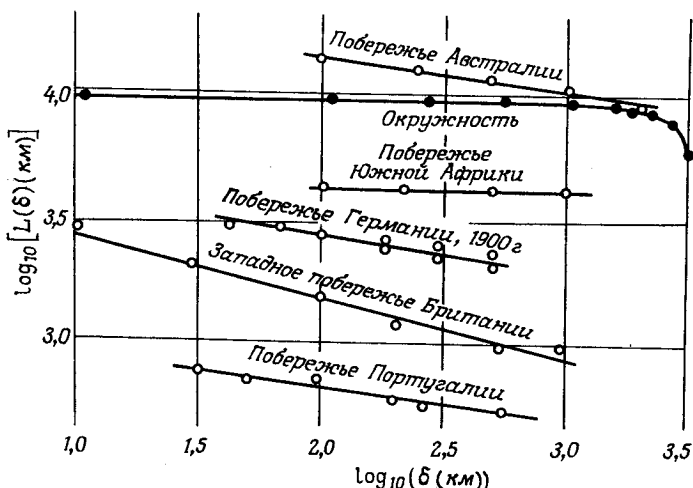


РИС. 2.3. Длина береговых линий как функция выбранного шага  $\delta$  (км) [134].

тальная размерность береговой линии (или сухопутной границы). Береговая линия Великобритании имеет  $D \sim 1,3$ . Мандельброт приводит также данные для окружности и находит, как и следовало ожидать, что  $D_{\text{окр}} = 1$ .

## 2.2. Парадокс Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра

Измерение площади – процедура, не всегда легко осуществимая на практике. Рассмотрим боковую поверхность цилиндра (радиусом  $R$  и высотой  $H$ ), изображенную на рис. 2.4. Ее площадь равна  $A = 2\pi RH$ . Но если мы попытаемся измерить площадь боковой поверхности этого цилиндра на практике с помощью линейек, то нам придется тем или иным образом *триангулировать* поверхность, например так, как это показано на рис. 2.4. Разделив поверхность на  $m$  полос и  $n$  секторов, как показано на этом рисунке, мы получим оценку площади боковой поверхности цилиндра в виде суммы  $A_{\Delta}$  площадей всех малых треугольников. Разбивая поверхность на все более мелкие треугольники, т.е. устремляя  $n \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$ , мы ожидаем, что и  $A_{\Delta} \rightarrow A$ . Но подобный прогноз верен не всегда. Площадь всех треугольников можно записать в виде

$$A_{\Delta} = \pi RH \frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{\pi^4 m^2}{n^4} \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right)^4} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi RH \{1 + \sqrt{1 + (R/H)^2 (\pi^2 m/n^2)^2}\}. \quad (2.2)$$

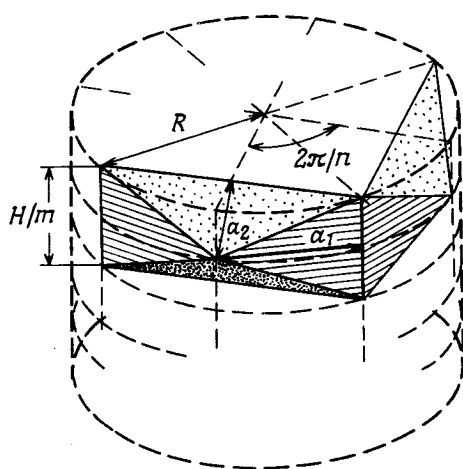


РИС. 2.4. Боковая поверхность цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$  равна  $2\pi RH$ . Поверхность аппроксимируется с помощью триангуляции, как показано на рисунке.

Первые слагаемые здесь соответствуют треугольникам того типа, который на рис. 2.4 обозначен  $a_1$ . Вторые, те, что с квадратным корнем, соответствуют треугольникам, обозначенным на рис. 2.4 через  $a_2$ . Нетрудно видеть, что если  $m/n^2 \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$ , то суммарная площадь треугольников стремится к ожидаемому пределу. Но если мы воспользуемся триангуляцией, для которой  $m = \lambda n^2$ , то обнаружим, что  $A_\Delta > A$  и что в действительности  $A_\Delta$  может принимать сколь угодно большие значения. Выбирая  $m = n^\beta$ , мы получаем  $A_\Delta \sim n^{\beta-2}$  при  $\beta > 2$ . Следовательно, когда отдельные треугольники становятся все меньше и меньше, суммарная площадь треугольников неограниченно возрастает. Вместо того чтобы улучшаться, аппроксимация при уменьшении величины треугольников ухудшается. К аналогичным проблемам приводят и многие другие способы триангуляции. Возникающая ситуация известна под названием парадокса Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра. Обсуждение парадокса см. в статье Мандельброта [137]. Нетрудно понять, в чем здесь дело. При увеличении отношения  $m/n^2$  аппроксимирующая поверхность, состоящая из треугольников, все сильнее и сильнее складывается в гармошку, и в пределе треугольника типа  $a_2$  практически перпендикулярны поверхности цилиндра.

Нам могут возразить, что возникшие трудности связаны с плохим выбором триангуляции. Но как следует выбирать «хорошую» триангуляцию, если нам нужно оценить площадь более сложной или неровной поверхности? Оказывается, что для этого лучше воспользоваться методами, которые изложены в следующем разделе. Методы, о которых идет речь, применимы и в более простом случае классических гладких кривых и поверхностей, и в более сложном случае кривых, поверхностей и объемов «монстров».

### 2.3. Фрактальная размерность

Мандельброт [134] предложил следующее *пробное* определение фрактала:

*Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности* (с. 15).

Это определение в свою очередь требует определений терминов *множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича ( $D$ ) и топологическая размерность ( $D_t$ )*, которая всегда равна целому числу. Для наших целей мы предпочитаем весьма нестрогие определения этих терминов и наглядные иллюстрации (с использованием простых примеров), а не более строгое, но формальное изложение тех же понятий. Мандельброт [137] сузил свое предварительное определение, предложив заменить его следующим<sup>1)</sup>:

*Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.*

Строгого и полного определения фракталов пока не существует [138]. Дело в том, что первое определение при всей правильности и точности слишком ограничительно. Оно исключает многие фракталы, встречающиеся в физике. Второе определение содержит существенный отличительный признак, подчеркиваемый в нашей книге и наблюдаемый в эксперименте: фрактал выглядит одинаково, в каком бы масштабе его ни наблюдать. Взять хотя бы некоторые прекрасные кучевые облака. Они состоят из огромных «горбов», на которых возвышаются «горбы» поменьше, на тех – «горбы» еще меньше и т. д. вплоть до самого малого масштаба, который вы в состоянии разрешить. На самом деле, располагая только внешним видом облаков и не используя никакой дополнительной информации, размер облаков оценить невозможно.

Фракталы, о которых пойдет речь в этой книге, можно рассматривать как множества точек, вложенные в пространство. Например, множество точек, образующих линию в обычном евклидовом пространстве, имеет топологическую размерность  $D_t = 1$  и размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D = 1$ . Евклидова размерность пространства равна  $E = 3$ . Так как для линии  $D = D_t$ , линия, согласно определению Мандельброта, не фрактальна, что подтверждает разумность определения. Аналогично множество точек, образующих поверхность в пространстве с  $E = 3$ , имеет топологическую размерность  $D_t = 2$  и  $D = 2$ . Мы видим, что и обычная поверхность не фрактальна независимо от того, насколько она сложна. Наконец, шар, или полная сфера, имеет  $D = 3$  и  $D_t = 3$ . Эти примеры позволяют определить некоторые из рассматриваемых нами типов множеств.

Центральное место в определении размерности Хаусдорфа–Безиковича и, следовательно, фрактальной размерности  $D$  занимает понятие расстояния между точками в пространстве. Как измерить «величину»

<sup>1)</sup> В. Mandelbrot, частное сообщение (1987).

множества  $\mathcal{S}$  точек в пространстве? Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей или объем тела состоит в том, чтобы разделить пространство на небольшие кубы с ребром  $\delta$ , как показано на рис. 2.5. Вместо кубов можно было бы взять небольшие сферы диаметром  $\delta$ . Если поместить центр малой сферы в какой-нибудь точке множества, то все точки, находящиеся от центра на расстоянии  $r < (1/2)\delta$ , окажутся покрытыми этой сферой. Подсчитывая число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, мы получаем меру величины множества. Кривую можно измерить, определяя число  $N(\delta)$  прямолинейных отрезков длины  $\delta$ , необходимых для того, чтобы покрыть ее. Разумеется, для обычной кривой  $N(\delta) = L_0/\delta$ . Длина кривой определяется предельным переходом

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0.$$

В пределе при  $\delta \rightarrow 0$  мера  $L$  становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от  $\delta$ .

Множеству точек можно поставить в соответствие и *площадь*. Например, площадь кривой можно определить, указывая число кругов или квадратов, необходимых для ее покрытия. Если  $N(\delta)$  — число этих квадратов, а  $\delta^2$  — площадь каждого из них, то площадь кривой равна

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1.$$

Аналогично *объем*  $V$  кривой можно определить как величину

$$V = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2.$$

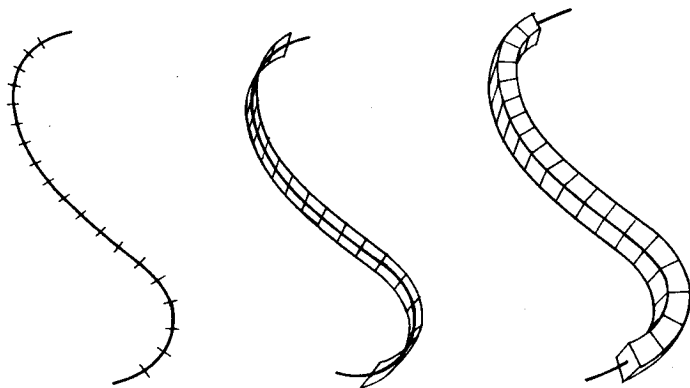


РИС. 2.5. Измерение «величины» кривой.

Разумеется, что для обычных кривых  $A$  и  $V$  обращаются в нуль при  $\delta \rightarrow 0$ , и единственной представляющий интерес мерой является длина кривой.

Рассмотрим далее множество точек, образующих поверхность (рис. 2.6). Нормальной мерой такого множества служит площадь  $A$ , и мы имеем

$$A = N(\delta) \cdot \delta^2 \rightarrow A_0 \delta^0.$$

$\delta \rightarrow 0$

Как нетрудно видеть, для обычной поверхности число квадратов, необходимых для ее покрытия, определяется в пределе при  $\delta \rightarrow 0$  выражением  $N(\delta) = A_0/\delta^2$ , где  $A_0$  — площадь поверхности.

Поверхности можно поставить в соответствие *объем*, образуя сумму объемов кубов, необходимых для покрытия поверхности:

$$V = N(\delta) \delta^3 \rightarrow A_0 \delta^1.$$

$\delta \rightarrow 0$

При  $\delta \rightarrow 0$  этот объем, как и следует ожидать, обращается в нуль.

Можно ли поверхности поставить в соответствие какую-нибудь *длину*? Формально мы можем принять за такую длину величину

$$L = N(\delta) \delta \rightarrow A_0 \delta^{-1},$$

$\delta \rightarrow 0$

которая расходится при  $\delta \rightarrow 0$ . Этот результат имеет смысл, так как поверхность невозможно покрыть конечным числом прямолинейных отрезков. Мы заключаем, что единственной содержательной мерой множества точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве, является площадь.

Нетрудно видеть, что множества точек, образующих кривые, могут

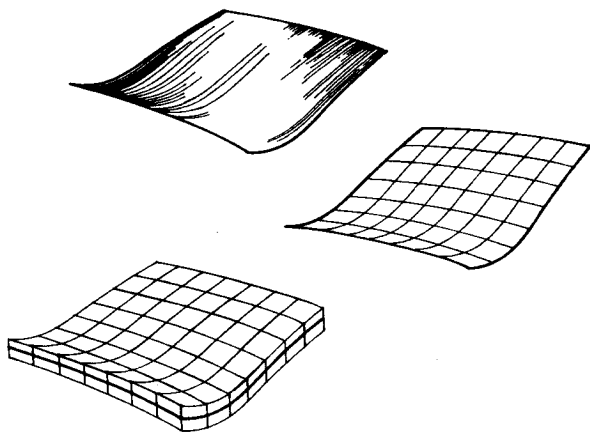


РИС. 2.6. Измерение «величины» поверхности.

быть закрученными так сильно, что длина их окажется бесконечной, и, действительно, существуют кривые (кривые Пеано), заполняющие плоскость. Существуют также поверхности, изогнутые столь причудливым образом, что они заполняют пространство. Для того чтобы мы могли рассматривать и такие необычные множества точек, полезно обобщить введенные нами меры величины множества.

До сих пор, определяя меру величины множества точек  $\mathcal{S}$  в пространстве, мы выбирали некоторую пробную функцию  $h(\delta) = \gamma(\delta)\delta^d$  — отрезок прямой, квадрат, круг, шар или куб — и покрывали множество, образуя меру  $M_d = \sum h(\delta)$ . Для прямолинейных отрезков, квадратов и кубов геометрический коэффициент  $\gamma(\delta) = 1$ , для кругов  $\gamma = \pi/4$  и для сфер  $\gamma = \pi/6$ . Мы заключаем, что в общем случае при  $\delta \rightarrow 0$  мера  $M_d$  равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора  $d$  — размерности меры. Размерность Хаусдорфа — Безиковича  $D$  множества  $\mathcal{S}$  есть критическая размерность, при которой мера  $M_d$  изменяет свое значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum \gamma(\delta)\delta^d = \gamma(\delta)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D; \\ \infty & \text{при } d < D. \end{cases} \quad (2.3)$$

Мы называем  $M_d$   $d$ -мерой множества. Значение  $M_d$  при  $d = D$  часто конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; существенно, при каком именно значении  $d$  величина  $M_d$  изменяется скачком. Заметим, что в приведенном выше определении размерность Хаусдорфа — Безиковича фигурирует как *локальное* свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающе малом диаметре, или размере,  $\delta$  пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, фрактальная размерность  $D$  может также быть локальной характеристикой множества. В действительности здесь существует несколько тонких пунктов, заслуживающих рассмотрения. В частности, определение размерности Хаусдорфа — Безиковича позволяет покрывать множество «шарами» не обязательно одного и того же размера при условии, что диаметры всех шаров меньше  $\delta$ . В этом случае  $d$ -мера есть *нижняя грань*, т. е., грубо говоря, минимальное значение, получаемое при всех возможных покрытиях. Примеры см. в разд. 5.2. Строгое математическое изложение вопроса интересующиеся найдут в книге Фальконера [58].

Знакомыми являются случаи  $D = 1$  для линий,  $D = 2$  для плоскостей и искривленных гладких поверхностей и  $D = 3$  для шаров и других тел конечного объема. Как будет показано на многочисленных примерах, существуют множества, для которых размерность Хаусдорфа — Безиковича не является целой и называется фрактальной.

Определение (2.3) фрактальной размерности может быть использовано на практике. Обратимся снова к береговой линии, изображенной на рис. 2.1. Мы покрыли береговую линию множеством квадратов со стороной  $\delta$ , приняв за единицу длины протяженность обреза карты. Подсчитав число квадратов, необходимых для покрытия береговой

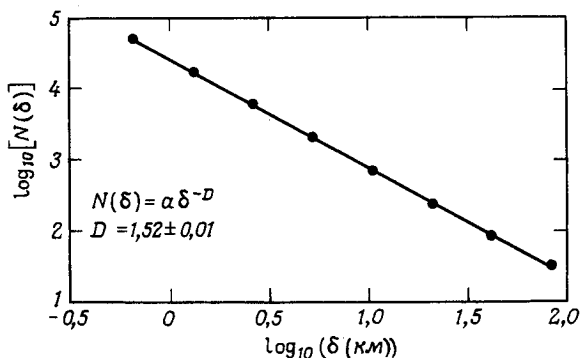


РИС. 2.7. Число ячеек размером  $\delta \times \delta$ , необходимых для покрытия береговой линии, изображенной на рис. 2.1 как функция шага  $\delta$  (км). Прямая в дважды логарифмических координатах соответствует зависимости  $N(\delta) = \alpha \delta^{-D}$  и построена по результатам измерений. Фрактальная размерность  $D \approx 1,52$ .

линии, мы получили число  $N(\delta)$ . Далее мы можем поступить так, как подсказывает нам формула (2.3), и вычислить  $M_d(\delta)$  или продолжить подсчет и найти  $N(\delta)$  при меньших значениях  $\delta$ . Так как из формулы (2.3) следует, что асимптотически, в пределе при малых  $\delta$ ,

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}, \quad (2.4)$$

мы можем определить фрактальную размерность береговой линии, измерив угловой коэффициент (наклон) графика  $\ln N(\delta)$  как функции от  $\ln \delta$ . Для береговой линии, изображенной на рис. 2.1, такой график построен на рис. 2.7. Как показывают вычисления,  $D \approx 1,5$ . Размерность  $D$ , определяемую по формуле (2.4) путем подсчета числа клеток, или ячеек, необходимых для покрытия множества в зависимости от размера клетки, принято называть *размерностью, определяемой по подсчету клеток, или клеточной размерностью*.

## 2.4. Тriaдная кривая Кох

На рис. 2.8 показано, как построить триадную кривую Кох. Триадная кривая Кох – один из стандартных примеров, приводимых в подтверждение того, что кривая может иметь фрактальную размерность  $D > 1$ .

Построение кривой Кох начинается с прямолинейного отрезка единичной длины  $L(1) = 1$ . Этот исходный отрезок называется *затравкой* и может быть заменен каким-нибудь многоугольником, например равно-сторонним треугольником, квадратом. Затравка – это 0-е поколение кривой Кох. Построение кривой Кох продолжается: каждое звено затравки мы заменяем *образующим элементом*, обозначенным на рис. 2.8 через  $n = 1$ . В результате такой замены мы получаем 1-е

$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$

$n = 3$

$n = 4$

$n = 5$

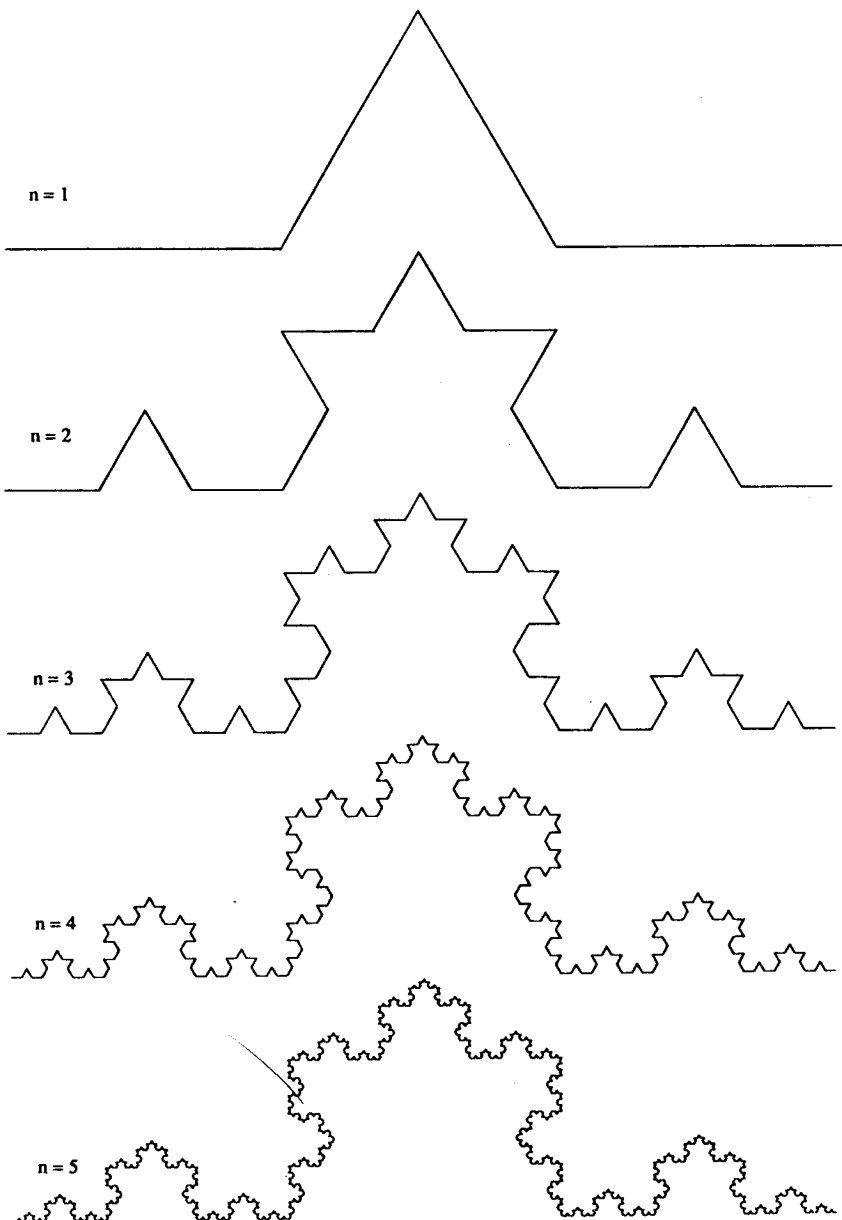


РИС. 2.8. Построение триадной кривой Кох.

поколение – кривую из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по  $1/3$ . Длина всей кривой 1-го поколения составляет величину  $L(1/3) = 4/3$ . Следующее поколение получается при замене каждого прямолинейного звена уменьшенным образующим элементом. В результате мы получаем кривую 2-го поколения, состоящую из  $N = 4^2 = 16$  звеньев, каждое длиной  $\delta = 3^{-2} = 1/9$ . Длина кривой 2-го поколения равна  $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$ . Заменяя все звенья предыдущего поколения кривой уменьшенным образующим элементом, получаем новое поколение кривой. Кривая  $n$ -го поколения при любом конечном  $n$  называется *предфракталом*.

В виде исключения проследим во всех подробностях за тем, как получается выражение для  $D$ . Длина предфрактала  $n$ -го поколения определяется формулой

$$L(\delta) = (4/3)^n.$$

Длина каждого звена составляет

$$\delta = 3^{-n}.$$

Замечая, что число поколений  $n$  представимо в виде

$$n = -\ln \delta / \ln 3,$$

запишем длину предфрактала в виде

$$L(\delta) = (4/3)^n = \exp\left(-\frac{\ln \delta [\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) имеет вид приближенной формулы (2.1), в которой

$$D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2628.$$

Число сегментов равно  $N(\delta) = 4^n = 4^{-\ln \delta / \ln 3}$  и может быть записано в виде

$$N(\delta) = \delta^{-D}. \quad (2.6)$$

Как будет показано дальше,  $D$  – фрактальная размерность триадной кривой Кох. Прежде всего заметим, что построение Коха позволяет в любом поколении получать нормальную кривую конечной длины. Мандельброт называет такие кривые *предфракталами*. Но при увеличении числа поколений величина  $\delta$  стремится к нулю и длина кривой расходится. Ясно, что множество точек, которое получает как предел бесконечно большого числа итераций процедуры Кох, не является кривой, для которой длина является удобной мерой. Но если мы выберем пробную функцию  $h(\delta) = \delta^d$ , то получим  $d$ -меру

$$M_d = \sum h(\delta) = N(\delta) h(\delta) = \delta^{-D} \delta^d.$$

Мы видим, что мера  $M_d$  остается конечной и равна единице только в том случае, если размерность  $d$ , входящая в пробную функцию  $h(\delta)$ , равна  $D$ . Мы заключаем, что *критическая размерность* и, следовательно, *размерность Хаусдорфа–Безиковича* для триадной кривой Кох равна  $D =$

$= \ln 4 / \ln 3$ . На каждой стадии построения предфракталы Кох могут быть растянуты в прямую *линию*, поэтому топологическая размерность триадной кривой Кох равна  $D_T = 1$ . Так как размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D$  для кривой Кох больше ее топологической размерности  $D_T$ , мы заключаем, что кривая Кох есть *фрактальное* множество с фрактальной размерностью  $D = \ln 4 / \ln 3$ .

## 2.5. Подобие и скейлинг

Прямая – особое множество точек в пространстве: при любом изменении масштаба мы получим то же самое множество точек. Кроме того, произведя над прямой параллельный перенос, мы снова получим то же самое множество точек. Прямая *инвариантна* относительно параллельного переноса и изменения масштаба, или скейлинга, – можно сказать, что прямая *самоподобна*.

Уточним наше утверждение. Зададим точки в пространстве их декартовыми координатами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Прямая, проходящая через точку  $\mathbf{x}_0$  в направлении  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , есть множество точек  $\mathcal{S}$ , определяемое соотношением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Параметр  $t$  здесь любое действительное число. Если изменить масштаб длины в *одно и то же* число раз  $r$  для всех компонент радиус-вектора  $\mathbf{x}$ , точки  $\mathbf{x}$  отобразятся в новые точки  $\mathbf{x}' = r\mathbf{x} = (rx_1, rx_2, rx_3)$ , и мы получим новое множество точек  $r(\mathcal{S})$ , определяемое соотношением

$$\mathbf{x}' = r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) = \mathbf{x}_0 + t'\mathbf{a} - (1-r)\mathbf{x}_0. \quad (2.7)$$

Здесь  $t' = rt$  снова любое действительное число. Если сдвинуть новое множество точек  $r(\mathcal{S})$ , подвергнув все его точки параллельному переносу на величину  $(1-r)\mathbf{x}_0$ , то в результате мы получим исходное множество точек  $\mathcal{S}$ : прямая инвариантна относительно изменения масштаба длины. Прямая инвариантна и относительно параллельного переноса  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot n$ , где  $n$  – любое действительное число.

Как показывают аналогичные соображения, плоскость инвариантна относительно параллельных переносов в любом направлении, лежащем в ней самой, и относительно изменения масштабов длины. Наконец, трехмерное пространство инвариантно относительно параллельных переносов в любом направлении и относительно изменения масштабов длины.

Другие множества точек не обладают столь прочными симметриями – инвариантностью относительно параллельных переносов и скейлинга. Окружность не инвариантна ни относительно параллельного переноса, ни относительно скейлинга, а инвариантна относительно поворотов вокруг собственного центра. Фракталы также не обладают свойствами некоторых или даже всех этих простых инвариантностей.

Полезно рассмотреть *ограниченные* множества, такие, как конечный отрезок прямой. Отрезок прямой не обладает трансляционной симмет-

рией – любой сдвиг его всегда порождает новое множество точек. Но если изменить длины в  $r$  раз, где  $r < 1$ , то получится новое множество точек  $\mathcal{S}' = r(\mathcal{S})$ , которое составит небольшую часть прямой. Этим отрезком прямой, подвергнув его параллельному переносу, можно покрыть часть исходного прямолинейного отрезка  $\mathcal{S}$ . При надлежащем выборе числа  $r$  мы можем однократно покрыть исходный отрезок  $N$  непересекающимися отрезками. Можно сказать, что множество  $\mathcal{S}$  самоподобно с коэффициентом подобия  $r$ . Для отрезка прямой единичной длины мы можем выбрать  $r(N) = 1/N$ , где  $N$  – любое целое число. Прямоугольный участок плоскости можно покрыть его уменьшенными копиями, если их длины изменить в  $r(N) = (1/N)^{1/2}$  раз. Аналогично прямоугольный параллелепипед можно покрыть его уменьшенными копиями, если выбрать  $r(N) = 1/N^{1/3}$ . В общем случае масштабный множитель следует выбирать равным

$$r(N) = (1/N)^{1/d}. \quad (2.8)$$

Размерность подобия  $d$  для прямых, плоскостей и кубов равна соответственно 1, 2 и 3.

Рассмотрим теперь кривую Кох на рис. 2.8. С масштабным множителем  $r = 1/3$  мы получаем первую треть всей кривой. Нам необходимо  $N = 4$  таких фрагментов, чтобы покрыть исходное множество его уменьшенными копиями, подвергая их повторным параллельным переносам и поворотам. Мы можем также выбрать масштабный множитель  $r = (1/3)^n$  и покрыть исходное множество его  $N = 4^n$  уменьшенными копиями. Как было показано, для триадной кривой Кох масштабный множитель определяется выражением

$$r(N) = (1/N)^{1/D} \quad (2.9)$$

с размерностью подобия  $d$ , равной размерности Хаусдорфа – Безиковича  $D = \ln 4 / \ln 3$ .

В общем случае размерность подобия  $D_S$  определяется выражением

$$D_S = -\ln N / \ln r(N). \quad (2.10)$$

Для самоподобных фракталов размерность Хаусдорфа – Безиковича  $D$  равна  $D_S$ , и для таких фракталов мы будем опускать индекс  $S$  у размерности подобия.

Размерность подобия легко поддается определению для различных фракталов, получающихся с помощью различных вариантов построения Кох. Рассмотрим предфрактал Кох, построенный с единичным квадратом в качестве затравки и с образующим элементом, состоящим из  $N = 8$  ломаных длиной  $r = 1/4$ , изображенных на рис. 2.9. Эта кривая имеет размерность подобия  $D = -\ln 8 / \ln 1/4 = 3/2$  и равна размерности Хаусдорфа – Безиковича множества, получающегося после бесконечно большого числа итераций. Заметим, однако, что, поскольку в качестве затравки мы используем единичный квадрат, фигура в целом не выдерживает преобразования подобия. Каждый фрагмент «береговой линии»

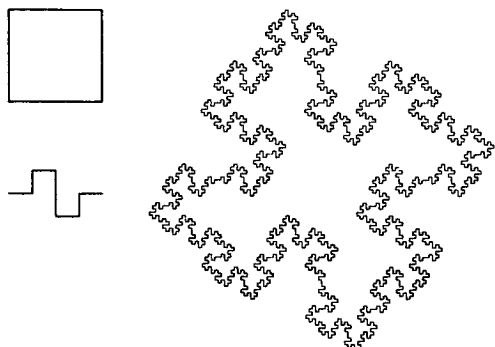


РИС. 2.9. Построение квадратной кривой Кох.

самоподобен, но, уменьшив всю кривую в  $r$  раз, мы получим уменьшенную копию оригинала, и вполне возможно, что оригинал *нельзя* будет покрыть такими уменьшенными множествами. Дело в том, что фрактальная скейлинговая инвариантность достигается только в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , и мы заключаем, что фрактальная природа кривых Кох есть, строго говоря, *локальное* свойство. Замечательная кривая Кох изображена на рис. 2.10. Эта кривая без самопересечений заполняет прямоугольный равнобедренный треугольник. Затравкой служит единичный интервал, а образующий элемент, показанный на рис. 2.10, состоит из  $N = 2$  звеньев длиной  $r = 0,99 \cdot 1/\sqrt{2}$ . Мы выбрали коэффициент 0,99 для того, чтобы нам легче было проследить за структурой кривой, так как при  $r = 1/\sqrt{2}$  каждое поколение выглядит просто как бумага «в клеточку».

Определяемое этим построением фрактальное множество имеет размерность  $D = -\ln 2/\ln (0,99/\sqrt{2}) = 1,944$ . Как видно из рис. 2.10, образующий элемент используется в двух вариантах: один сдвигает середину отрезка прямой влево, другой вправо. Кроме того, каждое новое поколение предфракталов начинается с чередующихся левых и правых образующих элементов. На рис. 2.10 каждое новое поколение показано в увеличенном виде. Это сделано для того, чтобы прямолинейные отрезки имели заданную длину и за структурой кривой можно было следить без ухудшения разрешающей способности.

Попытаемся теперь слегка изменить правила построения. Пусть при первом использовании образующего элемента середина образующего отрезка смещается влево. Каждое последующее поколение начинается с образующего элемента, смещенного вправо, а затем смещения середины вправо и влево чередуются. Несколько первых поколений и 11-е поколение показаны на рис. 2.11. Предельная фрактальная кривая называется драконом Хартера–Хейтуэя.

Если сохранить правила построения треугольного невода, но воспользоваться при этом образующим элементом, изображенным на рис. 2.12, то получится самопересекающаяся кривая, заполняющая плоскость. 10-е поколение показано на рис. 2.12. Образующий элемент

РИС. 2.10. Треугольный невод,  $D = 1,944$ . Для нескольких первых поколений ломаных предыдущее поколение показано штриховыми линиями. Каждое из поколений изображено в увеличенном виде, чтобы можно было проследить структуру кривой.

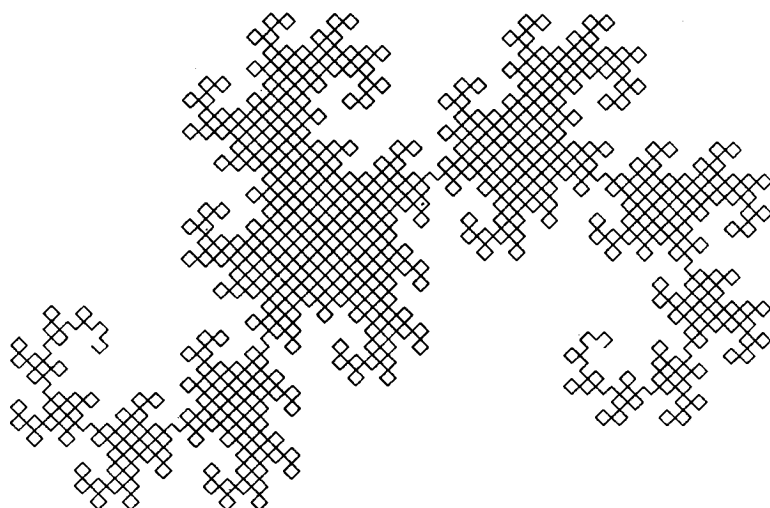
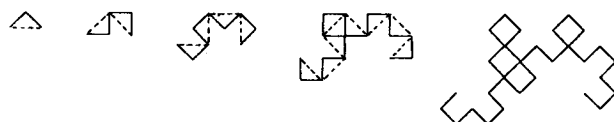
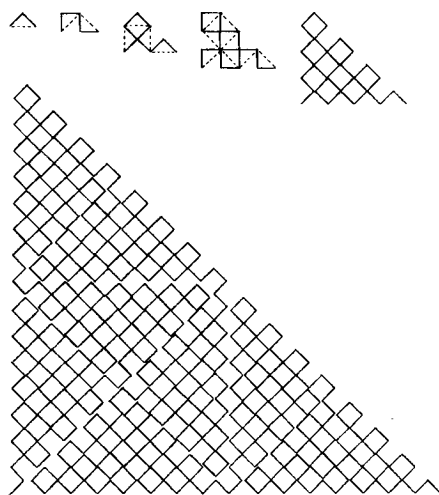


РИС. 2.11. Дракон Хартера–Хейтуэя,  $D = 2$ .

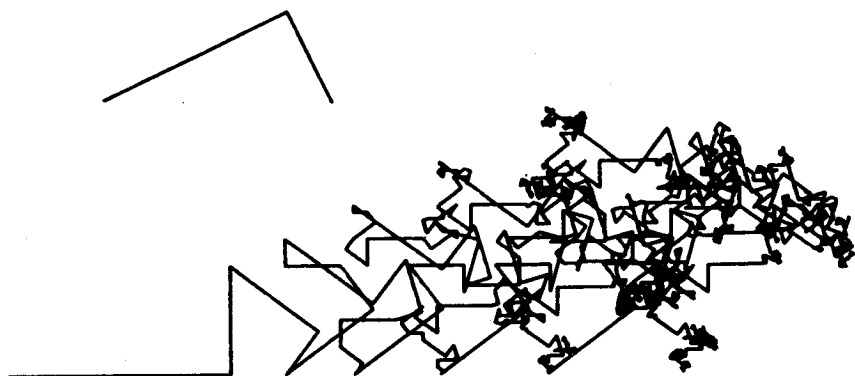


РИС. 2.12. Модифицированный треугольный невод,  $D = 2$ . Образующий элемент, изображенный в левом верхнем углу, покрывает единичный отрезок и преобразуется с двумя коэффициентами подобия  $r_1 = 2/\sqrt{5}$  и  $r_2 = 1/\sqrt{5}$ .

разбивает единичный отрезок на две части, расположенные под прямым углом друг к другу. Длинный катет изменяется с масштабным множителем  $r_1 = 2/\sqrt{5}$ , а короткий — с другим масштабным множителем,  $r_2 = 1/\sqrt{5}$ . В этом случае мы уже не можем при определении размерности подобия использовать формулу (2.10). Мандельброт определил размерность подобия  $D$  как размерность, для которой выполняется соотношение

$$\sum_i r_i^D = 1. \quad (2.11)$$

В рассматриваемом случае  $D = 2$ . Верно также, хотя и не доказано, утверждение о том, что эта размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича данного фрактального множества. Кроме того, при использовании соотношения (2.11) возникает вопрос о том, как быть с перекрывающимися частями кривой. Впрочем, стоит лишь перейти от простейших фракталов к чуть более сложным, как возникает множество далеко не простых вопросов.

## 2.6. Кривые Мандельброта–Гивена и Серпинского

Построение кривых Кох, изображенное на рис. 2.13, принадлежит Мандельброту и Гивену [140]. Образующий элемент для этой кривой делит прямолинейный отрезок на части длиной  $r = 1/3$  и соединяет их в петлю, состоящую из трех частей, к которой пристраиваются две ветви.

Мандельброт и Гивен использовали эту кривую и аналогичные кривые в качестве моделей перколяционных кластеров, которые мы рассмотрим в гл. 7. Кривая Мандельброта–Гивена интересна тем, что имеет петли всех возможных размеров и ветви (выступы) всех возмож-

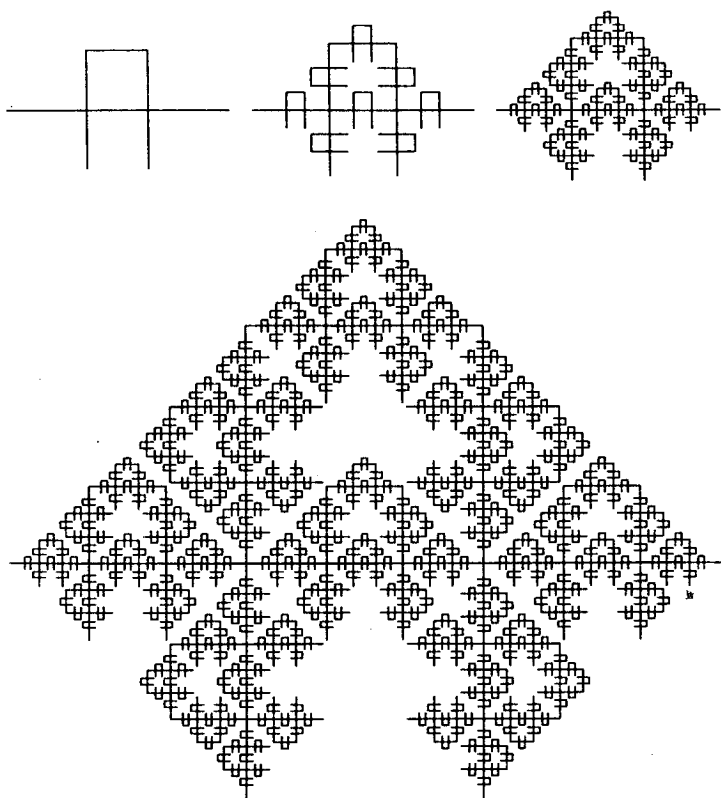


РИС. 2.13. Последовательные этапы построения кривой Мандельброта–Гивена. Высота образующего элемента несколько уменьшена, чтобы можно было проследить структуру кривой. Фрактальная размерность  $D_B = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$ . Мандельброт и Гивен [140] описывают также случайные варианты этой кривой.

ных размеров. И выступы, и петли декорированы петлями и выступами и т. д. При каждой итерации (переходе от одного поколения предфракталов к следующему) образующий элемент производит замену каждого прямолинейного звена в предфрактале на  $N = 8$  звеньев, уменьшенных с  $r = 1/3$ . Используя формулу (2.10) для размерности подобия, мы заключаем, что кривая Мандельброта–Гивена имеет фрактальную размерность  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$ .

Вообразим кривую Мандельброта–Гивена, изготовленную из какого-нибудь электропроводного материала, и пусть ток течет от левого конца кривой к правому. Ясно, что ни в одной ветви, возникающей из двух вертикальных отрезков образующего элемента, тока не будет. Ток будет течь только по остову – по кривой, которая получится, если от кривой Мандельброта–Гивена отсечь все ветви, соединенные с исход-

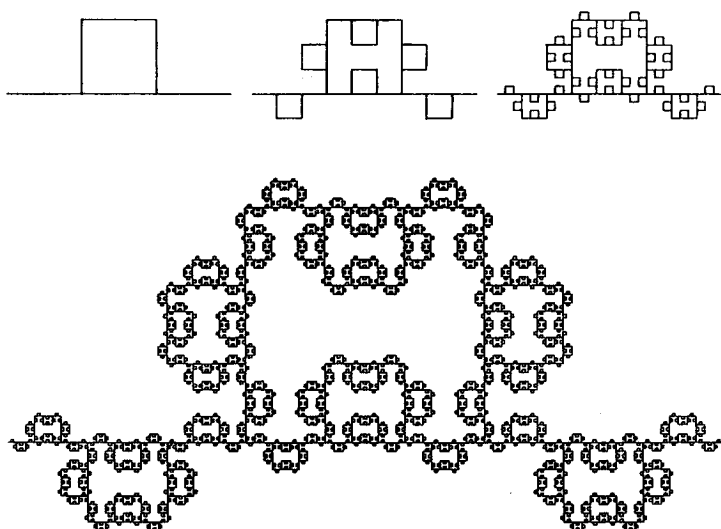


РИС. 2.14. Построение кривой Мандельброта–Гивена без ветвей. Эта кривая получена с помощью образующего элемента с одной петлей. Фрактальная размерность  $D_B = \ln 6 / \ln 3 = 1,63 \dots$

ным прямолинейным отрезком (затравкой) только одной связью. Отбросив все ветви, мы получим кривую, изображенную на рис. 2.14. (При построении этой кривой образующий элемент применялся в таких направлениях, чтобы углы получающейся ломаной не соприкасались между собой.) Фрактальная размерность такой кривой без свободных («висячих») концов равна  $D_B = \ln 6 / \ln 3 = 1,63 \dots$ , так как образующий элемент заменяет каждый прямолинейный отрезок  $N = 6$  отрезками, уменьшенными ( $r = 1/3$ ) копиями заменяемого отрезка. В скольких местах мы можем перерезать ординарную (односвязную) связь, чтобы концы затравки оказались разъединенными? Каждый раз, применяя образующий элемент, мы порождаем  $N = 2$  односвязных связей, поэтому эти связи образуют множество точек с фрактальной размерностью  $D_{sc} = \ln 2 / \ln 3 = 0,63 \dots$

Кривые Мандельброта–Гивена обладают многими интересными геометрическими свойствами, которые не находят отражения в фрактальной размерности кривой как целого. Действительно, такие подмножества, как остов, односвязные связи и другие, также являются фрактальными множествами со своими собственными фрактальными размерностями. Недавно удалось выяснить, что многие физические процессы естественным образом выбирают те подмножества структур, на которых они происходят, и поэтому при рассмотрении таких процессов необходимо использовать много фрактальных размерностей (более подробно об этом см. в гл. 6).

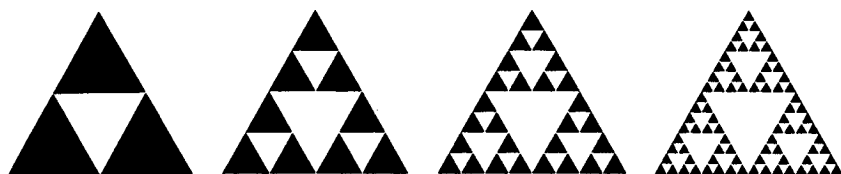


РИС. 2.15. Построение треугольной салфетки Серпинского. Затравка – треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из затравки центральный треугольник. *Справа*: четвертое поколение предфракталов; фрактальная кривая получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58 \dots$ .

Существует еще одно построение [133, 134], порождающее кривую с петлями всех размеров. Это салфетка Серпинского, изображенная на рис. 2.15. При каждом применении образующего элемента треугольник, рассматриваемый вместе с внутренними точками, заменяется  $N = 3$  треугольниками, уменьшенными с коэффициентом  $r = 1/2$ , поэтому из соотношения (2.10) следует, что размерность подобия в этом случае равна  $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58 \dots$ . С салфеткой Серпинского тесно связана другая кривая – так называемый ковер Серпинского. Он изображен на рис. 2.16. Бесконечно много поколений предфракталов порождают фрактальную кривую. «Толстые» (черные) участки предфракталов при переходе к предельной фрактальной кривой исчезают, а полный периметр дыр в ковре Серпинского становится бесконечным.

Кривые Серпинского использовались в качестве моделей многих физических явлений. Гефен и др. [70] опубликовали отчет о первом систематическом исследовании критических явлений, происходящих вблизи фазовых переходов в спиновых системах, носителем которых служат самоподобные фрактальные решетки. В интересном эксперименте Гордона и др. [73] была измерена температура  $T_c(H)$  перехода сверхпроводящей фазы в нормальную как функции от приложенного магнитного поля  $H$  на образце алюминиевой пленки, имевшей структуру предфрактала 10-го поколения салфетки Серпинского. Зависимость тем-

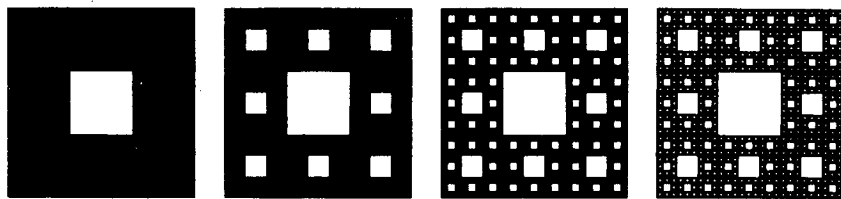


РИС. 2.16. Построение ковра Серпинского. Затравка — квадрат, а образующий элемент (*слева*) состоит из  $N = 8$  квадратов, полученных из затравки преобразованием подобия (сжатием) с коэффициентом подобия  $r = 1/3$ . *Справа*: четвертый этап построения; размерность подобия  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89 \dots$ .

пературы фазового перехода  $T_c(H)$  имеет вид самоподобной фрактальной кривой и находится в превосходном количественном согласии с теоретическими предсказаниями.

## 2.7. Еще о скейлинге

К обсуждению масштабной инвариантности, или скейлинга, часто бывает полезно подходить с другой точки зрения. Рассмотрим изображенную на рис. 2.8 кривую Кох как график некоторой функции  $f(t)$ . Этот график представляет собой геометрическое место точек  $(x_1, x_2)$  плоскости, заданное соотношением  $(x_1, x_2) = (t, f(t))$ . Если  $\lambda = r = (1/3)^n$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$  есть масштабный множитель, то триадная кривая Кох обладает тем свойством, что

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t)$$

с показателем  $\alpha = 1$ . Заметим, что в случае кривой Кох функция  $f(t)$  *неоднозначна*. Тем не менее скейлинговое соотношение выполняется для любой точки множества. Аналогичное построение применимо и к функциям, заданным на всех положительных действительных числах. Например, степенная функция  $f(t) = bt^\alpha$  удовлетворяет соотношению *однородности*

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \quad (2.12)$$

при *всех* положительных значениях масштабного множителя  $\lambda$ . Функции, удовлетворяющие соотношению (2.12), принято называть *однородными*. Однородные функции играют очень важную роль в описании термодинамики фазовых переходов. Многое из того, что удалось достичь в последние годы в понимании критических явлений вблизи фазовых переходов второго рода, укладывается в следующее утверждение: критическая часть свободной энергии  $\mathcal{F}$  таких систем удовлетворяет скейлинговому соотношению

$$\mathcal{F}_c(\lambda t) = \lambda^{2-\alpha} \mathcal{F}_c(t). \quad (2.13)$$

Здесь  $t = |T_c - T|/T_c$  есть относительная температура, измеряемая от температуры фазового перехода  $T_c$ , а  $\alpha$  в данном случае — критический показатель удельной теплоемкости. Выбирая  $\lambda$  так, чтобы выполнялось равенство  $\lambda t = 1$  (такой выбор масштабного множителя допустим, поскольку соотношение (2.13) выполняется при *любом* значении  $\lambda$ ), получаем критическую часть свободной энергии в виде  $\mathcal{F}_c(t) = t^{2-\alpha} \mathcal{F}_c(1)$ . Из термодинамического определения теплоемкости  $C = -T \partial^2 \mathcal{F} / \partial t^2$  следует, что при  $t \rightarrow 0$  удельная теплоемкость ведет себя как  $C \sim t^{-\alpha}$  (такое поведение согласуется с экспериментальными данными). Аналогичная скейлинговая зависимость описывает статистические свойства протекания, или *перколяции*, вблизи порога протекания (подробности см. в гл. 7). Современная *ренормгрупповая теория* критических явлений объясняет, почему свободная энергия имеет скейлинговую форму и позволяет вычислять критические показатели.

Разумеется, и степенная функция, и многие другие функции, удовлетворяющие скейлинговому соотношению, не являются фрактальными кривыми. Однако масштабно-инвариантные фракталы обладают изящной скейлинговой симметрией, и большинство рассматриваемых Мандельбротом фракталов в том или ином смысле масштабно-инвариантны. Мандельброт отмечает, что масштабно-инвариантные фракталы могут использоваться в качестве приближения при описании природы – аналогично тому, как ранее мы использовали при описании природных тел прямые, плоскости и другие гладкие кривые и поверхности. Поразительно, сколь многого удастся достичь, используя только масштабно-инвариантные фракталы, поэтому тщательное исследование их свойств – задача весьма благодарная.

## 2.8. Функция Вейерштрасса – Мандельброта

В качестве примера масштабно-инвариантной фрактальной кривой рассмотрим фрактальную функцию Вейерштрасса – Мандельброта  $W(t)$ , определяемую соотношением [134]

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{(2-D)n}}. \quad (2.14)$$

Следует заметить, что  $W(t)$  зависит от  $b$  тривиальным образом, так как только параметр  $b$  определяет, какая часть кривой видна, когда аргумент  $t$  изменяется в заданном интервале. Параметр  $D$  должен принимать значения в диапазоне  $1 < D < 2$ ,  $\varphi_n$  – произвольная фаза (каждый выбор фазы  $\varphi_n$  соответствует другой функции  $W(t)$ ). Функция Мандельброта – Вейерштрасса непрерывна, но не дифференцируема ни в одной точке! Простая разновидность этой функции получается, если положить  $\varphi_n = 0$ . Косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса – Мандельброта называется действительная часть функции  $W(t)$ :

$$C(t) = \operatorname{Re} W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (2.15)$$

Этой функции была посвящена работа Берри и Льюиса [22]. Принято считать, что эта функция *фрактальна* с размерностью  $D$ . Известно, что она действительно имеет размерность  $D$ , если под этим термином понимать клеточную размерность, но, по-видимому, не размерность Хаусдорфа – Безиковича. Недавно Молдин [152] доказал, что фрактальная размерность  $D(W_b)$  функции Вейерштрасса – Мандельброта заключена в пределах

$$D - (B/b) \leq D(W_b) \leq D.$$

Входящая в это неравенство постоянная  $B$  достаточно велика для того, чтобы оно выполнялось и при больших  $b$ . Мы вычислили значения

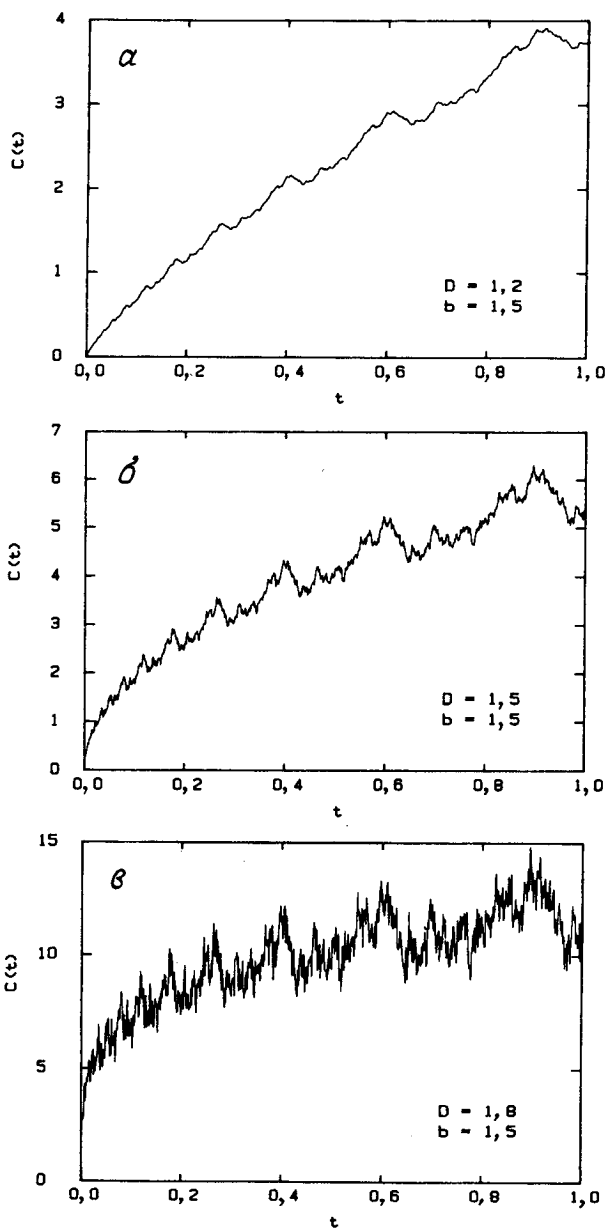


РИС. 2.17. Фрактальная функция Вейерштрасса–Мандельброта  $C(t)$  с  $b = 1,5$ :  
а)  $D = 1,2$ ; б)  $D = 1,5$ ; в)  $D = 1,8$ .

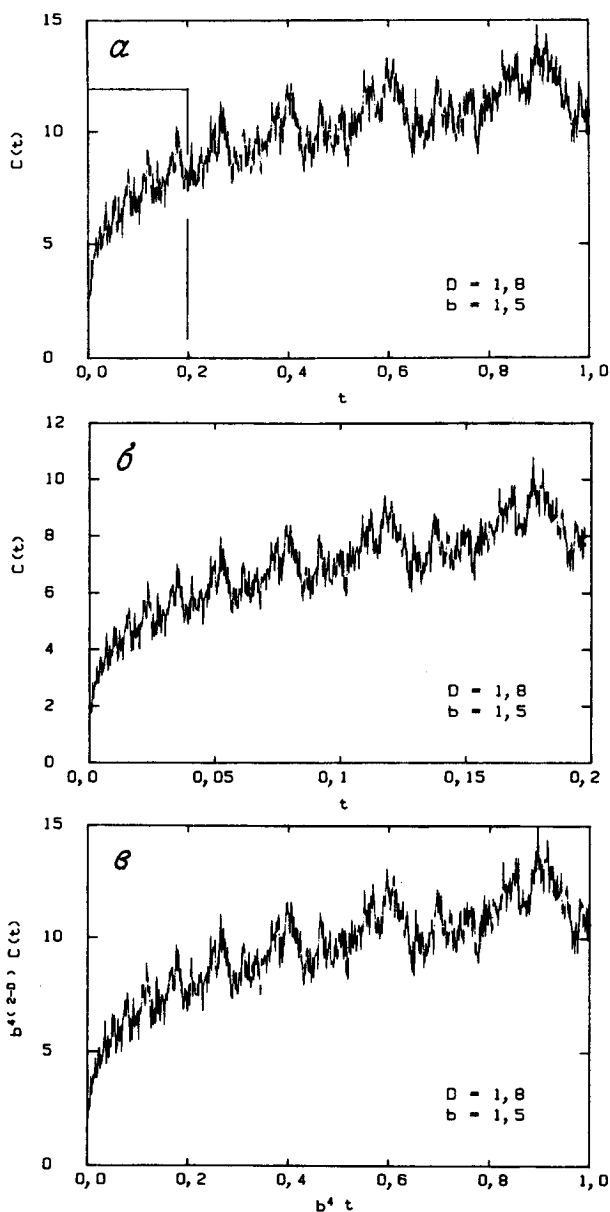


РИС. 2.18. Косинусоида Вейерштрасса--Мандельброта с  $D = 1,8$  и  $b = 1,5$ : а)  $0 \leq t \leq 1$ ; б)  $0 \leq t \leq b^{-4}$ ; в) кривая из примера б, преобразованная к отрезку  $[0, 1]$ .

функции Вейерштрасса – Мандельброта при нескольких значениях параметров в интервале «времени»  $0 \leq t \leq 1$  (рис. 2.17). При малых значениях  $D$  функция по существу гладкая, но когда  $D$  возрастает до 2, начинает сильно флуктуировать и напоминает шум в электронных цепях. Этот шум накладывается на общий тренд к возрастанию. Функция  $C(t)$  – однородная и удовлетворяет соотношение однородности

$$C(bt) = b^{2-D} C(t). \quad (2.16)$$

Следовательно, если мы знаем функцию  $C(t)$  на некотором интервале значений  $t$ , то тем самым она известна при любых  $t$ . В качестве примера сравним функцию  $C(t)$  при  $b = 1,5$  и  $D = 1,8$  (рис. 2.18, а) с той же функцией, вычисленной в интервале  $0 \leq t \leq b^{-4}$  (рис. 2.18, б). Нетрудно видеть, что графики на обоих рисунках подобны. Действительно, из соотношения (2.16) следует, что если в кривой, изображенной на рис. 2.18, б, заменить  $t$  на  $b^4 t$  и  $C(t)$  на  $b^{4(2-D)} C(t)$ , как это сделано на рис. 2.18, в, то в результате получится исходная функция, изображенная на рис. 2.18, а. В этом и проявляются скейлинговые свойства функции  $C(t)$ .

Следует подчеркнуть, что кривая  $C(t)$  не самоподобна, а самоаффинна, так как и в направлении оси  $t$ , и в направлении оси  $C(t)$  мы использовали различные масштабные множители  $r$ . Более подробное обсуждение см. в гл. 10.

Функцию Вейерштрасса – Мандельброта можно использовать для получения случайных фрактальных кривых, выбирая случайным образом фазу  $\varphi_n$  из интервала  $(0, 2\pi)$ . Такие функции рассматривали Берри и Льюис [22]. Одна из последних работ по функции Вейерштрасса – Мандельброта выполнена Фоссом [213].

## Фрактальная размерность кластеров

Определение размерности Хаусдорфа – Безиковича  $D$  (соотношение (2.3)) и тем самым фрактальной размерности множества точек требует, чтобы диаметр  $\delta$  покрывающих множеств стремился к нулю. Что же касается физических систем, то они, вообще говоря, обладают характерным минимальным линейным размером, таким, как радиус  $R_0$  атома или молекулы. Применительно к идеям, изложенным в предыдущей главе, это означает, что математическую линию необходимо заменить линейной цепочкой «молекул», или *мономеров*. Как показано на рис. 3.1, двумерное множество точек мы заменяем плоским набором мономеров, а объем – некоторой упаковкой сфер. Число мономеров в цепи длиной  $L = 2R$  равно

$$N = (R/R_0)^1.$$

Для набора мономеров, образующих круглый диск, получаем

$$N = \rho(R/R_0)^2.$$

Плотность числа мономеров  $\rho$  для плотно упакованных сфер составляет  $\pi/2\sqrt{3}$ . Выписанные нами соотношения применимы только в пределе при  $R/R_0 \gg 1$ , поскольку и периметр круглого диска, и сферическую

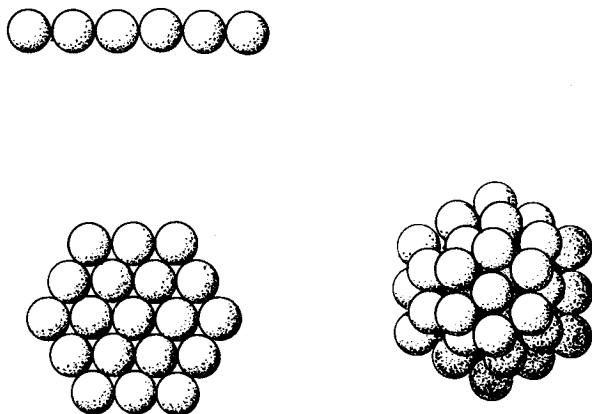


РИС. 3.1. Простые упаковки сфер.

поверхность шара можно покрыть мономерами только приближенно. Для трех перечисленных только что случаев мы можем указать асимптотическую форму для соотношения между числом частиц и размером «кластера», который оценивается по радиусу  $R$  наименьшей сферы, содержащей кластер внутри себя; она имеет вид

$$N = \rho(R/R_0)^D, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

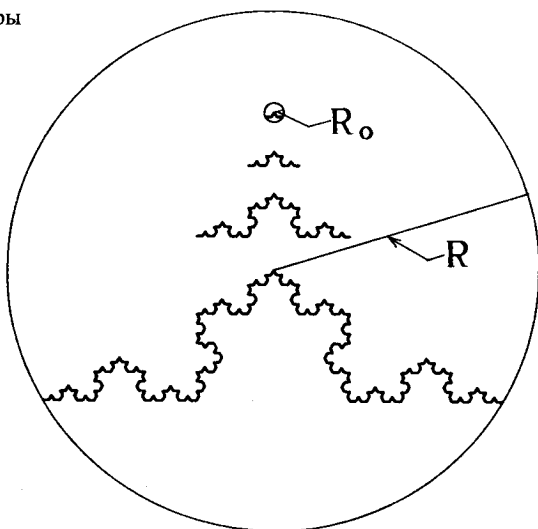
Величина  $D$  в этом соотношении «число частиц–радиус» называется *размерностью кластера*. Так как масса всех мономеров одинакова, число частиц  $N$  часто интерпретируют как массу,  $\rho$ –как плотность массы, а размерность кластера называют *размерностью массы*.

Плотность  $\rho$  зависит от того, как упакованы мономеры. Например, если сферы упакованы в объеме случайным образом, то плотность понижается с  $\rho = \pi/3\sqrt{2} = 0,7405$  до 0,637. Для других разновидностей кластеров выражение для плотности  $\rho$  содержит множители, учитывающие *форму* кластера. Например, для эллипсоида вращения с отношением полуосей  $b/a$  величина  $\rho$  для плотной упаковки сфер определяется выражением  $\rho = (b/a)\pi/3\sqrt{2}$ . В то же время размерность кластера  $D$  не зависит от формы кластера или от того, является ли упаковка мономеров упаковкой плотной, случайной или скважистой с равномерным распределением дыр.

Важно сознавать, что размерность  $D$ , определяемая соотношением (3.1), может быть нецелой, т.е. *фрактальной*. Чтобы пояснить это обстоятельство, обратимся снова к триадной кривой Кох. Построение триадной кривой Кох на рис. 2.8 состоит из повторного применения *образующего элемента*, который разбивает прямолинейные отрезки на более мелкие отрезки. Альтернативная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать каждый предфрактал как некую конструкцию из мономеров: один мономер соответствует одному образующему элементу. На рис. 3.2 показан такой подход к построению фракталов. Радиус мономера, т.е. образующего элемента, равен  $R_0 = 1/\sqrt{3}$ , если образующий элемент, как обычно, покрывает единичный отрезок. Сам образующий элемент представляет собой наименьший кластер, или исходное поколение в процессе роста кластера. Первое поколение содержит  $N = 4$  мономеров и имеет радиус  $R = 3R_0$ . В следующем поколении число мономеров возрастает до  $N = 4^2 = 16$ , а радиус кластера–до  $R = 3^2 R_0 = 9R_0$ . В  $n$ -м поколении получаем  $N = 4^n$  и  $R = 3^n R_0$ . Мы видим, что триадные «кластеры» Кох удовлетворяют соотношению *число частиц–радиус* (3.1) вида  $N = (R/R_0)^D$  с размерностью кластера, равной фрактальной размерности  $D = \ln 4/\ln 3$  триадной кривой Кох. В общем случае мы называем показатель  $D$  в соотношении *число частиц–радиус фрактальной размерностью кластера*.

Фрактальная размерность кластера служит количественной характеристикой того, как кластер заполняет занимаемое им пространство. Рассмотрим кластер на рис. 3.3, полученный с помощью процесса *ограниченной диффузией агрегации* (ОДА). В этом процессе мономеры

РИС. 3.2. Триадные кластеры Кох.



поступают из удаленного источника и диффундируют, совершая случайные блуждания. Достигнув кластера, блуждающие мономеры прилипают к нему. Процесс агрегации такого типа порождает кластеры с фрактальной размерностью  $D(2) = 1,71$  в случае диффузии на плоскости, т. е. для размерности пространства  $E = 2$ . Обширные численные эксперименты были проведены<sup>1)</sup> в пространстве с  $E = 3$  и позволили получить кластеры с фрактальной размерностью  $D = 2,50$ . Относительно фрактального поведения в пространствах с размерностью  $E$  от 2 до 6 см. работу Микина [153]. Последние результаты в области ограниченной диффузией агрегации см. в книге Жюльена и Боте [104] и в обзоре Микина [155, 156].

Следует особо подчеркнуть, что если кластер пористый или случайный, то это само по себе еще не означает, что он фрактальный. Фрактальный кластер отличается тем свойством, что с ростом размеров его плотность убывает по закону, описываемому *показателем в соотношении число частиц – радиус*. Если предпочтительнее ввести плотность числа частиц, то оказывается, что плотность на радиусе  $r$  для кластеров, аналогичных изображенному на рис. 3.3, определяется выражением

$$\rho(r) \sim R_0^{-D} r^{D-E}$$

и что эта плотность постоянна, только когда фрактальная размерность  $D$  равна евклидовой размерности  $E$  пространства, в котором находится кластер. Фрактальные кластеры имеют плотность, убывающую с увеличением расстояния от начала.

<sup>1)</sup> Назовем работы Микина [153, 156], Херрмана [89], книги под редакцией Эмили и Ландау [59], Стэнли и Островского [203].

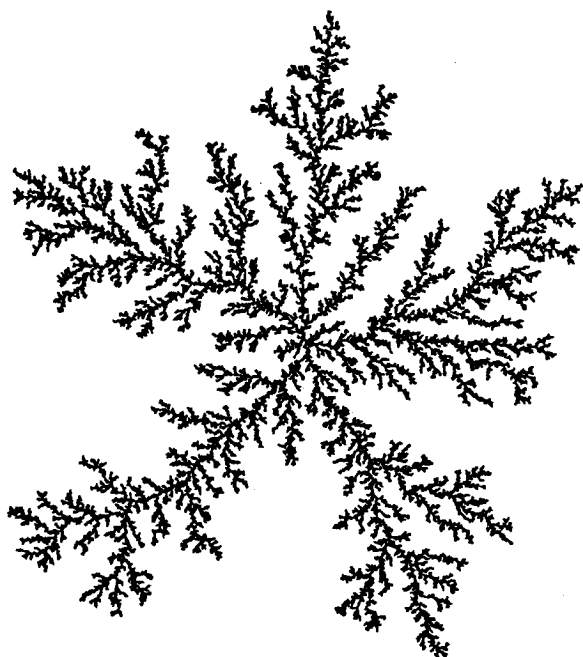


РИС. 3.3. Кластер, возникающий в результате двумерной ограниченной диффузией агрегации с  $D = 1,71$ . Кластер, содержащий 50 000 частиц, получен с помощью внерешеточного моделирования. Частица, совершающая случайные блуждания, движется из выбранной наугад точки на большой окружности, проведенной вокруг кластера. Кластер растет из зародыша в центре. Соприкасаясь с кластером, блуждающая частица прилипает к нему, после чего из новой наугад выбранной точки на окружности начинает двигаться следующая частица, совершая случайные блуждания. Порождающая кластер компьютерная программа составлена Полом Микином.

Фрактальная размерность кластера служит количественной характеристикой одной из особенностей кластера, а именно заполнения им пространства. Заметим, что фрактальная размерность кластера *не описывает его форму*. Существуют и другие характерные особенности кластера, которые также допускают количественное описание. Например, *разветвленность* кластера есть мера числа связей, которые нужно перерезать, чтобы изолировать произвольно большую часть кластера.

Удивительной красоты структуры, порождаемые процессом ОДА, наблюдались во многих системах различного типа, в которых динамика роста описывается уравнением Лапласа. В следующей главе мы опишем несколько подробнее фрактальные структуры, возникающие при образовании вязких пальцев в ячейках Хеле-Шоу и в пористых средах. Здесь же мы обсудим несколько аналогичных экспериментально наблюдавшихся структур. Например, Нимейер и др. [163] наблюдали структуры типа ОДА при пробое диэлектриков и обнаружили фрактальную размерность

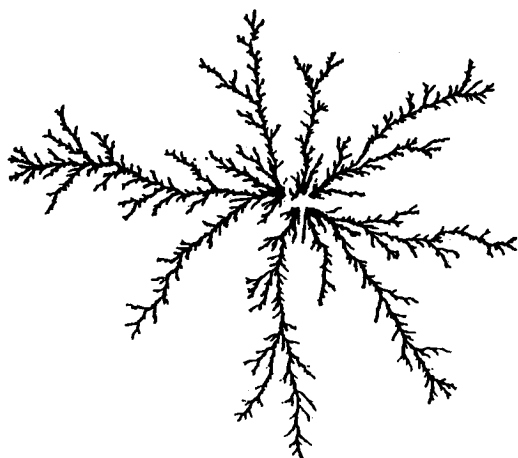


РИС. 3.4. Дендрит металла, выращенный электроосаждением цинка на поверхности раздела водного раствора сульфата цинка и *n*-бутилацетата. Фрактальная размерность  $D \approx 1,63$  [150].

$D \sim 1,7$ . Эти же исследователи создали модель пробоя диэлектрика для численного воспроизведения процесса. Предложенная ими модель полезна во многих отношениях и связана с моделью ОДА.

Мацусита и др. [150] наблюдали структуру типа ОДА, изображенную на рис. 3.4. Листок металлического цинка растет в двух измерениях и имеет фрактальную размерность кластера с  $D \approx 1,63$ . Брэди и Болл [28] обнаружили, что электроосажденная медь при условиях, когда рост ограничен диффузией, образует трехмерные фракталы с фрактальной размерностью  $D = 2,43 \pm 0,03$ , согласующейся с значением 2,5 для трехмерных кластеров типа ОДА.

### 3.1. Измерения фрактальных размерностей кластеров

В последнее время были опубликованы результаты измерений фрактальных размерностей кластеров, определяемых выражением (3.1), для различных систем и показано, что описание экспериментальных данных с помощью фракталов полезно и позволяет рационально представлять их.

*Агрегация протеинов.* Агрегация протеинов иммуноглобулина типа IgG проводилась нами с помощью квазиупругого рассеяния света [60, 61, 103]. Иммуноглобулин в растворе при нагревании имеет тенденцию к агрегированию. Кинетика агрегации описывается уравнением Смолуховского [211]:

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{i+j=k} n_i A_{ij} n_j - 2 \sum_j n_k A_{kj} n_j. \quad (3.2)$$

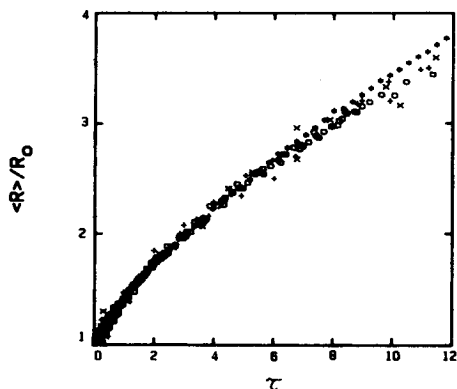


РИС. 3.5. Эффективный гидродинамический радиус агрегатов IgG как функция приведенного времени  $\tau = \gamma t$  при различных температурах и концентрациях. Фрактальная размерность кластера  $D = 2,56 \pm 0,3$  [61].

Здесь  $n_k(t)$  – концентрация кластеров, содержащих  $k$  молекул, как функция от времени. Вероятность того, что кластер, состоящий из  $i$  молекул, образует с кластером, состоящим из  $j$  молекул, новый кластер, состоящий из  $k = i + j$  молекул, пропорциональна  $A_{ij}$ . Из уравнения (3.2), как было показано нами, следует, что эффективный гидродинамический радиус кластера  $\langle R \rangle$  по наблюдениям квазиупругого рассеяния света возрастает как функция времени и определяется выражением

$$\langle R \rangle = R_0 (1 + \gamma t)^{1/D},$$

если кластеры удовлетворяют соотношению число частиц – радиус (3.1), записанному в виде

$$i = (\langle R \rangle / R_0)^{1/D}. \quad (3.3)$$

Здесь  $R_0$  – радиус мономера, а  $\gamma$  – зависящая от температуры кинетическая постоянная. Из результатов, представленных на рис. 3.5, мы заключаем, что фрактальная размерность кластеров для агрегатов IgG равна  $D = 2,56 \pm 0,3$ .

Результаты, получаемые при различных температурах и концентрациях, ложатся на одну кривую, если выполняется соотношение (3.3), т. е. если кластеры фрактальны. В этом нетрудно убедиться, взглянув на рис. 3.5.

*Кластеры коллоидного золота.* Вейтц и Хуанг [215], Вейтц и Оливерия [216] и Вейтц и др. [217] исследовали агрегаты коллоидного золота с помощью электронной микроскопии и рассеяния света. На рис. 3.6 воспроизведены некоторые из полученных этими группами электронных микрофотографий кластеров коллоидного золота. По оценкам экспериментаторов такие кластеры представляют собой фракталы с фрактальной размерностью  $D \sim 1,75$ . На рис. 3.6 ясно видно, что в кластерах имеются дыры всех размеров, совместимых с размером кластера. Кроме того, кластеры различных размеров по виду подобны. Анализ электронных микрофотографий привел к фрактальности размерности  $D = 1,7 \pm$

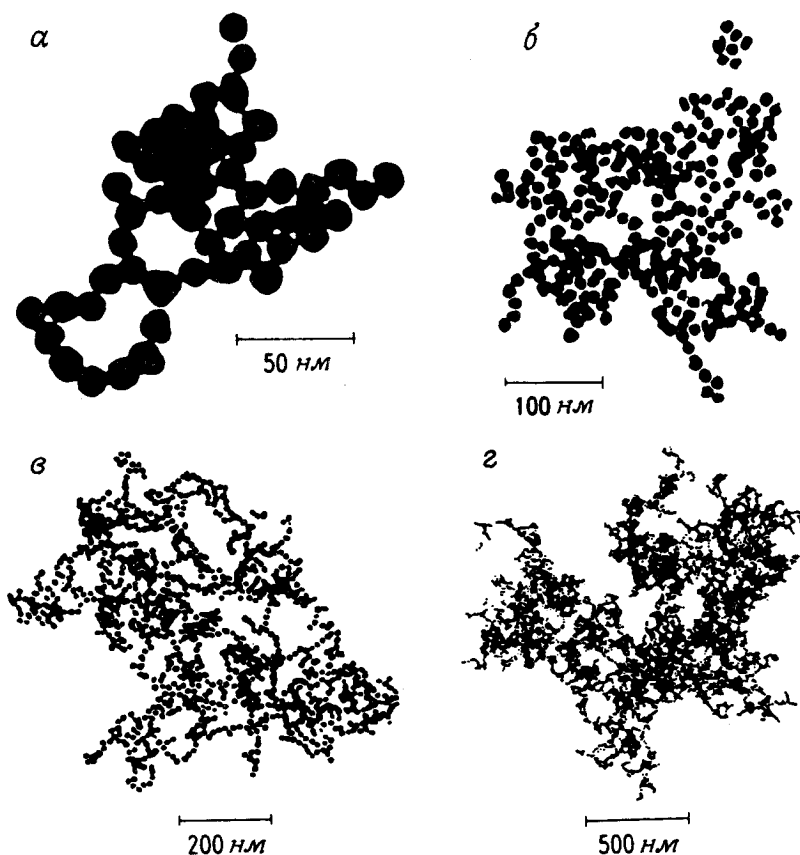


РИС. 3.6. Фотографии кластеров золота, полученные с помощью просвечивающего электронного микроскопа [215].

+ 0,1 (рис. 3.7). Видимые на микрофотографиях проекции кластеров не компактны. Это согласуется с тем, что наблюдаемая фрактальная размерность меньше 2.

Для исследования агрегатов коллоидного золота Вейтц и др. [217] использовали и рассеяние света, и малоугловое рассеяние нейтронов. В обоих случаях интенсивность рассеянного излучения как функция угла рассеяния определяется выражением (см. также [110])

$$S(q) \sim q^{-D}, \quad q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3.4)$$

где  $q$  — длина вектора рассеяния,  $\theta$  — угол рассеяния и  $\lambda$  — длина волны выбранного излучения. Величина  $D$  по-прежнему фрактальная размер-

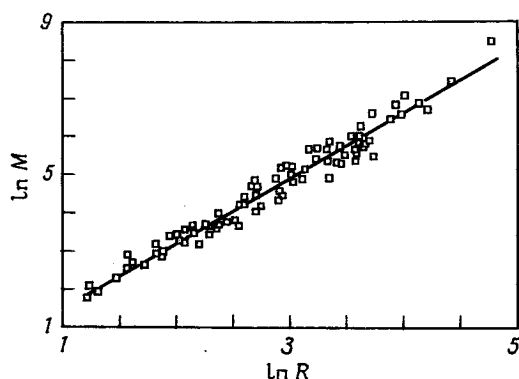


РИС. 3.7. Вариация массы как функция размеров коллоидных агрегатов золота. За единицу массы принята масса отдельной частицы, за единицу линейных размеров — диаметр отдельной частицы. Прямая соответствует фрактальной размерности  $D = 1,7 \pm 0,1$  [215].

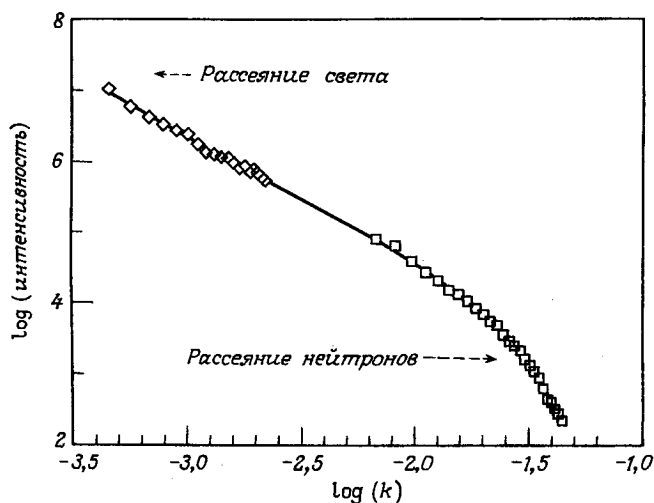


РИС. 3.8 Рассеяние света и малоугловое рассеяние нейтронов на коллоидных кластерах золота, образованных в результате ОДА, как функция рассеянного волнового вектора  $k = (4\pi/\lambda) \sin \theta$  (в единицах  $\text{\AA}^{-1}$ ). Кривая, проведенная по экспериментальным точкам, соответствует  $D \approx 1,79$  [217].

ность кластера, задаваемая соотношением (3.1), но  $R$  и  $R_0$  теперь радиусы гирации. Анализируя данные рассеяния, Вейтц и др. заключили, что фрактальная размерность агрегатов составляет величину  $D \approx 1,79$ . Это согласуется с данными, полученными при анализе электронных микрофотографий (рис. 3.8).

**Кластеры коллоидного кварца.** Шефер и др. [195] исследовали коллоидные агрегаты небольших частиц кремнезема (кварца) с помощью рентгеновского излучения и рассеяния света. Агрегаты из частиц кварца радиусом  $R_0 \sim 27 \text{\AA}$  образовались в растворе при изменении pH или

концентрации соли. Комбинируя два различных метода – рассеяние видимого света и рентгеновского излучения, исследователи сумели охватить необычайно широкий диапазон размеров кластеров (рис. 3.9).

Полученные ими данные охватывают диапазон от  $R_0$  до  $R \sim 10^4 \text{ \AA}$ , а измеренное ими значение фрактальной размерности  $D = 2,12 \pm 0,05$  отличается высокой точностью. Изменение наклона кривой на рис. 3.9 обусловлено тем, что отдельные частицы не являются фрактальными кластерами, и, когда вектор рассеяния достигает обратного радиуса частицы  $a^{-1}$ , к характеристике поведения нефрактальных частиц применяется интенсивность излучения.

Используя малоугловое рассеяние нейтронов, Синха и др. [198] исследовали порошки из мелких частиц кварца, спрессованные до различных плотностей от 0,009 до 0,45 г/см<sup>3</sup>. Выяснилось, что для этой системы интенсивность рассеянного излучения нейтронов также определяется соотношением (3.4), а фрактальная размерность порошков достигает величины  $D = 2,52 \pm 0,05$ .

Кьемс и Фрелтофт [110] использовали малоугловое рассеяние нейтронов для исследования фрактальной структуры коллоидного кварца и в растворе, и в виде сухих порошков. Исследователи обнаружили, что в растворе коллоидный кремнезем образует кластеры с фрактальной размерностью  $D = 2,4 \pm 0,1$ , в то время как сухие порошки при двух плотностях (получаемых при прессовании порошков) дают  $D = 2,55 \pm 0,07$ .

Кварцевые аэрогели – твердые тела, которые могут быть приготовлены в виде необычайно легкого и разреженного материала с плотностью менее 1/20 плотности кварца. Куртенс и Вашер [41] исследовали аэрогели с помощью упругого когерентного малоуглового рассеяния нейтронов и пришли к выводу, что аэрогели представляют собой фракталы с  $D = 2,40 \pm 0,03$ . Эти же авторы занимались изучением и динамикой аэрогелевых материалов.

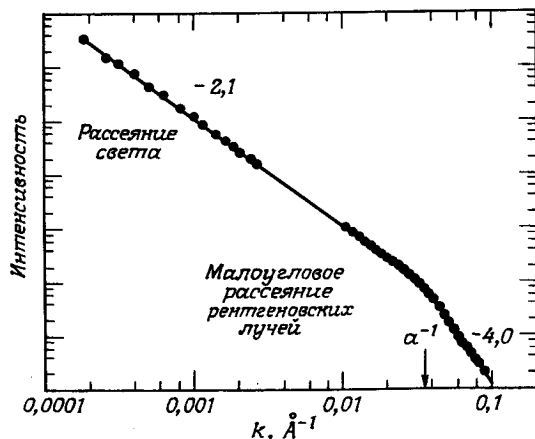


РИС. 3.9. Интенсивность малоуглового рассеяния рентгеновского излучения и рассеяния света на агрегатах силикагеля:  $D = 2,12 \pm 0,05$  [195].

## Образование вязких пальцев в пористых средах

Проблема образования так называемых вязких пальцев в пористых средах имеет первостепенное значение для добычи нефти. Она представляет интерес и для гидродинамики, и для физики пористых сред. Недавно было показано, что вязкие пальцы в пористых средах имеют фрактальную природу [36, 122, 123]. Мы начинаем с введения в проблему образования вязких пальцев в двумерной геометрии (ячейке Хеле-Шоу) и приводим некоторые из соответствующих экспериментальных результатов. Затем мы излагаем экспериментальные результаты относительно образования вязких пальцев в *пористых* средах и, в частности, обсуждаем самые последние данные о том, что вязкие пальцы имеют *фрактальную* природу.

Связь между процессом ОДА (с результатами, аналогичными представленным на рис. 3.3) и известной неустойчивостью фронта вытеснения в пористых средах, где сильно вязкая жидкость (нефть) вытесняется слабо вязкой жидкостью (водой), на первый взгляд может показаться удивительной. На аналогию, существующую между этими двумя явлениями, недавно обратил внимание Патерсон [170]. Она основана на том, что в приближении сплошной среды обе задачи описываются уравнением *Лапласа*.

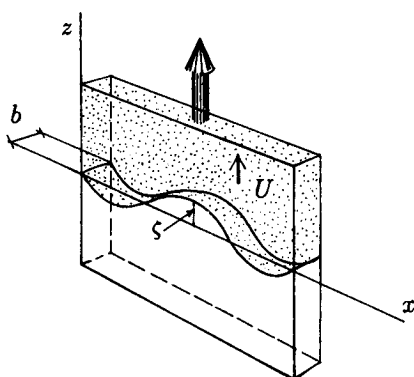
### 4.1. Течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу

Ячейка Хеле-Шоу состоит из двух прозрачных пластин, разделенных зазором толщиной  $b$ . Хеле-Шоу [85] исследовал в такой ячейке обтекание водой различных предметов. Вводя краситель, он получил разноцветные линии тока и тем самым визуализовал всю картину обтекания. Эти эксперименты служат прямым подтверждением того, что при малых  $b$  течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу является *потенциальным течением*, характерным для малых чисел Рейнольдса. При увеличении зазора между пластинами при умеренных скоростях возникает турбулентное течение с хаотически перепутанными линиями тока.

Уравнение для скорости течения  $U$ , выведенное из уравнений Навье–Стокса, которые описывают течение в изображенной на рис. 4.1 ячейке Хеле-Шоу, имеет вид

$$U = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gz) = -M \nabla \Phi, \quad (4.1)$$

РИС. 4.1. Геометрия канала Хеле-Шоу.



где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность и  $g$  – составляющая ускорения свободного падения вдоль оси  $z$  ячейки. Подвижность определяется величиной  $M = k/\mu$ , а потенциал течения – величиной  $\phi = (p + \rho gz)$ . Для ячейки, расположенной горизонтально,  $g = 0$ . Вязкость жидкости равна  $\mu$ , а проницаемость ячейки Хеле-Шоу – величине

$$k = \frac{b^2}{12}. \quad (4.2)$$

Заметим, что скорость в уравнении (4.1) есть *средняя* скорость по толщине ячейки (ширине зазора). Для несжимаемых жидкостей из уравнения неразрывности получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\nabla^2(p + \rho gz) = \nabla^2\phi = 0. \quad (4.3)$$

Это уравнение Лапласа. Именно такому уравнению удовлетворяет потенциал в задачах электростатики, диффузии и во многих других областях, поэтому мы можем назвать течения, описываемые уравнением (4.3), потенциальными течениями. Чтобы найти решение – скорость течения, мы должны помимо уравнения Лапласа удовлетворить граничным условиям, например заданному давлению на обоих концах ячейки и нулевой скорости жидкости всюду, где жидкость соприкасается со стенками.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 4.1, где одна жидкость (обозначим ее индексом 1) вытесняет другую жидкость (обозначим ее индексом 2). Поверхность раздела между двумя жидкостями, когда они покоятся, определяется действием капиллярных сил, и между двумя жидкостями существует разность давлений

$$(p_1 - p_2) = \sigma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right). \quad (4.4)$$

Здесь  $\sigma$  – поверхностное натяжение на границе раздела между двумя жидкостями. Два главных радиуса кривизны  $R_x$  и  $R_y$  описывают границу раздела жидкостей локально, как показано на рис. 4.2. Усло-

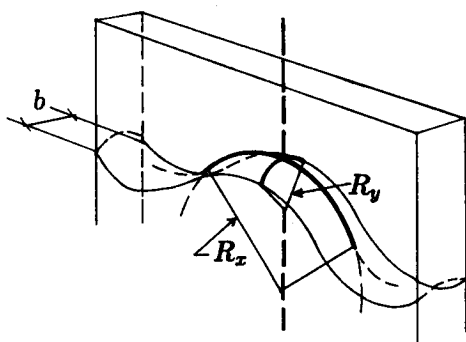


РИС. 4.2. Геометрия поверхности раздела жидкость – жидкость.

вима считать радиусы кривизны положительными, если их центр находится в жидкости 1. Радиус кривизны  $R_y$  определяется углом смачивания  $\theta$ , описывающим, как именно граница раздела двух жидкостей соприкасается с пластинами, которые задают геометрию ячейки. Обычно  $R_y \sim b/2$ , и, кроме того, мы будем предполагать, что  $R_x \gg R_y$ . Если жидкости покоятся и жидкость 2 смачивающая, то  $p_1 > p_2$ .

Будем теперь инжектировать жидкость 1 с постоянной скоростью  $U$  в точке  $z = -\infty$  и отводить жидкость 2 с такой же постоянной скоростью в точке  $z = \infty$ . Граница раздела между двумя жидкостями в этом случае будет двигаться с постоянной скоростью  $U = (0, 0, U)$  вдоль оси  $z$ . Но если вязкость вытесняющей жидкости меньше вязкости вытесняемой жидкости, то граница раздела двух жидкостей оказывается *неустойчивой*. Энгельбертс и Клинкаберг [54], описывая свои наблюдения такого рода неустойчивостей при вытеснении нефти водой в пористой среде, предложили термин *образование вязких пальцев*. Течение в вязких средах также описывается уравнениями (4.1) и (4.3), и поэтому течение в ячейках Хеле-Шоу часто используется для моделирования течения в пористых средах. Однако, как мы увидим, между этими течениями существуют и важные различия, поэтому сама допустимость использования ячейки Хеле-Шоу в качестве модели течения в пористых средах представляется сомнительной.

Теория образования вязких пальцев была развита и сравнена с экспериментами независимо Саффмэном и Тейлором [189] и Чуоке и др. [37]. В последнее время интерес к этой области заметно вырос, и было опубликовано много новых теоретических и экспериментальных результатов, полученных, в частности, Бенсимоном и др. [17], Енсенем и др. [102] и ДеГригориа и Шварццем [48]. Один из последних обзоров работ по образованию вязких пальцев опубликован Хомси [93].

Физика процесса образования вязких пальцев определяется динамикой движения границы. Предположим, что разность давлений  $\Delta p = p_1(z=0) - p_2(z=L)$  поддерживается на длине  $L$  конечной ячейки Хеле-Шоу, в которой воздух вытесняет жидкость, обладающую большей вязкостью. Давление в воздухе постоянно и равно давлению на входе

$p_1(z=0)$ , так как вязкостью воздуха мы пренебрегаем. Мы предполагаем также, что палец выступает в ту сторону, куда движется фронт вытеснения, опережая остальную его часть. Тогда давление на конце пальца также равно  $p_1(z=0)$ . Следовательно, наибольший градиент давления в сильно вязкой жидкости образуется на конце пальца и определяется выражением

$$\nabla p = \{p_1(z=0) - p_2(z=1)\}/(L-z),$$

где  $z$  — положение конца пальца. Этот большой градиент индуцирует максимальную скорость течения жидкости непосредственно перед самым длинным пальцем, который растет быстрее, чем фронт в среднем, а такая ситуация, как нетрудно видеть, неустойчива.

Чтобы проверить на устойчивость движущуюся границу раздела, последуем стандартной процедуре [37, 189] и предположим, что на прямую границу раздела наложено синусоидальное возмущение. Тогда в движущейся системе отсчета положение границы определяется действительной частью выражения

$$\zeta = \varepsilon \exp\left(2\pi\gamma t + i\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (4.5)$$

как показано на рис. 4.1. Длина волны возмущения равна  $\lambda$ , скорость нарастания возмущения равна  $\gamma$ .

Для устойчивой границы раздела возмущение  $\zeta$  затухает со временем, т.е.  $\gamma < 0$ . Если скорость нарастания возмущения положительна ( $\gamma > 0$ ), то возмущение с бесконечно малой амплитудой  $\varepsilon$  нарастает экспоненциально.

При решении уравнений (4.1)–(4.4), содержащих только линейные члены по  $\zeta$ , фронт вытеснения оказывается *неустойчивым* относительно возмущений с длиной волны  $\lambda$ , превышающей критическую длину волны  $\lambda_c$ :

$$\lambda \geq \lambda_c = 2\pi \left( \frac{\sigma}{\left(\frac{\mu_2}{k_2} - \frac{\mu_1}{k_1}\right)(U - U_c)} \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Возмущения с более короткими длинами волн стабилизируются поверхностным натяжением на границе раздела. Критическая скорость  $U_c$  определяется выражением

$$U_c = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\frac{\mu_2}{k_2} - \frac{\mu_1}{k_1}}. \quad (4.7)$$

Заметим, что при  $\rho_2 > \rho_1$  мы получаем  $U_c < 0$ , если  $\mu_2 > \mu_1$ ; поэтому система неустойчива даже при  $U = 0$ . Кроме того, в отсутствие гравитационных эффектов ( $g = 0$ ) граница раздела неустойчива при любой скорости, так как  $U_c = 0$ .

При всех длинах волн  $\lambda > \lambda_c$  фронт вытеснения неустойчив; однако

возмущения с длиной волны  $\lambda_m$ , определяемой выражением

$$\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c,$$

имеют наибольшую скорость нарастания и в основном определяют динамику фронта. Следовательно, можно ожидать, что в экспериментах, проводимых в канале Хеле-Шоу с зазором шириной  $W$  на первоначально прямой границе раздела разовьются вязкие пальцы с характерным периодом  $\lambda_m$ . Используя выражение (4.2) для проницаемости и предполагая, что вязкость вытесняющей жидкости пренебрежимо мала ( $\mu_1 \ll \mu_2$ ), как в случае глицерина, вытесняемого воздухом, получаем, что в горизонтальной ячейке можно ожидать возникновения вязких пальцев с периодом

$$\lambda_m = \pi b \sqrt{\frac{\sigma}{U\mu}} = \frac{\pi b}{\sqrt{Ca}}. \quad (4.8)$$

Здесь мы ввели безразмерное капиллярное число  $Ca$ , определяемое выражением

$$Ca = \frac{U\mu}{\sigma}. \quad (4.9)$$

Оно показывает, чему равно отношение вязких сил к капиллярным силам.

## 4.2. Вязкие пальцы в ячейках Хеле-Шоу

Саффмэн и Тейлор [189] и Чуоке и др. [37] не только разработали теорию образования вязких пальцев в канале Хеле-Шоу, но и исследовали это явление экспериментально. На рис. 4.3 показано, как выглядело вытеснение глицерина воздухом в экспериментах Саффмэна и Тейлора. Начальная граница раздела глицерина и воздуха имела мелкие нерегулярности. Заметим, что наблюдавшаяся длина волны составляет около 2,2 см. Это значение очень близко к длине волны, соответствующей максимальной неустойчивости  $\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c = 2,1$  см.

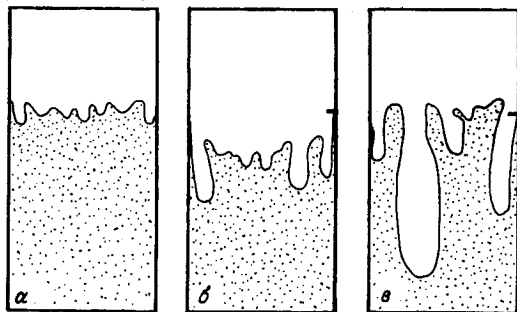


РИС. 4.3. Образование вязких пальцев в вертикальной ячейке при вытеснении воздухом глицерина (темный цвет) сверху вниз.  $U = 0,1$  см/с и  $\lambda_c = 1,2$  см. Ранняя стадия с наблюдаемым средним  $\lambda \approx 2,2$  см. Более поздняя стадия: начало образования пальцев. Поздняя стадия: более длинные пальцы тормозят рост соседей [189].

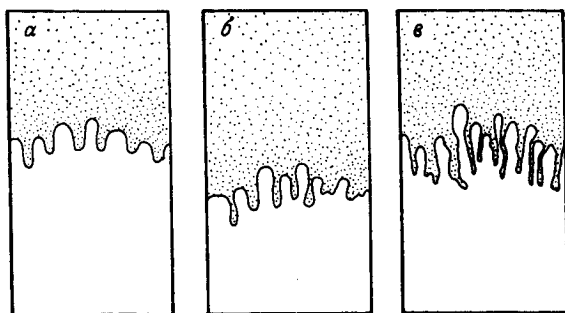


РИС. 4.4. Водно-глицериновый раствор (темный цвет), с  $\mu_1 = 0,552$  пуаз,  $\rho_1 = 1,21$  г/см<sup>3</sup>, вытесняющий нефть с  $\mu_2 = 1,39$  пуаз,  $\rho_2 = 0,877$  г/см<sup>3</sup>. Система наклонена под углом  $42^\circ 25'$ . Поверхностное натяжение на поверхности раздела  $\sigma = 33$  дин/см. Нефть смачивает стенки. Критическая скорость  $U_c = 0,23$  см/с. а)  $U = 0,41$  см/с,  $\lambda_m = 3,5$  см, наблюдаемое значение  $\lambda = 3,5$  см; б)  $U = 0,87$  см/с,  $\lambda_m = 2,6$  см, наблюдаемое значение  $\lambda = 2,4$  см; в)  $U = 1,66$  см/с,  $\lambda_m = 1,6$  см, наблюдаемое значение  $\lambda = 1,7$  см [37].

Аналогичные вязкие пальцы наблюдали Чуоке и др. (рис. 4.4). И в этих экспериментах период решетки пальцев очень близок к длине волны  $\lambda_m$ , соответствующей максимальной неустойчивости. В последние годы Махер [120] наблюдал вязкие пальцы в ситуации, когда поверхностное натяжение можно было сделать очень малым.

Если воздух инжектировать в центре круглой ячейки Хеле-Шоу, то расширяющийся пузырь неустойчив относительно возмущений с длиной волны  $\lambda > \lambda_c$ , определяемой неравенством (4.6). Это было показано Патерсоном [169]. И в круглой ячейке возмущение с наибольшей скоростью нарастания имеет длину волны  $\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c$ . На рис. 4.5, а показано образование вязких пальцев при очень большом капиллярном числе  $Ca$ . Интересно отметить, что по мере того, как структура разрастается, пальцы расширяются. Но, достигнув ширины порядка  $2\lambda_m$ , пальцы расщепляются на концах, и возникает разветвленная древовидная структура.

Длина волны, соответствующая максимальной неустойчивости, есть величина  $\lambda_m \sim Ca^{-1/2}$ , поэтому с увеличением капиллярного числа она убывает. Существует практический предел, до которого можно увеличивать капиллярное число, увеличивая скорость течения  $U$ . Но поскольку  $Ca = U\mu/\sigma$ , капиллярное число можно увеличивать, используя жидкости с малым поверхностным натяжением. Ниттман и др. [165] использовали водный раствор склероглутана в качестве жидкости с большой вязкостью и вытесняли его водой. Эти авторы получили границу раздела с очень низким поверхностным натяжением и с  $Ca \gg 1$ . Наблюдавшиеся ими вязкие пальцы показаны на рис. 4.5, б. Нетрудно видеть, что пальцы очень узкие и ширина их примерно равна величине зазора между пластинами. Ниттман и др. измерили фрактальную размерность струк-

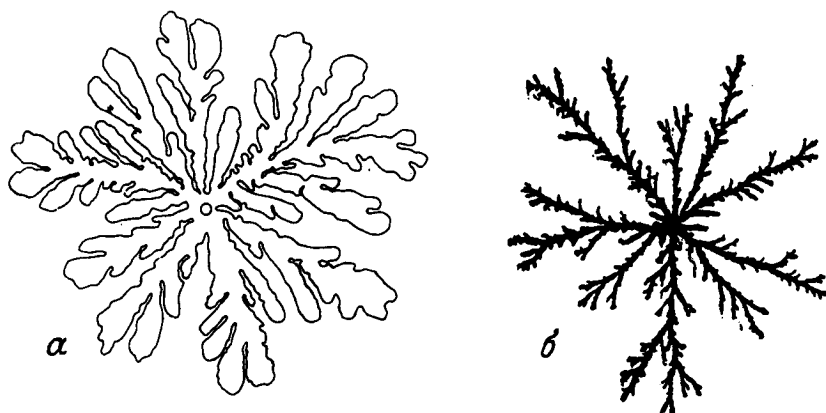


РИС. 4.5. Радиальное образование вязких пальцев в круглой ячейке Хеле-Шоу: *a* – воздух вытесняет глицерин при  $Ca = 0,1$  [123]; *б* – вода вытесняет нееньютоновскую смесь склероглутана с водой, обладающую высокой вязкостью. Эта структура фрактальна с  $D = 1,70 \pm 0,05$  [44].

туры, изображенной на рис. 4.5, *б*, с помощью подсчета клеток и получили величину  $D = 1,7 \pm 0,05$ .

Бен-Жакоб и др. [16] предложили интересную модификацию ячейки Хеле-Шоу, позволившую продемонстрировать роль анизотропии. На нижней пластине ячейки Хеле-Шоу диаметром 25 см они нанесли правильную шестиугольную сетку из бороздок глубиной  $b_1 = 0,015$  дюйма, шириной 0,03 дюйма и расстоянием между бороздками (между ближайшими краями соседних бороздок) 0,03 дюйма. Эффективную анизотропию ячейки авторы регулировали, изменяя величину зазора  $b_0$  между пластинами, и ввели параметр анизотропии  $\alpha = b_1/b_0$ .

Ниттман и Стэнли [164] предложили модификацию модели пробоя диэлектрика, позволяющую учитывать анизотропию и флуктуации. Расщепление концов пальцев в этой модели начинается под действием флуктуаций, в то время как анизотропия способствует дендритному росту. При численном моделировании на основе предложенной ими схемы эти авторы сумели получить структуры, напоминающие экспериментально наблюдаемые, которые представлены на рис. 4.6. Кроме того, им удалось получить структуры, поразительно напоминающие настоящие снежинки.

Бука и др. [32] использовали в качестве жидкости, вытесняемой воздухом в обычной ячейке Хеле-Шоу, *анизотропную жидкость* (нематический жидкий кристалл) и получили структуры, аналогичные тем, которые представлены на рис. 4.6, *б–г*. Хорват и др. [95] обнаружили, что образование вязких пальцев в радиальной ячейке Хеле-Шоу с параллельными бороздками на одной из пластин также приводит к богатому разнообразию структур.

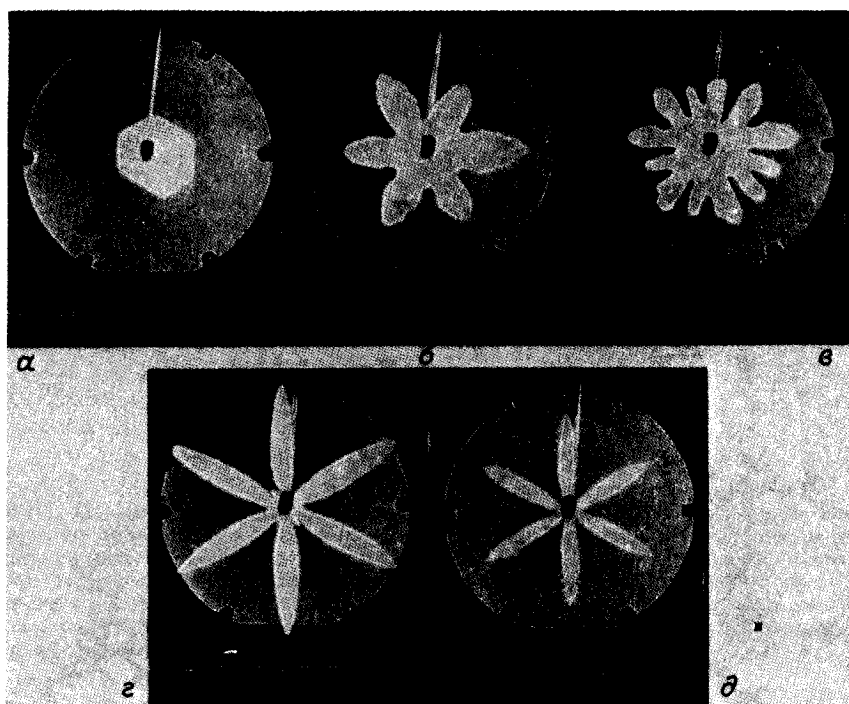


РИС. 4.6. Две различные морфологии, наблюдавшиеся в эксперименте Хеле-Шоу с анизотропией. Ячейка имеет в поперечнике 25 см. Глицерин (черный цвет) вытесняется воздухом (белый цвет), инжестируемым в центре ячейки. Анизотропия ячейки  $\alpha = b_1/b_0 = 0,3$ . Последовательность фигур соответствует увеличению давления, под которым подается воздух. *а* – рост с образованием граней; *б* – дендриты, образовавшиеся под действием поверхностного натяжения (при соблюдении осторожности можно заметить, что концы дендритов направлены под углом  $30^\circ$  к основным каналам); *в* – рост с расщеплением концов (в экспериментах с ячейкой больших размеров и более правильной формы этот тип роста, по мнению авторов, соответствует всюду плотному ветвлению); *г* – кинетические дендриты (игольчатые кристаллы растут параллельно проложенным туннелям); *д* – кинетические дендриты при более высоком давлении [16].

### 4.3. Вязкие пальцы в двумерных пористых средах

Течение жидкости в пористой среде описывается теми же уравнениями (4.1) и (4.3), что и течение в ячейке Хеле-Шоу. Единственное отличие состоит в том, что параметр  $k$  имеет смысл эффективной проницаемости среды, а не определяется выражением (4.2). Однако эксперименты показывают, что динамика образования вязких пальцев в пористой среде и в ячейке Хеле-Шоу существенно отличается. На рис. 4.7 показано, как происходит вытеснение сильно вязкой жидкости (эпоксидной смолы)

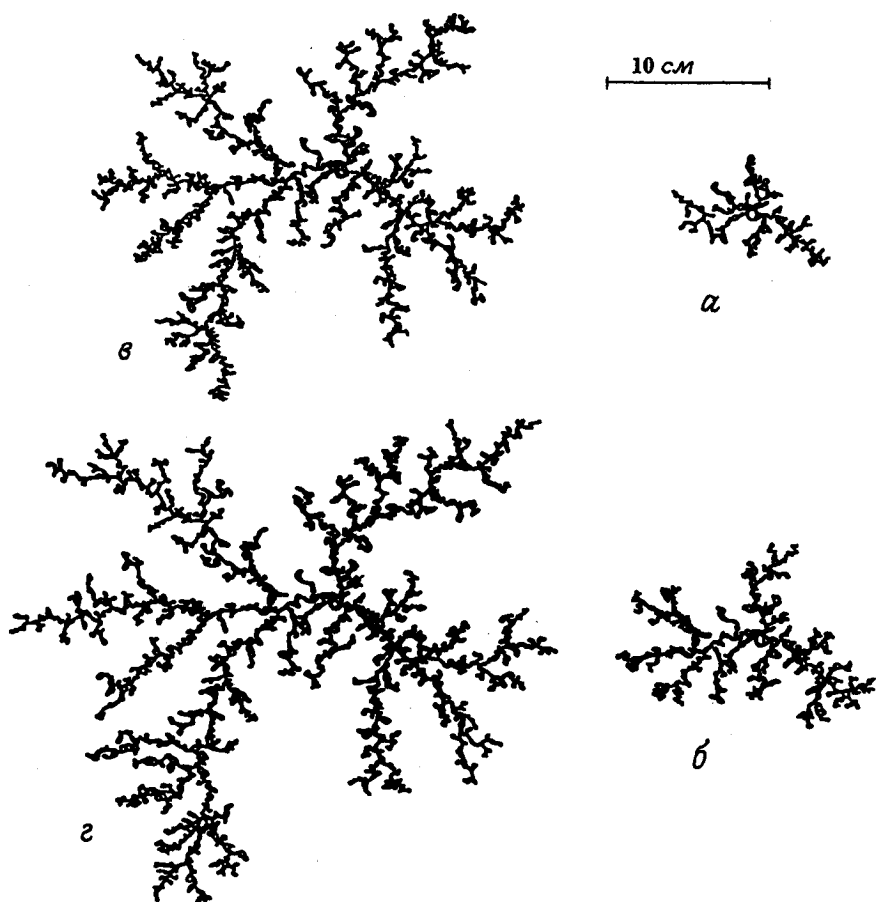


РИС. 4.7. Пальцы воздуха (черный цвет), вытесняющие жидкую эпоксидную смолу в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1,6 мм, которые уложены в один слой между двумя стеклянными пластинами диаметром 40 см. Центр инъекции расположен рядом с центром структуры. а)  $t = 2$  с после начала инъекции; б)  $t = 3,9$  с; в)  $t = 17,2$  с; г)  $t = 19,1$  с. Капиллярное число  $Ca = 0,04$  [122, 123].

воздухом при средних капиллярных числах  $Ca = 0,04$  в двумерной пористой среде, состоящей из случайно упакованного одинарного слоя стеклянных шаров, заключенных между двумя стеклянными пластинами.

Наблюдавшиеся структуры с образованием вязких пальцев анализировались следующим образом. Изображения дискретизировались с помощью цифровой записи, и каждая клетка, содержавшая воздушную

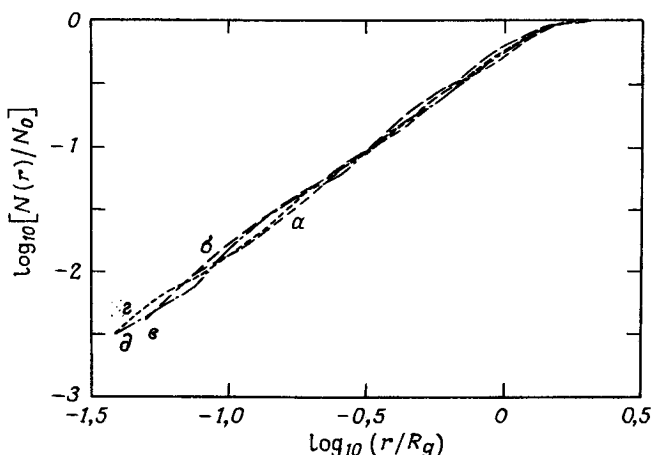


РИС. 4.8. Нормированный объем структуры с вязкими пальцами  $N(r)/N_0$  как функция приведенного радиуса  $(r/R_g)$  для структур, представленных на предыдущем рисунке. а)  $R_g = 1,7$  см; б)  $R_g = 2,9$  см; в)  $R_g = 5,2$  см; г)  $R_g = 6,6$  см; д) другой эксперимент с воздухом, вытесняющим глицерин в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1 мм, которые уложены в один слой между двумя стеклянными пластинами диаметром 40 см с  $R_g^* = 6,7$  см при  $Ca = 0,15$  [122, 123].

часть (на рисунке воздух изображен черным цветом), принималась за «мономер», после чего измерялось расстояние  $r_i$  от данного мономера до центра инъекции. Затем в духе соотношения «число частиц – радиус» (3.1) было подсчитано число  $N(r) = N(r_i < r)$  клеток с воздухом внутри окружности радиуса  $r$  с центром в точке инъекции. Общее число клеток с воздухом равно  $N_0$ , а радиус гирации для структуры с вязкими пальцами есть величина  $R_g = (N_0^{-1} \sum_i r_i^2)^{1/2}$ . На рис. 4.8 показана зависимость величины  $N(r)/N_0$  от  $r/R_g$  для каждой из структур с вязкими пальцами, изображенных на рис. 4.7, и для аналогичных экспериментов, в которых в качестве сильно вязкой жидкости использовался глицерин.

Самое замечательное в полученных результатах состоит в том, что данные всех экспериментов, т.е. данные для различных жидкостей и различных моментов времени для любой данной жидкости, ложатся на одну кривую. Прямая на рис. 4.8 убедительно свидетельствует о существовании соотношения число частиц – радиус вида

$$N(r) = N_0 \left( \frac{r}{R_g} \right)^D f(r/R_g). \quad (4.10)$$

Это соотношение есть не что иное, как формула (3.1), модифицированная введением переходной функции  $f(x)$ , постоянной при  $x < 1$  и стремящейся к  $x^{-D}$  при  $x > 1$ , в силу чего  $N(r) \rightarrow N_0$  при  $r \gg R_g$ . Экспериментальным данным на рис. 4.7 лучше всего соответствует  $D = 1,62 \pm 0,04$ ,

фрактальная размерность структур с вязкими пальцами в двумерных пористых средах.

Почему экспериментальные данные для ячейки Хеле-Шоу при сравнимых капиллярных числах на рис. 4.5, *a* и данными на рис. 4.7 столь заметно различаются? В обоих случаях вязкость вытесняющей жидкости пренебрежимо мала, а динамика течения сильно вязкой жидкости описывается уравнением Лапласа. Важное различие между ячейкой Хеле-Шоу и ячейкой с пористой средой заключается в граничном условии. В случае ячейки Хеле-Шоу ширина зазора  $b$  между пластинами является единственным параметром размерности длины помимо диаметра круглой ячейки, входящим в задачу. В случае двумерной пористой среды, т. е. круглой ячейки, состоящей из *одного* слоя стеклянных шаров, характерный размер поры также равен  $b$  и поэтому задача о течении жидкости характеризуется по всем пространственным направлениям «микроскопическим» масштабом. Таким образом, хотя *средняя* скорость течения жидкости  $U$  определяется уравнением (4.1), которое в случае пористой среды называется *уравнением Дарси*, и условием неразрывности (4.3), в силу чего для давления  $p(r)$  возникает уравнение Лапласа, в действительности задачи совершенно различны из-за различия граничных условий. В случае ячейки Хеле-Шоу характерный масштаб длины в плоскости ячейки определяется капиллярными силами (в действительности – критической длиной волны  $\lambda_c$ ), в то время как в пористой среде масштаб длины всегда определяется величиной пор.

Таким образом, динамика фронта вытеснения совершенно различна. В случае ячейки Хеле-Шоу эта динамика зависит только от распределения давления и граничных условий на двух пластинах. В пористой среде давление также всюду определяется уравнением Лапласа (4.3). Однако «решение» о вытеснении жидкости из данной поры на поверхности раздела принимается не на основе абсолютного значения разности давления между воздухом и жидкостью, а скорее на основе сравнения давления в воздухе и капиллярного давления в горле данной поры, так как в узкую пору воздуху проникнуть труднее. Последнее обстоятельство привносит в задачу элемент случайности, так как ширина пор в горле – случайная величина с некоторым распределением. Таким образом, динамика фронта образования вязких пальцев в пористых средах имеет две главные составляющие: глобальное распределение давления, удовлетворяющее уравнению Дарси и, следовательно, уравнению Лапласа, и локальные флуктуации в геометрии пор. Рост *фрактальной* структуры является результатом совместного действия этих двух факторов.

В том, что для получения фрактальных вязких пальцев требуется случайность на уровне геометрии пор, нетрудно убедиться, взглянув на рис. 4.9: изображенная на нем структура с вязкими пальцами заведомо не фрактальна. Чен и Уилкинсон [36] показали с помощью натуральных и численных экспериментов, что случайность в структуре пор необходима для образования фрактальных вязких пальцев.

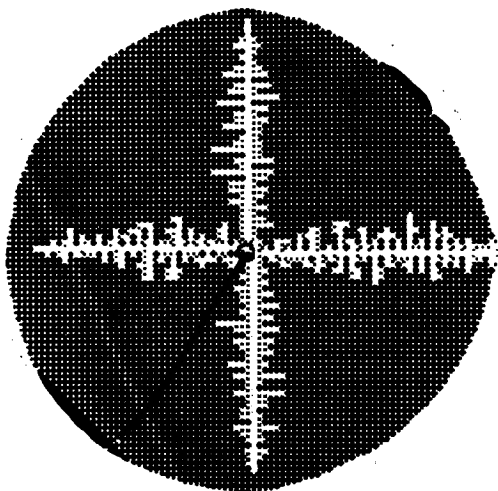


РИС. 4.9. Образование вязких пальцев при вытеснении воздухом глицерина в двумерной среде, образованной расставленными в узлах квадратной решетки цилиндрами диаметром 1 мм, заключенными между двумя пластинами из пластика. Капиллярное число  $Ca = 0,05$  [62].

Если от вытеснения жидкости при высоких капиллярных числах перейти к вытеснению жидкости при очень низких капиллярных числах  $Ca \sim 10^{-4}$ , то наблюдаются фрактальные структуры, характерные для инвазивной перколяции, или *перколяции с вытеснением* (см. разд. 7.8).

*Химическое растворение пористой среды.* Даккор [42] исследовал химическое растворение пористой среды протекающей через нее агрессивной

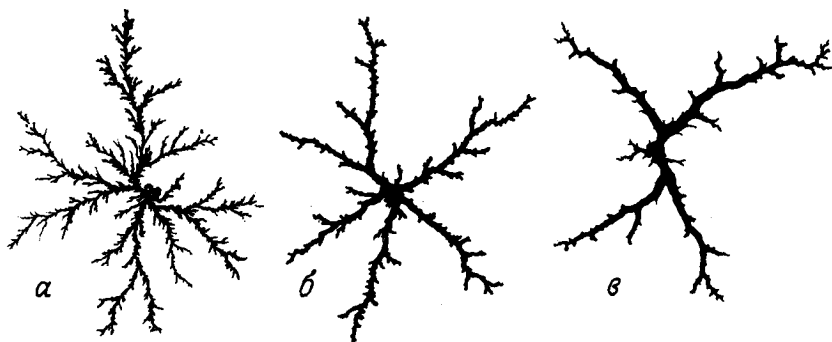


РИС. 4.10. Фотографии двумерных структур, возникающих при химическом растворении пористого пластика радиальным потоком воды при различных скоростях инжекции: а)  $48 \text{ см}^3/\text{ч}$ ; б)  $4 \text{ см}^3/\text{ч}$ ; в)  $2 \text{ см}^3/\text{ч}$  [42].

жидкостью. Он поместил пластину толщиной 1 мм чистого гипса ( $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$ ) между двумя прозрачными пластинами. Дистиллированная вода инжестировалась в центре диска, тем самым в пористом гипсе создавалось некоторое течение. Гипс слегка растворим в дистиллированной воде, поэтому текущая вода постепенно проделала в нем некоторую систему ходов. Даккор, используя сплав Вуда, сделал отпечаток этих ходов и растворил остальной гипс. Полученные им структуры при нескольких скоростях течения показаны на рис. 4.10.

Структуры растворения при высоких скоростях течения очень напоминают структуры с вязкими пальцами, наблюдаемые при течениях в двумерной вязкой среде (рис. 4.7) и при моделировании ОДА (рис. 4.3). Даккор предложил модификацию модели ОДА, учитывающую перенос растворенного материала. Численные эксперименты на основе этой модели очень точно воспроизводят экспериментально наблюдаемые структуры. При высоких скоростях течения структуры растворения по существу являются структурами ОДА и имеют фрактальную размерность  $D = 1,6 \pm 0,1$ . Даккор и Ленорман [43] использовали этот метод для исследования трехмерных структур растворения, образуемых течением в пористых средах.

#### 4.4. Образование вязких пальцев и ОДА

Процесс ограниченной диффузией агрегации можно рассматривать как задачу, в которой частицы совершают случайное блуждание до тех пор, пока они не достигают «поверхности» кластера, на которой переходят в состояние покоя. Соответственно поверхность в точке присоединения частицы вырастает на один шаг. В континуальном пределе частицы, совершающие случайное блуждание, описываются уравнением диффузии. Пусть  $C(\mathbf{r}, t)$  — концентрация блуждающих частиц. Тогда уравнение диффузии представимо в виде

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 C(\mathbf{r}, t). \quad (4.11)$$

Коэффициент диффузии в общем случае определяется соотношением Эйнштейна  $\mathcal{D} = (1/2)\Gamma a^2$  для частиц, перемещающихся на шаг  $a$  в случайных направлениях со скоростью  $\Gamma$ .

При стационарном подводе блуждающих частиц может быть достигнуто стационарное состояние  $\partial C / \partial t = 0$ , и тогда уравнение диффузии (4.11) сводится к уравнению Лапласа.

$$\nabla^2 C = 0. \quad (4.12)$$

Локально гладкая граница движется со скоростью

$$V_{\perp} = -\mathcal{D} \mathbf{n} \cdot \nabla C|_s \quad (4.13)$$

в направлении, перпендикулярном поверхности с нормалью  $\mathbf{n}$  [220].

Поток жидкости в пористой среде описывается уравнением Дарси

(4.1). Для несжимаемой жидкости оно сводится к уравнению Лапласа (4.3). Это такое же уравнение, как (4.12), но с  $\phi$  вместо концентрации  $S$ .

Однако на самом деле задача о двумерном вытеснении жидкости в пористых средах более сложная. Стандартный подход состоит в принятии гипотезы о применимости уравнения (4.1) к каждой из жидкостей. Давно известно, что фронт вытеснения неустойчив и что если вязкость  $\mu_1$  вытесняющей жидкости меньше вязкости  $\mu_2$  вытесняемой жидкости, то образуются «пальцы». В пределе, когда вязкостью вытесняющей жидкости можно пренебречь, например когда жидкость вытесняется газом, фронт вытеснения движется со скоростью  $MV\phi$ , аналогичной скорости (4.13) в случае ОДА. Патерсон [170] был первым, кто обратил внимание на аналогию, существующую между ОДА и течением в пористых средах. Он произвел численный эксперимент для стандартной ячейки, выполненной по так называемой пятиточечной схеме: вытесняющая жидкость инжектируется через отверстие в центре квадрата, а отводится вместе с вытесняемой жидкостью через четыре отверстия, расположенные по углам квадрата. Четверть такой квадратной ячейки представлена рис. 4.11. В той степени, в какой верна аналогия между ОДА и течением в пористых средах, фрактальная размерность фронта вытеснения должна быть равна 1,7, как для ОДА, на плоскости и 2,5 для вытеснения в трехмерном пространстве. Если отношения подвижностей конечны, то аргументация должна быть надлежащим образом изменена, так как в противоположном пределе, когда вытесняющая жидкость имеет большую вязкость, фронт вытеснения, как известно, устойчив и, следовательно, должен иметь фрактальную размерность 1 в двумерном случае и 2 в случае трехмерного фронта вытеснения.

Ранее в этой главе мы видели, что ОДА и образование вязких пальцев в пористых средах во многом выглядят одинаково. Образующиеся в том и в другом случае структуры имеют приблизительно одну и ту же фрактальную размерность. Мы можем продемонстрировать, как сказыв-

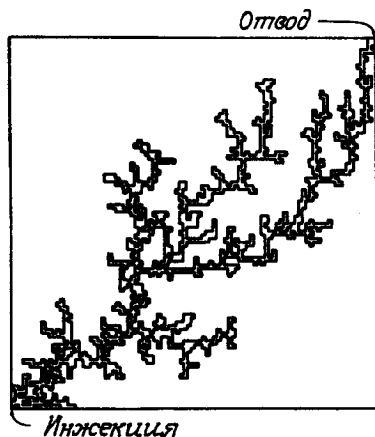


РИС. 4.11. Моделирование фронта вытеснения в момент пробоя для  $1/4$  стандартной ячейки с инъекцией вытесняющей жидкости в центре и четырьмя отверстиями для вытесняемой жидкости по углам квадрата. Вытесняющая жидкость имеет бесконечную подвижность [170].

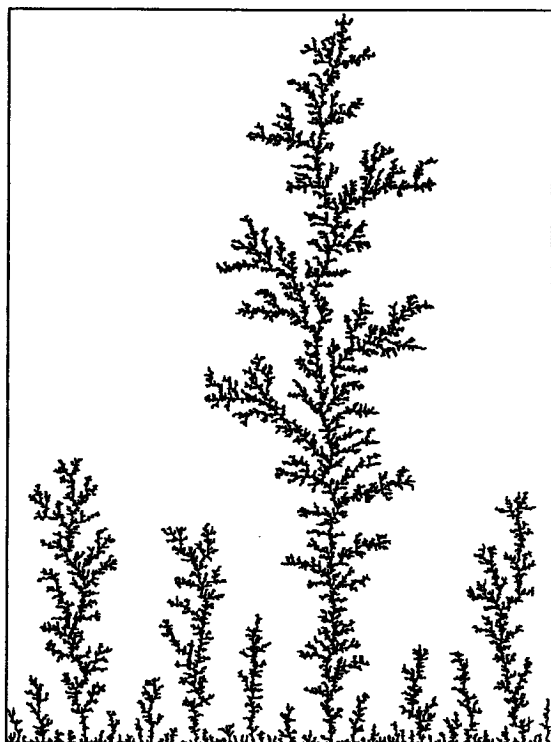


РИС. 4.12. Рост за счет ОДА с прямой. Частицы начинают случайное блуждание от верхней границы и упруго отражаются от боковых стенок. Достигнув нижней границы или одного из деревьев, частица прилипает к ним. Нижняя граница имеет в длину 801 ячейку, длина самого длинного пальца — 1099 ячеек. Число частиц равно 47 348 [92].

вается на течении, описываемом уравнением Лапласа, изменение граничного условия. На рис. 4.12 представлен результат численного моделирования ОДА: диффундирующие частицы испускаются с верхнего обреза рамки. Соприкасаясь с нижним обрезом рамки, частица становится корнем нового дерева. Частица, которая касается любого из уже существующих деревьев, прилипает к нему в месте соприкосновения. Очередная частица начинает случайное блуждание из наугад выбранной точки на верхнем обрезе рамки, как только предыдущая частица поглощается. От вертикальных стенок диффундирующие частицы отражаются. Результаты численного моделирования и натурных экспериментов на рис. 4.13 выглядят очень похоже. Патерсон и др. [171] и Ленорман и Царконе [115] также получили дендритные структуры с вязкими пальцами при больших капиллярных числах, работая с квазидвумерными моделями, в которых имеется много слоев частиц, а в остальном сохраняется геометрия канала Хеле-Шоу. Мапусита и др. [151] наблюдали аналогичные фрактальные дендритные структуры в выращенном методом электроосаждения металлическом цинке.

Динамика процесса может быть прослежена и с помощью недавно предложенной модификации ОДА. Молёй и др. [124, 125] и Микин [154,

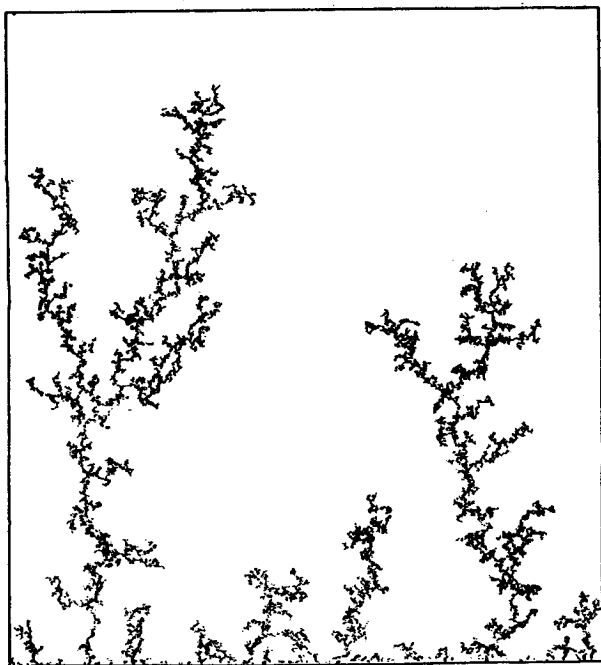


РИС. 4.13. Образование вязких пальцев при вытеснении глицерина воздухом (черный цвет) в двумерной модели пористой среды. Модель состоит из стеклянных бусин диаметром 1 мм, образующих плотнейшую упаковку в один слой между двумя прозрачными пластинами. Модель расположена горизонтально. Воздух инжeksiруется вдоль верхнего края ячейки, вытесняемый глицерин выходит из ячейки вдоль ее нижнего края [126].

156] показали, что такой модифицированный динамический процесс ОДА подробно описывает скорость, с которой растут вязкие пальцы. Отсюда мы заключаем, что численное моделирование ОДА позволяет с высокой точностью описывать скорость, с которой растут вязкие пальцы при больших капиллярных числах.

#### 4.5. Вязкие пальцы в трехмерных пористых средах

Несколько наблюдений за образованием вязких пальцев в пористых средах подтверждают, что нарисованная выше картина качественно сохраняется в трехмерном случае. Энгельбертс и Клинкаберг [54] наблюдали вытеснение нефти водой в песчанике и производили выборочную инспекцию различных сечений. Вода содержала флуоресцин, и при фотографировании в ультрафиолетовом свете водные пальцы становились видимыми (рис. 4.14). При виде весьма нерегулярных очертаний

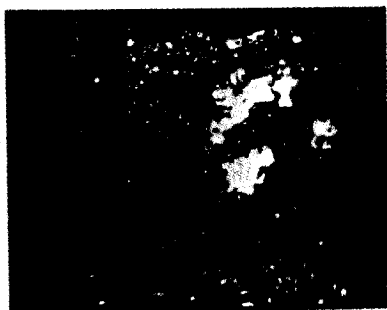
*Средняя скорость**4. 7,0 см**Высокая скорость**4A. 7,0 см**5. 9,5 см**5A. 10,3 см**6. 20,0 см**6A. 37,0 см*

РИС. 4.14. Распределение воды в различных сечениях после введения 5% объема пор. Отношение вязкостей  $\mu/\mu_0 = 24$  [54].

*Средняя скорость*

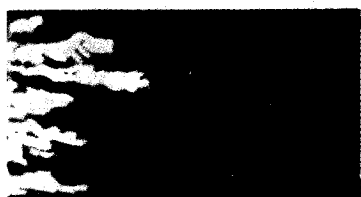


$$R = Q = 2,3 \%$$

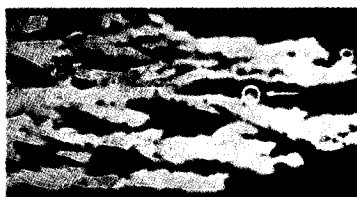
*Высокая скорость*



$$R = 13 \%; Q = 23 \%$$



$$R = Q = 6,0 \%$$



$$R = 20 \%; Q = 34 \%$$



$$R = Q = 9,5 \%$$



$$R = 34 \%; Q = 180 \%$$



$$R = Q = 12 \%$$



$$R = 52 \%; Q = 650 \%$$

РИС. 4.15. Линейное вытеснение нефти водой при отношении вязкостей нефти и воды, равное 80, в трехмерной пористой среде.  $Q$  – общий объем инжектированной жидкости,  $R$  – объем «заполнения», выраженный в процентах от общего объема пор [209, 210].

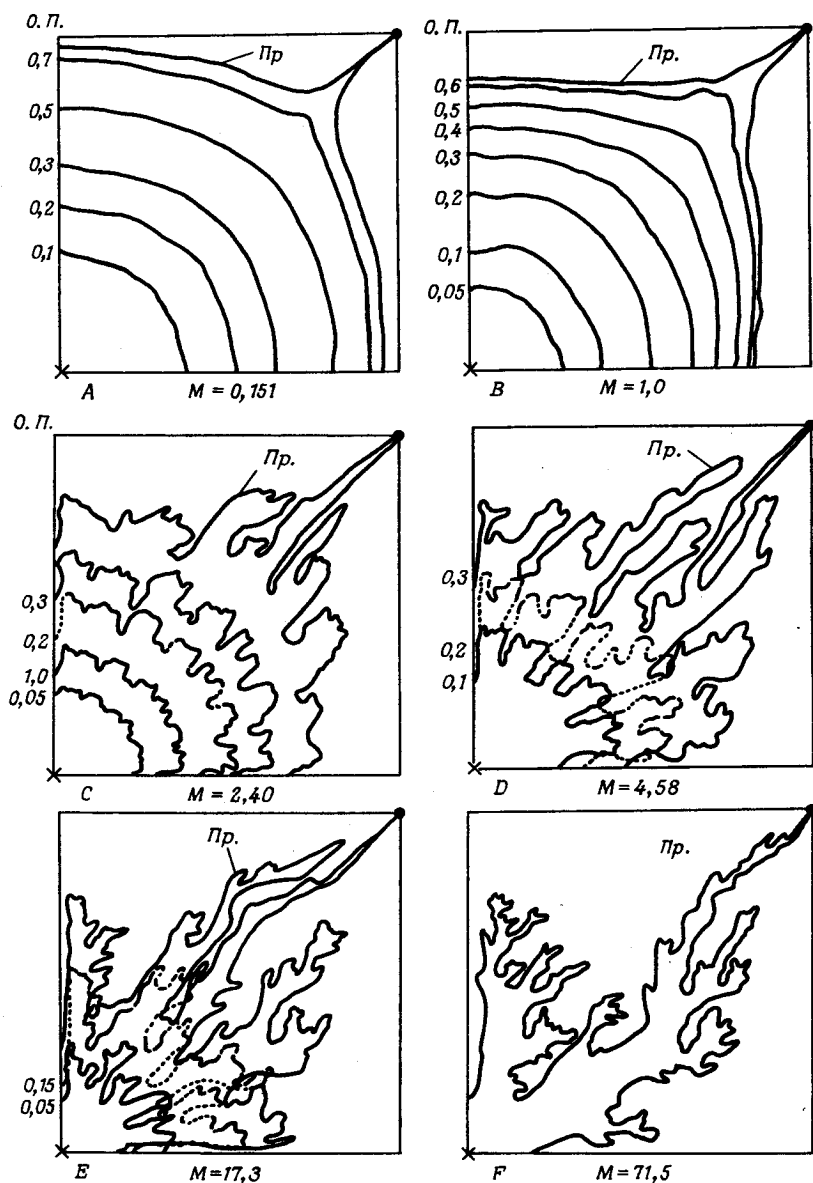


РИС. 4.16. Фронты вытеснения при различных отношениях подвижностей  $M$  и объемов заполненных пор (О.П.) до пробоя (Пр.) [78].

ний водных пальцев на сечениях всех размеров напрашивается мысль о фрактальном описании.

Ван Меирс [209] и ван Меирс и ван дер Поль [210] наблюдали рост вязких пальцев в пористых средах при вытеснении нефти водой с отношением вязкостей, равным 80, на прозрачных моделях, изготовленных из уплотненного пирексового порошка. Результаты представлены на рис. 4.15.

Общая фракталоподобная структура вязких пальцев очень напоминает ту, которая наблюдалась в кластерах, образующихся при ОДА.

Другое наблюдение образования вязких пальцев в квадратной пяти-точечной ячейке представлено на рис. 4.16. Хаберман [78] изготовил упрочненный вариант образцов из спрессованных песчинок, покрывая песчинки тонким слоем эпоксидной смолы. Песчинки помещались между окошками из люсита так, чтобы образовать ячейки размером  $15 \times 15 \times 1/8$  кубических дюймов. В различных экспериментах в качестве жидкостей использовались углеводороды, спирты, гликоли и вода.

Существует поразительное сходство между результатами численных экспериментов Патерсона; кластерами, возникающими в результате ОДА, и фронтами вытеснения, наблюдаемыми при больших отношениях подвижностей. Мы считаем, что замеченная Патерсоном аналогия между кинетикой агрегации и фронтами вытеснения в пористых средах очень точна и хорошо описывает образование вязких пальцев в двумерных средах при больших капиллярных числах (см. разд. 4.3). Но в игру могут вступать и другие факторы. Например, смачивающие свойства жидкостей и пористой среды также оказывают влияние на ширину пальцев в реалистических системах. Недавние обсуждения этих проблем см. в работах Ленормана [113] и Стокса и др. [207]. С иной ситуацией мы сталкиваемся в случае вытеснения смешивающихся жидкостей; см., например, работу Чена [35].

Эксперименты на трехмерных системах гораздо труднее поддаются количественному анализу. Однако мы считаем, что опубликованные в литературе экспериментальные данные подтверждают наш вывод о том, что при больших отношениях подвижностей даже в трехмерном случае фронты вытеснения имеют фрактальную структуру. Клеман и др. [38] подтвердили, что в своих трехмерных экспериментах они наблюдали фрактальные фронты. Как распространить аналогию Патерсона с тем, чтобы смоделировать ситуацию, в которой отношение подвижностей конечно и/или капиллярное число невелико, остается открытым вопросом.

# Канторовские множества

Мы уже ввели несколько размерностей: размерность Хаусдорфа – Безиковича, топологическую размерность, евклидову размерность, размерность подобия, скейлинговую размерность, размерность кластера и клеточную размерность. Канторовские множества позволяют проиллюстрировать достаточно много важных и интересных специфических особенностей, присущих фракталам.

## 5.1. Триадное канторовское множество

Очень простое построение, предложенное Кантором, позволяет получать фрактальные множества с фрактальной размерностью в интервале  $0 < D < 1$ . Как показано на рис. 5.1, затравкой служит единичный отрезок  $[0, 1]$ , а образующий элемент делит его на три равные части и отбрасывает открытую среднюю часть, оставляя ее концевые точки. Затем образующий элемент применяется к каждому из двух оставшихся подынтервалов и т.д. Такая процедура очень быстро приводит к очень коротким отрезкам. Поскольку наша графика имеет конечное разрешение, мы обнаруживаем, что 6-е поколение отрезков неотлично от 5-го. После бесконечного числа поколений оставшееся бесконечное множество точек рассеяно по единичному отрезку. Это множество называется *канторовской пылью* [133].

Вычислим теперь для канторовского множества различные размерности, введенные нами в предыдущих разделах.

Начнем с размерности Хаусдорфа – Безиковича, определяемой выражением (2.3)<sup>1)</sup>. В  $n$ -м поколении канторовское множество состоит из  $\mathcal{N} = 2^n$  отрезков длиной  $l_i = (1/3)^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ . Если попытаться покрыть множество прямолинейными отрезками длины  $\delta = l_i$  и расположить их аккуратно, то нам удастся покрыть все отрезки  $n$ -го поколения и, следовательно, все точки канторовского множества. Мера, определяемая формулой (2.3), равна величине

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta^d = 2^n (1/3)^{nd} = \delta^{d-D}.$$

---

<sup>1)</sup> На самом деле найти размерность Хаусдорфа – Безиковича труднее, – мы излагаем лишь общую идею.



РИС. 5.1. Построение триадного канторовского множества. Затравка – единичный отрезок  $[0, 1]$ . Образующий элемент удаляет среднюю треть. На рисунке показаны первые пять поколений.  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$ .

Эта мера расходится или стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ , если только мы не выберем  $d = D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$ . Топологическая размерность канторовского множества определяется величиной  $D_T = 0$ . Так как  $D_T < D$ , мы заключаем, что триадное канторовское множество есть фрактальное множество с фрактальной размерностью

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{– фрактальная размерность} \quad (5.1)$$

Описываемое здесь канторовское множество не вполне самоподобно. Однако мы можем расширить его с помощью процедуры экстраполяции, охватывающей область  $[0, 3]$  двумя канторовскими множествами, которые покрывают интервалы  $[0, 1]$  и  $[2, 3]$ . Повторяя этот процесс неограниченное число раз, мы можем построить самоподобное множество на полупрямой  $[0, \infty]$ . Если изменить масштаб в  $r = 1/3$  раза, то, чтобы покрыть исходное множество, нам понадобится  $N = 2$  таких множеств. Из определения (2.10) *размерности подобия*  $D_S$  получаем

$$D_S = \frac{\ln N}{\ln(1/r)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{– размерность подобия.} \quad (5.2)$$

Размерность подобия совпадает с фрактальной размерностью триадного канторовского множества.

Формула (5.2) позволяет тривиальным образом построить канторовское множество с любой заданной размерностью из интервала  $0 < D < 1$ . В качестве примера на рис. 5.2 показаны два различных построения, которые оба приводят к одной и той же размерности  $D = 1/2$ . Внешне два множества «выглядят» по-разному, хотя они оба имеют одну и ту же фрактальную размерность: у них различная *лакунарность* [134].

*Размерность кластера*, или *размерность массы*, мы получим, если рассмотрим экстраполированный вариант канторовского множества. Начнем с «мономеров» длиной  $R_0$  и образуем «кластер» из  $N = 2$  мономеров длиной  $R = 3R_0$ , после чего все повторим сначала, приняв димер за новый исходный мономер, и т. д. Кластер из  $N = 2^n$  мономеров

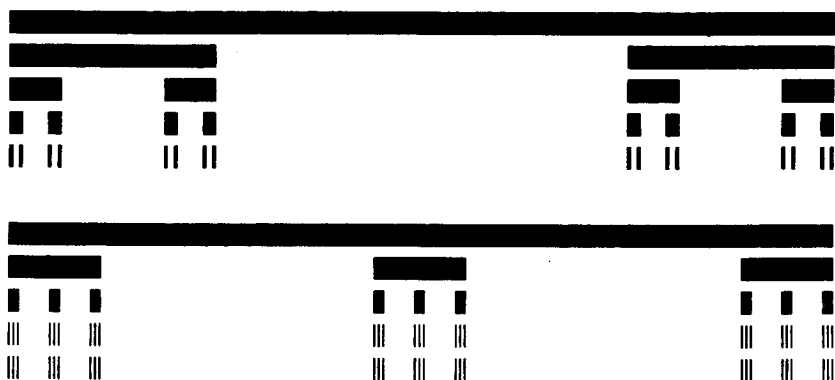


РИС. 5.2. Два построения канторовского множества с  $D = 1/2$ . Вверху:  $N = 2$  и  $r = 1/4$ ; внизу:  $N = 3$  и  $r = 1/9$ .

имеет диаметр  $R = 3^n$ . Следовательно, фрактальная размерность этого кластера, определяемая соотношением (3.1), равна

$$D_c = \frac{\ln N}{\ln R} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{— размерность кластера.} \quad (5.3)$$

Размерность кластера совпадает с фрактальной размерностью этого канторовского множества.

Мы заключаем, что для весьма простого триадного канторовского множества все определенные выше различные размерности совпадают.

## 5.2. Скейлинг с неравными отношениями

Что произойдет, если два отрезка в образующем элементе канторовского множества не будут равными? На рис. 5.3 показан канторовский стержень, который получается, когда первый отрезок образующего элемента имеет длину  $l_1 = 1/4$ , а второй —  $l_2 = 2/5$ . Вычислим фрактальную длину такого весьма простого канторовского множества  $\mathcal{S}$ .

Это фрактальное множество  $\mathcal{S}$  может быть покрыто некоторым числом  $\mathcal{N}$  пересекающихся отрезков  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ . Пусть  $l_i$  — евклидова длина (диаметр)  $i$ -го множества, так что  $\mathcal{S}_i$  уместится в (гипер)кубе с ребром  $l_i$ . При разбиении с  $l_i \leq \delta$   $d$ -мера (2.3), использованная для определения размерности Хаусдорфа — Безиковича, равна

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_i^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > D, \\ \infty, & d < D. \end{cases} \quad (5.4)$$

Критическая размерность  $d = D$ , получающаяся в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , есть фрактальная размерность данного множества. Заметим, что это опреде-



РИС. 5.3. Построение двухмасштабного канторовского стержня с  $l_1 = 1/4$  и  $l_2 = 2/5$ . Фрактальная размерность такого канторовского множества  $D = 0,6110$ .

ление совпадает с определением, данным Мандельбротом для кривых Хельги фон Кох, для которых различные отрезки уменьшались в отношении  $r_i = l_i$ . Размерность подобия  $D_s$  такого множества есть размерность, удовлетворяющая соотношению

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} r_i^D = 1, \quad (5.5)$$

о чем мы говорили при обсуждении формулы (2.11).

В качестве примера рассмотрим канторовское множество, построенное, как на рис. 5.3. В  $n$ -м поколении число отрезков равно  $\mathcal{N} = 2^n$ . Самый короткий отрезок имеет длину  $l_1^n = (1/4)^n$ , самый длинный —  $l_2^n = (2/5)^n$ . Всего имеется  $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$  отрезков длиной  $l_1^k l_2^{n-k}$  при  $k = 0, 1, \dots, n$ . В  $n$ -м поколении мера  $M_d$  определяется выражением

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} l_1^{kd} l_2^{(n-k)d} = (l_1^d + l_2^d)^n. \quad (5.6)$$

Так как  $n \rightarrow \infty$  при  $\delta = l_2^n \rightarrow 0$ , мы заключаем, что мера  $M_d$  остается конечной в том и только в том случае, если  $d = D$ , где  $D$  удовлетворяет соотношению

$$(l_1^D + l_2^D) = 1. \quad (5.7)$$

Численное решение уравнения (5.7) при  $l_1 = 1/4$  и  $l_2 = 2/5$  дает  $D = 0,6110$ .

# Мультифрактальные меры

Рассмотрим некоторую «популяцию», состоящую из «особей», распределенных по объему с характерным линейным размером  $L$ , т.е. по объему  $L^E$ . Такой популяцией могут быть, например, народонаселение или сеть метеостанций. Обе популяции неравномерно распределены по поверхности Земли. Пространственное распределение энергии – пример, имеющий непосредственное отношение к трехмерному турбулентному течению. Распределение ошибок в канале связи может служить примером одномерной популяции. В физике мы обычно рассматриваем распределение примесей на поверхности или в объеме. Намагниченность любого магнетика флуктуирует в пространстве. В качестве членов (особей) популяции можно было бы рассматривать локальные магнитные моменты. Многие переменные подвержены флуктуациям. Например, золото встречается в высоких концентрациях лишь в немногих местах, в более низких концентрациях в существенно большем числе мест и в очень низких концентрациях почти повсюду. Важно отметить, что это утверждение остается в силе независимо от линейного масштаба, будь он глобальным, порядка нескольких метров или микроскопическим. С исследованием распределения физических или каких-нибудь других величин на геометрическом носителе связаны мультифрактальные меры.

Основные понятия, лежащие в основе того, что теперь принято называть мультифракталами, были первоначально введены Мандельбротом [129, 130] при обсуждении турбулентности и впоследствии [134, с. 375] распространены им на многие другие ситуации. Применительно к турбулентности многофрактальный подход был развит Фришем и Паризи [67] и Бенци и др. [19]. Особый интерес к мультифракталам начался с работ Грассбергера [74], Хентшеля и Прокаччи [87]. Аналогичную функцию размерности предложили Бадии и Полити [11].

Анализ экспериментальных результатов и введение функции  $f(\alpha)$  Фришем и Паризи [67] и Енсенем и др. [101] позволили достичь великолепного согласия между простой теоретической моделью (см. разд. 6.10) и наблюдениями. Эти авторы продемонстрировали полезность использования мультифракталов при описании экспериментальных данных. Аналогичный подход развивали в своих работах Бенсимон и др. [18], Холси и др. [81], Глазьер и др. [72]. Предложенная недавно Фейгенбаумом и др. [63] термодинамическая формулировка мульти-

фракталов позволяет распространить эти идеи и на модель Изинга. Неаналитичности в обобщенных размерностях мультифрактальных множеств, представляющих физический интерес, могут быть интерпретированы по Катцену и Прокачке [108] как фазовые переходы.

Распределение токов в фрактальной сети резисторов может быть описано с помощью понятий, непосредственно связанных с мультифракталами. См., например, работы де Аркангелиса и др. [45], Раммала и др. [182], Аарони [3] и Блюменфельда и др. [26].

Применительно к ОДА и связанным с ней процессам роста мультифракталы рассматривали Микин и др. [158, 159], Микин [155, 156] и Холси и др. [80]. Ниттман и др. [166] проанализировали образование вязких пальцев в ячейках Хеле-Шоу и обнаружили признаки, свидетельствующие о мультифрактальной структуре вязких пальцев. Молёй и др. [125] исследовали динамику роста вязких пальцев при больших капиллярных числах. *Наблюдаемый рост* допускает количественное описание с помощью мультифрактальной структуры. Эти результаты мы обсудим в разд. 6.12. Фрактальным агрегатам и их фрактальным мерам посвящен обзор Микина [156].

Идея о том, что фрактальная мера может быть представлена взаимосвязанными фрактальными подмножествами, изменяющимися по степенному закону с различными показателями, открывает новый простор для применений фрактальной геометрии к физическим системам. Исследование мультифракталов представляет собой быстро развивающуюся область физики фракталов. В этой главе мы рассмотрим несколько основных понятий и проиллюстрируем их простыми примерами. В последующих главах обсудим экспериментальные данные, подтверждающие мультифрактальное поведение различных систем.

## 6.1. Свертывание и чертова лестница

Условимся понимать под канторовским множеством нечто, отличное от абстрактного триадного канторовского множества. Будем считать за травкой не единичный отрезок, а стержень из какого-нибудь материала с плотностью  $\rho_0 = 1$ . Исходный стержень имеет длину  $l_0 = 1$  и, следовательно, массу  $\mu_0 = 1$ . Операция, связанная с применением образующего элемента, состоит из разрезания стержня на две половины равной массы  $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$ , которые затем в результатековки укорачиваются до длины  $l_1 = 1/3$  (одинаковой для обеих половин). В результате такой обработки плотность возрастает до  $\rho_1 = \mu_1/l_1 = 3/2$ . Повторяя всю процедуру, мы получаем в  $n$ -м поколении  $N = 2^n$  маленьких стержней, каждый из которых имеет длину  $l_i = 3^{-n}$  и массу  $\mu_i = 2^{-n}$  при  $i = 1, \dots, N$ . Заметим, что масса в ходе обработки сохраняется, поэтому

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = 1. \quad (6.1)$$

Мандельброт [133, 134] сравнивает этот процесс со *свертыванием*

молока, так как первоначально равномерное распределение массы в результате разбивается на множество мелких областей с высокой плотностью.

Из сказанного следует, что масса отрезка длиной  $l_i$ , где  $l_i \leq \delta$ , определяется выражением

$$\mu_i = l_i^\alpha. \quad (6.2)$$

Скейлинговый показатель здесь равен  $\alpha = \ln 2 / \ln 3$ . Плотность каждого из малых отрезков стержня определяется выражением

$$\rho_i = \frac{\mu_i}{l_i} = \rho_0 l_i^{\alpha-1} \quad (6.3)$$

и расходится при  $l_i \rightarrow 0$ . Скейлинговый показатель давно известен в математике как показатель Липшица – Гёльдера, который мы обсудим в разд. 6.4. Этот показатель ведаёт сингулярностью плотности и может быть назван *показателем сингулярности*.

На рис. 6.1 изображен вариант триадного канторовского множества. Высота каждого фрагмента определяется его плотностью  $\rho_i$ . Мы видим, что эта модификация канторовского построения требует скейлингового показателя  $\alpha$  для описания того, как возрастает высота фрагментов стержня при уменьшении их ширины. Можно сказать, что сингулярности с показателем  $\alpha$  имеют *носитель* с фрактальной размерностью  $f = D$ .

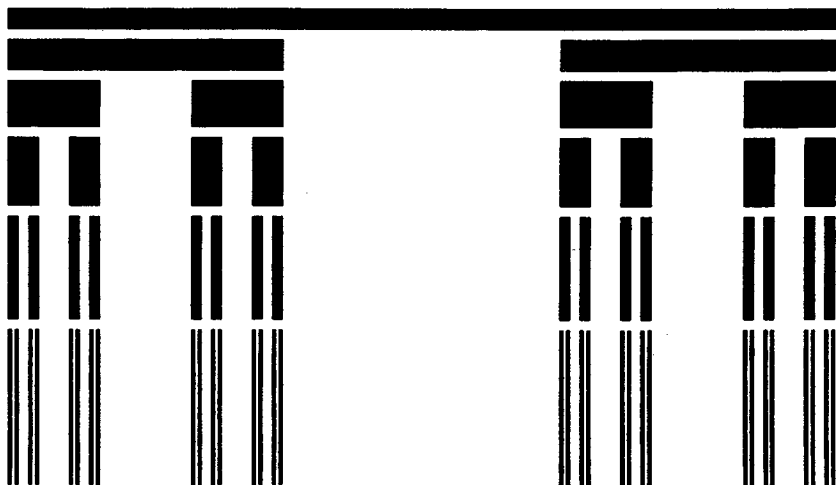


РИС. 6.1. Триадный канторовский стержень. Стержень единичной длины и единичной массы делится пополам. Каждая половина подвергается перековке, в результате которой ее длина сокращается, а плотность увеличивается. Высота стержня в  $n$ -м поколении пропорциональна его плотности  $\rho_i$ . Показатель Липшица – Гёльдера  $\alpha = \ln 2 / \ln 3$ , фрактальная размерность носителя массы  $f = D = \ln 2 / \ln 3$ .

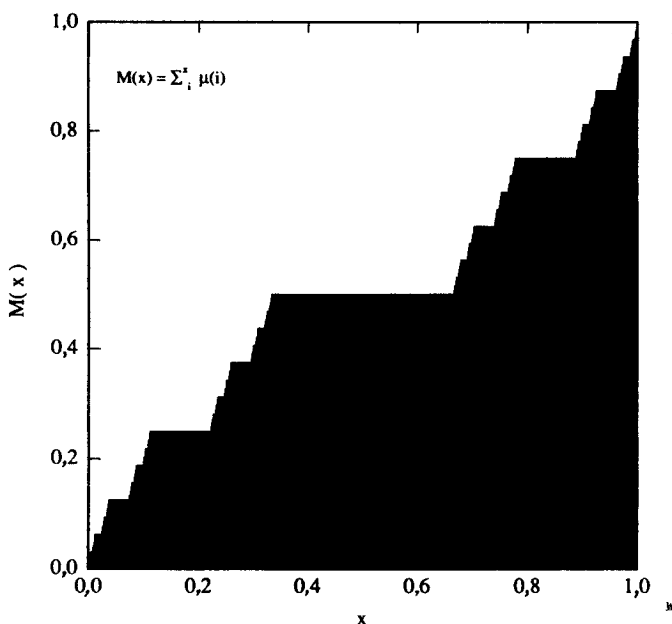


РИС. 6.2. Масса триадного канторовского стержня как функция координаты, отсчитываемой вдоль стержня. Эта кривая называется *чертовой лестницей*.

Выше мы рассматривали  $\mu_i$  как вклад фрагмента в массу канторовского стержня. Полученные нами результаты остались бы неизменными, если бы под  $\mu$  мы понимали электрический заряд, магнитный момент, гидродинамическую завихренность или вероятность для некоторых явлений. В общем случае  $\mu$  может быть *мерой* любой величины, имеющей носителем геометрическое множество.

На основе канторовского стержня можно получить интересную конструкцию, так называемую *чертову лестницу*. Выбрав за начало отсчета левый конец стержня ( $x = 0$ ), изображенного на рис. 6.1, запишем массу, содержащуюся на отрезке  $[0, x]$ , в виде

$$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt = \int_0^x d\mu(t).$$

Здесь «плотность»  $\rho(x)$  равна нулю в промежутках и равна бесконечности во всех бесконечно многих точках, образующих канторовское множество. Масса  $M(x)$  остается постоянной на интервалах, соответствующих пустым промежуткам. Длины таких интервалов в сумме равны 1, т.е. длине всего исходного стержня. Следовательно, на отрезке, равном длине интервала,  $M(x)$  не изменяется. Отсюда можно было бы сделать заключение, что  $M(x) = 0$ , и такое заключение было бы правиль-

ным для обычной гладкой кривой. Но масса возрастает бесконечно малыми скачками в точках канторовского множества, и эти скачки в сумме дают  $M(1) = 1$ . Зависимость массы от  $x$ , представленная на рис. 6.2, напоминает лестницу (называемую чертовой лестницей), которая почти всюду горизонтальна. Самоаффинная природа чертовой лестницы становится очевидной, если взглянуть на рис. 6.2. Причины, по которой чертова лестница возникает во многих физических системах, анализируются в работе Бака [13].

## 6.2. Биномиальный мультипликативный процесс

Популяции или распределения, порождаемые мультипликативным процессом, находят многочисленные применения и обладают тем преимуществом, что многие свойства таких распределений легко поддаются анализу. Начнем с одномерного примера. Пусть популяция состоит из  $\mathcal{N}$  членов, распределенных по отрезку прямой  $\mathcal{S} = [0, 1]$ . Нас будет интересовать предел при  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ . Будем считать, что  $\mathcal{N}$  — выборка из основного распределения (при конечных  $\mathcal{N}$ ). Чтобы определить распределение, разделим отрезок  $\mathcal{S}$  на части (ячейки) длиной  $\delta = 2^{-n}$ . Тогда для покрытия этого отрезка  $\mathcal{S}$  нам понадобятся  $N = 2^n$  ячеек. Здесь  $n$  — число поколений при двоичном разбиении отрезка  $\mathcal{S}$ . Обозначим ячейки индексом  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Распределение популяции по отрезку при разрешении  $\delta$  характеризуется набором чисел  $\mathcal{N}_i$ , показывающих, сколько членов популяции находится в  $i$ -й ячейке. Удобной мерой содержимого  $i$ -й ячейки может служить доля  $\mu_i = \mathcal{N}_i / \mathcal{N}$  числа членов популяции, попавших в  $i$ -ю ячейку, от полной численности популяции. Набор  $\mathcal{M}$  долей, т. е.

$$\mathcal{M} = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}, \quad (6.4)$$

дает полное описание распределения популяции при разрешении  $\delta$ . Мера  $M(\mathcal{Z})$  части, или подобласти  $\mathcal{Z}$ , отрезка  $\mathcal{S}$  определяется суммой

$$M(\mathcal{Z}) = \sum_{i \in \mathcal{Z}} \mu_i. \quad (6.5)$$

В общем случае история на этом и заканчивается: описать распределение членов популяции по отрезку можно единственным способом, а именно задавая  $\mathcal{M}$  при достаточно хорошем разрешении, т. е. при достаточно малом  $\delta$ . Но если  $\mathcal{M}$  обладает скейлинговым свойством, то относительно распределения можно сказать гораздо больше. Покажем это на простом примере.

Рассмотрим следующий мультипликативный процесс<sup>1)</sup>, порождающий меру на единичном отрезке  $\mathcal{S} = [0, 1]$ . Разделим  $\mathcal{S}$  сначала на две части равной длины  $\delta = 2^{-1}$ . Сопоставим левую часть с долей  $p$

<sup>1)</sup> Это так называемый процесс Безиковича, рассмотренный Мандельбротом [143, с. 377].

популяции и тем самым наделим левую часть мерой  $\mu_0 = p$ . На правой части поместим оставшуюся долю и наделим правую часть мерой  $\mu_1 = 1 - p$ . Увеличим разрешение до  $\delta = 2^{-2}$ . Мультипликативный процесс производит разбиение каждой части на две половины (по длине). В результате разбиения мы получаем следующие доли популяции в ячейках:

$$\mathcal{M}_2 = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^2-1} = \mu_0\mu_0, \mu_0\mu_1, \mu_1\mu_0, \mu_1\mu_1.$$

Следующее поколение ( $n = 3$ ) мы получаем, производя разбиение каждой ячейки на две новые ячейки. Ячейка, содержащая меру  $\mu_i$ , оказывается разделенной на левую подячейку с мерой  $\mu_j = \mu_i\mu_0$  и на правую подячейку с мерой  $\mu_{j+1} = \mu_i\mu_1$ . Весь отрезок  $[0, 1]$  оказывается при этом разбитым на ячейки длиной  $\delta = 2^{-3}$ , и поэтому набор  $\mathcal{M}$  в третьем

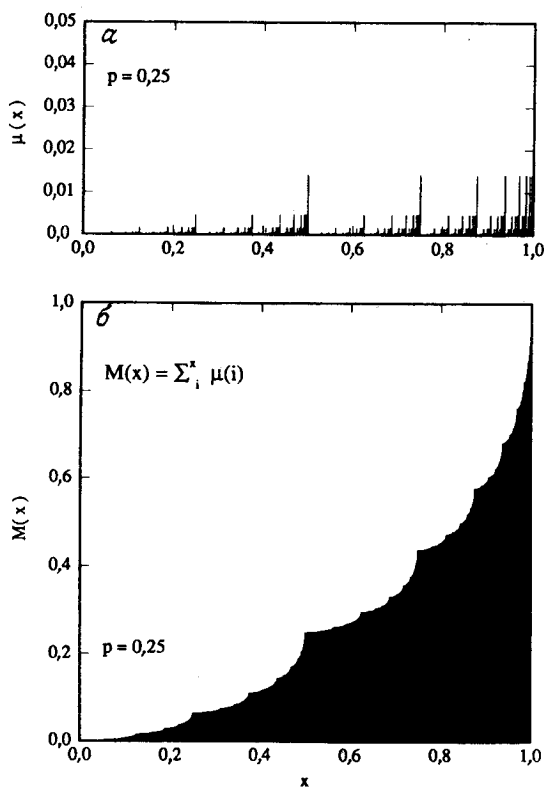


РИС. 6.3. Мера  $M(x)$  для биномиального мультипликативного процесса после  $n = 11$  поколений с  $\mu_0 = p = 0,25$  и  $\mu_1 = 1 - p = 0,75$ : а – мера, или содержание,  $\mu$  ячейки как функция номера сегмента (координаты точки)  $x = i \cdot 2^{-11}$ ; б – мера  $M(x)$  для интервала  $[0, x]$  как функция от  $x$ .

поколения состоит из следующего упорядоченного перечня мер:

$$\mathcal{M}_3 = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^3-1} = \mu_0 \mu_0 \mu_0, \mu_0 \mu_0 \mu_1, \mu_0 \mu_1 \mu_0, \mu_0 \mu_1 \mu_1,$$

$$\mu_1 \mu_0 \mu_0, \mu_1 \mu_0 \mu_1, \mu_1 \mu_1 \mu_0, \mu_1 \mu_1 \mu_1.$$

При дальнейших итерациях этого процесса получают все более короткие отрезки, содержащие все меньшую долю полной меры. На рис. 6.3 показаны мера  $\mu(x)$  ячейки, расположенной в точке  $x$ , и мера

$$M(x) = \sum_{i=0}^{x \cdot 2^n} \mu_i \quad (6.6)$$

для области  $[0, x]$  после 11 итераций мультипликативного процесса. Здесь  $x$  указывает индекс ячейки  $i = x \cdot 2^n$ . Мера  $M(x)$  — скейлинговая в том смысле, что левая половина фигуры на рис. 6.3 получается из всей фигуры и правая половина получается из всей фигуры с помощью соотношений (см. также формулу (10.10))

$$M(x) = \begin{cases} pM(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ p + (1-p)M(2x-1) & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.7)$$

Соотношения (6.7) описывают *аффинное* преобразование функции  $M(x)$ . С этим понятием мы подробнее познакомимся в гл. 10.

После  $n$  поколений мы получаем  $N = 2^n$  ячеек, перенумерованных последовательно индексом  $i = 0, \dots, N-1$ . Длина  $i$ -й ячейки равна  $\delta_n = 2^{-n}$ , а мера, или доля популяции в  $i$ -й ячейке, равна  $\mu_i = \mu_0^k \mu_1^{n-k}$ ,  $k$  — число нулей в двоичной дроби, представляющей число  $x = i/2^n$ . В этом нетрудно убедиться, если записать индекс ячейки  $i$  в виде *двоичной дроби*:

$$x = i/2^n = \sum_{v=1}^n 2^{-v} \varepsilon_v. \quad (6.8)$$

«Знаки», или «цифры»,  $\varepsilon_v$  принимают только два возможных значения: 0 или 1. Например, в третьем поколении первой ячейке ( $i = 0$ ) соответствует двоичная дробь 0,000; ячейке с  $i = 1$  — дробь 0,001; следующей ячейке — дробь 0,010 и, наконец, последней ячейке с  $i = 7$  — дробь 0,111. Для записи всех ячеек в  $n$ -м поколении необходимы двоичные дроби с  $n$  знаками после запятой.

На рис. 6.3, а показана мера ячеек, порожденная в 11-м поколении мультипликативного процесса с  $p = 0,25$ . Как видно из рис. 6.3, а, существует одна ячейка с наибольшей мерой  $(1-p)^n$ , 11 ячеек с мерой  $(1-p)^{n-1}p^1$  и т. д. В общем случае при  $\xi = k/n$  и  $k = 0, 1, \dots, n$  существует

$$N_n(\xi) = \binom{n}{\xi n} = \frac{n!}{(\xi n)!((1-\xi)n)!} \quad (6.9)$$

ячеек с мерой

$$\mu_\xi = \Delta^n(\xi), \text{ где } \Delta(\xi) = \mu_0^k \mu_1^{(1-\xi)} = p^\xi (1-p)^{1-\xi}. \quad (6.10)$$

Полная мера отрезков, представляющих популяцию, равна

$$M(x=1) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mu_i = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \Delta^n(\xi) = (\mu_0 + \mu_1)^n = 1. \quad (6.11)$$

Ячейки, описывающие распределение популяции, полностью покрывают отрезок и содержат всю меру, т. е. любого члена популяции.

### 6.3. Фрактальные подмножества

В  $n$ -м поколении  $N_n(\xi)$  отрезков имеют длину  $\delta_n = 2^{-n}$  и одну и ту же меру  $\mu_i$ . Эти отрезки образуют подмножество  $\mathcal{S}_n(\xi)$  единичного отрезка  $\mathcal{S} = [0, 1]$ . Точки множества  $\mathcal{S}_n(\xi)$  имеют среди первых знаков после запятой в двоичном разложении  $x$ -координаты одинаковое количество нулей, равное  $k = \xi n$ . Разумеется, различным точкам соответствуют различные последовательности нулей и единиц. В пределе при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\xi$  равна доле нулей в представлении точки множества  $\mathcal{S}_\xi$  бесконечной двоичной дробью. Множество  $\mathcal{S}_\xi$  — *фрактальное* множество точек. Чтобы убедиться в этом, покроем множество отрезками длины  $\delta$ , образуем  $d$ -меру  $M_d(\mathcal{S}_\xi)$ , задаваемую соотношением (2.3), и определим фрактальную размерность  $D(\xi)$  этого множества, исследуя, как ведет себя  $M_d$  при  $\delta \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$ :

$$M_d(\mathcal{S}_\xi) = \sum_{\mathcal{S}_\xi} \delta^d = N_n(\xi) \delta^d \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D(\xi), \\ \infty, & d < D(\xi). \end{cases} \quad (6.12)$$

Используя формулу Стирлинга для факториала

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad (6.13)$$

получаем из формулы (6.9) приближенное выражение для  $N_n(\xi)$ :

$$N_n(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi(1-\xi)}} \exp \{ -n(\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)) \}. \quad (6.14)$$

Замечая, что в нашем случае  $n = -\ln \delta / \ln 2$ , мы заключаем, что меру  $M_d$  в формуле (6.12) (если пренебречь членом  $n^{-1/2}$ , дающим только логарифмическую поправку) можно представить в виде

$$M_d(\mathcal{S}_\xi) \sim \delta^{-f(\xi)} \delta^d, \quad (6.15)$$

где показатель  $f(\xi)$  определяется выражением

$$f(\xi) = - \frac{\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)}{\ln 2}. \quad (6.16)$$

Следовательно,  $d$ -мера  $M_d$  для множества  $\mathcal{S}_\xi$  остается конечной при  $\delta \rightarrow 0$  лишь при условии, если  $d = f(\xi)$ , поэтому фрактальная размерность  $D(\xi)$  множества  $\mathcal{S}_\xi$  равна  $f(\xi)$ .

Популяция, порождаемая мультипликативным процессом, распределяется по множеству точек в единичном интервале  $\mathcal{S} = [0, 1]$ . Это

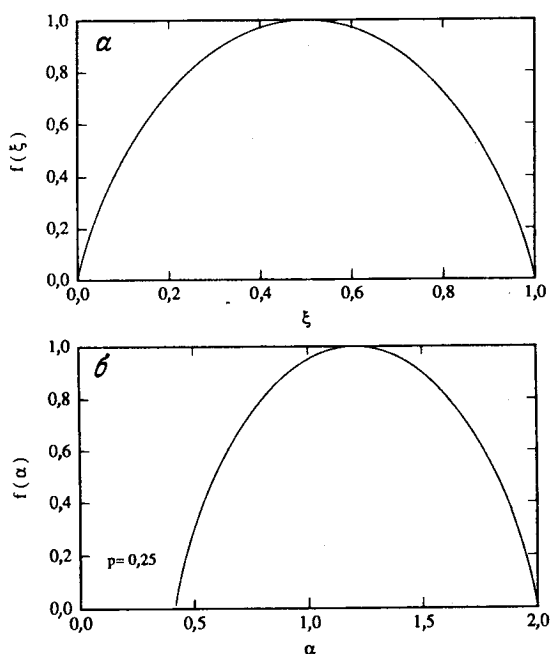


РИС. 6.4. Фрактальные подмножества меры, порожденные биномиальным мультипликативным процессом с  $p = 0,25$ . *a* – фрактальная размерность  $f$  подмножеств  $\mathcal{S}_\xi$  интервала, содержащих точки  $x$ , в двоичном разложении которых (т.е. числа  $x$ ) доля нулей составляет  $\xi$ , как функция от  $\xi$ ; *б* – фрактальная размерность  $f$  подмножеств  $\mathcal{S}_\alpha$  с показателем Липшица–Гёльдера  $\alpha$  как функция от  $\alpha$ .

множество представляет собой объединение (теоретико-множественную сумму) подмножеств  $\mathcal{S}_\xi$ :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\xi} \mathcal{S}_\xi. \quad (6.17)$$

Точки в любом подмножестве  $\mathcal{S}_\xi$  имеют, не строго говоря, *одинаковую* плотность населенности. Множества  $\mathcal{S}_\xi$  фрактальны с фрактальными размерностями, определяемыми выражением (6.16). Их фрактальная размерность зависит от параметра  $\xi$ . На рис. 6.4, *a* представлен график зависимости  $f(\xi)$  от  $\xi$ .

Мера  $M(x)$  популяции, распределенной по единичному отрезку, полностью характеризуется объединением фрактальных множеств. Каждое слагаемое в объединении фрактально и имеет свою фрактальную размерность. Это – одна из причин, обусловивших выбор термина *мультифрактал*.

## 6.4. Показатель Липшица–Гёльдера $\alpha$

Показатель  $\xi$  не очень удобен, и на практике предпочитают пользоваться показателем Липшица–Гёльдера  $\alpha$  (см., например, [134, с. 373]). Особенности меры  $M(x)$  характеризуются показателем  $\alpha$ . Рассмотрим меру, порожденную мультипликативным процессом в  $n$ -м поколении. Эта мера – неубывающая функция от  $x$  с приращениями  $\mu_\xi = \Delta^n(\xi)$ , имеющими при всех  $x$  среди первых  $n$  «знаков» представления числа  $x$  в виде двоичной дроби, т.е.  $x = \sum_{v=1}^n 2^{-v} \varepsilon_v$ , ровно  $\xi \cdot n$  нулей. Выберем точку  $x(\xi)$ , соответствующую заданному значению  $\xi$ ; эта точка принадлежит множеству  $\mathcal{S}_\xi$ . Мера  $M(x)$  определена и в точке  $x(\xi) + \delta$ , где  $\delta = 2^{-n}$ . Приращение меры  $M(x)$  между этими двумя точками равно  $\mu_\xi$ , и

$$\mu_\xi = M(x(\xi) + \delta) - M(x(\xi)) = \delta^\alpha, \quad (6.18)$$

где показатель  $\alpha$  определяется соотношением

$$\mu_\xi = \delta^\alpha. \quad (6.19)$$

В последующих поколениях мы получаем все новые и новые точки множества  $\mathcal{S}_\xi$ , и соотношение (6.18) остается в силе даже в пределе при  $n \rightarrow \infty$ . Функция  $M(x)$ , удовлетворяющая соотношению (6.18), имеет производную при всех  $x$ , если  $\alpha = 1$ , постоянна при  $\alpha > 1$  и *сингулярна* при  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Из формул (6.10) и (6.19) при  $\delta = 2^{-n}$  следует, что мера для мультипликативной популяции имеет показатель Липшица–Гёльдера

$$\alpha(\xi) = \frac{\ln \mu_\xi}{\ln \delta} = - \frac{\xi \ln p + (1 - \xi) \ln(1 - p)}{\ln 2}. \quad (6.20)$$

Это выражение для  $\alpha$  остается в силе для всех точек множества  $\mathcal{S}_\xi$  и линейно по  $\xi$ . Кроме того,  $\alpha$  зависит от веса  $p$ , определяющего разбиение отрезка. Для мультипликативной меры с  $p \leq 1/2$  показатель Липшица–Гёльдера  $\alpha$  удовлетворяет неравенству  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ , где

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= -\ln(1 - p)/\ln 2 \quad \text{при } \xi = 0, \\ \alpha_{\max} &= -\ln p/\ln 2 \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Между параметрами  $\xi$  и  $\alpha$  существует взаимно-однозначное соответствие, что позволяет записывать множество  $\mathcal{S}_\xi$  как  $\mathcal{S}_\alpha$ . Мера  $M(x)$  характеризуется множествами  $\mathcal{S}_\alpha$ , которые в теоретико-множественной сумме составляют единичный интервал  $\mathcal{S} = [0, 1]$ :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha. \quad (6.22)$$

Мера  $M(x)$  имеет *сингулярности* с показателем Липшица–Гёльдера  $\alpha$  на фрактальных множествах  $\mathcal{S}_\alpha$  с фрактальной размерностью  $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$ . Кривая  $f(\alpha)$  для меры популяции, порожденной мультипликативным процессом с  $p = 0,25$ , показана на рис. 6.4, б.

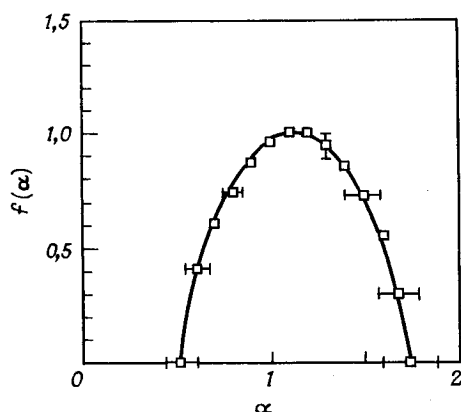


РИС. 6.5. Мультифрактальный спектр для одномерных сечений, проведенных через диссипационное поле в полностью развитых турбулентных течениях (турбулентность за решеткой, след за круговым цилиндром, пограничный слой, атмосферная турбулентность). Квадратики соответствуют экспериментальным средним, сплошная кривая  $f(\alpha)$  — биномиальному мультипликативному процессу с  $p = 0,7$  [160].

В работе Менево и Сринивасана [160] показано, что экспериментальные данные по полностью развитой турбулентности очень хорошо описываются только что представленным мультипликативным процессом. Биномиальный мультипликативный процесс с  $p = 0,7$  приводит к кривой  $f(\alpha)$ , которая с высокой точностью описывает наблюдаемый мультипликативный спектр поля диссипации (рис. 6.5).

### 6.5. Кривая $f(\alpha)$

Кривая  $f(\alpha)$  на рис. 6.4,б имеет несколько характерных особенностей, которые мы обсудим в разд. 6.8. Производная от  $f(\alpha)$  имеет вид

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\ln \xi - \ln(1 - \xi)}{\ln p - \ln(1 - p)}. \quad (6.23)$$

Максимум функции  $f(\alpha)$  равен  $f(\alpha_0) = 1$ . В точке максимума

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}, \\ f_{\text{макс}} &= f(\alpha_0) = 1, \\ \alpha_0 &= -\frac{\ln p + \ln(1 - p)}{2 \ln 2}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Справедливо следующее общее утверждение: максимальное значение фрактальной размерности подмножеств  $\mathcal{S}_\alpha$  равно фрактальной размерности носителя меры. В рассматриваемом нами случае эта фрактальная размерность равна 1, так как мера определена на всем единичном отрезке. Для мер, определенных на фракталах с фрактальной размерностью  $D$ , получаем  $f_{\text{макс}}(\alpha) = D$ . Здесь множество  $\mathcal{S}_{\alpha_0}$  имеет фрактальную размерность 1. Это не означает, что множество  $\mathcal{S}_{\alpha_0}$  покрывает отрезок, —  $\mathcal{S}_{\alpha_0}$  содержит некоторую долю точек отрезка.

Максимум функции  $f(\alpha)$  достигается в точке  $\alpha_0 = 1,207\dots$  при  $p = 0,25$ . Функция  $M(x)$  имеет производную, равную нулю, в точках, где  $\alpha > 1$ . Но  $M(x)$  – сингулярная функция, так как точки, в которых  $\alpha(\xi) \leq 1$ , образуют всюду плотное множество.

Обсуждение свойств функции  $M(x)$  – дело довольно деликатное, поскольку затрагивает такие вопросы, как принадлежность (или непринадлежность) предельных точек к последовательности точек, порожденных мультипликативным процессом, см. [23, 134, 377]. Доступный обзор свойств функции  $M(x)$  см. в работе Биллингсли [24]. Мы вернемся к обсуждению свойств этой функции в гл. 10, а пока ограничимся утверждением о том, что  $M(x)$  имеет производную, равную нулю почти всюду. Тем не менее, когда  $x$  возрастает от 0 до 1, функция  $M(x)$  также возрастает от 0 до 1. График ее – та самая *чертова лестница*, о которой мы уже упоминали. Длина кривой от начала до конца в точке  $(1, 1)$  равна 2. Термин «почти всюду» означает здесь «во всех точках, за исключением множества с мерой Лебега, равной нулю». Эти исключительные точки могут быть покрыты отрезками прямой сколь угодно малой суммарной длины. Нетрудно видеть, что двоичные дроби имеют нулевую (линейную) меру. Запишем все такие дроби по порядку:  $1/2, 1/3, 3/4, 1/8, 3/8, \dots$ . Покроем первую точку отрезком длиной  $\delta^2$ , следующую точку – отрезком длиной  $\delta^3$ , третью точку – отрезком длиной  $\delta^4$  и т. д. Бесконечная последовательность таких отрезков покроет все двоичные дроби, а суммарная длина всех отрезков равна  $\ell = \delta^2 + \delta^3 + \dots = \delta^2/(1 - \delta)$  и стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ .

Существует еще одна характерная точка  $\alpha_{\mathcal{S}}$  кривой  $f(\alpha)$ :

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1, \quad \xi = p, \quad (6.25)$$

$$f(\alpha_S) = \alpha_S = S,$$

$$S = -\{p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)\} / \ln 2,$$

в которой прямая, проведенная через начало координат под углом  $45^\circ$  к положительному направлению оси  $\alpha$ , касается кривой  $f(\alpha)$ . Фрактальная размерность множества  $S_{\alpha_S}$  таких точек равна  $S$ . В величине  $S$  нетрудно узнать (информационную) энтропию (см., например, [134, с. 378]) биномиального мультипликативного процесса. В мультипликативном процессе общего вида, где отрезок подразделяется на  $b$  ячеек с весами  $p_0, p_1, \dots, p_{b-1}$ , как нетрудно видеть, значение  $f(\alpha_S)$  равно величине

$$S = - \sum_{\beta=0}^{b-1} P_{\beta} \log_b p_{\beta}, \quad (6.26)$$

где  $\log_b$  – логарифм по основанию  $b$ . В следующем разделе мы покажем, что почти вся мера  $M(x)$  сосредоточена на множестве  $\mathcal{S}_{\alpha_S}$ .

## 6.6. Концентрация меры

Мультипликативный процесс порождает популяцию, которая концентрирует подавляющую часть первоначально равномерно распределенной популяции на множестве-носителе. В  $n$ -м поколении мера на множестве  $\mathcal{S}_n(\xi)$  определяется выражением

$$M(\mathcal{S}_n(\xi)) = N_n(\xi)\mu_\xi \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp \left\{ -\frac{n}{2p(1-p)}(\xi - p)^2 \right\}. \quad (6.27)$$

Приближенное выражение в правой части получается из формул (6.10) и (6.14) при разложении экспоненциальной функции относительно максимального значения при  $\xi = p$ . Мера множества  $\mathcal{S}_n(\xi)$  как функция от  $\xi$  имеет очень острый пик в окрестности  $\xi = p$  и с увеличением  $n$  убывает, как  $n^{-1/2}$ . Однако конечная часть  $\phi$  полной меры  $M(x=1)$  содержится в объединении множеств

$$\mathcal{S}_\phi = \bigcup_{(p-\sigma) \leq \xi \leq (p+\sigma)} \mathcal{S}_n(\xi), \quad (6.28)$$

где  $\sigma \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В этом нетрудно убедиться, если заметить, что мера множества  $\mathcal{S}_\phi$  определяется выражением

$$\begin{aligned} M(\mathcal{S}_\phi) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} 2 \int_p^{p+\sigma} d\xi \exp \left\{ -\frac{n(\xi - p)^2}{2p(1-p)} \right\} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau dt \exp \{ -t^2 \} \end{aligned} \quad (6.29)$$

(напомним, что  $\xi = k/n$ , поэтому  $\sum_k \dots \rightarrow n \int d\xi \dots$ ), где верхний предел интегрирования  $\tau$  вычисляется по формуле

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{n}{2p(1-p)}}. \quad (6.30)$$

Верхний предел  $\tau$  определяется условием  $M(\mathcal{S}_\phi) = \phi$ , т.е. условием, согласно которому мера множества  $\mathcal{S}_\phi$  составляет конечную (отличную от нуля) долю  $0 < \phi < 1$  от всей популяции. Найдя  $\tau = \tau(\phi)$ , мы получаем

$$\sigma = \tau(\phi) \sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.31)$$

Это доказывает, что мера *сосредоточена* на множестве  $\mathcal{S}_\phi$ . В пределе при  $n \rightarrow \infty$  мы заключаем, что множество  $\mathcal{S}_\phi$  по существу совпадает с множеством  $\mathcal{S}(\xi = p)$  и имеет фрактальную размерность, определяемую

энтропийной размерностью  $\mathcal{S}$  [134]. Описанный выше процесс концентрации меры Мандельброт называет *свертыванием*.

Подведем итоги. Мы установили, что доля *меры*, сколь угодно близкой к 100%, сосредоточена в множествах с таким значением  $\xi \approx p$ , при котором величина  $N(\xi)\mu_\xi$  близка к своему максимуму. Эти множества имеют фрактальную размерность, определяемую энтропией мультипликативного процесса. Разумеется, аналогичные рассуждения приводят к заключению о том, что конечная доля точек отрезка содержится в множествах с  $\xi \approx 1/2$ , для которых величина  $N(\xi)$  близка к своему максимуму. Эти множества имеют фрактальную размерность, определяемую фрактальной размерностью носителя, которая в рассматриваемом случае равна 1.

## 6.7. Последовательность показателей массы $\tau(q)$

Фрактальные структуры, наблюдаемые экспериментально, например береговые линии или контуры вязких пальцев (рис. 4.7), могут быть получены с помощью численного моделирования, как показано на рис. 3.3. И экспериментальные наблюдения, и результаты численного моделирования представимы в виде множеств точек  $\mathcal{S}$ , образующих кривые или фигуры. При анализе структур таких множеств наиболее широко используется метод *подсчета клеток*, суть которого ясна из рис. 2.1. При этом методе  $E$ -мерное пространство наблюдений разбивается на (гипер)кубы с ребром  $\delta$ , после чего производится подсчет числа  $N(\delta)$  кубов, содержащих по крайней мере одну точку множества  $\mathcal{S}$ . Ясно, что такой подсчет дает грубую оценку меры множества  $\mathcal{S}$  и число  $N(\delta)$  не несет в себе никакой информации о *структуре* этого множества. Например, если береговая линия сильно изрезана и пересекает какую-то клетку  $n_i$  раз, то при подсчете эта клетка все равно дает вклад в общее число клеток, покрывающих множество  $\mathcal{S}$ , равный 1, что не вполне «честно». Существует ли способ, позволяющий придавать клеткам с  $n_i > 1$  больший вес, чем клеткам с  $n_i = 1$ ?

Ответ на этот вопрос содержит две основные составляющие: *свертывание* меры  $M(x)$  на множестве, о котором шла речь в разд. 6.2 [130], и неравные масштабные множители, рассмотренные в разд. 5.2. Грассбергер [74], Хентшель и Прокачча [87] и Грассбергер и Прокачча [75] воспользовались мерой, позволяющей учесть проблему свертывания. Тесно связанная с ней мера, позволяющая преодолеть также трудности, связанные с неравными масштабными множителями, недавно была предложена Холси и др. [81]. Обе меры с точностью до обозначений совпадают с вероятностными мерами, которые рассматривали Мандельброт [129, 130, 134] и Фосс [213]. Микин [155, 156] ввел близкое по смыслу понятие – набор показателей массы для поверхности.

Пусть множество  $\mathcal{S}$ , состоящее из  $N$  точек, имеет в  $i$ -й ячейке  $\mathcal{N}_i$  точек. Эти точки можно рассматривать как выборку, отражающую распределение меры на множестве. Воспользуемся «массой», или *веро-*

ятностью  $\mu_i = \mathcal{N}_i / \mathcal{N}$ , соответствующей  $i$ -й клетке, и построим меру, которую можно записать в виде

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q \delta^d = N(q, \delta) \delta^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q). \end{cases} \quad (6.32)$$

Эта мера обладает *показателем* массы  $d = \tau(q)$ , при котором она не обращается в нуль и в бесконечность, когда  $\delta \rightarrow 0$ . Показатель массы  $\tau(q)$  для данного множества зависит от того, какой порядок момента  $q$  выбран. Мера характеризуется всей последовательностью показателей  $\tau(q)$ , определяющих, по какому степенному закону изменяются в зависимости от  $\delta$  вероятности  $\{\mu_i\}$ . Из формулы (6.32) следует, что взвешенное число клеток  $N(q, \delta)$  представимо в виде

$$N(q, \delta) = \sum_i \mu_i^q \sim \delta^{-\tau(q)}, \quad (6.33)$$

а показатель массы определяется выражением

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (6.34)$$

Прежде всего заметим, что, выбирая  $q = 0$  ( $q$  – порядок момента), мы получаем  $\mu_i^{q=0} = 1$ . Следовательно,  $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$  – это просто число клеток, образующих покрытие множества, а  $\tau(0) = D$  есть фрактальная размерность множества. Вероятности нормированы:  $\sum_i \mu_i = 1$ , и из формулы (6.34) следует, что  $\tau(1) = 0$ .

Выбор больших значений  $q$ , например  $q = 10$  или  $100$ , в соотношении (6.33) способствует повышению вклада ячеек с относительно большими значениями  $\mu_i$ , поскольку, если  $q \gg 1$  и  $\mu_i > \mu_j$ , то  $\mu_i^q \gg \mu_j^q$ . Наоборот, выбор  $q \ll 1$  способствует повышению вклада ячеек с относительно малыми значениями меры  $\mu_i$  на ячейке. Эти пределы удобнее всего рассматривать, вводя производную  $d\tau(q)/dq$ , определяемую с помощью предела

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i^q \ln \mu_i}{(\sum_i \mu_i^q) \ln \delta}. \quad (6.35)$$

Пусть  $\mu_-$  – минимальное значение  $\mu_i$  в сумме. Тогда

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_i' \mu_i^q) \ln \mu_-}{(\sum_i' \mu_i^q) \ln \delta},$$

где штрих у знака суммы указывает на то, что суммирование проводится только по ячейкам с  $\mu_i = \mu_-$ . Последнее выражение запишем в виде

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_-}{\ln \delta} = -\alpha_{\max}. \quad (6.36)$$

Здесь мы воспользовались определением (6.19) показателя Липшица–Гёльдера  $\alpha$ . Аналогичные рассуждения в пределе при  $q \rightarrow +\infty$  приводят к заключению о том, что минимальное значение  $\alpha$  определяется выражением

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_+}{\ln \delta} = -\alpha_{\min}, \quad (6.37)$$

где  $\mu_+$  – наибольшее значение  $\mu_i$ , которое соответствует наименьшему значению  $\alpha$ . В следующем разделе мы покажем, что и в общем случае  $\alpha = -d\tau/dq$ .

При  $q = 1$  получим такое выражение для  $d\tau/dq$ :

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q=1} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(\delta)}{\ln \delta}; \quad (6.38)$$

оно имеет особый интерес: здесь  $S(\delta)$  – (информационная) энтропия разбиения меры  $\mathcal{M} = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}$  по ячейкам размера  $\delta$ . Энтропию разбиения можно записать в виде

$$S(\delta) = - \sum_i \mu_i \ln \mu_i \sim -\alpha_1 \cdot \ln \delta. \quad (6.39)$$

Показатель  $\alpha_1 = -(d\tau/dq)|_{q=1} = f_{\mathcal{S}}$  есть также фрактальная размерность множества, на котором сосредоточена мера; он задает степенной закон, по которому изменяются при изменении размера  $\delta$  ячейки энтропия (разбиения) меры. Заметим, что энтропия разбиения  $S(\delta)$  при разрешении  $\delta$  может быть выражена через энтропию  $S$  меры по формуле  $S(\delta) = -S \ln \delta$  (см. также выражение (6.26)).

Типичное поведение последовательности показателей массы  $\tau(q)$  можно проиллюстрировать примером меры на отрезке, порожденной мультипликативным биномиальным процессом. Можно показать, что для этого процесса

$$N(d, \delta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{qk} (1-p)^{q(n-k)} = (p^q + (1-p)^q)^n. \quad (6.40)$$

Число поколений, как и прежде, определяется выражением  $n = -\ln \delta / \ln 2$ , поэтому, используя соотношение (6.34), получаем

$$\tau(q) = \frac{\ln(p^q + (1-p)^q)}{\ln 2}. \quad (6.41)$$

Получающаяся последовательность показателей массы показана на рис. 6.6. При  $q = 0$  из формулы (6.41) находим, что  $\tau(0) = 1$ . Это размерность носителя, т.е. единичного отрезка.

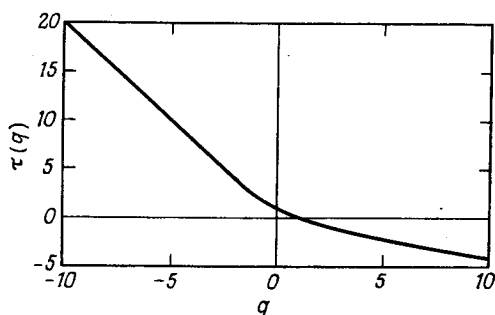


РИС. 6.6. Последовательность показателей массы  $\tau(q)$  как функция порядка  $q$  момента для меры  $M_d(q, \delta)$  биномиального мультипликативного процесса с  $p = 0,25$ .

## 6.8. Соотношение между $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

Последовательность показателей массы связана с кривой  $f(\alpha)$  общей зависимостью, которая может оказаться полезной в приложениях. Носителем мультифрактальной меры является множество  $\mathcal{S}$  — объединение фрактальных подмножеств  $\mathcal{S}_\alpha$  с индексом  $\alpha$ , выбранным из континуума допустимых значений:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}. \quad (6.42)$$

Какие фрактальные размерности описывают меру? Так как полное множество  $\mathcal{S}$  фрактально с фрактальной размерностью  $D$ , подмножества имеют фрактальную размерность  $f(\alpha) \leq D$ . Для фрактальных подмножеств с фрактальной размерностью  $f(\alpha)$  число  $N(\alpha, \delta)$  отрезков длиной  $\delta$ , необходимых для того, чтобы покрыть множества  $\mathcal{S}_\alpha$  с индексом  $\alpha$  в интервале от  $\alpha$  до  $\alpha + d\alpha$ , равно

$$N(\alpha, \delta) = \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)}. \quad (6.43)$$

Здесь  $\rho(\alpha) d\alpha$  — число множеств от  $\mathcal{S}_\alpha$  до  $\mathcal{S}_{\alpha+d\alpha}$ . Для этих множеств мера  $\mu_\alpha$  в ячейке величины  $\delta$  степенным образом зависит от  $\delta$  (см. формулу (6.2)), что позволяет нам записать соотношение  $\mu_\alpha = \delta^\alpha$ , и поэтому меру  $M$  для множества  $\mathcal{S}$ , задаваемую соотношением (6.32), можно представить в виде

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)} \delta^{q\alpha} \delta^d = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha) + d}. \quad (6.44)$$

Интеграл в правой части мажорируется интегралом, в котором подынтегральное выражение заменено его максимальным значением, т. е. таким, для которого

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \{ q\alpha - f(\alpha) \} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = 0. \quad (6.45)$$

Следовательно, интеграл в выражении (6.44) асимптотически определяется формулой

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^{q\alpha(q) - f(\alpha(q)) + d}. \quad (6.46)$$

Величина  $M_d$  остается конечной в пределе при  $\delta \rightarrow 0$ , если параметр  $d$  равен показателю массы  $\tau(q)$ , определяемому как

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q), \quad (6.47)$$

где  $\alpha(q)$  – решение уравнения (6.45). Таким образом, показатель массы может быть выражен через показатель Липшица–Гёльдера  $\alpha(q)$  для массы и фрактальную размерность  $f(\alpha(q))$  множества-носителя этого показателя.

В то же время, если показатели массы  $\tau(q)$  известны, то мы можем определить показатель Липшица–Гёльдера и  $f$ , используя формулы (6.45) и (6.47), и тогда имеем

$$\alpha(q) = -\frac{d}{dq}\tau(q), \quad (6.48)$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q).$$

Эти два уравнения задают параметрическое представление кривой  $f(\alpha)$ , т. е. фрактальной размерности  $f(\alpha)$  носителя сингулярностей меры с показателем Липшица–Гёльдера  $\alpha$ . Кривая  $f(\alpha)$  характеризует меры и эквивалентна последовательности показателей массы  $\tau(q)$ . Пара уравнений (6.48) задает преобразование Лежандра от независимых переменных  $\tau$  и  $q$  к независимым переменным  $f$  и  $\alpha$ . Для простого примера биномиального мультипликативного процесса с показателем массы  $\tau(q)$ , определяемым соотношением (6.41) (см. рис. 6.6), два уравнения (6.48) позволяют восстановить кривую  $f(\alpha)$ , показанную на рис. 6.4, б.

Максимум кривой  $f(\alpha)$  достигается при  $df(\alpha)/d\alpha = 0$ . Из уравнения (6.45) следует, что в точке максимума  $q = 0$ , а из уравнения (6.48) – что  $f_{\max} = D$ , так как нами было доказано равенство  $\tau(0) = D$ , где  $D$  – фрактальная размерность носителя меры. Различные соотношения между кривой  $f(\alpha)$  и последовательностью показателей массы сведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

| $q$                     | $\tau(q)$              | $\alpha = -d\tau(q)/dq$                               | $f = q\alpha + \tau(q)$ |
|-------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------|
| $q \rightarrow -\infty$ | $\sim -q\alpha_{\max}$ | $\rightarrow \alpha_{\max} = -\ln \mu_- / \ln \delta$ | $\rightarrow 0$         |
| $q = 0$                 | $D$                    | $\alpha_0$                                            | $f_{\max} = D$          |
| $q = 1$                 | $0$                    | $\alpha_1 = -S(\delta)/\ln \delta$                    | $f_s = \alpha_1 = S$    |
| $q \rightarrow +\infty$ | $\sim -q\alpha_{\min}$ | $\rightarrow \alpha_{\min} = -\ln \mu_+ / \ln \delta$ | $\rightarrow 0$         |

Некоторые значения и пределы последовательности показателей массы  $\tau(q)$  и кривой  $f(\alpha)$  для мультифрактальной меры  $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$ , носителем которой является множество с фрактальной размерностью  $D$ . Здесь  $q$  – порядок момента меры  $\mathcal{M}$  (см. соотношение (6.32)). Наибольшая и наименьшая вероятности, соответствующие ячейкам величины  $\delta$ , равны соответственно  $\mu_-$  и  $\mu_+$ .  $S(\delta)$  – энтропия разбиения меры  $\mathcal{M}$  по ячейкам величины  $\delta$ . Мера имеет энтропию  $S = -\lim_{\delta \rightarrow 0} S(\delta)/\ln \delta = f_s$ , равную фрактальной размерности множества, на котором сосредоточена мера.

## 6.9. Свертывание с несколькими масштабами длины

Рассмотрим обобщение биномиальной мультипликативной меры на случай, когда ее носителем является канторовское множество, изображенное на рис. 6.7. В каждом поколении каждый из уцелевших отрезков подразделяется на две части: меньшую с относительной длиной  $l_0 = 0,25$  и большую с относительной длиной  $l_1 = 0,4$ , а средняя часть вырезается. Меньшую часть мы сопоставляем с долей  $p_0 = 0,6$  меры, сосредоточенной на предшествующем («материнском») отрезке, а большую часть — только с долей  $p_1 = 0,4$  той же меры.

Если мы попытаемся применить к канторовскому стержню (рис. 6.7) определение (6.32), то сразу же убедимся в том, что это определение неадекватно, так как все ячейки, используемые для покрытия множества, имеют *одну и ту же* величину  $\delta$ . Холси и др. [81] воспользовались мерой, которая является комбинацией двух обобщений (5.4) и (6.32). Пусть, как в определении (5.4), фрактальное множество  $\mathcal{S}$  может быть разбито на некоторое число  $N$  непересекающихся частей  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{N-1}$ , покрывающих все множество. Обозначим через  $l_i$  евклидову длину  $i$ -й части. Тогда подмножество  $\mathcal{S}_i$  уместается в (гипер)кубе с ребром  $l_i$ , но  $l_i < \delta$  при всех  $i$ , и мера определяется соотношением

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_i^q l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q). \end{cases} \quad (6.49)$$

Эта мера также имеет показатель массы  $d = \tau(q)$ , при котором мера при  $\delta \rightarrow 0$  не обращается ни в нуль, ни в бесконечность.

Проиллюстрируем применение меры на примере двухмасштабного ( $l_0 = 0,25$ ;  $l_1 = 0,4$ ) канторовского множества с мерой, порожденной мультипликативным процессом ( $p_0 = 0,6$ ;  $p_1 = 0,4$ ) (см. рис. 6.7 и работу Холси и др. [81]). Так как в  $n$ -м поколении канторовского стержня на рис. 6.7 мы имеем  $\binom{n}{k}$  отрезков длиной  $l_0^k l_1^{n-k}$  и вес  $\mu_i = p_0^k p_1^{n-k}$ , мера легко вычисляется и определяется выражением

$$M_d(q, \delta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p_0^q l_0^d)^k (p_1^q l_1^d)^{n-k} = (p_0^q l_0^d + p_1^q l_1^d)^n. \quad (6.50)$$

Эта мера остается конечной с  $\delta = l_1^n$  при  $n \rightarrow \infty$  в том и только в том случае, если мы выберем  $d = \tau(q)$ , где  $\tau(q)$  — решение уравнения

$$p_0^q l_0^{\tau(q)} + p_1^q l_1^{\tau(q)} = 1. \quad (6.51)$$

Уравнение (6.51) было решено нами относительно  $\tau(q)$  численно. Но коль скоро показатель массы  $\tau(q)$  известен, кривую  $f(u)$ , изображенную на рис. 6.8, мы находим, как прежде (с помощью второго из соотношений (6.48)).

При  $q = 0$  показатель массы  $\tau(0)$  равен  $D = 0,6110$ ; то же значение мы получили для фрактальной размерности множества, пользуясь определением (5.4) меры множества. В пределе при  $q \rightarrow \infty$  мы получаем  $p_0^q \gg p_1^q$ . Следовательно, в левой части уравнения (6.51) главным

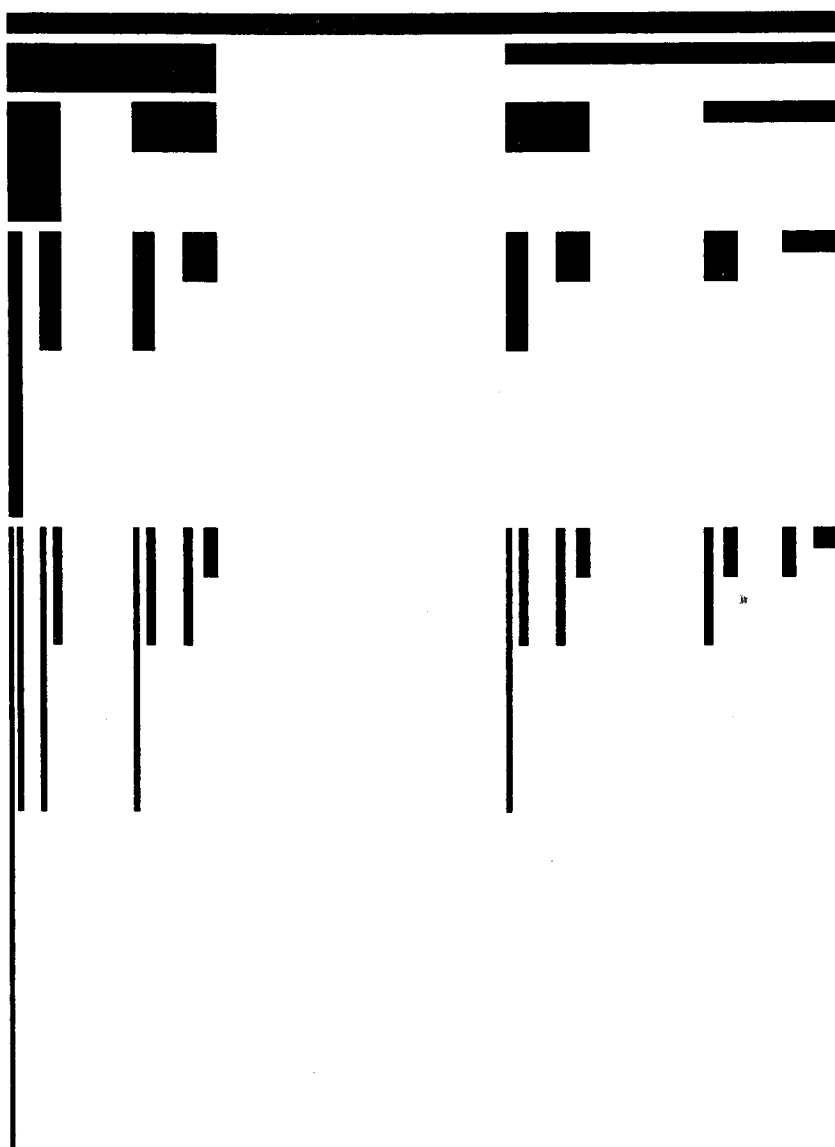


РИС. 6.7. Двухмасштабная фрактальная мера на канторовском стержне с  $l_0 = 0,25$  и массой  $p_0 = 0,6$  и  $l_1 = 0,4$  с массой  $p_1 = 0,4$ . Высота стержней в  $n$ -м поколении пропорциональна плотности  $\rho_i = \mu_i/l_i$ . Фрактальная размерность канторовской пыли, служащей носителем меры, равна  $D = 0,6110$ .

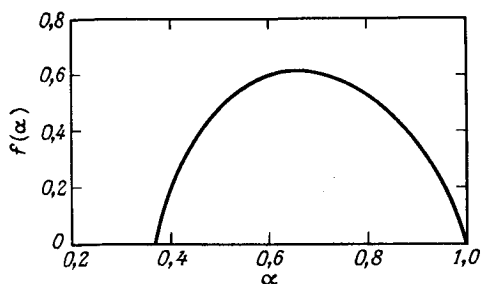


РИС. 6.8. Кривая  $f(\alpha)$  для двухмассовой фрактальной меры на канторовском стержне  $\mathcal{S}$  с  $l_0 = 1/4$ ,  $l_1 = 2/5$  и массами  $p_0 = 3/5$ ,  $p_1 = 2/5$ . Кривая описывает фрактальную размерность  $f$  подмножеств  $\mathcal{S}_\alpha$  с показателем Липшица – Гельдера  $\alpha$  как функцию  $\alpha$ .

является первый член, и  $\tau(q)$  определяется просто уравнением

$$p_0^q l_0^{\tau(q)} = 1.$$

Решая его, получаем

$$\tau(q)|_{q \rightarrow +\infty} = -q\alpha_{\min}, \text{ где } \alpha_{\min} = \frac{\ln p_0}{\ln l_0} = 0,3685. \quad (6.52)$$

Аналогично при  $q \rightarrow -\infty$  главным становится член, содержащий  $p_1$ , и

$$\tau(q)|_{q \rightarrow -\infty} = -q\alpha_{\max}, \text{ где } \alpha_{\max} = \frac{\ln p_1}{\ln l_1} = 1. \quad (6.53)$$

Холси и др. [81] проанализировали меру, задаваемую соотношением (6.49), связав ее с размерностью  $D_q$ , введенной Грассбергером [74], Хентшелем и Прокаччей [87] и Грассбергером и Прокаччей [75] и определяемой соотношением

$$D_q = \tau(q)/(1 - q), \quad (6.54)$$

где численный множитель  $(1 - q)$  модифицирует показатель массы с таким расчетом, чтобы для множеств постоянной плотности в  $E$ -мерном пространстве выполнялось равенство  $D_q = E$ . Спектр фрактальных размерностей  $D_q$  задается предельным соотношением

$$D_q = \frac{1}{q - 1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (6.55)$$

Порядком момента  $q$  может быть любое число в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и функция  $D_q$  есть *спектр фрактальных размерностей для фрактальной меры на множестве  $\mathcal{S}$* . Если мы выберем значение  $q = 0$  для порядка момента  $q$ , то получим  $\mu_i^{q=0} = 1$ . Следовательно,  $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$  есть просто число клеток, необходимое для того, чтобы покрыть множество, и величина  $D_{q=0} = D$  равна фрактальной размерности множества. В пределе при  $q \rightarrow \infty$  мы получаем, что  $D_\infty = \alpha_{\min}$ , в то время как  $D_{-\infty} = \alpha_{\max}$ .

Из-за сингулярности  $1/(1 - q)$ , входящей в определение размерности  $D_q$ , при вычислении  $N(q, \delta)$  в пределе  $q \rightarrow 1$  необходимо соблюдать некоторую осторожность. Замечая, что  $\mu_i^q = \mu_i \mu_i^{q-1} = \mu_i \exp \{(q - 1) \ln \mu_i\}$  и

используя то, что  $\exp\{(q-1)\mu_i\} \rightarrow 1 + (q-1)\ln \mu_i$  при  $q \rightarrow 1$ , получаем

$$\ln\left(\sum_i \mu_i^q\right) \rightarrow \ln\left\{1 + (q-1)\sum_i \mu_i \ln \mu_i\right\} \approx (q-1)\sum_i \mu_i \ln \mu_i.$$

Мы воспользовались здесь тем, что  $\sum_i \mu_i = 1$ . Таким образом, показано, что  $D_{q=1}$  определяется выражением

$$D_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta}. \quad (6.56)$$

Эта размерность описывает скейлинговое поведение *энтропии* разбиения меры на множестве  $\mathcal{S}$ . Энтропия  $S(\delta)$ , вводимая в статистической физике для вероятностей  $\{\mu_i\}$ , распределенных по ячейкам величины  $\delta$ , определяется соотношением

$$S = -\sum_i \mu_i \ln \mu_i \sim -D_1 \ln \delta. \quad (6.57)$$

Исходя из соотношений, выведенных в предыдущем разделе, мы заключаем, что  $\alpha = f = D$  при  $q = 1$ .

Чтобы получить какое-то представление о спектре размерностей, рассмотрим обычный евклидов случай. Для равномерно распределенной меры в  $E$ -мерном пространстве с постоянной плотностью точек разделим пространство на  $N = \delta^{-E}$  ячеек объемом  $\delta^E$ . Тогда  $\mu_i = \delta^{Ep}$  и

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^q = \sum_{i=1}^N \delta^{qE} = \delta^{(q-1)E}.$$

Подставляя это соотношение в определение (6.55), мы заключаем, что спектр фрактальных размерностей  $D_q$  для равномерно распределенной меры в пространстве равна евклидовой размерности:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \delta^{(q-1)E}}{\ln \delta} = E. \quad (6.58)$$

Таким образом, мы утверждаем, что спектр фрактальных размерностей сводится к одному значению  $E$  для равномерно распределенной меры и не зависит от порядка момента  $q$ , т.е. не имеет структуры. Этот

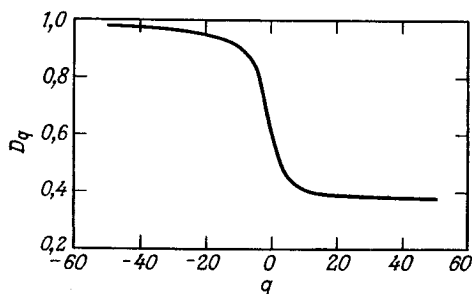


РИС. 6.9. Спектр фрактальных размерностей  $D_q$  как функция порядка  $q$  момента для триадной канторовской пыли с  $l_0 = 1/4$ ,  $l_1 = 2/5$  и массами  $p_0 = 3/5$ ,  $p_1 = 2/5$ .  $D_\infty = \ln p_0 / \ln l_0 = 0,3685$  и  $D_{-\infty} = \ln p_1 / \ln l_1 = 1$ .

результат объясняет также использование множителя  $1/(1 - q)$  в определении величин  $D_q$ . Попутно заметим, что энтропия определяется выражением  $S = -\sum_i \mu_i \ln \mu_i = \ln \mathcal{N} = -E \ln \delta$ , поэтому энтропийная размерность в этом случае действительно равна  $E$ .

На рис. 6.9 показан спектр фрактальных размерностей  $D_q$  как функция порядка момента  $q$  для канторовского стержня, изображенного на рис. 6.7.

## 6.10. Мультифрактальная конвекция Рэлея – Бенара

Замечательным примером приложения изложенных выше идей к гидродинамической неустойчивости при тепловой конвекции может служить работа Енсена и др. [101]. Эти авторы исследовали тепловую конвекцию ртути в небольшой ячейке площадью  $0,7 \times 1,4 \text{ см}^2$  и высотой  $0,7 \text{ см}$ . Температура дна поддерживалась на уровне  $T_{\text{дно}} = T_{\text{верх}} + \Delta T$ , т.е. выше температуры верхней поверхности. При этом в ячейке возникала конвекция с образованием двух валов с горизонтальными осями.

При увеличении разности температур  $\Delta T$  выше некоторого критического значения конвективные валы теряли устойчивость и начинали совершать поперечные колебания с частотой  $\omega_0 \approx 230 \text{ МГц}$ . Енсен с соавторами возмущали систему, помещая ячейку в горизонтальное магнитное поле и пропуская переменный электрический ток между низом и верхом в центре ячейки. Частота переменного тока составляла  $\omega_{\text{пер}} = \Omega \omega_0$ . Отношение частот  $\Omega$  есть число вращений и выбрано так, чтобы оно было иррациональным числом – золотым сечением  $\Omega = \Omega_{\text{ЗС}} = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Обоснование именно такого выбора дает теория динамических систем.

В результате возмущения температура, измеряемая термометром вблизи дна ячейки, начинает нерегулярно флуктуировать во времени. Развертка таких флуктуаций представляет собой временной ряд температур  $x_t$ , где  $t$  – время, измеряемое в интервалах между наблюдениями. На рис. 6.10 показан график зависимости  $x_{t+1}$  от  $x_t$ , построенный по 2500 наблюдениям  $x_t$ . Расположение экспериментальных точек отражает существование странного аттрактора в фазовом пространстве для дви-

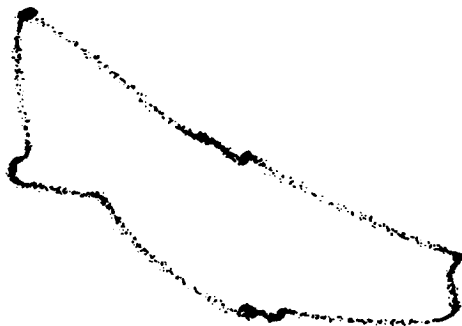


РИС. 6.10. Экспериментальный аттрактор для тепловой конвекции. Временной ряд температур  $x_t$  использован для определения температуры в момент времени  $t + 1$ , т.е. для построения графика зависимости  $x_{t+1}$  от  $x_t$ . Построенная кривая соответствует проекции аттрактора движения в фазовом пространстве [101].

жения этой системы. Точки на аттракторе, образующие временной ряд, сосредоточены в различных областях фазового пространства с неодинаковой интенсивностью. Некоторые скопления экспериментально наблюдаемых точек на рис. 6.10 обусловлены тем, что являются проекциями истинного аттрактора в фазовом пространстве. Но если мы воспользуемся для представления временного рода трехмерным пространством с координатами  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ , то такого рода эффект проекции исчезает и в действительности анализ экспериментальных данных проводится в пространстве.

Енсен с соавторами анализировали экспериментальные данные следующим образом. Выберем на траектории какую-нибудь точку  $x_i$  и, отправляясь от нее, подсчитаем число  $m_i$  шагов вдоль временного ряда, которые необходимо совершить прежде, чем текущая точка не окажется от исходной на расстоянии, не превышающем  $\delta$ . Вероятность  $p_i$  попасть в гиперкуб с ребром  $\delta$  по оценке есть величина  $p_i \sim 1/m_i$ . Вычислим по формуле (6.49) меру  $M_d(q, \delta)$ . Не следует, однако, забывать о том, что сумма в формуле (6.49) берется по клеткам, образующим покрытие множества точек, а не по точкам множества. Это легко исправить, так как число точек в  $i$ -й ячейке  $\sim \sum_{i \in I} 1/p_i$ . Используя экспериментальные точки, получаем

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^d \sum_i (m_i(\delta))^{1-q}. \quad (6.59)$$

Мера в соотношении (6.59) вычислена для ячеек величины  $\delta$ , которая изменяется на два порядка, и критическая размерность определена по графику соотношения

$$\sum_i m_i(\delta)^{(1-q)} \sim \delta^{-\tau(q)}, \quad (6.60)$$

построенному в дважды логарифмических координатах.

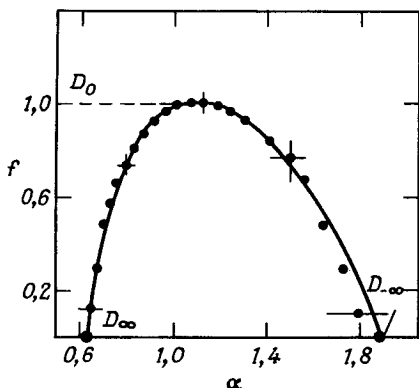


РИС. 6.11. Кривая  $f(\alpha)$  для тепловой конвекции. Точки заимствованы из наблюдаемого временного ряда. Показана кривая  $f(\alpha)$  для критического отображения окружности на себя. Следует подчеркнуть отсутствие свободных параметров и замечательное согласие теории с данными наблюдений [101].

Вычислив критическую размерность, находим  $\alpha(q)$  и  $f(q)$  по формулам (6.48). Точки, полученные в результате такой обработки экспериментальных данных, представлены на рис. 6.11. Интервалы ошибок для точек авторы оценивали, варьируя диапазон изменения  $\delta$ , в пределах которого степенной закон (6.60) давал хорошее приближение к наблюдаемым значениям. Общий вид кривой  $f(\alpha)$ , построенной по экспериментальным точкам, аналогичен кривой для двухмасштабного канторовского стержня (рис. 6.8). Заметим, что такой анализ использует больше экспериментальной информации, чем содержится на рис. 6.10, так как  $p_i$  явно зависит от последовательности точек на рис. 6.10 во времени.

Поистине замечательно то, что кривая на рис. 6.11 построена *не* путем подгонки под экспериментальные точки, а вычислена независимо для отображения окружности на себя с числом вращения, равным золотому сечению!

Отображение окружности на себя — это итерационное отображение, переводящее одну точку в какую-то другую точку окружности. Обозначим точки на окружности углами  $\theta$ , образуемыми радиусами, проведенными в точки, с некоторым выделенным направлением. Начав с произвольной точки  $\theta_0$ , образуем последовательность точек с помощью повторного применения отображения:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n. \quad (6.61)$$

Это отображение исследовано весьма подробно (см., например, [98–100]). Оно имеет странный аттрактор для критического цикла, возникающего при критическом значении  $K = 1$  с числом вращений  $\Omega = \Omega_{\text{ЗС}}$ . Кривая на рис. 6.11 есть кривая  $f(\alpha)$  для этого отображения окружности на себя.

Данные, представленные на рис. 6.11, показывают, что тепловая конвекция, возмущаемая с числом вращений, равным золотому сечению, и критическое отображение окружности на себя обладают одинаковой фрактальной структурой и поэтому принадлежат к *одному и тому же классу универсальности*. Кроме того, фрактальная размерность множества есть максимальное значение, найденное для  $f$ , которое дает  $f = D_0 = 1$ . Этого можно было ожидать, так как носителем меры в рассматриваемом случае является окружность, которая одномерна. Дальнейшие подробности и анализ см. в работе Прокаччи [179].

В заключение заметим, что определение надлежащих вероятностей  $p_i$  — задача далеко не тривиальная. Действительно, нахождение правильной процедуры определения формулы (6.32) для меры экспериментального множества эквивалентно правильному выбору параметра порядка для фазового перехода. После того как параметр порядка установлен, становится применим весь мощный аппарат теории фазовых переходов Ландау, и критическое поведение можно вычислять с помощью методов ренормгруппы. Но для правильного выбора параметра порядка необходимо глубокое понимание исследуемого явления.

## 6.11. ОДА и гармонические меры

Рассмотрим кластер, образовавшийся в результате процесса ОДА (см. рис. 3.3). Как лучше всего описать поверхность или периметр таких фрактальных структур? Один из методов количественного описания таких поверхностей связан с *гармонической мерой*. Эта (вероятностная) мера определяется (относительно данного кластера) как вероятность  $p(r)dr$  того, что совершающая случайное блуждание частица, прибли-

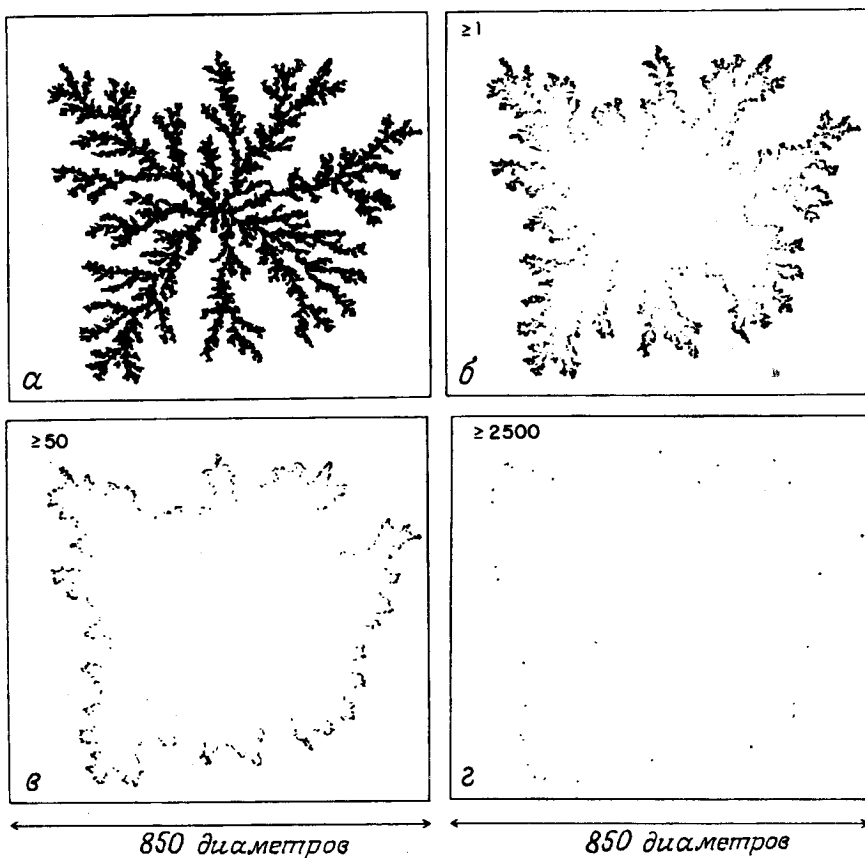


РИС. 6.12. Результат моделирования, в котором  $10^6$  частиц, совершающих случайные блуждания, были использованы для зондирования двумерного кластера, полученного с помощью внерешеточной ОДА. После того как частица соприкасается с кластером, ее удаляют, и новая частица начинает случайное блуждание из случайно выбранной точки на окружности, ограничивающей кластер извне. а) кластер из 50 000 частиц, полученный с помощью ОДА; б–д) места, в которых находятся частицы, входившие в соприкосновение со случайно блуждающими частицами не менее 1 раза,  $\geq 50$  раз и  $\geq 2500$  раз [159].

жаясь к кластеру из бесконечности, впервые достигнет границы кластера в точке, расположенной между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ .

На практике гармоническую меру оценивают с помощью численного моделирования. Сначала кластер, возникающий в результате ОДА, выращивают с помощью алгоритма Уиттена – Сандера, когда же число частиц в кластере станет равным  $N$ , а диаметр кластера достигнет  $L$ , рост *останавливают*. Кластер, получающийся в результате ОДА и представленный на рис. 6.12, *a*, типичен. В нем нет петель, а число узлов  $N_p$  на периметре, т. е. число возможных точек роста, пропорционально числу  $N$  частиц в кластере. Оба числа изменяются по степенному закону в зависимости от радиуса гирации  $R_g$  или диаметра  $L$  кластера:

$$N_p \sim N \sim L^D. \quad (6.62)$$

Фрактальная размерность кластеров ОДА в двумерном случае есть величина  $D = 1,71$ . Возможные точки роста на периметре кластера ОДА перенумерованы индексом  $k = 1, \dots, N_p$ .

Для данного кластера ОДА гармоническая мера оценивается с помощью дополнительного численного моделирования, в ходе которого поверхность кластера ОДА зондируется большим числом  $\mathcal{N}$  случайно блуждающих частиц. После того как частица входит в соприкосновение с кластером, ее удаляют, и из случайным образом выбранной точки на окружности, описанной вокруг кластера, выпускают новую частицу, также совершающую случайные блуждания. Вероятность  $p_k$  того, что случайно блуждающая частица соприкоснется с  $k$ -м узлом на периметре, по оценке равна  $p_k = \mathcal{N}_k / \mathcal{N}$ , где  $\mathcal{N}_k$  – число контактов случайно блуждающих частиц с  $k$ -м узлом периметра. Набор вероятностей

$$\mathcal{H} = \{p_k\}_{k=1}^{N_p} \quad (6.63)$$

содержит приращения гармонической меры  $M_{\mathcal{H}}$  при разрешении  $\delta$ , соответствующем диаметру диффундирующих частиц. Недавние работы по гармонической мере выполнили Микин [155, 156] и Наякава и др. [84].

Спектр фрактальных размерностей для гармонической меры вычисляется, как в разд. 6.7. Необходима, однако, небольшая модификация, связанная с тем, что теперь мы используем частицы фиксированного диаметра  $\delta$  и исследуем рост диаметра  $L$  кластера. Соотношение (6.33) принимает вид

$$N(q, L) = \sum_k p_k^q \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^{-\tau(q)} \sim L^{\tau(q)}. \quad (6.64)$$

Макаров [121] показал, что информационная размерность  $f(q = 1)$  равна единице для гармонической меры на границе *любой* связной области в двух измерениях. При других значениях  $q$  для определения информационной размерности необходимо проводить численное моделирование. Вершины выступов имеют наибольшие вероятности и дают наибольшие вклады в сумму, стоящую в правой части соотношения

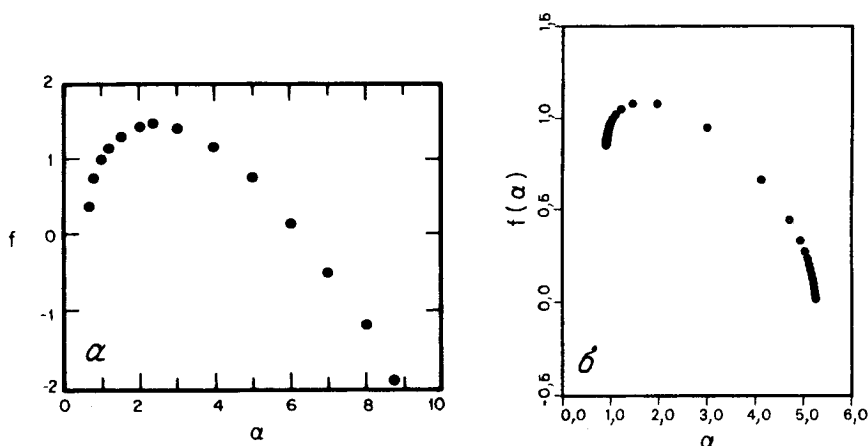


РИС. 6.13. *a* – кривая  $f(\alpha)$  для гармонической меры на кластерах, полученных с помощью ОДА. Наибольший из оцениваемых кластеров содержал 150 частиц [7]; *б* – кривая  $f(\alpha)$  для гармонической меры, вычисленной для структуры с вязкими пальцами (аналогичной структуре на рис. 4.5), которая наблюдалась в ячейке Хеле-Шоу.

(6.64), при  $q \gg 1$ . Точные оценки размерностей  $D_q$  могут быть получены в этом же диапазоне значений. Но при  $q \ll 1$  наибольшие вклады в сумму дают наименьшие вероятности, а оценить их точно очень трудно, так как для случайно блуждающей частицы вероятность проникнуть в самую глубь «фиорда» практически равна нулю. После того как в результате численного моделирования получен показатель массы  $\tau(q)$ , открывается возможность найти из двух уравнений (6.48) показатель Липшица – Гёльдера  $\alpha$  и фрактальную размерность  $f(\alpha)$  подмножеств  $S_\alpha$ , на которых гармоническая мера имеет сингулярности с показателем  $\alpha$ . Амитрано и др. [7] воспользовались электростатическим вариантом задачи об ОДА и решили получающиеся уравнения численно. Полученная ими кривая  $f(\alpha)$  представлена на рис. 6.13, *a*. Заметим, что кривая  $f(\alpha)$  имеет фрактальную размерность подмножества узлов, образующих носитель гармонической меры; поэтому можно ожидать, что  $f(\alpha) \geq 0$ . Отрицательные значения  $f(\alpha)$  на рис. 6.13 не имеют физического смысла и обусловлены усреднением по большому числу результатов вычислений вероятностей  $p_k$  (см. также [155, 156]).

Гармоническая мера дает полезную характеристику сложной поверхности фрактальных кластеров. Можно было бы ожидать, что максимум кривой  $f(\alpha)$  достигается при  $q = 0$ . Но  $p_k^0 = 1$ , и  $N(q = 0, L)$  есть просто число узлов на периметре  $N_P$ , в силу чего  $f_{\max} = D = 1.71$ . Численные эксперименты, выполненные Амитрано и др. (см. рис. 6.13, *a*), дают  $f_{\max} \approx 1.5$ . Столь низкое значение  $f$  можно объяснить тем, что в своих экспериментах Амитрано и др. учитывали только очень

малые кластеры, содержащие  $\lesssim 150$  частиц. Максимальное значение  $f$ , оцененное с помощью анализа гармонической меры для структуры вязких пальцев (рис. 6.13, б), оказывается еще меньше.

## 6.12. Мультифрактальный рост вязких пальцев

Вязкие пальцы, возникающие при вытеснении сильно вязких жидкостей слабо вязкими жидкостями в пористых средах, порождают фрактальные структуры (см. рис. 4.7), обладающие замечательным сходством с фракталами, возникающими при ОДА (см. рис. 3.3). Недавно было показано, то динамика ОДА и образования вязких пальцев также одинакова. Величина самого длинного пальца и радиус гирации как функции времени совпадают при численном моделировании ОДА и экспериментальных наблюдениях образования вязких пальцев в двумерной пористой среде [124, 125, 154].

В предыдущем разделе мы обсудили мультифрактальную природу гармонической меры для кластеров, возникающих при ОДА. Распределение градиентов давления на поверхности растущей структуры с вязкими пальцами соответствует гармонической мере в ОДА. Однако

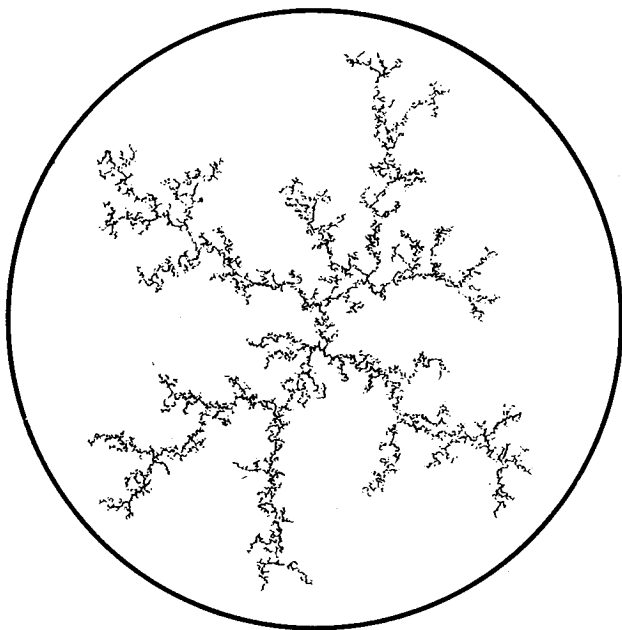


РИС. 6.14. Образование вязких пальцев с фрактальной размерностью  $D = 1,64 \pm 0,04$  в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1 мм, насыпанных случайным образом в один слой между двумя пластинами из пластика. Воздух (черный) вытесняет глицерин при капиллярном числе  $Ca = 0,15$ . Структура наблюдалась при  $t = 0,8t_0$  (время пробоя  $t_0 = 28,6$  с) [125].

эти градиенты давления не доступны экспериментальному наблюдению. Учитывая это, мы ввели новую меру – меру новых точек роста, которая служит многофрактальной характеристикой динамики роста вязких пальцев [154].

На рис. 6.14 показана структура с вязкими пальцами, образовавшаяся в эксперименте по вытеснению глицерина воздухом при больших капиллярных числах. Структуры с вязкими пальцами растут главным образом на концах пальцев. Новые поры, в которые проникает воздух за небольшой интервал времени, показаны на рис. 6.15.

В наших экспериментах мы измеряли массу  $m_i$  островов роста, изображенных на рис. 6.15. Острова перенумерованы в произвольном порядке индексом  $i = 1, 2, \dots, N_I$ , где  $N_I$  – число узлов, в которых наблюдается рост. Пусть  $m_0 = \sum_i N_I m_i$  – полная масса островов. Введем нормированную массу

$$\mu_i = \frac{m_i}{\sum m_i} = \frac{m_i}{m_0}. \quad (6.65)$$

Набор  $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$  характеризует наблюдаемый рост структуры. Это множество приращений основной меры новых точек роста  $M_{\mathcal{M}}$  на уровне

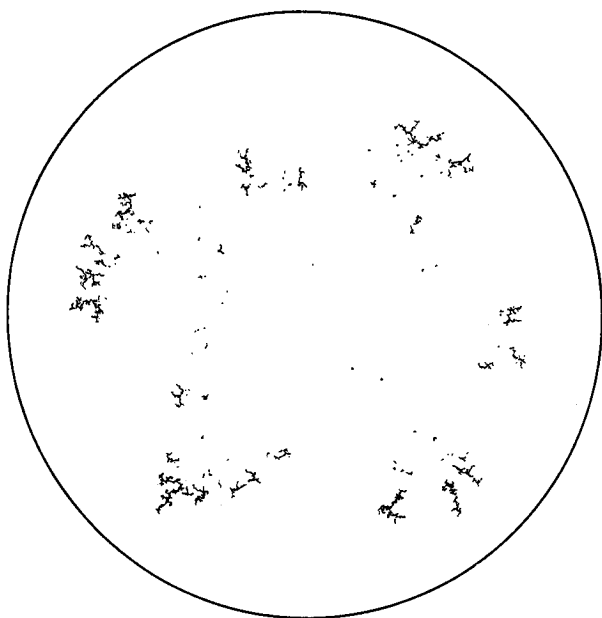


РИС. 6.15. Зона активного роста структуры с вязкими пальцами, показанной на рис. 6.14. Интервал времени между двумя структурами, использованными для построения зоны роста, равен 2,8 с, что соответствует относительному приращению времени  $\Delta t/t_0 = 0,10$  [125].

разрешения эксперимента. Новую меру  $M_{\mathcal{H}}$  не следует путать с гармонической мерой  $M_{\mathcal{H}}$ , рассмотренной в разд. 6.11 на примере ОДА.

Любая экспериментально наблюдаемая структура с вязкими пальцами является реализацией некоторого стохастического процесса. В любой момент своего роста структура с вязкими пальцами может захватить любой вакантный узел («пору») на периметре структуры. Обозначим узлы на периметре индексом  $k$ . Тогда динамика роста вязких пальцев в принципе определяется набором  $\mathcal{H} = \{p_k\}$  вероятностей того, что следующей окажется захваченной  $k$ -я пора на периметре. Набор  $\mathcal{H}$  вероятностей роста есть не что иное, как набор приращений гармонической меры  $M_{\mathcal{H}}$  экспериментально наблюдаемой структуры с вязкими пальцами на уровне разрешения эксперимента. При захвате очередной поры мера  $M_{\mathcal{H}}$  *изменяется*, так как изменяется периметр структуры. Рост, происходящий в любом узле, изменяет вероятности роста во всех узлах периметра. Мера новых точек роста  $M_{\mathcal{H}}$  выражает интегральный эффект последовательности процессов проникновения в поры, и мы заключаем, что мера  $M_{\mathcal{H}}$  лишь косвенно связана с гармонической мерой.

В следующих разделах мы проанализируем эксперименты по образованию вязких пальцев, связывая полученные данные с фрактальной мерой зон активного роста.

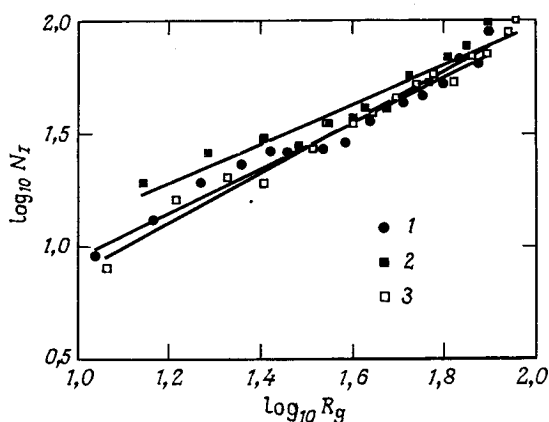
*Фрактальное множество точек роста.* Рассмотрим множество точек  $\mathcal{N}$ , на котором мы наблюдали рост, т.е. множество пор, в которые проникла вытесняющая жидкость. Точки этого множества имеют  $\mu_i > 0$ , и множество  $\mathcal{N}$  есть граница раздела между старыми точками роста и новыми точками роста. Число точек в множестве  $\mathcal{N}$  равно  $N_I$  и увеличивается по мере того, как растет структура с вязкими пальцами. Мы ожидаем, что для фрактальной структуры  $N_I$  удовлетворяет соотношению

$$N_I = a \left( \frac{R_g}{\delta} \right)^{D_I}. \quad (6.66)$$

Здесь  $D_I$  – размерность растущей поверхности раздела,  $\delta$  – размер клетки того покрытия, посредством которого производится анализ структуры, и  $R_g$  – радиус гирации. Мы могли бы воспользоваться вместо радиуса гирации  $R_g$  длиной самого большого пальца, так как с точностью до ошибки эксперимента эти величины пропорциональны. Соотношение (6.66) показывает, что с увеличением размеров растущей структуры с вязкими пальцами  $N_I$  возрастает, а с уменьшением размера  $\delta$  ячейки, т.е. с уменьшением разрешения, с которым анализируется множество точек  $\mathcal{N}$ , число  $N_I$  убывает.

Мы подсчитали  $N_I$  для трех последовательностей структур в наших экспериментах. На рис. 6.16 приведен график зависимости  $N_I$  от соответствующего радиуса гирации  $R_g$  в дважды логарифмическом масштабе. Проводя прямые, наименее уклоняющиеся от экспериментальных точек, находим, что множество точек  $\mathcal{N}$  – фрактал с размер-

РИС. 6.16. Число точек роста как функция радиуса гирации по трем экспериментам с вытеснением глицерина. Прямые получены в результате подгонки соотношений (6.66) по экспериментальным точкам. Значения подгоночных параметров: 1)  $a = 0,9 \pm 0,2$ ;  $D_I = 1,01 \pm 0,05$ ; 2)  $a = 1,7 \pm 0,6$ ;  $D_I = 0,87 \pm 0,08$ ; 3)  $a = 0,6 \pm 0,1$ ;  $D_I = 1,11 \pm 0,04$ . Фрактальная размерность растущей поверхности  $D_I = 1,0 \pm 0,1$ .



ностью

$$D_I = 1,0 \pm 0,1 \quad (6.67)$$

и амплитудой  $a = 1,1 \pm 0,5$ . Граница между старыми и новыми точками роста — это *фрактальная пыль* на плоскости, имеющая фрактальную размерность 1.

Размерность по подсчету клеток множества точек  $\mathcal{N}$  при заданном радиусе гирации получается путем варьирования величины клетки  $\delta$ . Подгоняя соотношение (6.66) к данным, полученным при подсчете клеток, получаем оценку для фрактальной размерности границы между старыми и новыми точками роста:  $D_I = 1,0 \pm 0,2$ . Некоторая неопределенность этой оценки связана с тем, что наблюдаемое множество точек  $\mathcal{N}$  представляет собой лишь *конечную выборку* из основной фрактальной меры. Разумеется, для любого конечного множества точек  $N_I(\delta \rightarrow 0) = \text{const}$ . Это соответствует размерности, равной нулю. Переход к  $D = 0$  обусловлен конечным разрешением экспериментальных наблюдений.

Микин и Уиттен [157] и Микин и др. [158] исследовали растущую границу между старыми и новыми точками роста, численно моделируя ОДА, и нашли, что  $N_I$  возрастает как  $N_0^{0,625 \pm 0,02}$ , где  $N_0$  — масса кластера. Из этого результата следует, что размерность  $D_I = 1,07 \pm 0,04$ , так как  $N_0 \sim R_g^D$ , где  $D = 1,71$  есть фрактальная размерность кластеров, возникающих при ОДА. Микин и Уиттен определили число частиц  $N_I$ , соприкасающихся с начальным кластером, состоящим из  $N_0$  частиц, после того как к нему добавилось  $K$  частиц. Эти авторы обнаружили, что при  $K \rightarrow \infty$  число  $N_I$  стремится к некоторому пределу. Таким образом,  $N_I$  зависит только от структуры кластера и не зависит от  $K$  в пределе больших  $K$ .

Нам удалось достичь удовлетворительного согласия между экспериментом и численным моделированием, и мы пришли к заключению,

что и эксперименты, и численное моделирование дают  $D_I \approx 1$  в качестве фрактальной размерности границы между старыми и новыми точками роста.

*Кривая  $f(\alpha)$ .* До сих пор мы рассматривали только множество точек с  $\mu_i > 0$ . Выделим теперь *подмножество*  $\mathcal{N}_\mu$ , состоящее из всех точек роста, для которых  $\mu \leq \mu_i \leq \mu \pm \Delta\mu$ . Если задать меру масштабно-инвариантным образом, то окажется, что такие подмножества являются фрактальными. Имея это в виду, мы зададим подмножества точек роста с помощью показателя Липшица–Гёльдера  $\alpha$ , определив его соотношением (6.19):

$$\mu = \left( \frac{\delta}{R_g} \right)^\alpha. \quad (6.68)$$

Это соотношение по существу представляет собой определение показателя  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\ln \mu}{\ln (\delta/R_g)}. \quad (6.69)$$

Разумеется, в определении показателя  $\alpha$  мы с тем же успехом вместо  $R_g$  могли бы использовать длину наибольшего вязкого пальца. Такая замена повлекла бы за собой небольшой сдвиг в значениях  $\alpha$ , не существенный для больших кластеров.

Выберем показатель Липшица–Гёльдера в интервале от  $\alpha$  до  $\alpha + \Delta\alpha$ . Из соотношения (6.68) находим соответствующий интервал для  $\mu_i$  структуры с вязкими пальцами и радиусом гирации  $R_g$ , наблюдаемой при разрешении  $\delta$ . Множество точек роста, образующих островки, которые и порождают  $\mu_i$  в соответствующем интервале, есть множество  $\mathcal{N}_\alpha$ . Множество всех точек роста можно представить в виде объединения всех таких множеств:

$$\mathcal{N} = \bigcup_\alpha \mathcal{N}_\alpha. \quad (6.70)$$

Если  $\mathcal{N}_\alpha$  – фрактальное множество, то мы полагаем, что число точек  $\mathcal{N}_\alpha(\delta, R_g)$  в этом множестве удовлетворяет скейлинговому соотношению, аналогичному соотношению (6.66):

$$N_\alpha(\delta, P_g) = \Delta\alpha r_\alpha(\delta, P_g) = \Delta\alpha b_\alpha \left( \frac{R_g}{\delta} \right)^{f(\alpha)}. \quad (6.71)$$

Число точек в множестве пропорционально ширине интервала  $\Delta\alpha$ , поэтому мы ввели плотность  $r_\alpha$ , не зависящую от этого интервала. В этой связи хотелось бы еще раз подчеркнуть, что конечные множества точек (а при обработке экспериментальных результатов мы с необходимостью рассматриваем конечные множества) представляют собой лишь выборки из фрактальных множеств  $\mathcal{S}_\alpha$ , которые определены только в

асимптотическом пределе бесконечных систем или бесконечного разрешения.

Соотношение (6.71) в принципе может быть использовано для определения фрактальной размерности  $f(\alpha)$  множества-носителя значений меры, характеризующихся показателем  $\alpha$  так же, как при определении фрактальной размерности точек роста в предыдущем разделе. К сожалению, оказалось, что наши модели слишком малы и это исключает возможность применения прямого подхода. Тем не менее мы можем получить оценку кривой  $f(\alpha)$ , используя измеренные значения  $\mu_i$ . Прежде всего заметим, что максимальное значение  $f(\alpha)$  можно найти, используя для общего числа точек роста следующее выражение:

$$N_I = \int d\alpha \rho(\alpha). \quad (6.72)$$

Из соотношений (6.66) и (6.71) получаем

$$\alpha \left( \frac{R_g}{\delta} \right)^{D_I} = \int d\alpha b_\alpha \left( \frac{R_g}{\delta} \right)^{f(\alpha)}. \quad (6.73)$$

Соотношение (6.73) справедливо при  $R_g$  и  $\delta$ , изменяющихся в довольно широких пределах, если подынтегральное выражение имеет резкий максимум при некотором значении  $\alpha_0$ . Если это так, то мы можем вычислить интеграл методом перевала и получить, что

$$f(\alpha_0) = D_I. \quad (6.74)$$

Амплитуда  $\alpha$  зависит от вида функциональных зависимостей  $b_\alpha$  и  $f_\alpha$  и ее нельзя определить в общем виде. Заметим также, что, поскольку  $N_\alpha$  — подмножества множества точек роста, справедливо соотношение

$$0 \leq f(\alpha) \leq D_I, \quad (6.75)$$

которое согласуется с равенством (6.74).

Чтобы получить кривую  $f(\alpha)$ , воспользуемся наблюдаемыми значениями  $\{\mu_i\}$ , построим гистограмму плотности  $\rho(\alpha)$  и график зависимости

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\rho(\alpha)) - \ln b_0}{\ln(R_g/\delta)} \quad (6.76)$$

от параметра  $\alpha$ , определяемого соотношением (6.69). Параметр  $b_0$  соответствует масштабно-независимой части интеграла соотношения (6.73) и выбран так, что максимальное значение кривой  $f(\alpha)$  равно  $D_I$  и достигается при  $b_0 \sim 1,4$ . Результат такого анализа для трех независимых экспериментов представлен на рис. 6.17. Заметим также, что  $b_\alpha$  в принципе может сильно зависеть от  $\alpha$ . Следовательно, использование параметра  $b_0$  вместо  $b_\alpha$  в соотношении (6.76) при анализе экспериментальных данных означает, что мы получаем *эффективный* показатель  $f(\alpha)$ . Чтобы получить вид функциональной зависимости  $b_\alpha$ , необходимы эксперименты с высоким разрешением.

*Момент меры.* Фрактальную меру, определенную на точках роста,

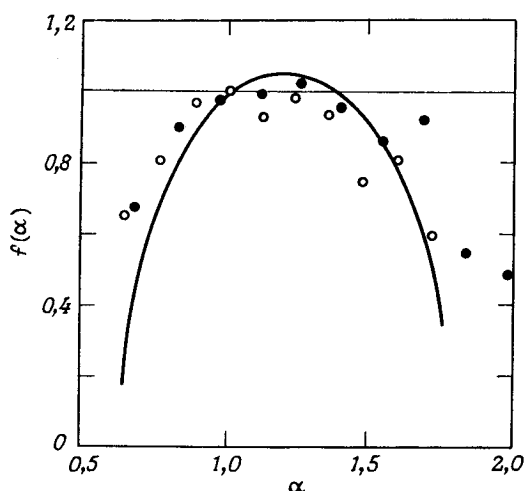


РИС. 6.17. Кривая  $f(\alpha)$  для фрактальной меры нового роста, описывающая динамику образования вязких пальцев в пористых моделях. Черные и светлые кружки соответствуют структурам с  $R_g/\delta \sim 170$  и 80 клеткам. Кривая  $f(\alpha)$  получена по кривой  $\tau(q)$  [125].

можно проанализировать на основе моментов наблюдаемой меры  $\mu_i$ , определяемых соотношением

$$N(q, \delta, R_g) = \sum_{i=1}^{N_I} \mu_i^q = N(q) \left( \frac{R_g}{\delta} \right)^{\tau(q)}. \quad (6.77)$$

При  $q = 0$  мы находим, что число  $N(q = 0, R_g)$  равно полному числу островов  $N_I$  в зоне роста. Из соотношений (6.66) и (6.77) заключаем, что  $\tau(q = 0) = D_I$  и  $N(q = 0, R_g) = a$ .

Показатель массы  $\tau(q)$  мы находим, подгоняя кривую (6.77) к экспериментальным данным, а показатели  $f(\alpha)$  и  $\alpha$  определяем из соотношений (6.48). Это преобразование позволяет нам перейти от усредненной кривой  $\tau(q)$  к кривой  $f(\alpha)$  (рис. 6.17).

Большие значения  $\alpha$  соответствуют малым значениям  $\mu_i$ . В своих экспериментах мы обнаружили, что определить очень малые значения  $\mu$  чрезвычайно трудно из-за конечного разрешения. Это ограничивает точность наших результатов при больших значениях  $\alpha$ . В прямом анализе, которому мы посвятили предыдущий раздел, и в изложенном выше анализе на основе показателя  $\tau(q)$  использован один и тот же набор наблюдений  $\{\mu_i\}$  для трех различных экспериментов и 13 различных наблюдений зоны роста. Рассеяние точек, обнаруженное при прямом анализе, дает лучшее представление ограниченного разрешения при экспериментальных наблюдениях, чем гладкая усредненная кривая, определяемая по показателю массы  $\tau(q)$ . Заметим, что в обоих случаях мы использовали для определения неизвестных амплитуд скейлинговые свойства  $N_I$ . Это снижает максимум кривой  $f(\alpha)$  до 1.

Подчеркнем, что гармоническая мера  $M_H$  отлична от меры множества новых точек роста  $M_M$ , соответствующих наблюдаемому росту.

Периметр кластеров, образующихся при ОДА, пропорционален их массе. Все узлы, принадлежащие периметру таких кластеров, имеют ненулевую вероятность попадания в них частицы, совершающей случайное блуждание, т.е. являются носителями гармонической меры. Следовательно, можно ожидать, что  $f(\alpha)$  принимает максимальное значение 1,71 при значении  $\alpha$ , соответствующем  $g = 0$ . В противоположность этому носителем меры множества новых точек роста, как следует из самого названия, являются новые точки роста  $\mathcal{N}$ . Это множество узлов представляет собой фрактальное множество с размерностью  $D_I \approx 1$ . Следовательно, можно ожидать, что максимум функции  $f(\alpha)$  равен  $D_I$ . Оценки меры  $M_{\mathcal{N}}$ , полученные Амитрано и др. [7] с помощью численного моделирования, дают  $f_{\text{макс}} \sim 1,5$ , что близко к фрактальной размерности 1,7 кластеров, образующихся при ОДА.

# Протекание

Бродбент и Хаммерсли [29] рассмотрели общую ситуацию, возникающую при *случайном* распространении *жидкости* через *среду*, когда абстрактные термины «жидкость» и «среда» могут быть интерпретированы в соответствии с физическим смыслом задачи<sup>1)</sup>. В обычных процессах диффузии случайность есть не что иное, как случайные блуждания частиц жидкости. Примером могут служить нерегулярное тепловое движение молекул в жидкости. Другой пример случайности, «вмороженной» в среду, Хаммерсли назвал *протеканием*, или *перколяционным* процессом, поскольку жидкость в среде ведет себя, как вода в перколяторе (кофеварке).

Процессы диффузии, такие, как распространение растворяемого вещества в растворителе или движение электронов в полупроводнике, ныне хорошо поняты. Интерпретацию процессов диффузии как случайных блужданий см. в гл. 9.

Диффундирующая частица может достигать любой точки в среде. Иначе обстоит дело в случае протекания. Наиболее характерной особенностью перколяционных процессов является существование *порога протекания*, ниже которого процесс распространения жидкости ограничен *конечной* областью среды. В качестве примера Бродбент и Хаммерсли рассмотрели распространение заболевания деревьев, при котором те сбрасывают листву и перестают расти, в саду, где деревья посажены в узлах квадратной решетки. Если расстояния между деревьями возрастают настолько, что вероятность заражения соседнего дерева падает ниже критического значения  $p_c$ , то заболевание по саду не распространяется. Порогом протекания для этой задачи служит вероятность  $p_c = 0,59275$  для протекания от узла к узлу квадратной решетки. Другой пример – просачивание воды или радиоактивных отходов в трещины и разломы горной породы. Вопрос заключается в том, останется ли вода локализованной в каком-то объеме или будет распространяться все дальше и дальше. И в этой задаче можно ожидать, что существует критический порог концентрации трещин. Величину порога протекания можно определить с помощью численного моделирования. Аналогичной проблемой, имеющей огромный практический интерес, является рас-

---

<sup>1)</sup> Относительно мотивов, которыми обусловлены первые работы по теории протекания, см. статью Хаммерсли [82].

пространение воды, вытесняющей нефть в пористых породах. В этом случае распространяющийся фронт жидкости (воды) может запереть нефть в некоторой области («ловушке»), что приводит, как показали Уилкинсон и Виллемсен [219], к *инвазивной перколяции*. Случайность, связанная с инвазией (вторжением) вытесняющей жидкости, зависит, помимо прочего, от динамики образования ловушек. Идеи и понятия теории протекания применимы и к распространению и взаимосвязи трещин и разломов в горных породах и в материалах, используемых в технике.

Во многих приложениях не существует резкого различия между перколяционными процессами и диффузией. Важным случаем является диффузия от источника. Возникающий фронт диффузии имеет геометрическую структуру, тесно связанную с фрактальной геометрией протекания. На это впервые обратили внимание Саповал и др. [191]. Мы рассмотрим этот интересный случай в разд. 7.9.

О перколяционных процессах существует обширная литература. Великолепное введение в теорию протекания принадлежит перу Штауффера [205]. Аарони [3] и Аарони и Штауффер [5] дали точное изложение теории и обсудили несколько важных приложений. Более ранние обзоры Шанте и Киркпатрика [196], Киркпатрика [109], Штауффера [204] и Эссама [56] содержат много существенных деталей. Интересные сообщения о последних достижениях в теории протекания и обширная библиография содержатся в трудах нескольких конференций; см., например, публикации под редакцией Дейчера и др. [50], Пинна и Шелторпа [181], Энглмэна и Егера [55], Пинна и Ристе [180].

Задача о протекании допускает очень простое описание и приводит к множеству интереснейших фрактальных структур. Основные понятия теории протекания мы проиллюстрируем на примере двумерного протекания на квадратной решетке.

## 7.1. Протекание от узла к узлу на квадратной решетке

Запомним случайным образом некоторую долю (равную  $p = 0,5$ ) узлов квадратной сетки, т. е. квадратной решетки, какими-нибудь объектами, как показано на рис. 7.1. Эти объекты соответствуют порам в матрице. Соседние поры соединены между собой небольшими капиллярными каналами. Жидкость, инжектированная в любую пору, может вторгнуться только в пору, непосредственно соединенную с данной капиллярным каналом, или «связью». Поры, или «узлы», связанные с выбранным центром инжекции, образуют так называемый *кластер*. На рис. 7.1 наибольший кластер содержит 46 узлов, второй по величине кластер содержит 29 узлов и т. д. Существует несколько кластеров, содержащих лишь по одной поре. Рассматривая рис. 7.1, мы быстро замечаем, что ни один из кластеров не простирается по всей решетке. Следовательно, невозможно инжектировать жидкость в узел у левого края решетки и

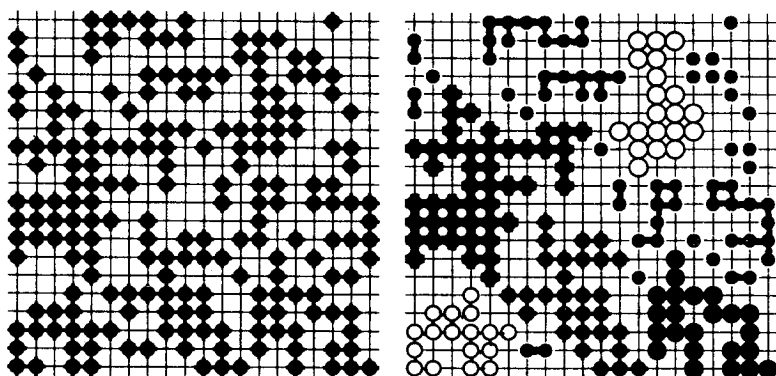


РИС. 7.1. Слева: квадратная решетка, половина узлов которой занята «порами». Справа: связанные образования, или «кластеры». Наибольшие кластеры для большей наглядности изображены другими символами пор. Решетка состоит из  $L \times L$  узлов с  $L = 20$ .

наблюдать, что она вытечет где-то у правого края образовавшейся структуры.

К чему приводит повышение вероятности  $p$  иметь пустую пору в узле решетки, показано на рис. 7.2. (цветной вариант этого рисунка показан на вклейке). Кластеры различной величины изображены различным цветом (от черного до белого на рис. 7.2 и различными цветами на вклейке). Наибольший (белый) кластер растет от кластера умеренных размеров при  $p = 0,58$  до очень большого кластера, содержащего значительную часть всех узлов, при  $p = 0,62$ . При  $p = 0,6$  наибольший кластер простирается по всей решетке, соединя левый и правый края решетки с ее нижним краем. Такой кластер называется *простирающимся по всей решетке*, или *перколяционным*, кластером. При повторении численных экспериментов всякий раз получаются новые конфигурации кластеров. Кластер, простирающийся по всей решетке, впервые возникает при  $p = p_c \approx 0,593$ . Численное моделирование на очень больших решетках показало, что вероятность образования простирающегося по всей решетке кластера при  $p < p_c$  падает до нуля при  $L \rightarrow \infty$ . При  $p > p_c$  простирающемуся по всей решетке кластеру принадлежит конечная доля узлов. В случае протекания от узла к узлу на квадратной решетке *критическая вероятность*  $p_c$ , при которой впервые возникает кластер, простирающийся по всей решетке, равна  $0,59275 \pm 0,0003$  [224].

Вероятность протекания  $P_\infty(p)$  определяется как вероятность того, что жидкость, инжектированная в каком-то одном случайно выбранном узле, оросит бесконечно много пор. Заметим, что вероятность иметь пору в том узле, где мы намереваемся инжектировать жидкость, равна  $p$ . Вероятность того, что жидкость оросит бесконечно много пор, если ее

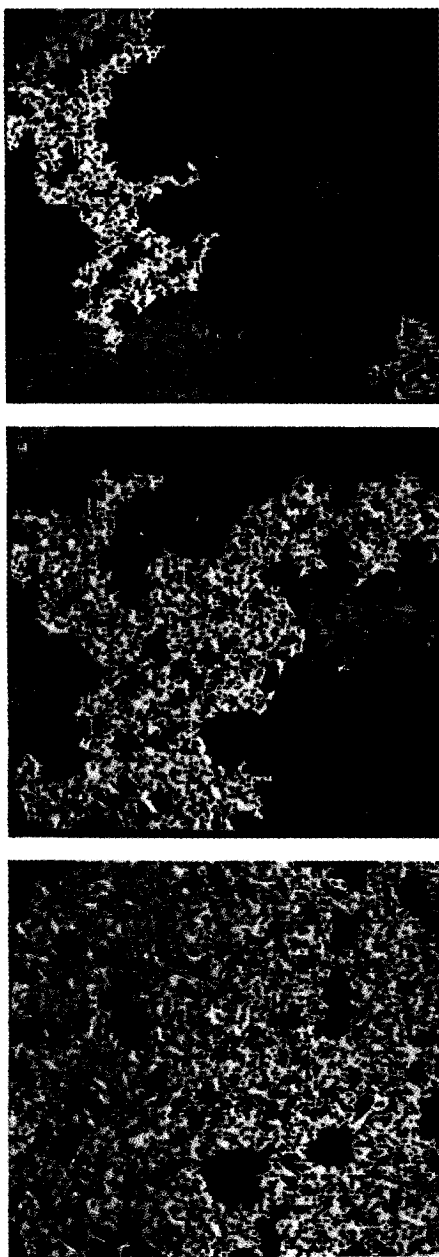


РИС. 7.2. Влияние последовательного увеличения вероятности заполнения  $p$  на квадратной решетке  $160 \times 160$ . Значения вероятности заполнения сверху вниз:  $p = 0,58; 0,60; 0,62$ . На каждой из трех фигур наибольший кластер показан светлым цветом. Менее крупные кластеры показаны более темным цветом. Незанятые узлы показаны черным цветом. Цветные варианты этих фигур показаны на вклейках.

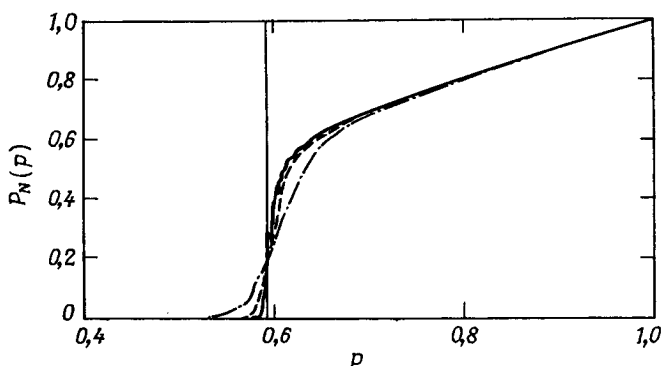


РИС. 7.3. Вероятность  $P_N(p)$  принадлежности узла наибольшему кластеру как функция вероятности  $p$  того, что данный узел не заполнен – пора на квадратной решетке  $L \times L$ . Сплошная кривая построена при  $L = 450$ , штриховая – при  $L = 200$  и 50. Вертикальная линия соответствует  $p = p_c = 0,59275$ .

инжектировать в пору, о которой известно, что та принадлежит кластеру, равна  $P_\infty(p)/p$ . На практике нам приходится рассматривать конечные системы, состоящие из  $N$  пор. Для квадратных решеток  $N = L^E$ , где  $E = 2$  есть евклидова размерность пространства, в котором находится решетка. При численном моделировании мы определяем число узлов  $M(L)$ , принадлежащих наибольшему кластеру на решетке  $L \cdot L$ , и оцениваем вероятность протекания  $P_N(p)$ , которая равна величине  $M(L)/L^2$ , усредненной по результатам многих численных экспериментов, аналогичных представленным на рис. 7.2. Вероятность протекания определяется выражением

$$P_\infty(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(p). \quad (7.1)$$

Для квадратной решетки мы оценивали вероятность протекания  $P_N(p)$  на решетках  $L \cdot L$  при  $L = 50, 200$  и  $450$  узлов, производя соответственно 200, 100 и 10 независимых выборок. Результаты оценки вероятности протекания представлены на рис. 7.3. При низкой концентрации пор  $p$  вероятность протекания  $P_N$  пренебрежимо мала. При увеличении  $p$  вероятность принадлежности узла к наибольшему кластеру резко возрастает вблизи  $p_c = 0,593$ , и при  $p \rightarrow 1$  вероятность протекания  $P_N$  возрастает почти линейно до единицы. При увеличении  $L$  перколяционный переход при  $p_c$  становится более резким.

*Критическая вероятность* определяется как наибольшее значение вероятности  $p$ , при котором  $P_\infty = 0$ . Формально это можно записать в виде

$$p_c = \sup \{p, \text{ такового, что } P_\infty(p) = 0\}. \quad (7.2)$$

Следовательно, по определению  $P_\infty(p) = 0$  при  $p \leq p_c$ . Перколяционный процесс претерпевает переход из состояния локальной связности к состоянию, в котором связи простираются неограниченно далеко. Экстенсивное моделирование и теоретические соображения показывают, что вблизи  $p_c$  вероятность протекания убывает по степенному закону

$$P_\infty(p) \sim (p - p_c)^\beta \text{ при } p > p_c \text{ и } p \rightarrow p_c. \quad (7.3)$$

Показатель  $\beta$  равен  $5/36 = 0,1389\dots$  для двумерного и  $\beta \approx 0,4$  для трехмерного протекания. В этом случае протекание аналогично магнитным фазовым переходам, при которых локальный порядок магнитных моментов возрастает в определенных пределах, когда температура понижается до температуры перехода  $T_c$  материала. Ниже  $T_c$  магнитные моменты в среднем выстраиваются по всему образцу, и мы получаем магнит. Многие теоретические методы, развитые для исследования фазовых переходов, были применены к задачам протекания. Кроме того, по аналогии с теорией фазовых переходов были определены различные критические показатели. Так, для многих магнитных материалов вблизи критической точки намагничивание  $m(T)$  убывает по степенному закону  $(T_c - T)^\beta$  при  $\beta$  в интервале  $0,3 - 0,5$  для трехмерных фазовых переходов. Разумеется, при численных экспериментах вероятность протекания  $P_N$  остается отличной от нуля даже при  $p < p_c$ . Следует заметить, что в численном эксперименте, результаты которого представлены на рис. 7.3, нам неоднократно встречались случаи, когда самые большие кластеры почти соединяли противоположные стороны решетки при  $p \approx p_c$ . В оценки, представленные на рис. 7.3, эти случаи не входят.

## 7.2. Бесконечный кластер при $p_c$

Как растет масса, или число узлов,  $M(L)$  наибольшего кластера с увеличением характерного размера  $L$  решетки? При  $p > p_c$  мы ожидаем, что  $m(L) \approx p_n(p) \cdot L^2$ , где правая часть при  $L \rightarrow \infty$  стремится к  $P_\infty(p) L^2$ , а  $P_\infty(p)$  есть просто плотность узлов, принадлежащих перколяционному кластеру. В то же время при  $p < p_c$  мы ожидаем, что  $m(L)/L^2 \rightarrow 0$  при  $L \rightarrow \infty$ , так как  $P_\infty(p < p_c) = 0$ . При  $p = p_c$  можно ожидать, что  $M(L)$  будет возрастать почти как  $L^2$ . Экстенсивные исследования зависимости  $M(L)$  от  $L$  привели к следующему результату<sup>1)</sup>:

$$M(L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \ln L & \text{при } p < p_c, \\ L^D & \text{при } p = p_c, \\ L^E & \text{при } p > p_c. \end{cases} \quad (7.4)$$

<sup>1)</sup> Знак  $\sim$  мы используем для обозначения и асимптотического равенства, и асимптотической пропорциональности. Это принято в литературе по теории протекания и позволяет избавляться от указания коэффициентов пропорциональности справа от знака  $\sim$ .

Масса перколяционного кластера составляет при  $p > p_c$  конечную долю всех узлов. Ниже  $p_c$  кластер, простирающийся по всей решетке, как правило, не существует. Однако если  $M(L)$  интерпретировать как размер  $s_{\max}$  наибольшего кластера (см., например, [205]), то оказывается, что  $M(L)$  лишь очень слабо, т. е. логарифмически, возрастает с увеличением.

На пороге протекания  $p = p_c$  масса кластера, простирающегося по всей решетке (он является и наибольшим кластером), возрастает с увеличением  $L$  по степенному закону  $L^D$ . Результаты численных экспериментов на квадратной решетке представлены на рис. 7.4. Они показывают, что перколяционный кластер на пороге протекания имеет *фрактальную* структуру с фрактальной размерностью  $D$  (см. соотношение (3.1.)). Фрактальный перколяционный кластер на пороге протекания часто называют *внутренним* перколяционным кластером. Для результатов, представленных на рис. 7.4, фрактальная размерность  $D$  по оценкам имеет значение  $\approx 1,89 \pm 0,03$ . Указанная ошибка имеет статистическую природу и характеризует качество подгонки степенного закона к результатам численного моделирования, представленным на рис. 7.4. Анализ систематических ошибок — дело тонкое. Когда перколяционный кластер на конечной решетке размером  $L$  составляет лишь часть внутреннего перколяционного кластера, то некоторые из узлов, не входящих в перколяционный кластер на решетке размером  $L$ , на самом деле принадлежат внутреннему перколяционному кластеру, так как соединены с ним связями, лежащими вне рассматриваемого фрагмента. При  $p > p_c$  численное моделирование на квадратной решетке приводит к фрактальной размерности  $d = 2,03 \pm 0,01$  для перколяционного класте-

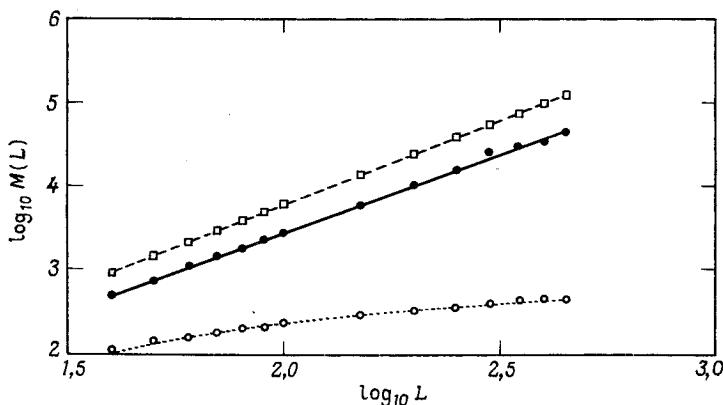


РИС. 7.4. Масса наибольшего кластера как функция линейного размера  $L$  квадратной решетки. Черные кружки соответствуют  $p = p_c = 0,593$ . Сплошная

ра. И в этом случае ошибка имеет статистическую природу, а  $D$  есть угловой коэффициент прямой, проведенной через точки, полученные с помощью численного моделирования при  $p = 0,65$  и представленные на рис. 7.4. По точкам, соответствующим на этом рисунке наибольшим кластерам, была построена подгоночная прямая  $M(L) = A + B \ln L$  с  $B = -426$  и  $A = 327$ . Она проведена на рис. 7.4 штриховой линией. Все результаты численных экспериментов, представленные на рис. 7.4, согласуются с асимптотическим поведением, описываемым соотношением (7.4.).

Сайкес и Эссам [208] показали, что порог протекания от узла к узлу на треугольной решетке равен  $p_c = 1/2$  (*точный* результат). Это позволяет получать результаты для внутренних перколяционных кластеров с очень малой погрешностью, производя численные эксперименты на треугольной решетке. Такие результаты, полученные Штауффером [205] и представленные на рис. 7.5, позволяют получить для фрактальной размерности  $D$  оценку, согласующуюся с точным значением  $D = 91/48$ . Как показывают результаты численных экспериментов, это значение возникает в задачах с протеканием от узла к узлу на всех двумерных решетках.

Мы заключаем, что при протекании от узла к узлу на двумерных решетках внутренний перколяционный кластер имеет *фрактальную структуру*, и с увеличением  $L$  масса такого кластера возрастает в среднем как

$$M(L) \sim \bar{A} L^D, \quad D = 91/48 = 1,895 \dots \quad (7.5)$$

Среднее берется по многим реализациям внутреннего перколяционного кластера. Амплитуда  $\bar{A}$  есть эффективная амплитуда, вычисленная по значениям амплитуд для кластеров конечных размеров. Степенной закон (7.5) для массы внутреннего перколяционного кластера выполняется только *асимптотически* при больших  $L$ . При реалистических значениях  $L$  это скейлинговое соотношение следует модифицировать, введя в него поправочные члены (см., например, [3, 149]):

$$M(L) = A L^D + A_1 L^{D_1} + A_2 L^{D_2} + \dots, \quad (7.6)$$

где  $D > D_1 > D_2$ . Определить поправочные члены с помощью прямых численных экспериментов довольно трудно. Аарони и др. [6] предложили новый метод трансфер-матрицы, упрощающий решение этой задачи. Как правило, в двумерных задачах  $D_1 \approx D - 1$  [76].

Заметим, что кривая Мандельброта–Гивена (см. рис. 2.13) имеет фрактальную размерность  $D = 1,892$  и может служить хорошей моделью для перколяционного кластера.

### 7.3. Самоподобие перколяционных кластеров

Внутренний бесконечный кластер (перколяционный кластер) *статистически самоподобен*. Рассмотрим перколяционный кластер при  $p = 0,6$ ,

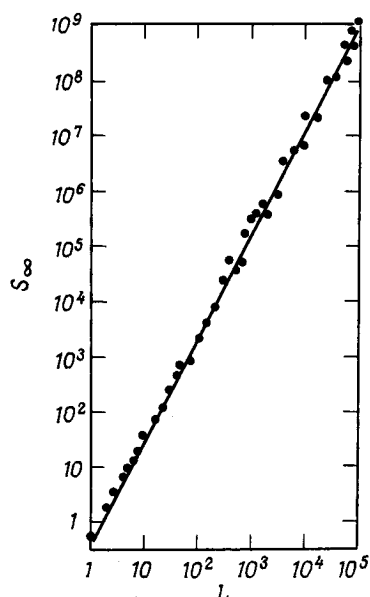


РИС. 7.5. Размеры перколяционного кластера на пороге кластеризации  $p_c = 1/2$  треугольной решетки как функция линейного размера  $L$  решетки. Угловой коэффициент прямой в дважды логарифмических координатах дает при больших  $L$  фрактальную размерность  $D = 91/48$  [205].

показанный на среднем снимке рис. 7.2. Если разрешение не слишком велико, то все детали оказываются размазанными, но в целом кластер остается подобным себе при большем разрешении. Сохраняется общая структура кластера, например то, что в нем имеются дырки всех

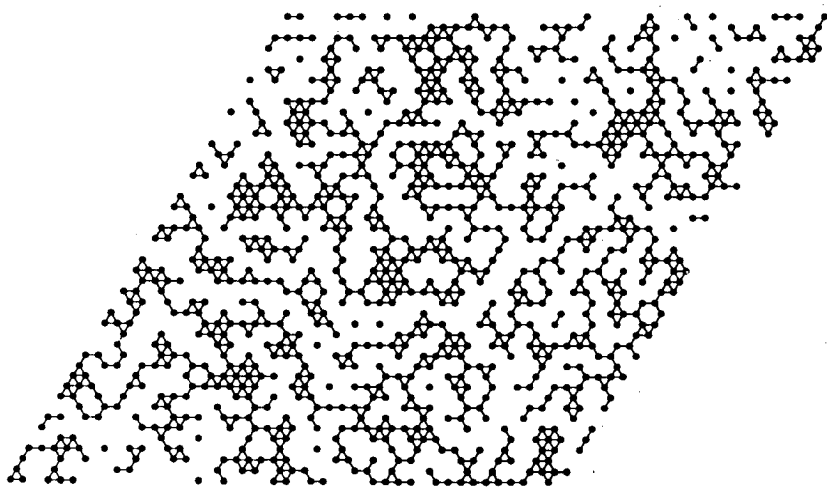


РИС. 7.6. Перколяционные кластеры на треугольной решетке при пороге перколяции  $p_c = 1/2$ .

возможных размеров. Такое самоподобие тесно связано с фрактальной структурой внутреннего перколяционного кластера, и ему с помощью ренормировки *реального пространства* можно придать количественный характер. Суть этой ренормировки лучше всего можно продемонстрировать на примере протекания от узла к узлу на треугольной решетке с  $p_c = 1/2$ .

Рассмотрим перколяционный кластер на треугольной решетке с  $p = p_c$ , изображенный на рис. 7.6. На треугольной решетке мы легко можем изменять ее масштаб в  $b = \sqrt{3}$  раза, группируя занятые узлы, т.е. пустые поры, так, как показано на рис. 7.7. Исходная ячейка с  $b^2 = 3$  узлами заменяется одним новым узлом, который считается свободной порой (занятым узлом), если большинство узлов исходной ячейки занято. Такое преобразование подобия гарантирует, что кластер из двух или трех пустых пор становится пустой порой в более грубой решетке, изображенной на рис. 7.7, б [183, 223].

Результатом такого огрубления является новая решетка с *новой* концентрацией  $p'$  занятых узлов. Для простого примера, представленного на рис. 7.7, а, вероятность найти блок из трех занятых узлов, как нетрудно заметить, равна  $p^3$ , так как каждый из узлов заполняется независимо с вероятностью  $p$ . Вероятность найти два занятых узла равна  $3p^2(1-p)$ , так как существуют три различных расположения пустого узла. Следовательно, новую концентрацию  $p'$  можно представить в виде [183]

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p). \quad (7.7)$$

Огрубление полученной решетки можно производить снова и снова. И при каждой итерации новая концентрация занятых узлов выражается через старую соотношением (7.7). На рис. 7.8 мы построили график изменения концентрации  $p' - p$ , вызванного одной итерацией ренормализационной процедуры, как функции от старой (до ренормировки) концентрации  $p$  занятых узлов. Заметим, что  $p = p_c = 0,5$  удовлетворяет итерационному уравнению (7.7), поэтому  $p_c$  есть неподвижная точка ренормировки. Если мы начинаем с решетки, для которой  $0 < p < p_c$ , то  $p' - p < 0$  и новая концентрация занятых узлов оказывается меньше исходной. Следовательно, если мы начинаем с большой треугольной решетки и неоднократно применяем ренормализационное преобразование, то в конце концов у нас получается решетка с пустыми узлами. С другой стороны, если мы начинаем с  $1 > p > p_c$ , то концентрация возрастает с каждой итерацией, и в конце концов мы получаем грубую решетку, все узлы которой заняты, т.е. «заполнены» пустыми порами. В критической точке (при  $p = p_c$ ), как нетрудно видеть, ренормировка *не изменяет* концентрацию занятых узлов, и грубая решетка также находится на пороге протекания. Критическая точка есть *неподвижная точка* ренормализационного преобразования. Разумеется, кроме нее существуют еще две тривиальные неподвижные точки:  $p = 0$  и  $p = 1$ .

Действие процедуры ренормировки, схематически показанное на рис.

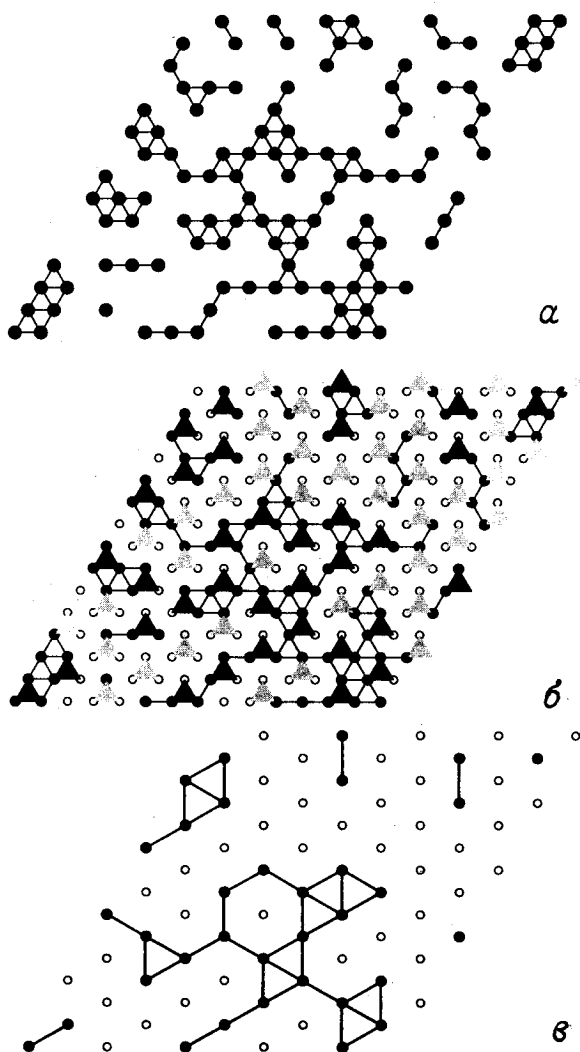
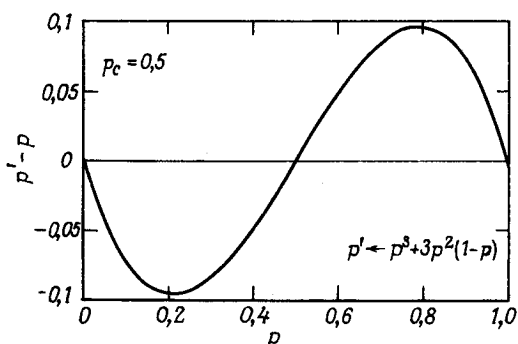


РИС. 7.7. *a*—кластеры на пороге кластеризации  $p_c$  на треугольной решетке; *б*—огрубление треугольной решетки в  $b = \sqrt{3}$  раз. Занятые узлы изображены черными кружками, незанятые (поры)—светлыми. Группы из трех узлов образуют блоки, обозначенные заштрихованными треугольниками. Если большинство узлов, принадлежащих треугольнику, занято, то треугольник выкрашен в черный цвет; *в*—огрубленная перколяционная решетка, на которой черные узлы соответствуют черным треугольникам на решетке *б*.

РИС. 7.8. Изменение концентрации занятых узлов  $p' - p$  как функция концентрации занятых узлов  $p$  на треугольной решетке до огрубления решетки в  $b = \sqrt{3}$  раз.



7.7 для большой треугольной решетки на пороге протекания, представлено на рис. 7.9. Качественно структура расположения занятых узлов, полученная при двукратном применении ренормализационного преобразования (рис. 7.9, б), неотличима от фрагмента исходной решетки. Перколяционный кластер на преобразованной решетке (см. рис. 7.9, в) качественно такой же, как исходный перколяционный кластер. Важно отметить, что скейлинговые преобразования не влияют на вероятность  $p$  заполнения узла, и, следовательно, система, находившаяся при  $p = p_c$ , после ренормализационного преобразования остается на пороге протекания. По виду решетки невозможно отличить, на каком уровне огрубления, или увеличения, «сделан снимок». Этот аспект самоподобия мы проиллюстрировали с помощью подобно измененного фрагмента решетки, вставленного на то же место в исходной решетке. Из статистического самоподобия следует, что возникающий в результате преобразования перколяционный кластер является равновероятной реализацией процесса, порождающего перколяционные кластеры.

Статистическое самоподобие внутреннего перколяционного кластера можно использовать для получения количественного утверждения о массе кластера. Степенная зависимость (7.5) массы  $M(L)$  кластера остается в силе и для кластера после преобразования подобия с коэффициентом  $b$ . Но линейный размер преобразованной решетки равен всего лишь  $L/b$ , и, следовательно, число узлов  $M(L/b)$  должно быть равно  $\bar{A}(L/b)^D$ . Из соотношения (7.5) следует, что массы кластеров при двух масштабах связаны между собой скейлинговым соотношением

$$M(L) = b^D M(L/b). \quad (7.8)$$

Это соотношение выполняется только асимптотически в пределе больших  $L$  и  $L/b$ . Но оно имеет место при *всех* значениях масштабного множителя, согласующихся с этим ограничением. Разумеется, справедливо и обратное утверждение о том, что из скейлингового соотношения (7.8) следует степенная зависимость. Так как левая часть соотношения (7.8) не зависит от  $b$ , масса кластера  $M(L)$  должна быть *однородной функцией*, и единственно возможной формой для  $M(L)$  становится

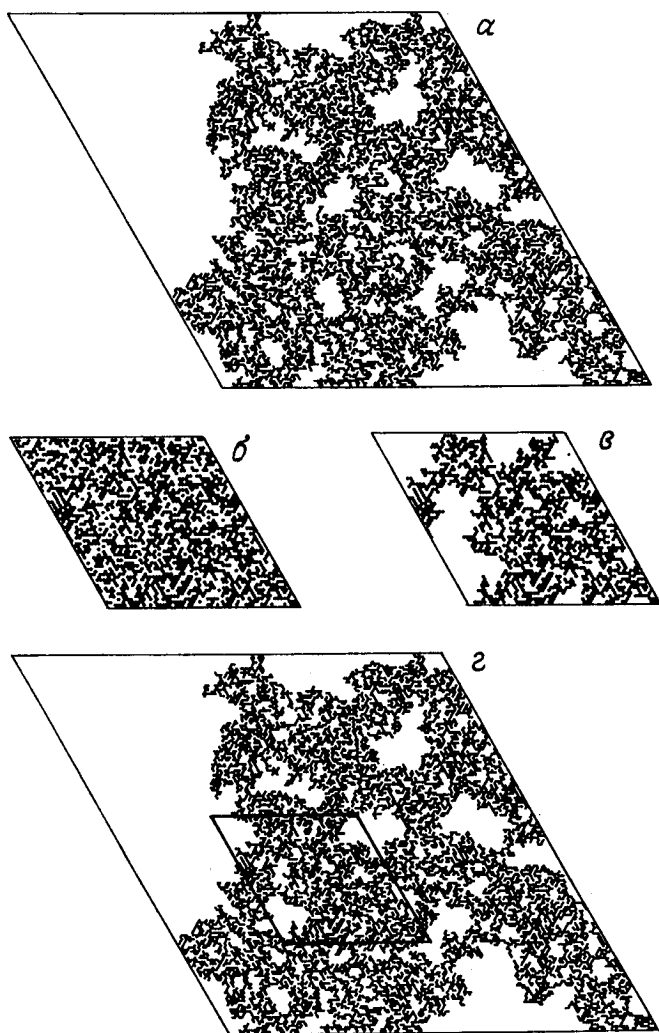


РИС. 7.9. Самоподобие и эффект огрубления на треугольной решетке при  $p = p_c$ . Преобразование подобия производится с коэффициентом  $b = \sqrt{3}$ . Соответствующая процедура дважды проиллюстрирована на рис. 7.7. *a* – перколяционный кластер на пороге кластеризации на исходной доске  $180 \times 180$ ; *б* – занятые узлы, полученные после преобразования подобия исходной решетки с коэффициентом подобия  $b = 3$ ; *в* – перколяционный кластер на решетке *б*, подвергнутой преобразованию подобия; *г* – решетка, подвергнутая преобразованию подобия, вставлена в то место исходной решетки, которое обведено рамкой. Общий вид перколяционного кластера, получившегося в результате такой операции, вы видите на этом рисунке.

степенная зависимость  $M(L) \sim L^D$ . Фрактальная геометрия внутреннего перколяционного кластера и статистическое самоподобие взаимосвязаны, и эта взаимосвязь количественно выражается соотношением (7.8).

#### 7.4. Конечные кластеры при протекании

Величина кластеров при перколяции может варьироваться в широких пределах (см. рис. 7.2). Если вероятность занятия узла опускается ниже  $p_c$ , то размеры кластеров постепенно убывают. Выше  $p_c$  кластеры различной величины существуют в дырах перколяционного кластера. Число узлов  $s$  в кластере и его линейная протяженность имеют характерные распределения. Порог протекания определяется распределением кластеров по величине, которое не имеет характерного масштаба, т.е. должно быть степенным распределением. Чтобы придать этому распределению более точный смысл, введем радиус гирации (гирорадиус)  $R_g(s)$  кластера, состоящего из  $s$  узлов:

$$R_g^2(s) = \frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} (r_i - r_j)^2. \quad (7.9)$$

Радиус гирации есть не что иное, как среднеквадратичный радиус кластера, измеряемый от центра тяжести последнего. Рассмотрим конечный кластер, изображенный на рис. 7.10. Если мы поместим этот конечный кластер (при  $p = p_c$ ) внутрь клетки со стороной  $L \leq 2R_g(s)$ , то он окажется частью внутреннего перколяционного кластера, простирающегося по всей клетке, и, как и прежде, мы получим зависимость  $M_s(L) \sim L^D$ . Когда сторона клетки возрастет больше  $2R_g$ , мы увидим края кластера. При достаточно больших  $L$  весь кластер окажется внутри

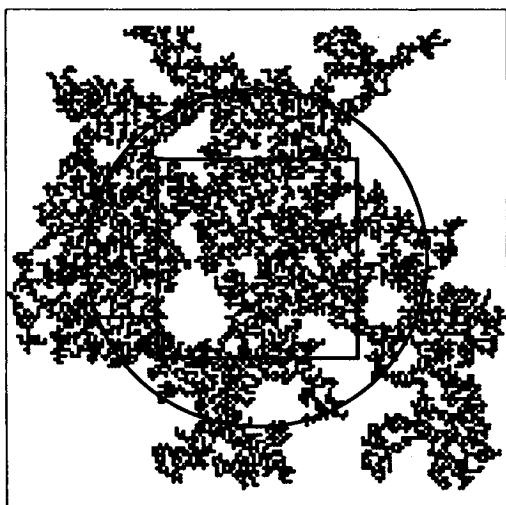


РИС. 7.10. Конечное состояние кластера на квадратной решетке при  $p_c$ . Радиус окружности равен радиусу гирации  $R_g(s) = 51$  кластера, содержащего 6700 узлов. Квадрат в центре имеет сторону  $L = 60$ . Наименьший квадрат, вмещающий кластер, имеет сторону  $L_s = 150$ .

клетки со стороной  $L_g$  и все сомнения относительно конечности кластера рассеются, так как масса кластера уже не будет возрастать с увеличением  $L$ . Эти соображения можно резюмировать следующим образом. Если на кластер, состоящий из  $s$  узлов, наложить клетку со стороной  $L$ , то масса  $M_g(L)$ , оказавшаяся внутри клетки, определяется соотношением

$$M_s(L) = L^D f(L/R_g) \rightarrow \begin{cases} \bar{A}(L/R_g)^D & \text{при } L \ll R_g(s), \\ s & \text{при } L \gg R_g(s). \end{cases} \quad (7.10)$$

Переходная функция  $f(x)$  здесь просто стремится к постоянной амплитуде  $\bar{A}$  в соотношении (7.5) при  $x = L/R_g(s) \rightarrow 0$ . Но так как масса  $M_s(L)$  при  $x \gg 1$  должна перестать зависеть от  $L$ , мы заключаем, что  $f(x) \sim x^{-D}$ , поэтому член  $L^D$ , стоящий перед  $f$  в соотношении (7.10), выпада-

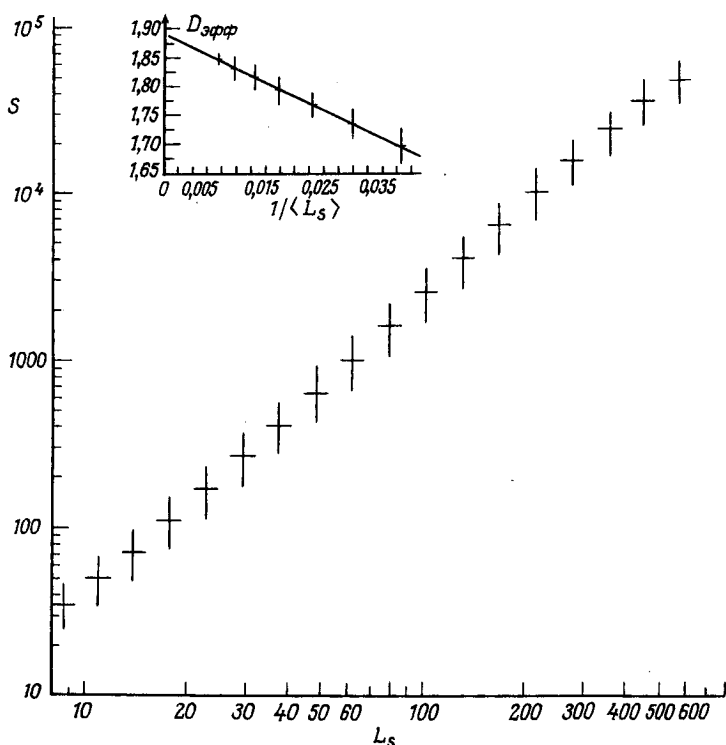


РИС. 7.11. Зависимость масс кластеров  $s$  (числа узлов) от линейных размеров  $L_s$  кластеров для квадратной решетки при  $p_c = 0,5927$ . Диапазоны ошибок указывают одно стандартное отклонение относительно среднего. На врезке показан результат экстраполяции прямой с угловым коэффициентом  $D_{эфф} = \partial \ln s / \partial \ln L_s$  при  $s \rightarrow \infty$ , где  $D = 1,89 \pm 0,01$  [3].

ет. В результате мы получаем следующее соотношение между радиусом гирации и числом узлов в кластере:

$$s = M_s(L \gg R_g) \sim L^D (L/R_g)^{-D} \sim R_g^D. \quad (7.11)$$

Соотношение  $s \sim R_g(s)^D$  было подтверждено многочисленными численными экспериментами. На рис. 7.11 показаны результаты, полученные Гроссманом и Аарони [76] и Аарони [3] относительно зависимости  $s$  от  $L_s$ , где  $L_s$  — длина стороны наименьшей клетки, вмещающей в себя кластер. Кластеры не имеют характерных размеров, которые не зависели бы от размера самого кластера, и поэтому можно ожидать, что  $M(L_s)$  изменяется по степенному закону как  $L_s^D$ . Это отчетливо видно на рис. 7.11. На врезке показана экстраполяция «эффективной» фрактальной размерности, вычисленной по части кривой  $s(L_s)$  по формуле  $D_{\text{эфф}} = \partial \ln s / \partial \ln L_s$ . Полученное значение совпадает в пределе больших кластеров с ожидаемым значением фрактальной размерности  $D = 1,89 \pm \pm 0,01 \approx 91/48$ . Размерность  $D_{\text{эфф}}$  может быть получена путем подгонки прямой относительно  $1/L_s$ . Это свидетельствует о том, что главная поправка  $D_1$  в уравнении (7.6) определяется соотношением  $D_1 = D - 1$ . Интервалы ошибок указывают на разброс значений параметра  $s$  в «окнах» линейного размера  $L_s$ . В свою очередь существование этого разброса подчеркивает, что степенной закон  $s \sim L_s^D$  применим только к *средним* величинам. Интервалы ошибок имеют фиксированную длину в логарифмической шкале. Это позволяет заключить, что флуктуации значения  $s$  при заданном значении  $L_s$  определяются соотношением

$$\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2 \sim L_s^{2D}. \quad (7.12)$$

Такие флуктуации называются *лакунарностью* [3, 134].

## 7.5. Распределение величины кластеров при $p = p_c$

Рассмотрим теперь распределение размеров кластеров, полученных при критическом значении  $p_c$  (на пороге протекания) и представленных на рис. 7.2. Пусть  $n_s$  — среднее число кластеров, содержащих  $s$  узлов, на один узел. Иначе говоря, число кластеров, содержащих  $s$  узлов, на решетке  $L \times L$  должно быть по этой оценке равно  $n_s L^2$ . Следовательно, если мы выбираем узел случайным образом, то с вероятностью, пропорциональной  $sn_s$ , он принадлежит кластеру, состоящему из  $s$  частиц, поскольку «столкнуться» с таким кластером блуждающая частица может с способами. Таким образом, нормированная на один узел вероятность  $c_s$  того, что выбранный случайным образом узел принадлежит кластеру, состоящему из  $s$  узлов, определяется выражением

$$c_s = \frac{sn_s}{\sum_s sn_s}. \quad (7.13)$$

Нормирующий множитель  $1/\sum_s sn_s$  есть просто доля узлов решетки, принадлежащих *конечным* кластерам. Средняя масса кластера есть

величина

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{s=1}^{L^D} s \cdot n_s(L)}{\sum_s n_s(L)}. \quad (7.14)$$

При численном моделировании на конечной решетке со стороной  $L$  нам необходимо установить, что  $n_s$  зависит от  $L$ , поэтому в соотношении (7.14) эта зависимость записана как  $n_s(L)$ . Сумма в числителе правой части берется по всем кластерам от самых маленьких с  $s = 1$  до самых больших, с числом частиц порядка  $s_{\text{макс}} \sim L^D$ . Соображения масштабной инвариантности позволяют найти асимптотическую зависимость для  $n_s(L)$ .

Рассмотрим решетку  $L \times L$  на пороге протекания. Преобразование подобия с коэффициентом  $b$  переводит ее в решетку  $(L/b) \times (L/b)$ , которая также находится на пороге протекания. Вероятность того, что случайно выбранный на решетке  $L \times L$  узел принадлежит кластеру, состоящему из  $s$  частиц, равна  $n_s(L)$ , где  $n_s$  — среднее число кластеров, содержащих  $s$  узлов, в расчете на один узел решетки. Преобразование подобия уменьшает гирорадиус кластера с  $R_g(s)$  до  $R_g(s') = R_g(s)/b$ . Из соотношения (7.11) следует, что кластер, содержащий  $s$  узлов, отображается в кластер, содержащий всего лишь  $s' = s/b^D$  узлов. Следовательно, вероятность  $n_s(L)$  можно выразить через вероятность  $n_{s'}(L/b)$  того, что узел, случайно выбранный на решетке  $(L/b) \times (L/b)$ , принадлежит кластеру, содержащему  $s'$  частиц, который в свою очередь отображается в кластер, содержащий  $s$  частиц:

$$n_s = b^{-2} s' n_{s'}, \text{ где } s' = s/b^D. \quad (7.15)$$

Множитель  $b^{-2}$  в правой части здесь обусловлен тем, что для каждого узла на решетке  $(L/b) \times (L/b)$  существуют  $b^2$  узлов на решетке  $L \times L$ . Это означает, что правую часть соотношения (7.15) нужно разделить на  $b^2$ , так как мы рассматриваем вероятность, приходящуюся на один узел решетки.

Распределение величин кластеров зависит от  $L$  только через переменную  $s/s_{\text{макс}} \sim 2/L^D$ , так как наибольший кластер на решетке  $L \times L$  ограничен и содержит не более  $s_{\text{макс}} \sim L^D$  узлов. Учитывая это, мы используем для  $n_s(L)$  следующую зависимость:

$$n_s(L) = s^{-\tau} g(s/L^D). \quad (7.16)$$

Здесь  $g(x)$  — переходная функция, которая должна стремиться к константе при  $s/L^D \rightarrow 0$ , так как в пределе при  $L \rightarrow \infty$  распределение кластеров по величине должно стать независимым от размера решетки. Степенная зависимость в формуле (7.16) необходима потому, что величина  $n_s$  должна удовлетворять соотношению (7.15). Подставляя выражение (7.16) в формулу (7.15), получаем соотношение

$$\begin{aligned} s^{1-\tau} g(s/L^D) &= b^{-2} (s/b^D)^{1-\tau} g[(s/b^D)/(L/b)^D] = \\ &= b^{-(2+D-\tau D)} s^{1-\tau} g(s/L^D). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Из соотношения (7.17) мы заключаем, что  $2 + D - \tau D = 0$ , и распределение кластеров по величине на пороге протекания определяется степенным законом

$$n_s \sim s^{-\tau}, \text{ где } \tau = (E + D)/D. \quad (7.18)$$

Показатель  $\tau$  зависит от евклидовой размерности  $E = 2$  решетки. Мы явно указываем  $E$  в выражении для  $\tau$ , так как соотношение (7.18) выполняется и для протекания на гиперкубических решетках при  $E < 6$ . При  $E \geq 6$  для вывода зависимости необходимо привлекать дополнительные соображения. Подробности см. в работе Аарони [3].

Соотношение (7.16) можно представить в виде

$$n_s(L) = s^{-\tau} g(s/L^D) = L^{-D\tau} n(s/L^D) = L^{-E-D} n(s/L^D). \quad (7.19)$$

Новая переходная функция  $n(x)$  здесь определяется выражением  $n(x) = x^{-\tau} g(x)$ . Эта зависимость для  $n(x)$  удобна, когда нам требуется оценить, как различные средние изменяются в зависимости от размеров  $L$  решетки. Например, средняя величина кластера, определяемая соотношением (7.12), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle_L &\sim \sum_{s=1}^{L^D} s^2 n_s(L) / \sum_s s n_s \approx \\ &\approx L^{2D-E} \int_{1/L^D}^1 d\frac{s}{L^D} \left(\frac{s}{L^D}\right)^2 n(s/L^D) \sim \\ &\sim L^{2D-E}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Нормировочный множитель удовлетворяет равенству  $\sum_s s n_s = p_c$ , так как он выражает долю узлов, принадлежащих конечным кластерам. Последнее соотношение возникает потому, что интегральная аппроксимация суммы зависит только от переменной  $x = s/L^D$  и сходится при нижнем и верхнем пределах. Таким образом, интеграл перестает зависеть от  $L$  в пределе больших  $L$ . Этот результат показывает, что средняя величина кластера на пороге протекания  $\langle s \rangle_L \sim L^{2D-E}$  с увеличением  $L$  растет медленнее, чем величина наибольшего кластера  $s_{\text{макс}} \sim L^D$ .

Аналогичным образом можно найти и средний радиус гирации конечных кластеров на пороге протекания:

$$\langle R_g^2(s) \rangle_L = \frac{\sum_s R_g^2(s) s n_s}{\sum_s s n_s} \sim L^{2-(E-D)}. \quad (7.21)$$

Формула (7.21) означает, что в задаче о перколяции *не каждый* отрезок может быть выбран за длину стороны  $L$  решетки, так как величина  $\langle R_g^2(s) \rangle_L$  *не пропорциональна*  $L^2$  (см. [204]).

Изложенные выше соображения характерны для применения идей скейлинга в теории протекания и теории критического поведения при фазовых переходах второго рода. Существенным аспектом этого подхода является *самоподобная* структура процесса протекания на пороге. Это

самоподобие приводит к степенным зависимостям различных величин. Но не каждый показатель степенного закона можно считать фрактальной размерностью. Многие из возникающих показателей могут быть выражены через фрактальную размерность и (евклидову) пространственную размерность решетки. Соотношения (7.20) и (7.21) могут служить примерами *скейлинга конечных масштабов*, широко используемого при численном моделировании на пороге протекания для определения критических показателей.

## 7.6. Корреляционная длина $\xi$

Как вблизи порога перколяции  $p_c$ , так и при вероятности, сильно отличающейся от  $p_c$ , перколяционные кластеры характеризуются числом узлов  $s$  и гирорадиусом  $R_g(s)$ . На каких расстояниях сохраняется связность открытых пор (узлов)? *Длина связности*  $\xi$  определяется как квадратный корень из *среднего* квадрата расстояния между занятыми узлами, принадлежащими одному и тому же конечному кластеру. Длина связности называется также *корреляционной длиной*. Таким образом определенная корреляционная длина равна квадратному корню из значения  $R_g^2(s)$ , усредненного по распределению размеров кластера.

Чтобы вычислить  $\xi$ , рассмотрим отдельный узел кластера, состоящего из  $s$  узлов. Рассматриваемый узел связан с  $s - 1$  узлами, и средне-квадратичное расстояние до этих узлов равно  $R_g^2(s)$ . Вероятность того, что некоторый узел принадлежит к кластеру размера  $s$ , равна  $sn_s$ . Следовательно, длина связности равна

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_g^2(s) s^2 n_s(p)}{\sum_s s^2 n_s(p)}. \quad (7.22)$$

Чтобы упростить это выражение, мы заменили число узлов, с которыми связан данный узел, с  $s - 1$  на  $s$ . Распределение размеров кластера  $n_s(p)$  здесь рассматривается как функция  $p$  и равно среднему числу кластеров *конечного* размера  $s$  в расчете на один узел.

Как следует из соотношения (7.21), при  $p = p_c$  гирорадиус беспрельдно увеличивается с увеличением размеров системы, поэтому  $\xi = \infty$  при  $p = p_c$ . При значениях  $p_c$ , близких к  $p$ , парная длина связности имеет степенную особенность

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (7.23)$$

При двумерном протекании  $\nu = 4/3$ . С помощью перенормировки треугольной решетки, обсуждавшейся в разд. 7.3, можно понять происхождение этого степенного закона и получить очень хорошее приближенное выражение для показателя  $\nu$ . Если треугольная решетка с концентрацией  $p$  укрупняется на множитель  $b = \sqrt{3}$ , то концентрация на полученной решетке  $p'$  определяется равенством (7.7). Новая корреляционная длина

$\xi'$  равна

$$\xi' = \xi(p') = \xi(p)/b. \quad (7.24)$$

Вблизи особой точки  $p_c$  перенормировочное преобразование (7.7) линейно по  $(p - p_c)$  (см. рис. 7.8.). Раскладывая соотношение (7.7) по  $(p - p_c)$  вблизи  $p_c = 1/2$ , получаем следующее выражение для  $p'$ :

$$p' = p_c + \Lambda(p - p_c) \text{ при } |p - p_c| \ll p_c, \quad (7.25)$$

где  $\Lambda = 3/2$ . Подставляя это выражение в (7.24), мы видим, что  $\xi$  — *одно-родная* функция  $p - p_c$ :

$$\xi(\Lambda|p - p_c|) = b^{-1} \xi(|p - p_c|). \quad (7.26)$$

Как и раньше, этому соотношению удовлетворяют только степенные функции (7.23), и, подставляя сюда (7.23), мы получаем

$$(\Lambda|p - p_c|)^{-\nu} = b^{-1} |p - p_c|^{-\nu}. \quad (7.27)$$

Из этого уравнения находим показатель  $\nu$ , определяющий вид особенности корреляционной длины вблизи  $p_c$ :

$$\nu = \ln b / \ln \Lambda = \ln \sqrt{3} / \ln(3/2) \simeq 1,355, \quad (7.28)$$

что прекрасно согласуется с точным значением  $\nu = 4/3$  для двумерного случая [49]. Этот вывод представляет собой простой пример общего метода вычисления критических показателей с помощью перенормировочного преобразования. Заметим, что использованное масштабное преобразование приближенно, поскольку при таком преобразовании связность кластеров может изменяться. Более подробное обсуждение см. в работе [3].

С помощью соображений подобия найти вид распределения размеров кластера  $n_s(p)$ . Рассмотрим кластеры, гирорадиусы которых удовлетворяют неравенству  $r_g(s) < \xi$ . Поскольку гирорадиус удовлетворяет соотношению  $s \sim \xi_g^D$ , число узлов таких кластеров подчиняется неравенству  $s < \xi^D$ . На масштабах, меньших  $\xi$ , свойства кластера ничем не отличаются от критических параметров, характерных для  $p_c$ , откуда следует, что на этих масштабах распределение размеров определяется выражением (7.19), но с заменой размера области  $L$  на  $\xi$ . Итак, мы получили

$$n_s(p) = \begin{cases} \xi^{-E-D} \mathcal{N}(s/\xi^D) & \text{при } s \ll \xi^D, \\ 0 & \text{при } s \gg \xi^D. \end{cases} \quad (7.29)$$

При  $x \ll 1$  функция перехода  $\mathcal{N}(x)$  быстро уменьшается, а при  $x \gg 1$  изменяется как  $x^{-\tau}$ , т.е. так же, как и функция перехода  $n(x)$  в (7.19). Пользуясь этим распределением размеров, можно показать, что средний размер кластера равен

$$\langle s \rangle_\xi = \frac{\sum_s s^2 n_s(p)}{\sum_s s n_s} \sim \xi^{2D-E}. \quad (7.30)$$

Вывод этого соотношения аналогичен выводу (7.20).

При  $p \geq p_c$  вероятность (в расчете на один узел) того, что данный узел принадлежит *бесконечному* перколяционному кластеру, равна  $p_\infty(p)$ . Любой узел занят с вероятностью  $p$  и принадлежит одному из конечных кластеров с вероятностью  $\sum_s s n_s(p)$ . Занятые узлы, не входящие ни в один конечный кластер, должны принадлежать бесконечному кластеру. Это утверждение можно записать в виде

$$P_\infty(p) = p - \sum_s s n_s(p). \quad (7.31)$$

Используя автомодельный вид распределения размеров кластера, мы приходим к следующему автомодельному выражению для вероятности протекания<sup>1)</sup>:

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta \sim \xi^{D-E}. \quad (7.32)$$

Из этого равенства находим выражение для показателя  $\beta$  в вероятности протекания:

$$\beta = (E - D)^\nu = 5/36 \text{ при } E = 2 \text{ и } 0,4 \text{ при } E = 3. \quad (7.33)$$

Число узлов в самом большом кластере,  $M(L)$ , зависит от того, насколько он близок к  $p_c$ . Для областей размером  $L \ll \xi$  этот кластер наибольшего размера простирается по всей решетке и  $M(L) \sim L^D$ . Однако при  $L \gg \xi$  ситуация меняется: размеры конечных кластеров не превышают  $\xi$  и функция  $M(L)$  должна переходить в  $M(L) = \bar{\rho} L^E$ , где средняя плотность  $\bar{\rho}$  равна  $\bar{\rho} = P_\infty \sim \xi^{D-E}$ . Этот переход описывается однородной функцией  $m(x)$ , такой, что

$$M(p, L) = L^D m(L/\xi), \text{ где } \xi \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (7.34)$$

Численное моделирование очень четко обнаруживает этот переход (рис. 7.12).

Как мы показали в этом разделе, длина связности, или корреляционная длина  $\xi$ , расходится при критическом значении концентрации. Эта особенность имеет степенной вид с показателем, который довольно точно оценивается с помощью перенормировки. С практической точки зрения разнообразные переходные функции и степенные зависимости вблизи критического значения концентрации удобно выражать через  $\xi$ . Мы также показали, что показатели, характеризующие различные зависимости вблизи порога протекания, связаны соотношениями подобия, которые выражают их через фрактальную размерность  $D$  перколяционного кластера, размерность пространства  $E = 2$  и показатель  $\nu$ , характеризующий корреляционную длину.

<sup>1)</sup> Отметим, что в этом случае при замене суммы интегралом следует проявить осторожность. Обсуждение условий этой замены см. в работах [205, 206].



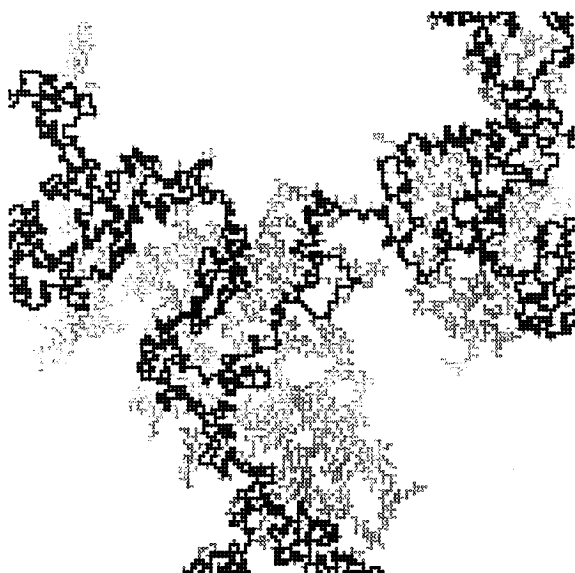


РИС. 7.13. Перколяционный кластер и его остов (черный цвет) по результатам моделирования на квадратной решетке размером  $147 \times 147$  при  $p_c = 0,593$  [168].

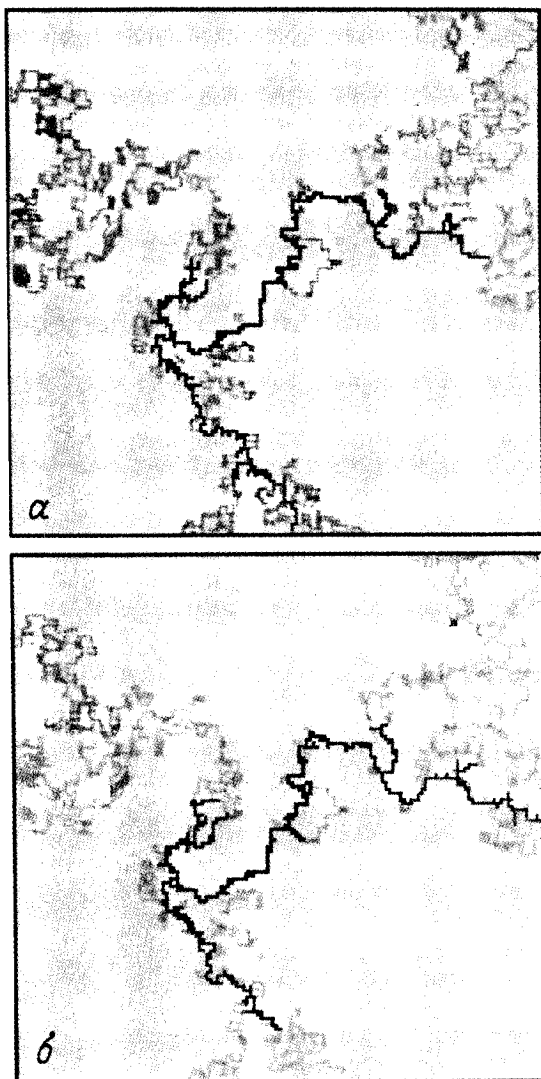
перерезать одну *обособленную связь*. Вытесняющая жидкость (вода) не может проникнуть в обособленные ветви, потому что запертому там маслу просто некуда деться.

Остов включает все узлы, лежащие на всех возможных траекториях несамопересекающегося случайного блуждания, начинающихся в узле (узлах) впрыскивания и заканчивающихся на границе области. Несамопересекающееся случайное блуждание не может привести в обособленную ветвь, потому что иначе для возвращения на остов пришлось бы дважды побывать в том единственном узле, связывающем с ним эту ветвь.

Конкретная реализация перколяционного кластера и его остова показана на рис. 7.13 для перколяции по узлам квадратной решетки на пороге протекания. Остов связывает узел, находящийся в центре квадратной решетки размером  $147 \times 147$ , с узлами на ее границе. Перколирующий кластер содержит 6261 узел, в то время как в остова всего 3341 узел.

Мы изготовили лабораторную модель перколяционного кластера, показанного на рис. 7.13 [168]. Модель сделана из эпоксидной смолы и имеет цилиндрические поры диаметром 1,1 мм и высотой 0,7 мм. Поры связаны каналами шириной 0,7 мм. Модель заполнялась вязким подкрашенным глицерином. Обычный эксперимент по вытеснению состоял в том, что в центре объема впрыскивался воздух, который вытеснял

РИС. 7.14. *а* – Воздух, вытесняющий глицерин с большим капиллярным числом в перколяционном кластере, показанном на рис. 7.13; *б* – численное моделирование вытеснения жидкости в том же перколяционном кластере. Различными оттенками серого цвета показаны поры, которые воздух занимает в последовательные моменты времени. И в эксперименте, и при численном моделировании число пор, заполненных воздухом, в последовательные моменты времени составляло 30 (черные), 86, 213, и, наконец, 605 (светло-серые) при начале перколяции. Остов показан очень бледным серым цветом. Среди цветных вкладок есть вариант этих рисунков [168].



глицерин, вытекавший из модели. Результаты эксперимента, показанные на рис. 7.14, очень наглядно иллюстрируют, что вытеснение происходит только вдоль остова.

Процесс вязкого вытеснения в фрактальном перколяционном кластере можно моделировать численно, решая уравнение движения (4.3) с соответствующими граничными условиями [162, 168]. На рис. 7.14 мы приводим также результаты численного моделирования течений в перко-

ляционном кластере, исследованном в лабораторном эксперименте, при высоких капиллярных числах.

Результаты, полученные в лабораторном эксперименте и при численном моделировании, очень хорошо согласуются. И в эксперименте, и в численных результатах совпадают 70–80% узлов, заполненных возду-

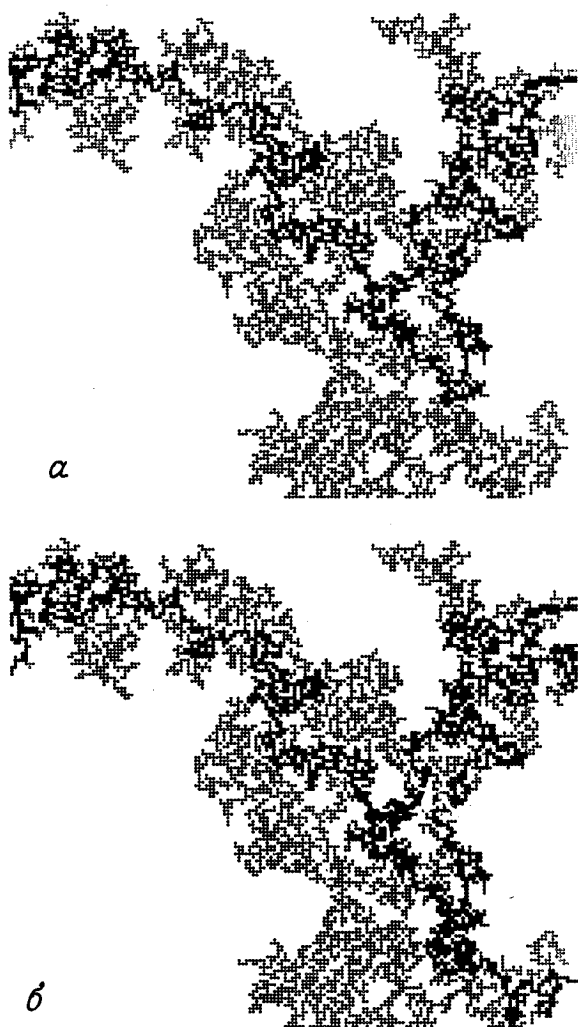


РИС. 7.15. Остовы перколяционного кластера на квадратной решетке, показанного на рис. 7.2, б, при критической концентрации  $p_c$ . *a*—Остов, связывающий отдельный узел на левой границе решетки размеров  $160 \times 160$  с отдельным узлом на правой границе; *б*—остов, связывающий все узлы на левой и правой границах.

хом на каждом этапе вытеснения. Отдельные реализации численной модели также совпадают друг с другом примерно на 75%. Это согласие говорит о том, что на пороге протекания вытеснение почти полностью определяется *геометрическими* факторами, потому что численная модель не учитывает такие эффекты, как межфазные напряжения и смачиваемость, которые, как известно, влияют на свойства двухфазных течений в пористых средах.

Вид остова перколяционного кластера зависит от того, как расположено место (или места) впрыскивания и место (места) вытекания. Для примера рассмотрим перколяционный кластер на границе протекания  $p_c$ , показанный на рис. 7.2, б. Остов, связывающий отдельный узел на левой границе с отдельным же узлом на правой границе, показан на рис. 7.15, а, а на рис. 7.15, б изображен остов, связывающий все узлы левой и правой границ.

Узлы остова образуют подмножество узлов перколяционного кластера, и каждый узел перколяционного кластера является также частью по меньшей мере одного остова. Поскольку перколяционные кластеры фрактальны и их размерность равна  $D = 1,89$ , остовы перколяционных кластеров также фрактальны и их размерность подчиняется неравенству  $D_B \leq D$ . Большое число численных моделей (на пороге протекания  $p_c$ ) показали, что масса  $M_B(l)$  остова, связывающего границы квадрата со стороной  $l$ , равна

$$M_B(L) \sim L^{D_B}, \text{ где } D_B \simeq 1,61. \quad (7.35)$$

Оценки фрактальной размерности остова заключены в пределах  $D_B \simeq 1,62 \pm 0,02$  [90], а недавно была получена оценка  $D_B = 1,61 \pm 0,02$  [111]. Кривая Мандельброта – Гивена, показанная на рис. 2.14, может служить разумной моделью остова перколяционного кластера, и ее фрактальная размерность  $D_B = 1,63 \dots$  достаточно близка к размерности остова.

Процесс вязкого вытеснения в перколяционном кластере выделяет лишь некоторое *подмножество* узлов остова. Это подмножество зависит от капиллярного числа. Лабораторные эксперименты и численные расчеты [168] показывают, что фрактальная размерность структуры вязких пальцев равна  $D \sim 1,3$  при высоких значениях  $Ca$  и  $1,5$  при низких  $Ca$ .

Изучая различные *физические* явления, происходящие на фракталах, мы получим в общем различные фрактальные размерности. Это происходит потому, что выбор конкретного физического процесса, происходящего на фоне фрактальной геометрии, по сути дела равнозначен выбору меры этого фрактального множества. Поэтому изучение физических явлений на фрактальных множествах естественным образом приводит к понятию мультифракталов, обсуждавшихся в предыдущей главе. Распределения тока и флуктуации сопротивления фрактальных цепей, состоящих из (нелинейных) сопротивлений, приводят к бесконечным наборам показателей, или мультифракталам (см. [4, 25, 26, 45, 182]).

Остовы имеют много геометрических особенностей, которые также фрактальны. Рассмотрим две точки, связанные остовом, который пока-

зан на рис. 7.15, а. Длина кратчайшего пути между этими точками  $l_{\text{мин}}$  (равная числу узлов, которые необходимо посетить на этом пути) оказывается следующим образом зависящей от размера области  $l$ , т. е. евклидова расстояния между точками (см., например, [83]):

$$l_{\text{мин}} \sim L^{D_{\text{мин}}}, \text{ где } D_{\text{мин}} = 1,15 \pm 0,02. \quad (7.36)$$

На изображениях остовов, показанных, например, на рис. 7.15, заметно, что они состоят из «пузырей», соединенных «перемычками» [46, 199, 201]. Перемычки, которые Стэнли [201] называет также красными связями, обладают тем свойством, что если их перерезать, то остов распадается на две части и жидкость больше не может протечь от места впрыскивания до места вытекания. В пузырях связи продублированы и перерезание такой связи, т. е. удаление узла, не прерывает течения. Связи, соединяющие узлы внутри пузырей, Стэнли называет синими связями. Причина такой «раскраски» связана с электрическим аналогом протекания, когда ток течет сквозь перколяционный кластер от одного контактного узла (места впрыскивания) к другому краю кластера, где находится другой узел контакта. Весь ток протекает при этом через перемычки, и они раскаляются докрасна. В пузырях ток имеет возможность растечься по многим связям, и они остаются относительно холодными. Множество, состоящее из красных связей, образует подмножество узлов остова, которое также является фрактальным [178]. Если увеличивается расстояние  $L$  между парой узлов на разных концах остова, то число красных связей растет по степенному закону:

$$N_{\text{красн}} \sim L^{D_{\text{красн}}}, \text{ где } D_{\text{красн}} = 1/\nu = 3/4. \quad (7.37)$$

Было показано, что соотношение  $D_{\text{красн}} = 1/\nu$  между фрактальной размерностью множества красных связей и показателем  $\nu$ , который определяет особенность корреляционной длины  $\xi$  при  $p = p_c$ , точно выполняется и в случае большего числа измерений [39, 40]. Почти вся масса остова сосредоточена в пузырях, так как фрактальная размерность множества красных связей намного меньше размерности остова. Поэтому фрактальная размерность множества узлов, принадлежащих пузырям, равна размерности остова. Кривые Мандельброта–Гивена (см. рис. 2.13 и 2.14) содержат много тонких (красных) связей. Фрактальная размерность множества таких связей равна  $0,63 \dots$ , что несколько меньше  $D_{\text{красн}}$  для перколяционного кластера.

При анализе явлений переноса в перколяционных кластерах возникает много разных оценок размерности. По сути дела, вновь обнаруживается мультифрактальное поведение. Недавний обзор этих проблем можно найти в [4].

## 7.8. Перколяция с вытеснением

Протекание с вытеснением – это *динамический* перколяционный процесс, введенный Уилкинсоном и Виллемсеном [219] для описания течения двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде [34, 47]. Рассмотрим вытеснение масла водой в пористой среде. Если вода нагнетается очень медленно, то этот процесс происходит при очень низких капиллярных числах  $Ca$  (см. обсуждение в гл. 4.). Это значит, что капиллярные силы полностью преобладают над вязкими и поэтому динамика вытеснения определяется процессами в масштабе отдельных пор. В пределе бесконечно малых капиллярных чисел можно пренебречь всеми скачками давления как в *вытесняющей* (воде), так и в *вытесняемой* жидкости (масле). Однако между этими двумя жидкостями сохраняется разность давлений (капиллярное давление), равное

$$(p_{\text{вытесняющее}} - p_{\text{вытесняемое}}) = \frac{2 \sigma \cos \theta}{r} \quad (7.38)$$

(см. также (4.4)). Здесь  $\sigma$  – межфазное натяжение на границе жидкостей,  $\theta$  – краевой угол между поверхностью раздела и стенкой поры, а  $r$  – радиус кривизны поры в месте контакта жидкостей.

Часто случается так, что вода – «смачивающая» жидкость, а масло – «несмачивающая», т.е. краевой угол больше  $90^\circ$  и вода спонтанно вытесняет масло из пористой среды, если только давление воды не поддерживается на более низком уровне, чем давление масла. Важно отметить, что разность давлений зависит от локального радиуса поры или ее горловины в точке раздела жидкостей. В пористой среде должны присутствовать вариации  $r$  (и, возможно, краевого угла) и поверхность раздела должна смещаться так, чтобы повсюду удовлетворялось уравнение (7.38). Капиллярные силы наиболее велики в самых узких местах системы пор. Таким образом, если горловины уже пор, то поверхность раздела воды и масла быстро движется сквозь горловины и тормозится, попадая в крупные поры. В согласии с подобными простыми теоретическими моделями и экспериментальными результатами это движение можно представить в виде ряда дискретных скачков, так что на каждом временном шаге вода вытесняет масло из самой малой из имеющихся пор, занятых маслом.

Уилкинсон и Виллемсен [219] предложили моделировать этот процесс в идеализированной среде, в которой решетку пор можно рассматривать как регулярную решетку с узлами и связями, играющими роль пор и связывающих их каналов (горловин). Случайность привносится в эту среду путем приписывания узлам и связям случайных чисел, которые характеризуют размеры соответствующих пор и горловин. Моделирование процесса на выбранной реализации решетки состоит, таким образом, в расчете движения поверхности раздела воды и масла по мере того, как она продвигается через самые малые из имеющихся пор, заполняя их вытесняющей жидкостью.

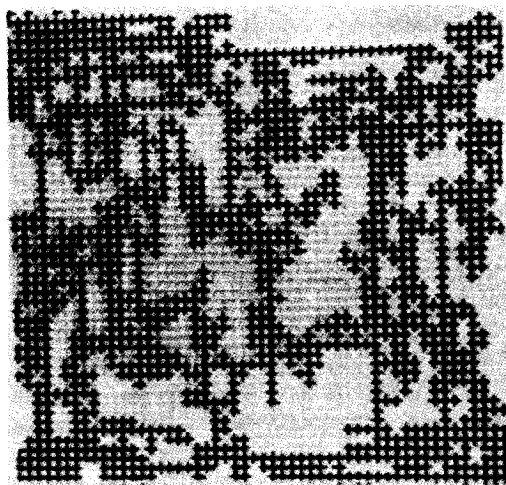


РИС. 7.16. Перколяция с вытеснением воздуха водой (показана черным) в модели, состоящей из регулярной решетки цилиндров диаметром 2 мм и высотой 0,7 мм, заключенной между параллельными пластинами. Вода не смачивает вещество модели. Вода втекает в верхнем левом углу и вытекает внизу справа. Вытеснение происходит при  $Ca \approx 10^{-5}$  [62].

Этот подход применим и в том случае, когда несмачивающая жидкость, скажем воздух, вытесняет смачивающую жидкость. Тогда давление в вытесняющей жидкости больше, чем в вытесняемой, и поверхность раздела быстро распространяется через крупные поры, застревая в узких горловинах между порами. На рис. 7.16 показан пример структур, возникающих в этом случае.

Из рис. 7.16 явствует, что вытесняющая жидкость *захватывает* области вытесняемой жидкости. По мере продвижения вторгающейся жидкости она способна полностью охватить области, заполненные вытесняемой средой, т.е. полностью отрезать кластеры вытесняемой жидкости от узлов на входе в решетку. Это одна из причин возникновения проблемы «остаточной нефти» — жгучей экономической проблемы нефтепромыслов. Поскольку нефть несжимаема, можно сформулировать правило: вода не может вытеснить нефть из захваченных областей [219].

Теперь мы можем дать простое описание алгоритмов анализа перколяции с вытеснением.

1. Припишем каждому узлу на решетке размером  $L \times L$  случайное число  $r$ , принадлежащее отрезку  $[0,1]$ .
2. Выберем места впрыскивания вытесняющей жидкости и места вытекания вытесняемой среды.
3. Найдем *узлы роста* как узлы, занятые вытесняемой жидкостью и соседствующие с вытесняющей средой.
4. Пропустим вытесняющую среду в тот узел роста, в котором случайное число  $r$  принимает наименьшее значение.
5. *Захват*: узлы роста в областях, полностью окруженных вытесняющей жидкостью, теряют активность и исключаются из списка узлов роста.

6. Процесс вытеснения заканчивается, когда вытесняющая жидкость достигает узла, через который жидкость вытекает из системы.

В этой модели вытесняющая жидкость проникает от одного узла к другому, всегда выбирая узел роста с наименьшим случайным числом. Подчиняясь этому алгоритму, вытесняющий кластер растет в соответствии с *локальными* свойствами решетки. Правило, запрещающее вытеснение из захваченных областей, привнесит в модель нелокальные черты. На вопрос, является ли данная область захваченной или нет, нельзя ответить, оставаясь на локальном уровне, необходимо провести в системе *глобальный* поиск.

Представляет интерес сравнение перколяции с вытеснением, не приводящей к появлению захваченных областей, с обычным перколяционным процессом, который мы описали в предшествующих разделах. При обычной перколяции рост кластеров можно описать следующим образом. Узлам решетки  $L \times L$  приписываются случайные числа  $r$  из отрезка  $[0, 1]$  и на решетке помещается затравка. Тогда для выбранного значения вероятности  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) кластер растет, занимая все узлы, в которых случайные числа  $r$  удовлетворяют неравенству  $r \leq p$ . Рост перколяционного кластера прекращается, когда на границе (периметре) кластера больше не оказывается таких случайных чисел. Только в том случае, если затравка окажется на внутреннем перколирующем кластере на пороге  $p_c$  или на перколирующем кластере при  $p > p_c$  перколирующий кластер вырастет до размера всей решетки. В отличие от этого процесса при перколяции с вытеснением кластер растет, всегда выбирая наименьшее из доступных случайных чисел, каким бы большим оно ни было. Однако, после того как на некотором шаге выбрано какое-нибудь большое число  $r_0$ , вовсе не обязательно, чтобы в дальнейшем выбирались еще большие числа,  $r \geq r_0$ , — в общем случае на поверхности раздела станут доступными меньшие числа и выбраны будут именно они. Кластер, показанный на рис. 7.17, образовался именно при таком процессе, увеличиваясь до тех пор, пока он не достиг границы системы.

Кластер, показанный на рис. 7.17, который возник при протекании с вытеснением, очень похож на перколяционный кластер, изображенный на рис. 7.10. Уилкинсон и Виллемсен [219] моделировали процесс вытеснения на решетках размером  $L \times 2L$ , впрыскивая вытесняющую жидкость на левой границе и прослеживая процесс до тех пор, пока не наступало протекание, т.е. пока вытесняющая жидкость не достигала правой границы. Геометрия этого эксперимента иллюстрируется рис. 7.18.

Естественно, что если при конечном размере области продолжать вытеснение достаточно долго, то вытесняющая жидкость постепенно заполнит всю решетку. Как показали Уилкинсон и Виллемсен, число узлов  $m(L)$  центральной части (размером  $L \times L$ ) решетки в момент наступления протекания растет с размером решетки по закону

$$M(L) = AL^{D_{\text{вытесн}}}, \text{ где } D_{\text{вытесн}} \approx 1,89. \quad (7.39)$$

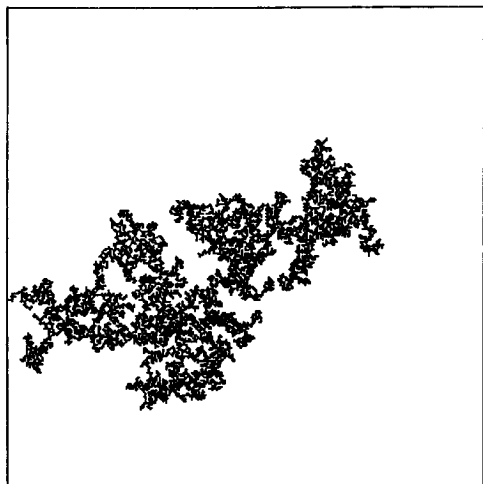


РИС. 7.17. Кластер, выросший при перколяции с вытеснением (без захвата) из центрального узла решетки размером  $300 \times 300$ . Кластер, содержащий 7656 узлов, растет до тех пор, пока не достигнет одной из границ решетки.

Это соотношение аналогично зависимости (7.5), и фрактальная размерность  $D_{\text{вытесн}}$  при перколяции с вытеснением, но без образования захваченных областей оказывается равной фрактальной размерности внутреннего перколяционного кластера при значении концентрации  $p_c$ . Поэтому есть веские основания полагать, что процесс перколяции с вытеснением принадлежит к тому же классу универсальности, что и обычная перколяция [51].

В двумерных системах возможность образования захваченных обла-

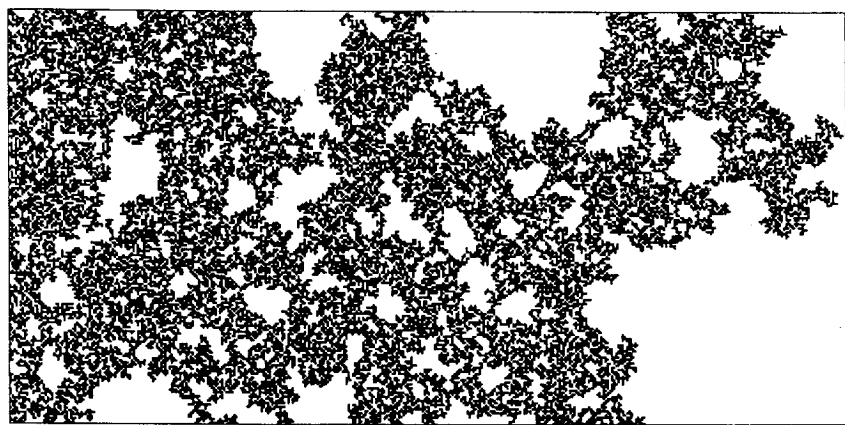


РИС. 7.18. Перколяция с вытеснением (без захвата) на решетке размером  $100 \times 200$  с квадратными ячейками. Вытесняющая жидкость (черная) втекает через узлы на левой границе, а вытесняемая среда вытекает через правую границу. Протекание наступает, едва вытесняющая жидкость коснется правой границы.

стей очень сильно меняет картину перколяции с вытеснением. На рис. 7.19 показан кластер, возникающий, когда при перколяции с вытеснением допускаются захваты. Сравнение с кластером, изображенным на рис. 7.18, показывает, что возможность захвата приводит к сильному увеличению размеров полостей внутри кластера. Это проявляется в зависимости от размера решетки числа узлов  $M(L)$ , лежащих в центральной части решетки размером  $L \times L$  при впрыскивании на одной стороне:

$$M(L) = AL^{D_{\text{захв}}}, \text{ где } D_{\text{захв}} \approx 1,82. \quad (7.40)$$

Этот результат был получен Уилкинсоном и Виллемсеном [219]. Было предпринято *экспериментальное* исследование очень медленного вторжения воздуха в двумерную систему из 250 000 заполненных глицерином капилляров, имеющих случайные сечения и образующих квадратную сетку (рис. 7.20) [114]. Этот эксперимент продолжался и после наступления протекания. На правой границе образца могла помещаться полупроницаемая мембрана, не позволявшая воздуху выходить из системы; процесс вытеснения прекращался, когда захватывалась вся оставшаяся вытесняемая жидкость. Как обнаружилось, число капилляров заполненных воздухом, в квадратах размером  $L$  подчинялось зависимости (7.40) с  $1,80 < D_{\text{захв}} < 1,83$  в согласии с численными расчетами.

Мы получали перколяционные кластеры с захваченными областями в следующем эксперименте. Воздух впрыскивался в центре двумерной круглой модели пористой среды, состоящей из слоя стеклянных сфер, которые размещались случайным образом между двумя пластинами. В согласии с ожидаемым результатом получившийся кластер, изображе-

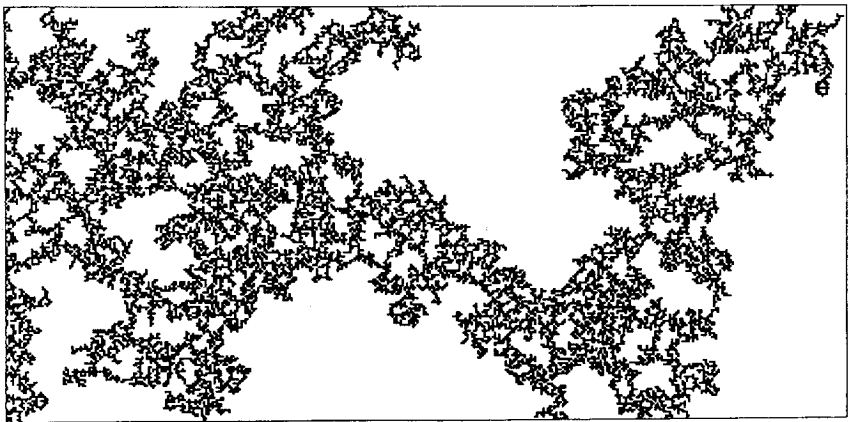


РИС. 7.19. Перколяция с вытеснением и захватом на решетке размером  $100 \times 200$  с квадратными ячейками. Вытесняющая жидкость (черная) втекает через узлы на левой границе, а вытесняемая жидкость вытекает через правую границу. Протекание наступает, когда вытесняющая жидкость касается правой границы.

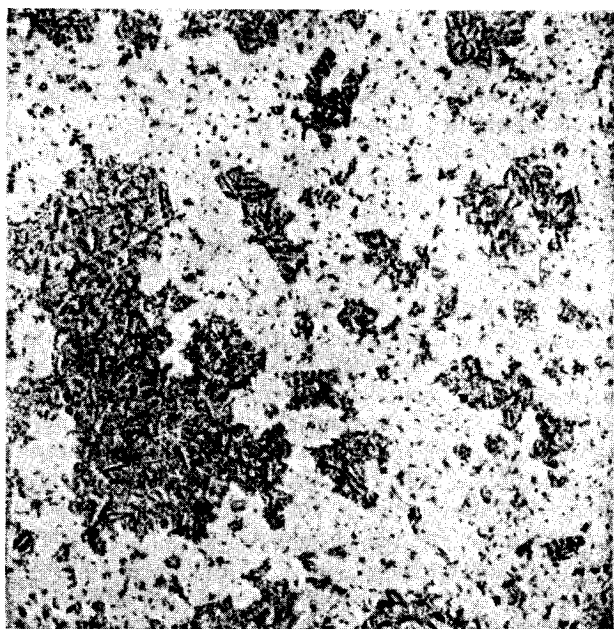


РИС. 7.20. Вытеснение смачивающей жидкости (черная) несмачивающей жидкостью (белая), выпрыскиваемой на левой границе решетки. Полупроницаемая мембрана на правой границе не позволяет несмачивающей жидкости покидать систему [114].

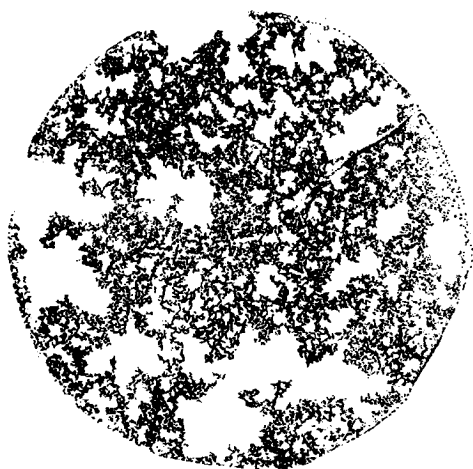


РИС. 7.21. Воздух (черный) вытесняет глицерин (белый) при очень малом значении капиллярного числа  $Ca \approx 10^{-5}$  в двумерной модели, составленной из слоя случайным образом упакованных сфер диаметром 1 мм. Фрактальная размерность кластера, состоящего из вытесняющего воздуха, равна  $D \approx 1,84$  [125].

ние которого приведено на рис. 7.21, имеет фрактальную размерность  $D = 1,84 \pm 0,04$ .

Как видим, при образовании захваченных областей перколяция с вытеснением приводит к образованию фрактальных структур, фрактальная размерность которых меньше, чем при вытеснении без захвата или при обычной перколяции. Результаты экспериментов по вытеснению несмешивающихся жидкостей из двумерных пористых сред при очень низких капиллярных числах согласуются с результатами исследования перколяции с вытеснением при возможности захвата, представления о которой предложены Уилкинсоном и Виллемсеном [219].

Однако в трехмерных системах ситуация в корне меняется. Рассмотрим обычную перколяцию в простой кубической (п.к.) решетке, где каждый узел окружен шестью соседними узлами. Порог протекания для такой решетки равен  $p_c$  (п.к.)  $\approx 0,3117$ , а фрактальная размерность внутреннего перколяционного кластера, образующегося при критической концентрации  $p_c$ , равна  $D \approx 2,5$ . Важно, что в этом случае имеется диапазон значений вероятности  $p_c \leq p \leq (1 - p_c)$ , в котором перколяция происходит как по занятым, так и по свободным узлам, и оба типа узлов образуют бесконечные кластеры. Напротив, на двумерной квадратной решетке перколяция возможна либо по занятым, либо по свободным узлам и не существует диапазона значений вероятности, в котором перколирующими являются оба типа кластеров. Интересно отметить, что перколяция на треугольной решетке представляет собой промежуточный случай, поскольку в этом случае  $p_c = 0,5$  является порогом перколяции одновременно как по занятым, так и по свободным узлам.

Качественное отличие двух- и трехмерных систем распространяется и на перколяцию с вытеснением. Согласно Уилкинсону и Виллемсену [219], размерность кластера вторгающейся жидкости в момент наступания протекания равна  $d \approx 2,52$  как при захвате, так и без него. Существование целого интервала значений концентрации, в котором возможна перколяция и вытесняющей, и вытесняемой жидкостей, сильно уменьшает эффективность захвата. Даже когда вытесняющая жидкость уже может протекать от одной поверхности трехмерного образца до противоположной, большинство узлов все еще занято вытесняемой средой. Если продолжать процесс вытеснения, то захват вытесняемой жидкости начинается при  $p = (1 - p_c)$ . Уилкинсон и Виллемсен нашли, что в этом состоянии число узлов вытесняющего кластера растет как  $L^2$ , так что такие узлы составляют конечную долю  $\approx 0,66$  полного числа узлов простой кубической решетки размера  $L \times L \times L$ . Таким образом, в пределе, когда вытесняемая жидкость захвачена, вытесняющий кластер не является фрактальным. Диас и Уилкинсон [51] рассмотрели соответствующую модель — перколяцию с захватом, которая учитывает правило захвата, но пренебрегает эффектами, связанными с вытеснением. Эти исследователи проанализировали распределение размеров захваченных областей и получили серьезные указания на то, что вблизи критической

точки свойства перколяции с вытеснением и захватом принадлежат к тому же классу универсальности, что и обычная перколяция в трехмерных системах.

Трехмерный процесс перколяции с вытеснением трудно осуществить в эксперименте. Клемен и др. [38] впрыскивали с очень малой скоростью несмачивающий сплав Вуда снизу в уплотненное дробленое стекло и затем исследовали вертикальные и горизонтальные срезы цилиндрического образца. Они пришли к выводу, что, судя по горизонтальным срезам, перпендикулярным к направлению потока, сплав Вуда растекался по пористой среде самоподобным образом и фрактальная размерность распределения металла в срезе оказалась равной  $\approx 1,65$ . Эта величина несколько превышает фрактальную размерность 1,50, которую, как ожидается, должно иметь сечение внутреннего перколяционного кластера. Однако нельзя пренебрегать несомненным влиянием силы тяжести, из-за которого фрактальная размерность горизонтальных срезов зависит от их уровня.

## 7.9. Фрактальный диффузионный фронт

Во введении к этой главе мы отмечали, что процесс диффузии может распространяться бесконечно и его динамика определяется случайным характером движения частиц. Напротив, случайность процесса перколяции связана со *средой*, и существует порог, ниже которого процесс перколяции ограничен конечными областями или кластерами. В замечательной работе [191] показано, что *диффузионный фронт*, возникающий при диффузии от источника, имеет фрактальную структуру, которая связана с так называемой *скорлупой* перколяционного кластера. Описательный термин «скорлупа» был впервые введен Мандельбротом [134] и подробно обсуждался Фоссом [212].

Рассмотрим диффузию частиц на квадратной решетке от линейного источника, как показано на рис. 7.22. Частицы испускаются источником, который занимает всю левую границу рисунка. Каждая частица через каждые  $\tau$  секунд перескакивает на один из четырех ближайших узлов, удаленных на расстояние  $a$ . Связь случайных блужданий с диффузией в одномерных системах довольно подробно обсуждается в гл. 9. Коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  определяется соотношением Эйнштейна (9.3), которое при принятых здесь обозначениях принимает вид

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\tau} a^2. \quad (7.41)$$

Перемещения диффундирующих частиц вдоль оси  $x$ , перпендикулярно линии источника, и вдоль оси  $y$ , параллельно источнику, статистически независимы. Средний квадрат смещения за время  $t$  определяется выражением (9.11), а в двумерном случае – равенствами

$$\langle [x(t) - x_0]^2 \rangle = \langle [y(t) - y_0]^2 \rangle = 2\mathcal{D}t, \quad (7.42)$$

если начальные координаты частицы —  $x_0$  и  $y_0$ . Диффузионная длина  $l$  определяется как среднеквадратичное смещение частицы от начального положения:

$$l^2 = \langle [x(t) - x_0]^2 \rangle + \langle [y(t) - y_0]^2 \rangle = 4 \mathcal{D} t = 2 a^2 t / \tau. \quad (7.43)$$

Хорошо известно, что вероятность обнаружить частицу на расстоянии  $x$  от линейного источника, расположенного при  $x = 0$ , определяется выражением

$$p(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/l} du \exp(-u^2), \quad (7.44)$$

если решетка имеет ширину  $L$  и бесконечно протяженна вдоль оси  $x$ . Эта вероятность постепенно уменьшается от единичного значения у источника и быстро падает при  $x > L$ .

На рис. 7.22 видно, что если зафиксировать состояние процесса диффузии в какой-то момент времени, то мы увидим решетку, часть узлов которой занята частицами точно так же, как при процессе перколяции, обсуждавшемся в предыдущих разделах. Но в настоящем случае вероятность того, что данный узел занят, зависит от расстояния  $x$  от источника и определяется равенством (7.44). Вблизи источника  $p(x) \approx 1$ , а это значение превышает порог перколяции на квадратной решетке; следовательно, по узлам, занятым частицами, возможна перколяция. На некотором расстоянии от источника вероятность присутствия частиц в узлах падает ниже  $p_c$ , и такие узлы образуют только изолированные кластеры.

В электрическом аналоге этой системы частицы, лежащие в соседних узлах, считаются связанными электрическими контактами. К примеру, представьте себе атомы золота, диффундирующие от источника в непроводящее вещество. Граница между совокупностью узлов, которые (электрически) связаны с источником, и незанятыми, изолирующими узлами называется *скорлупой* этой области. В связи с определением скорлупы следует соблюдать некоторую осторожность. Пара узлов, занятых частицами, считается связанной с пустыми узлами, если занятые и пустые узлы соседствуют вдоль направлений  $x$  или  $y$ . Понятие связности мы вводим и для пустых узлов. Однако для того, чтобы получить хорошо определенную границу между занятыми и свободными узлами, необходимо считать, что свободный узел связан, если свободен также хотя бы один из окружающих узлов. Другими словами, определяя связность для свободных узлов, мы включаем в рассмотрение не только соседей в направлениях  $x$  и  $y$ , но и четыре узла, расположенные на концах диагоналей. Скорлупа состоит из всех узлов, которые связаны с источниками и являются соседями свободных узлов, связанных с изолирующим краем образца. Говоря образным языком, узлы, связанные с источником, составляют «сушу», а связанные свободные узлы — это «море». Если прогуливаться по самой границе соленой воды, то мы будем находиться на скорлупе. Заметьте, что это правило исключает

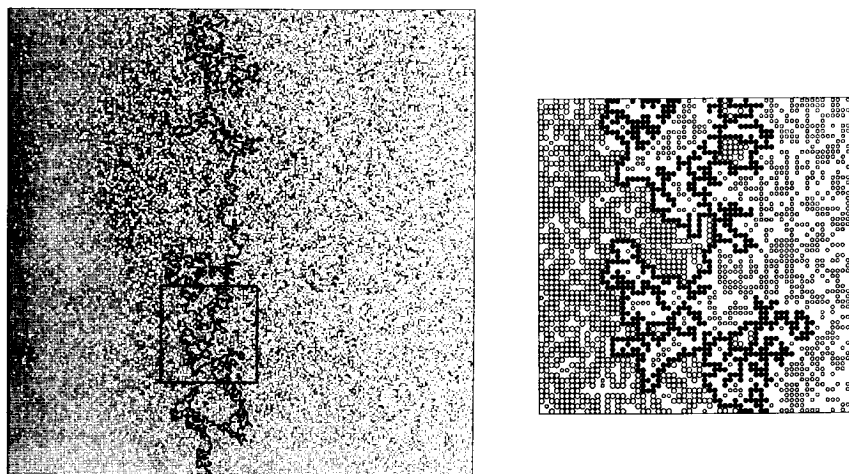


РИС. 7.22. Диффузия «частиц» (черные кружки) от источника, занимающего левую сторону решетки, узлы которой показаны как светлые квадраты. Скорлупа кластера диффундирующих частиц состоит из тех частиц (отмеченных черными квадратами), которые связаны с источником и соседствуют с узлами, связанными с правой границей. Справа показано увеличенное изображение области, выделенной квадратом на левой части рисунка. На этой увеличенной части скорлупа показана черными кружками, узлы, связанные с источником, изображены крупными кружками, а остальные занятые узлы отмечены малыми кружками. Цветное изображение левой части рисунка помещено среди цветных вкладок.

берега озер и луж, состоящих из изолированных групп свободных узлов среди суши (такие озера наполнены пресной водой), а также берега островов в море вдали от скорлупы, которые не связаны с источником.

На рис. 7.22 показаны результаты численного моделирования диффузии на решетке размером  $300 \times 300$  по прошествии периода  $t = 9 \cdot 10^4 \tau$  после начала процесса при диффузионной длине  $\ell \approx 300 a$  (вариант этого рисунка есть среди цветных вкладок). Скорлупа смещается в сторону увеличения  $x$  по мере увеличения времени и, следовательно, диффузионной длины  $\ell = a \sqrt{2t/\tau}$ . Увеличивается со временем и с величиной  $\ell$  также и ширина области, покрытой скорлупой. Чтобы более точно сформулировать это свойство, введем вероятность  $p_h(x) dx$  того, что узел с координатой между  $x$  и  $x + dx$  принадлежит скорлупе. Тогда координата  $x_h$  и ширина  $\sigma_h$  скорлупы определяются выражениями

$$x_h = \int_0^{\infty} dx x p_h(x), \quad (7.45)$$

$$\sigma_h^2 = \int_0^{\infty} dx (x - x_h)^2 p_h(x).$$

Важно также заметить [191], что координата скорлупы  $x_h$  удовлетворяет

соотношению

$$p(x_h) = p_c. \quad (7.46)$$

Как следует из этого равенства, найдя вероятность  $p$  того, что узел на расстоянии  $x_h$  от источника оказывается занятым, мы получим очень точную оценку порога протекания. Для двумерной квадратной решетки была получена оценка  $p_c = 0,592802 \pm 10^{-5}$  [186], в другом случае анализ скорлупы перколяционных кластеров дал оценку  $p_c = 0,59275 \pm 3 \cdot 10^{-5}$  [224]. Для треугольной решетки было получено значение  $p_c = 0,5011 \pm \pm 0,0003$ , согласующееся с точным значением  $p_c = 1/2$  [191].

Анализ структуры скорлупы на масштабах, меньших ее ширины  $\sigma_h$ , позволяет определить число узлов  $M(R)$ , лежащих на скорлупе в области радиусом  $R$  [191]:

$$M(R) \sim R^{D_h}, \text{ где } D_h = 7/4. \quad (7.47)$$

Скорлупа является фрактальным объектом. В работе [191] аппроксимацией численных результатов получена оценка  $D_h = 1,76 \pm 0,02$ . Однако дальнейший анализ результатов численных расчетов (который мы обсудим ниже) привел к предположению о точном равенстве  $D_h = 1,75$ . На пространственных масштабах, меньших ширины скорлупы, она представляется самоподобным фракталом с фрактальной размерностью  $\approx 1,75$ . Аналогичная оценка фрактальной размерности скорлупы перколяционных кластеров была получена в работе [212]. В этом случае исследование кластеров различного размера привело к оценке  $D_h = 1,74 \pm 0,02$ , а двухточечная корреляционная функция для узлов, лежащих на скорлупе, приводит к значению  $D_h = 1,76 \pm 0,01$ . В согласии со всеми этими результатами еще одно исследование скорлупы перколяционных кластеров дает оценку ее фрактальной размерности  $1,751 \pm 0,002$  [224].

Самоподобие скорлупы очень ясно видно на рис. 7.23. Впрочем, не вызывает сомнения, что при выбранной геометрии скорлупа на самом деле самоаффинна. (Отличие самоподобия от самоаффинности рассмотрено в гл. 10.) Дело в том, что если рассмотреть диффузию на полосе шириной  $2L$ , а не  $L$ , то на данный момент времени число узлов, лежащих на скорлупе, тоже удвоится. С такой точки зрения диффузионный фронт является одномерным объектом. Поэтому было предпринято исследование свойств подобия числа узлов, лежащих на скорлупе  $M_h(L, \ell)$ , и ее ширины  $\sigma(L, \ell)$  [191]. Результаты численных расчетов аппроксимируются зависимостями

$$\begin{aligned} M_h(L, l) &= AL\ell^\alpha, \text{ где } A = 0,96 \text{ и } \alpha = 0,425 \pm 0,005, \\ \sigma_h(L, \ell) &= B\ell^{\hat{\alpha}}, \text{ где } B = 0,46 \text{ и } \hat{\alpha} = 0,57 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Эти численные результаты и аппроксимации (7.48) показаны на рис. 7.24.

Можно привести следующие любопытные рассуждения, приводящие к связи между показателем  $\hat{\alpha}$  и показателем  $\nu$  корреляционной длины [191]. Когда координата  $x$  не совпадает с координатой фронта  $x_h$ , концентрация узлов, занятых частицами, отличается от  $p_c$ . В таких

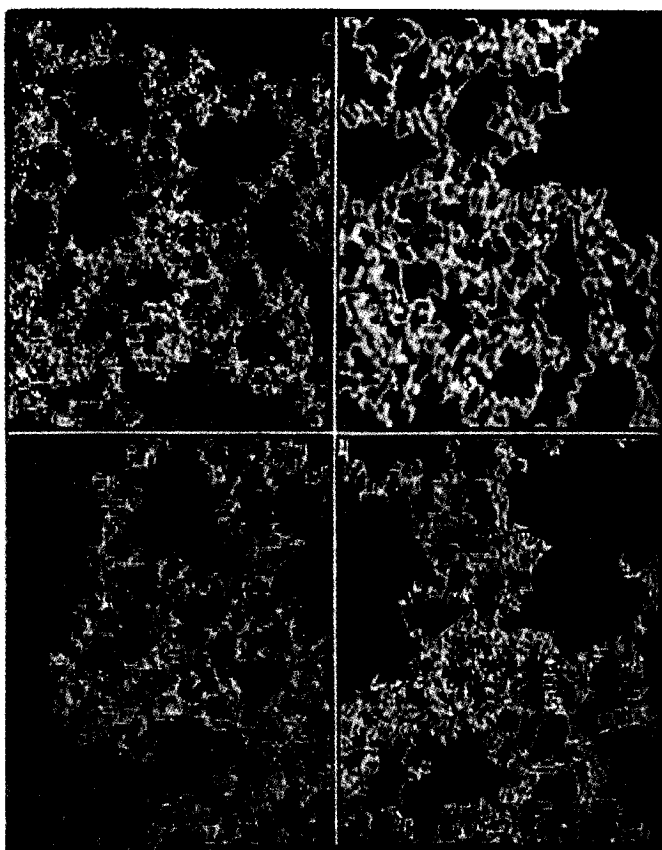


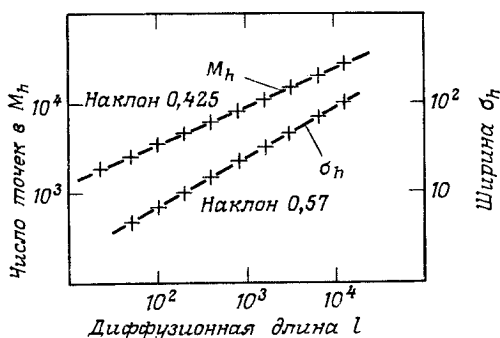
РИС. 7.23. Самоподобие диффузионного фронта. Структура скорлупы показана последовательным увеличением центральной части участка фронта. Каждый раз делается двукратное увеличение. Самоподобие проявляется в том, что понять, каков масштаб каждого из рисунков, можно только после пристального сравнения.

областях присутствуют озера и острова. Характерный размер этих образований равен корреляционной длине  $\xi$ , которая в нашем случае зависит от координаты и определяется соотношением (7.23) в несколько измененном виде:

$$\xi = \xi_0 |p(x) - p_c|^{-\nu}. \quad (7.49)$$

Если расстояние от  $x_h$  до некоторого кластера (озера или острова), характерный размер которого  $\xi(x)$ , равно  $\xi$ , то с конечной вероятностью этот кластер касается границы раздела и поэтому находится внутри нее.

РИС. 7.24. Изменение числа узлов на скорлупе  $M_h$  и ее ширины  $\sigma_h$  с изменением диффузионной длины  $l$  [191].



Иначе говоря,

$$\sigma_h = K \xi (x_h \pm \sigma_h). \quad (7.50)$$

Здесь  $k$  – постоянная порядка единицы. В это выражение можно подставить зависимость (7.49) и, разлагая выражение (7.44) для  $p(x)$  в ряд Тейлора, получаем

$$\sigma_h = K \xi_0 \left[ \sigma_h \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=x_h} \right]^{-\nu}. \quad (7.51)$$

Из (7.44) находим  $(\partial p / \partial x)_{x=x_h} \propto 1/\ell$  и, таким образом, приходим к выражению

$$\sigma_h = K' \xi_0 \cdot (\sigma_h / \ell)^{-\nu}. \quad (7.52)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_h \sim \ell \hat{\alpha} \sim \ell^{\frac{\nu}{1+\nu}}. \quad (7.53)$$

Итак, показатель  $\hat{\alpha}$ , который определяет изменение ширины скорлупы с диффузионной длиной  $\ell$ , следующим образом выражается через показатель  $\nu$ , описывающий особенность корреляционной длины:

$$\hat{\alpha} = \frac{\nu}{1 + \nu}. \quad (7.54)$$

Используя точное значение  $\nu = 4/3$ , получаем оценку  $\hat{\alpha} = 4/7 = 0,5714$ , а численные расчеты дают  $\hat{\alpha} = 0,57 \pm 0,01$ .

Мы уже упоминали, что на масштабах, меньших ширины скорлупы, она является самоподобным фракталом. Поэтому в ячейке размером  $\sigma_h \times \sigma_h$  число узлов, принадлежащих скорлупе, должно быть равным

$$M_h(L, \ell) \frac{\sigma_h}{L} \sim \sigma_h^D \ell^{\frac{\nu}{1+\nu}}, \quad (7.55)$$

где последнее равенство вытекает из (7.48) и (7.54). Таким образом,

$$\alpha = \frac{\nu}{1 + \nu} (D_h - 1) = 3/7 = 0,429..., \quad (7.56)$$

где использованы значения  $D_h = 7/4$  и  $\nu = 4/3$ . Получаемое значение  $\alpha = 0,425 \pm 0,005$  очень хорошо согласуется с ожидаемой величиной.

Авторы работы [191] заметили, что отношение  $M_h(L/\ell) \sigma_h/L\ell$  при  $l \rightarrow \infty$  стремится к постоянной величине, примерно равной 0,441. В сочетании с законом подобия (7.55) это обстоятельство приводит к предположению, что фрактальная размерность скорлупы равна

$$D_h = \frac{1 + \nu}{\nu} = 7/4 = 1,75. \quad (7.57)$$

Этот результат согласуется с численным исследованием глобальной структуры перколяционных кластеров [224]. Совсем недавно было доказано, что это предложение верно [190]!

Часто интерес представляет не скорлупа кластера, а его *внешняя*

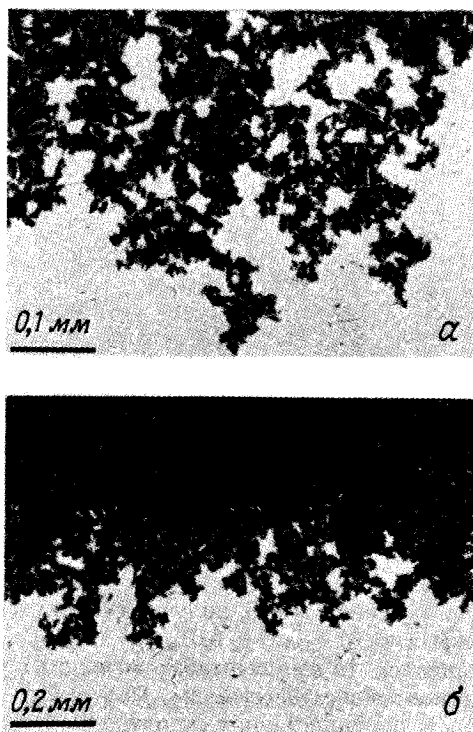


РИС. 7.25. Фронт испарения в тонком слое кремниевых сфер. Изображение получено в проходящем свете; сухие поры кажутся темными. *а* — Участок фронта испарения; *б* — на изображении большего масштаба видно, что фронт устойчив [197].

*граница* [176]. Внешней границе принадлежат те узлы, которых может достичь частица конечного размера, когда она приближается к кластеру снаружи и касается множества занятых узлов. Именно эта характеристика кластера важна при изучении адсорбции частиц конечного размера на фрактальную поверхность. Отличие внешней границы от скорлупы определяется тем, что в силу своего конечного размера пробная частица не может проникнуть во многие фиорды. Известно, что фрактальная размерность внешней границы равна  $D_e = 1,37 \pm 0,03$  [76]. Эвристические рассуждения приводят к точному значению  $D_e = 4/3$  [3, 77, 190]. Определение внешней границы можно обобщить [77], введя понятие *достижимой границы* – совокупности всех узлов на границе, которые связаны с бесконечностью каналом свободных узлов, минимальная ширина которого превышает  $r$  (диаметр пробной частицы). Численные расчеты показали [77], что фрактальная размерность достижимой границы также равна  $D_e = 4/3$  и не зависит от  $r$ , если диаметр пробной частицы превышает определенный порог, зависящий от вида решетки.

Шоу [197] исследовал фронт вытеснения, образующийся при испарении воды из квазидвумерной пористой среды. В этой работе показано, что фронт устойчив и его локальная структура типична для процесса перколяции с вытеснением (рис. 7.25, а). Фрактальная размерность фронта оказалась равной  $D = 1,89 \pm 0,03$ . В более крупном масштабе (рис. 7.25, б) фронт имеет структуру, очень похожую на структуру скорлупы, показанной на рис. 7.22. Анализ показал, что фрактальная размерность переднего фронта равна  $D = 1,38 \pm 0,02$ , что согласуется с ожидаемым значением  $D_e$ .

Открытие фрактальной структуры диффузионного фронта [191] заслуживает особого внимания. Процесс диффузии изучают уже давно и о нем известно все, что можно извлечь из уравнения диффузии, которое описывает и нестационарные диффузионные фронты, подобные определяемым соотношением (7.44); тем не менее диффузионный фронт обладает внутренней структурой, которая оказывается фрактальной. Не следует забывать, что эта фрактальная структура присутствует и в масштабах, сравнимых с диффузионной длиной  $\ell = \sqrt{4Dt}$ , которая безгранично растет со временем. Поэтому, даже если диффузия протекает на атомарном уровне, фрактальные структуры вполне могут обнаруживаться в макроскопических масштабах.

Россо и др. [187] обобщили эти результаты на случай трехмерной диффузии на простой кубичной решетке. При обсуждении перколяции с вытеснением мы уже столкнулись с тем, что свойства связности в двух- и трехмерных системах качественно различны (рис. 7.26). Диффундирующие частицы считаются связанными, если они оказываются ближайшими соседями, т.е. соседствуют вдоль направлений  $x$ ,  $y$  или  $z$ . При таком определении связности порог перколяции по узлам равен  $p_{cA} \approx 0,3117$ . Свободный (изолирующий) узел считается связанным с другим свободным узлом, если последний является одним из 26 соседних узлов, лежащих на кубе со стороной  $3a$  с центром на рассматриваемом узле.

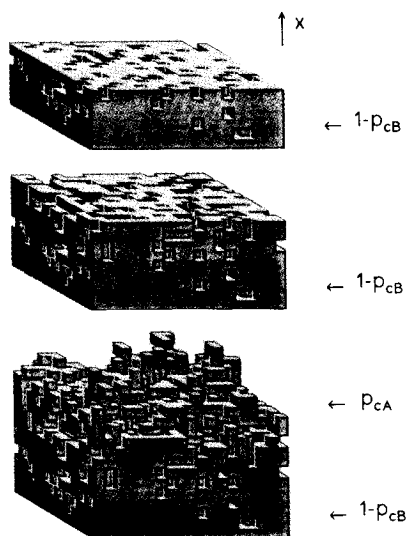


РИС. 7.26. Вид перколяционной системы размером  $19 \times 19 \times 19$  узлов. Кубики изображают частицы, а вероятность занятия узла уменьшается с 1 на нижней граничной плоскости системы до 0 наверху. Показаны только те узлы, занятые частицами, которые связаны с нижней границей системы. *а* — Верхний рисунок показывает шесть нижних рядов в самой плотной части системы; *б* — на среднем рисунке верхний слой находится при концентрации, соответствующей порогу перколяции на квадратной решетке; *в* — нижний рисунок показывает все узлы, связанные с нижней граничной плоскостью системы. Стрелками показаны плоскости, на которых концентрация равна  $1 - p_{св}$  и  $p_{сА}$  [187].

При таком определении связности порог перколяции по свободным узлам равен  $p_{св} \approx 0,097$ . На рис. 7.26 ясно видно, что в диапазоне концентраций  $p_{сА} \leq p \leq (1 - p_{св})$  перколяция возможна одновременно для частиц и дырок.

Скорлупа кластера занятых узлов, связанных с нижней граничной плоскостью системы, состоит из узлов, которые связаны с нижней границей и имеют ближайшими соседями свободные узлы, связанные с самой верхней плоскостью. Интересно, что при тех значениях  $p$ , когда возможна одновременная перколяция узлов и дырок, почти все занятые узлы лежат на скорлупе. *Поверхность* диффузионного фронта, которая совпадает со скорлупой, содержит конечную долю узлов и поэтому имеет фрактальную размерность 3. С этой точки зрения она ведет себя как обычное твердое тело. Однако любой точки этого твердого тела можно коснуться снаружи, т.е. каждая его точка лежит на поверхности. В этом смысле такая система представляет собой идеальную пористую среду.

# Фрактальные временные ряды

Многие наблюдения природных процессов приводят к временным зависимостям или рядам измерений. Например, имеются длинные ряды измерений температуры воздуха. В них ясно прослеживаются годовые вариации. Длительное измерение температуры обнаруживает ее беспорядочное поведение как на коротких, так и на длинных временных интервалах. Временные последовательности измерений таких величин, как температура, сток рек, количество осадков или толщина колец деревьев, можно исследовать с помощью *метода нормированного размаха*, или *метода Херста*. Такие последовательности измерений характеризуются показателем  $H$ , показателем Херста. При условиях, которые мы подробнее обсудим в гл. 10, запись измерений представляет собой кривую фрактальной размерности  $D = 2 - H$ . »

В этой главе мы опишем и обсудим метод анализа временных рядов, предложенный Херстом. Связанная проблема обобщенного броуновского движения рассмотрена в следующей главе. После обсуждения связи между самоподобными и самоаффинными кривыми мы применим метод нормированного размаха для изучения статистики высот морских волн.

## 8.1. Эмпирический закон Херста и метод нормированного размаха

Всю жизнь Херст занимался изучением Нила и решением задач, связанных с накоплением водных ресурсов. Он открыл новый статистический метод, *метод нормированного размаха* (метод  $R/S$ ), подробно описанный им в интересной книге «Долговременное накопление: экспериментальное исследование» [97]. В качестве введения в этот метод рассмотрим оз. Альберт – пример, приведенный Херстом. На рис. 8.1 отложены измерения годового стока как функция времени.

Задача заключается в том, чтобы найти оптимальный объем резервуара по заданному набору измерений стока воды из озера. Оптимален тот резервуар, который никогда не переполняется и не пустеет. В течение каждого года  $t$  такой резервуар принимает приток  $\xi(t)$  из озера, в то время как регулируемый объем воды (сток)  $\langle \xi \rangle_t$  спускается из водохранилища. Сколько воды должно храниться в водохранилище, чтобы каждый год из него можно было спускать объем воды, равный среднему

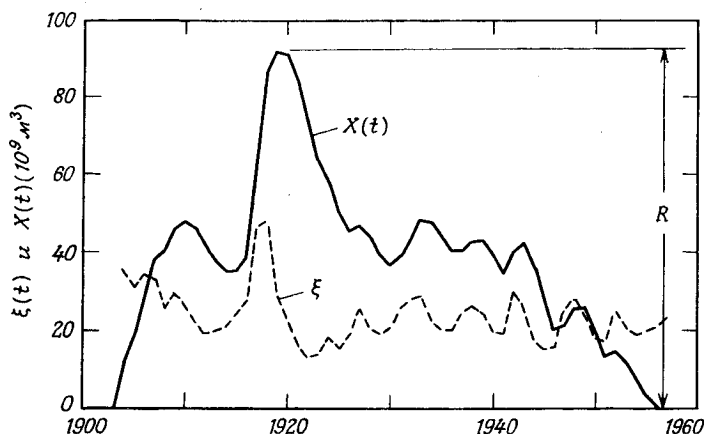


РИС. 8.1. Годовой сток оз. Альберт  $\xi(t)$  (штриховая линия) и накопленное отклонение от среднего стока  $x(t)$  (сплошная линия). Указан размах  $R$  [97].

притоку за этот период? Средний приток за период  $\tau$  лет равен

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \quad (8.1)$$

Это среднее должно равняться объему, ежегодно спускаемому из резервуара. Пусть  $X(t)$  — накопившееся отклонение притока  $\xi(t)$  от среднего  $\langle \xi \rangle_{\tau}$ :

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}. \quad (8.2)$$

Для оз. Альберт эта кривая показана на рис. 8.1. Разность максимального и минимального накопленного притока  $X$  назовем *размахом*  $R$ . Эта величина равна емкости, необходимой для поддержания среднего стока за выбранный период. Для достаточно большого резервуара, который никогда не переполняется и не опустошается,  $R$  представляет собой разность между максимальным и минимальным количествами воды в резервуаре. Явное выражение для  $R$  имеет вид

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau). \quad (8.3)$$

где  $t$  — дискретное время, принимающее целочисленные значения, а  $\tau$  — длительность рассматриваемого промежутка времени. Определения этих величин иллюстрирует рис. 8.2.

Ясно, что размах зависит от рассматриваемого периода  $\tau$ , и мы ожидаем, что  $R$  растет с  $\tau$ . Для данных по оз. Альберт в период 1904–1957 гг., приведенных на рис. 8.1, получаем  $R(53) = 91 \cdot 10^9 \text{ м}^3$ , в то

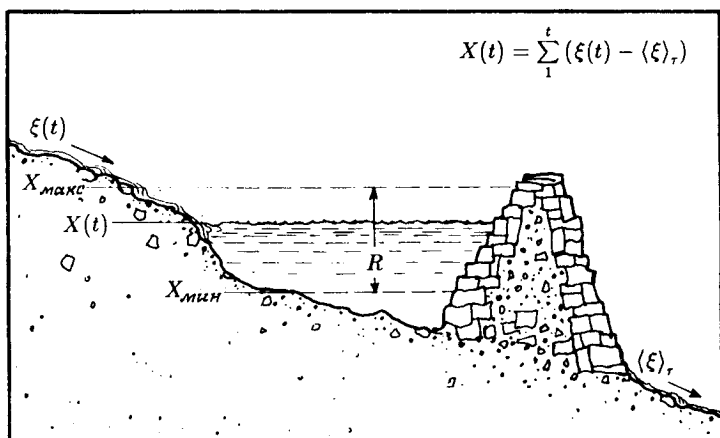


РИС. 8.2. Резервуар с притоком  $\xi(t)$  и средним стоком  $\langle \xi \rangle_t$ . Накопленное отклонение регулируемого стока от притока равно  $x(t)$ . Размах  $R$  равен разности максимального и минимального наполнения резервуара.

время как для первых 30 лет (рис. 8.3) размах составляет всего лишь  $R(30) = 73 \cdot 10^9 \text{ м}^3$ .

Херст исследовал многие природные процессы, такие, как сток рек, отложение ила и рост колец деревьев. При этом он использовал безразмерное отношение  $R/S$ , где  $S$  — стандартное отклонение, т.е. квадратный корень из дисперсии. Используя это безразмерное отношение, можно сравнивать размах для разных явлений. Стандартное отклонение

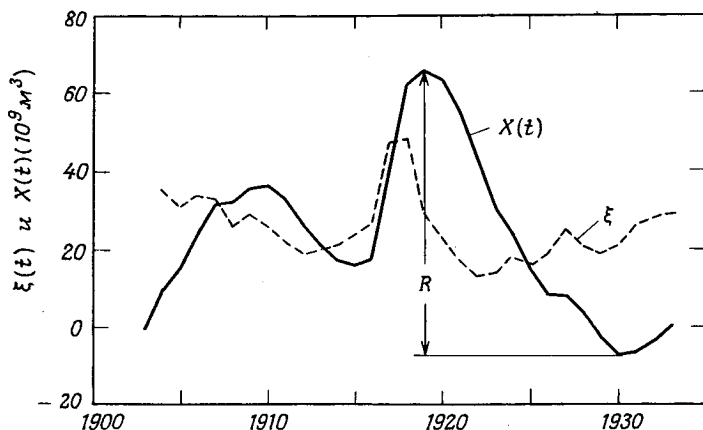


РИС. 8.3. Накопленное в первые 30 лет отклонение от среднего стока  $x(t)$  в оз. Альберт. Указан размах  $R$  [97].

можно оценить по наблюдениям:

$$S = \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Как обнаружил Херст, для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах  $R/S$  очень хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R/S = (\tau/2)^H. \quad (8.5)$$

Показатель Херста  $H$  (сам Херст обозначал его через  $K$ )<sup>1)</sup> более или менее симметрично распределен вокруг среднего значения 0,73 со стандартным отклонением, равным примерно 0,09.

Рис. 8.4, взятый из книги Херста, иллюстрирует качество соответст-

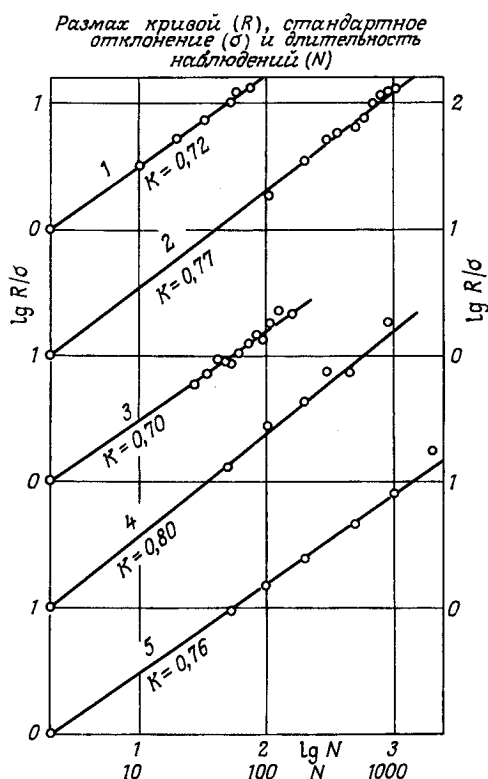


РИС. 8.4. Метод нормированного размаха для различных естественных процессов. По оси абсцисс указана длительность анализируемого периода  $\tau = N$  в горах [97]. Приведены данные для следующих объектов: 1 — сток рек,  $K = 0,72$ ; 2 — р. Рода,  $K = 0,77$ ; 3 — уровень осадков,  $K = 0,70$ ; 4 — кольца деревьев,  $K = 0,80$ ; 5 — слоистые отложения оз. Саки,  $K = 0,76$ .

<sup>1)</sup> Обозначение  $H$  для показателя Херста было введено Мандельбротом. Это удачный выбор, поскольку  $H$  часто непосредственно связан с показателем Липшица — Гёльдера (Hölder).

Таблица 8.1. Значения  $H$  ( $= K$ ) для различных естественных процессов [97]

| Гидрометеорологическая характеристика    | Период изменений (года) | Количество |                   | Среднее | Стандартное отклонение | Размах    | Коэффициент автокорреляции                       |
|------------------------------------------|-------------------------|------------|-------------------|---------|------------------------|-----------|--------------------------------------------------|
|                                          |                         | объектов   | наборов измерений |         |                        |           |                                                  |
| Водообмен                                |                         |            |                   |         |                        |           |                                                  |
| Сток рек<br>р. Рода                      | 10-100                  | 39         | 94                | 0,72    | 0,091                  | 0,50-0,94 | 0,025-0,26<br>$n \neq 15$                        |
|                                          | 80-1080                 | 1          | 66                | 0,77    | 0,055                  | 0,58-0,86 |                                                  |
| Уровень рек и озер                       | 44-176                  | 4          | 13                | 0,71    | 0,082                  | 0,59-0,85 | 0,07 ± 0,08*<br>$n = 65$                         |
| Уровень осадков                          | 24-211                  | 39         | 173               | 0,70    | 0,088                  | 0,46-0,91 |                                                  |
| Слоистые отложения                       |                         |            |                   |         |                        |           |                                                  |
| Оз. Саки                                 | 50-2000                 | 1          | 114               | 0,69    | 0,064                  | 0,56-0,87 | -0,07-0,11<br>$n = 39$                           |
| Оз. Мозн и Тимискаминг                   | 50-1200                 | 2          | 90                | 0,77    | 0,094                  | 0,50-0,95 |                                                  |
| Оз. Коринто и Хейлибери                  | 50-650                  | 2          | 54                | 0,77    | 0,098                  | 0,51-0,91 |                                                  |
| Метеоданные                              |                         |            |                   |         |                        |           |                                                  |
| Температура                              | 29-60                   | 18         | 120               | 0,68    | 0,087                  | 0,46-0,92 | 0,46-0,92<br>0,51-0,76<br>0,65-0,85<br>0,56-0,94 |
| Давление                                 | 29-96                   | 8          | 28                | 0,63    | 0,070                  | 0,51-0,76 |                                                  |
| Число солнечных пятен                    | 38-190                  | 1          | 15                | 0,75    | 0,56                   | 0,65-0,85 |                                                  |
| Кольца деревьев и индекс ветвления у ели | 50-900                  | 5          | 105               | 0,79    | 0,076                  | 0,56-0,94 |                                                  |
| Суммарные и средние значения по разделам |                         |            |                   |         |                        |           |                                                  |
| Водообмен                                |                         | 83         | 346               | 0,72    | 0,08                   | 0,46-0,94 | 0,46-0,94<br>0,50-0,95<br>0,46-0,94              |
| Слоистые отложения                       |                         | 5          | 258 *             | 0,74    | 0,09                   | 0,50-0,95 |                                                  |
| Метеоданные                              |                         | 32         | 268               | 0,72    | 0,08                   | 0,46-0,94 |                                                  |
| Общие суммарные и средние значения       | 10-2000                 | 120        | 872               | 0,726   | 0,082                  | 0,46-0,95 |                                                  |

\* Включая сток рек.

вия между эмпирическим законом Херста (8.5) и наблюдениями. Собранные Херстом статистические данные показаны в табл. 8.1, из которой видно, что для многих естественных процессов  $H > 1/2$ . Это наблюдение Херста вызывает интерес потому, что при *отсутствии* долговременной статистической зависимости отношение  $R/S$  должно быть асимптотически пропорционально  $\tau^{1/2}$ , если временные ряды связаны со случайными процессами с независимыми значениями и конечной дисперсией: как показано Херстом [96] и Феллером [64], для случайного процесса с независимыми значениями и конечной дисперсией

$$R/S = (\pi \tau/2)^{1/2}. \quad (8.6)$$

## 8.2. Моделирование случайных рядов

Будучи человеком, несомненно приверженным эксперименту (и склонным к скептицизму), Херст решил проверить соотношение (8.6) с помощью «метода Монте-Карло». Он смоделировал случайный процесс с независимыми значениями бросанием  $n$  монет  $\tau$  раз и в качестве случайной переменной выбрал  $\xi$  = (число «орлов») – (число «решек»). Вероятность того, что при бросании  $n$  монет выпадет  $k$  «орлов», равна  $(1/2)^n (n!/k!(n-k)!)$ . Если этот набор монет бросают  $\tau$  раз, то  $k$  и, следовательно,  $\xi$  определяются биномиальным распределением, которое при больших  $\tau$  и  $n$  приближается к нормальному, гауссову распределению. Прямым вычислением можно показать [96], что для этого процесса

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2} n \tau - 1}.$$

Поскольку стандартное отклонение разности числа «орлов» и числа «решек» равно удвоенному стандартному отклонению  $k$  и равно  $S = \sqrt{n}$ , в пределе больших  $\tau$  мы получаем соотношение (8.6).

Херст провел эксперимент, бросив 10 монет 1000 раз – на бросание 10 монет 100 раз у него ушло около 35 мин! Мы моделировали этот процесс на компьютере, используя генератор (псевдо)случайных чисел, который выбирает  $-1$  или  $+1$  с равной вероятностью. Будем считать, что «орлы» соответствуют единицам со знаком «плюс». По  $n = 10$  таким выборкам мы вычисляли значение  $\xi(t)$  как сумму полученных чисел. «Бросание монет» повторялось 2500 раз и заняло меньше секунды. Получившаяся последовательность значений случайных независимых величин  $\xi(t)$  отложена на рис. 8.5. Последовательность  $\xi(t)$  выглядит как шум. Чтобы получить реалистический график, мы соединили линиями точки  $(t, \xi(t))$  и  $(t-1, \xi(t-1))$  для  $t = 1, \dots, 2499$ . Накопленное отклонение от среднего,  $X(t)$ , также показано на рис. 8.5. Здесь мы также соединили линиями отдельные точки  $(t, X(t))$ , представляющие собой запись набора значений, принимаемых случайной переменной. Заметим, что значение  $X(t)$  совпадает с положением в момент  $t$  частицы, которая

РИС. 8.5. *a* – Последовательность независимых случайных чисел  $\xi(t)$ , полученная «бросанием» 10 «монет» 2500 раз; *b* – накопленное отклонение от среднего значения (нуля)  $x(t) = \sum_{n=1}^t \xi(u)$ .

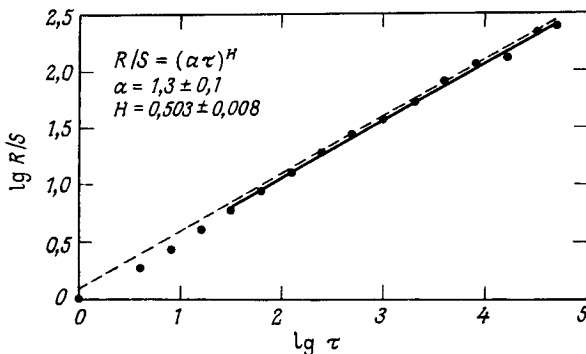
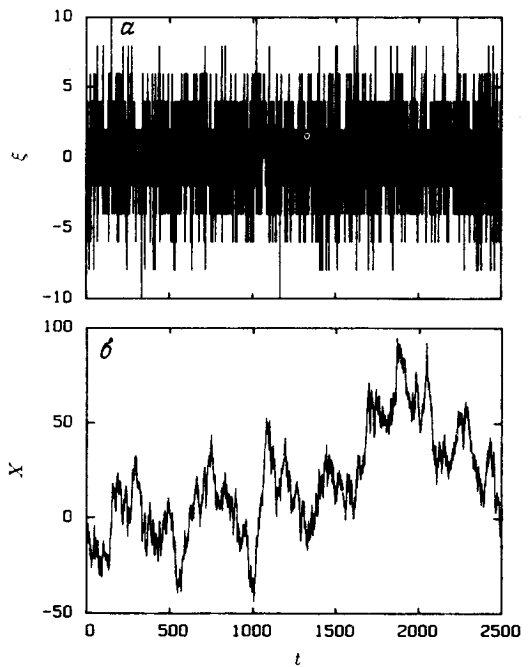


РИС. 8.6. Отношение  $R/s$  как функция запаздывания  $\tau$  (черные кружки) для переменной  $\xi(t)$ , определенной как разность числа «орлов» и «решек» при бросании 10 монет  $T = 50\,000$  раз. Нормальная (гауссова) зависимость  $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$  показана штриховой линией. Сплошная линия показывает аппроксимацию наблюдаемых значений  $R/s$  зависимостью  $R/S = (\alpha\tau)^H$ . Полученные параметры этой зависимости равны  $\alpha = 1,3 \pm 0,1$  и  $H = 0,503 \pm 0,008$ .

случайно блуждает вдоль линии с шагами единичной длины. Этот случайный процесс является упрощенным вариантом случайного блуждания, которое имеет гауссово распределение длин шагов и обсуждается в следующей главе. Можно показать, что на периодах, намного превышающих время между шагами, и на расстояниях, намного превышающих длину шага, рассматриваемое случайное блуждание с единичным шагом асимптотически переходит в обычное броуновское движение.

Мы рассчитали значения  $R/S$  для данных, подобных показанным на рис. 8.5, начав с последовательности из  $\tau = T = 50\,000$  бросаний 10 монет. Промежуток времени  $\tau$ , на котором анализировалась временная последовательность, называется *запаздыванием*. Мы уменьшили запаздывание  $\tau$  вдвое и получили из исходного временного ряда два независимых значения  $R/S$ , характеризующих по отдельности половинные выборки. Затем  $\tau$  уменьшалось вдвое еще и еще раз до тех пор, пока не выполнялось условие  $\tau < 8$ ; на каждом шаге число независимых областей удваивалось. Как следует из определений (8.3) и (8.4), при  $\tau = 1$   $R/S$  должно быть равно 1.

Результаты, соответствующие одному и тому же значению запаздывания  $\tau$ , усреднялись и значения  $R/S$  откладывались в двойном логарифмическом масштабе как функция запаздывания (рис. 8.6).

Асимптотика отношения  $R/S$ , ожидаемая для независимой случайной переменной и описываемая соотношением (8.6), показана на рис. 8.6 штриховой линией. Как видим, результаты нашего моделирования хорошо описываются асимптотическим законом при  $\tau > 20$ , но при  $\tau < 20$  кривая проходит значительно ниже асимптотики. Если с помощью метода наименьших квадратов аппроксимировать наблюдаемые значения  $R/S$  законом  $(a\tau)^H$  при  $\tau > 20$ , получаем оценки  $a = 1,3 \pm 0,1$  и  $H = 0,503 \pm 0,008$ , которые согласуются с асимптотической зависимостью  $(1,57\tau)^{1/2}$ . Указанные ошибки представляют собой стандартные отклонения, найденные из ковариационной матрицы, которая получена при аппроксимации. Таким образом, эти ошибки характеризуют, насколько хорошо наблюдаемые значения укладываются на штриховую прямую. Обычно изменения  $H$  от одной серии бросаний монеты к другой несколько превышают приведенные ошибки. Например, если в аппроксимацию включить все точки с  $\tau \geq 4$ , получаются оценки  $a = 1,04 \pm 0,08$  и  $H = 0,516 \pm 0,006$ , дающие завышенное значение  $H$  и заниженное значение  $a$ . Уже отмечалось [143], что при аппроксимации данных эмпирическим законом  $R/S = (\tau/2)^H$  Херст обычно получал завышенные оценки  $H$  при  $H < 0,72$  и заниженные при  $H > 0,72$ . Было бы несправедливо не отметить, что Херст полностью понимал эту тонкость и использовал этот простой закон только потому, что у него было недостаточно данных, чтобы рассмотреть более сложную аппроксимацию, подобную нашей; в связи со своим экспериментом с бросанием монет он пишет: «Короткие последовательности, характеризуемые небольшими значениями  $K$ , неотличимы от случайных последовательностей».

### 8.3. Моделирование долговременных изменений

Пытаясь объяснить статистику  $R/S$  с  $H \sim 0,72$ , Херст поставил эксперимент с помощью «вероятностной колоды карт». На картах из этой колоды нанесены числа  $-1, +1, -3, +3, -5, +5, -7, +7$ , причем число карт каждого вида пропорционально соответствующей ординате на нормальной частотной кривой. Всего в колоде 52 карты: 13 единиц, 8 троек, 4 пятерки и 1 семерка. Эти числа довольно точно приближаются к гауссовой нормальной частотной кривой. Колоду сначала хорошо тасуют, а затем снимают. Число на открытой карте записывают. Колоду вновь слегка тасуют, опять снимают и т.д. Можно считать, что записанные числа соответствуют наблюдениям величины, которая имеет частотное распределение, близкое к нормальной, гауссовой кривой.

Эта процедура занимает меньше времени, чем бросание монет: за 20 мин Херст получил этим способом 100 случайных чисел. Мы смоделировали эту процедуру и, как и следовало ожидать, получили результаты, очень близкие к показанным на рис. 8.5 и 8.6.

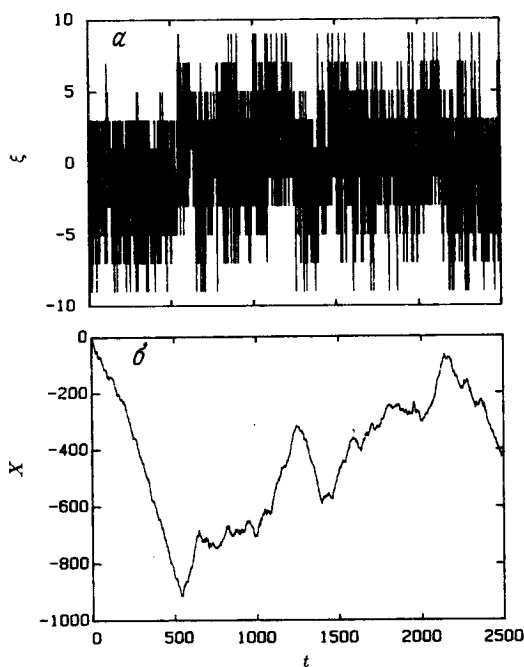


РИС. 8.7.  $a$ —Последовательность смещенных случайных чисел  $\xi(t)$ , которая образована вытягиванием «карт» из смещенного набора, получившегося после 2500-кратного повторения процедуры Херста;  $b$ —накопленное отклонение от (нулевого) среднего значения  $X(t) = \sum_{u=1}^t \xi(u)$ .

Затем Херст произвел интересное обобщение своей процедуры, приведшее к смещенному случайному ряду: «Колода тасуется и открывается одна карта; после записывания номера на карте она возвращается в колоду. Затем колода сдается на две руки и если, к примеру, на открытой карте стояло число  $+3$ , то 3 карты с наибольшими положительными числами передаются с первой руки на вторую и со второй руки снимаются 3 карты с наибольшими отрицательными числами. При этом на второй руке накапливается определенное смещение. После этого на нее передается джокер». Как и раньше, это смещенное вероятностное распределение карт на второй руке Херст использовал для генерации случайной последовательности. Если при снятии открывается джокер, то колода перетасовывается и начинается новая смещенная сдача.

Херст проделал 6 таких экспериментов, в каждом из которых было по 1000 снятий колоды, и определил значение показателя  $H = 0,714 \pm 0,091$ , которые согласуются с его наблюдениями долговременной статистики природных явлений!

Мы смоделировали такое смещенное случайное блуждание, и получившаяся последовательность значений случайной переменной  $\xi(t)$  (рис. 8.7, а) сильно отличается от аналогичной последовательности независимых случайных чисел, показанной на рис. 8.5, а. Накопленное отклонение от среднего  $X(t) = \sum_{i=1}^t \xi(i)$ , изображенное на рис. 8.7, б, обнаруживает сильные вариации при меньшем «шуме». Итак, при малых значениях запаздывания  $\tau$  размах выборки  $R$ , деленный на среднее по выборке значение  $S$ , меньше, чем значение этого отношения для процесса с независимыми приращениями (см. рис. 8.5, б). Однако при значениях  $\tau$ , превышающих 100, величина  $R/S$  для смещенного процесса заметно выше, чем для несмещенного. Аппроксимируя полученные значения  $R/S$  в диапазоне  $20 < \tau < 2500$ , мы получили  $a = 0,62 \pm 0,07$  и показатель  $H = 0,71 \pm 0,01$ , что согласуется с экспериментами Херста с вероятностными картами.

Становится ясным, что смещенный процесс Херста приводит к отклонениям, которые поддерживаются в среднем в течение  $\tau = n$  снятий колоды, если на каждой руке  $n$  карт. В данном случае джокер открывается в среднем после 27 снятий колоды. Поэтому если на какой-то руке накоплено положительное смещение, суммарное число будет увеличиваться, а если смещение отрицательно, будет тенденция к дальнейшему уменьшению. На больших промежутках времени полученная таким образом случайная последовательность будет близка к случайному процессу с независимыми приращениями и асимптотическое поведение по-прежнему будет описываться соотношением (8.6).

Рис. 8.8 иллюстрирует  $R/S$ -анализ описанного выше смещенного процесса Херста при 100 000 снятиях вероятностной колоды. Прямая, полученная аппроксимацией данных для  $\tau > 20$ , дает  $a = 0,8 \pm 0,2$  и кажущееся значение показателя Херста  $H = 0,65 \pm 0,02$ . Ясно, что эта прямая не очень хорошо описывает результаты моделирования. Если вычислить кажущееся значение показателя Херста, аппроксимируя ре-

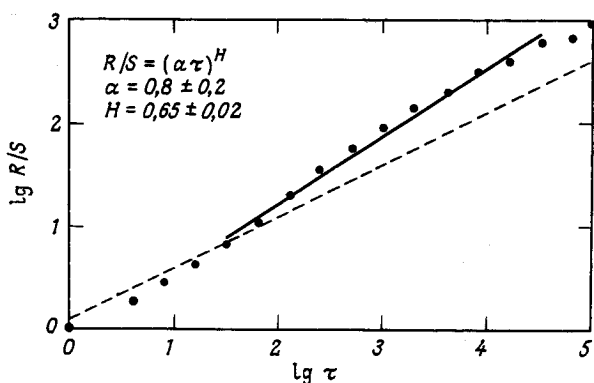


РИС. 8.8. Значения  $R/S$  как функция запаздывания  $\tau$  (черные кружки) для случайной переменной  $\xi(t)$ , полученной снятием карт из смещенного набора после повторения процедуры Херста  $T = 100\,000$  раз. Асимптотическое гауссово поведение  $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$  показано штриховой линией. Показанная сплошной линией аппроксимация этих точек законом  $R/S = (\alpha\tau)^H$  получена при  $\alpha = 0,8 \pm 0,2$  и  $H = 0,65 \pm 0,02$ .

зультаты в диапазоне  $\tau_{\min} \leq \tau \leq 4096$ , то мы обнаружим, что оценка  $H$  заметно уменьшается, когда  $\tau_{\min} \sim 27$ , а это – среднее время нахождения джокера в смещенной выборке (рис. 8.9).

Приближение к гауссовой асимптотике происходит очень медленно. В общем кажущееся значение  $H$  приближается к 0,5 по мере увеличения  $\tau_{\min}$ , но оценки значения  $H$  становятся все менее определенными, поскольку для точности аппроксимации нужны данные в диапазоне, охватывающем несколько декад. Можно заключить, что моделирование

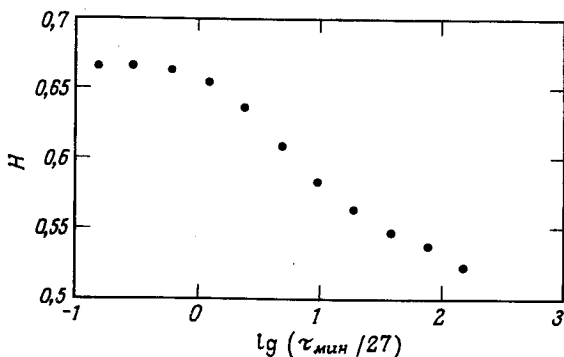


РИС. 8.9. Кажущееся значение показателя Херста  $H$  как функция минимального запаздывания  $\tau_{\min}$  при аппроксимации зависимости  $R/S$  от  $\tau$  на рис. 8.8 степенным законом. Использована последовательность из 100 000 случайных чисел, полученных с помощью смещенной процедуры Херста.

не приведет к асимптотическому закону, если только не рассматриваются *очень* длительные измерения. Зная это, мы не возьмемся оценить достоверность оценок показателя  $H$ , не равных  $1/2$ , полученных Херстом по ограниченному набору измерений.

Анализ одной из самых длинных выборок методом нормированного размаха был проведен Мандельбротом и Уоллисом [143] при исследовании древних климатических изменений по толщине слоев в слоистых илистых отложениях оз. Тимискаминг в Канаде. Эти данные охватывают период в 1809 лет; полученное по ним кажущееся значение показателя Херста очень велико ( $H = 0,96$ ) и не заметно никаких признаков отклонений от этой зависимости (рис. 8.10).

Почему же природные процессы подчиняются статистике Херста? Это, несомненно, открытый вопрос. Однако смещенное блуждание Херста, моделируемое с помощью джокера в вероятностной колоде карт, дает ключ к ответу. Сток реки зависит не только от недавних осадков, но и от более ранних дождей. Поток воды в крупных системах рек типа Нила или сток оз. Альберт должны зависеть от содержания воды на их обширных бассейнах. Количество воды, запасенное в бассейнах таких рек и водоемов, будет увеличиваться в течение долгих

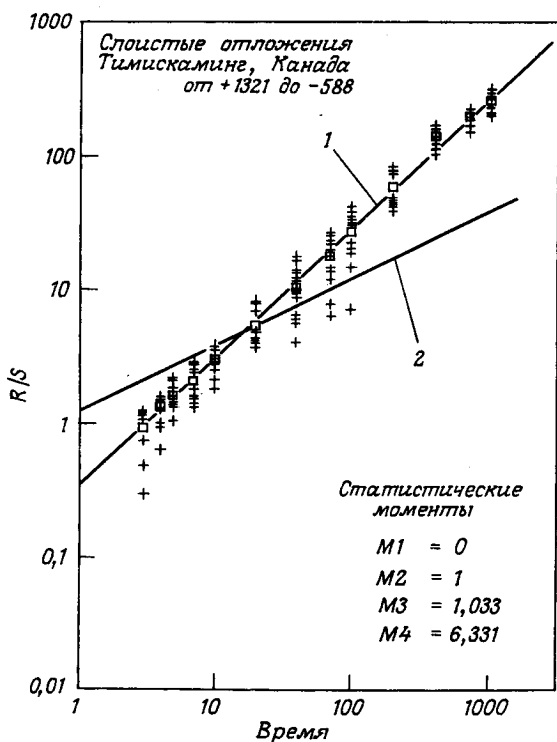


РИС. 8.10.  $R/S$  для толщины слоев в отложениях оз. Тимискаминг (Канада) как функция запаздывания  $\tau$  в годах [143].

периодов, когда уровень осадков выше среднего. Избыток запасенной воды затем поддержит сток в засушливые годы. Если в течение долгого времени дождей меньше обычного, то общий уровень воды в бассейне реки падает, в последующий период обильных дождей часть воды будет поглощена почвой и сток останется меньше нормального. Эти эффекты «памяти» моделируются джокером в колоде Херста. Что касается стока рек, то фрактальные свойства области, откуда они питаются водой (см. обсуждение в разд. 12.2), также могут способствовать фрактальному поведению стока. Модель обобщенного броуновского движения [141], рассматриваемая в следующей главе, учитывает эффекты памяти.

Мы показали, что для того, чтобы получить гауссову статистику, даже в системах с умеренными эффектами памяти требуются исключительно длительные ряды наблюдений. Поэтому неясно, насколько уверенно значения показателя Херста  $H$ , превышающие  $1/2$ , в исследованиях методом  $R/S$  указывают на поддерживающиеся тенденции (персистентность), — и вновь требуются дополнительные исследования.

В качестве примера недавнего анализа методом  $R/S$  рассмотрим результаты, воспроизведенные на рис. 8.11. Пористость как функция глубины определялась по кернам, полученным при бурении скважины [91]. Как видно из рисунка, пористость сильно флуктуирует. Анализ методом  $R/S$ , результаты которого показаны на рис. 8.11 справа, ясно указывает на присутствие поддерживающейся тенденции, характеризующейся показателем Херста  $H = 0,855$ . Автор этой работы обсуждает также свойства дисперсии флуктуаций пористости, которые приводят к тому же значению  $H$ .

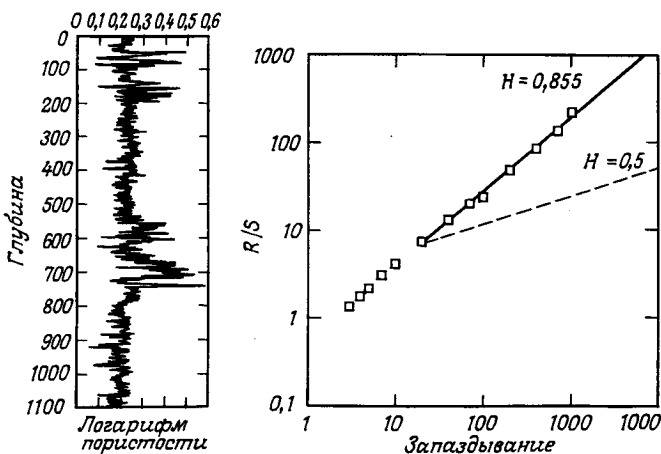


РИС. 8.11. Пористость как функция глубины (в футах) по анализу кернов (слева).  $R/S$  как функция запаздывания для измерений пористости (справа). Сплошной линией показана аппроксимация с  $H = 0,855$ . Штриховая линия — процесс со статистически независимыми приращениями [91].

## Глава 9

# Случайное блуждание и фракталы

Случайность присуща всем природным явлениям. Даже в самых правильных кристаллах есть множество случайно разбросанных включений и других дефектов. По сути дела, даже если бы кристалл был идеальным и каждый атом занимал в нем строго определенное место, то и это состояние поддерживалось бы лишь в среднем, поскольку атомы совершают постоянное тепловое движение. Поэтому даже системы, наиболее близкие к идеальным, в реальном состоянии содержат элементы случайности. Имеются веские основания считать, что многие природные явления описываются наилучшим образом как фракталы. Однако, если мы хотим применить фракталы к описанию природы, следует развить концепцию *случайных фракталов*.

Ввиду исключительной важности *броуновского движения*, или процесса *случайных блужданий*, в физике, химии и биологии мы начнем с обсуждения этого явления как примера случайного процесса, обладающего фрактальными свойствами. Простейший случай – одномерное случайное блуждание – затем можно обобщить на большее число измерений. Мы также рассмотрим *обобщенное броуновское движение*, впервые введенное Мандельбротом. Применение метода нормированного размаха, предложенного Херстом, показывает, что статистические свойства многих природных явлений действительно лучше всего описываются на языке обобщенного броуновского движения.

### 9.1. Броуновское движение

Роберт Браун (Броун) первым понял [30], что неупорядоченное движение микроскопических частиц пылицы имеет не биологическую природу, как думали до него, а физическую. Все подвержено тепловым флуктуациям, и молекулы, макромолекулы, вирусы, пылинки и другие компоненты окружающего нас мира находятся в вечном движении в постоянных случайных столкновениях, обусловленных их тепловой энергией. Частица вещества, имеющая абсолютную температуру  $T$ , несет среднюю кинетическую энергию  $(3/2)kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана. Как показал Эйнштейн [53], эта энергия не зависит от размера частицы. Наши знания о тепловом равновесии и путях его достижения зиждутся в

основном на обширнейших результатах, полученных при исследовании явления, названного «броуновским движением». С помощью микроскопа можно воочию убедиться, что движение «броуновской частицы» представляет собой набор шагов в случайно выбираемых направлениях, причем длина шага имеет некоторую характерную величину. Поэтому в описаниях броуновского движения можно часто встретить термин «случайное блуждание».

Подчеркнем, что в броуновском движении независимы не положения частицы в разные моменты времени — смещение частицы в течение одного промежутка времени не зависит от ее же смещения в течение другого интервала времени.

Увеличив разрешение микроскопа и временное разрешение, с которым регистрируется движение, мы вновь получим подобное случайное блуждание. Как мы увидим ниже, броуновское движение самоподобно. Если время рассматривать как дополнительное измерение, то зависимость положения частицы как функция времени, называемая диаграммой движения, является не самоподобной, а *самоаффинной*. Различие понятий «самоподобие» и «самоаффинность» будет играть важную роль в последующих разделах этой книги.

На языке броуновского движения можно наиболее глубоко понять явление диффузии. Некоторые интересные и часто удивительные эффекты броуновского движения в биологии замечательно описаны в небольшой книге Берга [20].

## 9.2. Одномерное случайное блуждание

Рассмотрим частицу, которая движется вдоль прямой линии — назовем ее осью  $x$ , перепрыгивая на расстояние  $+\xi$  или  $-\xi$  каждые  $\tau$  секунд. При моделировании диффузии  $\xi$  отождествляется с микроскопической длиной (скажем, с диаметром частицы), а  $\tau$  — с микроскопическим временем (временем столкновений).

Пусть  $\xi$  — не фиксированная величина. Зададим ее гауссовым, или нормальным, распределением вероятностей

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}\tau}\right). \quad (9.1)$$

Процесс случайного блуждания в атомарных масштабах можно описать следующим образом. На каждом интервале длительностью  $\tau$  длина шага  $\xi$  выбирается случайным образом и вероятность того, что  $\xi$  заключено между  $\xi$  и  $\xi + d\xi$ , равна  $p(\xi, \tau)d\xi$ . Последовательность таких чисел (длин шагов)  $\{\xi_i\}$  является набором *независимых* гауссовых случайных чисел. Дисперсия этого набора равна

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2\mathcal{D}\tau. \quad (9.2)$$

Параметр  $\mathcal{D}$  — это *коэффициент диффузии*. Как следует из равенства (9.2),

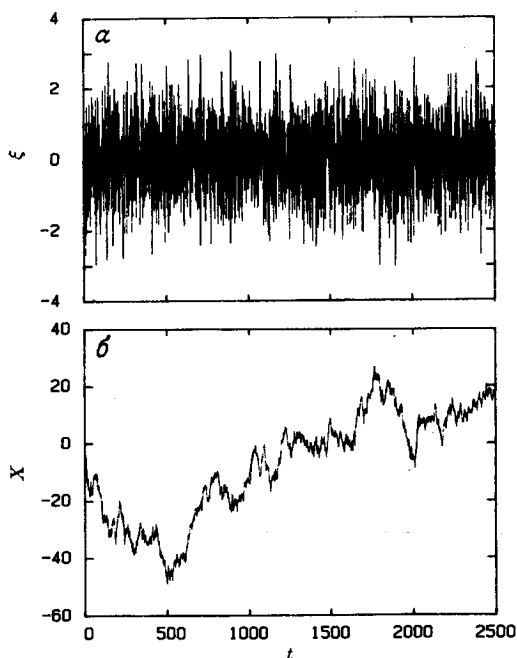


РИС. 9.1. Последовательность независимых гауссовых случайных чисел с нулевым средним значением и единичной дисперсией: *а* — независимые случайные шаги «частицы»; *б* — координата частицы. Время измерено в единицах «атомарного» интервала времени между шагами  $t$ .

коэффициент диффузии подчиняется соотношению Эйнштейна:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\tau} \langle \xi^2 \rangle, \quad (9.3)$$

где  $\langle \xi^2 \rangle$  — средний квадрат длины шага. Соотношение (9.3) справедливо при довольно общих предположениях, даже когда скачки разделены неодинаковыми интервалами времени и распределение вероятностей длины скачка  $\xi$  дискретно, непрерывно или имеет довольно произвольный вид.

Перейдем с *стандартному* гауссову случайному процессу, заменив  $\xi/\sqrt{2\mathcal{D}\tau}$  на  $\xi$ , так что вновь определенное  $\xi$  имеет нулевое среднее значение и дисперсию  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ . На рис. 9.1, *а* показана последовательность *стандартных* гауссовых случайных чисел. Последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots$  определяет последовательность длин шагов случайного блуждания, а *координата* частицы на оси  $x$  равна

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (9.4)$$

Кривая на рис. 9.1, *б* показывает как координата частицы меняется со временем. Впрочем, заметим, что в действительности эта кривая — дискретный набор точек, но мы просто не потрудились отрывать карандаш

от бумаги между точками. В пределе произвольно малой длительности шага набор случайных чисел переходит в случайную функцию  $X(t)$ . График случайной функции выглядит подобно кривой на рис. 9.1, б и его называют диаграммой случайной функции  $X(t)$ . Мандельброт называет эту диаграмму функцией Брауна и обозначает ее  $B(t)$ .

### 9.3. Свойства подобия одномерных случайных блужданий

На практике броуновское движение наблюдается с конечным разрешением, поэтому необходимо рассмотреть случай, когда координата частицы регистрируется через каждый промежуток времени  $b\tau$ , где  $b$  — некоторое произвольное число. Начнем с наблюдения каждого второго шага, т. е. возьмем  $b = 2$  (рис. 9.2). Тогда приращение координаты частицы  $\xi$  равно сумме двух независимых приращений  $\xi'$  и  $\xi''$ . Совместная вероятность  $p(\xi'; \xi'', \tau) d\xi' d\xi''$  того, что первое приращение  $\xi'$  заключено в интервале  $[\xi', \xi' + d\xi']$ , а второе,  $\xi''$ , в интервале  $[\xi'', \xi'' + d\xi'']$ , выражается через функцию  $p(\xi, \tau)$  из (9.1) соотношением

$$p(\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau)p(\xi'', \tau).$$

Совместная плотность вероятности представляет собой произведение двух плотностей вероятности для каждой из переменных по отдельности, поскольку эти два приращения статистически независимы. Оба приращения должны складываться в полное приращение  $\xi$ , и интегрирование по всем возможным комбинациям  $\xi'$  и  $\xi''$  приводит к следующему выражению для плотности вероятности значений  $\xi$ :

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' p(\xi - \xi', \tau) p(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}2\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}2\tau}\right). \quad (9.5)$$

Итак, мы видим, что при анализе с половинным временным разрешением приращения координаты частицы остаются гауссовым случайным процессом с  $\langle \xi \rangle = 0$ . Однако дисперсия увеличилась:  $\langle \xi^2 \rangle = 4\mathcal{D}\tau$ . Эти рассуждения легко обобщить на случай интервала  $b\tau$  между наблюде-

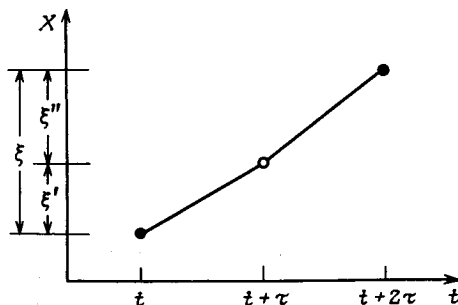


РИС. 9.2. Приращение  $\xi$  координаты броуновской частицы за время  $2\tau$  равно сумме двух независимых приращений  $\xi'$  и  $\xi''$ .

ниями:

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}b\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}b\tau}\right). \quad (9.6)$$

Мы приходим к заключению, что какое бы число  $b$  микроскопических временных шагов ни разделяло моменты наблюдений, приращения координаты частицы всегда составляют гауссов случайный процесс с независимыми значениями с  $\langle \xi \rangle = 0$  и дисперсией

$$\langle \xi^2 \rangle = 2\mathcal{D}t \quad \text{при} \quad t = b\tau. \quad (9.7)$$

На рис. 9.3 показаны положения частицы, регистрируемые на каждом четвертом шаге процесса из 10 000 независимых шагов с нулевым средним и единичной дисперсией, т.е. того же процесса, который изображен на рис. 9.1. Каждое приращение здесь – сумма 4 независимых шагов, и мы видим, что рис. 9.1, *а* и 9.3, *а* мало чем отличаются, разве что масштабом приращений, которые стали теперь примерно вдвое больше. Точно так же диаграмма движения на рис. 9.3, *б* имеет те же статистические свойства, что и диаграмма на рис. 9.1, *б*, но уже с другой ценой деления по оси  $x$ . Однако для любой конечной реализации эти две диаграммы будут иметь совершенно различный локальный вид и вертикальные масштабы не будут отличаться на ожидаемый множитель  $\sqrt{b}$ .

Свойство броуновских диаграмм не менять «вида» при изменении разрешения называется *масштабной инвариантностью*, или *симметрией*, броуновских диаграмм. Это *свойство подобия* (скейлинга) броуновского движения можно выразить в явном виде, преобразовав соотношение (9.1) с помощью замены  $\xi = b^{1/2}\xi$ ,  $\hat{t} = b\tau$ , т.е. изменив масштаб времени в  $b$  раз, а масштаб длины – в  $b^{1/2}$  раз. В результате такого преобразования получаем следующее соотношение подобия для плотности вероятности:

$$p(\xi = b^{1/2}\xi, \hat{t} = b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau). \quad (9.8)$$

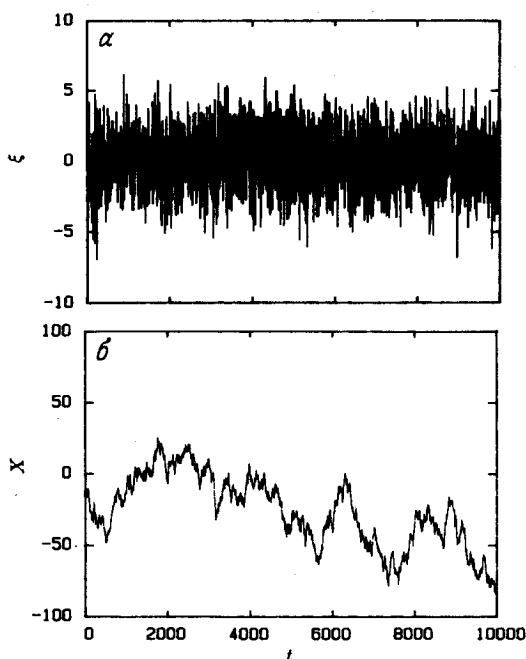
Множитель  $b^{-1/2}$  обеспечивает правильную нормировку плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi, \hat{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi, \tau) = 1.$$

Соотношение (9.8) показывает, что броуновский случайный процесс *инвариантен в смысле распределения* при преобразовании, которое меняет масштаб времени в  $b$  раз, а масштаб длины в  $b^{1/2}$  раз. Как будет обсуждаться ниже, преобразования, которые меняют масштабы времени и расстояния в разных пропорциях, называются *аффинными*, а зависимости, которые в некотором смысле сохраняют свой вид при аффинном преобразовании, называются *самоаффинными*.

Распределение вероятности координаты частицы  $X(t)$  находится теми

РИС. 9.3. Последовательность независимых гауссовых случайных чисел с нулевым средним и единичной дисперсией при «регистрации» на каждом четвертом временном шаге, т.е. через интервалы времени  $4\tau$ :  $a$  – независимые случайные шаги «частицы»;  $b$  – координата частицы. Единица измерения времени – «неделимый» период  $\tau$  между шагами.



же методами, что и выше, и мы получаем выражение

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}|t - t_0|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4\mathcal{D}|t - t_0|}\right), \quad (9.9)$$

которое удовлетворяет соотношению подобия

$$P(b^{1/2}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-1/2} P(X(t) - X(t_0)). \quad (9.10)$$

Зная распределение вероятности координаты частицы, можно найти следующие выражения для среднего значения координаты и ее дисперсии:

$$\begin{aligned} \langle X(t) - X(t_0) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0, \\ \langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 2\mathcal{D}|t - t_0|, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где  $X(t_0)$  – координата частицы в некоторый начальный момент  $t_0$ , а  $\Delta X$  – приращение координаты,  $\Delta X = X(t) - X(t_0)$ .

Координата броуновской частицы  $X(t)$  – случайная функция времени  $t$ . Винер [218] следующим образом ввел случайную функцию, описывающую броуновское движение. Рассмотрим стандартный гауссов случай-

ный процесс с независимыми значениями  $\{\xi\}$ . Пусть приращение координаты броуновской частицы определяется выражением

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi |t - t_0|^H \quad (t \geq t_0) \quad (9.12)$$

для любой пары моментов времени  $t$  и  $t_0$ . Здесь  $H = 1/2$  для обычного броуновского движения. Соотношение (9.12) служит определением *случайной функции* и применимо в момент  $t_0$  независимо от того, известны значения  $X(t)$  в более ранние моменты времени  $t < t_0$  или нет. Соотношение (9.12) часто дополняют условием  $X(0) = 0$ , но это лишь дело удобства. Имея определение, выраженное соотношением (9.12), можно найти координату  $X(t)$  по координате  $X(t_0)$ , выбирая случайное число  $\xi$  из гауссова распределения, умножая его на некоторую степень приращения времени  $|t - t_0|$  и складывая результат с известной координатой  $X(t_0)$ . Эта процедура применима и при  $t < t_0$ . Функция, определяемая соотношением (9.12), непрерывна, но она не имеет производных. Как следует из определения (9.12), случайная функция  $X(t)$  имеет распределение (9.9).

Из соотношения (9.9) вытекает, что преобразованная переменная  $x$ , определяемая выражением

$$x = \frac{X(t) - X(t_0)}{\sqrt{2\mathcal{D}\tau} (|t - t_0|/\tau)^H}, \quad (9.13)$$

при всех  $t$  и  $t_0$  имеет гауссово распределение вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (9.14)$$

с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

## 9.4. Обобщенное броуновское движение

Понятие *обобщенного броуновского движения* введено Мандельбротом через обобщение случайной функции  $X(t)$  путем замены показателя  $H = 1/2$  в соотношениях (9.12) и (9.13) на любое действительное число из интервала  $0 < H < 1$  [134, 141]; результат обобщения обозначается  $B_H(t)$ . Действительно обобщенными являются случаи, когда  $H \neq 1/2$ , а случай  $H = 1/2$  соответствует *независимым* приращениям и описывает броуновское движение; в этом случае мы будем использовать обозначение  $B(t) = B_{1/2}(t)$ .

Если в выражениях (9.13) и (9.14) обозначение координаты точки  $X(t)$  заменить на  $B_H(t)$ , то будет ясно, что обобщенный броуновский процесс имеет нулевое среднее приращение

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0,$$

а дисперсия приращений  $V(t - t_0)$  имеет вид

$$V(t - t_0) = \langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2\mathcal{D}\tau (|t - t_0|/\tau)^{2H} \sim |t - t_0|^{2H}. \quad (9.15)$$

Как видим, и для обычного, и для обобщенного броуновского движения со временем дисперсия растет.

Важно понять, что обобщенное броуновское движение имеет бесконечно большое время корреляции. В частности, приращения в прошлом скоррелированы с будущими приращениями: если известно приращение  $B_H(0) - B_H(-t)$  за период времени от  $-t$  до 0, то вероятность иметь приращение  $B_H(t) - B_H(0)$ , усредненная по распределению прошлых приращений, равна

$$\langle [B_H(0) - B_H(-t)] [B_H(t) - B_H(0)] \rangle.$$

Положим для удобства  $B_H(0) = 0$  и будем использовать такие единицы измерения, чтобы выполнялись равенства  $\tau = 1$  и  $2\mathcal{D}\tau = 1$ . Функцию корреляции будущих приращений  $B_H(t)$  с прошлыми  $-B_H(-t)$  можно записать в виде

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t) B_H(t) \rangle}{\langle B_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1, \quad (9.16)$$

нормированном на дисперсию  $B_H$ . Последнее соотношение непосредственно вытекает из (9.15).

Прежде всего заметим, что при  $H = 1/2$  корреляция *прошлых и будущих* приращений  $C(t)$  отсутствует при всех  $t$ , как и должно быть для случайного процесса с *независимыми приращениями*. Однако при  $H \neq 1/2$  мы получаем  $C(t) \neq 0$  *независимо от  $t$* ! Это — замечательное свойство обобщенного броуновского движения, заключающееся в *персистентности* (сохранении тенденции) и *антиперсистентности*. При  $H > 1/2$  *поддерживается имеющаяся тенденция*. Если в этом случае приращения были положительными в течение некоторого времени в прошлом, т.е. происходило увеличение, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. Таким образом, для процесса с  $H > 1/2$  тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем и, более того, это справедливо для произвольно больших  $t$ ! И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем.

Случай  $H < 1/2$  характеризуется *антиперсистентностью*. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем.

Следует заметить, что поведение статистического ряда, описываемое выражением (9.16), противоречит обычно допускаемым или доказываемым свойствам статистических рядов и физических систем. Как правило, в статистической физике подразумевается предположение, что события могут быть скоррелированы, если они разделены во времени не более чем на  $\Delta t$ , но они непременно окажутся некоррелированными в пределе  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Подобная статистическая независимость на больших интервалах во времени и/или пространстве является существенной составной частью представлений о тепловом равновесии. Имеются и исключения: по мере приближения к точке фазового перехода второго порядка,

например к критической точке жидкости, в корреляционных функциях плотности появляется компонента, которая не содержит ни пространственного, ни временного собственного масштаба. Вследствие этого свободная энергия системы содержит критическую компоненту, которая подчиняется соотношению подобия вида (2.13), и степенное поведение корреляционных функций становится не исключением, а правилом.

Что касается временных рядов наблюдений, то при обсуждении метода Херста мы убедились, что его применение ко многим естественным явлениям обнаруживает, что они характеризуются персистентностью на широком интервале временных масштабов. Для моделирования временных рядов, описывающих подобные явления, полезно обобщенное броуновское движение.

## 9.5. Определение обобщенного броуновского движения

Чтобы глубже понять природу обобщенного броуновского движения, можно реализовать этот процесс с помощью численного моделирования и получить данные, аналогичные представленным на рис. 9.1 для обычного броуновского движения. Мандельброт и Ван Несс [141] определили случайную функцию  $B_H(t)$  с нулевым средним примерно следующим образом:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (t - t')^{H-1/2} dB(t'). \quad (9.17)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Согласно этому определению, значение случайной функции в момент  $t$  зависит от всех предшествующих (в моменты  $t' < t$ ) приращений  $dB(t')$  обычного гауссова случайного процесса  $B(t)$  с нулевым средним и единичной дисперсией.

Обозначение  $dB(t)$  для случайной переменной становится понятным, если попытаться вычислить интеграл, заменив его суммой. С тем чтобы аппроксимировать интеграл, выберем единицу измерений времени так, чтобы  $t$  принимало целочисленные значения, и разделим каждый единичный интервал времени на  $n$  малых временных шагов. Тогда переменную интегрирования можно записать как  $t' = in$ , где  $i = -\infty, \dots, -2/n, -1/n, 0, 1/n, \dots, t/n$ . Приращение  $dB(t')$  исходного гауссова процесса с независимыми значениями можно теперь записать в виде  $n^{-1/2}\xi_i$ , где  $\xi_i$  теперь дискретная гауссова случайная переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. Множитель  $n^{-1/2}$  перед  $\xi$  учитывает перенормировку броуновских приращений при уменьшении шага по времени (см. 9.8)). Итак, мы получаем следующее приближенное выражение:

$$B_H(t) \simeq \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=-\infty}^{nt} \left(t - \frac{i}{n}\right)^{H-1/2} n^{-1/2} \xi_i. \quad (9.18)$$

Очевидно, что этот ряд не сходится, а с ним расходится при  $t' \rightarrow -\infty$  и интеграл в выражении (9.17). Это грубое определение случайной функции  $B_H(t)$  необходимо заменить на более точное, использованное Мандельбротом и Ван Нессом [141]. При заданном значении  $B_H(t=0)$

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t K(t-t') dB(t'). \quad (9.19)$$

Здесь вместо простого степенного ядра, которое присутствовало в определении (9.17), появляется модифицированное ядро:

$$K(t-t') = \begin{cases} (t-t')^{H-1/2} & \text{при } 0 \leq t' \leq t, \\ \{(t-t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2}\} & \text{при } t' < 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

При  $t' \rightarrow -\infty$  это ядро убывает достаточно быстро, чтобы выражение (9.19) подходящим образом определяло случайную функцию  $B_H(t)$ .

Соотношение (9.19) имеет вид общего уравнения линейного отклика. Здесь независимое гауссово приращение  $dB(t')$ , имеющее значение 1 в момент  $t'$ , в более поздний момент  $t$  вносит вклад в смещение фрактальной броуновской частицы  $B_H(t)$ , который определяется функцией отклика  $K(t-t')$  через линейное соотношение.

Необычное свойство функции  $K(t) \sim t^{H-1/2}$  состоит в том, что эта степенная функция не имеет собственного масштаба времени, или единицы времени. Изменяя масштаб времени на множитель  $b$ , мы получаем следующий масштабированный вид соотношения (9.19):

$$B_H(bt) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{bt} K(bt-t') dB(t'). \quad (9.21)$$

Введем здесь новую переменную интегрирования  $t' = b\hat{t}$  и воспользуемся следующим статистическим свойством гауссова процесса с независимыми приращениями:  $dB(t' = b\hat{t}) = b^{1/2}d\hat{B}(\hat{t})$ . Используя тогда соотношение  $K(bt - b\hat{t}) = b^{H-1/2}K(t - \hat{t})$ , получим выражение

$$B_H(bt) - B_H(0) = b^H \{B_H(t) - B_H(0)\}, \quad (9.22)$$

справедливое в статистическом смысле при всех значениях  $b$ . В частности, можно положить  $t = 1$  и  $\Delta t = bt$  и прийти к выводу, что приращение координаты фрактальной броуновской частицы, равное

$$B_H(\Delta t) - B_H(0) = |\Delta t|^H \{B_H(1) - B_H(0)\} \sim |\Delta t|^H, \quad (9.23)$$

статистически пропорционально  $|\Delta t|^H$ . Отсюда следует, что дисперсия приращений определяется соотношением (9.15) с  $t_0 = 0$  и  $\Delta t = t - t_0$ . Конечно, именно этот результат заставляет нас предпочесть для  $B_H$  определение (9.19).

## 9.6. Моделирование обобщенного броуновского движения

Как видим, дискретный аналог  $B_H(t)$ , определяемый соотношением (9.18), пришлось изменить, выбрав подходящее ядро, чтобы сделать ряд сходящимся. Однако при любом вычислении  $B_H$  придется использовать конечное число членов, тогда суммы будут иметь смысл только на конечном интервале  $M$  целочисленных значений времени  $t$ . Для приближенного расчета интеграла разобьем каждый шаг по целочисленному времени на  $n$  интервалов и получим следующее приближенное выраже-

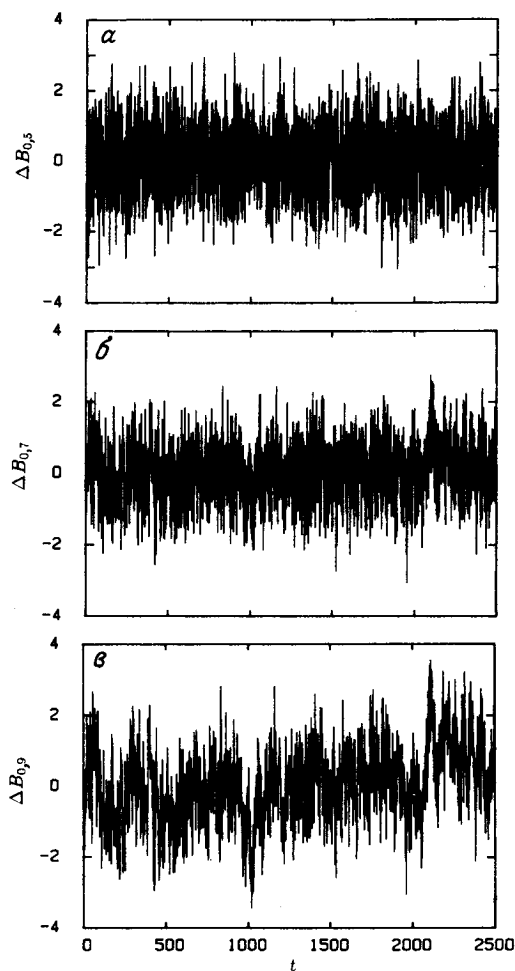


РИС. 9.4. Фрактальный шум, или приращения фрактальной броуновской функции  $B_H$ , рассчитанной при  $M = 700$  и  $n = 8$ : *a* — обычные броуновские приращения при  $H = 1/2$ ; *б* — фрактальные приращения при  $H = 0,7$ ; *в* — фрактальные приращения при  $H = 0,9$ .

ние [144–146]:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=n(t-M)}^{nt} K\left(t - \frac{1}{n}\right) n^{-1/2} \xi_i. \quad (9.24)$$

Здесь  $\{\xi_i\}$  с  $i = 1, 2, \dots, M, \dots$  есть набор гауссовых случайных чисел с единичной дисперсией и нулевым средним. Ядро  $K$  определяется выражением (9.20). Изменив индекс суммирования и перегруппировав члены в сумме, мы получим следующее выражение для дискретных приращений при обобщенном броуновском движении:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = \frac{n^{-H}}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \sum_{i=1}^{nt} (i)^{H-1/2} \xi_{(1+n(M+t)-i)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n(M-1)} ((n+i)^{H-1/2} - (i)^{H-1/2}) \xi_{(1+n(M-1+t)-i)} \right\}. \quad (9.25)$$

Пользуясь соотношением (9.25), по последовательности гауссовых случайных чисел можно составить последовательность *приращений*  $B_H$ . Заметим, что это приближение эквивалентно вычислению скользящего среднего, со степенной весовой функцией, от гауссова процесса. Поскольку в сумму включены лишь  $M$  целочисленных временных шагов, при  $t \gg M$  приращения станут независимыми и в этом приближении  $B_H$  превратится в гауссов процесс с независимыми приращениями. Ясно, что алгоритм, который определяется выражением (9.25), неэкономичен, поскольку для вычисления каждого значения приращения  $B_H$  приходится вычислять сумму  $nM$  членов. Мандельброт [128] предложил быстрый алгоритм моделирования обобщенного гауссова шума, основанный на вычислении с весами суммы ряда марковских гауссовых переменных с увеличивающимися корреляционными временами и прибавлении высокочастотной компоненты, имеющей марковские гауссовы свойства. Но для наших целей лучше подходит описанный выше алгоритм, и мы удовлетворимся моделированием на умеренных интервалах времени  $M$ .

Увеличение  $n$  необходимо для более точного описания поведения  $B_H(t)$  на малых интервалах времени (которое здесь не очень существенно) и для иллюстративных целей мы положили  $n = 8$ .

Мы рассчитали  $B_H$  по гауссову процессу с 27 500 независимыми шагами, из которых первые 2500 шагов показаны на рис. 9.1. На рис. 9.4 мы приводим фрактальный шум, т. е. приращения  $B_H$ , определяемые как разность  $\Delta B_H(t) = B_H(t) - B_H(t-1)$ . Для обычных броуновских приращений  $H = 1/2$ , и получаемый шум является гауссовым процессом с независимыми значениями, который обычно называют *белым шумом*. Фрактальные шумы, показанные на рис. 9.4, соответствуют  $H = 0,7$  и  $H = 0,9$ . При увеличении  $H$  не происходит существенной перестройки процесса. Однако более внимательный анализ показывает, что по мере

увеличения  $H$  усиливается низкочастотный шум, который приводит к большим отклонениям амплитуды (по сравнению с высокочастотными компонентами).

На рис. 9.5 показано изменение с  $t$  фрактальной броуновской функции  $B_H(t)$  при  $B_H(0) = 0$ . Эта функция описывает положение частицы, которая начинает движение из начала координат и движется вдоль оси  $x$  с шагами, показанными на рис. 9.4. С увеличением величины  $H$  увеличивается амплитуда вариаций координаты положения частицы и в такой же степени уменьшается шум.

При фрактальном движении с  $H > 1/2$  отклонения от начала коорди-

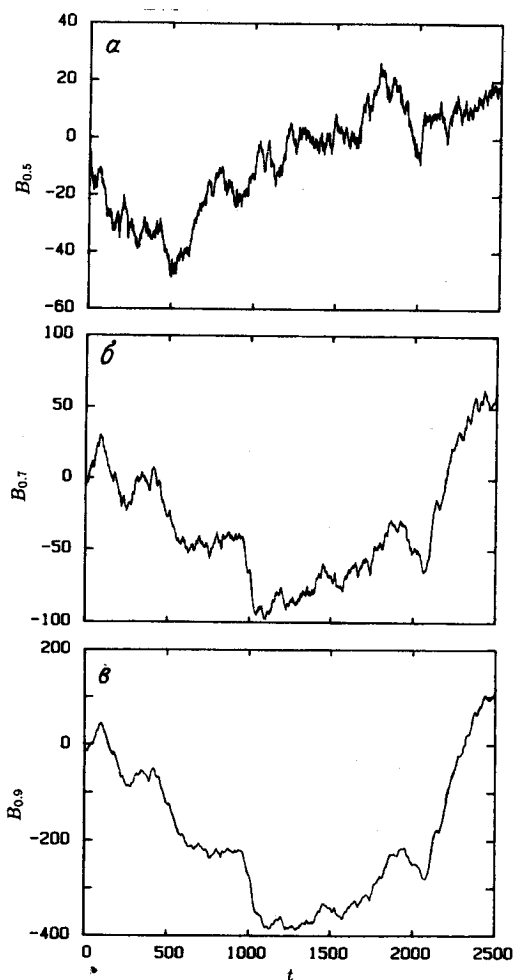


РИС. 9.5. Фрактальная броуновская функция  $B_H$ , рассчитанная при  $M = 700$ ,  $n = 8$  при условии  $B_H(0) = 0$ : а – обычная броуновская функция при  $H = 1/2$ ; б – фрактальная броуновская функция при  $H = 0.7$ ; в – фрактальная броуновская функция при  $H = 0.9$ .

нат по сравнению со случаем броуновского движения аномально велики. Действительно, при фрактальном броуновском движении дисперсия координаты определяется соотношением (9.15), и, используя соотношение Эйнштейна в виде (9.11), мы можем определить коэффициент аномальной фрактальной диффузии выражением

$$\mathcal{D}_H \sim \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \mathcal{D} |t|^{2H-1}. \quad (9.26)$$

Такая аномальная диффузия играет важную роль в анализе процессов фрактального переноса. Она возникает во многих случаях, как, например, при рассмотрении электрической проводимости случайных сред. Следует подчеркнуть, что аномальный характер диффузии, описываемой соотношением (9.26), связан с фрактальными свойствами блужданий в евклидовом пространстве. Если блуждание происходит на фрактальном множестве, погруженном в евклидово пространство, то коэффициент диффузии остается аномальным, но характеризуется другим показателем степенной зависимости от времени (см., например, [2, 71, 202]).

Как следует из соотношения (9.15), нормированная дисперсия приращений зависит от времени запаздывания  $t$  как

$$V(t) = \langle [B_H(t) - B_H(0)]^2 \rangle / \langle B_H^2(t) \rangle = |t|^{2H}. \quad (9.27)$$

Величину  $V(t)$  можно оценить из зависимостей, показанных на рис. 9.5. Получающиеся функции  $V(t)$  при разных значениях  $H$  очень хорошо аппроксимируются ожидаемым законом (9.27). Однако в результате использования конечной величины  $M$  и конечной длительности исходного броуновского движения с независимыми приращениями значения  $V(t)$ , полученные при численном моделировании, оказываются меньше ожидаемых теоретических значений при запаздывании порядка  $t \geq M$

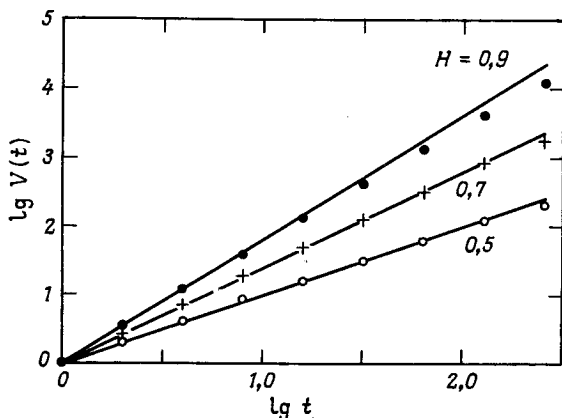


РИС. 9.6. Дисперсия приращений фрактальной броуновской функции  $V(t)$ , рассчитанной при  $M = 700$ ,  $n = 8$  при условии  $B_H(0) = 0$ . Сплошными линиями показаны зависимости  $V(t) = |t|^{2H}$  при  $H = 0,5, 0,7$  и  $0,9$ .

(рис. 9.6). Таким образом, при  $t \sim M$  наш приближенный дискретный фрактальный шум начинает переходить в белый шум. Увеличивая  $M$ , можно неограниченно увеличить область, в которой модель шума остается фрактальной. Однако, если нужно получить фрактальный шум на очень больших интервалах времени, следует пользоваться более экономичными алгоритмами.

## 9.7. Метод $R/S$ для обобщенного броуновского движения

Соотношение подобия (9.22) привело к выводу (9.23) о том, что случайная функция  $B_H(\Delta t)$  пропорциональна  $|\Delta t|^H$ . Отсюда следует [134, 146], что размах  $R(\tau)$  при запаздывании  $\tau$  также является случайной функцией, которая подчиняется закону подобия

$$R(\tau) \sim \tau^H.$$

Поскольку для истинной дисперсии мы имеем  $S = 1$ , а дисперсия выборки значений нормированной фрактальной броуновской функции близка к единице, отсюда вытекает, что нормированный размах  $R/S$  подчиняется статистической зависимости

$$R(\tau)/S \sim \tau^H. \quad (9.28)$$

Итак, мы пришли к заключению, что показатель Херста  $H$  можно *оценить*, аппроксимируя экспериментальные или модельные результаты соотношением (9.28).

Для проверки этого соотношения мы применили метод  $R/S$  к анализу результатов численного моделирования функции  $B_H$ . На рис. 9.7 показаны результаты применения метода  $R/S$  к гауссову процессу с независи-

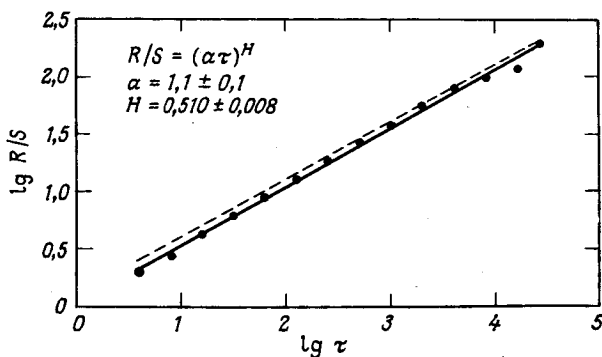


РИС. 9.7. Отношение  $R/S$  в зависимости от запаздывания  $\tau$  для стандартной гауссовой переменной с независимыми значениями  $\xi$ . Штриховой линией показана ожидаемая теоретическая асимптотика  $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$ . Сплошной линией показана аппроксимирующая зависимость  $R/S = (a\tau)^H$  при  $H = 0,510 \pm 0,008$  и  $a = 1,1 \pm 0,1$ .

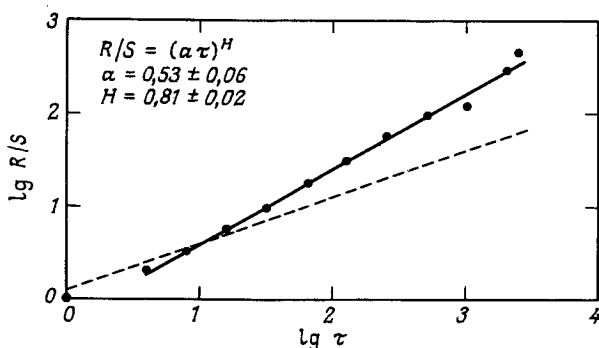


РИС. 9.8. Отношение  $R/S$  в зависимости от запаздывания  $\tau$  для фрактальной броуновской функции  $B_H(t)$  с  $H = 0,9$ . Штриховой линией показана асимптотическая зависимость для гауссова процесса с независимыми значениями,  $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$ . Сплошная линия — аппроксимация  $R/S = (\alpha\tau)^H$  при  $H = 0,81 \pm 0,02$  и  $\alpha = 0,53 \pm 0,06$ .

мыми приращениями, показанному на рис. 9.1. Для нашей модели показатель Херста равен  $H = 0,510 \pm 0,008$ , что хорошо согласуется с теоретическим значением  $H = 1/2$ .

На рис. 9.8 приведены результаты расчета  $R/S$  для фрактальной броуновской функции  $B_{0,9}(t)$ , показанной на рис. 9.4, в. Как видим, эти результаты сильно отличаются от случая обычного броуновского процесса. Однако найденное значение показателя Херста  $H = 0,81 \pm 0,02$  несколько меньше значения  $H = 0,9$ , использованного при моделировании. Впрочем, следует помнить, что наша модель дает лишь *приближенно* фрактальные броуновские функции, поскольку мы используем конечное время памяти  $M = 700$  и конечное разрешение  $n = 8$ . Поэтому вполне естественно, что оценка показателя Херста по численной модели несколько занижена, — при запаздывании  $\tau > 700$  наша модель переходит в гауссов процесс с независимыми значениями, а для него  $H = 1/2$ . Можно заключить, что показатель Херста можно точно оценить, анализируя хорошо определенные наборы данных, состоящие примерно из 2500 измерений.

## 9.8. Последовательные случайные сложения

Р. Ф. Фосс предложил методы построения не только обычной фрактальной броуновской функции, но и фрактальных броуновских поверхностей и объемов. Свой алгоритм он назвал *последовательным случайным сложением* [214]. Используя для иллюстрации рис. 9.9, опишем этот алгоритм.

Чтобы построить обобщенную броуновскую кривую, высота или вертикальная координата  $X(t)$  которой описывается законом обобщен-

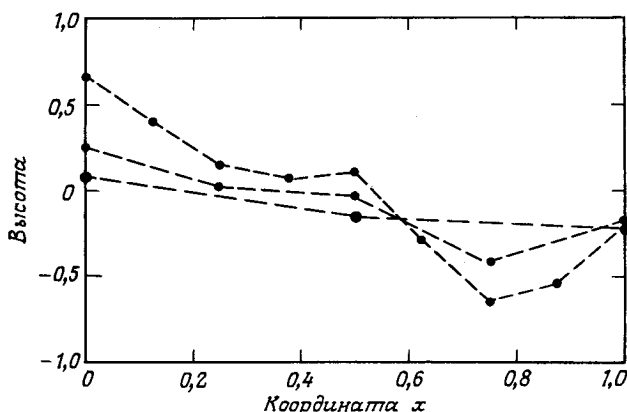


РИС. 9.9. Процедура последовательных случайных сложений. Точки, принадлежащие одному и тому же поколению, соединены линиями. Три самых больших кружка соответствуют первому сложению с тремя начальными значениями высоты, равными нулю. Пять меньших кружков получены после интерполяции первых трех значений к промежуточным точкам и прибавления меньших случайных чисел ко всем пяти ординатам. Самыми маленькими кружками отмечены значения высоты в девяти точках следующего поколения.

ного броуновского движения, следует потребовать, чтобы дисперсия приращений координаты подчинялась соотношению

$$V(t) = \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle = |t|^{2H} \sigma_0^2. \quad (9.29)$$

Это просто переписанное соотношение (9.27); здесь  $\sigma_0^2$  — (начальная) дисперсия случайных сложений, к обсуждению которых мы переходим.

Нижеследующий процесс, предложенный Фоссом, приводит к обобщенному броуновскому движению при любом разрешении. Отправная точка — последовательность значений координаты  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ , заданных для моментов времени  $t_1, \dots, t_N$ . Мы выберем  $N = 3$ , моменты времени  $t_i = 0, 1/2, 1$  и примем исходные значения координаты равными нулю. Затем к значениям координаты  $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$  прибавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией,  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 1$ . Средние значения времени на каждом интервале затем рассматриваются как дополнительные узлы на оси времени; значения координаты в них оцениваются интерполяцией. Итак, теперь выделены моменты времени  $t_1, \dots, t_5 = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ . И вновь ко всем координатам прибавляются случайные числа с нулевым средним значением и уменьшенной дисперсией

$$\sigma_2^2 = (1/2)^{2H} \sigma_1^2.$$

Между пятью новыми значениями координаты вновь проводится интерполяция к серединам временных интервалов, что приводит к 9 значениям координаты в 9 моментов времени. После  $n$ -кратного применения этого

алгоритма мы получаем значения координаты обобщенной броуновской частицы в  $(1 + 2^n)$  моментов времени. Эти значения получены с помощью интерполяции и случайного сложения. Дисперсия слагаемых  $n$ -го поколения равна

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2H} \sigma_{n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2Hn} \sigma_0^2.$$

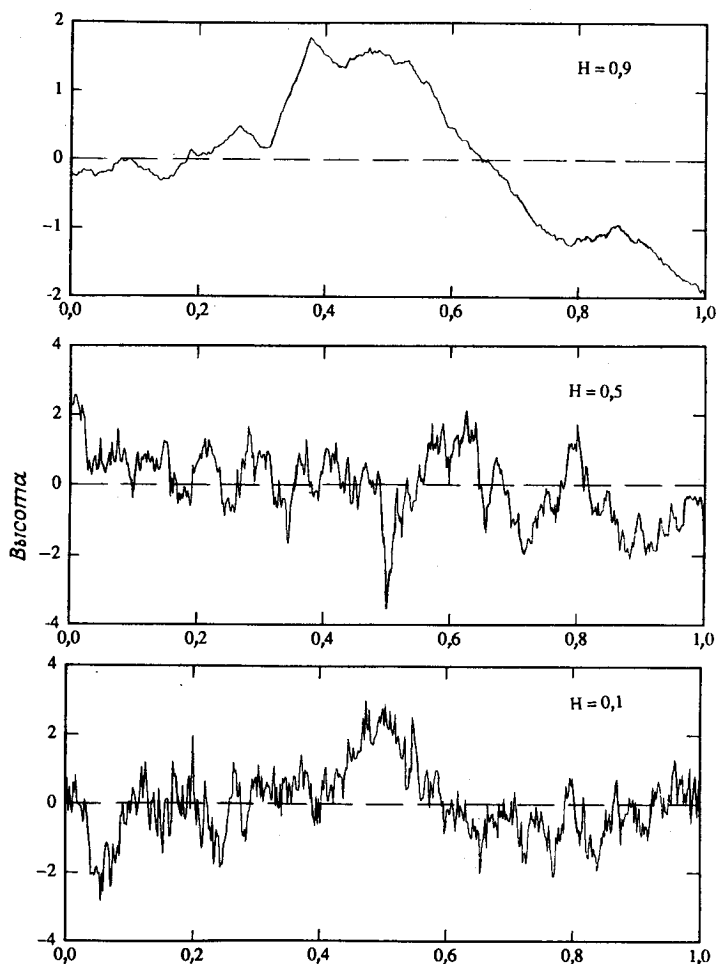


РИС. 9.10. Фрактальные броуновские кривые, полученные с помощью алгоритма последовательных случайных сложений Фосса при различных значениях показателя Херста  $H$ . Фрактальная размерность этих кривых равна  $D = 2 - H$ . Кривые рассчитывались с разрешением  $1/2048$ .

Как показал Фосс, этот процесс приводит к самоаффинным кривым, фрактальная размерность которых равна  $D = 2 - H$ .

Мы построили такие кривые для различных значений показателя Херста и приводим результаты на рис. 9.10. Все кривые были преобразованы так, чтобы они имели нулевое среднее значение и единичную дисперсию выборки. Случай  $H = 0,5$  соответствует обычному броуновскому движению, встречающемуся во многих приложениях. К примеру, шум усилителей часто полагают заданными кривой с  $H = 0,5$ .

*Персистентное* (поддерживающееся) поведение наблюдается при  $0,5 < H < 1$ . Примером персистентного процесса с  $H = 0,92$  является статистика морских волн, обсуждаемая в гл. 11. В этом случае персистентность означает, что если высота волн увеличивалась в течение времени  $t$ , то можно ожидать ее увеличения в течение последующего периода примерно такой же длительности. И наоборот, если высота волн оказывается уменьшающейся в течение времени  $t$ , то следует ожидать ее дальнейшего уменьшения в течение последующего такого же интервала времени. Другими словами, персистентные стохастические процессы обнаруживают довольно четко выраженные тенденции изменения при относительно малом шуме. В общем, когда приходится сталкиваться с проявлениями персистентных стохастических процессов, возникает соблазн поиска периодичностей (см. рис. 9.10).

С другой стороны, при *антиперсистентном* стохастическом процессе после возрастания переменной обычно происходит ее уменьшение, а после уменьшения – возрастание. Такое поведение характерно для фрактальных броуновских процессов при значении  $H$ , заключенном между 0 и  $1/2$ . Запись антиперсистентного процесса, например кривая с  $H = 0,1$  на рис. 9.10, выглядит очень зашумленной. У таких кривых уровень локального шума совпадает по порядку величины с глобальными отклонениями сигнала.

Фосс обобщил алгоритм последовательных случайных сложений на двух- и трехмерные системы. Полученные им фрактальные пейзажи генерируются посредством интерполяции на квадратной сетке и тех же случайных сложений с уменьшающейся дисперсией, которые обсуждались выше. Примеры пейзажей, построенных с помощью алгоритма Фосса, приводятся в гл. 13.

Фосс [214] показал также, что *заполненность* получаемых фрактальных поверхностей можно контролировать, выбирая коэффициент уменьшения  $r$  не равным  $1/2$ , так что в  $n$ -м поколении сложения проводятся при дисперсии  $\sigma_n^2 = r^{2H} \sigma_0^2$ . Фоссу удалось генерировать изображения облаков, находя значения концентрации воды  $c(x)$  в трехмерном пространстве и закрашивая белым те области, в которых  $c$  превышает определенную постоянную величину. Полученные им изображения облаков по качеству сравнимы с работами лучших художников. С этой точки зрения облака представляют собой фрактальные объемы в четырехмерном самоаффинном пространстве, состоящем из трех пространственных координат и дополнительного измерения – концентрации воды.

## Самоподобие и самоаффинность

Распределение вероятностей для броуновского движения удовлетворяет соотношениям подобия (9.8) и (9.10), которые аналогичны обсуждавшимся ранее соотношениям подобия (2.12), (2.13) и (2.16). Но между этими группами соотношений есть и очень важное отличие. Соотношения для броуновского движения носят более общий характер, во-первых, потому, что для него подобие обнаруживается по двум переменным,  $\xi$  и  $t$ . В этом нет ничего нового — кривая Кох, показанная на рис. 2.8, зависит от двух переменных  $x$  и  $y$ , а мы уже показали, что эта кривая самоподобна с коэффициентом подобия  $r$ , который непосредственно связан с фрактальной размерностью кривой  $D$  (см. (2.10)). Во-вторых, — и это более важно — время и координата входят в соотношение подобия с *разными* коэффициентами: когда время умножается на коэффициент  $b$ , координата умножается на  $b^H$ .

С помощью обсуждавшегося в гл. 2 соотношения подобия точки  $x = (x_1, \dots, x_E)$   $E$ -мерного пространства преобразуются в точки  $x' = (rx_1, \dots, rx_E)$  с *одинаковым* для всех координат значением коэффициента подобия  $r$ . Ограниченное фрактальное множество точек  $\mathcal{S}$  *самоподобно* с *отношением подобия*  $r$ , если  $\mathcal{S}$  является *объединением*  $N$  непересекающихся подмножеств  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ , *каждое* из которых конгруэнтно множеству  $r(\mathcal{S})$ , получаемому из  $\mathcal{S}$  с помощью преобразования подобия с  $0 < r < 1$ . Свойство *конгруэнтности* означает, что множество точек  $\mathcal{S}_i$  совпадает с множеством точек  $r(\mathcal{S})$  после переноса и/или поворота. Тогда гомотетическая размерность равна

$$D_s = \frac{\ln N}{\ln 1/r}. \quad (10.1)$$

Множество  $\mathcal{S}$  *статистически автомодельно*, если оно является объединением  $N$  отдельных подмножеств, каждое из которых получено из  $\mathcal{S}$  преобразованием подобия с коэффициентом  $r$  ( $0 < r < 1$ ) и обладает в точности теми же статистическими свойствами, что и  $r(\mathcal{S})$ . Часто случайные множества, например береговая линия, являются самоподобными не только для некоторого значения коэффициента подобия  $r$ , но и для целого ряда его значений, превышающих некоторый нижний предел (микромасштаб) и меньших некоторого верхнего предела (макромасштаб). Для таких множеств метод *покрытия* дает эффективную оценку фрактальной размерности множества, и эта оценка совпадает с  $D_s$ .

Во многих интересных случаях встречаются несамоподобные множества. Например, в случае броуновской частицы ее координата и время являются разными физическими величинами, и вряд ли можно ожидать, что  $x$  и  $t$  будут иметь одинаковые коэффициенты подобия. Так мы приходим к необходимости обсуждения понятий, связанных с *самоаффинностью*.

*Аффинное преобразование* переводит точку  $x = (x_1, \dots, x_E)$  в новую точку с координатами  $x' = (r_1 x_1, \dots, r_E x_E)$ , где не все коэффициенты подобия  $r_1, \dots, r_E$  одинаковы. Пример такого преобразования приведен в следующем разделе.

Ограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоаффинно* по отношению к вектору подобия  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_E)$ , если  $\mathcal{S}$  является объединением  $N$  непересекающихся подмножеств  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ , каждое из которых конгруэнтно множеству  $\mathbf{r}(\mathcal{S})$ , получаемому из  $\mathcal{S}$  с помощью аффинного преобразования, которое определяется вектором  $\mathbf{r}$ . Свойство *конгруэнтности* означает, что множество точек  $\mathcal{S}_i$  совпадает с множеством точек  $\mathbf{r}(\mathcal{S})$  после переноса и/или поворота.

Множество  $\mathcal{S}$  *статистически самоаффинно*, если  $\mathcal{S}$  является объединением  $N$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых получено из исходного множества аффинным преобразованием с помощью  $\mathbf{r}$  и имеет в точности те же статистические свойства, что и  $\mathbf{r}(\mathcal{S})$ .

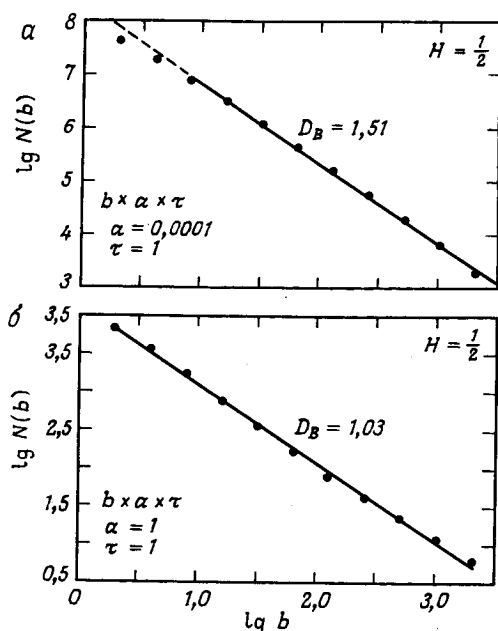
Дальнейшие подробности о самоаффинных и самоподобных множествах можно найти в книге Мандельброта [134] и в статьях Фосса [213, 214]. Интересные приложения повторных самоаффинных преобразований обсуждаются в работе [15].

Фрактальная размерность даже простейших самоаффинных фракталов не определяется однозначно. Эта проблема недавно обсуждалась Мандельбротом [136, 137]. Во-первых, гомететическую размерность просто нельзя определить, она существует только для самоподобных фракталов. Можно ли определить *размерность по покрытию*  $D_v$ ? Для множеств, подобных *графику* фрактальной броуновской функции  $B_H(t)$ , эту размерность в любом случае можно вычислить формально. Для гауссова процесса с независимыми приращениями зависимость координаты от времени  $X(t)$  имеет вид, показанный на рис. 9.1. Покроем этот график клетками шириной  $b\tau$  вдоль оси времени и длиной  $ba$  вдоль пространственной координаты, так что самая малая клетка имеет размеры  $\tau \times a$ . Тогда размерность по покрытию определяется аналогично соотношению (2.4) выражением

$$N(b; a, \tau) \sim b^{-D_v}, \quad (10.2)$$

где  $N(b; a, \tau)$  — число клеток, необходимое для покрытия кривой. Поскольку при численном моделировании мы использовали целочисленные значения времени, минимальная ширина клетки равна  $\tau = 1$ , а для высоты можно использовать меньшую величину  $a = 0,0001$ . Как видно из рис. 10,1,  $a$ ,  $N$  действительно обнаруживает зависимость типа (10.2). Аппроксимируя полученные данные зависимостью (10.2), получаем

РИС. 10.1. Число ячеек  $N(b; a, \tau)$  размера  $b \times (a, \tau)$  как функция масштаба ячеек  $b$  для графика  $B(t)$  гауссова процесса с 7500 независимыми шагами:  $a$  — при  $a = 0,0001$  и  $\tau = 1$  аппроксимация точек на графике дает  $D_B = 1,51 \pm 0,02$ ;  $b$  — при  $a = 1$  и  $\tau = 1$  мы получаем  $D_B = 1,03 \pm 0,02$ .



оценку  $D_B = 1,51 \pm 0,02$ . Если положить  $a = 1$ , т.е. сделать минимальную длину клетки равной типичной длине шага, получим  $D_B = 1,03 \pm 0,02$  (рис. 10.1, б).

Отчего возникает это различие? Пусть длительность рассматриваемого периода равна  $T$ . Тогда для того, чтобы покрыть ось времени, нужно  $T/b\tau$  отрезков длиной  $b\tau$ . В пределах каждого отрезка диапазон изменения функции имеет порядок величины  $\Delta B_H(b\tau) = b^H \Delta B_H(\tau)$ ; чтобы покрыть такой размах, необходимо взять  $b^H \Delta B_H(\tau)/ba$  рядов клеток высотой  $ba$  каждая. Итак, для покрытия кривой необходимо количество клеток порядка

$$N(b; a, \tau) = \frac{b^H \Delta B_H(\tau)}{ba} \times \frac{T}{b\tau} \sim b^{H-2} \sim b^{-D_B}. \quad (10.3)$$

Отсюда находим соотношение

$$D = 2 - H \text{ для самоаффинных кривых.} \quad (10.4)$$

В этих рассуждениях рассматриваются клетки, размеры которых малы по сравнению как с длительностью процесса  $T$ , так и с диапазоном изменения функции; поэтому соотношение  $D = 2 - H$  справедливо, когда структура кривой, описывающей фрактальную функцию, исследуется с высоким разрешением, т.е. в локальном пределе. Поскольку для гауссова броуновского движения с независимыми шагами  $H = 1/2$ , мы ожидаем для него  $D = 1,5$ , что согласуется с результатом, приведенным

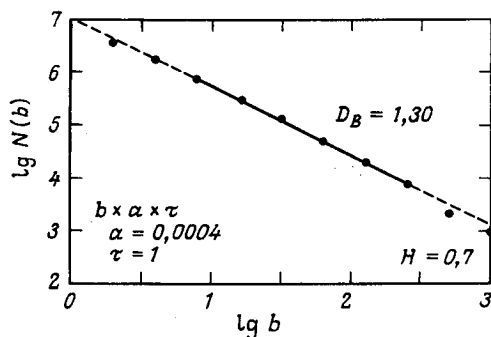


РИС. 10.2. Число ячеек  $N(b; a, \tau)$  размера  $b \times (4 \cdot 10^{-4}, 1)$  как функция масштаба ячеек  $b$  для графика  $B_H(t)$  фрактальной броуновской функции с  $H = 0,7$  при учете 2500 шагов. Прямая — аппроксимация с  $D_B \sim 1,30 \pm 0,02$ .

на рис. 10.1, а. И для фрактальной броуновской функции с  $H = 0,7$ , глядя на рис. 10.2, мы убеждаемся в справедливости соотношения (10.4).

Эти рассуждения неприменимы, когда для покрытия кривой используются клетки, размер которых не мал по сравнению с размахом кривой. В частности, если выбрать величину  $a$  порядка характерной длины шага  $a = \sqrt{\langle \xi^2 \rangle} = 1$ , то на каждом временном отрезке длительностью  $bt$  для покрытия кривой размахом  $\Delta B_H(bt)$  требуется всего 1 ряд клеток и мы получаем

$$N(b; a, \tau) \sim 1 \times \frac{T}{bt} \sim b^{-1}. \quad (10.5)$$

Теперь размерность по покрытию равна  $D_B = 1$ . В точности такой же результат получился на рис. 10.1, б, где также  $a = 1$ . Заметим, что если продолжать увеличение размера клетки  $b$ , то мы всегда будем получать это предельное значение. Увеличивая значение  $b$ , мы рано или поздно получаем клетки такого размера, что одна клетка может покрыть весь диапазон изменения  $B_H$  на конечном интервале времени  $bt$ . Теперь увеличим длительность процесса от  $T$  до  $nT$ . Число клеток, необходимых для покрытия всей кривой, увеличится пропорционально  $n$ , откуда следует, что  $D = 1$ . Глобальная фрактальная размерность самоаффинной кривой равна  $D = 1$ , т.е. самоаффинные кривые нефрактальны в глобальном смысле.

Мы пришли к выводу, что при анализе самоаффинных фрактальных кривых следует различать *локальную* фрактальную размерность  $D = 2 - H$  и *глобальную* фрактальную размерность  $D = 1$  [136, 137, 213].

Еще один вид размерности, которую можно вычислить непосредственно, — *внутренняя размерность*, получаемая, когда для измерения длины кривой вдоль нее укладывается эталон или линейка длиной  $\delta$ . В случае самоподобных фрактальных кривых, подобных береговым линиям, мы ожидаем получить длину порядка

$$L \sim \delta^{1-D}. \quad (10.6)$$

Однако вряд ли разумно вводить линейку, размерность которой совпа-

дает с размерностями *времени*, когда она укладывается вдоль оси  $t$ , и *длины*, когда она ориентирована вдоль оси  $x$ . Между тем именно такие свойства требуются в случае самоаффинных кривых. Впрочем, график самоаффинной функции можно перенести на миллиметровку и на ней измерять длину кривой. Выбрав линейку длиной  $\delta$ , расположенную так, чтобы она покрывала временной шаг длительностью  $b\tau$ , мы получим следующий вклад в общую длину кривой:

$$\delta = (b^2\tau^2 + b^{2H}[\Delta B_H(\tau)/a]^2)^{1/2}. \quad (10.7)$$

Если выбрать достаточно сильное увеличение вдоль оси  $x$ , т. е. использовать достаточно малое  $a$ , то второе слагаемое под квадратным корнем станет преобладающим и мы получаем  $\delta \sim b^H$ . Число таких отрезков вдоль оси времени равно  $T/b\tau \sim b^{-1} \sim \delta^{-1/H}$ , и мы получаем общую длину

$$L \sim \delta^{1-1/H} \sim \delta^{1-D_D}. \quad (10.8)$$

Итак, в локальном пределе, когда растягивается масштаб оси  $x$ , мы получили *внутреннюю размерность* равной  $D_D = 1/H$ . Если, однако, растягивать ось времени так, что на миллиметровке становятся заметными флуктуации  $X(t)$ , преобладающим становится первое слагаемое под квадратным корнем, и мы получаем  $\delta \sim b$ . Полная длина окажется равной  $L \sim \delta \times T/b \sim \delta^0$ , и поэтому  $D = 1$ . И вновь *глобальная* размерность равна  $D = 1$ , в то время как *локальная* размерность *фрактальна* и равна  $D = 1/H$ . Иногда эту последнюю величину называют *скрытой* фрактальной размерностью [135, 213], она связана с фрактальной размерностью *следа* броуновской частицы.

Сведения о разных видах фрактальной размерности собраны в табл. 10.1.

Таблица 10.1. Размерность фрактальной броуновской функции

| Размерность          |       | Самоподобная кривая     | Самоаффинная кривая |            |
|----------------------|-------|-------------------------|---------------------|------------|
|                      |       |                         | локальная           | глобальная |
| Хаусдорфа            | $D$   | $1/H$                   | $2 - H$             | —          |
| клеточная            | $D_B$ | $1/H$                   | $2 - H$             | 1          |
| внутренняя           | $D_D$ | —                       | $1/H$               | 1          |
| случайного блуждания | $D_w$ | $1/H$                   | —                   | —          |
| подобия              | $D_s$ | $\ln N / \ln 1/r = 1/H$ | —                   | —          |

## 10.1. Стратегия смелой игры

Интересный пример сингулярной самоаффинной функции, связанной с теорией игр, обсуждал Биллингсли [24], популярно изложивший идеи Дьюбинса и Сейвиджа [52]. Для начала рассмотрим такую задачу: игрок приходит в казино с суммой 900 долларов и желанием (или надеждой)

увеличить ее до 1000 долларов. На каждый запуск рулетки он ставит по 1 доллару, причем каждый раз вероятность выиграть 1 доллар равна  $p$ , а вероятность проигрыша 1 доллара равна  $q = 1 - p$ . Стратегия этого игрока состоит в том, чтобы играть либо до увеличения своего состояния до 1000 долларов, либо до разорения. Как мы увидим, эта стратегия, которую я назову *робкой игрой*, не самая удачная, и гораздо более предпочтительна стратегия *смелой игры*, определяемая ниже.

При робкой игре вероятность успеха  $M_T(x)$ , т. е. вероятность достижения цели  $G = 1000$  долларов при начальном капитале  $C = 900$  долларов =  $xG$ , равна (см., например, [65])

$$M_T(x) = \begin{cases} x & \text{при } p = q = \frac{1}{2}, \\ \frac{(q/p)^{xG} - 1}{(q/p)^G - 1} \approx \left(\frac{p}{q}\right)^{(1-x)G} & \text{при } p \leq \frac{1}{2} \leq q. \end{cases} \quad (10.9)$$

В нашем случае применимо последнее приближенное равенство, поскольку  $q/p > 1$ , а  $C$  и  $G$  — большие числа. Так как размер ставки мал по сравнению с расстоянием до цели, в хорошем приближении можно считать, что капитал игрока увеличивается и уменьшается по закону случайного блуждания. При абсолютно честной игре (равных шансах) это просто процесс несмещенного случайного блуждания и у игрока вполне разумный шанс выиграть:  $M_T(x = 0,9, p = 0,5) = 0,9$ . Но ни в одном из существующих казино не ведется абсолютно честная игра. Из 38 полей обычной рулетки 18 полей красные, 18 черные, а 2 — зеленые; поэтому  $p = 18/38$ . Для игрока, который ставит на красное, вероятность успешно увеличить свой капитал от 900 до 1000 долларов, ставя по 1 доллару на каждый запуск рулетки, составляет всего лишь 0,00003.

Предположим, что оптимизм игрока настолько велик, что он надеется превратить начальный капитал 100 долларов в сумму 20 000 долларов прежде, чем останется без денег. Если  $p = 0,5$ , его шанс составляет 0,005, но при  $p = 18/38$  вероятность такого выигрыша составляет всего лишь  $3 \cdot 10^{-911}$ . Нужно быть отчаянным оптимистом, чтобы в таких условиях надеяться на выигрыш. Шансы добиться успеха совершенно ничтожны. Однако ничто не заставляет игрока ставить только по 1 доллару. Предположим, что он ставит по 10 долларов. Тогда его начальный капитал состоит из 10 десятидолларовых банкнот, а цель заключается в увеличении его до 2000 десятидолларовых банкнот. Это соответствует значениям  $G = 2000$  и  $C = 10$  в соотношении (10.9). Вероятность успеха тогда увеличивается от  $3 \cdot 10^{-911}$  до примерно  $(p/q)^{2000-10} \approx 10^{-91}$ . Такая стратегия увеличения ставки неизмеримо увеличивает шансы выигрыша, но тем не менее вероятность успеха остается безнадежно мала.

Большие ставки увеличивают вероятность успеха игры. Это и определяет стратегию смелой игры (см., например, [24]): «При каждом запуске рулетки игрок ставит все свое состояние, если оно не превышает

половины желаемой суммы, в противном случае его ставка равна разности между желаемой и имеющейся суммами». Смелая игра делает максимальной вероятность достижения цели, именно когда  $p \leq 1/2$ . При  $p = 18/38$  вероятность разбогатеть до  $G = 20\,000$  долларов, начав со 100 долларов, равна 0,003. Как видим, такая стратегия много лучше робкой игры, которую мы обсуждали выше.

Для анализа смелой игры удобно перейти к другому масштабу. Пусть состояние игрока  $x$  заключено между 0 и 1, а желаемая сумма равна 1. Обозначим через  $M(x)$  вероятность успеха (при смелой игре) при начальном капитале  $x$ . Тогда стратегию смелой игры можно описать следующим образом. Предположим, что состояние игрока заключено в пределах  $0 \leq x \leq 1/2$  и он ставит сумму  $x$ . Если ему суждено увеличить состояние до 1, то он должен выиграть первую ставку (с вероятностью  $p$ ), а затем с новым капиталом  $x + x = 2x$  продвигаться к окончательному успеху (с вероятностью  $M(2x)$ ). Произведение  $pM(2x)$  и есть вероятность выигрыша первой ставки и дальнейшего успеха. Таким образом, при начале с  $x \leq 1/2$  вероятность достижения цели определяется первым из двух равенств:

$$M(x) = pM(2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (10.10)$$

$$M(x) = p + (1 - p)M(2x - 1) \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Теперь предположим, что игрок начинает игру, имея состояние в пределах  $1/2 \leq x \leq 1$ , так что ставит сумму  $1 - x$ . Он может выиграть уже при первом запуске рулетки (с вероятностью  $p$ ). Возможен также первый проигрыш (с вероятностью  $q = 1 - p$ ), и тогда дальнейшая игра будет происходить с исходным капиталом  $x - (1 - x) = 2x - 1$  (вероят-

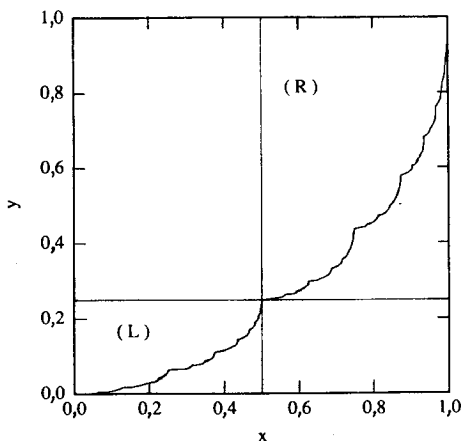


РИС. 10.3. Пара аффинных преобразований координат  $L$  и  $R$ , описываемых уравнениями (10.10), которые отображают единичный квадрат на прямоугольники. Эта пара преобразований дает самоаффинную кривую  $y = M(x)$ , показанную здесь при  $p = 0,25$ .

ность успеха  $M(2x - 1)$ ). Поэтому при  $1/2 \leq x \leq 1$  вероятность достижения цели определяется вторым из пары равенств (10.10).

Эти уравнения совпадают с уравнениями (6.7), описывающими меру мультипликативного процесса, который обсуждался в разд. 6.2. Пример вероятности  $M(x)$  выигрыша при смелой игре представлен на рис. 6.3 и рис. 10.3 как функция  $x$  для  $p = 0,25$ . Эта вероятность (мера) является растущей функцией  $x$ , причем эта функция сингулярна в том смысле, что почти всюду ее наклон равен нулю. Вероятность достижения цели увеличивается только на множестве точек, для которого мера Лебега равна нулю и левая производная  $M(x)$  равна  $+\infty$ , а правая производная равна нулю (ясное обсуждение можно найти в [24]). Длина кривой  $M(x)$  равна  $L = 2$ , поэтому это не фрактальная кривая, а фрактальная мера (см. обсуждения в разд. 6.2).

Уравнения (10.10) означают инвариантность меры  $M(x)$  по отношению к аффинным преобразованиям координат. Эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} L: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}x, py\right), \\ R: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}, p\right) + \left(\frac{1}{2}, (1-p)y\right) \end{aligned} \tag{10.11}$$

и отображают кривую  $y = M(x)$  на себя — кривая самоаффинна. Этих преобразований два. Преобразование  $L$  отображает единичный квадрат в прямоугольник, помеченный буквой  $l$  на рис. 10.3. Оно просто уменьшает масштаб оси  $x$  в 2 раза, а масштаб оси  $y$  уменьшается множителем  $p$ .  $R$ -преобразование также укорачивает ось  $x$  вдвое, но масштаб оси  $y$  уменьшается множителем  $1 - p$ , а не  $p$ . Кроме того,  $R$ -преобразование переносит сжатый единичный квадрат, и в итоге он отображается на прямоугольник, помеченный на рис. 10.3 буквой  $R$ .

Мандельброт [136, 137] обсуждает многие свойства самоаффинных фрактальных кривых, которые генерируются семействами аффинных преобразований. Он вводит класс *рекуррентно* самоаффинных фрактальных кривых, для которых справедливы соотношения, приведенные в табл. 10.1. Он же обсуждает дополнительные виды размерности, с помощью которых можно описывать самоаффинные фрактальные кривые.

# Статистика высоты волн

На морские волны не только приятно смотреть — их надо знать. Они важны для любой деятельности на море и могут оказаться жизненно важными, большая доля потерь человеческих жизней и кораблей связана с крупными штормовыми волнами. Подробные наблюдения высоты волн, их периода и других параметров проводятся во многих местах по всему миру.

Здесь мы проанализируем данные измерений в Тромсёфлакет, предоставленные нам Норвежским институтом метеорологии. Параметры волн в период 1980–1983 гг. получены с помощью поплавков, регистрирующих уровень водной поверхности. Высота волн регистрировалась сериями по 2048 измерений через каждые 3 ч с полусекундным интервалом, т. е. всего в течение примерно 17 мин. Высота волны определялась как разность самого высокого и самого низкого уровней между двумя последовательными пересечениями нулевого уровня воды снизу вверх. Нулевой уровень определялся как текущий средний уровень воды.

Этот обширный набор данных сначала изучался обычными, классическими методами. Например, вычислялась *высота характерной волны*  $h_s$ , определяемая как среднее по 1/3 самых крупных волн, зарегистрированных за 17-минутный интервал наблюдений. Максимальная высота волны, встречающаяся за этот период,  $h_{\text{макс}}$ , примерно равна  $1,8 h_s$ . Ниже мы будем обсуждать именно данные по  $h_s$ , поскольку эта величина представляет собой робастную меру высоты волн. Дело в том, что волна максимальной высоты, вполне вероятно, проходит не во время периода наблюдений, который составляет всего лишь 9,4% полного времени. В общем максимальную высоту волн можно оценить как  $1,8 h_s$ . Кроме этих параметров вычислялись и другие характеристики волн, такие, как средний период  $T_s$  одной трети самых высоких волн, средний период  $T_z$  между пересечениями нулевого уровня и энергетический спектр для 2048 измерений.

Особенно интересна возможность предсказания «девятого вала», т. е. ответ на вопрос: «Каким образом можно получить наилучшую оценку максимальной высоты волны, исходя из ограниченного набора измерений высоты волн?» Этому вопросу посвящено множество исследований (см., например, [66]), мы даже не будем пытаться представить здесь их обзор. Такие предсказания должны основываться на понимании статистики высот волн, а она может быть *фрактальной*. Поэтому мы

проанализировали данные о высоте волн, рассматривая график  $h_s(t)$  как фрактальную кривую, подобную графику фрактального броуновского движения.

### 11.1. Метод $R/S$ для наблюдений $h_s$

На рис. 11.1 показаны наибольшие значимые высоты волнения  $h_s$  на каждый день в 1980 г. Максимальное значение  $h_s$  равно 10,7 м, а самая сильная волна имела высоту  $h_{\text{макс}}$  около 19 м. Существенной особенностью этих данных являются сезонные вариации.

Для интерпретации наблюдаемой высоты волн как шагов броуновского движения мы устанавливаем соответствие  $h_s(t) \rightarrow \xi(t)$  и переходим к обозначениям, введенным в предыдущей главе. Теперь можно, не задумываясь, двигаться дальше и вычислить  $R/S$  как функцию запаздывания  $\tau$  для волнения моря в Тромсёфлакет. Как видно из рис. 11.2, мы получаем очень хорошее согласие с *законом Херста*  $R(\tau)/S \sim \tau^H$  с показателем Херста  $H = 0,87 \pm 0,01$ .

Это довольно высокое значение показателя Херста указывает на то, что статистика высоты волн *сильно отклоняется от гауссовой*. И поскольку наблюдаемое значение  $H$  существенно превышает  $1/2$ , напрашивается вывод, что высота волнения обнаруживает персистентность.

Однако более внимательное изучение рис. 11.2 показывает, что при запаздываниях  $\tau$  около 1 года кривая имеет заметную структуру. Не вызывает сомнения, что эта особенность связана с сезонными вариациями. Присутствие в статистике периодических компонент осложняет ситуацию, и для исключения периодичностей нет общих правил. Мандельброт и Уоллис [143] рассматривали  $R/S$ -статистику солнечных пятен, которые, как хорошо известно, обнаруживают 11-летний цикл активности. Их результаты, показанные на рис. 11.3, приводят к кажущемуся значению показателя Херста  $H = 0,93$ , который сильно превышает  $1/2$ .

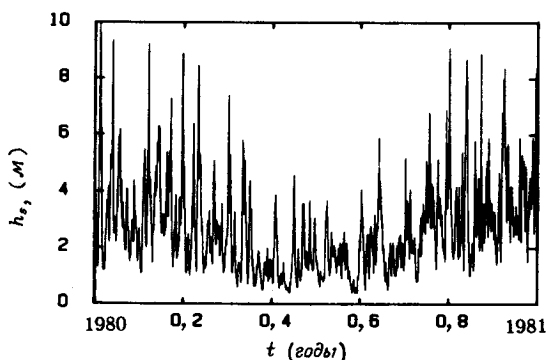


РИС. 11.1. Максимальная высота характерной волны  $h_s$  в Тромсёфлакет по наблюдениям, проводившимся каждые 3 ч в течение 1980 г. (Норвежский институт метеорологии).

РИС. 11.2. Отношение  $R/S$  как функция запаздывания  $\tau$  для случайного процесса, в котором высота характерной волны  $h_c$  в Тромсёфлакет рассматривается как аналог случайного процесса  $\{\xi_t\}$ . Линией показана аппроксимация данных законом Херста  $R/S \sim \tau^H$  при  $H = 0,87 \pm 0,01$  [68].

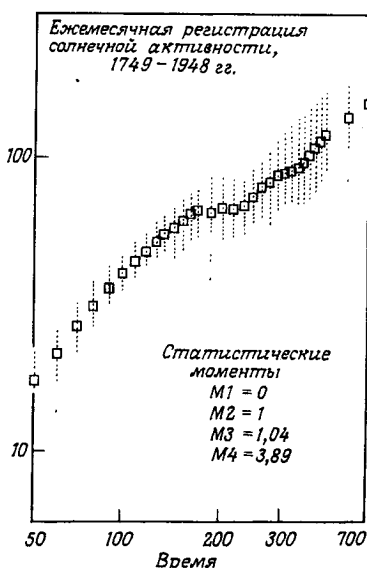
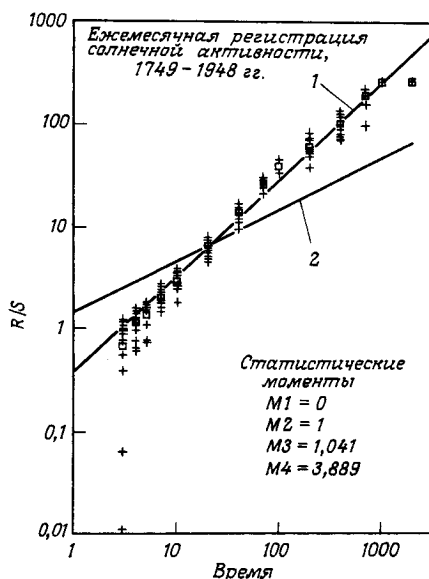
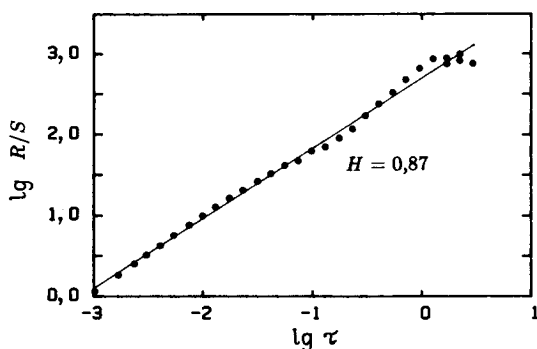


РИС. 11.3. Отношение  $R/S$  в зависимости от запаздывания  $\tau$  для ежемесячных измерений чисел Вольфа, характеризующих солнечную активность. На более детальном графике, показанном справа, ясно заметно влияние 11-летнего цикла [143].

## 11.2. $R/S$ для данных, очищенных от сезонных вариаций

Вопрос о том, как оценить влияние периодических компонент на получаемое значение показателя Херста, мало обсуждался в научной литературе [147]. Поэтому мы очистили данные наблюдений от сезонных вариаций. В результате такой поправки мы можем представить наблюдательные данные в виде временных рядов, подобных показанному на рис. 11.4.

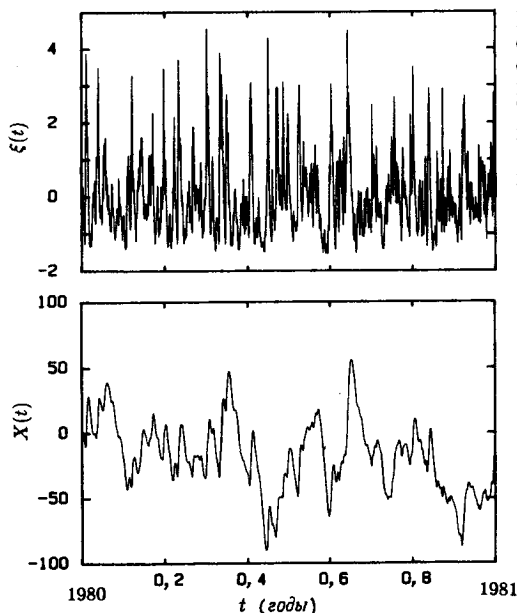


РИС. 11.4. Нормированная высота волн  $\xi(t)$ , поправленная на сезонные вариации, как функция времени по наблюдениям  $h_s$  в Тромсёфлакет. Нижний рисунок показывает сумму  $X(t) = \sum_{u=0}^t \xi(u)$  как функцию времени [68].

Нормированная высота волн имеет нулевое среднее значение  $\langle \xi \rangle = 0$  и единичную дисперсию  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ , так что рис. 11.4 можно непосредственно сравнивать с фрактальным шумом и фрактальными функциями, представленными на рис. 9.4 и 9.5. Из графика  $X(t)$  на рис. 11.4 явствует, что отклонения  $X$  велики по сравнению с шумом. Результаты расчета  $R/S$  по очищенным высотам волн, показанные на рис. 11.5, теперь обнаруживают две области с разными свойствами. На временах, не превышающих примерно 10 дней, мы сталкиваемся с *персистентной статистикой* с  $H = 0,92 \pm 0,02$ . Напротив, при запаздываниях, превышающих  $\tau = 20$  дней, мы находим  $H = 0,52 \pm 0,02$ , что согласуется со статистической *независимостью* значений  $X$ .

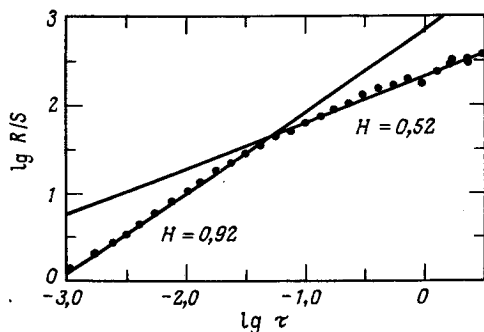
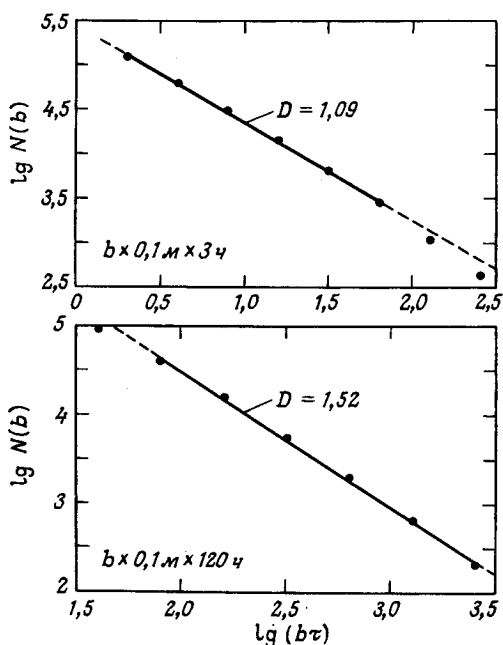


РИС. 11.5. Отношение  $R/S$  как функция запаздывания  $\tau$  (в годах) для процесса, в котором поправленные на сезонные вариации и отнормированные высоты характерной волны в Тромсёфлакет рассматриваются как шаги (обобщенного) случайного блуждания. Линиями показаны аппроксимации законом Херста  $R/S \sim \tau^H$ . При  $\tau < 10$  дней аппроксимация дает  $H = 0,92 \pm 0,02$ , а при  $\tau > 20$  дней мы получили  $H = 0,52 \pm 0,02$  [143].

РИС. 11.6. Число ячеек  $N(b)$  размера  $b \times (a, \tau)$  как функция масштаба ячейки  $b$  для суммы нормированных высот волн  $X(t)$ . Использованы измерения в Тромсёфлакет в период 1980–1983 гг.; выбрано по одному измерению на каждые 3 ч. На верхнем графике минимальный размер ячейки равен  $a = 0,1$  м и  $\tau = 3$  ч. Прямая соответствует аппроксимации  $N \sim b^{-D}$  при  $D = 1,09 \pm 0,02$ . На нижнем графике также  $a = 0,1$  м, но размер ячейки по времени равен  $\tau = 120$  ч. Аппроксимация дает  $D = 1,52 \pm 0,03$  [143].



При  $\tau$  около 1 года по-прежнему имеется небольшая аномалия, но она гораздо слабее, чем раньше. Указания на определенно персистентное поведение при  $\tau < 10$  дней не изменились по сравнению с зависимостью  $R/S$  для исходных данных с рис. 11.2, для которых  $H = 0,94 \pm 0,02$  в этом диапазоне. Это говорит о том, что метод  $R/S$  действительно приводит к робастной мере статистики временных рядов, как уже указывалось в работе [147].

В гл. 10 мы показали, как фрактальную размерность самоаффинной кривой, подобной  $X(t)$  на рис. 11.4, можно оценить методом покрытия при условии, что мы будем иметь в виду возможную зависимость результата от размера и формы исходных клеток. На рис. 11.6 показан результат применения метода покрытия к данным о высоте волн.

Используя малые клетки, мы измеряем локальную фрактальную размерность. Наименьший размер клетки, которую можно использовать с нашими данными, определяется разрешением наблюдений, т.е.  $a = 0,1$  м и  $\tau = 3$  ч. При клетках такого размера мы получили  $D = 1,09 \pm 0,02$ , что действительно удовлетворяет соотношению (10.4), где  $D = 2 - H$  при показателе Херста  $H = 0,92$ , найденном для  $\tau < 10$  дней. С другой стороны, увеличивая размер клеток до  $\tau = 120$  ч вдоль оси времени, мы получаем  $D = 1,52 \pm 0,03$ , что совпадает со значением, ожидаемым для случайного процесса с независимыми приращениями. И

вновь выполняется соотношение  $D = 2 - H$ , где  $H = 0,52$  получено для  $\tau > 20$  дней.

Важно помнить, что переход от  $D = 1,09$  к  $D = 1,52$  объясняется *не* переходом от локальной к глобальной фрактальной размерности самоаффинной кривой. Обе фрактальные размерности были найдены с использованием самого высокого разрешения по высоте волны, допускаемого имеющимися данными (0,1 м), и обе они являются *локальными* размерностями. Наблюдаемая перестройка объясняется переходом от персистентного к случайному поведению, который проявляется в локальных значениях  $D$ .

Можно заключить, что статистика высоты волн персистентна с весьма большим значением показателя Херста  $H = 0,92 \pm 0,02$ ; на это указывают как метод  $R/S$ , так и оценка размерности по покрытию фрактального графика процесса. На масштабе времени около 2 недель персистентность сменяется случайным процессом с независимыми значениями. Следует также заметить, что это *не* означает, что нормированная высота волн  $\xi$  в этом диапазоне представляет собой *гауссов* процесс с независимыми значениями. Это определено не так, поскольку распределение вероятностей несимметрично и не допускает отрицательных значений высоты волн. Однако, как отмечают Мандельброт и Уоллис [147], даже очень сильно негауссовы случайные процессы с независимыми значениями, имеющие лог-нормальное, гиперболическое или гамма-распределение приращений, характеризуются значением  $H = 1/2$  при обработке методом  $R/S$ , который является в сильной степени робастным.

Наши результаты по фрактальной статистике высот морских волн следует учитывать при предсказании высоты самой высокой волны на основе ряда наблюдений высоты волнения. Однако, насколько мы знаем, фрактальная статистика, которая была бы применима для таких предсказаний, до сих пор не построена. Все многообразие статистических следствий фрактальной природы высот волн еще предстоит раскрыть и использовать.

## Соотношение периметра и площади

Для окружностей, квадратов, равносторонних треугольников и других многоугольников отношение периметра к квадратному корню их охватываемой площади

$$\rho = \frac{\text{Периметр}}{(\text{Площадь})^{1/2}}$$

не зависит от размера многоугольника. Отношение  $\rho$  одинаково для каждого семейства замкнутых кривых одинаковой формы. Для окружностей, квадратов и равносторонних треугольников это отношение равно соответственно  $\rho = 2\sqrt{\pi}$ , 4 и  $6/3^{1/4}$ .

Для семейства *подобных* островов различных размеров отношение длины нефрактальной береговой линии любого острова к квадратному корню из его площади не зависит от размера острова. Однако, если береговая линия фрактальна, то ее длина  $L(\delta)$  зависит от длины эталона  $\delta$ , с помощью которого меряется длина и  $L(\delta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Напротив, площадь острова  $A(\delta)$ , измеряемая с помощью его покрытия квадратами площадью  $\delta^2$ , остается конечной при  $\delta \rightarrow 0$ . Как показал Мандельброт, для фрактальных кривых расходящееся отношение  $\rho$  следует заменить в каждом случае следующей модификацией:

$$\rho_D = \frac{(\text{Периметр})^{1/D}}{(\text{Площадь})^{1/2}} = \frac{[L(\delta)]^{1/D}}{[A(\delta)]^{1/2}}. \quad (12.1)$$

Здесь  $D$  – фрактальная размерность береговых линий островов, имеющих подобные очертания. Отношение  $\rho_D$  не зависит от размера острова, но оно зависит от выбора эталона длины.

Соотношение периметра и площади, выраженное равенством (12.1), вытекает из определения фрактальной размерности  $D$ , содержащегося в выражениях (2.3) и (2.4). Это можно усмотреть из сравнения двух подобных островов разной площади, показанных на рис. 12.1. Площадь и длина береговой линии каждого из островов измеряются с помощью эталона, *длина которого  $\delta_i^* = \lambda \sqrt{A_i(\delta)}$  зависит от площади* данного острова. Площадь  $i$ -го острова равна  $A_i(\delta)$ , когда она измеряется эталоном фиксированной длины  $\delta$ , а параметр  $\lambda$  – некоторое произвольно малое число, скажем, 0,0001. Длина береговой линии  $i$ -го острова равна периметру многоугольника, состоящего из  $N_\lambda$  отрезков длины  $\delta^*$ ,

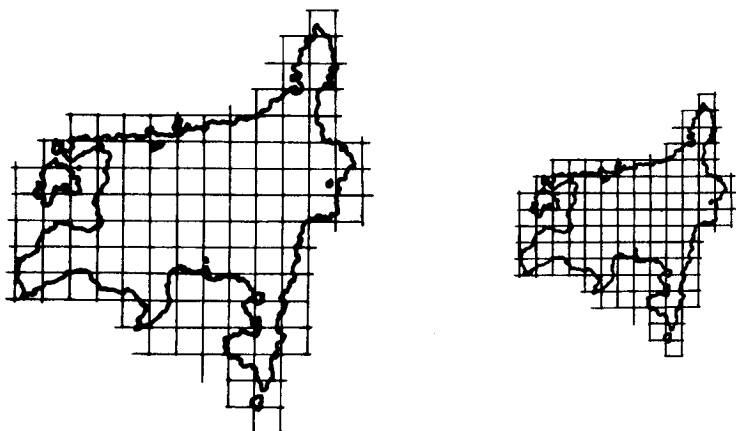


РИС. 12.1. Два подобных острова, обмеряемые с помощью эталона, длина которого зависит от площади острова.

т. е. в этом приближении  $L_i(\delta^*) = N_\lambda \delta_i^*$ . Теперь можно сделать важное замечание: для подобных островов  $N_\lambda$  не зависит от размера острова. Однако из соотношения (2.3) следует, что длина береговой линии  $i$ -го острова равна  $L(\delta) = L_i^0 \delta^{(1-D)} = L_i(\delta^*) (\delta/\delta^*)^{(1-D)}$ . Таким образом, мы приходим к равенству

$$L_i(\delta) = N_\lambda \delta^{(1-D)} \delta^{*D}.$$

Выразим  $\delta^*$  через  $A(\delta)$ ,

$$L_i(\delta) = N_\lambda \lambda^D \delta^{(1-D)} [A_i(\delta)]^{D/2},$$

и получим, что отношение

$$\rho_D(\delta) = \frac{[L_i(\delta)]^{1/D}}{[A_i(\delta)]^{1/2}}$$

не зависит от размера острова. Однако это отношение  $\rho_D(\delta) = N_\lambda^{1/D} \lambda \delta^{(1-D)/D}$  зависит от длины  $\delta$  используемого эталона и принятого значения произвольного множителя  $\lambda$ . Поэтому, несмотря на то что  $\rho_D(\delta)$  связано с формой островов, эта величина включает также произвольные множители, и мы по-прежнему не имеем общей характеристики формы острова. Можно заключить, что острова, очертания которых подобны, удовлетворяют соотношению периметра и площади

$$L(\delta) = C \delta^{(1-D)} [A(\delta)]^{D/2}, \quad (12.2)$$

полученному Мандельбротом. Это соотношение удовлетворяется для любого эталона длины  $\delta$ , достаточно малого, чтобы удовлетворительно обмерять самый малый из островов. Коэффициент пропорциональности  $C = N_\lambda \lambda^D$  зависит от произвольного параметра  $\lambda$ . Соотношение (12.2)

лежит в основе практического определения фрактальной размерности в нескольких интересных случаях, обсуждаемых в последующих разделах.

Чтобы привести пример соотношения периметра и площади, рассмотрим остров, ограниченный квадратичной кривой Кох (см. рис. 2.9). Первичным элементом кривой является квадрат со стороной  $a$ . Генератор кривой при замене каждой ее стороны добавляет малый «полуостров» и вырезает участок «побережья» такого же размера. Поэтому при повторных преобразованиях кривой не меняется охватываемая ею площадь  $A(\delta) = a^2$ . Периметр кривой  $n$ -го порядка,  $L_n = 4 \cdot 8^n \cdot (1/4)^n \cdot a$ , равен длине береговой линии, если она измеряется с помощью эталона длины  $\delta = (1/4)^n a = (1/4)^n \sqrt{A}$ . Поэтому порядок кривой  $n$  можно выразить через ее площадь,  $n = \ln(\delta/\sqrt{A})/\ln(1/4)$ , и мы получаем  $L_\delta = 4 \cdot 8^n \delta = 4\delta^{1-D} A^{D/2}$ . Здесь  $D = 3/2$  есть фрактальная размерность береговой линии острова, ограниченного квадратичной кривой Кох. Итак, такие острова удовлетворяют соотношению *периметра и площади* вида (12.2) с коэффициентом пропорциональности  $C = 4$ .

Другой пример связан с триадной кривой Кох. Здесь под островом будем понимать участок плоскости, заключенный между начальным элементом, т.е. отрезком длины  $a$ , и предельной кривой Кох (см. рис. 2.8). Охватываемая площадь равна  $A = \sqrt{3}a^2/20$ , а полная длина береговой линии  $n$ -го порядка равна  $L_n = a + 4^n \delta$ , если используется эталон длины  $\delta = (1/3)^n a$ . Это приводит к равенству

$$L_\delta = a + a^D \delta^{(1-D)}.$$

Как видим, если пренебречь первым членом в правой части, то получится *соотношение периметра и площади* (12.2). Отброшенный член представляет собой нефрактальный прямой участок границы островов. Этот пример показывает, что соотношение периметра и площади (12.2) может быть справедливо только в пределе малой длины эталона  $\delta$ , когда длина фрактальной части береговой линии преобладает над вкладом любой *регулярной* части береговой линии. Нетрудно построить более сложные примеры, в которых разные участки берега имеют разные фрактальные размерности. В этом случае анализ показывает, что отношение периметра и площади  $\rho_D$  определяется наибольшим значением фрактальной размерности.

### 12.1. Фрактальная размерность облаков

При исследовании геометрии облаков и зон дождя, размеры которых заключены в широком диапазоне от 1 до  $1,2 \cdot 10^6$  км<sup>2</sup>, выяснилось, что периметр облака  $P = L$  связан с его площадью  $A$  соотношением (12.2) с фрактальной размерностью границы облака  $D = 1,35 \pm 0,05$  [116]. Эти результаты воспроизведены на рис. 12.2. Зоны дождя изучались с помощью отцифрованных радарных изображений, полученных с разрешением  $1 \times 1$  км<sup>2</sup>. Радиолокатор принимает микроволновое излучение,

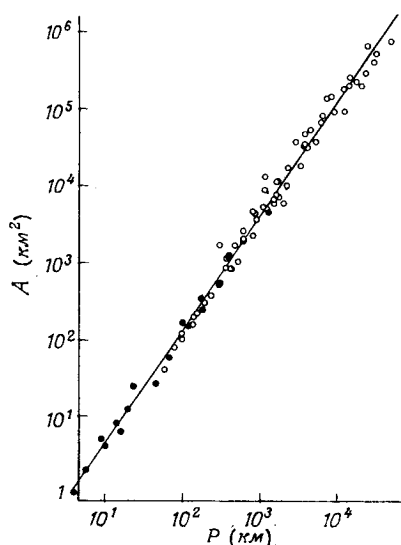


РИС. 12.2. Площадь дождевых и облачных зон, отложенная как функция их периметров. Черными кружками помечены радиолокационные данные о дождевых зонах, светлыми кружками — спутниковые данные об облачных массивах [116].

рассеиваемое преимущественно крупными дождевыми каплями. Зона дождя — это связанное множество элементов изображения, в которых интенсивность осадков превышает 0,2 мм/ч (что соответствует легкому моросящему дождю). Площадь зоны дождя  $A$  равна сумме площадей элементов изображения, составляющих связанное множество, а периметр, обозначаемый  $P$  или  $L$ , определяется числом дождевых элементов изображения, которые соседствуют с элементами без дождевых капель. Кривизна поверхности Земли ограничивает радиолокационные исследования дождевых зон площадью до 40 000 км<sup>2</sup>. Результаты изучения дождевых зон представлены на рис. 12.2 черными точками.

Данные о системах облаков основаны на инфракрасных изображениях облаков над Индийским океаном, наблюдавшихся в узлах квадратной сетки  $4,8 \times 4,8$  км<sup>2</sup>. Изображения были получены геостационарным спутником GOES, предназначенным для исследований окружающей среды. Чтобы избежать эффектов, связанных с изменением размера элемента разрешения изображений, использовались данные наблюдений лишь в относительно слабо искажаемых областях между 20° северной широты и 20° южной широты и в пределах  $\pm 30^\circ$  по долготе от точки поверхности под спутником. Инфракрасный датчик спутника GOES чувствителен в основном к чернотельному излучению, испускаемому облаками и поверхностью Земли. Для облаков, толщина которых превышает примерно 300 м, инфракрасное излучение несет информацию о температуре верхней поверхности облака. Облачные и дождевые массивы физически тесно связаны с тропиками, потому что и те, и другие появляются в областях восходящих конвективных потоков, которые поднимают от поверхности влажный теплый воздух. При адиабати-

ческом расширении этот воздух охлаждается и образует в результате конденсации пара облака и дождевые капли. Эти облака состоят в основном из переохлажденной воды, а не льда. Элементы изображения, в которых температура была ниже  $-10^{\circ}\text{C}$ , считались приходящимися на облака. Таким образом, облачные системы, ограниченные уровнем  $-10^{\circ}\text{C}$ , включают как кучевые, так и перистые облака. Как и ранее, площадь системы облаков определялась подсчетом числа облачных элементов изображения, а длина периметра определялась числом облачных элементов изображения, которые граничат с чистыми элементами. Результаты, полученные для множества различных облачных систем, отмечены на рис. 12.2 светлыми кружками. Следует однако заметить, что для компенсации разницы в разрешении радарных и спутниковых данных периметры спутниковых изображений были увеличены на множитель  $(1 \text{ км}/4,8 \text{ км})^{(1-D)}$ . Этот множитель соответствует множителю  $\delta^{(1-D)}$  в равенстве (12.2).

Самое замечательное свойство результатов, представленных на рис. 12.2, заключается в отсутствии сколько-нибудь заметных выпуклостей и изгибов в диапазоне, охватывающем шесть порядков величины по площади. Данные, представленные на рис. 12.2, относятся к облакам различной макроскопической формы, и тем не менее все они укладываются на одну прямую на графике площадь–периметр. Если выбрать другое значение температуры, определяющее границу облака, то площади и периметры меняются, но так, что соответствующие точки смещаются, оставаясь на той же линии. Это соотношение площади и периметра приводит к оценке фрактальной размерности границ облаков  $D = 1,35 \pm 0,05$ . Важно понимать, что, как следует из этих результатов, в диапазоне от 1 до 10 000 км нет каких-либо характерных масштабов длины  $\xi$ , связанных с физикой облаков. Этот результат заслуживает внимания потому, что априори можно было бы ожидать появления масштаба  $\xi \sim 10 \text{ км}$ –толщины плотной атмосферы. Кроме того, измерения скорости ветра в чистой атмосфере доплеровскими радарными не обнаруживают выделенных масштабов длины в диапазоне от 4 до 400 км, а доплеровские измерения спектра скоростей ветра в зонах дождя не обнаруживают каких-либо выделенных масштабов в диапазоне от 1,6 до 25 км. Это приводит к заключению, что в атмосфере отсутствуют внутренние пространственные масштабы и ее можно наилучшим образом описать как фрактальную–облака, например, представляются *самоаффинными фракталами*.

Фрактальная форма градовых облаков изучалась в работе [188]. Эти исключительно мощные конвективные облака наблюдались с помощью радиолокатора, и для них было найдено соотношение периметра и площади, показанное на рис. 12.3. Каждая точка на этом рисунке соответствует определенному моменту времени (с интервалом 1 мин) в процессе эволюции облака.

Из рисунка ясно видно, что наклон зависимости меняется при значении периметра  $P_0$ , отмеченном штрихпунктирной линией. Это

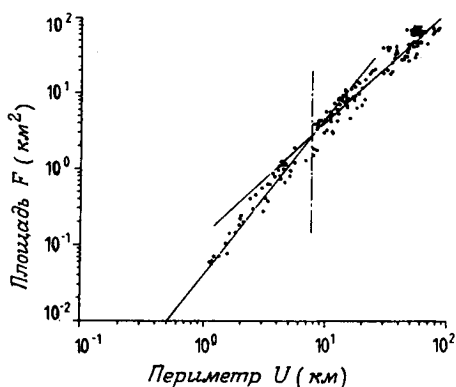


РИС. 12.3. Соотношение периметра и площади градовых облаков, отложенное в двойном логарифмическом масштабе. Каждая точка соответствует определенному моменту времени в процессе эволюции облака. По линейным аппроксимациям (показаны сплошными линиями) были найдены фрактальные размерности (12.3) для 24 различных градовых облаков [188].

значение периметра соответствует диаметру  $d_0 \simeq P_0/\pi = 3 \pm 1$  км. Линейные аппроксимации наблюдаемого соотношения периметра и площади приводят к оценкам

$$\begin{aligned} D &= 1,36 \pm 0,1 && \text{при } P > P_0, \\ D &= 1,0 \pm 0,1 && \text{при } P < P_0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

При значениях периметра, превышающих  $P_0$ , эти наблюдения приводят к тому же значению фрактальной размерности границы облака, что и для менее мощных облаков (см. рис. 12.2). Напротив, для пространственных масштабов, меньших примерно 3 км, границы облаков с крайне интенсивной конвекцией оказываются нефрактальными.

*Теория фрактальной размерности облаков.* Фрактальная размерность границ облаков была рассчитана Хентшелем и Прокаччей [88] в рамках предложенной ими теории относительной турбулентной диффузии. Согласно этим расчетам, размерность заключена в пределах  $1,37 < D < 1,41$ . Представляет интерес структура этой теории. Основная проблема заключается в том, чтобы объяснить, каким образом облако меняет со временем свою общую форму, сохраняя универсальную<sup>1)</sup> фрактальную структуру. Не вызывает сомнений, что временное развитие облаков происходит не универсальным образом. Согласно Хентшелю и Прокачче, решение этой проблемы связано с тонким взаимодействием пространственных и временных масштабов в развитой однородной турбулентности. Еще раньше ими получен аналогичный результат, согласно которому их модель фрактально однородной турбулентности приводит к фрактальной размерности  $D_\mu$  турбулентного поля, заключенной в пределах  $2,50 < D_\mu < 2,75$  [86].

<sup>1)</sup> Здесь слово «универсальный» означает, что фрактальная структура не зависит от начальных условий, таких как размер, высота или другие параметры, описывающие начальное состояние облака.

Хентшель и Прокачча предлагают простую модель облака. Состояние атмосферы определяется заданием таких параметров, как температура, давление, содержание водяного пара и размер капель, а также поля турбулентных скоростей. При радарных наблюдениях критерием различия между облаком и чистой атмосферой служит либо размер капель, либо температура. В рассматриваемой теории какой-нибудь параметр, например локальная температура  $\theta$ , рассматривается как переменная, переносимая турбулентным полем скорости, но предполагается, что температура не влияет на скорость. С тем же успехом в качестве такой переменной можно выбрать радиус капель. Состояние атмосферы определяется заданием функции  $\theta(x, y, z)$ , и поэтому эта модель пренебрегает физикой облаков, т.е. связями таких параметров, как температура, влажность и размер капель, учитывая лишь одну, так называемую *пассивную скалярную переменную* — например,  $\theta$  — и турбулентное поле скоростей ветра, переносящее ее. В данной точке пространства  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  функция  $\theta(x, y, z)$  имеет некоторое определенное значение и, таким образом, можно рассматривать точку  $(\theta, x, y, z)$  в  $E = 4$ -мерном пространстве. Множество точек  $\mathcal{S} = \{(\theta, x, y, z)\}$  в четырехмерном пространстве является *фрактальным*; его размерность равна  $D_\theta = 4 - H$ , где коразмерность равна  $H$ . Определяя облако условием  $\theta \leq \theta_0$ , мы выделяем некоторую область в четырехмерном пространстве, описывающем атмосферу, фрактальная размерность которой тоже равна  $D_\theta$ . Однако поверхность облака, определяемая условием  $\theta(x, y, z) = \theta_0$ , представляет собой множество точек  $\mathcal{C}$  в обычном  $E = 3$ -мерном пространстве. Это множество является пересечением множества  $\mathcal{S}$  и множества  $\mathcal{S}_0 = \{(\theta, x, y, z)\}$ , фрактальная размерность которого  $D_0 = 3$ . Формально мы имеем  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_0$ . Фрактальная размерность поверхности облака  $\mathcal{C}$  равна  $D = 3 - H$ . Это следует из эмпирического правила, сформулированного Мандельбротом [134, с. 365]: коразмерность пересечения двух независимых множеств в  $E$ -пространстве почти всегда <sup>1)</sup> равна сумме их коразмерностей. В нашем случае это дает

$$(4 - D) = (4 - D_\theta) + (4 - D_0)$$

и, следовательно,  $(4 - D) = H + 1$ , или  $D = 3 - H$ , что и утверждалось выше. Пересекая в трехмерном пространстве поверхность облака плоскостью, параллельной поверхности Земли, мы получаем множество точек  $\mathcal{P}$  — границу, размерность которой по эмпирическому правилу Мандельброта равна  $D_P = 2 - H$ . Итак, если удастся оценить коразмерность  $H$ , то мы получим и оценку фрактальной размерности обла-

<sup>1)</sup> Простой контрпример — пересечение основания (исходного элемента) и триадной кривой Кох. Это пересечение является канторовским множеством фрактальной размерности  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,63 \dots$ , в то время как эмпирическое правило дает  $(2 - D_\cap) = (2 - \ln 4 / \ln 3) + (2 - 1)$ , т.е.  $D_\cap = (\ln 4 / \ln 3) - 1 = 0,26 \dots$

ков. Результаты радиолокационных наблюдений показывают, что  $H = 65 \pm 0,05$  для облаков и зон дождя.

Согласно оценке Хентшеля и Прокаччи [88], фрактальная размерность границы облака (вернее, линии пересечения поверхности облака с плоскостью) заключена в пределах

$$1,37 < D_p < 1,41,$$

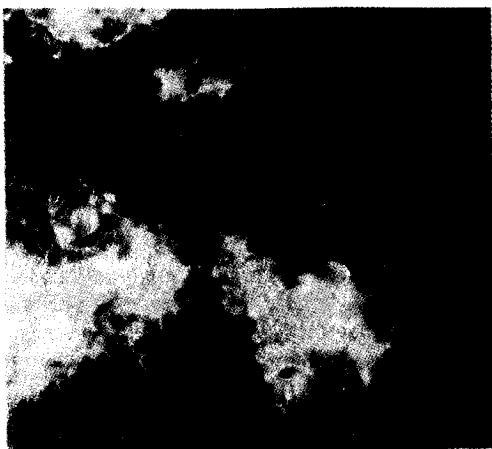
что прекрасно согласуется с результатами наблюдений [116]. Нам кажется замечательным, что настолько упрощенная модель атмосферы способна привести к оценке фрактальной размерности облаков, которая согласуется с наблюдениями. Можно надеяться, что и в дальнейшем другие примеры наблюдательных оценок фрактальных размерностей будут находить подтверждение в физических моделях соответствующих систем.

Отметим, что облако в четырехмерном пространстве не самоподобно, а самоаффинно. Однако поверхность облака в трехмерном пространстве может быть и самоподобной. Эту особенность подчеркивал Фосс [213, 214], и ему удалось построить действительно замечательные изображения фрактальных облаков такого изобразительного качества, которое достигалось прежде только художниками.

Лавджой и Мандельброт [117] предложили самоподобную фрактальную модель зон дождя. В этой модели дождевая зона рассматривается как суперпозиция отдельных элементов. Каждый элемент занимает площадь  $A$  и привносит в полную интенсивность дождя вклад  $\Delta R = \pm A^H$ . Этот вклад может как увеличивать, так и уменьшать случайным образом полную интенсивность осадков на площади  $A$ . Предполагается, что площадь описывается *гиперболическим* распределением вероятности  $\text{Pr}(A > a) \sim a^{-1}$ . На рис. 12.4 показана модель с  $H = 0,6$ . Получающиеся изображения выглядят вполне реалистичными. Мы также строили изображения облаков с помощью другого алгоритма, обсуждаемого в гл. 13.

Лавджой и Шертцер [118] заметили, что атмосфера стратифицирована и облака не самоподобны, а самоаффинны, поскольку вертикальное направление неравноправно с горизонтальным. Кроме того, сила Кориолиса приводит к закрутке облаков. В этой же работе обобщена модель фрактальной суперпозиции элементов — элементы считаются распределенными не однородно, а на фрактальном множестве точек пространства. И вновь получают реалистичные изображения облаков. Как заметил Мандельброт [137], самоаффинная функция  $\theta(x, y, z)$  преобразуется по автомодельному закону в горизонтальных направлениях  $x, y$  при преобразовании  $(x, y) \rightarrow (rx, ry)$  и имеет другие законы подобия в направлениях  $z$  и  $\theta$ , с коэффициентами подобия  $r^G$  и  $r^{GH}$  соответственно. Здесь  $G$  — дополнительный показатель Липшица — Гёльдера. Учитывая обсуждение мультифрактальных мер, проведенное в этой книге, кажется вероятным, что на самом деле следует рассматривать облака как мультифрактальные меры  $M(\mathbf{r})$ , определенные в

РИС. 12.4. Изображения облаков, построенные с помощью модели фрактальных сумм элементов. Те области, в которых интенсивность осадков меньше определенной границы, показаны черным цветом. Интенсивность осадков откладывается в логарифмическом масштабе, белый цвет соответствует наибольшему ее значению. При моделировании использовалось значение показателя  $H = 0,6$  [117].



пространстве. Полное описание такой меры, вероятно, потребует введения целого спектра фрактальных размерностей. Короче говоря, облака являются мультифракталами, что и предложено в работе [118] (см. также [119]).

## 12.2. Фрактальная размерность рек

Как отметил Мандельброт [134], реки удовлетворяют соотношению длины и площади вида (12.2). Здесь мы обсудим некоторые результаты, описанные Хэком [79], хотя на эту тему есть и более ранние, и более поздние работы, Хэк исследовал реки в Вирджинии и Мэриленде. На рис. 12.5 показана площадь бассейна системы рек  $A$  выше по течению от некоторой точки. Как показано на том же рисунке, длина  $L$  измеряется вдоль самого длинного русла до водораздела бассейна. На рис. 12.6 показаны результаты, полученные Хэком. Площади определялись планиметром по топографическим картам, а в некоторых случаях — по данным аэрофотосъемки. Длина рукавов определялась в основном курвиметром по картам и аэрофотографиям вдоль русла с учетом изгибов и поворотов.

Все данные, представленные на рис. 12.6, хорошо описываются прямой линией вида

$$L = 1,4A^{D/2} \text{ при } D = 1,2. \quad (12.4)$$

Хэк также проверил это соотношение, используя 400 аналогичных измерений, проведенных на северо-востоке Соединенных Штатов [112], и получил ту же зависимость (12.4). Итак, можно считать твердо установленным, что на северо-востоке Соединенных Штатов длины рек, отмеренные выше некоторой точки, в среднем пропорциональны площади бассейна (выше той же точки реки), возведенной в степень

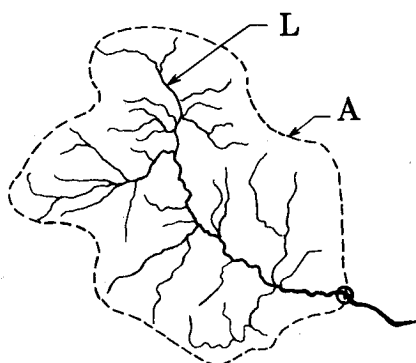


РИС. 12.5. Площадь бассейна  $A$  и длина  $L$  самой протяженной реки выше данного места на русле.

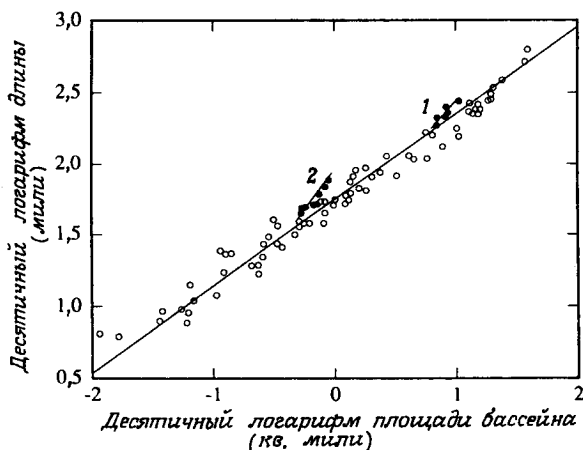


РИС. 12.6. Связь длины реки и площади бассейна [79]. 1—р. Норт-Ривер; 2—р. Ист-Драй-Бранч.

$(1/2)D = 0,6$ , независимо от геологических и топографических особенностей местности. Впрочем, Хэк проанализировал также два района на западе Соединенных Штатов и нашел, что для них  $D = 1,4$ . Таким образом, соотношение (12.4) не носит всеобщего характера.

Черные кружки на рис. 12.6 показывают два частных случая отклонения от общего соотношения длины и площади. Коэффициент в этом соотношении равен 1,4 (если в качестве единиц используются мили и квадратные мили), но были обнаружены его вариации от 1 до 2,5 со средним значением 2,0, которое достигается, когда русло проходит в песчанике.

Следуя Мандельброту, возникает соблазн сказать, что результат (12.4) указывает на фрактальную размерность рек и их притоков, равную  $D = 1,2$ . Однако речные системы не самоподобны и рассуждения, при-

водящие к соотношению длины и площади вида (12.2), поэтому неприменимы. Отсутствие самоподобия было замечено Хэком, который выразил это наблюдение следующим образом: «Очевидно, что на любой реке с перемещением вниз по течению длина реки должна расти быстрее, чем площадь, охватываемая всеми основными притоками, возведенная в степень 0,6. Существуют протяженные участки русла, на которых в реку не впадает ни один заметный приток. Именно на этих участках длина должна расти быстрее. Это общее наблюдение относится как к коротким, так и к длинным рекам.» Заметим, что для рек, бассейн которых имеет постоянную ширину  $d$ , соотношение длины и площади принимает вид  $L = A/d$  и для таких рек мы получили бы  $D = 2$ . С другой стороны, если бы бассейн сохранял форму при подобном увеличении, мы бы получили  $D = 1$ .

Хэк построил модель системы рек, основанную на методе анализа структуры речных систем, предложенном Хортоном [94]. Хортон классифицирует реки и протоки, приписывая каждому руслу некоторый *порядок*, так что для рек, не имеющих притоков, порядок русла равен  $i = 0$ . Реки порядка  $i$  имеют притоки порядка  $(i - 1)$ ,  $(i - 2)$ , ... Таким образом можно построить классификацию всех рек бассейна, так что главная река будет иметь наибольший порядок  $s$ . Показатель длины  $r_i$  определяется как отношение средней длины рек одного порядка к средней длине рек ближайшего меньшего порядка. Это отношение приблизительно постоянно и не зависит от порядка русла. Поэтому средняя длина реки порядка  $i$  равна

$$L_i = r_i L_{i-1} = r_i^i L_0,$$

где  $L_0$  — средняя длина самых коротких потоков. Показатель ветвления  $r_b$  равен отношению числа рек одного порядка к числу рек ближайшего большего порядка:

$$N_i = r_b N_{i+1} = r_b^{s-i} N_s.$$

Показатель ветвления почти не зависит от порядка русла. Отметим, что  $N_s = 1$ , поскольку имеется только одна река наивысшего порядка.

Поскольку «длина поверхностного стока примерно постоянна для всех потоков» [79], область, с которой сток идет непосредственно в реки второго порядка, должна иметь ту же среднюю ширину  $d$ , что и область прямого стока потоков первого порядка. Поэтому эта площадь растет прямо пропорционально длине. Хэк заключает, что площадь бассейна порядка  $s$  равна

$$A = \sum_{i=0}^s L_i d N_i = A_0 r_b^s \sum_{i=0}^s (r_i/r_b)^i.$$

Ясно, что существование определенной длины поверхностного стока привносит в задачу характерный пространственный масштаб, который несовместим с самоподобием. Пренебрегая этим, мы получаем следующее выражение для порядка  $s$ :  $s = \ln(A/A_0)/\ln r_b$ . Итак, для бассейна

порядка  $s$  получаем

$$L = L_0 (A/A_0)^{D_s/2}, \text{ где } D_s = 2 \ln r_l / \ln r_b.$$

Хэк рассматривает пример с  $r_l = 2,4$  и  $r_b = 3,2$ , т.е.  $D_s = 1,5$ . Если в соотношении длины и площади учесть член, связанный с поверхностным стоком, то это соотношение перестает быть степенным. Аппроксимировав его степенным законом, Хэк получил значение  $D_s = 1,30$ , близкое к наблюдаемому в этой области значению  $D = 1,22$ .

По сути модель Хэка, которая устанавливает связь показателя ветвления  $r_b$  и показателя длины  $r_l$ , по-видимому, верно описывает наблюдаемое степенное соотношение длины и площади. Однако остается неясным вопрос, как ввести определение фрактальной размерности системы рек. Геометрия потоков и рек несомненно требует дальнейшего исследования.

# Фрактальные поверхности

Широкому интересу к фракталам, по-видимому, в большой степени способствовали интригующие компьютерные пейзажи. Красивые цветные иллюстрации из последней книги Мандельброта [134], изображающие долины и вид с «Луны» на восходящую «Землю», одинаково поразили воображение ученых и неспециалистов. Уже давнее популярное изложение работ Мандельброта Гарднером [69], вероятно, сильно помогло росту такого интереса – по крайней мере я тогда впервые встретился с этими идеями. Еще более впечатляющие картины с дымкой в долинах, созданные также и Р.Ф. Фоссом, были опубликованы с популярным комментарием в широко известном журнале по микрокомпьютерам [200]. Не вызывает сомнения, что нерегулярность топографии земной поверхности в широком интервале пространственных масштабов служит указанием на то, что с помощью фракталов можно строить полезные модели пейзажей.

Эту главу мы начнем с обсуждения простых фрактальных поверхностей. Затем рассказывается о нашем опыте построения ландшафтов. В следующей главе мы обсудим свежие экспериментальные указания на фрактальную структуру поверхностей.

### 13.1. Фрактальная поверхность Кох

Простой способ построения явно фрактальной поверхности состоит в параллельном переносе триадной кривой Кох на расстояние  $\ell$  вдоль направления, перпендикулярного ее плоскости (рис. 13.1). Чтобы измерить площадь такой поверхности, мы попробуем покрыть ее полосками длины  $\ell$  и ширины  $\delta$ . При эталоне малой площади  $a = \delta \times \delta$  нам потребуется

$$N(\delta) = \frac{\ell}{\delta} \cdot \frac{1}{\delta^{D_1}}$$

таких ячеек, чтобы покрыть поверхность. Здесь, как и раньше, фрактальная размерность кривой Кох равна  $D_1 = \ln 4 / \ln 3$ . Первый множитель в формуле для  $N(\delta)$  означает просто, что число ячеек площадью  $a$ , необходимых для покрытия каждой полоски, равно  $\ell/\delta$ , а второй множитель – это число отрезков длины  $\delta$ , необходимых для покрытия

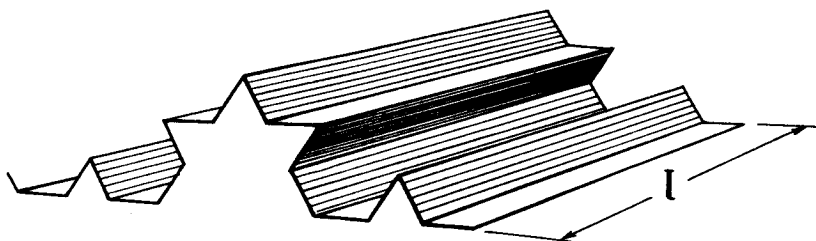


РИС. 13.1. Триадная поверхность Кох.  $D = 2,262 \dots$

кривой Кох (см. (2.6)). Мера определяется выражением

$$M_d = N(\delta)\delta^d = \ell \delta^{d-D_1-1}.$$

Поскольку мера конечна только при  $d = D$ , где

$$D = 1 + D_1 = 2,262 \dots,$$

из (2.3) следует, что  $D$ -размерность поверхности по Хаусдорфу – Безиковичу.

Этот результат – еще одна иллюстрация одного из эмпирических правил Манделброта для фрактальных множеств [134, с. 365]: если множество  $\mathcal{S}$  является произведением двух независимых фрактальных множеств  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ , то фрактальная размерность  $\mathcal{S}$  равна сумме фрактальных размерностей множеств  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ .

Мы взяли множество точек  $\mathcal{S}_1$ , определяемое триадной кривой Кох в  $E = 2$ -мерном пространстве (ее размерность  $D_1$ ), и построили множество  $\mathcal{S}$  умножением на множество  $\mathcal{S}_2$ , которое представляет собой отрезок прямой длиной  $\ell$  в  $E = 1$ -мерном пространстве. Таким образом, каждую точку множества  $\mathcal{S}_1$  мы сопоставили с линией в  $E = 3$ -мерном пространстве. Полученное множество имеет размерность  $D = D_1 + D_2$ , где  $D_2 = 1$  есть размерность линии.

Подобным образом можно построить фрактальные поверхности любой размерности в пределах  $2 \leq D \leq 3$ , но они не будут реалистичными моделями пейзажей и других нерегулярных поверхностей, которые, как правило, гораздо более изотропны в горизонтальной плоскости, чем результат переноса кривых Кох. Вероятно, такие модели применимы к поверхностям, которые получаются при направленном истирании, шлифовке или полировке.

## 13.2. Поверхности случайного переноса

Простой способ построения более приемлемых поверхностей заключается в добавлении к вертикальной координате  $z(x, y)$ , полученной после параллельного переноса фрактальной кривой, дополнительных слоев с подобными профилями, но повернутых относительно первой поверхности. Пусть  $z_D(x, y)$  – профиль поверхности, образованной скольжением вдоль оси  $y$  фрактальной кривой размерности  $D$ , лежащей в

плоскости  $xz$ . Повернем эту поверхность в плоскости  $xy$  на угол  $\phi$ . В результате получим поверхность  $z_D(x, y|\phi)$ . И наконец, умножим вертикальную координату на множитель  $h$ . Таким образом, определена поверхность  $z_D(x, y|h, \phi) = h z_D(x, y|\phi)$ . Используя поверхности такого профиля, можно построить фрактальные поверхности с возвышением  $Z(x, y)$ , определяемым как

$$Z(x, y) = \sum z_D(x, y|h, \phi). \quad (13.1)$$

Если сложить таким образом небольшое число слоев с фиксированным  $h$  и случайными  $\phi$ , то получаются любопытные поверхности, которые—по крайней мере с разрешением наших расчетов—имеют фрактальную размерность, равную размерности производящей фрактальной поверхности, т. е.  $D(Z) = D(z)$ . Вопрос, какова фрактальная размерность  $D(Z)$  в общем случае, вероятно, крайне сложен.

Чтобы показать сложности, возникающие при нахождении фрактальной размерности таких поверхностей, рассмотрим одну из первых моделей Мандельброта [132]. В простейшей модели  $z_D$ —ступенчатая функция, описывающая горизонтальное плато в плоскости  $xy$ , рассеченное вдоль прямой  $x = 0$  с единичной разностью высот по разные стороны от разлома. Такая производящая поверхность не фрактальна и имеет размерность  $D(z) = 1$ . Для построения  $Z(x, y)$  будем выбирать  $\phi$  из однородного распределения от 0 до  $2\pi$  и зададим  $h = 1/\sqrt{n}$  для  $n$ -го этапа построения (этим высота отдельного обрыва делается пренебрежимо малой по сравнению с общей суммой всех остальных уступов). В результате получается поверхность, показанная на рис. 13.2. Эта поверхность *фрактальна*, ее размерность равна  $D = 5/2$ , несмотря на то что производящая поверхность *не* фрактальна. Такие поверхности, состоя-

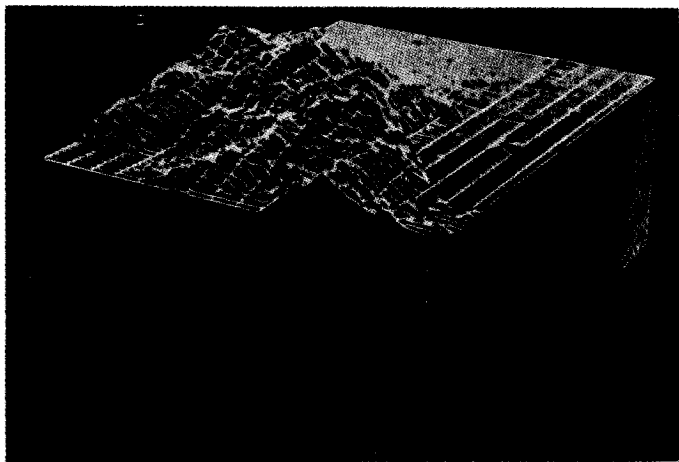


РИС. 13.2. Первый пример фрактальных броуновских островов.  $D = 2,5$  [132].



РИС. 13.3. Первый пример фрактальных броуновских береговых линий.  $D = 1,5$  [132].

щие из бесконечного числа слоев, Мандельброт называет *броуновскими поверхностями*, потому что любое вертикальное сечение такой поверхности имеет вид кривой, характерной для броуновского движения. Эта поверхность в среднем удовлетворяет соотношению подобия

$$Z(\lambda x, \lambda y) = \lambda^H Z(x, y)$$

для любого  $\lambda$  и имеет коразмерность  $H = 3 - D = 1/2$ .

Это соотношение подобия показывает, что фрактальная поверхность самоаффинна, а не самоподобна. Она представляет собой обобщение самоаффинных фракталов, обсуждавшихся в гл. 10, на большее число измерений. Напомним, что для самоаффинных поверхностей, так же как и для самоаффинных кривых, следует различать локальную и глобальную фрактальные размерности. Адекватные методы анализа конкретных фрактальных поверхностей до сих пор не ясны. Недавние обсуждения этой проблемы можно найти в [136, 213, 214].

Если полученный пейзаж заполнить до некоторого уровня «водой», то появляются береговые линии и острова, подобные показанным на рис. 13.3. Фрактальная размерность береговых линий, полученных пересечением поверхности с плоскостью, равна  $D = 2 - H = 3/2$  и заметно превышает значение 1,3, наблюдаемое для многих береговых линий.

Как отметил Мандельброт [132], острова характеризуются распределением Корчака

$$\text{Nr}(A > a) \sim a^{-B}, \quad (13.2)$$

где  $\text{Ng}(A > a)$  – число островов, площадь которых  $A$  превышает данное число  $a$ . Это соотношение называют также *соотношением числа объектов и площади*. Показатель степени в этом соотношении  $B$  равен  $B = (1/2)D_{\text{берег}} = 3/4$ . Согласно Мандельброту, значение, наблюдаемое на поверхности Земли, примерно равно  $B \sim 0,65$  и меняется от 0,5 в Африке (один обширный остров, окруженный островами быстро уменьшающегося размера) до 0,75 в Индонезии и Северной Америке (преобладание самых больших островов выражено слабее).

### 13.3. Построение фрактальных поверхностей

Мы построили ряд моделей поверхностей, которые выглядят вполне как настоящие пейзажи, по крайней мере в той мере, которую позволяет простой графопостроитель, доступный большинству исследователей. Мы приобрели интересный опыт, который стоит освоить, прежде чем браться за более сложные изображения.

Как явствует из предыдущего раздела, наложение бесконечного числа случайно ориентированных нефрактальных поверхностей действительно может привести к фрактальной поверхности. На практике удобнее накладывать небольшое число *фрактальных* поверхностей переноса, ориентированных случайным образом. Если, вдобавок, производящие поверхности переноса случайны, то можно надеяться на получение удовлетворительного результата при вполне разумном объеме вычислений.

Глядя на любой пейзаж, мы охватываем взглядом лишь ограниченную область. Это обстоятельство определяет внешний пространственный масштаб  $L_{\text{макс}}$ . Кроме того, присутствует и минимальный масштаб  $L_{\text{мин}}$ , определяемый разрешением нашего глаза или фото-пленки, а в нашем случае – выбранной численной точностью расчета координат  $x$  и  $y$ . Если для построения рельефа использовать синусоидальные поверхности переноса, то легко получить волнистую картину. Для каждой пространственной частоты  $f$  мы имеем поверхность переноса вида

$$z(x, y) = C_f \sin(fx)$$

с амплитудой  $C_f$ . Далее, наименьшая существенная частота равна  $f_{\text{мин}} \sim 1/L_{\text{макс}}$ , поскольку влияние меньших частот сводится к простому однородному сдвигу всей поверхности по высоте. Наибольшая существенная частота определяется разрешением  $f_{\text{макс}} \sim 1/L_{\text{мин}}$ , поскольку детали меньшего размера разрешить не удастся.

Мы решили строить поверхности переноса, пользуясь суперпозицией осциллирующих функций. Прежде всего определим *частотный спектр*, задав пространственные частоты соотношением

$$f_j = f_{j-1}^\alpha = f_0^\alpha, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots \quad (13.3)$$

Такой спектр *дискретен* и определяется показателем  $\alpha$  и низшей частотой  $f_0$ . Чтобы ее влияние было заметно, основная частота  $f_0$  должна

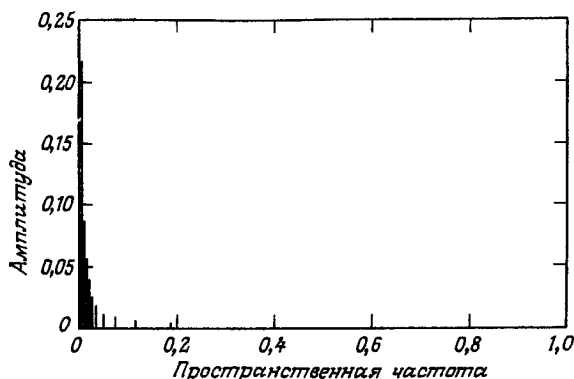


РИС. 13.4. Амплитудный спектр для  $f_0 = 0,004$ ,  $\alpha = 1,1$  и  $\beta = 1,1$ .

превышать  $f_{\min}$ . Увеличивая  $f_0$ , мы будем получать изображения, на которых в поле зрения находится более обширное пространство. Параметр  $\alpha$  в большой степени определяет общий характер или тип построенного пейзажа. Мы выбирали  $\alpha$  из диапазона  $0,7 \leq \alpha \leq 1,4$ . При

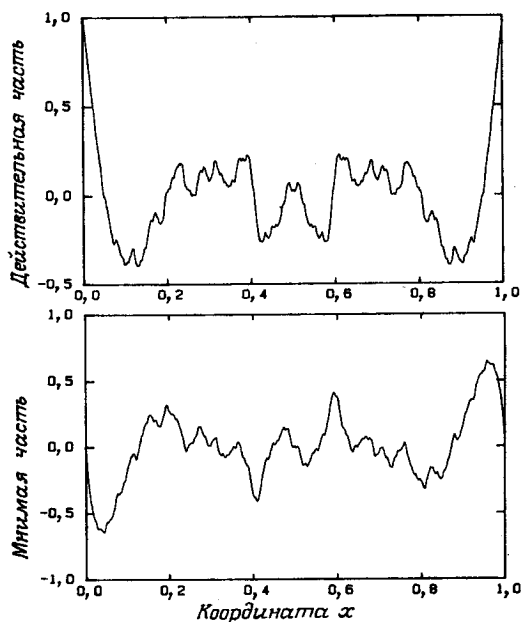


РИС. 13.5. Действительная и мнимая части  $Z$  как функции координаты  $x$  для  $f_0 = 0,004$ ,  $\alpha = 1,1$  и  $\beta = 1,1$ .

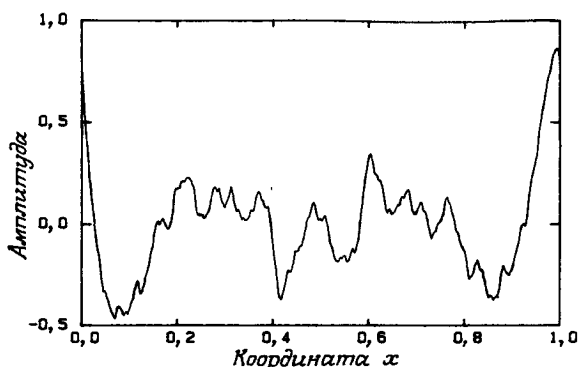


РИС. 13.6. Профиль функции  $z(x, 0|\psi = 0,616)$ .

малых значениях  $\alpha$  получаются горные ландшафты, а при увеличении  $\alpha$  возникают спокойные виды, напоминающие пейзажи южной Норвегии. Рекуррентный вид частотного спектра (13.3) был выбран потому, что он автомоделен.

Реальные пейзажи обычно характеризуются наибольшей амплитудой на низких частотах, и мы выбрали следующий автомодельный, или масштабно-инвариантный, вид амплитуд разложения Фурье:

$$C_f \sim f^{-\beta}. \quad (13.4)$$

Коэффициент пропорциональности в этом равенстве не существен, поскольку масштаб получившегося изображения будет меняться в соответствии с размерами требуемой картинки. Чтобы получающиеся пейзажи выглядели достоверно, параметр  $\beta$  должен быть заключен в пределах от 1,05 до 1,4. Меньшие из этих значений хороши для горных пейзажей. При таком спектре амплитуд обычно получаются самоподобные кривые. На рис. 13.4 показан амплитудный спектр, в котором масштаб пространственных частот выбран так, что наибольшая из рассматриваемых частот равна 1.

Для получения высоты поверхности как функции координат мы использовали комплексное преобразование Фурье

$$\mathcal{Z}(x) = \sum_j C_{f_j} \exp(2\pi i f_j x).$$

При вычислении  $\mathcal{Z}$  использовался обычный алгоритм быстрого преобразования Фурье. Получающийся профиль поверхности имеет действительную и мнимую части  $z' = \text{Re}\mathcal{Z}$  и  $z'' = \text{Im}\mathcal{Z}$ , показанные на рис. 13.5. Нерегулярные флуктуации  $z'$  и  $z''$  связаны с дискретностью частотного спектра, в котором присутствуют несоизмеримые частоты.

По комплексному профилю  $\mathcal{Z}$  строятся действительные поверхности

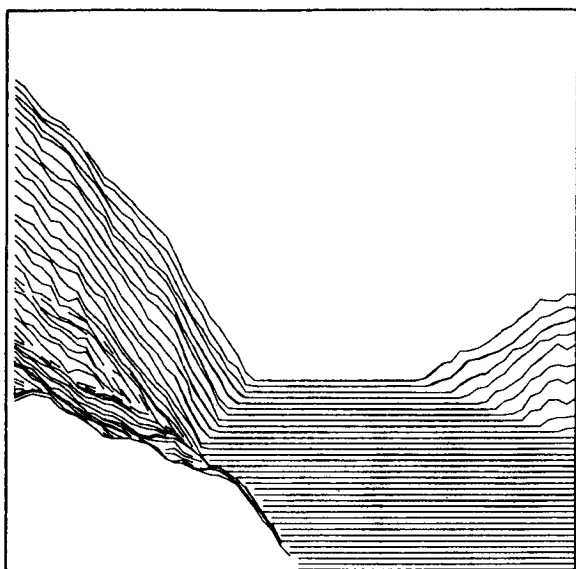


РИС. 13.7. Пейзаж, составленный из 12 слоев.  $\alpha = 1,1$ ,  $\beta = 1,1$ .

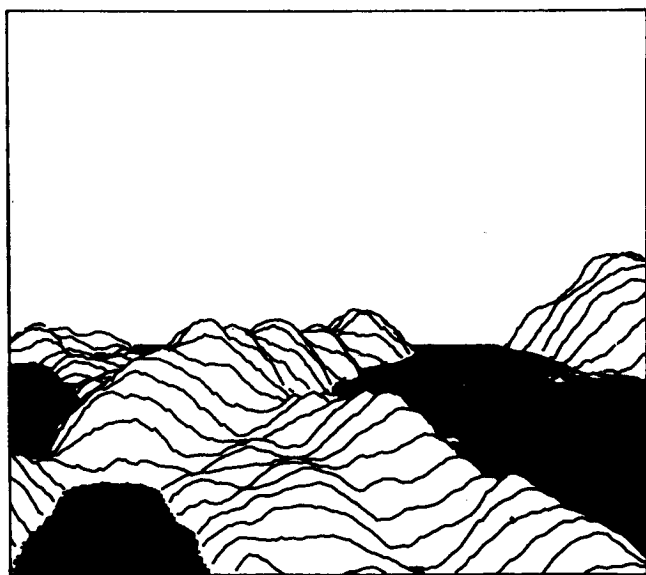


РИС. 13.8. Пейзаж с перспективой и кривизной.  $\alpha = 1,4$ ,  $\beta = 1,1$ .

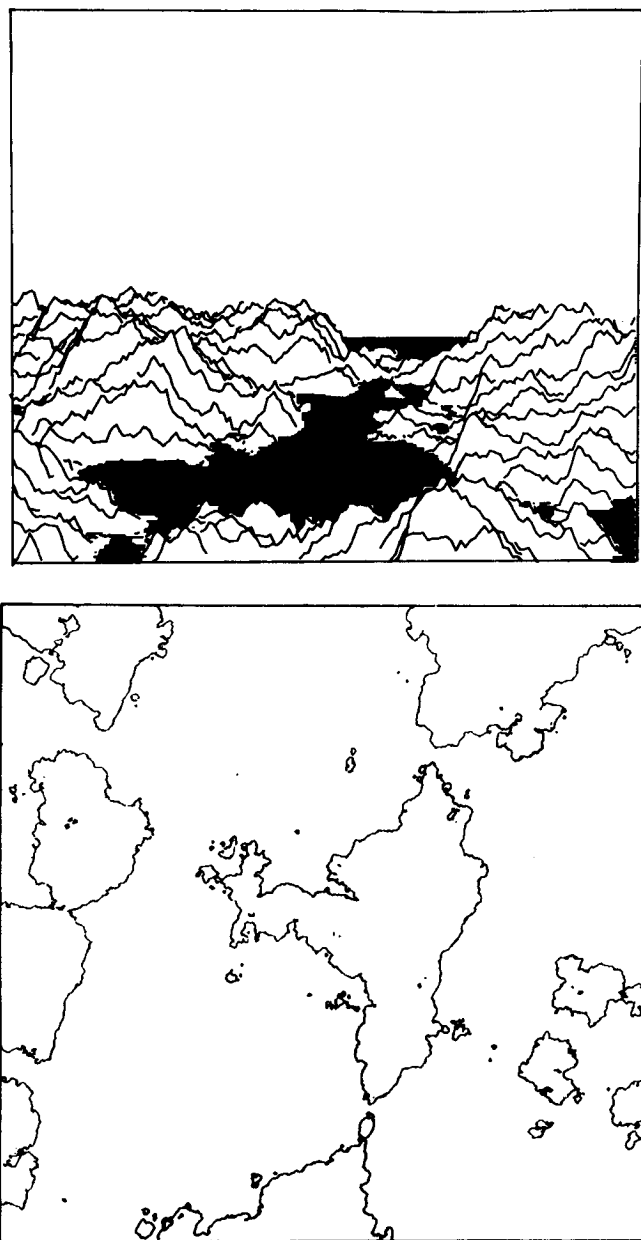


РИС. 13.9. Фрактальный пейзаж и карта береговой линии.  $\alpha = 0,8$ ,  $\beta = 2,0$ .  
Фрактальная размерность береговой линии  $D = 1,15$ .

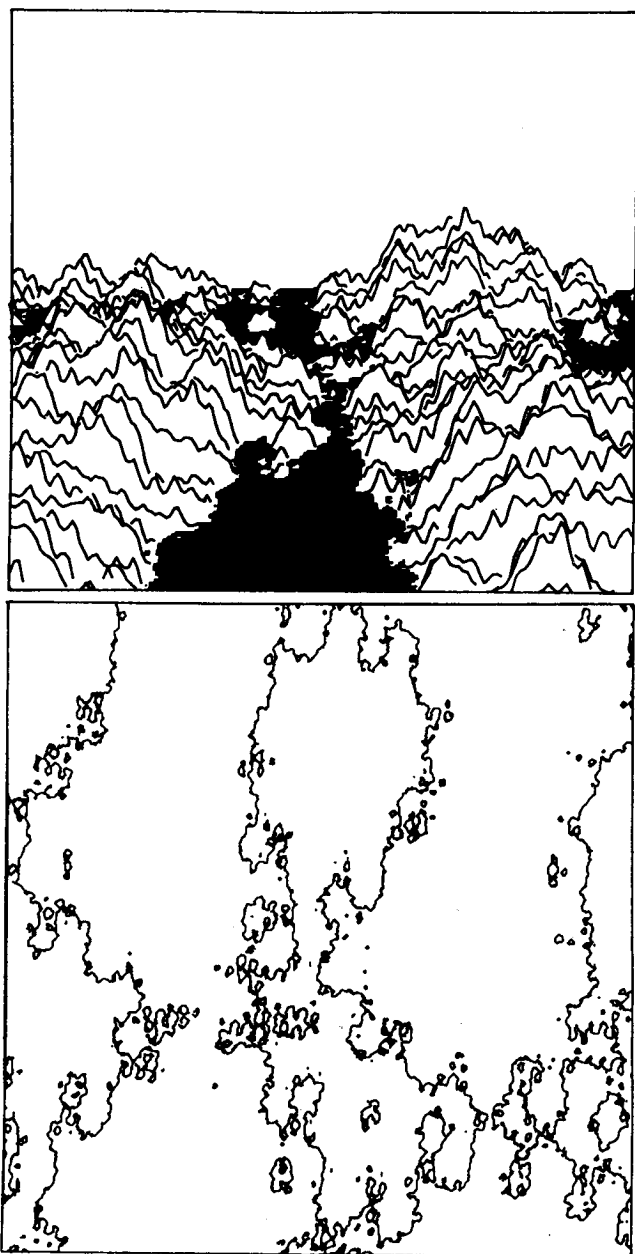


РИС. 13.10. Пейзаж Вейерштрасса–Мандельброта.  $\beta = 0,59$ ,  $b = 4,7$ . Размерность береговой линии  $D = 1,35$ .

переноса, определяемые соотношением

$$z(x, y | \psi) = z' \cos \psi + z'' \sin \psi,$$

где угол  $\psi$  выбирается случайным образом из диапазона  $0-2\pi$ . Полученная таким образом кривая  $z(x, 0 | \psi = 0,616)$  показана на рис. 13.6.

Мы строим пейзаж, накладывая несколько таких случайно ориентированных слоев. Чтобы подчеркнуть структуру получающейся поверхности, мы добавляем до некоторого уровня воды и выбираем угол зрения с определенной высоты. Рис. 13.7 получен наложением 12 слоев с профилями  $z(x, y | \psi, \phi)$  со случайными фазами  $\psi$  и углами поворота  $\phi$ . Разрешение рис. 13.7 таково, что на нем по 1024 точек вдоль единичных расстояний по направлениям  $x$  и  $y$ . Однако показана только центральная область из  $64 \times 64$  точек в плоскости  $xy$ . Чтобы получить этот рисунок, мы начертили 64 профиля вида  $\mathcal{Z}(x, y_i)$  с  $i = 1, 2, \dots, 64$ , причем карандаш отрывался от бумаги, если точки заслонялись уже нанесенными контурами.

Разрешение этого рисунка явно слишком грубое, и в последующих случаях мы использовали сетку из  $256 \times 256$  точек в плоскости  $xy$ , выбранных в центральной области 1024-точечных  $z$ -профилей. Удовлетворительный результат достигается при использовании 30 профилей, перпендикулярных лучу зрения, причем близкие участки кривых должны заслонять более удаленные. В области, занятой водой, наносились все 256 линий.

Чтобы получить приемлемое изображение пейзажа, необходимо добавить перспективу. При изображении пейзажей с береговыми линиями необходимо также смоделировать кривизну земной поверхности, иначе будет казаться, что пейзаж обрезан вблизи горизонта. Пример пейзажа из четырех слоев, включающего эти особенности, показан на рис. 13.8. Такой вид вполне можно встретить где-нибудь среди гранитных скал на юге Норвегии. Гладкость поверхностей достигается выбором довольно большого значения  $\alpha = 1,4$ , из-за чего расстояние между спектральными частотными компонентами быстро растет с увеличением пространственной частоты  $f$ . Уменьшение  $\alpha$  до 0,8 приводит к довольно изрезанным ландшафтам с фрактальными береговыми линиями, подобным изображенному на рис. 13.9.

Как мы уже упоминали в предыдущем разделе, наложение большого числа нефрактальных поверхностей переноса вполне может привести к явно фрактальной поверхности, но представленные нами до сих пор рисунки содержат лишь по четыре слоя (12 на рис. 13.7) и при  $\alpha > 1$  профили  $z(x, y)$  выглядят довольно гладкими. Поэтому эти поверхности не фрактальны. Что же касается перехода к пределу бесконечного пространственного разрешения (т.е. включения бесконечно больших пространственных частот), то эта возможность подробно не исследовалась.

*Береговые линии Вейерштрасса–Мандельброта.* Если изменить вид

спектра используемых частот, заменив соотношение (13.3) равенством

$$f_j = b f_{j-1}, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots$$

при  $f_0 = 1$ , и выбрать показатель амплитудного спектра равным  $\beta = (2 - D)$ , то функция  $\mathcal{Z}$  перейдет в фрактальную функцию Вейерштрасса – Мандельброта, определенную равенством (2.14).

На рис. 13.10 показан фрактальный ландшафт, для построения которого основная пространственная частота выбрана равной  $f_0 = b = 4,7$ . Показатель амплитудного спектра выбирался равным  $\beta = 0,59$ . Пейзаж довольно хаотичен и фрактальная размерность показанной береговой линии оказывается равной  $D \simeq 1,35$ . Эту величину следует сравнить с ожидаемой фрактальной размерностью кривых Вейерштрасса – Мандельброта, определяемой из равенства  $\beta = 2 - D$ , так что в нашем случае  $D = 1,405$  – согласие вполне удовлетворительное при выбранном разрешении.

### 13.4. Поверхности случайного сложения

В разд. 9.8 мы обсудили алгоритм последовательных случайных сложений, предложенный Фоссом [214] и использованный при моделировании обобщенного броуновского движения. Как показал Фосс, этот алгоритм нетрудно обобщить на большее число измерений. На рис. 13.11 показаны ландшафты, построенные с помощью этого алгоритма. Вначале мы зафиксировали высоту  $Z = 0$  в четырех углах сетки из  $1025 \times 1025$  элементов. В программе используется подпрограмма, генерирующая независимые гауссовы случайные числа  $\xi$  с нулевым средним и единичной дисперсией. На первом этапе мы просто получаем одно значение  $\xi$  и используем его как уровень поверхности в центре сетки (в точке 513, 513). На втором этапе мы сначала проводим интерполяцию и находим возвышения в четырех точках с координатами  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  и  $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , измеренными в таких единицах, что сторона области, покрытой сеткой, равна 1. Например, возвышение в точке  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  равно  $Z\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left( Z(0,0) + Z\left(\frac{1}{2}, 0\right) + Z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + Z\left(0, \frac{1}{2}\right) \right)$ , т.е. результат интерполяции – это просто среднее арифметическое возвышений в ближайших по диагоналям точках. Возвышения в двух ближайших точках на границе  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  принимались равными среднему арифметическому от возвышений в ближайших углах области. На этом этапе процесса мы задавали интерполированные возвышения в 13 точках – в пяти исходных положениях, четырех новых внутренних точках и четырех новых точках на границе. Следующим шагом 13 независимых значений  $\xi_{n=1}$  прибавлялись к уже имеющимся возвы-

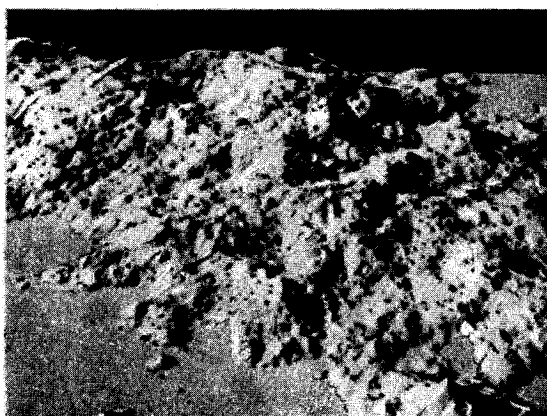
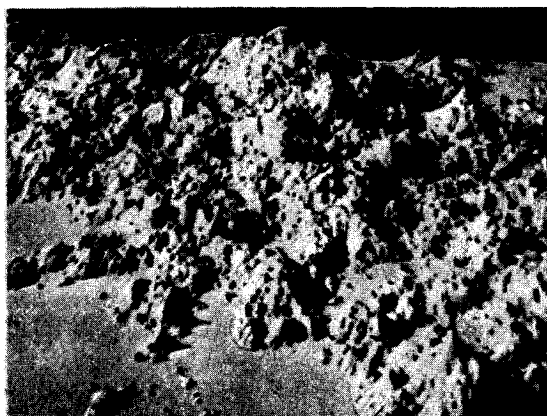
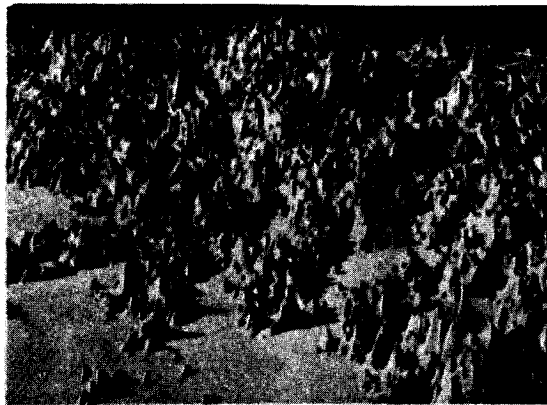


РИС. 13.11. Фрактальные пейзажи, полученные с помощью алгоритма последовательных случайных сложений Фосса. Эти пейзажи построены на квадратной сетке  $1025 \times 1025$ . Дисперсия слагаемых на  $n$ -м цикле равна  $\sigma^2 = (1/\sqrt{2})^{2nH}$ , число циклов – 18. Использование значения показателя Херста –  $H = 0,5, 0,7$  и  $0,9$  соответственно на верхнем, среднем и нижнем рисунках [27].

шениям. При этом гауссовы случайные числа имеют дисперсию

$$\langle \xi_n^2 \rangle = \sigma_n^2 = r^{2nH}, \quad \text{где } r = 1/\sqrt{2} \quad (13.5)$$

(с  $n = 1$ ). Это то же соотношение, которое использовалось в разд. 9.8, но масштабный коэффициент равен  $r = 1/\sqrt{2}$ , что отражает изменение в расстояниях между старыми и новыми точками. Применение этой процедуры продолжается, и в следующем цикле добавляются точки  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  и  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Возвышения в этих точках определяются как среднее арифметическое возвышений в ближайших к ним узлах, т. е. в узлах, которые лежат в направлениях, параллельных осям. В точках, лежащих на границе, возвышения вновь определяются специальным образом. После каждого цикла этот алгоритм удваивает число точек, в которых задано возвышение, и уменьшает на множитель  $r = 1/\sqrt{2}$  — расстояние между такими точками. Пейзажи, показанные на рис. 13.11, были получены после 13 циклов применения этого алгоритма. При построении этих ландшафтов использовались *одни и те же* случайные числа, и эти три изображения отличаются только выбранным значением показателя Херста.

Точки, лежащие на границе, преобразуются по-другому, чем внутренние. Это граничное условие приводит к тому, что ландшафты фрактальны только в масштабах, малых по сравнению с размером области, и их фрактальная размерность равна  $D = 3 - H$ .

Если все точки преобразуются одинаковым образом, то эта процедура приводит к самоаффинным поверхностям. Направления вдоль осей  $x$  и  $y$  неравноправны с вертикальным направлением вдоль оси  $z$ , и мы

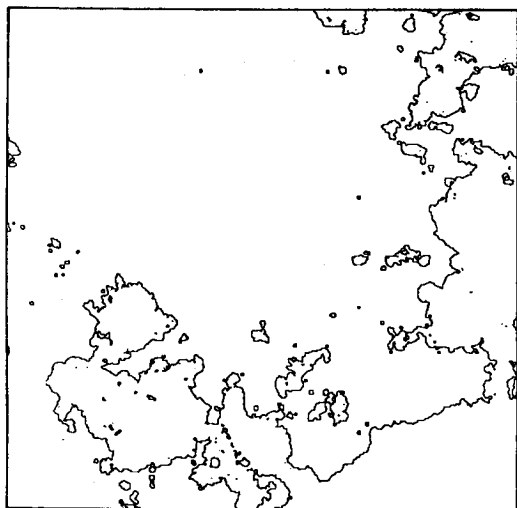


РИС. 13.12. Береговая линия пейзажа с  $H = 0,7$ , показанного на рис. 13.11. Эта линия самоподобна, ее фрактальная размерность равна  $D = 2 - H = 1,3$  [27].

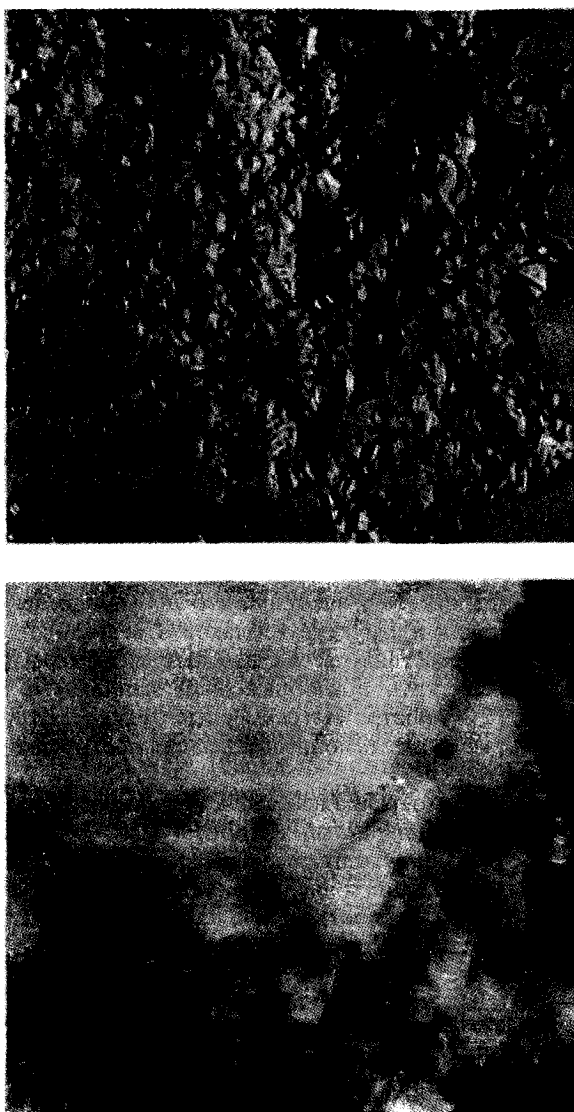


РИС. 13.13. Фрактальный пейзаж с  $H = 0,7$ . На верхнем рисунке показан вид сверху на пейзаж с рис. 13.11. На нижнем рисунке этот же пейзаж представлен как «облако». Высоты ниже уровня моря (см. рис. 13.12) показаны черным. Шкала оттенков серого цвета пропорциональна логарифму высоты над уровнем моря. Вариант этого рисунка приведен на цветной вкладке [27].

должны различать локальную и глобальную фрактальные размерности (см. гл. 10). Горизонтальное сечение этой самоаффинной поверхности дает береговые линии, подобные показанным на рис. 13.12. Эти линии являются самоподобными фракталами, размерность которых равна  $D = 2 - H$ , где  $H$  — показатель, примененный для построения этих ландшафтов.

Фрактальные пейзажи довольно сложны, их восприятие и интерпретация во многом зависят от возможностей графического представления. Для примера на рис. 13.13 мы еще раз изобразили пейзаж с  $H = 0,7$  с видом сверху, а также в виде облака. Рассмотрим, как могут выглядеть облака, протяженные по горизонтали, при наблюдении снизу.

Образование водяных капель — процесс пороговый, и они образуются, только когда водяной пар перенасыщен выше определенного уровня. Если возвышение ландшафта можно сопоставить с величиной, определяющей образование капель (некоторой комбинации таких параметров, как температура и влажность), то образования капель можно ожидать только там, где возвышение превышает определенный уровень. Изображения облаков на рис. 13.13 получены следующим образом. Области ландшафта с возвышениями вплоть до некоторого определенного уровня закрашивались черным. Начиная с этого уровня использовалась шкала оттенков серого цвета (от черного до белого), пропорциональная логарифму возвышения. Мы находим, что получившиеся изображения хорошо отражают вид и структуру облаков. Цветные варианты подобных изображений представлены на цветных вкладках. Однако такие облака нельзя совместить с изображением ландшафта, так как они двумерны. Фосс [214] построил трехмерные облака, которые отбрасывают тени и которые могут использоваться для построения реалистических сцен.

Внимательное рассмотрение пейзажей, представленных на рис. 13.11, показывает, что использованный алгоритм создает довольно резкие неровности. Эта особенность применявшегося алгоритма сглаживается только после очень большого числа циклов. На цветных вкладках мы приводим также пейзажи, построенные так, что после каждого цикла пространственный масштаб уменьшается множителем  $r = 1/2$ . Начав с возвышений в четырех углах области, мы интерполируем их в четыре

точки с координатами  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$  и  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ . Как и раньше, к

этим возвышениям прибавляются случайные числа, проводится новая интерполяция и т.д. Этот алгоритм использовался Фоссом [214] и рассматривался также Миллером [161]. Пейзажи, построенные с помощью такого модифицированного алгоритма, имеют другую степень заполненности (*лакунарность*) и выглядят вполне удовлетворительно. По мере уменьшения  $r$  степень заполненности ландшафта увеличивается и заметно меньшее число масштабов флуктуаций.

### 13.5. Комментарии к фрактальным пейзажам

Все рассмотренные пейзажи построены с помощью простой процедуры, которая определяется параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\beta$  и  $b$  или  $r$  и  $H$ . Именно в той степени, в которой читатель сочтет эти рисунки приемлемыми изображениями естественных ландшафтов, эта процедура будет полезна для изучения естественной топографии. Понятно, что качество графики неплохо было бы улучшить.

Построенные пейзажи, конечно, не дают какой-либо информации о процессах, которые определяют вид реального ландшафта. Но они дают возможность очень простого алгоритмического описания ландшафтов. Для описания эллипса необходимы два числа, а для описания представленных здесь ландшафтов требуются три величины —  $\alpha$ ,  $\beta$  и число слоев или  $r$ ,  $H$  и число циклов. Не составляет труда построить пейзажи с более сложной геометрией. Можно было бы наклонить ландшафт и получить пейзаж прибрежной области или же можно добавить слои с другими параметрами.

Было бы заманчиво рассмотреть модели, в которых построенный ландшафт подвергается эрозии или другим модификациям. Однако нам представляется, что на настоящем этапе развития самое важное достоинство фрактальных пейзажей состоит в том, что их в общем-то легко описать и они служат простым геометрическим инструментом описания сложных поверхностей. Отметим, что достоинство алгоритма Фосса в том, что он позволяет заранее зафиксировать возвышение в определенных точках (например, на границе). Поэтому алгоритм Фосса можно применять для *условного* моделирования, когда заданы сведения о возвышении в некоторых точках. «Ландшафты» могут также описывать распределение на поверхности концентрации, температуры или какой-либо другой величины. Изящный пример такого рода приведен в [91], где этот метод использовался для построения распределения пористости в некоторой области по информации, полученной при бурении небольшого числа скважин (см. рис. 8.11). Еще одно достоинство алгоритма Фосса состоит в том, что он может применяться повторно до тех пор, пока не будет достигнуто любое наперед заданное разрешение. Данный метод объединяет моделирование пейзажей с анализом наблюдений, а это самый многообещающий подход.

## Исследования фрактальных поверхностей

В последние годы было опубликовано много исследований фрактальной структуры поверхностей. Фрактальным объявлялось все — от молекулярных поверхностей белков до взлетных полос аэродромов. Эти исследования применяют весь спектр методов химии и физики. Вообще говоря, наблюдаемое фрактальное поведение *не* охватывает широких (в несколько порядков величины) диапазонов пространственных масштабов, и можно сомневаться в надежности найденных оценок фрактальной размерности. Тем не менее проанализирован очень интересный ряд наблюдений, и здесь мы обсудим некоторые новые результаты.

### 14.1. Наблюдаемая топография поверхностей

Сейлс и Томас [193] измерили и проанализировали шероховатость поверхностей разнообразных объектов — от обшивки супертанкеров и бетонных взлетных полос до поверхностей суставов и шлифованных металлических поверхностей.

Высота поверхности  $z$  измерялась в различных точках  $x$  вдоль некоторого направления. Имея большое число измерений по всему имеющемуся участку поверхности, можно рассчитать шероховатость поверхности, определяемую дисперсией

$$\sigma^2 = \langle z^2(x) \rangle.$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по серии измерений (иногда многократных повторных) топографии поверхности. Точка отсчета по вертикали выбирается так, что  $\langle z(x) \rangle = 0$ .

Важной мерой статистических свойств поверхности является корреляционная функция, определяемая соотношением

$$C(\Delta x) = \langle z(x + \Delta x)z(x) \rangle.$$

Для стационарных поверхностей корреляционную функцию можно выразить через *спектр мощности*  $G(f)$  с помощью преобразования Фурье

$$C(\Delta x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(2\pi i f \Delta x) df.$$

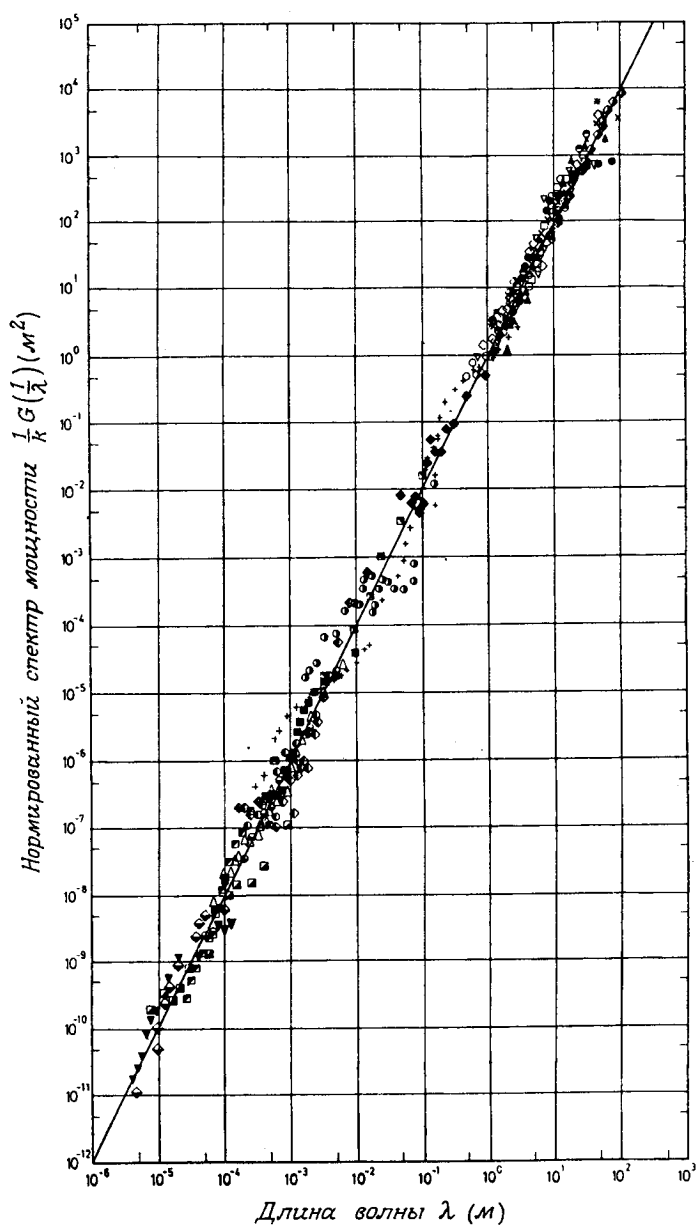


РИС. 14.1. Нормированный спектр мощности возвышений поверхности  $\frac{1}{k} G(1/\lambda)$  как функция длины волны шероховатостей  $\lambda$  для различных поверхностей [193]. Представлены данные о широком классе поверхностей – от лунного моря Познания до танкового полигона в Форт-Ноксе и от поверхности тазобедренного сустава до шлифованных деталей механизмов.

Пространственная частота  $f$  связана с длиной волны неровностей поверхности  $\lambda$  равенством  $f = 1/\lambda$ . Физические системы имеют конечную протяженность  $L_{\text{макс}}$  и соответственно минимальную пространственную частоту  $f_{\text{мин}} = 1/L_{\text{макс}}$ . Следовательно, корреляционную функцию можно переписать в виде

$$C(\Delta x) = \int_{f_{\text{мин}}}^{\infty} G(f) \exp(2\pi i f \Delta x) df.$$

Сейлс и Томас предполагают, что спектр мощности имеет вид

$$G(f) = k/f^2, \quad (14.1)$$

и называют постоянной  $k$  «изрезанностью». При таком предположении дисперсия равна

$$\sigma^2 = \langle z^2(x) \rangle = \int_{f_{\text{мин}}}^{\infty} G(f) df = k/f_{\text{мин}},$$

т.е. мы получаем  $\sigma^2 = kL_0$  и дисперсия увеличивается с размером поверхности, как и ожидается для гауссовых случайных процессов.

На рис. 14.1 воспроизведены результаты этой работы. Величина  $y = \lg((1/k)G(1/\lambda))$  отложена как функция  $x = \lg \lambda$ . Если справедливо равенство (14.1), то мы ожидаем, что этот график должен иметь вид прямой линии с наклоном 2. Сейлс и Томас получили удивительную сходимость результатов для 23 типов поверхностей, которые охватывают 8 декад по длине волны. Эти авторы полагают, что величина  $k$  однозначно определяет статистические геометрические свойства случайных компонент изотропной поверхности для этого диапазона длин волн!

Следует, однако, заметить, что аппроксимация наблюдаемой спектральной плотности зависимостью (14.1) определяет  $k$  и при выбранной нормировке эта зависимость принимает вид  $G(1/\lambda)/k = \lambda^2$ . Как отмечается в работе [21], это равносильно такому преобразованию исходных данных, состоящих из 23 коротких отрезков разного наклона и разбросанных по всей плоскости двойного логарифмического графика, при котором отдельные отрезки смещаются вдоль вертикальной оси  $y$  так, что они максимально приближаются к линии  $y = 2x$ . При указанной процедуре аппроксимация будет выглядеть тем лучше, чем шире диапазон исходных данных.

Берри и Ханни [21] замечают, что статистически изотропные поверхности, на которых не выделен какой-либо масштаб и уровень которых хорошо определен, но недифференцируем, действительно могут иметь спектр *фрактального* вида:

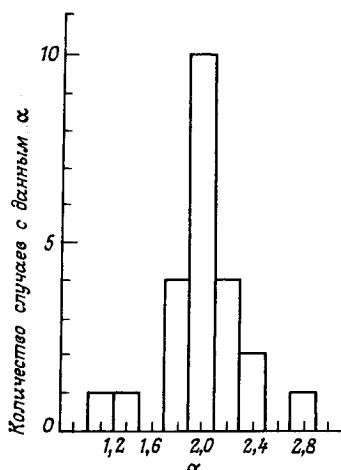
$$G(f) = k/f^{\alpha} = kf^{-2H-1}. \quad (14.2)$$

Как показано Мандельбротом [134, с. 353], показатель  $H$  равен фрактальной коразмерности и следующим образом выражается через фрактальную размерность поверхности  $D$ :

$$D = 3 - H.$$

Для броуновских поверхностей, т.е. в случае обычной гауссовой статистики, получается равенство (14.1), использованное Сейлсом и Томасом,

РИС. 14.2. Гистограмма значений показателя  $\alpha$  для 23 серий измерений, представленных на предыдущем рисунке [193].



поскольку для таких поверхностей  $H = 1/2$  и  $D = 2,5$ . Однако для параметра  $\alpha$  следует найти значение, обеспечивающее наилучшую аппроксимацию, и оно оказывается заключенным в пределах от 1,07 до 3,03, что соответствует значениям фрактальной размерности  $D = (7 - \alpha)/2$  от 2 до 3. В ответ на это замечание Сейлс и Томас [194] провели новую аппроксимацию своих данных и построили гистограмму оценок спектрального параметра  $\alpha$ , показанную на рис. 14.2. Полученные значения  $\alpha$  группируются вокруг гауссова значения 2, но распределены по допустимому диапазону от 1 до 3. Этот результат кажется разумным, поскольку вряд ли можно ожидать, что поверхности шариковых подшипников и взлетных полос имеют одинаковые статистические свойства. Тем не менее Сейлс и Томас получили интересные результаты, и их стоит критически проверить на данных высокого качества.

**Фрактальные поверхности разлома.** Когда разламывается металлическое тело, образующаяся поверхность разлома шероховата и нерегулярна. Мандельброт и др. [148] исследовали фрактальную структуру таких поверхностей. Они изучали разломы образцов мартенситной стали марки 300. Разломы сначала никелировались, а затем шлифовались параллельно плоскости разлома. В результате появлялись «острова» стали, окруженные никелем; при дальнейшей шлифовке острова росли и сливались друг с другом. Длина «береговой линии», или периметр  $P$ , и площадь  $A$  таких островов измерялись с помощью «эталона» длиной  $\delta = 1,5625$  мкм.

Фрактальные поверхности, подобные поверхностям разлома, должны характеризоваться различными законами подобия в плоскости разлома и поперек нее. Поэтому поверхности разлома могут быть в лучшем случае самоаффинными с локальной фрактальной размерностью. Однако пересечение такой самоаффинной поверхности с плоскостью дает бере-

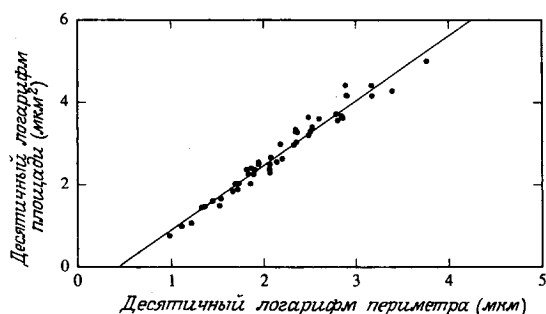


РИС. 14.3. Соотношение периметра и площади для поверхности разлома мартенситной стали марки 300. Прямой линией показана аппроксимация  $A \sim L^{2/D'}$  при  $D' = 1,28$  [148].

говые линии, которые несомненно самоподобны и имеют фрактальную размерность  $D' = D - 1$  [136, 213]. Поэтому можно использовать соотношение периметра и площади (12.2), записанное в виде

$$L(\delta) \sim [A(\delta)]^{D'/2}. \quad (14.3)$$

На рис. 14.3 показаны результаты Мандельброта и др. [148]. Аппроксимация зависимостью (14.3) дает оценку  $D' = 1,28$ , из которой следует, что в заметном диапазоне масштабов поверхность разлома имеет фрактальную размерность  $D = 2,28$ . Мандельброт и его соавторы проверили оценку фрактальной размерности, проанализировав профили поверхности разлома. Чтобы обнаружить ее профиль, поверхность резрезалась и для измеренных профилей рассчитывалась спектральная плотность  $G(f)$ . По соотношению (14.2) была найдена величина  $H$ , а затем и фрактальная размерность  $D$  поверхности

$$D = 3 - H = 1,26,$$

которая оказалась в хорошем согласии с ранее полученной оценкой.

В другой серии интересных экспериментов Мандельброт и др. подвергли образцы мартенситной стали марки 300 тепловой обработке при разной температуре. Затем измерялось количество энергии, которую

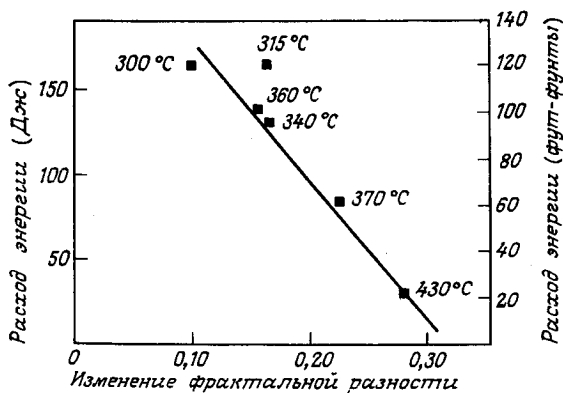


РИС. 14.4. Связь измеренной фрактальной размерности поверхности разлома  $D$  и энергии, необходимой для разлома серии образцов мартенситной стали марки 300, закаленных при различных температурах [148].

необходимо вложить, чтобы разрушить образцы, и определялась фрактальная размерность поверхностей разлома. На рис. 14.4 представлены полученные результаты. Ясно видно, что фрактальные размерности, заключенные в пределах  $D = 2,1 - 2,28$ , примерно линейно зависят от вложенной энергии. Связь этой зависимости с характером металлургических процессов неясна, но после открытия зависимости фрактальной размерности разлома от вложенной энергии по крайней мере наметился подход к исследованию топографии поверхности.

## 14.2. Фрактальная размерность ландшафтов и параметров окружающей среды

Барроу [33] провел анализ обширного ряда измерений параметров окружающей среды и получил оценки фрактальных размерностей различных процессов, сведенные в табл. 14.1. Разнообразные данные, представленные здесь, можно рассматривать как ряды измерений величины  $z$ , выполненных через регулярные интервалы значений координаты  $x$ . Случайной функцией  $z(x)$  соответствует множество точек на плоскости  $xz$ , размерность которого лежит в диапазоне  $0 \leq D \leq 2$ . Дисперсия приращений определяется формулой

$$V(\Delta x) = \langle [z(x + \Delta x) - z(x)]^2 \rangle$$

и зависит от разности координат как  $V(\Delta x) \sim |\Delta x|^{2H}$  (см. [134, с. 353]). Поэтому фрактальную размерность  $D = 2 - H$  можно оценить, пользуясь графиком дисперсии приращений, построенным в двойном логарифмическом масштабе. Этим методом оценивались числа, помеченные в табл. 14.1 буквой «а». Спектр мощности определяется выражением (14.2), и оценка фрактальной размерности  $D = 2 - H$  также следует из оценки коразмерности  $H$ ; соответствующие результаты отмечены буквой «б». Аналогичные оценки по групповым дисперсиям помечены «в», а оценки по ковариациям выделены буквой «г».

Получающиеся значения  $D$  попадают в диапазон от 1,4 до 2,0. Высокие значения  $D$ , которые указаны для некоторых свойств почв и геологических данных, могут, по-видимому, иногда поставить под сомнение обоснованность методов интерполяционной картографии, и представляется разумным использовать знание  $D$  для определения методов построения карт и интерполяции. Результаты этих исследований вызывают интерес, но для оценки их надежности следует критически проанализировать исходные данные и, в частности, выявить диапазон, в котором в зависимости отсутствуют какие-либо пространственные масштабы. Опыт изучения фазовых переходов, для которых масштабная инвариантность хорошо проверена и глубоко понята, говорит о том, что надежные оценки степенных показателей можно получить только из данных, которые охватывают не менее трех декад. Это жесткое ограничение до сих пор не удовлетворено в исследованиях фрактальных поверхностей и параметров окружающей среды.

Таблица 14.1. Оценки  $D$  для различных параметров окружающей среды [33].  
Расшифровку символов, обозначающих метод оценки, см. в тексте.

| Параметр                                              | Запаздывание<br>$\tau$ | $D_{t \rightarrow 0}$ | Метод |
|-------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------|-------|
| Почвы – содержание натрия                             | 15,2 м                 | 1,7–1,9               | а     |
| – содержание камней<br>(оба – в четырех направлениях) | 15,2 м                 | 1,1–1,8               | а     |
| Почвы – толщина суглинка                              | 20 м                   | 1,6                   | а     |
| Почвы – электропроводность<br>(4 направления)         | 1 м                    | 1,4–1,6               | а     |
| Поверхность взлетной полосы                           | 30 см                  | 1,5                   | б     |
| Почвы – средний показатель конуса                     | ~1 км                  | 1,9                   | в     |
| – мелкозем и глина в слое 0–15 см                     | ~1 км                  | 1,8                   | в     |
| – средний диаметр камней на по-<br>верхности          | ~1 км                  | 1,8                   | в     |
| – крупнопесчаная фракция в слое<br>0–15 см            | ~1 км                  | 1,8                   | в     |
| Растительный покров                                   | ~1 км                  | 1,6                   | в     |
| Золото                                                | различное              | 1,9                   | а     |
| Почвы – уровень фосфора                               | 5 м                    | 2,0                   | в     |
| – рН                                                  | 5 м                    | 1,5                   | в     |
| – уровень калия                                       | 5 м                    | 1,6                   | в     |
| – объемная плотность                                  | 5 м                    | 1,5                   | в     |
| – вода, 0,1 бар                                       | 5 м                    | 1,5                   | в     |
| Железная руда в породах                               |                        |                       |       |
| – хлорит                                              | 15 мкм                 | 1,6                   | а     |
| – кварц                                               | 15 мкм                 | 1,9                   | а     |
| – кварц                                               | 5 см                   | 1,6                   | а     |
| – железо                                              | 5 см                   | 1,5                   | а     |
| – железо (В–З)                                        | 100 м                  | 1,7                   | а     |
| – железо (С–Ю)                                        | 100 м                  | 1,8                   | а     |
| – железо (В–З)                                        | 500 м                  | 1,6                   | а     |
| – железо (С–Ю)                                        | 500 м                  | 1,9                   | а     |
| Морские анемоны                                       | 10 см                  | 1,6                   | г     |
| Дождевые осадки                                       | 1 км                   | 1,7                   | а     |
| Железная руда                                         | 3 м                    | 1,4                   | а     |
| Уровень подземных вод                                 |                        |                       |       |
| Пьезометр 1                                           | 1 день                 | 1,6                   | а     |
| 2                                                     | 1 день                 | 1,6                   | а     |
| 3                                                     | 1 день                 | 1,8                   | а     |
| 4                                                     | 1 день                 | 1,3                   | а     |
| Марки нефти                                           | 60 см                  | 1,7                   | а     |
| Марки меди                                            | 2 м                    | 1,7                   | а     |
| Топографические возвышения                            | 10 м                   | 1,5                   | а     |
| Почвы – содержание песка                              | 10 м                   | 1,6–1,8               | а     |
| – рН                                                  | 10 м                   | 2,0                   | а     |
| Урожайность                                           | 1–1000 м               | 1,6–1,8               | в     |
| Глубина грунтовых вод                                 | 250 м                  | 1,6                   | а     |

### 14.3. Молекулярные фрактальные поверхности

Поверхности могут быть шероховатыми и даже фрактальными вплоть до масштабов молекулярного уровня. Площадь таких поверхностей

можно измерять – в духе определения размерности по Хаусдорфу–Безиковичу, – осаждая на исследуемую поверхность молекулы разных размеров и «подсчитывая» их количество. Площадь поверхностей обычно определяют путем измерения *адсорбционных изотерм*. Измеряется количество грамм-молей  $n$  молекул, которые *адсорбируются* на поверхности, как функция давления  $P$  при данной температуре  $T$ :

$$n = f_T(P).$$

Один из методов определения  $n$  состоит в измерении давления и объема до и после взаимодействия с адсорбирующей поверхностью. Другой общий метод заключается в определении  $n$  прямым взвешиванием. Много специальных методов применимо для изучения адсорбции молекул из растворов. Хорошее общее обсуждение поверхностной адсорбции можно найти в [1].

При интерпретации адсорбционных изотерм часто используется *изотерма Ленгмюра*

$$n = \frac{n_m b P}{1 + b P}. \quad (14.4)$$

Здесь  $n_m$  обозначает число грамм-молей, адсорбируемых на мономолекулярный слой. По таким изотермам находят  $n_m$ . Площадь поверхности  $\Sigma$  определяется выражением

$$\Sigma = n_m N_A \sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  – площадь, занимаемая одной адсорбированной молекулой, а  $N_A$  – число Авогадро. Для многих веществ поверхность, занимаемая при адсорбции одной молекулой, хорошо известна и в общем почти не зависит от подстилающей поверхности. В приложениях часто используется азот, а для него общепринятое значение площади, занимаемой одной молекулой, равно  $\sigma_0 = 16,2 \text{ \AA}^2$ . Другой широко известный метод, применяемый для интерпретации изотерм адсорбции, был предложен Брюнауэром и др. [31]; так называемые *изотермы Брюнауэра–Эммета–Теллера* применяются для интерпретации более сложных адсорбционных изотерм.

*Адсорбция на фрактальные молекулярные поверхности.* В ряде статей Авнир, Пфейфер и Фарин [8–10, 174–176] рассмотрели площадь поверхностей, которая определяется по изотермам адсорбции, и пришли к выводу, что поверхности многих веществ *фрактальны* и характеризуются фрактальной размерностью, заключенной в диапазоне  $2 \leq D \leq 3$ . Конкретное значение площади поверхности образца зависит от *размера* используемых молекул. Как отмечают эти исследователи, при масштабе длины  $\delta$ , определяемом наименьшей площадью адсорбции

$$\sigma_0 = \delta^2,$$

количество вещества, адсорбируемое на образец с фрактальной по-

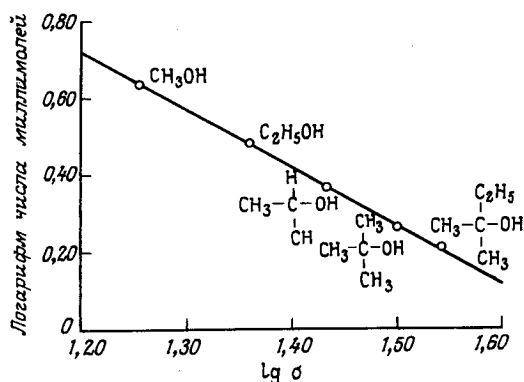


РИС. 14.5. Измерения числа грамм-молей  $n$  в мономолекулярном слое на пористом силикагеле как функция площади сечения молекул  $\sigma$  ( $\text{\AA}^2$ ),  $D = 3,02 \pm 0,06$  [176].

верхностью, должно меняться по закону

$$n \sim \delta^{-D} = \sigma^{-D/2}, \quad (14.5)$$

вытекающему из (2.3) и (2.4). В качестве примера такой зависимости мы приводим рис. 14.5, где показаны данные об адсорбции спиртов из толуола на пористый силикагель [176]. Полученные молярные числа удовлетворяют соотношению (14.5) с  $D = 3,02 \pm 0,06$  при размере эталона площади  $\sigma_0$  от 18 до  $35 \text{\AA}^2$ , т. е. значениях  $\delta$  от 4,2 до  $5,9 \text{\AA}$ . Это максимально допустимое значение для фрактальной размерности поверхности. Такая поверхность настолько неровна и пориста, что она практически заполняет объемную область. Отсюда следует, что поверхностные и объемные члены играют равную роль в термодинамических соотношениях. В такой системе мономолекулярный слой адсорбированных молекул имеет свойства объемной фазы, содержащей пустоты, количество которых тем больше, чем меньше их размер. Эту удивительно высокую оценку фрактальной размерности поверхности следовало бы уточнить, пользуясь более широким диапазоном эталонов площади.

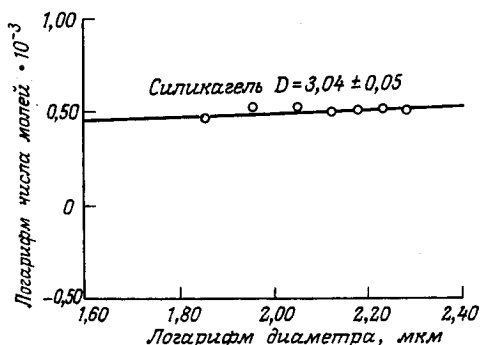


РИС. 14.6. Измерения числа грамм-молекул  $n$  третичного амилового спирта в мономолекулярном слое как функция диаметра адсорбируемых частиц ( $2R$ ) (мкм) [176].

Недавно Рожански и др. [185] исследовали мезопористый силикагель методами адсорбции, электронного энергообмена и рассеяния рентгеновского излучения на малые углы. Как показали все эти различные методы, поверхность крайне нерегулярна и шероховата, ее фрактальная размерность  $D$  близка к 3.

Пфейфер и Авнир [174] предложили метод значительного расширения эффективного диапазона изменения площади эталона. Рассмотрим геометрически подобные частицы. Пусть  $R$  — радиус наименьшей сферы, описанной вокруг такой частицы. Тогда те же рассуждения, которые привели к соотношению *периметра и площади* (12.2), дают соотношение *площади и объема* для одной частицы

$$A \sim V^{D/3}. \quad (14.6)$$

Объем частицы  $V$  здесь определяется как  $V \sim R^3$ . При фиксированном объеме  $V_s \gg V$ , занятом адсорбируемым веществом, число частиц  $N_s$  в этом объеме увеличивается с уменьшением их радиуса как  $N_s \sim R^{-3}$ . Подставляя эти соотношения в (14.6), мы получаем, что площадь поверхности  $\Sigma$  изменяется с радиусом частиц по закону

$$\Sigma \sim n \sim R^{D-3} \quad (14.7)$$

при постоянном размере эталона  $\delta$ . Как мы уже упоминали, число грамм-молекул в мономолекулярном слое  $n$  пропорционально  $\Sigma$  при заданном размере молекул. Пользуясь таким методом, Пфейфер и Авнир расширили диапазон измерений, описанных на рис. 14.5, и получили рис. 14.6. Таким образом, им удалось получить оценку  $D = 3,04 \pm 0,05$  в диапазоне размеров эталона от 35 до 256 Å.

Подборка фрактальных размерностей показана в табл. 14.2, воспроизводимой из оригинальной работы [10]. В этом заслуживающем

Таблица 14.2. Фрактальная размерность поверхностей по измерениям молекулярной адсорбции [10]

| Фрактальная размерность | Происхождение образцов                                                     | Диапазон (Å <sup>2</sup> ) |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| <i>Высокие значения</i> |                                                                            |                            |
| $2,91 \pm 0,02$         | Доломитовая порода из Бельвю, штат Огайо                                   | 20–47000                   |
| $2,97 \pm 0,01$         | Кальцевая порода из Идабель, штат Оклахома                                 | 20–47000                   |
| $2,88 \pm 0,02$         | Гранитные породы с ядерного полигона в штате Невада                        | 16–16500                   |
| $2,73 \pm 0,05$         | Оплавленные породы с ядерного полигона в штате Невада                      | 14–14300                   |
| $2,71 \pm 0,14$         | Гранулы активированного угля из оболочек кокосовых орехов (Цуруми НС-8)    | (16–37)                    |
| $2,80 \pm 0,16$         | Гранулы активированного угля из оболочек кокосовых орехов (Фуджизава В-СГ) | (16–37)                    |

## Продолжение табл. 14.2

| Фрактальная размерность   | Происхождение образцов                                                                                                                              | Диапазон ( $\text{\AA}^2$ ) |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $2,90 \pm 0,01$           | Карбонатная порода из артезианской скважины, Юкка-Флэт, штат Невада                                                                                 | 16–16500                    |
| $2,92 \pm 0,02$           | Почва (каолинит со следами галлуазита)                                                                                                              | 150–16500                   |
| $2,94 \pm 0,04$           | Пористый силикагель                                                                                                                                 | (16–34)                     |
| $2,79 \pm 0,03$           | Активированная окись алюминия марки F-20 (Алькао корп.)                                                                                             | 16–45100                    |
| $2,78 \pm 0,21$           | Животный уголь                                                                                                                                      | 1400–180000                 |
| $2,67 \pm 0,16$           | Пористый древесный уголь из оболочек кокосовых орехов<br>(Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)                                                           | (16–47)                     |
| <i>Умеренные значения</i> |                                                                                                                                                     |                             |
| $2,57 \pm 0,04$           | Пористый пигмент $\alpha = \text{FeOON}$ для магнитных лент                                                                                         | 16–980                      |
| $2,35 \pm 0,11$           | Битое свинцовое стекло Корнинг 0010                                                                                                                 | 21–14900                    |
| $2,52 \pm 0,07$           | Пыль из угольной шахты в западной Пенсильвании                                                                                                      | 16–180                      |
| $2,33 \pm 0,08$           | Пыль из угольной шахты в западной Пенсильвании                                                                                                      | 16–270                      |
| $2,25 \pm 0,09$           | Газовая сажа                                                                                                                                        | (16 – 71)                   |
| $2,54 \pm 0,12$           | Слабопористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)                                                                   | (16–47)                     |
| $2,30 \pm 0,07$           | Слабопористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)                                                                   | (16–47)                     |
| $2,63 \pm 0,03$           | Плавленый шпат из Стефенс-Сити, Виргиния                                                                                                            | 20–47000                    |
| $2,58 \pm 0,01$           | Доломит из Вудвилля, штат Огайо                                                                                                                     | 20–47000                    |
| $2,46 \pm 0,11$           | Стекловидная оплавленная порода с ядерного полигона в штате Невада                                                                                  | 14–14300                    |
| $2,29 \pm 0,06$           | Почва (в основном полевошпатовый кварц и лимонит)                                                                                                   | 150–21800                   |
| <i>Низкие значения</i>    |                                                                                                                                                     |                             |
| $2,02 \pm 0,06$           | Аэросиль – непористый кремнезем (Degussa)                                                                                                           | 16–529                      |
| $2,15 \pm 0,06$           | Сноувит – матовое кварцевое стекло высокой чистоты                                                                                                  | 16–10600                    |
| $2,14 \pm 0,06$           | Мадагаскарский кварц (Термал Синдикат)                                                                                                              | 16–1850                     |
| $1,95 \pm 0,04$           | Периклаз – электрически плавленый и дробленый магнезит                                                                                              | 16–720                      |
| $2,02 \pm 0,05$           | Синтетический фюзит $\text{Na}_2\text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \times \times 2,67\text{SiO}_2 \cdot m\text{H}_2\text{O}$ (Линде Эйр Продактс) | (16–68)                     |
| $2,07 \pm 0,01$           | Графит марки Вулкан 3G (2700) (Национальная физическая лаб., Теддингтон, Великобритания)                                                            | (16–178)                    |

Продолжение табл. 14.2

| Фрактальная размерность | Происхождение образцов                                                                           | Диапазон ( $\text{\AA}^2$ ) |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $2,04 \pm 0,16$         | Графон – частично графитизированная газовая сажа, полученная нагреванием до $3200^\circ\text{C}$ | (15–41)                     |
| $2,13 \pm 0,16$         | Графон – графитизированная газовая сажа (Кейбот корп.)                                           | 1400–180000                 |
| $2,04 \pm 0,04$         | Непористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)                   | 16–47                       |
| $1,97 \pm 0,02$         | Непористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)                   | (16–47)                     |
| $2,16 \pm 0,04$         | Исландский шпат, кальцит из Чиуауа, Мексика                                                      | 20–47000                    |

внимания каталоге встречаются поверхности с фрактальными размерностями, занимающими весь диапазон от  $D = 2$  до  $D = 3$ . Эти результаты, несомненно, обнаруживают необходимость дальнейших исследований. В частности, диапазон масштабов, в которых проводятся измерения структуры поверхностей, следует распространить в области, достигающие нижнего и верхнего пределов самоподобия. Вновь обращаясь к опыту исследования фазовых переходов, мы можем сказать, что оценки степенных показателей не надежны, если исходные данные не охватывают по меньшей мере диапазон в три декады.

Мы думаем, что осознание факта существования молекулярных фрактальных поверхностей существенно повлияет на многие области, связанные со свойствами поверхностей, такие, как катализ, смачивание и технология напыления. Этому направлению исследований несомненно суждено большое будущее.

*Фрактальная пористость.* Бейл и Шмидт [14] опубликовали очень интересную статью, в которой обнаружено, что поверхность микроскопических пор материалов может быть фрактальной. В этой статье получено следующее выражение для интенсивности рассеяния рентгеновского излучения фрактальной пористой поверхностью:

$$S(q) \sim q^{(D-6)}, \quad (14.8)$$

где модуль вектора рассеяния  $q$  определяется так же, как в (3.4). Измерения рассеяния на малые углы образцами бурого угля показали, что поверхность пор фрактальна и ее размерность равна  $D = 2,56 \pm 0,03$  в диапазоне величин вектора рассеяния, охватывающем два порядка

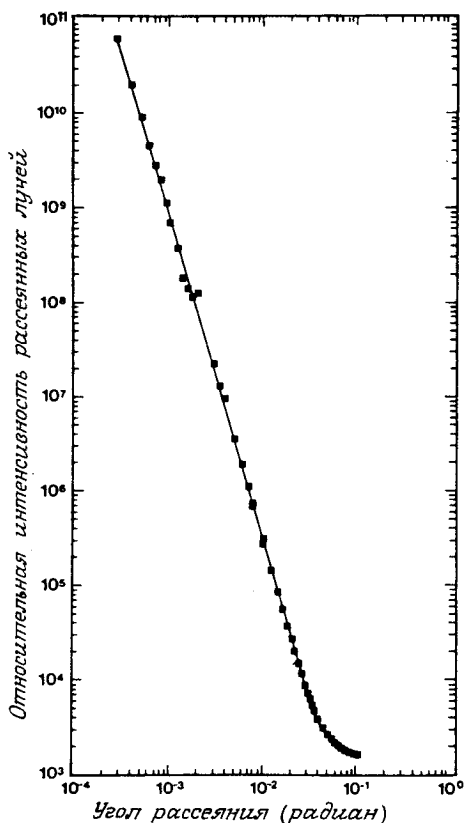


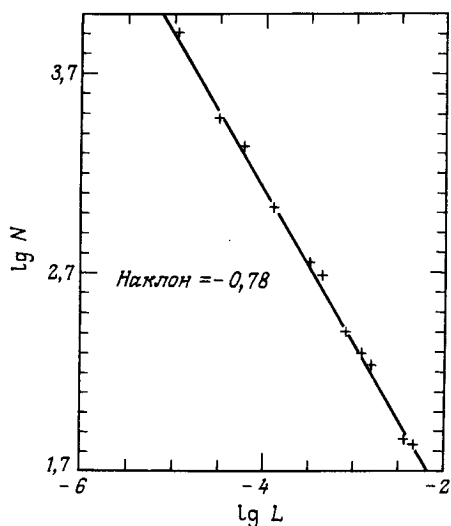
РИС. 14.7. Интенсивность рентгеновского излучения, рассеянного образцами бурого угля как функция угла рассеяния [14].

(рис. 14.7). Чтобы должным образом понять фрактальные свойства пор, нужны дальнейшие исследования рассеяния на малые углы.

Анализ теории такого рассеяния показал, что эти результаты следует интерпретировать как указание на шероховатость поверхности пор, а не ее фрактальность [221]. Наблюдения рассеяния нейтронов на малые углы показали, что образцы песчаника и глинистых сланцев содержат фрактальные внутренние поверхности пор с величинами  $D$  в диапазоне от 2,55 до 2,96 в зависимости от типа породы [222]. Такая структура связана с влиянием частиц глины.

Пористые песчаники изучались Кацем и Томпсоном [106] с помощью сканирующего электронного микроскопа. Фрактальные свойства поверхностей разлома пород изучались по вторичной электронной эмиссии, индуцированной сканирующим пучком электронов. При каждом значении увеличения вид структуры, регистрируемой электронным пучком вдоль линии его перемещения, ограничен разрешением микроскопа; для изотропных фракталов это ограничивает глубину поля

РИС. 14.8. Число  $N(L)$  геометрических особенностей размера  $L$  на единице длины как функция  $L$  (см) для образцов песчаника с плато Коконино.



зрения. Глубина поля сканирующего электронного микроскопа уменьшается при увеличении разрешения, так что она всегда меньше глубины пор на поверхности образца. Поэтому на самом деле интенсивность вторичной электронной эмиссии определяется свойствами пересечения линии сканирования с пористой поверхностью. Для объемного фрактала с поверхностной фрактальной размерностью  $D$  пересечение с линией представляет собой множество точек размерности  $D' = D - 2$ . Кац и Томпсон выдвигают гипотезу, что число «особенностей» на единицу длины  $N(L)$ , разрешаемое при данном увеличении, должно зависеть от масштаба длины  $L$  по закону  $N(L) \sim L^{-(D-2)}$ . Как видно из рис. 14.8, их наблюдения хорошо укладываются на такую зависимость и приводят к оценке фрактальной размерности  $D = 2,78$ . Результаты этой работы для разнообразных образцов приведены в табл. 14.3.

Таблица 14.3. Фрактальная размерность поверхности пор в песке и песчанике по измерениям вторичной электронной эмиссии. Пористость измерялась непосредственно и оценивалась из соотношения  $\phi = (\ell_1/\ell_2)^{3-D}$  [106]

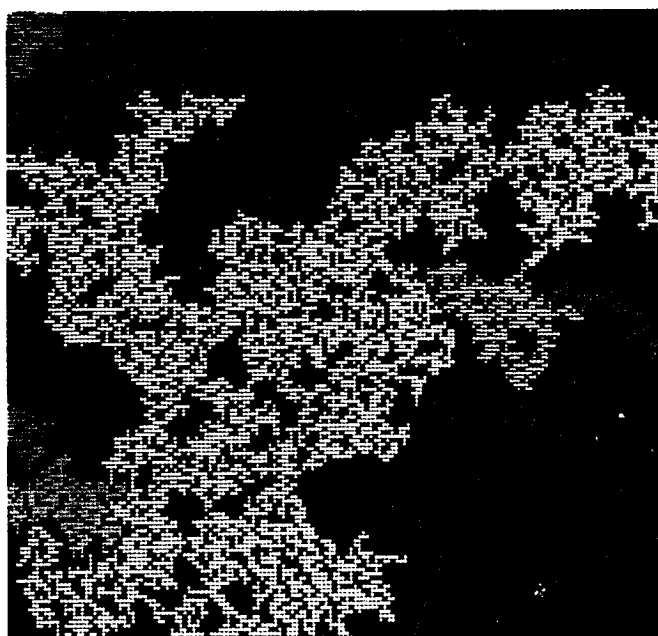
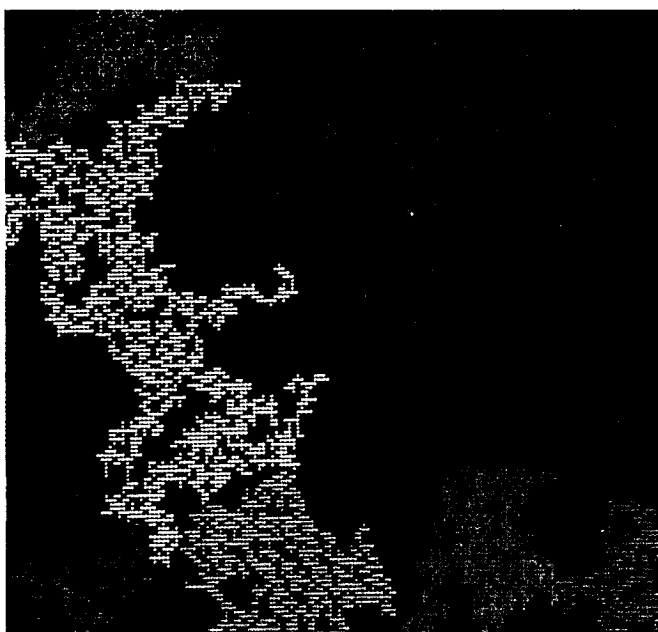
| Образец                            | Фрактальная<br>размерность | $\ell_2$ (мкм) | Пористость (%) |            |
|------------------------------------|----------------------------|----------------|----------------|------------|
|                                    |                            |                | рассчитанная   | измеренная |
| Плотный газонасыщенный песок № 965 | 2,57                       | 2,5            | 4,7            | 5,3–5,6    |
| Плотный газонасыщенный песок № 466 | 2,68                       | 6              | 7,6            | 6,9–7,6    |
| Плато Коконино                     | 2,78                       | 98             | 10             | 11–12,5    |
| г. Навахо                          | 2,81                       | 50             | 15             | 16,4       |
| Сент-Питерс                        | 2,87                       | 50             | 27             | 24–28      |

Фрактальная структура пространства пор прослеживается между наименьшим масштабом  $l_1 \sim 20 \text{ \AA}$  и наибольшим масштабом  $l_2$ , выше которого нарушается степенная зависимость от  $L$ . Кац и Томпсон предлагают следующее соотношение для пористости  $\phi$ :

$$\phi = (l_1/l_2)^{3-D}. \quad (14.9)$$

Это соотношение они использовали для оценки  $\phi$  по измерениям верхней границы масштабов  $l_2$  и получили удовлетворительные результаты. Однако не приводится доводов в пользу этого соотношения, которое не может иметь общий характер. Недавно по этому поводу возникла дискуссия [107, 184]. И вновь нужны дальнейшие исследования.

# **Фракталы – натурные и численные эксперименты**



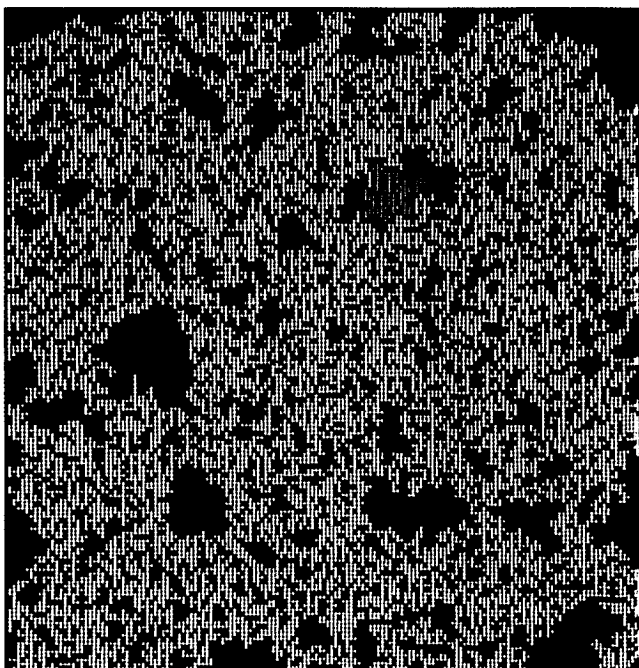


Рис. С1. Влияние роста вероятности  $p$  заполнения узла квадратной решетки  $50 \times 50$  на образование кластера. Вероятность  $p$  принимает значения 0,58 (слева вверху), 0,60 (слева внизу) и 0,62 (на этой странице). На каждом из трех рисунков наибольший кластер изображен белым цветом. Остальные кластеры в зависимости от их размеров изображены темно-синим, красным, оранжевым, желтым, светло-зеленым, зеленым, бирюзовым и голубым цветом различных оттенков от светлого до темного. Самые маленькие кластеры при такой схеме раскраски на рисунках не видны.

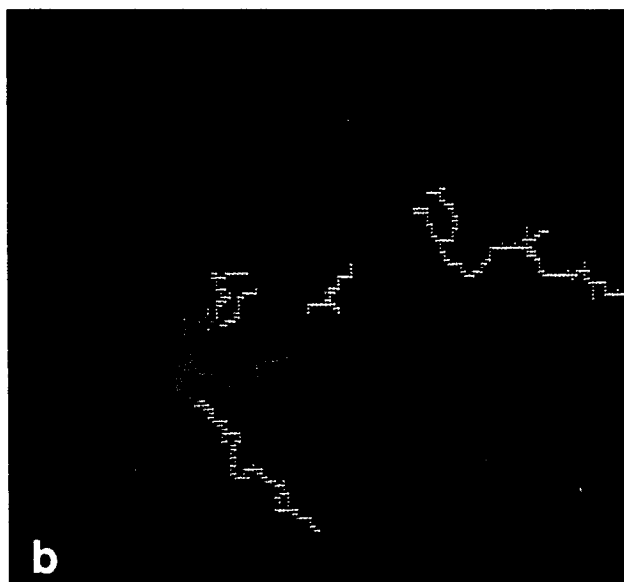


Рис. С2. а – Вытеснение глицерина воздухом при большом капиллярном числе на перколяционном кластере, изображенном на рис. 7.13; б – результаты численного моделирования вытеснения жидкости воздухом на том же перколяционном кластере. Различные цвета соответствуют порам, в которые проник воздух, на различных шагах по времени. Число пор, заполненных воздухом, равно 30 (белый цвет), 86 (красный цвет), 213 (зеленый цвет) и, наконец, при пробое 447 (желтый цвет) для эксперимента и численного моделирования [168].

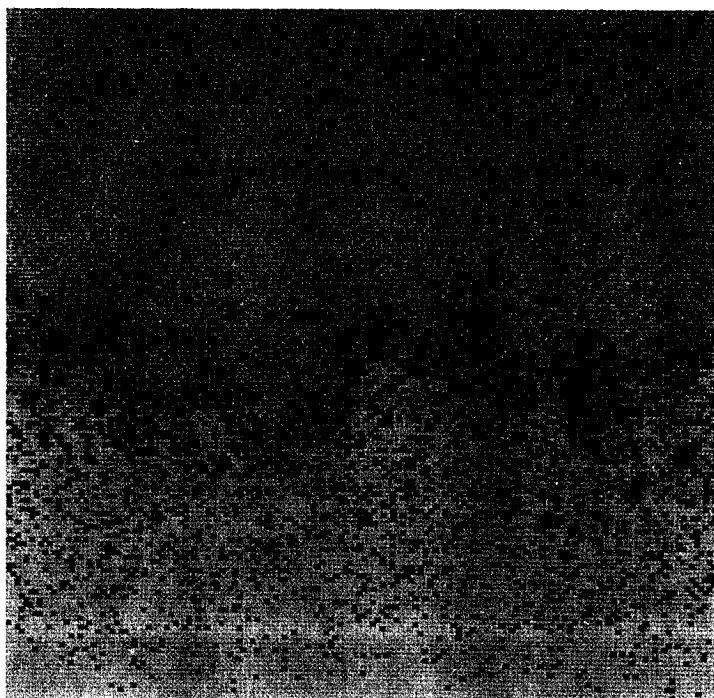


Рис. С3. Крупномасштабная система диффундирующих частиц. Экран соответствует квадратной решетке  $300 \times 300$ . Частицы, связанные с источником, изображены *зеленым* цветом, пустые узлы, связанные со стоком, изображены *бирюзовым* цветом. Частицы в изолированных кластерах (островах) изображены *светло-зеленым* цветом, изолированные пустые узлы (озера) — *темно-голубым*. Частицы острова изображены *черным* цветом.

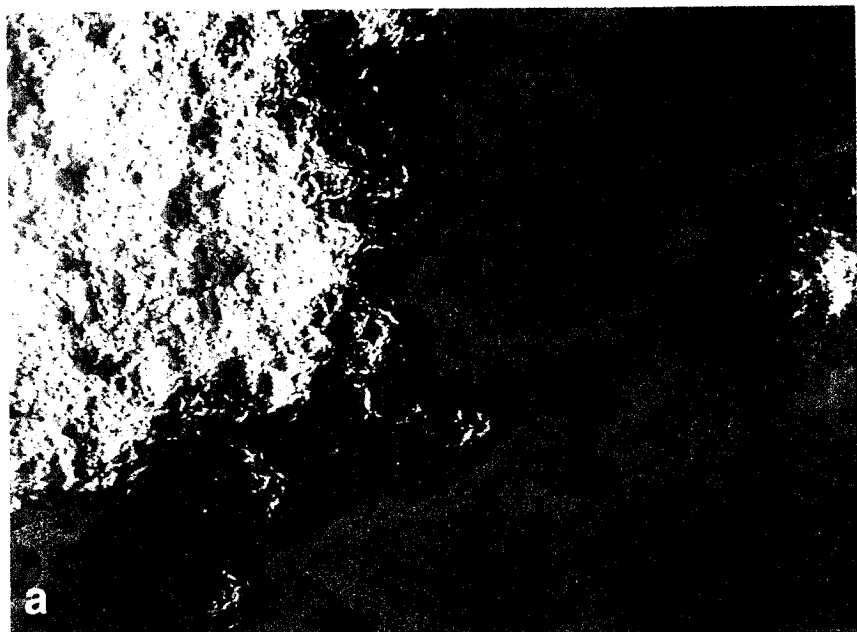
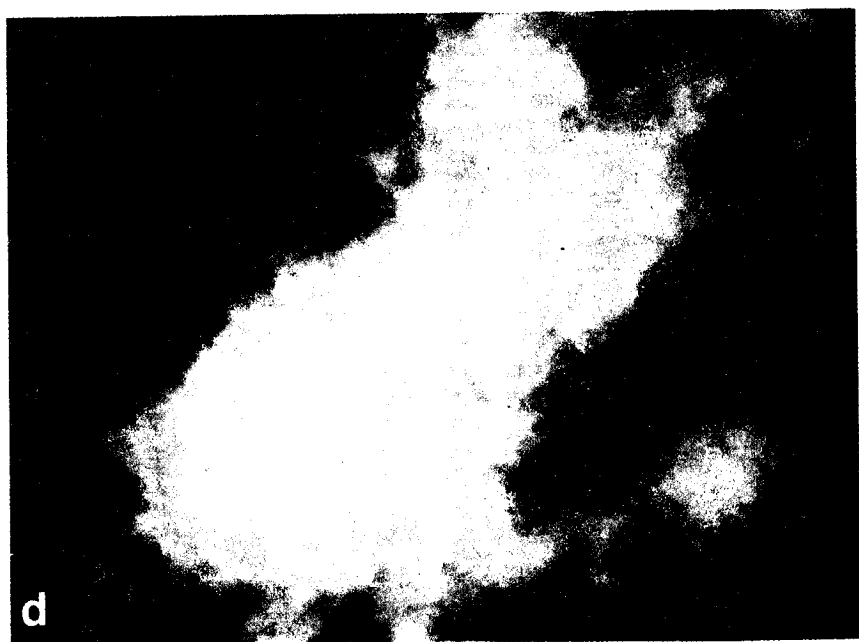
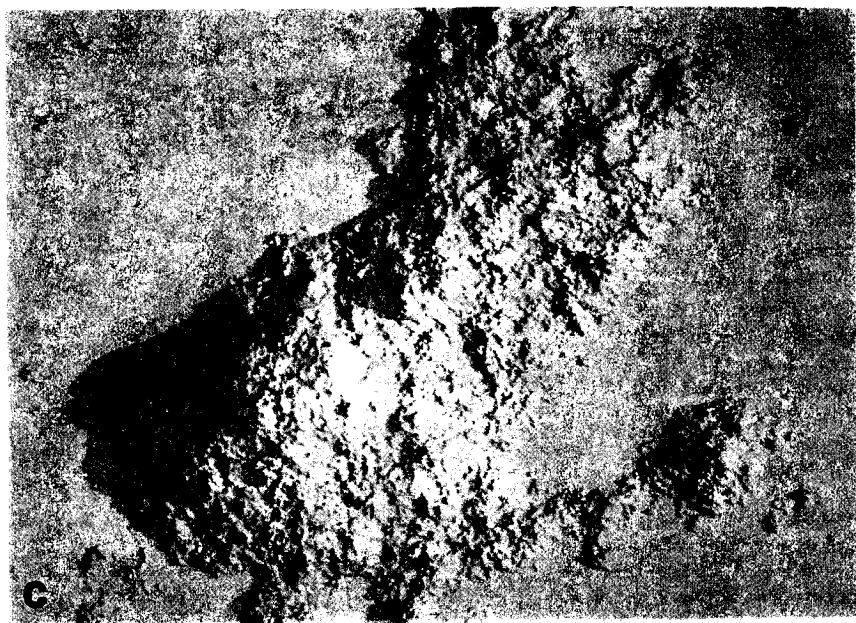


Рис. С4. Фрактальный ландшафт при  $H = 0,75$ , полученный на решетке  $2049 \times 2049$  с коэффициентом подобия  $r = 1/2$ . а – вид сверху на центральную часть  $1024 \times 800$ ; б – ландшафт в перспективе и с кривизной; с – вид сверху на весь ландшафт, д – весь ландшафт, изображенный в виде «облаков». Подробности см. в разд. 13.4. [27].



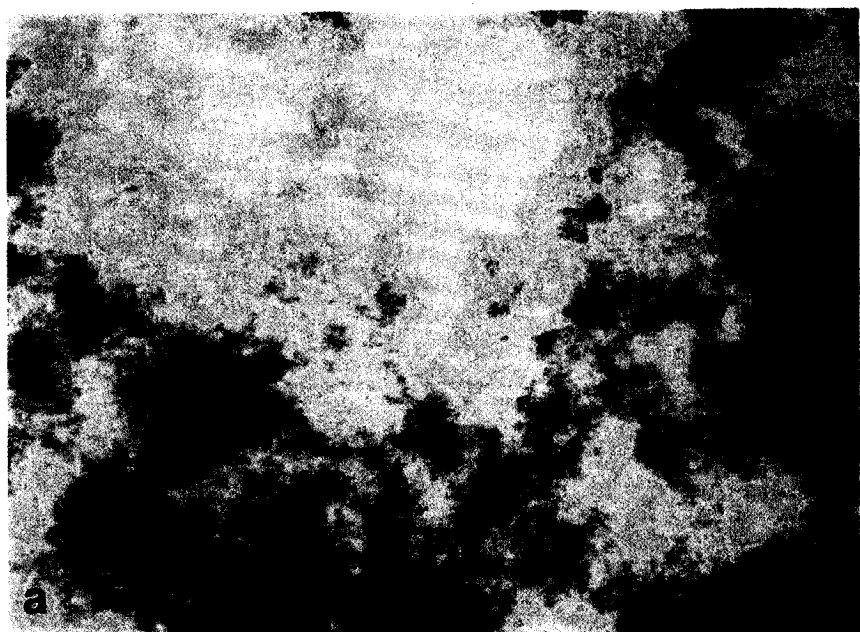


Рис. С5. Фрактальные ландшафты, изображенные в виде «облаков»: а)  $H = 0,5$  (см. рис. 13.11); б)  $H = 0,7$  (см. рис. 13.11 и 13.13) [27].

## Литература

1. Adamson A. W. (1982), Physical Chemistry of Surfaces (4th edn., J. Wiley, New York). [Имеется перевод: Адамсон А. У. Физическая химия поверхностей. — М.: Мир, 1979.]
2. Aharony A. (1985), Anomalous diffusion on percolating clusters.—In: Scaling Phenomena in Disordered Systems (eds. R. Rynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 289–300).
3. Aharony A. (1986), Percolation.—In: Directions in Condensed Matter Physics (eds. G. Grinstein & G. Mazenko, World Scientific, Singapore, pp. 1–50).
4. Aharony A. (1987), Multifractality on percolation clusters.—In: Time-Dependent Effects in Disordered Materials (eds. R. Pynn & T. Riste, Plenum Press, New York, pp. 163–171).
5. Aharony A., Stauffer D. (1987), Percolation. Encyclopedia of Physical Science and Technology, **10**, 226–244.
6. Aharony A., Gefen Y., Kapitulnik A., Murat M. (1985), Fractal eigendimensionalities for percolation clusters. Phys. Rev., **B31**, 4721–4722.
7. Amitrano C., Coniglio A., Di Liberto F. (1986), Growth probability distribution in kinetic aggregation processes. Phys. Rev. Lett., **57**, 1016–1019.
8. Avnir D., Pfeifer P. (1983), Fractal dimension in chemistry. An intensive characteristic of surface irregularity. Nouv. J. Chim., **7**, 71–72.
9. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. (1983), Chemistry in noninteger dimensions between two and three. II. Fractal surfaces of adsorbents. J. Chem. Phys., **79**, 3566–3571.
10. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. (1984), Molecular fractal surfaces. Nature, **308**, 261–263.
11. Badii R., Politi A. (1984), Hausdorff dimension and uniformity of strange attractors. Phys. Rev. Lett., **52**, 1661–1664.
12. Badii R., Politi A. (1985), Statistical description of chaotic attractors: The dimension function. J. Stat. Phys., **40**, 725–750.
13. Bak P. (1986), The devil's staircase. Phys. Today, **39**, 38–45.
14. Bale H. D., Schmidt P. W. (1984), Small-angle X-ray-scattering investigation of submicroscopic porosity with fractal properties. Phys. Rev. Lett., **53**, 596–599.
15. Barnsley M. F., Sloan A. D. (1988), A better way to compress images. Byte, **13**, 215–223.
16. Ben-Jacob E., Godbey R., Goldenfeld N. D., Koplik J., Levine H., Mueller T., Sander L. M. (1985), Experimental demonstration of the role of anisotropy in interfacial pattern formation. Phys. Rev. Lett., **55**, 1315–1318.
17. Bensimon D., Kadanoff L. P., Liang S., Shraiman B., Tang C. (1986), Viscous flows in two dimensions. Rev. Mod. Phys., **58**, 977–999.
18. Bensimon D., Jensen M. N., Kadanoff L. P. (1986), Renormalizationgroup analysis of the global structure of the period doubling attractor. Phys. Rev., **A33**, 3622–3624.
19. Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. (1984), On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. J. Phys., **A17**, 3521–3531.
20. Berg H. C. (1983), Random Walks in Biology (Princeton University Press, Princeton, New Jersey).

21. *Berry M., Hannay J.* (1978), Topography of random surfaces. *Nature*, **273**, 573.
22. *Berry M. V., Lewis Z. V.* (1980), On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Proc. R. Soc. London*, **A370**, 459–484.
23. *Billingsley P.* (1965), *Ergodic Theory and Information* (J. Wiley, New York). [Имеется перевод: *Биллингсли П. Эргодическая теория и информация*. – М.: Мир, 1969.]
24. *Billingsley P.* (1983), The singular function of bold play. *Am. Sci.*, **71**, 392–397.
25. *Blumenfeld R., Meir Y., Harris A. B., Aharony A.* (1986), Infinite set of exponents describing physics on fractal networks. *J. Phys.*, **A19**, L791–L796.
26. *Blumenfeld R., Meir Y., Aharony A., Harris A. B.* (1987), Resistance fluctuations in randomly diluted networks. *Phys. Rev.*, **B35**, 3524–3535.
27. *Boger F., Feder J., Jøssang T.* (1987), Fractal landscapes generated using Voss's successive random addition algorithm. Report Series, Cooperative Phenomena Project, Department of Physics, University of Oslo, **87-15**, 1–11.
28. *Brady R. M., Ball R. C.* (1984), Fractal growth of copper electrodeposits. *Nature*, **309**, 225–229.
29. *Broadbent S. R., Hammersley J. M.* (1957), Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53**, 629–641.
30. *Brown R.* (1828), On the existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, **4**, 162–173.
31. *Brunauer S., Emmett P. H., Teller E.* (1938), Adsorption of gases in multimolecular layers. *J. Am. Chem. Soc.*, **60**, 309–319.
32. *Buka A., Kertész J., Vicsek T.* (1986), Transitions of viscous fingering patterns in nematic liquid crystals. *Nature*, **323**, 424–425.
33. *Burrough P. A.* (1981), Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature*, **294**, 240–242.
34. *Chandler R., Koplik J., Lerman K., Willemsen J. F.* (1982), Capillary displacement and percolation in porous media. *J. Fluid Mech.*, **119**, 249–267.
35. *Chen J. D.* (1987), Pore-scale difference between miscible and immiscible viscous fingering in porous media. *AICE J.*, **33**, 307–311.
36. *Chen J. D., Wilkinson D.* (1985), Pore-scale viscous fingering in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 1892–1895.
37. *Chuoke R. L., van Meurs P., van der Poel C.* (1959), The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. *Trans. Metall. Soc. of AIME*, **216**, 188–194.
38. *Clément E., Baudet C., Hulin J. P.* (1985), Multiple scale structure of nonwetting fluid invasion fronts in 3D model porous media. *J. Phys. Lett.*, **46**, L1163–L1171.
39. *Coniglio A.* (1981), Thermal phase transition of the dilute s-state Potts and n-vector models at the percolation threshold. *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 250–253.
40. *Coniglio A.* (1982), Cluster structure near the percolation threshold. *J. Phys.*, **A15**, 3829–3844.
41. *Courtens E., Vacher R.* (1987), Structure and dynamics of fractal aerogels. *Z. Phys.*, **B68**, 355–361.
42. *Daccord G.* (1987), Chemical dissolution of a porous medium by a reactive fluid. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 479–482.
43. *Daccord G., Lenormand R.* (1987), Fractal patterns from chemical dissolution. *Nature*, **325**, 41–43.
44. *Daccord G., Nittmann J., Stanley H. E.* (1986), Fractal viscous fingers: Experimental results. – In: *On Growth and Form* (eds. H. E. Stanley & N. Ostrowsky, Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 203–210).
45. *de Arcangelis L., Redner S., Coniglio A.* (1985), Anomalous voltage distribution of random resistor networks and a new model for the backbone at the percolation threshold. *Phys. Rev.*, **B31**, 4725–4727.
46. *de Gennes P. G.* (1976), La percolation: Un concept unificateur. *La Recherche*, **7**, 919–927.
47. *de Gennes P. G., Guyon E.* (1978), Lois générales pour l'injection d'un fluide dans un milieu poreux aléatoire. *J. Mec.*, **17**, 403–432.

48. DeGregoria A.J., Schwartz L.W. (1987), Saffman-Taylor finger width at low interfacial tension. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1742-1744.
49. den Nijs M.P.M. (1979), A relation between the temperature exponents of the eight-vertex and q-state Potts model. *J. Phys.*, **A12**, 1857-1868.
50. Deutscher G., Zallen R., Adler J., eds. (1983), *Percolation Structures and Processes*. Ann. Isr. Phys. Soc., **5**.
51. Dias M.M., Wilkinson D.J., (1986), Percolation with trapping. *J. Phys.*, **A19**, 3131-3146.
52. Dubins L.E., Savage L.J. (1960), Optimal gambling systems. *PNAS*, **46**, 1597-1598.
53. Einstein A. (1905), Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.*, **322**, 549-560.
54. Engelberts W.F., Klinsenberg L.J. (1951), Laboratory experiments on the displacement of oil by water from packs of granular material. *Petr. Congr. Proc. Third World*, 544-554.
55. Englman R., Jaeger Z., eds. (1986), *Fragmentation Form and Flow in Fractured Media*. Ann. Isr. Phys. Soc., **8**.
56. Essam J.W. (1980), Percolation theory. *Rep. Prog. Phys.*, **43**, 833-912.
57. Evans D.C., Athay R.J., eds. (1986), *Computer Graphics (Siggraph 1986 Conference Proceedings, Computer Graphis 20 number 4, August 1986)*.
58. Falconer K.J. (1985), *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, Cambridge).
59. Family F., Landau D.P., eds. (1984), *Aggregation and Gelation* (North-Holland, Amsterdam).
60. Feder J., Jøssang T. (1985), A reversible reaction limiting step in irreversible immunoglobulin aggregation. - In: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 99-131).
61. Feder J., Jøssang T., Rosenqvist E. (1984), Scaling behavior and cluster fractal dimension determined by light scattering from aggregating proteins. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1403-1406.
62. Feder J., Jøssang T., Måløy K.J., Oxaal U. (1986), Models of viscous fingering. - In: *Fragmentation From and Flow in Fractured Media* (eds. R. Englman & Z. Jaeger, Ann. Isr. Phys. Soc., **8**, pp. 531-548).
63. Feigenbaum M.J., Jensen M.N., Procaccia I. (1986), Time ordering and the thermodynamics of strange sets: Theory and experimental tests. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1503-1506.
64. Feller W. (1951), The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables. *Ann. Math. Stat.*, **22**, 427-432.
65. Feller W. (1968), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (vol. 1, 3rd edition, John Wiley, London). [Имеется перевод: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. - М.: Мир, 1984.]
66. Fjørtoft R. (1982), A study of the wave climate in the Norwegian Sea. Algorithms in Markov models for deriving probabilities of certain events. *Geophys. Norv.*, **32**, 45-76.
67. Frisch U., Parisi G. (1985), On the singularity structure of fully developed turbulence. - In: *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (eds. M. Ghil, R. Benzi & G. Parisi, North-Holland, New York, pp. 84-88).
68. Frøyland J., Feder J., Jøssang T. (1988), The fractal statistics of ocean waves. Будет опубликовано.
69. Gardner M. (1976), Mathematical games. *Sci. Am.*, **235**, 124-133.
70. Gefen Y., Mandelbrot B.B., Aharony A. (1980), Critical phenomena on fractal lattices. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 855-858.
71. Gefen Y., Aharony A., Alexander S. (1983), Anomalous diffusion on percolating clusters. *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 77-80.

72. Glazier J. A., Jensen H. H., Libchaber A., Stavans J. (1986), Structure of Arnold tongues and the  $f(\alpha)$  spectrum for period doubling: Experimental results. *Phys. Rev.*, **A34**, 1621–1624.
73. Gordon J. M., Goldman A. M., Maps J., Costello D., Tiberio R., Whitehead B. (1986), Superconducting-normal phase boundary of a fractal network in a magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2280–2283.
74. Grassberger P. (1983), Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett.*, **A97**, 227–230.
75. Grassberger P., Procaccia I. (1983), Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, **9**, 189–208.
76. Grossman T., Aharony A. (1986), Structure and perimeters of percolation clusters. *J. Phys.*, **A19**, L745–L751.
77. Grossman T., Aharony A. (1987), Accessible external perimeters of percolation clusters. *J. Phys.*, **A20**, L1193–L1201.
78. Habermann B. (1960), The efficiency of miscible displacement as a function of mobility ratio. *Soc. Pet. Eng. AIEME J.*, **219**, 264–272.
79. Hack J. T. (1957), Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. *U. S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, **294-B**, 45–97.
80. Halsey T., Meakin P., Procaccia I. (1986), Scaling structure of the surface layer of diffusion-limited aggregates. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 854–857.
81. Halsey T. C., Jensen M. N., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B. I. (1986), Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Phys. Rev.*, **A33**, 1141–1151.
82. Hammersley J. M. (1983), Origins of percolation theory. – In: *Percolation Structures and Processes* (eds. G. Deutscher, R. Zallen & J. Adler, *Ann. Isr. Phys. Soc.*, **5**, pp. 47–57).
83. Havlin S., Nossal R. (1984), Topological properties of percolation clusters. *J. Phys.*, **A17**, L427–L432.
84. Hayakawa Y., Sato S., Matsushita M. (1987), Scaling structure of the growth-probability distribution in diffusion-limited aggregation processes. *Phys. Rev.*, **A36**, 1963–1966.
85. Hele-Shaw H. S. (1898), The flow of water. *Nature*, **58**, 34–36.
86. Hentschel H. G. E., Procaccia I. (1983), Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Phys. Rev.*, **A27**, 1266–1269.
87. Hentschel H. G. E., Procaccia I. (1983), The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica*, **8**, 435–444.
88. Hentschel H. G. E., Procaccia I. (1984), Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds. *Phys. Rev.*, **A29**, 1461–1470.
89. Herrmann H. J. (1986), Geometrical cluster growth models and kinetic gelation. *Phys. Rep.*, **136**, 154–227.
90. Herrmann H. J., & Stanley H. E. (1984), Building blocks of percolation clusters: Volatile fractals. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1121–1124.
91. Hewett T. A. (1986), Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport. Paper SPE 15386 presented at the 61st Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, Oct. 5–8, 1986.
92. Hinrichsen E., Feder J., Jøssang T. (1987), DLA growth from a line. Report Series, Cooperative Phenomena Project, Department of Physics, University of Oslo, **87-11**, 1–21.
93. Homsy G. M. (1987), Viscous fingering in porous media. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**, 271–311.
94. Horton R. E. (1945), Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **56**, 275–370.
95. Horváth V., Vicsek T., Kertész J. (1987), Viscous fingering with imposed uniaxial anisotropy. *Phys. Rev.*, **A35**, 2353–2356.
96. Hurst H. E. (1951), Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Am. Soc. Civ.*

Eng., **116**, 770–808.

97. *Hurst H. E., Black R. P., Simaika Y. M.* (1965), Long-Term Storage: An Experimental Study (Constable, London).
98. *Jensen M. H., Bak P., Bohr T.* (1983), Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in circle maps. *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 1637–1639.
99. *Jensen M. H., Bak P., Bohr T.* (1984), Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems I. Circle maps. *Phys. Rev.*, **A30**, 1960–1969.
100. *Jensen M. H., Bak P., Bohr T.* (1984), Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps. *Phys. Rev.*, **A30**, 1970–1981.
101. *Jensen M. H., Kadanoff L. P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J.* (1985), Global universality at the onset of chaos: Results of a forced Rayleigh-Bénard experiment. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2798–2801.
102. *Jensen M. H., Libchaber A., Pelcé P., Zocchi G.* (1987), Effect of gravity on the Saffman-Taylor meniscus: Theory and experiment. *Phys.*, **A35**, 2221–2227.
103. *Jøssang T., Feder J., Rosenqvist E.* (1984), Heat aggregation kinetics of human IgG. *J. Chem. Phys.*, **120**, 1–30.
104. *Jullien R., Botet R.* (1987), *Aggregation and Fractal Aggregates* (World Scientific, Singapore).
105. *Kapitulnik A., Aharony A., Deutscher G., Stauffer D.* (1983), Self similarity and correlations in percolation. *J. Phys.*, **A16**, L269–L274.
106. *Katz A. J., Thompson A. H.* (1985), Fractal sandstone pores: Implications for conductivity and pore formation. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1325–1328.
107. *Katz A. J., Thompson A. H.* (1986), Katz and Thompson respond. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2112.
108. *Katzen D., Procaccia I.* (1987), Phase transitions in the thermodynamic formalism of multifractals. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1169–1172.
109. *Kirkpatrick S.* (1973), Percolation and conduction. *Rev. Mod. Phys.*, **45**, 574–588.
110. *Kjems J., Freltoft T.* (1985), Neutron and X-ray scattering from aggregates. In: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 133–140).
111. *Laidlaw D., MacKay G., Jan N.* (1987), Some fractal properties of the percolating backbone in two dimensions. *J. Stat. Phys.*, **46**, 507–515.
112. *Langbein W. W. et al.* (1947), Topographic characteristics of drainage basins. *U.S. Geol. Surv. Water-Supply Pap.*, **968-C**, 125–157.
113. *Lenormand R.* (1985), Différentes mécanismes de déplacements visqueux et capillaires en milieux poreux: Diagramme de phase. *C. R. Acad. Sci. Paris Serv. II*, **301**, 247–250.
114. *Lenormand R., Zarcone C.* (1985), Invasion percolation in an etched network: Measurement of a fractal dimension. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 2226–2229.
115. *Lenormand R., Zarcone C.* (1985), Two-phase flow experiments in a two-dimensional permeable medium. *Physico-Chemical Hydrodynamics*, **6**, 497–506.
116. *Lovejoy S.* (1982), Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*, **216**, 185–187.
117. *Lovejoy S., Mandelbrot B. B.* (1985), Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus*, **37A**, 209–232.
118. *Lovejoy S., Schertzer D.* (1985), Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain. *Water Resour. Res.*, **21**, 1233–1250.
119. *Lovejoy S., Schertzer D., Tsonis A. A.* (1987), Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain. *Science*, **235**, 1036–1038.
120. *Maher J. V.* (1985), Development of viscous fingering patterns. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1498–1501.
121. *Makarov N. G.* (1985), On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc.*, **51**, 369–384.
122. *Måløy K. J., Feder J., Jøssang T.* (1985), Viscous fingering fractals in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2688–2691.

123. Måløy K. J., Feder J., Jøssang T. (1985), Radial viscous fingering in a Hele-Shaw cell. Report Series, Cooperative Phenomena Project, Department of Physics, University of Oslo, **85-9**, 1–15.
124. Måløy K. J., Boger F., Feder J., Jøssang T., Meakin P. (1987), Dynamics of viscous-fingering fractals in porous media. *Phys. Rev.*, **A36**, 318–324.
125. Måløy K. J., Boger F., Feder J., Jøssang T. (1987), Dynamics and structure of viscous fingers in porous media.—In: *Time-Dependent Effects in Disordered Materials* (eds. R. Pynn & T. Riste, Plenum Press, New York, pp. 111–138).
126. Måløy K. J., Feder J., Jøssang T. (1987), Viscous fingering in a 2-dimensional strip geometry. Report Series, Cooperative Phenomena Project, Department of Physics, University of Oslo, **87-10**, 1–11.
127. Mandelbrot B. B. (1967), How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractal dimension. *Science*, **155**, 636–638.
128. Mandelbrot B. B. (1971), A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resour. Res.*, **7**, 543–553.
129. Mandelbrot B. B. (1972), Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence.—In: *Statistical Models and Turbulence* (eds. M. Rosenblatt & C. Van Atta, Lecture Notes in Physics 12, Springer, New York, pp. 333–351).
130. Mandelbrot B. B. (1974), Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, **62**, 331–358.
131. Mandelbrot B. B. (1975), *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension* (Flammarion, Paris).
132. Mandelbrot B. B. (1975), Stochastic models of the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **72**, 3825–3828.
133. Mandelbrot B. B. (1977), *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (W. H. Freeman, San Francisco).
134. Mandelbrot B. B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, New York). Ссылки на страницы даны по изданию 1983 г.
135. Mandelbrot B. B. (1983), Fractals in physics: Squig clusters, diffusions, fractal measures, and the unicity of fractal dimensionality. *J. Stat. Phys.*, **34**, 895–930.
136. Mandelbrot B. B. (1985), Self-affine fractals and fractal dimension. *Phys. Phys. Scr.*, **32**, 257–260.
137. Mandelbrot B. B. (1986), Self-affine fractal sets.—In: *Fractals in Physics* (eds. L. Pietronero & E. Tosatti, North-Holland, Amsterdam, pp. 3–28). [Имеется перевод: Фракталы в физике/Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.—М: Мир, 1988, с. 9.]
138. Mandelbrot B. B. (1987), Fractals. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, **5**, 579–593.
139. Mandelbrot B. B. (1988), *Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies* (Springer, New York).
140. Mandelbrot B. B., Given J. A. (1984), Physical properties of a new fractal model of percolation clusters: *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1853–1856.
141. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. (1968), Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, **10**, 422–437.
142. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1968), Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resour. Res.*, **4**, 909–918.
143. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1969), Some long-run properties of geophysical records. *Water Resour. Res.*, **5**, 321–340.
144. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1969), Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 1, Averages and variances. *Water Resour. Res.*, **5**, 228–241.
145. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1969), Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 2, Rescaled ranges and spectra. *Water Resour. Res.*, **5**, 242–259.
146. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1969), Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part 3, Mathematical appendix. *Water Resour. Res.*, **5**, 260–267.

147. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. (1969), Robustness of the rescaled range  $R/S$  in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resour. Res.*, **5**, 967–988.
148. Mandelbrot B. B., Passoja D. E., Paullay A. J. (1984), Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, **308**, 721–722.
149. Margolina A., Nakanishi H., Stauffer D., Stanley H. (1984), Monte Carlo and series study of corrections to scaling in two-dimensional percolation. *J. Phys.*, **A17**, 1683–1701.
150. Matsushita M., Sano M., Hayakawa Y., Honjo H., Sawada Y. (1984), Fractal structures of zinc metal leaves grown by electrodeposition. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 286–289.
151. Matsushita M., Hayakawa Y., Sawada Y. (1985), Fractal structure and cluster statistics of zinc–metal trees deposited on a line electrode. *Phys. Rev.*, **A32**, 3814–3816.
152. Mauldin R. D. (1986), On the Hausdorff dimension of graphs and random recursive objects.–In: *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems* (ed. G. Mayer-Kress, Springer-Verlag, Berlin, pp. 28–33).
153. Meakin P. (1983), Diffusion-controlled cluster formation in 2–6 dimensional space. *Phys. Rev.*, **A27**, 1495–1507.
154. Meakin P. (1987), The growth of fractal aggregates.–In: *Time-Dependent Effects in Disordered Materials* (eds. R. Pynn & T. Riste, Plenum Press, New York, pp. 45–70).
155. Meakin P. (1987), Scaling properties for the growth probability measure and harmonic measure of fractal structures. *Phys. Rev.*, **A35**, 2234–2245.
156. Meakin P. (1987), Fractal aggregates and their fractal measures.–In: *Phase Transitions and Critical Phenomena* (eds. C. Domb & J. L. Lebowitz, Academic Press, New York).
157. Meakin P., Witten T. A. (1983), Growing interface in diffusion-limited aggregation. *Phys. Rev.*, **A28**, 2985–2989.
158. Meakin P., Stanley H. E., Coniglio A., Witten T. A. (1985), Surfaces, interfaces, and screening of fractal structures. *Phys. Rev.*, **A32**, 2364–2369.
159. Meakin P., Coniglio A., Stanley H. E., Witten T. A. (1986), Scaling properties for the surfaces of fractal and nonfractal objects: An infinite hierarchy of critical exponents. *Phys. Rev.*, **A34**, 3325–3340.
160. Meneveau C., Sreenivasan K. R. (1987), Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1424–1427.
161. Miller G. S. P. (1986), The definition and rendering of terrain maps. *Computer Graphics*, **20**, 39–48.
162. Murat M., Aharony A. (1986), Viscous fingering and diffusion-limited aggregates near percolation. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1875–1878.
163. Niemeyer L., Pietronero L., Wiesman H. J. (1984), Fractal dimension of dielectric breakdown. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1033–1036.
164. Nittman J., Stanley H. E. (1986), Tip splitting without interfacial tension and dendritic growth patterns arising from molecular anisotropy. *Nature*, **321**, 663–668.
165. Nittmann J., Daccord G., Stanley H. E. (1985), Fractal growth of viscous fingers: Quantitative characterization of a fluid instability phenomenon. *Nature*, **314**, 141–144.
166. Nittmann J., Stanley H. E., Touboul E., Daccord G. (1987), Experimental evidence for multifractality. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 619.
167. Oppenheimer P. E. (1986), Real time design and animation of fractal plants and trees. *Computer Graphics*, **20**, 55–64.
168. Oxaal U., Murat M., Boger F., Aharony A., Feder J., Jø ssang T. (1987), Viscous fingering on percolation clusters. *Nature*, **329**, 32–37.
169. Paterson L. (1981), Radial fingering in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, **113**, 513–529.
170. Paterson L. (1984), Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacements in porous media. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1621–1624.

171. *Paterson L., Hornhof V., Neale G.* (1982), A consolidated porous medium for the visualization of unstable displacements. *Powder Technol.*, **33**, 265–268.
172. *Peitgen H.-O.* (1988), *The Art of Fractals, A Computer Graphical Introduction.* (Будет опубликовано, Springer-Verlag, Berlin.)
173. *Peitgen H.-O., Richter P.H.* (1986), *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Berlin).
174. *Pfeifer P., Avnir D.* (1983), Chemistry in noninteger dimensions between two and three. I. Fractal theory and heterogeneous surfaces. *J. Chem. Phys.*, **79**, 3558–3565. Erratum: *J. Chem. Phys.* (1984) **80**, 4573.
175. *Pfeifer P., Avnir D., Farin D.* (1983), Ideally irregular surfaces, of dimension greater than two, in theory and practice. *Surface Sci.*, **126**, 569–572.
176. *Pfeifer P., Avnir D., Farin D.* (1984), Scaling behavior of surface irregularity in the molecular domain: From adsorption studies to fractal catalysts. *J. Stat. Phys.*, **36**, 699–716.
177. *Pietronero L., Tosatti E.*, (1986), *Fractals in Physics* (North-Holland, Amsterdam). [Имеется перевод: Фракталы в физике/Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.–М.: Мир, 1988.]
178. *Pike R., Stanley H.E.* (1981), Order propagation near the percolation threshold. *J. Phys.*, **A14**, L169–L177.
179. *Procaccia I.* (1986), The characterization of fractal measures as interwoven sets of singularities: Global universality at the transition to chaos.–In: *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems* (ed. G. Mayer-Kress, Springer-Verlag, Berlin, pp. 8–18).
180. *Pynn R., Riste T.*, eds. (1987), *Time-Dependent Effects in Disordered Materials* (Plenum Press, New York).
181. *Pynn R., Skjeltorp A.*, eds. (1985), *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (Plenum Press, New York).
182. *Rammal R., Tannous C., Breton P., Tremblay A.M.S.* (1985), Flicker ( $1/f$ ) noise in percolation networks: A new hierarchy of exponents. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1718–1721.
183. *Reynolds P.J., Klein W., Stanley H.E.* (1977), A real-space renormalization group for site and bond percolation. *J. Phys.*, **C10**, L167–L172.
184. *Roberts J.N.* (1986), Comment about fractal sandstone pores. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2111.
185. *Rojanski D., Huppert D., Bale H.D., Dacai X., Smith P.W., Farin D., Seri-Levy A., Avnir D.* (1986), Integrated fractal analysis of silica: Absorption, electronic energy transfer, and small-angle X-ray scattering. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2505–2508.
186. *Rosso M., Gouyet J.F., Sapoval B.* (1985), Determination of percolation probability from the use of a concentration gradient. *Phys. Rev.*, **B32**, 6053–6054.
187. *Rosso M., Gouyet J.F., Sapoval B.* (1986), Gradient percolation in three dimensions and relation to diffusion fronts. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3195–3198.
188. *Rys F.S., Waldvogel A.* (1986), Fractal shape of hail clouds. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 784–787.
189. *Saffman P.G., Taylor G.I.* (1958), The penetration of a fluid into a medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. Lond.*, **245**, 312–329.
190. *Saleur H., Duplantier B.* (1987), Exact determination of the percolation hull exponent in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2325–2328.
191. *Sapoval B., Rosso M., Gouyet J.F.* (1986), The fractal nature of a diffusing front and the relation to percolation. *J. Phys. Lett.*, **46**, L149–L156.
192. *Sapoval B., Rosso M., Gouyet J.F., Colonna J.F.* (1986), Dynamics of the creation of fractal objects by diffusion and  $1/f$  noise. *Solid State Ionics*, **18**, 21–30.
193. *Sayles R.S., Thomas T.R.* (1978), Surface topography as a nonstationary random process. *Nature*, **271**, 431–434.
194. *Sayles R.S., Thomas T.R.* (1978), Reply to 'Topography of random surfaces' by M.V. Berry and J.H. Hannay (1978), *Nature*, **273**, 573.
195. *Schaefer D.W., Martin J.E., Wiltzius P., Cannell D.S.* (1984), Fractal geometry of

- colloidal aggregates. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 2371–2374.
196. *Shante V.K.S., Kirkpatrick S.* (1971), An introduction to percolation theory. *Adv. Phys.*, **20**, 325–357.
  197. *Shaw T.M.* (1987), Drying as an immiscible displacement process with fluid counterflow. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1671–1674.
  198. *Sinha S.K., Freltoft T., Kjems J.* (1984), Observation of power-law correlations in silica-particle aggregates by small angle neutron scattering.—In: *Aggregation and Gelation* (eds. F. Family & D.P. Landau, North-Holland, Amsterdam, pp. 87–90).
  199. *Skal A.S., Shlovskii B.I.* (1975), Topology of an infinite cluster in the theory of percolation and its relationship to the theory of percolation and its relationship to the theory of hopping conduction. *Sov. Phys. Semicond.*, **8**, 1029–1032. [Имеется перевод: *Скал А.А., Шкловский Б.И.* Топология бесконечного кластера в теории протекания и теория прыжковой проводимости.—*Физ. техн. полу-пров.*, 1974, т. 8, вып. 8, с. 1586–1592.]
  200. *Sørensen P.R.* (1984), Fractals: Exploring the rough edges between dimensions. *Byte*, **9**, 157–172.
  201. *Stanley H.E.* (1977), Cluster shapes at the percolation threshold: An effective cluster dimensionality and its connection with critical point exponents. *J. Phys.*, **A10**, L211–L220.
  202. *Stanley H.E.* (1985), Fractal concepts for disordered systems: The interplay of physics and geometry.—In: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 49–69).
  203. *Stanley H.E., Ostrowsky N.*, eds. (1985), *On Growth and Form* (Martinus Nijhoff, Dordrecht).
  204. *Stauffer D.* (1979), Scaling theory of percolation clusters. *Phys. Res.*, **54**, 1–74.
  205. *Stauffer D.* (1985), *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London).
  206. *Stauffer D.* (1986), Percolation and cluster size distribution.—In: *On Growth and Form* (eds. H.E. Stanley & N. Ostrowsky, Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 79–100).
  207. *Stokes J.P., Weitz D.A., Gollub J.P., Dougherty A., Robbins M.O., Chaikin P.M., Lindsay H.M.* (1986), Interfacial stability of immiscible displacement in a porous medium. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1718–1721.
  208. *Sykes M.F., Essam J.W.* (1964), Exact critical percolation probabilities for site and bond percolation in two dimensions. *J. Math. Phys.*, **5**, 117–1127.
  209. *van Meurs P.* (1957), The use of transparent three-dimensional models for studying the mechanism of flow processes in oil reservoirs. *Trans. AIME*, **210**, 295–301.
  210. *van Meurs P., van der Poel C.* (1958), A theoretical description of water-drive processes involving viscous fingering. *Trans. AIME*, **213**, 103–112.
  211. *van Smoluchowski M.* (1916), Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Z.*, **17**, 557–599.
  212. *Voss R.F.* (1984), The fractal dimension of percolation cluster hulls. *J. Phys.*, **A17**, L373–L377.
  213. *Voss R.F.* (1985), Random fractals: Characterization and measurement.—In: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 1–11).
  214. *Voss R.F.* (1985), Random fractal forgeries.—In: *Fundamental Algorithms in Computer Graphics* (ed. R.A. Earnshaw, Springer-Verlag, Berlin, pp. 805–835). Цветные фотографии на с. 13–16.
  215. *Weitz D.A., Huang J.S.* (1984), Self-similar structures and the kinetics of aggregation of gold colloids.—In: *Aggregation Gelation* (eds. F. Family & D.P. Landau, North-Holland, Amsterdam, pp. 19–28).
  216. *Weitz D.A., Oliveria M.* (1984), Fractal structures formed by kinetic aggregation of aqueous gold colloids. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1433–1436.
  217. *Weitz D.A., Lin M.Y., Huang J.S., Witten T.A., Sinha S.K., Gertner J.S., Ball C.* (1985), Scaling in colloid aggregation.—In: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp, Plenum Press, New York, pp. 171–188).

- 218. Wiener N. (1923), Differential-space. J. Math. Phys. Mass. Inst. Technol., **2**, 131–174.
- 219. Wilkinson D., Willemsen J. F. (1983), Invasion percolation: A new from of percolation theory. J. Phys., **A16**, 3365–3376.
- 220. Witten T. A., Sander L. m. (1983), Diffusion-limited aggregation. Phys. Rev., **B27**, 5686–5697.
- 221. Wong P.-Z. (1985), Scattering by homogeneous systems with rough internal surfaces: Porous solids and random-field Ising systems. Phys. Rev., **B32**, 7417–7424.
- 222. Wong P.-Z., Howard J., Lin J.-S. (1985), Surface roughening and the fractal nature of rocks. Schlumberger-Dell Research Preprint.
- 223. Young A. P., Stinchcombe R. B. (1975), A renormalization group theory for percolation problems. J. Phys., **C8**, L535–L540.
- 224. Ziff R. M. (1986), Test of scaling exponents for percolation-cluster perimeters. Phys. Rev. Lett., **56**, 545–548.

# Оглавление

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                  | 5   |
| От автора . . . . .                                                    | 6   |
| Глава 1. Введение . . . . .                                            | 8   |
| Глава 2. Фрактальная размерность . . . . .                             | 14  |
| 2.1. Береговая линия Норвегии . . . . .                                | 14  |
| 2.2. Парадокс Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра . . . . . | 17  |
| 2.3. Фрактальная размерность . . . . .                                 | 19  |
| 2.4. Тriaдная кривая Кох . . . . .                                     | 23  |
| 2.5. Подобие и скейлинг . . . . .                                      | 26  |
| 2.6. Кривые Мандельброта–Гивена и Серпинского . . . . .                | 30  |
| 2.7. Еще о скейлинге . . . . .                                         | 34  |
| 2.8. Функция Вейерштрасса–Мандельброта . . . . .                       | 35  |
| Глава 3. Фрактальная размерность кластеров . . . . .                   | 39  |
| 3.1. Измерения фрактальных размерностей кластеров . . . . .            | 43  |
| Глава 4. Образование вязких пальцев в пористых средах . . . . .        | 48  |
| 4.1. Течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу . . . . .                      | 48  |
| 4.2. Вязкие пальцы в ячейках Хеле-Шоу . . . . .                        | 52  |
| 4.3. Вязкие пальцы в двумерных пористых средах . . . . .               | 55  |
| 4.4. Образование вязких пальцев и ОДА . . . . .                        | 60  |
| 4.5. Вязкие пальцы в трехмерных пористых средах . . . . .              | 63  |
| Глава 5. Канторовские множества . . . . .                              | 68  |
| 5.1. Тriaдное канторовское множество . . . . .                         | 68  |
| 5.2. Скейлинг с неравными отношениями . . . . .                        | 70  |
| Глава 6. Мультифрактальные меры . . . . .                              | 72  |
| 6.1. Свертывание и чертова лестница . . . . .                          | 73  |
| 6.2. Биномиальный мультипликативный процесс . . . . .                  | 76  |
| 6.3. Фрактальные подмножества . . . . .                                | 79  |
| 6.4. Показатель Липшица–Гельдера $\alpha$ . . . . .                    | 81  |
| 6.5. Кривая $f(\alpha)$ . . . . .                                      | 82  |
| 6.6. Концентрация меры . . . . .                                       | 84  |
| 6.7. Последовательность показателей массы $\tau(q)$ . . . . .          | 85  |
| 6.8. Соотношение между $\tau(q)$ и $f(\alpha)$ . . . . .               | 88  |
| 6.9. Свертывание с несколькими масштабами длины . . . . .              | 90  |
| 6.10. Мультифрактальная конвекция Рэлея–Бенара . . . . .               | 94  |
| 6.11. ОДА и гармонические меры . . . . .                               | 97  |
| 6.12. Мультифрактальный рост вязких пальцев . . . . .                  | 100 |
| Глава 7. Протекание . . . . .                                          | 108 |
| 7.1. Протекание от узла к узлу на квадратной решетке . . . . .         | 109 |
| 7.2. Бесконечный кластер при $p_c$ . . . . .                           | 113 |

|                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3. Самоподобие перколяционных кластеров . . . . .                                   | 115        |
| 7.4. Конечные кластеры при протекании . . . . .                                       | 121        |
| 7.5. Распределение величины кластеров при $p = p_c$ . . . . .                         | 123        |
| 7.6. Корреляционная длина $\xi$ . . . . .                                             | 126        |
| 7.7. Остов перколяционного кластера . . . . .                                         | 129        |
| 7.8. Перколяция с вытеснением . . . . .                                               | 135        |
| 7.9. Фрактальный диффузионный фронт . . . . .                                         | 142        |
| <b>Глава 8. Фрактальные временные ряды . . . . .</b>                                  | <b>151</b> |
| 8.1. Эмпирический закон Херста и метод нормированного раз-<br>маха . . . . .          | 151        |
| 8.2. Моделирование случайных рядов . . . . .                                          | 156        |
| 8.3. Моделирование долговременных изменений . . . . .                                 | 159        |
| <b>Глава 9. Случайное блуждание и фракталы . . . . .</b>                              | <b>164</b> |
| 9.1. Броуновское движение . . . . .                                                   | 164        |
| 9.2. Одномерное случайное блуждание . . . . .                                         | 165        |
| 9.3. Свойства подобия одномерных случайных блужданий . . . . .                        | 167        |
| 9.4. Обобщенное броуновское движение . . . . .                                        | 170        |
| 9.5. Определение обобщенного броуновского движения . . . . .                          | 172        |
| 9.6. Моделирование обобщенного броуновского движения . . . . .                        | 174        |
| 9.7. Метод $R/S$ для обобщенного броуновского движения . . . . .                      | 178        |
| 9.8. Последовательные случайные сложения . . . . .                                    | 179        |
| <b>Глава 10. Самоподобие и самоаффинность . . . . .</b>                               | <b>183</b> |
| 10.1. Стратегия смелой игры . . . . .                                                 | 187        |
| <b>Глава 11. Статистика высоты волн . . . . .</b>                                     | <b>191</b> |
| 11.1. Метод $R/S$ для наблюдений $h_s$ . . . . .                                      | 192        |
| 11.2. $R/S$ для данных, очищенных от сезонных вариаций . . . . .                      | 193        |
| <b>Глава 12. Соотношение периметра и площади . . . . .</b>                            | <b>197</b> |
| 12.1. Фрактальная размерность облаков . . . . .                                       | 199        |
| 12.2. Фрактальная размерность рек . . . . .                                           | 205        |
| <b>Глава 13. Фрактальные поверхности . . . . .</b>                                    | <b>209</b> |
| 13.1. Фрактальная поверхность Кох . . . . .                                           | 209        |
| 13.2. Поверхности случайного переноса . . . . .                                       | 210        |
| 13.3. Построение фрактальных поверхностей . . . . .                                   | 213        |
| 13.4. Поверхности случайного сложения . . . . .                                       | 220        |
| 13.5. Комментарии к фрактальным пейзажам . . . . .                                    | 225        |
| <b>Глава 14. Исследования фрактальных поверхностей . . . . .</b>                      | <b>226</b> |
| 14.1. Наблюдаемая топография поверхностей . . . . .                                   | 226        |
| 14.2. Фрактальная размерность ландшафтов и параметров окру-<br>жающей среды . . . . . | 231        |
| 14.3. Молекулярные фрактальные поверхности . . . . .                                  | 232        |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                           | <b>249</b> |