

К.Симо

**Х.Брур
Дж.Джервер
А.Джиорджилли
В.Ф.Лазуткин
Р.Монтгомери
С.Смейл
Т.Стучи
А.Шенсине**

**Перевод
с английского
под редакцией
А.В.Борисова
и А.А.Килина**

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ХАОСА И НЕЛИНЕЙНОСТИ



Москва • Ижевск

2002

УДК 530

Серия «Компьютинг в математике, физике, биологии»

Редакционный совет:

Главный редактор: В. А. Садовничий

Ответственный редактор: А. В. Борисов

Члены редакционного совета:

И. Антониу, В. В. Белокуров, А. В. Болсинов, К. А. Валиев, В. А. Журавлев,
А. А. Килин, В. В. Козлов, В. Д. Лахно, И. С. Мамаев, И. Пригожин, К. Симо,
И. А. Тайманов, Д. В. Трещев, О. А. Хрусталев, А. И. Шафаревич

Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др.

Современные проблемы хаоса и нелинейности. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 304 стр.

Данная книга представляет собой первый шаг в направлении обобщения и классификации самых современных результатов по проблемам компьютерных исследований нелинейных систем. В книге приведены наиболее интересные статьи К.Симо и других авторов посвященные, как изучению хаоса, его структуры, сценариев развития, так и поиску новых периодических решений, их бифуркациям и т. д.

Книга будет интересна как студентам физико-математических специальностей, так и специалистам в области нелинейных динамических систем и теории хаоса.

ISBN 5-93972-099-4

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

Содержание

Предисловие	8
<i>К. Симо. Эффективные вычисления в гамильтоновой динамике</i> .	10
1. Введение	10
2. Глобальное описание орбит вблизи точки L_2	12
2.1. Уравнения движения	13
2.2. Решение в формальных рядах	15
2.3. Результаты и тесты	17
2.4. Редукция на центральное многообразие вблизи L_2	23
3. Орбиты вблизи точки L_5 в модели ОЗТТ	26
3.1. Границы области практической устойчивости	28
3.2. Неустойчивые $2D$ -торы: обнаружение и численные эксперименты	32
3.3. Обобщение: численное получение инвариантных торов.	36
Литература	38
<i>А. Джиорджилли, В. Ф. Лазуткин, К. Симо. Визуализация гиперболической структуры для отображений, сохраняющих площадь</i> .	41
1. Введение	41
2. Описание модели. Свойство сжатия	44
3. Метод визуализации	48
4. Первая последовательность перенормировок.	50
5. Нерегулярности и острова	53
6. Случай малых значений g	59
7. Заключение	59
Литература	62
<i>К. Симо. Инвариантные кривые аналитически возмущенных, неукручивающих, сохраняющих площадь отображений</i>	64
1. Введение	64
2. Возмущение однопараметрических семейств...	66
3. Примеры. Меандровые кривые высшего порядка	74
4. Возмущения специального типа	80

5. Вырожденность закручивания высокого порядка	81
6. Более вырожденные случаи. Лабиринтные кривые	83
7. Перспективы	85
Литература	88
<i>К. Симо, Т. Стучи. Центральные устойчивые/неустойчивые многообразия и разрушение КАМ-торов в плоской задаче Хилла</i>	<i>90</i>
1. Введение	91
2. Гамильтониан задачи Хилла и его регуляризация	93
2.1. От плоской ОЗГТ к гамильтониану задачи Хилла	93
2.2. Регуляризация Леви-Чивита	96
2.3. Построение сечений Пуанкаре	98
3. Общие свойства задачи Хилла	100
3.1. Неподвижные точки и кривая нулевой скорости	100
3.2. Низкие уровни энергии и периодические орбиты Хилла	101
3.3. Локальное поведение вблизи точек либрации	102
4. Предварительные численные результаты	104
5. Ляпуновские и другие основные периодические орбиты	109
6. Глобальное описание при энергиях ниже критической	114
6.1. Периодические орбиты и число вращения	114
6.2. Меандровые инвариантные кривые	117
6.3. Зоны хаоса, максимальные показатели Ляпунова и степень неинтегрируемости	120
6.4. Набросок глобальной динамики	123
7. Гомо- и гетероклинические пересечения при h , близких к $\frac{1}{18}$	124
7.1. Гомо- и гетероклинические пересечения, связанные с ляпуновскими орбитами	125
7.2. Пересечения многообразий хилловских и ляпуновских п.о.	127
8. Глобализация $W^{U,S}$ для ляпуновских орбит и разрушение КАМ-торов	129
9. Итоги, приложения и перспективы	135
Литература	140
<i>Х. Брур, К. Симо. Уравнение Хилла с квазипериодической вынуждающей силой: резонансные полуострова, очаги неустойчивости и глобальные явления</i>	<i>142</i>
1. Введение	142
1.1. Постановка задачи	142
1.2. Задачи и результаты	144

1.2.1. Резонансные полуострова	144
1.2.2. Очаги неустойчивости	144
1.2.3. Дальнейшие задачи, численное исследование	146
2. Резонансные полуострова	151
3. Очаги неустойчивости	155
4. Глобальные свойства	155
4.1. Окрестность границ полуостровов	155
4.2. Коллапс резонансов	156
5. Подробное численное исследование	159
5.1. Фазовое пространство. Исключение неустойчивости	160
5.2. Фурье-анализ	163
5.3. Поведение λ и ρ вблизи линии коллапса	166
5.4. Разрушение торов	170
6. Выводы и перспективы	174
7. Приложение	176
7.1. Вычисление $M(\theta)$	176
7.2. Процесс интерполяции	177
7.3. Оценки λ и ρ	178
7.4. Процесс сканирования	180
7.5. Фурье-анализ	180
Литература	181
<i>А. Шенсине, Р. Монтгомери. Замечательное периодическое решение задачи трех тел в случае равных масс</i>	<i>183</i>
1. Постановка задачи	183
2. Орбита	186
3. Структура доказательства	187
4. Исключение столкновений	189
5. Вычисления длины	193
5.1. Фактор-отображение.	193
5.2. Метрика орбиты	194
5.3. Длина ℓ_0 в сферических координатах.	195
6. Симметрии: доказательство существования «восьмерки»	197
Литература	204
<i>А. Шенсине, Р. Монтгомери, К. Симо, Дж. Джервер. Простые хореографические движения N тел: предварительное изучение</i>	<i>206</i>
1. Введение	207
1.1. Литература	210
2. Простые хореографии. Теорема	211

2.1. Альтернативное описание	212
2.2. Замечание по поводу наложения дополнительных симметрий	213
3. Доказательство	214
4. Численные исследования	217
4.1. Методы минимизации	217
4.2. Метод Ньютона	219
5. Основные хореографии, сопутствующие хореографии и линейные цепочки	220
5.1. Об основных и сопутствующих хореографиях	220
5.1.1. Субгармоники	220
5.1.2. Относительные хореографии	222
5.1.3. Траектории, сопутствующие восьмерке	222
5.2. Линейные цепочки	225
6. Эволюция хореографий при изменении потенциала	227
7. Заключение	230
Литература	231
К. Симо. Новые семейства решений задачи N тел	233
1. Введение	233
2. Решение в виде восьмерки	236
3. Хореографии	239
4. Вариационные методы	242
5. Различные виды хореографий	243
6. Изменение потенциала	245
7. Численные методы	247
7.1. Реализация вариационного метода	248
7.2. Уточнение решений	248
7.3. Вычисление отображения Пуанкаре вокруг периодического решения	249
Литература	250
К. Симо. Динамические свойства 8-образных решений задачи трех тел	252
1. Введение	252
2. Восьмерка и близкие к ней простые периодические решения	253
3. Исследование двумерного сечения. Примеры траекторий	256
4. Изучение локального поведения	263
5. Устойчивость в зависимости от масс и связанные с этим бифуркации	267

6. Сопутствующие и относительные хореографии	271
7. Поиск других абсолютных хореографий	272
Литература	278
С. Смейл. Математические проблемы следующего столетия	280
1. Гипотеза Римана	281
2. Гипотеза Пуанкаре	281
3. Справедливо ли $P = NP$?	283
4. Целые нули многочлена	284
5. Границы высоты диофантовых кривых	285
6. Конечность числа относительных равновесий в небесной меха- нике	286
7. Распределение точек на 2-мерной сфере	287
8. Развитие экономической теории с точки зрения динамических систем	288
9. Проблема линейного программирования	289
10. Лемма о замыкании	290
11. Является ли одномерная динамика всегда гиперболической? . .	291
12. Централизаторы диффеоморфизмов	293
13. 16-я проблема Гильберта	293
14. Аттрактор Лоренца	295
15. Уравнения Навье–Стокса	295
16. Гипотеза Якоби	296
17. Решение полиномиальных уравнений	296
18. Пределы интеллекта	297
Литература	298

Предисловие

В настоящее время большинство монографической и учебной литературы по хаосу ограничивается изложением хорошо известных фактов. В то же время за последнее десятилетие появилось множество новых достижений в области развития методов исследования хаоса. В частности, это касается исследований с глобальным использованием компьютерных методов. Кроме отдельных статей по данному вопросу на настоящий момент в научной печати нет систематического изложения этих достижений. Особенно интересные результаты были получены в ходе математических и компьютерных исследований научной школой профессора Университета Барселоны Карлеса Симо, работы которого, как личные, так и в соавторстве с коллегами, составляют основную часть данной книги.

Компьютерные исследования в динамике, или просто компьютерную динамику, сейчас можно выделить в отдельную область науки, которая устанавливает общие закономерности движения реальных физических систем при помощи ряда численных методов и алгоритмов. Каждый из этих методов обладает своими особенностями (устойчивость и пр.) и обладает внутренними параметрами (типа шага и точности). Поэтому результаты такого исследования, конечно, имеют лишь косвенное отношение к реальности. Однако аналогичные заключения можно сделать и относительно обычных аналитических (или сугубо математических) методов, которые всегда описывают физический процесс с определенной погрешностью. Для анализа некоторой системы дифференциальных уравнений, описывающих реальную систему, компьютерный и аналитический методы являются дополняющими друг друга. Здесь мы подчеркиваем отличие такой точки зрения от широко распространенной и состоящей в том, что «настоящая наука» является аналитической, а компьютер способен дать только иллюстрации аналитическим методам и толчок для формулировок новых теорем. Это, конечно, также правильно, однако подобная иллюстрация аналитических методов является лишь побочным продуктом компьютерных исследований, которые имеют свою внутреннюю логику и систему описания физических феноменов. Применение новых методов компьютерного исследования в динамике

твердого тела можно найти в книге А. В. Борисов, И. С. Мамаев «Динамика твердого тела», вышедшей в издательстве РХД в 2001 году. Систематическое развитие компьютерных исследований, открывающее новые области компьютерной динамики, только начинается и, как указал С. Смейл, является одной из фундаментальных задач этого столетия.

Данная книга представляет собой первый шаг в направлении обобщения и классификации самых современных результатов по проблемам компьютерных исследований нелинейных систем. В книге приведены наиболее интересные статьи К. Симо (с соавторами), посвященные как изучению хаоса, его структуры, сценариев развития, так и поиску новых периодических решений, их бифуркациям и пр.

Также в книгу включены две статьи, не принадлежащие К. Симо, но посвященные родственной тематике. Одна из них (А. Шенсине, Р. Монтгомери «Замечательное периодическое решение задачи трех тел в случае равных масс») посвящена открытию нового периодического решения в задаче трех тел. Эта статья явилась одной из первых в целом ряде работ посвященных поиску новых и обобщению известных периодических решений задачи N тел. Достаточно большая часть предлагаемой книги посвящена изложению полученных в этом направлении результатов. Вторая статья — работа С. Смейла «Математические проблемы следующего столетия» — посвящена постановке наиболее интересных проблем математики, которые, как считает автор, могут стать ключевыми в развитии науки в XXI веке (аналогично известным проблемам Гильберта для XX века). Часть задач в этой статье посвящена изучению хаоса, эффективным вычислениям, и вообще развитию компьютерных методов исследования.

Мы выражаем свою благодарность Карлесу Симо за поддержку нашей инициативы перевода на русский язык ряда его статей, которые он нам предоставил, а также за ряд полезных консультаций, проведенных в ходе работы над книгой.

А. В. Борисов, А. А. Килин

Эффективные вычисления в гамильтоновой динамике^{*}

К. СИМО

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

Системы гамильтоновой динамики, возникающие, в частности, в небесной механике и астродинамике (и имеющие практические приложения при подготовке к полетам космических кораблей) представляют собой очень важный класс динамических систем. Компьютерная техника, применяемая для изучения этих систем, обуславливает идеи и методы изучения и интерпретации этих систем как на понятийном, так и на вычислительном уровне.

В этой статье мы обсуждаем наиболее важные численные и символические методы их изучения.

1. Введение

Довольно большой вклад в основание науки эффективных вычислений внес А. Пуанкаре, получивший множество интересных результатов в этой области. Столетие спустя после его великих работ мы вновь возвращаемся к полученным им результатам. Настоящая работа посвящена отдельным аспектам как символических, так и численных эффективных вычислений.

В структуре исследований динамики (или в ее так называемом скелете) ключевую роль играют инвариантные объекты фазового потока: периодические орбиты, инвариантные торы, инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия, центральные многообразия и т. д. Они дают ключ к

^{*}C. Simó. *Effective computations in hamiltonian dynamics*. Preprint. Перевод А. В. Борисова, А. Г. Арзамасцева.

предсказанию или интерпретации поведения большинства точек в фазовом пространстве, следуя идее А. Пуанкаре о том, что лучше изучать все множество орбит, чем следить за какой-то конкретной.

Эти инвариантные объекты могут быть получены при комбинировании символических вычислений и численного продолжения по параметрам. Существенно также знать динамические свойства в окрестности этих объектов для создания надежных алгоритмов. Для проблем, которые превышают наши аналитические возможности, существуют методы анализа результатов приближенного моделирования, позволяющие судить о наличии инвариантных объектов.

Использование компьютера как средства для понимания поведения динамических систем, кажется, теперь не вызывает вопросов. Многие явления были первоначально открыты при помощи компьютерного моделирования, а затем получили теоретическое объяснение. Следует помнить, что на компьютере сложно увидеть некоторые очень мелкие детали динамики. Однако произведя вычисления с арифметикой высокой точности, можно все-таки увидеть очень мелкие детали. В этой статье такие вычисления не представлены. С другой стороны, нелинейные явления, возникающие вдали от «любого хорошо известного эталонного объекта или задачи», могут оказаться сложными для изучения чисто аналитическими методами. Лично я воспринимаю компьютерные результаты как информацию о динамике изучаемой системы. Из них возникают гипотезы, требующие доказательства. Также они могут использоваться для проверки (по крайней мере частично) гипотез, возникающих из теоретических построений. Можно сказать, что для средних размерностей и до среднего уровня детализации имеет смысл опираться на компьютерные результаты. Значение слова «средний» зависит от текущего уровня как аппаратного оборудования, так и алгоритмов. Кроме того, существует взаимосвязь между алгоритмами, используемыми в доказательствах, и алгоритмами, созданными для эффективных вычислений. В некоторых случаях первые могут быть успешно и эффективно запрограммированы, а вторые, созданные для получения компьютерного результата, преобразованы в теоретические доказательства.

В большинстве экспериментальных наук в настоящее время технологии позволяют исследователю получить большое количество информации о задаче при ее экспериментальном изучении вместо простого размышления о ее возможном поведении. Разумеется, исследователь должен предоставить и проверить всеми возможными способами некоторое последовательное описание собранных экспериментальных данных и должен очень тщательно

выбирать, какие свойства следует изучать экспериментально. Я не вижу никаких причин, почему некоторые математики не могли бы использовать подобный подход.

Текущее состояние компьютерной технологии позволяет проводить с разумными усилиями большой объем вычислений. Похоже, что в эту эпоху узким местом вычислений являются большой объем данных, используемых в символьных вычислениях и при хранении результатов символьных или численных экспериментов, а также визуализация и интерпретация результатов даже для небольших размерностей (например, в пределах от 4 до 10).

2. Глобальное описание орбит вблизи точки L_2 системы Земля–Луна в модели ОЗТТ¹

Часть методологии, представленной в этом и в следующем параграфах, была получена в сотрудничестве с Г. Гомесом, А. Джорбой и Дж. Масдемонтом по контракту с Европейским космическим агентством. Она применялась к точке L_1 ОЗТТ в случае системы Солнце–Земля и к точкам L_4 и L_5 системы Земля–Луна. Позднее она применялась к некоторым улучшенным моделям физической задачи и, наконец, к наилучшей из имеющихся моделей, которая была выведена из численных JPL эфемерид.

Рассмотрим пространственную ограниченную задачу трех тел (ОЗТТ), т. е. движение безмассовой частицы (космического корабля) под действием гравитации двух массивных тел (Земли и Луны). Предполагаем, что массивные тела движутся по круговым орбитам вокруг их центра масс. При использовании вращающейся системы координат с периодом одной из круговых орбит и с началом координат в центре масс, можно считать, что два массивных тела покоятся. Масштабируя массы и расстояния, можно принять сумму масс Земли и Луны и расстояние между ними равными единице. Тогда масса Луны, являющаяся параметром, будет равна $\mu_{\text{moon}} = 0.012150582$.

Во вращающейся (синодической) системе координат существует пять точек равновесия (или точек либрации в классической терминологии). Нас интересует точка либрации L_2 , расположенная за Луной на продолжении линии, соединяющей Землю и Луну. Точку равновесия между Землей и Луной обозначают L_1 .

В пространственной ОЗТТ точки либрации L_1 и L_2 в линейном приближении ведут себя по типу седло×центр×центр. В общем случае вблизи

¹ОЗТТ — ограниченная задача трех тел.

них существуют двумерные торы. Из-за проблемы малых знаменателей на этих торах частоты должны удовлетворять некоторому диофантову условию. Когда нас интересуют короткие временные промежутки, проблемы малых знаменателей не возникают, если они не связаны с резонансами малого порядка. Пусть ω_1, ω_2 — две основные частоты в точках $L_i, i = 1, 2$. Для малых значений μ частоты достаточно близки друг другу. Для предельной задачи Хила ($\mu = 0$) они равны $(28^{1/2} - 1)^{1/2}$ и 2 соответственно. Для $\mu = \mu_{\text{moon}}$ в точке L_2 значения ω_1 и ω_2 близки к 1,86264588 и 1,78617616, и после резонанса, возникающего при отношении один к одному, следующий сильный резонанс возникает лишь в 47-ом порядке. Очень сильный резонанс возникает в 8398-ом порядке.

При изменении амплитуд орбит частоты также меняются. Известно, что плоские периодические орбиты Ляпунова, выходящие из точки либрации, бифурцируют в гало-орбиты с амплитудой x (x направлена к планетам), приблизительно равной 0,1845, если за единицу расстояния принято расстояние от меньшей массы до точки либрации. В представленном случае она равна значению $\gamma = 0,16783273$, умноженному на расстояние Земля–Луна. Таким образом это расстояние соответствует резонансу один к одному, приводящему к гало-орбитам. Если мы будем проводить наши исследования в области малых амплитуд, эффект этого резонанса будет не слишком сильным. Резонансы высокого порядка имеют малую амплитуду и большой период. Таким образом, мы можем попробовать формально получить инвариантные торы до некоторого порядка (меньшего 47). В конкретном примере, представленном ниже, порядок равен 45. Обрывая выражение на этом порядке, мы получим слоение инвариантными торами в некоторой области вокруг точки равновесия. Для некоторых амплитуд торы точно не существуют, но малая ширина соответствующих стохастических областей делает этот факт несущественным для приложений на коротких временных промежутках, в нашем случае полет космического корабля происходит в течение всего нескольких лет.

2.1. Уравнения движения

Рассмотрим следующую систему координат: начало координат помещено в точку L_2 , ось x направлена в сторону меньшей планеты, а ось y расположена в плоскости движения планет и повернута относительно оси x на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, и, наконец, ось z дополняет их до правой системы координат. Примем расстояние γ между малой планетой m_2 и L_2 за единицу. Единицу времени выберем так, чтобы период обращения малой

планеты был равен 2π . Через μ обозначим массу малой планеты (в нашем случае — Луны), а через $1 - \mu$ — массу бóльшей планеты (в нашем случае — Земли). Значения γ могут быть получены как решения уравнения Эйлера пятой степени

$$\gamma^5 + (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 - 2\mu\gamma - \mu = 0.$$

Его можно разрешить методом Ньютона, выбирая в качестве первоначальной итерации значение $(\mu/3)^{1/3}$.

Пусть оси X , Y , Z образуют обычную синодическую систему координат с началом в центре масс. Уравнения движения в этой системе имеют вид

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = \Omega_X, \quad \ddot{Y} + 2\dot{X} = \Omega_Y, \quad \ddot{Z} = \Omega_Z, \quad (1)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + (1 - \mu)r_1^{-1} + \mu r_2^{-1},$$

причем

$$r_1^2 = (X - \mu)^2 + Y^2 + Z^2, \quad r_2^2 = (X - \mu + 1)^2 + Y^2 + Z^2.$$

Выполним следующее преобразование координат

$$x = -\frac{1}{\gamma}(X - \mu + 1 + \gamma), \quad y = -\frac{1}{\gamma}Y, \quad z = \frac{1}{\gamma}Z. \quad (2)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} r_1^{-1} &= (1 - \gamma)^{-1} \left(1 + \frac{2\gamma}{1 - \gamma}x + \frac{\gamma^2}{(1 - \gamma)^2}\rho^2 \right)^{-1/2} = \\ &= (1 - \gamma)^{-1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\gamma\rho}{1 - \gamma} \right)^n (-1)^n P_n \left(\frac{x}{\rho} \right), \\ r_2^{-1} &= \gamma^{-1} (1 - 2x + \rho^2)^{-1/2} = \gamma^{-1} \sum_{n \geq 0} \rho^n P_n \left(\frac{x}{\rho} \right), \end{aligned}$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, P_n — полиномы Лежандра, а

$$c_n = \gamma^{-3} \left(\mu + (-1)^n (1 - \mu) \left(\frac{\gamma}{1 - \gamma} \right)^{n+1} \right) \quad (3)$$

— вспомогательные коэффициенты, зависящие только от μ . Из формулы (3) легко видеть, что в случае задачи Хилла, когда μ стремится к нулю, $c_2 = 4$ и $c_k = 3 \times (1)^k$ для $k > 2$. Таким образом, уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{z} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right).\end{aligned}\tag{4}$$

Напомним также, что уравнения (1) можно записать в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2) + YP_X - XP_Y - (1 - \mu)r_1^{-1} - \mu r_2^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \Omega,\end{aligned}\tag{5}$$

где введены переменные

$$P_X = \dot{X} - Y, \quad P_Y = \dot{Y} + X, \quad P_Z = \dot{Z}.$$

Уравнения (4) также можно явно записать в гамильтоновой форме. Пусть $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $p_z = \dot{z}$. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$K = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right).\tag{6}$$

Гамильтонианы H и K связаны соотношением

$$H = K\gamma^2 - \frac{1}{2}(1 - \gamma - \mu)^2 - \frac{\mu}{\gamma} - \frac{1 - \mu}{1 - \gamma}.$$

2.2. Решение в формальных рядах

Если отбросить из правой части системы (4) члены выше второй степени (то есть исключить экспоненциально убывающие и растущие члены),

то решения системы, ограничивающие центральные многообразия, имеют вид

$$x = \alpha \cos(\omega, \tau + \phi_1), \quad y = -\bar{k}\alpha \sin(\omega_1 \tau + \phi_1), \quad z = \beta \cos(\omega_2 \tau + \phi_2), \quad (7)$$

где

$$\bar{k} = \frac{(\omega_1^2 + 2c_2 + 1)}{2\omega_1}.$$

Параметры α , β и ϕ_1 , ϕ_2 представляют собой произвольные амплитуды и фазы соответственно. Частоты в (7) выражаются следующим образом: $\omega_1 = (2 - c_2 + (9c_2^2 - 8c_2)^{1/2}/2)^{1/2}$, $\omega_2 = c_2^{1/2}$. Так как система (4) автономна, то можно выбрать начальное время таким, что $\phi_1 = 0$. Кроме того, обозначим $\omega_1 \tau$ и $\omega_2 \tau + \phi_2$ соответственно через θ_1 и θ_2 . При рассмотрении правой части (4), согласно методу Линдштедта–Пуанкаре, необходимо исключить секулярные члены для различных частот, зависящих от амплитуд. Обозначим θ_1 через $d\tau$, а θ_2 — через $f\tau + \phi_2$, где $d = \omega_1 + O(\alpha, \beta)$, $f = \omega_2 + O(\alpha, \beta)$.

Далее будем искать решения в комплексной экспоненциальной форме вида

$$\begin{aligned} x &= \sum x_{i,j,k,m} \alpha^i \beta^j \gamma^k \gamma_2^m, & y &= \sqrt{-1} \sum y_{i,j,k,m} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m, \\ z &= \sum z_{i,j,k,m} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_s = \exp(i\theta_s)$, $s = 1, 2$. Вследствие симметрии задачи коэффициенты в (8) удовлетворяют соотношениям

1. $i, j \geq 0, i+j \geq 1, |k| \leq i, |m| \leq j, i-k \equiv 0 \pmod{2}, j-m \equiv 0 \pmod{2}$.
2. $x_{i,j,-k,-m} = x_{i,j,k,m}$, $y_{i,j,-k,-m} = -y_{i,j,k,m}$, $z_{i,j,-k,-m} = z_{i,j,k,m}$. Следовательно, для вычислений достаточно оставить лишь члены с $k > 0$ или, если $k = 0$, с $m \geq 0$.
3. Для x и y необходимо предполагать $j \equiv 0 \pmod{2}$, а для $z - j \equiv 1 \pmod{2}$.
4. Метод Линдштедта–Пуанкаре можно использовать так, что при $(k, m) = (1, 0)$ единственный член, возникающий в выражении для x , соответствует $(i, j) = (1, 0)$. Аналогичным образом, если $(k, m) = (0, 1)$ то единственный член в z соответствует $(i, j) = (0, 1)$.

5. В выражениях для d и f содержатся только члены вида $\alpha^i \beta^j$, где i и j являются четными.

Вычисления членов в разложении (8) производятся по возрастанию общего порядка $n = i + j$. Для $n = 1$ в (7) получим значения

$$x_{1,0,1,0} = \frac{1}{2}, \quad y_{1,0,1,0} = \frac{\bar{k}}{2}, \quad z_{0,1,0,1} = \frac{1}{2}.$$

Используя свойства 1) и 5), можно получить x_n, y_n, z_n (т.е. члены порядка n по α и β), а если n нечетно, то еще и d_{n-1} и f_{n-1} . Для вычисления x_n, y_n, z_n необходимо положить $x_{i,j,1,0} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 0)$, и $z_{i,j,0,1} = 0$, если $(i, j) \neq (0, 1)$ (см. свойство 4), что и позволяет получить d_{n-1} и f_{n-1} для нечетного n . Подробнее изложение рекуррентной процедуры и особенности ее практической реализации, связанные с хранением коэффициентов, можно найти в [5].

Наконец, сделаем несколько априорных замечаний относительно объема памяти и времени вычислений. Программы были структурированы таким образом, чтобы мы могли изменять несколько параметров вычислений с помощью значений

$$NG = (j^4 + 7j^3 + 20j^2 + 26j + 6)/6, \quad NG1 = 2j + 1, \quad NG2 = (j^2 + 3j + 2)/2,$$

если максимальный порядок при вычислении программы равен $n = 2j + 1$. Всего для вычислений требуется $20 + 2n$ векторов размерности NG и несколько векторов размерностей $NG1, NG2$. Таким образом, в целом потребуется объем памяти (при использовании арифметики с удвоенной точностью), равный

$$\frac{(4j^5 + 56j^4 + 236j^3 + 691j^2 + 881j)}{6} + \text{const.}$$

При $n = 35$ это выражение приближенно равно 15.5 Mb, а при $n = 45 - 48$ Mb. Для простоты можно считать, что при больших n объем памяти, необходимый для вычислений до порядка n , пропорционален $n^4(n + 23)$. Анализ программы показывает, что время вычислений пропорционально примерно n^8 .

2.3. Результаты и тесты

Программа, описанная в предыдущем разделе, выполнялась для L_1 и L_2 при различных значениях n и μ . Результаты, представленные ниже при

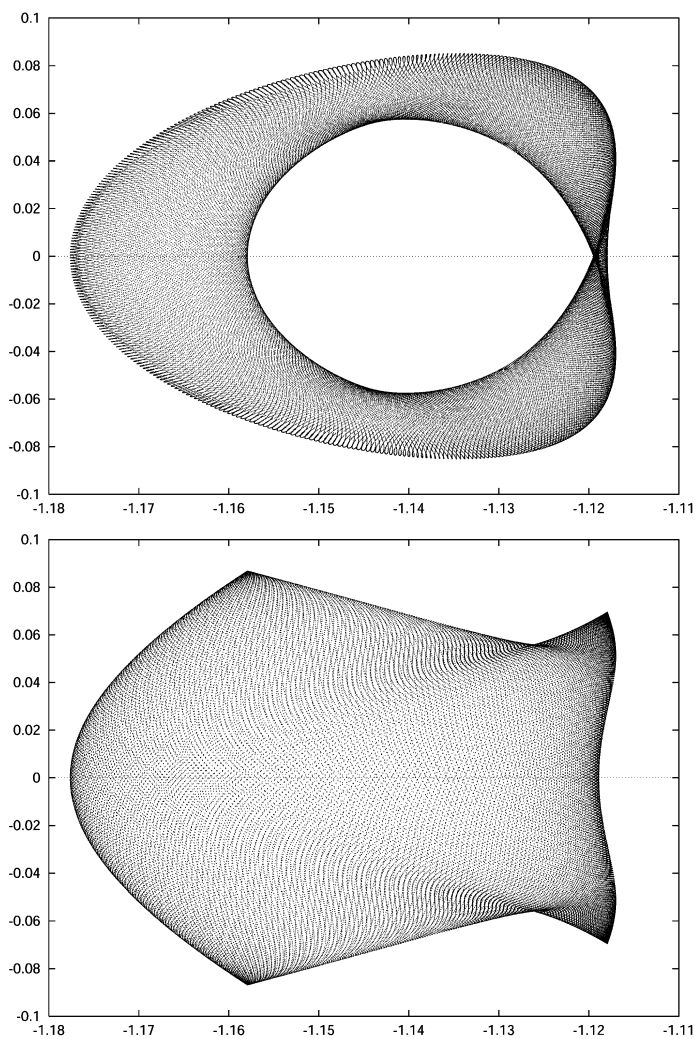


Рис. 1. Проекция $2D$ -тора, соответствующего $\alpha = 0,15$ и $\beta = 0,40$, на плоскости (X, Y) и (X, Z) , полученные с помощью метода Линдштедта–Пуанкаре

$\mu = \mu_{\text{топ}}$, были вычислены для порядка, равного 45. Время вычисления на компьютере HP 9000/735 равно 35^m .

На рисунках 1 и 2 показаны проекции $2D$ -тора, соответствующего значениям $\alpha = 0, 15$, $\beta = 0, 40$, на плоскости (X, Y) , (X, Z) , (Y, Z) . Разложения, приведенные выше, могут быть использованы при получении соответствующих ляпуновских семейств «горизонтальных» и «вертикальных» орбит, когда либо $\beta = 0$, либо $\alpha = 0$. На рис. 3 показаны некоторые из них для нескольких значений α (проекции (X, Y)) и для нескольких значений β (проекции (X, Y) и (Y, Z)). На этом рисунке мы воспользовались заменой (2), чтобы представить результаты в синодических координатах. Отметим, что «вертикальные» орбиты проектируются на плоскость (X, Y) как кривые, проходящиеся дважды. Проекция на (X, Z) , не представленная здесь, также выглядит как дуга кривой, проходящейся дважды. Орбиты расположены приблизительно на вертикальном цилиндре.

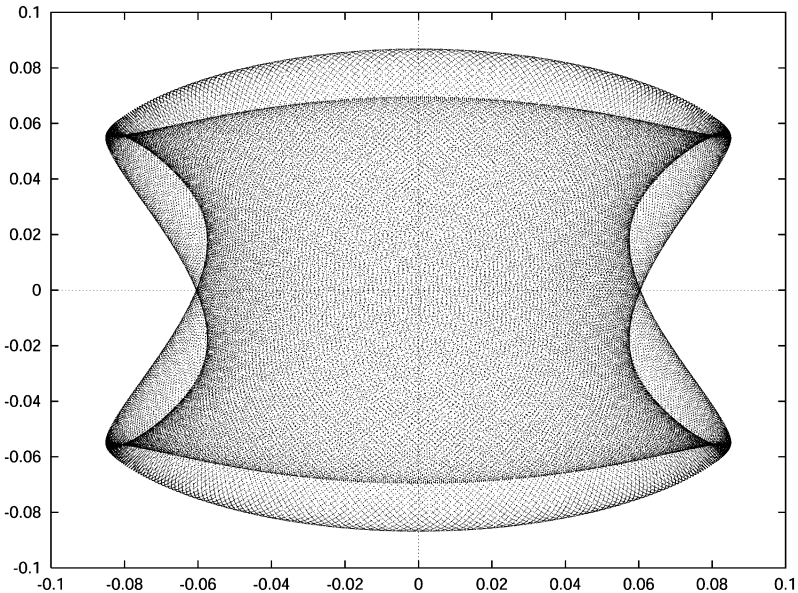


Рис. 2. Проекция на плоскость (Y, Z) предыдущего рисунка

Для полноты также покажем некоторые гало-орбиты. Эти орбиты возникают из плоского ляпуновского семейства, когда они теряют устойчивость внутри центрального многообразия точки L_2 . То есть кроме начальной гиперболической пары переменных, общей для всех орбит вблизи L_2 , другая пара также становится неустойчивой. Это происходит, когда вертикальные колебания вокруг плоских ляпуновских орбит входят в резонанс один к одному с периодом орбиты. Эти орбиты можно получить с помощью процедуры Линдштедта–Пуанкаре и разложения типа (8), где теперь оба угла θ_s , $s = 1, 2$ равны, а амплитуды α , β удовлетворяют некоторому соотношению $g(\alpha, \beta) = 0$ (см. [3]). На рис. 3 изображены проекции этих орбит на плоскости (X, Y) , (X, Z) , (Y, Z) для нескольких значений β . Соответствующие значения α получаются из соотношения $g(\alpha, \beta) = 0$, в показанном на рисунках интервале β амплитуда α меняется лишь между 0.1853 и 0.2318.

Аналитические решения (1) проверялись численно следующим образом: для заданных $\rho > 0$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ α и β вычислялись с помощью формул $\alpha = \rho \cos \theta$, $\beta = \rho \sin \theta$. Затем мы брали фазы ϕ_1 и ϕ_2 кратными $\frac{\pi}{4}$. Вследствие симметрии достаточно выбрать $\phi_2 < \pi$. Из этих данных мы получаем начальные условия для x , y , z и $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при $t = 0$ и, используя (2), находим соответствующие синоптические координаты. Затем начинается численное интегрирование и через определенные интервалы времени вплоть до π вычисляются расстояния (в фазовом пространстве) между численным и аналитическим решениями. Это время приближенно равно периоду горизонтальных и вертикальных колебаний. Затем при заданном θ получаем значения ρ и $\rho_{\max}$ ($\rho < \rho_{\max}$) такие, чтобы максимальная ошибка во все рассматриваемые моменты времени для всех начальных фаз была меньше, чем 10^{-6} . Принимая во внимание, что неустойчивая компонента на этом временном интервале возрастает более, чем в 1000 раз, начальные ошибки физически имеют порядок лишь несколько метров. Значения $\rho_{\max}$ в зависимости от θ на плоскости (α, β) показаны на рис. 4 (внутренняя кривая).

На том же самом рисунке показаны еще две кривые, ограничивающие области на плоскости (α, β) . При заданном θ в выражения для d и f можно подставить α и β как функции ρ , при этом в разложении возникают только четные члены. «Практический радиус сходимости» (несмотря на то, что ряды не сходятся) для разложений вплоть до порядка $n = 45$ можно оценить различными способами. Один из методов заключается в изучении поведения формы $A \times B^m$ коэффициента при степени m в выражении для ρ ,

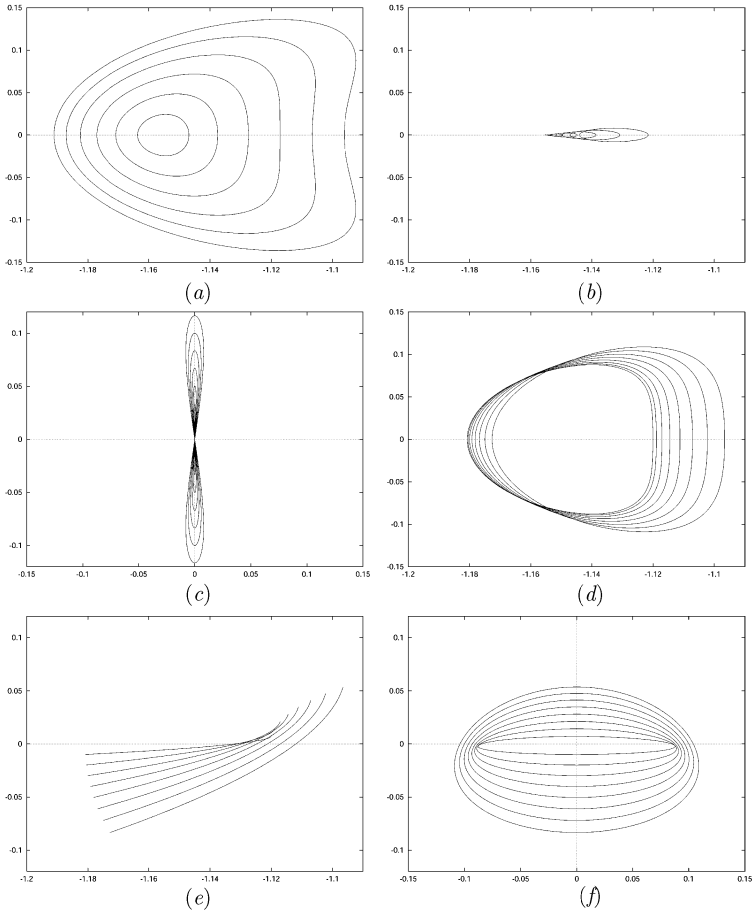


Рис. 3. Некоторые проекции периодических орбит, полученные с помощью разложения (8). (a) Проекция плоских орбит на (X, Y) при $\alpha = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$. На (b) и (c) изображены проекции на плоскости (X, Y) и (Y, Z) орбит, соответствующих значениям $\beta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$. На (d), (e) и (f) показаны проекции на плоскости (X, Y) , (X, Z) и (Y, Z) орбит из гало семейства для $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$

последующем приведении его к логарифмической шкале, нахождении значений B для d и f и использовании обратной величины максимума этих значений в качестве радиуса сходимости. Результатом применения этого метода является внешняя кривая на рис. 4. Другая возможность — это выбор $|t_{44}| < 10^{-3}$, где t_{44} обозначает наибольший из последних членов в d и f для заданного значения ρ . Так возникает промежуточная кривая, расположенная между двумя предыдущими.

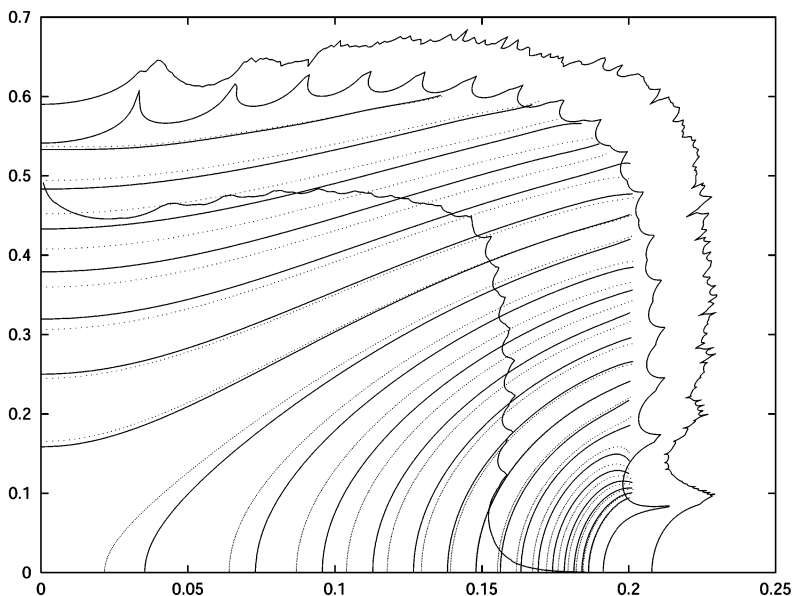


Рис. 4. Три кривые, проходящие от оси α к оси β определяют несколько оценок области «практической сходимости». Внутренняя кривая дает очень хорошие результаты при прямой численной проверке. Два семейства кривых, проходящих из правого нижнего угла в левый верхний соответствуют постоянным значениям разности (непрерывной линии) и частного (пунктирной линии) частот

На том же рисунке также изображены два семейства кривых. Они соответствуют постоянным значениям разности и частного d и f . Разность меняется от 0.005 до 0.110 с шагом 0.005. При увеличении разности кривые переходят из правого нижнего угла в левый верхний угол. Частное меняется

в диапазоне от 1.0025 до 1.0625 с шагом 0.0025. Дальнейшее изучение и возможность применения всех этих семейств орбит к полетам космических кораблей можно найти в [3, 4, 5] и [6].

2.4. Редукция на центральное многообразие вблизи L_2

Мы хотим понять, как организованы орбиты, вычисленные в предыдущих параграфах, чтобы получить общее описание динамики в окрестности L_2 .

Сначала уберем неустойчивые члены гамильтониана. Это достигается редукцией на центральное многообразие W^c размерности 4. Опишем, как происходит вычисление. После линейной замены переменных, переходя от x, y, p_x, p_y к x_1, x_2, y_1, y_2 и полагая $x_3 = z$ и $y_3 = p_z$, получим, что гамильтониан K , заданный формулой (6), можно записать в виде

$$M = \lambda x_1 y_1 + \frac{1}{2} \omega_1 (x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (x_3^2 + y_3^2) + \sum_{j \geq 3} M_j(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),$$

где M_j — однородный полином степени j .

Затем мы переходим к промежуточной нормальной форме, пытаюсь унитожить в M все члены, у которых общая степень по переменным (x_1, y_1) равна единице. Это достигается использованием канонического преобразования с подходящей порождающей функцией (которую предстоит определить). Данная процедура не вызывает затруднений, поскольку здесь нет проблемы малых знаменателей. Знаменатели, возникающие при определении порождающей функции (при использовании некоторых комплексификаций для уменьшения объема вычислений), имеют вид:

$$(k_1 - l_1)\lambda + \sqrt{-1}(k_2 - l_2)\omega_1 + (k_2 - l_3)\omega_2$$

с ограниченным снизу модулем $|\lambda|$. Пусть $\widetilde{M}$ — гамильтониан этой промежуточной нормальной формы. С помощью перестановки слагаемых его можно записать в виде

$$\widetilde{M} = M^0(x_2, x_3, y_2, y_3) + \sum_{j_1 + j_2 > 1} (x_1^{j_1} y_1^{j_2}) M^{j_1 j_2}(x_2, x_3, y_2, y_3).$$

Следует иметь в виду, что новые переменные отличаются от предыдущих, несмотря на то, что мы сохранили прежние обозначения. Преобразование является тем более близким к тождественному, чем ближе траектория к L_2 .

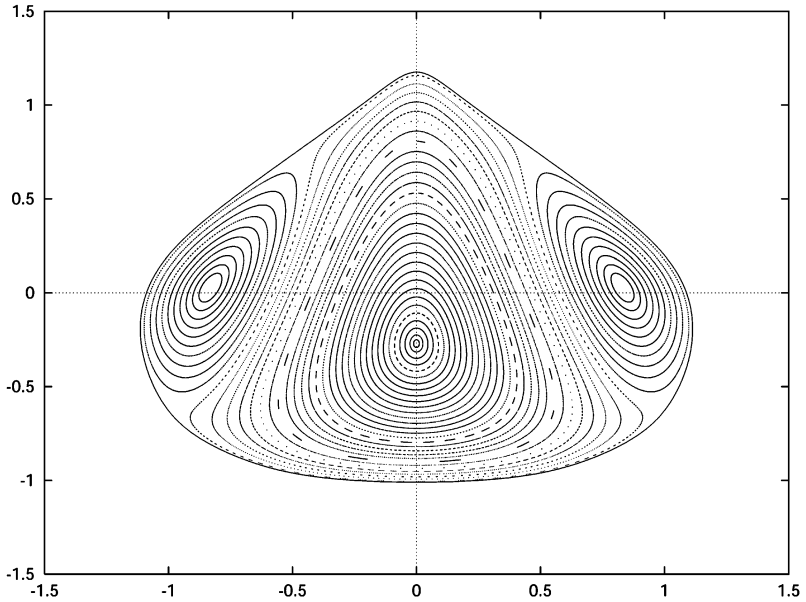


Рис. 5. Сечение Пуанкаре гамильтонова потока, редуцированного на центральном многообразии точки L_2 в случае Земля – Луна на заданном уровне энергии

То, что проблема малых знаменателей не возникла, ни в коей мере не означает, что процедура является сходящейся. В общем случае получается только C^∞ -многообразие. Норма коэффициентов порядка n возрастает как $n!$.

Из формы нового гамильтониана видно, что $I_1 = x_1 y_1$ — первый интеграл. Проведем редукцию на центральное многообразие, положив $I_1 = 0$. Таким образом остается гамильтониан с двумя степенями свободы

$$M^0 = \frac{1}{2}\omega_1(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}\omega_2(x_3^2 + y_3^2) + \sum_{j \geq 3} M_j^0(x_2, x_3, y_2, y_3). \quad (9)$$

Отметим, что если в (9) положить $x_3 = y_3 = 0$, мы получим инвариантное множество относительно потока, связанного с M^0 . То есть мы приходим к гамильтониану с одной степенью свободы, орбиты которого являются просто ляпуновскими периодическими орбитами вблизи L_1 .

Фиксируя $M^0 = h$, мы можем использовать $x_3 = 0$ при $y_3 > 0$ в качестве поверхности сечения. Это сечение, Σ , не является глобальным, поскольку оно полностью содержит соответствующую ляпуновскую орбиту. Однако можно считать, что все точки рассматриваемой траектории (в пределах сечения) определены. Таким образом мы получим сферу S^2 (классическое слоение Хопфа), которую можно рассматривать как пространство «оскулирующих траекторий». Для некоторого значения h , например h_N , уровень $M^0 = h$ содержит ляпуновскую орбиту, бифурцирующую в гало-орбиты. Начиная с этого значения энергии, сечение σ содержит две неподвижные точки, связанные с двумя (симметричными) гало-орбитами. Известно, что по крайней мере для средних значений h эти орбиты эллиптического типа. Для значения h , не слишком далеких от h_N , имеем на S^2 четыре неподвижные точки. Две из них соответствуют ляпуновской орбите (гиперболической) и почти вертикальной периодической траектории (эллиптической) соответственно. Другие две являются гало-орбитами (эллиптическими).

Программа, выполняющая эту редукцию, была разработана, реализована и выполнена вплоть до общего порядка, равного 16. Пусть ξ и η обозначают новые переменные после опускания гиперболических слагаемых в промежуточной нормальной форме. После получения $M^0(\xi, \eta)$ мы можем провести моделирование. На рис. 5 показаны результаты этого моделирования для такого значения энергии, при котором явно видны гало-орбиты. Рисунок соответствует сечению Пуанкаре $\xi_2 = 0$ (в исходных переменных сечение лежит вблизи $z = 0$). Почти в центре рисунка видна неподвижная точка, соответствующая «вертикальной» периодической орбите. Она окружена инвариантными торами, которые принадлежат семейству, найденному в начале этого параграфа, несмотря на то, что в данном случае амплитуды слишком велики и не могут быть хорошо аппроксимированы с помощью результатов метода Линшtedта–Пуанкаре. Внешняя кривая является ляпуновской плоской траекторией, расположенной на этом уровне энергии. Две другие неподвижные точки соответствуют двум гало-орбитам, которые симметричны друг другу относительно $z = 0$. Они, в свою очередь, также окружены инвариантными $2D$ -торами. Между $2D$ -торами вокруг вертикальной орбиты и $2D$ -торами вокруг гало-орбит расположены следы устойчивого и неустойчивого многообразий плоской ляпуновской орбиты. Однако, несмотря на то, что значение энергии отличается от энергии в точке L_2 , даже стохастические области, связанные с этими многообразиями, сложно увидеть.

Отметим, что рис. 5 изображен в масштабе, отличающемся от масштаба, использованного в рис. 3. Переменные соответствуют промежуточной нормальной форме. Луна расположена вне рисунка на отрицательной вертикальной оси рис. 5.

3. Орбиты вблизи точки L_5 в модели ОЗТТ. Границы области практической устойчивости и численные вычисления неустойчивых инвариантных торов

Кроме коллинеарных точек либрации, в ОЗТТ также существуют лагранжевы или треугольные точки либрации, расположенные вне линии, проходящей через массивные тела. В обозначениях предыдущего параграфа в синодической системе они покоятся в точках $(\frac{\mu-1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}, 0)$. Все эти точки либрации (как коллинеарные, так и треугольные) возникают также в общей задаче трех тел. Одна из классических задач небесной механики связана с устойчивостью треугольных точек. Приведем здесь некоторые результаты

- Треугольные точки линейно устойчивы для массового параметра $\mu \in [0, \mu_1]$, где

$$\mu_s = \frac{\omega_{\text{short}}}{\omega_{\text{long}}} = s, \quad s \in \mathbb{N},$$

а ω_{short} и ω_{long} — частоты в $L_{4,5}$ в плоском случае [15]. Их значения равны

$$\left[\frac{1}{2} (1 \pm (1 - 27\mu(1 - \mu))^{1/2}) \right]^{1/2}.$$

Следовательно, $\mu = (1 - (23/27)^{1/2})/2 \approx 0.038521$.

- В плоском случае [11] треугольные точки устойчивы по Ляпунову при $\mu \in [0, \mu_1] \setminus \{\mu_2, \mu_3\}$.
- Относительно устойчивости по Ляпунову в пространственной задаче ничего неизвестно. Возможно в этом случае происходит диффузия Арнольда.
- Существует область «практической устойчивости», которая не слишком мала. Приведем здесь кратко то, как был получен этот результат [2], [12].

Пусть $H = H_2 + H_3 + \dots$ — разложение гамильтониана по степеням вблизи $L_{4,5}$, где H_k содержит однородные члены степени k по координатам и импульсам. С помощью линейного преобразования H_2 можно свести к виду

$$-\frac{1}{2}\omega_s(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_l(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\omega_z(q_3^2 + p_3^2),$$

где ω_s , ω_l обозначают ω_{short} , ω_{long} , а ω_z — частота в вертикальном направлении ($\omega_z = 1$).

Каноническое преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, полученное с помощью порождающей функции $G = G_3 + G_4 + \dots + G_n$, применяется для того, чтобы привести H к нормальной форме вплоть до порядка n . С его помощью получаем новый гамильтониан

$$\mathcal{H} = N_2 + N_3 + \dots + N_n + \mathcal{R}_{n+1},$$

где N_k — члены степени k в нормальной форме и $N_2 = H_2$. Если взять только $N_2 + N_3 + \dots + N_n$, система будет интегрируема. Пусть

$$I_j = \frac{1}{2}(Q_j^2 + P_j^2),$$

новые импульсы. Тогда диффузия по импульсам происходит из-за вклада

$$\dot{I}_j = \{I_j, \mathcal{R}_{n+1}\},$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ обозначают скобку Пуассона. Так как остаток $\mathcal{R}_{n+1}$ имеет вид $R_{n+1} + R_{n+2} + \dots$, введем некоторую норму $\|R_k\|$. Тогда можно получить последовательность ограничений $\|H_k\|$, $k \geq 2$, $\|G_k\|$, $2 < k \leq n$ (возникает лишь конечное число малых знаменателей) и $\|R_k\|$, $k > n$. Ограничения $\|R_k\|$, задаются в виде рекурсии, которая зависит лишь от нормы однородных частей исходного гамильтониана $\|H_k\|$ и от текущих малых знаменателей, которые появляются до n -го порядка. В шаре радиуса ρ в переменных (Q, P) имеем

$$|\mathcal{R}_{n+1}| < \sum_{k>n} \rho^k \|R_k\|,$$

где $|\cdot|$ обозначает супремум нормы. Аналогично мы можем ограничить скорость диффузии $|\dot{I}_j|$.

Для заданных T, δ существует начальный радиус ρ_0 такой, что если $(Q, P)_{t=0} \in B_{\rho_0}$, тогда $(Q, P)_t \in B_{\rho_0(1+\delta)}$ для всех $|t| < T$, где B_ρ обозначает шар радиуса ρ с центром в начале координат. Отметим, что можно получить лучшие результаты, если H_k, N_k, G_k явно вычислены аналитически вплоть до некоторого порядка для выбранного значения μ . В общем случае в качестве результата получается оценка типа Нехорошева (т. е. для фиксированного δ имеем $T \approx \exp(c/\rho^d)$, где c и d — некоторые положительные константы).

- Численное моделирование ([5], [6]) показывает «область устойчивости» даже бо́льшую, чем описанную в плоском случае [10].

Кроме вышеизложенного, также известны некоторые частные результаты для эллиптической ограниченной задачи трех тел (т. е. массивные тела движутся по эллиптическим траекториям), связанные с локальным анализом «практическая устойчивость» ([9]) и с численным определением «области устойчивости» ([1], [6]). Для реальных задач ситуация может быть более сложной, например, в случае треугольных точек системы Земля–Луна наиболее важные отклонения от модели ОЗТТ связаны с влиянием Солнца. Было установлено, что эти точки неустойчивы, но на некотором расстоянии от них существуют области практической устойчивости (по крайней мере для временных интервалов, намного превышающих продолжительность полета космического корабля), расположенные на расстоянии от 1/4 до 3/4 расстояния Земля–Луна ([6], [13]).

В этом параграфе мы исследуем модель ОЗТТ при $\mu = 0.0002$. Существует несколько причин для выбора такого значения. С одной стороны оно достаточно мало, чтобы считать, что теория возмущений может дать хорошую аппроксимацию. С другой стороны, оно достаточно велико, чтобы не требовалось очень большого количества времени для обнаружения некоторых уходов. И наконец, она также близка к действительному соотношению масс в системе Сатурн–Титан.

3.1. Границы области практической устойчивости

Вблизи треугольных точек систему можно рассматривать как совокупность трех гармонических осцилляторов с частотами, равными $\omega_{\text{short}}, \omega_{\text{long}}$ и ω_{vert} , последняя из которых равна единице. При малых μ значения $\omega_{\text{short}}, \omega_{\text{long}}$ соответственно равны $1 - 27\mu/8 + O(\mu^2)$ и $(27\mu/4)^{1/2} + O(\mu^{3/2})$. Следовательно, в качестве базиса в окрестности L_5 можно рассматривать

частоты ω_{vert} , ω_{long} и $\omega_{\text{vert}} - \omega_{\text{short}}$, значение которых имеет порядок 1, $\mu^{1/2}$ и μ соответственно.

В случае, если частоты удовлетворяют некоторым условиям (не слишком близки к сильному резонансу), существует область «практической устойчивости». Предыдущее обсуждение порядков величин показывает, что если μ мало, никаких сильных резонансов не возникает, за исключением резонанса один к одному между коротким периодом и вертикальными колебаниями. Следовательно, потребуется чрезвычайно большой промежуток времени, чтобы увеличить действие на значительную величину. Нас интересует форма этих областей, поскольку результаты работ [2] и [12] дают достаточно пессимистичные оценки.

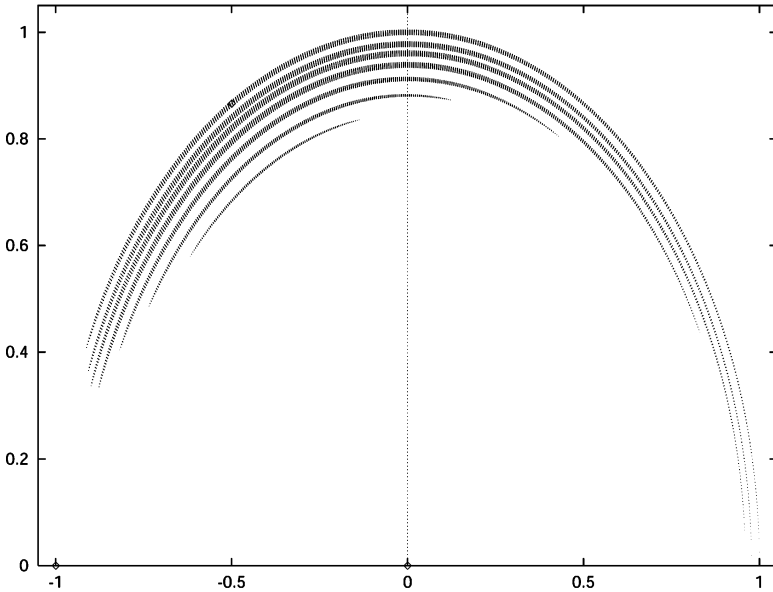


Рис. 6. Проекция некоторых сечений в области глобальной устойчивости вокруг L_5 для $\mu = 0.0002$

Приведем теперь описание следующего эксперимента. Для заданных значений ρ , α и Z рассмотрим начальную точку с синодическими координатами

натами

$$X = \mu + (1 + \rho) \cos(2\pi\alpha), \quad Y = (1 + \rho) \sin(2\pi\alpha), \quad Z,$$

и с нулевой начальной скоростью $\dot{X} = 0, \dot{Y} = 0, \dot{Z} = 0$. Точка L_5 соответствует $\rho = 0, \alpha = 1/3, Z = 0$. Затем начнем численное интегрирование вплоть до заданного конечного времени. Точки вблизи L_5 просто продолжают двигаться вокруг нее (обычно на $3D$ -торе), но если начальные условия достаточно далеки от точки либрации, проекция этой траектории на плоскость (X, Y) пересекает ось X и затем ее можно рассматривать, как убежавшую из «большой» окрестности L_5 . Ввиду формы некоторых больших торов, которые, похоже, существуют даже для больших значений Z , удобно принять в качестве критерия убегания из окрестности L_5 условия $Y(t) < Y^*$ для некоторого отрицательного значения Y^* . В качестве практического значения было взято $Y^* = -0.5$. Для рассматриваемого значения μ мы нашли траектории, лежащие на торах «вокруг» L_5 такие, что $Y(t)$ достигает значения вплоть до -0.233 . Промежуток времени, использованный для вычислений равен 10 000 периодам обращения массивных тел. В случае системы Сатурн–Титан это означает более четырехсот лет. Такой промежуток может показаться коротким, однако посмотрим комментарии ниже.

Рис. 6 отображает часть результатов проведенного эксперимента. На нем приведена проекция на плоскость (X, Y) тех точек, которые не убегают согласно принятому критерию, стартуя с плоскостей $Z = 0.0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ и 0.8 . Орбиты с начальным $Z = 0.1$ и 0.2 накладываются на проекции случая $Z = 0.0$. Размеры шагов по ρ и α были приняты равными 10^{-5} и 10^{-3} соответственно.

Следует сделать несколько замечаний, относительно полученных результатов.

- Для малых значений μ , как в рассмотренном случае, переход из «устойчивой» области к неустойчивости достаточно резок. Это означает, что, например, увеличение от 10 000 итераций до 100 000 приводит к очень небольшим изменениям. С другой стороны, большая часть «убегающих» точек, уходит из окрестности L_5 за несколько итераций. Большая часть точек, которые убегают после более длительного времени, уходят за время порядка $1/\mu$, что связано с наименьшей из основных частот $\omega_{\text{vert}} - \omega_{\text{short}}$.
- Для плоского случая неубегающие точки заполняют область, которую мы хотим определить. В этом случае возьмем *кривую нулевой скорости*

(к.н.с), проходящую через коллинеарную точку L_3 , расположенную за бóльшим телом на расстоянии, довольно близком к расстоянию между массивными телами. Она соответствует точкам на плоскости (X, Y) , в которых частица, лишенная массы, покоится при данном значении энергии. В нашем случае это та же энергия, что и в точке L_3 . Верхняя часть этой кривой (при $Y > 0$) проходит по угловой переменной от $\alpha = 0$ до значения, которое стремится к $\alpha_{\text{lim}} = \cos^{-1}(-(2^{1/2} - 0.5)/\pi) \approx 156.09$ градусов, при $\mu \rightarrow 0$. Рассмотрим кривую $\rho = 0$ (т.е. на единичном расстоянии от бóльшего тела). К.н.с. расположена на расстоянии $O(\mu^{1/2})$ от нее. Если говорить более точно, существует функция $K(\alpha)$, имеющая двойной ноль при $\alpha = 0$ и простой ноль при $\alpha = \alpha_{\text{lim}}$, такая, что к.н.с. описывается с помощью равенства $\rho = \pm(K(\alpha)\mu)^{1/2} + O(\mu)$. Граница области устойчивости на плоскости $Z = 0$ имеет вид $\rho = \pm \frac{1}{2}(K(\alpha)\mu)^{1/2} + O(\mu)$.

- Существует численное свидетельство того, что в плоском случае граница области «устойчивости» связана с устойчивым и неустойчивым многообразием центрального устойчивого многообразия в L_3 (см. [6]). Это многообразие размерности 1, в частности, оно содержит устойчивое и неустойчивое многообразия семейства плоских ляпуновских орбит вокруг L_3 .
- Полное множество точек в области устойчивости с нулевой синодической скоростью в пространственной ОЗТТ, похоже, является тонкой оболочкой. Форма оболочки, круговая в горизонтальном направлении и параболическая в вертикальном. Разрезая зону «устойчивости» значением $\alpha = 1/3$, центральная точка, как функция от Z , близка к $\rho = -0.245Z^2$.
- Как мы покажем в следующем параграфе, существуют семейства неустойчивых $2D$ -торов, которые также играют роль границы области устойчивости. Если начальное значение Z мало, эти торы достигают окрестности точки L_3 . Их сечения плоскостью $Z = 0$ имеют положительные значения по X . Для больших начальных значений Z сечение плоскостью $Z = 0$ $2D$ -торов, которые, вероятно, находятся на границе области устойчивости, имеют отрицательные значения X .

Подводя итоги численных экспериментов, в плоском случае получаем, что бóльшая часть устойчивых движений происходит на $2D$ -торах и

они «ограничены» плоскими периодическими орбитами ляпуновского семейства вокруг L_3 . В пространственном случае большая часть устойчивых движений происходит на $3D$ -торах и они «ограничены» $2D$ -торами, связанными с резонансом один к одному между коротким периодом и вертикальными частотами. Эти $2D$ -торы расположены по-разному, в основном в зависимости от начального значения Z . Разумеется, резонансы высокого порядка играют важную роль и приводят к появлению цепей гетероклинических связей, уводящих точки, вероятно, из любой окрестности любой устойчивой точки, но это требует очень большого количества времени и этот механизм можно увидеть лишь для достаточно больших значений μ (скажем, порядка 10^{-2}).

3.2. Неустойчивые $2D$ -торы: обнаружение и численные эксперименты

На рис. 7 показаны первые сто тысяч итераций сечения Пуанкаре плоскостью $Z = 0$ орбит, начинающихся в достаточно близких точках. Первая была вычислена при $\rho = -0.1506066340$, $\alpha = 1/3$, $z = 0.8$ и с нулевой синодической скоростью. Вторая отличается лишь значением ρ , которое равно -0.1506066339 . Рисунок показывает не только чувствительность траекторий к начальным условиям, но также существование $2D$ -тора, который разделяет оба вида движения.

Чтобы сделать последнее утверждение более ясным, на рис. 8 на одном том же графике показаны первые итерации отображения Пуанкаре, начинающиеся при обоих начальных условиях. После прохождения вблизи гиперболической инвариантной кривой (пересечение $2D$ -тора с $Z = 0$) орбиты расходятся экспоненциальным образом. Стоит отметить, что движение точки, не лежащей на $3D$ -торе приближается последовательно к нескольким другим $2D$ -торам. При рассмотрении орбиты в подходящие временные интервалы кажется, что она достаточно близка к некоторому $3D$ -тору, однако время от времени она меняется (обычно очень быстро). Это явление свидетельствует о существовании гомоклинического/гетероклинического пересечения в пространственной ОЗТТ.

Вычислим теперь неустойчивые $2D$ -торы. Зафиксируем энергию и используем сечение Пуанкаре плоскостью $Z = 0$. Таким образом, задача сводится к вычислению инвариантной гиперболической кривой четырехмерного симплектического преобразования. Т.к. в общем случае существует канторово однопараметрическое семейство таких объектов, мы также должны зафиксировать некоторое число вращений. Чтобы выбрать значение энергии и число вращений, будем действовать следующим образом.

Энергия выбирается (несколько произвольным образом) как среднее энергий двух рассмотренных выше орбит. Для выбора числа вращений сначала изучим итерации двух предыдущих орбит, которые остаются вблизи искомой кривой. Рассмотрим последовательные максимумы и минимумы по любой из текущих переменных (X , Y , $\dot{X}$, $\dot{Y}$, значение $\dot{Z}$ выводится из соотношения для энергии (5)), затем с помощью использования интерполяции различных данных в зависимости от числа итераций получим число вращений $\nu \approx 0.02189307$, которое мы будем использовать впоследствии. Также важно и обратное к этому числу $N = 1/\nu \approx 45.67656$.

Вычисления периодической орбиты (устойчивой или нет) для отображения являются, в теории, простой задачей. Предположим, что мы обозначили отображение как T и ищем периодическую точку с минимальным периодом k . Для точки орбиты p можно записать уравнение $T^k p - p = 0$ и попытаться его решить, используя, например, метод Ньютона. Для успеха нам нужно наложить некоторые условия на свойства этой орбиты, а начальные данные должны быть достаточно близки к p . Далее некоторые технические сложности могут возникнуть, например, если какие-либо собственные значения $D(T^k)(p)$ очень велики. В этом случае общая и очень эффективная процедура разрешения этого затруднения основана на методе *параллельной пристрелки* (см., например, [14], а также [3]).

В случае инвариантной кривой задача является другой. Разумеется, можно использовать разложение, что мы делали в предыдущем параграфе, если у нас имеется какая-то информация о близкой задаче или если кривые близки к некоторой известной точке. Другая возможность заключается в поиске представления координат кривой в качестве (оборванного) ряда Фурье и получения системы уравнений на коэффициенты. Это эффективно, когда существует явное выражение для отображения. В нашем случае мы будем действовать с помощью прямых численных методов.

Поскольку мы не имеем обратного отображения как в случае периодических орбит, его можно синтезировать. Будем искать неподвижную точку $\mathcal{R}(p)$ обратного отображения $\mathcal{R}$, где $\mathcal{R} = T^N$, $N = 45.67656$. Разумеется, мы не можем вычислить степень 45.67656 отображения Пуанкаре, но можно вычислить степени в промежутке $[N_1, N_2]$, содержащем искомое значение N , вычислить $\mathcal{R}$, а также его дифференциал с помощью интерполяции. Однако эта численная задача не имеет единственного решения. Действительно, все точки на траектории будут неподвижными точками синтезированного обратного отображения. Для определения единственного решения мы можем зафиксировать некоторые координаты точки p .

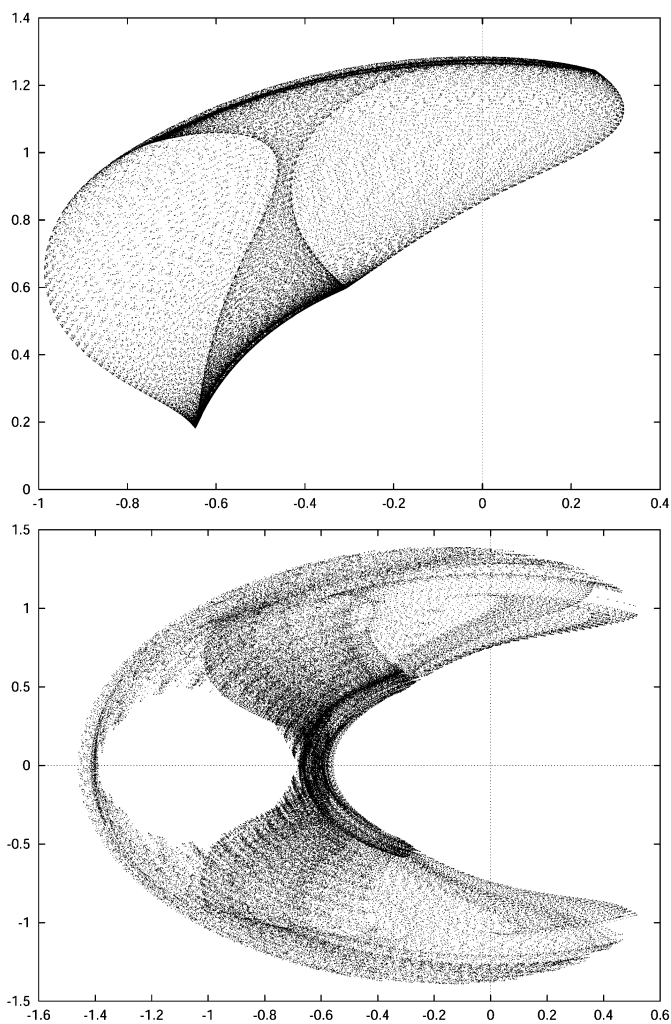


Рис. 7. Первые 100 000 итераций отображения Пуанкаре $Z = 0$, начиная с нулевой синодической скорости при $\alpha = 1/3$, $Z = 0.8$. Сверху начальное $\rho = -0.1506066340$, внизу начальное $\rho = -0.1506066339$

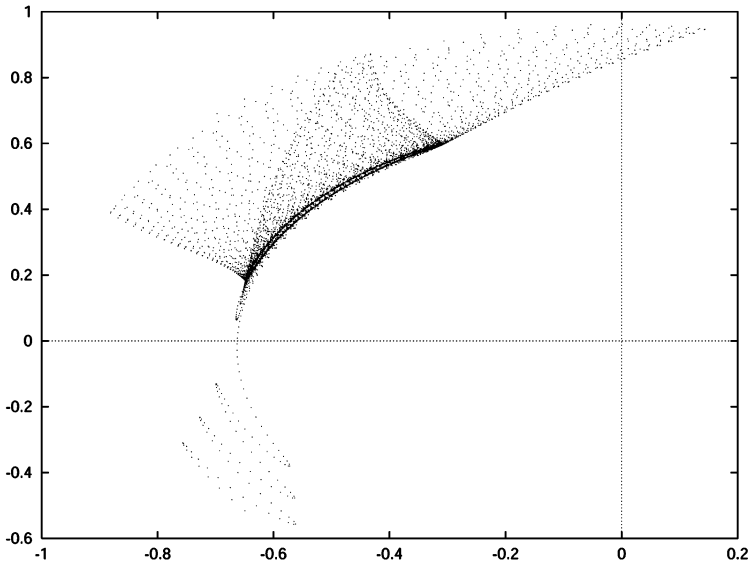


Рис. 8. Первые 5 000 итераций отображения Пуанкаре на $3D$ -торе и первые 4 165 итераций убегающей точки. См. начальные данные в подписи к рис. 7. Обе траектории остаются в течение почти 2 000 итераций вблизи инвариантной кривой отображения Пуанкаре

В рассматриваемой задаче мы зафиксировали значение $Y = Y^* = 0.3897977$. Выбор был произвольным, поскольку можно выбирать любое значение, не слишком близкое к экстремальным значениям Y на кривой. Значение, которое было взято, соответствует одной из итераций отображения Пуанкаре для точки, расположенной на $3D$ -торе. Эта итерация будет взята в качестве начальной точки метода Ньютона. Лишь три координаты $(X, \dot{X}, \dot{Y})$ остались свободными, и они успешно вычисляются. Заметим, что координата Y обратного отображения не обязана совпадать с Y^* . Совпадение должно произойти автоматически, и это было использовано в качестве проверки вычислений. Метод Ньютона останавливается, когда ошибка возвращения меньше 10^{-13} . Такая точность получена с помощью четырех итераций процедуры. Проверка начального и конечного значения Y также приводит к разности, меньшей 10^{-13} . Результаты вычислений представлены на рис. 9.

Дифференциал обратного отображения $D\mathcal{R}$ также дает оценку гиперболичности инвариантной кривой, главное собственное значение $\lambda_{\max} \approx 1.24658$, откуда следует, что главное собственное значение отображения Пуанкаре вдоль кривой $\lambda_{\text{map}} \approx 1.004821$. Это очень малая неустойчивость, что делает численные вычисления намного проще.

Следует отметить, что можно использовать процедуру продолжения для вычисления других инвариантных кривых либо с помощью изменения энергии, числа вращения либо их обоих. Когда число вращения принимает рациональное значение (а в компьютерной аппроксимации это происходит всегда!), инвариантной кривой обычно не существует и она, вероятно, заменяется парой периодических орбит эллиптического-гиперболического или гиперболическо-гиперболического типа. Следовательно, не существует причины, по которой какая-либо точка этих периодических орбит будет находиться на гиперплоскости $Y = Y^*$. Однако численный метод по-прежнему может привести к некоторому результату без каких-либо проблем. Я пробовал провести такие вычисления для чисел вращения $\nu = 1/45$ и $\nu = 1/46$ и не встретил каких-либо затруднений. Причина, очевидно, заключается в том, что обратное отображение (в данном случае T^{45} или T^{46}) имеет настолько медленную динамику, что она ниже допустимого значения для метода (10^{-13}). Чтобы увидеть, что метод неверен, в этом случае достаточно провести все вычисления с более высокой степенью точности.

3.3. Обобщение: численное получение инвариантных торов.

Процедуру, описанную в предыдущем параграфе, можно обобщить до непосредственного численного получения инвариантных торов отображений и потоков при разумных условиях. Для простоты здесь приведен набросок для случая отображений. Случай потоков можно свести к случаю отображений, используя сечение Пуанкаре. Важно отметить, что достаточно лишь локального сечения.

Сначала переформулируем вышеприведенную процедуру. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — стандартный 1D-тор, параметризованный значениями, меняющимися в диапазоне $[-0.5, 0.5]$. Отображение на инвариантной кривой сопряжено отображению $x \rightarrow x + \nu$, и, следовательно, после k итераций текущее значение x равно $x + k\nu \pmod{1}$. Выбирая несколько значений k (в конкретном примере, приведенном выше, мы выбрали k от 38 до 54), получим несколько значений x вблизи нуля. А затем с помощью интерполяции можно вычислить обратное отображение $\mathcal{R}$.

В общем случае мы ищем m -мерный тор, на котором динамика сопря-

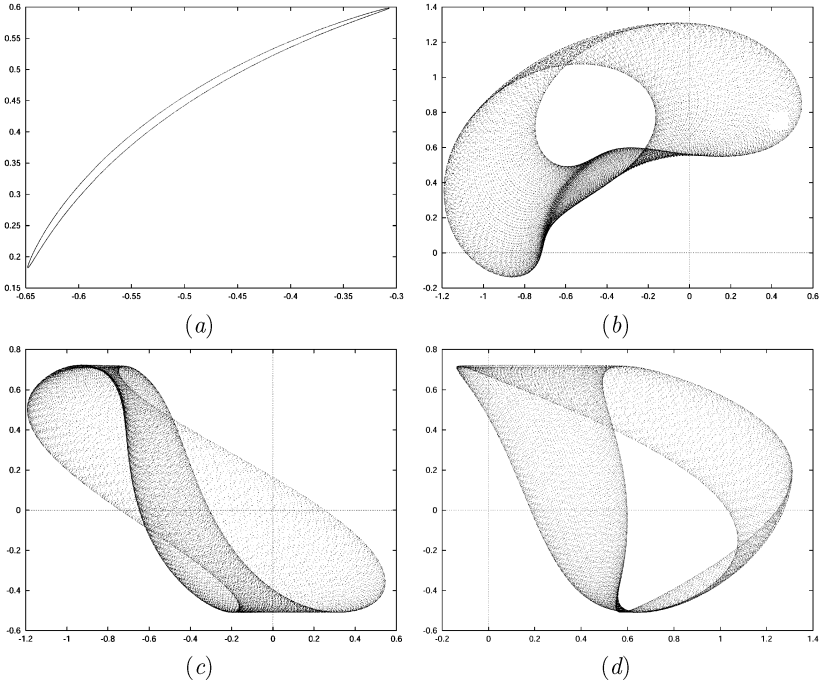


Рис. 9. Инвариантная гиперболическая кривая отображения Пуанкаре $Z = 0$ ОЗТТ, изображенная на рис. 8. (a) — проекция кривой на XY . (b), (c), (d) — проекции точек соответствующего $2D$ -тора на плоскости (X, Y) , (X, Z) и (Y, Z)

жена отображению $x \rightarrow x + \nu$ стандартного тора $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$, а ν из $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию нерезонантности: $(k, \nu) \in \mathbb{Z}$ для любого $k \in \mathbb{Z}^m$ влечет за собой $k = 0$, здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что все ограничения, накладываемые первыми интегралами, были убраны, и мы сразу рассматриваем редуцированную задачу. Поскольку нас интересует m -мерный тор, зафиксируем m координат искомой точки p . Далее предположим, что общая размерность n по меньшей мере $2m$, и что изменение остальных $n - m$ координат приводит к невырожденному изменению частот ν при условии, что они существуют (вероятно, они существуют только на каком-то канторовом множестве). Невырожденность понимается в том смысле, что дифференциал частот относительно

оставшихся переменных имеет максимальный ранг. Также предполагается, что оставшиеся $n - 2m$ координат, если такие имеются, связаны с собственными числами, отличными от единицы. Таким образом, мы неявно предполагаем, что динамика вдоль тора сводится к динамике с постоянными коэффициентами (см. [7] и [8]).

Затем рассматриваются различные итерации T с числами итераций $k_1, k_2, \dots, k_q$ такими, что на стандартном торе соответствующие значения $x(k_1\nu, \dots, k_q\nu \pmod{1})$ попадают в заданную окрестность нуля. После этого можно синтезировать обратное отображение $\mathcal{R}$ как значение в нуле некоторой функции, интерполированной по значениям $T^{k_j}(p)$ в точках $x_j^\nu, j = 1, \dots, q$. Условие, накладываемое на p , заключается в том, что $n - m$ свободных координат должны удовлетворять $\mathcal{R}(p) = p$, а оставшиеся m координат используются как дополнительная проверка. Уравнение может быть разрешено методом Ньютона, необходимый дифференциал также получается с помощью интерполяции. И наконец, из дифференциала обратного отображения можно получить собственные значения T по оставшимся $n - 2m$ переменным.

В настоящее время изложенная процедура проверяется на различных примерах, как на консервативных, так и нет.

Благодарности

Эта работа частично поддерживалась грантом PB94-0215 (Испания). Вычислительные средства были представлены по грантам ESP91-0403 (Испания) CIRIT GRQ93-1135 (Каталония). Также была оказана поддержка Европейским Космическим Агентством European Network Grant ERBCHRXCT 940460 и European INTAS grant 93-0339. Кроме того, я благодарю Г. Гомеса, А. Джорбу и Дж. Масдемонта за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

- [1] Dvorak, R. and Lohinger, E.: Stability zones around the triangular Lagrangian points, in *Predictability, stability and chaos in N-body dynamical systems*, Ed. by A. E. Roy, Plenum Press, 439–446, 1991.
- [2] Giorgilli, A., Delshams, A., Fontich, E., Galgani, L. and Simó, C.: Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with

- an application to the restricted three body problem, *J. Differential Equations* **77** (1991), 167–198.
- [3] Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R. and Simó, C.: Station Keeping of Libration Point Orbits. ESOC Contract 5648/83/D/JS(SC), Final Report, xii+689 p., 1985.
- [4] Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R. and Simó, C.: Study on Orbits near the Triangular Libration Points in the perturbed Restricted Three-Body Problem. ESOC Contract 6139/84/D/JS(SC), Final Report, iv+238 p., 1987.
- [5] Gómez, G., Jorba, À., Masdemont, J. and Simó, C.: Study Refinement of Semi-Analytical Halo Orbit Theory. ESOC Contract 8625/89/D/MD(SC), Final Report, 213 p., 1991.
- [6] Gómez, G., Jorba, À., Masdemont, J. and Simó, C.: Study of Poincaré Maps for Orbits Near Lagrangian Points. ESOC Contract 9711/91/D/ID(SC), Final Report, 276 p., 1993.
- [7] Jorba, À. and Simó, C.: On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients, *J. of Differential Equations*, **98**, (1992), 111–124.
- [8] Jorba, À., Simó, C.: On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points, *SIAM J. of Math. Anal.*, in press, 1996.
- [9] Jorba, À., Simó, C.: Effective stability for periodically perturbed Hamiltonian systems, in *Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior*, Ed. by J. Seimenis, Plenum Press, 245–252, 1994.
- [10] Mckenzie, R. and Szebehely, V.: Non-linear stability motion around the triangular libration points, *Celestial Mechanics* **23**, (1981), 223–229 .
- [11] Markeev A.P.: Stability of the triangular Lagrangian solutions of the restricted three body problem in the three dimensional circular case, *Soviet Astronomy* **15**, (1972), 682–686. См. также русский оригинал Маркеев А.П. Устойчивость треугольных лагранжевых решений в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел. *Астрономический журнал*, 1971, т. 48, вып. 4, стр. 862.
- [12] Simó, C.: «Estabilitat de sistemes hamiltonians», *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona* **48**, (1989), 303–348.

- [13] Simó, C., Gómez, G., Jorba À. and Masdemont, J.: The Bicircular Model near the Triangular Libration Points if the RTBP, in *From Newton to Chaos: Modern techniques for Understanding and Coping with Chaos in N-Body Dynamical Systems*, Ed. by A. E. Roy, Plenum Press, 343–370, 1995.
- [14] Stoer, J. and Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1983 (second printing).
- [15] Szebehely V.: Theory of orbits, Academic Press, 1967. См. также русский перевод Себекей В. *Теория орбит*. М.: Наука, 1982, 656 стр.

Визуализация гиперболической структуры для отображений, сохраняющих площадь^{*}

А. ДЖИОРДЖИЛЛИ

Dipartimento di Matematica,
Università degli Studi di Milano,
via Saldini 50, 20133 Milano, Italy.
antonio@mi.infn.it

В. Ф. ЛАЗУТКИН

Physics Department,
St.-Petersburg State University,
Ulyanov str. 1, kor.1, Petrodvorets,
St.-Petersburg, 198904, Russia.
lazutkin@onti.niif.spb.su

К. СИМО

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi,
Universitat de Barcelona,
Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain.
carles@maia.ub.es

Мы предлагаем простой метод для демонстрации гиперболической структуры отображения, сохраняющего площадь в фазовом пространстве. Метод проиллюстрирован на примере стандартного отображения Карлесона. Из наших экспериментов следует, что структура хаотической области стандартного отображения отличается от подобных структур, обнаруженных для систем типа Аносова.

1. Введение

Одним из наиболее загадочных и, возможно, сложных явлений в современной динамике является *одновременное существование регулярных и хаотических движений* в гамильтоновых динамических системах[18]. Если

^{*} A. Giorgilli, V.F. Lazutkin, C. Simó *Visualization of a hyperbolic structure in area preserving maps*. Reg.& Chaot. Dyn., 1997, v. 2, №3/4, p. 47–61. Исправления оригинала см. в Reg.& Chaot. Dyn., 1998, v. 3, №2, p. 115. Перевод Арзамасцева А. Г.

число степеней свободы превышает 1, оба типа движения возникают в фазовом пространстве большинства известных примеров, таких как стандартное отображение, двойной маятник, задача трех тел и т. д. Знаменитая КАМ теория позволяет получить много информации о регулярных движениях, и то же время почти ничего не известно о структуре хаотических движений. В случае отображений, сохраняющих площадь, регулярная часть представлена инвариантными окружностями или периодическими цепочками инвариантных окружностей. Структуры последнего вида часто называются *островами*. Также существуют промежутки между окружностями и движение в них демонстрирует хаос некоторого типа. Видимые области, заполненные хаотическими траекториями, называются *стохастическими слоями*. Насколько нам известно, впервые такие области обнаружил Хенон (см. исторические замечания в [8], а также в [7]). Разумеется Пуанкаре также знал о чрезвычайно запутанном характере движения [15]. Чтобы проиллюстрировать описанное выше одновременное существование различных видов движения, мы предлагаем здесь изображение фазового портрета отображения

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.2 \cos 2\pi x - y \\ x \end{pmatrix}, \quad (1)$$

определенного на 2-торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Изображена лишь четверть тора, а именно область $|x| \leq 1/4, |y| \leq 1/4$. Недостающую часть можно восстановить исходя из соображений симметрии (см. [9]).

Хорошо видна большая хаотическая зона, ограниченная инвариантными окружностями разных типов. Хаотическая зона также содержит острова (см. [16], [17]), а регулярная часть содержит много других узких хаотических зон в резонансных промежутках между КАМ кривыми. Их не видно при масштабах, взятых на рис. 1, но по общему мнению, подтверждаемому численными экспериментами [1], они существуют. В этом контексте также см. [19].

Как мы уже упоминали, до сих пор почти ничего не известно о структуре хаотической зоны. Естественно предположить, что *хаотическая зона является инвариантным подмножеством положительной меры Лебега таким, что ограничение отображения на это подмножество изоморфно (в смысле теории меры) произведению конечной перестановки и сдвига Бернулли*.

Для того чтобы доказать это предположение, можно применить теорию Песина [13], [14]. Отправным пунктом теории Песина является наличие *гиперболической структуры*. Приведем определение гиперболической струк-



Рис. 1. Несколько траекторий, представляющих характеристические свойства отображения (1), изображены на одной четверти тора, определенной неравенствами $-0.25 \leq x \leq 0.25$, $-0.25 \leq y \leq 0.25$

туры в простейшем случае, т. е. для отображений, сохраняющих площадь. Пусть $F: S \rightarrow S$ гладкое отображение, сохраняющее площадь, поверхности S на саму себя. Предположим, что на S существует риманова метрика. Будем говорить, что инвариантное множество $\Omega \subset S$ является *гиперболическим*, если в каждой точке $p \in \Omega$ существует два независимых касательных вектора $\vec{e}_p^s, \vec{e}_p^u$ таких, что поля $p \mapsto \vec{e}_p^{s,u}$ инвариантны, т. е.

$$F'(p)\vec{e}_p^s = C_s^p \vec{e}_F(p)^s,$$

$$F'(p)\vec{e}_p^u = C_u^p \vec{e}_F(p)^u,$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(F^n)'(p)\vec{e}_p^s\| &= -\chi(p) < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(F^n)'(p)\vec{e}_p^u\| &= -\chi(p) < 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $F'(p): T_p S \rightarrow T_p S$ — касательное отображение к F в точке p , C_p^u и C_p^s — некоторые ненулевые константы и обозначение F^n используется

для n -ой итерации F , т. е. $F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ раз}}$ для положительных целых n и $F^n = \underbrace{F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}_{-n \text{ раз}}$ для отрицательных целых n .

Величина $\chi(p)$ называется *показателем Ляпунова* в точке p .

Векторные поля $\{\bar{e}_p^u, p \in \Omega\}$ и $\{\bar{e}_p^s, p \in \Omega\}$ образуют *гиперболическую структуру* на Ω . Направления $\bar{e}_p^s$ и $\bar{e}_p^u$ называются соответственно *устойчивым* и *неустойчивым* направлениями в точке p .

Заметим, что эквивалентные метрики в (2) приводят к одному и тому же значению показателя Ляпунова. Поскольку в случае компактной поверхности S все римановы метрики эквивалентны, показатели Ляпунова не зависят от выбора метрики и, разумеется, зависят в случае некомпактной S . Существование всюду пределов в (2) доказано Оселедцем [12].

Наше предположение будет следовать из теории Песина, если мы докажем, что хаотическая область имеет положительную меру Лебега и обладает гиперболической структурой. По крайней мере, именно это Песин утверждает в [14].

Поэтому основной вопрос можно сформулировать следующим образом: *как обнаружить гиперболическую структуру?* В [10] второй автор предпринял попытку доказать существование гиперболической структуры для стандартного отображения, по крайней мере при больших значениях параметра отображения. Работа еще не закончена, но в качестве побочного результата после проведения большого количества численных экспериментов мы получили неожиданный метод, который позволяет наблюдателю *увидеть* эту гиперболическую структуру на фазовом пространстве системы, используя компьютер в качестве микроскопа. Метод основан на некоторых свойствах систем с одновременным существованием регулярного и хаотического поведения и не имеет аналога в случае так называемых систем Аносова, т. е. систем с чисто хаотическим характером движения. Грубо говоря, визуализирующий метод базируется на том факте, что *траектории регулярных движений отмечают границы (псевдо-) параллелограммов марковского псевдоразбиения внутренней гиперболической структуры*.

2. Описание модели. Свойство сжатия

Перед описанием визуализирующего метода давайте обратимся к описанию использованной нами модели и к ее свойствам. Следуя Карлесону [3], будем рассматривать отображение F 2-тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ на самого себя

определенное формулой

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} gf(x) - y \\ x \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь f — гладкая вещественнозначная периодическая функция периода 1, имеющая конечное число критических точек на периоде, а g — параметр. Будем предполагать, что все критические точки являются невырожденными. Это отображение сохраняет площадь. Оно может служить в качестве хорошей модели для изучения стохастических явлений в консервативной динамике [4],[3]. Заметим, что при $g = 0$ отображение является поворотом на $\pi/2$. Пусть h — первообразная функции f . Если g мало, тогда F^4 близко к потоку гамильтониана $H(x, y) = h(x) + h(-x) + h(y) + h(-y)$ по времени g . Разумеется, если f четная, как в нашем случае, то слагаемые порядка g в выражении $F^4 - Id$ сократятся и необходимо перейти ко второму порядку. Тогда, если f четна, то F^4 близко к потоку гамильтониана $H(x, y) = f(x)f(y)$ по времени g^2 . Некоторые свойства этого отображения в другом контексте рассматривались в §3.4 [2]. В частности похоже, что для любого значения g отображение не имеет *инвариантных кривых вращения*, т. е. инвариантных кривых, которые не стягиваются в точку на торе, в противоположность тому, что происходит для стандартного отображения Чирикова.

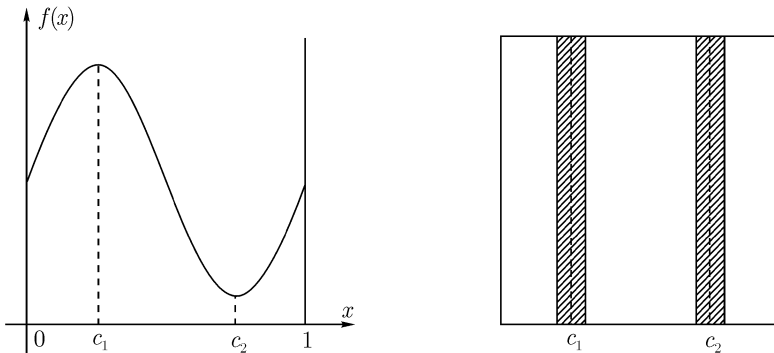


Рис. 2. График функции f с двумя критическими точками c_1, c_2 . Полосы в фазовом пространстве со слабыми гиперболическими свойствами, возникающие после первой итерации отображения (3), показаны на правой части рисунка

Отображение (1) является частным случаем отображения (3) при $f(x) = \cos 2\pi x$ и $g = 0.2$. Как видно из рис. 1, это отображение может демонстрировать хаотическое движение. Численные эксперименты показывают, что доля хаотического движения возрастает при возрастании параметра g (см. к примеру рис. 11е). Для больших значений параметра хаотическая компонента визуально заполняет почти все фазовое пространство за исключением, возможно, нескольких маленьких островов (см. [16]). Можно попытаться рассмотреть большие значения g и создать некоторого рода «асимптотическую» теорию хаоса. Гиперболичность, которая отвечает за наличие хаотического движения, согласно Песину, возникает благодаря касательному отображению, матрица которого в точке $p = (x, y)$ имеет вид

$$F'(p) = \begin{pmatrix} gf'(x) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрицу (4) можно разложить в произведение матрицы линейного гиперболического отображения и двух матриц поворота на один и тот же угол α :

$$\begin{pmatrix} gf'(x) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} R(\alpha), \quad (5)$$

где $\lambda - \lambda^{-1} = gf'(x)$ и $\tan \alpha = \lambda^{-1}$.

Если координата x точки p не близка к критической точке f , тогда, предполагая, что параметр g велик, можно вычислить, что $F'(p)$ близка к диагональной гиперболической матрице с большой величиной λ на первой позиции в диагонали и с λ^{-1} на второй позиции. Видно, что отображение F показывает хорошие гиперболические свойства повсюду на фазовом пространстве, за исключением узких полос, где x близко к критической точке f (см. рис. 2).

Наш метод заключается в изучении образов $\xi_n = F^n \xi_0$, получающихся при итерациях гладкого слоения ξ_0 под действием отображения F . Выберем в качестве ξ_0 слоение *горизонтальными* линиями $y = \text{const}$. Первое наблюдение заключается в том, что после первой итерации в слоении возникают *складки*. Это те точки, в которых ξ_1 *вертикально*. *Линия складок* для ξ_1 (или в общем случае для ξ_n) — это геометрическое место точек, в которых ξ_1 вертикально. Каждая складка соответствует критической точке f . Чтобы объяснить это, давайте представим отображение F , заданное (3), как суперпозицию двух отображений: $F = F_2 \circ F_1$, где

$$F_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y - gf(x) \end{pmatrix}, \quad F_2 = R(\pi/2): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (6)$$

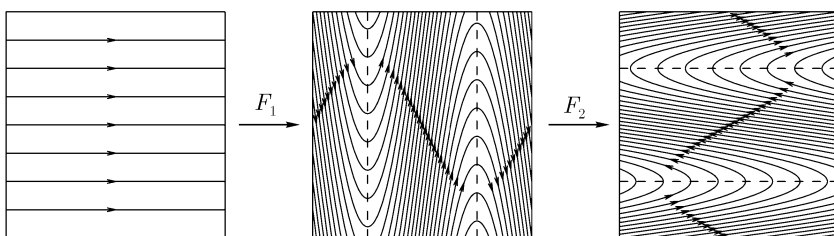


Рис. 3. Возникновение складок после первой итерации

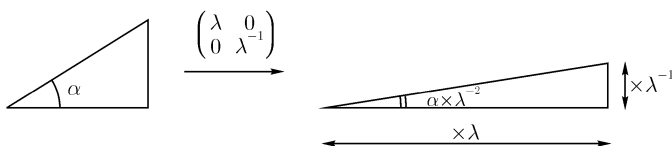


Рис. 4. Сжатие угла с коэффициентом λ^{-2}

Результаты последовательного применения отображений F_1 и F_2 показаны на рис. 3.

Первое отображение F_1 создает складки в вертикальном направлении (см. рис. 3), а второе отображение F_2 поворачивает результат на $\pi/2$. Заметим, что в случае больших g касательное направление (в проективном смысле) ξ_1 близко к касательному направлению ξ_0 за исключением узких горизонтальных полос, которые являются образами критических вертикальных полос, показанных на рис. 2.

Что происходит со складками, если мы производим дальнейшие итерации? Каждая складка сжимается, и это сжатие можно разложить на две операции различной природы:

- (1) *Динамическое сжатие*. Это означает, что любой квадрат, содержащий складку, становится прямоугольником после применения линейного отображения с диагональной матрицей вида $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ (напомним, что вдали от критической линии из представления (5) мы получаем матрицу, близкую к диагональной) и все вертикальные расстояния тем самым подвергаются сжатию с коэффициентом λ^{-1} .

- (2) *Геометрическое сжатие.* Каждый угол после применения диагонального линейного отображения сжимается с коэффициентом λ^{-2} (см. рис. 4). Если мы регулируем изображение с помощью измерения угла между линиями и горизонтальным направлением, мы должны уменьшить размер полосы с указанным коэффициентом λ^{-2} для того, чтобы увидеть внутри полосы то же самое отклонение от горизонтального направления.

Общий коэффициент сжатия для кривых, в котором учитываются оба механизма, равен λ^{-3} . Это будет проиллюстрировано позже на рис. 8, 9.

Идея доказательства существования гиперболической структуры заключается в проведении всех итераций, исключении всех «плохих» полос и в получении сходимости касательных направлений (в проективном смысле) к неустойчивым направлениям ($n \rightarrow \infty$) на дополнении к плохим полосам. Дополнение должно иметь большую меру, если g велико.

3. Метод визуализации

Мы были поражены, когда обнаружили, что можно сразу увидеть «блоки» (гипотетической) гиперболической структуры, благодаря применению следующей простой процедуры. Для симметрии будем рассматривать последовательность итераций начального слоения ξ_0 в обоих направлениях.

$$\xi_n = F^n \xi_0, \quad \xi_{-n-1} = F^{-n-1} \xi_0.$$

Возьмем $(-n - 1)$ -ую итерацию ξ_{-n-1} , симметричную ξ_n относительно инверсии $S: (x, y) \rightarrow (y, x)$.

Обозначим через $\vec{e}_n^u(p)$ касательный вектор к ξ_n в точке p . Более точно

$$\vec{e}_n^u(p) = \begin{pmatrix} e_{n,1}^u(p) \\ e_{n,2}^u(p) \end{pmatrix} = \frac{\vec{X}_n(p)}{\|\vec{X}_n(p)\|}, \quad (7)$$

где

$$\vec{X}_n(p) = (F^n)'(p_{-n})\vec{X}_0, \quad \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и $p_{-n} = F^{-n}(p)$, и мы используем евклидову норму в $\mathbb{R}^2$. Аналогично, пусть $\vec{e}_n^s(p)$ обозначает единичный касательный вектор к ξ_{-n-1} , т. е.

$$\vec{e}_n^s(p) = \begin{pmatrix} e_{n,1}^s(p) \\ e_{n,2}^s(p) \end{pmatrix} = \frac{\vec{X}_{-n-1}(p)}{\|\vec{X}_{-n-1}(p)\|}, \quad (9)$$

где

$$\vec{X}_{-n-1}(p) = (F^{-n})'(p_n) \vec{X}_{-1}, \quad \vec{X}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

и $p_n = F^n(p)$.

Рассмотрим синус угла $\alpha_n(p)$ между векторами $\vec{e}_n^u(p)$ и $\vec{e}_n^s(p)$:

$$\sin \alpha_n(p) = \begin{vmatrix} e_{n,1}^u(p) & e_{n,1}^s(p) \\ e_{n,2}^u(p) & e_{n,2}^s(p) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Оказывается, что *линии уровня* функции (11) показывают некоторую структуру в хаотических областях, которую, очевидно, можно интерпретировать как гиперболическую.

Мы провели несколько экспериментов с моделью (3), выбрав $f(x) = \cos 2\pi x$ при различных значениях параметра g . Используемую нами процедуру можно назвать *процедурой перенормировки*. Мы понимаем перенормировку в следующем смысле:

Перенормировка=Детализация+Увеличение числа итераций

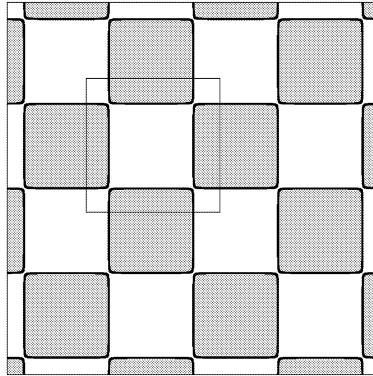


Рис. 5. График, соответствующий одной итерации при $g = 3.1$ и $\delta = 0.5$ в области $[-1.1, 1.1] \times [-1.1, 1.1]$. Отмечена область, показанная на рис. 6а

В последующих рисунках мы используем следующие обозначения для цветов: черный для таких p , что $|\sin \alpha_n(p)| < \delta$, серый, если $\sin \alpha_n(p) > \delta$, и белый, если $\sin \alpha_n(p) < -\delta$. Здесь δ — некоторое граничное значение.

4. Первая последовательность перенормировок. Случай больших g

Наша первая последовательность рисунков (рис. 6) соответствует модели (3) с $f(x) = \cos 2\pi x$ и значением $g = 3.1$, которое следует считать большим, поскольку величину соответствующего увеличивающего коэффициента λ можно оценить максимальным значением $\lambda = 2\pi g \approx 19.48$. Первый рисунок из этой последовательности показывает часть плоскости $\mathbb{R}^2$, определенную неравенствами $-1.1 \leq x \leq 1.1$, $-1.1 \leq y \leq 1.1$, которая представляет собой развертку тора (см. рис. 5). Число итераций равно $n = 1$. Выберем для этого и для всех последующих рисунков этой последовательности граничное значение $\delta = 0.5$.

Следующий ряд рисунков показывает три последовательных шага процесса перенормировки. Начнем с увеличения (рис. 6) области, отмеченной на рис. 5, увеличим число итераций до $n = 2$ (рис. 6b), выберем небольшую область на рис. 6b и увеличим ее (рис. 6c), затем увеличим число итераций до $n = 3$ (рис. 6d), снова выберем область на рис. 6d и увеличим ее (рис. 6e), и, наконец, увеличим число итераций до $n = 4$ (рис. 6f).

Сравнивая рис. 6d и рис. 6f, можно заметить большое сходство и точно так же для рис. 6c и рис. 6e. Оба рисунка содержат в сущности только два цвета. Черный цвет почти не виден на обоих рисунках, поскольку черные полосы очень тонкие. Напомним, что ширина черных полос, согласно сжимающему свойству, описанному в п. 2, уменьшается при каждой итерации с коэффициентом λ^{-3} , в то время как размер ячейки уменьшается с коэффициентом λ^{-1} . Рисунок выглядит как (неоднородная) шахматная доска, но углы не являются в действительности пересечениями граничных линий. В микроскопическом масштабе можно заметить те же самые *квазипересечения* что и на рис. 5. Это проиллюстрировано на рис. 7a, перекресток, отмеченный на рис. 6d, как центр окружности, увеличен и ширина квадрата при этом близка к 1.4×10^{-5} .

На рис. 7b изображено то же, что и на рис. 7a, но после 12 итераций (в то время как для рис. 7a использовалось 3 итерации). Маленький квадрат на рис. 7b в увеличенном виде показан на рис. 7c. На нем можно заметить, как место квазипересечения заполнено «гиперболическими блоками».

Теперь мы должны вспомнить, что обозначают цвета на рисунках. Они показывают знак определителя (11). Структура, подобная шахматной доске, ячейки которой становятся меньше и меньше с увеличением числа итераций, показывает, что векторы базиса $\{\bar{e}_n^s(p), \bar{e}_n^u(p)\}$ поворачиваются очень

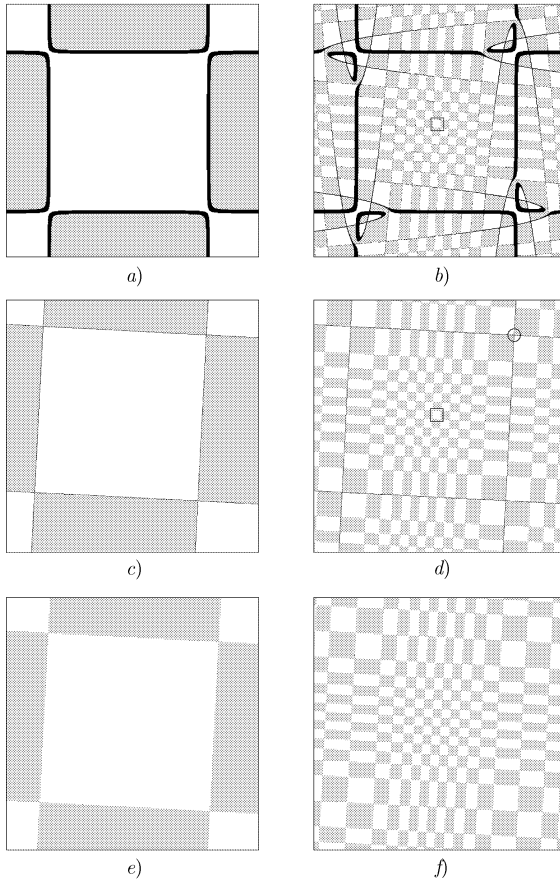


Рис. 6. Графики, соответствующие $g = 3.1$, $\delta = 0.5$. Области и числа итераций для них приведены в следующем порядке: а) $[-0.2383 \pm 3.955 \times 10^{-1}] \times [0.2540 \pm 3.955 \times 10^{-1}]$, $n = 1$. б) Область та же, что и в а), $n = 2$. в) $[-0.24681 \pm 1.977 \times 10^{-2}] \times [0.27382 \pm 1.977 \times 10^{-2}]$, $n = 2$. д) Область та же, что и в в), $n = 3$. е) $[-0.247326 \pm 9.89 \times 10^{-4}] \times [0.275563 \pm 9.89 \times 10^{-4}]$, $n = 3$. ф) Область та же, что и в е), $n = 4$. Области в в) и е) являются увеличениями областей, обозначенных маленькими квадратами на б) и д) соответственно. Площадь вокруг центра окружности, отмеченной на д), показана на рис. 7а

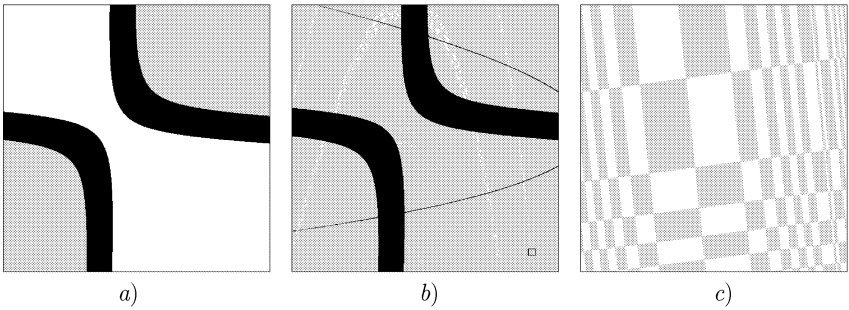


Рис. 7. Графики, соответствующие $g = 3.1$, $\delta = 0.5$. Области и числа итераций для них приведены в следующем порядке: а) $[-0.23518286 \pm 7.06 \times 10^{-6}] \times [0.28809545 \pm 7.06 \times 10^{-6}]$, $n = 3$. б) Область та же, что и в а), $n = 12$. в) $[-0.2351771968 \pm 1.513 \times 10^{-7}] \times [0.2880994148 \pm 1.513 \times 10^{-7}]$, $n = 12$. На рис. в) изображена с увеличением область, отмеченная на б) вблизи правого нижнего угла

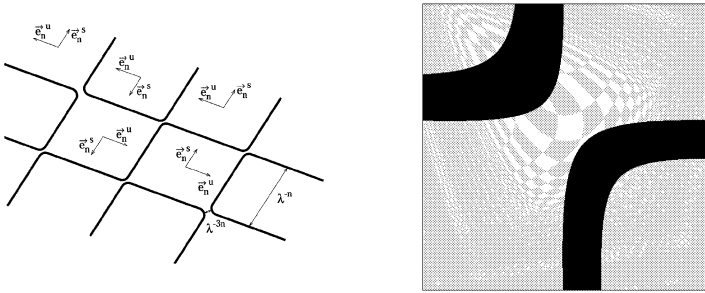


Рис. 8. Слева: квазиразбиение линиями нулевых значений $\sin \alpha_n$. Положения системы координат, определенной $\bar{e}_n^s(p)$, $\bar{e}_n^u(p)$ в различных ячейках сети. Справа: изображение поворотов системы координат в перешейке при использовании $g = 2.2$; $n = 11$, $\delta = 0.5$ в области $[0.230717083 \pm 1.872 \times 10^{-5}] \times [0.26928602 \pm 1.872 \times 10^{-5}]$.

быстро, когда точка p пересекает площадь, занятую этой структурой. Также эта система координат поворачивается на угол π , когда p проходит через *перешеек* квазипересечения (см. рис. 8).

Заметим также, что размеры ячеек квазиразбиения на рис. 8 имеют порядок $e^{-n\chi}$, поскольку противоположные стороны возникают из различных

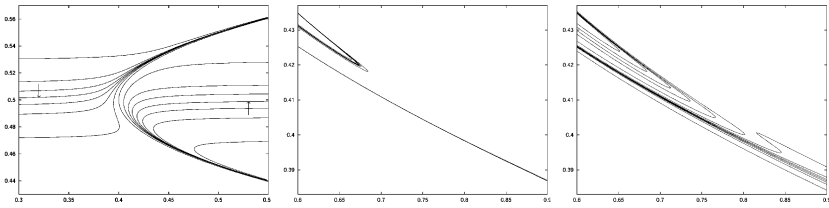


Рис. 9. Квазипересечение двух линий складок и эффект отображения F . а) Линии постоянных значений аргумента ξ_n показаны для $n = 2$ и $g = 2.1$. Значения аргумента $\vec{X}_2(p)$ для различных линий кратны $\pi/8$ и перечисляются в порядке пересечения с правой частью рамки сверху вниз: 1,2,3,4 (линия складки), 5,6,7,8 (эквивалентно -8), -7,-6,-5,-4 (линия складки), -3,-2,-1 и затем снова -1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8. б) Аналогично для $n = 3$ с расположением вблизи образа отображения F в случае а). Значения аргументов $\vec{X}_3(p)$ для различных линий кратны $\pi/8$, перечисляются в порядке пересечения с левой частью рамки снизу вверх и проходят от -8 до -1, затем от 0 до 7 и снова от 7 до 0. в) Образы линий рисунка а) при действии отображения F в области, изображенной на рисунке б). Показанные линии соответствуют линиям с рисунка а), повернутым почти на π . Линии с метками -2 и -1 лежат вне изображения.

критических значений функции f . Например, стороны, которые параллельны $\vec{e}_n^s$, переходят в вертикальные полосы на рис. 2, после применения F^n . Направления сторон ячейки близки к устойчивому и неустойчивому направлению в центре ячейки. Как говорилось в п. 2, масштабирование с коэффициентом λ^{-1} размеров *ячеек* в *квази-разбиении* соответствует масштабированию с коэффициентом λ^{-3} кривых в *углах структуры* и размеров *перешейков* (см. снова рис. 8).

5. Нерегулярности и острова

Из предыдущего эксперимента может возникнуть ложное впечатление, что гиперболическая структура внутри хаотической области является довольно простой и регулярной, но это впечатление неверно. Могут возникать спорадические нерегулярности. Происхождение этих нерегулярностей может быть описано следующим образом. При переходе от n итерации к $n + 1$ линии складок нового поколения, т. е. $n + 1$ итерации, создают более тонкую сеть, чем линии n -ой итерации. На рис. 9 показан эффект отображения F на квазипересечении двух линий складок. Для этого рисунка было выбрано $g = 2.1$. На рис. 9а мы начертили различные линии уровня аргу-

мента ξ_2 , образа исходного слоения ξ_0 при $n = 2$. В частности, две линии складок, соответствующие значению аргумента $\pi/2$, отмечены стрелочками. Аналогичные линии для ξ_3 показаны на рис. 9b, они гораздо сильнее сжаты в вертикальном направлении и растянуты в горизонтальном (в обоих случаях с коэффициентом λ). Для полноты образы линий из рис. 9a при действии отображения F показаны на рис. 9c для того же самого участка поверхности, что и на рис. 9b. Ввиду формулы (4) линии аргумента $\pi/2$ на рис. 9a превратились в линии нулевого аргумента на рис. 9c. В действительности рис. 9 дает информацию о значении аргумента $\vec{X}_n(p)$, определенного выражением (8), а не просто аргумента ξ_n .

Рисунок 9 показывает также, как в некотором смысле под действием отображения сложные неустойчивые конфигурации переходят в простые устойчивые элементы. Среди них можно обнаружить так называемую касп-сингулярность, где пересекаются две линии складок. Касп-сингулярность (см. рис. 10) является устойчивой, т. е. она не уничтожается последующими итерациями. Локальная модель слоения вблизи пересечения задается интегральными линиями векторного поля $(\xi + \frac{1}{2}\eta^2)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}$. Экспериментально

известно, что две касп-сингулярности: одна для ξ_n , а другая для ξ_{-n-1} при встрече могут создать остров. Мы проиллюстрируем это явление с помощью той же самой модели (3), где $f(x) = \cos 2\pi x$ и $g = 2.1602$. Значение параметра g было подобрано так, чтобы произошло такое пересечение. Точка в центре острова остается эллиптической (или эллиптической остается некоторая точка, бифурцирующая из нее) при g , лежащем приблизительно между 2.16014 и 2.16083.

На рис. 11a можно увидеть встречу двух касп-сингулярностей при большом увеличении. Для всех частей рис. 11 использовалось значение $\delta = 0.25$. Число итераций $n = 7$. На втором рисунке изображена та же самая область, но при $n = 30$. На нем замечен остров, окруженный морем хаоса. Легко проверить, что остров имеет период 8 и координаты центральной точки $x = y = a \simeq 0.8595591975$. Значение a удовлетворяет следующему условию: Пусть (a, a) — начальная точка, а (b, a) и (c, b) — соответственно вторая и третья итерации. Тогда должно выполняться $b + c = 1/2 \pmod{1}$. Симметрии f в нашем случае ($f(-x) = f(x)$, $f(x + 1/2) = -f(x)$) влекут, что (a, a) имеет период 8, периодическая траектория симметрична относительно диагонали $x = y$ и также относительно точки $(1/4, 1/4)$. Кроме того, точка (a', a') , где $a' = b - 1/2 \pmod{1}$, также приводит к симметричной 8-периодической траектории с теми же собственными значениями. Ее мы будем называть «сопутствующей траекторией» для первой траектории. Из

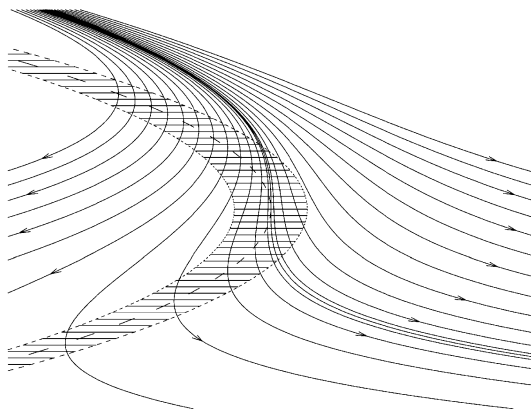


Рис. 10. Геометрия вблизи касп-сингулярности. Две линии складок (изображенные прерывистыми линиями и образующими вместе некоторого рода параболу) пересекаются. Заштрихованная область соответствует точкам, для которых аргумент $\tilde{X}_n(p)$ близок к $\pi/2$

точек первой траектории $\{(x_j, y_j), j = 1, \dots, 8\}$ можно получить точки сопутствующей траектории $\{(u_j, v_j), j = 1, \dots, 8\}$ по формулам $u_j = -x_j$, $v_j = y_j - 1/2$, но они переходят друг в друга в другом порядке под действием отображения F . На рис. 11с показано увеличенное изображение предыдущего рисунка. Число итераций увеличено до 240. Области, окрашенные разными цветами вокруг эллиптической периодической точки, показывают изменение числа вращения (оно уменьшается), когда мы движемся от периодической точки к границе острова. «Последняя» инвариантная кривая имеет малое число вращения (строго меньше $1/9$) и рядом с ней расположены две гиперболические периодические точки периода 8. Подходящие ветви сепаратрис этих двух точек близки к «последней» инвариантной кривой (практические методы аппроксимации этой кривой см. в [17]).

На рис. 11d изображены некоторые траектории вокруг периодической эллиптической точки. Траектория точки, лежащей вблизи острова (сдвинутой по координатам x, y на 3.2×10^{-5} относительно периодической точки), порождает море хаоса, которое, похоже, покрывает все фазовое пространство, т. е. весь тор. Точнее, если на всей области $[0, 1] \times [0, 1]$ используется сетка 4500×4500 пикселей, то все ячейки содержат точки траектории после

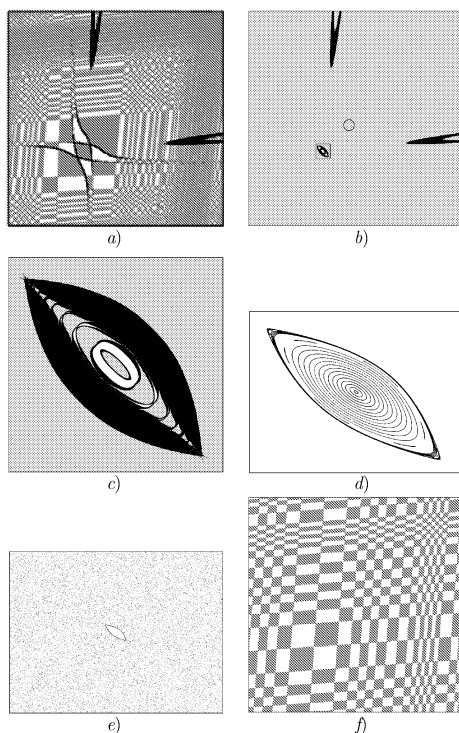


Рис. 11. Встреча двух касп-сингулярностей и остров при $g = 2.1602$: а) $n = 7$ область $[0.860115 \pm 1.811 \times 10^{-3}] \times [0.860036 \pm 1.811 \times 10^{-3}]$. б) область, как и в а), но $n = 30$, показано возникновение острова. Квадрат, отмеченный внутри рисунка, соответствует рисунку с), а на рисунке ф) показан участок поверхности, расположенный около центра отмеченной окружности. с) Увеличение области, отмеченной на б) $n = 240$, центральная точка (периода 8) с $x = y = 0.8595591975$. Ширина равна 2.4×10^{-4} . д) то же что и на с), но внутри острова показаны траектории. е) итерации точки $x = y = 0.8595911975$ вблизи границ острова с внешней стороны попадают в квадрат ширины 2×10^{-3} вокруг периодической точки. Используется в общей сложности 2.5×10^{11} итераций. Также приближенно изображена «последняя» инвариантная кривая с начальной точкой $x = y = 0.8595908098$. ф) Структура, подобная шахматной доске с $n = 20$, изображена на квадрате с центром $x = y = 0.86$ и шириной 10^{-12}

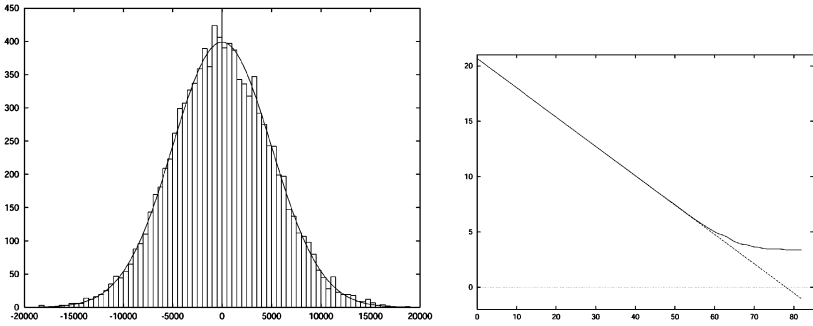


Рис. 12. Слева: гистограмма ошибок относительно равномерного разбиения для моделирования, упомянутого в тексте. Соответствующая (масштабированная) функция плотности нормального распределения с теоретической дисперсией также изображена на рисунке. Справа: логарифм экспериментального (непрерывная линия) и теоретического (прерывистая линия) числа «пустых» прямоугольников из общего числа 30720×30720 прямоугольников как функция от числа прямоугольников для 2.5×10^8 итераций

4×10^8 итераций (это может также зависеть от арифметики с плавающей точкой). Это свидетельствует о том, что не существует островов с шириной на много большей, чем у острова, изображенного на рис. 11 для данного значения g (см. в дальнейшем описание заключительного эксперимента). Было проведено более длительное моделирование, начинающееся с той же точки и использующее $n = 2.5 \times 10^{11}$ итераций. На рис. 11е изображена часть этой траектории, лежащая в прямоугольнике вокруг периодической точки. Для сравнения изображена приближенная последняя инвариантная кривая, чья начальная точка также лежит на диагонали. Ошибки арифметики с плавающей точкой играют значительную роль, но *итерации не должны входить внутрь острова*. На рис. 11е изображены итерации, попадающие в область $[a \pm 10^{-3}] \times [a \pm 10^{-3}]$, где a было задано ранее. В принципе, если не учитывать наличие острова, то при возникновении точного равномерного разбиения 10^6 итераций должны попасть в область. В проведенном нами моделировании это число равнялось 997171, что показывает примечательную точность. (И опять это зависит от компьютерной арифметики, операционной системы, компилятора и программы.) В качестве дополнительной проверки полное фазовое пространство было разделено на 100×100 квадратов вида $[i/100, (i+1)/100] \times [j/100, (j+1)/100]$, $i, j =$

$= 0, \dots, 99$. Записывалось число итераций, попадающих в каждый квадрат. Для равномерного распределения получается среднее значение 2.5×10^7 итераций на квадрат. Наибольшие наблюдавшиеся отклонения среди 10^4 квадратов были равны -22949 и $+18762$. И вновь очень хорошее согласование с предположением эргадичности относительно меры Лебега в море хаоса. На рис. 12 (слева) показана гистограмма распределения ошибок относительно среднего значения. Каждый интервал на этом рисунке имеет ширину 500 точек. В качестве вертикального значения изображалось число квадратов, для которых ошибка укладывается в этот интервал (без деления этого значения на 500). Полученные данные близки к теоретическому значению, которое приближенно равно $10^4 \times 500$, умноженному на нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и стандартной дисперсией $[2.5 \times 10^{11} \times 10^{-4} \times (1 - 10^{-4})]^{\frac{1}{2}}$.

И, наконец, заключительный эксперимент, проходивший во время этого моделирования: весь прямоугольник был разделен на $B = 30720 \times 30720$ равных квадратов аналогично сетке 100×100 , обсуждавшейся выше. После того, как итерация попадала в квадрат, он отмечался как «заполненный». После каждого блока из 2.5×10^8 итераций, записывалось *экспериментальное* число «пустых» квадратов E^E . Согласно распределению Пуассона *теоретическое* число пустых квадратов после N итераций дается формулой $E_T = B \exp(-N/B)$. На рис. 12 справа показаны логарифмы экспериментального и теоретического значений E_E и E_T как функции от числа блоков итераций. Для начальных блоков мы видим точное совпадение. В конце экспериментальное значение стабилизировалось на значении 29 квадратов. Они соответствуют квадратам внутри островов. Были обнаружены лишь острова периода 8, описанные выше, и «сопутствующие острова». Более того, не все из 16 островов могут быть «замечены» при изучении пустых квадратов, поскольку некоторые из них очень узкие ($< 10^{-5}$), только 4 из них были замечены.

Чтобы убедиться, что море хаоса имеет гиперболическую структуру, имеющую аналогичный тип, что и структура, которую мы видели в п. 4 на рис. 11f, мы увеличили маленький квадрат, расположенный на рис. 11b вокруг центра отмеченной окружности. Мы выбрали $n = 20$ и достаточно маленькую ширину (10^{-12}). Каждое увеличение n соответствует подходящему уменьшению размеров квадрата. На рис. 11f центральная точка лежит на диагонали, но аналогичное поведение было получено также и для произвольных точек (см. следующий параграф).

6. Случай малых значений g

Может возникнуть впечатление, что все изучаемые нами эффекты возникают из-за сильной гиперболичности матрицы (5), когда g достаточно велико, но существует другой большой параметр, который возникает здесь во всех видах динамики, порождаемой отображениями, сохраняющими площадь, а именно число итераций n . Даже если g мало, можно увидеть хаотические области. Мы показали на рис. 13 последовательность картинок, демонстрирующих, что тот же самый механизм действует и в случае малых g .

Мы взяли $g = 0.2$ как и на рис. 1. Для демонстрации гиперболической структуры необходимо взять довольно большое число итераций. Наша стратегия здесь будет несколько отличаться от той, которую мы использовали раньше. С самого начала мы зафиксируем $n = 250$, довольно большое число, а затем будем последовательно уменьшать размеры прямоугольника. На первом рис. 13а изображена та же самая область, что и на рис. 1. Для рис. 13а используется отсекающее значение $\delta = 0.02$, а для рисунков 13b, ..., f используется $\delta = 0.05$. Каждый последующий рисунок является увеличенным изображением квадрата, нарисованного на предыдущем (или маленького квадрата вокруг центра отмеченной окружности).

Последний рисунок этой последовательности явно демонстрирует гиперболическую структуру. Для того чтобы подчеркнуть совершенство этого рисунка мы представили на рис. 14а его версию, состоящую из линий, т. е. показаны только точки, в которых $\sin \alpha_n(p) = 0$.

Линии выглядят абсолютно прямыми, но в действительности они не пересекаются, создавая вместо этого квазипересечения. Ширина этого последнего квадрата равна $d = 3.32 \times 10^{-10}$ и, следовательно, типичный размер ячейки в этой области имеет порядок 10^{-10} . Можно ожидать, что ширина перешейков в квазипересечении будет иметь порядок 10^{-30} , если учесть закон сжатия в λ^{-3} раз на итерацию, описанный в п. 2. Столь подробные детали изображены в правой части рис. 14, где ширина квадрата равна 2.358×10^{-27} . Еще меньшие детали можно изучать при использовании арифметики произвольной точности. Это вполне доступно, но значительно увеличивает время вычислений.

7. Заключение

Описанные выше изображения гиперболической структуры в хаотических областях, похоже, являются типичными для отображений, сохра-

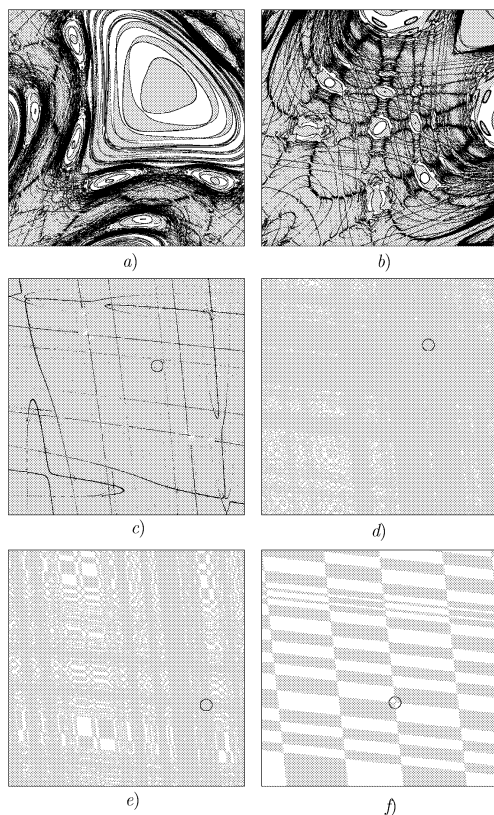


Рис. 13. Последовательность увеличений для $g = 0.2$, $n = 250$, для первого рисунка $\delta = 0.02$, для всех остальных $\delta = 0.05$. Размеры квадратов: а) $[\pm 0.25] \times [\pm 0.25]$. б) $[-0.1292 \pm 4.82 \times 10^{-2}] \times [-0.1292 \pm 4.82 \times 10^{-2}]$; в) $[-0.14237 \pm 3.79 \times 10^{-3}] \times [-0.14237 \pm 3.79 \times 10^{-3}]$; д) $[-0.1413818 \pm 1.21 \times 10^{-5}] \times [-0.1413818 \pm 1.21 \times 10^{-5}]$; е) $[-0.1413768120 \pm 7.23 \times 10^{-8}] \times [-0.1413768120 \pm 7.23 \times 10^{-8}]$; ф) $[-0.141376763117 \pm 1.66 \times 10^{-10}] \times [-0.141376763117 \pm 1.66 \times 10^{-10}]$. Каждый последующий рисунок является увеличением квадрата, изображенного на предыдущем рисунке (или маленького квадрата вокруг центра отмеченной окружности). См. рис. 14 для объяснения смысла окружности, отмеченной на ф)

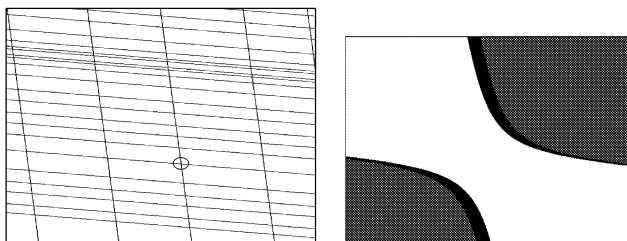


Рис. 14. Слева: квазиразбиение линиями нулевого уровня $\sin \alpha_{250}$ соответствующее тем же данным и прямоугольнику, что и рис. 13f. Линии выглядят абсолютно прямыми, но в действительности они не пересекаются, а создают квазипересечения. Справа: очень сильное увеличение участка рис. 13f вокруг центра отмеченной окружности (также отмеченной в левой части этого рисунка). Область: $[-0.141376763095468034329865598497 \pm 1.179 \times 10^{-27}] \times [-0.141376763095468034329865598497 \pm 1.179 \times 10^{-27}]$

няющих площадь с одновременным существованием регулярного и хаотического поведения. Обобщение на более высокие размерности может быть выполнено при использовании гладкого лагранжевого слоения вместо ξ_0 .

Общее впечатление заключается в том, что хаос хорошо организован. Пространство моря хаоса может быть разложено на гиперболические блоки благодаря использованию описанной конструкции. Некоторые нерегулярности, такие, как касп-сингулярности и острова, возникают редко. Вероятность встретить их при выполнении процесса ренормализации экспоненциально стремится к нулю при увеличении числа итераций. Можно также предположить, что расположение нерегулярностей подчинено простым законам.

Тем не менее из нашего анализа не ясно, является ли конечным число островов? Будут ли острова плотными в фазовом пространстве? Результаты Дуарта [5] свидетельствуют в пользу положительного ответа на последний вопрос.

Благодарности. Экспериментальная часть этой работы была выполнена в основном в мае и июне 1996 г., когда второй автор посещал университет Барселоны и университет Милана с краткими визитами. Предварительные эксперименты были проведены ранее во время визита второго автора в филиал университета Милана в г. Комо. Первый вариант этой статьи был написан в то время, когда второй автор был приглашенным исследователем в

обсерватории Ницы. Он благодарит профессоров У.Фриша и А.Морбиделли за эту возможность.

Работа частично поддерживалась грантом INTAS 93-339ext. Второй автор также частично поддерживался грантами CRDF RM1-227, RFFI97-01-00612 и грантом Государственного комитета по высшему образованию Российской Федерации. Поездки в Комо поддерживались грантом CNR-GNFM (Италия). Первый и последний авторы частично поддерживались European Network Grant ER-BCHRXCT 940460. Вычислительные мощности были предоставлены по грантам PB94-215 (Испания) и 1996S0GR-105 (Каталония), из которого также оказывалась поддержка во время визитов второго автора. Статья была закончена во время пребывания второго автора в Барселоне в качестве приглашенного исследователя, поддержанного грантом SAB199-0605 (Испания).

Литература

- [1] G. Benettin, D. Casati, L. Galgani, A. Giorgilli, L. Sironi, *Apparent fractal dimensions in conservative dynamical systems*, Phys. Lett. A **118** (1986), 325–330.
- [2] H. Broer, C. Simó, J. C. Tatjer, *Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms*, Preprint, 1996.
- [3] L. Carleson, *Stochastic models of some dynamical systems*, Unpublished paper.
- [4] B. V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Physics Reports, **52**, (1979), 263–279.
- [5] P. Duarte, *Plenty of elliptic islands for the standard family of area preserving maps*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire **11**, No 4 (1994), 359–409.
- [6] V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, N. V. Svanidze, *A refined formula for the separatrix splitting for the standard map*, Physica D **71** (1994), 82–101.
- [7] M. Hénon, Current Contents **28** No.4 (1988), 18.
- [8] M. Hénon, C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astronomical Journal **69**, No.1 (1964), 73–79.

- [9] V. F. Lazutkin, C. Simó, *Homoclinic orbits in the complex domain*, International Journal of Bifurcation and Chaos **7** (1997), 253–274.
- [10] V. F. Lazutkin, *Positive entropy for the standard map I*, Prépublications 94–47 Université de Paris–Sud Mathématiques Bâtiment 425 91405 ORSAY France.
- [11] V. F. Lazutkin, *Jumping Folds Phenomenon in Area–Preserving Maps* (May 1995), PennState, Department of Mathematics, Report No. PM 190.
- [12] В. И. Осельдец *Мультипликативная эргодическая теорема: характеристические показатели Ляпунова динамических систем*, Труды ММО, **19**, 1968, стр. 197–231.
- [13] Я. Б. Песин, *Семейства инвариантных многообразий соответствующие ненулевым характеристическим показателям*, Изв. АН СССР, сер. мат., **40:6**, 1976, стр. 1332–1379.
- [14] Ya. B. Pesin, *Lyapunov characteristic exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surveys **32** (1977), 55–114. См. также на русском языке: Я. Б. Песин, *Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория*. УМН, 1977, т. 32, стр. 55–114.
- [15] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vols 1–3, Gauthier–Villars, Paris, 1892, reprinted by Dover, New York (1957). См. также русский перевод: А. Пуанкаре *Новые методы небесной механики*. В кн. *Избранные труды*, т. 1 М.: Наука, 1971.
- [16] C. Simó, D. Treschev, *Stability islands in the vicinity of separatrices of near–integrable symplectic maps*, Preprint, 1997.
- [17] C. Simó, D. Treschev, *Evolution of the «last» invariant curve in a family of area preserving maps: The case of the separatrix map*, Preprint, 1997.
- [18] J. M. Strelcyn, *The «coexistence problem» for conservative dynamical systems: a review.*, Colloq. Math. **62**, No. **2** (1991), 331–345.
- [19] E. Zehnder, *Homoclinic points near elliptic fixed points*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 131–182.

Инвариантные кривые аналитически возмущенных, незакручивающих, сохраняющих площадь отображений*

К. СИМО

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

В этой статье исследуются сохраняющие площадь отображения, близкие к интегрируемым, но не удовлетворяющим условию закручивания. Доказывается существование инвариантных кривых, не являющихся более однозначными графиками относительно угловой переменной. Кроме общего случая коразмерности 1 изучаются несколько случаев коразмерности более высокого порядка. Найдены меандровые кривые, подобные же кривые высшего порядка, а также лабиринтные кривые. На нескольких примерах поясняется, что изученное поведение наблюдается в очень простых семействах отображений.

1. Введение

Хорошо известно, что гамильтоновы системы с двумя степенями свободы с помощью сечения Пуанкаре на постоянном уровне энергии индуцируют сохраняющие площадь отображения (СПО) (см., например, [12] § 22). Это дает мощный инструмент для понимания динамики и получения критериев устойчивости. С этой же целью требуется, чтобы отображение было

*Simó C. Invariant curves of analytic perturbed nontwist area preserving maps, Reg. & Chaot. Dyn., 1998, v.3, №3, p. 180–195. Перевод Богатыревой Е. В., Килина А. А.

(по крайней мере, локально) достаточно малым возмущением закручивающего отображения. Для того чтобы быть более конкретным, предположим, что отображение выражено в полярных координатах (x — угол $\bmod 2\pi$, y — радиус) в виде

$$(x, y) \rightarrow (x + \alpha(y), y) + \varepsilon(f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad (1)$$

где y лежит в интервале $[y_1, y_2]$, $0 < y_1 < y_2$ и $x \in \mathbb{S}^1$. Члены f_1, f_2 , появляющиеся в *возмущении*, не являются независимыми, а связаны условием сохранения площади полного отображения. Первая (*невозмущенная*) часть отображения в (1) имеет динамику, определяемую расслоением на инвариантные окружности. Говорят, что она удовлетворяет *условию закручивания*, если $[d\alpha/dy]$ ограничено снизу в интервале $[y_1, y_2]$. Тогда, если ω достаточно мало, то при возмущении несколько инвариантных кривых выживают. Если для некоторого $y^* \in (y_1, y_2)$ $\rho = \alpha(y^*)/(2\pi)$ удовлетворяет диофантову условию, $|\rho - p/q| > c/q^\tau$ для любого $p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, $q > 0$ и некоторых положительных c и τ , тогда, если ε достаточно малая величина, существует инвариантная кривая с числом вращения ρ . Более того, ее можно выразить как график функции $y = g(x)$, определенной на $\mathbb{S}^1$.

Вышеизложенное утверждение составляет содержание знаменитой *теоремы Мозера о закручивающих отображениях*. Аналитический случай теоремы рассматривается в так называемой КАМ теории [7, 1], первое доказательство в дифференцируемом случае дал Мозер [8], а последующие уточнения, касающиеся оптимальности условия дифференцируемости, в основном появились благодаря Рюссману [11] и Ерману [5]. Мы не будем следовать в этом направлении. Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы прояснить ситуацию, когда условие закручивания больше не выполняется. Некоторые результаты в этом направлении и много вдохновляющих идей можно найти у Германа [6]. В целях упрощения мы будем придерживаться в ходе нашего исследования аналитичности, однако это несущественно для любого из результатов.

Основная мысль состоит в том, что можно легко вернуться к выполнению условия закручивания с помощью соответствующей замены переменных, подходящих для описания данной динамической проблемы. В частности, можно выбрать удобное масштабирование переменных. Начнем с интегрируемого случая, когда условие закручивания низкой коразмерности более не выполняется: т.е. существует некоторое значение y^* , такое что $d\alpha/dy(y^*) = 0$, но $d^2\alpha/dy^2(y^*) \neq 0$. В данном случае возмущения общего вида приводят на соответствующей развертке к существованию

инвариантных кривых, которые, конечно, больше не являются графиками над $\mathbb{S}^1$. Ниже приведены несколько «естественных» примеров. Более того, для того чтобы проиллюстрировать типичность приведенных примеров, рассматривается одно из очень «популярных» семейств отображений. Консервативного отображения Хёнона вполне достаточно, чтобы показать существование исследуемого здесь явления. Появляющиеся при рассмотрении инвариантные кривые имеют отчасти «меандровое» поведение. *Меандр высшего порядка* также может наблюдаться в очень простых семействах отображений, если подобраны соответствующие множества значений параметров.

Затем мы обращаемся к конкретным возмущениям, которые приводят к инвариантным кривым с различными структурами. Рассматривается также пример с вырождением условия закручивания. Приведены некоторые результаты для случая, когда первая ненулевая производная $\alpha(r)$ в точке $y = y^*$ имеет порядок $k > 2$.

Если определенные условия на закручивание объединить со специальными возмущениями, то можно получить крайне вырожденные и интересные примеры, содержащие так называемые *лабиринтные* инвариантные кривые. Это явление также показано на очень простых примерах.

Интересно отметить, что все рассмотренные ниже случаи устойчивы относительно малых возмущений. Это следует из устойчивости диофантовых инвариантных кривых (1), если возмущение f_1 и f_2 достаточно мало. В частности, для всех семейств отображений, используемых в примерах (даже для необщих), меандровые кривые существуют на открытых множествах пространства параметров.

Для краткости все приведенные здесь примеры представляют собой простые дискретные отображения. Конечно, такого рода явления встречаются и на сечениях Пуанкаре в задачах механики.

В заключение мы приводим перспективы дальнейших исследований и новые постановки задач.

2. Возмущение однопараметрических семейств незакрученных изображений. Общий случай

Без потери общности можем предположить, что критическое значение y^* располагается в начале координат. Начальное интегрируемое отображение F_0 можно взять в виде

$$F_0 : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \omega + y^2 + O(y^3), y), \quad (2)$$

где по предположению $\alpha(y)$ является аналитическим в окрестности $y = 0$, а переменная y отмасштабирована так, что коэффициент при y^2 равен единице. Отметим, что в соответствии с (2) F_0 имеет минимум числа вращения при $y = 0$. Аналогичным образом можно исследовать случай максимума.

Удобнее работать с производящей функцией S СПО F , а не самим отображением $F : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$:

$$S = S(x, \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{\partial S}{\partial \bar{y}}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Производящая функция S_0 , соответствующая (2), задается

$$S_0(x, \bar{y}) = x\bar{y} + \omega\bar{y} + \frac{1}{3}\bar{y}^3 + O(\bar{y}^4). \quad (3)$$

Теперь введем в F_0 возмущение и получим некоторое ε -зависимое семейство F_ε . Как уже говорилось выше, проще возмутить производящую функцию до S_ε .

Теорема 1 (Общее возмущение общего случая). *Рассмотрим общее возмущение незакручивающего СПО, заданного порождающей функцией (3). Оно имеет инвариантные кривые, при условии что возмущение достаточно мало, а ω лежит в соответствующих пределах.*

Доказательство состоит из нескольких шагов¹.

Шаг 1. Приведение к некоторой модели с малым возмущением.

Рассмотрим производящую функцию возмущенного отображения. Она имеет вид

$$S_\varepsilon(x, \bar{y}) = x\bar{y} + \omega\bar{y} + \frac{1}{3}\bar{y}^3 + O(\bar{y}^4) + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \sum_{k \geq 0} p_{j,k}(x) \bar{y}^k, \quad (4)$$

где ε — малый параметр, а $p_{j,k}$ — 2π -периодические функции, так что S_ε является аналитической в некоторой области $|\bar{y}| < y_0$, $|Im(x)| < x_0$. Из (4) следует, что главные члены возмущенного отображения F_ε следующие:

$$\bar{x} = x + \omega + \bar{y}^2 + O(y^3, \varepsilon), \quad \bar{y} = y - \varepsilon \frac{dp_{1,0}}{dx} + O(\varepsilon y, \varepsilon^2). \quad (5)$$

¹В недавней статье А. Дельшамса и Р. ДелаЯве (A. Delshams, R. de la Llave KAM theory and a partial justification of Greene's criterion for non-twist maps, preprint 1998) рассматривается существование немеандровых инвариантных кривых также в случае нескручивающих отображений.

Предположим (не нарушая общности), что $\frac{dp_{1,0}}{dx}$ не тождественно равно нулю, и для краткости обозначим его просто как $-p(x) - 2\pi$ -периодическую функцию с нулевым средним. Произведем замену переменных в отображении (5)

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \gamma y, & \gamma &= \varepsilon^{1/3}, & \omega &= 2\pi \frac{m}{n} + \delta, \\ \delta &= -b\alpha, & \alpha &= \varepsilon^{2/3}, \end{aligned} \quad (6)$$

после которой новая переменная (которую мы опять обозначили через y) и параметр b конечны в интересующей нас области. Произведенной заменой мы, по сути, выбираем полосу значений исходной переменной y шириной $O(|\varepsilon|^{1/3})$, а параметр ω рассматриваем в $O(|\varepsilon|^{2/3})$ окрестности соответствующего рационального числа m/n . После замены в качестве малого параметра удобнее использовать α . Отображение при этом принимает вид

$$F_\alpha : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + 2\pi \frac{m}{n} + \alpha(-b + \bar{y}^2) + O(\alpha^{3/2}), y + \alpha p(x) + O(\alpha^{3/2})). \quad (7)$$

Если α очень мало по сравнению с $1/n$, естественно искать n -ю степень отображения F_α , при этом члены, независимые от α , должны давать тождественное преобразование. Пусть $(x^{(0)}, y^{(0)})$ является исходной точкой, а $(x^{(j)}, y^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$ является первыми n итерациями (7). Простое вычисление дает

$$F_\alpha^n : \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} + n\alpha(-b + \bar{y}_{(0)}^2) + O(n\alpha^{3/2}) \\ y^{(0)} + \alpha \sum_{j=0}^{n-1} p(x^{(j)}) + O(n\alpha^{3/2}) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Сумма в (8) может быть представлена в виде

$$n\{c_n \sin(nx^{(0)} + \varphi_n) + c_{2n} \sin(2nx^{(0)} + \varphi_{2n} + \dots) + O(n\alpha^2), \quad (9)$$

где φ_{kn} , $k \geq 1$ — подходящие фазы. Снова, не нарушая общности, можно предположить, что $c_n \neq 0$. Для упрощения приводимых ниже рассуждений будем предполагать аналитичность p , а также предположим, что коэффициенты c_{kn} намного меньше, чем c_n при $k \geq 2$. Таким образом, в дальнейших рассуждениях мы оставим только c_n , а отброшенные члены будут создавать только малые возмущения. Примеры, где данное допущение нельзя использовать, ниже будут рассмотрены отдельно.

Теперь мы можем сделать следующие упрощения:

1. Так как относительный угол в (9) равен $nx(0)$, то мы примем его за новую угловую переменную и снова обозначим как x . Аналогичным образом, $y(0)$ обозначим как y .

2. Фазу φ_n можно исключить с помощью выбора начала отсчета углов.

3. Величину $n\alpha$ можно рассматривать как новый малый параметр, который снова обозначим как α .

4. Коэффициент c_n можно положить равным единице с помощью соответствующего масштабирования переменной y (и последующего масштабирования α). При этом также происходит масштабирование b , однако, как и выше, мы сохраним старое название за новым параметром.

Подводя итог, отображение (8) можно записать в виде

$$M_\alpha: (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \alpha(-b + \bar{y}^2) + o(\alpha), y + \alpha \sin(x) + o(\alpha)). \quad (10)$$

Полученное отображение все еще является СПО, и, кроме того, благодаря малости α оно близко к тождественному. С помощью стандартных методов достройки простого отображения до периодического по времени гамильтонова потока с одной степенью свободы и методов усреднения (общий обзор см. в [9], а более приемлемое к рассматриваемому здесь случаю изложение см. в [2]) отображение (10) может быть записано как автономный гамильтонов поток с переменной α в качестве времени плюс экспоненциально малая по α (т.е. ограниченная выражением вида $\exp(-c_1/|\alpha|)$ с некоторым положительным c_1 и достаточно малым α) поправка. Получаемый гамильтониан при $\alpha \rightarrow 0$ имеет вид

$$H_\alpha(x, y) = -by + \frac{1}{3}y^3 + \cos(x) + o(1). \quad (11)$$

Зависимость от α включена в слагаемое $o(1)$, и задача рассматривается в некоторой компактной области в переменных (x, y, b) , например, в области $S^1 \times [-10, 10] \times [-10, 10]$, которой вполне достаточно для наших целей.

Шаг 2. Исследование гамильтониана

Теперь изучим динамику (11) в зависимости от b , опустив члены $o(1)$. При $b \geq 0$ в системе существуют неподвижные точки в $A = (0, \sqrt{b})$, $B = (0, -\sqrt{b})$, $C = (\pi, \sqrt{b})$ и $D = (\pi, -\sqrt{b})$. Если $b > 0$, то A и D — гиперболические точки, а другие две — эллиптические. Если $b = 0$, то $A = B$, $C = D$, и обе точки являются параболическими. Интересно отметить,

что значения гамильтониана в различных неподвижных точках следующие:

$$\begin{aligned} H(A) &= -\frac{2}{3}b^{3/2} + 1, & H(B) &= \frac{2}{3}b^{3/2} + 1, \\ H(C) &= -\frac{2}{3}b^{3/2} - 1, & H(D) &= \frac{2}{3}b^{3/2} - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует, что при критическом значении $b_{crit} = (3/2)^{2/3}$ гиперболические точки находятся на одном уровне энергии ($H = 0$). Следовательно, кроме гомоклинических, для этого значения b будут существовать гетероклинические пересечения.

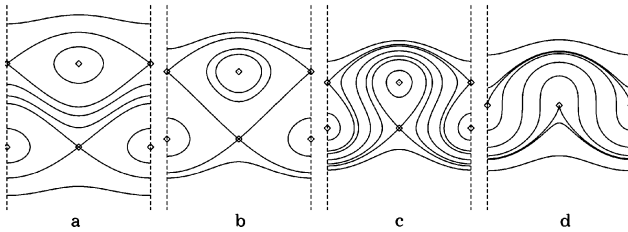


Рис. 1. Несколько сценариев поведения гамильтонова потока (11)

На рис. 1 приведены фазовые портреты (11) при различных значениях b . На рис. 1а показан случай $b > b_{crit}$. Точки с большими значениями $|y|$ двигаются вправо, тогда как при малых $|y|$ они двигаются влево: две резонансные зоны разделены. Случай б) соответствует критическому значению, когда появляются гетероклинические пересечения: резонансы начинают сливаться. Случай в), где $b \in (0, b_{crit})$, наиболее интересен: резонансы влияют друг на друга. В области энергий $h \in (\frac{2}{3}b^{3/2} - 1, 1 - \frac{2}{3}b^{3/2})$ точки двигаются теперь по орбитам, которые идут в среднем слева направо, однако между двумя уровнями, соответствующими неподвижным точкам, они двигаются влево. Назовем интегральные кривые в этой области *меандровыми кривыми*. Наконец, на рис. 1д изображен случай $b = 0$, когда все точки монотонно движутся направо. При $b < 0$ неподвижных точек не существует, и все точки движутся направо: резонансы отсутствуют.

Теперь сосредоточимся на случае, показанном на рис. 1с. Меандровые кривые являются периодическими орбитами, период которых из соображений симметрии зависит только от b и $|h|$. Ясно, что для фиксированного b

при стремлении $|h|$ к $H(A)$ период траектории увеличивается до ∞ . Было бы интересно (но не обязательно для наших целей) показать монотонность периода относительно $|h|$. Однако, по-видимому, доказательство будет основываться на изнуряющих численных проверках, так что мы только сформулируем

Гипотезу 1. Для $b \in (0, b_{crit})$ период меандровых кривых является возрастающей функцией $|h|$.

Для периода $T(b, |h|)$ при $h = 0$ выполняется следующее:

Лемма 1. В пределе, когда α стремится к нулю, период меандровых кривых (11) на уровне энергии $h = 0$, $T(b, 0)$ является возрастающей функцией b в области $(0, b_{crit})$.

Доказательство леммы.

В рассматриваемом случае период задается выражением

$$T(b, 0) = 4 \int_0^{y_{max}} (1 - (by - y^3/3)^2)^{-1/2} dy, \quad (13)$$

где y_{max} — единственный вещественный нуль уравнения $by = y^3/3 - 1$. Очевидно, что y_{max} является возрастающей функцией b и колеблется в пределах $(3^{1/3}, 12^{1/3})$. Следовательно, после введения $z = y/y_{max}$ период можно выразить как

$$T(b, 0) = 4y_{max} \int_0^1 (1 - (y_{max}^3(z - z^3)/3 - z)^2)^{-1/2} dz. \quad (14)$$

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что $T(b, 0)$ является возрастающей функцией y_{max} . Введем $\gamma = y_{max}^3/3$, которое колеблется в пределах $(1, 4)$ и $w = z^2$, тогда из (14) вытекает

$$\frac{dT(b, 0)}{dy_{max}} = 2 \int_0^1 A(\gamma, w) B(\gamma, w)^{-3/2} w^{-1/2} (1 - w)^{-1/2} dw, \quad (15)$$

где

$$A(\gamma, w) = 1 + w(2\gamma^2 - \gamma) - w^2 2\gamma^2, B(\gamma, w) = 1 + w(2\gamma - \gamma^2) + w^2 \gamma^2.$$

Легко проверить следующие свойства функций A и B :

• $A(\gamma, \cdot)$ имеет единственный нуль $w_c(\gamma)$ на отрезке $(0,1)$ для всех $\gamma \in (1,4)$. Более того, $w_c(\gamma) \geq 8/9$, при этом равенство достигается при $\gamma = 9/4$. Функция A имеет единственный максимум в $[0, w_c]$.

• $A(\gamma, w) \geq 1$, если $w \in [0, 1/2]$, $\forall \gamma \in [1, 4]$. А также $A(\gamma, w) \geq -3$ для $\forall w \in [0, 1]$ и $\forall \gamma \in [1, 4]$.

• При $\gamma \leq 2$ $B(\gamma, \cdot)$ — возрастающая функция, а при $\gamma \in [2, 4]$ имеет единственный минимум в точке $\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ со значением $\gamma - \gamma^2/4$.

• $B(\gamma, w) \leq 2$ для $\forall w \in [0, 1/2]$ и $\forall \gamma \in [1, 4]$. С другой стороны, $B(\gamma, w) \geq 217/81 > 8/3$ для $\forall w \in [8/9, 1]$ и $\forall \gamma \in [1, 4]$.

Так как интеграл в (15) мы можем расписать как сумму $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{w_c} + \int_{w_c}^1$, и выполняются неравенства

$$\int_0^{1/2} > 2^{-3/2} \int_0^{1/2} w^{-1/2}(1-w)^{-1/2} dw, \quad \int_{1/2}^{w_c} > 0,$$

$$\left| \int_{w_c}^1 \right| < 3(8/3)^{-3/2} \int_0^{1/9} w^{-1/2}(1-w)^{1/2} dw,$$

то достаточно проверить

$$8 \int_0^{1/2} w^{-1/2}(1-w)^{-1/2} dw > 3^{5/2} \int_0^{1/9} w^{-1/2}(1-w)^{-1/2} dw,$$

что, очевидно, истинно. Отметим, что для $b = 0$ минимальное значение $T(b, 0)$ равно:

$$t(0, 0) = 4 \times 3^{1/3} \sum_{j \geq 0} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \frac{1}{6j+1} \simeq 7.005440706685.$$

Таким образом, число вращения орбиты предельного гамильтониана (11) на уровне энергии h при заданном значении параметра b равно $\rho(\alpha, b, h) = \alpha/T(b, |h|)$. Это число вращения имеет ненулевую производную, за исключением случая $h = 0$, и, может быть, при некотором другом значении h

(фактически, если вышеприведенная гипотеза верна, то других исключительных значений не существует).

Шаг 3. Возврат к диффеоморфизму и существованию инвариантных кривых.

Теперь вернемся к диффеоморфизму M_α , определенному в (10). Но сначала для заданного значения $b \in (0, b_{crit})$ перейдем к переменным *действие-угол* для $h \in (H(D), H(A))$. Пусть (I, ψ) будут этими переменными, где в качестве I берется h , а в качестве ψ — отмасштабированная длина дуги. Такая замена переменных является «хорошим» диффеоморфизмом (то есть с ограниченными дифференциалом и его обратной величиной). Исключение составляют значения $|h|$, слишком близкие к $1 - \frac{2}{3}b^{3/2}$. Более подробное описание, как перейти к границе действия замены переменных, см. в [2], где приведены вычисления при исследовании диффеоморфизмов Богданова–Такенса. В переменных (I, ψ) поток H_α записывается как

$$(I, \psi) \rightarrow (I, \psi + 2\pi\rho(\alpha, b, h)). \quad (16)$$

Отметим, что для того, чтобы разница между рассматриваемым потоком и M_α была экспоненциально мала по α , следует рассматривать полное выражение для H_α , а не только главный член. Теперь мы готовы записать M_α в переменных (I, ψ) :

$$M_\alpha : (I, \psi) \rightarrow (\bar{I}, \bar{\psi}) = (I, \psi + 2\pi\rho(\alpha, b, h)) + O(\exp(-c_2/\alpha)), \quad (17)$$

где новая константа c_2 все еще положительна, но она уменьшена по сравнению с предыдущей постоянной c_1 для того, чтобы учесть деформации, введенные изменением переменных.

Отображение (17) теперь является относительно малым возмущением закручивающего отображения. Несмотря на то, что закручивание «мало» (порядка α и, более того, включает множитель, стремящийся к нулю, если соответствующий $|h|$ стремится к $1 - 2b^{3/2}/3$), возмущение настолько мало, что все еще можно применить первоначальную теорему Мозера для доказательства существования инвариантных кривых, близких к кривым H_α , то есть кривых *меандрового характера*.

Эти кривые не могут слишком близко приблизиться к гомоклиническим пересечениям предельного потока (см. рис. 1в) благодаря общему расщеплению сепаратрис и соответствующему *стохастическому слою*, хотя в любом случае данный эффект замечается в экспоненциально узкой полосе.

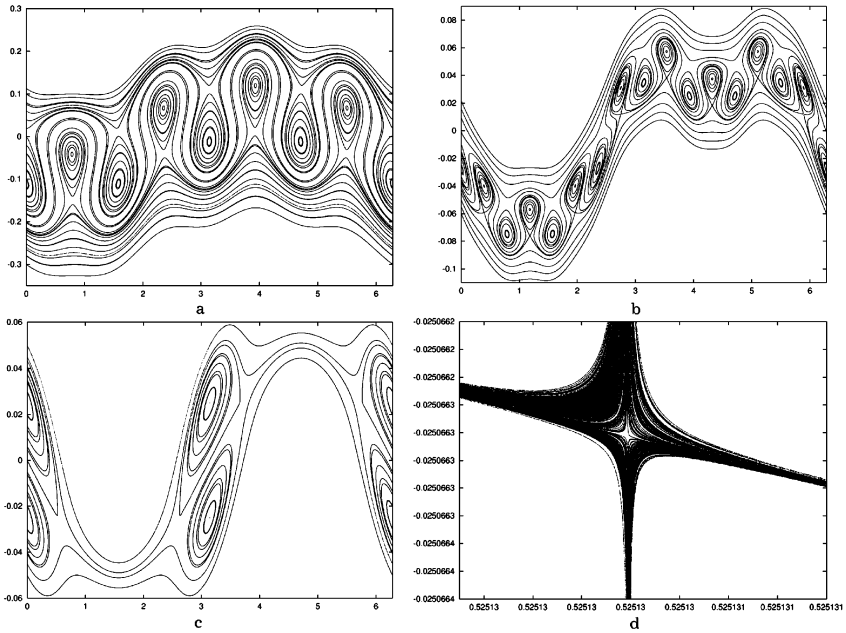


Рис. 2. Несколько примеров меандровых кривых: а) и б) типичные случаи в) нетипичный случай и г) увеличение в). На всех рисунках, за исключением г), горизонтальный размер составляет $[0, 2\pi]$, а вертикальный: а) $[-0.35, 0.3]$; б) $[-0.11, 0.09]$; в) $[-0.06, 0.06]$. На рисунке г) размеры окна составляют $[0.5251295, 0.525131] \times [-0.0250664, -0.0250662]$

3. Примеры. Меандровые кривые высшего порядка

Для иллюстрации теоремы 1 начнем с простых примеров. В качестве первого примера (см. рис. 2а) мы используем семейство отображений

$$F_{(\omega, \alpha, \beta)} : (x, y) \rightarrow (\bar{x} = x + 2\pi\omega + \bar{y}^2, \bar{y} = y + \alpha \frac{\sin(x)}{1 - \beta \cos(x)}). \quad (18)$$

Это семейство отображений имеет некоторые свойства симметрии. Однако, как мы увидим далее, благодаря нечетному характеру членов в $\bar{y}$ оно не такое вырожденное, как в случае $\beta = 0$. Эффект параметра β состоит в создании бесконечного множества гармоник. На рис. 2а используются

следующие значения параметров: $\omega = 0.249$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$, следовательно m/n составляет $1/4$ и на фазовом портрете можно легко увидеть восемь островов. Они представляют собой два семейства из четырех островов, между которыми появляются меандровые кривые. Как предсказывает теоретический анализ из п. 2, эллиптические точки в центрах островов этих семейств смещены приблизительно на π/n по координате x . На рис. 2b мы использовали то же отображение, но с параметрами $\omega = 0.374675$, $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.5$, поэтому m/n здесь составляет $3/8$, и также можно увидеть два семейства восьмипериодических островов и соответствующие меандровые кривые. На рис. 2c изображен фазовый портрет со следующими параметрами $\omega = 0.4999$, $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0$, здесь $m/n = 1/2$. Так как $\beta = 0$, то это отображение можно считать (не строго говоря) *незакручивающим стандартным отображением*. Оно является вырожденным в том смысле, что оно содержит только одну гармонику. Выполнение n итераций его усредняет «слишком хорошо», что не типично. В данном случае все еще остаются два семейства двухпериодических островов, но эллиптические точки в их центрах для обеих семейств имеют приблизительно равные значения x . Меандровых кривых при этом не возникает, в п. 4 мы рассмотрим эту ситуацию.

Частный случай рассматриваемого отображения при $\omega = 0$ называется *квадратичным стандартным отображением*. Этот случай, а также *тригонометрическое стандартное отображение* (в котором часть $\bar{x} = x + \bar{y}$ стандартного отображения заменяется на $\bar{x} = x + \alpha \sin(\bar{y})$) рассмотрены в качестве примеров в [4], где можно увидеть также и другие меандровые кривые. Тригонометрическое стандартное отображение известно также как *«закручивающее отображение»*, см. [15]. Некоторые свойства и обобщения можно найти в [10] и в приложении С к [3].

Три рассмотренных выше рисунка выглядят как «вполне интегрируемые». Для доказательства их неинтегрируемости мы можем взять начальные условия, близкие к одной из двух гиперболических орбит. Мы сделали это для случая c), его соответствующее увеличение отображено на рис. 2d. Все показанные точки принадлежат одной и той же орбите (сделано 5 миллионов итераций, но только немногие попали на рисунок). Величина «хаотического моря» вблизи седловой точки имеет порядок 10^{-7} и, поэтому мы можем ожидать, что расщепление сепаратрис, которое создает эту хаотическую область имеет порядок 10^{-14} . Причем эта величина вследствие экспоненциально малого характера *неинтегрируемого остатка* должна очень быстро приближаться к нулю при уменьшении α .

Возникает естественный вопрос: появляются ли меандровые кривые в простых и очень известных СПО или, несмотря на степень универсальности, мы должны искать их в некоторых «довольно странных» семействах. Ответ на этот вопрос состоит в том, что в некотором смысле они должны появиться во «всех» семействах отображений. Известно, что на эллиптическом острове аналитическое СПО стремится вести себя (локально) как отображение Хенона на малом масштабе, следовательно, мы проверили как раз такой случай (см. также [13, 14], где показаны меандровые кривые внутри трехпериодических островов сепаратрисного отображения — еще одной «универсальной» модели).

Для справки, отображение Хенона, которым мы пользовались, имеет вид

$$HM_\varepsilon : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \bar{y}, y - (x - \varepsilon)). \quad (19)$$

HM_ε имеет неподвижные точки с координатами $(0, 0)$ (гиперболические, если $\varepsilon > 0$) и с $(\varepsilon, 0)$ (эллиптические, если $\varepsilon \in (0, 4)$). Вокруг эллиптической неподвижной точки, за исключением случая $\varepsilon = 3$, для которого собственные значения в этой точке являются кубическими корнями единицы, существуют инвариантные острова. Для инвариантных кривых можно вычислить число вращения. Конечно, для некоторых первоначальных значений мы окажемся не на острове, а в хаотической зоне и, в этом случае, среднее число вращения отображения будет вести себя аномально.

На рис. 3 показана зависимость числа вращения $\rho(x_{in}, \varepsilon)$ от x_{in} для траекторий, начинающихся в точке $(x_{in}, 0)$. Для данного значения ε различные значения ρ произвольно объединены линией. Для ε приблизительно между 2,5 и 2,83 число вращения проходит через максимум, прежде чем кривые разрушаются. При ε , близких к рациональным числам приблизительно в пределах $(0.28, 0.33)$, появляются меандровые кривые. Пример при ρ вблизи $4/13$ показан на рис. 3. Вычисление нормальной формы (19) вблизи эллиптической точки показывает, что первый коэффициент Биркгофа меняет знак (с отрицательного на положительный) между $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 3$.

Очень интересная картина возникает при рассмотрении следующего итерационного процесса. В «центральной области» меандровых кривых отображения M_α (см. (10)), которая в гамильтоновом приближении соответствует уровню $H_\alpha = 0$ (см. (11) и рис. 1), число вращения имеет максимум и подходящим выбором параметра α можно сделать это число достаточно близким к некоторому рациональному. Затем мы можем снова применить теорему 1 и продолжать этот процесс сколько угодно раз. В качестве резуль-

тата таких рассуждений мы сошлемся на рис. 4, который прокомментируем немного позже.

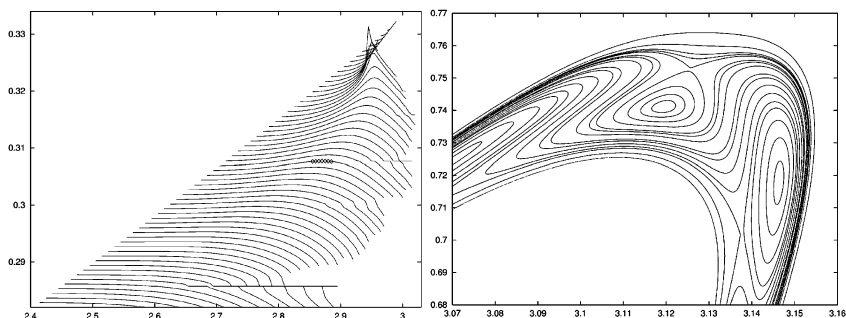


Рис. 3. а) Число вращения ρ как функция начальной координаты x (при $y = 0$) для отображения Хенона (19). Разные кривые соответствуют различным значениям ε . По горизонтали откладываются значения x_{in} , а по вертикали — значения $\rho \in [1/4, 1/3]$. Отмеченные на рисунке точки приблизительно соответствуют максимуму $\rho \approx 4/13$ при заданном ε . б) Увеличение фрагмента фазового портрета при $\varepsilon = 2.68998$. На рисунке видны меандровые кривые, а также два острова с числом вращения $4/13$

Рассмотрим меандровую кривую и назовем ее *меандром первого порядка*. Затем переведем ее в переменные действие-угол, введенные на третьем шаге в доказательстве теоремы 1. После этого она будет очень близка к окружности и совсем не будет извиваться. В новых переменных вблизи центральной части, при подходящем числе вращения может также появиться меандр. Его мы назовем *меандром второго порядка*. Подобным же образом можно ввести *меандры высших порядков*. На рис. 4 проиллюстрирована эта ситуация. Варианты рисунка б), с) и d) являются последовательными увеличениями рисунка а). На всех них показан меандр третьего порядка. Более того, на рисунке d) есть другие инвариантные кривые, причем две из них являются меандрами четвертого порядка (остальные три являются инвариантными кривыми на периодических островах). Отметим, что мы начали с меандров третьего порядка. Действительно, для используемых значений параметров меандры первого и второго порядка, по-видимому, не существуют, и их место занято большим стохастическим слоем. Это происходит из-за «большого» значения α , необходимого для того, чтобы увидеть меандровую кривую четвертого порядка. Графическое доказательство заклю-

чается в том, что инвариантные кривые существуют, по-видимому, только в очень малой области начальных значений $y \in (-1.347435, -1.347334)$, $x = 0$, (т.е. их нет вокруг ни одной из неподвижных или периодических эллиптических точек $F_{\omega, \alpha, 0}$). Также в этой области можно увидеть несколько периодических островов, причем те, что с меньшим периодом являются 6417-периодическими.

Мы также можем ввести понятие *периода меандра*. Это просто период близких главных островов. В обозначениях (6) он соответствует значению n . На рис. 4 периоды меандров первого, второго, третьего и четвертого порядка равны соответственно 1, 23, 277 и 9487. В частности, последнее число является периодом островов с числом вращения $411/9487$, показанных на рис. 4d. Отметим, что несмотря на то, что кривые меандров первого и второго порядка, собственно, не существуют, присутствуют соответствующие острова.

Очевидно, что, вводя на каждом шаге соответствующие (общего вида) достаточно малые возмущения, можно получить меандр любого порядка. В пределе это, по-видимому, позволяет получить неспрямляемую кривую. Используя обозначения (11) (см. рис. 1с для геометрического толкования), можно ввести *ширину меандра* как разницу вдоль меандра между максимальным и минимальным значениями y . Это относится к текущему значению параметра b , которое может быть преобразовано в исходные переменные с помощью отмены масштабирований. *Колесением меандра* назовем разницу между последовательными значениями x в точках, где орбита проходит через $y = -\sqrt{b}$ и $y = \sqrt{b}$ (в (11) при этом отбрасываются члены $o(1)$). Колесание является функцией текущих значений b и h : $osc = \cos^{-1}(h - 2b^{3/2}/3) - \cos^{-1}(h + 2b^{3/2}/3)$. Для получения меандров неограниченной длины следует доказать, что колебание или ширина меандра не уменьшается слишком быстро при увеличении его порядка. Неясно, можно ли этого достичь аналитическими методами. Более того, также неясно, можно ли получить меандр любого порядка в произвольном однопараметрическом семействе отображений.

Вернемся теперь к случаю, показанному на рис. 2в. Используя обозначения, введенные на первом шаге в доказательстве теоремы 1, функция $p(x)$ не имеет гармоники с $n = 2$. То есть общее условие $c_n \neq 0$ в (9) не выполняется. Конечно, гармоники второго порядка появляются как результат взаимодействия первой гармоники с собой, но они больше не являются доминирующими. Для примера подставим $\omega = 1/2 + \mu(2\pi)$ и $\beta = 0$ в (18). Тогда можно вычислить $F_{1/2+\mu(2\pi), \alpha, 0}^2$, и оказывается, что полезно сделать

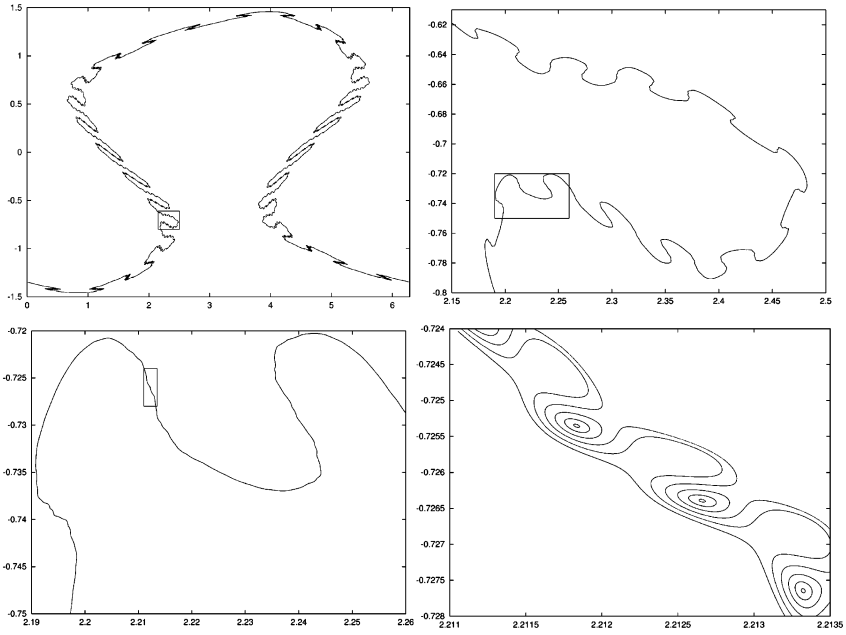


Рис. 4. Меандровые кривые высшего порядка, соответствующие отображению (19) с $(\omega, \alpha, \beta) = (-0.071963192, 0.3, 0)$ и начальной точкой $(0, -1.347394)$. Здесь существенен выбор (подходящих областей) ω и y . На рисунке а) показана глобальная картина, ее последовательные увеличения показаны на рисунках б), в) и д). Рисунки имеют размеры: $[0, 2\pi] \times [-1.5, 1.5]$, $[2.15, 2.5] \times [-0.8, -0.61]$, $[2.19, 2.26] \times [-0.75, -0.72]$ и $[2.211, 2.2135] \times [-0.728, -0.724]$ соответственно. Для последнего рисунка использовались 5 дополнительных начальных значений y с шагом 10^{-6} , для каждого из которых было выполнено 2×10^7 итераций, однако только несколько из них уместилось на рисунке

следующую замену переменных: $\mu = c\alpha^2$, $y = \alpha(z - \frac{1}{2}\sin(x))$. Снова обозначив новую переменную z через y , получим отображения

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \alpha^2(2c + \frac{1}{4} + 2y^2 - \frac{1}{4}\cos(2x)) + O(\alpha^4), \\ y - \alpha^2 y \frac{1}{2}\sin(2x) + O(\alpha^4)),$$

что соответствует порождающей функции

$$S(x\bar{y}) = x\bar{y} + \alpha^2(b\bar{y} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}\bar{y}\cos(2x)) + O(\alpha^4), \quad (20)$$

где $b = 2c + \frac{1}{4}$. Данное отображение имеет интегрируемое приближение, задаваемое гамильтоновым потоком с α^2 в качестве времени и гамильтонианом

$$H(x, y) = by + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y\cos(2x) + O(\alpha^2). \quad (21)$$

Сравнив (20) и (4), мы видим, что в общем случае отсутствуют тригонометрические члены, умноженные на $\bar{y}$ в главном порядке разложения по α . Отметим, что в (20) некоторые из этих членов появляются во вкладе $O(\alpha^2)$.

4. Возмущения специального типа

Соображения в конце предыдущего раздела наводят на мысль изучить влияния возмущений специального типа. Один из простейших случаев имеет (21) в качестве интегрируемого приближения. На рис. 5 показан фазовый портрет такого отображения при различных значениях b . Для его получения было произведено некоторое масштабирование, заключающееся в замене b на $-b$, $\frac{2}{3}$ на $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}y\cos(2x)$ на $y\cos(x)$ в (21). В результате получим

$$H(x, y) = -by + \frac{1}{3}y^3 - y\cos(x) + O(\alpha^2). \quad (22)$$

Линия $y = 0$ является инвариантной при любых условиях. При $b > 1$ седловые точки имеют координаты $(0, \pm\sqrt{b-1})$. При $b > -1$ точки типа центр имеют координаты $(\pi, \pm\sqrt{b+1})$. При $b \in (-1, 1)$ седловые точки появляются в $(\pm\cos_{-1}(b), 0)$. При $b = 1$ происходит бифуркация, и двойная неподвижная точка $(0, 0)$ имеет нулевую линейную часть, определяя 6 гиперболических секторов. Случаи, изображенные на рис. 5а, б, с, d, соответствуют значениям $b > 1$, $b = 1$, $b \in (-1, 1)$ и $b < -1$ соответственно.

Легко видеть, что в интегрируемом приближении больше не выделяются меандровые кривые. Это происходит благодаря существованию инвариантной линии $y = 0$. Для разрушения пересечений между седловыми точками при $b \in (-1, 1)$ можно ввести дополнительное возмущение. Простейшее возмущение (см. предыдущий пример на рис. 3с) состоит в добавлении к (22) члена с малым коэффициентом, скажем d , который включает

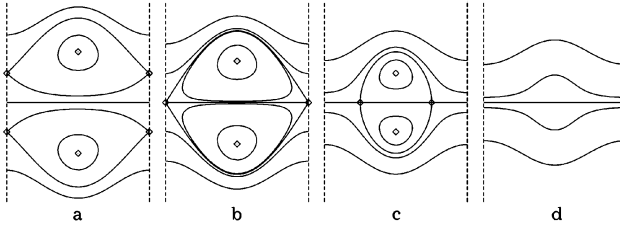


Рис. 5. Несколько сценариев поведения гамильтонова потока (21)

$\cos(x + \varphi)$ без какого-либо множителя y . Новый гамильтониан будет иметь вид

$$H(x, y) = -by + \frac{1}{3}y^3 - y \cos(x) + d \cos(x + \varphi) + o(1). \quad (23)$$

Фаза φ введена, чтобы нарушить симметрию. Значение добавленного члена состоит в перемещении седловых точек на рис. 5 с прямой $y = 0$ и некотором наклоне прежде горизонтальных инвариантных множеств. В результате для нового гамильтониана появляются меандровые кривые, которые сохраняются и для диффеоморфизма. Полное доказательство можно провести так же, как для теоремы 1. Также поучительно изучить различные топологические устройства (23) в зависимости от (b, d, φ) .

Рассмотрим семейство отображений

$$G_{\omega, \alpha, \beta, \varphi} : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(x + \omega + \beta \cos(x) + \bar{y}^2, \frac{y + \alpha \sin(x + \varphi)}{1 - \beta \sin(x)} \right), \quad (24)$$

в котором легко распознать аналогию параметров семейства с параметрами гамильтониана: $\omega, \alpha, \beta, \varphi$ играют роль b , нормализованного коэффициента при $y \cos(x)$ (то есть бывший α^2), d и ε соответственно.

На рис. 6а показана иллюстрация, где значения $(\omega, \alpha, \beta, \varphi)$ взяты равными $(0, 0.01, 0.1, 1)$.

5. Вырожденность закручивания высокого порядка

До сих пор мы рассматривали незакручивающие отображения с самой низкой возможной вырожденностью условия закручивания: $d\alpha/dy(y^*) = 0$ и $d^2\alpha/dy^2(y^*) \neq 0$ (см. п. 1). Аналогичным способом можно выполнить исследование, если первая ненулевая производная в точке y^* имеет порядок

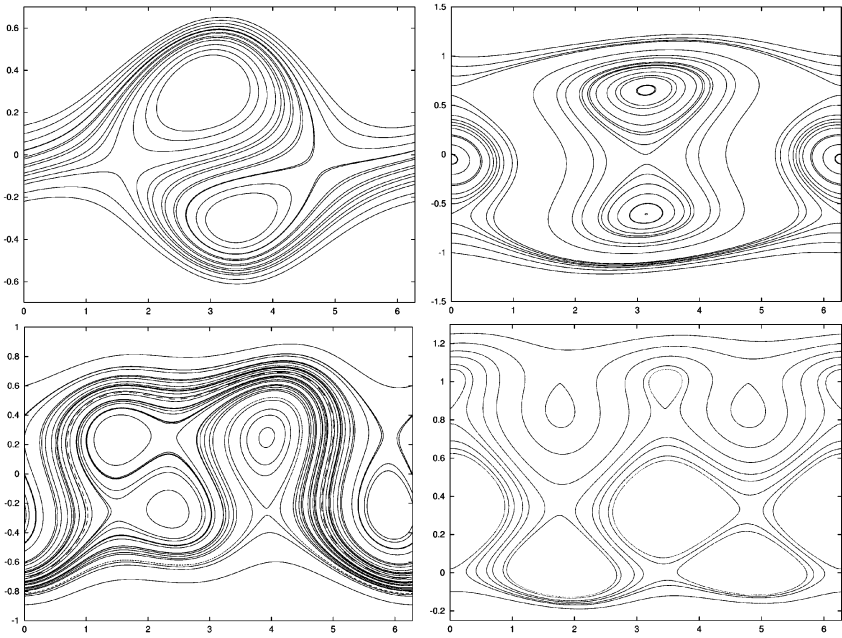


Рис. 6. Несколько примеров меандровых и лабиринтных кривых

$k > 2$. Гамильтониан случая $k = 3$ с возмущением общего типа в отличие от (11) имеет вид

$$H_\alpha(x, y) = -by + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{4}y^4 + \cos(x) + o(1), \quad (25)$$

где величина возмущения стремится к нулю. Как хорошо известно, член y^3 может быть исключен из (25) смещением по y . Можно ожидать, что всего теперь будет шесть неподвижных точек вместо четырех, и также будут присутствовать меандровые кривые. Их сохранение для СПО легко доказать.

Далее мы приведем пример, использующий семейство отображений

$$C_{\omega, \alpha, \beta} : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \omega + \beta \bar{y} + \bar{y}^3, y + \alpha \sin(x)), \quad (26)$$

На рис. 6b изображен фазовый портрет этого отображения при $(\omega, \alpha, \beta) = (-0.003, 0.1, 0.4)$.

6. Более вырожденные случаи. Лабиринтные кривые

Все рассмотренные до сих пор случаи имели одну общую особенность: они включают в качестве главных членов только одну гармонику (см. (11), (21), (22) и (25)). Если незакручивание общее, а возмущение нет, и гармоника «второго» порядка так же (или более) важна, как гармоника «первого» порядка, то есть, используя обозначение шага 1 в доказательстве теоремы 1, если c_{2n} более важен, чем c_n , то соответствующая гамильтонова модель имеет вид

$$H_\alpha(x, y) = -by + \frac{1}{3}y^3 + \cos(x) + \frac{\gamma}{2} \cos(2x + \varphi) + o(1), \quad (27)$$

где γ может быть значительно больше 1. Теперь здесь появляется в целом восемь неподвижных точек, четыре эллиптических и четыре гиперболических. Соответствующий выбор значений b, γ и φ позволяет получить различные наборы решений для гамильтониана и, следовательно, наборы инвариантных кривых для рассматриваемого СПО.

Как предложено в п. 4, поучительно изучить изменения топологии (27) как функции (b, γ, φ) , для того, чтобы понять как происходят изменения при появлении второй гармоники.

Ниже мы представим более общий случай и описание выбора параметров. Семейство отображений, соответствующее модели (27), следующее

$$T_{\omega, \alpha, \gamma} : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \omega + \bar{y}^2, y + \alpha \sin(x) + \gamma \sin(2x + \varphi)). \quad (28)$$

Пример возможной формы инвариантных кривых для значений параметров $(\omega, \alpha, \gamma, \varphi) = (-0.01, 0.05, 1.3, 1)$ показан на рис. 6с.

Посмотрев на форму различных инвариантных кривых, представляется естественным предложить для них название *лабиринтные кривые*. Несомненно, они выглядят как путь в (цилиндрическом) лабиринте, стенками лабиринта при этом являются инвариантные множества седловых точек (сепаратриссы). Эти множества не показаны на рис. 6с и d, чтобы не загромождать рисунки. Вместо этого нарисованы некоторые из основных островов. Если мы посмотрим на рис. 2а и b, то увидим, что следуя меандровой кривой первого порядка (в координатах (x, y)) слева направо, касательный к ней вектор вращается от начального угла, близкого к горизонтальному, на некоторую величину в интервале $(\pi/2, \pi)$ (по часовой стрелке и против нее). На рис. 6а это вращение близко к π , а на рис. 6с значительно превосходит π . Далее мы рассмотрим случай, где допустим почти любой угол вплоть до 2π .

Пытаясь обобщить предыдущую мысль, мы можем рассмотреть в простейшем случае предельный гамильтонов поток, который состоит из суммы полинома по y («кинетической энергии») и тригонометрического полинома по x («потенциала»). Более общие ситуации будут включать произведения полинома на тригонометрические функции. Для конкретности выберем полином пятой степени и тригонометрический полином с гармониками первого и второго порядка. Поскольку мы хотим получить много неподвижных точек, то выберем такие полиномы, чтобы их производные имели четыре нуля. С помощью масштабирования переменных поместим два крайних нуля производной по y в точки $y_1 = 0$ и $y_4 = 1$, и пусть для остальных двух нулей выполняется $0 < y_2 < y_3 < 1$. Один из нулей по x можно расположить в точку $x_1 = 0$. Еще для двух нулей пусть выполняется $0 < x_2 < x_3$. Четвертый x_4 определяется через первые три. Допустим, что x_2, x_3 таковы, что $x_3 < x_4$. Тогда гамильтониан может быть записан как

$$H(x, y) = P(y) + \gamma T(x), \quad (29)$$

а его производные равны $P'(y) = \frac{dP}{dy} = y(y - y_2)(y - y_3)(y - 1)$, $T'(x) = \frac{dT}{dx} = s_1 \sin(x) + s_2 \sin(2x) + c_1(\cos(x) - \cos(2x))$ и s_1, s_2, c_1 выбраны так, что $T'(x_2) = T'(x_3) = 0$ и $s_1^2 + s_2^2 + c_1^2 = 1$, а значение γ — масштабный множитель потенциала. Таким образом, гамильтониан (29) зависит от пяти параметров, $p = (x_2, x_3, y_2, y_3, \gamma)$, а СПО, как обычно, может быть получено с помощью

$$L_{p,\varepsilon} : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \varepsilon P'(\bar{y}), y + \varepsilon T'(x)). \quad (30)$$

Гамильтониан H имеет восемь эллиптических и восемь седловых критических точек. Пусть $S_1 = (x_1, y_1), S_2 = (x_1, y_3), S_3 = (x_2, y_2), S_4 = (x_2, y_4), \dots$, являются седловыми точками (см. рис. 6d). Относительное положение инвариантных многообразий зависит от значений $h_j = H(S_j)$. После нескольких тестов мы выбрали порядок $h_1 < h_7 < h_5 < h_2 < h_6 < h_3 < h_8 < h_4$ как удобный для примера. Для достижения этого были определены приблизительные значения p , а затем они были локально оптимизированы, при этом максимизировался $\min_{i \neq j} |h_i - h_j|$ так, чтобы «пути в лабиринте» допускали меандровые кривые. Были получены следующие значения : $x = 0.2816112 \cdot 2\pi, x_3 = 0.549899 \cdot 2\pi, y_2 = 0.33040195, y_3 = 0.84999789, \gamma = -0.0049$. Так как в интересующей нас области векторное поле мало, то даже при больших значениях ε инвариантные кривые

сохраняются. Инвариантные кривые для такого большого значения $\varepsilon = 5$ приведены на рис. 6d. При значениях ε между шестью и семью некоторые из меандров вырождаются в узкие хаотические зоны. Если на рис. 6d основные эллиптические острова рассматривать как дырки на цилиндре, то легко проверить, что инвариантные кривые принадлежат к девяти различным гомотопическим классам. Таким образом возникает задача о максимальном числе таких неэквивалентных кривых в зависимости от степеней P и T .

7. Перспективы

Мы заканчиваем эту работы рассмотрением нескольких других интересных случаев и открытых задач, которые выпадают за пределы данного исследования.

- В [3] было предложено семейство СПО с обращением ориентации (*обращающие площадь* или *антиконсервативные отображения*). Это предельный, консервативный случай трехпараметрического семейства отображений (обозначенный в [3] как *утолщенное отображение Арнольда*), являющийся в некотором роде «общей» и «универсальной» моделью вблизи гомоклинических касаний в диссипативных диффеоморфизмах. Это семейство задается как

$$ASM_{\omega, \alpha}(x, y) = (x + \omega + y + \alpha \sin(x), -(y + \alpha \sin(x))). \quad (31)$$

Его можно рассматривать как отображение на T^2 . Вид выражения (31) позволяет назвать его *антистандартным отображением*. В противоположность стандартному отображению параметр ω здесь не может быть опущен с помощью смещения начала координат. Замена переменных $(\xi, \eta) = (x, x + y + \omega)$ приводит отображение к виду

$$AC_{\omega, \alpha}(\xi, \eta) = (\eta + \alpha \sin(\xi), \xi + 2\omega) \quad (32)$$

Симметрия $(\xi, \eta, \alpha, \omega) \leftrightarrow (-\xi, -\eta, \alpha, -\omega)$ и то, как ω входит в (32), показывают, что достаточно рассмотреть $\omega \in [0, \pi/2]$. В [3] приведены некоторые динамические свойства (31), появление меандровых кривых и связь этого отображения с некоторыми другими.

Рассмотрим квадрат отображения (31)

$$ASM^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2\omega + \alpha \sin(x + \omega + y + \alpha \sin(x)) \\ y + \alpha \sin(x) - \alpha \sin(x + \omega + y + \alpha \sin(x)) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Отображение (33) является СПО, но оно далеко от «общего». Несомненно, при $\alpha = 0$ закручивание не выполняется ($d\alpha/dy \equiv 0$). Колеблющийся характер члена, который содержит y в выражении для $\bar{x}$ исключает даже «слабое» свойство закручивания порядка α . Во всяком случае, если величина ω не кратна $\pi/2$, то существует область α вблизи нуля, для которой существуют инвариантные кривые. Причина такого поведения состоит в том, что отображение имеет «очень слабое» условие закручивания, и еще более слабое возмущение. Этот результат получен с помощью соответствующего усреднения.

Было бы интересно изучить в общем этот вид «дополнительного» вырождения, т.е. случаев, в которых условие закручивания (если таковое существует) можно восстановить путем усреднения осциллирующей функции вдоль потока системы.

• Крайне интересная проблема возникает при изучении симплектоморфизмов высокой размерности. Малое возмущение произведения одного из незакручивающих отображений, рассмотренных выше, и закручивающего отображения может дать красивые инвариантные торы. Суперпозиция двух незакручивающих отображений должна создать некоторые любопытные «лабиринты более высокой размерности». Однако в этом случае появляются дополнительные размерности, позволяющие выйти из лабиринта.

Простейший случай возникает при анализе окрестности полностью эллиптической точки, вблизи двойного резонанса. Некоторые простые условия приводят к вырождению закручивания. Работа в этом направлении в настоящее время активно продолжается.

На рис. 7 показана иллюстрация «меандрового тора» для четырехмерного симплектического отображения, который представляет собой двумерный тор. Отображение, используемое для его получения, следующее

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2\pi\omega_1 + \bar{y}_1^2 + \psi\bar{y}_1\bar{y}_2 \\ x_2 + 2\pi\omega_2 + \bar{y}_2^2 + 0.5\psi\bar{y}_1^2 \\ y_1 + \alpha_1 \frac{\sin(x_1)}{1 - \beta_1 \cos(x_1)} \\ y_2 + \alpha_2 \frac{\sin(x_2)}{1 - \beta_2 \cos(x_2)} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

то есть это по сути два связанных отображения (19). Параметры были выбраны такие же, что использовались на рис. 2а и б, то есть $\omega_1 = 0.249$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.5$, $\omega_2 = 0.374675$, $\alpha_2 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$, а связывание ψ бы-

ло взято равным 0.03. В качестве начальных условий была выбрана точка $x_1 = x_2 = 0, y_1 = -0.039, y_2 = -0.202$, начиная с которой было выполнено 500000 итераций. На рисунке показан трехмерный вид проекции двумерного инвариантного меандрового тора на пространство переменных $x_1, x_2, y_1 + y_2$. Мы хотим отметить, что для несколько бóльших значений ψ все двумерные торы, по-видимому, разрушаются.

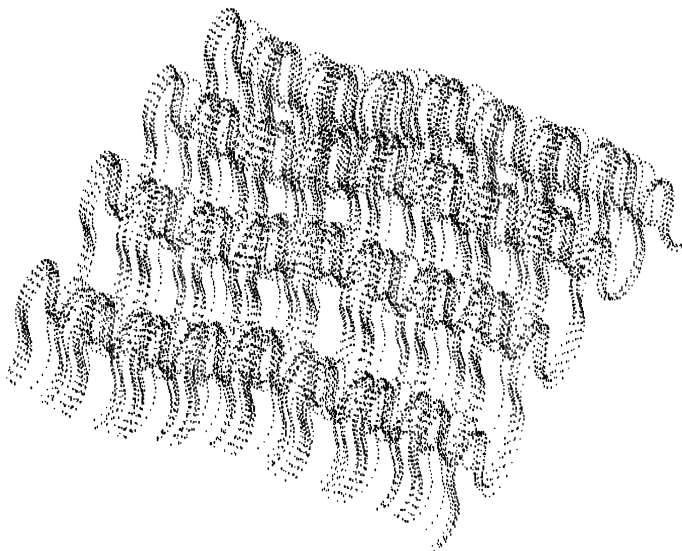


Рис. 7. Трехмерный вид двумерного меандрового тора отображения (34) для параметров, заданных в тексте. Для трехмерного изображения тор был спроецирован на переменные $x_1, x_2, y_1 + y_2$

Благодарности. Эта работа была поддержана грантами DGICYT PB94-0215 (Испания) и CIRIT 1996S0GR-00105 (Каталония). Благодарим также за частичную поддержку со стороны Европейского сетевого гранта ERBCHRXCT 940460 и гранта INTAS 93-0339ext. Первая версия этих результатов была представлена в Мастерской динамических систем в Автономном университете Барселоны в сентябре 1997 года. Я в долгу перед организаторами этого мероприятия.

Литература

- [1] В. И. Арнольд, Доказательство теоремы Колмогорова о сохранении квазипериодических движений под действием малого возмущения гамильтониана, *Успехи Мат. Наук*, 1963, т. 18, № 5, стр. 13-40.
- [2] H. Broer, R. Roussarie, C. Simó. Invariant circles in the Bogdanov-Takens bifurcation for diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 1996. 16. P. 1147–1172.
- [3] H. Broer, C. Simó, J. C. Tatjer. Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms. *Nonlinearity*. 1998. V. 11. N 3. P. 667–770.
- [4] A. Haro. The Primitive Function of an Exact Symplectomorphism. Ph. D. Thesis. Universitat de Barcelona. 1998.
- [5] M. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. *Astérisque*. 1983. P. 103–104.
- [6] M. Herman. Dynamics connected with indefinite normal torsion. In *Twist Mappings and Their Applications*. (Ed. R. M. McGehee, K. R. Meyer) IMA. Springer–Verlag. 1992. V. 44.
- [7] A. N. Kolmogorov *Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique*. Proc. Int. Congress of Math., Amsterdam, 1957. А. Н. Колмогоров, *Общая теория динамических систем и классическая механика*, в кн. *Труды Международного Математического Конгресса, Амстердам, 1954: обзорный доклад*. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 187–208. Или А. Н. Колмогоров *Общая теория динамических систем и классическая механика* в кн. *А. Н. Колмогоров, избранные труды. Математика и механика*. под ред. С. М. Никольского, М.: Наука, 1985, 470 стр.
- [8] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math. Phys. Kl.* 1962. P. 1–20.
- [9] А. И. Нейштадт, Разделение движений в системах с быстро вращающейся фазой, *ПММ*, 1984, **48**, стр. 133–139.
- [10] A. Nikitin. Separatrix splitting for the «twist map». A method of calculation of the coefficients of the splitting formula. *Math. Preprint Series*. Universitat de Barcelona. 1995. 184.

- [11] H. Rüssman. Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringers. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II. Math. Phys. Kl. 1970. P. 67–105.
- [12] C. L. Siegel, J. K. Moser. Lectures on Celestial Mechanics. Grundlehren Bd. Springer-Verlag. 1971. 187. См. также русский перевод: Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике, Ижевск: Изд-во РХД, 2001, 384 стр.
- [13] C. Simó, D. Treschev. Stability islands in the vicinity of separatrices of near-integrable symplectic maps. Preprint. 1997.
- [14] C. Simó, D. Treschev. Evolution of the «last» invariant curve in a family of area preserving maps: The case of the separatrix map. Preprint. 1997.
- [15] Заславский Г., Захаров М., Сагдеев Р., Усиков Д., Черников А. Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле, ЖЭТФ, 1986, **91**, стр. 500–515.

Центральные устойчивые/неустойчивые многообразия и разрушение КАМ-торов в плоской задаче Хилла*

К. СИМО

Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

Т. СТУЧИ

Instituto de Física
Universidade Federal
do Rio de Janeiro,
Rio de Janeiro, Brazil

Классическая задача Хилла является упрощенным вариантом ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ), когда расстояние между двумя массивными телами (будем считать первым большее тело, а вторым – меньшее) в перемещениях Хилла стремится к бесконечности. В этом случае может быть детально исследована малая окрестность второго тела.

При таком подходе задача Хилла может рассматриваться как приближение нулевого порядка в разложении ОЗТТ по степеням $\mu^{1/3}$. Регуляризация Леви-Чевита приводит гамильтониан к форме двух несвязанных гармонических осцилляторов, возмущенных силой Кориолиса и действием Солнца, которые определяются членами четвертой и шестой степени соответственно. В работе представлено детальное описание главных особенностей задачи Хилла, включая глобальное описание динамики, когда кривая нулевой скорости (КНС) ограничивает движение. Рассматриваются коллинеарные точки либрации и близкие к ним периодические орбиты. Продемонстрированы некоторые гомо- и гетероклинические пересечения сепаратрис, соответствующих этим решениям. Одной из основных особенностей является существование финитного движения, когда КНС размыкается. В работе исследовано также геометрическое поведение центральных устойчивых/неустойчивых многообразий точек либрации L_1 и L_2 .

*C. Simo, T. J. Stuchi. *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem*. Preprint. Перевод Килина А. А., Чернойвана В. А.

Соответствующее сечение Пуанкаре проясняет связь между этими многообразиями и разрушением инвариантных КАМ-торов, окружающих второе тело. Эти результаты могут быть обобщены для динамики ограниченной задачи трех тел. Приведены некоторые практические приложения результатов в астрономии и астронавтике. Представленная здесь методика может быть полезной в гораздо более общем случае — как в небесной механике, так и в других областях теории динамических систем.

1. Введение

В статье рассматривается плоская задача Хилла, которая является предельным случаем ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ). Изменение масштаба, зависящее от отношения масс μ , или, точнее, от $\mu^{1/3}$, позволяет записать гамильтониан ОЗТТ в $O(\mu^{1/3})$ окрестности второго тела в виде ряда по степеням $\mu^{1/3}$. Устремляя $\mu^{1/3}$ к нулю, мы получаем предельную задачу, которая и является задачей Хилла. В этом случае масса второго тела равняется единице, первое тело удаляется на бесконечность и его масса также увеличивается до бесконечности. Таким образом, его действие сводится к действию поля постоянных сил. Кроме того, из-за использования вращающейся системы отсчета присутствует также сила Кориолиса.

С помощью регуляризации Леви-Чевита можно получить полиномиальный гамильтониан, что очень удобно для численных расчетов, а также для избежания трудностей, связанных с наличием сингулярностей в исходном гамильтониане. Описание регуляризации дано в п. 2. Полиномиальный гамильтониан регуляризованной задачи Хилла имеет форму двух несвязанных гармонических осцилляторов с одинаковой частотой (которые соответствуют регуляризованной задаче Кеплера), возмущенных полиномиальными членами. Члены четвертого порядка возникают из-за действия силы Кориолиса вследствие замены инерциальной системы отсчета, связанной с центром масс, на вращающуюся (синодическую), связанную со вторым телом. Система, соответствующая гамильтониану, содержащему члены только до четвертого порядка, интегрируема. Члены шестого порядка, описывающие действие первого тела, нарушают интегрируемость системы. Тем не менее, авторы не знакомы с каким-либо аналитическим доказательством этого факта для плоского случая.

Хорошо известно, что ОЗТТ имеет пять точек равновесия, две треугольные L_4 и L_5 и три коллинеарные L_1 , L_2 и L_3 . В задаче Хилла остаются только две из них, а именно L_1 и L_2 , и они симметричны относительно второго тела. КНС замкнута (что подразумевает наличие финитных тра-

екторий) только при энергиях, меньше критической $h = \frac{1}{18}$, которая соответствует двум точкам либрации. Для $h > \frac{1}{18}$ КНС теряет замкнутость и существование ограниченных движений в этом случае является одним из ключевых результатов статьи.

В п. 3 исследуются некоторые свойства задачи Хилла, такие как поведение вблизи неподвижных точек. Для малых значений энергии видно, что финитное движение достаточно близко к интегрируемому. Это первоначальное исследование продолжено в п. 4, в котором представлено несколько сечений Пуанкаре и обсуждаются некоторые периодические орбиты.

Периодические орбиты (здесь и далее п.о.) играют ключевую роль в понимании динамики. В работе описаны прямые и обратные п.о., то есть такие, для которых проекция фазовой траектории на конфигурационное многообразие двигается против и по часовой стрелке соответственно. Большинство ключевых п.о. симметричны в силу обратимости задачи. П. 5 посвящен п.о. Ляпунова, рождающимся вблизи L_1 и L_2 и другим хорошо известным семействам п.о.

Далее мы сосредоточимся на области ограниченных движений при $h < \frac{1}{18}$ (см. п. 6). Для малых h движение очень близко к задаче Кеплера во вращающейся системе отсчета и поэтому носит в основном интегрируемый характер. Для численной оценки неинтегрируемости используются оценки остатка нормальной формы (см., например, [7]). В этой области также естественным образом появляются классические п.о. Хилла. При увеличении энергии хилловские прямые п.о. бифурцируют, рождая соответствующее семейство п.о. Ключевая особенность поведения системы в этом интервале энергий — появление незакручивающих инвариантных кривых. Это происходит благодаря тому, что отображение Пуанкаре вблизи прямых хилловских п.о. не является закручивающим. Слабое закручивание также является одним из источников стохастичности. Оказывается, что этот эффект гораздо более ощутим, чем потеря устойчивости хилловской прямой п.о. В качестве количественного критерия нерегулярности численно рассчитаны максимальные показатели Ляпунова. Раздел 6 завершается кратким описанием глобальной динамики.

При достижении критической энергии $h = \frac{1}{18}$, появляются точки либрации, являющиеся точками типа седло-центр. Существуют также центральные многообразия, соответствующие мнимым собственным значениям и образованные ляпуновскими орбитами. Эти орбиты могут быть получены аналитически с помощью классического метода продолжения по параметру

Линдштедта–Пуанкаре. Используя численную глобализацию, из этих орбит мы получаем центральные устойчивые (неустойчивые) многообразия для L_1 и L_2 . Фактически, благодаря симметрии гамильтониана нам нужно определить только одно из этих многообразий и, применив симметрию, получить другое. Рассматриваются ветви многообразий, которые покидают окрестность L_1 и L_2 по направлению ко второму телу. Остальные ветви всегда неограничены. Инвариантные многообразия ляпуновских п.о. на подходящих уровнях h обнаруживают различные гомо- и гетероклинические пересечения. Показано существование пересечения ляпуновских орбит и прямых п.о. Хилла. Эти многообразия и их пересечения обсуждаются в разделе 7.

Для h , немного больших $\frac{1}{18}$, благодаря существованию КАМ-торов присутствует большая область финитного движения. В частности, КАМ-торы предотвращают существование столкновительных орбит, идущих из окрестности ляпуновских решений. Появляются они вокруг обратных п.о. Хилла, которые линейно устойчивы для всех h . П. 8 посвящен разрушению КАМ-торов при дальнейшем увеличении h . Соответствующие сечения Пуанкаре проясняют взаимодействие между центральными устойчивыми/неустойчивыми многообразиями, обсуждавшимися в предыдущем абзаце, и разрушением инвариантных КАМ-торов, окружающих второе тело.

Основные характерные черты задачи Хилла появляются также и в ОЗТТ при малых значениях массового параметра μ . Из этого вытекает множество следствий важных как для приложений к расчетам космических полетов, так и для понимания особенностей движения комет и астероидов. Эти соображения представлены в п. 9, вместе с дальнейшим приложением к динамике ОЗТТ, которое является следствием результатов этой статьи и уже известных результатов. Краткое изложение результатов и их перспектив приведено в последнем разделе.

2. Гамильтониан задачи Хилла и его регуляризация

2.1. От плоской ОЗТТ к гамильтониану задачи Хилла

Пусть P_1 и P_2 — первое и второе тела с массами $m_1 = 1 - \mu$ и $m_2 = \mu$ ($\mu < 1/2$) соответственно, описывающие круговые орбиты благодаря взаимному притяжению. Во вращающейся системе координат с началом в центре масс уравнения Ньютона для легкой частицы P_0 , которая не влияет

на движение P_1 и P_2 , имеют вид (см. [19] для вводной информации)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2$ и $r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2$, как показано на рис. 1. Положения тел обозначены $P_1 = (\mu, 0)$ и $P_2 = (1-\mu, 0)$.

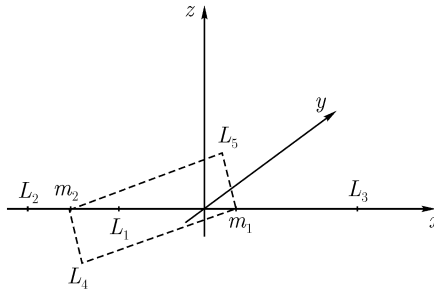


Рис. 1. Постановка пространственной ограниченной задачи трех тел

Отметим, что уравнения приведены в безразмерных координатах, т.е. единица измерения массы $m_1 + m_2 = 1$, единица длины — расстояние между P_1 и P_2 , и единицы времени выбраны таким образом, чтобы период обращения тяжелых тел равнялся 2π . В этих единицах гравитационная константа G принята равной единице. Уравнение (1) допускает первый интеграл, называемый интегралом Якоби, который записывается в виде:

$$C_{\mathcal{J}} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\Omega(x, y), \quad (2)$$

где

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \quad (3)$$

— гравитационный потенциал в синодических координатах. Постоянное слагаемое в (3) выбрано таким образом, чтобы $C_{\mathcal{J}} = 3$ в точках L_4 и L_5 .

Проведем преобразование Хилла, которое состоит в изменении масштаба с последующим переходом в систему отсчета, связанную со вторым телом, а именно:

$$x = X\mu^{1/3} + \mu - 1, \quad \dot{x} = \dot{X}\mu^{1/3}, \quad y = Y\mu^{1/3}, \quad \dot{y} = \dot{Y}\mu^{1/3}. \quad (4)$$

Разложим $C_{\mathcal{J}}$ по степеням $\mu^{1/3}$. Отбросив члены порядка μ и выше, мы получим предельную задачу Хилла. Используя (4), разложение принимает форму:

$$C_H = -\dot{X}^2 - \dot{Y}^2 + \frac{2}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} + 3X^2 + \mu^{1/3}(2X^3 + 3XY^2) + \\ + \mu^{2/3}\left(2X^4 - 6X^2Y^2 + \frac{3}{4}Y^4\right) + O(\mu),$$

где $C_H = \mu^{-2/3}(C_{\mathcal{J}} - 3(1 - \mu))$ и $\mu^{2/3}C_H \rightarrow C_{\mathcal{J}} - 3$ при $\mu \rightarrow 0$.

Гамильтониан для членов, не зависящих от μ , имеет вид:

$$H_H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}} + q_2p_1 - q_1p_2 - q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2, \quad (5)$$

где $q_1 = X$, $q_2 = Y$, $p_1 = \dot{X} - Y$ и $p_2 = \dot{Y} + X$ — канонические переменные. Связь между этим гамильтонианом и C_H определяется выражением $H = -C_H/2$. В первом порядке по $\mu^{1/3}$ получаем задачу Кеплера, возмущенную силами Кориолиса и действием Солнца. Итак, модель Хилла это первое приближение ОЗТТ, подходящее для изучения движения в окрестности второго тела и учитывающее действие первого. Следующие два члена разложения выглядят следующим образом:

$$H_{1/3} = -2q_1^3 + 3q_1q_2^2, \quad H_{2/3} = -2q^4 + 6q_1^2q_2^2 - \frac{3}{4}q_2^4. \quad (6)$$

Стоит отметить, что эта модель применительно к движению Луны дает хорошее описание ее орбиты, и таким образом оправдывает данное приближение ОЗТТ в окрестности второго тела (т.е. Земли, в качестве первого тела берется Солнце). Задача Хилла также полезна для понимания полной ОЗТТ, т. к. некоторые явления могут быть получены аналитически в первом порядке по $\mu^{1/3}$.

2.2. Регуляризация Леви-Чивита

Применим следующую замену переменных $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{q}})$, $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)$, известную как преобразование Леви-Чивита (здесь и далее ЛЧ):

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 & -\hat{q}_2 \\ \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Индуктированное преобразование канонически сопряженных импульсов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\hat{r}^2} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 & -\hat{q}_2 \\ \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

где $\hat{r}^2 = (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) = r = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$. Чтобы завершить процедуру регуляризации, необходимо также осуществить замену времени:

$$d\tau = \frac{4dt}{(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2)}. \quad (9)$$

Подставляя (7)–(9) в (5), получаем соответствующий гамильтониан, $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) = (r/4)(H_H(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) + p_0)$, который, если опустить значки $\hat{}$, имеет вид:

$$\begin{aligned} H = \left(\frac{p_0}{2}\right) \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{2} + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(q_2 p_1 - p_2 q_1) - \\ - \frac{1}{4}(q_1^6 - 3q_1^4 q_2^2 - 3q_1^2 q_2^4 + q_2^6), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\frac{1}{2}p_0 = -\frac{1}{2}h_H = \frac{1}{4}c_H = c$, c_H и h_H — значения интеграла Якоби C_H и нерегуляризованного гамильтониана H_H соответственно. Заметим, что c одного знака с интегралом Якоби и противоположного с нерегуляризованным гамильтонианом.

Регуляризованный гамильтониан (10) все еще зависит от параметра c , который устраняется канонической заменой переменных

$$q_1 = \alpha Q_1, \quad q_2 = \alpha Q_2, \quad p_1 = \beta P_1, \quad p_2 = \beta P_2, \quad (11)$$

и $H = \gamma \mathcal{H}$, где $\alpha = 2c^{1/4}$, $\beta = 2c^{3/4}$, $\gamma = \frac{1}{4}c^{-3/2}$. Здесь мы неявно предполагаем, что $c > 0$. Главным образом, нас интересует именно этот случай, так как в этой области находятся точки либрации и их окрестности.

Более того, при $c \rightarrow 0$ h (значение нового гамильтониана) стремится к бесконечности и наоборот. Для отрицательных значений c применяется то же преобразование, но с масштабным множителем $|c|$. Соответствующие преобразования гамильтониана будут рассмотрены далее. Очевидно, что преобразование (11) не определено при $c = 0$.

В конечном итоге мы получили гамильтониан, не зависящий от параметров. Этот гамильтониан будет использован для численных расчетов в следующих разделах. Разложим его на однородные формы:

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = H_2 + H_4 + H_6, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2), \\ H_4 &= 2(Q_1^2 + Q_2^2)(Q_2P_1 - Q_1P_2), \\ H_6 &= -4(Q_1^6 + Q_2^6 - 3Q_1^4Q_2^2 - 3Q_1^2Q_2^4). \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения движения при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= P_1 + 2RQ_2, & \dot{Q}_2 &= P_2 - 2RQ_1, \\ \dot{P}_1 &= -Q_1 + 2RP_2 - 4Q_1F_c + 24Q_1(Q_1^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_2^4), \\ \dot{P}_2 &= -Q_2 - 2RP_2 - 4Q_2F_c + 24Q_2(Q_2^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_1^4), \end{aligned} \quad (14)$$

где $R = Q_1^2 + Q_2^2$, а $F_c = Q_2P_1 - Q_1P_2$ (сила Кориолиса). В случае отрицательных $c = c_H/4$ берется модуль c и меняется знак потенциальной энергии гармонического осциллятора (т.е. H_2 должен иметь вид $\frac{1}{2}(-Q_1^2 - Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)$).

Заметим, что c и $-c$ соответствуют одному и тому же значению h , но разным гамильтоновым системам. Случай с $c = 0$ необходимо исследовать без изменения масштаба и с «выключенным» потенциалом гармонического осциллятора (т.е. H_2 должен быть равен $\frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$). Связь между гамильтонианом и интегралом Якоби имеет вид $h = \frac{1}{2}(|c_H|^{-3/2})$, $c_H \neq 0$, что ясно показывает сингулярную природу масштабного преобразования, а также то, что c_H может быть отрицательным. Таким образом, в численных

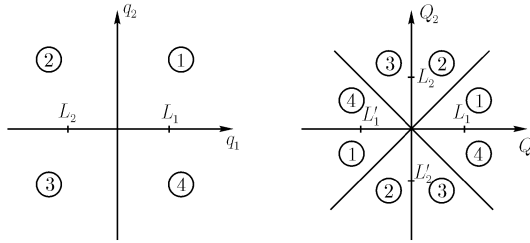


Рис. 2. Исходные канонические (слева) и ЛЧ (справа) переменные. Неподвижные точки L_1 и L_2 при преобразовании в ЛЧ переменные переходят на положительную горизонтальную и вертикальную оси соответственно

расчетах нужно быть осторожным, когда c стремится к нулю, особенно если это происходит при продолжении периодических орбит.

В регуляризованном гамильтониане, как было замечено ранее, H_2 — кеплеровский член, а H_4 — кориолисовский. Система с гамильтонианом $H_2 + H_4$ интегрируема в смысле Лиувилля-Арнольда. Оставшийся член H_6 отвечает за возмущающее действие первого тела. Его наличие нарушает интегрируемость, т.е. инвариантные торы деформируются и разрушаются в соответствии с хорошо известным результатом КАМ-теории. Простота выражений в (13) и (14) упрощает вычисления.

ЛЧ-преобразование является двойным накрытием. Поэтому L_1 и L_2 являются образами точек либрации, тогда как L'_1 и L'_2 — копии этих точек (рис. 2). Удобно заметить, что ЛЧ-преобразование удваивает углы, отсчитываемые относительно начала координат, тогда как соответствующие расстояния соотносятся как квадратные корни (см. (7), (8) и рис. 2). Количество симметрий задачи Хилла в регуляризованном варианте увеличиваются и будут рассмотрены подробнее в п. 8.

2.3. Построение сечений Пуанкаре

Сечения Пуанкаре — это полезный инструмент для представления в компактной форме важной информации о непрерывных динамических системах. Это особенно верно для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на заданном уровне энергии. В этой статье в основном используется сечение $Q_2 = 0$, $\dot{Q}_2 > 0$, когда мы отображаем итерации Пуанкаре на плоскости $(Q_1, \dot{Q}_1)$. Соотношение $h = \frac{1}{2}(Q_1^2 + P_1^2 + P_2^2) - 2Q_1^3 P_2 - 4Q_1^6$ поз-

воляет вычислить P_2 . Заметим, тем не менее, что это сечение, конечно, не глобально. Выражение энергии в переменных $(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2)$ имеет вид:

$$H(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2) = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + \dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - 6(Q_1^2 + Q_2^2)(Q_1^2 - Q_2^2)^2. \quad (15)$$

При $Q_2 = 0$ уравнения (14) дают $\dot{Q}_1 = P_1$. Из (15) мы получаем $\dot{Q}_2 > 0$, и снова (14) дает нам $P_2 = \dot{Q}_2 + 2Q_1^3$. Таким образом, кривая $\frac{1}{2}(Q_1^2 + P_1^2) - 6Q_1^6 = h$ задает границу области определения отображения Пуанкаре, и при $h \leq \frac{1}{18}$ она замкнута. Уровень $h = \frac{1}{18}$ содержит неподвижные точки, которые мы обсудим в п. 3. Для $h < \frac{1}{18}$ граница является аналитической кривой. На ней поток не трансверсален сечению. Точки на границе с $P_1 > 0$ ($P_1 < 0$) соответствуют локальным максимумам (минимумам) функции $Q_2(t)$. Если $P_1 = 0$, то точки с $Q_1 > 0$ ($Q_1 < 0$) являются точками перегиба $Q_2(t)$ с положительной (отрицательной) третьей производной.

Недостаток глобальности сечения Пуанкаре связан с появлением петель в проекции орбиты на плоскость (Q_1, Q_2) , (и, следовательно, на плоскость (q_1, q_2)). Данный факт имеет множество следствий. Например, если п.о. имеет n пересечений с сечением Пуанкаре, мы должны называть ее n -п.о. Но в непрерывном семействе п.о. величина n может меняться из-за появления петель. Обычно петли появляются в апоцентре орбиты, вблизи границы области определения сечения Пуанкаре. Если в семействе п.о. число пересечений меняется, то семейству мы будем ставить в соответствие минимальную величину n .

В уравнениях движения удобно использовать $(\dot{Q}_1, \dot{Q}_2)$ вместо (P_1, P_2) . В этом случае уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= -Q_1 + 8R\dot{Q}_2 + 12Q_1(3Q_1^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_2^4), \\ \ddot{Q}_2 &= -Q_2 - 8R\dot{Q}_1 + 12Q_2(3Q_1^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_1^4). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что уравнения (16) более «дешевы» для вычислений, чем (14). Стоит также отметить, что симметрии задачи позволяют сократить время вычислений. Так, начнем вычисление итераций Пуанкаре с $Q_2 = 0$ и $\dot{Q}_2 > 0$ (исключая границу). Затем, когда плоскость $Q_2 = 0$ вновь будет пересечена (с $\dot{Q}_2 < 0$) в точке $(Q_1, \dot{Q}_1)$, мы поставим ей в соответствие симметричную точку $(-Q_1, -\dot{Q}_1)$. Это связано с двумя возможными решениями при построении ЛЧ-преобразования. Таким образом, «половина» сечения Пуанкаре соответствует истинному сечению Пуанкаре в исходных переменных.

3. Общие свойства задачи Хилла

3.1. Неподвижные точки и кривая нулевой скорости

Описанная выше система имеет три точки равновесия, одна типа центр, а две другие типа седло-центр. Координаты точек в нерегуляризованных переменных (q_1, q_2, p_1, p_2) :

$$\begin{aligned} O &\rightarrow (0, 0, 0, 0), & L_1 &\rightarrow (3^{-1/3}, 0, 0, 3^{-1/3}), \\ L_2 &\rightarrow (-3^{-1/3}, 0, 0, -3^{-1/3}), \end{aligned}$$

и в ЛЧ-переменных (Q_1, Q_2, P_1, P_2) :

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow (6^{-1/2}, 0, 0, \frac{1}{3}6^{-1/2}), & L_2 &\rightarrow (0, 6^{-1/2}, \frac{1}{3}6^{-1/2}, 0), \\ L'_1 &\rightarrow (-6^{-1/2}, 0, 0, -\frac{1}{3}6^{-1/2}), & L'_2 &\rightarrow (0, -6^{-1/2}, -\frac{1}{3}6^{-1/2}, 0). \end{aligned}$$

Очевидно, гравитирующий центр теперь является регулярной точкой, точнее, точкой равновесия системы типа центр-центр (столкновение превращается в равновесие в силу замены времени (9)). Число точек равновесия удваивается из-за двойного накрытия.

В декартовых переменных собственные числа точек L_1 и L_2 равны $\bar{\lambda}_1 = i\bar{\omega} = i(-1 + 2\sqrt{7})^{1/2}$ и $\bar{\lambda}_2 = (1 + 2\sqrt{7})^{1/2}$, т.е. точки являются центром по первой координате и седлом по второй. В этих точках значения интеграла Якоби и гамильтониана равны соответственно $c_H = 3^{4/3}$ и $h = \frac{1}{18}$. Заметим, что собственные числа в регуляризованной задаче равны $\lambda_i = \frac{2}{3}\bar{\lambda}_i$ ($\lambda_1 \approx \pm i1.38106$, $\lambda_2 \approx \pm 1.67219$).

Для $h < \frac{1}{18}$ кривая нулевой скорости замкнута и определяется выражением $\frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) - 6(Q_1^2 + Q_2^2)(Q_1^2 - Q_2^2)^2$. При энергиях $h > \frac{1}{18}$ появляются ляпуновские п.о. которые, естественно, неустойчивы. В этом случае существование финитного движения не является необходимым следствием только топологии задачи. Ниже будет показано, как устойчивые и неустойчивые многообразия взаимодействуют с открытой структурой траекторий. Во-первых, рассмотрим низкие уровни энергии, а затем изучим локальное поведение вблизи точек либрации. После этого в следующем разделе будут приведены некоторые предварительные результаты численных экспериментов.

3.2. Низкие уровни энергии и периодические орбиты Хилла

При малых энергиях гамильтониан (12) описывает малое возмущение гармонического осциллятора. Система с гамильтонианом $H_1 + H_2$ эквивалентна задаче Кеплера во вращающейся системе отсчета и, следовательно, интегрируема. Член H_6 нарушает интегрируемость. Так как неподвижная точка, соответствующая гравитирующему центру, является эллиптической с резонансом 1–1, то для построения нормальных форм оказываются пригодными методы, изложенные в [12]. В частности, они позволяют получить определенное число простых периодических орбит, то есть п. о., которые являются неподвижными точками отображения Пуанкаре. Применяя теорему 1 из [12], получим следующий результат.

Предложение 1. *Для достаточно малых h задача Хилла имеет две простые периодические орбиты с предельным периодом 2π . Это классические прямая и обратная п. о. Хилла. На сечении Пуанкаре $Q_2 = 0$, $\dot{Q}_2 > 0$ они являются неподвижными точками с координатами $\bar{Q}_1 = 0$ и $Q_1 = \pm \sqrt{h}(1 + O(h))$ (прямая п. о.) и $Q_1 = -\sqrt{h}(1 + O(h))$ (обратная п. о.). Более того, любая другая периодическая орбита имеет период $\pi/h + O(1)$. Ширина стохастического слоя не превышает $O(\exp(-c/h))$ при некотором $c > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сначала приведем гамильтониан к нормальной форме Густавсона. Начнем с некоторых общих предположений. Пусть $z_j = (1/\sqrt{2})(Q_j + P_j)$, $j = 1, 2$, и определим

$$\begin{aligned} N_j &= z_j \bar{z}_j, \quad j = 1, 2, & M_1 &= 2 \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2), \\ M_2 &= 2 \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2), & M_3 &= N_2 - N_1, & J &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

В новых переменных z_j гамильтониан имеет вид

$$H = J + \sum_{m=2}^{m^*} K_m(J, M_1, M_2, M_3) + O_{2m^*+1}(|z_1|, |z_2|),$$

где K_m — однородные функции порядка m , а O_k обозначает члены порядка k . Из соотношения $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = J^2$ следует, что $K_m(J, M_1, M_2, M_3) = J^m \hat{K}_m(\mathbf{x})$, где $\hat{K}_m(\mathbf{x}) = K_m(1, \mathbf{x})$ — полином, определенный на единичной сфере S^2 , а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\frac{M_1}{J}, \frac{M_2}{J}, \frac{M_3}{J})$.

В нашем очень простом частном случае $\hat{K}_2(\mathbf{x}) = -2x_1$. До этого порядка гамильтониан зависит только от $J = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)$ и $M_1 = Q_1P_2 - Q_2P_1$ — энергии и интеграла момента задачи Кеплера. После ввода нового времени $\tau = Jt$, где t обозначает время, используемое в (12), поток на $\mathbb{S}^2$ для нового гамильтониана до второго порядка по J задается уравнением $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{x}}\hat{K}_2(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x}$. Таким образом полюсы $(\pm 1, 0, 0)$ неподвижны на $\mathbb{S}^2$ и указанный поток является просто вращением вдоль параллелей, связанных с указанными полюсами с периодом π по τ и, так как $J = h + O(h^2)$, периодом π/h по t . Положение неподвижных точек на сечении Пуанкаре следует из исследования гармонического осциллятора.

Если ввести остаток (члены $O(J^3)$), то картина немного изменится, но, в силу теоремы о неявной функции, неподвижные точки сохраняются. Любые другие п. о. не могут иметь период меньше, чем $\frac{\pi}{h} + O(1)$. Кроме того, полный гамильтониан можно записать с помощью J , M_1 и двух соответствующих им углов, скажем, φ и ψ соответственно. Пока возмущение мало, частота по φ близка к единице. Стандартное усреднение (см. [14]) по переменной t приводит к тому, что система может быть сведена к интегрируемой, исключая область размером $O(\exp(-c/h))$, для некоторого $c > 0$. Это и доказывает последнее утверждение теоремы.

Заметим, что для получения более точных оценок для периода, нежели $O(1)$, нужно рассматривать нормальные формы до шестого порядка. Далее мы увидим, как эти периодические орбиты продолжают до более высоких энергий и какую роль они играют.

3.3. Локальное поведение вблизи точек либрации

Хорошо известно, что гамильтониан (12) вблизи точек L_i в базисе собственных векторов имеет вид:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\omega}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\lambda_2}{2}(p_2^2 - q_2^2) + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|\geq 3} c_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \mathbf{q}^{\mathbf{k}} \mathbf{p}^{\mathbf{l}}, \quad (17)$$

где $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in (\mathbb{N} \cup 0)^2$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2$ и $|\mathbf{l}| = l_1 + l_2$. Существует (комплексная) замена переменных, которая приводит гамильтониан к виду

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = i\omega x_1 y_1 - \lambda_2 x_2 y_2 + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|\geq 3} C_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \mathbf{y}^{\mathbf{l}} \quad (18)$$

с k, l такими же, как и выше. Квадратичную часть (18) можно выразить в виде

$$H_q = H_c + H_s.$$

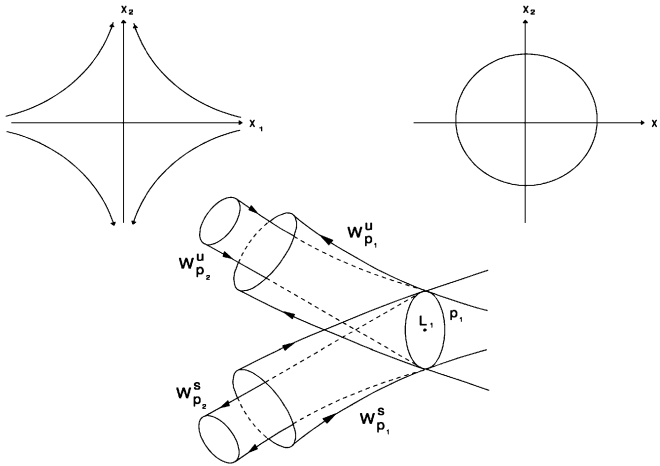


Рис. 3. Линейная динамика вблизи L_i . Верхний левый рисунок показывает седловую часть, а верхний правый — типа центр. Внизу изображены инвариантные многообразия, выходящие из п. о. p_1 вокруг L_1

Выражение (18) полезно для получения формальной аппроксимации центральных многообразий. В данном случае они являются сходящимися.

На рис. 3 мы постарались проиллюстрировать линейное поведение вблизи точек либрации. На верхних рисунках (x_1, x_2) обозначают либо (x_1, y_1) , либо (x_2, y_2) . Если $h_c = 0$ и $h = h_s = \lambda_2 x_2 y_2 = 0$, то оси $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$ являются линейно неустойчивым $W_{L_i}^U$ и устойчивым $W_{L_i}^S$ направлениями соответственно. Если $h_s \neq 0$, то мы находимся на гиперболах вблизи устойчивых/неустойчивых многообразий, соответствующих точке равновесия (рис. 3 слева вверху).

При $h = h_c \neq 0, h_s = 0$, если $x_2 = y_2 = 0$, то находимся на плоскости x_1, y_1 , где существует семейство неустойчивых периодических орбит линейной системы. Эти п.о. образуют касательную к центральному многообразию плоскость. Если только $y_2 = 0$, движение является комбинацией

п.о. и оси x_2 . Так образуются два неустойчивых полуцилиндра $W_{p.o.}^U$. Комбинация п.о. и оси y_2 дает два устойчивых полуцилиндра $W_{p.o.}^S$.

В переменных (x_i, y_i) , или в (q_i, p_i) , при учете членов высшего порядка цилиндры будут искривлены (рис. 3, внизу), однако только что описанная топология сохранится. Более того, достаточно далеко от точек седло-центр (L_i) искривление может привести к довольно сложным и запутанным изгибам. В интегрируемых гамильтоновых системах устойчивые и неустойчивые цилиндры данной п. о. будут совпадать или являться соответственно неустойчивыми или устойчивыми многообразиями другого инвариантного гиперболического объекта (в конечном счете того же самого и, возможно, неограниченного). Так или иначе, при воздействии возмущения, $W_{p.o.}^U$ и $W_{p.o.}^S$ расщепляются и пересекаются друг с другом, образуя гомоклинические и/или гетероклинические орбиты. Численные результаты следующего раздела дают некоторую предварительную информацию об этих фактах. В п. 7 представлены некоторые такие пересечения и их динамические следствия. В п. 8 обсуждается взаимодействие с сохраняющейся КАМ-структурой, а также более детально рассматривается нелинейное поведение многообразий, линейное поведение которых было рассмотрено только что.

4. Предварительные численные результаты

Мы выяснили, что удобным сечением Пуанкаре является сечение $Q_2 = 0$ ($\dot{Q}_2 > 0$), изображаемое на плоскости Q_1 и P_1 . На рис. 4 представлены сечения Пуанкаре для различных энергий при положительных c_H . На всех рисунках орбиты, изображенные слева, являются обратными. Видно, что некоторые орбиты, лежащие на торах (которые изображены на рисунках в виде инвариантных кривых), могут частично располагаться как в левой так и в правой частях рисунка. Такие орбиты носят обратный характер.

При $h \approx 0$ ($c_H \rightarrow \infty$) начало координат является устойчивой неподвижной точкой. Когда c_H становится положительной конечной величиной, на сечении Пуанкаре появляются две устойчивые неподвижные точки. Эти точки соответствуют п.о. Хилла. Правая точка соответствует луноподобной орбите и является прямой п.о. Левая неподвижная точка соответствует обратному движению Луны. При увеличении энергии торы, соответствующие прямым движениям, деформируются быстрее, чем обратные.

Правая устойчивая неподвижная точка испытывает бифуркацию типа «вилки» при $h \approx 0.0523785$. При этом она становится неустойчивой и появляются две новые устойчивые луноподобные орбиты. Бифуркация типа

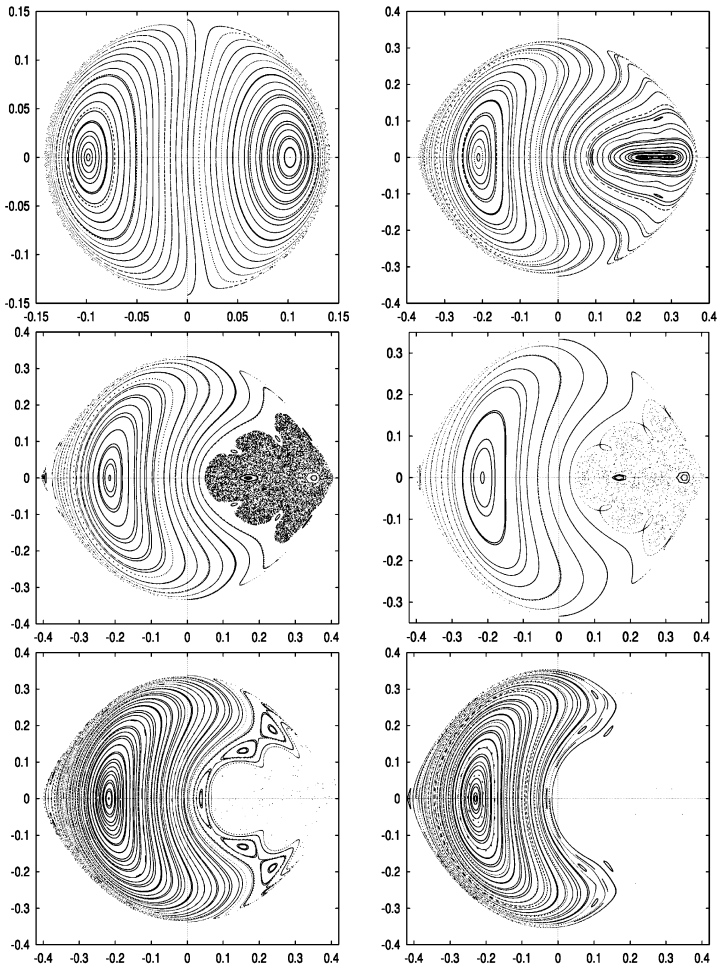


Рис. 4. 1000 итераций сечения Пуанкаре $Q_2 = 0$ для нескольких начальных условий. Слева направо и сверху вниз: а) $h = 0.001$ ($c_H = 13.572089$); б) $h = 0.053$ ($c_H = 4.4647393$); в) $h = 0.0555$ ($c_H = 4.3296356$); д) $h = 0.0558$ ($c_H = 4.3254802$); е) $h = 0.057$ ($c_H = 4.2533402$); ф) $h = 0.065$ ($c_H = 3.8967671$). Итерации в левой части всех рисунков соответствуют обратным орбитам

вилки показана на рис. 5. На рис. 9 (в декартовых переменных) эта бифуркация изображена как ϵ -семейство. Отметим, что бифуркация происходит до того, как КНС размыкается. Бифурцировавшие семейства п. о. заканчиваются на траекториях столкновения и могут быть продолжены далее, если допустить наличие дополнительных петель. Более детально это обсуждается в следующих разделах, вместе с детальным описанием большинства п. о. малого периода при энергиях, меньших критической ($h < \frac{1}{18}$).

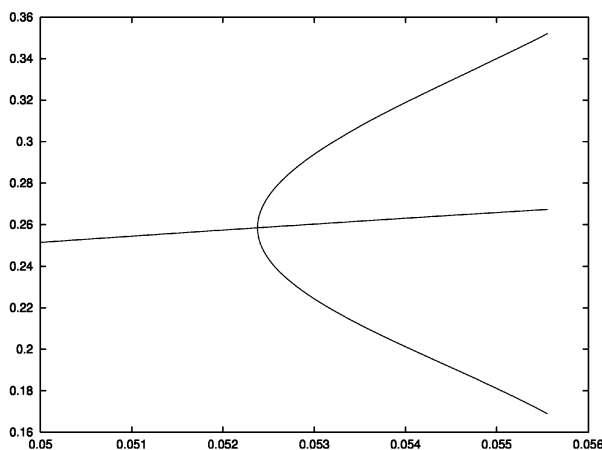


Рис. 5. Бифуркация типа «вилки» при $h = 0.0523785$ после которой появляются две устойчивые лунообразные орбиты. При этом исходная орбита становится неустойчивой. В физических переменных см. рис. 9 и рис. 11 для $h < \frac{1}{18}$

После бифуркации типа «вилки», при увеличении энергии правая область становится все более и более хаотичной. Фактически, если оставить в стороне малые островки регулярности, соответствующие устойчивым бифурцировавшим семействам, динамика становится полностью хаотичной в области, имеющей вид кленового листа, как показано на рис. 4с. Все это происходит до размыкания КНС и появления ляпуновских решений. Обратите внимание, как меняется число итераций в «кленовом листе» при переходе от рис. 4с к рис. 4d когда энергия увеличивается с $h \approx 0.0555$ до $h \approx 0.0558$, т. е. при не очень большом ее изменении. Разница в рисунках объясняется «бегством» траекторий через «дыры», которые появляются в

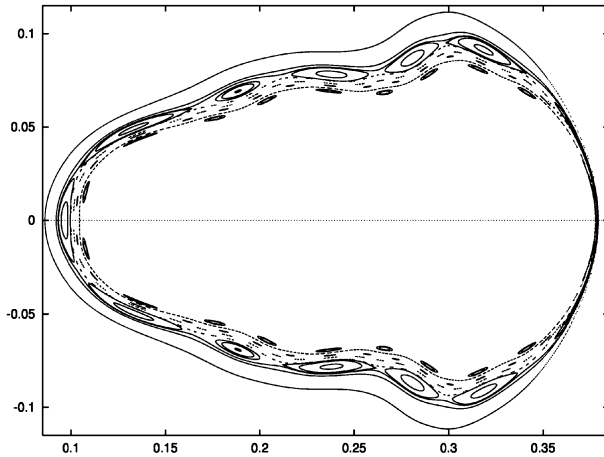


Рис. 6. Две п. о. с числом вращения $\frac{1}{6}$ при $h = 0.0541$. Также на рисунке изображена п. о. с $\rho = \frac{3}{19}$

КНС. Однако после «размыкания» КНС некоторая часть этого стохастического слоя снова начинает демонстрировать все более регулярное поведение (организовываться), и справа (рис. 4е) появляются довольно большие острова устойчивости (преимущественно периода пять). Другие точки из ранее хаотической области «убегают» на бесконечность (см. рис. 4d-f).

На рис. 6 показано необычное множество п. о. Две п. о. с числом вращения $\frac{1}{6}$ выглядят как множество из 12 островов. Они соответствуют энергии $h = 0.0541$. Конечно, такое поведение системы можно создать теоретически с помощью нормальных форм, однако интересно обнаружить его в такой классической задаче, как задача Хилла. Эта задача демонстрирует множество бифуркаций, которые очень далеки от обычных, даже если мы примем во внимание симметрии задачи, что и проиллюстрировано на рис. 6. Далее в п. 6 будет обсуждаться появление незакручивающих инвариантных кривых и их роль в образовании стохастического слоя при $h < \frac{1}{18}$.

Интересную особенность демонстрирует левая неподвижная точка отображения Пуанкаре (рис. 7). Она очень устойчива, и как уже было замечено, соответствует «обратным лунам». Численные эксперименты показывают, что она существует при сколь угодно больших отрицательных

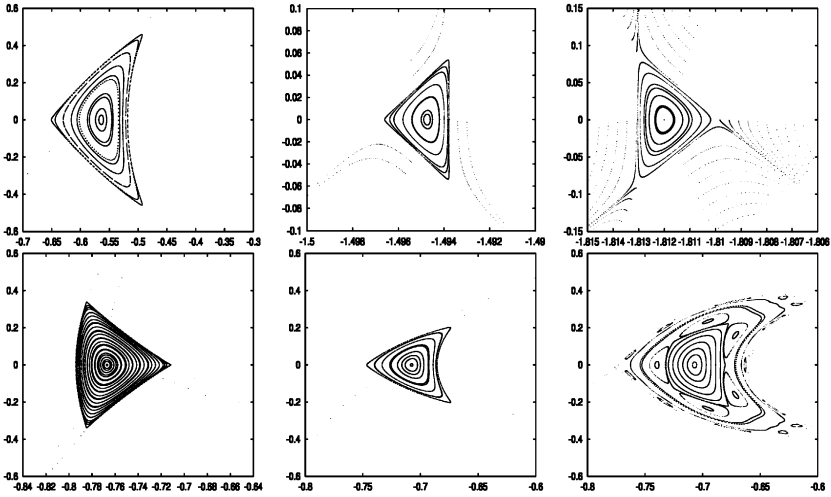


Рис. 7. 1000 итераций сечения Пуанкаре $Q_2 = 0$ для нескольких начальных условий, иллюстрирующих очень устойчивую обратную п.о. слева на рис. 4. Слева направо и сверху вниз: а) $c_H = 0.62996052$ ($h = 1.0$); б) $c_H = 0.02137470$ ($h = 160$); в) $c_H = 0.01$ ($h = 500$); д) $c_H = -0.5$ ($h = 1.41421356$); е) $c_H = -2.0$ ($h = 0.17677670$); ф) $c_H = -4.0$ ($h = 0.0625$).

значениях константы Якоби. При стремлении c_H к 0^+ ($h \rightarrow \infty$) в точке $c_H = 0.0123884$, ($h = 261.928$) она проходит резонанс 1–3, и треугольник после уменьшения его до нуля становится направленным в другую сторону. Обратите внимание на изменения на рис. 7а–с и разницу в масштабах. Инвертированный треугольник продолжает расти до нового прохождения резонанса 1–3 (при $c_H = -1.411618$, $h = 0.298122$), при котором треугольник сокращается до нуля, а затем неограниченно растет при $c_H \rightarrow -\infty$ ($h \rightarrow 0$). Рис. 7е и ф иллюстрируют такое поведение после второго прохождения резонанса. Случай $c_H = 0$ ($h \rightarrow \infty$) является необычным только с точки зрения масштабного преобразования координат, и фактически никаких интересных особенностей в этой точке не наблюдается (см. рис. 8).

При прохождении константой c_H значений от ∞ до $-\infty$ след матрицы монодромии, обратной п.о. Хилла, изменяется от двух и снова до двух, проходя через минимум ≈ -1.382066 при $c_H \approx -0.66084$ ($h \approx 0.93073$). Это сильно контрастирует с тем, что происходит с прямой хилловской орби-

той, устойчивой при малых h , но затем теряющей устойчивость вследствие бифуркации типа «вилки».

В конце этого раздела мы обсудим поведение орбит, когда член $\frac{1}{r}$, возникающий в (5), становится малым, т. е. частица движется на относительно больших расстояниях от второго тела. Использование гамильтониана (5) упрощает уравнения, кроме того, он более близок к интерпретациям ОЗТТ. Запишем уравнения второго порядка:

$$\ddot{q}_1 = 2\dot{q}_2 + 3q_1, \quad \ddot{q}_2 = -2\dot{q}_1. \quad (19)$$

Для того, чтобы найти симметричные п.о., проинтегрируем (19) с начальными условиями $q_2 = \dot{q}_1 = 0$ при $t = 0$. Решение при этом имеет вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= d + a \cos(t), & q_2 &= -2a \sin(t) - \frac{3}{2}dt, \\ \dot{q}_1 &= -a \sin(t), & \dot{q}_2 &= -2a \cos(t) - \frac{3}{2}d. \end{aligned} \quad (20)$$

Параметры a и d в (20) связаны уравнением $c_H = -a^2 + \frac{3}{4}d^2$. Ясно, что п. о. появляется, если и только если $d = 0$. Тогда $a = \sqrt{-c_H}$, знак выбирается таким образом, чтобы при $t = 0$ выполнялось $\dot{q}_2 < 0$. При использовании полного гамильтониана орбита немного изменится. С помощью численного продолжения можно показать, что рассматриваемая орбита является обратной п.о. и принадлежит к семейству обратных п.о. Хилла, рождающихся при $h = 0$. Для подобных орбит с $\dot{q}_2 > 0$ при $t = 0$, должно выполняться $d \neq 0$, следовательно в этом случае они не могут быть периодическими. Таким образом, хилловские прямые п.о. должны проходить вблизи второго тела при $c_H < 0$ и больших $|c_H|$, это и является источником неустойчивости.

5. Ляпуновские и другие основные периодические орбиты

ОЗТТ и, в частности, ее хилловский предельный случай как в декартовых синодических координатах, так и в их канонической версии имеют следующую симметрию

$$\begin{aligned} S_1 : (x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) &\rightarrow (x, -y, -\dot{x}, -\dot{y}, -t), \\ S_2 : (q_1, q_2, p_1, p_2, t) &\rightarrow (q_1, -q_2, -p_1, p_2, -t). \end{aligned} \quad (21)$$

Эта симметрия предполагает, что ляпуновские п.о. симметричны относительно оси x в декартовых переменных и относительно q_1 в канонических.

Хорошо известен результат о том, что если траектория ортогонально пересекает ось симметрии в моменты времени $t = 0$ и $t = \frac{T}{2}$, тогда траектория является периодической с периодом T .

Вообще, найти T -периодическую орбиту автономной системы $\dot{x} = f(y)$, проходящую через точку x_0 , означает найти нули функции $F(x_0) = \varphi(T, x_0) - x_0 = 0$, где $\varphi(t, x_0)$ — решение, стартующее в x_0 при $t = 0$. Также поиск T -периодической орбиты эквивалентен нахождению неподвижной точки $\mathcal{P}(x_0)$ отображения Пуанкаре, связанного с сечением Σ , трансверсальным потоку, которая соответствует траектории $\varphi(t, x_0)$. По заданным Σ и $\mathcal{P}(x_0)$ нам, как и ранее, нужно найти $x \in \Sigma$, такую что

$$F(x_0) = (\varphi(t, x_0) \cap \Sigma) - x_0 = \mathcal{P}(x_0) - x_0 = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) может быть рассмотрено, как задача продолжения по гомотопии. Более детально см. [14].

Рассмотрим начальные условия $(Q_1^0, 0, 0, p_2^0)$ с $\dot{P}_2 > 0$. Они соответствуют точке на сечении Пуанкаре $Q_2 = 0$ ($H = h, Q_2 > 0$), лежащей на орбите ортогонально пересекающей ось Q_1 (так как $P_1 = 0$). Найдем следующее пересечение орбиты с плоскостью сечения через половину периода, когда снова будет выполняться $P_1 = 0$. При этом используется предиктор-корректорный метод для решения уравнения продолжения. Как уже было замечено, в силу симметрий п.о. можно сократить вычислительные затраты и интегрировать только до половины периода. Этот метод применяется в регуляризованных переменных, а результаты можно перевести в синодические координаты, используя (7)–(9) и (11). В регуляризованных переменных дополнительное преимущество можно получить, используя факт удвоения углов. Симметричные относительно оси q_1 в декартовых координатах п.о., начинающиеся в точке $q_2 = 0, \dot{q}_2 > 0$, можно искать, стартуя с точки $Q_2 = 0, \dot{Q}_1 = 0, \dot{Q}_2 > 0$, и следя за пересечением с $Q_1 = 0$ при $\dot{Q}_2 > 0$. Используя симметрии, нужно помнить, что для выяснения устойчивости п.о. необходимо использовать полную матрицу монодромии. Эта матрица получается как композиция матрицы, соответствующей половине периода, и обратной к симметричной ей матрице. Заметим также, что как следствие сингулярного масштабирования, мы фактически имеем две гамильтоновы системы, и надо быть очень осторожным при продолжении решений по энергии через $c_H = 0$.

Полученные орбиты уже были найдены Хеноном в [10] как часть серии численных исследований ОЗТТ. Тем не менее, в этой работе не представлена явная связь между инвариантными многообразиями и КАМ-структурой.

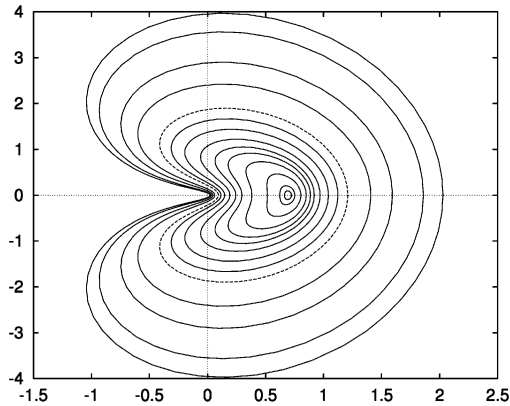


Рис. 8. Проекция на плоскость (x, y) некоторых ляпуновских п.о., которые образуют центральное многообразие L_1 . П.о., соответствующие L_2 , можно получить с помощью симметрии. При $c_h \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) ляпуновские п.о. асимптотически стремятся к столкновительным орбитам. Пунктирной линией обозначена ляпуновская орбита, соответствующая уровню $c_H = 0$.

На рис.8 показаны некоторые ляпуновские п.о. из семейства, порожденного L_1 , в проекции на плоскость (x, y) , т.е. в физических декартовых переменных. Однопараметрическое множество таких орбит образует центральные многообразия, связанные с точками либрации. Так как L_1 и L_2 симметричны относительно Q_2 , то п.о. вокруг L_2 можно получить, применив преобразование симметрии к таким же орбитам вокруг L_1 . Пунктиром на рисунке обозначена ляпуновская орбита при $c_H = 0$ и, как было замечено в предыдущем разделе, у нее нет никаких особенностей. Четыре наибольшие орбиты соответствуют отрицательным значениям c_H , а именно, -0.51629634 , -0.94984956 , -1.5681896 , -1.9804931 , тогда как первые четыре орбиты, следующие за орбитой с $c_H = 0$, соответствуют следующим значениям интеграла Якоби: $c_H = 0.27707190$, 0.61869355 , 1.0537016 и 1.5112690 .

На рис.9 показаны характеристические кривые (т.е. кривые, демонстрирующие некоторые характеристики п.о., позволяющие восстановить орбиту по энергии или другому первому интегралу) некоторых семейств п.о., которые в физических переменных замыкаются после одной или двух петель. По вертикали откладывается начальное значение физической пере-

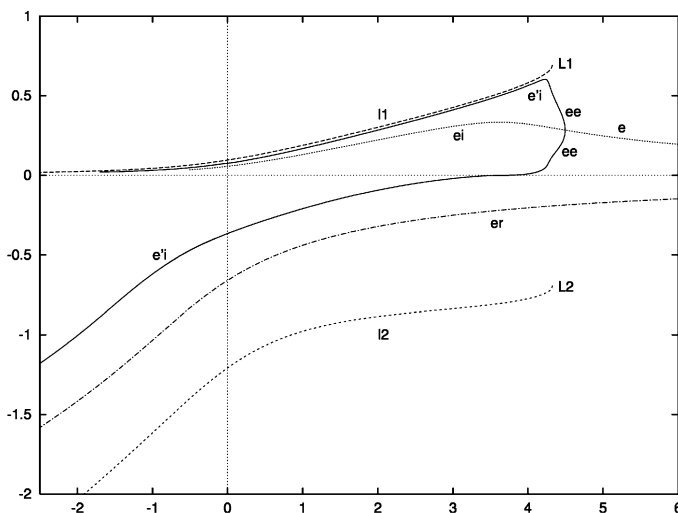


Рис. 9. Некоторые из основных п.о. сечения Пуанкаре единичного периода. На вертикальной оси изображается начальное или конечное значение координаты x периодической орбиты, полученное численным продолжением. На горизонтальной оси откладывается значение интеграла Якоби. Семейства l_1 , l_2 и e асимптотически стремятся к столкновениям

менной x , а по горизонтали — значение c_H . Ляпуновские орбиты l_1 и l_2 стартуют сразу же после размыкания КНС вблизи L_1 и L_2 соответственно, это происходит при $c_H = 4.3267487$ ($h = \frac{1}{18}$). На рисунке изображается «наиболее левое» пересечение орбит с осью x , поэтому можно оценить расстояние между ляпуновскими орбитами. Как видно из рисунка, они асимптотически стремятся к столкновительным траекториям при $c_H \rightarrow -\infty$.

Другое важное семейство п.о. — это e -семейство, которое устойчиво при больших значениях c_H , ($h \rightarrow 0$). Траектория нашей Луны [10] принадлежит к этому семейству с $c_H = 6.54034$ ($h = 0.029893$) и $0.016769 < x < 0.18717$, то есть выходит за правую границу нашего рисунка. Это семейство, как было показано в п. 4, становится неустойчивым проходя через бифуркацию типа «вилки» при $c_H = 4.4999874$ ($h = 0.0523785$), образовавшиеся при бифуркации орбиты имеют периоды, близкие периоду исходной орбиты, а неустойчивая бифурцировавшая ветвь ei может быть продолжена к столкновительным траекториям при $c_H \rightarrow -\infty$.

Две устойчивые ветви после потери устойчивости порождают $e'i$ семейства. Чтобы сохранить возможность оценки расстояния между орбитами, для каждой ветви снова изображались наиболее левые пересечения с осью x . Чтобы получить другое пересечение, достаточно взять отрицательное значение симметричной ветви. На рис. 10 показаны орбиты, принадлежащие правой ветви, начиная от устойчивых орбит семейства ee и заканчивая столкновительными траекториями семейства $e'i$. Орбиты, принадлежащие левой ветви, могут быть получены с помощью симметрии. Таким образом, существуют две орбиты, которые стремятся к столкновительным при одних и тех же значениях энергии. Обе орбиты могут быть продолжены и дальше, но при этом скорость становится перпендикулярной оси x только после второго пересечения оси x , т.е. они становятся орбитами периода 2. Тем не менее, в ЛЧ переменных, благодаря удвоению углов, эти орбиты, как и раньше, располагаются через $T/2$. И фактически, они могут быть продолжены до второй столкновительной траектории при $c_H \rightarrow -\infty$. После удвоения периода пересечение оси x , отвечавшее за столкновение, удаляется от второго тела, а второе пересечение орбитой оси x асимптотически стремится к столкновению, как показано на рис. 9.

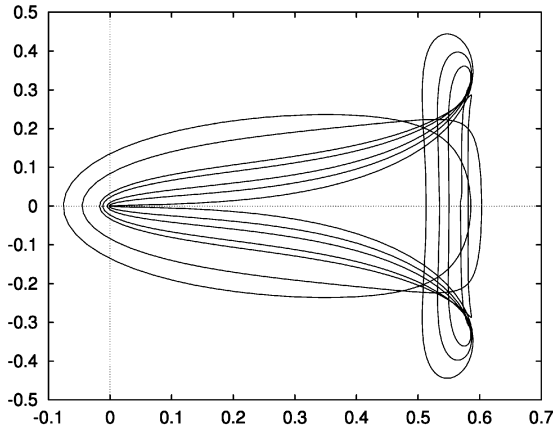


Рис. 10. Некоторые орбиты $e'i$ -семейства, начиная с окрестности их ответвления от ee и до столкновительных траекторий. Левая ветвь может быть получена с помощью отражения относительно начала координат

Отметим, что главные бифуркации происходят в окрестности значения энергии, при котором размыкается КНС.

И, наконец, существует еще *er*-семейство, которое устойчиво для всех значений c_H (исключая, разумеется, резонансы 1–3). Это семейство соответствует левой неподвижной точке на сечениях Пуанкаре (рис. 4 и 7). Устойчивость этой орбиты, как было показано в п. 4, и изменение топологии инвариантных многообразий ляпуновских п. о. ответственны за сохранение КАМ-структуры. Данный вопрос будет обсуждаться в п. 8.

6. Глобальное описание при энергиях ниже критической

Этот раздел посвящен описанию динамики задачи Хилла для $h < \frac{1}{18}$. Для достаточно малых значений h ($c_H \gg 1$) динамика описывается предложением 1. Интересно наблюдать, как меняется эта простая, хорошо упорядоченная картина и каковы главные причины этих изменений.

6.1. Периодические орбиты и число вращения

Для начала мы рассмотрим характеристические кривые п.о. Хилла в интервале $h \in (0, \frac{1}{18})$, а также другие основные симметричные семейства, которые бифурцируют из них (или в некотором смысле имеют к ним отношение). Для построения производилось «сканирование» начальных условий при $h = \frac{1}{18}$, при этом велся поиск орбит различного периода. Затем с помощью метода продолжения была исследована область $h < \frac{1}{18}$. В процессе продолжения были найдены некоторые бифуркации (как для собственных значений, равных ± 1 , так и для равных корню какой-либо степени из -1). Обобщение полученных результатов приведено на рис. 11 с подробным пояснением на подписи к рисунку. Заметим, что некоторые орбиты дважды пересекают плоскость $Q_2 = 0$, $\dot{Q}_2 > 0$ (обычно в перигентре и апоцентре). Таким образом, две точки на картинке могут быть связаны с одной и той же п.о. Заметим также, что для малых значений h рисунок иллюстрирует наибольший период $O(\frac{1}{2h})$, предсказанный в Предложении 1. Сосредоточимся теперь на некоторых других важных фактах.

Для всех найденных орбит были вычислены собственные значения дифференциала отображения Пуанкаре (или его подходящей степени). В линейно устойчивом случае собственные значения имеют вид $\exp(\pm 2\pi i\alpha)$.

Величина α является локальным числом вращения п.о., которое мы будем обозначать как ρ_{loc} .

При продолжении хилловского прямого семейства по энергии от $h = 0$ до $h = \frac{1}{18} \rho_{loc}$ сначала увеличивается (предложение 1 говорит нам, что при малых h оно имеет вид $2h$) до тех пор, пока не достигнет значения $\rho_{loc}^{\max} \approx 1/10.482073$ при $h \approx 0.043238$. После прохождения максимума, дальнейшее увеличение энергии ведет к уменьшению ρ_{loc} до нуля в точке бифуркации типа «вилки». Затем прямая п. о. Хилла становится неустойчивой. Поведение обратной п. о. Хилла сильно контрастирует с только что описанным поведением прямой п. о. Хилла. Для нее ρ_{loc} увеличивается во всем рассматриваемом интервале изменения h .

Сказанное выше иллюстрируется тем, что орбиты периодов, меньших одиннадцати, не бифурцируют из хилловского прямого семейства. На рис. 11 показаны два семейства орбит периода $21/2$ (т.е. орбиты периода 21, итерации которых на сечении Пуанкаре дважды обращаются вокруг точки, соответствующей прямой п.о. Хилла). Они бифурцируют из хилловского прямого семейства при близких значениях h .

Тем не менее, п.о. периода, меньше 11, находятся не слишком далеко от прямой п.о. Хилла. Они рождаются в результате эллиптической-гиперболической бифуркации. Рассмотрим эти бифуркации с другой точки зрения. Характеристические кривые семейств, бифурцирующих из хилловской обратной п.о., имеют максимум энергии в точке бифуркации. Это означает, что число вращения ρ вокруг обратных хилловских п.о. увеличивается. Обратная ситуация при малых h наблюдается вблизи прямой п.о. Хилла (приблизительно до $h = 0.0225$, сразу же после бифуркации п.о. периода 20). До этого значения h , ρ вблизи хилловской прямой п.о. локально уменьшается. При больших значениях энергии оно локально увеличивается, и на некотором расстоянии от этих п.о. ρ (которое хорошо определено для п.о. и точек, лежащих на инвариантных кривых) имеет максимум. Пунктирная линия на рис. 11 показывает положение этого максимума в зависимости от h . Когда значение максимума ρ достигает рационального числа, возникают новые п.о. Для $h = \frac{1}{18}$ значение максимума немного меньше $\frac{1}{5}$, то есть орбиты периода 5 еще не появились вокруг хилловских п.о. Это верно и для орбит, рожденных в бифуркации типа «вилка». Последние имеют $\rho_{loc} = 0.199795$ при $h = \frac{1}{18}$.

Другими словами, пусть $\rho = b_0 + b_1 d^2 + b_2 d^4 + \dots$, где d обозначает расстояние до неподвижной точки, а b_j , известные как коэффициенты

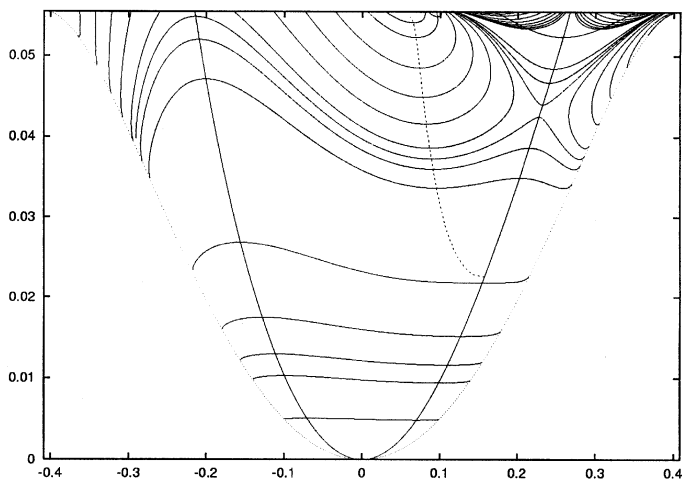
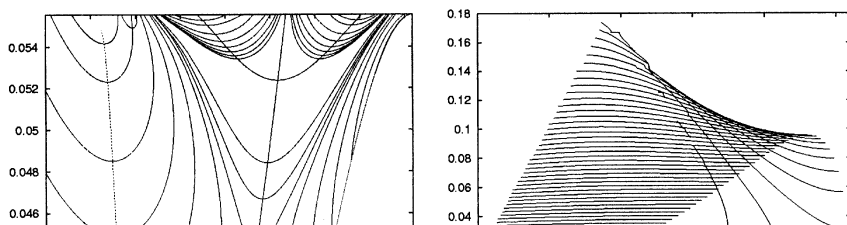


Рис. 11. Основные семейства симметричных п.о. до размыкания КНС ($0 < h < 1/18$). По горизонтали изображается начальное значение Q_1 , по вертикали — значения h . Пунктирная линия соответствует положению КНС. Правая часть, начинающаяся в т. $(0, 0)$, соответствует прямым орбитам (семейства e и e_i на рис. 9). Левая часть соответствует обратным п.о. (er -семейства рис. 9). Кривые, отходящие от прямого хилловского семейства, соответствуют п.о. с числами вращения (считая снизу вверх) $1/100$, $1/50$, $1/40$, $1/30$, $1/20$, $1/12$, $1/11$, $2/21$, а затем снова $2/21$, $1/11$, $1/12$ и 0 . Последнее соответствует бифуркации типа «вилки», изображенной на рис. 5. Также показаны некоторые периодические семейства, исходящие из п.о. при бифуркации типа «вилки» (обозначенные ee на рис. 9). Штриховая линия показывает места расположения дополнительных бифуркаций п.о., которые происходят при увеличении h . В точках этой кривой число вращения имеет локальный максимум. На рисунке она пересекает семейства с числами вращения $1/2$, $1/11$, $2/21$, $1/10$, $1/9$, $1/8$, $1/7$, $1/6$ и $2/11$.

Биркгофа, зависят от h . Тогда для некоторого интервала изменения энергии, начинающегося с 0 , и включающего значения, большие 0.0225 , выполняется следующее свойство: при $h \approx 0.0225$ коэффициент b_1 меняет знак с отрицательного на положительный, в то время как b_2 остается отрицательным в большой области изменения h . Это и объясняет смену поведения.

На рис. 12 (слева) показана увеличенная часть предыдущего рисунка. Хорошо видны бифуркации типа «вилки», а также идущие от них вторичные бифуркации. Справа на рисунке показано ρ вдали от хилловских прямых



может быть представлен однозначной функцией угла. Несмотря на то, что для задачи Хилла не доказана принадлежность к задачам общего типа (в некоторых аспектах она кажется даже далекой от этого), мы можем ожидать появления таких кривых вблизи экстремума ρ . Более подробно подобные явления вблизи трехпериодических и других бифуркаций рассматривались в [5].

На рис. 13 показаны некоторые меандровые кривые, связанные с резонансами различного порядка. В левой колонке они связаны с появлением орбит периода семь, возникающих при $h \approx 0.048510542$. Как будет показано далее, резонансы периода 7 играют важную роль. В правой колонке изображены меандровые кривые, связанные с п.о. периода 6, возникающими при $h \approx 0.052321925$, и периода 9 при $h \approx 0.041572838$. Заметим, что фактически, вследствие наличия нескольких петель, орбиты периода 6, при значениях h близких к бифуркационному, имеют восемь пересечений с $Q_2 = 0$. Интервал существования меандровых кривых, связанных с резонансом периода 7, имеет амплитуду порядка $2 \cdot 10^{-5}$, для других случаев эта амплитуда еще меньше. Особая роль резонансов седьмого порядка объясняется следующим образом. При h , больших, но близких к 0.0225, если максимум ρ пересекает рациональное число, вообще говоря, должны появляться меандровые кривые. Тем не менее для этого интервала изменения h система очень близка к интегрируемой. Очень малые возмущения затрудняют визуализацию этих кривых (см. рис. 13 справа внизу). С другой стороны, при h , близких к $\frac{1}{18}$, система достаточно далека от интегрируемой, как мы увидим далее, по крайней мере в большой области вблизи прямой п.о. Хилла. Таким образом, возможные меандровые кривые быстро разрушаются.

Прокомментируем роль резонанса периода 7. Меандровые кривые создаются сразу после бифуркации. При увеличении h они исчезают, но локально отображение при этом имеет слабое закручивание. Две резонансные зоны периода 7 (внешняя и внутренняя, в зависимости от расстояния до прямой п.о. Хилла) удаляются друг от друга. Внешняя приближается к гораздо более устойчивой обратной п.о. Хилла. Например, при $h = \frac{1}{18}$ во внешней зоне существует две п.о. периода 7. Одна из них гиперболическая с максимальным собственным значением 1.034762, другая — эллиптическая с собственными значениями $\exp(\pm i0.0341725)$, т.е. собственные значения близки к единице. Во внутренней зоне при этом же значении энергии, обе орбиты гиперболические с максимальными собственными значениями 65.5395

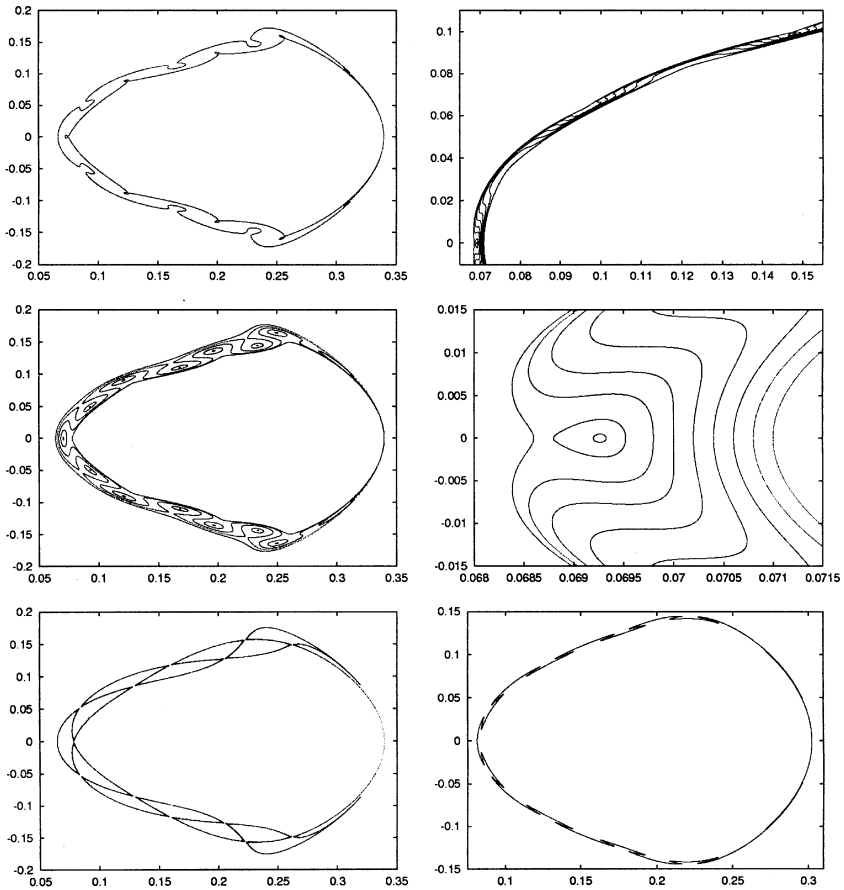


Рис. 13. Пример незакручивающихся инвариантных кривых. Левая колонка соответствует резонансу порядка семь и значениям h (сверху вниз) 0.048511, 0.048519 и 0.048527. В правой колонке сверху вниз изображены часть незакручивающейся кривой, связанной с резонансом порядка шесть при $h = 0.052322$ и ее увеличением. Справа внизу приведена незакручивающаяся кривая, соответствующая резонансу порядка девять при $h = 0.041573$.

и 99.8278. При значениях h , близких к 0.05, возмущение по отношению к почти интегрируемой ситуации, начинает играть важную роль в обла-

сти фазового пространства, где находится внутренний семипериодический резонанс, и вместе со слабым закручивающим характером отображения, начинает хаотизировать систему. Более конкретно это можно проиллюстрировать следующим образом. При прохождении «вилки» создается очень слабая хаотическая зона вокруг «восьмерки» сепаратрис гиперболической прямой хилловской п.о., в то время как для этого же значения h наибольшее собственное значение внутренних семипериодических неустойчивых орбит уже 2.2785 со значительным расщеплением сепаратрис.

Эти факты наталкивают на мысль провести систематическое исследование хаотических зон, как с количественной, так и с качественной точек зрения. Что и будет сделано в двух следующих разделах.

6.3. Зоны хаоса, максимальные показатели Ляпунова и степень неинтегрируемости

Одним из наиболее распространенных методов определения зон хаотичности и количественной оценки степени интегрируемости орбит является расчет максимальных показателей Ляпунова (для краткости далее ПЛ). В данной работе был использован классический метод, для ознакомления с другими методами мы отсылаем читателя к [3, 4]. После некоторых предварительных вычислений было показано, что для h , меньших приблизительно 0.053, задача Хилла достаточно хорошо упорядочена.

Для заданного значения h ограниченная область в координатах (Q_1, P_1) разбивается на квадраты (пиксели) размера 10^{-3} со сторонами, параллельными осям. Несмотря на то что, типичное число пикселей 4×10^5 , симметрии задачи позволяют проделать вдвое меньшую вычислительную работу. Для каждого пикселя выбирается точка в его середине и вычисляется ПЛ в этой точке. Пиксели сканируются справа налево от оси Q_1 к максимальному значению $\dot{Q}_1$. Кроме того, мы храним траекторию, состоящую из пикселей, накрываемых каждой орбитой. Если очередной пиксель был накрыт одной или несколькими точками предыдущих орбит, то он пропускается как начальная точка. При расчетах использовалось минимальное количество прохождений через каждый пиксель, равное десяти. На каждом пикселе выбиралось не более одной начальной точки. Таким образом, может случиться, что в конце вычислений некоторые пиксели посещались менее десяти раз, однако для всех рассмотренных значений h такое происходит только для малого количества пикселей, близких к границе области, где теряется трансверсальность.

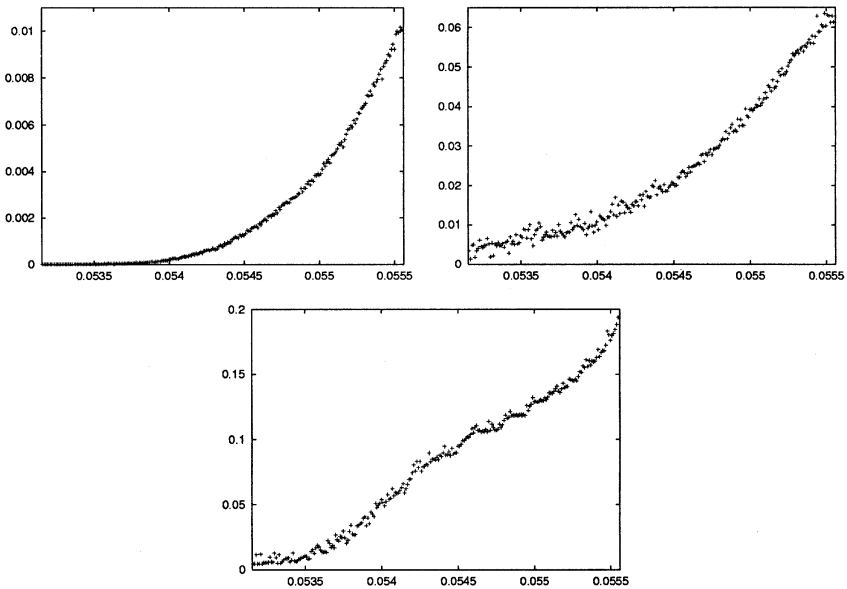
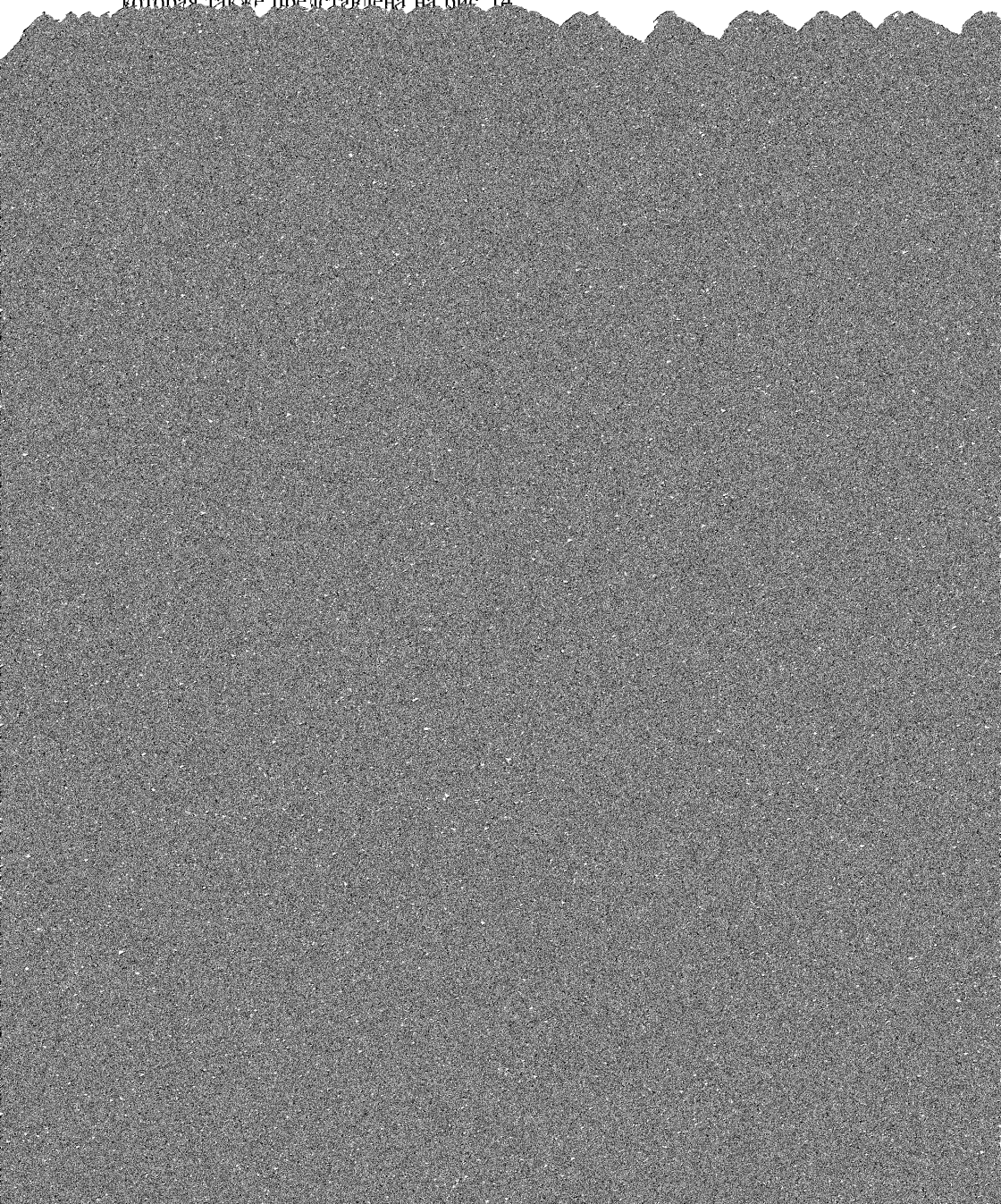


Рис. 14. Некоторая количественная информация о степени хаотичности системы при $h < \frac{1}{18}$. На горизонтальной оси на всех трех графиках откладывается h . Сверху слева: построен максимальный показатель, усредненный по всем пикселям сечения Пуанкаре. Справа сверху: максимальное значение максимального показателя Ляпунова при рассмотрении различных хаотических областей. Внизу: часть пикселей, содержащих нерегулярные движения (показатель Ляпунова $> 10^{-4}$)

После вычисления нескольких итераций отображения для выбранной орбиты и определения на ней значения ПЛ, полученная величина присваивается всем пикселям, посещаемым орбитой (с соответствующим множителем, если пиксель посещен несколько раз). Это позволяет определить средний ПЛ на каждом из пикселей, максимальный ПЛ на каждом пикселе и среднее значение ПЛ для всей области. На рис. 14 показаны максимальные и средние значения ПЛ, определенные указанным выше образом для $h \in (0.05315, \frac{1}{18})$ с шагом 10^{-5} . Затем было выбрано некоторое значение ПЛ в качестве количественной границы между регулярным и нерегулярным движением. Принимая во внимание ошибки вычислений, величина 10^{-4}

кажется приемлемой для этой цели. Та часть пикселей, для которых ПЛ больше, чем этот порог, была названа областью нерегулярного движения, которая также представлена на рис. 14.



6.4. набросок глобальной динамики

Пользуясь информацией из предыдущего пункта и исследуя области, где ПЛ как функция h больше некоторого порога, можно дать примерное описание глобальной динамики для $h < \frac{1}{18}$. При $0 < h < 0.053$ система в сущности выглядит как интегрируемая. Для малых h типичной является картина, представленная на рис. 4а. На рис. 4б при $h = 0.053$ показана все еще в основном интегрируемая динамика, несмотря на то, что произошла бифуркация типа «вилки». Это контрастирует с поведением системы при $h = 0.0555$, показанным на рис. 4с, где в области прямых орбит хорошо заметна область хаоса. Вместе с тем, область обратных орбит практически регулярна. Рис. 14 показывает, как в этом коротком интервале изменения h происходит увеличение доли нерегулярной динамики.

Для более детального описания эволюции системы можно установить, как происходит возникновение и рост зон хаоса. Говоря о n/m резонансных зонах, мы имеем в виду резонансы, где есть п.о. с $\rho = m/n$, такие, что вблизи них наблюдается хаотичное поведение (ПЛ больше некоторого предельного значения, и можно визуально наблюдать расщепление сепаратрис). Вспомним, что резонансные зоны с $m/n > 7$ ($m/n < 7$) ближе (дальше) к прямым хилловским п.о., чем п.о. с периодом семь.

- Для $h = 0.0531$ наблюдается только малая хаотичность вблизи (внутренней) семипериодической резонансной зоны.
- Вблизи $h = 0.0533$ наблюдается крайне малая хаотическая зона вблизи «восьмерки» сепаратрис хилловской прямой п.о. Вблизи этого уровня энергии хаос начинает появляться в 9-периодической резонансной зоне.
- Приблизительно при $h = 0.0536$ начинают появляться 17/2, 8 и 11-периодические зоны
- Вблизи $h = 0.0539$ видны зоны 13/2 и 20/3, а зоны, связанные с резонансами 7,8 и 9, сливаются в одну большую зону хаоса.
- При $h = 0.054$ появляются зоны 6, 19/3 и 13.
- Большая зона хаоса захватывает 11-периодическую резонансную зону при $h = 0.0542$.

- Вблизи от значения $h = 0.0544$ большая хаотическая зона содержит все резонансы от 6 до 13. Зона в форме «восьмерки», которая медленно увеличивалась в течение предыдущих шагов, сливается с обширной зоной хаоса сразу после этого значения энергии. Тем не менее, внутри зоны хаоса видны достаточно большие острова регулярности, главным образом вблизи эллиптических точек, рожденных вследствие бифуркации типа вилки.
- Вблизи $h = 0.0548$ появляется резонанс $11/2$.
- При $h = 0.055$ появляются 7-периодические зоны вокруг семейства ee и большая зона хаоса захватывает все резонансы между $11/2$ и формирующей восьмеркой.
- При $h = 0.0552$ только очень маленькие островки видны в море хаоса.

Далее, начиная с $h = 0.055$ острова периодов $21/4$ и $41/8$ видны на периферии хаотической зоны.

Просуммировав вышеизложенное, можно сказать, что область хаоса, главным образом, эволюционирует от резонансной зоны периода 7, абсорбируя меньшие внутренние и внешние зоны. Также типично, что зоны нечетных периодов (7,9,11,...) больше соответствующих зон четных периодов. Используя методы, предлагаемые в [17], можно провести более детальное исследование, включающее в себя поиск критических значений h , при которых разрушаются инвариантные кривые, разделяющие различные резонансные зоны. Однако нам представляется, что картина достаточно ясна и без этого исследования.

7. Гомо- и гетероклинические пересечения при h , близких к $\frac{1}{18}$

В этом разделе представлены некоторые интересные гомо- и гетероклинические пересечения, которые появляются сразу же после размыкания КНС, т.е. при значениях $h > \frac{1}{18}$, но близких к критическому. При этих значениях энергии появляются инвариантные многообразия ляпуновских п.о. Необходимо также прокомментировать инвариантные многообразия L_1 и L_2 . Для всех многообразий, нас будут интересовать только ветви, идущие ко второму телу (в прямом или обратном времени). Остальные ветви уходят

на бесконечность и не возвращаются. Это относится к обсуждению уравнений (19) в п. 4 (для уточнения аналитических деталей см. [13]). Описание численных расчетов инвариантных многообразий будет приведено в п. 8.

7.1. Гомо- и гетероклинические пересечения, связанные с ляпуновскими орбитами

Рассмотрим ляпуновскую орбиту вблизи L_1 при h , близких к $\frac{1}{18}$. Можно вычислить левую ветвь $W_{p.o.L_1}^U$. При поиске гомоклинических пересечений п.о. нужно помнить, что эта п.о. соответствует в физическом пространстве орбите вокруг неподвижной точки, симметричной (в переменных (Q_1, Q_2)) относительно начала координат. Проекции орбит на плоскость (Q_1, Q_2) должны совершать полуцелое число обращений $\frac{k}{2}$. Предположим, что мы рассматриваем пересечения $W_{p.o.L_1}^U$ либо с $Q_1 = 0$, либо с $Q_2 = 0$ после $\frac{k}{4}$ обращений. Выберем в качестве координат в этом разделе r и $\dot{r}$, задаваемые соотношениями $r^2 = Q_1^2 + Q_2^2$ и $r\dot{r} = Q_1\dot{Q}_1 + Q_2\dot{Q}_2$. Принимая во внимание обратимость в переменных $(r, \dot{r})$, пересечение $W_{p.o.L_1}^U$ будет кривой, симметричной относительно оси r . В разделе 8 проводится подробное исследование всех эффектов симметрии на этих многообразиях. В результате, первое гомоклиническое пересечение должно лежать на оси r .

Аналогичным образом, касательные гетероклинические пересечения между ляпуновскими орбитами вблизи L_1 и ляпуновскими орбитами вблизи L_2 , на том же уровне энергии, должны лежать на $\dot{r} = 0$, если секущая плоскость $Q_2 = Q_1$ либо $Q_2 = -Q_1$. Таким образом, достаточно вычислить пересечения $W_{p.o.L_1}^U$ с этими четырьмя плоскостями в переменных (Q_1, Q_2) , чтобы получить все искомые гомо- и гетероклинические пересечения. Начальные пересечения, когда орбита движется медленно вдали от п.о., не должны приниматься во внимание. Трансверсальные пересечения этих многообразий локально диффеоморфны S^1 , будучи локально цилиндрами. Нужно также принимать во внимание, что как только происходят некоторые из этих пересечений, появляются точки, удаляющиеся на бесконечность. Таким образом, цилиндр разделен: одна из частей возвращается к следующему пересечению с одной из этих плоскостей, а другая удаляется. Более того, следующее пересечение будет иметь форму двойной спирали, точки, близкие к гомо- гетероклиническим, совершают множество обращений вокруг п.о. до того, как покинут их окрестность. Также нужно помнить об эффекте петель на орбитах.

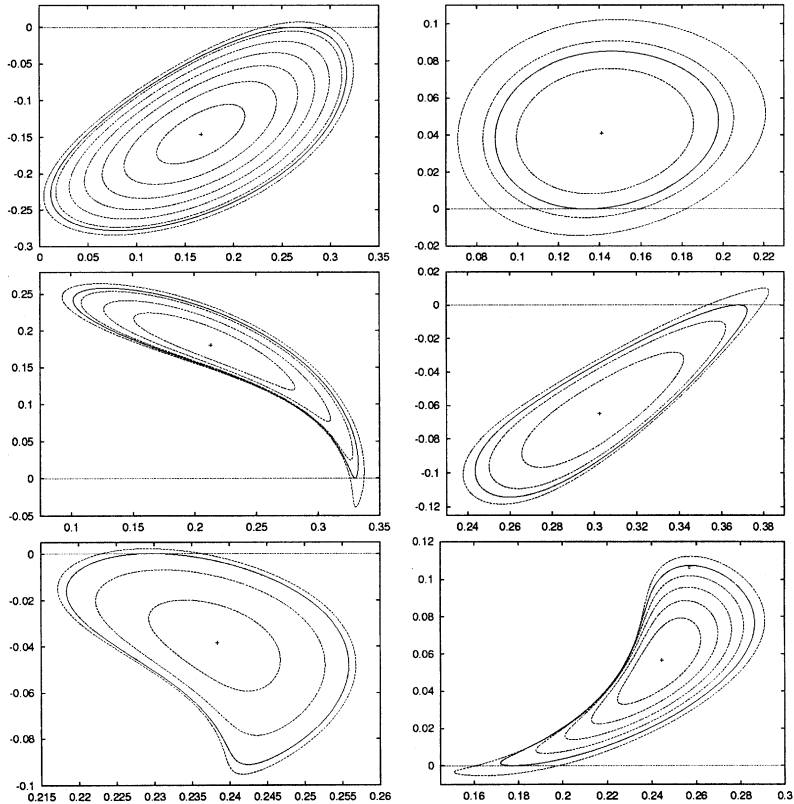


Рис. 15. Некоторые пересечения $W_{p.o.L_1}^U$ при различных уровнях $h > 1/18$ с плоскостью $Q_1 = Q_2$ (случай а)), $Q_2 = 0$ (случай б)), $Q_1 = -Q_2$ (случай с)) и $Q_2 = 0$ (случай д)). Непрерывные линии соответствуют п.о. Ляпунова на уровнях h , для которых происходят гетероклинические (случаи а) и с)) и гомоклинические (случаи б) и д)) касания. Пунктирная линия соответствует другим уровням h . Слева направо и сверху вниз: а) $\Delta h = 0.01181$; б) $\Delta h = 0.00159$; в) $\Delta h = 0.00340$; д) $\Delta h = 0.00126$; е) $\Delta h = 0.00045$; ф) $\Delta h = 0.00100$. Значения $\Delta h = h - 1/18$, для которых происходят пересечения, даны приблизительно. Точки вблизи центра картинок соответствуют пересечениям $W_{L_1}^U$ с $h = 1/18$. Например, точка в середине среднего правого рисунка (случай д)) соответствует точке, помеченной цифрой 1 вверху слева на рис. 16

После приведенных выше рассуждений рассмотрим простейшую задачу (задачи более интересные для приложений, см. в п. 9): появление первых касаний. На рис. 15 приведены пересечения некоторых многообразий, включая (на рисунке сплошными линиями) те из них, которые соответствуют касаниям после $1/2$, $3/2$ и $5/2$ (на рисунке — гетероклинические случаи типов а), с) и а) соответственно) оборотов вокруг п.о. в физических переменных и после 1, 2 и 3 (на рисунке — гомоклинические случаи типов б), d) и б) соответственно) оборотов вокруг п.о. Отметим, что они происходят при малых отклонениях энергии от критического значения, особенно в случае d), очень важном для приложений. Значениям Δh , меньшим, чем значения, соответствующие касаниям горизонтальной оси, отвечают внутренние сечения, внешние появляются при больших значениях h . Так как $W_{L_1}^S$ симметрично $W_{L_1}^U$, изображенному на рисунке (если сделано такое же число обращений в обратную сторону), то увеличение энергии от случая, когда многообразия не пересекаются, приводит к их касанию, а затем трансверсальному пересечению.

7.2. Пересечения многообразий хилловских и ляпуновских п.о.

Еще один интересный вопрос состоит в существовании других важных гетероклинических пересечений. Можно также задаться вопросом, что происходит с ограниченной ветвью $W_{L_1}^U$. Оказывается, эти два вопроса жестко связаны между собой. Рассмотрим сначала поведение ограниченной ветви $W_{L_1}^U$. Она находится в обширной области хаоса. Пересечения многообразия блуждают по этой области. Заметим, что вследствие положительности ПЛ минимальные изменения (например, ошибки численного интегрирования) приводят к совершенно различным результатам. Так, при значении ПЛ, приблизительно равном 0.056 типичное время возвращения орбиты на сечение равно 4.5, но уже после 100 итераций нельзя быть уверенным в результатах вычислений с двойной точностью внутри хаотической зоны. Этот эффект еще более заметен на $W_{L_1}^U$, благодаря большим значениям главного собственного числа. Рис. 16 демонстрирует первые 30 пересечений $W_{L_1}^U$ (вверху слева) и первый миллион (вверху справа). Кажется, что пересечения полностью заполняют зону хаоса. Представляется очень сложным доказать существование, или несуществование гомоклинических к L_1 точек. Но, вероятно, можно подойти сколь угодно близко к такому пересечению. Видно также, что начальные точки близки к остаткам «восьмерочной» структуры, образованной сепаратрисами хилловской прямой п.о. Инвариантные многообразия этой орбиты показаны на среднем левом рисунке.

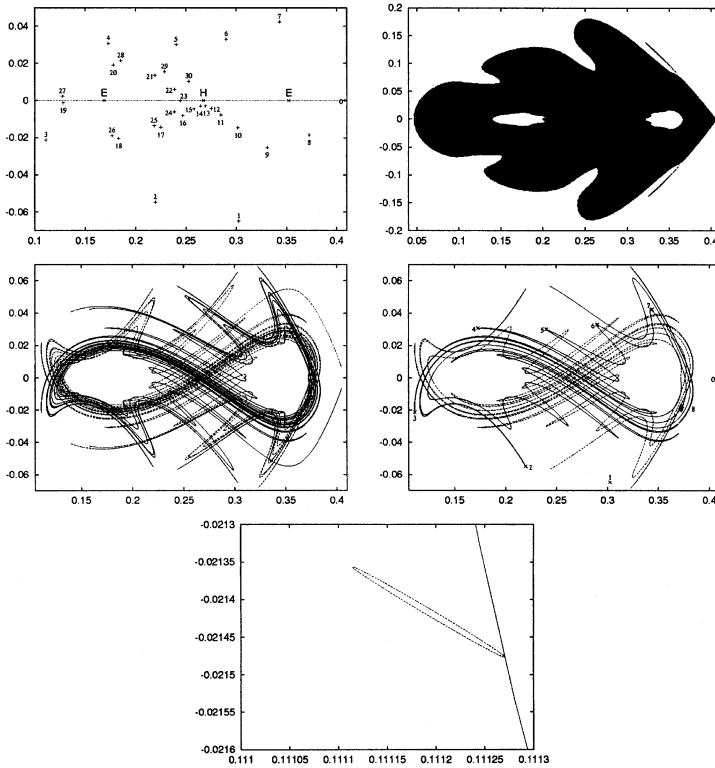


Рис. 16. График на плоскости Q_1, P_1 при $Q_2 = 0$. Слева сверху: первые 30 (пронумерованных) пересечений левой ветви $W_{L_1}^U$ при $h = 1/18$. L_1 располагается в нуле. Справа сверху: хаотическая зона при $h = 1/18$ (за исключением небольшой области с $Q_1 < 0$). Вычислены 10^6 итераций $W_{L_1}^U$ и симметричных точек в $W_{L_1}^S$. Посередине слева: часть $W_{p.o.Hd}^S$ (непрерывная линия) и $W_{p.o.Hd}^U$ (пунктирная линия) для прямых п.о. Хилла на уровне $h = 1/18$. Посередине справа: аналогичный график для $h = 1/18 + 2.7 \cdot 10^{-10}$. Крестиками обозначены первые 8 пересечений $W_{p.o.L_1}^S$ для того же уровня h . Ляпуновская п.о. расположена в точке с номером 0. Нумерование точек точно такое же, как и на верхнем левом рисунке. Внизу: Увеличение предыдущего рисунка около точки 3. Часть $W_{p.o.Hd}^S$ (непрерывная линия) и третье пересечение $W_{p.o.L_1}^U$ (пунктирная линия). Показано гетероклиническое касание многообразий

Теперь мы немного изменим h так, что L_1 перейдет в п.о. Для обнаружения гетероклинических пересечений между ляпуновскими п.о. вблизи L_1 и хилловской прямой п.о. достаточно очень малого изменения, $\Delta h \approx 2.7 \times 10^{-10}$. Это проиллюстрировано на среднем правом рисунке. Первые складки $W_{p.o.Hd}^{S,U}$ инвариантного многообразия хилловской прямой п.о. для этого значения h очень близки к изображенным на левом рисунке при $h = \frac{1}{18}$. Сечения $W_{p.o.L_1}^{U,S}$ являются очень маленькими «окружностями», очень близкими к предыдущему местоположению сечений $W_{L_1}^U$ (сравните точки, обозначенные цифрами 1,2,3,... с теми, которые изображены вверху слева). Увеличение, приведенное на нижнем рисунке, показывает существование касания. Если мы допускаем большее (меньшее) число обращений вокруг прямой хилловской п.о. (или связанных с ней эллиптических точек) до гетероклинического касания $W_{p.o.L_1}^U$ с частью $W_{p.o.Hd}^S$ фиксированной длины, то нужно использовать меньшие (большие) изменения h .

Следует также отметить, что при $h = \frac{1}{18}$ и вблизи этого значения зона хаоса избегает окрестности гравитирующего центра. Ни одна орбита, стартовая вблизи L_1 не может приблизиться к столкновению, так как существуют инвариантные торы, «защищающие» доступ к гравитирующему центру.

8. Глобализация $W^{U,S}$ для ляпуновских орбит и разрушение КАМ-торов

Для того чтобы уменьшить громоздкость обозначений, введем обозначения $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (x, y, p_x, p_y)$. На сечении Пуанкаре Σ , определенном равенством $y = 0$, ($H = h, p_y > 0$) п.о. являются неподвижными точками с координатами $(x, 0)$. Используя откорректированную по времени матрицу монодромии M , можно рассчитать дифференциал отображения Пуанкаре $D_z \mathcal{P}(x, p_x)(z = (x, p_x))$.

Сначала опишем простой, чисто численный метод вычисления инвариантных многообразий, неподвижных точек или п.о., который будет проиллюстрирован на примере п.о. Используя методы, представленные в [15], можно получить локальное аналитическое представление этих многообразий в виде рядов Тейлора по амплитуде п.о. и по некоторому параметру вдоль многообразия, коэффициенты которых суть ряды Фурье по углу вдоль п.о. Такое разложение также позволяет представить главное собственное значение и частоту, как функции амплитуды. По существу, выражения для

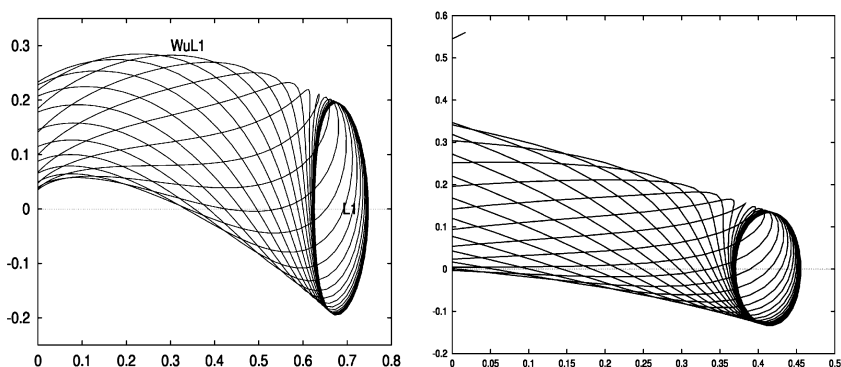


Рис. 17. Слева: неустойчивое многообразие ляпуновских орбит вокруг L_1 (в физических переменных) с начальным условием $x = 0.6265940$. Заметим, что оно довольно далеко от столкновений при прохождении около Земли. Справа: неустойчивое относительно столкновений многообразие (в ЛЧ-переменных, при $h = 0.07033103$) до первого столкновения. Соответствующее сечение Пуанкаре приведено на рис. 21е

орбиты и вариации частоты даются процедурой Линшtedта. Глобализация многообразий может быть получена введением требования инвариантности. Условие на вариацию собственного значения получается на уровне вариаций первого порядка.

Собственный вектор дифференциала отображения Пуанкаре v_u , соответствующий собственному значению $\lambda_u > 1$, является касательным к сечению $W_{p.o.}^U \cap y = 0$, то есть сечению неустойчивого многообразия. Это позволяет рассмотреть линейное приближение для $W_{p.o.}^U$. Рассмотрим сегмент $z + \varepsilon v_u$ в направлении v_u , где $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-p \log \lambda_S)$, $p \in [0, 1)$. При изменении p в промежутке $[0, 1)$ мы покрываем фундаментальную область $W_{p.o.}^U \cap y = 0$, что гарантирует правильное расположение образа этой области. Затем начальные условия на фундаментальной области продолжаютсся с помощью численного интегрирования гамильтоновых уравнений. Эта процедура дает численное приближение $W_{p.o.}^U$. Будем говорить о ней, как о численной глобализации инвариантных многообразий. Затем мы можем получить желаемое сечение Пуанкаре, которое необязательно совпадает с сечением, использованным при нахождении п.о.

Симметрия S_2 , заданная вторым уравнением (21) вместе с симметри-

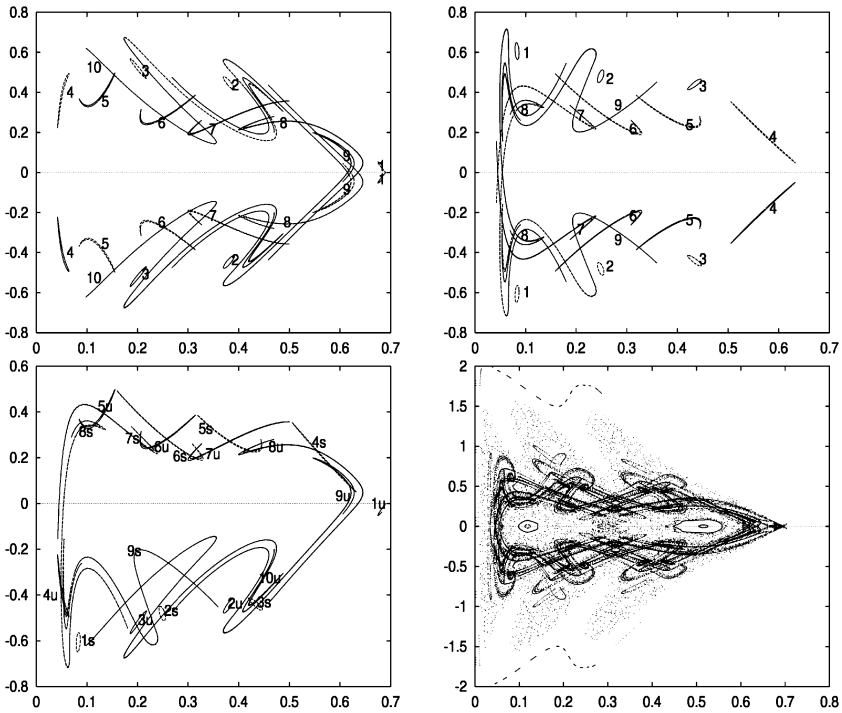


Рис. 18. Сечение Пуанкаре $y = 0$ устойчивых (пунктирная линия) и неустойчивых (сплошная линия) многообразий п.о. вокруг L_1 и L_2 : $c_H = 4.32639940$ ($h = 0.055562284$) при $x = \pm 0.69192741$ соответственно. Слева направо и сверху вниз: а) 10 срезов (1 — локальный срез) показывающих гомоклинические точки п.о. вокруг L_1 ; б) то же самое для п.о. вокруг L_2 (1 — первый нелокальный срез); в) гетероклинические точки; д) объединение четырех многообразий (число срезов удвоено) плюс часть близлежащей КАМ-структуры

ями, порожденными двойным накрытием ЛЧ-преобразования, могут быть просуммированы следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1: & \quad (x, y, p_x, p_y, t), & \text{Сечение: } & (y = 0, p_y > 0) & W_{L_1}^U; \\ g_2: & \quad (-x, y, p_x, -p_y, -t), & \text{Сечение: } & (y = 0, p_y < 0) & W_{L_1}^S; \end{aligned}$$

g_3 :	$(y, x, -p_y, -p_x, -t),$	Сечение:	$(x = 0, p_x < 0)$	$W_{L_2}^S;$
g_4 :	$(-y, x, -p_y, p_x, t),$	Сечение:	$(x = 0, p_x > 0)$	$W_{L_2}^U;$
g_5 :	$(y, -x, p_y, -p_x, t),$	Сечение:	$(x = 0, p_x < 0)$	$W_{L_2'}^U;$
g_6 :	$(-y, -x, p_y, p_x, -t),$	Сечение:	$(x = 0, p_x > 0)$	$W_{L_2'}^S;$
g_7 :	$(x, -y, -p_x, p_y, -t),$	Сечение:	$(y = 0, p_y > 0)$	$W_{L_1}^S;$
g_8 :	$(-x, -y, -p_x, -p_y, t),$	Сечение:	$(y = 0, p_y < 0)$	$W_{L_1}^U.$

Таблица строится с использованием генераторов g_2 и g_3 и содержит подробности, проанонсированные в разделе 7. Мы можем сделать четыре сечения каждого витка орбит, стартующих на фундаментальном интервале, описанном выше, для ляпуновских орбит вблизи L_1 . Затем мы автоматически размещаем каждое пересечение в соответствующий ему виток многообразия, полученный с помощью вышеприведенной таблицы. Любое пересечение, если потребуется, может затем быть переведено в физические переменные. В этом случае мы получим только две неподвижные точки и четыре инвариантных многообразия (см. рис. 3). Два примера неустойчивых многообразий показаны на рис. 17 в физических и ЛЧ-переменных. На рис. 17b показано неустойчивое многообразие, проходящее через солкновение.

На рис. 18 показаны 10 срезов сечением $y = 0$ малых ляпуновских орбит вблизи L_1 при $x = \pm 0.69192741$ и $h = 0.055562528$ ($c_H = 4.326386673$). Гомоклинические срезы $W_{p.o.}^U$ и $W_{p.o.}^S$ вблизи L_1 и L_2 показаны на рис. 18a и 18b соответственно. Заметим, что не существует гомоклинических пересечений на первых четырех срезах, которые имеют сходные характеристики благодаря вышеописанным симметриям. На рис. 18c изображены гетероклинические пересечения. Они начинаются раньше, чем в предыдущем случае — уже на втором срезе. Заметим, что срез, помеченный цифрой 1 вблизи оси x , является локальным срезом устойчивого и неустойчивого многообразий L_1 , одновременно такая же метка обозначает первое прохождение многообразий L_2 через сечение. И, наконец, на рисунке 18d показаны 20 срезов четырех многообразий с двумя КАМ-островами в центре и внешней КАМ-структурой. Удваивая число срезов, заметим, что срезы устойчивых/неустойчивых многообразий покрывают большую область. Три среза каждого из восьми исходных многообразий в ЛЧ переменных, из которых

составлен рисунок 18, представлены на рис. 19. ляпуновские орбиты, 1–4 соответствуют L_1 , L_2 , L'_1 и L'_2 соответственно. Первая цифра, присутствующая в метках, соответствует номеру многообразия, за ней следуют «u» (неустойчивый) или «s» (устойчивый) и номер отрезка. Как и ранее, срез 1 — локальный срез устойчивого и неустойчивого многообразий ляпуновской п.о. вблизи L_1 .

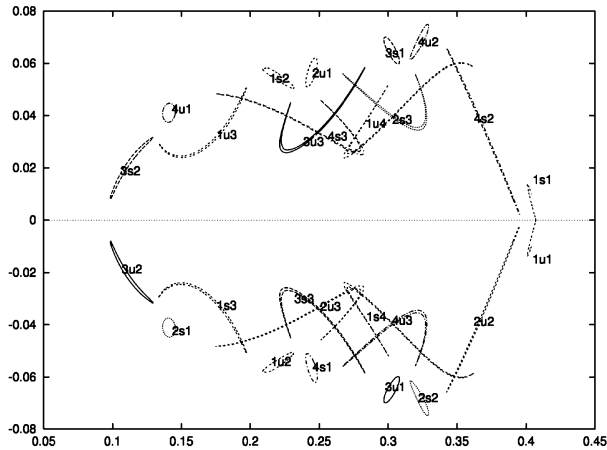


Рис. 19. Три среза четырех многообразий из рисунка 18. Первое число соответствует многообразию, а второе — пересечению. Рисунок приведен в ЛЧ-переменных

На рис. 20а и б показано одно и то же сечение Пуанкаре в физических и ЛЧ-переменных соответственно при $h = 0.057107310$ ($c_H = 4.2482189$). На рисунках приведены только прямые траектории. Ясно, что, не говоря уже о возможности численного расчета траекторий вблизи столкновений, регулярные переменные деформируют орбиты более подходящим образом. На рис. 21 а-ф показана эволюция рассмотренных ранее срезов и КАМ-структуры. Как ожидалось и как показано на рис. 18а-с, срезы устойчивых и неустойчивых многообразий становятся тоньше и длиннее с увеличением номера отрезка. При увеличении h (уменьшении c_H) первые срезы также становятся больше и больше и наконец пересекают друг друга. Говоря «первый срез», мы подразумеваем первый нелокальный срез, как на рис. 18. Так или иначе, вся структура срезов до некоторого значения энергии остается справа от главной оставшейся КАМ-структуры, заполняя стохастическую

зону в виде кленового листа. Некоторые типичные примеры показаны на рис. 21a-d.

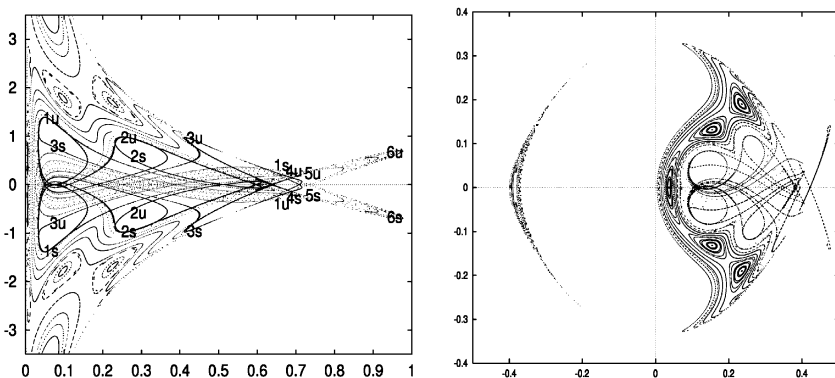


Рис. 20. Инвариантные многообразия при $c_H = 4.2482189$ ($h = 0.05710310$). Слева направо: а) в физических переменных присутствует 6 срезов неустойчивых и устойчивых многообразий; б) в ЛЧ-переменных 24 среза, распределенных по восьми многообразиям.

При малых значениях энергии инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия ляпуновских п.о. не связаны с этой стохастичностью, так как она появляется до размыкания КНС (см. рис. 4). Как было показано в п. 6, ее порождает другой механизм. Отметим некоторые ключевые факты для больших значений энергии. Когда устойчивые/неустойчивые многообразия проходят через столкновение, происходит смена топологии. Срезы начинают переходить на левую сторону сечения Пуанкаре и «охватывают» все сохранившиеся КАМ-торы. Это происходит при $h = h_{C_1}^* = 0.07033103$, рис. 21e. Неустойчивое многообразие до первого столкновения показано на рис. 17b. Конечно, орбиты столкновения появятся немногим ранее, если мы разрешаем существование больших частей $W_{p.o.L_1}^U$ (см. далее). Заметим, что второй срез многообразий, в форме языка, увеличивает часть, которая в конце концов идет на левую сторону сечения, к прохождению столкновения. На рис. 21f показаны многообразия ляпуновских п.о. при $h = 0.09305603$ после столкновения, когда они охватывают оставшиеся КАМ-торы. На самом деле, даже при меньших значениях энергии некоторая часть КАМ-структуры ограничена этими многообразиями. Мы имеем в виду острова,

рожденные вследствие бифуркации типа «вилки», которые сохраняются даже после размыкания КНС до того момента, когда они в конце концов будут «раздавлены» многообразиями ляпуновских орбит.

Другое интересное явление показано на рис. 21b и с. Стохастическая зона вновь реорганизуется и появляются острова периода пять. Вспомним из п. 6, что период 5 не представлен при $h < \frac{1}{18}$. Однако п.о. с наибольшим числом вращения вблизи хилловской (теперь уже неустойчивой) прямой орбиты, имеют ρ , очень близкое к $\frac{1}{5}$. Такой же период предсказывается формой кленового листа хаотической зоны при $h = \frac{1}{18}$. Устойчивые/неустойчивые многообразия должны испытать топологическое изменение, чтобы «предоставить место» 5-периодическим островам.

Вернемся к пересечениям п.о. вблизи L_1 со столкновениями. Они происходят при $h = h_{C_1}^*$, если мы ищем только первое прохождение $W_{p.o.L_1}^U$ вблизи гравитирующего тела (см. рис. 17 справа). Если разрешены дальнейшие прохождения, они произойдут при меньших, но требующих дальнейших рассмотрений значениях $h: h_{C_k}^*, k = 2, 3, \dots$. В пределе можно искать критическое значение h , для которого инвариантная кривая, проходя через начало координат (в ЛЧ-переменных), разрушается. Альтернативная процедура — поиск столкновительных орбит как инвариантных многообразий. Это может быть достигнуто с использованием некоторых других временных масштабов. Рассмотрим цилиндр орбит столкновений, само же столкновение является окружностью S^1 . Значения угла на S^1 соответствуют направлениям, вдоль которых происходит столкновение. После этого мы можем рассматривать упомянутые выше пересечения как гетероклинические орбиты из п.о. вблизи L_1 к столкновительному многообразию начала координат. Используя подходящие сечения, можно искать пересечения соответствующих многообразий.

9. Итоги, приложения и перспективы

Задача Хилла оказалась очень богатой и интересной задачей. Будучи вдали от интегрируемой (исключая движения, заключенные в среднего размера окрестности второго тела), большая часть изучения задачи должна быть проведена с помощью численных методов, ведомых геометрией динамических систем. Как обычно, устойчивые и неустойчивые многообразия инвариантных объектов (неподвижных точек, п.о., или, более глобально,

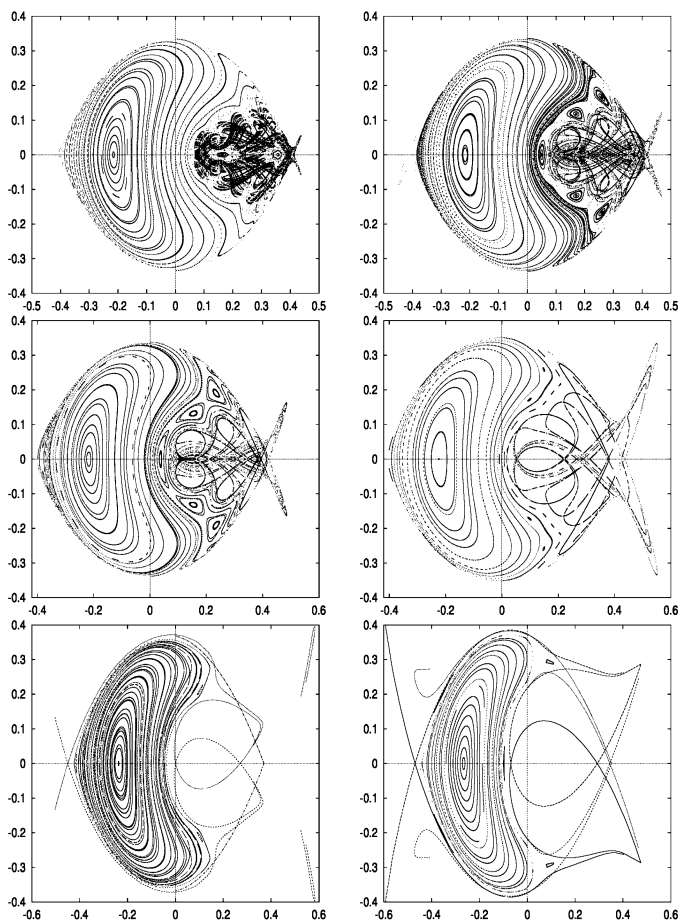


Рис. 21. Инвариантные многообразия в ЛЧ-переменных. Слева направо и сверху вниз: а) $h = 0.0557838$: хаотическая зона постепенно заполняется срезами; б) $h = 0.05640708$: срезы формируются в острова; в) $h = 0.05704225$; д) $h = 0.06157219$; е) $h = 0.07033103$: срезы неустойчивых/устойчивых многообразий меняются проходя через столкновения; теперь они окружают обратную КАМ-структуру; ф) $h = 0.09305603$ после столкновения инвариантного многообразия со вторым телом.

центральных многообразий в случае расслоения инвариантными торами) играют ключевую роль.

Просуммируем некоторые факты, полученные в настоящей статье. Описание дано в терминах ЛЧ-переменных, но может быть легко приведено к декартовым переменным.

- Для малых и средних значений энергии (до $h = 0.052$, недалеко от этого значения размыкается КНС) движение в ограниченной области очень регулярно: оно выглядит как почти интегрируемое. Для малых энергий хилловская прямая (**хппо**) и обратная (**хопо**) (или, что то же самое, «луноподобная» и «антилуноподобная») п.о. имеют только одно пересечение с поверхностью сечения $Q_2 = 0$, $\dot{Q}_2 > 0$. Все другие п.о. имеют период $O(1/2h)$.
- При больших и средних h свойство закручивания вблизи **хппо** теряется, число вращения вблизи п.о. проходит от локального минимума до локального максимума. Это определяет существование инвариантных кривых меандрового типа вблизи **хппо**. Кривые, связанные с резонансами периода 7, являются наиболее важными. С другой стороны семейство **хопо** ведет себя гладко и монотонно.
- Внутренний резонанс порядка 7 вокруг **хппо** (ближайший к ней) развивает заметную хаотическую зону вблизи $h = 0.053$. При этом значении бифуркация типа «вилки» уже произошла, но «восьмерка» хаотической зоны, созданная при этом, чрезвычайно узка. При увеличении h резонанс порядка 7 поглощает узкие резонансы с большими и меньшими числами вращения. В конце концов, он сливается с хаотической зоной в форме «восьмерки». При увеличении h до 0.055 создается обширная зона хаоса.
- Вблизи $h = \frac{1}{18}$, но все еще в ограниченной области, существует большая хорошо упорядоченная область вокруг **хопо**, покрывающая более половины всего портрета. Вокруг **хппо** присутствует большая хаотическая зона. Начало координат лежит в упорядоченной зоне, поэтому движение, идущее из стохастической зоны, защищено (инвариантными торами) от столкновений. Похожим образом торы предохраняют траектории от ухода на бесконечность после того, как КНС размыкается.
- При $h > \frac{1}{18}$ из-за инвариантных многообразий ляпуновских п.о. появ-

ляются гомо- и гетероклинические орбиты, соединяющие окрестность L_1 с самой собой и с окрестностью L_2 , и наоборот.

- Гетероклинические пересечения между **хппо** и ляпуновскими п.о. появляются сразу после размыкания КНС.
- Инвариантные многообразия ляпуновских п.о. ответственны за прогрессирующее разрушение КАМ-торов, существующих при $h = \frac{1}{18}$. Многообразия «задавливают» торы, и при некоторой критической энергии достигают начала координат. После чего движения, близкие к нему, не защищены более от ухода на бесконечность.
- Семейство **хопо** остается устойчивым при всех значениях h , кроме ровно двух значений, при которых происходит резонанс 3:1.

При рассмотрении разных уровней энергии одновременно устойчивые/неустойчивые многообразия семейства ляпуновских орбит формируют соответствующие многообразия полного центрального многообразия вокруг коллинеарных точек либрации. Так как $W^U(W_{L_j}^C)$ и $W^S(W_{L_j}^C)$ являются трехмерными, они имеют коразмерность 1 и, следовательно, могут действовать как локальные ограничители движения. Механизмы, объясненные выше, ответственны за начальное разрушение, ясно видного до размыкания КНС, КАМ-структуры при $h = \frac{1}{18}$. Когда, вместе с ляпуновскими п.о., рождаются инвариантные многообразия, они уже «знают», по продолжению, что они должны демонстрировать гомо- и гетероклинические явления. Более того, когда стохастическая зона частично организуется благодаря некоторым бифуркациям, устойчивые/неустойчивые многообразия должны приспособиться к этому факту, т.е. они должны выделить место для островов. Многообразия, которые достигают гравитирующего центра, играют ключевую роль.

Все полученные результаты легко переносятся на ОЗТТ благодаря трансверсальности. Более того, из (6) следует, что члены, ответственные за возмущение, не содержат никаких сингулярностей. Использование такой формулировки ОЗТТ позволяет рассматривать ее как возмущение задачи Хилла, аналитически зависящее от $\mu^{1/3}$. При рассмотрении ОЗТТ нужно также иметь в виду отсутствие симметрии между L_1 и L_2 . Они теперь будут находиться на различных уровнях h . В системе обозначений, использованной здесь, L_1 появляется при немного меньших энергиях, чем L_2 .

В частности, все сказанное выше предоставляет возможность расчета космических полетов вдоль орбит, которые могут показаться сложными для свободного тела. Малые маневры и стохастичность на подходящих уровнях энергии позволят рассчитывать быстрые перемещения при чрезвычайно малых затратах топлива. Номинальная орбита (которая используется для некоторых специальных целей) может быть достигнута от второго тела, используя устойчивые многообразия, если они проходят близко от него. Перемещения между различными номинальными орбитами могут производиться, используя гетероклинические пересечения, при практически нулевой стоимости. Мы обращаемся к [8, 9, 11] как к примерам работ, где подобного рода идеи использовались уже давно. Естественно, рассмотренная здесь модель очень проста. В реальных задачах необходимо рассматривать пространственную постановку, вместо плоской, и учитывать все важные возмущения.

С астрономической точки зрения, полученные результаты могут также объяснить движение (захват, временный захват, перемещения от одного резонанса к другому и т.д.) некоторых тел солнечной системы. Если они подходят с малыми скоростями (в синодических координатах) к окрестности L_1 или L_2 системы Солнце-планета, то на некоторое время они могут попасть в область, близкую к планете. Движение в этом случае описывается возмущением задачи Хилла. Более того, комбинация полученных результатов для области, близкой ко второму телу в ОЗТТ, с известными фактами о допустимости «экскурсии» вокруг первого тела (см. [13]), дают достаточно полное описание орбит на соответствующих уровнях h .

Представленная в статье методология может быть применена к широкому кругу задач. Приложение изложенного подхода в атомной физике можно найти в [19].

Мы хотим отметить два естественных направления развития исследований. Первое, это переход к ОЗТТ, принимая во внимание недостаток симметрии между L_1 и L_2 и соответствующих «внешних» движений, при которых безмассовая частица убегает из окрестности второго тела, обращается вокруг первого и возвращается ко второму. Следующее предлагаемое направление — это пространственная задача. Она требует замены ЛЧ-регуляризации другим инструментом, таким, как регуляризация Кустанхаймо-Штифеля [18]. Несмотря на это, наибольшие сложности для трехмерного случая представляет все же размерность и наличие трехчастотных резонансов. Роль, которую играют семейства п.о., должны дополнять семейства двумерных торов, которые являются канторовскими вместо

сплошных. Гетероклинические связи между гиперболическими трехмерными п.о. и двумерными торами вблизи L_1 и L_2 предоставляют большие возможности для расчета космических полетов. Также достаточную трудность представляет собой графическое представление результатов.

Литература

- [1] Broer H., Simó C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena*, Bul. Soc. Bras. Mat. **29**, 1998, 253-293.
- [2] Cincotta P., Simó C. *Conditional entropy: A Tool to Explore the Phase Space*, in *Proceedings IAU Colloquium 172, The Impact of Modern Dynamics in Astronomy*, ed. by J. Henrard and S. Ferraz-Mello, (in press) Kluwer, 1999.
- [3] Cincotta P., Simó C. *Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I*, Preprint, 1999.
- [4] Dullin H. R., Meiss J. D., Sterling D. *Generic Twistless Bifurcations*, Preprint, 1999.
- [5] Fontich E., Simó C. *The Splitting of Separatrices for Analytic Diffeomorphisms*, Erg. Th. & Dyn. Systems, **10**, (1990), 295-318.
- [6] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simó C. *Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem*, J. Diff. Eq., **77**, (1989), 167-198.
- [7] Gómez G., Llibre J., Martínez R. and Simó C. *Station Keeping of Libration Point Orbits*, ESOC Contract 5648/83/D/JS(SC), Final Report, 1985.
- [8] Gómez G., Jorba A., Masdemont J., Simó C. *Study refinement of semi-analytical halo orbit theory*, ESA Technical Report, 1991.
- [9] Henon H. *Numerical Stability of the Restricted Problem: V. Hill's Case: Periodic Orbits and their Stability*, Astron. Astrophys. **1**, (1969), 223-238.
- [10] Koon W. S., Lo M., Marsden J. E., Ross S. D. *Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in Celestial Mechanics*, Preprint, 1999.

- [11] Kummer M. *On Resonant Non Linearly Coupled Oscillators with Two Equal Frequencies*, Commun. Math. Phys. **48**, (1976), 53-79.
- [12] Llibre J., Martínez R., Simó C. *Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the Restricted Three Body Problem*, J. Diff. Eq., **58**, (1985), 104-156.
- [13] Neishtadt A. *The separation of motions in systems with rapidly rotating phase*, Prikladnaja Matematika i Mekhanika **48**, (1984), 133-139.
- [14] Simó C. *Analytical and numerical computation of invariant manifolds*, In D. Benest et C. Froeschle, editors, *Modern methods in celestial mechanics*, 285-330, Editions Frontières, 1990.
- [15] Simó C. *Invariant Curves of Perturbations of Non Twist Integrable Area Preserving Maps*, Regular and Chaotic Dynamics **3**, (1998), 180-195.
- [16] Simó C., Treschev D. *Evolution of the «last» invariant curve in a family of area preserving maps: The case of the separatrix map*, Preprint, 1998.
- [17] Stiefel E. L., Scheifele G. *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag (1971).
- [18] Stuchi T. J., Antunes A., Andreu M. A. *Helium-like atom as a classical three-body problem*, Preprint, 1999.
- [19] Szebehely V. *Theory of Orbits*, Academic Press (1967).

Уравнение Хилла с квазипериодической вынуждающей силой: резонансные полуострова, очаги неустойчивости и глобальные явления^{*}

Х. БРУР

Dept. of Mathematics
and Computer science
University of Groningen
PO Box 800, 9700 AV Groningen,
The Netherlands

К. СИМО

Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

Рассматривается уравнение Хилла $\ddot{x} + (a^2 + bp(t))x = 0$, где вынуждающая сила p является квазипериодической с двумя частотами. Выполнено геометрическое исследование некоторых резонансных полуостровов, содержащих очаги неустойчивости. Это явление в случае малого $|b|$ объясняется с помощью процедуры усреднения. Затем приводится численное исследование общего случая при произвольном b , где встречаются несколько интересных явлений. При их рассмотрении представлено подробное численное исследование и предположительное объяснение.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

В этой статье изучается уравнение Хилла с квазипериодической вынуждающей силой

$$\ddot{x} + (a^2 + bp(t))x = 0, \quad (1)$$

^{*}Broer H., Simó C. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena*, Bul. Soc. Bras. Mat. **29**, 1998, 253–293. Перевод Богатыревой Е. В., Килина А. А.

где a и b — параметры. Параметрическая вынуждающая сила $p = p(t)$ является квазипериодической функцией $p(t) = P(t\omega_1, t\omega_2)$ с рационально независимыми частотами ω_1, ω_2 и дважды периодической вещественной аналитической функцией $P : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Точнее говоря, мы главным образом рассматриваем частный случай

$$p(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t), \text{ или } P(\theta_1, \theta_2) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2). \quad (2)$$

Выберем $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \gamma$, где $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ — золотое сечение. Кроме того, будут рассмотрены некоторые возмущения (2). При конечных значениях параметра a исследуются два случая. Случай малых $|b|$, когда некоторые резонансные явления изучаются с помощью методов усреднения. И случай больших $|b|$, для которого приводятся численные результаты и их эвристические объяснения.

Уравнение (1) можно также записать как $-\partial^2 u / \partial x^2 - bV(x)u = a^2 u$, просто заменив x на u , а t на x . Это классическое уравнение Шредингера (см, например, [10]), где потенциал V заменяет квазипериодическую функцию $p(t)$, а a^2 играет роль энергии.

Уравнение второго порядка (1) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(a^2 + bP(\theta))x, \end{cases} \quad (3)$$

где $(\theta, (x, y)) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ и $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Заметим, что двумерный тор $\mathbb{T}^2 \times \{(0, 0)\}$, заданный равенством $x = y = 0$, инвариантен относительно квазипериодического потока с частотным вектором ω . Первая цель исследования заключается в изучении нормального линейного поведения этого инвариантного тора, в частности, его устойчивости и его приводимости к форме Флоке. Вторая цель — исследовать случай большого b , чтобы увидеть, какого рода интересные явления происходят при его увеличении.

Примечание. В случае необходимости мы можем расширить систему (3) до гамильтоновой системы с фазовым пространством $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{\theta, J, (x, y)\}$, где J канонически сопряжен θ . Несомненно, если мы возьмем в качестве гамильтониана $H(x, y, \theta, J) = \frac{1}{2}y^2 + \omega J + \frac{1}{2}(a^2 + bP(\theta))x^2$, то система принимает вид

$$\dot{\theta} = \omega, \quad J = -\frac{b}{2} \frac{\partial P}{\partial \theta} x^2, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(a^2 + bP(\theta))x.$$

1.2. Задачи и результаты

1.2.1. Резонансные полуострова

Сначала рассмотрим несколько существенных моментов классической теории уравнений Хилла и Матье с *периодической* вынуждающей силой. Уравнение Хилла (1) с периодической по времени вынуждающей силой p широко изучалось в литературе, см., например, [5,6], а также указанные там источники. Соответствующие работы с нелинейной параметрической вынуждающей силой см., например, в [2,7]. В этом случае на плоскости (a, b) образуется бесконечно много резонансных полуострова, начинающихся в *резонансных точках* $(a, b) = (\frac{k}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{N}$, в которых эти полуострова имеют более или менее острые «вершины». С внешней стороны каждого полуострова тривиальное 2π -периодическое решение $T^1 \times \{(0, 0)\}$, заданное равенством $x = y = 0$, устойчиво. Классический периодический случай уравнения Матье получается из (1) при $p(t) = \cos(t)$. В этом случае k -й резонансный полуостров имеет вершущку со степенью заостренности порядка $(k - 1)$. Заметим, что в периодическом случае, множество резонансов дискретно. На рис. 1 показаны резонансные полуострова для классического периодического случая.

В рассматриваемом квазипериодическом случае (1) с p , заданным уравнением (2), можно ожидать чего-нибудь подобного в отношении инвариантного двумерного тора $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ векторного поля (3). В этом случае множество резонансов

$$(a, b) = (\frac{1}{2}(k_1 + k_2\gamma), 0), (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$$

плотно заполняет ось a . Можно поинтересоваться, взаимодействуют ли «близкие» резонансные полуострова, при малых значениях $|b|$, или же они отделены вплоть до средних значений b . На рис. 2 показаны резонансные полуострова в случае, когда ρ задано выражением (2) с соотношением частот, равным золотому сечению.

1.2.2. Очаги неустойчивости

Еще одно интересное явление касается *очагов неустойчивости*. В периодическом случае они встречаются в возмущениях классических случаев Матье типа $p(t) = \cos(t) + c \cos(2t)$, где c — малый параметр. В действительности границы второго резонансного полуострова, возникающего при $(a, b) = (1, 0)$, пересекаются на расстоянии порядка $|c|$ от оси a , вследствие

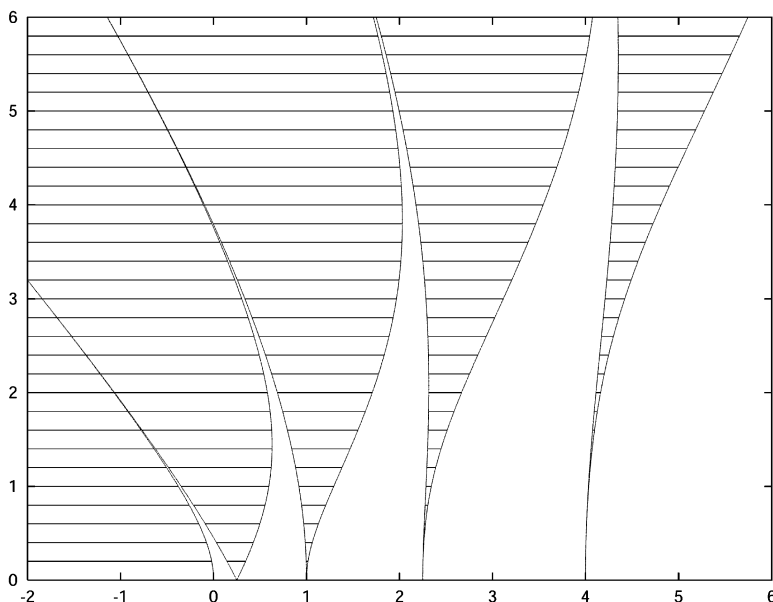


Рис. 1. Полуострова классического уравнения Матье на плоскости (a^2, b)

чего образуется очаг неустойчивости. В [5,6] дано качественное объяснение этого явления на основе теории особенностей. Здесь мы рассмотрим аналог такого возмущения с помощью следующей модификации уравнения (2):

$$p(t) = \cos(t) + \cos(\gamma t) + c \cos((k_1 + k_2 \gamma)t) \quad (4)$$

при фиксированных целых чисел k_1, k_2 и малом параметре c .

Приведем некоторый численный аргумент в пользу появления очагов неустойчивости. Резонансный полуостров с вершущкой в $(a, b) = (\frac{1}{2}(k_1 + k_2 \gamma), 0)$ имеет две границы, которые можно достаточно точно приблизить с помощью процедуры усреднения или нормализации, при которой величина $a - \frac{1}{2}(k_1 + k_2 \gamma)$ раскладывается в степенной ряд по b . В нормальной форме каждая граница устойчивости определяется двумя типами вкладов, один порожден членом $b(\cos(t) + \cos(\gamma t))$, а другой — $bc \cos((k_1 + k_2 \gamma)t)$. Кроме того, члены, являющиеся комбинациями обоих возмущений, могут

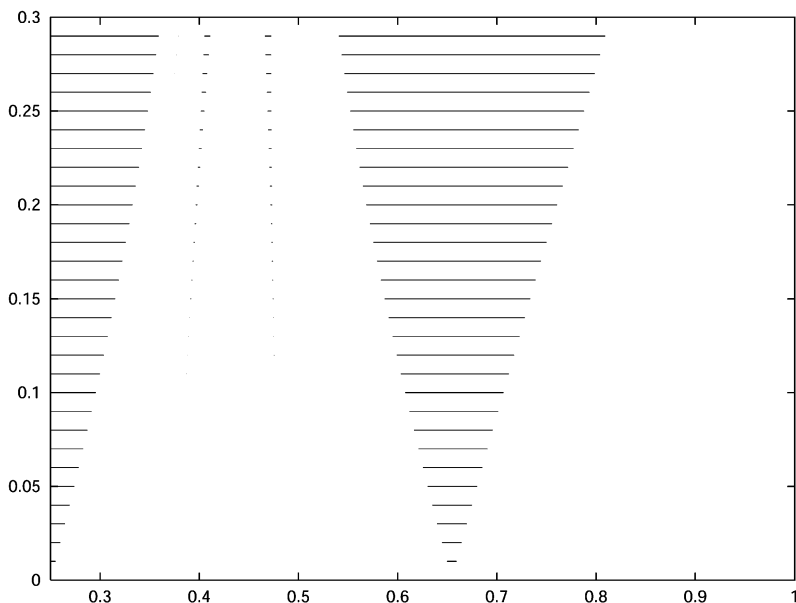


Рис. 2. Основные полуострова уравнения Хилла с квазипериодической вынуждающей силой $p(t) = \cos t + \cos(\gamma t)$ на плоскости (a^2, b)

играть важную роль. Все эти типы вклада могут иметь главные члены, зависящие от c и различных степеней b . Следовательно, они «сокращаются» при уменьшении значений b , создавая, таким образом, очаги неустойчивости. Этот процесс подобен тому, что случается в периодическом случае, см. [5,6]. На рис. 3 показан очаг неустойчивости для p , заданного уравнением (4), где $k_1 = 1, k_2 = 1$, а $c = 0.3$. Позже мы вернемся к анализу этих полуостровов, основанному на нормальных формах.

1.2.3. Дальнейшие задачи, численное исследование

Линейное уравнение (1) задает нормализованную линейную часть инвариантного двумерного тора $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Будем говорить, что (1) или, что то же самое, (3), *приводимо* (к форме Флоке), если с помощью линейной замены переменных x и y , квазипериодически зависящей от времени, его можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами. В периодическом

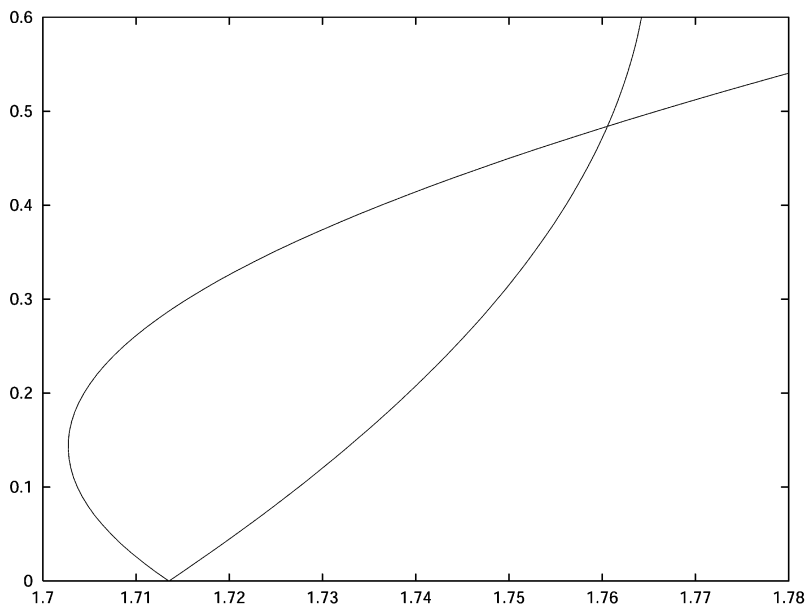


Рис. 3. Очаг неустойчивости уравнения Хилла с квазипериодической вынуждающей силой $p(t) = \cos t + \cos(\gamma t) + 0.3 \cos(1 + \gamma)t$ на плоскости (a^2, b)

случае эту задачу разрешает классическая теория Флоке. В квазипериодическом случае приводимость не всегда возможна. В [22, 10, 11], [15], [17, 18], [19], а также [3, 4, 8, 9] можно найти несколько результатов, относящихся к неприводимости в подобном или более широком смысле.

При больших значениях $|b|$ метод возмущений менее эффективен, и мы прибегаем к численному исследованию. Максимальный показатель Ляпунова и число вращения являются хорошими инструментами изучения уравнения (1) или же системы (3) при любом значении параметров (a, b) . С целью такого изучения мы вводим алгоритмический подход, который оказывается очень полезным на практике.

Сначала мы переформулируем задачу следующим образом. В периодическом случае вся информация относительно свойств (1) содержится в матрице монодромии, т.е. фундаментальной матрице, вычисленной при $t = T$ (T является периодом p), и которая при $t = 0$ равна единичной мат-

рице. Также можно использовать матрицу Флоке, т.е. логарифм матрицы монодромии, деленный на T . Сравните, например, [5,6].

В рассматриваемом случае (2) двум углам θ_1, θ_2 соответствуют частоты $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \gamma$, зафиксируем один угол (например θ_1 с периодом 2π). Тогда угол θ_2 будет принимать последовательные значения $\{2n\pi\gamma \bmod 2\pi\}, n \in N$. Поэтому матрица «монодромии» также будет зависеть от значения θ_2 в начале каждого временного интервала. Пусть $M(\theta)$ — фундаментальная матрица (1) с $p(t) = \cos(t) + \cos(\theta + \gamma t)$, начинающаяся с единичной матрицы при $t = 0$ и вычисленная при $t = 2\pi$. Далее мы определяем последовательность матриц $\{P_n\}$, используя преобразование косога произведения:

$$(P, \theta) \mapsto (M(\theta)P, \theta + 2\pi\gamma \bmod 2\pi) \quad (5)$$

начиная с $(P, \theta) = (I, 0)$. Таким образом, $P_n(\theta) = M(\theta)P_{n-1}(\theta), n \in N$, и все матрицы $P_n(\theta)$ симплектические. Отметим, что в периодическом случае для линейного отображения Пуанкаре P выполняется $P_n = P^n$.

Нам интересны «средние» свойства этой последовательности. Мы изучаем асимптотическое поведение (его существование) как свойства «расширения», так и «вращения». Пусть μ_n — главное собственное значение P_n . Тогда *максимальный показатель Ляпунова* определяется выражением

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mu_n|, \quad (6)$$

которое оказывается независимым от исходного значения θ . Аналогичным образом мы рассматриваем вращение, соответствующее P_n . При этом следует рассматривать вращение, не учитывая $\bmod 2\pi$. Для проведения эффективных вычислений достаточно начать с любого нормированного вектора (например, $(1, 0)$) и затем рассмотреть аргументы последовательности векторов, полученных из начального последовательным применением матрицы $M(2n\pi\gamma \bmod 2\pi)$. Пусть α_n — полученные значения аргументов (для их вычисления необходимо знать свойства последовательного действия матриц M на вектора). Тогда число вращения можно определить как

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \alpha_n, \quad (7)$$

и оно также не будет зависеть от исходного значения θ .

Примечания.

- 1) Мы приведем некоторые полезные советы по эффективным вычислениям, просто описав методы, использованные при приближенном

исследовании. Конкретные детали и дальнейшие уточнения см. в приложении.

Один из возможных методов состоит в интегрировании (1) на длительном промежутке времени (скажем, вплоть до $t = 2\pi \times 10^5$ или $t = 2\pi \times 10^6$). Однако этот процесс занимает много времени и, кроме того, может привести к сильному распространению ошибок. Поэтому для него требуются большая эффективность и точность.

- 2) Поскольку необходимо знать множество матриц $M(\theta)$, то для уменьшения вычислений используется интерполяционный метод. При этом вычисляются $M(\theta)$ для равноудаленных значений θ в интервале $[0, 2\pi)$, а для всех остальных значений $M(\theta)$ определяется с помощью интерполяции. Обычно число точек берется в пределах от 200 до 1000, а порядок полиномиальной интерполяции от 7 до 15.
- 3) Вычисление $M(\theta)$ для каждого из выбранных значений θ выполняется точно и быстро с помощью метода рядов Тейлора. Этот метод требует вычисления производных высокого порядка. Зная x и $\dot{x}$, значение $\ddot{x}$ и производные более высокого порядка можно получить используя уравнение (1) и правило Лейбница. Для эффективности вычислений необходимо определить оптимальные порядок разложения и длину шага. Типичный оптимальный порядок колеблется от 20 до 30.
- 4) Действуя описанным выше способом, можно легко получить до 10^6 итераций. Для проверки точности найденных оценок λ и ρ применяется следующий метод. Через каждые 10000 итераций оценивается значение λ и ρ . Полученная оценка считается хорошей, если три последовательных значения (например, после 130000, 140000 и 150000 итераций) равны друг другу с заданной точностью. Типичная величина точности колеблется в пределах от 10^{-5} до 10^{-7} . Более того, вычисление λ и ρ в зависимости от параметров проводится так, чтобы от шага к шагу их значения мало изменялись (это необходимо, чтобы не пропустить интересные явления). Во время проведения эксперимента шаг по a при необходимости уменьшался до 10^{-9} .

Первая теоретическая задача заключается в определении существования этих двух чисел. Ясно, что если (1) приводимо, то соответствующая матрица Флоке и приводящее преобразование непосредственно обеспечивают нам их существование. Для малого b множество значений a с неустойчивым

двумерным тором имеет число вращения из множества

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{2}(k_1 + k_2\gamma) \in \mathbb{R} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

и по определению точно соответствует резонансному полуострову. Теперь зададим малое значение b и рассмотрим изменение a . Несмотря на тот факт, что множество пересечений полуостровов плотно, мера его дополнения все еще относительно большая, что доказано, например, в [17]. Более конкретно, множество значений a , для которого приводимость невозможна, экспоненциально мало по b , при общих условиях. В действительности, результат даже шире, поскольку в [17] рассмотрена только приводимость к устойчивому или «эллиптическому» случаю, и, следовательно, резонансные зоны отброшены. Однако хорошо известно, что в гиперболическом случае приводимость всегда возможна. Эти результаты также подтверждаются в рамках КАМ-теории.

При малом b большая часть значений a должна соответствовать точкам за пределами резонансных полуостровов. Действительно, расчетные значения λ незначительно отличаются от нуля, что можно увидеть на рис. 4 слева, где для $b = 0.2$ построен график показателя Ляпунова в зависимости от a^2 в интервале $[0.25, 1]$. На рисунке справа показаны соответствующие значения числа вращения в том же интервале. Существенную роль, как видно из рисунков, играют только резонансы $(k_1, k_2) = (1, 0)$ и $(0, 1)$ (максимумы λ слева и в центре рисунка). Очень малый рост λ , связанный с резонансами $(-2, 2)$ и $(3, -1)$ обнаруживается для a^2 , близких к 0.382 и 0.477 соответственно. Ясно видно, что показатель Ляпунова положителен только в резонансных полуостровах, когда значение a принадлежит $\mathcal{R}$. Кроме «больших» ступенек, видимых на графике числа вращения, существует счетное множество шагов едва видимых ступенек (соответствующих каждому значению $\rho \in \mathbb{Q}$). На дополнении $\mathcal{R}$ значение λ равно нулю.

Заметим также, что из результатов работы [16] следует, что в некотором интервале по a возможна некоторая «почти» приводимость, равномерно по a . То есть уравнение (1) можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами, с экспоненциально малым по b остатком.

С другой стороны, для больших значений b (в нашем случае это начинает происходить при b около 0.5) и для $a \in [0.5, 1]$ мы также все еще можем говорить о «резонансных полуостровах». Здесь, как и выше, число вращения принадлежит $\mathcal{R}$, но утверждение о том, что точки вне этих полуостровов имеют $\lambda = 0$ уже не является истинным. На рис. 5 показаны те

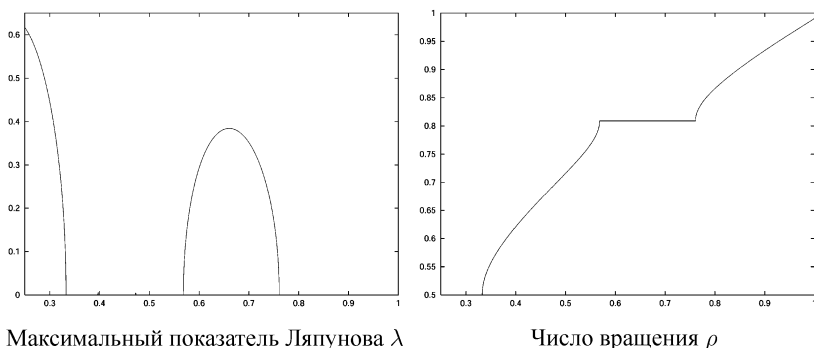


Рис. 4. Графики показателя Ляпунова и числа вращения для $b = 0.2$. Слева: максимальный показатель Ляпунова λ . Справа: число вращения ρ .

же данные, что и на рис. 4, но для $b = 0.6$. Здесь видно намного больше ступеней, и к тому же, за их пределами показатель Ляпунова отличается от нуля. На рис. 6 и 7 изображены увеличения малых областей изменения a для близких значений b , а дополнительные сведения будут приведены в разделе 5.

Очевидно, что для значений (a, b) за пределами полуостровов с $\lambda > 0$ приведение к форме Флоке невозможно, поскольку в матрицу 2×2 невозможно включить $\pm\lambda, \pm\rho$.

Интересное глобальное явление касается линии $\mathcal{C}$ в плоскости (a, b) , см. рис. 9 и 10. Здесь, по-видимому, происходит «коллапс резонансов». Более того, при фиксированном b слева от этой кривой точки пространства параметров, лежащие вне полуостровов, по-видимому, имеют положительное значение λ . Численные исследования происхождения коллапса см. в разделе 5. Краткое изложение см. также в выводах.

2. Резонансные полуострова

Задавая значения целых чисел k_1 и k_2 , мы теперь изучим окрестность резонанса $(a_0, b) = (\frac{1}{2}(k_1 + k_2\gamma), 0)$.

Определение 1. Резонансный полуостров, соответствующий вершине $(a_0, 0)$, определим как подмножество плоскости (a, b) , где число вращения $\rho(a, b)$ существует и равняется $\frac{1}{2}(k_1 + \gamma k_2)$.

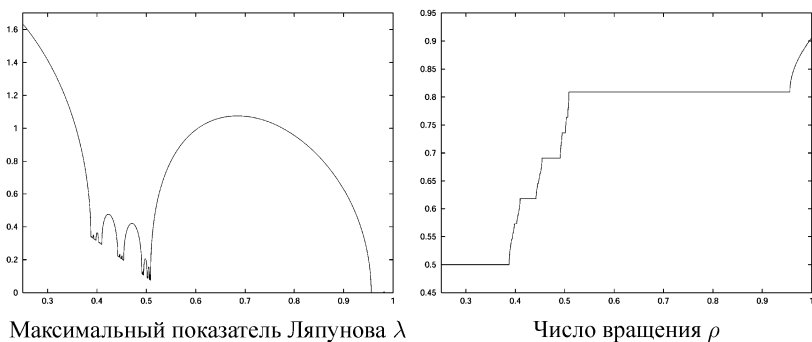


Рис. 5. Графики показателя Ляпунова и числа вращения для $b = 0.6$. Слева: максимальный показатель Ляпунова λ . Справа: число вращения ρ .

Проблема состоит в том, что для заданного малого b множество значений a , содержащихся в объединении всех полуостровов, плотно.

Слегка изменим обозначения (1), положив $a^2 = a_0^2 + \alpha_0$. Затем произведем стандартное масштабирование

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{a_0}}, y = \eta \sqrt{a_0}$$

и перейдем к комплексным координатам

$$\xi = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{iq + p}{\sqrt{2}}.$$

В новых переменных гамильтониан (3) записывается следующим образом:

$$H = a_0 i q p + \frac{q^2 - p^2 + 2i q p}{2} \left(\frac{\alpha_0}{2a_0} + \frac{b}{4a_0} \cos t + \cos(\gamma t) \right) \quad (8)$$

(сравните с [6]). Пусть J — переменная канонически сопряженная времени t , и введем обозначения $z_1 = \exp(it)$, $z_2 = \exp(i\gamma t)$. Тогда (8) можно записать как интегрируемую часть H_0 и возмущение H_1 :

$$H_0 = J + a_0 i q p,$$

$$H_1 = \hat{b}(q^2 - p^2 + 2i q p)(\hat{\alpha}_0 + z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}),$$

где

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{2\alpha_0}{b}, \quad \hat{b} = \frac{b}{8a_0}.$$

Для выполнения нормализации (усреднения) мы можем следовать, например, алгоритму Джорджилли–Галгани [13]. Периодический случай рассматривается аналогичным образом в [6]. Начиная с $H_{0,0} = H_0$ и $H_{1,0} = H_1$, рекуррентно вычисляем

$$H_{j,k} = \sum_{n=1}^k \frac{n}{k} [G_n, H_{j,k-n}], \quad j = 0, 1, \quad k > 0,$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает скобку Пуассона. Функции G_n определяются так, чтобы сократить зависимость от времени, насколько это возможно. Тогда преобразованный гамильтониан $K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots$, где $K_0 = H_{0,0}$ и $K_n = H_{1,n-1} + H_{0,n}$. Отметим, что «порядком» члена в гамильтониане можно считать порядок относительно вспомогательного параметра $\hat{b}$. Поэтому K_n содержит множитель $\hat{b}^n$.

Легко проверить, что действие $H_{0,0}$ на $q^r p^{-r} z^k$, где $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2}$, посредством скобки Пуассона равно

$$[H_{0,0}, q^r p^{-r} z^k] = q^r p^{-r} z^k i(a(2-2r) - (k_1 + \gamma k_2)).$$

Таким образом, все члены с $a(2-2r) - (k_1 + \gamma k_2)$, отличным от нуля (или, по крайней мере, не слишком малым), могут быть исключены из нормальной формы. Если a_0 выбран равным $k_1^* + \gamma k_2^*$ (где k_1^* и k_2^* , по предположению, полуцелые числа), тогда выбор $k_1 = \pm 2k_1^*, k_2 = \pm 2k_2^*$ создает резонанс (знак плюс при этом используется для $r = 0$, а минус для $r = 2$).

Эту процедуру можно реализовать автоматически. С помощью индукции можно проверить, что если $j + k = m$, тогда $H_{j,k}$ имеет вид

$$H_{j,k} = q^2 c_1 - p^2 c_2 + iqp(c_3 + c_4),$$

а соответствующая функция G_m

$$G_m = i(q^2 c_1 + p^2 c_2) + qp(c_3 - c_4),$$

где c_1 содержит члены с действительными коэффициентами вида $\hat{\alpha}_0^{m-s} z^k$ с $|k| = |k_1| + |k_2| = r$, а s и r имеют одинаковую четность. Члены в c_2 точно такие же, как и в c_1 , за исключением замены z^k на z^{-k} . Выражение c_3

подобно c_1 , но все члены имеют либо $k > 0$, либо $k_1 = 0$, $k_2 \geq 0$. Наконец, c_4 равно c_3 с точностью до замены z^k на z^{-k} .

Собрав все члены, появляющиеся в процессе нормализации, мы преобразовываем гамильтониан следующим образом (полностью аналогичную процедуру см. в [6]).

Теорема 2. (Комплексная нормальная форма). Для $a_0 = \frac{1}{2}(k_1 + \gamma k_2)$ с помощью канонической замены переменных гамильтониан $H = H_0 + h_1$ с точностью до аддитивного остатка можно привести к нормальной форме

$$NF = J + a_0 i q p + \text{coef}_1 i q p + \text{coef}_2 (q^2 z_k - p^2 z^k),$$

где $|k| + |k_1| + |k_2|$; $\text{coef}_1 = \hat{\alpha}_0 + r_1$, где r_1 — (действительная) функция, зависящая от $(\hat{b}, \hat{\alpha}_0)$ с множителем $\hat{b}$ в некоторой степени; $\text{coef}_2 = \hat{b}^{|k|} \times r_2$, где r_2 — (действительная) функция, зависящая от $(\hat{b}, \alpha_0)$, причем $r_2(0, 0) \neq 0$.

Порядок остатка по $\hat{b}$ больше, чем $|k|$.

Если мы опустим остаток и перейдем к переменным (u, v) :

$$u = q \exp(-a_0 i t), \quad v = p \exp(a_0 i t),$$

то получим систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= i \text{coef}_1 u - 2 \text{coef}_2 v, \\ \dot{v} &= -2 \text{coef}_2 u - i \text{coef}_1 v. \end{aligned} \quad (10)$$

Подводя итог, заметим, что формально все выглядит точно как в периодическом случае, см., например, [6]. В вершине полуострова граничные кривые имеют порядок касания $|k|$. Матрица Флоке задается уравнениями (10). Откуда также следует, что выражение $D = \text{coef}_1^1 - 4 \text{coef}_2^2$ определяет устойчивость: $D > 0$ — устойчивый случай, $D < 0$ — неустойчивый. Границы полуостровов задаются уравнением $\text{coef}_1 = \pm 2 \text{coef}_2$. Этот подход также доказывает, что если процедуру приведения к нормальной форме рассмотренным способом можно сделать сходящейся, то при $D < 0$ получаем $\lambda = 2\pi\sqrt{-D}$ и $\rho = \frac{1}{2}(k_1 + \gamma k_2)$, а при $D > 0$ — $\lambda = 0$.

Следующая гипотеза соответствует результатам численного моделирования, выполненного до сих пор. В будущем мы планируем исследовать ее далее, на основе оценок малых знаменателей и, возможно, включая резонансы и бифуркации, см. [1, 22, 10, 17, 18, 23].

Гипотеза 3. Выберем произвольную область значений a (например, $a \in [1/2, 1]$). Тогда существует значение $b_0 > 0$ такое, что для $|b| < b_0$ все

полуострова отделены друг от друга областями, в которых показатель Ляпунова равен нулю.

3. Очаги неустойчивости

Зададим p в виде (4), положив $p(t) = \cos(t) + \cos(\gamma t) + c \cos((k_1 + k_2 \gamma)t)$. Вычисление нормальной формы проводится как и раньше. Основное различие в вычислении вытекает из существования дополнительного члена в coef_2 , имеющего вид $c\dot{b}$, умноженного на некоторое ненулевое число. Граница полуострова как и прежде задается уравнением $D = 0$. Для заданного значения c (с соответствующим знаком, когда $|k|$ нечетный) находим нуль D для некоторого малого b . Полученное значение — это «верхний конец» очага, если $b > 0$, «нижний конец» при этом находится в нуле. Для $b < 0$ положение обратное. На рис. 3 приведена соответствующая картина. С увеличением c верхний конец очага поднимается, что было с успехом проверено вплоть до значения $c = 0.5$. При больших значениях начинает оказывать влияние «коллапс резонансов», описанный в следующем разделе.

Случай многих параметров с различными гармониками, т.е. замену члена c в (4) на сумму $\sum_{j=1}^m c_j \cos(k_{1,j}\theta_1 + k_{2,j}\theta_2)$, также можно изучить с помощью метода нормальных форм. Рассматривая конкретный резонанс, в конечном счете получаем полином по переменным $b, c_j, j = 1, \dots, m$. Соответствующим выбором значений c_j можно обнулить функцию D , что даст нам точку пересечения, соответствующую очагу неустойчивости. Как показано в [6], для любого (малого) значения b число нулей (включая нуль при $b = 0$) может достигнуть кратности резонанса $|k|$.

4. Глобальные свойства

В этом разделе представлены некоторые численные результаты для относительно больших значений параметра b .

4.1. Окрестность границ полуостровов

Вблизи границы полуострова показатель Ляпунова и число вращения, по-видимому, всегда ведут себя, как в случае малого b , в соответствии с нормальной формой.

Рассмотрим показатель Ляпунова: в пределах полуострова, когда a приближается к его границе, $|\lambda(a) - \lambda(a^*)|$ ведет себя как квадратный корень

$\sqrt{|a - a^*|}$, где $|a^*|$ обозначает соответствующую граничную точку (левую или правую) интервала. При малых b $\lambda(a^*)$ равно нулю. Однако даже для больших значений b , где $\lambda(a^*) > 0$, поведение $\lambda(a)$ имеет вид $c_L \sqrt{|a - a^*|}$.

По определению, в пределах полуострова ρ — постоянная величина. Пусть a^* будет левой граничной точкой интервала. Тогда для $a < a^*$ $\rho(a^*) - \rho(a) \sim c_R \sqrt{a^* - a}$. Если же a^* — правая граничная точка, то $\rho(a) - \rho(a^*) \sim c_R \sqrt{a - a^*}$ для $a > a^*$. Более того, соотношение между константами c_L и c_R соответствует теоретическим прогнозам, полученным в случаях, когда нормальная форма дает достаточно хорошее приближение.

На рис. 6 приведены увеличения некоторых областей вблизи границы полуострова.

4.2. Коллапс резонансов

Одним из загадочных явлений в динамике уравнений является «коллапс» резонансов, заключающийся в следующем. При увеличении параметра b границы различных полуостровов сближаются. При этом показатель Ляпунова за пределами резонансных полуостровов уже не нулевой, а положительный. Кроме того, изменение ρ в зависимости от a , по-видимому, сильнее, чем просто квадратный корень. На рис. 7 показаны λ и ρ при $b = 0.51, 0.54, 0.57$ и 0.60 . Особенно необычно это явление в области значений a^2 в интервале между $0,38$ и $0,52$.

Точные вычисления позволяют обнаружить и измерить ширину (ширина = правая граница — левая граница) всех полуостровов шириной более 10^{-7} при различных значениях b . На рис. 8 приведен график меры дополнения резонансных полуостровов в области $a^2 \in [0.35, 0.75]$ в зависимости от b . Конечно, мера дополнения зависит от выбранной области a . В случае более коротких интервалов для значений b , при которых интервал лежит за точкой пересечения линия коллапса резонансов (см. далее), мера дополнения уменьшается до значений, очень близких к нулю.

При рассмотрении показателя Ляпунова мы видим следующее. За пределами «выпуклостей» полуостровов значения λ , по-видимому, лежат на прямой линии (для тех b , при которых λ положителен). Эта линия пересекает ось $\lambda = 0$ при некотором a , зависящем от текущего значения b . Введенную таким образом кривую можно рассматривать в качестве точного определения *линии коллапса*. При значениях (a, b) выше этой линии, показатель Ляпунова, очевидно, положителен даже за пределами резонансных полуостровов, тогда как ниже линии за пределами полуостровов он равен нулю. На рис. 9 изображен общий вид резонансных полуостровов и оценка

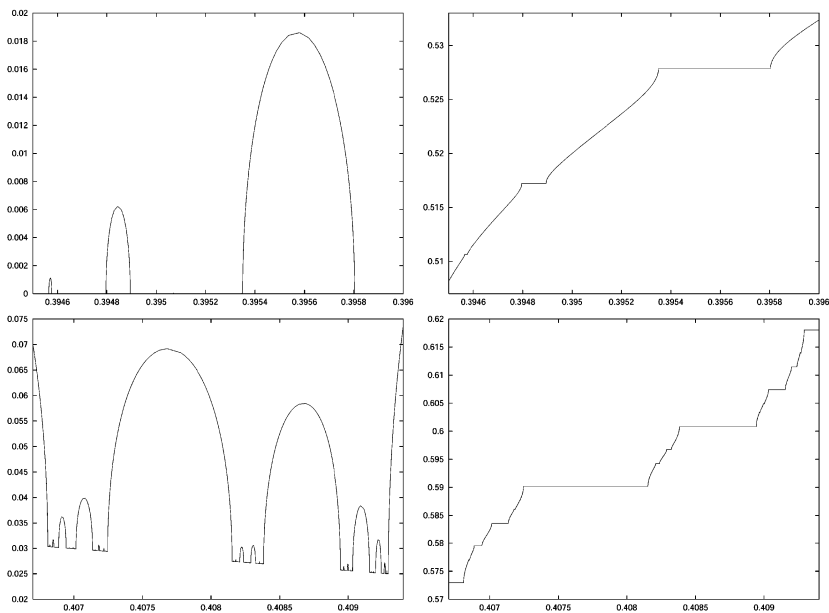


Рис. 6. Графики λ и ρ около границы полуострова. Слева расположены графики λ . На графике сверху вне полуострова $\lambda = 0$, а в его пределах — положительна. Внизу показана ситуация, когда за пределами полуострова λ все еще положительна. На графиках справа показаны соответствующие значения ρ , где ясно видно поведение, типичное для квадратного корня. График сверху соответствует значению $b = 0.5$ и диапазону $a^2 \in [0.3945, 0.396]$. Нижний график соответствует $b = 0.54$ и диапазону $a^2 \in [0.4067, 0.4094]$

положения линии коллапса при $a^2 \in [0.25, 1]$ и $b \in [0, 1]$. На рис. 10 показана увеличенная область $a^2 \in [0.3916, 0.4104]$, $b \in [0.5, 0.57]$ предыдущего рисунка, на которой показаны все резонансы порядка меньше или равного 101 в этом a -диапазоне. Слева направо (включая большую резонансную зону в начале рисунка слева): $(1, 0)$, $(-54, 34)$, $(35, -21)$, $(-20, 13)$, $(14, -8)$, $(-41, 26)$, $(48, -29)$, $(-7, 5)$, $(-62, 39)$, $(27, -16)$, $(-28, 18)$, $(61, -37)$, $(6, -3)$, $(-49, 31)$, $(40, -24)$, $(-15, 10)$, $(19, -11)$, $(-36, 23)$, $(53, -32)$, $(-2, 2)$.

Закончим этот раздел еще двумя наблюдениями. Первое состоит в том, что резонансные полуострова становятся уже при возрастании b относи-

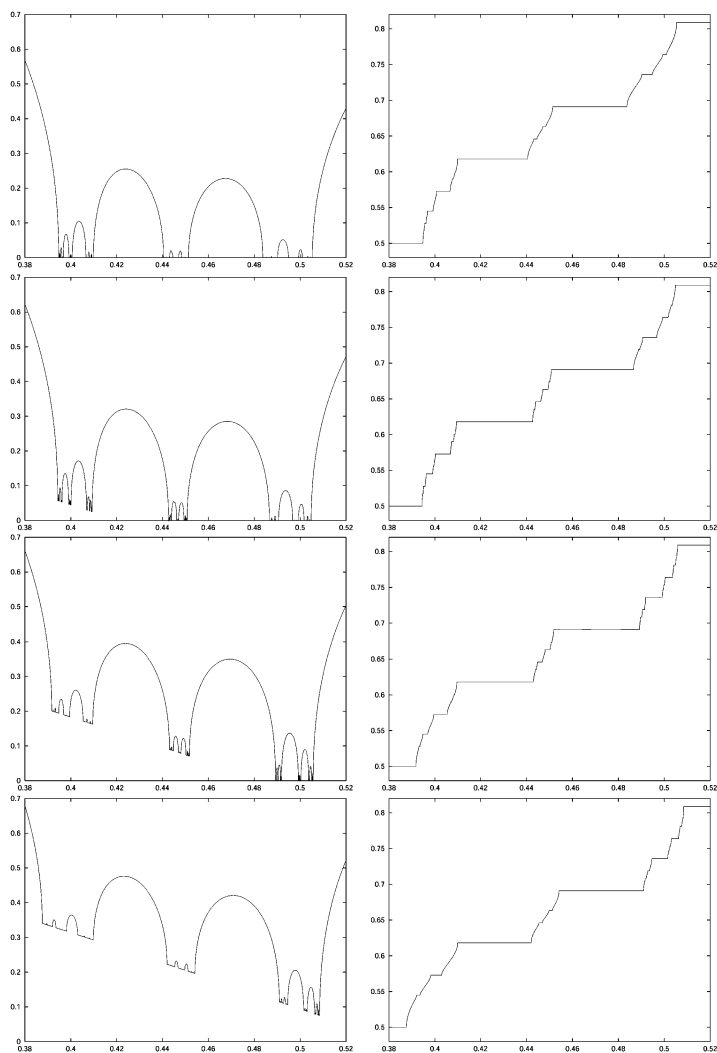


Рис. 7. Графики показателя Ляпунова λ (рисунки слева) и числа вращения ρ (рисунки справа) при $b = 0.51, 0.54, 0.57$ и 0.60 (сверху вниз)

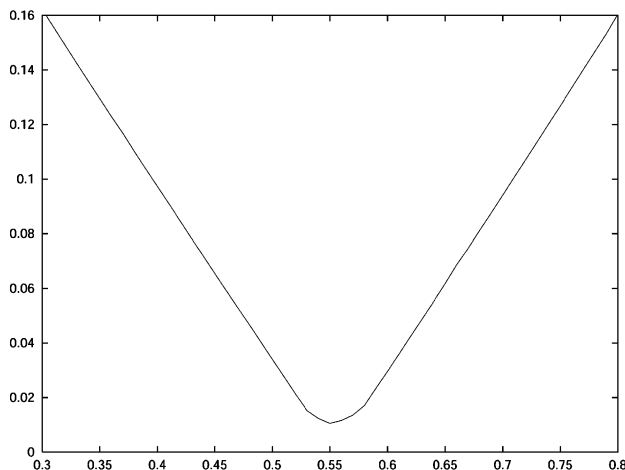


Рис. 8. Оценка меры дополнения множества резонансов в зависимости от b

тельно линии коллапса. Во-вторых, при малых b ширина резонансов подчиняется определенной ранее зависимости от порядка резонанса. Если мы сравним один резонанс с другим, то, по-видимому, они уменьшаются экспоненциально в зависимости от порядка. Кроме того, коэффициенты c_L в законе квадратного корня или максимумы выпуклостей λ ведут себя подобным же образом.

Вблизи коллапса данные наблюдения уже не верны. В этом случае ширина резонансов равна $1/(\text{некоторая степень порядка резонанса})$, причем эта степень уменьшается приблизительно до 2, при приближении к коллапсу. Более точные данные, соответствующие рисунки, а также о том, как более подробное численное исследование выявляет дополнительные интересные характеристики, см. в следующем разделе.

5. Подробное численное исследование

В этом разделе мы приведем подробное объяснение явлений вблизи линии коллапса резонансов. Пытаясь сделать это изложение понятнее, мы приводим здесь результаты, касающиеся трех различных аспектов: фазового пространства (после исключения очевидной неустойчивости), пространства Фурье и свойств λ и ρ . В приложении подробно описаны все вычисления.

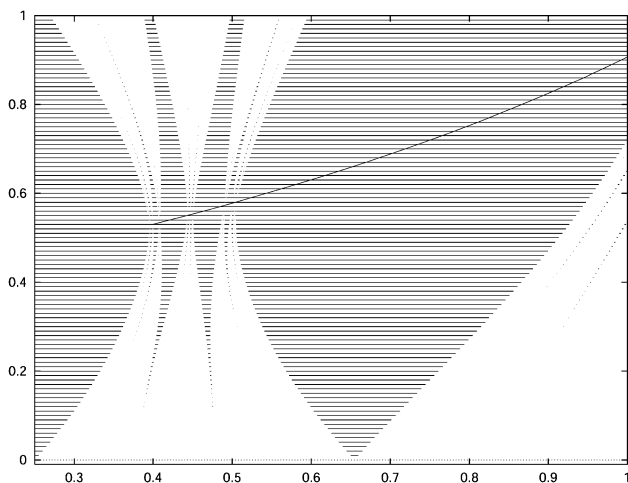


Рис. 9. Резонансные зоны и линия коллапса

5.1. Фазовое пространство. Исключение неустойчивости

Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda = 0$, а ρ — не резонансное. Мы изучаем поведение результата итераций в зависимости от их количества после некоторого переходного процесса или, если говорить геометрическим языком, множество первых столбцов матриц P_n (см. далее (5)). Результаты для случая $(a, b) = (0.408, 0.4)$ показаны на рис. 11а. Они доказывают явное квазипериодическое поведение, соответствующее проекции двумерного тора. В действительности существует три основных частоты: 1, γ и ρ . Однако, поскольку мы изучаем итерации при значениях t , кратных 2π , то частоту 1 можно исключить, оставив только две частоты γ и ρ . В рассматриваемом случае $\rho \sim 0.6032880958$, и вероятность того, что выбор ρ таков, что $(1, \gamma, \rho)$ удовлетворяет диофантову условию, равна единице.

Для изображения случаев $\lambda > 0$ сначала мы должны исключить неустойчивость. Это достигается введением *отмасштабированных* матриц $\hat{P}_n = \exp(-n\lambda)P_n$, в которых используется оценочное значение λ (найденное ранее) и значения n после переходного процесса. На рис. 11b приведена инвариантная кривая (сечение 2-мерного тора) при $(a^2, b) = (0.413, 0.4)$. Результаты для $b = 0.6$, $a^2 = 0.408$ (нерезонансный) и $a^2 = 0.413$ (резонансный) приведены на рис. 11c и d соответственно. На рисунке d) поведение

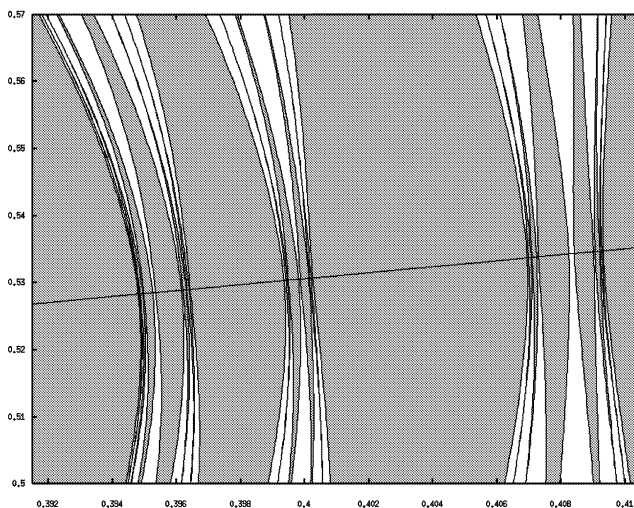


Рис. 10. Увеличение предыдущего рисунка

подобно случаю б), за исключением того, что инвариантная кривая имеет более сложную форму и не проектируется на плоскость, как простая замкнутая кривая. Случай с) отражает некоторое неприглядное множество точек, далеких от квазипериодичности. Мы ограничили показываемую область, чтобы лучше показать центральную часть. Следует заметить, что значения $b = 0.4$, находятся ниже линии коллапса резонансов, тогда как значения $b = 0.6$ — выше этой линии.

Интересно также исследовать данные, соответствующие нерезонансному случаю выше линии коллапса. Несомненно в этом случае явно присутствуют несколько пиков. Для более наглядного представления мы построили график величины $\sum_{i,j=1,2} (\hat{P}_N)_{i,j}^2$ для большой области итераций. Пики, появляющиеся на рис. 12 с амплитудой больше 0.6×10^9 , расположены при значениях n (пропуская переходный процесс), равных 78306, 78683, 153708 и 200076. Все разности между этими числами (377, 75025 и 46368) равны числам Фибоначчи. Также разности между пиками, превышающими нижний порог, могут быть равны сумме или разности двух относительно больших, но непоследовательных чисел Фибоначчи. Например, ближайший пик, больше 10^8 , после самого большого на графике наблюдается при раз-

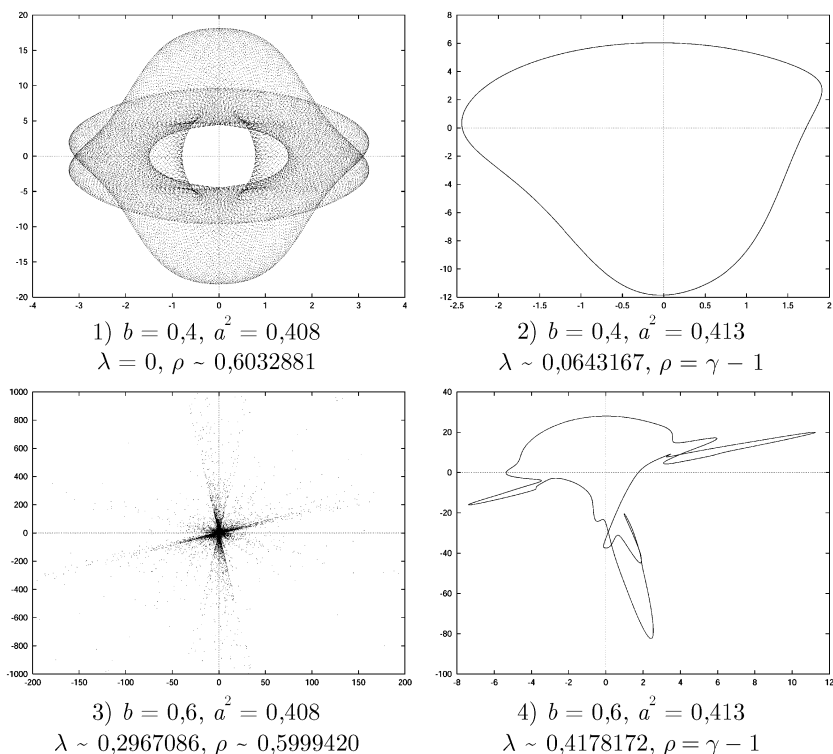


Рис. 11. Графики итераций первого столбца матриц P_n (случай b) или матриц $\hat{P}_N$ (остальные случаи). Во всех случаях, за исключением а), было сделано 2^{14} итераций после переходного процесса. В случае а) это число составляет 2^{15} . Переходный процесс длится 10^6 итераций. Показаны также оцененные значения λ и ρ

ности двух таких чисел $\triangle n = 70844 = 75025 - 4181$. Заметим, что несмотря на это резко отклоняющееся поведение матриц $\hat{P}_n$, матрица $M(\theta)$ достаточно регулярна. На рис. 12 мы также отобразили поведение ее составляющих в зависимости от θ . Кажется, что некоторая малая амплитуда гармоник высокого порядка $M(\theta)$ «усредняется не полностью» под действием суперпозиции.

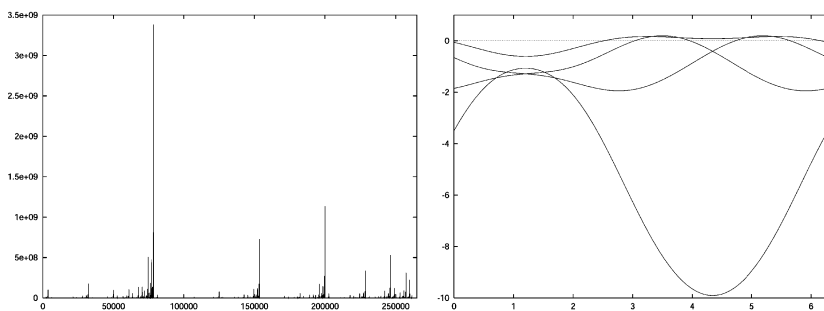


Рис. 12. Слева: пики суммы квадратов элементов отмасштабированной матрицы для 2^{18} итераций следующих после переходного процесса в 2×10^6 итераций. Значения параметров равны $(a^2, b) = (0.408, 0.6)$. Справа: матрица монодромии как функция θ для $\theta \in [0, 2\pi]$. При $\theta = 0$ элементы матрицы расположены в следующем порядке сверху вниз — $(1,2)$, $(1,1)$, $(2,1)$ и $(2,2)$.

5.2. Фурье-анализ

Для более глубокого понимания структуры данных, изложенных в предыдущем параграфе, мы выполним Фурье-анализ отмасштабированных матриц. На рис. 13 показаны результаты соответствующего анализа одного элемента отмасштабированных матриц для каждой пары параметров, изображенных на рис. 11. Эти результаты представляют собой зависимости нормы гармоник элемента $(2,1)$ от ее номера. Число гармоник равно 2^{17} , и последняя гармоника соответствует частоте $\frac{1}{2}$. Заметим, что частоты показаны по модулю 1, а частоты в промежутке $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ подставляются вместо соответствующих $1 - \nu$.

В случае, когда система приводима, выполненный таким образом анализ включает как частоты редуцирующей замены переменных, так и «собственную частоту» приведенного уравнения. В резонансном случае «собственная частота» имеет вид $(k_1 + k_2\gamma)/2$ с подходящими значениями k_1 и k_2 .

Легко видеть, что нерезонансные случаи выше линии коллапса, по-видимому, далеки от квазипериодических. Для получения количественной меры квазипериодичности в этом случае было выполнено следующее исследование. После проведения Фурье-анализа мы искали «главные гармо-

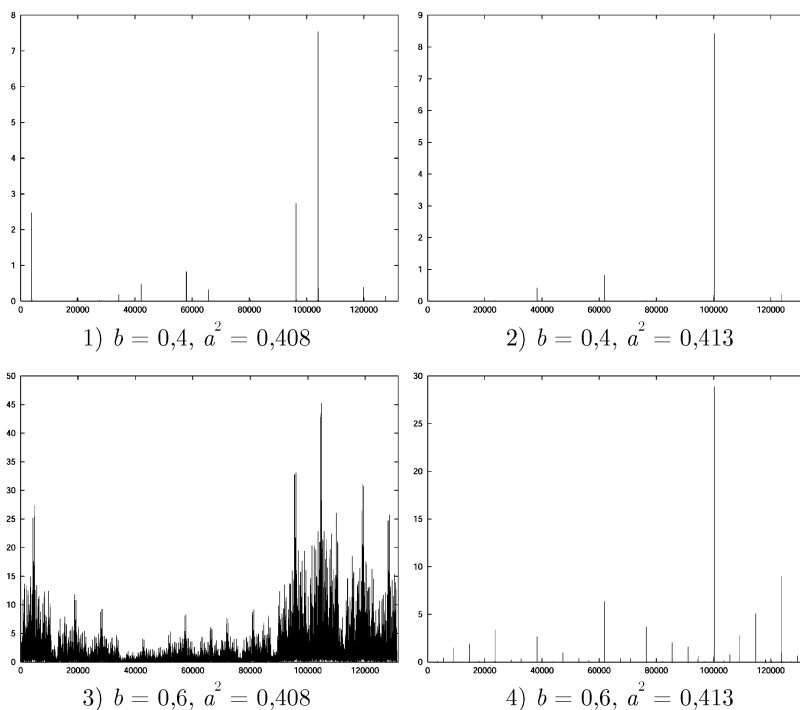


Рис. 13. Результаты Фурье-анализа, соответствующие элементу $P\hat{P}_n)_{2,1}$ для каждого из случаев на рис. 11. Все случаи, за исключением с), показывают квазипериодическое поведение. Число проанализированных итераций равно 2^{18}

ники». Пусть $A_{\max}$ максимальная амплитуда гармоник. Зададим «масштаб» величины гармоник следующим образом: будем говорить, что гармоника имеет «порядок» m , если соответствующая ей амплитуда лежит в интервале $[0,8^{m+1}, 0,8^m] \times A_{\max}$, где в качестве подходящего варианта было выбрано значение основания степенной функции, равное 0.8. Во время Фурье-анализа мы выбирали значение m^* так, чтобы число гармоник порядка $m \leq m^*$ было меньше ста, а число гармоник порядка $m \leq m^* + 1$ — больше ста. Большое значение m^* означает быстрое уменьшение величины гармоник, тогда как малое значение означает «приблизительность» функции. На рис. 14 приведены значения m^* в зависимости от a для двух областей

значений a и четырех различных значений b . Эта зависимость еще раз свидетельствует о различиях поведения выше и ниже линии коллапса.

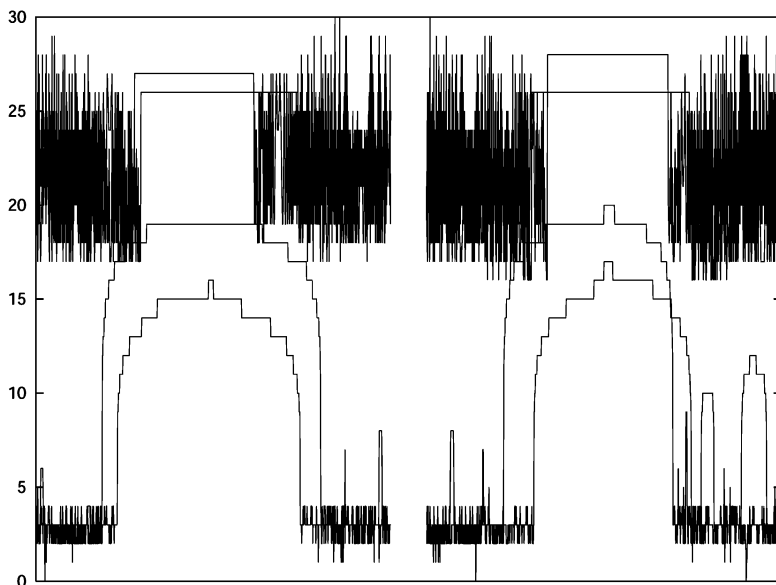


Рис. 14. Мера «приблизительности» Фурье-анализа отмасштабированных матриц. Низкие значения означают более приближенное поведение. Дополнительные объяснения см. в тексте. Приблизительно линии сверху вниз соответствуют значениям $b = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. Для каждого значения b приведены две области значений a^2 , содержащие резонансы $(-2, 2)$ и $(3, -1)$. Это области равны $[0.395, 0.4]$ и $[0.47, 0.475]$ для $b = 0.2$, $[0.408, 0.430]$ и $[0.455, 0.478]$ для $b = 0.4$, $[0.408, 0.444]$ и $[0.452, 0.494]$ для $b = 0.6$ и $[0.402, 0.427]$ и $[0.473, 0.504]$ для $b = 0.8$. Кроме того, для последних трех значений b были опущены некоторые подобласти вблизи резонансов и там, где m^* — постоянная величина. В каждой области рассмотрены 1000 значений a

Еще одна интересная особенность — это поведение главной гармоники в зависимости от a при постоянном b . На рис. 15 приведены некоторые типичные случаи при рассмотрении элемента $(2, 1)$ матрицы $\hat{P}_n$. Пусть $A_{\max}$ — максимальная амплитуда различных гармоник, соответствующих некоторой частоте $\nu_{\max}$. За некоторыми исключениями $\nu_{\max} = \rho$. Только в несколь-

ких случаях равенство не выполняется, и тогда $A_{\max}$ немного больше A_ρ , соответствующего этому конкретному элементу матрицы. Поэтому для сохранения когерентности мы будем вычислять A_ρ в зависимости от a . Во всех случаях ниже, выше либо через линию коллапса, в пределах резонансов поведение A_ρ является гладким. При подходе к концевым точкам резонанса возникает два различных случая: либо амплитуда имеет крутой пик в концевой точке, либо уменьшается до очень малых значений. За пределами резонансов, если $\lambda > 0$, она ведет себя сильно нерегулярно. Если же $\lambda = 0$, то появляются лишь небольшие нерегулярности. На рис. 15 проиллюстрированы некоторые частные случаи ниже линии коллапса, выше и чее.

5.3. Поведение λ и ρ вблизи линии коллапса

На рис. 7 были показаны оценки λ и ρ вблизи линии коллапса. Некоторые их дополнительные подробности показаны на рис. 16, где сделаны последовательные увеличения рисунков. На рисунке также дано обоснование эффекта «коллапса». Большой резонанс на этих рисунках слева соответствует мультипликаторам $k_1 = 1, k_2 = 0$ и, следовательно, $\rho = 0.5$. Заметим, что в последнем ряду рисунков 16 значения b выбраны таким образом, чтобы за пределами резонансов значение λ было положительным.

Для размещения точки на линии коллапса мы выбрали простейший случай, когда значения (a, b) соответствуют пересечению правой границы резонанса $(1, 0)$ с линией коллапса. На рис. 17 показан график λ при $b = 0.5284$ в области $a^2 \in [0.39479, 0.395]$ такой, что первое «касание» λ с нулем происходит при ρ , несколько большем $1/2$. Значения λ за пределами резонансов, по-видимому, очень близки к кривой, которая, в свою очередь, довольно близка к прямой линии. Ее график также построен на рисунке и позволяет с помощью экстраполяции получить значение $a = a_c(b)$, при котором происходит «касание». Построение графика $\rho(a_c(b), b) - 1/2$ (или некоторой эквивалентной величины) в зависимости от b (снова см. рис. 17) позволяет спрогнозировать значение b , для которого $\rho(a_c(b), b) = \frac{1}{2}$. Найденные указанным способом значения равны $(a^2, b) \sim (0.39479983, 0.528315)$. Подобный же процесс можно использовать для любого резонанса.

После нахождения значений (a^2, b) появляется возможность изучить поведение резонансов. По-видимому, особо важное значение имеют два вопроса:

- Зависимость максимального значения резонансных выпуклостей λ от

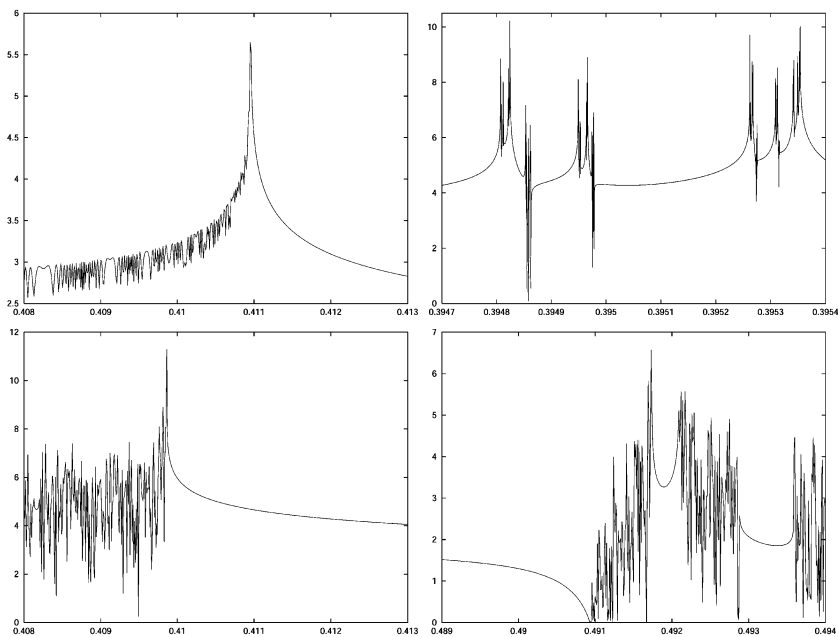


Рис. 15. Поведение амплитуды A_ρ гармоники, частота которой совпадает с ρ при Фурье-анализе $(\tilde{P}_n)_{(2,1)}$. Вверху слева: $b = 0.4$, ниже линии коллапса. Вверху справа: $b = 0.528$, очень близко к линии коллапса. «Нерегулярности» возникают из-за большого числа резонансов. Внизу: $b = 0.6$, выше линии коллапса. За пределами резонансных зон видны сильные нерегулярности. Длина шага по a^2 равна 10^{-5} , за исключением случая $b = 0.528$, где было использовано значение 10^{-7} . Для того чтобы лучше отобразить и малые, и большие составляющие одновременно, по вертикальной оси откладывается величина $\arcsin(A_\rho)$ вместо A_ρ

соответствующей частоты при заданном значении b . На рис. 18 изображена такая зависимость для $b = 0.5284$ и частот справа от $\frac{1}{2}$. Область a выбрана так, что мы находимся около линии коллапса. На рисунке мы видим четкую организацию структуры этого множества. Высоты ведут себя почти линейно относительно некоторой предельной частоты. Также видны подобные структуры на меньших масштабах. Это происходит при пересечении линии коллапса. Для значений параметров, не слишком близких к этой линии, вторичные выпуклости едва видны.

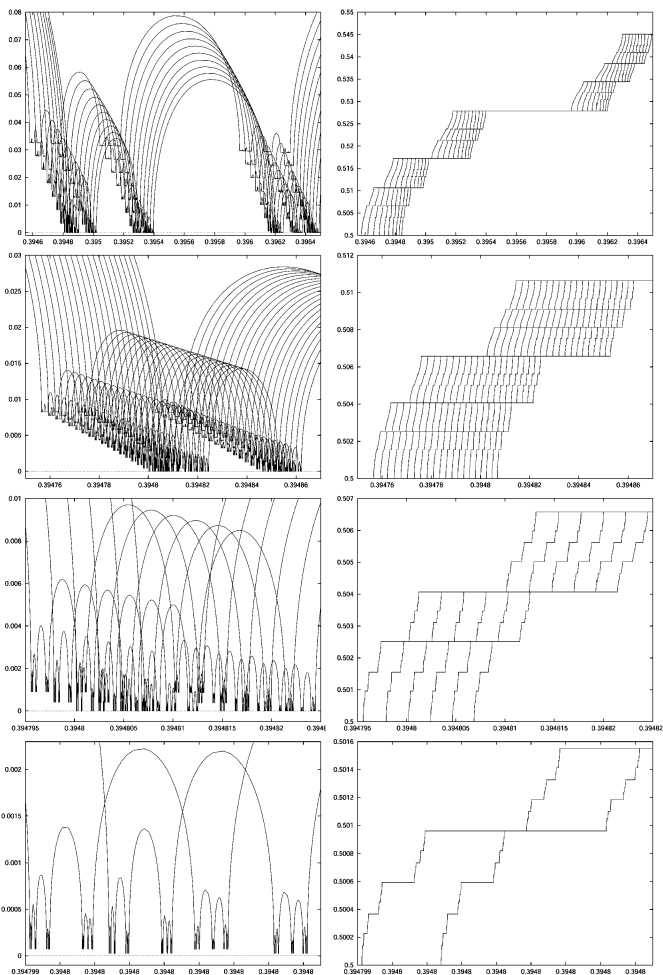


Рис. 16. Подробности поведения λ и ρ вблизи линии коллапса. Слева: $\lambda = \lambda(a^2)$, справа: $\rho = \rho(a^2)$. Значения b : в первом ряду $0.526 - 0.535$ с шагом 10^{-3} ; во втором $0.528 - 0.53$ с шагом 10^{-4} ; в третьем $0.528 - 0.5285$ с шагом 10^{-4} ; в последнем ряду 0.52832 и 0.52833 . В самом нижнем ряду значения a^2 изменяются от 0.3947995 до 0.39480035 .

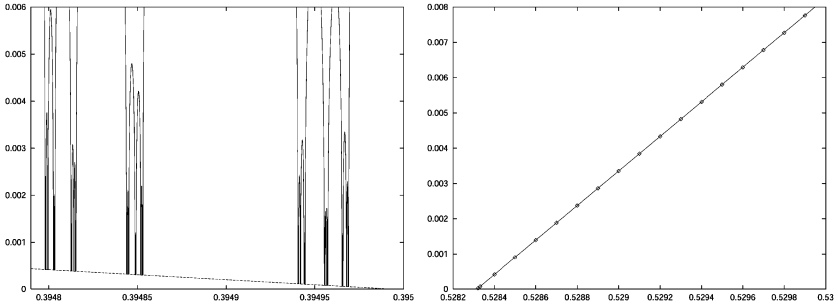


Рис. 17. Значения параметров, для которых правая концевая точка $a_{1/2,r}$ резонансного полуострова с частотой $\frac{1}{2}$ находится на линии коллапса. Слева: $\lambda(a^2)$ при $b = 0.5284$ и приближение значений $\lambda > 0$ за пределами резонансных полуостровов с помощью прямой линии. Справа: величина расстояния $a_{1/2,r}^2$ от линии коллапса в зависимости от b и ее экстраполяция

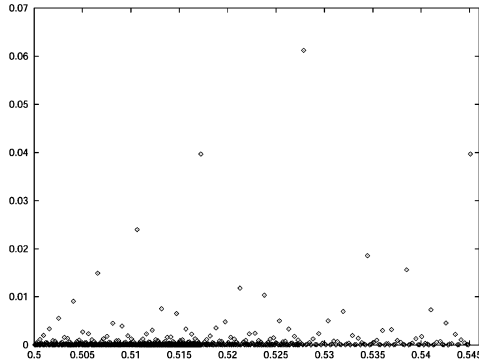


Рис. 18. Высоты выпуклостей λ в зависимости от соответствующей частоты при $b = 0.5284$

- Зависимость высот резонансных выпуклостей λ от значения b для выбранного множества в $\mathcal{R}$. На рис. 19 изображены такие зависимости. Используемые здесь значения b колеблются в пределах от 0.528 до 0.53 с шагом 10^{-4} , плюс дополнительные значения в интервале $(0.5283, 0.5284)$ с длиной шага 10^{-4} . Выбранные резонансы имеют ча-

стоты ν в интервале $(1/2, (35 - 21\gamma)/2 \sim 0.5106431181)$. Резонансы самых младших порядков: $(35, -21)$, $(-54, 34)$, $(90, -55)$, $(-143, 89)$, $(179, -110)$, $(-198, 123)$, $(234, -144)$ и $(-287, 178)$. Все эти числа (в конечном счете ± 1) равняются числам Фибоначчи, или сумме, или разности двух из них. Для всех значений b в рассмотренном диапазоне обнаружены все резонансы в соответствующем диапазоне порядков $|k| = |k_1| + |k_2| < 2000$. Для значений b , близких к критическому значению 0,528315, найденному ранее, т. е. для $b = 0.5283$ и $b = 0.5284$, обнаружены все резонансы в этом диапазоне с $|k| < 10000$ (некоторые хорошо определяемые резонансы имеют порядок больше 50000). Эти резонансы и представлены на рисунке. Ясно, что при критическом значении выпуклости имеют максимум. Увеличение показывает, что чем выше порядок резонанса, тем круче максимум при критическом значении b . То есть опять получаем еще одно проявление «коллапса резонансов».

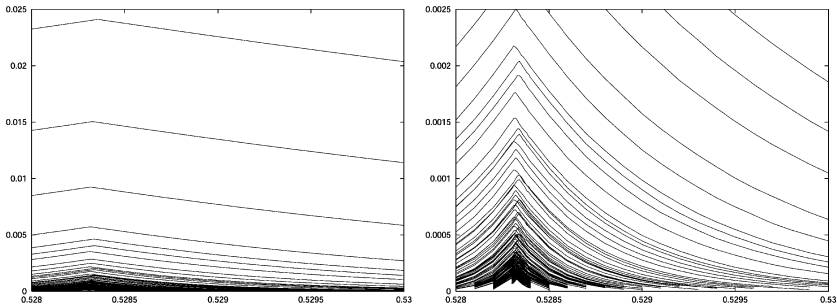


Рис. 19. Высоты выпуклостей в λ в зависимости от b . На рисунке справа показано увеличение рисунка слева в вертикальном направлении

5.4. Разрушение торов

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе с резонансом $\rho = \frac{1}{2}$, мы изучим поведение нерезонансного тора при пересечении линии коллапса, наблюдая его разрушение. Положим $\rho = \rho^* = 1/\sqrt{3} \sim 0.577350269$. Для заданного значения найдем $a_{\rho^*}(b)$, где $\rho(a_{\rho^*}(b), b) = \rho^*$, и $\lambda(a_{\rho^*}(b), b)$. На рис. 20 показаны графики обеих функ-

ций. Ясно видно, что существует значение $b_{crit}(\rho^*)$, вплоть до которого соответствующее значение λ вдоль кривой $(a_{\rho^*}(b), b)$ равно нулю. Начиная с этой точки оно локально возрастает почти линейно. Точка кривой, соответствующая ρ^* , по определению находится на линии коллапса. Для данного значения ρ^* получено приближенное значение $b_{crit}(\rho^*) \sim 0.533713$ (фактически оно немного больше) и соответствующее значение a (т.е. $a_{crit}(\rho^*)$) — ~ 0.40697017905282 .

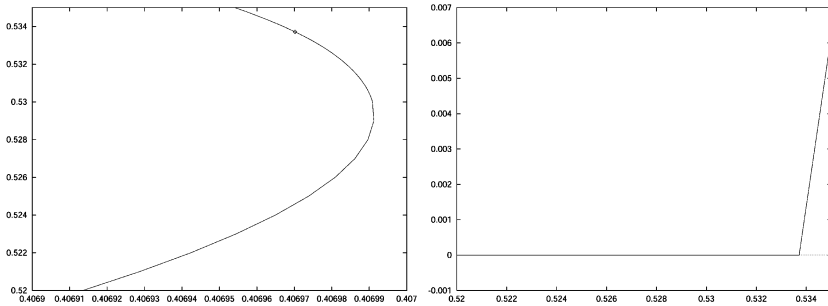


Рис. 20. Слева: кривая на (a^2, b) -плоскости с $\rho = 1/\sqrt{3}$. Отмеченная точка соответствует линии коллапса. Справа: значения $\lambda(b)$ вдоль кривой. Оно становится положительным на линии коллапса

На рис. 21 показан график, подобный графику на рис. 18 для найденного значения b . Для рассматриваемого критического нерезонансного случая высоты выпуклостей λ снова располагаются на решетке прямых линий с масштабной симметрией. На этом рисунке мы пропустили две относительно большие выпуклости, соответствующие резонансам сравнительно «малого порядка»: $(95, -58)$ и $(49, 31)$. На рис. 22 показан график высоты выпуклостей как функции величины обратной порядку соответствующего резонанса $(|k| = |k_1| + |k_2|)$. На этом рисунке вычисления с шагом $\delta a_{\min}^2 = 10^{-11}$ позволяют обнаружить все гармоники порядка меньше 20000 в выбранном диапазоне значений a и большинство гармоник вплоть до порядка 2×10^5 . Рисунок обнаруживает явное линейное поведение. Увеличение показывает, что большинство точек сконцентрированы на двух соседних линиях, верхняя соответствует $a > a_{crit}(\rho^*)$, а нижняя $a < a_{crit}(\rho^*)$. Это поведение соответствует тому, что высоты выпуклостей приблизительно пропорциональны квадратным корням ширин соответствующих окон неустойчивости параметра a , а ширины (из метода нормальных форм) пропорциональны

амплитуде гармоник (см. обсуждение после теоремы 2). Также такое поведение иллюстрирует утверждение, упомянутое в конце раздела 4, относительно поведения амплитуд гармоник, когда мы приближаемся к линии коллапса: амплитуда гармоники k ведет себя как $1/|k|^2$ для гармоник, частоты которых стремятся к ρ . Это говорит в пользу уменьшения регулярности инвариантного тора до тех пор, пока он не станет просто $\mathcal{C}^1$ (см. далее).

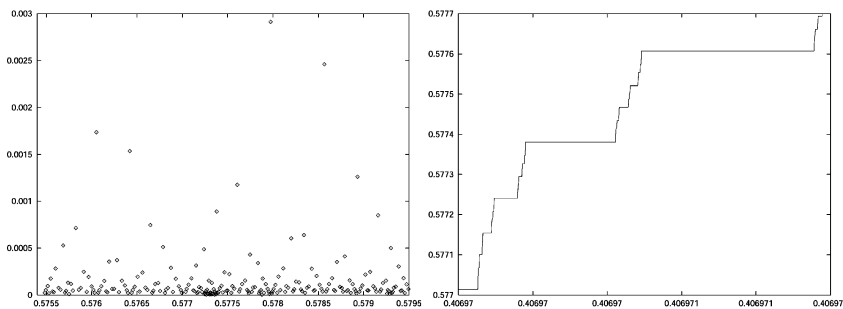


Рис. 21. Зависимость высоты выпуклостей λ от соответствующей частоты при $b = 0.533713$. Справа изображена зависимость $\rho(a^2)$ в интервале a^2 шириной 10^{-6} , близком к центру диапазона ν на левом рисунке

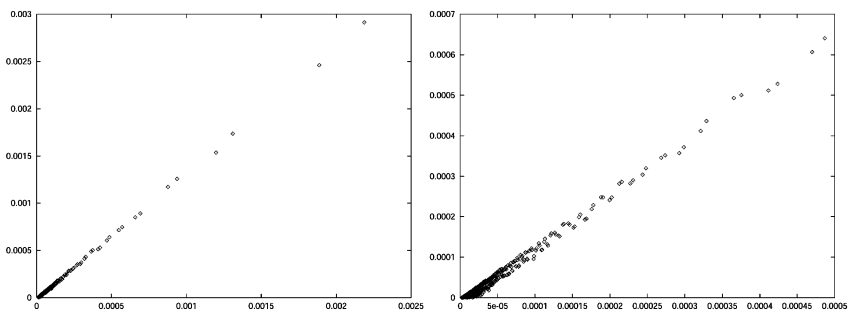


Рис. 22. Зависимость высоты выпуклостей от $1/|k|$ при $b = b_{crit}(\rho^*)$ и значениях a , близких к $a_{crit}(\rho^*)$. Справа изображено увеличение части рисунка слева

На рис. 22 показано скопление точек вблизи начала координат. Для их разложения мы можем построить график $\log$ высота в зависимости от $|k|$.

Результат можно увидеть на рис. 23. Высоты ниже $\exp(-11)$ больше не ведут себя как $1/|k|$, они уменьшаются скорее экспоненциально. Это говорит нам о том, что при $b = 0.533713$ все еще существует инвариантный тор и коэффициенты уменьшаются, так, как будто он соответствует некоторому аналитическому тору. Считая, что высота ведет себя как $\sim \exp(-\kappa|k|)$, можно оценить κ , которое для рассматриваемого значения b приблизительно равно $1/75000$. Интересно сравнить полученные результаты с несколькими меньшими значениями b . Уже при $b = 0.533$ высоты быстро уменьшаются. Поэтому мы взяли значение $b = 0.5335$, очень близкое к предыдущему, чтобы получить значительное количество обнаруживаемых выпуклостей в пределах малого диапазона a вблизи $a_{\rho^*}(b)$. Если включить высоты порядка $\exp(-15)$, ясно видно их экспоненциальное уменьшение. Соответствующее значение κ можно оценить как $1/200$. При использовании больших областей значений a , тем самым допуская большие выпуклости, первоначальное поведение (для малых $|k|$) высоты имеет вид $|k|^{-\psi}$ (и, следовательно, $|k|^{-2\psi}$ для размера гармоник) с $\psi > 1$. Следовательно, полученные численные результаты, указывают на то, что инвариантные торы, если они существуют, являются аналитическими, но при этом двигаются к некоторому непрерывному «объекту» при стремлении параметров к линии коллапса.

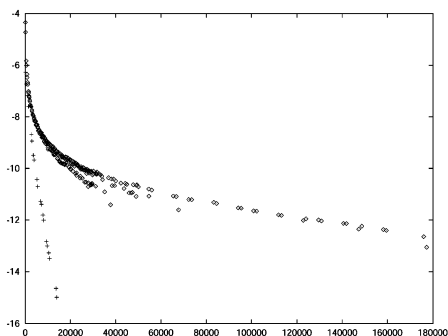


Рис. 23. Тот же, что и рис. 22, но с $|k|$ в качестве горизонтальной координаты и логарифма высоты выпуклости в качестве вертикальной. Крестиками обозначены соответствующие результаты для $b = 0.5335$

Для того чтобы рассмотреть поведение в фазовом пространстве, на рис. 24 приведены два тора с $\rho = 1/\sqrt{3}$ и b , равным 0,5 и 0,53 соответственно. Отметим, что эти значения относительно «далеки» от критиче-

ского. Заметим также, что «размер» торов приблизительно пропорционален $1/(b_{crit}(\rho^*) - b)$. Например, для $b = 0.533$ рисунок, подобный рис. 24, требует минимального окна с полуширинами 1.2×10^3 и 9.7×10^3 . Не существует нелинейных членов, способных остановить это взрывное увеличение размеров! Можно также сравнить полученные результаты с тором при $b = 0.53$ на рис. 11с, который показывает типичное поведение для нерезонансного случая после пересечения линии коллапса.

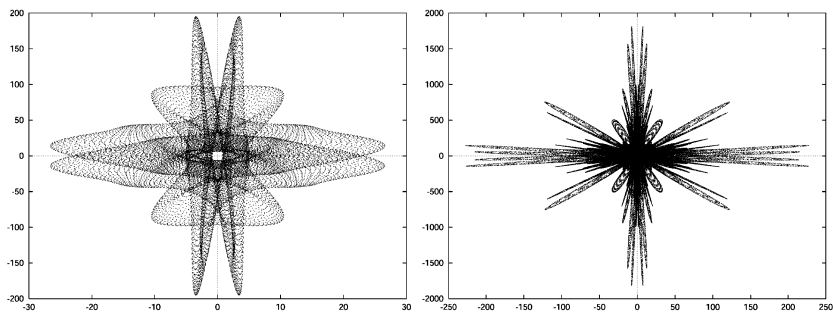


Рис. 24. Торы, полученные так же как на рис. 11. Слева: при $b = 0.5$. Справа: при $b = 0.53$

6. Выводы и перспективы

Уравнение Хилла с квазипериодической вынуждающей силой в некотором отношении совершенно подобно случаю с периодической вынуждающей силой, особенно в отношении поведения резонансных полуостровов при малой вынуждающей силе. Кроме того, объяснение в терминах нормальных форм (усреднения) точно такое же, как для периодического случая. Существование очагов неустойчивости и их объяснение для периодического случая [5,6] также переносится на квазипериодический случай.

Однако в квазипериодическом случае поведение дополнения резонансных полуостровов, а также глобальное поведение этих полуостровов совершенно отлично от периодического случая. Данный вопрос сильно связан с приводимостью уравнений. Говоря точнее, мы получили следующие результаты (см. также п. 1). Во-первых, как для $\lambda > 0$, так и для $\rho \neq \frac{1}{2}(k_1 + k_2\gamma)$, $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ может не быть приводимости. Во-вторых, в пре-

делах полуостровов существует «простая» гиперболическая приводимость. В-третьих, при $\lambda = 0$ существует «сложная» эллиптическая приводимость, которую можно установить только для больших значений a [22, 10]. Однако, по-видимому, эти результаты можно распространить на случай конечного a при малом b . Действительно, численное доказательство данной статьи для конечных значений (a, b) и КАМ-доказательство относительно усреднения (см., например, [1, 17, 22, 10]), по-видимому, свидетельствует в пользу следующих фактов:

- 1) Для малых b в (a, b) -плоскости существует канторов пучок b -параметризованных кривых, на котором выполняется эллиптическая приводимость. В промежутках находятся резонансные полуострова, вне которых этот пучок имеет полную меру. Мы называем эту часть плоскости параметров *КАМ-область*.

Канторов пучок, как обычно, характеризуется диофантовой нижней оценкой $|\rho(a, b) - \frac{1}{2}| < k, \omega > |$. Кроме указанных выше источников нам бы хотелось отметить работу, которая скоро появится в печати [23].

- 2) Априори может также иметь место неприводимость, в частности, за пределами резонансных полуостровов, когда $\rho - \frac{1}{2} < k, \omega >$ равно числу Лиувилля. Это может происходить только на оставшемся (после исключения КАМ-области) множестве нулевой меры в (a, b) -плоскости, причем опять же при малых b . Было бы интересно проверить существования подобного явления в рассматриваемом примере p , расширив его, например, введя дополнительные параметры. Сравните с [15, 12].

Отметим, что результаты этого поведения могут подвергнуть сомнению Гипотезу 3.

- 3) КАМ-область простирается до «линии коллапса», где происходит разрушение нетривиальных КАМ-торов. Начиная с этой линии динамика является приводимой только в пределах резонансных полуостровов.
- 4) На линии коллапса резонансные полуострова, по-видимому, настолько увеличиваются по ширине, что для нетривиальных торov не остается пространства.

По-видимому, также стоит исследовать несколько обобщений. Пусть $r = \omega_2/\omega_1$ — отношение частот.

- Что происходит, если отношение частот r стремится к некоторому рациональному числу, оставаясь на множестве диофантовых чисел? В случае периодических решений предположительно получим классическую теорию Флоке, при этом линия коллапса должна уйти на бесконечность в направлении b .
- Как изменяется общая картина, если отношение частот r является не диофантовым, а, например, числом Лиувилля?
- Как существование очагов неустойчивости влияет на линию коллапса?
- Какова общая ситуация, когда $p(t)$ квазипериодическая с тремя и более основными частотами?
- Уравнение Хилла с квазипериодической вынуждающей силой вероятно является простейшим примером линейного уравнения с квазипериодическими коэффициентами. Что можно ожидать для общих уравнений в $\mathbb{R}^n$?

7. Приложение

В этом приложении мы описываем методы, используемые в численных экспериментах. Основная их цель — достичь достаточно хорошей точности за малое время вычислений. Несомненно для получения надежных численных результатов требуется точность. Возьмем за единицу времени вычислений время выполнения одной итерации (5) или время оценки λ и ρ вне начального переходного процесса. Тогда общее время вычислений проведенных исследований близко к 10^{13} . В статье приведена только очень небольшая выборка полученных результатов. Для получения же всех результатов требуется высокая быстрота вычислений. Большая часть рассмотренной задачи была выполнена на кластере Беовульф, состоящем из 24 процессоров Pentium 266 и 2 процессоров Pentium 200. Каждый процессор способен выполнять примерно 2×10^5 итераций в секунду.

7.1. Вычисление $M(\theta)$

Нам необходимо проинтегрировать уравнение вида $\ddot{x} = q(t)x$. В рассматриваемом случае $q(t) = -(a^2 + b(\cos(t) + \cos(\gamma t + \theta)))$, где $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ и для большинства вычислений a и b были ограничены интервалом $[0, 1]$.

Введем $x^{(k)} = \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dt^k}$. Аналогичным образом введем $q^{(k)}$. Тогда из правила Лейбница получаем соотношение

$$x^{(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=0}^k x^{(k-j)} q^{(j)},$$

с помощью которого начиная с $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = x^{(1)}$ можно рекуррентно вычислить все $x^{(k)}$ вплоть до любого порядка N с вычислительными затратами $O(N^2)$. Затраты на тригонометрические вычисления заключаются только в нахождении $\cos$ и $\sin$ на каждом шагу, при этом степени γ и обратная величина факториалов вычисляются только один раз.

Ряды для $x(t+h)$, зависящие от h и начинающиеся с $x(t)$, $y(t)$, мажорируются рядом функции $z(h)$, задаваемым уравнением $\ddot{z}(h) = r(h)z(h)$, с $r(h) = a^2 + |b|(\exp(h) + \exp(\gamma h))$, $z(0) = |x(t)|$ и $\dot{z}(0) = |y(t)|$. Это показывает, что ряд сходится. Кроме того, если мы ограничимся указанным выше интервалом изменения a и b и возьмем $h < 1$, тогда $r(h) < 9$. Следовательно, $z(h) < A \exp(3h)$, где A зависит от $z(0)$ и $\dot{z}(0)$. Это показывает, что при выборе, скажем, $N = 30$, последний член более чем в 10^{18} раз меньше первых двух.

Фактически мы интегрируем уравнение, начиная с векторов $(1,0)$ и $(0,1)$. При расчетах мы выбирали постоянный временной шаг ($2\pi/8$ или $2\pi/10$ обычно дают оптимальное время вычислений), а N выбираем так, чтобы максимум двух последних членов, появляющихся в разложениях 4 элементов фундаментальной матрицы был более, чем в 10^{18} раз меньше максимума абсолютных значений элементов матрицы.

Вычисления были выполнены для большого числа K значений θ , равно распределенных в интервале $[0, 2\pi]$. При точных вычислениях, когда нас интересовало большое количество итераций, подходящее значение K равнялось 5000. Большое время задания начальных условий (обычно 3 секунды) позволяет сократить время вычислений при итерациях.

7.2. Процесс интерполяции

Нам известны значения $M(\theta_k)$, где $\theta_k = 2\pi k/K$, $k = 0, \dots, K-1$. По этим значениям необходимо вычислить $M(\theta)$. Это делается с помощью интерполяции. Масштабируя и смещая начало координат, мы всегда можем предположить, что нам следует оценить функцию $f(s)$ в некоторой точке

$s \in [0, 1)$ на основании значений $f_j = f(j), j = 1 - j_0, \dots, j_0$. Интерполяционная формула имеет вид $\sum_{j=1-j_0}^{j_0} w_j(s) f_j$, где $w_j(s)$ — лагранжевы веса. Для еще большего ускорения процесса вычислений были предварительно вычислены веса $w_{j,i}$ для $s = i/10000, i = 0, \dots, 10000$. Затем на основании предварительно вычисленных весов с помощью линейной интерполяции были получены соответствующие веса $w_j(s)$. Проверено, что это не приводит к значительным различиям в вычислениях $M(\theta)$. Интерполяцию следует применять к каждому из элементов матрицы. Подходящее значение для j_0 равно трем. Поэтому для интерполяции используется только 6 узлов. Численные оценки шестой производной элементов $M(\theta)$ в предварительных интегрированиях показывают, что ошибки в интерполяционной формуле имеют порядок ϵ .

7.3. Оценки λ и ρ

Формулы (6) и (7) определяют λ и ρ при условии существования пределов. Однако вследствие «неправильного» поведения итераций, чтобы получить достаточно хорошие оценки, возможно, число итераций n должно быть взято очень большим. На рис. 25 приведен соответствующий пример, показывающий поведение частного из (6) после большого переходного процесса, который будет объяснен ниже. Типичное значение количества итераций в переходном процессе, в области, близкой к линии коллапса, равно 10^6 . Максимальное количество итераций было взято 10^7 . Результаты, приведенные в п. 5, и поведение наблюдаемых на многих графиках оценок доказали пригодность такого эвристического подхода для оценки λ . Этот подход также был использован и для ρ , несмотря на тот факт, что поведение частного из (7) более регулярно.

После переходного процесса, который в некоторых случаях достигает 2×10^6 итераций, частные в (6) вычисляются после каждой итерации, но записывается только самое большое частное в блоках, например, из 1000 последовательных итераций. Записывается также номер итерации, в которой имеет место максимум. Тогда после вычисления ряда блоков (скажем, 100 блоков; в последующих оценках используются 200, 300 и т.д.) выполняется подбор значений α и β для выражения $\lambda_{n_i} = \alpha + \beta/n_i$. Здесь n_i — номера итераций, в которых встречаются максимумы, а λ_{n_i} — соответствующие частные. Значение α равно улучшенной оценке показателя Ляпунова.

В любом случае, сравнение последовательных улучшенных оценок показывает, что сходимость (если она есть!) все еще слишком медленная. Тогда мы выполняем следующий итерационный процесс. Выполнив под-

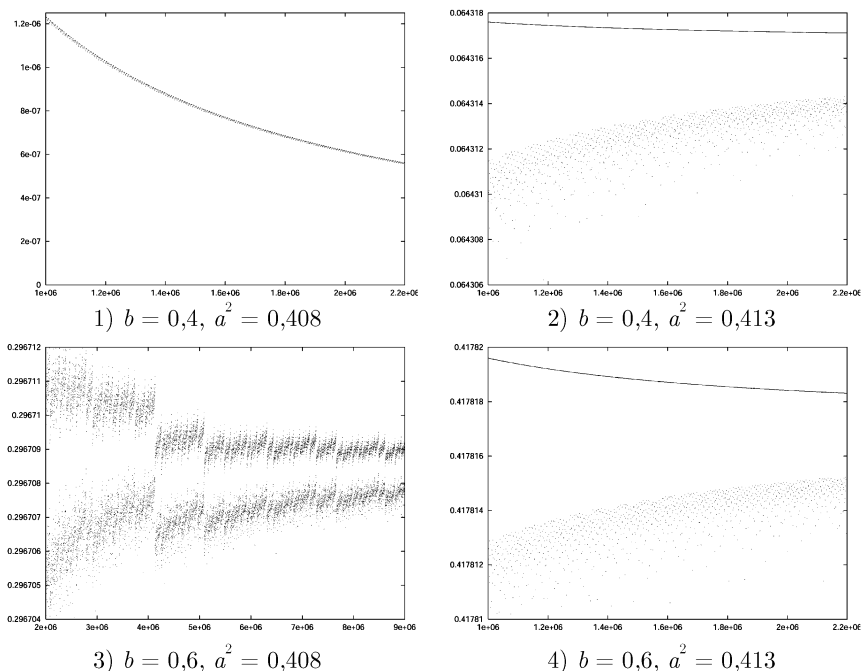


Рис. 25. Оценка λ в зависимости от количества итераций для указанных значений (a, b) . Во всех случаях приведены максимумы и минимумы в блоках по 10^3 итераций. В а) мы приводим только максимумы, при этом минимумы находятся ниже 2.1×10^{-16} . Отметим, что в случае с) для параметров выше линии коллапса и за пределами резонанса поведение наиболее нерегулярное, несмотря на переходный процесс из 2×10^6 итераций и вычисление дополнительных 7×10^6 итераций. Однако представляется, что даже в этом случае $\liminf$ и $\limsup$ оценок λ совпадают

бор значений α и β , отбрасываем все точки ниже полученной кривой, с оставшимися точками снова производим подбор, опять отбрасываем точки и т.д. до тех пор, пока число используемых точек в последнем подборе не окажется меньше некоторого заданного числа. На практике в качестве этого числа берется 50. Значение α последнего подбора используется как оценка λ . Наблюдалось, что полученные таким образом оценки становятся намного более согласованными при возрастании количества блоков. Когда три последовательные оценки отличаются меньше, чем на некоторое до-

пустимое отклонение (для наиболее точных вычислений оно принималось равным 10^{-8}), последнее из них используется как конечная оценка λ .

Для значений (a, b) , которым, очевидно, соответствует нулевое значение λ , результаты полученных описанным выше способом вычислений были всегда меньше 10^{-8} , а в большинстве случаев даже меньше 10^{-10} . Кроме того, в резонансных зонах поведение полученных значений гладкое с точностью до 10^{-8} (это можно определить, например, изучая конечные разности для равномерно распределенных значений a^2). В областях за пределами резонансных полуостровов, выше линии коллапса, поведение также гладкое в пределах этого допустимого отклонения. Только вблизи пересечения линии коллапса, по-видимому, некоторые оценки могут иметь ошибки вплоть до 10^{-6} .

7.4. Процесс сканирования

До сих пор мы описывали, как получить λ и ρ для заданных значений (a, b) . Задав значение b , мы определяли значения λ и ρ при изменении a в заданном интервале. В этом «процессе сканирования» использовались следующие правила. Обозначим выбранные значения a^2 , при которых выполнялись вычисления, как $a_j^2, a_j^2 < a_{j+1}^2$. Выберем некоторые допустимые отклонения δ_λ и δ_ρ такие, что, $|\lambda(a_{j+1}^2) - \lambda(a_j^2)| < \delta_\lambda$ и $|\rho(a_{j+1}^2) - \rho(a_j^2)| < \delta_\rho$ при $a_{j+1}^2 - a_j^2 < \delta a_{\min}^2$. Типичные значения отклонений равны $\delta_\lambda = 10^{-4}, \delta_\rho = 10^{-5}, \delta a_{\min}^2 = 10^{-11}$. Эти значения были выбраны так, чтобы не пропустить большинство деталей графиков λ и ρ и в то же время эффективно осуществить сканирование.

7.5. Фурье-анализ

Как указывалось в п. 5, для выполнения фурье-анализа результатов в фазовом пространстве мы сначала должны исключить возможное экспоненциальное увеличение итераций. Это делается с помощью вычислений, после начального переходного процесса, матриц $\hat{P}_n = \exp(-n\lambda)P_n$, где P_n — фундаментальные матрицы через время $2\pi n$. (См. формулу (5).)

Мы рассматриваем только один из векторов матриц P_n . Точнее, мы использовали первый вектор. Если уравнение приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами (форме Флоке), то фурье-анализ этого вектора должен содержать гармоники, содержащиеся в замене переменных (частоты которых обязательно должны быть целыми линейными комбинациями фундаментальных частот), а также гармоники частот, соответствующих приведенной матрице.

Обычно мы использовали первые 2^{18} итераций после переходного процесса, чтобы выполнить фурье-анализ. В этом случае с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье можно обнаружить главные гармоники. Некоторые полученные графики приведены в п. 5. Для определения основных частот существует несколько более точных методов (см., например, [20], [21], [14]). Однако можно использовать даже более простой метод, потому что известны основные частоты, и частота, соответствующая приведенному уравнению, приближенно равная ρ . Определение частот основных гармоник в случаях, которые выглядят приводимыми, выполняется с ошибкой меньше 10^{-7} .

Благодарности. Авторы благодарят Ганса Яауслина за предложение изучить эту проблему им обоим, а также помощь в обмене идеями. Они также благодарны Расселу Джонсону, Анжелу Джорба и Йинфей Йи за полезное обсуждение проблемы. Исследования второго автора были поддержаны грантом DGICYT PB 94-0215 (Испания). Также выражается благодарность за частичную поддержку грантом Европейского Сообщества ERBCHRXCT940460 и грантом Каталонии CIRIT 1996S0GR-00105.

Литература

- [1] Braaksma, B. L. J. and Broer, H. W.: On a quasi-periodic Hopf bifurcation, *Ann. Institute Henri Poincaré, Analyse non Linéaire* **4**(2), (1987), 15–168.
- [2] Broer, H. W., Hoveijn, I. and van Noort, M.: A reversible bifurcation analysis of the inverted pendulum, *Physica D*, **112**, (1997), 50–63.
- [3] Broer, H. W., Huitema, G. B., Takens, F. and Braaksma, B. L. J.: Unfoldings and bifurcations of quasi-periodic tori. *Mem AMS* **83**(421), 1990.
- [4] Broer, H. W., Huitema, G. B. and Sevryuk, M. B.: *Quasi-periodic motions in families of dynamic systems, order amidst chaos*. LNM **1645** Springer-Verlag, 1996.
- [5] Broer, H. W. and Levi, M.: Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations. *Arch. Rat. Mech. An.* **131** (1995), 225–240.
- [6] Broer, H. W. and Simó, C.: Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach, preprint, 1997.
- [7] Broer, H. W. and Vegter, G.: Bifurcational aspects of parametric resonance. *dynamic Reported, New Series* **1** (1992), 1-51.
- [8] Broer, H. W., Takens, F. and Wagener, F. O. O.: Unfolding the skew Hopf bifurcation, preprint, 1998.

- [9] Broer, H.W. and Wagener, F. O. O.: Quasi-periodic stability of subfamilies of an unfolded skew Hopf bifurcation, preprint, 1998.
- [10] Eliasson, L.H.: Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.* **146** (1991), 447–482.
- [11] Eliasson, L.H.: Ergodic skew systems on $\mathbb{T}^d \times SO(3, \mathbb{R})$, preprint, 1996.
- [12] Fabbri, R., Johnson, R. and Pavani, R.: On the spectrum of the quasi-periodic Schrödinger operator. In preparation.
- [13] Giorgilli, A. and Galgani, L.: Formal integrals for an autonomous Hamiltonian system near an equilibrium point. *Celest. Mech.* **17** (1978), 267–280.
- [14] Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R. and Simó, C.: *Study on orbits near the triangular libration point in the perturbed restricted three-body problem*. ESA Technical Report, 1987, 270p.
- [15] Johnson, R.: Cantor spectrum for the quasi-periodic Schrödinger operator. *J. Diff. Eqns.* **91** (1991), 88–110
- [16] Jorba, À., Ramírez-Ros, R. and Villanueva, J.: Effective Reducibility of Quasiperiodic Linear Equations Close to Constant Coefficients, *SIAM J. on Math. Anal.* **28** (1996), 178–188.
- [17] Jorba, À., and Simó, C.: On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients. *J. Diff. Eq.* **98** (1992), 111–124.
- [18] Jorba, À., and Simó, C.: On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points, *SIAM J. of Math. Anal.* **27** (1996), 1704–1737.
- [19] Krikorian, R.: Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts, preprint, 1996.
- [20] Laskar, J.: the chaotic motion of the solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus* **88** (1990), 266–291.
- [21] Laskar, J., Froeschlé, C., Celletti, A.: The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. application to the standard mapping, *Physica D* **56** (1992), 253–269.
- [22] Moser, J. and Pöschel, J.: An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials, *Comment. Math. Helvetici* **59** (1984), 39–85.
- [23] Wagener, F. O. O.: On a.e. reducibility of quasi-periodically perturbed two-dimensional Floquet systems. In preparation.

Замечательное периодическое решение задачи трех тел в случае равных масс*

А. ШЕНСИНЕ

Département de Mathématiques,
Université Paris VII-Denis Diderot,
16, rue Clisson, 75013 Paris, France.
chencine@dbl.fr

Р. МОНТГОМЕРИ

Mathematics Dept. UCSC,
Santa Cruz, CA 95064 USA.
rmont@math.ucsc.edu

Используя вариационный метод, мы находим новую удивительно простую периодическую орбиту для плоской задачи трех тел равных масс с ньютоновским взаимодействием. Орбита имеет нулевой момент количества движения и очень богатую структуру симметрии. Самая удивительная ее особенность заключается в том, что все три тела движутся друг за другом вдоль неподвижной кривой в форме восьмерки. Не считая коллинеарных движений (найденных Эйлером), единственным известным движением вдоль неподвижной кривой в инерциальной системе являются «положения относительного равновесия Лагранжа», в которых все три тела образуют жесткий равносторонний треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью в пределах описанной окружности. Найденная нами орбита посещает по очереди каждую «эйлерову конфигурацию», в которой одно из тел находится между двумя другими, на равном расстоянии от них (рис. 1). Численные расчеты К. Симо, которые будут опубликованы в другом месте¹, указывают, что подобная орбита является «устойчивой» (т.е. полностью эллиптической с закручиванием). Более того, они доказывают, что момент инерции $I(t)$ относительно центра масс и потенциал $U(t)$ как функции времени почти постоянны.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем три тела единичной массы в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ с ньютоновским притяжением. Используя принцип инвариантно-

* A. Chencier, R. Montgomery, *A remarkable period solution of the three body problem in the case of equal masses*. Annals of Mathematics, 2000. Перевод Богатыревой Е. В., Килина А. А.

¹См. статью К. Симо «Новые семейства решений задачи N тел» в настоящем издании. — Прим. ред.

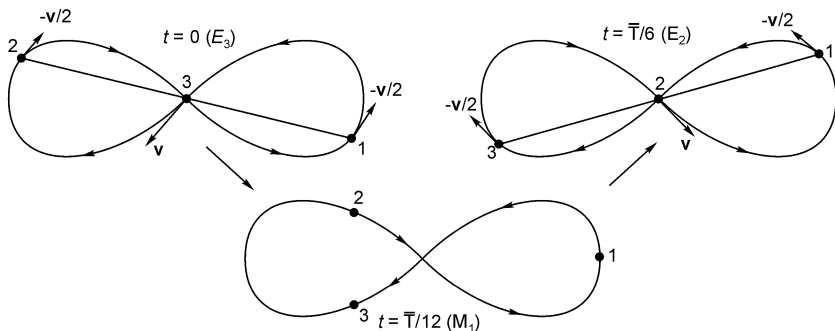


Рис. 1.

сти Галилея, зафиксируем координаты центра масс. При этом фазовое пространство становится касательным расслоением конфигурационного пространства $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \{\text{столкновения}\}$

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{C})^3, \sum_{i=1}^3 x_i = 0\}.$$

Введем на $\mathcal{X}$ *массовое эрмитово скалярное произведение*, определенное формой кинетической энергии. В нашем случае равных масс оно примет вид

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^3 \bar{x}_j \cdot y_j = x \cdot y + i\omega(x, y).$$

Вещественная и мнимая части — это *массовое скалярное произведение* и *симплектическая структура* содержащая массы соответственно. Группа $O(2)$ изометрий в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ диагональна на $\mathcal{X}$: отражение относительно первой координатной оси S и вращение R_θ на угол θ действуют как

$$\begin{cases} S \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \\ R_\theta \cdot (x_1, x_2, x_3) = (e^{i\theta} x_1, e^{i\theta} x_2, x_3). \end{cases}$$

Фазовое пространство отождествим с декартовым произведением $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, элементы которого запишем как (x, y) . Определим следующие $O(2)$ -инвариантные функции на фазовом пространстве

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y, \quad U = U(x), \\ H = \frac{1}{2}K - U, \quad L = \frac{1}{2}K + U.$$

Эти величины представляют собой *момент инерции относительно центра масс*, половину его производной по времени, удвоенную величину *кинетической энергии* в системе координат, связанной с центром масс, *потенциальную функцию*, *суммарную энергию* и *лагранжиан*. Величина $r = I^{1/2}$ является нормой на $\mathcal{X}$. Силовая функция U , равная потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком, имеет вид

$$U = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}, \quad \text{где } r_{ij} = |x_i - x_j|.$$

(Мы выбираем единицы измерения так, чтобы гравитационная постоянная равнялась единице.)

Центральные конфигурации играют основную роль в этой статье. Они являются единственными конфигурациями, которые допускают *гомотетические движения*, то есть движения, для которых конфигурация гомотетично стягивается к своему центру масс. Они допускают и более общие *гомографические движения*, когда каждое тело движется по орбите, подобной кеплеровой. В частности, подобные движения включают в себя *положения относительного равновесия*, когда тела равномерно вращаются подобно твердому телу вокруг своего центра масс. Эти конфигурации являются критическими точками *отмасштабированной потенциальной функции* $\tilde{U} = \sqrt{I}U$. После нормализации они становятся критическими точками ограничения $U|_{I=1}$ потенциальной функции на сферу $I = 1$. В случае трех тел центральные конфигурации хорошо известны благодаря работам Эйлера и Лагранжа. Существует три коллинеарные конфигурации E_1, E_2, E_3 , различимые по массе, которая находится между двумя другими (в средней точке в случае равных масс) и две равносторонние треугольные конфигурации L^+, L^- , различимые только своей ориентацией.

Определив центральные конфигурации, мы уже факторизовали конфигурационное пространство по группе вращений $SO(2)$. Известно ([6], [7]), что после приведения с помощью простых изометрий (переносов и вращений) конфигурационное пространство задачи трех тел на плоскости становится гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Это приведенное конфигурационное пространство (пространство ориентированных треугольников на плоскости с точностью до переноса и вращения) обладает метрикой, индуцированной на него метрикой конфигурационного пространства, и образующей из него конус над двумерной сферой радиуса $\frac{1}{2}$. Точки этой сферы, в последующем называемой *форм-сферой*, соответствуют ориентированным треугольникам, момент инерции которых относительно их центра масс равен единице (то есть $I = 1$). Саму сферу следует считать пространством классов ориентированных

подобных треугольников [7]. В случае равных масс форм-сфера показана на рис. 2, в п. 5 мы рассмотрим ее с римановой точки зрения. Ее основные особенности — северный и южный полюса, соответствуют двум типам равносторонних треугольников (точки Лагранжа), экватор соответствует коллинеарным конфигурациям, а три меридиана соответствуют трем типам равнобедренных треугольников. Каждый меридиан пересекает экватор в эйлеровой точке и точке столкновения. На рисунке также показана эквипотенциальная кривая (линия уровня $U|_{I=1}$), содержащая эйлеровы точки и поверхность уровня, соответствующая большему значению U . Проекция орбиты «восьмерки» на форм-сферу имеет сильное сходство с эквипотенциальной кривой, проходящей через три эйлеровы точки, и обладает ее симметрией. На рис. 2 мы выделили полупрямую E_3 и плоскость меридиана, потому что они явно присутствуют в доказательстве, приведенном ниже.

2. Орбита

Пусть $\bar{T}$ — любое положительное вещественное число. Действия группы Клейна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ и на $\mathbb{R}^2$ определяем следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot t &= t + \frac{\bar{T}}{2}, & \tau \cdot t &= -t + \frac{\bar{T}}{2}, \\ \sigma \cdot (x, y) &= (-x, y), & \tau \cdot (x, y) &= (x, -y),\end{aligned}$$

где σ и τ — образующие.

Теорема. *Существует плоская петля $q : (\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}), 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ в форме «восьмерки» со следующими свойствами:*

а) для каждого t

$$q(t) + q(t + \bar{T}/3) + q(t + 2\bar{T}/3) = 0;$$

б) q эквивариантна относительно действий $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}^2$, определенных выше:

$$q(\sigma \cdot t) = \sigma \cdot q(t) \quad \text{и} \quad q(\tau \cdot t) = \tau \cdot q(t);$$

в) петля $x : \mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$, определенная выражением

$$x(t) = (q(t), q(t + \bar{T}/3), q(t + 2\bar{T}/3)),$$

имеет нулевой момент количества движения для $\bar{T}$ -периодического решения плоской задачи трех тел с равными массами.

Остальная часть статьи посвящена доказательству этой теоремы.

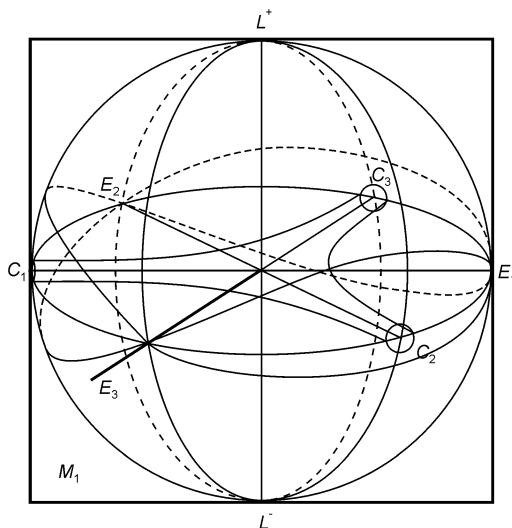


Рис. 2.

3. Структура доказательства

Основные составные части доказательства следующие:

«Прямой» метод

Одна двенадцатая орбиты получается минимизацией действия (обозначим $T = \tilde{T}/12$)

$$\mathcal{A} = \int_0^T \left(\frac{1}{2} K + U \right) dt$$

на подпространстве Λ в $H^1([0, T], \mathcal{X})$, состоящем из траекторий, которые начинаются на эйлеровой конфигурации произвольного размера, скажем, E_3 , (третье тело в середине) и заканчиваются на равнобедренной конфигурации, скажем, $M_1(r_{12} = r_{13})$, также произвольного размера. Существование минимизирующей траектории доказывается стандартно, поэтому основная проблема заключается в доказательстве того, что такая траектория не имеет столкновений.

Приведение

Кинетическую энергию можно выразить как сумму двух неотрицательных членов: $K = K_{red} + K_{rot}$. (Это разложение скорости Саари. См. п. 5.) K_{red} соответствует римановой метрике на фактор-пространстве $\mathcal{X}/SO(2)$, порожденной метрикой K на $\mathcal{X}$. Эта часть кинетической энергии отвечает за деформации и включает гомотетическую часть. Часть K_{rot} является вращательной составляющей кинетической энергии. Поскольку мы рассматриваем задачу на плоскости, то $K_{rot} = |C|^2/I$, где C — вектор момента количества движения. (В пространственной задаче трех тел это равенство заменяется неравенством $K_{rot} \geq |C|^2/I$. См. неравенство Зундмана $IK - J^2 \geq 0$ в [1].) С другой стороны, граничные условия на возможные траектории $x \in \Lambda$ инвариантны относительно вращений. Это означает, что если $x(t)$ является такой траекторией, то $g(t)x(t)$ также является такой траекторией, если $g(t) \in SO(2)$. Изменение g меняет только второе, вращательное слагаемое кинетической энергии, оставляя K_{red} постоянным. (Явное выражение K_{red} см. ниже в Лемме 5.) Соответствующим выбором $g(t)$ мы можем гарантировать, что $C = 0$. Это доказывает, что любая точка минимума для задачи а) имеет нулевой момент количества движения. Более того, первоначальная задача сведена к задаче минимизации приведенного действия

$$A_{red} = \int_0^T \left(\frac{1}{2} K_{red} + U \right) dt$$

на траекториях, лежащих в приведенном конфигурационном пространстве $\mathcal{X}/SO(2)$ и удовлетворяющим одним и тем же граничным условиям. Польза от этого приведения состоит в том, что приведенное конфигурационное пространство топологически представляет собой $\mathbb{R}^3$, следовательно, тела легче представить себе мысленно (рис. 2, 3 и 4).

Сравнение с задачей Кеплера для исключения столкновений

Вместо того чтобы вычислять локальные изменения действия, мы будем искать инфимум действия по всем траекториям из $H^1([0, T], \mathcal{X})$ со столкновением. Обозначим инфимум A_2 , «2» означает два тела, потому что мы явно вычисляем A^2 , используя задачу двух тел. Затем сравним A^2 с действием a тщательно выбранной свободной от столкновений «контрольной траектории» в Λ . После чего докажем неравенство $A^2 > a$, что приводит к заключению, что минимизирующая траектория должна быть свободна от столкновений.

Симметрии и правило площадей

Благодаря равенству масс система обладает перестановочной симметрией, с помощью которой мы строим одиннадцать недостающих конгруэнтных копий отрезка траектории минимизирующего действие из п. 3.1. Выражение для первой вариации действия показывает, что эти копии гладко соединяются с первоначальной, образуя единую орбиту, периодическую в приведенном конфигурационном пространстве (т.е. по модулю вращения) с периодом $12T$. Для воспроизведения движения в инерциальной плоскости, т.е. в $\mathcal{X}$, мы используем симметрии и «формулу площадей» (см. [9]). В результате мы приходим к выводу, что движение в $\mathcal{X}$ периодическое, что все три массы действительно двигаются в инерциальной системе вдоль одной и той же фигуры в виде восьмерки и что эта восьмерка имеет симметрию группы Клейна, описанной выше в теореме.

Другие доказательства

Мы представили самое короткое доказательство из известных нам. Еще одно доказательство использует локальные возмущения так, чтобы избавиться от столкновений при уменьшении действия. С помощью такого метода можно избавиться как от двойных, так и тройных столкновений. Особо внимательно нужно выбирать направление возмущения, при исключении двойных столкновений. Оценки такого метода значительно длиннее, чем приведенные здесь, но они не требуют численного интегрирования. С другой стороны, они не дают оценки на орбите, приведенной в Приложении 1.

4. Исключение столкновений

Напомним, что мы обозначили Λ подпространство $H^1([0, T], \mathcal{X})$, состоящее из траекторий, которые начинаются при эйлеровой конфигурации E_3 произвольного размера и заканчиваются на равнобедренной конфигурации типа M_1 также произвольного размера. Этот и следующий параграфы посвящены доказательству следующего утверждения:

Утверждение. *Траектория Λ , которая минимизирует действие $\mathcal{A} = \int_0^T (\frac{1}{2}K + U)dt$, не имеет столкновений.*

Доказательство утверждения. Удивительно, но можно рассмотреть двойные и тройные столкновения одновременно. Первый основной пункт

— это (тривиальное) замечание, что действие

$$\mathcal{A}(m_1, m_2, m_3; x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{x}_i(t)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j(t) - x_i(t)|} \right) dt$$

вдоль заданной траектории $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ является возрастающей функцией любой из масс. Установив, например, m_1 равное нулю, получаем

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(1, 1, 1; x) > \mathcal{A}(0, 1, 1; x).$$

Последний член является действием задачи 2 тел с равными массами. Мы используем это наблюдение в следующей лемме:

Лемма 1. *Если $x \in H^1([0, T], \mathcal{X})$ имеет двойное или тройное столкновение, то его действие больше A_2 , где A_2 — действие коллинеарного решения задачи двух тел, в которой траектории единичных масс начинаются со столкновения и заканчиваются нулевой скоростью в момент времени T , центр масс при этом неподвижен в продолжение всего времени (такую траекторию можно назвать эллиптической столкновительно-испускающей полуорбитой). Явная формула для A_2 будет приведена ниже.*

Примечание. Лемма утверждает, что инфимум действия $A(x)$ по всем траекториям столкновения $x \in H^1([0, T], \mathcal{X})$ больше или равен A_2 . Несомненно, этот инфимум равняется A_2 . Представим последовательность траекторий x_n , в которой m_2 и m_3 описывают столкновительно-испускающую полуорбиту Кеплера, охарактеризованную в лемме, тогда как m_1 остается неподвижной на расстоянии n от центра масс 2–3. $A(x_n) \rightarrow A_2$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 1. Предположим, что массы 2 и 3 (и, возможно, 1) сталкиваются в момент T_1 . Как только что объяснялось, мы снижаем действие траектории, установив m_1 равной нулю. Для нового действия можно забыть о положении массы 1 и далее рассматривать действие для задачи двух тел Кеплера, исследованной в [4] Гордоном. В соответствии с выводами Гордона, каждая часть кривой x , до и после T_1 , обладает действием большим или равным действию соответствующему коллинеарному движению масс m_2 и m_3 , в котором они сталкиваются при T_1 и находятся в покое в другой своей конечной точке, при $t = 0$ либо $t = T$. Удваивая каждую часть траектории, посредством соединения ее в цепь с самой собой, и изменив направление второй части на обратное, мы получим две замкнутые траектории, при этом каждая движется от столкновения к столкновению, одна за время $2T_1$, другая за $2(T - T_1)$. Гордон доказал, что абсолютным минимумом действия для задачи столкновение-столкновение

является столкновительно-испускающее решение. Его действие является пропорциональной $T^{2/3}$ выпуклой функцией периода T . Согласно Гордону, выпуклость означает, что действие уменьшается, если мы заменим два предыдущих движения одним столкновительно-испускающим решением, начинающимся и заканчивающимся при отсутствии промежуточных столкновений. Половина этой траектории обеспечивает инфимум действия для столкновительных траекторий в момент времени T для задачи Кеплера. Что и требовалось доказать.

Следующая лемма вводит свободную от столкновений контрольную траекторию и сводит доказательство утверждения к оценке длины ее проекции на форм-сферу ℓ_0 .

Эквипотенциальные контрольные траектории. Зафиксируем значения $I = I_0$ и $U = U_0$, где U_0 — значение потенциальной функции в любой из эйлеровых конфигураций на сфере $I = I_0$. Эти равенства в приведенном конфигурационном пространстве определяют кривую на двумерной сфере радиуса $\sqrt{I_0}$ (см. рис. 2). Возьмем одну двенадцатую этой кривой, лежащей выше экватора, связывающего E_3 и M_1 . Пересечем эту кривую при постоянной скорости, выбрав скорость так, чтобы завершить движение в требуемое время T . Это даст нам семейство приведенных контрольных траекторий в $\mathcal{X}/SO(2)$, зависящих от I_0 . Соответствующими траекториями в $\mathcal{X}$ являются такие траектории, которые имеют нулевой момент количества движения и проектируются на полученные выше траектории в $\mathcal{X}/SO(2)$. Длины траекторий в $\mathcal{X}$ равны $\ell_0\sqrt{I_0}$, где ℓ_0 — длина траектории при $I_0 = 1$, в последующем называемая «эквипотенциальной длиной Эйлера».

Лемма 2. *Минимум действия эквипотенциальных контрольных траекторий a меньше A_2 , инфимума действий траекторий столкновений в момент времени T , тогда и только тогда, когда эквипотенциальная длина Эйлера ℓ_0 удовлетворяет неравенству*

$$\ell_0 < \frac{\pi}{5}.$$

Доказательство Леммы 2. Действие A_2 леммы 1 составляет половину действия столкновительно-испускающей траектории периода $2T$. Выражение для A_2 можно получить, положив, например, в [2] $k = -\frac{1}{2}$:

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times (2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\tilde{U}_2\right)^{\frac{2}{3}} (2T)^{\frac{1}{3}}; \quad \tilde{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Постоянная $\tilde{U}_2$, которая в [2] обозначена U_0 , является (постоянным) значением отмасштабированной потенциальной функции $\tilde{U} = \sqrt{IU}$ для задачи двух тел с обеими массами, равными единице.

Теперь оценим минимум действия эквипотенциальных контрольных траекторий a (точно так же, как в [2]). При вычислении действия $A(I_0)$ контрольной траектории радиуса $\sqrt{I_0}$ отметим, что оба подынтегральных выражения постоянны. Тогда действие равно

$$A(I_0) = \left(\frac{1}{2}K_0 + U_0\right)T, \quad \text{где} \quad K_0 = \left(\frac{\ell_0\sqrt{I_0}}{T}\right)^2, \quad U_0 = \frac{\tilde{U}_E}{\sqrt{I_0}}.$$

Постоянная $\tilde{U}_E = \frac{5}{\sqrt{2}}$ равна значению $\tilde{U} = \sqrt{IU}$ в эйлеровых конфигурациях. Как и в [2], осталось минимизировать функцию

$$A(I_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell_0\sqrt{I_0}}{T}\right)^2 T + \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{I_0}} T.$$

Эта функция имеет единственный минимум относительно I_0 при

$$I_0 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}\ell_0^2}\right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{4}{3}}.$$

Соответствующее действие равно

$$a = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \ell_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}}.$$

Наконец, $a < A_2$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \ell_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{2} \times 3 \times (2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\tilde{U}_2\right)^{\frac{2}{3}} (2T)^{\frac{1}{3}},$$

откуда получаем

$$\ell_0 < \frac{\sqrt{2}}{5} \tilde{U}_2 \pi = \frac{\pi}{5}.$$

5. Вычисления длины

Лемма 3. *Эквипотенциальная длина Эйлера удовлетворяет неравенству $\ell_0 < \pi/5$.*

Для получения этой оценки нам необходимы явные координаты на фактор-пространстве $\mathcal{X}/SO(2)$ и выражения для метрики и потенциальной функции в этих координатах. С помощью этих выражений можно с большой точностью численно получить оценку ℓ_0 .

5.1. Фактор-отображение.

Возьмем в качестве фактор-отображения композицию «отображения Якоби» $\mathcal{J}$ и «отображения Кустанхеймо-Штифеля» $\mathcal{K}$. Конфигурационное пространство $\mathcal{X}$ является двумерным комплексным эрмитовым векторным пространством, и, следовательно, оно изометрично $\mathbb{C}^2$. Координаты Якоби

$$\mathcal{J} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

определенные равенством

$$\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_2), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right) \right)$$

реализуют этот изоморфизм. (Напомним, что если (x_1, x_2, x_3) — точка в $\mathcal{X}$, тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.) При наличии изометрии $I = |z_1|^2 + |z_2|^2$ в этих координатах. Действие $SO(2)$ соответствует диагональному действию комплексных единичных скаляров на координатах Якоби (z_1, z_2) . То есть $\mathcal{X}/SO(2) = C^2/S^1$. Факторизация по вращениям реализуется созданием вектора из инвариантных полиномов для этого действия:

$$\mathcal{K}(z_1, z_2) = (u_1, u_2 + iu_3) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2).$$

Таким образом, мы получили отображение Кустанхеймо-Штифеля:

$$\mathcal{K} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^3.$$

Примечание. Компактное определение $\mathcal{K}$ получено с помощью отождествления $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{R}^3$) с кватернионами $\mathbb{H}$ (с чисто мнимыми кватернионами $\tilde{\mathbb{H}}$) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) &\mapsto q = z_1 + z_2 j \in \mathbb{H} \\ \mathbb{R}^3 \ni (u_1, u_2, u_3) &\mapsto u_1 i + (u_2 + iu_3)k = u_1 - u_3 j + u_2 k \in \tilde{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Тогда отображение $\mathcal{K} : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$ определено следующим образом $\mathcal{K}(q) = \bar{q}iq$.

Ниже приведены несколько свойств этих отображений:

$$|\mathcal{K}(z_1, z_2)|^2 = u_1^2 + u_1^2 + u_3^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = I^2.$$

В соответствии с *расслоением Хопфа*, $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}$ переводит трехмерную сферу $I = 1$ в единичную двумерную сферу в $\mathbb{R}^3$ (*форм-сферу*). В действительности, наша формула для $\mathcal{K}$ является стандартной формулой расслоения Хопфа при $I = 1$. Положение на сфере точек столкновения, эйлеровых точек и точек Лагранжа следующее:

$$\begin{aligned} C_1 &= (-1, 0, 0), & C_2 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & C_3 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & E_3 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ L^+ &= (0, 1, 0), & L^- &= (0, -1, 0). \end{aligned}$$

Используя полученные выше формулы, а также выражения $r_{23} = \sqrt{2}|z_1|$, $r_{31} = |\sqrt{3/2}z_2 + (1/\sqrt{2})z_1|$, $r_{12} = |\sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1|$, можно легко доказать следующую лемму:

Лемма 4. (Хсианг [5]). Вектору $u = (u_1, u_2, u_3)$ на *форм-сфере* соответствует треугольник со сторонами $r_{23} = \sqrt{1 - C_1 \cdot u}$, $r_{31} = \sqrt{1 - C_2 \cdot u}$, $r_{12} = \sqrt{1 - C_3 \cdot u}$, а скалярное произведение является обычным евклидовым в $\mathbb{R}^3$.

5.2. Метрика орбиты

Выведем формулу для приведенной метрики K_{red} с помощью вычисления расстояния $d(x, y)$ между $SO(2)$ -орбитами x и y в $\mathcal{X}$. Так как элементы $SO(2)$ действует изометрично, то

$$d^2(x, y) = \inf_{\theta} \sum_i |x_i - e^{i\theta} y_i|^2 = \inf_{\theta} [|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \sin \theta].$$

Взяв производную по θ , видим, что минимум наблюдается при $\theta = \theta_0$, для которого $x \cdot y \sin \theta_0 + \omega(x, y) \cos \theta_0 = 0$. Это означает, что

$$d^2(x, y) = |x|^2 + |y|^2 - 2\sqrt{(x \cdot y)^2 + \omega(x, y)^2} = |x|^2 + |y|^2 - 2|\langle x, y \rangle|.$$

Приведенная кинетическая энергия $K_{red}(x, v)$, соответствующая разложению $K_{red} = K - K_{rot}$, равна члену при ϵ^2 , возникающему при раскрытии выражения $d^2(x, x + \epsilon v)$. Находим

$$K_{red}(x, v) = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}.$$

Это выражение обратного образа естественно индуцированной метрики на фактор-пространство $\mathcal{X}/SO(2)$ при проецировании на него $\mathcal{X}$. Оно непротиворечиво, так как $K_{red}(x, v) = 0$, если v — касательная к орбите x , т.е. когда v пропорциональна ix .

5.3. Длина ℓ_0 в сферических координатах.

Удобно использовать сферические координаты, определенные в пространстве $\mathbb{R}^3$ с помощью равенств

$$u_1 = r^2 \cos \varphi \cos \theta, \quad u_2 = r^2 \cos \varphi \sin \theta, \quad u_3 = r^2 \sin \varphi.$$

Выполняется равенство

$$r^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = I,$$

что оправдывает выбор обозначения r . Теперь с помощью громоздкого, но простого расчета можно доказать следующую лемму:

Лемма 5 (см. [7]). *В сферических координатах фактор-метрика, соответствующая приведенной кинетической энергии K_{red} и появляющаяся в приведенном действии, задается выражением*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\cos^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2).$$

В частности форм-сфера $I = r^2 = 1$ изометрична к стандартной сфере радиуса $1/2$, а форм-пространство $\mathbb{R}^3$ является конусом над этой сферой. Сама сфера при этом состоит из всех точек, расположенных на единичном расстоянии от точки тройного столкновения.

Используя лемму 4, можно записать эквипотенциальное уравнение на форм-сфере, содержащей эйлеровы конфигурации в сферических координатах

натах (θ, φ) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}} = \tilde{U}_E = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Эта кривая дважды покрывает экватор $\varphi = 0$ и в качестве таковой ее можно параметризовать функцией $\varphi = \varphi(\theta)$ при условии, что θ меняется в интервале от 0 до 4π . Нас интересует значение ℓ_0 , составляющее одну двенадцатую его длины. Из леммы 5 следует, что

$$\ell_0 = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'^2(\theta)} d\theta.$$

Для завершения доказательства леммы 3 и, следовательно, существования точки минимума на свободной от столкновений траектории мы используем следующую численную оценку эквипотенциальной длины Эйлера ℓ_0 , полученную Карлесом Симо и позже подтвержденную Жаком Ласкаром:

$$\frac{\pi}{5.082553924511} \leq \ell_0 \leq \frac{\pi}{5.082553924509}.$$

Эти оценки получены с использованием метода Ньютона для вычисления $\varphi(\theta)$ и $\varphi'(\theta)$, и затем метода трапеции для вычисления интеграла.

Примечание. Объясним значение сферических координат в терминах треугольников. Параллели или «широты» $\varphi = \text{const}$ в форм-сфере соответствуют треугольникам с одинаковой ориентацией и одинаковым эллипсоидом инерции с точностью до вращения. Несомненно, это множество треугольников характеризуется общей площадью (см. [1]). Но площадь пропорциональна $\text{Im} \bar{z}_1 z_2$, то есть $u_3 = \sin \varphi$, функции высоты на сфере. Меридианы или «долготы» $\theta = \text{const}$ в форм-сфере определены линейной зависимостью между квадратами взаимных расстояний. Эти свойства координат (θ, φ) являются следствием инвариантности метрики под действием ортогональной группы $O(\mathcal{D})$ пространства расположений $\mathcal{D}$ (см. определение в [1]). Равносторонние треугольники $L_{\pm}$ (северный и южный полюса) — неподвижные точки при действии $SO(\mathcal{D})$, а параллельные окружности с

центрами в $L_{\pm}$ являются орбитами при действии $SO(\mathcal{D})$. Геодезические линии, проходящие через $L_{\pm}$, ортогональны этим окружностям и образуют меридианы. Они транзитивно преобразуются друг в друга посредством $SO(\mathcal{D})$, и каждый задан симметрией в $O(\mathcal{D})$.

6. Симметрии: доказательство существования «восьмерки»

Напомним действие группы Клейна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}^2$. Если σ и τ — образующие, то

$$\sigma \cdot t = t + \frac{\bar{T}}{2}, \quad \tau \cdot t = -t + \frac{\bar{T}}{2}, \quad \sigma \cdot (x, y), \quad \tau \cdot (x, y) = (x, -y).$$

Лемма 6. *После симметризации в соответствии с эквипотенциальной кривой Эйлера на форм-сфере минимизирующая траектория x определяет периодическую петлю $\bar{T} = 12T$ (все еще называемую x), с нулевым моментом количества движения, которая с точностью до сдвига времени и вращения пространства, имеет вид*

$$x(t) = (q(t), q(t + \bar{T}/3), q(t + 2\bar{T}/3)),$$

описанный в теореме.

Доказательство леммы 6 состоит из трех шагов.

Шаг 1. Заметим, что минимизирующая дуга ортогональна обоим многообразиям E_3 и M_1 , ограничивающим ее концевые точки. Это следует из граничного члена, появляющегося в формуле для первой вариации действия.

Шаг 2. Заметим, что при отражении этой дуги относительно одного из трех меридианов или экватора мы получим еще одну дугу, минимизирующую действие, дугу с переставленными условиями концевых точек; например, с E_i и I_k вместо E_3 и M_1 . Используя эти отражения, строим полностью замкнутую кривую решения в приведенном конфигурационном пространстве. Оно состоит из 12 частичных дуг, все они конгруэнтны нашей первоначальной точке минимума. Ортогональность обеспечивает их гладкое соединение друг с другом, таким образом образуя единственное решение.

Рассмотрим теперь более подробно эту процедуру. Ввиду того что отражение относительно меридиана M_1 является симметрией приведенного действия (и следовательно, уравнений) и так как минимизирующая дуга

ортогональна меридиану в его концевой точке, когда мы продолжаем решение, представленное дугой через меридиан M_1 , то результат окажется тот же самый, как если бы мы отразили его относительно меридиана и затем обратили направление времени. То есть $x(\bar{T}/12 + t) = s_1(x(\bar{T}/12 - t))$, где s_1 — отражение относительно меридиана M_1 , и где $\bar{T} = 12T$ будет периодом полной орбиты. (T — время, которое требуется, чтобы попасть на меридиан.)

Отражение s_1 можно выполнить в инерциальной плоскости следующим образом: в момент времени $T = \bar{T}/12$ треугольник является равнобедренным типа M_1 и, следовательно, имеет зеркальную симметрию τ . Выберем координаты в $\mathbb{R}^2$ так чтобы $\tau(x, y) = (x, -y)$, т.е. так, чтобы перпендикуляр, делящий пополам грань, соединяющую тела 2 и 3, являлся осью x . Пусть $S_1(x_1, x_3, x_2)$ — операция перестановки масс 2 и 3. Тогда $s_1 = S_1 \circ \tau = \tau \circ S_1$.

Таким образом, получили решение от E_3 до E_2 за время $2T = \bar{T}/6$. С помощью аналогичного рассуждения для продолжения этой дуги решения за E_2 мы должны выполнить полуповорот H_2 относительно E_2 и обратить время: $x(-t) = H_2(x(t))$. Полуповорот — это симметрия действия, являющаяся композицией отражения относительно экватора и отражения относительно меридиана M_2 . В инерциальной системе оно соответствует перестановке масс 1 и 3, и затем выполнению инерциального полуповорота $\sigma \circ \tau(x, y) = (-x, -y)$ относительно начала координат.

Таким образом, получаем дугу решения от E_3 до E_1 за время $4T = \bar{T}/3$.

Продолжая далее, используя соответствующие отражения или полуповороты вокруг экватора, мы строим гладкую кривую в приведенном конфигурационном пространстве, которое состоит из 12 конгруэнтных арок, чередующихся парами выше и ниже экватора. Таким образом получаем $\bar{T}$ -периодическую по модулю вращения траекторию, имеющую ту же симметрию, что и эквипотенциальная кривая.

Шаг 3. До сих пор мы рассматривали проекции нашей кривой решения на приведенное конфигурационное пространство. Достроим теперь полную кривую в $\mathcal{X}$, т.е. включающую инерциальные движения, и докажем, что получившаяся кривая удовлетворяет всем свойствам, описанным в теореме. Выполним доказательство, используя правило площадей и симметрии кривой для реконструирования первоначальной динамики по приведенной.

На рис. 3 показаны сегменты приведенной орбиты на форм-сфере и ожидаемая реконструированная орбита в инерциальной системе.

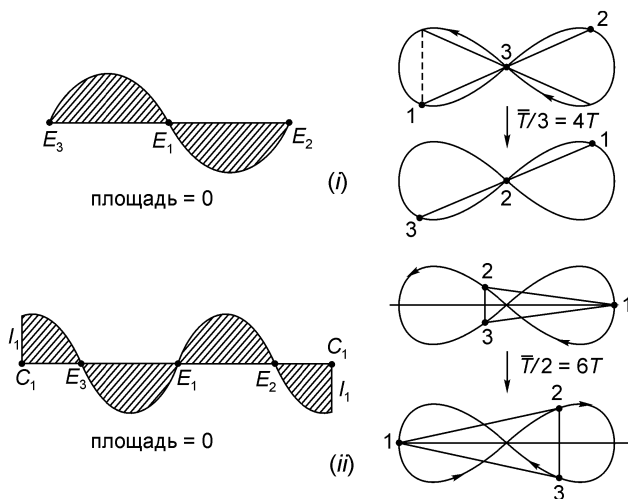


Рис. 3.

Правило площадей позволяет нам восстановить движение тел в инерциальной плоскости, по кривой, представляющей это движение на форм-сфере. Предположим, что кривая на форм-сфере замкнута. Тогда исходный и конечный треугольники в плоскости подобны. Угол вращения, который связывает эти два треугольника с точностью до масштаба, равен удвоенной сферической площади, ограниченной замкнутой кривой. (Площадь сферы радиуса $1/2$ равна π . Множитель 2 в формуле площади обеспечивает хорошо определенный ответ по модулю 2π .) Доказательство правила площадей см., например, в [9], а также в указанных там работах. Если напротив, кривая формы не замкнута, а начинается и кончается на экваторе, соответствующем коллинеарным конфигурациям, то мы замыкаем ее, перемещаясь «назад» вдоль экватора от конечной точки до исходной. А затем вычисляем двойную площадь со знаком, окруженную этой замкнутой кривой. Для любой кривой нулевого количества движения на форм-сфере она равняется углу между двумя линиями в инерциальной плоскости, которые содержат исходную и конечную конфигурации². Наконец, если кривая начинается или

²Существует два способа сомкнуть кривую в петлю в зависимости от способа, которым мы перемещаемся по экватору. Оба подобным образом вычисленные углы отличаются на π , что равно двум площадям полусферы радиуса одна вторая. Однако это не представляет затруд-

заканчивается на одном из наших трех равнобедренных меридианов, мы можем рассчитать угол между начальной и конечной осью симметрии равнобедренного треугольника, двигаясь вверх или вниз по соответствующему меридиану, а затем вдоль экватора, чтобы замкнуть кривую и вычислить площадь.

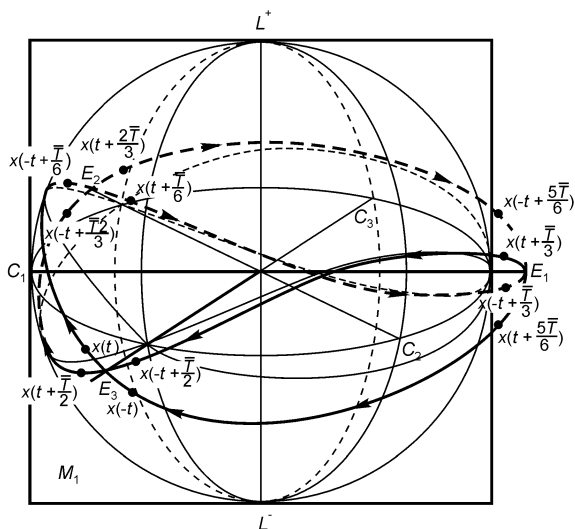


Рис. 4.

Тот факт, что снабженные знаком площади, показанные на рисунке, равны нулю, означает, что при перемещении вдоль кривой решения имеют место следующие свойства:

а) если мы начинаем с эйлеровой конфигурации и следуем вдоль траектории в течение времени $\bar{T}/3 = 4T$, проходя через промежуточную эйлерову конфигурацию в момент времени $2T$, то достигаем эйлеровой конфигурации с тремя массами, расположенными на той же линии, что и линия исходной эйлеровой конфигурации. То есть в данном случае отсутствует вращение эйлеровой линии, в противоположность тому, что происходило в промежуточное время $2T$;

нений, поскольку угол между двумя неориентированными линиями определяется только по модулю π .

б) через время $\bar{T}/2$ равнобедренная конфигурация возвращается к себе с точностью до отражения (или, что то же самое, с точность до перестановки симметричных вершин). В этом случае отсутствует вращение оси симметрии треугольника.

Выберем начало отсчета времени $t = 0$ так, чтобы оно соответствовало эйлеровой конфигурации E_3 . Установим $q(t) = x_3(t)$, где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ — наше решение. Первое свойство означает, что

$$\begin{cases} q(t) = x_3(t) \text{ для } 0 \leq t \leq \bar{T}/3, \\ q(t) = x_2(t - \bar{T}/3) \text{ для } \bar{T}/3 \leq t \leq 2\bar{T}/3, \\ q(t) = x_1(t - 2\bar{T}/3) \text{ для } 2\bar{T}/3 \leq t \leq \bar{T} \end{cases}$$

Таким образом, через время $\bar{T}/3$ ($2\bar{T}/3$) тела 2, 3, 1 заменяются телами 3, 1, 2 (1, 2, 3) с теми же скоростями. Все три тела двигаются вдоль одной и той же замкнутой кривой $q(t)$ периода $\bar{T}$ со сдвигом по фазе относительно друг друга. Из б) легко вытекает симметрия Клейна полученной кривой.

На рис. 4 показана проекция (все еще называемая x) орбиты в приведенном конфигурационном пространстве.

Приложение 1. Оценки

Получим оценки на U и K , из которых после установления симметрии полной периодической траектории (следующей из того, что периодическая орбита, построенная на основе минимизирующей траектории, неизбежно имеет нулевое среднее) можно получить оценки на I и J .

Пусть

$$I_0 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}\ell_0^2} \right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{4}{3}}, \quad U_0 = K_0 = \frac{\ell_0^2 I_0}{T^2}$$

определены как выше и

$$H_0 = \frac{1}{2}K_0 - U_0 = -\frac{1}{2}U_0, \quad a = \left(\frac{1}{2}K_0 + U_0\right)T = \frac{3}{2}U_0T = -3H_0T, \\ J_0 = \sqrt{I_0 K_0}.$$

Пусть $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$ — математическое ожидание (среднее значение) функции $[0, T] \rightarrow R$.

Лемма 7. Минимизирующая траектория удовлетворяет следующим оценкам:

$$\langle U \rangle = \langle K \rangle < U_0 = K_0, \quad H > H_0, \quad \langle I \rangle < \frac{36\ell_0^2}{\pi^2} I_0, \quad \langle |J| \rangle < \frac{6\ell_0}{\pi} J_0.$$

Доказательство леммы 7. Вследствие того, что энергия сохраняется почти везде на минимизирующей траектории³, такая траектория x имеет действие

$$\mathcal{A}(x) = HT + 2\langle U \rangle T < a = H_0 T + 2U_0 T.$$

Исходя из тождества Лагранжа-Якоби $\dot{J} = \frac{1}{2}\ddot{I} = 2H + U = K - U$, получим

$$\langle K \rangle - \langle U \rangle = J(T) - J(0).$$

Вследствие симметрии минимизирующей траектории $J(T) = J(0) = 0$ (заметим, что возможное наличие двойного столкновения в конце траектории не изменило бы это обстоятельство, потому что тогда $J(t)$ вело бы себя как $(T - t)^{\frac{1}{3}}$, которое равно нулю при $t = T$). Это означает

$$\langle K \rangle = \langle U \rangle = -2H,$$

так что

$$\mathcal{A}(x) = -3HT < a = -3H_0 T, \quad \text{следовательно} \quad H > H_0.$$

Из этого непосредственно вытекают неравенства относительно $\langle U \rangle$ и $\langle K \rangle$.

Для ограничения $\langle I \rangle$ заметим, что по построению наш x имеет нулевое среднее (в $\mathcal{X}$) по полному периоду $12T$. По лемме Пуанкаре это означает

$$\langle K \rangle > \frac{4\pi^2}{(12T)^2} \langle I \rangle \text{ и, следовательно, мы получаем оценку на } \langle I \rangle.$$

Наконец, неравенство Зундмана $IK - J^2 \geq 0$ дает границу для $\langle |J| \rangle$.

Численное вычисление действия К. Симо

К. Симо получил следующие численные оценки различных важных действий. Период здесь взят равным $T = 2\pi/12$.

$$A_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \frac{\pi}{2} = 2.0583255 \dots,$$

$$a = A(\text{test}) = (225\pi\ell_0^2/32)^{1/3} = 2.0359863 \dots,$$

$$A_{\min} = A(\text{решение}) = 2.0309938 \dots$$

³Этот классический результат можно доказать, вычислив изменение действия за счет изменения параметризации.

Интересно отметить, что действие любого элемента Λ , испытывающего тройное столкновение, намного выше. Несомненно, неравенство Зундмана означает, что оно выше действия A_3 равностороннего гомотетичного решения от столкновения к нулевой скорости. Это последнее действие определено той же формулой, что и A_2 , при этом полагается $\tilde{U}_3 = 3$, а в выражение для $\tilde{U}$ в равносторонней конфигурации подставляется $\tilde{U}_2 = 1/\sqrt{2}$. Таким образом, получаем

$$A_3 = (3\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} \times A_2 = 5.39433 \dots$$

Приложение 2. Как была открыта эта орбита

В течение нескольких лет один из авторов (Р. Монтгомери) искал периодические орбиты в задаче трех тел, используя метод минимизации действия над хорошо выбранными гомотопическими классами петель в конфигурационном пространстве. (См. [7], где удалось избежать проблемы столкновения с помощью гипотезы сильного взаимодействия и где описаны потенциально интересные гомотопические классы). Приблизительно в то же время оба автора независимо осознали, что равенство масс может сделать вариационный подход более разрешимым, позволив нам наложить дополнительные симметрии на допустимые петли. Это привело к появлению препринта [3], написанного А. Шенсине и А. Вентурелли, представленного к публикации в *Celestial Mechanics*, где были найдены новые периодические орбиты для пространственной задачи четырех тел с равными массами, и препринта [8], представленного Р. Монтгомери в *Nonlinearity*. А. Шенсине попросили выступить в качестве рецензента препринта [8], озаглавленного «Фигура в форме восьмерок в задаче трех тел», где описаны два различных типа периодических орбит задачи трех тел в соответствии с тем, являются ли все массы равными или равны только две из них. Тщательное исследование А. Шенсине и А. Вентурелли выдержала только орбита для равных масс. Относительно другой орбиты, которая, как ни странно, дала название статье, было высказано предположение, что она является восьмеркой не на плоскости, а на форм-сфере. Однако в доказательстве отсутствия столкновений для этой орбиты была найдена ошибка. Пытаясь понять случай равных масс, А. Шенсине обнаружил, сначала экспериментально, а затем математически, что три равных массы должны перемещаться вдоль неподвижной кривой в форме восьмерки в плоскости. Это открытие дало новую жизнь названию препринта. Численный эксперимент вырос из примера, названного «аттрак-

тор фигуры восьмерки» в прекрасной программе «Гравитация» Джеффа Роммерейде. Успех эксперимента обусловлен ограничениями, наложенными на скорости v в любой эйлеровой точке орбиты. Эти ограничения, изображенные на рис. 1 для E_3 как $v_1 = v_2 = -v_3/2$, существуют благодаря тому, что момент количества движения нулевой и что каждая эйлерова конфигурация является экстремумом момента инерции I вдоль орбиты: $dI(v) = 0$. Наложив более строгие ограничения на симметрии орбиты, чем это сделал Р. Монтгомери, А. Шенсине затем смог дать прямое и простое доказательство, частично в духе [2], отсутствия тройных столкновений, и получить оценки для I и U вдоль орбиты. Наконец, Р. Монтгомери обратил внимание на прием пренебрежения одной из масс, что позволило вычисления для тройных столкновений распространить на двойные столкновения и полностью обойти любой локальный вариационный анализ. Точные численные расчеты Карлеса Симо, с использованием специальной формы скоростей при эйлеровой конфигурации, дали точные картины восьмерки и доказали, в частности, ее «устойчивость»⁴.

Благодарности. Авторы сердечно благодарят Андреа Вентурелли и Карлеса Симо за многочисленные дискуссии, разъясняющие многие проблемы, и еще раз Карла Симо за его решающую помощь в численных расчетах. А. Шенсине также сердечно благодарит Жана Петито, который несколько лет назад дал ему программу «Гравитация». Р. Монтгомери благодарит Нейла Балмфорта за помощь в наглядном представлении восьмерки и Джулиану Барбур за вдохновившую его беседу. Наконец, выражаем благодарность редактору журнала *Nonlinearity* Жаку Ласкару, который разрешил рецензенту [8] связаться с автором.

Литература

- [1] A. Albouy et A. Chenciner *Le problème des n corps et les distances mutuelles*, *Inventiones Mathematicae*, v. 131, 151–184 (1998).

⁴Это особенно интересно, потому что в задаче трех тел с равными массами известно очень немного устойчивых периодических орбит. Кроме решений задачи 2 тел с удаленной третьей массой, единственным известным примером, по-видимому, является коллинеарная орбита Шубарта: *Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem*, *Astronomische Nachrichten* vol. 283, pp. 17–22, 1956 (благодарим К.Симо за этот источник). Одна четвертая этой орбиты перемещается коллинеарно от E_3 к C_1 . В некотором роде «восьмерку» можно считать (большим) возмущением орбиты, которая возникла бы из орбиты Шубарта посредством столкновения сталкивающихся тел при каждом из столкновений.

- [2] A. Chenciner et N. Desolneux *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de n corps*, C.R.A.S. t. 326, Série I, 1209–1212, (1998) and t. 327, Série I, p. 193, (1998).
- [3] A. Chenciner et A. Venturelli, *Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses'egales dans R^3 : orbites «hip-hop»*, submitted to Celestial Mechanics, November 1999.
- [4] W.B. Gordon, *A minimizing property of keplerian orbits*, American Journal of Mathematics, vol. 99, n^o5, 961–971, (1970).
- [5] W. Y. Hsiang, *Geometric study of the three-body problem, I*, CPAM-620, Center for Pure and Applied Mathematics, University of California, Berkeley, (1994).
- [6] R. Moeckel, *Some qualitative features of the three-body problem*, *Contemporary Mathematics*, vol. 81, 1–21, (1988).
- [7] R. Montgomery, *The N -body problem, the braid group, and action-minimizing periodic solutions*, *Nonlinearity*, v. 11, 363–376, (1998).
- [8] R. Montgomery, *Figure 8s with three bodies*, preprint, August 1999.
- [9] R. Montgomery, *The geometric phase of the three body problem*, *Nonlinearity*, v. 9, 1341–1360, (1996), особенно раздел 1.2.

Простые хореографические движения N тел: предварительное изучение^{*}

А. ШЕНСИНЕ

Département de Mathématiques,
Université Paris VII-Denis Diderot,
16, rue Clisson, 75013 Paris, France.
chencinedbl.fr

Р. МОНТГОМЕРИ

Mathematics Dept. UCSC,
Santa Cruz, CA 95064 USA.
rmontmath.ucsc.edu

К. СИМО

Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

ДЖ. ДжЕРВЕР

Department of Mathematics
Rutgers University
Camden, NJ 08102, USA.
gerver@crab.rutgers.edu

«Простыми хореографиями» в задаче N тел называются такие периодические решения, при которых все N масс движутся вдоль одной и той же кривой, не сталкиваясь друг с другом. Мы будем считать, что все массы равны, а сдвиг фаз между соседними телами остается постоянным.

Первая хореография из трех тел для ньютоновского потенциала, после лагранжевых решений, была найдена А. Шенсине и Р. Монтгомери в декабре 1999 года [3]. В данной статье доказывается существование плоских простых хореографий N тел произвольной сложности и/или симметрии для любого N с потенциалом сильного взаимодействия (ведущим себя как $1/r^a$, где $a \geq 2$ при $r \rightarrow 0$). Доказательство существования простых хореографий в случае ньютоновского потенциала оказалось более сложным и не было нами проведено. Вместо этого мы приводим результаты численных исследований простых ньютоновских хореографий, а также

^{*}A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery, C. Simó. *Simple choreographic motions of n bodies: a preliminary study*. Preprint. Перевод Килина А. А.

эволюции некоторых простых хореографий с потенциалом $1/r^a$ при изменении показателя a . При этом мы акцентируемся на простых хореографиях, точно существующих при $a \geq 2$ и исчезающих при стремлении a к единице.

1. Введение

Ниже мы докажем существование новых семейств периодических решений задачи N тел, когда все N масс движутся вдоль фиксированной кривой на плоскости. Эти решения имеют привлекательный вид и интересны с топологической точки зрения. Они приведены ниже на рисунках, хотя лучше всего их рассматривать в анимированном варианте¹.

Уравнения движения задачи N тел с равными массами имеют вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \nabla_i U(x_1, \dots, x_N), \quad (1)$$

где $U(x) = U(x_1, \dots, x_N)$ — потенциальная энергия, взятая с обратным знаком. Векторы $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \dots, N$ задают положения N тел в $\mathbb{R}^d$. Мы будем рассматривать только плоский случай $d = 2$. Также мы положим все массы равными единице, а U возьмем в виде

$$U(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} f(r_{ij}), \quad (2)$$

где $r_{ij} = |x_i - x_j|$ — расстояния между i -м и j -м телами, а *двухчастичный потенциал* $f(r)$ является гладкой неотрицательной функцией $r > 0$, бесконечно растущей при стремлении r к нулю. Потенциал является ньютоновским, если $f = c/r$ для некоторого $c > 0$.

Бесстолкновительное решение задачи N тел, при котором все массы движутся вдоль одной и той же плоской кривой с постоянными сдвигами фаз, назовем *простой хореографией*. Лагранж в 1772 году указал простую хореографию для ньютоновского потенциала в случае $N = 3$. При этом три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся как твердое тело внутри описывающей его окружности. В более общем случае расположим N тел в вершинах правильного N -угольника, вписанного в окружность с радиусом r . Закрутим получившийся N -угольник вокруг

¹Некоторые анимации, запускаемые под linux и использующие пакет gnuplot, можно найти на Internet-сайте <http://www.maia.ub.es/dsg>.

его центра с угловой скоростью ω . Полученная траектория будет являться решением задачи N тел. Для определенности выберем потенциал в виде $f(r) = c/r^a$, $c > 0$, $a > 0$. Тогда условие на радиус окружности будет иметь вид

$$r\omega^2 = \frac{ac}{r^{a+1}}\sigma_{a,N} \quad \text{where} \quad \sigma_{a,N} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(2 \sin \frac{j\pi}{N}\right)^{-a}.$$

Такое решение мы назовем *тривиальной круговой простой хореографией*.

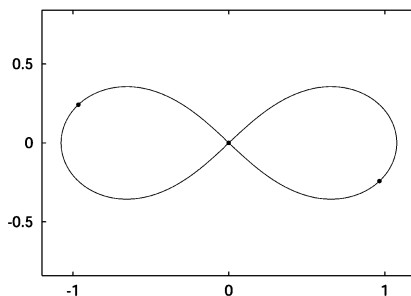


Рис. 1. Три тела, лежащие на «восьмерке»

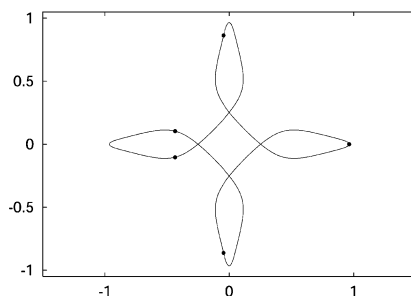


Рис. 2. Пять тел, лежащие на четырехлепестковом цветке

В декабре 1999 года двое из нас (А.Шенсине и Р.Монтгомери [3]) нашли другую простую хореографию в задаче трех тел с ньютоновским потенциалом. В этой хореографии тела движутся вдоль фиксированной плоской кривой в форме восьмерки (см. рис. 1а). Эта восьмерка вызвала целый шквал работ. Вскоре после ее нахождения еще один из авторов

(Дж. Джервер) задался вопросом, можно ли обобщить найденное решение на другие кривые типа фигур Лиссажу. Вскоре он нашел начальные условия для $N = 4$ с ньютоновским потенциалом, которые приводят к простой «цепочечной» хореографии (см. рис. reffourfig1b). В этом случае четыре тела в каждый момент времени образуют параллелограмм. Затем К. Симо, четвертый из авторов, численно нашел целое множество решений, когда тела движутся вдоль одной и той же кривой. Причем вид этой кривой может быть совершенно различным (см. рис. 3, 4). К. Симо также ввел название «хореографии», которое появилось из-за того, что при анимации тела совершают танцеподобные движения. Прилагательное «простые» отражает тот факт, что все тела движутся вдоль одной кривой. «Сложными» назовем хореографии соответствующие случаю, когда тела движутся вдоль нескольких различных траекторий. Так как в данной статье мы рассматриваем только простые хореографии, то мы зачастую будем опускать слово «простые». В настоящее время найдены сотни ньютоновских хореографических решений, причем число «различных» хореографий быстро возрастает при увеличении N . Наибольшее число N , для которого найдены хореографические конфигурации, равно 799, при этом все тела движутся вдоль восьмеркообразной кривой.

Когда мы говорим «различные», мы считаем только так называемые «основные» хореографии, которые нельзя получить из заданной, ни проходя ее несколько раз (субгармоники), ни методом продолжения по угловому моменту, ни какой-либо комбинацией этих способов. Точное определение «основной» и «сопутствующей» хореографий, а также примеры и соответствующие вычисления будут приведены в п. 5.

Следствие 1. *Для любого $N \geq 3$ существует основное простое хореографическое решение задачи N тел равных масс с ньютоновским потенциалом, отличное от тривиальной круговой хореографии. Число таких «различных» основных простых хореографий быстро растет при увеличении N .*

Мы докажем это предположение, но только для случая, когда двухчастичный ньютоновский потенциал $f = 1/r$ заменяется на потенциал сильного взаимодействия, такая замена была предложена еще А. Пуанкаре [15]. Более точная формулировка приведена ниже в теореме 2.2. В случае потенциала *сильного взаимодействия* существуют положительные константы c, δ такие, что двухчастичный потенциал f удовлетворяет неравенству:

$$f(r) \geq c/r^2 \text{ при } r < \delta. \quad (3)$$

Наложение условия сильного взаимодействия позволяет обойти основные сложности в доказательстве существования простых хореографий, которые заключаются в доказательстве ограниченности действия для столкновительных траекторий. Такие столкновительные решения присутствуют в ньютоновском случае, а также и для любого потенциала $f(r) = 1/r^a$ при $a < 2$. Основной интерес, конечно, представляет обоснование существования ньютоновских хореографий. К этому вопросу мы обратимся в последующих статьях.

1.1. Литература

Поиск периодических решений задачи N тел в случае равных масс является более легким, нежели в общем случае ввиду перестановочной симметрии тел. Это наблюдение впервые явно (но только в пространственном случае) было приведено в статье И. Дэвиса, А. Трумана и Д. Вильямса [5]. Среди прочего, авторы искали периодические решения задачи N тел в R^3 с ньютоновским потенциалом в случае равных масс, когда в каждый момент конфигурации инвариантны относительно обращения ориентации. После исключения вращения ими была получена система с двумя степенями свободы, параметризованная угловым моментом (симплектическая редукция). После чего они искали периодические орбиты, проекции которых на редуцированное фазовое пространство являются «тормозными траекториями». Тормозные траектории — это такие периодические траектории, образ которых проходит некоторый интервал, затем постепенно останавливается (тормозит) до нулевой (редуцированной) скорости и в конце этого интервала меняет направление движения.

Надлежащим образом начиная периодическое решение нередуцированной системы, период редуцированной (тормозной) траектории может быть выбран в резонансе с периодом вращения системы. Существование таких резонансных тормозных траекторий было обосновано только численно. Периодические решения подобного вида недавно были открыты заново по меньшей мере дважды: «клубки», численно найденные Ояном (Hoanant) [9], априори включающие бесконечное множество примеров, в которых по крайней мере четыре тела движутся вдоль одной и той же пространственной кривой, и «хип-хоп» — бесстолкновительные траектории, минимизирующие действие с соответствующими свойствами симметрии, существование которых доказали А. Шенсине и А. Вентурелли в [4]. Статья И. Дэвиса, А. Трумана и Д. Вильямса побудила И. Стюарта систематически исследовать методы симметрии в задаче N тел с несингулярным потенциалом [18].

Еще об одной важной статье К. Мура [13] мы узнали, когда наша статья была уже почти готова. К. Мур исследовал возможность образования периодическими решениями плоской задачи N тел чистых кос из N прядей. Простые хореографии соответствуют определенному специальному типу кос, следовательно, статья К. Мура имеет непосредственное отношение к нашей статье. В его статье используется метод градиентного потока для функционала действия. Им был получен результат, переоткрытый позднее Р. Монтгомери [11] о том, что любой «запутанный» тип косы может быть реализован в случае потенциала сильного взаимодействия. К. Мур утверждает, что существование решения в виде восьмерки в ньютоновском случае основано на численном исследовании сходимости градиентного потока и обсуждает его динамическую устойчивость. Он также обсуждает зависимость хореографических решений (в том числе их существование или исчезновение) от показателя a в функции $f = 1/r^a$, таким образом предвосхищая обсуждение в разделе 6 настоящей статьи.

Практическое применение «восьмерки» уже начинает появляться. Д. К. Хегги в [6] привел численное доказательство, что такое решение может появиться в результате взаимодействия двух пар тел.

2. Простые хореографии. Теорема

Нас интересуют периодические решения, в которых все N тел движутся вдоль одной и той же кривой $q(t)$ с некоторым периодом, величина которого нас интересовать не будет. Доказательства, приведенные ниже, остаются верны для решений любого периода. Более того, в случае однородного потенциала масштабирование позволяет получить требуемый период. Для удобства выберем период равным N . Таким образом, мы будем искать решения задачи N тел в виде

$$x_j(t) = q(t + j), j = 0, \dots, N - 1 \quad (4)$$

где $q(t) = q(t + N)$ (см. [3]).

Будем говорить, что траектория имеет *столкновение*, если для некоторого времени t и целого числа $i = 1, \dots, N - 1$ выполняется равенство $q(t) = q(t + i)$. Нас интересуют решения без столкновений. Пусть $\mathcal{C} = C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ — множество всех непрерывных кривых $q: \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ с C^0 -топологией. Определим подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ как множество всех кривых со столкновениями.

Определение 1. Класс простых хореографий является компонентой множества $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$.

Основным теоретическим результатом этой статьи является

Theorem 2. Для любого заданного класса простых хореографий существует периодическое решение плоской задачи N тел с потенциалом сильного взаимодействия (3), которое принадлежит данному классу.

Сравните с [13, 11], где обосновываются похожие результаты для произвольных классов кос.

Примеры простых хореографий приведены на рисунках в данной статье. Большинство из них относятся к случаю ньютоновского потенциала. В статье [16] К. Симо привел некоторые другие семейства хореографий. В разделе 5 доказывается, что число «основных» простых хореографий возрастает по крайней мере экспоненциально с ростом N .

2.1. Альтернативное описание

Существует еще одно описание простых хореографий (см.[1]). Конфигурационным пространством для плоской задачи N тел является $\mathbb{C}^N$. Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/N\mathbb{Z}$ длины N на плоскости. Впишем в $\mathbb{S}^1$ правильный N -угольник с вершинами, пронумерованными в круговом порядке, при этом вершине на положительной оси x присвоим номер 0. Образ вершины j при действии отображения $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ соответствует начальному положению $x_j(0)$ массы j , $j = 0, 1, \dots, N-1$. Так как N -угольник движется как твердое тело вместе с окружностью, то образ вершины движется по некоторой кривой в $\mathbb{C}^N$. Действие группы $\mathbb{Z}_N$ на $\mathbb{S}^1$ заключается во вращении, переводящем наш стандартный N -угольник самого в себя. При этом стандартный генератор группы γ действует на точку $t \in \mathbb{S}^1$ следующим образом $t \mapsto \gamma \circ t = t + 1$. Действие этого же генератора на $\mathbb{C}^N$ заключается в перестановке масс: $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \mapsto \gamma \circ x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_0)$.

Теперь мы приведем наиболее значительное наблюдение. Отображение $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^N$ эквивариантно относительно действия $\mathbb{Z}_N$, то есть $x(\gamma \circ t) = \gamma \circ x(t)$ тогда и только тогда, когда $x_j(t) = x_0(t + j)$. Другими словами, $\mathbb{Z}_N$ -эквивариантные отображения в $\mathbb{C}^N$ в точности соответствуют замкнутым кривым $q : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ на плоскости с соответствием заданным уравнением (4). Это определяет естественное соответствие $\mathcal{C} := C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \leftrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_{\mathbb{Z}_N}$, где индекс $\mathbb{Z}_N$ обозначает эквивариантность относительно этой группы. Более того, кривая является бесстолкновительной в указанном выше смысле тогда и только тогда, когда соответствующая

ей кривая в $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_{\mathbb{Z}_N}$ также не имеет столкновений, то есть не существует точек с $x_i = x_j$ при $i \neq j$, $i, j = 0, \dots, N-1$. Это устанавливает естественное соответствие между пространством петель $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$, рассмотренным выше, и пространством $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_{\mathbb{Z}_N}$, где $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ является множеством всех возможных столкновений между любыми из тел. (Δ иногда называется «утолщенной диагональю»). Таким образом, класс простых хореографий — это то же самое, что и компонента пространства бесстолкновительных эквивариантных петель в конфигурационном пространстве $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_{\mathbb{Z}_N}$.

2.2. Замечание по поводу наложения дополнительных симметрий

На $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{C}^N$ действуют и некоторые другие группы симметрии. Налагая эти дополнительные симметрии, мы можем получить целый набор красивых симметричных хореографических решений задачи N тел. Зафиксируем конечную группу Γ , содержащую $\mathbb{Z}_N$ и действующую и на $\mathbb{S}^1$ и на $\mathbb{C}^N$ так, что лагранжиан системы сохраняется, а ограничение действия на $\mathbb{Z}_N$ соответствует ранее определенному действию $\mathbb{Z}_N$. Заменим $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_{\mathbb{Z}_N}$ на $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_{\Gamma} \subset C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_{\mathbb{Z}_N}$ — пространство Γ -эквивариантных петель. Тогда определение классов хореографий расширяется до эквивариантных хореографических классов, а основная теорема выполняется и в эквивариантном случае.

Рассматриваемые нами группы Γ являются циклическими ($\mathbb{Z}_{Nm}$), или диэдральными (D_{Nm}) расширениями $\mathbb{Z}_N$, или их произведением на какую-либо подгруппу $O(2)$. Напомним, что группа диэдра D_k — группа симметрий правильного k -угольника, является нетривиальным расширением $\mathbb{Z}_k$ с помощью $\mathbb{Z}_2$, которое допускает представление $\{s, \sigma | s^k = 1, \sigma^2 = 1, \sigma s \sigma = s^{-1}\}$. Эти группы могут быть получены несколькими путями как полупрямые произведения. Например, D_6 является полупрямым произведением $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а D_{12} — полупрямым произведением $\mathbb{Z}_4$ на D_3 , и т. п. Определим теперь соответствующие действия. Мы будем рассматривать действие D_k на $\mathbb{S}^1$ (длины N), определенное выражением: $s \cdot t = t + N/k$, $\sigma \cdot t = -t$, хотя можно также рассматривать и другие действия на $\mathbb{C}^N$. Единственным условием будет ограничение действия на нормальную подгруппу $\mathbb{Z}_N$ (образованную s^m) определенную в 2.1, как

$$s^m \cdot (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_0).$$

Возьмем например $N = 3$ и $\Gamma = D_6$. В качестве первого действия D_6 на $\mathbb{C}^3$

определим

$$s \cdot (x_0, x_1, x_2) = (-x_2, -x_0, -x_1), \quad \sigma \cdot (x_0, x_1, x_2) = (\bar{x}_0, \bar{x}_2, \bar{x}_1).$$

В качестве второго возьмем

$$s \cdot (x_0, x_1, x_2) = (-\bar{x}_2, -\bar{x}_0, -\bar{x}_1), \quad \sigma \cdot (x_0, x_1, x_2) = (-x_0, -x_2, -x_1).$$

Примером эквивариантной петли для первого действия D_6 является лагранжево треугольное решение, когда три тела движутся друг за другом по кругу, причем в начальный момент времени x_0 лежит на пересечении окружности и положительной части горизонтальной (действительной) оси. Примером эквивариантной петли для второго действия является восьмерка, с x_0 , в начальный момент времени лежащим в начале координат. Заметим, что, напротив, и «супервосьмерка» с четырьмя телами (рис. 3б), и решение относительного равновесия, когда все четыре тела образуют квадрат и движутся друг за другом по окружности, эквивариантны относительно действия группы $D_4 \times \mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^4$. (Несмотря на то, что эти два решения представляют разные топологические или хореографические классы.)

Плоские хореографии с k -кратной диэдральной симметрией имеют вид цветка с k лепестками (см. рис. 2, 3с и 4е), или, если лепестки перекрываются, выглядят как рисунки, нарисованные с помощью детской игрушки спирографа.

Определение и представления соответствующих групп Γ мы оставляем читателю (например, в случае представленном на рис. 3с группой симметрий является D_{12} , для более детального изучения см. [1]).

3. Доказательство

За исключением случая рассмотрения (фундаментальной) симметрии, приведенное ниже доказательство по существу следует [15] со следующими несущественными различиями: Пуанкаре рассматривал гомологии, а не гомотопии и искал периодические орбиты во вращающейся системе координат.

Мы используем прямой метод вычисления вариаций (более подробно см. в [12]). Действие задачи N тел задается выражением

$$A(x) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} K(\dot{x}(t)) + U(x(t)) \right] dt, \quad (5)$$

где $T = N$, $K(\dot{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} |\dot{x}_i|^2$, а $U(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} f(|x_i - x_j|)$ с f взятой из (3). Если $U(x) \geq 0$ (что мы будем предполагать в дальнейшем), и если действие кривой x конечно, то производная $\dot{x}$ является квадратично интегрируемой, то есть принадлежит пространству Соболева $x \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)$. Если x — критическая точкой A , не содержащая столкновений, то x является N -периодическим решением (1). Данное утверждение является основным и хорошо известным результатом механики и вариационного исчисления. Столкновения необходимо исключить, поскольку в этом случае уравнение (1) нарушается, а действие на траектории со столкновениями является недифференцируемым даже тогда, когда потенциал (например, ньютоновский) является регуляризуемым.

В соответствии с «принципом симметрической критичности» (см., например, [14]) это утверждение выполняется и для Γ -эквивариантных путей. Более точно, пусть Γ — конечная группа изометрий действующая на $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{C}^N$ так, что потенциал U сохраняется. Тогда Γ сохраняет лагранжиан, и, следовательно, оставляет действие неизменным: $A(x) = A(g \circ x)$ при $g \in \Gamma$. Пусть $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_\Gamma \subset H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)$ — множество всех эквивариантных путей с квадратично интегрируемой производной. Предположим, что x является безстолкновительной, и что $dA(x)(v) = 0$ для всех $v \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_\Gamma$. Тогда x является решением уравнений (1). Доказательство этого утверждение использует приводимость Γ -представлений, для того чтобы показать, что $dA(x)(v) = 0$ для всех $v \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_\Gamma$, что влечет за собой $dA(x)(v) = 0$ для всех $v \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)$, а также что x является критической точкой бóльшего пространства петель $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)$ (непосредственное доказательство приведено в [1]).

Напомним, что $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N) \subset C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)$. Это один из наиболее простых примеров неравенств Соболева. Прямой метод заключается в фиксировании хореографии α , то есть компоненты α пространства $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N)_\Gamma$, пересекающейся с подпространством H^1 -путей, а затем в поиске инфимума действия $A(x)$ по всем путям x , реализующим эту хореографию.

Пренебрегая неточностью обозначений мы используем символ α , как для обозначения класса α , так и для обозначения его пересечения с пространством H^1 -путей.

$$a(\alpha) = \inf_{x \in \alpha} A(x). \quad (6)$$

Затем, определяя инфимум, мы рассматриваем последовательность $x_n \in \alpha \subset H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N \setminus \Delta)_\Gamma$, для которой $A(x_n) \rightarrow a(\alpha)$. Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что x_n стремится к решению уравнений (1), и это решение лежит внутри α .

Неравенство Соболева $|x(t) - x(s)| \leq \sqrt{\int |\dot{x}|^2 dt} \sqrt{|t - s|}$ показывает, что множество всех H^1 -путей с действием A ограничено фиксированной постоянной и образует равномерно непрерывное семейство. Также неравенство показывает, что длина ℓ любого пути $x \in \mathcal{C}$ меньше, чем $\sqrt{2A(x)}$. Без потери общности мы можем положить центр масс каждого из путей x_n тождественно равным нулю:

$$\Sigma_j x(t + j) = 0. \quad (7)$$

Теперь легко видеть, что множество всех путей ограниченной длины в $\mathcal{C}$ с центром масс в начале координат является точечно ограниченным семейством. Теорема Арцела утверждает, что любое равномерно непрерывное семейство путей в $\mathcal{C}$ содержит сходящуюся последовательность. Таким образом, без потери общности мы доказали существование кривой x_* такой, что $x_n \rightarrow x_*$ по C^0 -норме.

Основная проблема заключается в том, чтобы показать, что этот C^0 предел x_* является бесстолкновительным, или, что то же самое, что минимизирующие последовательности не могут стремиться к границе компонента α . Если это так, то предел автоматически будет принадлежать α . Тогда лемма Фату $A(x_*) \leq \liminf A(x_n)$ показывает, что x_* является минимизирующей кривой, и, следовательно, критической точкой действия, ограниченного на Γ -эквивариантные петли. Применение принцип симметрической критичности приводит к тому, что x_* является решением реализующим заданную хореографию. Бесстолкновительность x_* следует непосредственно из

Предложение 1. *Если U является потенциалом сильного взаимодействия, то любой путь с столкновениями имеет бесконечное действие.*

Доказательство. Предположим, что путь x испытывает столкновение масс i и j в момент времени t_c . Обозначим r_{ij} через r . Кинетическое слагаемое K в действии удовлетворяет неравенству $K \geq \dot{r}^2$. Поскольку x является непрерывным, то в некотором интервале времени $|t - t_c| \leq \epsilon$ вблизи столкновения $r < \delta$. Предположение о сильном взаимодействии приводит к неравенству $U \geq c/r^2$ на этом интервале. Таким образом, лагранжиан имеет вид $L = \frac{1}{2}K + U \geq \frac{1}{2}\dot{r}^2 + c/r^2$. Используя неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, мы получим, что $L \geq \sqrt{2c}|\frac{\dot{r}}{r}|$ для $|t| \leq \epsilon$. Однако $|\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{r}}{r} dt| = |\log r(t_2) - \log r(t_1)|$, а также $r(t_c) = 0$. Откуда мы заключаем, что частичное действие $\int_t^{t_c+\epsilon} L dt$ расходится по крайней мере логарифмически при $t \rightarrow t_c$, и, таким образом, действие столкновительного пути бесконечно. Что и требовалось доказать.

Замечание. Это утверждение доказано в [15] при более строгом предположении о (почти) сохранении энергии. Если быть более точным, Пуанкаре использовал тот факт, что при столкновении кинетическая и потенциальная энергии имеют один порядок величины.

4. Численные исследования

Здесь мы будем рассматривать ньютоновский потенциал. Более простые случаи (сильного взаимодействия $1/r^a$, $a \geq 2$) и более сложные ($1/r^a$, $0 < a < 1$) однородного потенциала также были успешно исследованы на счет существования простых хореографий (см. раздел 6). За исключением этого раздела все рисунки представлены для случая ньютоновского потенциала. Заметим, что также возможно естественное продолжение до логарифмического потенциала $f(r) = -\log r$, и оно лучше проводится при использовании $f(r) = 1/(ar^a)$ вместо $f(r) = 1/r^a$ при малых положительных a . Эти результаты, однако, не приводятся в настоящей статье. Все рисунки, приведенные в статье, изображают решения с периодом $T = 2\pi$. Положим $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и будем использовать $\mathbb{S}_N^1$ для $\mathbb{R}/N\mathbb{Z}$.

Для $N = 3$ известны только лагранжевы равносторонние решения, восьмерка, и несколько сопутствующих ей (см. раздел 5) решений. Далее мы будем опускать тривиальный круговой случай, в котором все N масс расположены в углах правильного N -угольника, вращающегося в описывающей его окружности. На рисунке 3 представлены некоторые простые хореографии для четырех тел. Также изображены положения тел в некоторый начальный момент времени, и значения действия, соответствующее траекториям (сравните со значением действия для круговой хореографии $A = 36.613230$). Некоторые примеры для $N = 5$ можно найти в [16].

На рис. 4 изображены простые хореографии для различных значений N . На рисунке приведена только малая часть найденных типов хореографий. Дополнительные хореографии можно найти в [16].

Для численных вычислений простых хореографий было использовано два метода: метод минимизации и метод Ньютона.

4.1. Методы минимизации

Метод минимизации основан на поиске локального минимума A . В общем нельзя быть уверенным, что значение найденного минимума равно $a(\alpha)$, см. (6). Представим кривую q в $\mathbb{R}^2$ с компонентами (u, v) , с помощью

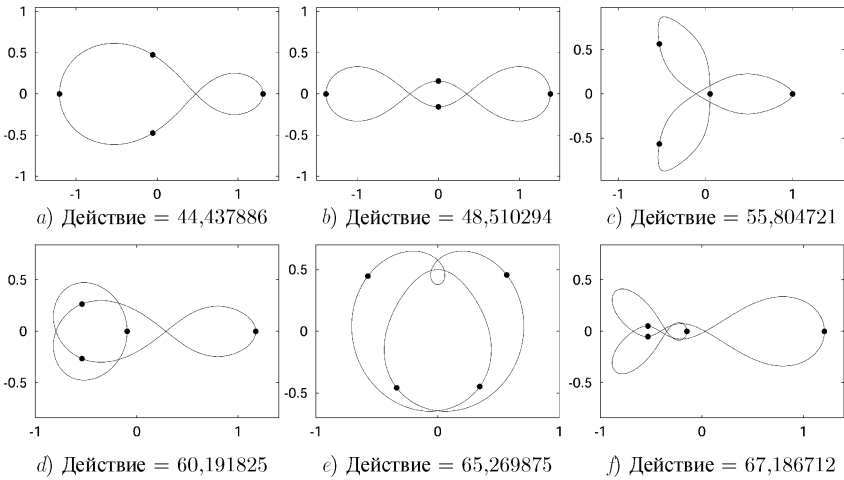


Рис. 3. Простые хореографии четырех тел с ньютоновским потенциалом

приближения $\hat{q} = (\hat{u}, \hat{v})$ следующего вида

$$\hat{u}(t) = \sum_{k=1}^M a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad \hat{v}(t) = \sum_{k=1}^M c_k \cos(kt) + d_k \sin(kt). \quad (8)$$

В момент времени t тела расположены в точках $q(t + 2\pi j/N)$, $j = 0, \dots, N-1$ со скоростями $\dot{q}(t + 2\pi j/N)$. Подставим эти значения в (5). Интеграл $\int_{\mathbb{S}^1} L(\hat{q}(t), d\hat{q}/dt) dt$ вычисляется с помощью метода трапеций с шагом по времени $2\pi/n$, где n — число, кратное количеству тел $n = pN$, $p \in \mathbb{N}$. Так как после $2\pi/N$ происходит циклическое смещение тел, то нам необходимо вычислить значения подынтегрального выражения только в моменты времени $t = t_j = 2\pi j/n$, $j = 0, \dots, p-1$. Примерное значение действия $\hat{A}$ зависит от $P = \{a_k, b_k, c_k, d_k, k = 1, \dots, M\}$ из (8). Подставив $2\pi/N$ вместо j в (7), получим, что все коэффициенты с $N|k$ должны быть равны нулю. Налагая дополнительные симметрии на хореографии, мы можем еще уменьшить количество элементов P . Бесстолкновительные решения являются аналитическими, поэтому использование метода трапеций оправдано.

Таким образом, мы получаем дискретизованный функционал действия $\hat{A}(P)$. Функционал минимизируется с помощью метода градиентного спуска и вариаций. При этом появляются некоторые практические проблемы:

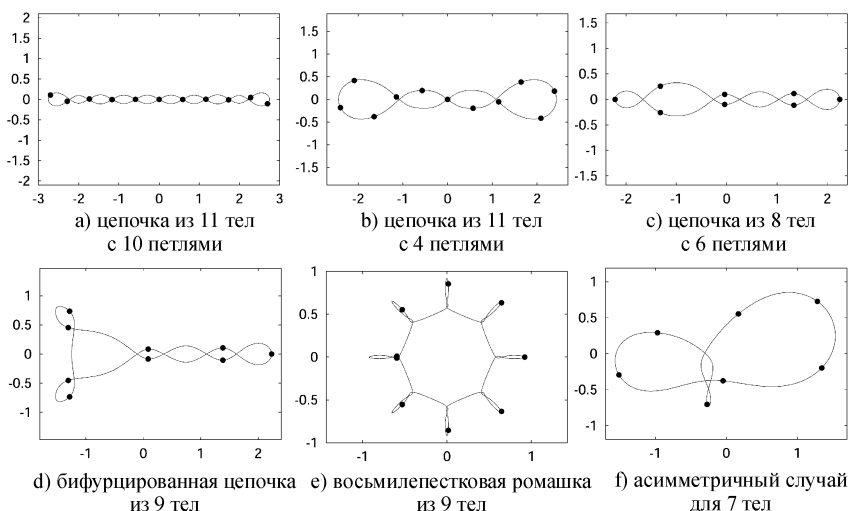


Рис. 4. Примеры различных видов простых хореографий для ньютоновского потенциала

а) Действие достаточно «плоское» и может существовать множество локальных минимумов; б) В случае поиска решения, проходящего близко к столкновению число гармоник должно быть большим — порядка нескольких тысяч. Обе проблемы замедляют процесс минимизации.

Обычно вычисления останавливаются, когда две последовательных оценки $\hat{A}$ различаются, менее чем на 10^{-10} . Мы начинаем с произвольного множества P или с данных полученных после сглаживания и фильтрации кривой, нарисованной от руки. В качестве теста на качество метода мы использовали сохранение энергии и остаточное ускорение (разница между значением выражения (1) и значением $\frac{d^2}{dt^2}\hat{q}$ в момент времени $t = t_j$).

4.2. Метод Ньютона

Пусть $\Phi_{2\pi/N}$ — поток (1) за время $2\pi/N$. Начиная с заданных значений положения тел и их скоростей $x_j, \dot{x}_j$, $j = 0, \dots, N-1$, при $t = 0$, и двигаясь вдоль потока на $\Phi_{2\pi/N}$, получим те же значения со смещением индексов на единицу. Таким образом, получаем $4N$ скалярных уравнений,

которые решаются с помощью метода Ньютона, стартующего с примерного решения, найденного с помощью минимизации действия. Отображение $\Phi_{2\pi/N}$ вычисляется с помощью численного интегрирования уравнений (1). Также необходимо одновременное интегрирование вариационных уравнений. В большинстве случаев необходимо использовать метод параллельной пристрелки (см., например, [19]), особенно в случае прохождения вблизи столкновения. Обычно итерации метода Ньютона останавливаются, когда невязка меньше 10^{-12} . В качестве побочного продукта при этом мы получаем свойства линейной устойчивости найденного решения. Заметим, что рассматриваемые $4N$ уравнений не являются независимыми. С помощью равенства (7) и инвариантности относительно вращения и временного сдвига размерность системы можно уменьшить на шесть.

Только линейно устойчивые хореографии для ньютоновского потенциала являются восьмерками (снова см. раздел 5). Более того на многообразии нулевого углового момента, где лежит восьмерка, была проверена гипотеза КАМ-теоремы, чтобы сохранить закручивание при численных вычислениях (см. [17]).

5. Основные хореографии, сопутствующие хореографии и линейные цепочки

5.1. Об основных и сопутствующих хореографиях

Как было проанонсировано во введении, мы покажем как, начиная с одной хореографии получить целое семейство новых хореографий, либо проходя вдоль начальной хореографии несколько раз, либо с помощью продолжения по угловому моменту, либо комбинируя эти два метода.

Такое конструирование предполагает ввод различий между *основными* и *сопутствующими* хореографиями, что мы сделали в гипотезе 1.1. в первом разделе: *основная* хореография — это хореография, не являющаяся сопутствующей для некоторой другой.

5.1.1. Субгармоники

Начнем с описания отображения Пуанкаре в окрестности N -периодической хореографии $x(t) = (q(t), q(t+1), \dots, q(t+N-1))$. Напомним (см. раздел 2.1), что решение $x(t)$ характеризуется тем, что $\forall t, x(t+1) = Sx(t)$, где $S : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ — изометрия конфигурационного простран-

ства, определенная выражением

$$S(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_0).$$

Этот факт активно использовался в численных методах предыдущего раздела.

Зафиксируем энергию и угловой момент равными значениям для рассмотренного решения. После редукции по трансляционной и вращательной симметриям мы получим $(4N - 7)$ -мерное многообразие (считая размерность над $\mathbb{R}$), на котором S действует естественным образом. Назовем Σ_0 часть $(4N - 8)$ -мерного подмногообразия трансверсальную периодическим траекториям в точке $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$. Пусть $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{N-1}$ — образы Σ_0 , получаемые при действии $S, \dots, S^{N-1}$. Полученные подмногообразия трансверсальны периодическим траекториям в точках

$$(x(t_0 + 1), \dot{x}(t_0 + 1)), \dots, (x(t_0 + N - 1), \dot{x}(t_0 + N - 1))$$

соответственно.

Пусть $P_i : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, $i = 0, \dots, N - 1$, — отображения Пуанкаре (естественно, $\Sigma_N = \Sigma_0$). Легко проверить, что $S \circ P_i = P_{i+1} \circ S$, где S диагонально обобщено на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$. Определим $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$ с помощью формулы $P = S^{-1} \circ P_0$. Из сказанного выше и из того, что $S^N = Id$, можно сделать вывод, что отображение первого возвращения $\mathcal{P} = P_{N-1} \circ \dots \circ P_1 \circ P_0$ на Σ_0 эквивалентно P^N . Это характеризует отображения первого возвращения вдоль хореографий следующим образом: они допускают корень N -й степени (который не что иное, как отображение для соответствующего сечения по модулю S , которое действует свободно в окрестности хореографии).

Для любой хореографии N тел решение субгармоник становится хореографией, когда оно соответствует периодической точке порядка k отображения Пуанкаре по модулю S $P = \sqrt[k]{\mathcal{P}}$. В фазовом пространстве такая субгармоника становится хореографией $\hat{x}(t) \sim x(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ с периодом $\hat{T} \sim kN$ (если T — период $x(t)$ — равен N), определяемым выражением $\hat{x}(t + \hat{T}/N) = S^k \hat{x}(t)$, причем $(k, N) = 1$. Это происходит ввиду того, что

1) если $(k, N) = 1$, то N является генератором $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, так, что все прообразы периодических решений отображения P по модулю S принадлежат той же периодической орбите;

2) время, затрачиваемое траекторией на прохождение от Σ_i до Σ_{i+1} не зависит от i , т. к. векторное поле коммутирует с S .

5.1.2. Относительные хореографии

Существует еще одна возможность изменить уровень углового момента. Решение уравнений (1) вида $x(t) = (q(t), q(t+1), \dots, q(t+N-1))$ назовем *относительной простой хореографией* периода N , если существует вращение R_β на фиксированный угол β , такое, что для всех t выполняется

$$q(t+N) = R_\beta q(t)$$

. Во вращающейся с угловой скоростью β/N системе координат такая хореография становится настоящей хореографией. Если угол вращения является рациональным числом m/d , умноженным на 2π , тогда x будет иметь период $T = dN$, а

$$X(t) = (q(t), q(t+d), \dots, q(t+(N-1)d))$$

является хореографией (в неподвижной системе координат) без столкновений, если d и N взаимно простые числа. В противном случае решение является квазипериодическим. Если отображение Пуанкаре начальной хореографии q^0 является невырожденным, и если эта хореография имеет угловой момент C_0 , тогда в соответствии с теоремой об обратной функции существует семейство относительных простых хореографий вблизи q^0 с угловым моментом C принимающем значения в некотором интервале вблизи C_0 . Большинство из них является квазипериодическими, однако хореографии с рациональным углом вращения образуют плотное множество.

5.1.3. Траектории, сопутствующие восьмерке

Опишем теперь некоторые основные факты относительно динамики вблизи восьмеркообразной хореографии (см. [17]). Мы покажем, что восьмерка имеет множество «сопутствующих» хореографий. Действительно: как неподвижная точка рассмотренного выше отображения Пуанкаре $\mathcal{P}$ (с фиксированными энергией и угловым моментом) восьмерка является полностью эллиптической с закручиванием: частоты локально изменяются при удалении от неподвижной точки. Следовательно, существует семейство периодических точек (субгармоник), параметризованных рациональным вектором вращения, компоненты которого при приближении к неподвижной точке стремятся к предельным значениям, заданным собственными числами отображения Пуанкаре $\mathcal{P}$, которые примерно равны 0.00842272 и 0.29809253.

Так как для решения восьмерки $P = \sqrt[3]{P}$ также является полностью эллиптическим, следовательно, существует семейство хореографий, скапливающихся вблизи восьмерки. В свою очередь, некоторые из этих хореографий полностью эллиптические, неограниченно применяя к ним такой же аргумент, можно получить *хореографические соленоиды*.

Периодическое решение в форме восьмерке можно также продолжить до некоторого углового момента. Как мы видели, один из возможных путей заключается в использовании вращающейся с угловой скоростью ω системе координат.

Впервые периодическое решение в виде деформированной восьмерки, с тремя телами движущимися по одной и той же кривой во вращающейся системе координат нашел М. Хенон в [8]. Для этой цели Хенон использовал ту же программу, что и использованную им в [7] для продолжения коллинеарных траекторий Шубарта. В соответствии с предшествующей дискуссией, это приводит к новым хореографиям, сопутствующим восьмерке. Если некоторые из них будут полностью эллиптическими, что происходит при достаточно малых угловых скоростях, то появятся сопутствующие им траектории и так далее.

На рисунке 5 проиллюстрированы эти две возможности. Вверху изображена сопутствующая хореография восьмерки, полученная из периодической точки отображения Пуанкаре вблизи неподвижной точки, и имеющей компоненту только вдоль быстрой частоты. Следовательно, эта хореография лежит на «субцентральной» многообразии. Число вращений равно $11/37 \approx 0.297297297$, что достаточно близко к предельному числу вращений в неподвижной точке. Действительно, изменение числа вращений достаточно медленное вдоль рассматриваемой моды. Все тела описывают одну и ту же траекторию, которая, по-видимому, является локальным минимумом действия. Точки на рисунке (одна слева, другая справа, а третья в начале координат) соответствуют начальное положение тел. Для сравнения также нарисована и восьмерка. На среднем рисунке изображена сопутствующая траектория с числом вращений $8/27$. Заметим, что знаменатель в этом случае делится на три. Три тела описывают слегка разные траектории. На рисунке траектория первого тела изображена непрерывной линией, а траектория второго — пунктиром. Эти траектории выглядят как кривые с рациональным наклоном на торе, слегка смещенные одна относительно другой. Чтобы не изображать слишком большое количество линий на рисунке, траекторию третьего тела мы изображать не стали. Однако легко понять, где она должна располагаться.

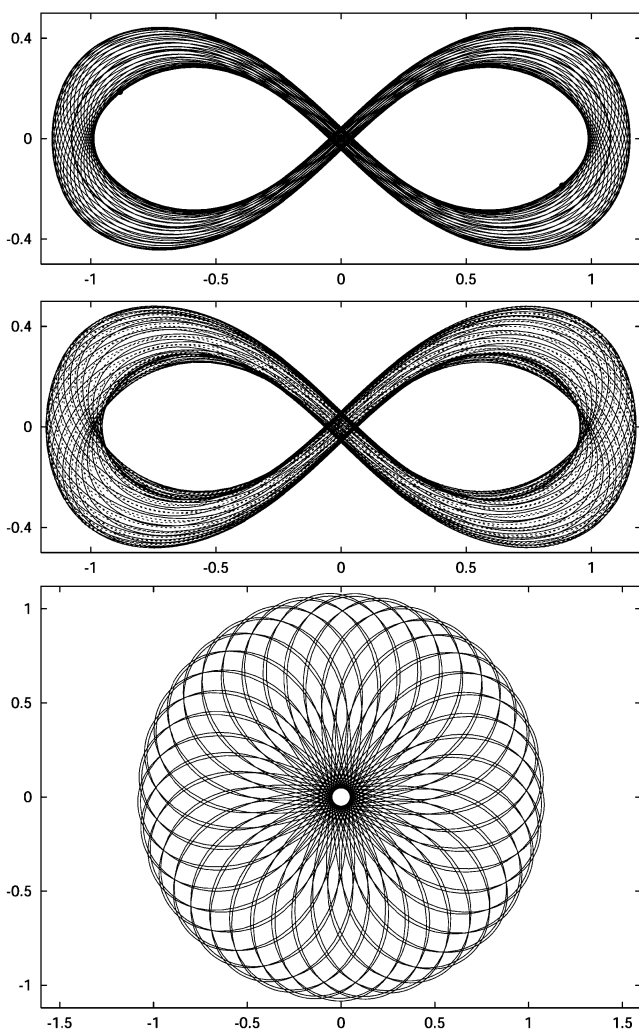


Рис. 5. Несколько примеров сопутствующих траекторий. На верхнем и нижнем рисунках изображены хореографии, тогда как на среднем рисунке траектория хореографией не является

На нижнем рисунке изображены сопутствующая хореография с ненулевым угловым моментом. Величина углового момента примерно равна $C \approx 0.03125986$, и соответствует траектории замыкающейся после 37 «обращений» вдоль восьмерки и трех полных обращений вокруг центра масс, то есть $m/d = 3/37$. В данном случае тела снова описывают один и тот же путь. Для этой хореографии была проверена линейная устойчивость. На рисункеб изображена $1/37$ часть периода как в неподвижной, так и во вращающейся системах координат.

В общем нет необходимости начинать с полностью эллиптического периодического решения. Достаточно, чтобы оно имело несколько эллиптических собственных значений. Например, для хореографии из $N = 4$ тел, приведенной на рис. 3, размерность центрального многообразия W^c равна двум во всех случаях, кроме d), в котором она равна четырем, и e) где она равна нулю, как в тривиальном круговом случае (четыре пары собственных чисел, равных единице и соответствующие первым интегралам не рассматриваются).

ЗАМЕЧАНИЕ. Решить, является ли рассматриваемая хореография основной, не так просто. Не исключено, что если будем рассматривать периодические решения в комплексном фазовом пространстве с комплексным периодом, то некоторые хореографии, приведенные в этой статье как основные, могут быть связаны с некоторым семейством непрерывных решений.

С помощью гомотопии потенциала иногда можно связать две разные основные хореографии. Это происходит на рис. 3е, где параметром гомотопии является показатель a в потенциале $1/r^a$. В [16] другая, очень похожая на 3е хореография, имеющая однако $\dim W^c = 2$, получена из 3е с помощью изменения потенциала. Обе хореографии возникают в случае ньютоновского потенциала и принадлежат одному классу. Для дальнейших обсуждений см. раздел 6. Заметим, что хотя мы не рассматриваем подобных изменяющих потенциал гомотопий, тем не менее в нашем определении «сопутствующих» хореографий они полезны для понимания хореографий.

5.2. Линейные цепочки

Среди наиболее простых хореографий есть «линейные цепочки» образованные разными «пузырьками». На рисунках 1, 3а, 3б, 4а, 4б и 4с приведены их примеры. Все они по-видимому основного типа. На $\mathbb{S}_N^1$ двойной точке z в цепочке (или в общей хореографии) соответствует два значения времени: t_a и t_b . Длина (целочисленная) петли, связанной с z определяется выражением $[t_b - t_a]$ (в $\mathbb{S}_N^1$), где $[\]$ обозначает целую часть. Так как

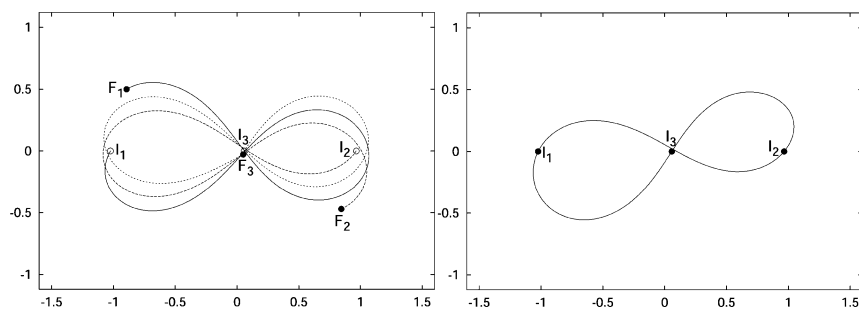


Рис. 6. $1/37$ нижней траектории на рис. 6. Слева: в неподвижной системе координат. Справа: во вращающейся системе координат. Точки I_j (F_j), $j = 1, 2, 3$ обозначают начальные (конечные) условия

$t_b - t_a \notin \mathbb{Z}$, дополнительная длина равна $N - 1 - [t_b - t_a]$. Линейная цепочка с J пузырьками имеет $J - 1$ двойных точек. Все эти точки лежат на оси x и обозначены $z_1, \dots, z_{J-1}$ в порядке возрастания координаты x . Заметим, что если мы попытаемся получить похожую цепочку с z_i не на оси x , то некоторый вид *принципа минимального взаимодействия пузырьков* при минимизации действия приведет к описанному выше решению.

При переориентации петли (обращении времени), если необходимо, мы можем предположить, что соответствующие длины левосторонних петель, определяемые неподвижными точками, образуют возрастающую последовательность целых чисел $1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{J-1}$. Величины $\ell_1, \ell_2 - \ell_1, \dots, \ell_{i+1} - \ell_i, \dots, N - 1 - \ell_{J-1}$ являются длинами, связанными с пузырьками, и характеризующие класс хореографий линейной цепочки. Заметим, что если $\ell_{i+1} = \ell_i$, то пузырек между z_i и z_{i+1} можно уничтожить без прохождения через столкновение, и, следовательно, этот случай представляет ту же хореографию, что и линейная цепочка с числом пузырьков меньшим на единицу. Таким образом, мы полагаем, что последовательность длин строго возрастающая. Для полноты также в линейные цепочки можно включить случай $J = 1$, то есть тривиальное круговое решение.

Предложение 1. Число линейных цепочек из N тел равно $2^{N-3} + 2^{\lfloor (N-3)/2 \rfloor}$.

Доказательство можно найти в [17]. В частности, число основных хореографий с ростом N возрастает экспоненциально.

6. Эволюция хореографий при изменении потенциала

Как было сказано выше, в (2) мы можем рассмотреть семейство однородных потенциалов вида $f(r) = 1/r^a$, $a > 0$. Естественный интерес вызывают некоторые вопросы: Что случится с хореографией, существующей при $a = 1$, если уменьшать a до нуля? Что происходит с хореографией, существующей при $a = 2$, но исчезающей при $a = 1$? Являются ли сложности в доказательстве гипотезы для ньютоновского потенциала чисто техническими, или они лежат глубже. Как уже было сказано, с помощью продолжения по a из заданной хореографии при $a = 1$, можно получить другую, также при $a = 1$. Основной целью этого раздела является представление нескольких численных результатов в этих направлениях.

Без всяких трудностей восьмерку можно продолжить до любого значения $a > 0$. Однако устойчивым оно является только в небольшой области, примерно равной $a \in [0.86, 1.23]$.

В случаях, приведенных на рис. 3 с $N = 4$ при уменьшении a хореографии достигают бифуркации *седло–узел* (c – u) и дальнейшее продолжение семейства возможно только при увеличении a . За исключением упомянутого выше случая e), все эти хореографии приближаются к столкновению (к одному или нескольким двойным столкновениям, либо к тройному столкновению) перед тем как снова достигнуть значение $a = 1$. В случае c) наблюдается небольшой интервал устойчивости вблизи значения $a = 0.63$.

Похожие вещи происходят и для $N = 5$. В большинстве случаев или после, или до достижения c – u хореография приближается к столкновению (теперь может существовать уже четверное столкновение). В некоторых случаях до достижения столкновения хореография может пройти через несколько c – u . Между двумя последовательными c – u a изменяется монотонно. В паре случаев после прохождения c – u при $a < 1$ хореография возвращается к $a = 1$ до того как будет достигнуто столкновение. С другой стороны, хореографию из пяти тел, движущихся по симметричной восьмерке, можно продолжить до любого значения $a > 0$, тогда как линейная цепочка с $J = 4$ (супер-супер-восьмерка) может быть продолжена только до $a \simeq 0.0288854$, где она достигает c – u , а затем a снова начинает возрастать.

Теперь рассмотрим хореографию с $N = 4$ которая, по-видимому, не существует в случае ньютоновского потенциала. Она должна выглядеть как рис. 3а, но с небольшой петлей внутри большой. Такая хореография точно существует при $a = 2$. На рисунке 7 показано, что происходит во время продолжения при попытке уменьшить a . В качестве характеристики

рассматриваемой хореографии было взято минимальное расстояние $r_{\min} = \min_{1 \leq i < j \leq N, t \in [0, 2\pi]} r_{i,j}(t)$.

На рисунке 7а изображено изменение $r_{\min}$ в зависимости от a при его уменьшении начиная с $a = 2$ (точка А). На рисунке видны две c -у, обозначенные точками В и D. При движении вдоль семейства столкновение достигается в точке F. На рис. 7б показаны три траектории, соответствующие точкам А, В и С на рисунке 7а. При уменьшении a размер внутренней петли также уменьшается. Следующие траектории D и F показаны на рис. 7с. Увеличение показывает очевидное приближение F к двойному столкновению. На траектории С видна очень маленькая петля. В точке D она становится такой же величины, как и внешняя петля, затем в точке E ее часть оказывается уже вне большой петли, и, наконец, в точке F большая ее часть лежит вне большой петли. Этот сценарий часто наблюдается при проведении процедуры минимизации действия с ньютоновским потенциалом, когда, по-видимому, не существует локальных минимумов внутри выбранного класса хореографий.

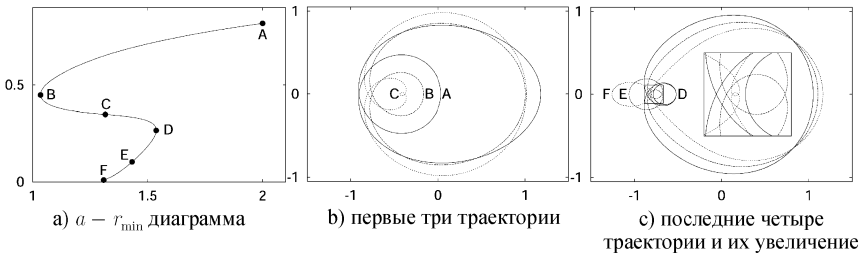


Рис. 7. Эволюция хореографии в зависимости от a для потенциала r^{-a}

Случай $N = 4$ с малой внутренней петлей не является исключением. При $N > 4$ также можно искать малые петли целочисленной длины $[\ell] = 1$ внутри больших. При этом для хореографии необходимы только две этих петли. Во всех случаях поведение по-видимому одинаковое. На рисунке 8а изображено поведение вблизи точки, эквивалентной точке В на рисунке 7а, то есть вблизи первой c -у, встречающейся при уменьшении a начиная со значения $a = 2$. На этом рисунке показаны малые внутренние петли для нескольких значений N : от четырех до восьми, 12 и 36. По мере увеличения N петли движутся влево. Для того, чтобы поместить их на одном рисунке, ко всем кривым мы добавили координату наиболее правой точки больших

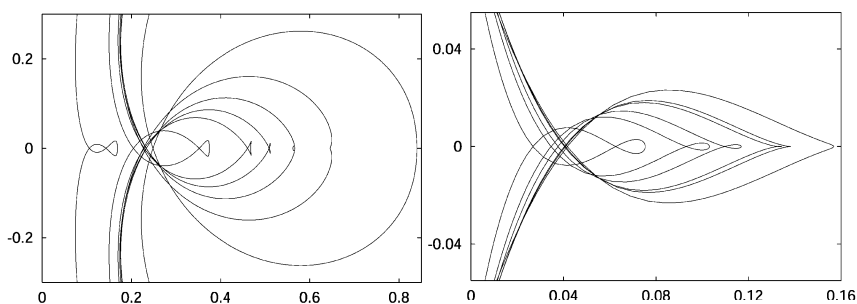


Рис. 8. Детали малых петель для разных N . Слева: Внутренние петли для потенциала r^{-a} со значениями a в которых происходит c -у. Справа: Внешние петли для ньютоновского потенциала

петель. В случае $N = 4$ на рис. 8а получается та же самая петля, что и на рис. 7b соответствующая кривой В. Заметим, что эволюция малой петли, образующейся на рис. 7а при возрастании N похожа на раскрытие ласточкина хвоста.

Пусть $a_{N,k}$ — значение a , в котором при продолжении хореографии из N тел достигается k -я c -у, начиная со значения $a = 2$. Для случая $N = 4$, показанного на рис. 7а, эти значения равны $a_{N,1} \simeq 1.0344$, $a_{N,2} \simeq 1.5374$. Крайне поучительно рассмотреть одни и те же величины при разных значениях N . Эти данные приведены в таблице 6. В частности, все значения $a_{N,1}$ больше единицы. Из чего становится очевидным отсутствие таких очень простых хореографий для всех N . Более того, исходя из экспериментальных данных можно сделать предположение о поведении $a_{N,1}$ в зависимости от N . Это поведение имеет вид $a_{N,1} \simeq 1 + c/N^2$, с некоторым $c > 0$. Для значений a , немного больших единицы и достаточно больших N , должно существовать хореография с малыми петлями длины $[\ell] = 1$ внутри большой, тогда как при $a = 1$ ее, по-видимому, не существует. Принять во внимание эти небольшие различия в аналитических доказательствах существования представляется достаточно сложным.

С другой стороны, мы можем рассмотреть малые петли с $[\ell] = 1$ вне больших петель, обобщив на произвольное N случай, изображенный на рис. 3а. Форма малых петель для значений N , равных 40, 48, 50, 60, 70 и 100, показана на рис. 8b. Как и ранее, размер петель уменьшается при возрастании N . Для того, чтобы изобразить все петли на одном рисунке,

Таблица 1

$a_{5,1} \simeq 1.1720$	$a_{5,2} \simeq 1.3862$	$a_{12,1} \simeq 1.0449$	$a_{28,1} \simeq 1.0096$
$a_{6,1} \simeq 1.1401$	$a_{6,2} \simeq 1.3255$	$a_{16,1} \simeq 1.0273$	$a_{32,1} \simeq 1.0073$
$a_{7,1} \simeq 1.1103$	$a_{7,2} \simeq 1.2914$	$a_{20,1} \simeq 1.0183$	$a_{36,1} \simeq 1.0057$
$a_{8,1} \simeq 1.0887$	$a_{8,2} \simeq 1.2680$	$a_{24,1} \simeq 1.0129$	$a_{40,1} \simeq 1.0046$

к каждой кривой было добавлено координаты наиболее левой точки больших петель. Значение $N = 48$ было выбрано так, как на соответствующей хореографии почти появляется точки возврата. Эволюция формы малых петель отличается от предыдущего случая.

Закончим статью обсуждением несколько иного вопроса. Рассмотрим N -угольник. По-видимому, он является глобальным минимумом действия. Предположим, что он проходится $k > 1$ раз. Является данная траектория все еще локальным минимумом? Наиболее простой контрпример найден нами при $N = 7$, $k = 2$. Беря малое отклонение от этого решения, минимизация приводит нас к хореографии с внутренней петлей длины $[\ell] = 3$ внутри большой. Эта хореография похожа на случай А на рис. 7b, только внутренняя петля располагается ближе к внешней. Действие такой хореографии примерно равно $A \simeq 182.326$, тогда как действие дважды проходимого семиугольника равно $A \simeq 182.729$. Продолжение по a , начиная с $a = 1$, приводит к c -у при $a \simeq 0.304557$. Однако затем происходит возврат к $a = 1$, при этом мы получаем новую хореографию того же класса. Эта хореография является седловой точкой функционала действия, величина действия в ней равна $A \simeq 186.705$. Это также контрастирует со случаем, изображенным на рис. 3e, для которого хореография того же класса получается с помощью продолжения и также является локальным минимумом действия.

7. Заключение

Простые хореографии являются решениями задачи N тел равной массы, когда тела следуют друг за другом вдоль одной и той же кривой. Мы доказали существование простых плоских хореографий произвольной сложности и симметрии для задачи N тел с потенциалом сильного взаимодействия. Большинство этих хореографий исчезают при стремлении потенциала сильного взаимодействия к ньютоновскому потенциалу, однако достаточно большое их число все же сохраняется. Мы исследовали чис-

ленно исчезновение хореографий и нашли большое число исключительно ньютоновских хореографий. Аналитическое доказательство существования для ньютоновских хореографий за исключением случая $N = 3$ не найдено. Какие классы простых хореографий выживают в ньютоновском пределе, и что определяет выживет класс или нет? Конечно ли число классов? Все ли линейные цепочки с k пузырьками ($k < N$) представлены? Можно ли решение в виде восьмерки продолжить для всех значений $a > 0$ и даже на случай логарифмического потенциала, если N является нечетным? Также остается открытым вопрос могут ли существовать простые хореографии когда массы не равны и $N \geq 6$. Для $N < 6$ в [2], используя факт о том, что существование хореографии для любого набора масс влечет за собой существование хореографии для равных масс (величина которых равна арифметическому среднему исходных), было доказано, что все массы должны быть равными. Вопрос о существовании хореографий с произвольными временными интервалами между движущимися вдоль кривой тел остается полностью открытым.

Благодарности

Мы бы хотели поблагодарить Фила Холмса и Роберта Маккея за то, что они обратили наше внимание на статью Криса Мура и заметки Анри Пуанкаре, соответственно. Р. Монтгомери благодарит за поддержку NSF (грант DMS 9704763), а также Французское правительство за должность приглашенного исследователя в группе ASD. Достаточно важная часть исследований К. Симо была выполнена во время года свободного от преподавания вместе с группой ASD в IMCCE в Париже благодаря поддержке CNRS. Он признателен своим коллегам в этом институте за гостеприимство и интерес к моей работе. Также К. Симо благодарит за поддержку грантами DGICYT PB 94-0215 (Испания) и CIRIT 1998SGR-00042.

Литература

- [1] Chenciner, A. [2000], Action minimizing periodic orbits in the Newtonian n -body problem, to appear in the *Proceedings of the Chicago Conference dedicated to Don Saari* (Dec. 15–19, 1999).
- [2] Chenciner, A. [2000], private communication.
- [3] Chenciner, A. and Montgomery, R. [2000], A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses, to appear in *Annals of Mathematics*.

- [4] Chenciner, A. and Venturelli, A. [1999], Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses égales dans $\mathbb{R}^3$: orbites «hip-hop», to appear in *Celestial Mechanics*.
- [5] Davies, I., Truman, A. and Williams, D. [1983], Classical periodic solutions of the equal mass $2N$ -body Problem, $2n$ -Ion problem, and the n -electron atom problem, *Physics Letters* **99A**, 15–17.
- [6] Heggie, D. C. [2000], A new outcome of binary–binary scattering, preprint.
- [7] Hénon, M. [1976], A family of periodic solutions of the planar three-body problem, and their stability, *Celestial Mechanics* **13**, 267–285.
- [8] Hénon, M. [2000], private communication.
- [9] Hoynant, G. [1999], Des orbites en forme de rosette aux orbites en forme de pelote, *Sciences* **99**, 3–8.
- [10] Lagrange, J. [1772], Essai sur le problème des trois corps, *Œuvres*, Vol. **6**, p. 273.
- [11] Montgomery, R. [1998], The N -body problem, the braid group, and action-minimizing periodic solutions, *Nonlinearity* **11**, 363–376.
- [12] Montgomery, R. [2000], Action spectrum and Collisions in the three-body problem, to appear in the *Proceedings of the Chicago Conference dedicated to Don Saari* (Dec. 15–19, 1999).
- [13] Moore, C. [1993], Braids in Classical Gravity, *Physical Review Letters* **70**, pp. 3675–3679.
- [14] Palais, R. [1979], The principle of symmetric criticality, *Comm. Math. Phys.* **69**, 19–30.
- [15] Poincaré, H. [1896], Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action, *C.R.A.S. Paris* **123**, 915–918 (30 Novembre 1896).
- [16] Simó, C. [2000], New families of Solutions in N -Body Problems, to appear in the *Proceedings of the ECM 2000*, Barcelona (July, 10–14), Birkhäuser-Verlag. Available at <http://www.iec.es/3ecm>.
- [17] Simó, C. [2000], Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem, to appear in the *Proceedings of the Chicago Conference dedicated to Don Saari* (Dec. 15–19, 1999).
- [18] Stewart, I. [1996], Symmetry Methods in Collisionless Many-Body Problems, *J. Nonlinear Sci.* **0**, 543–563.
- [19] Stoer, J. and Bulirsch, R. [1983], *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, 1983 (second printing).

Новые семейства решений задачи N тел^{*}

К. СИМО

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona. Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

Задача N тел — одна из выдающихся классических задач механики и других наук. Для задачи трех тел в ньютоновом случае известны несколько результатов, однако для систем, состоящих из более чем трех тел, результатов очень мало. Существование простых решений, типа так называемых *положений относительного равновесия*, в которых все тела вращаются вокруг центра масс, сохраняя постоянное расстояние между собой, само по себе представляет важную проблему. Недавно первый пример нового класса решений подобного рода открыли А. Шенсине и Р. Монтгомери. Три тела равной массы двигаются периодически по плоскости вдоль одной и той же кривой. Данная работа представляет обобщение этого результата в случае N тел. С помощью комбинации разных численных методов найдены различные кривые, которые мы назовем *простыми хореографиями*. Некоторые из них приведены ниже и сгруппированы в несколько семейств. Доказательство существования этих решений для ньютоновского потенциала и их классификация является тонкой задачей. Для более сильных потенциалов эта задача несколько легче.

1. Введение

Классическая задача N тел описывает движение N точечных масс под действием закона ньютоновского гравитационного притяжения. Пусть точки $z_j \in R^d, j = 1, \dots, N$ являются положениями тел, а $m_j > 0, j = 1, \dots, N$ —

^{*}С. Simó. *New families of solutions in N -body problems*. Preprint. Перевод Богатыревой Е. В., Килина А. А.

их массами. В большей части этой работы мы будем рассматривать *плоскую задачу* $d = 2$. Уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{z}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N m_i (z_i - z_j) r_{i,j}^{-3}, \quad (1)$$

где $r_{i,j} = |z_i - z_j|$, $|\cdot|$ является евклидовой нормой, а гравитационная постоянная принята равной единице. Система (1) имеет тривиальные интегралы, являющиеся координатами центра масс: $\sum_{i=1}^N m_i z_i$, который движется прямолинейно с постоянной скоростью. Не ограничивая общности, предположим, что центр масс покоится в начале координат, то есть будем считать, что $\sum_{i=1}^N m_i z_i = 0$. Более того, существует еще два интеграла движения — это момент количества движения $c = \sum m_i z_i \wedge \dot{z}_i$ и энергия $H = K - U$. В общем случае первых интегралов больше не существует. Здесь K и $-U$ обозначают кинетическую и потенциальную энергию

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{z}_i|^2, \quad U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j r_{i,j}^{-1}. \quad (2)$$

В общей задаче N тел известно очень мало решений. Имеются определенные результаты для ограниченной задачи трех тел, когда одна из масс бесконечно мала, а также для ряда других очень частных случаев задачи N тел.

Получить простые решения можно основываясь на *центральных конфигурациях*. Центральную конфигурацию определяют как конфигурацию N тел, таких что $\ddot{z}_j = \lambda z_j$, $j = 1, \dots, N$ для некоторого $\lambda < 0$ независимого от j . Тогда, если правильно выбраны скорости, то есть, если $|\dot{z}_j| = \gamma |z_j|$ с одним и тем же γ для всех j , и угол между $\dot{z}_j$ и z_j одинаков для всех тел, то движение N тел происходит по кривым второго порядка, при этом все кривые подобны. В частности, каждое тело может двигаться по окружности вокруг общего центра масс. В этих решениях движение происходит так, как если бы тела образовывали единое *твердое тело*. Такие движения также называют *положениями относительного равновесия*, которые являются неподвижными точками (1) во вращающейся системе отсчета. Их можно получить, используя и другой подход. Пусть $I = \sum_{j=1}^N m_j |z_j|^2$ является моментом инерции N тел относительно центра масс. Множество конфигураций с постоянным значением $I > 0$ определяет сферу S в R^{2N-2} . Мы

можем ограничить U областью S . Благодаря однородному характеру I и U мы всегда можем положить значение $I = 1$. Тогда центральные конфигурации соответствуют критическим точкам $U|_S$. Задача нахождения числа центральных конфигураций для заданного N и его зависимость от масс тел до сих пор является открытой. Общие результаты см. в [7], численное исследование при $N = 4$ и произвольных массах приведено в [8].

Рассмотрим теперь частный случай, когда все массы равны, положив $m_j = 1, j = 1, \dots, N$. Простейшее относительное равновесие — *правильный N -угольник*. Очевидно, что тогда все тела движутся периодически по одной и той же окружности. При этом возникает следующий вопрос:

Существуют ли другие *периодические решения* задачи N тел, такие чтобы все тела двигались вдоль одной и той же траектории на плоскости?

Этому вопросу и посвящена данная работа. К освещению данной проблемы меня подтолкнуло недавнее открытие А. Шенсине и Р. Монтгомери [4] одного из таких решений для $N = 3$, при котором тела двигаются по кривой в виде восьмерки, а также открытие аналогичного решения, найденного Дж. Джервером для четырех тел [5]. За историческими сведениями об этих совершенно новых решениях я отсылаю к [3]. Поиск решений для N тел равной массы на одной и той же кривой ставит ряд задач: а) доказательство существования; б) допустимые геометрии опорных кривых; в) вычисление решений; г) изучение динамических свойств; г) обобщение на другие потенциалы.

Все эти темы очень сильно связаны. Действительно, существующие доказательства, допустимые только для некоторого класса потенциалов, который исключает ньютоновы случаи. Трудности с ньютоновым и другими потенциалами относятся к возможности *столкновений*, т.е. таких значений времени t^* , когда существуют i и $j, i \neq j$, такие, что $\lim_{t \rightarrow t^*} r_{i,j}(t) = 0$. Это, в свою очередь, связано с *допустимыми кривыми* и их *временной параметризацией*. Основной метод доказательства опирается на вариационный подход. Он также полезен, но недостаточен для вычислений. Изучение *геометрических и динамических свойств* решений, которые мы ищем, требует локальной информации об орбитах, которые находятся *очень далеко* от любой кривой, которую можно описать аналитическими средствами. Поэтому численный подход представляется единственным возможным способом.

Поучительно посмотреть на движение N тел вдоль одной и той же траектории на плоскости с помощью анимации. При этом видно, что тела *танцуют* довольно сложным способом. Из чего напрашивается название *хореографии* для обозначения этого вида движений. Чтобы быть точным,

нам следует назвать их *простыми* хореографиями, потому что все тела находятся на одной и той же кривой. Можно также вообразить *сложные* хореографии для тел,двигающихся по различным кривым $k > 1$.

В п. 2 мы приведем некоторые результаты о хореографии *фигуры в виде восьмерки* для $N = 3$. П. 3 посвящен введению необходимого понятия о простых хореографиях. Вариационный подход представлен в п. 4. С этой целью мы обобщаем задачу до потенциалов вида r^{-a} , $a > 0$. Кратко описано существующее доказательство для $a \geq 2$, случая известного как *сильное взаимодействие*. В п. 5 показаны различные виды хореографий, найденные до настоящего времени. Изменения поведения хореографий как функций a описаны в п. 6, что также иллюстрирует трудности, с которыми неизбежно сталкиваешься в доказательствах для *слабых взаимодействий*. Наконец, в п. 7 дается краткое описание использованных численных методов.

2. Решение в виде восьмерки

Первая хореография для $N = 3$ была найдена Лагранжем в 1772 году: знаменитое решение равностороннего треугольника. И только в декабре 1999 года было найдено следующее решение. Три тела движутся по фигуре в виде восьмерки (см. рис. 1). Для периодического решения, представленного здесь, а также для всех решений данной работы был задан период, равный 2π , фиксирующий размер конфигураций. Остальные периоды отмасштабированы на 2π с помощью третьего закона Кеплера $l^3 T^{-2} = \text{const}$, где l — масштаб длины, а T — период. Также ясно, что S^1 -инвариантность позволяет рассматривать кривую, симметричную относительно горизонтальной оси. Обозначим через P_j тело, расположенное в точке z_j . Первоначально можно взять тела на коллинеарной (эйлеровой) конфигурации, как на рисунке с P_3 между P_1 (слева) и P_2 (слева), при этом P_3 движется вверх. При $t = \pi/6$ они находятся в равнобедренной конфигурации, а при $t = \pi/3$ они снова в коллинеарной конфигурации с P_2 в середине. За полный период тела дважды проходят каждую из трех коллинеарных конфигураций.

Доказательство существования конфигурации (см. [4]) использует вариационный подход. Пусть $q(t)$ — параметризация решения, так что если $z_1(t) = q(t)$, то $z_2(t) = q(t - 2\pi/3)$, $z_3(t) = q(t - 4\pi/3)$. Вариационная формулировка классической механики гарантирует, что любое классическое 2π -периодическое решение является экстремалью *функционала действия*

$$A = \int_0^{2\pi} L(t) dt, \quad L(t) = K(\dot{z}_1, z_2, z_3) - U(z_1, z_2, z_3), \quad (3)$$

Таблица 1. Исходные условия для рис. 1. Представленные данные не соответствуют случаю положения центра масс в начале координат.

$N = 3$	$x_2 = 0.995492$	$\dot{x}_3 = 0.695804$	$\dot{y}_3 = 1.067860$	$x_1 = -x_2, \dot{z}_1 = \dot{z}_2$
$N = 4$	$x_1 = 1.382857$ $x_3 = -x_1$	$\dot{y}_1 = 0.584873$ $y_4 = -y_2$	$y_2 = 0.157030$ $\dot{y}_3 = -\dot{y}_1$	$\dot{x}_2 = 1.871935$ $\dot{x}_4 = -\dot{x}_2$
$N = 5$	$x_2 = 0.439775$ $x_3 = -1.268608$ $x_4 = x_3, y_4 = -y_3$	$y_2 = -0.169717$ $y_3 = -0.267651$ $\dot{x}_4 = -\dot{x}_3, \dot{y}_4 = \dot{y}_3$	$\dot{x}_2 = 1.822785$ $\dot{x}_3 = 1.271564$ $x_5 = x_2, y_5 = -y_2$	$\dot{y}_2 = 0.128248$ $\dot{y}_3 = 0.168645$ $\dot{x}_5 = -\dot{x}_2, \dot{y}_5 = \dot{y}_2$

который представляет собой интеграл от лагранжиана L . Действительно, хореография фигуры в виде восьмерки является минимумом A . Ключевым является доказательство того, что минимизирующая A траектория в рассматриваемом классе восьмиобразных траекторий не имеет столкновений. Используя оценки [2], контрольную траекторию, а также линию уровня $U|_S$, соответствующую прохождению через коллинеарные точки с постоянной скоростью и фиксированным значением I , исключение столкновений можно свести к оценке интеграла.

Восьмерку можно также представить как *цепочку из двух звеньев*. На рис. 1 показаны также следующие простейшие цепочки (из трех и четырех звеньев) с четырьмя и пятью телами. В целях завершенности исходные данные, позволяющие читателю воспроизвести графики, приведены в таблице 1. Они округлены до 10^{-6} и, следовательно, для точного изображения траекторий их следует уточнить. Отметим, что для восьмерки рис. 1.1 следует слегка повернуть, чтобы согласовать его с исходными условиями. Компоненты z_j обозначены через (x_j, y_j) .

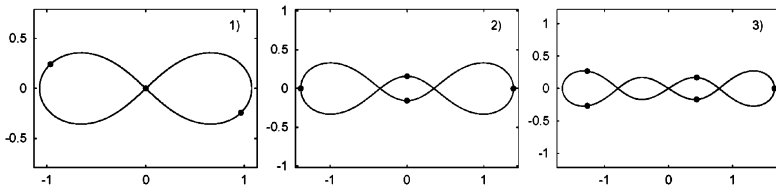


Рис. 1. Цепочки с 3, 4 и 5 телами

Кроме очевидных симметрий, у этого решения есть множество замечательных свойств.

- Представляется, что оно является единственным, за исключением вращения всех масс как единого твердого тела. Это не доказано в [4], однако я основываюсь на обширном численном переборе вариантов с нулевым моментом количества движения, удовлетворяющих равенству $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$.

- Восьмерка существует на нулевом уровне момента количества движения $c = 0$. Если $c \neq 0$, то можно воспользоваться вращающейся системой координат (с частотой ω) и искать восьмеркообразные периодические решения в этой системе отсчета. Это сделал М. Хенон в [6]. При этом петли становятся асимметричными, но общая картина сохраняется. Эти вращающиеся решения приводят к 2-мерным торами, если $\omega \notin Q$, и дают новые *дополнительные* хореографии, если $\omega \in Q$.

- Орбита *линейно устойчива*. Она представляет собой неподвижную точку отображения Пуанкаре. Собственные значения дифференциала этого отображения — $\lambda = \exp(\pm 2\pi i \nu_j)$, с $\nu_1 = 0.00842272, \nu_2 = 0.29809253$. Это является неожиданным по сравнению с системами с двумя степенями свободы, для которых периодические орбиты, минимизирующие действие, неустойчивы. Цитируя Биркгофа ([1], стр. 130): «Несомненно аналогичные результаты выполняются для любого числа степеней свободы, и их можно получить с помощью классических методов вычисления вариаций.»

- Для получения нелинейной информации необходимо представление отображения Пуанкаре до высокого порядка. Некоторые методы предложены в [9], они используют вариации высокого порядка. Другой подход предложен в разделе [7]. В частности, он позволяет получить *нормальную форму* вблизи периодического решения. Матрица закручивания при этом является неопределенной, и для доказательства существования инвариантных торов применяется КАМ теорема. Таким образом, большинство точек, близких к восьмерке, при $c = 0$ устойчивы. Более того, из вариации действия следует существование других классов *дополнительных* хореографий, связанных с периодическими точками с соответствующим периодом отображения Пуанкаре вокруг неподвижной точки.

- Найденное периодическое решение можно распространить на случай близких масс, при этом каждая из них двигается по слегка отличной друг от друга «восьмерке». Устойчивость таких решений сохраняется только для относительных изменений порядка 10^{-5} .

- Сохраняя равные массы, мы можем исследовать различные потенциалы вида

$$U(z_1, \dots, z_N) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} f(r_{i,j}), \quad f(r) = r^{-a}, a > 0. \quad (4)$$

Восьмеркообразное решение можно распространить на все $a > 0$ и даже на предельный случай $f(r) = \log r$ и далее. Однако установлено, что линейно устойчивым является только небольшой интервал около $a = 1$.

3. Хореографии

Перейдем к случаям $N > 3$. Мы ищем 2π -периодические функции $q: S^1 \rightarrow R^2$ такие, что функции

$$z_j(t) = q(t - (j-1)2\pi/N), j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

являются решением (1). Z/NZ действует на множество тел и в S^1 , смещаясь к следующему телу (или к следующей вершине N -угольника). Это также можно использовать в теоретических и вычислительных целях. Отметим, что $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с запаздываниями, кратными $2\pi/N$. Однако это замечание, по-видимому, не уменьшает трудности.

Столкновение происходит, если существует *двойная точка* $q(t_1) = q(t_2)$ с $t_2 - t_1$, кратным $2\pi/N$. Мы рассматриваем класс не обладающих столкновениями функций, он должен быть аналитическим (потенциалы являются аналитическими, если $r \neq 0$). Несмотря на вариационный подход, достаточно рассмотреть пространство Соболева $H^1(S^1, R^2)$ (или для краткости H^1) функций с квадратичной интегрируемой первой производной. Пусть $\Delta \subset H^1$ являются функциями, соответствующими столкновениям. Нам бы хотелось показать, что в каждой связной составляющей $H^1 \setminus \Delta$ существует решение минимизирующее действие. К сожалению, это не является истинным для ньютонова потенциала.

Для начала приведем на рис. 2 большинство известных в наше время хореографий из пяти тел, кроме правильного пятиугольника и цепочки из 4 звеньев рис. 1.3. Они пронумерованы в порядке возрастания величины действия. У пятиугольника действие меньше, чем у всех остальных хореографий, а цепочка из четырех звеньев расположена между рисунками 2.4 и 2.5. Все представленные хореографии имеют некоторую симметрию. Большинство из них представляют собой *линейные цепочки*, имеющие петли различной величины, некоторые петли при этом *согнуты*. Рис. 2.1 состоит из большой и малой петель, в малой петле может быть как одно, так и два тела при всех значениях t .

Определение 3.1. Рассмотрим двойную точку, являющуюся образом моментов t_1 и t_2 в пространстве q . Образы двух дуг, идущих от t_1 к t_2

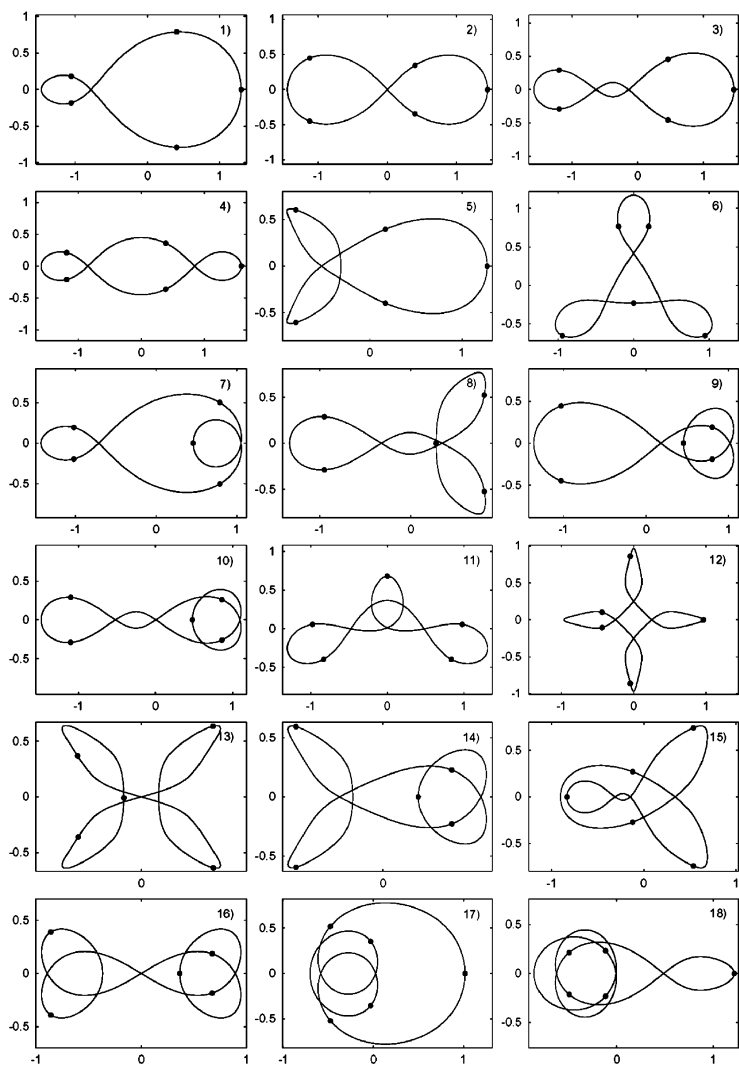


Рис. 2. . Найденные хореогрфии для пяти тел. Точки обозначают начальные условия

Таблица 2. Численные данные для хореографий пяти тел. $\min r_{i,j}(t)$ взят по всем $i \neq j, t \in S^1$. λ_L означает показатель Ляпунова.

Случай	Действие	Количество Движения	Энергия	$\min r_{i,j}(t)$	$\max \lambda_l$
окружность	58.308755	-6.186751	-3.093376	1.307660	0.939150
1	68.851604	-3.454467	-3.652691	0.364076	0.999344
2	71.331244	0.000000	-3.784240	0.690443	1.225034
3	75.184575	2.462827	-3.988666	0.213061	1.573730
4	77.158798	0.879793	-4.093401	0.423223	1.323903
4 звена	80.366525	0.000000	-4.263577	0.339434	1.727383
5	85.474715	2.631679	-4.534574	0.326152	1.639335
6	86.051192	-0.664730	-4.565158	0.399373	1.819673
7	88.439746	-2.562017	-4.691874	0.389835	1.757461
8	89.255582	-0.333911	-4.735156	0.236213	2.544799
9	90.108332	0.646869	-4.780395	0.381350	2.362498
10	93.864859	-1.839421	-4.979685	0.212068	2.189505
11	96.798960	-0.207731	-5.135344	0.280668	2.196531
12	102.751489	-0.484014	-5.451136	0.207233	3.381876
13	103.201740	0.000000	-5.475022	0.246947	3.001603
14	105.954031	-1.753301	-5.621036	0.266926	2.272570
15	108.787904	2.243734	-5.771378	0.073286	2.730382
16	109.636187	0.000000	-5.816380	0.355173	2.417178
17	109.882868	-4.476957	-5.829467	0.447649	2.628803
18	119.318405	2.002793	-6.330038	0.311516	3.177711

в S^1 , назовем петлями, соответствующими этой точке. Допустим, что $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, тогда длины этих петель равны $l = (t_2 - t_1)N/(2\pi)$ и $l_c = N - l$. Это определение просто распространяется на кратные точки.

Основную роль играют целочисленные длины $[l]$ и $[l_c]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть. Что же касается бесстолкновительной функции $[l] + [l_c] = N - 1$, то обычно точке ставится в соответствие целочисленная длина, являющаяся минимумом $[l]$ и $[l_c]$. Ясно, что если мы деформируем q без прохождения через столкновения, то целочисленная длина не может измениться. Таким образом, можно без проблем создать/разрушить *малые петли* длины меньше единицы (целочисленная длина которых равна нулю). Кроме того, две близкие двойные точки на $q(S^1)$ могут стягиваться посредством деформации q в некоторую третью точку, если таковая имеет $l \notin N$, также точки могут при этом исчезать. Подобным же образом могут быть созданы новые петли.

Рассмотрим рис. 2.1: на нем целочисленная длина, соответствующая двойной точке, составляет единицу. Также могут существовать подобные хореографии, имеющие малую петлю *внутри* большой. В качестве примера рис. 2.7 имеет две малые петли (внутри и вне окружности), обе с $[l] = 1$. Существование петель длиной $[l] = 1$ внутри большой петли будет рассмотрено в п. 6. Кроме топологических ограничений, здесь существуют также динамические. Возьмем, например, рис. 2.15. Около центра существует небольшая область с двумя двойными точками, расположенными очень близко друг от друга и имеющими $[l] = 1$. Их можно удалить с помощью деформации. Но затем прохождение около столкновения, которое значительно изменяет движения обоих тел, приведет к совершенно другой траектории.

4. Вариационные методы

Обычный способ доказать существование периодических орбит — это использование вариационного подхода. С помощью этого способа доказывается

Теорема 4.1. Рассмотрим задачу (1) с потенциалом сильного взаимодействия, определенным в (4) при $a \geq 2$ и $z_j(t)$, заданным через q как в (5). Тогда в каждом классе хореографий, т.е. в составляющей $H^1 \setminus \Delta$ существует решение, минимизирующее действие $A = \int_0^{2\pi} L(t)dt$, где L взято из (3), а $K(z_1, \dots, z_N)$ и $U(z_1, \dots, z_N)$ из (2).

Доказательство. Кратко опишем основную проблему: доказать, что на указанных орбитах нет столкновений. Начнем с некоторой точки во внутренней области класса хореографий. Достаточно доказать, что при приближении к Δ действие становится неограниченным. Рассмотрим слабую силу, то есть $a < 2$. Пусть $r_{i,j}$ — расстояние, стремящееся к нулю. Тогда локальные вычисления вблизи столкновения показывают, что основной вклад столкновения в действие при $r_{i,j}$, стремящемся от r к нулю, равен

$$A_{\text{двойное столкновение}} = \sqrt{8}r^{(2-a)/2}/(2-a). \quad (6)$$

При a , стремящемся к двум, действие становится неограниченным. Это и тем более верно для $a \geq 2$. Следовательно, следует всегда оставаться во внутренней области класса хореографий.

Более подробное доказательство см. в [3].

Теперь также интересно подчеркнуть, что задачу можно сформулировать как вариационное условие на q , вместо того чтобы использовать

промежуточные переменные $z: q \rightarrow z \rightarrow A$. Такой подход приводит к *вариационной задаче с запаздываниями*, классу задач, которые, по-видимому, не являются широко известными.

5. Различные виды хореографий

На рис. 3 изображена подборка хореографий различных форм. Они иллюстрируют множество возможных хореографий. Наиболее простым семейством являются *цепочки*. Мы уже видели случаи для трех, четырех и пяти тел. На рис. 1, рис. 2.1–2.4 и на рис. 3.1–3.7 хореографии являются *линейными прямыми цепочками (лпц)* с симметрией Z_2 без *сгибания* петель. Их можно рассматривать как ограничение сцепления k топологических дисков. Каждое звено цепочки между двумя последовательными двойными точками назовем *пузырьком*. Выберем порядок нумерации цепочки двойных точек, скажем, слева направо. Соответствующие длины можно расположить в возрастающей последовательности $0 \equiv [l_0] < [l_1] < \dots [l_{k-1}] < [l_k] \equiv N - 1$, выбрав в качестве длины либо длину петли, либо дополнительную к ней длину. Вращение на угол π дает эквивалентную цепочку. Первые пять графиков на рис. 3 имеют $N = 11$ и показывают только несколько возможных случаев для этого N . Интересным является вопрос о возрастании числа *лпц* $\gamma(N)$ как функции N . В качестве *лпц* мы также включаем и N -угольник. Последовательные разности $b_j := [l_j] - [l_{j-1}]$, $j = 1, \dots, k$, $1 \leq k \leq m$ задают разбиение $m = N - 1$. Значение b_j измеряет j -й пузырек. Пусть $D(m)$ — общее число разбиений, считая, что разбиение $b_1 = 1, b_2 = 2$ отлично от $b_1 = 2, b_2 = 1$. Тогда $D(1) = 1, D(2) = 2, D(3) = 4$.

Пусть $b_1, \dots, b_k$ — разбиение m , тогда $b_1, \dots, b_k, 1$ и $b_1, \dots, b_k + 1$ — разные разбиения $m + 1$. Таким образом, можно получить все разбиения $m + 1$, следовательно, $D(m) = 2^{m-1}$. Пусть $D_s(m)$ — симметрические разбиения: $b_1 = b_k, b_2 = b_{k-1}, \dots, b_{k/2} = b_{k/2+1}$, если k четное и $b_{(k+1)/2}$ произвольное, если k нечетное. Если m — четное, тогда $D_s(m) = D(m/2) = 2^{m/2-1}$, тогда как для нечетного m $D_s(m) = 1 + D(1) + \dots + D((m-1)/2) = 2^{(m-1)/2}$. Поскольку $\gamma(N) = \frac{1}{2}(D(N-1) - D_s(N-1)) + D_s(N-1)$, то мы доказали

Утверждение 5.1. Для $N \geq 3$ выполняется $\gamma(N) = 2^{N-3} + 2^{[(N-3)/2]}$.

Другие хореографии включают внутренние петли (рис. 3.9, 3.10); имеют бифуркационные цепочки (рис. 3.8); выглядят, как цветок (3.11–3.14) или как цветок, заключенный в круг (рис. 3.15). Более экзотическими являются случаи 3.17 и 3.18 с $N = 7$ и $N = 6$ соответственно, которые не имеют

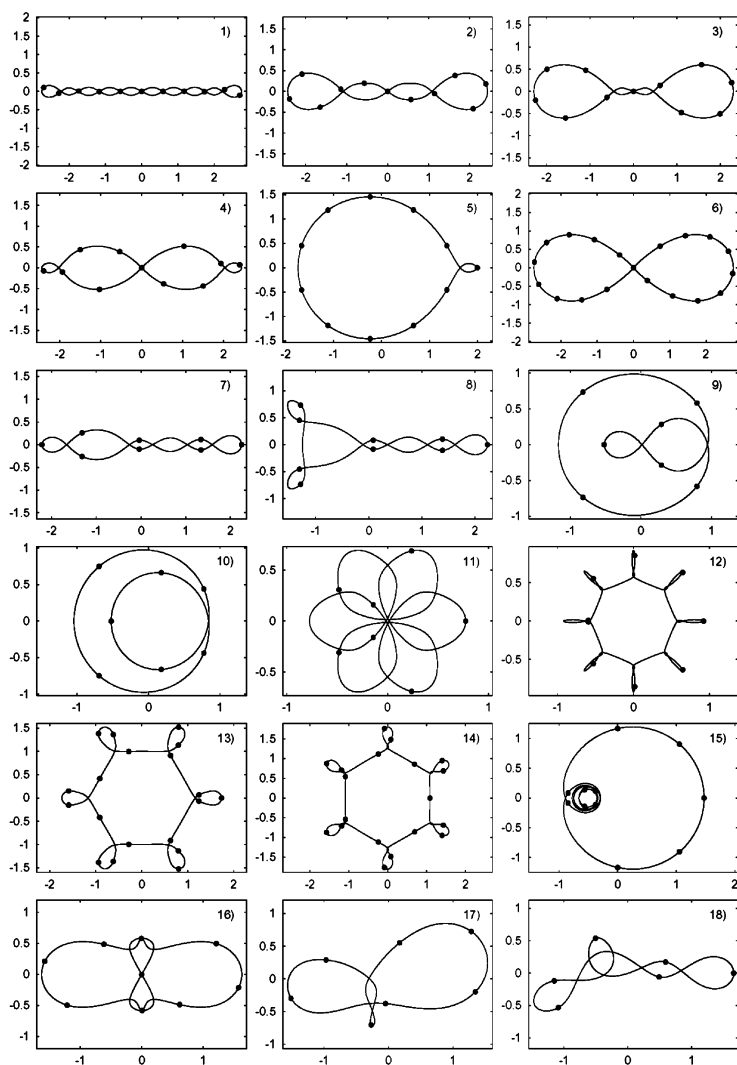


Рис. 3. Подборка различных хореографий

никакой симметрии. Случаи 3.13 и 3.14 подобны, но в 3.14 есть очень малые петли, где происходит прохождение вблизи столкновения. Отметим, что ни одно такое решение, с петлями во внутренней части, не найдено.

Все найденные хореографии, за исключением восьмой, неустойчивы.

6. Изменение потенциала

Интересным вопросом является изучение поведения заданной хореографии, периодические решения задачи N тел, когда в (4) изменяется a . Рассмотрим сначала задачу четырех тел с малой петлей длиной $[l] = 1$ внутри большей петли. Мы знаем, что она существует для сильного взаимодействия, но, по-видимому, не существует для ньютонова потенциала. На рис. 4.3 показана эволюция траекторий при изменении a в потенциале r^{-a} . Посмотрим на внутреннюю петлю, с уменьшением a величина петли сначала уменьшается. Первые четыре кривые (в смысле уменьшения размера внутренней петли) соответствуют $a = 2, 1.4, 1.1$ и 1.03445 . Около этого значения происходит бифуркация *седло-узел* (c -у), и семейство может быть продолжено, но для возрастающих значений a . Следующие кривые соответствуют $a = 1.1, 1.2, 1.4$ и 1.5373 . Близко к этому последнему значению появляется новый c -у, и семейство продолжается с убывающим a . Позже оно, по-видимому, приближается к двойному столкновению. Заметим, что точка возврата кривой при $a \simeq 1.2$ переходит в очень малую дополнительную петлю при $a = 1.4$, а такая же точка при $a = 1.5373$ дает еще более малую петлю, повернутую дважды. Следовательно, по-видимому, при $a = 1$ невозможно достичь такого решения.

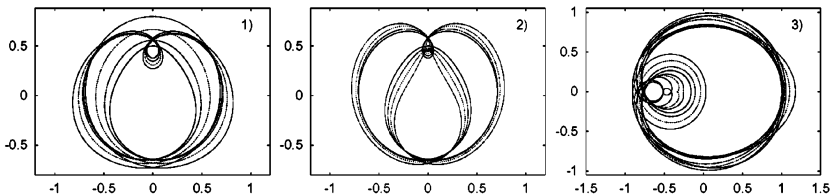


Рис. 4. Несколько семейств для различных потенциалов

С другой стороны, рассмотрим также $N = 4$ как показано на рис. 4.1. Посмотрим на малую петлю в верхней части, этим траекториям соответствуют значения $a = 2, 1.4, 1.1$ и 1 . С уменьшением a размер этой петли

уменьшается. Семейство можно продолжить, снова уменьшая a , как показано на рис. 4.2, но при $a \simeq 0.98267$ оно имеет c -у, и далее продолжение семейства происходит при увеличении a . На рисунке приведены решения для значений $a = 1, 0.98267, 1$ и 1.05 . В частности, при $a = 1$ есть два очень близких решения, а решение при $a = 1.05$ крайне близко к столкновению.

Таким образом, при любом доказательстве существования или несуществования конкретного вида решения следует уметь различать очень близкие значения a с различными свойствами.

Все решения, показанные на рис. 4, являются минимумами действия, однако при продолжении для $N = 5$ возникли седловые точки (см. [3]). Интересный вопрос представляет изучение того, что происходит с траекторией, задающей локальный минимум, когда мы проходим ее несколько раз. В частности, можно рассмотреть правильный N -угольник. Я обнаружил, что простейший пример возникает при $N = 7$, проходимому дважды. Мы рассматриваем ту же траекторию с периодом 4π вместо 2π . При $a = 1$ (ньютонов случай) она больше не является локальным минимумом. Но близкая орбита (рис. 3.10) с двумя слегка отличными петлями уже является локальным минимумом. Она существует для значительной области значений a , которая включает интервал $[1, 2]$ и значения больше $a = 2$. Однако при уменьшении a здесь снова появляется бифуркация c -у, близкая к $a = -0.3046$ и продолжение семейства требует увеличения a .

Все эти трудности возникают при прохождении вблизи столкновений. Предположим, что $r_{i,j}$ становится малым. Тогда лучше изучить относительное движение, то есть поведение $r_{i,j}(t)$ (или для краткости $r(t)$) и вклад этого прохождения в действие. В целях упрощения мы полагаем, что все остальные тела находятся на конечном расстоянии. При подходе к столкновению $r(t) = \alpha t^\beta \times (1 + o(1))$, где $\beta = 2/(2 + a)$ и α также зависит от a , вклад в действие, от $r = r^*$ до $r = 0$, приведен в (6). В ньютоновом случае после прохождения близко от столкновения два тела (двигающиеся близко от вырожденного эллипса), по существу, «отскакивают». Это можно увидеть, используя изменение на 2π аргумента $r(t)$. Для произвольного $0 < a < 2$ изменение аргумента составляет $1/(2 - a)$. Откуда видно, почему при $a = 2 - 1/n, n \in \mathbb{N}$ столкновение можно регуляризовать с помощью отскакивания, а при $a = 2 - 2/(2n + 1), n \in \mathbb{N}$ — с помощью «перекрещивания». В пределе тела совершают целое или полуцелое число обращений вокруг общего центра масс. С приближением к $a = 2$ число обращений возрастает. Случай $a \geq 2$ ведет себя как «черная дыра» в том, что касается столкновений.

Локальный анализ прохождения, вблизи столкновения, показывает следующее:

Предположим, что мы должны связать две точки P_1 и P_2 с малыми $|P_1| = |P_2|$ по сравнению с решением $r_{i,j}(t)$ задачи двух тел с потенциалом r^{-a} , $a \in (0, 2)$. Пусть δ — изменение (при движении тел по орбитам) аргумента $r_{i,j}(t)$ от одной точки к другой. Пусть A_δ — минимум действия вдоль этой траектории, при рассмотрении всех значений энергии. Мы можем также связать эти две точки, двигаясь от P_1 к столкновению, и затем к P_2 , согласовав два решения задачи. Тогда действие принимает значение $A_c = 2A_{\text{двойное столкновение}}$, которое задано в (6) с $r = |P_1|$.

Утверждение 6.1. $A_c < A_\delta$ тогда и только тогда, когда $\delta > 1/(2 - a)$.

То есть прохождение через столкновение дешевле с точки зрения действия только для больших изменений аргумента r . Более того, если $\delta < 1/(2 - a)$, то значение A_δ достижимо при $h = 0$.

Это, по-видимому, объясняет, почему малая петля внутри большой не может существовать для ньютонова потенциала, как это показано на рис. 4.3.

Форма кривой вызывает изменение аргумента больше допустимого без столкновений значения. Конечно, полное доказательство требует оценки влияния остальных тел. Оно также предполагает

Гипотезу 6.2. Все линейные цепочки существуют при $a = 1$.

Есть несколько особых цепочек. При нечетном N мы можем поискать кривую, имеющую форму симметричной восьмерки, при этом в начале координат первоначально находится одно тело. Пример приведен на рис. 3.8 для $N = 19$. Еще один особый случай — цепочка с $l_j = j$, $j = 1, \dots, N - 2$. В обоих примерах представляется, что кривые стремятся (после соответствующего масштабирования) к некоторому пределу.

7. Численные методы

Перед нами возникает необходимость решить несколько проблем: приближение хореографии, уточнение, продолжение при изменении степени a , а также вычисление достаточно хороших приближений отображения Пуанкаре вблизи периодического решения. Фактически, последняя задача была решена только для восьмерки при $N = 3$. Инструменты продолжения являются стандартными. Описание анализа бифуркаций и его приложений я рекомендую прочитать в [9] (см. также статью в настоящем сборнике К. Симо, Т. Стучи «Центральные устойчивые/неустойчивые многообразия и разрушение КАМ-торов в плоской задаче Хилла»).

7.1. Реализация вариационного метода

Функцию q можно аппроксимировать с помощью функции $\hat{q}$, являющейся тригонометрическим полиномом со значениями на множестве равноотстоящих точек либо с помощью некоторого другого метода. Обозначим $\mathcal{P} \in R^M$ конечное множество параметров, необходимых для приближения. Тогда действие A как в (3) аппроксимируется с помощью *дискретного* отображения $\hat{A} : R^M \rightarrow R$, где интеграл вычисляется с помощью численной квадратурной формулы. В соответствии с действием Z/NZ (которое должно сохраняться при дискретизации), достаточно взять интегралы от 0 до $2\pi/N$. Учитывая, что свободные от столкновений решения являются аналитическими, весьма удобна формула трапеции.

Затем переходим к минимизации $\hat{A}$, используя комбинацию вариантов градиентного метода. Этот метод имеет несколько

- **Преимущества.** Он совершенно устойчив, и можно начать с очень приблизительных аппроксимаций типа нескольких гармоник или начерченной от руки кривой. Его легко программировать, использовать любой потенциал и т.д. Более того, градиент можно получить на основе множества $\mathcal{P}$ без необходимости численного дифференцирования. Он позволяет проводить проверку инвариантности энергии и значения *остаточного ускорения*: разницы между ускорением масс, вычисляемым на основе $\hat{q}$, и использованием (1).

- **Неудобств.** За исключением совершенно простых случаев, M следует выбирать большим, особенно если прохождения осуществляются не слишком далеко от столкновения. Типичные значения M находятся в области $[10^3, 10^4]$. Кроме того, $\hat{A}$ — очень плоская функция, со многими экстремумами. Число итераций для достижения достаточно хорошего приближения находится также в области $[10^3, 10^4]$, что замедляет процесс.

Рассмотренный метод ясно обнаруживает прохождения, близкие к седловой точке $\hat{A}$. Он может быть использован в будущем при попытке локализовать эти решения. Еще один возможный подход — это численная реализация *леммы горного прохода*, следуя дуге между двумя локальными минимумами градиентного потока.

Вариационный метод не предоставляет непосредственной информации об устойчивости периодических решений.

7.2. Уточнение решений

Имея некоторую начальную точку, определенную или на основе вариационного метода, или же как решение для близкого значения показателя a , мы можем попытаться использовать метод Ньютона. Рассмотрим значения

$z_j, j = 1, \dots, N$. Временной поток $2\pi/N$ перемещает тело j к телу $j - 1$, где индексы следует рассматривать в Z/NZ . Таким образом, задачу можно преобразовать в поиск решения уравнения $G(Z) := \Phi(2\pi/N, Z) - S(Z) = 0$, где Z обозначает все z_j и $\dot{z}_j$, Φ — поток (1), а S — смещение индексов.

Для решения $G(Z) = 0$ методом Ньютона необходимо найти $D_Z G(Z)$. Его получают с помощью одновременного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и уравнений первых вариаций. Этот процесс может оказаться утомительным, если N велико. Например, $N = 100$ приводит по существу к системе размерностью 160000. Использование параллельных вычислений позволяет значительно уменьшить время вычисления, так как уравнения первых вариаций можно объединить в группы.

Одна из проблем состоит в том, что многие решения совершенно неустойчивы при больших N и страдают от прохождений вблизи столкновений. Сходимость метода может быть также очень мала из-за существования очень большого количества близких решений. Эту проблему можно решить, ведя поиск значения Z не при времени $t = 0$, а также при некоторых промежуточных значениях $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 2\pi/N$. Пусть Z_m — значение при t_m , тогда вместо одного уравнения $G = 0$ получим систему уравнений $\Phi(t_{m+1}; t_m, Z_m) - Z_{m+1} = 0$. Это хорошо известный *метод параллельной пристрелки* (см. например, [10]). Система увеличилась в размере, но уравнения уже не требуют дополнительных усилий, и лучше наложены условия.

В качестве последнего комментария приведем следующие замечания: есть некоторая свобода в выборе исходного времени, а система также инвариантна относительно вращения. Как здесь показано, изложенный метод недостаточен, потому что любое решение имеет связанное с ним шестимерное семейство решений, поэтому $D_Z G(Z)$ окажется сингулярным. Это затруднение легко преодолеть, выбрав начальное условие так, чтобы при $t = 0$ некоторые из тел находились на оси x с $\dot{x} = 0$, а также используя приведение центра масс.

Рассмотренный метод предоставляет очень точные решения, его можно реализовать с помощью арифметики большого числа цифр и в случае необходимости, поскольку одновременно решаются вариационные уравнения, он позволяет параллельно получить условия устойчивости.

7.3. Вычисление отображения Пуанкаре вокруг периодического решения

Мне хотелось бы только сделать замечание, что процедура, обеспечивающая точное вычисление отображения Пуанкаре (с использованием под-

ходящей арифметики и рекуррентной схемы интегрирования Тейлора высокого порядка), позволяет получить коэффициенты разложения полинома отображения Пуанкаре вблизи неподвижной точки. Достаточно рассчитать коэффициенты численным дифференцированием, используя соответствующее число точек для производных высокого порядка. Эта процедура также хорошо параллелизуема. Для дифференцирования важно подобрать оптимальную величину шага, которая зависит от порядка.

Благодарности

Выполнение этой работы стало возможным благодаря информации, предоставленной мне А. Шенсине, Р. Монтгомери и Дж. Джервером, а также многочисленным обсуждениям нами этой темы. Я также в долгу перед М. Хеноном, Р. Мартинесом и Р. Ортего за многие полезные замечания. Большая часть работы была выполнена во время академического отпуска, проведенного мной в Институте небесной механики (Парижская обсерватория), благодаря поддержке CNRS. Выражаю всем своим коллегам в этом институте свою признательность за гостеприимство и интерес к этой работе. Широко использовались также параллельные вычислительные возможности Группы динамических систем UB. Я благодарен также за поддержку со стороны грантов DGICYT PB 94-0215 (Испания) и CIRIT 1998SGR-00042.

Литература

- [1] G D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Math. Soc., 1927. Русский перевод: Дж. Биркгоф *Динамические системы*, Ижевск, Изд-во РХД, 1999.
- [2] A. Chenciner, N. Desolneux, *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de n corps*, C.R.A.S. Paris, **326**, Série I (1998), 1209–1212. Correction in C.R.A.S. Paris, **327**, Série I(1998), 193.
- [3] A. Chenicer, J. Gerver, R. Montgomery, C. Simó, *Simple choreographic motions of N bodies with strong forces*, будет издана в *Geometry, Mechanics and Dynamics*, Springer.
- [4] A. Chenicer, R. Montgomery, *A remarkable period solution of the three body problem in the case of equal masses*, направлена в *Annals of Mathematics*, (2000).
- [5] J. Gerver, личное общение, (2000).

- [6] М. Hénon, личное общение, (2000).
- [7] R. Moeckel, *On central configurations*, Math. Zeit., **205** (1990), 499–517.
- [8] C. Simó, *Relative equilibrium solutions in the four-body problem*, Cel. Mechanics, **18** (1978), 165–184.
- [9] C. Simó, *Analytical and numerical computation of invariant manifolds*. In D. Benest and C. Froeschlé, editors, *Modern methods in celestial mechanics*, 285–330, Editions Frontières, 1990.
- [10] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1983 (second printing).

Динамические свойства восьмеркообразных решений задачи трех тел^{*}

К. СИМО

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain
E-mail: carles@maia.ub.es

1. Введение

На конференции по небесной механике, проводившейся в Эвансоне, А. Шенсине и Р. Монтгомери представили доказательство существования замечательных периодических решений задачи трех тел, *восьмеркообразных траекторий*, когда все тела имеют одинаковую массу и следуют со сдвигом по времени, равным $1/3$ периода, по одному и тому же пути на плоскости. Это решение существует при нулевом значении интеграла кинетического момента. Описание методов и результатов см. в [1, 2, 5], некоторые исторические замечания см. в [3]. В действительности это решение было впервые обнаружено (насколько я знаю) К. Муром [6] в результате численных экспериментов.

Восьмеркообразные решения имеют чрезвычайно *интересные свойства*. Эта работа посвящена описанию некоторых из них. Ключевым свойством является устойчивость. Частично эти результаты были представлены на вышеупомянутой конференции, в качестве дополнения к лекциям Шенсине и Монтгомери.

^{*}С. Simó. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*. Preprint. Перевод Арзамасцева А. Г.

Мы также можем задаться следующим вопросом: *насколько исключительными* являются эти восьмеркообразные решения? Существуют ли другие хореографии задачи трех тел, не считая решений Лагранжа и восьмеркообразных решений? Ответ на этот вопрос, был получен в [3]. Действительно, существуют хореографии сопутствующие восьмерке, а также относительные хореографии (хореографии во вращающейся системе координат), которые могут привести к истинным хореографиям в неподвижной системы координат (см. раздел 6). Эти хореографии являются прямым следствием существования восьмеркообразной хореографии. Также мы ставим вопрос о существовании других хореографий в неподвижной системе координат, не связанных с восьмеркообразной хореографией. Ответ на этот вопрос оказался положительным (см. параграф 7) и, в действительности, были обнаружены сотни новых хореографий задачи трех тел. Они определенно являются численным свидетельством существования нескольких счетных семейств. Однако восьмерка по-прежнему является уникальной благодаря своей простоте, и поскольку только для нее удалось доказать устойчивость.

В статье приводится ряд графиков, на которых подытожены численные результаты. Также схематично описываются некоторые из использованных методов. Описание других методов см. в [3, 9, 10]. Полное изложение с дополнительными подробностями будет опубликовано в другой работе.

2. Восьмерка и близкие к ней простые периодические решения

В начале на рис. 1 показана восьмеркообразная траектория (вверху слева) в том виде, в котором она впервые была получена, т. е. с начальными условиями на оси x в Эйлеровой конфигурации. Также как и для большей части вычислений в статье полная энергия имеет фиксированное значение, равное $h = -1/2$. Восьмеркообразное решение существует при нулевом значении интеграла кинетического момента $c = 0$. Общая масса равна 1. Положим, что три тела равной массы пронумерованы m_1, m_2, m_3 слева направо. Начальные условия:

$$\begin{aligned} E : \dot{x}_3 &\approx 0.74944\ 21910\ 77792\ 22898\ 98659, \\ \dot{y}_3 &\approx 1.15017\ 89857\ 50227\ 50240\ 30202. \end{aligned}$$

Тогда $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_3, \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = -\frac{1}{2}\dot{y}_3$. Координаты (на оси x) можно определить из значений интегралов энергии, кинетического момента

и центра масс, если известны значения скоростей. Период равен $T \approx 1.67611\,89237\,59279..$ При необходимости будем ссылаться на эту траекторию, как на траекторию Е.

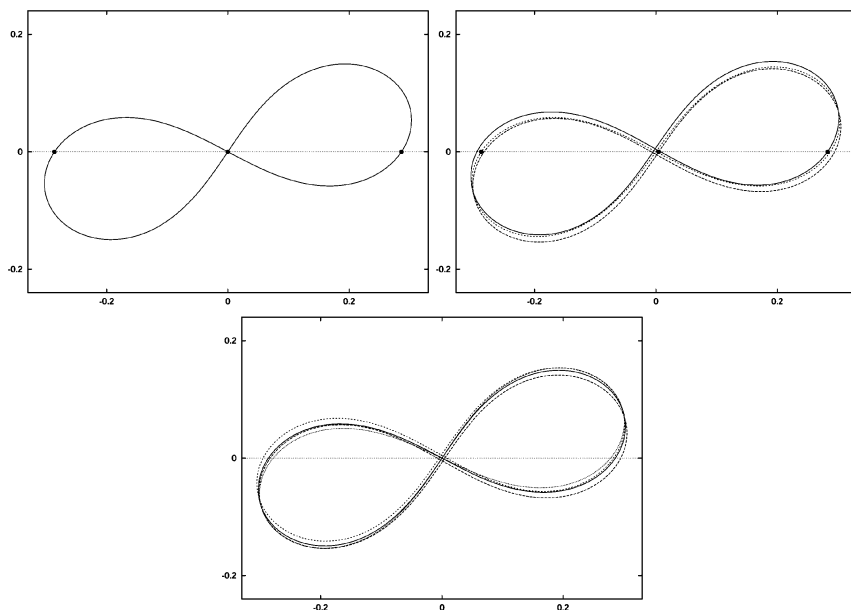


Рис. 1. Слева сверху: восьмеркообразное решение с начальными условиями в эйлеровой конфигурации на оси x . Справа: Одна из трех гиперболическо-эллиптических сопутствующих траекторий. Внизу: путь одного из тел на полностью эллиптической траектории (сплошная линия) и на гиперболическо-эллиптических траекториях (пунктирные линии). См. раздел 5

При вычислениях систематически использовался метод рядов Тейлора. Большая часть вычислений была проделана с двойной точностью и при этом оптимальный порядок обычно был примерно равен 24 (см. [11]). Некоторые вычисления были проделаны с учетверенной точностью.

После соответствующего поворота, восьмеркообразное решение становится симметричным относительно обеих осей x и y . Я не знаю, является ли эта кривая алгебраической или трансцендентной. Кривая близка к аффинному преобразованию лемнискаты, но графики все-таки различают-

ся. Принимая во внимание симметрии, можно попробовать аппроксимацию кривой алгебраическими кривыми вида

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^k c_{2(k-j), 2j} x^{2(k-j)} y^{2j} = 0$$

для различных значений m и при некоторой нормализации (например, $c_{2,0} = 1$). При использовании значений $m = 2, 3, 4$ величина максимальной ошибки меньше $1,3 \times 10^{-4}$, $1,7 \times 10^{-7}$ и 5×10^{-9} соответственно. Даже при $m = 2$ невозможно отличить восьмерку от $f(x, y) = 0$ без использования увеличения.

Вблизи восьмеркообразной траектории при сохранении равенства масс были найдены еще три дополнительных периодических траектории. В этих решениях три тела движутся по другим восьмеркообразным кривым. Обозначим эти траектории символами Н1, Н2 и Н3. Для них начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} H1 : \dot{x}_{3,H1} &\approx 0.75881\,62806\,68459, & \dot{y}_{3,H1} &\approx 1.14793\,42585\,54521, \\ \dot{x}_{2,H1} &\approx -0.40009\,31630\,24594, & \dot{y}_{2,H1} &\approx -0.58791\,53123\,82955, \\ H2 : \dot{x}_{3,H2} &= \dot{x}_{3,H1}, & \dot{y}_{3,H2} &= \dot{y}_{3,H1}, \\ \dot{x}_{2,H2} &= \dot{x}_{1,H1}, & \dot{y}_{2,H2} &= \dot{y}_{1,H1}, \\ H3 : \dot{x}_{3,H3} &\approx 0.73143\,93556\,99436, & \dot{y}_{3,H3} &\approx 1.15550\,45090\,33398, \\ \dot{x}_{2,H3} &= -\frac{1}{2}\dot{x}_{3,H3}, & \dot{y}_{2,H3} &= -\frac{1}{2}\dot{y}_{3,H3}, \end{aligned}$$

координаты (снова на оси $y = 0$) определяются по этим значениям также как и раньше. Мы обнаруживаем, что Н1 и Н2 симметричны друг другу относительно перестановки тел m_1 и m_2 . С другой стороны Н3 имеет общие с Е начальные условия: $\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_3$, $\dot{y}_2 = \frac{1}{2}\dot{y}_3$. Все три траектории Н имеют общий период $T \approx 1.67611\,91959\,47797$. Фактически, все три траектории получаются из одной из них с помощью подходящих поворотов. Действительно, при использовании трансверсального сечения $\mathcal{C}$ (см. следующий раздел), получаем, что три Н траектории и Е траектория являются неподвижными точками шестого порядка отображения первого возвращения на сечение. В подходящих нормализованных координатах три Н точки находятся в вершинах равностороннего треугольника с центром в точке Е.

3. Исследование двумерного сечения. Примеры траекторий

Плоская задача трех тел представляет собой систему с четырьмя степенями свободы. Фиксируя кинетический момент (мы выбираем значение момента $c = 0$), мы сводим ее к трем степеням свободы. Вблизи вышеуказанных периодических траекторий мы можем использовать переход через коллинеарную конфигурацию в качестве подходящего трансверсального сечения $\mathcal{C}$. Траектории Е и Н параграфа 2 пересекают $\mathcal{C}$ шесть раз до замыкания.

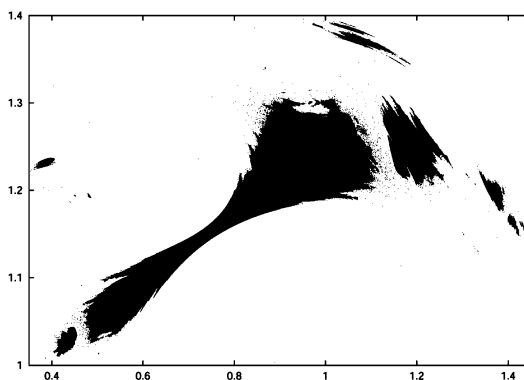


Рис. 2. Основная область устойчивости

Для того чтобы определить начальные условия на $\mathcal{C}$ (даже если массы не равны), достаточно значений $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3$ и значений $h = -1/2, c = 0$. В этом четырехмерном многообразии естественно выбрать двумерное сечение $\mathcal{C}_2$, определенное условиями $\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_3, \dot{y}_2 = \frac{1}{2}\dot{y}_3$ для поиска возможных интересных траекторий. В $\mathcal{C}_2$ точка определяется координатами $\dot{x}_3, \dot{y}_3$.

Мы использовали следующее правило поиска:

- Выберем некоторую точку на $\mathcal{C}_2$ и вычислим до 30 000 пересечений с $\mathcal{C}$ (скажем 5 000 полных «оборотов» для значений достаточно близких к Е, см. раздел 5).
- Останавливаем вычисления, если траектория прошла слишком близко к столкновению ($\min_{1 \leq i < j \leq 3} \{r_{i,j}\} < 10^{-6}$), или если максимальное рас-

стояние слишком велико (скажем >10). Обычно сближение происходит перед уходом тел за пределы области. Здесь $r_{i,j}$ означает расстояние между m_i и m_j .

- Выводим на рисунок начальные условия точек на C_2 , начиная с которых не происходит ухода на бесконечность до конца вычислений.

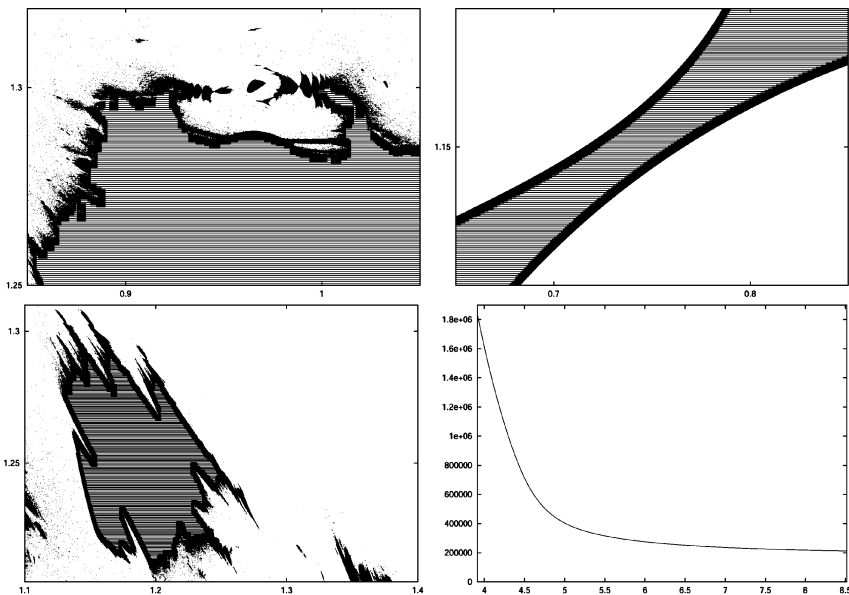


Рис. 3. Подробное устройство различных частей основной области устойчивости, показанной на рис. 2. Внизу справа: эволюция числа точек, не уходящих при поиске на бесконечность, в зависимости от числа полных оборотов. Горизонтальный масштаб является логарифмическим, значения изменяются в диапазоне $[50, 5\,000]$

Результаты этого теста показаны на рис. 2. Начальные данные берутся между значениями 0,0005 и 3 с шагом 0,0005 по обеим координатам $\dot{x}_3$ и $\dot{y}_3$. Следует упомянуть, что точка Е лежит вблизи центра узкой области, которую расположена в центре рисунка (на рисунках 4,7 это видно более четко). Часть графика между точкой Е и левым нижним углом выглядит симметричной (с некоторым искажением в правой верхней части этой об-

ласти графика). Вне главной области, показанной на рис. 2 расположены несколько других малых областей «устойчивости». Для малых значений $\dot{y}_3$ мы также обнаружили несколько крохотных областей. Вблизи центра этих малых «островов устойчивости» мы обнаружили периодические траектории сложного вида, которые сравнительно близко подходят к столкновению. Они выглядят устойчивыми, также как выглядит устойчивой траектория Е. Исследование траектории Е см. в разделе 5. Однако траектория Е — это единственная траектория из обнаруженных при поиске, которая приводит к хореографии.

Приведем несколько примечательных фактов о главной области устойчивости:

- Мы начали поиск с 36×10^6 начальных условий. Большая часть траекторий ушла на бесконечность очень быстро. После 300 (соответственно 3 000) проходов через $\mathcal{C}$. Число оставшихся траекторий равнялось примерно $1,84 \times 10^6$ (соответственно $2,63 \times 10^5$). После 30 000 проходов через $\mathcal{C}$ по-прежнему сохраняется более $2,12 \times 10^5$ точек. На рис. 3 внизу справа показана эволюция количества сохраняющихся точек в зависимости от числа полных оборотов. Она указывает на существование траекторий, которые всегда остаются в области устойчивости. В выбранных областях мы производили более длительные вычисления, которые показывают, что, начиная с этого момента убывание происходит довольно медленно.
- Мы провели еще одну серию вычислений вблизи границ ранее полученной области с шагом, равным 10^{-4} . Некоторые результаты показаны на рис. 3 сверху и внизу слева. Интересно отметить различия в поведении разных областей. На левых графиках приведены области с хорошо определенной границей, но на них по-прежнему имеется некоторое количество рассеянных точек, для которых можно предсказать уход на бесконечность при дальнейших итерациях.
- Противоположное поведение показано на верхнем правом графике вблизи точки Е. Граница является очень контрастной. Фактически после нескольких начальных итераций на графике не происходит никаких существенных изменений. Из этого можно заключить, что большая часть точек внутри этой части портрета всегда остаются в пределах области и лишь малая их часть подвержена диффузии.

Чтобы получить представление о поведении остающихся траекторий, близких к восьмерке, мы выбрали несколько начальных условий на $\mathcal{C}_2$ и

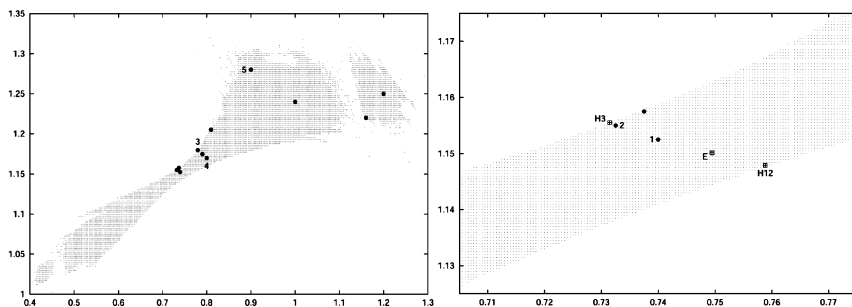


Рис. 4. Увеличения рисунка 2, показывающие расположение начальных условий для периодических траекторий и для торов, показанных на рис. 5 и 6

произвели итерации полного отображения Пуанкаре, т. е. после шести проходов через C . Пример начальных условий показан на рис. 4. Для удобства читателей на рисунке также показаны расположения точек E и $H3$, а также проекции $H1$ и $H2$ на C_2 . Заметим, что точки H похожи с контрастными границами области устойчивости вблизи E . Другие отмеченные нумерованные точки на рисунке 4 также демонстрируют интересные свойства, которые мы здесь не описываем.

Для проверки мы приводим данные на C_2 для пронумерованных точек рисунка 4.

- Начальные данные 1: $\dot{x}_3 = 0.74$, $\dot{y}_3 = 1.1525$, 10 000 итераций,
 Начальные данные 2: $\dot{x}_3 = 0.7325$, $\dot{y}_3 = 1.155$, 10 000 итераций,
 Начальные данные 3: $\dot{x}_3 = 0.78$, $\dot{y}_3 = 1.18$, 20 000 итераций,
 Начальные данные 4: $\dot{x}_3 = 0.8$, $\dot{y}_3 = 1.17$, 10 000 итераций,
 Начальные данные 5: $\dot{x}_3 = 0.9$, $\dot{y}_3 = 1.28$, 30 000 итераций.

Для каждого набора начальных данных проекции соответствующих 2D торов на C показаны на рисунках 5 и 6. Они образуют 3D торы в фазовом пространстве, ограниченном условием $c = 0$. Комментарии к формам этих торов см. ниже в этом разделе.

С другой стороны, также естественно искать 2D торы в фазовом пространстве, рассматривая их как инвариантные кривые в C . Существуют два основных (канторовых) семейства исходящих из точки E (см. параграф 4). Кроме этих семейств, можно обнаружить семейства, связанные с простыми

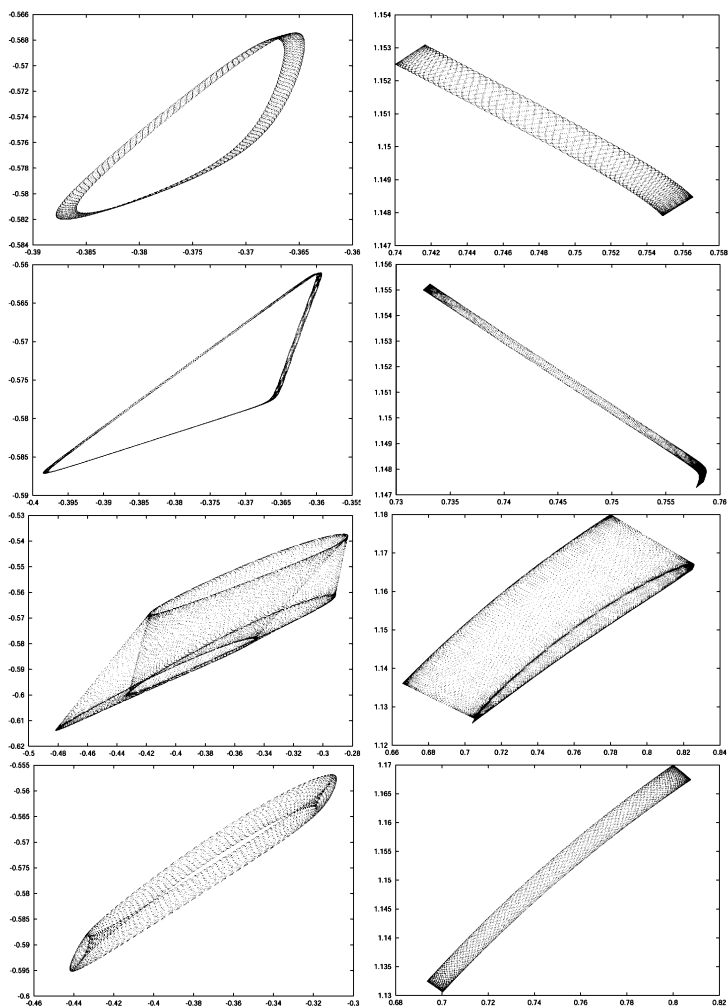


Рис. 5. Примеры торов, близких к восьмеркообразному решению. Графики сверху вниз соответствуют начальным условиям, определяемым точками с номерами от 1 до 4 на рис. 4. Слева: проекции точек в C на переменные $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$. Справа: такая же проекция на переменные $(\dot{x}_3, \dot{y}_3)$

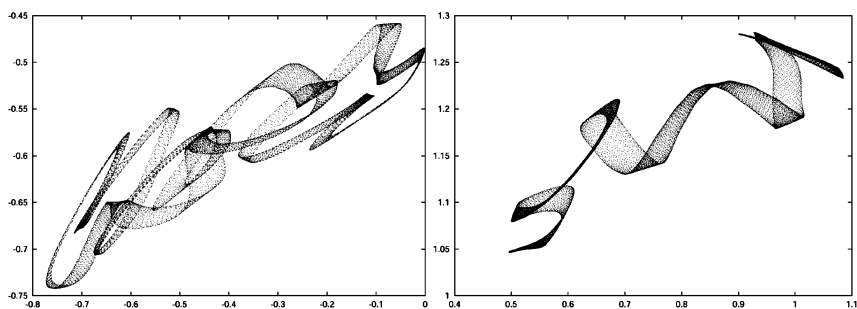


Рис. 6. То же, что и на рисунке 5 для интересных торов, соответствующих точке номер 5 на рисунке 4

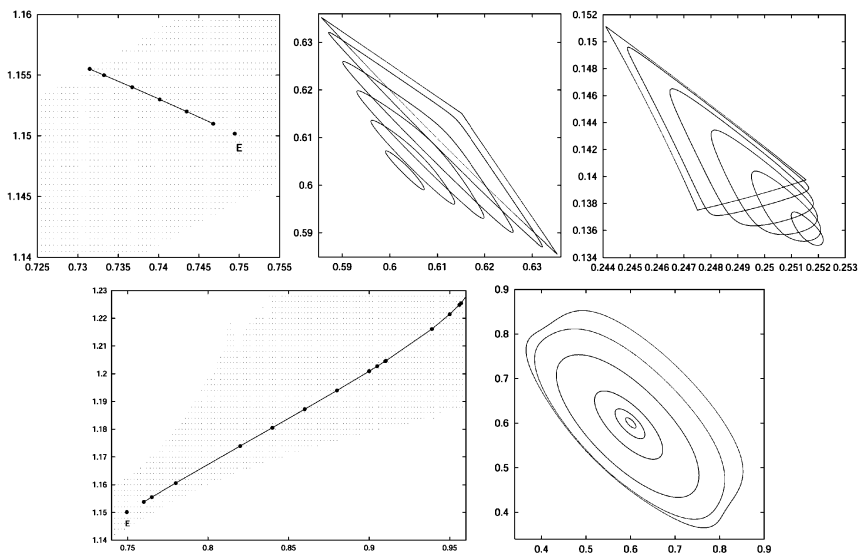


Рис. 7. Вверху: слева характеристическая кривая медленного семейства инвариантных кривых отображения Пуанкаре. На среднем и правом рисунках показаны две проекции этих кривых. Внизу: слева характеристическая кривая быстрого семейства инвариантных кривых. Справа проекция этих кривых

резонансами между компонентами вектора вращения 2D торов. По крайней мере, если резонансы не имеют слишком высокий порядок.

Для этих целей использовались различные методы. Один из них представляет собой синтез отображения первого возвращения (см. например [8]). Другой простой метод заключается в вычислении 2D торов, проведении частотного анализа для определения основных частот и соответствующих амплитуд фундаментальных гармоник, а затем в применении метода поиска нулей для обращения в нуль амплитуды нежелательной частоты. Пример результатов, полученных этим методом показан на рис. 7.

Для идентификации каждого из 2D торов достаточно привести начальные условия (т. е., одну точку в $\mathcal{C}_2$) или (резонансные) частоты или какие-нибудь условия, позволяющие восстановить тор. Геометрическое место точек этих данных для однопараметрического семейства называется «характеристической кривой». Иногда термин характеристическая кривая используется неточно для обозначения того, что фактически является некоторой ее проекцией. Такая идентификация в точности совпадает с тем, что обычно делается для представления семейств периодических траекторий.

Левые графики на рис. 7 показывают подробное устройство области устойчивости на рис. 2 с указанием расположения характеристических кривых двух главных семейств 1D торов, вместе с указанием расположения точки E в $\mathcal{C}_2$. В верхней части рисунка семейства соответствуют *медленной частоте* (см. параграф 4). Заметим, что характеристика медленного семейства в сущности идет из точки E в точку H3. На центральном и правом графиках сверху показаны проекции на плоскости $(\dot{x}_2, \dot{x}_3)$ и (x_2, y_2) , соответственно, выбранного множества инвариантных кривых, соответствующих отмеченным точкам на левом графике. Отметим, что, когда мы двигаемся вдоль семейства, из точки E к границе, размер кривых увеличивается, а их форма стремится к треугольнику. Фактически 2D тор фазового пространства, стянутый этим треугольником, приближается к трем периодическим траекториям H, описанным ранее. Более того, число вращения на инвариантных кривых, малó уже в точке E, и стремится к нулю, при приближении к границе.

Нижняя часть рис. 7 соответствует *быстрой моде*. Число вращения не является малым в точке E (см. параграф 4) и медленно уменьшается при удалении от нее, в то время как размер инвариантных кривых, показанных в правой части, увеличивается.

Отметьте, что «характеристические кривые», показанные на рис. 7, фактически представляют собой канторовы множества. Однако его проме-

жутки слишком малы, чтобы их можно было увидеть при показанном разрешении. Мы решили не отмечать на этих кривых точки, близкие к E , но в действительности это та часть «кривой», где канторово множество является более «толстым» (относительная мера дополнения к канторову множеству экспоненциально мала относительно расстояния до точки E).

Вблизи центральной части области устойчивости вокруг E две основных моды являются, в сущности, кривыми, которые стремятся к треугольной и эллиптической формам, соответственно. Если сравнить с торами, показанными на рис. 5, то мы увидим, что система близка к произведению этих мод и не слишком далека от интегрируемой. Торы с номерами 1 и 4 на рис. 5 не очень далеки от инвариантных кривых медленной и быстрой мод. Дополнительная амплитуда мала. Тор номер 2 очень близок к инвариантной кривой треугольной формы, в то время как тор номер 3 близок к произведению треугольника на эллипс, что соответствует точке близкой к границе и не слишком близкой к характеристической кривой медленного семейства.

4. Изучение локального поведения

Ключевым свойством восьмеркообразного решения является *устойчивость*. Во-первых, можно вычислить собственные числа отображения Пуанкаре на C , ограниченного на уровень $c = 0$. Они равны $\lambda = \exp(\pm 2\pi i \nu_j)$, $j = 1, 2$. Полученные нами численные значения равны $\nu_1 \approx 0.00842\,27247\,08131$ и $\nu_2 \approx 0.29809\,25290\,04750$. Малая величина ν_1 связана с медленной модой, а ν_2 с быстрой модой. Из всего вышеперечисленного следует линейная устойчивость.

Чтобы получить информацию о нелинейных свойствах, нам нужно представить отображение Пуанкаре вокруг неподвижной точки в виде степенного ряда. Мы знаем, что отображение является аналитическим, ввиду аналитичности векторного поля вдали от столкновений. Одним из возможных путей получения этой информации является интегрирование вариационных уравнений высокого порядка. Формулировки и примеры см. в [7]. Здесь мы успешно применили другой подход: численное дифференцирование.

Хорошо известно, что для функции $F(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, компоненты $D^k F(X)$ можно аппроксимировать с помощью линейной комбинации значений F в точках сетки вокруг X с шагом ε , взятых с подходящими весами (см., например, [12]). В одинаковом шаге сетки по всем n координатам нет необходимости, но для простоты мы предположим, что это так.

Пусть $\mathcal{D}^k F(X, i\varepsilon)$ — значения полученные с помощью этой аппроксимации. Отметим, что в практических целях все компоненты $\mathcal{D}^k F(X, \varepsilon)$ вычислялись с использованием одной и той же решетки, и вычислялись лишь те значения, которые действительно необходимы.

Если F принадлежит классу $\mathcal{C}^{k+2}$, тогда если мы выберем формулы численного дифференцирования с обрывом на втором порядке по ε , то для фиксированного X погрешность вычислений имеет вид

$$\mathcal{E}(\varepsilon) := \|\mathcal{D}^k F(X, \varepsilon) - D^k F(X)\| \approx A\varepsilon^2 + B/\varepsilon^k.$$

Здесь A и B связаны с границами $\|D^{k+2} F\|$ в окрестности X и с ошибками, возникающими при вычислении значений F на использованной сетке. Очевидно, что они зависят от k . Эти значения можно оценить, используя сетки с различными значениями ε .

В представленной задаче эта процедура была реализована автоматически. Переменная X состоит из параметров в $\mathcal{C} : (\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3)$. В соответствии со сказанным, мы можем сравнить $\mathcal{E}(\varepsilon_1)$ с $\mathcal{E}(\varepsilon_2)$, используя $\varepsilon_2 = \gamma\varepsilon_1, \gamma \in (\gamma_0, \gamma_1), 0 < \gamma_0 < \gamma_1 < 1$ для последовательности значений ε_1 . В качестве представления этих разностей $\Delta\mathcal{E}(\varepsilon_1)$ мы используем максимум значений, полученных для всех компонентов $\mathcal{D}^k F(X, \varepsilon_1) - \mathcal{D}^k F(X, \varepsilon_2)$. Результат мы получим в виде

$$\Delta\mathcal{E}(\varepsilon_1) \approx \hat{A}\varepsilon^2 + \hat{B}/\varepsilon^k,$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ отличаются от A и B на постоянный множитель, зависящий от γ .

На рис. 8 вверху слева показаны результаты, полученные при использовании в качестве X точки, соответствующей восьмеркообразному решению и отображения Пуанкаре в качестве F . На рисунке мы строим график оцениваемых значений $\log |\Delta\mathcal{E}(\varepsilon)|$ в зависимости от $|\log \varepsilon|$. При малых ε коэффициент наклона равен k , в то время как для больших ε он должен равняться -2 . На рис. 8 сплошная линия и линия плюсов показывает результаты, полученные с учетверенной точностью для значений $k = 1, \dots, 15$, в то время как пунктирная линия соответствует двойной точности и значениям $k = 1, \dots, 11$. Можно проверить, что совпадение с предсказанным поведением является превосходным.

Наилучшие оценки компонентов $D^k F(X)$ получены для таких значений ε , при которых значение $|\Delta\mathcal{E}(\varepsilon)|$ минимально. Очевидно, что для различных k оптимальными являются различные значения ε . Пусть ε_k — оптимальное значение для порядка k . Предположим аналитичность (как в рассматриваемом случае), и что наибольший коэффициент порядка k ряда

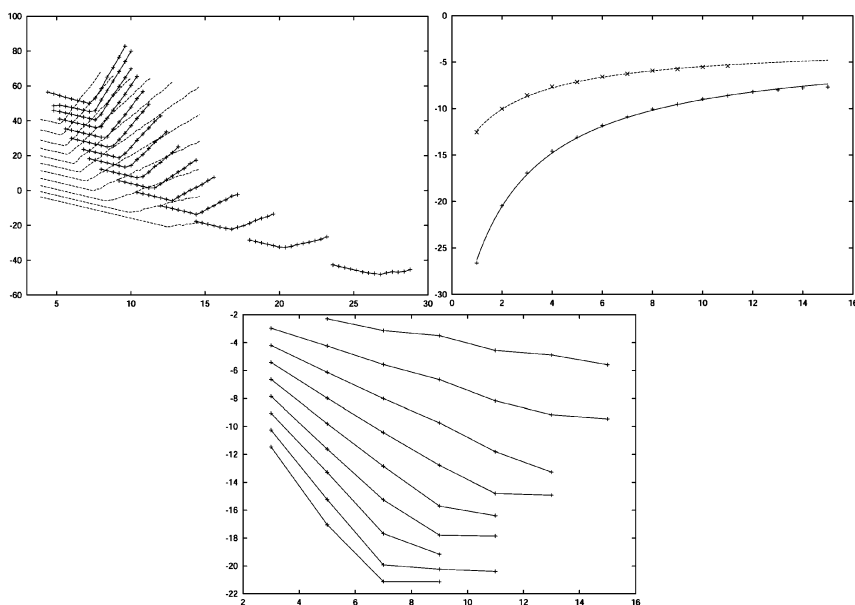


Рис. 8. Вверху: слева поведение оценок ошибки численного дифференцирования в зависимости от k и ϵ . Справа: поведение оптимальной величины шага в зависимости от порядка. Внизу: границы ошибок модели в зависимости от порядка в различных областях

Тейлора ведет себя как cd^k с некоторыми положительными константами c и d , тогда получим формулу

$$\log \varepsilon_k \approx \alpha + \frac{\beta}{k+2},$$

где α, β — положительные константы. Такое поведение отмечено на рис. 8 вверху справа. Это довольно интересно, поскольку благодаря этому мы получаем хорошие предсказания для значений ε_k , поэтому необходимо проверить лишь несколько значений ϵ для каждого k . Графики представленные здесь используют слишком много значений ϵ лишь с целью иллюстрации.

Аппроксимировав коэффициенты представления отображения Пуанкаре в виде ряда Тейлора вплоть до некоторого порядка k , мы получаем простую аналитическую модель. Мы можем получить оценки ошибок, воз-

никающих при использовании модели вокруг точки Е вместо прямого использования отображения Пуанкаре. Эти ошибки могут быть оценены на сетке в сфере радиуса ρ на $\mathcal{C}$. Результаты представлены на рис. 8 внизу. Мы строим график $\log_{10}$ (максимальная ошибка) в зависимости от k для $\rho = 0.001 \times 2^j$, $j = -2, \dots, 6$. Различные значения ρ соответствуют различным линиям снизу вверх. Результаты, представленные на графике были получены с использованием учетверенной точности, но они не слишком отличаются (за исключением тех случаев когда ρ очень мало) от результатов, полученных с использованием двойной точности.

Следует отметить, что ошибки, связанные с образами трех неподвижных точек Н1, Н2 и Н3 в рассматриваемой модели меньше 10^{-12} при использовании разложения до девятого порядка. При использовании более высокого порядка никаких дальнейших улучшений не происходит. Даже для $\rho = 0.06$ можно получить ошибки порядка 10^{-6} .

Отсюда возникают два следствия:

- При использовании модели получение нормальной формы является рутинной операцией. То, что используемые координаты не являются симплектическими, не имеет значения. В частности использование модели с разложением до третьего порядка позволяет сделать вывод, что *закручивание является невырожденным*. Следовательно, можно применить КАМ-теорему, которая гарантирует, что большая часть «видимых» торов в модели *действительно существуют*.
- Хорошее качество модели в окрестности, включающей точку Е и три точки Н позволяет построить *полуглобальную модель*, т. е. модель, верную в сравнительно большой области. В частности, в этой модели можно проверить свойства устойчивости точек Н. Приблизительно определяются следы, т. е. значения $tr_1 = \lambda_1 + \lambda_1^{-1}$, $tr_2 = \lambda_2 + \lambda_2^{-1}$, где $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}$ — собственные значения дифференциала отображения Пуанкаре, вычисленного в точках Н. Прямым вычислением получаем значения

$$tr_1 \approx 2.00838\,77350\,62189, \quad tr_2 \approx -0.58895\,54022\,02053.$$

Из этих значений очевидно, что точки Н имеют гиперболическо-эллиптический тип. Собственные значения равны

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 1.09587\,44193\,78570, \\ \lambda_2 &= \exp(2\pi i\nu_3), \quad \nu_3 \approx 0.29757\,28352\,61762. \end{aligned}$$

Мы можем сделать вывод, что отображение Пуанкаре вблизи E имеет 4 неподвижные точки: три в вершинах треугольника и одну в центре. Эти точки близки к 2D подмногообразию. В остальных направлениях мы, в сущности, имеем закручивающее отображение. Как уже упоминалось, отображение Пуанкаре близко к произведению. Также отметим, что 1D инвариантные многообразия точек H почти «совпадают» с гомоклиническими пересечениями. Расстояние между этими многообразиями экспоненциально мало относительно расстояния между точками, которое в рассматриваемом случае мало. Это подтверждает контрастность границ, показанную на рис. 3 вверху справа. Точки внутри произведения «треугольника» на круг остаются внутри области (за исключением эффектов диффузии Арнольда и малого несовпадения многообразий, которые являются экспоненциально малыми). С другой стороны, начальные данные за пределами треугольника приводят к быстрому уходу за пределы области.

Границы области устойчивости вблизи E являются устойчивым/неустойчивым многообразиями центрального многообразия точек H . Когда мы двигаемся вдоль границы уходя от точки E несовпадение многообразий становится более значимым, что видно на рис. 2. Похоже, что это является разумным объяснением наблюдаемого поведения.

5. Устойчивость в зависимости от масс и связанные с этим бифуркации

В этом параграфе мы рассмотрим случай переменных масс, при этом снова возьмем значения $h = -1/2$, $c = 0$ энергии и кинетического момента. В качестве подходящего сечения будем использовать $\mathcal{C}$. Нас интересует эволюция периодических траекторий в зависимости от масс тел и, главным образом, свойство устойчивости. После изменения величин масс периодические траектории больше не будут хореографиями.

Рассмотрим массы как барицентрические координаты в равностороннем треугольнике с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Координаты точки треугольника представлены в виде (μ, ν) . Значения $(\mu_0, \nu_0) = (1/2, \sqrt{3}/6)$ соответствуют случаю равных масс, эту точку в пространстве масс мы обозначим как M . По заданным (μ, ν) массы восстанавливаются следующим образом $m_3 = 2\nu/\sqrt{3}$, $m_2 = \mu - m_3/2$, $m_1 = 1 - m_2 - m_3$.

Локально вблизи M также существуют четыре периодических траектории и они имеют тот же тип, что и в точке M . Как мы увидим в дальнейшем, нам следует ограничиться очень маленькой областью вокруг M , если нас

интересуют устойчивые траектории. Следовательно, одно из собственных значений всегда остается эллиптическим (быстрая мода). Мы сконцентрируем наши усилия на изучении другой моды. Когда мы ссылаемся на след, мы имеем ввиду след связанный с этой (медленной) модой.

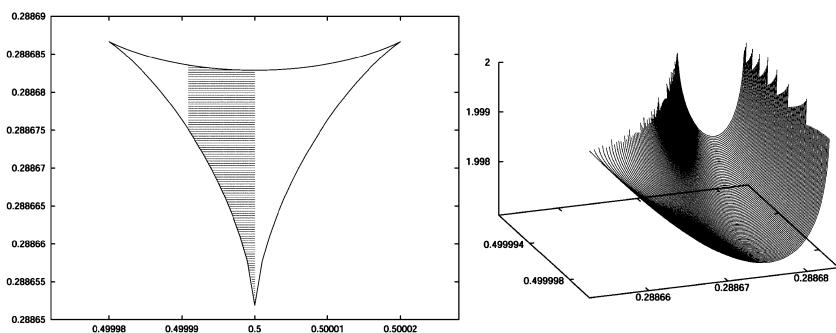


Рис. 9. Слева: область на треугольнике масс, где периодические траектории являются устойчивыми. Справа: график следа близкого к двум в зависимости от масс для части треугольника. Проекция этой части также показана слева

На рис. 9 слева показана область на треугольнике масс вблизи M , на которой траектория, полученная эволюцией точки E , является полностью эллиптической. Другие три траектории все еще существуют в этой области и являются гиперболическо-эллиптическими. Ввиду симметрии в пространстве масс достаточно исследовать, что происходит в одной шестой треугольника. Однако для лучшей иллюстрации мы рассмотрим полосу на треугольнике, покрывающую почти его половину и вычислим на ней периодические траектории и связанный с ними след. В правой части рисунка показан след на рассматриваемой полосе. Ясно, что при приближении к крайней левой вершине треугольника след стремится к двум. При движении к этой вершине вдоль $m_1 = m_3$ мы имеем такое же поведение, как на передней линии правого графика.

Для начала отметим, что треугольник очень маленький. На прямой $\mu = 1/2$ ($m_1 = m_2$) нижняя вершина отстоит от центра треугольника на $\Delta\nu_- = -2.32 \times 10^{-5}$. Центральная точка верхней стороны отстоит от центра на $\Delta\nu_+ = 0.77 \times 10^{-5}$. Это означает, что минимальные и максимальные значения масс в треугольнике примерно равны ≈ 0.33330654 и ≈ 0.33334673 , соответственно.

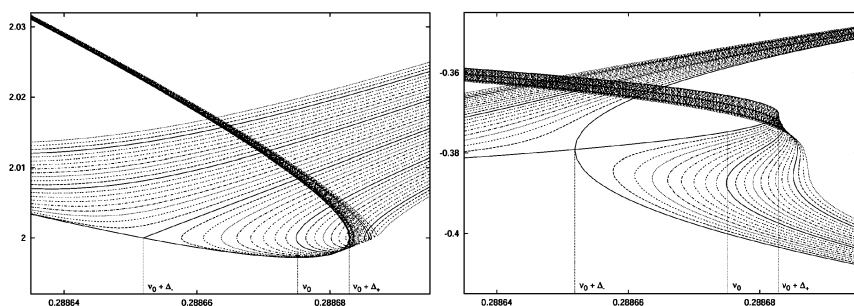


Рис. 10. Слева: проекции следов в зависимости от ν для значений μ из отрезка $[0.499979, 0.5]$ с шагом 10^{-6} . Справа: аналогичная проекция $\dot{x}_2$ в зависимости от ν . Отметим, что различные дуги в правой части проектируются на одну и ту же линию в левой части

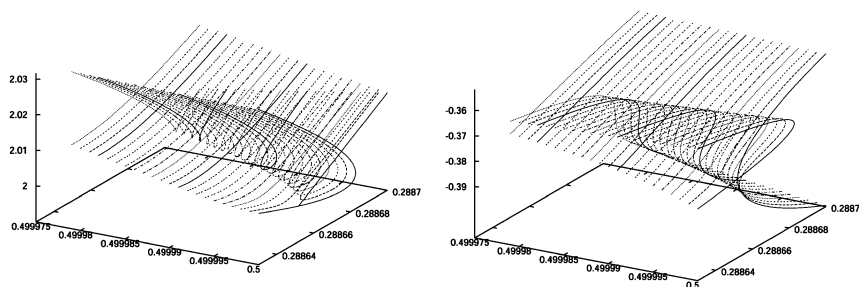


Рис. 11. Трехмерный вид рисунка 10

Вдоль границы треугольника возникает эллиптически-гиперболическая бифуркация, на каждой стороне треугольника гиперболические траектории являются различными. Для лучшего понимания этой бифуркации на рис. 10 изображены следы всех траекторий полученных эволюцией точек Е и Н, на различных слоях $\mu = \text{const}$. Сплошная линия, видимая в нижней части рисунка 10 слева, и соответствующая $\mu = 1/2$, изгибается при $\nu = \nu_0 + \Delta\nu_+$ и идет вверх вблизи верхнего левого угла. В нижней части, в точке $\nu = \nu_0 + \Delta\nu_-$ (т. е. в вершине треугольника) возникает еще одна бифуркация. Это бифуркация типа вилки. Двигаясь слева направо вдоль кривой на графике, мы переходим от гиперболической траектории к эллиптической плюс две

гиперболических траектории. На этом графике обе новых гиперболических траектории имеют одинаковую проекцию. Чтобы увидеть это, см. различные проекции на правой части рис. 10.

Когда μ уходит от $1/2$ соответствующие кривые на левой части рис. 10 либо не имеют бифуркаций, либо имеют две эллиптически-гиперболических бифуркации. Всегда существуют (по крайней мере не слишком далеко от M) две гиперболических периодических траектории полученных эволюцией траекторий, существовавших в точке M , а четыре решения существуют только внутри треугольника. На рис. 11 показан трехмерный вид следа в зависимости от (μ, ν) (слева) и от $(\dot{x}_2, \nu)$ (справа).

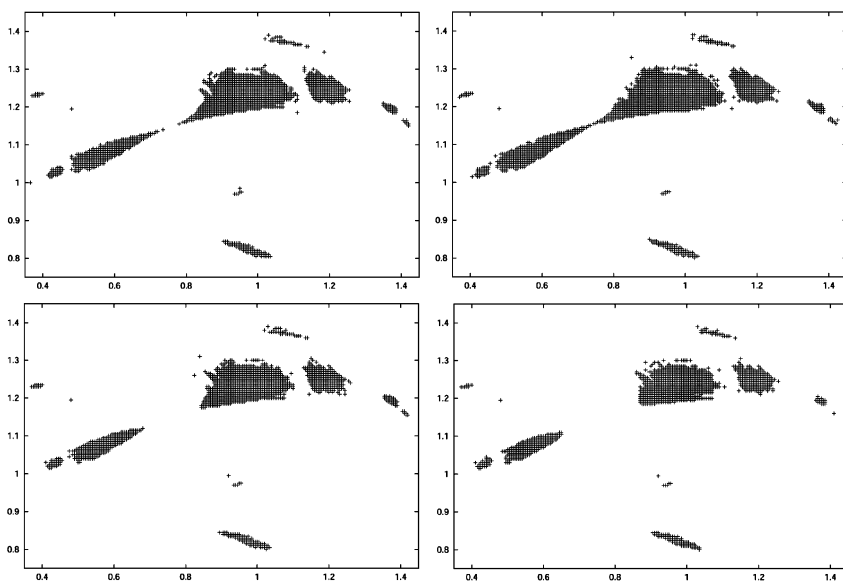


Рис. 12. Области устойчивости для близких масс. Величины масс см. в тексте

Какое действие изменения масс оказывают на области устойчивости, подобные тем, которые показаны на рис. 2? Мы видели, что для равных масс область устойчивости относительно велика. Разумеется, когда полностью эллиптическая траектория отсутствует (вне треугольника, показанного на рис. 9), все устойчивые объекты, которые достаточно близки к E , должны исчезнуть. Эффект малых изменений (μ, ν) является весьма зна-

чительным. Уже при очень малых изменениях (порядка 10^{-5}) возникает некоторое уменьшение области устойчивости. На рис. 12 показаны некоторые случаи. Верхний левый рисунок соответствует случаю $m_1 = m_2$ и бифуркации типа вилки. Верхний правый рисунок соответствует случаю $m_1 = m_2$ и эллиптически-гиперболической бифуркации. Изменения параметра относительно равных масс на графиках внизу слева и справа равны $(\Delta\mu, \Delta\nu) = (-1, -4) \times 10^{-5}$ и $(-3, -5) \times 10^{-5}$ соответственно.

Приведем здесь некоторые данные сделанных вычислений: при использовании очень грубой сетки с шагом 0.005 в обоих направлениях в диапазоне $[0, 2]$ число точек остающихся в области после 5 000 полных итераций отображения Пуанкаре равно (слева направо и сверху вниз) 1 741, 1 991, 1 545 and 1 338, соответственно. Отметим, что эти значения примерно равны 1% точек рис. 2, где использовалась сетка с шагом 0.0005.

Ограничиваясь случаем $\mu = 0.5$, получаем, что эти данные несколько меньше при $\Delta\nu = \pm 10^{-4}$, когда число остающихся точек примерно равно 1 000. Их остается несколько сотен, когда $\Delta\nu$ равно примерно $\pm 10^{-3}$, и, в сущности, ни одной точки не остается при $|\Delta\nu|$ порядка 10^{-2} .

6. Сопутствующие и относительные хореографии

Вернемся теперь к случаю равных масс, который мы будем рассматривать до конца статьи.

Мы приведем здесь некоторые результаты, представленные в [3] о хореографиях, связанных с восьмеркой. Подробнее см. в той же работе. Как уже упоминалось восьмеркообразное решение является полностью эллиптическим. Локально оно близко к произведению двух закручивающих отображений со слабым взаимодействием. Мы можем выбрать соответствующие амплитуды так, чтобы периодические траектории существовали в каждом из отображений. Чтобы исключить слишком большие периоды выберем амплитуду медленной моды, равной нулю. Следовательно, мы переходим на характеристическую кривую быстрой моды (см. рис. 7 внизу слева). Если число вращения рационально, то возникает периодическая траектория. Мы можем называть ее *сопутствующей траекторией* восьмерки.

Не все периодические траектории отображения Пуанкаре приводят к хореографиям. Если мы ограничимся характеристикой быстрой моды, то число вращения должно иметь вид p/q с $(q, 3) \neq 0$. На рис. 13 слева показан пример сопутствующей хореографии с числом вращения $11/37$. Для сравнения также показана восьмерка. Точки соответствуют начальным условиям в некоторый произвольный начальный момент времени.

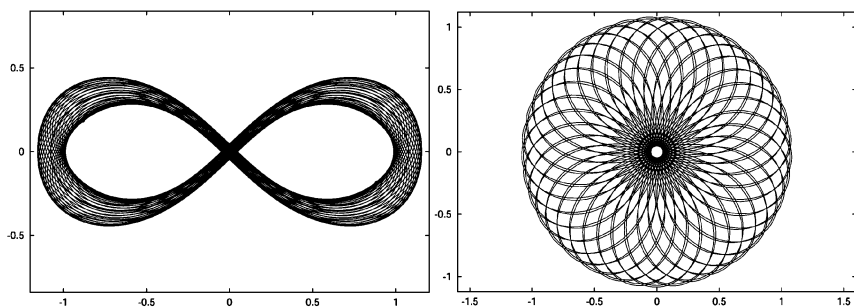


Рис. 13. Пример сопутствующей хореографии (слева) и относительной хореографии (справа)

Также существует и другая возможность. Периодическое решение восьмерки на уровне $c = 0$ можно продолжить на значения $c \neq 0$, однако, чтобы получить такое периодическое решение, мы должны использовать вращающуюся систему координат. Я благодарен М. Хенону (М. Hénon), который исследовал продолжение траекторий относительно кинетического момента [4]. Как он обнаружил, траектории, полученные продолжением, во вращающейся системе координат снова являются хореографиями (см. параграф 7). После одного периода во вращающейся системе координат траектория поворачивается на угол δ неподвижной системе координат. Выбирая в качестве δ подходящее рациональное число, умноженное на 2π , мы можем получить истинную хореографию в неподвижной системе координат. Пример показан на рис. 13 справа. Угол поворота после замыкания траектории во вращающейся системе координат равен $\frac{3}{37}2\pi$.

7. Поиск других абсолютных хореографий

Наконец, мы переходим к поиску других хореографий в неподвижной системе координат.

Начнем с продолжения по c . Если вдоль семейства мы вернемся к неподвижной системе координат, то получим другую истинную или *абсолютную хореографию* (в противоположность относительной). Как упоминалось, продолжение возможно, но вскоре возникает двойное столкновение на одной из траекторий семейства. Характеристическая кривая семейства будет показана позже. Нетрудно продолжить семейство за траекторию, на которой происходит столкновение. Для этого можно использовать различные

средства. Простейшим является выполнение регуляризации Леви–Чивита всякий раз, когда мы приближаемся к двойному столкновению. Позднее будет представлен другой метод.

Двигаясь вдоль семейства, мы действительно находим другую абсолютную хореографию. После этого траектории семейства становятся все более и более сложными, имея несколько проходов близких к столкновению за время одного обращения (во вращающейся системе координат). Далее этим методом не удалось обнаружить абсолютных хореографий.

Другой подход к получению относительных хореографий и, в частности, абсолютных хореографий, заключается в следующем. Рассмотрим начальные условия в равнобедренной конфигурации с подходящими скоростями:

$$x_3 = x_2, \quad y_3 = -y_2, \quad \dot{x}_3 = -\dot{x}_2, \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_2.$$

Начальные условия для m_1 определяются из интегралов центра масс. Ось симметрии рассматриваемого равнобедренного треугольника проходит через m_1 .

Предположим, что через некоторое время τ тела проходят через другую равнобедренную конфигурацию, на сей раз с телом m_2 на оси симметрии. Пусть β — угол между предыдущей (ось x) и текущей осями симметрии. Предположим, что после вращения координат и скоростей в момент времени τ на угол $-\beta$ мы имеем равнобедренную конфигурацию *с той же самой симметрией относительно скоростей, что и начальная*. Единственным изменением является круговая перестановка тел с изменением ориентации. Тогда, непосредственно следует, что действие полупрямого произведения $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}^3$ (симметрия и перестановка) порождает относительную хореографию с периодом $T = 6\tau$ и углом вращения 6β . В частности, если β кратно π , возникает абсолютная хореография. Очевидно, что она будет симметричной относительно оси x .

Для обнаружения начальных равнобедренных конфигураций и связанных с ними скоростей (всегда на уровне $h = -\frac{1}{2}$), мы можем использовать различные способы. Один из них заключается в фиксировании значения c . Тогда может возникнуть 0, 1 или 2 возможных начальных условий, как пересечения эллипса данной кинетической энергии (в конечном счете пустого) с прямой в пространстве $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$. При движении вдоль семейства и использовании одного из двух корней, если получен двойной (кратный) корень, то после прохождения этой точки следует перейти к другому корню. Это происходит, например, на поворотных точках характеристического семейства (например, в пространстве (c, T)). Другая возможность заключа-

ется в выборе точки на эллипсе данной кинетической энергии посредством вспомогательного угла γ . Тогда скорости будут иметь вид

$$\dot{x}_2 = \sqrt{3}\rho \cos(\gamma), \quad \dot{y}_2 = \rho \sin(\gamma),$$

где ρ — квадратный корень из кинетической энергии. Тогда значение c можно получить в виде $c = (6x_2\dot{y}_2 - 2y_2\dot{x}_2)/3$ (напомним, что массы равны и $\sum m_i = 1$). Чтобы кинетическая энергия была положительной, нужно взять (x_2, y_2) внутри кривой нулевой скорости, кнс, определенной уравнением

$$\frac{1}{|y_2|} + \frac{4}{\sqrt{9x_2^2 + y_2^2}} = 1.$$

Любому (x_2, y_2, γ) с (x_2, y_2) внутри кнс и $\gamma \in [0, 2\pi]$ соответствует допустимая равнобедренная конфигурация со связанными с ней скоростями. Однако ввиду симметрий мы можем отбросить данные с $x_2 < 0$, $y_2 > 0$, $c < 0$. Отметим, что если в начальный момент времени происходит столкновение, то угол γ имеет разрыв и скачок на π . Если столкновение происходит в некоторый момент времени $t > 0$, то вдоль семейства разрывов не происходит.

Для заданных значений (x_2, y_2, γ) можно начать численное интегрирование, пока не произойдет проход через равнобедренную конфигурацию (с произвольным поворотом). Интегрирование останавливается, если $\tau > 5$ или тела уходят за пределы области или слишком близко приближаются к столкновению. Можно, конечно, искать последовательные проходы через равнобедренную конфигурацию, но использование первого похода приводит к достаточно хорошим результатам. Затем для выполнения условий на скорости используется процедура Ньютона, при этом изменяются (x_2, y_2) , а γ остается постоянным.

Эта процедура выполнялась на сетке значений $\gamma \in [0, 2\pi]$ с шагом $1/4000$. Использовались различные начальные значения (x_2, y_2) внутри области, ограниченной $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $x_2 = 1$ и кнс с шагом $1/576$ по x_2 и y_2 . Процесс останавливался в случае ухода тел из области или при столкновении, если полный период T становился больше 30, если число итераций процедуры Ньютона превышало некоторое ограничение, если итерации уходили из допустимой области или если метод сходил к уже найденному решению. Всего были проверены около 1 миллиарда начальных условий. Из них были найдены около 3×10^5 относительных хореографий. Для каждого из них запускался процесс продолжения. Конечно, многие из них получаются друг из друга с помощью продолжения. Кроме того, когда при продолжении происходило пересечение значения $\beta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, возникала абсолютная хореография.

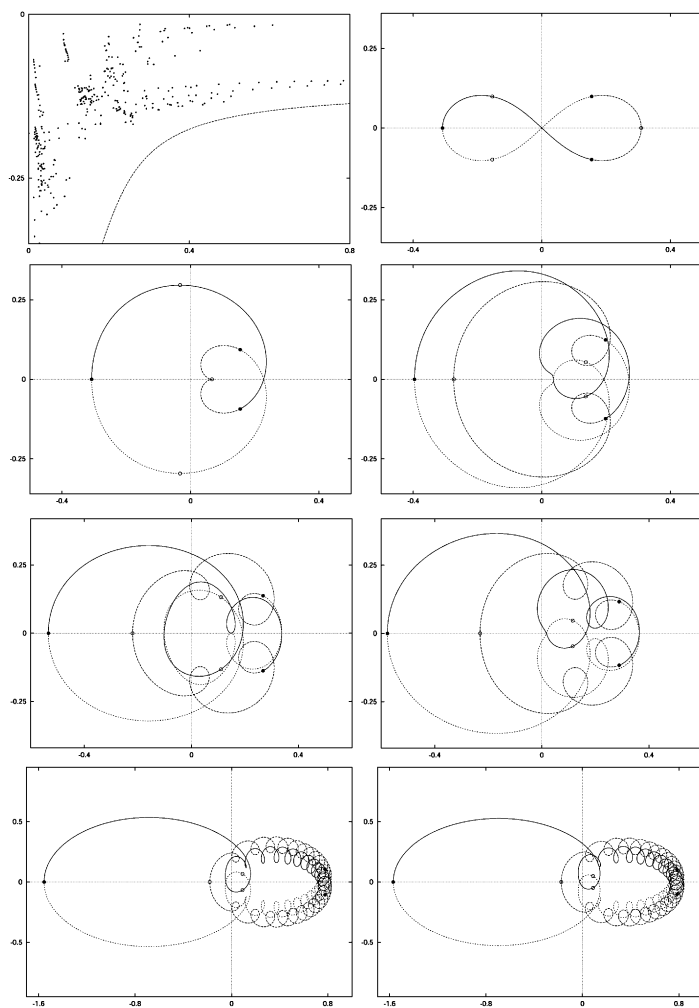


Рис. 14. Вверху слева: положения (x, y) взятые в качестве начальных равнобедренных конфигураций для получения абсолютных хореографий. Вверху справа: восьмеркообразная конфигурация. В последующих строках другие примеры абсолютных хореографий

На рис. 14 и 15 представлена выборка полученных результатов. На верхнем левом графике рисунка 14 изображены значения (x_2, y_2) , для которых были найдены абсолютные хореографии. К настоящему времени (апрель 2001 года) были обнаружены 345 решений этого типа, при ограничении периода значением 30 и опускании решений, проходящих слишком близко к столкновению. При упорядочении по возрастанию периода первой абсолютной хореографией является восьмерка. Закрашенные и полые точки на траекториях показывают начальные и конечные равнобедренные конфигурации, использованные для получения решения. Во втором ряду показаны следующая за восьмеркой хореография с наименьшим периодом и еще одна, также с небольшим периодом. Левая хореография принадлежит кривой продолжения восьмерки (получается из нее с помощью продолжения). В третьем ряду показаны хореографии номер 6 и 7, считая в порядке увеличения периода. Интересно, что увеличивая число оборотов в части траектории с двумя телами (лежащей, главным образом, в области $x > 0$ на графиках), получаем два счетных множества абсолютных хореографий. В них центр масс двух тел и третье (лежащее напротив первых двух) тело подходят близко к эллиптическим траекториям, до тех пор, пока не произойдет обмен тел. В последнем ряду на рис. 14 показаны последние члены обоих семейств при $T < 30$. Соответствующие точки на верхнем левом графике изображены как последовательность, относительно близкая к кнс в правой части. Однако существуют много других семейств. Хореографии в последнем ряду принадлежат простейшим из семейств. Обратим внимание также на то, что некоторые семейства абсолютных хореографий симметричны относительно обеих осей x и y .

Приблизительные значения начальных условий и величина одной шестой периода для траекторий, показанных во второй, третьей и четвертой строках рис. 14, приведены ниже. За исключением восьмеркообразного решения величина кинетического момента на этих решениях больше 0.19. Фактически, у всех 345 найденных хореографий, за исключением восьмерки, кинетический момент больше 0.12.

строка		γ	x_2	y_2	τ
2	слева	0.73976160	0.15402894	-0.09324743	0.44929802
2	справа	0.80535382	0.19818361	-0.12376832	1.08886765
3	слева	0.70450055	0.26707603	-0.13756835	1.43912861
3	справа	0.60277109	0.28844514	-0.11671861	1.45630457
4	слева	0.29968793	0.77718110	-0.10676744	4.72345735
4	справа	0.26175926	0.78447812	-0.10133157	4.72368628

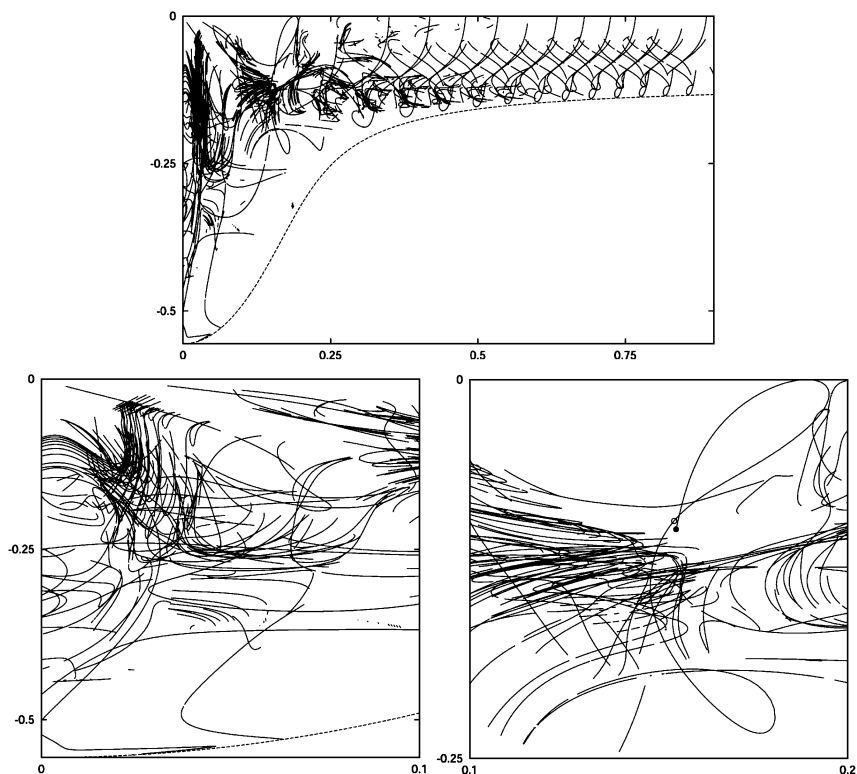


Рис. 15. Характеристические кривые относительных хореографий на плоскости (x_2, y_2) . Кнс показана пунктирной линией. В нижней части показаны некоторые увеличения верхнего рисунка

На рисунке 15 сверху показаны характеристические кривые относительных хореографий в переменных (x_2, y_2) . В верхней правой части между кнс и прямой $y = 0$ повторяется простая структура. Очевидно, что эти структуры повторяются бесконечное число раз, с увеличивающимися периодами. В левой части этого рисунка ситуация становится запутанной. Увеличения его частей показаны внизу. В интервале $x_2 \in [0.0; 0.1]$ также можно предположить наличие нескольких семейств. При $x_2 \in [0.1, 0.2]$ существует замечательное семейство, начинающееся в отмеченной точке,

которая соответствует восьмерке. Двигаясь вдоль семейства достигаем точки $y_2 = 0$, в которой происходит столкновение. Затем характеристическая кривая проходит через точку, отмеченную малой окружностью (расположенную очень близко к начальной точке восьмеркообразного решения в этой проекции). Эта новая отмеченная точка соответствует абсолютной хореографии во второй строке слева на рис. 14. При движении вдоль семейства видны некоторые разрывы. Они связаны с прохождением слишком близко к столкновению.

Ни одна из обнаруженных абсолютных хореографий, за исключением восьмерки, не является устойчивой.

Благодарности. Стартовой точкой этой работы стали обсуждения и предложения сделанные А. Шенсине и Р. Монтгомери. За исключением последнего параграфа, большая часть работы была выполнена во время года, свободного от преподавания, в Институте небесной механики (Обсерватория Парижа) благодаря поддержке CNRS. Я благодарю своих коллег в этом институте за гостеприимство и интерес к моей работе. При выполнении работы широко использовался центр параллельных вычислений научной группы UB Grup de Sistemes Dinàmics. Работа также поддержана грантами BFM2000–805 (Испания) и 2000SGR–27 (Каталония).

Литература

- [1] A. Chenciner. *Action minimizing periodic orbits in the Newtonian N -body problem*, these *Proceedings*.
- [2] A. Chenciner and R. Montgomery. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, *Annals of Mathematics*, **152**, 881–901 (2000).
- [3] A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery and C. Simó. *Simple choreographic motions of N bodies with strong forces*, to appear in *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, Springer.
- [4] M. Hénon, private communication (2000).
- [5] R. Montgomery. *Action spectrum and Collisions in the three-body problem*, these *Proceedings*.
- [6] C. Moore. *Braids in Classical Gravity*, *Physical Review Letters* **70**, 3675–3679 (1993).

- [7] C. Simó. *Analytical and numerical computation of invariant manifolds*, in *Modern Methods in Celestial Mechanics*, ed. D. Benest and C. Froeschlé 285–330, Paris, Editions Frontières, 1990.
- [8] C. Simó. *Effective Computations in Hamiltonian Dynamics*, in *Cent ans après les Méthodes Nouvelles de H. Poincaré*, Paris, Société Mathématique de France, 1–23, 1996.
- [9] C. Simó. *New families of Solutions in N-Body Problems*, to appear in *Proceedings of the ECM 2000*, Barcelona (July, 10–14). Available at <http://www.iec.es/3ecm>.
- [10] C. Simó. *Periodic orbits of the planar N-body problem with equal masses and all bodies on the same path*, to appear in *The Restless Universe: Applications of N-Body Gravitational Dynamics to Planetary, Stellar and Galactic Systems*, ed. B. Steves, Bristol, IOP Publishing, 2001.
- [11] C. Simó. *Global Dynamics and Fast Indicators*, to appear in *Global Analysis of Dynamical Systems*, ed. H. W. Broer, B. Krauskopf and G. Vegter, Bristol, IOP Publishing, 2001.
- [12] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, 1983 (second printing).

Математические проблемы следующего столетия^{*}

С. СМЕЙЛ

Department of Mathematics,
City University of Hong Kong
Kowloon, Hong Kong

Введение

В. И. Арнольд от имени Международного математического союза написал ряду математиков, предложив им охарактеризовать некоторые важные проблемы математики в следующем столетии. Сделать это приглашение Арнольда частично вдохновил список Гильберта 1900 года (см., например, [8]). Эта статья — мой ответ на это предложение и, задумав написать этот очерк, я также использовал список Гильберта.

Ниже я перечислил 18 задач, выбрав их по следующим критериям:

1. Простая формулировка. Кроме того, предпочтительно математически точная.
2. Личное знакомство с задачей, которое далось непросто.
3. Вера в то, что проблема, ее решение, частичные результаты или даже попытки ее решить, вероятно, будут иметь важное значение для математики и ее развития в следующем столетии.

Некоторые из этих проблем хорошо известны. Действительно, в перечень включены три, как я считаю, важнейшие открытые на сегодняшний день математические проблемы: гипотеза Римана, гипотеза Пуанкаре и вопрос «Справедливо ли $P = NP$?». В предлагаемый список проблем помимо

^{*} Лекция прочитана по случаю 60-летия Арнольда в Филдсовском институте, Торонто, в июне 1997 года. Этот текст был написан для журнала *Mathematics Intelligencer*. Перевод А. В. Борисова, А. А. Килина.

гипотезы Римана из списка Гильберта вошла также 16-ая проблема Гильберта. Также следует отметить, что данная статья частично перекликается с моей более ранней работой «Ретроспектива динамики, великие проблемы, неудавшиеся попытки» [65].

1. Гипотеза Римана

Лежат ли все нули дзета-функции Римана, определенной аналитическим продолжением суммы

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

находящиеся в критической полосе $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, на прямой $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Эта проблема была восьмой в списке Гильберта. О дзета-функции и гипотезе Римана написано много прекрасных книг, которые достаточно доступны. Поэтому здесь мы не будем останавливаться на этой проблеме.

2. Гипотеза Пуанкаре

Предположим, что компактное связное 3-мерное многообразие обладает таким свойством, что каждую окружность на нем можно деформировать в точку. Должно ли оно быть гомеоморфным к трехмерной сфере?

N-мерная сфера S^N — это многообразие, задаваемое уравнением

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

С другой стороны, любое компактное n -мерное многообразие можно считать замкнутой ограниченной n -мерной поверхностью (дифференцируемой и без особенностей) в некотором евклидовом пространстве.

В n -мерном обобщении гипотезы Пуанкаре утверждается, что компактное n -мерное многообразие M , для которого каждое отображение $f: S^k \rightarrow M$, $k < n$ (или, что то же самое $k \leq n/2$) можно деформировать в точку, гомеоморфно S^n .

Анри Пуанкаре изучал эти проблемы в своих первых статьях по топологии. Пуанкаре в 1900 году ([43], стр. 338–370) опубликовал доказательство общего n -мерного случая. Впоследствии (в 1904 году) он нашел

контрпример к своей первой версии утверждения ([43], стр. 435–498). Во второй статье он ограничился $n = 3$ и сформулировал трехмерный случай приведенной выше проблемы.

Мое отношение к этой задаче описано в работе [64], в которой я написал:

Впервые я услышал о гипотезе Пуанкаре в 1955 году в Эн Арбор в то время, когда писал диссертацию по проблемам топологии. Некоторое время спустя я почувствовал, что нашел доказательство (для трехмерного случая). Ганс Самуэльсон был в своем кабинете, и я с большим волнением обрисовал свои идеи. . . Уходя с работы, я осознал, что в моем «доказательстве» нет ни одного предположения о трехмерности многообразия.

В 1960 году «на пляжах Рио» я дал утвердительный ответ относительно n -мерной гипотезы Пуанкаре при $n > 4$. В 1983 году Майк Фридман дал утвердительный ответ для $n = 4$. (Заметим, что для $n > 4$ я доказал даже более сильный результат, заключающийся в том, что M является гладким объединением двух шаров $M = D^n \cup D^n$; для $n = 4$ этот результат на сегодняшний день не доказан.)

Основную информацию по этим вопросам, кроме указанных здесь источников, можно найти в [57].

После Пуанкаре многие другие математики предъявили различные доказательства трехмерного случая. Описание некоторых из этих попыток приведены в [66].

Фундаментальность гипотезы Пуанкаре в истории математики заключается в том, что она помогла сосредоточиться на многообразиях как на предмете, по праву заслуживающем исследования. Таким образом, Пуанкаре оказал значительное влияние на математику 20-го века, вызвав интерес к геометрическим объектам, включая в конечном счете алгебраические многообразия, многообразия Римана и т.д.

Я убежден, что сегодня существует сравнимое явление — «полиномиальный временной алгоритм». Алгоритмы по праву становятся предметом, заслуживающим изучения, а не только как средство решения других задач. Я полагаю, что поскольку изучение множества решений уравнения (например, многообразия) сыграло такую важную роль в истории математики 20-го века, то изучение процесса нахождения решений (например, алгоритма) может сыграть не меньшую роль в следующем столетии.

3. Справедливо ли $P = NP$?

Иногда эта проблема мне кажется подарком математике со стороны компьютерных наук. Было бы полезно сформулировать ее в виде, который выглядит привычнее для математики.

С этой целью рассмотрим сначала теорему Гильберта о нулях над множеством комплексных чисел. Пусть $f_1, \dots, f_k$ — комплексные полиномы от n переменных. Требуется решить, имеют ли они общий нуль $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Теорема о нулях утверждает, что общего нуля нет тогда и только тогда, когда существуют комплексные полиномы $g_1, \dots, g_k$ от n переменных, удовлетворяющие полиномиальному тождеству

$$\sum_{i=1}^k g_i f_i = 1. \quad (1)$$

Эффективная теорема о нулях, доказанная Браунуэллом (1987) и другими, утверждает, что в приведенной выше формулировке можно допустить, что степени g_i удовлетворяют неравенствам

$$\deg g_i \leq \max(3, D)^n, \quad D = \max \deg f_i.$$

С таким ограничением степеней задача разрешимости становится задачей линейной алгебры. При заданных коэффициентах f_i можно проверить, имеет ли (1) решение относительно коэффициентов g_i . Таким образом, мы получаем некоторый алгоритм решения теоремы о нулях. Количество необходимых для решения арифметических шагов возрастает по экспоненте при увеличении количества коэффициентов f_i (входных данных).

Гипотеза (над $\mathbb{C}$). *Не существует алгоритма решения теоремы о нулях, в котором количество арифметических шагов возрастает полиномиально по времени*¹.

Для придания математического смысла этой гипотезе необходимо формальное определение алгоритма. В этом контексте традиционное определение машины Тьюринга не имеет смысла. В работе [6] было предложено удовлетворительное определение, а соответствующая теория создана в [5].

¹Под возрастанием полиномиально по времени здесь и далее имеется ввиду полиномиальное увеличение количества необходимых для решения арифметических шагов при увеличении входных данных (в данном случае — количества коэффициентов f_i). — *Прим. ред.*

Очень кратко опишем машину над $\mathbb{C}$. Входные данные, состояние машины и выходные данные представляют собой конечные цепочки комплексных чисел. Вычисления над состояниями включают в себя арифметические операции, сдвиги по цепочке и операции ветвления по условию $x_1 = 0$.

Величина входных данных — это количество элементов во входной цепочке. Время вычислений — количество машинных операций, используемых при переходе от ввода к выводу. Таким образом, полиномиальный по времени алгоритм над $\mathbb{C}$ корректно определен.

Заметим, что все, что было сказано о машинах и о приведенной выше гипотезе, использует только структуру множества $\mathbb{C}$ как поля, и, следовательно, как машины, так и гипотеза могут быть рассмотрены над любым полем. В частности, если полем является Z_2 , состоящее из двух элементов, мы получим машины Тьюринга.

Рассмотрим проблему разрешимости: Рассмотрим k многочленов от n переменных с коэффициентами из Z_2 . Существует ли общий нуль $\zeta \in (Z_2)^n$?

Гипотеза. *Полиномиального по времени алгоритма над Z_2 , разрешающего эту проблему, не существует.*

Данная гипотеза является просто новой формулировкой классического предположения $P \neq NP$.

Выше мы не рассмотрели основные идеи и теоремы, относящиеся к NP -полноте. Классический случай Кука и Карпа можно найти в [19], а теорию над произвольным полем в [5].

4. Целые нули многочлена

Начнем с определения диофантова инварианта τ из теории сложности. Программой для полинома $f \in \mathbb{Z}[t]$ от одной переменной с целочисленными коэффициентами является объект $(1, t, u_1, \dots, u_k)$, где $u_k = f$ и для всех ℓ , $u_\ell = u_i \circ u_j$, $i, j < \ell$, $\circ$ означает $+$, $-$ или $\times$, а $u_0 = t$, $u_{-1} = 1$. Тогда $\tau(f)$ — минимум k по всем таким программам.

Является ли количество различных целых нулей f полиномиально ограниченным $\tau(f)$? Другими словами, выполняется ли

$$Z_\alpha(f) \leq \tau(f)^c, \quad f \in \mathbb{Z}[t],$$

где $Z_\alpha(f)$ — количество различных целых нулей f , а c — универсальная постоянная.

Эту проблему указали мы с Майком Шубом во время изучения теории сложности. Мы доказали, что утвердительный ответ означает трудноразрешимость теоремы о нулях над $\mathbb{C}$ и, таким образом, $P \neq NP$ над $\mathbb{C}$. См. [54], а также [5].

Поскольку степень f меньше или равна $2^{\tau+1}$, $\tau = \tau(f)$, то количество нулей не больше, чем $2^{\tau+1}$.

Для полиномов Чебышева количество различных вещественных нулей возрастает экспоненциально по τ .

Во многих классических диофантовых задачах рассматриваются две или более переменные. В данной задаче переменная только одна и, тем не менее, она представляется не такой уж легкой.

Приведем задачу, связанную с только что рассмотренной. Программой для целого m является объект $(1, m_1, \dots, m_\ell)$, где $m_\ell = m, m_0 = 1, m_q = m_i \circ m_j, i, j < q$ и $\circ = +, -$ или $\times$. Определим $\tau(m)$ как минимум ℓ над всеми такими программами. Таким образом, $\tau(m)$ представляет кратчайший способ получения целого m , начиная с единицы, используя плюс, минус и умножение.

Проблема: Существует ли постоянная c , такая что $\tau(k!) \leq (\log k)^c$ для всех целых k ? Можно ожидать, что это окажется неверным, так что $k!$ — «трудно вычислимо» (см. [54]).

5. Границы высоты диофантовых кривых

Может ли разрешимость диофантова уравнения $f(x, y) = 0$ (входные данные — $f \in \mathbb{Z}[u, v]$) быть определена за время 2^{s^c} , где c — универсальная постоянная?

Здесь $s = s(f)$ — «величина» f , определенная следующим образом:

$$s(f) = \sum_{|\alpha| \leq d} (|a_\alpha| + 1), \quad f(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i \geq 0$. Кроме того, функция f считается разрешимой, если существуют целые x, y такие, что $f(x, y) = 0$, а также предполагается, что вычисления проводятся с использованием вычислительной машины Тьюринга.

Эта задача, по существу, поставлена в [13]. Величина $s(f)$ — это некоторый вариант «высоты» f . Предполагаемые границы высоты, например, как в [31], могут оказаться полезными в разрешении этой задачи. По данной проблеме можно также рекомендовать [36].

6. Конечность числа относительных равновесий в небесной механике

При заданных массах $m_1, \dots, m_n$ в задаче n тел из небесной механики является ли количество относительных равновесий конечным?

Эта проблема взята из книги Уинтнера [72] по небесной механике. Относительное равновесие — это решение уравнений Ньютона, которые порождены двумерными равномерными вращениями.

В задаче трех тел существует пять относительных равновесий: три найдены Эйлером, два — Лагранжем. В задаче четырех тел конечность числа равновесий не доказана.

В [60] я рассмотрел относительные равновесия как критические точки функции, порожденной потенциалом плоской задачи n тел. Более точно, относительные равновесия соответствуют критическим точкам функции

$$\hat{V} : (S_k - \Delta)/SO(2) \rightarrow \mathbb{R},$$

где $S_k = \{x \in (R^2)^n \mid \sum m_i x_i = 0, \frac{1}{2} \sum m_i \|x_i\|^2 = 1\}$, $\Delta = \{x \in S_k \mid x_i = x_j, i \neq j\}$.

Группа вращений $SO(2)$ действует на S_k/Δ , где потенциальная функция

$$V(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}$$

индуцирует $\hat{V}$. Заметим, что $V : S_k \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантна относительно группы вращений $SO(2)$ и фактор-пространство $S_k/SO(2)$ гомеоморфно к комплексному проективному пространству размерности $n - 2$.

Майк Шуб [53] доказал, что множество критических точек компактно, а Палмор [39], что даже для $n = 4$ $\hat{V}$ может иметь вырожденные критические точки.

Относительные равновесия играют важную роль в небесной механике, например, при исследовании бифуркаций отображения углового момента. Кроме того, в солнечной системе существуют «тройяцы», представляющие собой группу астероидов, положение которых соответствует относительным равновесиям Лагранжа.

В работе [30] Кузьмина нашла верхнюю границу числа относительных равновесий в общем случае. Дальнейшее описание вопроса можно найти в [1].

7. Распределение точек на 2-мерной сфере

Пусть $V_N(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}$, где $x = (x_1, \dots, x_N)$, x_i — различные точки на двумерной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, а $\|x_i - x_j\|$ — расстояние в $\mathbb{R}^3$. Обозначим $\min_x V_N(x)$ через V_N .

Найти $(x_1, \dots, x_N)$ такие, что

$$V_N(x) - V_N \leq c \log N, \quad \text{где } c — \text{универсальная постоянная.} \quad (2)$$

«Найти» означает дать алгоритм, который по заданному N выдает различные $x_1, \dots, x_N$ на двумерной сфере, удовлетворяющие неравенству (2).

Чтобы быть более точным, необходимо рассматривать алгоритм для вещественных чисел в смысле, указанном в [5] (связанным с вычислением квадратного корня), с временем остановки алгоритма, полиномиальным по N .

Эта задача возникла в теории сложности и предложена мной совместно с Майком Шубом (см. [55]). Она возникла при отыскании хорошего начального многочлена для алгоритма гомотопии, реализующего основную теорему алгебры².

Точка $x = (x_1, \dots, x_N)$ в которой $V_N(x) = V_N$ называется N -кратной эллиптической точкой Факетэ (см. [69]).

Сумма V_N , как функция N , удовлетворяет равенству

$$V_N = -\frac{1}{4} \log\left(\frac{4}{e}\right) N^2 - \frac{1}{4} N \log N + O(N).$$

Естественно также рассмотреть функции

$$V_N(x, s) = \sum_{i < j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}, \quad V_N = \min_x V_N(x, s),$$

где x — такое же как прежде, а $0 < s < 2$. Исходные функции $V_N(x)$ и V_N соответствуют естественным образом случаю $s = 0$. В случае $s = 1$ функция $V_N(x, 1)$ — кулоновский потенциал, а $V_{N,1}$ соответствует состоянию равновесия N электронов, лежащих на двумерной сфере.

²Также данная задача имеет отношение к вихревой динамике. Так, $V_N(x)$ является гамильтонианом системы N одинаковых точечных вихрей на сфере, а V_N — значение энергии системы вихрей в положении равновесия. Подробности см. в книге Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск, 1999, Изд-во РХД, 466 с. — Прим. ред.

При разрешении указанной проблемы я попросил помощи у Эда Сафа. Впоследствии он и его коллеги написали по этой теме и ее ответвлениям ряд замечательных статей. Основную информацию и дальнейшие ссылки по этому вопросу можно найти в [29] и [50]. В работе [47] можно найти численное подтверждение ($N = 12000$), обосновывающее изложенные выше задачи.

На рассматриваемую проблему можно также взглянуть с точки зрения оптимизации функции

$$W_N(x) = (\exp V_N(x))^{-1} = \prod_{i < j} \|x_i - x_j\|.$$

Однако, как было написано в [55], «... это не может быть таким легким, поскольку существуют седловые точки индекса N (на большой окружности в S^2 , равноотстоящие N точек $x_1, \dots, x_N$). Кроме того, различные симметрии, которыми обладает W_N , также запутывают картину».

8. Развитие экономической теории с точки зрения динамических систем

Следующая проблема не является чисто математической, она лежит на пересечении экономики и математики. Она решена только в довольно ограниченных ситуациях и может быть сформулирована следующим образом.

Расширить математическую модель общей теории экономического равновесия, включив в нее корректирование цен.

В экономике существует (статическая) теория равновесия цен, разработку которой начал Вальрас, а далее развили Эрроу и Дебре (см. [14]). Для тривиального случая одного рынка она приводит к уравнению «предложение равняется спросу», и легко обнаруживает естественную динамику [49]. Для нескольких рынков ситуация уже более сложная.

Рассмотрим функцию из пространства цен в пространство товаров $Z(p) = D(p) - S(p)$, называемую избыточным спросом. Как спрос D , так и предложение S определяются объединением вкладов отдельных экономических факторов. Условия индивидуального поведения обосновываются с экономической точки зрения и приводят к некоторым аксиомам для Z . Эти аксиомы для отображения избыточного спроса $Z: \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ следующие:

1. $Z(\lambda p) = Z(p)$, для всех $p = (p_1, \dots, p_\ell)$, $p_i \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.
2. $\sum_{i=1}^{\ell} p_i Z_i(p) = 0$, закон Вальраса (суммарное значение нуль).

3. $Z_i(p) > 0$, если $p_i = 0$ (положительный спрос для бесплатного товара).

Исходя из свойств 1, 2 и 3 функцию Z можно интерпретировать как векторное поле на пересечении $(\ell - 1)$ -мерной сферы с положительным ортантом, направленным внутрь на границе. Существование вектора равновесных цен p^* следует из теоремы Хопфа, так что $Z(p^*) = 0$, и в равновесии «предложение равняется спросу».

Восьмая проблема требует формулировки динамической модели, структуру которой составляют векторы цен (возможно, расширенные таким образом, чтобы они включали другие экономические переменные). Эту теорию следует сравнить с существующей теорией равновесия. Одна из наиболее желаемых особенностей — получить динамику цен во времени при действии отдельных экономических факторов.

Я работал над этой проблемой в течение нескольких лет, чувствуя, что она составляет главную задачу экономической теории [61]. Основную информацию по данной задаче можно найти в [63].

9. Проблема линейного программирования

Существует ли полиномиальный по времени алгоритм над множеством вещественных чисел, который определяет возможность решения линейной системы неравенств $Ax \geq b$?

Требуемый этой задачей алгоритм является алгоритмом, заданным машиной вещественных чисел в смысле, указанном в [5] (см. также проблеме 3). Система имеет в качестве входных данных вещественную матрицу A размерностью $m \times n$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$. В задаче требуется определить, существует ли некоторое $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ при всех $i = 1, \dots, m$. Затрачиваемое измеряется количеством арифметических операций. Эта задача приведена в [5].

Один из вариантов решения этой задачи связан с ее рассмотрением как задачи оптимизации линейного программирования. При заданных выше A , b и $c \in \mathbb{R}^n$ следует решить, существует ли

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c \cdot x \quad \text{при условии } Ax \geq b,$$

и если существует, то результатом вычислений является полученный вектор x .

Известный симплекс-метод Данцига представляет алгоритм для решения обеих задач (над $\mathbb{R}$), однако Кли и Минти доказали, что в наихудшем случае он является экспоненциально медленным. С другой стороны, мы с Боргвардтом и с последующей значительной поддержкой Хаймовича доказали, что в среднем время вычислений этого алгоритма полиномиально. Все это описано в [51].

Существует еще один метод на основе модели Тьюринга, с использованием рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и затрат на вычисления, измеряемых «битами». Основываясь на идеях Юдина-Немировского, Хачин нашел полиномиальный по времени алгоритм (метод эллипсоидов) для задачи линейного программирования. Впоследствии Кармаркар с помощью своего «метода внутренней точки» нашел практический алгоритм решения этой задачи, для которого в рамках модели Тьюринга он доказал полиномиальность по времени. Все сказанное выше описано в [20], а также [51].

Близко к основной описанной выше проблеме над $\mathbb{R}$ лежит подобная задача, требующая найти «строго полиномиальный алгоритм» над $\mathbb{Q}$ для решения рассмотренных задач линейного программирования. При этом требуется, чтобы количество арифметических операций, а также количество бит-операций полиномиально зависело от битовой величины входных данных. Частичные результаты по этой проблеме были получены Мегидо и Тардо см. [20]. Описание задачи над $\mathbb{R}$ см. также в [3] и [68].

10. Лемма о замыкании

Пусть p — неблуждающая точка диффеоморфизма $S : M \rightarrow M$ компактного многообразия. Можно ли сколь угодно хорошо аппроксимировать S с производными порядка r (C^r -аппроксимация) для любого r , с помощью диффеоморфизма $T : M \rightarrow M$ такого, что p — периодический сток T ?

Неблуждающая точка $p \in M$ — это точка, для каждой окрестности U которой существует целое $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $S^k U \cap U \neq \emptyset$. Здесь S^k — k -я итерация S . Кроме того, p — периодическая точка периода m , если $T^m(p) = p$.

Это дискретная форма известной «леммы о замыкании», которая в случае C^1 была утвердительно решена Чарльзом Пью [45].

Существует простая C^0 -аппроксимация с требуемым свойством. Пейксо-то показал, что данное доказательство не работает в C^1 -аппроксимациях, исправляющих ошибку Рене Тома (которая, как он мне сказал, была его крупнейшей ошибкой).

Пью и Робинсон в [46] доказали лемму о замыкании для C^1 -аппроксимаций в гамильтоновом случае. Пейксото дал утвердительный ответ для C^r -аппроксимаций, при любом r для случаев окружности и ориентируемых двумерных многообразий с непрерывным временем. Недавняя работа Хайяши [23] придала лемме о замыкании дополнительное значение, см. также [70].

11. Является ли одномерная динамика всегда гиперболической?

Можно ли комплексный многочлен T аппроксимировать другим такой же степени, каждая критическая точка которого при итерациях стремится к периодическому стоку?

Эта задача не решена даже для многочленов второй степени. Здесь полиномиальное отображение $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел) считается дискретной динамической системой, задаваемой последовательными итерациями. Поэтому, если $z \in \mathbb{C}$, то его орбита во времени $z = z_0, z_1, z_2, \dots$ определена равенством $z_i = T(z_{i-1})$, а i можно интерпретировать как время (дискретное). Неподвижная точка w для T ($T(w) = w$) является *стоком*, если производная $T'(w)$ по w имеет абсолютное значение меньше единицы. Периодическая точка T периода p может быть стоком для T^p . Критическая точка T является просто неподвижной точкой, если производная $T'(w)$ равна нулю.

Хотя проблема уже точно сформулирована, полезно рассмотреть ее в рамках гиперболической динамики, появившейся в 1960-х годах.

Неподвижная точка x диффеоморфизма $T : M \rightarrow M$ является *гиперболической*, если производная $DT(x)$ в точке x (как линейный автоморфизм касательного пространства) не имеет собственного числа, равного по абсолютному значению единице. Пусть x — периодическая точка периода p , тогда x — гиперболическая, если она является гиперболической неподвижной точкой T^p . Понятие гиперболическости естественно распространяется на Ω — замыкание множества неблуждающих точек (см. проблему 10).

Динамическая система $T \in \text{Diff}(M)$ называется *гиперболической* (или удовлетворяет А-аксиоме), если периодические точки плотны в Ω , и Ω является гиперболическим (см. [59] или [62]). Мы также предполагаем, что выполняется условие несуществования цикла. В очень многих работах, особенно в работах Рикардо Мане, гиперболическая динамика отождествляется со строгим определением устойчивости в динамике, приводящим к понятию

структурной устойчивости. Заложены также начала структурной теории для этого класса динамических систем.

Хотя гиперболические системы составляют большой раздел динамики, имеется еще больший раздел, включающий прикладную хаотическую динамику. Понятие гиперболичности распространяется от обратимой динамики до проблемы полиномиальных отображений из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, описанной нами выше. Классическая теория комплексной переменной позволяет преобразовать рассмотренную проблему в эквивалентную ей:

Можно ли полиномиальное отображение $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ аппроксимировать гиперболическим?

Теорию одномерной комплексной динамики начали разрабатывать Фату и Жюлиа в начале этого века³. В 1960-х годах я попросил своего аспиранта Джона Гукенхеймера просмотреть литературу и попытаться разрешить указанную проблему (среди всего прочего). Его диссертация (см. [10]) содержит утвердительный ответ, однако в доказательстве есть пробел. На сегодняшний день задача остается открытой и является одной из фундаментальных проблем одномерной динамики. Статья Джона принадлежит к целому ряду статей (начиная с работы Пуанкаре), содержащих неверные доказательства. Комплексная одномерная динамика стала перспективной темой и включает важные исследования Дуади, Хаббарда, Сулливана, Йоккос, МакМаллена и многих других.

Кроме изложенного выше существует параллельная область исследований действительной одномерной динамики гладкого отображения $T : I \rightarrow I$, $I = [0, 1]$.

Задача. *Можно ли гладкое отображение $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ гладко аппроксимировать другим, гиперболическим?*

Примерно во время написания диссертации Гукенхеймером я попросил Зигги Нитецки изучить эту задачу. Моя прежняя невнимательность проявившаяся в том, что я не заметил ошибки в диссертации Нитецки (см. [10]) привела к тому, что появилось утвердительное доказательство предложенной задачи.

Впоследствии Якобсон [28] дал ответ на эту задачу для C^1 -аппроксимаций, однако общий случай остается открытым. Информацию по данной задаче можно найти в [37].

³То есть в начале 20-го века. — Прим. ред.

12. Централизаторы диффеоморфизмов

Может ли диффеоморфизм компактного многообразия M на себя быть C^r -аппроксимирован при всех $r \geq 1$ диффеоморфизмом $T : M \rightarrow M$, который коммутирует только со своими итерациями?

Таким образом, централизатором T в группе диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$ должно быть множество $\{T^k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Начало изучения централизаторов было положено мной в [58], однако только после диссертации Ненси Копелл (см. [10]), ответившей утвердительно на вопрос в случае $\dim M = 1$, я предложил эту проблему [59]. В настоящее время она остается нерешенной даже для двумерных многообразий M .

Можно также задать вопрос, является ли множество диффеоморфизмов M с тривиальным централизатором плотным и *открытым* в $\text{Diff}(M)$ с C^r -топологией.

Основная работа по этой тематике была выполнена Палисом и Йоккос в [38], где они дали почти полные ответы в случае гиперболической динамики (см. проблему 11) для любого многообразия.

В [65] я написал: «Я нахожу эту проблему интересной в том смысле, что она фокусируется на некоторой темной области вне гиперболичности, где даже трудно четко что-либо сформулировать».

13. 16-я проблема Гильберта

Рассмотрим дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (3)$$

где P и Q — многочлены. Существует ли оценка (верхняя граница) K для числа предельных циклов вида $K \leq d^q$, где d — максимум степеней P и Q , а q — универсальная постоянная?

Это современный вариант второй половины шестнадцатой проблемы Гильберта. За исключением гипотезы Римана, она, по-видимому, является самой трудноразрешимой из проблем Гильберта.

Действительно, с момента появления статьи Петровского и Ландис [40], претендующей на то, чтобы дать положительное решение проблемы, движение в данном вопросе, по-видимому, идет в обратном направлении. Ранее Дюлак в [15] утверждал, что система (3) всегда имеет конечное число

предельных циклов. После обнаружения пробела в доказательстве работы Петровского–Ландис (см. [41]) Ильяшенко [25] нашел ошибку в статье Дюлака. Более того, Ши Сонглинг в [52] нашел контрпример к определенным Петровским и Ландис оценкам в случае $d = 2$. Впоследствии появились две независимые большие работы, содержащие доказательства утверждения Дюлака ([16] и [26]). Эти две статьи математическое сообщество еще тщательно не проверило.

Таким образом, известна ограниченность числа предельных циклов, однако сама оценка не известна. Мы рассмотрим специальный класс, где ограниченность очевидна, а вопрос об оценке остается открытым.

Рассмотрим уравнение Льенара (см., например, [24])

$$\frac{dx}{dt} = y - f(x), \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad (4)$$

где $f(x)$ — вещественный многочлен со старшим членом x^{2k+1} и удовлетворяющий условию $f(0) = 0$.

Если $f(x) = x^3 - x$, тогда (4) становится уравнением Ван-дер-Поля с одним предельным циклом. В более общем случае легко доказать, что все решения (4) движутся по окружности вокруг единственного положения равновесия в точке $(0,0)$ по часовой стрелке. Следуя вдоль этих кривых, мы определим «сечение Пуанкаре» $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ — положительная ось y . Предельные циклы (4) являются в точности неподвижными точками отображения T . В различных беседах я поднимал вопрос об оценке количества этих неподвижных точек (посредством некоторой новой теоремы о неподвижной точке). В ответ Линц, ди Мело и Пью [32] нашли примеры с k различными предельными циклами и предложили это число k в качестве верхней границы. Верхняя граница вида $(\deg f)^q$ до сих пор не найдена. Поскольку отображение T — аналитическое, то отсюда следует, что система (4) имеет конечное число предельных циклов для каждого f .

Рассмотрим теперь «задачу Пью», о которой я узнал от Чарльза Пью. Пусть задано дифференциальное уравнение с одной переменной

$$\frac{dx}{dt} = x^d + h_1(t)x^{d-1} + h_2(t)x^{d-2} + \dots, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5)$$

где h_i — функции класса C^∞ . Выполняется ли $K(d) \leq d$, где $K(d)$ — количество решений, удовлетворяющих на границах условию $x(0) = x(1)$?

В ответ Луи Ниренберг написал мне (20 сентября 1976 года) о своем C^∞ примере, доказывающем неравенство $K(4) \geq 6$. Однако верхние грани-

цы для случая, когда функции $h_i \in C^\infty$ или даже являются многочленами, неизвестны.

Дополнительные сведения по указанным проблемам можно найти в [8], [27], [34] и [65].

14. Аттрактор Лоренца

Совпадает ли поведение обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца [35] с динамикой геометрического аттрактора Лоренца, рассмотренного Вильямсом, Гуккенхаймером и Йорке?

Уравнения Лоренца имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + 10y, \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy.\end{aligned}$$

Предложенную модель, появлению которой способствовали ее исследования Лоренцом, можно найти в [21], [22] и [71].

15. Уравнения Навье–Стокса

Имеют ли уравнения Навье–Стокса в трехмерной области Ω в $\mathbb{R}^3$ единственное гладкое решение, определенное для всех значений времени?

Возможно, это самая знаменитая задача в дифференциальных уравнениях в частных производных. Рассмотрим ее более определенно. Уравнения Навье–Стокса можно записать в форме

$$\frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \text{grad } p = 0, \quad \text{div } u = 0,$$

где необходимо найти C^∞ -отображения $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие этим уравнениям, с заданным u на границе $\partial\Omega$ и при $t = 0$. Здесь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $(u \cdot \nabla)u$ — оператор $\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, а ν — положительная константа. Подробнее см., например, [11].

В понимание этой задачи внесли вклад многие математики. В случае размерности 2 на поставленный вопрос дан утвердительный ответ, в случае размерности 3 положительный ответ дан только для значений времени t в малом интервале $[0, T]$. Дополнительную информацию см. в [67].

Решение этой задачи может стать важным шагом к пониманию турбулентности. Например, оно могло бы помочь обосновать идеи Рюэля и

Такенса [48], вводящих понятие хаотического аттрактора в модель турбулентности. См. также [12].

В [65] я задал вопрос, должны ли решения двумерного уравнения Навье–Стокса с вынуждающим членом на торе стремиться к равновесию при стремлении времени к бесконечности. Бабики и Вишик в [2] привели некоторый довод в пользу обратного. Впоследствии Лиу [33] привел примеры, которые доказывают сходимость к более сложному аттрактору.

16. Гипотеза Якоби

Предположим, что $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — полиномиальное отображение, производная которого в каждой точке является невырожденной. Тогда должно ли f быть тождественным?

Здесь $\mathbb{C}^n$ — это n -мерное комплексное евклидово пространство, $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$ и каждая из функций f_i — полином от n переменных. Производную f по z , $Df(z) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ можно считать матрицей частных производных, а условием невырожденности — неравенство $\det Df(z) \neq 0$.

Если f инъективно, тогда оно сюръективно и имеет обратное отображение, которое является полиномиальным.

Данная задача восходит к 1930-м годам, о ее значении, предыстории и результатах решения можно прочитать в замечательных обзорах [4] и [17].

17. Решение полиномиальных уравнений

Может ли нуль n комплексных полиномиальных уравнений относительно n неизвестных быть приблизительно найден в среднем за полиномиальное время с помощью общего алгоритма?

Последняя теорема в работе, выполненной мной совместно с Майком Шубом (см. [56]), является как раз этим результатом, но без требования общности алгоритма.

Рассмотрим определения. Пусть отображение $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$, и $z = (z_1, \dots, z_n)$, где каждая функция f_i — многочлен от n переменных степени d_i .

Целесообразно функции f_i сделать однородными многочленами, добавив новую переменную z_0 . Это позволяет производить вычисления в соответствующем проективном пространстве, а затем возвратиться к исходной аффинной задаче.

Приблизительность нахождения нуля уравнений можно определить с помощью метода Ньютона, что необходимо вследствие работ Абеля, Галуа и других. Если необходимо оставаться на формальном уровне, то время

можно измерять количеством арифметических операций и сравнений ($\leq$), используя вещественные машины (как в проблеме 3),

На пространстве функций f для каждого $d = (d_1, \dots, d_n)$ должна быть определена мера вероятности, а время алгоритма усреднено по пространству f . Существует ли такой алгоритм, где среднее время ограничено полиномом, зависящим от количества коэффициентов f (величины входных данных)?

В [56] доказано, что такой алгоритм существует, однако алгоритмы отличаются для каждого d и даже для каждой ожидаемой вероятности успеха. Общий алгоритм — это алгоритм, который независим от d (d является частью входных данных).

Нахождение нулей многочленов и полиномиальных систем является одной из старейших и центральных задач математики. В этой проблеме требуется узнать, можно ли при некоторых условиях, заданных в задаче, решить ее систематически при помощи компьютера. Если нет способа сделать это за полиномиальное время, то никакой компьютер никогда не приведет к успеху в решении данной задачи.

Более того, в последнее время появилась новая формулировка, придающая задаче нулей многочленов универсальную роль. Теорема Гильберта о нулях (как проблема разрешимости) — это вопрос о NP-полноте над любым полем (см. проблему 3).

Подобную проблему можно исследовать и для действительных чисел, однако она будет значительно сложнее.

18. Пределы интеллекта

Каковы пределы интеллекта, как искусственного, так и человека?

Пенроуз в [42] пытается привести некоторые ограничения для искусственного интеллекта. Фигурирующий в его доказательстве интересный вопрос — это разрешимость множества Мандельброта (рассмотренная в [7]) и выводы из теоремы Геделя о неполноте.

Однако необходимо более широкое изучение, которое включало бы более глубокие модели разума, а также компьютера, и проясняющее, что общего между искусственным и человеческим интеллектом, и чем они отличаются.

Я бы начал исследования в том направлении, где вместе с теорией действительных чисел, приближениями, теорией вероятностей и геометрией значительную роль играют обучение, решение задач и теория игр. Я

надеюсь развить изложенные здесь идеи, когда мне предоставится такая возможность.

Литература

- [1] Abraham R. and Marsden J. *Foundations of Mechanics*. 1978, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.
- [2] Babin A. V. and Vishik M. I. *Attractors of partial differential evolution equations and their dimension*, Russian. Math. survey, 1983, **38**, p. 151–213. См. также русский оригинал Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы дифференциальных уравнений с частными производными и оценки их размерности*. УМН, 1983, т. 38, вып. 4, стр. 133–187.
- [3] Barvinok A. and Vershik A. *Polynomial-time, computable approximation of families of semi-algebraic sets and combinatorial complexity*. Amer. Math. Soc. Trans., 1993, **155**, p. 1–17.
- [4] Bass H., Connell E. and Wright D. *The Jacobian conjecture: reduction on degree and formal expansion of the inverse*. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, **7**, p. 287–330.
- [5] Blum L., Cucker F., Shub M. and Smale S. *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag, 1997, to appear.
- [6] Blum L., Shub M. and Smale S. *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*. Bulletin of the Amer. Math. Soc., 1989, **21**, p. 1–46.
- [7] Blum L. and Smale S. *The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring*. Pages 321–339 in M. Hirsch, J. Marsden and M. Shub (editors), *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*. Springer-Verlag, 1993.
- [8] Browder F. ed. *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*. American Math Society, 1976, Providence, RI.
- [9] Brownawell W. *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*. Annals of Math., 1987, **126**, p. 577–591.
- [10] Chern S. and Smale S. eds. *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics*. vol. **XIV**, American Math Society, 1970, Providence, RI.

- [11] Chorin A., Marsden J. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] Chorin A., Marsden J. and Smale S. *Turbulence Seminar, Berkeley 1976–77*. Lecture Notes in Math., 1977, **615**, Springer-Verlag, New York.
- [13] Cucker F., Koiran P. and Smale S. *A polynomial time algorithm for Diophantine equations in one variable*. 1997, To appear.
- [14] Debreu G. *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959.
- [15] Dulac H. *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France, 1923, **51**, p. 45–188.
- [16] Écalle J. *Introduction aux Fonctions Analysables and Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac*. Hermann, Paris, 1992.
- [17] van den Essen A. *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*. Proceedings of Septiemes Rencontres du contact Franco-Belge en Algebre, Reims, France, May 1995. To appear.
- [18] Freedman M. *The topology of 4-manifolds*. J. Diff. Geom., 1982, **17**, p. 357–454.
- [19] Garey M. and Johnson D. *computers and Intractability*. Freeman, San Francisco, 1979.
- [20] Grötschel M., Lovász L. and Schrijver A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [21] Guckenheimer J. and Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical systems and Bifurcations of Vector Fields*, third printing, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [22] Guckenheimer J. and Williams R.F. *Structural Stability of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHES, 1979, **50**, p. 59–72.
- [23] Hayashi S. *Connecting invariants manifolds and the solution of the C^1 stability conjecture and Ω -stability conjecture for flows*. Annals of Math., 1997, **145**, p. 81–137.
- [24] Hirsch M. and Smale S. *Differential Equations, Dynamical systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

- [25] Ilyashenko J. *Dulac's memoir «On the limit cycles» and related problems of the local theory of differential equations*. Russian Math. Surveys VHO, 1985, p. 1-49. См. также русский оригинал Ильяшенко Ю. С. *Мемуары Дюлака о «пределных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений*. УМН, 1985, т. 40, вып. 6, стр. 41–78.
- [26] Ilyashenko Yu. *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, American Math Society, Providence, RI, 1991.
- [27] Ilyashenko Yu. and Yakovenko S. *Concerning the Hilbert 16th problem*. AMS Translations, series 2, 1995, vol. **165**, AMS, Providence, RI.
- [28] Jakobson M. *On smooth mappings of the circle onto itself*. Math. USSR Sb., 1971, **14**, p. 161–185.
- [29] Kuijlaars A. B. J. and Saff E. B. *Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere*. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, to appear.
- [30] Kuz'mina R. *An upper bound for the number of central configurations in the plane n -body problem*. Sov. Math. Dokl., 1977, **18**, p. 818–821.
- [31] Lang S. *Number Theory III*, vol. **60** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [32] Linz A., de Melo W. and Pugh C. *in Geometry and Topology*, Lecture Notes in Math., 1977, **597**, Springer-Verlag, New York.
- [33] Liu V., *An example of instability for the Navier-Stokes equations on the 2-dimensional torus*. Commun. PDE, 1992, **17**, p. 1995–2012.
- [34] Lloyd N. G. and Lynch S. *Small amplitude limit cycles of certain Lienard systems*. Proceedings Roy. Soc. London, 1988, **418**, p. 199–208.
- [35] Lorenz E. *Deterministic non-periodic flow*. J. Atmosph. Sci., 1963, **20**, p. 130–141.
- [36] Manders K. L. and Adleman L., *NP-complete decision problems for binary quadratics*. J. Comput. System Sci., 1978, **16**, p. 168–184.
- [37] de Melo W. and van Strien S. *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

- [38] Palis J. and Yoccoz J.C. (1) *Rigidity of centralizers of diffeomorphisms*. Ann. Scient. École Normale Sup., 1989, **22**, p. 81–98; (2) *Centralizer of Anosov diffeomorphisms*. Ann. Scient. École Normale Sup., **22**, p. 99–108.
- [39] Palmore J. *Measure of degenerate relative equilibria, I*. Annals of Math., 1976, **104**, p. 421–429.
- [40] Petrovskii I. G. and Landis E. M. *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials*. Mat. Sb. N. S., 1957, **43** (85), p. p. 149–168 (in Russian) and *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), 1960, **14**, 181–200.
- [41] Petrovskii I. G. and Landis E. M. *Corrections to the articles «On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials»*. Math. Sb. N. S., 1959, **48** (90), p. 255–263 (in Russian).
- [42] Penrose R. *The Emperor's New Mind*. Penguin Books, 1991.
- [43] Poincaré H. *Oeuvres*, VI. Gauthier-Villars, Paris, Deuxième Complément à L'Analysis Situs, 1953.
- [44] Peixoto M. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology, 1962, **1**, p. 101–120.
- [45] Pugh C. *An improved closing lemma and a general density theorem*. Amer. J. Math., 1967, **89**, p. 1010–1022.
- [46] Pugh C. and Robinson C. *The C^1 closing lemma including Hamiltonians*. Ergod. Theory Dynam. Systems, 1983, **3**, p. 261–313.
- [47] Rakhmanov E. A., Saff E. B. and Zhou Y. M. *Minimal discrete energy on the sphere*. Math. Res. Lett., 1994, **1**, p. 647–662.
- [48] Ruelle D. and Takens F. *On the nature of turbulence*. Commun. Math. Phys., 1971, **20**, p. 167–192.
- [49] Samuelson P. *Foundations of Economic Analysis*, Atheneum, New York, 1971.
- [50] Saff E. and Kuijlaars A. *Distributing many points on a sphere*. Math Intelligencer, 1997, **10**, p. 5–11.
- [51] Schrijver A. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1986.

- [52] Shi S. *On limit cycles of plane quadratic systems*. Sci. sin., 1982, **25**, p. 41–50.
- [53] Shub M. Appendix to Smale's paper: *Diagrams and relative equilibria in manifolds*, Amsterdam, 1970. Lecture Note in Math. **197**, Springer-Verlag, New York. См. русский перевод в приложении к статье Смейл С. *Топология и механика*. УМН, 1972, т. 27, №2, стр. 77–133.
- [54] Shub M. and Smale S. *On the intractability of Hilbert's Nullstellensatz and an algebraic version of « $P=NP$ »*. Duke Math. J., 1995, **81**, p. 47–54.
- [55] Shub M. and Smale S. *Complexity of Bezout's theorem, III: condition number and packing*. J. of complexity, 1993, **9**, p. 4–14.
- [56] Shub M. and Smale S. *Complexity of Bezout's theorem, V: polynomial time*. Theoret. Comp. Sci., 1994, **133**, p. 141–164.
- [57] Smale S. *Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms*. pages 490–496 in: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Inst. Mittag-Leffler, Sweden, 1962. (V. Stenström, ed.)
- [58] Smale S. *A survey of some recent developments in differential topology*. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, p. 131–146.
- [59] Smale S. *Differentiable dynamic systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, p. 747–817. См. также русский перевод Смейл С. *Дифференцируемые динамические системы*, УМН, 1970, т. 25, №1, стр. 113–185.
- [60] Smale S. *Topology and mechanics, I and II*. Invent. Math., 1970, **10**, p. 305–331 and Invent. Math., **11**, p. 45–64. См. также русский перевод: Смейл С. *Топология и механика*, УМН, 1972, т. 27, №2, стр. 77–133.
- [61] Smale S. *Dynamics in general equilibrium theory*. Amer. Economic Review, 1976, **66**, p. 288–294.
- [62] Smale S. *Mathematics of Time*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [63] Smale S. *Global analysis and economics*, pages 331–370 in *Handbook of Mathematical Economics*. 1981, **1**, editors K.J. Arrow and M. D. Intriligator. North-Holland, Amsterdam.

- [64] Smale S. *The story of the higher dimensional Poincaré conjecture*. Mathematical Intelligencer, 1990, **12**, no. 2, p. 40–51. Also in M. Hirsch, J. Marsden and M. Shub, editors, *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*. 1992, p. 281–301.
- [65] Smale S. *Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed*. Physica D, 1991, **51**, p 267–273.
- [66] Taubes G. *What happens when Hubris meets Nemesis?* Discover, July 1987.
- [67] Temam R. *Navier-Stokes Equations*, revised edition. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [68] Traub J. and Woźniakowski H. *Complexity of linear programming*. Oper. Res. Lets., 1982, **1**, p. 59–62.
- [69] Tsuji M. *Potential Theory in Modern Function Theory*. Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1959.
- [70] Wen L. and Xia Z. *A simpler proof of the C^1 connecting lemma*. 1997, To appear.
- [71] Williams R. *The structure of Lorenz attractors*. Publ. IHES, 1979, **50**, p. 101–152.
- [72] Wintner A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941. См. также русский перевод: Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*, М.: Наука, 1967, 524 стр.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ХАОСА И НЕЛИНЕЙНОСТИ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 14.01.02. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,67. Уч. изд. л. 17,83.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»,
426034, г. Ижевск, Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
