С.М. ВОРОНИН, А.А. КАРАЦУБА

Дзета-функция Римана

С.М. ВОРОНИН, А.А. КАРАЦУБА

Дзета-функция Римана

ББК 22.13
В75
УДК 511.331

Издание выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 94-01-01981

Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана.— М.: Физматлит, 1994 .— 376 с.— ISBN 5-02-014120-8.

Содержит систематическое изложение теории дзета-функции Римана, одной из важнейших производящих функций теории чисел. Поскольку теория дзета-функции в настоящее время далека от завершенного вида, в книгу включены лишь устоявшиеся классические результаты и недавние достижения теории, имеющие в определенном смысле законченный вид. Необходимые сведения по анализу, методу перевала и методу ван-дер-Корпута излагаются в приложении.

Для специалистов по анализу и теории чисел, а также для лиц, изучающих аналитическую теорию чисел.

Ил.3. Библиогр. 174 назв.

Научное издание

ВОРОНИН Сергей Михайлович,
КАРАЦУБА Анатолий Алексеевич

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

ИБ № 32676

ЛР № 020297 от 27.11.91
Подписано к печати 30.03.94. Формат 60×90/16.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 23,5. Усл. кр.-отт. 23,5. Уч.-изд. л. 26,64.
Тираж 1000 экз. Заказ изд. № 7365. Заказ тип. № 4419
121059, Бережковская наб., д. 6 А/О Внешторгиздат ГРПТРиП
Отпечатано в производственно-издательском комбинате ВИНИТИ
140010, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

$В\frac{1602030000-049}{053(02)-94}6-91$

ISBN 5-02-014120-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя монография посвящена систематическому изложению теории дзета-функции Римана. Опыт такого рода не является новым. Достаточно вспомнить "Теорию дзета-функции Римана" Е.К.Титчмарша, изданную в 1951 г. и переизданную в 1986 г. в Оксфорде. До сих пор эта книга не потеряла своей уникальности, она вправе считаться энциклопедией по теории дзета-функции. В то же время в некоторых направлениях этой теории за прошедшее время был достигнут определенный прогресс. Отдельные аспекты теории дзета-функции были распространены на более широкие классы функций.

Авторы не ставили перед собой задачу охватить все указанные направления исследований. Естественным желанием было по возможности избегать дублирования и переписывания. Акцент делался на результаты, не вошедшие до сих пор в монографии. Тем не менее полагаем, что по настоящей монографии можно судить о современном состоянии теории дзета-функции Римана.

Считаем своим долгом выразить искреннюю благодарность Н.И.Ворониной, чью помощь при подготовке рукописи трудно переоценить.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Устоявшиеся в математической литературе обозначения употребляются, как правило, без пояснений.

$c, c_1, c_2, \ldots, C, C_1, \ldots$—положительные постоянные, не всегда одни и те же.

$\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$—положительные сколь угодно малые постоянные.

$p, p_0, p_1, \ldots$—простые натуральные числа.

n, m, l, r—целые либо натуральные числа в зависимости от контекста.

$\ln x = \log x$—натуральный логарифм x.

Для действительного числа α $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\})$, где $\{\alpha\}$—дробная часть α.

Запись $A \ll B$ обозначает, что существует $c > 0$ такое, что $|A| \leq \leq cB$.

Запись $A \ll_{k,N,y} B$ обозначает, что при фиксированных k, N, y выполняется $A \ll B$.

Для действительных положительных функций f и φ запись $f \asymp \varphi$ означает, что существуют положительные c_1 и c_2 такие, что $c_1 f \leq \leq \varphi \leq c_2 f$.

Во всех утверждениях, касающихся ζ- и L-функций, $s = \sigma + it$.

Если s имеет какие-либо индексы, то такие же индексы имеют σ и t.

Соотношение $(a_1, \ldots, a_n) \equiv (b_1, \ldots, b_n) (\mathrm{mod}\, 1)$ означает, что разности $a_j - b_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$ являются целыми рациональными числами.

Главы нумеруются римскими цифрами, остальное — теоремы, леммы, параграфы и проч. — арабскими. Вспомогательные утверждения вынесены в отдельную главу — Приложение (при ссылках она обозначается буквой П).

При ссылках теоремы, леммы, формулы нумеруются тремя индексами: номер главы, номер параграфа, номер утверждения. Номер формулы дается в круглых скобках. Например, формула III.2(21) обозначает формулу (21) из §2 гл. III.

При ссылках на теоремы, леммы и др. внутри одной и той же главы, номер главы опускается.

ВВЕДЕНИЕ

Более двух столетий назад в работах Л.Эйлера возник метод производящих функций. Первые его применения были связаны с задачами теории чисел и комбинаторного анализа. В дальнейшем сфера приложений метода производящих функций расширялась и сейчас охватывает алгебру, топологию и, весьма значительно, теорию вероятностей. В теории чисел, исходной области применений метода, с ним связан ряд ярких ее достижений.

Отправной точкой метода производящих функций является сопоставление исследуемым объектам функций, причем отношения между объектами отражаются в отношениях между функциями. К функциям же можно применять всю мощь метода анализа бесконечно малых, что часто ведет к успеху в изучении исходной задачи.

В настоящей монографии основным объектом внимания является дзета-функция Римана, хотя в определенной степени затрагиваются L-функции Дирихле и Гекке. Многие свойства целых чисел отражаются в аналитических свойствах дзета-функции. Например, представление дзета-функции в виде эйлеровского произведения по простым числам является отражением однозначности разложения целых чисел на простые числа. Другие связи свойств целых чисел и аналитических свойств дзета-функции видны не столь непосредственно ясно, хотя внимательный анализ в ряде случаев выявляет эти связи.

Перейдем к краткому обзору содержания книги.

В гл. I излагаются основные факты теории ζ-функции Римана и L-функции Дирихле, как функций комплексного переменного. Изложение в достаточной степени стандартное.

В гл. II дзета-функция Римана рассматривается как производящая функция ряда арифметических функций. С ее помощью доказываются наиболее употребляемые тождества. Связь ζ-функции с распределением простых чисел, т.е. с арифметической функцией $\pi(x)$—числом простых чисел, не превосходящих x,— изучается более внимательно. Выводятся, в частности, асимптотические законы распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях.

В гл. III развивается аппарат, с помощью которого получаются так называемые приближения функционального уравнения. Эти уравнения дают возможность приближения дзета-функции Римана в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Соответствующие формулы для L-функций Дирихле в книге не рассматриваются, хотя это можно проделать, повторяя соответствующие рассуждения для дзета-функции Римана.

В гл. IV излагается классический метод Виноградова оценок сумм Г.Вейля. Как следствие, получена современная граница нулей ζ-функции. В §4 метод Виноградова применяется к получению асимптотических формул для числа целых точек, лежащих под гиперболоидом. Остаточный член в асимптотической формуле является на сегодня наилучшим.

В гл. V рассматриваются различные плотностные теоремы и следствия из них. Следует заметить, что даже теорема А.Ингама остается без доказательства. Вместо нее доказывается в §2 более слабое утверждение. Дело в том, что плотностным теоремам уделено большое внимание в современной литературе; для наших же дальнейших целей вполне хватит результата §2.

Читатель, заинтересованный именно плотностными теоремами типа ингамовской, может обратиться к источникам, указанным в замечаниях.

Результаты §5, касающиеся распределения нулей в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, излагаются в монографии, по-видимому, впервые.

В гл. VI рассматриваются нули дзета-функции Римана, лежащие на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Излагается современное состояние вопроса, исследование которого велось в работах Г.Харди и А.Сельберга.

В гл. VII продолжены исследования Г.Бора по распределению значений ζ-функции. Даны некоторые обобщения результатов теории ζ-функции Римана на L-функции Дирихле и Гекке.

В гл. VIII излагаются как классические результаты, так и некоторые результаты по эффективизации теорем гл. VII.

ГЛАВА I
ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

§1. Определение функции $\zeta(s)$

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть определена или рядом Дирихле, или бесконечным произведением Эйлера. Остановимся на первом определении, а второе получим как теорему.

Определение 1. При $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, *функция Римана* $\zeta(s)$ задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Если $\sigma \geq \sigma_0 > 1$, то ряд справа в (1) равномерно и абсолютно сходится, так как

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\sigma+it}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1}.$$

Каждое слагаемое ряда (1) является голоморфной функцией s, поэтому по теореме Вейерштрасса (теорема II.2.1) функция $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ является голоморфной.

Теорема 1 (тождество Эйлера). *При* $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, *справедливо тождество*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2}$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам p.

Доказательство. Пусть $X \geq 2$. Определим функцию $\zeta_X(s)$ равенством

$$\zeta_X(s) = \prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Каждый множитель правой части (3) является суммой членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}}.$$

В силу условия теоремы, каждая из таких прогрессий абсолютно сходится, а потому их можно почленно перемножать. Поэтому правая часть (3) равняется

$$\prod_{p\le X}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}}=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{1}{(p_1^{m_1}\ldots p_j^{m_j})^s},\qquad (4)$$

где $2=p_1<\ldots<p_j$ и $p_1,\ldots,p_j$— все простые числа, не превосходящие X. Заметим, что в правой части (4) нет равных между собою слагаемых, так как из соотношения

$$p_1^{m_1}\ldots p_j^{m_j}=p_1^{m_1'}\ldots p_j^{m_j'}$$

следует, в силу основной теоремы арифметики (теорема П.9.1), что $m_1=m_1',\ldots,m_j=m_j'$. Далее, опять же в силу основной теоремы арифметики, каждое натуральное число $n\le X$ представимо в виде

$$n=p_1^{m_1}\ldots p_j^{m_j},\qquad (5)$$

где $m_1,\ldots,m_j$ — целые неотрицательные числа, причем представление (5) единственно. Следовательно, правая часть (4) равняется

$$\sum_{n\le X}\frac{1}{n^s}+\sum_{n>X}{}'\,\frac{1}{n^s},\qquad (6)$$

где штрих в последней сумме означает суммирование по таким натуральным числам $n>X$, каждый простой делитель которого не превосходит X. Оценим модуль этой суммы сверху; имеем

$$\left|\sum_{n>X}{}'\,\frac{1}{n^s}\right|\le\sum_{n>X}{}'\,\frac{1}{n^\sigma}<\sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma}\le\frac{1}{X^\sigma}+\int_X^\infty\frac{du}{u^\sigma}=$$

$$=\frac{1}{X^\sigma}+\frac{1}{\sigma-1}X^{1-\sigma}\le\frac{\sigma}{\sigma-1}X^{1-\sigma}.$$

Из формул (3), (4), (6) и последней оценки получаем равенство

$$\zeta_X(s)=\prod_{p\le X}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n\le X}\frac{1}{n^s}+O\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}X^{1-\sigma}\right).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $X\to+\infty$; так как $\sigma>1$, то $X^{1-\sigma}\to 0$ и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Тождество Эйлера (2) указывает на связь, которая существует между функцией $\zeta(s)$ и простыми числами; оно играет главную роль во всех приложениях $\zeta(s)$ к теории простых чисел.

Заметим, что $\zeta(s)$ можно было бы определить соотношением (2), а затем доказать, как теорему, соотношение (1).

§ 2. Обобщения функции $\zeta(s)$

Имеется много разных обобщений $\zeta(s)$. Остановимся только на двух из них; они будут нужны в некоторых дальнейших вопросах, рассматриваемых в книге.

Пусть m— натуральное число, $\chi(n)$— характер Дирихле по модулю m (определение характера Дирихле и его основные свойства см. П.9).

О п р е д е л е н и е 1. При $s=\sigma+it$, $\sigma>1$, *функция* $L(s,\chi)$ задается равенством

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.\qquad (1)$$

Очевидно, что $L(s,\chi)$ является голоморфной функцией при $\mathrm{Re}\, s>1$. В силу мультипликативности $\chi(n)$, для $L(s,\chi)$ справедливо тождество, аналогичное тождеству Эйлера:

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},\qquad \mathrm{Re}\, s>1.\qquad (2)$$

Доказательство формулы (2) совпадает с доказательством теоремы 1.1. Если $\chi(n)=\chi_0(n)$ — главный характер по модулю m, т.е. $\chi_0(n)=1$, если $(n,m)=1$, и $\chi_0(n)=0$, если $(n,m)>1$, то из (2) получаем

$$L(s,\chi_0)=\prod_p\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{(p,m)=1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=$$

$$=\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\zeta(s)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Таким образом, $L(s,\chi_0)$ лишь простым множителем отличается от $\zeta(s)$. Во многих отношениях функции $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ схожи между собой. Функции $L(s,\chi)$ (следует помнить, что для заданного m существует $\varphi(m)$ различных характеров $\chi(n)$ по модулю m и, следовательно, вообще говоря, $\varphi(m)$ различных функций $L(s,\chi)$) играют главную роль во всех вопросах, связанных с простыми числами, лежащими в арифметических прогрессиях с разностью m.

Другим обобщением $\zeta(s)$ является функция $\zeta(s;\alpha)$, которую иногда называют дзета-функцией Гурвица.

Определение 2. Пусть α— вещественное число, $0 < \alpha \le 1$; при $s = \sigma + it, \sigma > 1$, функция $\zeta(s;\alpha)$ задается равенством

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}.$$

Из определения $\zeta(s;\alpha)$ с помощью рассуждений, которые проводились в §1, следует, что $\zeta(s;\alpha)$ является голоморфной в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1$. Очевидно также, что $\zeta(s;1) = \zeta(s)$.

Функцию $L(s,\chi)$ можно представить в виде линейной комбинации функций $\zeta(s;\alpha)$. Действительно, пользуясь периодичностью характера $\chi(n)$, легко находим

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(km+l)}{(km+l)^s} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\chi(l)}{m^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l/m)^s} = \frac{1}{m^s}\sum_{l=1}^{m}\chi(l)\zeta\left(s;\frac{l}{m}\right).$$

§ 3. Функциональное уравнение $\zeta(s)$

Функции $\zeta(s)$, $L(s,\chi)$ и $\zeta(s;\alpha)$ могут быть продолжены на всю плоскость комплексного переменного. Мы покажем, что существуют аналитические функции $A(s)$, $B(s,\chi)$, $A(s;\alpha)$, определенные на всей s-плоскости и такие, что при $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ выполняются равенства

$$\zeta(s) = A(s), \qquad L(s;\chi) = B(s;\chi), \qquad \zeta(s;\alpha) = A(s;\alpha).$$

Основой построения функций $A(s), B(s,\chi), A(s;\alpha)$ служит следующая лемма 1, которую можно назвать *функциональным уравнением тета-ряда*.

1. Тета-ряд и его свойства.

Определение 1. *Тета-рядом* $\theta(\tau;\alpha)$ при положительной вещественной части τ и произвольном комплексном числе α называется функция

$$\theta(\tau;\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2).$$

Определенная так функция $\theta(\tau;\alpha)$ является голоморфной в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\tau > 0$. Кроме того, очевидно, что $\theta(\tau;\alpha) = \theta(\tau;\alpha+1)$.

Лемма 1. *Справедливо следующее тождество:*

$$\theta\left(\frac{1}{\tau};\alpha\right) = \sqrt{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2\tau + 2\pi i n\alpha) =$$

$$= \sqrt{\tau}\exp(-\pi\alpha^2/\tau)\theta(\tau;-i\alpha/\tau). \qquad (1)$$

Доказательство. Прежде всего докажем утверждение леммы при вещественных числах τ и α. Тогда в силу принципа аналитического продолжения (теорема II.9.2) будет следовать справедливость (1) и при комплексных τ и α. Итак, пусть $\tau = x > 0$; не нарушая общности, можно считать, что $0 \le \alpha < 1$. Возьмем $N > 10$, $M = N^6$ и рассмотрим интеграл

$$I(n) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}\exp(-\pi x(n+\alpha+u)^2)du.$$

Пользуясь тем, что $\frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u} = \sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi i k u}$, легко находим

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}du = 1, \qquad I(n) = e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + R(n),$$

$$R(n) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)du. \qquad (2)$$

Оценим сверху абсолютную величину $R(n)$ при условии, что $-N \le$ $\le n \le N$. Для этого представим $R(n)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$R(n) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{-0,5}^{-N^{-3}} \Phi(u)du, \qquad I_2 = \int_{-N^{-3}}^{N^{-3}} \Phi(u)du, \qquad I_3 = \int_{N^{-3}}^{0,5} \Phi(u)du,$$

$$\Phi(u) = \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right).$$

Пользуясь формулой конечных приращений, при $|u| \le N^{-3}$ находим

$$\Phi(u) = O\left(\frac{|u|N}{|\sin\pi u|}\right) = O(N); \qquad I_2 = O(N^{-2}).$$

Интегралы I_1 и I_3 оцениваются одинаково; оценим, например, I_3. Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$I_3 = \frac{-\cos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)\sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}\right)\Big|_{N^{-3}}^{0,5} +$$

$$+ \int_{N^{-3}}^{0,5} \frac{\cos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)}Y(u)du,$$

$$Y(u) = \frac{d}{du}\left(\frac{e^{-\pi x(n+\alpha+u)^2} - e^{-\pi x(n+\alpha)^2}}{\sin\pi u}\right).$$

Далее, легко видеть, что при $N^{-3} \le u \le 0,5$ для $Y(u)$ справедлива оценка

$$Y(u) = O(u^{-2}) + O(Nu^{-1}).$$

Следовательно,

$$I_3 = O(N^3M^{-1}) + O(NM^{-1}\ln N) = O(N^{-2}); \qquad R(n) = O(N^{-2}).$$

Суммируя (2) по n в пределах $-N \le n \le N$, получаем

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi x(n+\alpha)^2} + O(N^{-1}) = \sum_{n=-N}^{N}\int\limits_{-0,5}^{0,5}\sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi iku-\pi x(n+\alpha+u)^2}du =$$

$$= \sum_{k=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\int\limits_{-0,5}^{0,5} e^{-2\pi ik(n+u)-\pi x(n+\alpha+u)^2}du =$$

$$= \sum_{k=-M}^{M}\int\limits_{-N-0,5}^{N+0,5} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2}du = \sum_{k=-M}^{M} J(k).$$

Заменим $J(k)$ интегралом по всей прямой:

$$J(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iku-\pi x(u+\alpha)^2}du + O\left(e^{-\pi xN}\right) =$$

$$= e^{2\pi ik\alpha}J(k;x) + O\left(e^{-\pi xN}\right),$$

где, для удобства, введено обозначение

$$J(k;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iku-\pi xu^2}du.$$

Вычислим несобственный интеграл $J(k;x^{-1})$. Имеем

$$J(k;x^{-1}) = x\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikux-\pi xu^2}du = xe^{-\pi xk^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u+ki)^2}du.$$

Пусть $X > 1$ и Γ — контур прямоугольника с вершинами $-X, X, -X+ik, X+ik$. Тогда по теореме Коши о вычетах имеем равенство

$$0 = \int\limits_{\Gamma} e^{-\pi xu^2}du = \int\limits_{-X}^{X} e^{-\pi xu^2}du - \int\limits_{-X}^{X} e^{-\pi x(u+ki)^2}du +$$

$$+i\int\limits_{0}^{k} e^{-\pi x(X+iu)^2}du - i\int\limits_{0}^{k} e^{-\pi x(X-iu)^2}du. \qquad (3)$$

Оба последних интеграла по абсолютной величине не превосходят

$$\int\limits_{0}^{k} e^{-\pi xX^2}e^{\pi xu^2}du \le ke^{\pi xk^2-\pi xX^2}.$$

Переходя в (3) к пределу при $X \to +\infty$, получим значение интересующего нас интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u+ki)^2}du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi xu^2}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{v}}e^{-v}dv = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$J(k;x^{-1}) = e^{-\pi xk^2}\sqrt{x};$$

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2} + O(N^{-1}) = \sqrt{x}\sum_{k=-M}^{M} e^{-\pi xk^2+2\pi ik\alpha} + O\left(e^{-\frac{\pi}{x}N}\right).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу $N \to \infty$, получим утверждение леммы.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\theta(x) = \theta(x,0)$; *тогда при* $x > 0$ *справедливо равенство*

$$\theta(x^{-1}) = \sqrt{x}\theta(x). \qquad (4)$$

2. Выражение дзета-функции через тета-ряд.

Т е о р е м а 1. *При* $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ *справедливо следующее равенство:*

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int\limits_{1}^{\infty}\left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx, \qquad (5)$$

где $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся интегральной формулой для гамма-функции (теорема II.3.4); при $\mathrm{Re}\, s > 0$ и натуральном числе n имеем

$$\Gamma(s/2) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u}u^{s/2-1}du = n^s\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\pi n^2x}\pi^{s/2}x^{s/2-1}dx$$

(сделали замену переменной интегрирования вида $u = \pi n^2 x$); следовательно,

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)n^{-s} = \int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1}dx.$$

Предполагая $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$, просуммируем последнее равенство по всем n; найдем

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1}dx.$$

Поменяем местами порядок суммирования и интегрирования. Имеем равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1}dx = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1}dx =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx - \lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x}\right)dx.$$

Далее получаем ($0 < x$)

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \ll \int\limits_N^\infty e^{-\pi u^2 x}du = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\int\limits_{\pi x N^2}^\infty e^{-v}v^{-1/2}dv.$$

Последний интеграл не превосходит, с одной стороны, величины

$$\int\limits_0^\infty e^{-v}v^{-1/2}dv = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

а, с другой стороны, величины

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x N^2}}\int\limits_{\pi x N^2}^\infty e^{-v}dv = \frac{e^{-\pi x N^2}}{N\sqrt{\pi x}}.$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\sum_{n>N} e^{-\pi x n^2} \le \min\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{e^{-\pi x N^2}}{2N\pi x}\right);$$

$$\left|\int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x}\right)dx\right| \le \int\limits_0^{1/N} x^{\sigma/2-1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \int\limits_{1/N}^\infty x^{\sigma/2-1}\frac{e^{-\pi x N^2}}{2N\pi x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{(\sigma-1)/2} + \frac{1}{2}\pi^{-\sigma/2}N^{-\sigma}\int\limits_{\pi N}^\infty e^{-u}u^{\sigma/2-2}du \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1}{N}\right)^{(\sigma-1)/2} + \frac{1}{2}\pi^{-\sigma/2}N^{-\sigma}(\pi N)^{\sigma/2-2}\int\limits_{\pi N}^\infty e^{-u}du;$$

$$\lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x}\right)dx = 0.$$

Итак, имеем равенство

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx.$$

Из формулы (4), которая в развернутом виде записывается так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi}{x}n^2\right) = \sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi x n^2),$$

легко находим функциональное уравнение функции $\omega(x)$:

$$\omega(x^{-1}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\omega(x).$$

Пользуясь этим соотношением и производя во втором из нижевыписанных интегралов замену переменной интегрирования вида $x \to x^{-1}$, получим

$$\int\limits_0^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx = \int\limits_0^1 x^{s/2-1}\omega(x)dx + \int\limits_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx =$$

$$= \int\limits_1^\infty \left(x^{-s/2-1}\omega(x^{-1}) + x^{s/2-1}\omega(x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int\limits_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Отметим ряд следствий теоремы 1. Так как $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$ при $x \to +\infty$, то несобственный интеграл в правой части (5) сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > K$ при любом K; следовательно, этот интеграл, как функция комплексной переменной s, по теореме Вейерштрасса (теорема П.2.1) является голоморфной во всей s-плоскости. Формула (5) доказана в предположении, что $\operatorname{Re} s > 1$. Но правая часть этой формулы определена при любых s, т.е. эта формула может служить аналитическим продолжением функции $\zeta(s)$ на всю s-плоскость. За упомянутую в начале параграфа функцию $A(s)$ возьмем следующую:

$$A(s) = \pi^{s/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx\right).$$

Гамма-функция $\Gamma(s)$ в точке $s = 0$ имеет полюс первого порядка; кроме того, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Поэтому функция $A(s)$ является регулярной во всей s-плоскости, за исключением точки $s = 1$, в которой она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным 1. Наконец, легко видеть, что правая часть формулы (5) не меняется от замены s на $1-s$. Определим функцию $\xi(s)$ равенством

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s). \qquad (6)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Функция $\xi(s)$ является целой и*

$$\xi(s) = \xi(1-s). \qquad (7)$$

Соотношение (7), или эквивалентное ему соотношение

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \qquad (8)$$

называется *функциональным уравнением дзета-функции Римана.*

§4. Функциональные уравнения $L(s;\chi)$ и $\zeta(s;\alpha)$

Получим аналитические продолжения функций $L(s;\chi)$ и $\zeta(s;\alpha)$.

1. Аналитическое продолжение $L(s;\chi)$ в область $\operatorname{Re} s > 0$. Следующая простая лемма продолжает $L(s;\chi)$ в плоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Лемма 1. *Пусть $\chi(n)$—неглавный характер по модулю m,*

$$S(x) = \sum_{n\le x}\chi(n).$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$L(s,\chi) = s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $N \ge 1$, $\operatorname{Re} s > 1$. Применяя

частное суммирование (теорема П.1.1), будем иметь

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + s\int_1^N c(x)x^{-s-1}dx + N^{-s}c(N),$$

где $c(x) = S(x)-1$. Так как $|c(x)| \le x$, то, переходя к пределу $N \to +\infty$, получим

$$L(s,\chi) = 1 + s\int_1^\infty c(x)x^{-s-1}dx = s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Так как при $\chi(n) \ne \chi_0(n)$ выполняется оценка*

$$|S(x)| \le \varphi(m),$$

то интеграл в правой части (1) *сходится абсолютно и равномерно при* $\operatorname{Re} s \ge \sigma_0 > 0$ *при любом* σ_0. Следовательно, по теореме Вейерштрасса (теорема П.2.1) этот интеграл является голоморфной функцией s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, а формула (1) аналитически продолжает $L(s,\chi)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$.

2. Функциональное уравнение для $\theta(\tau,\chi)$. Чтобы продолжить $L(s,\chi)$ на всю s-плоскость, выведем функциональные уравнения для функций $\theta(\tau,\chi)$ и $\theta_1(\tau,\chi)$, подобных функции $\theta(\tau)$.

Заметим, что если χ_1— примитивный характер по модулю k и χ— индуцированный χ_1 производный характер по модулю $k_1, k_1 \ne k$, то при $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо тождество

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p|k\\ p\nmid k_1}}\left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right). \qquad (2)$$

Тождество (2) позволяет ограничиться выводом функционального уравнения функций $L(s,\chi)$ с примитивным характером χ.

Лемма 2. *Пусть χ— примитивный характер по модулю k. Для четного характера χ определим функцию $\theta(\tau,\chi)$ равенством*

$$\theta(\tau,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)\exp(-\pi\tau n^2/k), \qquad \tau > 0,$$

а для нечетного характера χ определим функцию $\theta_1(\tau,\chi)$ равенством

$$\theta_1(\tau,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}n\chi(n)\exp(-\pi\tau n^2/k), \qquad \tau > 0.$$

Тогда для введенных функций $\theta(\tau,\chi)$ и $\theta_1(\tau,\chi)$ справедливы следующие тождества— функциональные уравнения:

$$g(\bar\chi)\theta(\tau;\chi) = \sqrt{k\tau^{-1}}\theta(\tau^{-1};\bar\chi); \qquad (3)$$

$$g(\bar\chi)\theta_1(\tau;\chi) = i\sqrt{k\tau^{-3}}\theta_1(\tau^{-1};\bar\chi), \qquad (4)$$

где $g(\chi)$— сумма Гаусса,

$$g(\chi) = \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \exp(2\pi i a/k). \qquad (5)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.1 при $s = \tau > 0$ и вещественном α:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(n+\alpha)^2\tau^{-1}) = \sqrt{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2\tau + 2\pi i n\alpha). \qquad (6)$$

Имеем цепочку тождественных преобразований:

$$g(\bar\chi)\theta(\tau;\chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m)\sqrt{k\tau^{-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-k\pi\tau^{-1}\left(n+\frac{m}{k}\right)^2\right) =$$

$$= \sqrt{k\tau^{-1}} \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\frac{(kn+m)^2}{k\tau}\right) =$$

$$= \sqrt{k\tau^{-1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar\chi(m) \exp\left(-\frac{\pi m^2}{k\tau}\right) = \sqrt{k\tau^{-1}}\theta(\tau^{-1};\bar\chi),$$

что доказывает формулу (3). Чтобы доказать (4), продифференцируем почленно (6) и заменим после этого τ на τk^{-1}, α на mk^{-1} (указанные ряды можно почленно дифференцировать, так как получающиеся после дифференцирования ряды равномерно сходятся). После указанных преобразований вместо (6) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}\right) =$$

$$= i\sqrt{k\tau^{-3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (kn+m) \exp\left(-\pi\frac{(kn+m)^2}{k\tau}\right).$$

Отсюда, как и выше, выводим

$$g(\bar\chi)\theta_1(\tau;\chi) = \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \exp\left(-\frac{n^2\pi\tau}{k} + \frac{2\pi i m n}{k}\right) =$$

$$= i\sqrt{k\tau^{-3}} \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (kn+m) \exp\left(-\pi\frac{(kn+m)^2}{k\tau}\right) =$$

$$= i\sqrt{k\tau^{-3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\bar\chi(n) \exp\left(-\frac{\pi n^2}{k\tau}\right) = i\sqrt{k\tau^{-3}}\theta_1(\tau^{-1};\bar\chi).$$

Лемма доказана.

3. Функциональное уравнение для $L(s,\chi)$.

Теорема 1. *Пусть χ— примитивный характер по модулю k,*

$$\delta = \begin{cases} 0, \text{ если } \chi(-1) = 1, \\ 1, \text{ если } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$\xi(s,\chi) = (\pi k^{-1})^{-(s+\delta)/2}\,\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi).$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\xi(1-s,\bar\chi) = \frac{i^\delta\sqrt{k}}{g(\chi)}\xi(s,\chi).$$

Доказательство. Повторим рассуждения теоремы 3.1. Предположим, что χ—четный характер, т.е. $\chi(-1) = 1$. Тогда

$$\pi^{-s/2}k^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k}\right)\tau^{s/2-1}d\tau.$$

Умножим это равенство на $\chi(n)$ и, полагая $\mathrm{Re}\, s > 1$, просуммируем обе части по всем натуральным числам n; получим

$$\pi^{-s/2}k^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \int_0^\infty \tau^{s/2-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k}\right)\right)d\tau.$$

Пользуясь тем, что χ— четный характер, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k}\right) = \frac{1}{2}\theta(\tau,\chi);$$

$$(\pi k^{-1})^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \tau^{s/2-1}\theta(\tau,\chi)d\tau.$$

Разобьем последний интеграл на два, в первом из получившихся интегралов сделаем замену переменной интегрирования вида $\tau \to \tau^{-1}$ и воспользуемся (3); находим

$$(\pi k^{-1})^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \tau^{s/2-1}\theta(\tau,\chi)d\tau + \frac{1}{2}\int_1^\infty \tau^{-s/2-1}\theta(\tau^{-1},\chi)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \tau^{s/2-1}\theta(\tau,\chi)d\tau + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{k}}{g(\bar\chi)}\int_1^\infty \tau^{-s/2-1/2}\theta(\tau,\bar\chi)d\tau. \qquad (7)$$

Правая часть этого равенства является аналитической функцией при любом s и, следовательно, формула (7) дает аналитическое продолжение $L(s,\chi)$ на всю s-плоскость. Поскольку $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \neq 0$, то $L(s,\chi)$— регулярная всюду функция. Далее, при замене s на $1-s$ и χ на $\bar{\chi}$, правая часть (7) умножается на число $\sqrt{k}/g(\chi)$ ввиду того, что $\chi(-1)=1$, и, следовательно,

$$g(\chi)g(\bar{\chi}) = g(\chi)\overline{g(\chi)} = k.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 0$. Предположим теперь, что χ—нечетный характер, т.е. $\chi(-1) = -1$. Имеем

$$\left(\pi k^{-1}\right)^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty n\exp\left(-\frac{\pi\tau n^2}{k}\right)\tau^{s/2-1/2}d\tau.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\left(\pi k^{-1}\right)^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta_1(\tau,\chi)\tau^{s/2-1/2}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta_1(\tau,\chi)\tau^{s/2-1/2}d\tau + \frac{i\sqrt{k}}{2g(\bar{\chi})}\int_1^\infty \theta_1(\tau,\chi)\tau^{-s/2}d\tau. \qquad (8)$$

Последнее равенство дает аналитическое продолжение $L(s,\chi)$ на всю s-плоскость; из него также следует, что $L(s,\chi)$ является регулярной всюду функцией. Правая часть (8) при замене s на $1-s$ и χ на $\bar{\chi}$ умножается на $i\sqrt{k}/g(\chi)$ ввиду того, что

$$g(\chi)g(\bar{\chi}) = -k.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы при $\delta = 1$. Теорема доказана.

Заметим, что функция $L(s,\chi)$ является целой.

Продолжим теперь $\zeta(s;\alpha)$ на всю s-плоскость.

4. Аналитическое продолжение $\zeta(s;\alpha)$ в область $\operatorname{Re} s > 0$.

Л е м м а 3. *При* $\operatorname{Re} s > 0$, $N \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}},$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем натуральное число $M > N$ и применим формулу суммирования Эйлера (теорема II.1.2); найдем

$$\sum_{N+1/2<n\le M+1/2}\frac{1}{(n+\alpha)^s} = \int_{N+1/2}^{M+1/2}\frac{du}{(u+\alpha)^s} + s\int_{N+1/2}^{M+1/2}\frac{\rho(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}} =$$

$$= \frac{1}{1-s}\left(M+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{M+1/2}\frac{\rho(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}}.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем равенство

$$\zeta(s;\alpha) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{(u+\alpha)^{s+1}}.$$

Последний интеграл является регулярной функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. В силу принципа аналитического продолжения получаем утверждение леммы.

Из леммы следует, что $\zeta(s;\alpha)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ с единственной особенностью в точке $s = 1$, где она имеет полюс с вычетом, равным 1.

С л е д с т в и е 2. *При условиях и обозначениях леммы 3 справедливо равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в лемме 3 $\alpha = 1$ и заменим N на $N-1$. Получим

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}n^{-s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}\right)^{1-s} - \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}N^{-s} - s\int_N^{N+1/2}\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}}\right).$$

Поскольку

$$s\int_N^{N+1/2}\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}} = -\int_N^{N+1/2}\rho(u)du^{-s} = \frac{1}{2}N^{-s} + \int_N^{N+1/2}u^{-s}du,$$

следствие доказано.

5. Функциональное уравнение для $\zeta(s,\alpha)$.

Т е о р е м а 2. *Функция* $\zeta(s;\alpha)$ *при* $0 < \alpha < 1$ *является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости с полюсом* $s = 1$ *и* *вычетом* 1 *при* $s=1$. *Если* $\operatorname{Re} s<0$, *то справедливо соотношение*

$$\zeta(s;\alpha)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left\{\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}+\cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}\right\}.$$

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{Re} s>1$. Положим

$$I(s,\alpha)=\int_0^\infty\sum_{n\in\mathbf{Z}}\tau^{s/2-1}\exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2)d\tau.$$

Тогда

$$I(s,\alpha)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^\infty\tau^{s/2-1}\exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2)d\tau=$$

$$=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^\infty\left(\frac{\tau}{\pi(n+\alpha)^2}\right)^{s/2-1}d\left(\frac{\tau}{\pi(n+\alpha)^2}\right)=$$

$$=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi^{-s/2}|n+\alpha|^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\zeta(s;\alpha)+\zeta(s;1-\alpha)).\quad(9)$$

Вследствие леммы 3.1 имеем для $\tau_0>0$

$$I(s,\alpha)=\int_0^{\tau_0}\tau^{s/2-1}\theta(\tau,\alpha)d\tau+\int_{\tau_0}^\infty\tau^{s/2-1}\theta(\tau,\alpha)d\tau=$$

$$=\int_0^{\tau_0}\tau^{s/2-1}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp(-\pi n^2\tau^{-1}+2\pi in\alpha)d\tau+\int_{\tau_0}^\infty\tau^{s/2-1}\theta(\tau,\alpha)d\tau=$$

$$=\int_0^{\tau_0}\tau^{s/2-3/2}d\tau+\int_0^{\tau_0}\tau^{s/2-3/2}\sum_{n\neq0}\exp(-\pi n^2\tau^{-1}+2\pi in\alpha)d\tau+$$

$$+\int_{\tau_0}^\infty\tau^{s/2-1}\theta(\tau,\alpha)d\tau=\frac{2\tau_0^{(s-1)/2}}{s-1}+\int_{\tau_0^{-1}}^\infty\tau^{-s/2-1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{n\neq0}\exp(2\pi in\alpha)\exp(-\pi n^2\tau)\right)d\tau+\int_{\tau_0}^\infty\tau^{s/2-1}\theta(\tau,\alpha)d\tau.\quad(10)$$

Последнее выражение является аналитической функцией на всей s-плоскости. Далее, из представления (10) для $I(s,\alpha)$ видно, что $\frac{\partial}{\partial\alpha}I(s,\alpha)$ является также аналитической функцией на всей s-плоскости. Устремляя в равенстве (10) τ_0 к $+\infty$, получим при $\operatorname{Re} s<0$

$$I(s,\alpha)=\sum_{n\neq0}\exp(2\pi in\alpha)\int_0^\infty\tau^{-s/2-1/2}\exp(-\pi n^2\tau)d\tau=$$

$$=\sum_{n\neq0}\exp(2\pi in\alpha)\int_0^\infty\left(\frac{\tau}{\pi n^2}\right)^{-s/2-1/2}e^{-\tau}d\left(\frac{\tau}{\pi n^2}\right)=$$

$$=\sum_{n\neq0}\exp(2\pi in\alpha)\pi^{s/2-1/2}|n|^{s-1}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=$$

$$=2\pi^{s/2-1/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)F(1-s,\alpha),\quad(11)$$

где $F(s,\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^s}$.

Формула (11) дает аналитическое продолжение $F(s,\alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial\alpha}F(s,\alpha)$ на всю s-плоскость. Имеем при $\operatorname{Re} s>2$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I(s-1,\alpha)=$$

$$=\pi^{-(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\zeta(s-1,\alpha)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\zeta(s-1,1-\alpha)\right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\zeta(s-1,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(n+\alpha)^{-s+1}=(1-s)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}=$$

$$=(1-s)\zeta(s,\alpha),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I(s-1,\alpha)=\pi^{-(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)(1-s)(\zeta(s,\alpha)-\zeta(s,1-\alpha))=$$

$$=-2\pi^{-(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)(\zeta(s,\alpha)-\zeta(s,1-\alpha)).\quad(12)$$

Так как $I(s,\alpha)$ и $\frac{\partial}{\partial\alpha}I(s,\alpha)$ аналитически продолжаются на всю комплексную s-плоскость, то из равенств (9) и (12) следует аналитическая продолжимость $\zeta(s,\alpha)$ на всю s-плоскость. Выражая из равенств (9) и (12) $\zeta(s,\alpha)$, получим

$$\zeta(s,\alpha)=\frac12\left(\pi^{s/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)I(s,\alpha)-\right.$$

$$\left.-\frac12\pi^{(s-1)/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}I(s-1,\alpha)\right).$$

При $\operatorname{Re} s<1$ из равенства (11) получаем

$$\zeta(s,\alpha)=\frac12\left(\pi^{s/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\cdot2\pi^{s/2-1/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)F(1-s,\alpha)-\right.$$

$$\left.-\frac12\pi^{(s-1)/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{s+1}{2}\right)\cdot2\pi^{s/2-1}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}F(2-s,\alpha)\right)=$$

$$= \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}+$$

$$+\frac{1}{2}\pi^{s-3/2}\frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma((s+1)/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi\sin 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}. \qquad (13)$$

Поскольку из формулы удвоения (следствие II.3.5) следует, что

$$\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)} = \frac{\Gamma((1-s)/2)\Gamma(1-s/2)}{\pi/\sin(\pi s/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}s\cdot 2\sqrt{\pi}\cdot 2^{-2((1-s)/2)}\Gamma(1-s),$$

а

$$\frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma((s+1)/2)} = \frac{\Gamma(1-s/2)\Gamma(1-(s+1)/2)}{\pi/\sin(\pi s/2+\pi/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}s\cdot 2\sqrt{\pi}\cdot 2^{-2((1-s)/2)}\Gamma(1-s),$$

то из формулы (13) следует, что при $\operatorname{Re} s < 0$

$$\zeta(s,\alpha) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left\{\sin\frac{\pi}{2}s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n\alpha}{n^{1-s}} + \cos\frac{\pi}{2}s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n\alpha}{n^{1-s}}\right\}.$$

Теорема тем самым доказана.

§ 5. Представление $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ в виде произведения Вейерштрасса

К целым функциям $\xi(s)$ и $\xi(s,\chi)$ применим теорему о разложении таких функций на множители, которая обобщает основную теорему алгебры (теорема II.2.4). Для этого, прежде всего, определим порядок роста $\xi(s)$ и $\xi(s,\chi)$.

Л е м м а 1. *Функции $\xi(s)$ и $\xi(s,\chi)$ являются целыми первого порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3.2 $\xi(s)=\xi(1-s)$, поэтому достаточно оценить $|\xi(s)|$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 1/2$. При $\operatorname{Re} s \geq 1/2$ по следствию к лемме 4.3, взяв $N=1$, находим $|\zeta(s)s(s-1)| = O(|s|^3)$.

Далее, по теореме II.3.5 $|\Gamma(s)| \leq \exp(c|s|\ln|s|)$; кроме того, $|\pi^{-s/2}| \leq e^{c_1|s|}$. Следовательно,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

является функцией порядка не выше первого. Но при $s\to+\infty$

$$\ln\Gamma(s)\sim s\ln s, \quad \text{т.е.} \quad \ln\xi(s)\sim s\ln s$$

и порядок $\xi(s)$ равен 1. Дословно повторяя приведенные рассуждения и пользуясь в нужном месте теоремой 4.1 и леммой 4.1, получим, что

$\xi(s,\chi)$ также является целой функцией первого порядка. Лемма доказана.

Из этой леммы и того обстоятельства, что при $s\to+\infty$

$$|\xi(s)| \geq e^{cs}, \quad |\xi(s,\chi)| \geq e^{cs}$$

при любом сколь угодно большом, но фиксированном $c>0$, по теореме II.2.4 получаем, что каждая из функций $\xi(s)$ и $\xi(s,\chi)$ может быть представлена в виде

$$s^r e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}(1-s/\rho_n)e^{s/\rho_n}, \qquad (1)$$

причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\rho_n|^{-1}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ сходится при любом $\varepsilon>0$, т.е. произведение (1) содержит бесконечно много сомножителей, т.е. и $\xi(s)$ и $\xi(s,\chi)$ имеют бесконечно много нулей. В формуле (1) A и B— некоторые постоянные. Достаточно простыми рассуждениями можно показать, что ρ_n лежат в области $0\leq\operatorname{Re} s\leq 1$. Действительно, пусть это будет $\xi(s)$, тогда по формулам (3.6) и (3.7) достаточно показать, что $\xi(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re} s>1$, а это будет следовать из того, что $\zeta(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re} s>1$. Из теоремы 1.1 получаем при $\operatorname{Re} s>1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s};$$

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma} < 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1}; \quad |\zeta(s)| > \frac{\sigma-1}{\sigma} > 0.$$

Точно так же проводится доказательство для функции $\xi(s,\chi)$. Из формулы (3.6), которой определялась функция $\xi(s)$, легко видеть, что $\xi(0)\neq 0$ и $\xi(1)\neq 0$, и так как $\Gamma(s/2)\neq 0$, то все нули функции в (1) являются нулями $\zeta(s)$. То же самое выполняется и для $\xi(s,\chi)$.

§ 6. Простейшие теоремы о нулях $\zeta(s)$

1. Следствия из функционального уравнения для $\zeta(s)$. Основой вывода простейших теорем о нулях $\zeta(s)$ является теорема 1.1, формулы (3.6), (3.7) и представление $\xi(s)$ в виде (5.1). Итак,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}. \qquad (1)$$

Из леммы 4.3 при $\operatorname{Re} s>0$ и $N=1$ имеем

$$\zeta(s) = \frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}+s\int_1^{\infty}\frac{\rho(u)du}{u^{s+1}}.$$

Умножим обе части этого равенства на $s-1$ и перейдем к пределу при $s \to 1$; найдем

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1; \quad \lim_{s\to 1}\xi(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Из теоремы 3.2 следует, что $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$. Так как $(\Gamma(s))^{-1}$ имеет следующее представление:

$$(\Gamma(s))^{-1} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n},$$

то $\lim\limits_{s\to 0} s\Gamma(s) = 1$; поэтому

$$e^A = \xi(0) = -\zeta(0) = 1/2, \quad \zeta(0) = -1/2.$$

Итак, получили, что $\zeta(0) = -1/2$ и $\xi(1) = 1/2$. Далее, при $\mathrm{Re}\, s > 1$ легко находим

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Последний ряд сходится при вещественных положительных s, т.е. при $s > 0$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots > 0.$$

Тем самым $\zeta(s) \neq 0$ при $s > 0$. Таким образом, числа ρ_n в (1) являются комплексными, т.е. нули $\xi(s)$—они же и нули $\zeta(s)$— комплексные числа. Кроме ρ_n функция $\zeta(s)$ имеет и другие нули. Действительно, по теореме 3.2

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Если $\mathrm{Re}\, s < 0$, то $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ и правая часть в нуль не обращается. Но функция $\Gamma(s/2)$ имеет полюсы в точках $s/2 = -n$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $\zeta(s)$ равняется нулю при $s = -2n$, $n = 1, 2, \ldots$ Далее, из (3.5)–(3.7) следует, что

$$\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s});$$

поэтому вместе с ρ_n нулями $\xi(s)$ будут числа $\overline{\rho_n}$, $1-\rho_n$, $1-\overline{\rho_n}$, т.е. нули $\xi(s)$—они же комплексные нули $\zeta(s)$— расположены симметрично относительно вещественной оси $\mathrm{Im}\, s = 0$ и относительно прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Сформулируем доказанные факты в виде теоремы.

Теорема 1. *Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ имеет своими нулями четные отрицательные числа $-2, -4, \ldots, -2n, \ldots$ и комплексные числа ρ_n, которые лежат в полосе $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$, расположены симметрично относительно прямых $\mathrm{Im}\, s = 0$, $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ и являются нулями функции $\xi(s)$.*

Отмеченная полоса $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$ комплексной плоскости называется в теории дзета-функции Римана *критической полосой*; отмеченная прямая $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ называется *критической прямой*. Вещественные нули $\zeta(s)$, т.е. числа $-2, -4, \ldots, -2n, \ldots$, называются *тривиальными нулями* $\zeta(s)$; комплексные нули $\zeta(s)$ называются *нетривиальными нулями* $\zeta(s)$.

Б. Риман высказал гипотезу, что все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой, т.е. $\mathrm{Re}\,\rho_n = 1/2$. Как об этом уже говорилось выше, гипотеза Римана еще не доказана. Простейшие качественные и количественные результаты о ρ_n излагаются в настоящем параграфе.

Везде ниже комплексные нули дзета-функции будем нумеровать в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей, а при одинаковых абсолютных величинах мнимых частей— в произвольном порядке.

Теорема 2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + c, \quad (2)$$

где ρ_n—все комплексные нули $\zeta(s)$ и c—абсолютная постоянная.

Доказательство. Возьмем от левой и правой частей (1) логарифмическую производную, получим утверждение теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$,— все комплексные нули $\zeta(s)$, $T \ge 2$. Справедливо следующее неравенство:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \le c\log T.$$

Доказательство. При $s = 2 + iT$, разбивая сумму ряда на две и оценивая каждую по-своему, находим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \le \left|\sum_{n\le T}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| + \left|\sum_{n>T}\frac{s}{(s+2n)2n}\right| \le$$
$$\le \sum_{n\le T}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) + \sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2} \le c_1\log T.$$

Умножим (2) на -1, возьмем от обеих частей равенства вещественную часть, а затем перейдем к оценкам; получим

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-1} - c - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right) -$$
$$-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \le c_2\log T - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Так как $s = 2 + iT$,
$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\right| < c_3,$$
то
$$\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \le c_4 \log T.$$
Теперь заметим, что $0 \le \beta_n \le 1$ и, следовательно,
$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_n} = \mathrm{Re}\frac{1}{(2-\beta_n) + i(T-\gamma_n)} = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} \ge$$
$$\ge \frac{0,5}{1+(T-\gamma_n)^2};$$
$$\mathrm{Re}\frac{1}{\rho_n} = \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \ge 0.$$
Отсюда следует утверждение теоремы.

Отметим ряд следствий, которыми часто пользуются в приложениях теории дзета-функции.

Следствие 1. *Число нулей ρ_n дзета-функции, для которых $T \le |\mathrm{Im}\,\rho_n| \le T+1$, не превосходит величины $c \log T$; в частности, кратность комплексного нуля ρ_n, лежащего в прямоугольнике $0 \le \le \mathrm{Re}\, s \le 1$, $0 \le \mathrm{Im}\, s \le T$, есть величина порядка $O(\log T)$.*

Следствие 2. *При $T \ge 2$ справедлива следующая оценка:*
$$\sum_{|T-\gamma_n|>1} \frac{1}{|T-\gamma_n|^2} = O(\log T).$$

Следствие 3. *При $-1 \le \sigma \le 2$, $s = \sigma + it$ справедлива следующая формула:*
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log(|t|+2)), \qquad (3)$$
причем суммирование в последней сумме ведется по нулям ρ_n функции $\zeta(s)$, у которых $|t - \mathrm{Im}\,\rho_n| \le 1$.

Доказательство. При $s = \sigma + it$, $-1 \le \sigma \le 2$, легко находим
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \le \sum_{n \le |t|+2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \sum_{n>|t|+2} \frac{|s|}{n^2} = O(\log(|t|+2)).$$
Пользуясь (6.2), будем иметь
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log(|t|+2)).$$

Вычтем из этого соотношения такое же, но при $s = 2 + it$:
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right) + O(\log(|t|+2)).$$
Если $|\gamma_n - t| > 1$, то
$$\left|\frac{1}{\sigma+it-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right| \le \frac{2-\sigma}{(\gamma_n-t)^2} \le \frac{3}{(\gamma_n-t)^2},$$
и утверждение следует из следствий 1 и 2.

2. Теорема Ш.Валле-Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$.

Теорема 4. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что в области s-плоскости вида*
$$\mathrm{Re}\, s = \sigma \ge 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}$$
нет нулей дзета-функции.

Доказательство. Функция $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ имеет полюс, поэтому при некотором положительном числе γ_0 в области $|s-1| \le \gamma_0$ у нее нет нулей. Пусть $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $\zeta(s)$; ясно, что $|\gamma| > \gamma_0 > 0$. Так как при $\mathrm{Re}\, s = \sigma > 1$ выполняется равенство
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \exp(-it \log n),$$
то
$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos t \log n.$$
При вещественном числе φ справедливо неравенство
$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \ge 0;$$
поэтому имеем
$$0 \le 3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\left(-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) + \left(-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right). \qquad (4)$$
Оценим сверху каждое слагаемое правой части (4). Из (2) и следствия 1 при $s = \sigma$, $1 < \sigma \le 2$, получаем
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + B_1,$$
где $B_1 > 0$ — абсолютная постоянная. Опять из (2) при $s = \sigma + it$, $1 < \sigma \le 2$, $|t| > \gamma_0$, находим
$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < B_2 \log(|t|+2) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right),$$
где $B_2 > 0$ — абсолютная постоянная. Вещественные части β_k нулей ρ_k неотрицательны и не превосходят 1, поэтому
$$\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho_k} = \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-\beta_k+i(t-\gamma_k)} = \frac{\sigma-\beta_k}{(\sigma-\beta_k)^2+(t-\gamma_k)^2} > 0;$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\rho_k} = \frac{\beta_k}{\beta_k^2+\gamma_k^2} \geq 0;$$

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} < B_2\log(|t|+2) - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}.$$

Огрубляя последнее неравенство и заменяя в нем t на $2t$, найдем

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} < B_2\log(2|t|+2).$$

Каждое слагаемое правой части (4) оценено; подставляя эти оценки, получим

$$0 \leq \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + B\log(|t|+2),$$

где $B > 1$— абсолютная постоянная. Последнее неравенство имеет место при любом t, $|t| > \gamma_0$, и любом σ, $1 < \sigma \leq 2$. Возьмем в нем

$$t=\gamma, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{2B\log(|\gamma|+2)};$$

тогда будем иметь

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + B\log(|\gamma|+2), \quad \beta \leq 1-(14B\log(|\gamma|+2))^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы легко получить оценку логарифмической производной $\zeta(s)$ несколько левее прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$.

С л е д с т в и е 4. *Пусть $T \geq 2$ и $c > 0$— абсолютная постоянная теоремы 4. Тогда в области*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{2\log(T+2)}, \quad 2 \leq |t| \leq T,$$

имеет место оценка

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = O(\log^2 T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать $\sigma \leq 2$. Из (3) имеем

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{|\sigma-\beta_n+i(t-\gamma_n)|} + c_1\log T.$$

Так как $\beta_n \leq 1 - c\log^{-1}(T+2)$, $\sigma \geq 1-c(2\log(T+2))^{-1}$, то

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| \leq \frac{2}{c}\log(T+2) \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} 1 + c_1\log T = O(\log^2 T),$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 5. *Справедливо неравенство*

$$|\zeta(1+it)|^{-1} \ll \log^2(|t|+2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < R = 3r < 1$, $s_0 = 1+r+it_0$. Пусть, далее, r таково, что при $\mathrm{Re}\, s > 1-R$, $t_0 - 1 \leq \mathrm{Im}\, s \leq t_0+1$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \log^2(|t|+2).$$

В силу леммы II.2.2 имеем при $|s-s_0| \leq r$

$$|\log\zeta(s) - \log\zeta(s_0)| \leq 2\{M - \log|\zeta(s_0)|\}\frac{r}{R-r} = M - \log|\zeta(s_0)|,$$

где $M = \max\limits_{|s-s_0|\leq R} \log|\zeta(s)|$. Поскольку для некоторого s_1, $|s_1 - s_0| = R$,

$$M \leq \log|\zeta(s_0)| + \int_{s_0}^{s_1} \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| |ds| \leq \log|\zeta(s_0)| + O(R\log^2(|t|+2)),$$

то при $|s-s_0| \leq r$ имеем

$$\begin{aligned}\log|\zeta(s)|^{-1} &\leq |\log|\zeta(s)| - \log|\zeta(s_0)|| + |\log|\zeta(s_0)|| \leq |\log|\zeta(s_0)||+ \\ &+O(R\log^2(|t|+2)) \leq \log\zeta(1+r) + O(R\log^2(|t|+2)). \qquad (5)\end{aligned}$$

В силу следствия 4 при $r = c_1\log^{-2}(|t|+2)$ с достаточно малой положительной постоянной для всех t из неравенства получаем $|\zeta(1+it)|^{-1} \ll \log^2(|t|+2)$. Следствие доказано.

§ 7. Простейшие теоремы о нулях $L(s,\chi)$

1. Следствия из функционального уравнения для $L(s,\chi)$. Основные утверждения о нулях $L(s,\chi)$ подобны соответствующим утверждениям о нулях $\zeta(s)$. В силу тождества (4.2) достаточно рассмотреть $L(s,\chi)$ с примитивным характером χ. Если χ — четный характер, то по теореме 4.1

$$\sqrt{k}(\pi k^{-1})^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi) = (\pi k^{-1})^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\bar\chi).$$

Если $\mathrm{Re}\, s > 1$, то для $L(s,\chi)$ справедлив аналог формулы Эйлера:

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1};$$

поэтому

$$\frac{1}{|L(s,\chi)|} = \left|\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}\right| < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} <$$

$$< 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1},$$

т.е. $|L(s,\chi)| > (\sigma-1)/\sigma > 0$. Следовательно, если $\mathrm{Re}\, s \le 0$, то $\mathrm{Re}(1-s) \ge 1$, и нулями $L(s,\chi)$ будут числа $s = 0,-2,-4,\dots,-2n,\dots$ — полюсы функции $\Gamma(s/2)$. Если χ — нечетный характер, то

$$i\sqrt{k}(\pi k^{-1})^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)L(s,\chi) = g(\chi)(\pi k^{-1})^{-(2-s)/2}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)L(1-s,\bar{\chi}).$$

Следовательно, в этом случае при $\mathrm{Re}\, s < 0$ функция $L(s,\chi)$ имеет нули в точках $s = -1,-3,\dots,-2n+1,\dots$, т.е. в полюсах функции $\Gamma((s+1)/2)$. Выписанные нули $L(s,\chi)$ при $\mathrm{Re}\, s < 0$ называются *тривиальными*. Из (5.1) следует, что $L(s,\chi)$ имеет бесконечно много *нетривиальных* нулей, которые лежат в полосе $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$. Ниже будет доказано, что $L(1,\chi) \ne 0$, отсюда следует, что $\xi(0,\chi) \ne 0$, т.е. в формуле (5.1) число r равно нулю.

Из теоремы 4.1 следует, что если ρ — нуль $L(s,\chi)$, ρ — комплексное число, то нулем $L(s,\chi)$ будет также число $1-\bar{\rho}$, т.е. комплексные нули $L(s,\chi)$ расположены симметрично относительно прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Везде ниже будем считать, что нули ρ_n, $n = 1,2,\dots$, функции $L(s,\chi)$ нумеруются в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей.

Аналоги простейших теорем о нулях $\zeta(s)$ имеют место и для нулей $L(s,\chi)$. Однако то обстоятельство, что функция $L(s,\chi)$ зависит от s и χ, а χ, в свою очередь, зависит от модуля k, вносит дополнительные трудности в эти вопросы. Трудности неизмеримо возрастают, если пытаться получать результаты о нулях $L(s,\chi)$, равномерные по параметрам s и k.

Теорема 1. *Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1,2,\dots$, — все нетривиальные нули $L(s,\chi)$, χ — примитивный характер по модулю k, $T \ge 2$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \le c\log kT. \tag{1}$$

Доказательство. Перепишем еще раз формулу (5.1) и учтем сделанное выше замечание, что $r = 0$:

$$\xi(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}. \tag{2}$$

В этой формуле $A = A(\chi)$, $B = B(\chi)$, ρ_n — все комплексные нули $L(s,\chi)$, занумерованные в порядке возрастания абсолютной величины их мнимых частей. Возьмем логарифмическую производную от обеих частей (2) и воспользуемся функциональным уравнением $\xi(s,\chi)$,

полученным в теореме 4.1; будем иметь

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = B + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n - s}\right);$$

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = -\frac{\xi'(1-s,\bar{\chi})}{\xi(1-s,\bar{\chi})}.$$

При $s = 0$ находим

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = -\frac{\xi'(1,\bar{\chi})}{\xi(1,\bar{\chi})} = -B(\bar{\chi}) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar{\rho}_n} + \frac{1}{1-\bar{\rho}_n}\right).$$

Так как вместе с ρ_n нулем $L(s,\chi)$ будет также $1-\bar{\rho}_n$, а мнимые части ρ_n и $1-\bar{\rho}_n$ равны между собой, то

$$B(\chi) + B(\bar{\chi}) = 2\mathrm{Re}B(\chi) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar{\rho}_n} + \frac{1}{\rho_n}\right);$$

$$2\mathrm{Re}B(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar{\rho}_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = 0;$$

$$\mathrm{Re}B(\chi) + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_n} = 0. \tag{3}$$

Из определения $\xi(s,\chi)$ и (2) следует, что

$$(\pi k^{-1})^{-(s+\delta)/2}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь вещественную часть логарифмической производной последнего равенства; будем иметь

$$-\mathrm{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi} - \mathrm{Re}B(\chi) - $$
$$-\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) - \frac{\gamma}{2} - \mathrm{Re}\frac{1}{s+\delta} - \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n} - \frac{1}{2n}\right).$$

При $s = 2 + iT$ легко находим оценки

$$\left|\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \le$$
$$\le \sum_{n\le T}\frac{1}{n} + \sum_{n>T}\frac{|s|}{n^2} \le c_1\log T;$$

$$\left|\mathrm{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Пользуясь, кроме того, соотношением (3), получаем

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+iT-\rho_n}\le c_2\log kT;$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2+iT-\rho_n}=\operatorname{Re}\frac{1}{(2-\beta_n)+i(T-\gamma_n)}\ge\frac{0,25}{1+(T-\gamma_n)^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2}\le c_3\log kT,$$

что и требовалось доказать.

При условиях и обозначениях теоремы 1 справедливы следствия:

Следствие 1. *Число нулей ρ_n, для которых $T\le|\operatorname{Im}\rho_n|\le T+1$, не превосходит $c\log kT$.*

Следствие 2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{(T-\gamma_n)^2}\le c_1\log kT.$$

Следствие 3. *При $-1\le\sigma\le 2$, $s=\sigma+it$, $|t|\ge 2$, имеет место равенство*

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}+O(\log k|t|).$$

Для доказательства этого соотношения достаточно взять логарифмическую производную от обеих частей (4), вычесть из получившегося выражения его же, но при $s=2+iT$, и воспользоваться после этого следствием 2.

2. Теорема Ш.Валле-Пуссена о нулях $L(s,\chi)$. Чтобы доказать аналог теоремы Валле-Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$ для функции $L(s,\chi)$, будем пользоваться неравенством $3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi\ge 0$ (φ — вещественное число) и оценками сверху величин $-\operatorname{Re}L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ при $s=\sigma+it$, $\chi=\chi_1$ — примитивный характер, и $s=\sigma+2it$, $\chi=\chi_1^2$. Как об этом говорилось выше, особую трудность доставляет вопрос о границе вещественных нулей $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ.

Теорема 2. *Пусть χ — комплексный характер по модулю k, $s=\sigma+it$; тогда $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$\operatorname{Re}s=\sigma\ge 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)}. \tag{5}$$

Если же χ — вещественный характер по модулю k, $s=\sigma+it$, то $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re}s=\sigma\ge 1-\frac{c}{\log k(|t|+2)},\qquad |t|>0. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай примитивных характеров χ. Пусть χ — комплексный характер, $s=\sigma+it$, $\sigma>1$,

$t\ge 0$; тогда имеем

$$\chi(n)=\exp(i\omega(n)),$$

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\exp(-it\log n+i\omega(n));$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n-\omega(n));$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos 2(t\log n-\omega(n));$$

$$3\left(-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right)+4\left(-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right)+\left(-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right)\ge 0. \tag{7}$$

Оценим каждое слагаемое этого неравенства сверху, при этом будем пользоваться теми же самыми рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 1. Имеем

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_0(n)\Lambda(n)n^{-\sigma}\le-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}<\frac{1}{\sigma-1}+c_1;$$

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}=\frac{1}{2}\log\frac{k}{\pi}-$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{\gamma}{2}-\operatorname{Re}\frac{1}{s+\delta}-\operatorname{Re}B(\chi)-$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\delta+2n}-\frac{1}{2n}\right)\le c_2\log k(t+2)-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s-\rho_n}. \tag{8}$$

Если символом χ_1 обозначить примитивный характер, индуцированный χ^2, то $\chi_1\ne\chi_0$, и

$$\left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)}-\frac{L'(s,\chi_1)}{L(s,\chi_1)}\right|\le\sum_{p|k}\frac{p^{-\sigma}\log p}{1-p^{-\sigma}}\le\sum_{p|k}\log p\le\log k.$$

Следовательно, применяя (8) и помня, что $\operatorname{Re}(1/(s-\rho_n))\ge 0$, $n=1,2,\ldots$, найдем

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\le-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+2it,\chi_1)}{L(\sigma+2it,\chi_1)}+\log k\le c_3\log k(t+2).$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\frac{3}{\sigma-1}-4\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}+c\log k(t+2)\ge 0. \tag{9}$$

Пусть теперь $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$; не ограничивая общности, можно считать $\gamma\ge 0$. Возьмем в (9) $t=\gamma$, $\sigma=1+(2c\log k(t+2))^{-1}$, получим

$$\beta \le 1 - (14c\log k(\gamma+2))^{-1}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь утверждение теоремы для вещественного примитивного характера χ. Прежде всего имеем

$$\chi^2 = \chi_0, \qquad \left|\frac{L'(s,\chi^2)}{L(s,\chi^2)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \le \log k.$$

Из теорем 6.2 и 6.3 находим

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \mathrm{Re}\frac{1}{s-1} + c_2\log(t+2).$$

Подставляя эти оценки в (7) и предполагая, что $t=\gamma$, где $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$, получим

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2i\gamma} + c_4\log k(\gamma+2) \ge 0;$$

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \le \frac{3}{\sigma-1} + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2} + c_4\log k(\gamma+2). \qquad (10)$$

Рассмотрим отдельно два случая: случай «больших» γ и случай «малых» γ. Пусть $\gamma > æ/\log k$, где $0 < æ < 1/(5c_4)$, $æ$ — абсолютная постоянная. Полагая в (10) $\sigma = 1 + æ/\log k(\gamma+2)$, найдем

$$\beta \le 1 - c_5/\log k(\gamma+2), \qquad c_5 \ge 3/(5c_4 + 16æ^{-1}).$$

Пусть теперь $0 < \gamma < æ/\log k$. Пользуясь (8), будем иметь

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} < c_2\log k - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma-\rho_n} < c_2\log k - \frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2}, \qquad (11)$$

так как нули ρ функции $L(s,\chi)$ имеют вид $\rho = \beta \pm i\gamma$. Кроме того,

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} \ge -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} > -\frac{1}{\sigma-1} - c_6.$$

Отсюда и из (11) получаем

$$\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} < \frac{1}{\sigma-1} + c_7\log k.$$

Возьмем в этом неравенстве $\sigma = 1 - \lambda/\log k$, $æ = \lambda/10$; найдем

$$\beta \le 1 - \lambda/(10\log k), \qquad \lambda > 2/(3c_7).$$

Таким образом, теорема доказана при условии, что χ — примитивный характер по модулю k. Если же χ — производный характер по модулю k, то теорема следует из уже доказанного и формулы (4.2).

3. Теоремы Пейджа. Чтобы доказать теорему о границе вещественного нуля $L(s,\chi)$ с вещественным характером χ, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть χ — вещественный примитивный характер по модулю k. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$L(1,\chi) \ge \frac{c}{\sqrt{k}\log^2 k}.$$

Доказательство. Рассмотрим при $1/2 \le t < 1$ функцию

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \sum_{d|n}\chi(d).$$

Если $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_u^{\alpha_u}$ — каноническое разложение n на простые сомножители, то

$$a_n = \prod_{r=1}^{u}(1+\chi(p_r)+\ldots+\chi(p_r^{\alpha_r})).$$

Из этого представления a_n следует, что $a_n \ge 0$ и $a_{m^2} \ge 1$. Поэтому для $H(t)$ получаем такую оценку снизу:

$$H(t) > \sum_{m=1}^{\infty} t^{m^2} > \int_2^{\infty} t^{u^2}du = \int_0^{\infty} t^{u^2}du - 2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\log(1-(1-t))}} - 2 > \frac{1}{2\sqrt{1-t}} - 2.$$

Покажем теперь, что $H(t)$ близка к $L(1,\chi)/(1-t)$. Для этого рассмотрим разность

$$G(t) = H(t) - \frac{L(1,\chi)}{1-t}.$$

Оценим ее сверху по абсолютной величине. Прежде всего имеем

$$H(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n|m}\chi(n)\right)t^m = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\sum_{r=1}^{\infty}t^{rn} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)t^n}{1-t^n}.$$

Далее, вводя новое обозначение $S_n = \sum_{m=n}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m}$, находим

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)t^n}{1-t^n} - \frac{L(1,\chi)}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty}(S_n - S_{n-1})\frac{t^n}{1-t} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\cdot\frac{t^n}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n(1-t)}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}S_{n+1}t^n. \qquad (12)$$

Каждый из рядов S_n легко оценить. Для этого применим частное суммирование (теорема П.1.1) и оценку суммы характеров (теорема

П.9.10); получим при любом $M \ge m$

$$\left|\sum_{m<n\le M}\frac{\chi(n)}{n}\right| = \left|\int\limits_m^M \left(\sum_{m<n\le x}\chi(n)\right)x^{-2}dx + M^{-1}\sum_{m<n\le M}\chi(n)\right| \le$$
$$\le c\sqrt{k}(\log k)/m;$$

$$|S_n| \le c\sqrt{k}(\log k)/n.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}t^n\right| \le 2c\sqrt{k}\log k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1} = 2c\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}. \qquad (13)$$

Опять применяя в нужном месте оценку суммы характеров, находим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{t^n}{1-t^n}-\frac{t^n}{n(1-t)}\right)\right| =$$
$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\right)\left(\frac{t^n}{1-t^n}-\frac{t^n}{n(1-t)}-\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}-\right.$$
$$\left.-\frac{t^{n+1}}{1+t+\ldots+t^n}-\frac{t^n}{n(n+1)}-\frac{(1-t)t^n}{n+1}\right| <$$
$$< \frac{c_1\sqrt{k}\log k}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}-\frac{t^{n+1}}{1+t+\ldots+t^n}-\frac{t^n}{n(n+1)}\right)+$$
$$+c_1\sqrt{k}\log k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1} < 2c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}. \qquad (14)$$

Из (12)–(14) получаем оценку для $|G(t)|$:

$$|G(t)| < 3c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

Таким образом,

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t} = H(t) - G(t) > \frac{1}{2\sqrt{1-t}} - 2 - 3c_1\sqrt{k}\log k\log\frac{1}{1-t}.$$

Возьмем в этом равенстве $t = 1-(c_0 k\log^4 k)^{-1}$, $c_0 = (64(c_1+1))^2$, найдем

$$\frac{L(1,\chi)}{1-t} > \frac{1}{4}\sqrt{c_0 k}\log^2 k, \quad L(1,\chi) > \frac{1}{4\sqrt{c_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}\log^2 k},$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3. *Пусть χ — вещественный примитивный характер по модулю k. Тогда*

$$L(\sigma,\chi) \ne 0 \quad \text{при} \quad \sigma > 1 - \frac{c}{\sqrt{k}\log^4 k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вещественное число σ удовлетворяет неравенствам

$$1 - \frac{1}{8\log k} \le \sigma \le 1.$$

По теореме Лагранжа имеем

$$L(1,\chi) = L(\sigma,\chi) + (1-\sigma)L'(\sigma_1,\chi),$$

где $\sigma \le \sigma_1 \le 1$. Применяя частное суммирование (теорема П.1.1), находим

$$|L'(\sigma_1,\chi)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\log n}{n^{\sigma_1}}\right| \le \sum_{n\le k}\frac{\log n}{n^{\sigma_1}} +$$
$$+\int\limits_k^{\infty}\left|\sum_{k<n\le x}\chi(n)\right|\left(\frac{1}{x^{1+\sigma_1}}+\frac{\log x}{x^{1+\sigma_1}}\right)dx \le c_1\log^2 k.$$

Отсюда и из леммы 1 следует оценка снизу для $L(\sigma,\chi)$:

$$L(\sigma,\chi) \ge L(1,\chi) - (1-\sigma)c_1\log^2 k > \frac{c_0}{\sqrt{k}\log^2 k} - (1-\sigma)c_1\log^2 k > 0,$$

если $\sigma > 1 - c(\sqrt{k}\log^4 k)^{-1}$, $c < c_0/c_1$. Теорема доказана.

Заметим, что из теорем 2 и 3 следует, что при любом характере χ $L(1,\chi)\ne 0$, т.е. $\xi(0,\chi)\ne 0$ при любом характере χ.

Т е о р е м а 4. *Пусть χ_1 — вещественный примитивный характер по модулю k_1, χ_2 — вещественный примитивный характер по модулю k_2; $\chi_1 \ne \chi_2$ (хотя необязательно $k_1 \ne k_2$); $L(s,\chi_1)$ и $L(s,\chi_2)$ имеют вещественные нули соответственно β_1 и β_2. Тогда*

$$\min(\beta_1,\beta_2) < 1 - \frac{c}{\log k_1k_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характер $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n)$ является характером Дирихле по модулю k_1k_2. Поскольку $\chi_1 \ne \chi_2$, то $\chi \ne \chi_0$. При $\sigma > 1$ имеем

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)(1+\chi_1(n))(1+\chi_2(n))n^{-\sigma} =$$
$$= -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma,\chi_1)}{L(\sigma,\chi_1)} - \frac{L'(\sigma,\chi_2)}{L(\sigma,\chi_2)} - \frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)}. \qquad (15)$$

Из неравенства (11) находим, что

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} < c_1\log k_1k_2,$$

а также

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_1)}{L(\sigma,\chi_1)} < c_1\log k_1 - \frac{1}{\sigma-\beta_1}, \quad -\frac{L'(\sigma,\chi_2)}{L(\sigma,\chi_2)} < c_1\log k_2 - \frac{1}{\sigma-\beta_2}.$$

Подставим полученные оценки в (15), получим

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1} + \frac{1}{\sigma-\beta_2} < \frac{1}{\sigma-1} + c_2\log k_1k_2.$$

Если положить теперь $\sigma = 1 + (2c_2\log k_1k_2)^{-1}$, то

$$\min(\beta_1,\beta_2) \le 1 - (7c_2\log k_1k_2)^{-1}.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

Следствие 4. *Пусть χ пробегает все характеры Дирихле по модулю k, $L(s,\chi)$ — соответствующие L-функции. Тогда лишь одна из этих $L(s,\chi)$ может иметь вещественный нуль β с условием*

$$\beta \ge 1 - \frac{c}{\log k}.$$

§ 8. Асимптотическая формула для $N(T)$

Символом $N(T)$ обозначим количество нулей $\zeta(s)$ вида $s=\rho$, $0 \le \le \mathrm{Re}\rho \le 1$, $0 \le \mathrm{Im}\rho \le T$. В силу уже доказанного, это есть количество нулей также и функции $\xi(s)$,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

в прямоугольнике $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$, $0 \le \mathrm{Im}\, s \le T$. Для $N(T)$ при $T \to +\infty$ справедлива довольно точная асимптотическая формула.

Теорема 1. *При $T \ge 2$ имеет место следующее соотношение:*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), \tag{1}$$

где постоянная в знаке O — абсолютная.

Доказательство. Будем сначала считать, что на прямой $\mathrm{Im}\, s = T$ нет нулей $\zeta(s)$. Пусть Γ — контур прямоугольника на s-плоскости с вершинами $s = 2 \pm iT$, $s = -1 \pm iT$. Из теоремы П.2.11 и теоремы Коши следует, что

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}ds. \tag{2}$$

Из определения $\xi(s)$ и формулы Стирлинга (теорема П.3.5) имеем

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}; \tag{3}$$

$$\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} = \log\frac{s}{2} + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \tag{4}$$

Формулу (2) перепишем так:

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} - \frac{\xi'(-1+it)}{\xi(-1+it)}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{2}\left(\frac{\xi'(\sigma-iT)}{\xi(\sigma-iT)} - \frac{\xi'(\sigma+iT)}{\xi(\sigma+iT)}\right)d\sigma = I_1 + I_2, \tag{5}$$

где I_1 и I_2 — первый и второй интегралы последней формулы. Оценим сверху $|I_2|$. Из (4) и (5) имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{2}\left(\frac{\zeta'(\sigma-iT)}{\zeta(\sigma-iT)} - \frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right)d\sigma + O(\log T).$$

Далее, по формуле (6.3)

$$\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)} = \sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{\sigma+iT-\rho_n} + O(\log T), \tag{6}$$

где $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ — нули $\xi(s)$. Пусть теперь Γ_1 — контур прямоугольника с вершинами $s = -1+iT$, $s = 2+iT$, $s = 2+i(T-2)$, $s = -1+i(T-2)$. Тогда, ввиду того, что количество ρ_n с условием $T-2 \le \mathrm{Im}\rho_n \le T$ есть $O(\log T)$, получаем

$$\int_{\Gamma_1}\left(\sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}\right)ds = O(\log T).$$

Интеграл по контуру Γ_1 можно еще записать так:

$$\int_{\Gamma_1}\left(\sum_{|T-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n}\right)ds = \sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{\Gamma_1}\frac{ds}{s-\rho_n} =$$

$$= -\sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{-1}^{2}\frac{d\sigma}{\sigma+iT-\rho_n} + i\sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{T-2}^{T}\frac{dt}{2+it-\rho_n} -$$

$$-i\sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{T+2}^{T}\frac{dt}{-1+it-\rho_n} + \sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{-1}^{2}\frac{d\sigma}{\sigma+i(T-2)-\rho_n}.$$

Три последние суммы, как это легко видеть, равны $O(\log T)$; поэтому

$$\sum_{T-1\le\gamma_n\le T+1}\int_{-1}^{2}\frac{d\sigma}{\sigma+iT-\rho_n} = O(\log T).$$

Отсюда получаем, что

$$I_2 = O(\log T).$$

Вычислим теперь I_1, пользуясь (3) и тем, что

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}.$$

Имеем

$$\frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} - \frac{\xi'(-1+it)}{\xi(-1+it)} = \frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} + \frac{\xi'(2-it)}{\xi(2-it)} = \frac{4}{4+t^2} + \frac{1}{1+t^2} -$$

$$-\log\pi + \frac{1}{2}\log\frac{4+t^2}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}(n^{it}+n^{-it});$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{\xi'(2+it)}{\xi(2+it)} - \frac{\xi'(-1+it)}{\xi(-1+it)}\right)dt = -\frac{T}{\pi}\log\pi -$$

$$-\frac{1}{\pi}T\log 2 + \frac{T}{\pi}\log T - \frac{T}{\pi} + O(\log T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log T).$$

Из оценки I_2 и последней формулы следует утверждение теоремы. Если же на прямой $\operatorname{Im} s = T$ лежат нули $\zeta(s)$, то утверждение теоремы будет следовать из доказанного и того факта, что число нулей $\zeta(s)$ вида $s = \rho$, $T \le \operatorname{Im}\rho \le T+1$, есть величина порядка $O(\log T)$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Дзета-функция $\zeta(s)$, как функция комплексного переменного, рассмотрена Б.Риманом в 1859 г. в работе [82]. Впервые $\zeta(s)$ при вещественных s рассматривалась Л.Эйлером [90]. В частности, он доказал соотношение, эквивалентное функциональному уравнению $\zeta(s)$.

2. Функции $L(s,\chi)$, обобщающие $\zeta(s)$, введены и исследованы Л.Дирихле [29] в 1837 г.

3. Функциональное уравнение $L(s,\chi)$ получено А.Гурвицем [130].

4. Разложение логарифма $\zeta(s)$ в виде суммы по нулям, эквивалентное формуле (6.1), содержится в мемуаре [82].

5. Теоремы 2.4 и 7.2 о границе нулей $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ доказаны Ш.Валле-Пуссеном [173] в 1896 г.

6. Исследования, посвященные положению вещественного нуля $L(s,\chi)$ с вещественным характером, выполнены А.Пейджем [157], К.Зигелем [166]. В частности, К.Зигелем доказана

Т е о р е м а. *Для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что если χ — вещественный характер по модулю k и β — вещественный нуль $L(s,\chi)$, то*

$$\beta \le 1 - c(\varepsilon)k^{-\varepsilon}.$$

Проблема эффективизации этой теоремы, именно оценки снизу постоянной $c(\varepsilon)$ по данному ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, остается открытой.

7. Имеет место

Т е о р е м а. *Пусть $f(s) = G(s)/P(s)$, где $G(s)$ — целая функция конечного порядка, $P(s)$ — многочлен, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ при $\operatorname{Re} s > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-(1+\delta)} < \infty$ при всяком $\delta > 0$. Если*

$$f(s)\frac{\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}}{\Gamma((1-s)/2)\pi^{-(1-s)/2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{1-s}},$$

причем $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^{-(1+\delta)} < \infty$ при всяком $\delta > 0$, то $f(s) = c\zeta(s)$, где c — некоторая абсолютная постоянная. Доказательство см., например, в [121, 122, 164].

Поэтому, в определенном смысле, ζ-функция Римана однозначно задается своим функциональным уравнением.

8. Асимптотическая формула для $N(T)$ была доказана Б.Риманом [82].

ГЛАВА II

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА КАК ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 1. Ряды Дирихле, связанные с ζ-функцией Римана

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел, $n \in \mathbb{N}$. Тогда *производящей функцией последовательности* $\{a_n\}$ называется формальный ряд Дирихле

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{1}$$

В этой книге будут рассматриваться только такие последовательности $\{a_n\}$, для которых существует число $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ такое, что при $\sigma > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty. \tag{2}$$

Легко видеть, что если выполнено условие (2) и $f(s) \equiv 0$ при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, то $a_n \equiv 0$. Действительно, пусть n_0 — наименьшее натуральное число, для которого $a_{n_0} \neq 0$. Тогда

$$a_{n_0} = \lim_{\sigma \to \infty} (f(\sigma) n_0^\sigma)$$

и, следовательно, $f(s) \not\equiv 0$ при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Отсюда следует, что если два ряда Дирихле совпадают как функции в области их абсолютной сходимости, то они имеют одни и те же коэффициенты Дирихле.

1. Функция $\tau(n)$. Пусть $\tau(n)$ обозначает число натуральных делителей натурального числа n. Пусть $f(s)$ — формальный ряд Дирихле, определяемый равенством

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}. \tag{3}$$

Заметим, что при $\operatorname{Re} s > 1$ ряд $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ абсолютно сходится,

поэтому при $\operatorname{Re} s > 1$ абсолютно сходится двойной ряд

$$\zeta^2(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^s m^s} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^s}.$$

Группируя члены двойного ряда с одинаковым произведением mn, получим

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{4}$$

Тем самым доказано, что формальный ряд (3) для любого $\delta > 0$ равномерно сходится в области $\operatorname{Re} s > 1 + \delta$ и функция, им задаваемая, совпадает с $\zeta^2(s)$.

Из формулы (4) можно получить следующее арифметическое следствие. В силу теоремы I.1.1 при $\operatorname{Re} s > 1$ выполняется

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Поэтому

$$\zeta^2(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \cdots\right).$$

Раскрывая скобки в последнем произведении, находим вследствие теоремы о разложении на простые множители, что

$$\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_m + 1). \tag{5}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1,$$

где $\tau_k(n)$ есть число решений в натуральных числах уравнения $x_1 x_2 \ldots \ldots x_k = n$. Воспользовавшись опять же теоремой I.1.1, получим формулу

$$\tau_k(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}) = \prod_{l=1}^{m} C_{k+\alpha_l-1}^{k-1},$$

где C_a^b — число сочетаний из a элементов по b.

2. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Докажем теперь, что при $\operatorname{Re} s > 2$ выполняется равенство

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 2, \tag{6}$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т.е. число чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Действительно,

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}} = \prod_p (1-p^{-s})\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\cdots\right) =$$

$$= \prod_p \left\{1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{p}{p^s}+\frac{p^2}{p^{2s}}+\cdots\right)\right\}.$$

Ввиду равенства

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}\prod_{l=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

отсюда следует справедливость равенства (6).

§ 2. Связь дзета-функции Римана с функцией Мёбиуса

1. Формула обращения Мёбиуса. В силу теоремы I.1.1 в области $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right). \tag{1}$$

Раскрывая скобки в равенстве (1), получаем соотношение

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1,$$

где $\mu(n)$ определена следующим образом: $\mu(1) = 1$; $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа, и $\mu(n) = (-1)^k$, если n есть произведение k различных простых чисел; $\mu(n)$ называется *функцией Мёбиуса*.

Докажем здесь, используя дзета-функцию Римана, так называемую формулу обращения Мёбиуса.

Т е о р е м а 1. а) *Пусть функции натурального аргумента $f(n)$ и $F(n)$ связаны соотношением*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d). \tag{2}$$

Тогда

$$f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(d). \tag{3}$$

б) *Если же $f(n)$ и $F(n)$ связаны соотношением* (3), *то выполняется соотношение* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\Phi_N(s) = \sum_{n\le N}\frac{f(n)}{n^s}.$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ в силу соотношения (2) имеем

$$\zeta(s)\Phi_N(s) = \sum_{n\le N}\frac{F(n)}{n^s} + \sum_{n>N}\frac{a_n}{n^s}. \tag{4}$$

Умножая равенство (4) справа и слева на $\zeta^{-1}(s)$, приравнивая затем коэффициенты Дирихле при $n \le N$, получим формулу (3). Аналогично, если исходить из равенства (3), то

$$\zeta^{-1}(s)\sum_{d\le N}\frac{F(d)}{d^s} = \sum_{n\le N}\frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n>N}\frac{b_n}{n^s}.$$

Умножая последнее равенство справа и слева на $\zeta(s)$ и приравнивая соответствующие коэффициенты Дирихле, получим соотношение (2).

З а м е ч а н и е. Для доказательства теоремы 1 можно было бы рассматривать формальные бесконечные ряды Дирихле. В этом случае пришлось бы либо вводить ограничения на рост $f(n)$ и $F(n)$, либо нужны были бы дополнительные аргументы, оправдывающие операции над формальными рядами Дирихле.

Т е о р е м а 2. *Имеет место следующее равенство:*

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n = 1, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(n) = 1$, если $n = 1$, и $f(n) = 0$, если $n \ne 1$. Тогда в обозначениях теоремы 1

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \equiv 1.$$

Стало быть, в силу теоремы 1

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\mu(d) = f(n).$$

Именно это и утверждается теоремой 2.

2. Некоторые другие формулы. Приведем еще несколько наиболее употребительных формул, содержащих $\zeta(s)(\sigma > 1)$:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}, \tag{5}$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s}, \tag{6}$$

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n^2)}{n^s}, \tag{7}$$

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{\tau(n)\}^2}{n^s}, \tag{8}$$

где $\nu(n)$ — число различных простых делителей n.

Доказательства всех этих формул основаны на применении следующей общей формулы: если $f(n)$ — мультипликативная функция, т.е.

$$f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_k^{\alpha_k}),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_p\left\{1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right\}.$$

Для доказательства формулы (5) заметим, что

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

Формула (6) следует из соотношения

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right) =$$
$$= \prod_p\left[\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\right] = \prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{2}{p^{2s}}+\cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\nu(n)}}{n^s}.$$

Далее, с одной стороны,

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-2}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right) =$$
$$= \prod_p\left[\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{2s}}+\cdots\right)\right] = \prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\cdots+\frac{2n+1}{p^{ns}}+\cdots\right).$$

С другой стороны, вследствие мультипликативности функции $\tau(n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n^2)}{n^s} = \prod_p\left(1+\frac{\tau(p^2)}{p^s}+\frac{\tau(p^4)}{p^{2s}}+\cdots\right) = \prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\cdots\right).$$

Тем самым, равенство (6) доказано. Аналогично,

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-4}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \prod_p\left[\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-3}\right] =$$
$$= \prod_p\left[\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}p^{-ns}\right] = \prod_p\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2p^{-ns}\right).$$

Поскольку в силу формулы (1.5)

$$\tau^2(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}) = (\alpha_1+1)^2(\alpha_2+1)^2\dots(\alpha_m+1)^2,$$

то равенство (8) доказано.

§ 3. Связь дзета-функции Римана с распределением простых чисел

Пусть $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих x. В силу теоремы I.1.1 при $\operatorname{Re} s > 1$ выполняется равенство

$$\zeta(s) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

поэтому, используя частное суммирование, получим

$$\ln\zeta(s) = -\sum_p\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = -\int_1^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^s}\right)d\pi(x) =$$
$$= -\ln\left(1-\frac{1}{x^s}\right)\cdot\pi(x)\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\pi(x)\,d\ln\left(1-\frac{1}{x^s}\right) = s\int_1^{\infty}\frac{\pi(x)\,dx}{x(x^s-1)}. \qquad (1)$$

Тождество (1) указывает на один из возможных путей исследования функции $\pi(x)$. Именно, можно исследовать аналитические свойства функции $\ln\zeta(s)$ и найти соответствующее обратное интегральное преобразование.

Оказывается, что более удобной в аналитическом смысле, чем функция $\pi(x)$, является функция Чебышева $\psi(x)$. Она определяется следующим образом.

Пусть

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k, \text{ где } p \text{ простое}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

тогда

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \qquad (2)$$

Функция $\Lambda(n)$ называется *функцией Мангольдта*, а сумма значений $\Lambda(n)$ по всем $n \le x$ носит название *функции Чебышева*, т.е.

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Что касается проверки тождества (2), то заметим, что

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (-\ln\zeta(s))' = \left(-\ln\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right)' =$$

$$= \left(\sum_p \ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)' = \sum_p \left(\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)' =$$

$$= \sum_p \ln p(p^{-s}+p^{-2s}+\dots) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Легко видеть, что в силу равномерной сходимости всех встречающихся здесь рядов в области $\operatorname{Re} s > 1+\delta$, где δ — произвольное положительное число, все операции над рядами законны.

Сейчас получим формулу, аналогичную формуле (1), содержащую функцию $\psi(x)$. Имеем

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \int_1^{\infty} x^{-s}\,d\psi(x).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = x^{-s}\psi(x)\Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty}\psi(x)\,d(x^{-s}).$$

Поскольку из определения $\psi(x)$ следует, что $\psi(1) = 0$, а $\psi(x) = O(x\ln x)$ $(x \to \infty)$, то

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} x^{-s-1}\psi(x)\,dx. \qquad (3)$$

Формулы (1) и (3) указывают на глубокие связи между распределением простых чисел в натуральном ряде и свойствами дзета-функции Римана.

При исследовании распределения простых чисел в арифметических прогрессиях аналогичную роль начинают играть L-функции Дирихле.

Пусть q — натуральное число и пусть $(a,q) = 1$. *Обобщенными функциями Чебышева* называются как функции, определяемые равенством

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \pmod q}} \Lambda(n), \qquad (4)$$

так и функции

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\chi(n),$$

где χ — некоторый характер Дирихле.

Из определения I.1.2 $L(s,\chi)$ имеем

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = (-\ln L(s,\chi))' = \sum_p\left(\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right)' =$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)\ln p}{p^s}\cdot\frac{1}{1-\chi(p)/p^s} = \sum_p \ln p\left(\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\dots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Поэтому

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \int_1^{\infty} x^{-s}\,d\psi(x,\chi) = s\int_1^{\infty}x^{-s-1}\psi(x,\chi)\,dx. \qquad (5)$$

Формула (5) является естественной аналогией формулы (3).

§ 4. Явные формулы

1. Выражение для $\psi(x)$ через нули $\zeta(s)$. В §3 была получена формула (3), выражающая логарифмическую производную дзета-функции Римана через ψ-функцию Чебышева. В этом параграфе займемся в определенном смысле обратной задачей. Именно, найдем выражение для ψ-функции Чебышева через нули дзета-функции Римана.

Т е о р е м а 1. *Пусть $2 \le T \le x$. Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\le T}\frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нули дзета-функции в критической полосе.

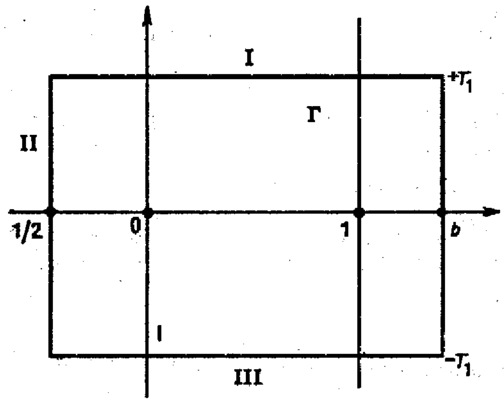

Рис.1

Доказательство. По теореме I.6.2 при $\mathrm{Re}\, s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - B_0, \qquad (1)$$

где ρ_n — все нетривиальные нули $\zeta(s)$. По теореме II.5.1 при $b = 1 + \log^{-1} x$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right), \qquad (2)$$

где $T \le T_1 \le T+1$ и T_1 взято так, что расстояние от прямой $\mathrm{Im}\, s = T_1$ до ближайшего нуля $\zeta(s)$ есть $\gg \log^{-1} T$ (это всегда можно сделать, ибо (следствие I.6.1) число нулей $\zeta(s)$, у которых $T \le \mathrm{Im}\,\rho \le T+1$, есть $O(\log T)$).

Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds,$$

где Γ — прямоугольник (рис.1). По теореме Коши из формулы (1) следует

$$J = x - \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le T_1} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \qquad (3)$$

Теперь оценим интегралы по сторонам Г I, II, III (рис.1). Интегралы по I и III равны по абсолютной величине и оцениваются величиной

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-0,5+iT_1}^{0,5+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds\right| < \frac{x}{T_1} \int_{-0,5}^{b} \left|\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)}\right| d\sigma. \qquad (4)$$

Интеграл по II не превосходит

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-0,5-iT_1}^{-0,5+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds\right| < \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-T_1}^{T_1} \left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right| \frac{dt}{\log^{-1} x + |t|}. \qquad (5)$$

Оценим величину $\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|$, где $-0,5 \le \sigma \le b$ и $t = T_1$, или $\sigma = -0,5$ и $2 \le |t| \le T_1$.

Опять же (следствие I.6.3)

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{|t-\gamma_n|\le 1} \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(t-\gamma_n)} + O(\log(|t|+2)).$$

Последняя сумма имеет порядок $O(\log^2 x)$, ибо если $|t| \le T_1$, то $\sigma = -0,5$, и нулей $\zeta(s)$ таких, что $|t - \gamma_n| \le 1$, не больше $O(\log(|t|+2))$; если же $t = T_1$, $-0,5 \le \sigma \le b$, то в силу выбора T_1

$$|T_1 - \gamma_n| \gg \log^{-1} T.$$

Из полученной оценки, (4), (5) и (3) следует утверждение теоремы.

2. Выражение $\psi(x,\chi)$ через нули $L(s,\chi)$. Для обобщенной ψ-функции Чебышева существует подобная формула, выражающая ее через нули соответствующих L-функций Дирихле.

Теорема 2. *Пусть χ — примитивный характер по модулю k, $2 \le k \le T \le x$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) - \psi(k,\chi) = -\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le T} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right),$$

где ρ — нетривиальные нули $L(s,\chi)$.

Доказательство. В силу следствия I.7.1 найдется T_1, $T \le T_1 \le T+1$, такое, что $|T_1 - \mathrm{Im}\,\rho_n| > 1/(c \log kT)$, где ρ_n — нули $L(s,\chi)$. Рассмотрим прямоугольник Г с вершинами в точках $b - iT_1$, $b + iT_1$, $-0,5 + iT_1$, $-0,5 - iT_1$, где $b = 1 + \log^{-1} x$. Интегрируя

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{d}{ds}(\ln L(s,\chi))$$

по контуру Г, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\} \frac{x^s - k^s}{s} ds = -\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho| \le T_1} \frac{x^\rho - k^\rho}{\rho} + \theta \log x,$$

где $|\theta| \le 1$. По теореме II.5.1 ($\alpha = 1$, $x = N + 0,5$)

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Теперь оценим интегралы по верхней, нижней и левой сторонам прямоугольника Г. Интегралы по верхней и нижней сторонам Г оцениваются одинаково. Пользуясь следствием I.7.3 и выбором T_1, получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-0,5+iT_1}^{b+iT_1} \left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\} \frac{x^s}{s} ds\right| \le \frac{e}{2\pi} \int\limits_{-0,5}^{b} \left|\frac{L'(\sigma + iT_1, \chi)}{L(\sigma + iT_1, \chi)}\right| \frac{x}{T_1} d\sigma =$$

$$= \frac{e}{2\pi} \int\limits_{-0,5}^{b} \left| \sum_{|T_1 - \gamma_n| \le 1} \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(T_1 - \gamma_n)} + O(\log kT)\right| \frac{x}{T_1} d\sigma =$$

$$= O\left(\frac{x \log^2 kT}{T}\right) = O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Интеграл по левой стороне Г оценивается так:

$$\left|\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T_1}^{T_1} \left\{-\frac{L'(-0,5+it,\chi)}{L(-0,5+it,\chi)}\right\} \frac{x^{-0,5+it}}{-0,5+it} dt\right| \le$$

$$\le x^{-0,5} \int\limits_{-T_1}^{T_1} \left|\frac{L'(-0,5+it,\chi)}{L(-0,5+it,\chi)}\right| \frac{dt}{0,5+|t|} = O\left(\frac{\log^2 kT}{\sqrt{x}}\right),$$

так как из следствия I.7.3

$$\left|\frac{L'(-0,5+it,\chi)}{L(-0,5+it,\chi)}\right| = O\left(\log k\left(|t|+2\right)\right).$$

Объединяя оценки, получаем утверждение теоремы.

3. Формула Сельберга. Докажем здесь еще одно тождество, связывающее нули дзета-функции Римана с функцией Мангольдта.

Теорема 3. *Пусть $\Lambda_x(n) = \Lambda(n)$, если $1 \le n \le x$, и $\Lambda_x(n) = (\log^{-1} x)\Lambda(n)\log(x^2/n)$ при $x \le n \le x^2$. Тогда*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n<x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s} + \frac{x^{2(1-s)} - x^{1-s}}{(1-s)^2 \log x} +$$

$$+ \frac{1}{\log x} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{-2q-s} - x^{-2(2q+s)}}{(2q+s)^2} + \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s} - x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \max(2, 1+\sigma)$. Положим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{x^{z-s} - x^{2(z-s)}}{(z-s)^2} \cdot \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz.$$

Тогда

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{x^{z-s} - x^{2(z-s)}}{(z-s)^2 n^z} dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{x^w - x^{2w}}{w^2 n^w} dw.$$

В силу леммы II.5.2 отсюда получаем

$$I = -\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \left(\log\frac{x}{n} - \log\frac{x^2}{n}\right) -$$

$$- \sum_{x<n\le x^2} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \left(-\log\frac{x^2}{n}\right) = \log x \sum_{n \le x^2} \frac{\Lambda_x(n)}{n^s}.$$

Перенесем теперь контур интегрирования с прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$ влево. Вычет при $z = s$ равен $-(\zeta'(s)/\zeta(s))\log x$, при $z = 2q$ равен

$$\frac{x^{-2q-s} - x^{2(-2q-s)}}{(-2q-s)^2},$$

при $z = 1$ и $z = \rho$ — соответственно

$$\frac{x^{1-s} - x^{2(1-s)}}{(1-s)^2} \quad \text{и} \quad \frac{x^{\rho-s} - x^{2(\rho-s)}}{(\rho-s)^2}.$$

Тем самым теорема доказана.

§ 5. Асимптотические законы распределения простых чисел

Асимптотические формулы для количества простых чисел в отрезках натурального ряда или в отрезках арифметических прогрессий носят название *асимптотических законов распределения простых чисел*. Примером такой формулы является $\pi(x) \sim x/\log x$.

Докажем здесь более точное утверждение.

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что при $x \ge 1$ выполняется*

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = x + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right), \qquad (1)$$

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \int\limits_{2}^{x} \frac{du}{\log u} + O\left(x \exp\left(-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}\right)\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $x \geq 10$. Воспользуемся теоремой 4.1. Положим в ней $T = \exp\left(\sqrt{\log x}\right)$. Тогда имеем

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{|\mathrm{Im}\,\rho|\leq T\\ \mathrm{Re}\,\rho>0}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}\right)\right). \tag{3}$$

Далее, в силу теоремы I.6.4 при $|\mathrm{Im}\,\rho| \leq T$ выполняется

$$\mathrm{Re}\,\rho \geq 1 - \frac{c_0}{\log(T+2)} \geq 1 - \frac{c_1}{\sqrt{\log x}}.$$

Следовательно,

$$x^\rho \ll |x^\rho| \ll x\exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right).$$

Используя следствие I.6.1 о том, что для всякого A

$$\sum_{\substack{\rho\\ |\mathrm{Im}\,\rho - A|\leq 1\\ \mathrm{Re}\,\rho>0}} 1 \ll \log(|A|+2),$$

получим из формулы (3) равенство (1). Перейдем к доказательству равенства (2). Рассмотрим

$$S = \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \sum_{p\leq x} 1 + \sum_{\substack{n=p^k\\ k\geq 2\\ n\leq x}} \frac{\Lambda(n)}{\log n}. \tag{4}$$

Вторая сумма в правой части равенства (4) оценивается как $\ll \sqrt{x}\log x$, ибо возможных p не более $\ll \sqrt{x}$ и k не может превосходить $\log_2 x$. Следовательно,

$$S = \pi(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right). \tag{5}$$

Далее, используя интеграл Стильтьеса, получим

$$S = \int_{2-0}^{x+0} \frac{d\psi(u)}{\log u}.$$

Интегрируя теперь по частям, выводим

$$S = \int_2^x \psi(u)\frac{du}{u\log^2 u} + \frac{\psi(x+0)}{\log x} = \int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} + R,$$

где в силу доказанного равенства (1)

$$R \ll \int_2^x \exp\left(-c\sqrt{\log u}\right)\frac{du}{\log^2 u} + x\exp\left(-c\sqrt{\log x}\right) \ll$$

$$\ll x\exp\left(-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}\right).$$

Поскольку

$$\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} = \int_2^x u\,d\left(-\frac{1}{\log u}\right) + \frac{x}{\log x} =$$

$$= -\frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{x}{\log x} = \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{2}{\log 2},$$

то из равенства (4) и последних соотношений получаем равенство (2) теоремы 1. Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях.

Теорема 2. *При $(k,l)=1$, $x>1$ справедливы равенства*

$$\psi(x;k,l) = \frac{x}{\varphi(k)} - E_1\frac{x^{\beta_1}\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(k)} + O\left(x\exp\left(-c_0\sqrt{\log x}\right)\right), \tag{6}$$

$$\pi(x;,k,l) = \frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)} - E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du + O\left(x\exp\left(-c_0'\sqrt{\log x}\right)\right), \tag{7}$$

где $E_1 = 1$, если существует вещественный характер χ_1 по модулю k такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет вещественный нуль β_1,

$$\beta_1 > 1 - \frac{1}{\log 2k},$$

и $E_1 = 0$ в противном случае.

Доказательство. Если $k > \exp(\sqrt{\log x})$, то, очевидно, формулы (6) и (7) справедливы. Пусть $k \leq \exp(\sqrt{\log x})$. В силу следствия I.7.4 имеем

$$\psi(x;k,l) =$$

$$= \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - \frac{E_1}{\varphi(k)}\chi_1(l)\psi(x,\chi_1) + \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\neq\chi_0,\chi_1}\psi(x,\chi)\overline{\chi}(l) + O(\log^2 x).$$

Если $\chi \neq \chi_0, \chi_1$ и χ^* — примитивный характер по модулю $k_1|k$, соответствующий χ, то, полагая $T = \exp(\sqrt{\log x})$, имеем в силу теоремы 4.2

$$\psi(x,\chi^*) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\chi^*(n) = -\sum_{\substack{|\mathrm{Im}\,\rho|\leq T\\ \mathrm{Re}\,\rho>0}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}\right)\right).$$

В силу теоремы I.7.2

$$\mathrm{Re}\,\rho \leq 1 - \frac{c_1}{\log kT} \leq 1 - \frac{c}{\sqrt{\log x}};$$

поэтому в силу следствия I.7.1

$$|\psi(x,\chi^*)| \leq x\exp\left(-c_0\sqrt{\log x}\right).$$

Следовательно,

$$\psi(x,\chi) = \psi(x,\chi^*) + O(\log^2 x) \ll x \exp\left(-c_0\sqrt{\log x}\right).$$

Рассуждая аналогично, получим для $\chi = \chi_1$

$$\psi(x,\chi_1) = -E_1\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{|\operatorname{Im}\rho|\le T\\ \rho\ne\beta_1,\ 0<\operatorname{Re}\rho<1-\frac{c}{\sqrt{\log x}}}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\psi(x;k,l) = \frac{\psi(x)}{\varphi(k)} - E_1\frac{\chi_1(l)}{\beta_1}\cdot\frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + O\left(x\exp\left(-c_0\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Используя теперь равенство (1), получаем равенство (6).

Далее, имеем

$$\pi(x;k,l) = \int\limits_{2-0}^{x+0}\frac{1}{\log u}d\psi(u;k,l) + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{2-0}^{x+0}\frac{1}{\log u}d\psi(u;k,l) = \int\limits_2^x\frac{\psi(u;k,l)}{u\log^2 u}du + \frac{\psi(x+0;k,l)}{\log x} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)}\int\limits_2^x\frac{du}{\log^2 u} - E_1\frac{\chi_1(l)}{\beta_1\varphi(k)}\int\limits_2^x\frac{u^{\beta_1-1}du}{\log^2 u} +$$

$$+\frac{x}{\varphi(k)\log x} - E_1\frac{\chi_1(l)x^{\beta_1}}{\beta_1\varphi(k)\log x} + O\left(x\exp\left(-c_0'\sqrt{\log x}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{Li}x - E_1\frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\int\limits_2^x\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}du + O\left(x\exp\left(-c_0'\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Тем самым равенство (7) и, следовательно, теорема 2 доказаны.

§ 6. Дзета-функция Римана и тождества типа малого решета

С помощью производящих рядов Дирихле докажем несколько полезных теоретико-числовых тождеств.

Т е о р е м а 1. *Пусть $1 \le U < N$, где N — натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество*

$$\sum_{U<n\le N}\Lambda(n)f(n) = \sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{l<Nd^{-1}}(\log l)f(ld) -$$

$$-\sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{n\le U}\Lambda(n)\sum_{r\le N(dn)^{-1}}f(ndr) -$$

$$-\sum_{U<m\le NU^{-1}}\left(\sum_{\substack{d|m\\ d\le U}}\mu(d)\right)\sum_{U<n\le Nm^{-1}}\Lambda(n)f(nm). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующее обозначение. Запись

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^s} \overset{N}{\equiv} \sum_{n=1}^\infty\frac{b_n}{n^s}$$

обозначает, что $a_n = b_n$ при всех $n \le N$. Заметим, что функция $f(n)$ входит в правую и левую части (1) линейным образом. Множество всех возможных функций $f(n)$, определенных на натуральных числах $n \le N$, образуют линейное комплексное пространство размерности N, поэтому тождество (1) достаточно доказать для любой системы, состоящей из N линейно независимых над полем $\mathbb{C}$ функций натурального аргумента n. В частности, тождество (1) достаточно проверить для $f(n) = n^{-s}$. Далее, имеем при $\operatorname{Re}s > 1$

$$0 = \zeta'(s) - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s) = \left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\zeta'(s) - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s)\right) =$$

$$= \left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\zeta'(s) - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s)\left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right). \quad (2)$$

Пусть

$$\zeta(s)\left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^\infty\frac{b_n}{n^s}.$$

Заметим, что

$$b_1 = 1; \qquad b_n = \sum_{d|n,\,d\le U}\mu(d)$$

и, следовательно, в силу теоремы 2.2 $b_n = 0$ при $1 < n \le U$.

Теперь из соотношения (2) заключаем, что

$$0 = \left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(-\sum_{n=1}^\infty\frac{\log n}{n^s}\right) + \left(\sum_{n\le U}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right) =$$

$$= \left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right)\left(\sum_{l=1}^\infty\frac{\log l}{l^s}\right) + \left(\sum_{n\le U}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{r=1}^\infty\frac{1}{r^s}\right)\left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right) +$$

$$+\left(\sum_{n>U}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(1 + \sum_{m>U}\frac{b_m}{m^s}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{U<n\le N}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\overset{N}{\equiv}\sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{l\le Nd^{-1}}\frac{\log l}{(dl)^s}-$$

$$-\sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{n\le U}\Lambda(n)\sum_{r\le N(nd)^{-1}}(rnd)^{-s}-$$

$$-\sum_{U<m\le NU^{-1}}b_m\sum_{U<n\le Nm^{-1}}\Lambda(n)(nm)^{-s}.$$

Тем самым теорема доказана.

Способ доказательства теоремы 1, основанный на систематическом использовании производящих рядов Дирихле, можно применять к получению и других теоретико-числовых соотношений.

Т е о р е м а 2. *Пусть $1\le U<N$, где N — натуральное число. Тогда для любой комплекснозначной функции $f(x)$ справедливо тождество*

$$\sum_{U<m\le N}\mu(m)f(m)=\sum_{d\le U}\mu(d)f(d)-$$

$$-\sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{m\le U}\mu(m)\sum_{r\le N(dm)^{-1}}f(dmr)-$$

$$-\sum_{U<n\le NU^{-1}}b_n\sum_{U<m\le Nn^{-1}}\mu(m)f(nm),$$

где $b_n=\sum_{d|n,d\le U}\mu(d)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $0=1-\zeta^{-1}(s)\zeta(s)$. Следовательно,

$$0=\left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right)\left(1-\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s)\right)=\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}-\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\zeta(s)\left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right).$$

Поскольку

$$\zeta(s)\left(\sum_{n\le U}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)=1+\sum_{n>N}\frac{b_n}{n},$$

где $b_n=\sum_{d\le U,d|n}\mu(d)$, то

$$0=\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}-\left(\sum_{m\le U}\frac{\mu(m)}{m^s}+\sum_{m>U}\frac{\mu(m)}{m^s}\right)\zeta(s)\left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right)=$$

$$=\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}-\left(\sum_{m\le U}\frac{\mu(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s}\right)-$$

$$-\sum_{m>U}\frac{\mu(m)}{m^s}-\left(\sum_{m>U}\frac{\mu(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n>U}\frac{b_n}{n^s}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{U<m\le N}\frac{\mu(m)}{m^s}\overset{N}{\equiv}\sum_{d\le U}\frac{\mu(d)}{d^s}-\sum_{d\le U}\mu(d)\sum_{m\le U}\mu(m)\sum_{r\le N(dm)^{-1}}(dmr)^{-s}-$$

$$-\sum_{U<n<NU^{-1}}b_n\sum_{U<m\le Nn^{-1}}\mu(m)(nm)^{-s}.$$

Поскольку из функций n^{-s} при различных s, $\mathrm{Re}\,s>1$, можно выбрать базис в пространстве комплекснозначных функций, определенных на $1,2,\ldots,N$, то теорема 2 доказана.

В заключение, хотя это находится несколько в стороне от основных целей настоящей книги, упомянем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\zeta_K(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ — дзета-функция Дедекинда поля K — конечного расширения поля рациональных чисел Q. Определим функции $\mu_K(n)$ и $\Lambda_K(n)$ равенствами*

$$\zeta_K^{-1}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_K(n)}{n^s},\qquad -\frac{\zeta_K'(s)}{\zeta_K(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_K(n)}{n^s}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\sum_{U<n\le N}\Lambda_K(n)f(n)=\sum_{d\le U}\mu_K(d)\sum_{l<Nd^{-1}}a_l(\log l)f(ld)-$$

$$-\sum_{d\le U}\mu_K(d)\sum_{n\le U}\Lambda_K(n)\sum_{r\le N(dn)^{-1}}a_rf(ndr)-$$

$$-\sum_{U<m\le NU^{-1}}\left(\sum_{\substack{d|m\\ d\le U}}a_{\frac{m}{d}}\mu_K(d)\right)\sum_{U<n\le Nm^{-1}}\Lambda_K(n)f(nm),$$

где $f(x)$ — любая комплекснозначная функция натурального аргумента.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Функцию $\zeta(s)$, как производящую функцию теории чисел, стал рассматривать Л.Эйлер [90].

2. Пользуясь тождеством, связывающим $\zeta(s)$ с простыми числами, Л.Эйлер дал аналитическое доказательство теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел и доказал расходимость ряда $\sum p^{-1}$. Развитие этой идеи Эйлера нашло продолжение в работах Л.Дирихле и Б.Римана.

3. Функция $\psi(x)$ введена П.Л.Чебышевым; им получены первые (после Эйлера) существенные результаты о распределении простых чисел, в частности, оценка $\psi(x) \asymp x$.

4. Все утверждения, которые названы "явные формулы", по существу, восходят к Б.Риману.

5. Гипотеза $\pi(x) \sim \mathrm{Li}\, x$ принадлежит К.Ф.Гауссу. Ж.Адамар [120] и Ш.Валле-Пуссен [173] в 1896 г., используя аналитические свойства $\zeta(s)$, доказали, что $\pi(x) \sim x \log^{-1} x$ ("асимптотический закон распределения простых чисел"). Элементарное доказательство этого соотношения было получено А.Сельбергом [163] в 1948 г. Более точные утверждения (теорема 5.1 и теорема 5.2) доказаны Ш.Валле-Пуссеном.

6. Сведение сумм с простыми числами к кратным суммам с помощью решета Эратосфена было открыто И.М.Виноградовым [9] в 1937 г. Это позволило ему решить проблему Гольдбаха. Тождество теоремы 6.1 является одной из форм реализации идеи И.М.Виноградова и принадлежит Р.Вону [16].

ГЛАВА III
ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Во многих приложениях теории функции $\zeta(s)$ важно знать порядок роста $|\zeta(\sigma+it)|$ при $t \to +\infty$. Если $\sigma > 1$, то величина $|\zeta(\sigma+it)|$ ограничена постоянной. Если $\sigma < 0$, то из функционального уравнения I.3.(8) и формулы Стирлинга следует, что

$$|\zeta(\sigma+it)| = O(t^{1/2-\sigma}).$$

Таким образом, остается случай $0 \le \sigma \le 1$, другими словами, остается критическая полоса, в которой надо изучить поведение $|\zeta(\sigma+it)|$ при $t \to +\infty$. Докажем ряд вспомогательных утверждений, которые имеют также самостоятельный интерес и многочисленные приложения как в аналитической теории чисел, так и в смежных областях математики.

§ 1. Формула замены тригонометрической суммы более короткой

Изучим конечные суммы вида

$$S = \sum_{a<x\le b} \varphi(x) \exp(2\pi i f(x)),$$

которые будем называть *тригонометрическими*. Здесь $\varphi(x)$ и $f(x)$ — вещественные функции, x принимает значения последовательных целых чисел промежутка (a,b); *длиной суммы* S будем называть число $b-a$, которое в случае целых a и b равняется числу слагаемых в S. При определенных условиях на $\varphi(x)$ и $f(x)$ сумма S может быть с хорошей точностью заменена суммой S_1,

$$S_1 = \sum_{\alpha<n\le\beta} G(n) \exp(2\pi i F(n)),$$

где $G(n)$, $F(n)$ — вещественные функции, определенным образом зависящие от $\varphi(x)$ и $f(x)$, и $\beta-\alpha < b-a$, т.е. "длинная" сумма S заменяется более "короткой" суммой S_1 с хорошей точностью.

1. Формулировка основной теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть вещественные функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a,b]$ следующим условиям:*

1) *$f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;*

2) *существуют числа H, U, A, $0<H$, $1 \ll A \ll U$, $0 < b-a \le U$,*

такие, что

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения

$$f'(x_n) = n, \tag{1}$$

будем иметь

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp(2\pi i f(x)) = \sum_{f'(a)\le n\le f'(b)} c(n)Z(n) + R, \tag{2}$$

где

$$R = O\left(H(A(b-a)^{-1} + T_a + T_b + \log(f'(b) - f'(a) + 2))\right), \tag{3}$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } f'(\mu) \text{ — целое число,} \\ \min\left(\|f'(\mu)\|^{-1}, \sqrt{A}\right), & \text{если } \|f'(\mu)\| \ne 0; \end{cases}$$

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f'(a) < n < f'(b), \\ 1/2, & \text{если } n = f'(a) \text{ или } n = f'(b), \end{cases}$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} \exp(2\pi i(f(x_n) - nx_n)). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы потребуются две леммы.

2. Сведение тригонометрических сумм к тригонометрическим интегралам.

Л е м м а 1. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a,b]$ следующим условиям:*

1) *$f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны;*
2) *$0 < f''(x) \ll 1$;*
3) *существуют числа $0 < H$, $0 < b - a \le U$ такие, что*

$$\varphi(x) \ll H, \qquad \varphi'(x) \ll HU^{-1}.$$

Тогда при любом $\Delta \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp(2\pi i f(x)) =$$
$$= \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \int_a^b \varphi(x)\exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx + O(H\log(\beta - \alpha + 2)), \tag{5}$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$ и постоянная в знаке O зависит только от Δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать $b - a > 10$, так как в противном случае утверждение леммы тривиально. Пусть сначала $\varphi(x) = 1$. Возьмем натуральное число $m = [10U^2K^2]$, $K = 1 + |\alpha| + |\beta|$, и при $[a] + 2 \le M \le [b] - 1$ рассмотрим интеграл

$$W_M = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} \exp(2\pi i f(M+x))\,dx.$$

Поскольку

$$\frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{n=-m}^{m} \exp(2\pi i n x), \tag{6}$$

то

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx = 1,$$

и, следовательно,

$$W_M = \exp(2\pi i f(M)) + V_M,$$

где

$$V_M = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} (\exp(2\pi i f(M+x)) - \exp(2\pi i f(M)))\,dx.$$

Оценим сверху $|V_M|$; для этого представим V_M в виде суммы трех интегралов:

$$V_M = \int_{-1/m}^{1/m} + \int_{-1/2}^{-1/m} + \int_{1/m}^{1/2}.$$

Первый интеграл оценим, применяя к разности в скобках формулу конечных приращений:

$$\int_{-1/m}^{1/m} \ll \int_{-1/m}^{1/m} \frac{|f'||x|dx}{|x|} \ll \frac{K}{m} \ll \frac{1}{U}.$$

Второй и третий интегралы оцениваются одинаково. Оценим, например, второй, предварительно проинтегрировав по частям:

$$\int_{1/m}^{1/2} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} (\exp(2\pi i f(M+x)) - \exp(2\pi i f(M)))\,dx =$$
$$= -\frac{\exp(2\pi i f(M+x)) - \exp(2\pi i f(M))}{\sin \pi x} \cdot \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi}\Bigg|_{1/m}^{1/2} +$$
$$+ \int_{1/m}^{1/2} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x\,dx,$$

где

$$Y_x = \frac{\exp(2\pi i\, f(M+x))\cdot 2\pi i\, f'(M+x)}{\sin\pi x} - \\ - \frac{(\exp(2\pi i\, f(M+x)) - \exp(2\pi i\, f(M)))\,\pi\cos\pi x}{\sin^2\pi x}.$$

Первое слагаемое является величиной порядка $O(Km^{-1}) = O(U^{-1})$. Далее,

$$Y_x \ll \frac{K}{|x|}, \quad \int\limits_{1/m}^{1/2} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)\pi} Y_x\,dx \ll \frac{K}{m}\log m \ll \frac{1}{U}.$$

Таким образом,

$$V_M \ll U^{-1}; \quad W_M = \exp(2\pi i\, f(M)) + O(U^{-1}).$$

Суммируя последнее соотношение по M, пользуясь определением W_M и формулой (6), получаем

$$\sum_{a<x\le b} \exp(2\pi i\, f(x)) = \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} W_M + O(1) =$$

$$= \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int\limits_{-0,5}^{0,5} \sum_{n=-m}^{m} \exp(2\pi i(f(M+x) - nx))\,dx + O(1) =$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} \sum_{M=[a]+2}^{[b]-1} \int\limits_{M-0,5}^{M+0,5} \exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx + O(1) =$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} I_n + O(1), \qquad (7)$$

где

$$I_n = \int\limits_{[a]+1,5}^{[b]-0,5} \exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx.$$

Оценим теперь сумму слагаемых из (7) с $n < f'(a) - \Delta$ и $n > f'(b) + \Delta$, т.е. сумму Σ,

$$\Sigma = \sum_{-m\le n<f'(a)-\Delta} I_n + \sum_{f'(b)+\Delta<n\le m} I_n.$$

Интегрируя один раз по частям, находим

$$I_n = \frac{\exp(2\pi i(f(x) - nx))}{2\pi i(f'(x) - n)}\Bigg|_{a_1}^{b_1} + O\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{f''(x)\,dx}{(f'(x)-n)^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\pi i n}}{2\pi i}\left(\frac{\exp(2\pi i\, f(b_1))}{f'(b_1) - n} - \frac{\exp(2\pi i\, f(a_1))}{f'(a_1) - n}\right) + \\ + O\left(\frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{(f'(a_1) - n)(f'(b_1) - n)}\right),$$

где $a_1 = [a] + 1,5$, $b_1 = [b] - 0,5$. Так как дроби $(f'(b_1) - n)^{-1}$ и $(f'(a_1) - n)^{-1}$ при $-m \le n < f'(a) - \Delta$ и $f'(b) + \Delta < n \le m$ монотонно возрастают, $e^{\pi i n} = (-1)^n$, то

$$\sum \frac{(-1)^n}{f'(b_1) - n} = O(1), \qquad \sum \frac{(-1)^n}{f'(a_1) - n} = O(1).$$

Далее при $-m \le n < f'(a) - \Delta$ дробь

$$\frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{(f'(a_1) - n)(f'(b_1) - n)}$$

монотонно возрастает, поэтому

$$\sum_{-m\le n<f'(a)-\Delta} \frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{(f'(a_1) - n)(f'(b_1) - n)} \ll \frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{\Delta(f'(b_1) - f'(a_1) + \Delta)} + \\ + \int\limits_{-m}^{f'(a)-\Delta} \frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{(f'(a_1) - x)(f'(b_1) - x)}\,dx = O(\log(\beta - \alpha + 2)).$$

Аналогично оценивается сумма этих дробей при $f'(b) + \Delta < n < m$. Таким образом,

$$\Sigma = O(\log(\beta - \alpha + 2));$$

$$\sum_{a<x\le b} \exp(2\pi i\, f(x)) = \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} I_n + O(\log(\beta - \alpha + 2)).$$

Заменим I_n интегралом по интервалу (a, b):

$$I_n = \int\limits_a^b \exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx - I_{n,1} - I_{n,2},$$

где

$$I_{n,1} = \int\limits_a^{a_1} \exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx, \quad I_{n,2} = \int\limits_{b_1}^{b} \exp(2\pi i(f(x) - nx))\,dx.$$

На каждом отрезке $[\alpha - \Delta, f'(a_1) + \Delta]$ и $[f'(b_1) - \Delta, \beta + \Delta]$ может лежать лишь $O(1)$ целых чисел n. Исключая эти числа, для оставшихся n имеем оценки:

$$I_{n,1} = O\left(|f'(a_1) - n|^{-1} + |\alpha - n|^{-1}\right),$$
$$I_{n,2} = O\left(|f'(b_1) - n|^{-1} + |\beta - n|^{-1}\right),$$

поэтому

$$\sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} (I_{n,1}+I_{n,2}) = O\left(\log(\beta-\alpha+2)\right);$$

$$\sum_{a<x\le b} \exp\left(2\pi i\, f(x)\right) = \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \int\limits_a^b \exp\left(2\pi i\,(f(x)-nx)\right) dx + $$
$$+O\left(\log(\beta-\alpha+2)\right).$$

Таким образом, лемма доказана при $\varphi(x)=1$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — произвольная функция. Применяя формулу частного суммирования (теорема II.1.1), находим

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp\left(2\pi i f(x)\right) = -\int\limits_a^b \mathbf{C}(u)\varphi'(u)du + \mathbf{C}(b)\varphi(b),$$

где

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{a<x\le u} \exp\left(2\pi i f(x)\right).$$

К $\mathbf{C}(u)$ применим уже доказанное утверждение:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\gamma+\Delta} \int\limits_a^u \exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right) dx +$$
$$+O\left(\log(\beta-\alpha+2)\right), \qquad \gamma = f'(u)\le\beta.$$

Поскольку при $\gamma+\Delta<n\le\beta+\Delta$

$$\int\limits_a^u \exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right) dx = O\left(\frac{1}{n-\gamma}\right),$$

то

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \int\limits_a^u \exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right) dx + O\left(\log(\beta-\alpha+2)\right);$$

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) =$$

$$= -\sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^u \exp\left(2\pi i\big(f(x)-nx\big)\right)dx\right)\varphi'(u)du +$$

$$+\sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \left(\int\limits_a^b \exp\left(2\pi i\big(f(x)-nx\big)\right)dx\right)\varphi(b) + O\big(H\log(\beta-\alpha+2)\big) =$$

$$= \sum_{\alpha-\Delta\le n\le\beta+\Delta} \int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\big(f(x)-nx\big)\right) dx + O\big(H\log(\beta-\alpha+2)\big).$$

Лемма полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1 и, кроме того,*

$$\left|f'(x)\right|\le\delta<1 \qquad \text{при} \quad a\le x\le b.$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) = \int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)dx + O(H),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от δ.

Доказательство. Возьмем в лемме 1 $\Delta=(1-\delta)/2$; тогда

$$\beta+\Delta\le\delta+\frac{1-\delta}{2}=\frac{1+\delta}{2}<1$$

и в правой части (5) в сумме по n будет только одно слагаемое с $n=0$, что и требовалось доказать.

3. Лемма об асимптотическом значении тригонометрического интеграла специального вида.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a,b]$ условиям*

1) *$f^{(4)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ непрерывны;*

2) *существуют числа H, U, A, $0<H$, $A<U$, $0<b-a\le U$ такие, что*

$$A^{-1}\ll f^{(2)}(x)\ll A^{-1}, \quad f^{(3)}(x)\ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x)\ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(x)\ll H, \quad \varphi^{(1)}(x)\ll HU^{-1}, \quad \varphi^{(2)}(x)\ll HU^{-2};$$

3) *при некотором c, $a\le c\le b$,*

$$f'(c)=0.$$

Тогда имеет место следующая формула:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi(c)\exp\left(2\pi i\, f(c)\right)}{\sqrt{f^{(2)}(c)}} + O(HAU^{-1}) +$$
$$+O\left(H\min\left(|f'(a)|^{-1},\sqrt{A}\right)\right) + O\left(H\min\left(|f'(b)|^{-1},\sqrt{A}\right)\right).$$

Доказательство. Разбивая точкой c промежуток интегрирования на две части, получаем

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)dx = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b. \tag{8}$$

Вычислим второй интеграл. Очевидно, что

$$\int_c^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i f(x)\right)dx = \varphi(c)\int_c^b \exp\left(2\pi i f(x)\right)dx +$$
$$+\int_0^{b-c}(\varphi(x+c)-\varphi(c))\exp(2\pi i f(x+c))dx.$$

Оценим второй интеграл этой формулы. Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{b-c}\left(\varphi(x+c)-\varphi(c)\right)\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)dx =$$
$$=\frac{\varphi(x+c)-\varphi(c)}{2\pi i f'(x+c)}\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)\Big|_0^{b-c} -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{b-c}\frac{\varphi'(x+c)f'(x+c)-f''(x+c)(\varphi(x+c)-\varphi(c))}{(f'(x+c))^2}\times$$
$$\times\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)dx.$$

Так как $\varphi(x+c)-\varphi(c)=\varphi'(c)x+O(HU^{-1}x^2)$, $f'(x+c)=f''(c)x+$ $+O(A^{-1}U^{-1}x^2)$, $xA^{-1}\ll f'(x+c)$, $f''(x+c)=f''(c)+O(A^{-1}U^{-1}x)$, то первое слагаемое есть величина порядка $O(HAU^{-1})$, а числитель подынтегрального выражения по абсолютной величине не превосходит

$$\Big|\left(\varphi'(c)+O(HU^{-1}x)\right)\left(f''(c)x+O(A^{-1}U^{-1}x^2)\right)-$$
$$-\left(f''(c)+O(A^{-1}U^{-1}x)\right)\left(\varphi'(c)x+O(HU^{-1}x^2)\right)\Big|\ll HA^{-1}U^{-2}x^2.$$

Поэтому весь интеграл есть $O(HAU^{-1})$. Сравним теперь J и J_1,

$$J=\int_0^{b-c}\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)dx,$$
$$J_1=\int_0^{b-c}\frac{f'(x+c)\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)}{\sqrt{2f''(c)\left(f(x+c)-f(c)\right)}}dx.$$

Рассматривая разность $J-J_1$, проинтегрируем один раз по частям, найдем

$$J-J_1=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{f'(x+c)}-\frac{1}{\sqrt{2f''(c)\left(f(x+c)-f(c)\right)}}\right)\exp\left(2\pi i f(x+c)\right)\Big|_0^{b-c}+$$

$$+O\left(\int_0^{b-c}\left|-\frac{f''(x+c)}{\left(f'(x+c)\right)^2}+\frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)}\left(f(x+c)-f(c)\right)^{3/2}}\right|dx\right).$$

Пользуясь формулами

$$f(x+c)-f(c)=\frac{1}{2}f''(c)x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(c)x^3+O(A^{-1}U^{-2}x^4),$$
$$f'(x+c)=f''(c)x+\frac{1}{2}f^{(3)}(c)x^2+O(A^{-1}U^{-2}x^3),$$
$$f''(x+c)=f''(c)+f^{(3)}(c)x+O(A^{-1}U^{-2}x^2),$$

легко найдем, что первое слагаемое есть величина порядка $O(AU^{-1})$, а подынтегральное выражение второго слагаемого есть величина порядка $O(AU^{-2})$. Следовательно,

$$J=J_1+O(AU^{-1}).$$

Вычислим J_1. Для этого сделаем замену переменной интегрирования вида $f(x+c)-f(c)=u$. Обозначая через λ разность $f(b)-f(c)$, будем иметь

$$J_1=\frac{\exp(2\pi i f(c))}{\sqrt{2f''(c)}}\int_0^{\lambda}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du=$$
$$=\frac{\exp(2\pi i f(c))}{\sqrt{2f''(c)}}\int_0^{\infty}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du-\frac{\exp(2\pi i f(c))}{\sqrt{2f''(c)}}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du.$$

Оценим последний интеграл двумя способами. Прежде всего

$$\left|\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du\right|\le\int_{\lambda}^{\lambda+1}\frac{du}{\sqrt{u}}+\left|\int_{\lambda+1}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du\right|\ll 1;$$

кроме того, при $\lambda>0$

$$\left|\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}}du\right|\ll\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{f(b)-f(c)}}.$$

Поскольку

$$f(b)-f(c)=\frac{1}{2}f''(\xi)(b-c)^2\gg(b-c)^2A^{-1},$$
$$\left|f'(b)\right|=\left|f'(b-c+c)\right|=f''(\xi_1)(b-c)\ll(b-c)A^{-1},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{f(b)-f(c)}}\ll\frac{\sqrt{A}}{b-c}\ll\frac{1}{|f'(b)|\sqrt{A}}.$$

Тем самым получили

$$J_1 = \frac{\exp(2\pi i\, f(c))}{\sqrt{2f''(c)}} \int\limits_0^\infty \frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}} du + O\left(\min\left(\left|f'(b)\right|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right);$$

$$\int\limits_c^b = \frac{\varphi(c)\exp(2\pi i\, f(c))}{\sqrt{2f''(c)}} \int\limits_0^\infty \frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}} du + O(HAU^{-1}) + \\ + O\left(H\min\left(\left|f'(b)\right|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Аналогично вычисляется первый интеграл в (8):

$$\int\limits_a^c = \frac{\varphi(c)\exp(2\pi i\, f(c))}{\sqrt{2f''(c)}} \int\limits_0^\infty \frac{\exp(2\pi i u)}{\sqrt{u}} du + O(HAU^{-1}) + \\ + O\left(H\min\left(\left|f'(a)\right|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right).$$

Так как

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos 2\pi u}{\sqrt{u}} du = \int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\pi u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2},$$

то из доказанных соотношений следует утверждение леммы.

С л е д с т в и е 2. *Если оценить правую часть формулы леммы тривиально, то получим*

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) dx\right| \ll H\sqrt{A}.$$

Эта оценка имеет место и при более слабых ограничениях на функции $\varphi(x)$ и $f(x)$, именно, если $f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и, кроме того,

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}, \quad \varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad a \le x \le b.$$

Докажем это. Будем предполагать, никак не ограничивая общности, что $b - a \ge 4\sqrt{A}$. Если c — корень уравнения $f'(x) = 0$ — лежит на отрезке $[a, b]$, то, пользуясь равенством

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^{c-\sqrt{A}} + \int\limits_{c-\sqrt{A}}^{c+\sqrt{A}} + \int\limits_{c+\sqrt{A}}^b,$$

оценим каждый из трех получившихся интегралов. Средний интеграл оценим тривиально:

$$\int\limits_{c-\sqrt{A}}^{c+\sqrt{A}} \ll H\sqrt{A}.$$

Крайние интегралы оцениваются одинаково. Оценим, например, первый интеграл. Можно считать, что $a < c - \sqrt{A}$. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_a^{c-\sqrt{A}} \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) dx = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)\Big|_a^{c-\sqrt{A}} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^{c-\sqrt{A}} \frac{\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) dx.$$

Так как $f'(x)$ монотонно возрастает, $f'(c) = 0$, $a \le c \le b$, то

$$\left|f'(a)\right| \ge \left|f'(c - \sqrt{A})\right| = \left|f'(c) - \sqrt{A}f''(\xi)\right| \gg \frac{1}{\sqrt{A}},$$

и первое слагаемое последней формулы есть величина порядка $H\sqrt{A}$. Второе слагаемое — интеграл, оценим тривиально, пользуясь тем, что

$$f'(x) = f'(c + x - c) = f''(\xi)(x - c);$$

находим

$$\int\limits_a^{c-\sqrt{A}} \ll \int\limits_a^{c-\sqrt{A}} \frac{HU^{-1}A^{-1}U + HA^{-1}}{A^{-2}(x-c)^2} dx \ll H\sqrt{A}.$$

Если же c не лежит на $[a, b]$, то представим рассматриваемый интеграл в виде

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^{a+\sqrt{A}} + \int\limits_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} + \int\limits_{b-\sqrt{A}}^b.$$

Крайние интегралы оценим тривиально величиной $\ll H\sqrt{A}$. Средний интеграл оценим, проинтегрировав по частям:

$$\int\limits_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) dx = \frac{\varphi(x)}{2\pi i f'(x)}\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)\Big|_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \frac{\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) dx.$$

Если $f'(x) > 0$ при $a \le x \le b$, то

$$f'(b - \sqrt{A}) > f'(a + \sqrt{A}) = f'(a) + f''(\xi)\sqrt{A} \gg \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$f'(x) = f'(a + x - a) \gg A^{-1}(x - a).$$

Тем самым первое слагаемое есть величина порядка $O(H\sqrt{A})$. Второе слагаемое — интеграл, оценим тривиально:

$$\int\limits_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \ll \int\limits_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \left(\frac{HU^{-1}A}{x-a} + \frac{HA}{(x-a)^2}\right) dx \ll$$

$$\ll HU^{-1}A\log(b-a) + H\sqrt{A} \ll H\sqrt{A}.$$

Если же $f'(x) < 0$, то оценка проводится аналогично. Утверждение следствия доказано.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\|f'(a)\| \neq 0$, $\|f'(b)\| \neq 0$. Возьмем в лемме 1 $\Delta = 0,5$; найдем

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right) =$$

$$= \sum_{f'(a)-0,5\le n\le f'(b)+0,5} \int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)dx +$$

$$+O\Big(H\log\left(f'(b)-f'(a)+2\right)\Big). \qquad (9)$$

Очевидно, что

$$f'(a) < [f'(a)]+1, \qquad [f'(b)] < f'(b).$$

При $[f'(a)]+1 \le n \le [f'(b)]$ к интегралам

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\Big(2\pi i(f(x)-nx)\Big)dx$$

применим лемму 2, заменяя в ней $f(x)$ на $f(x)-nx$ и c на x_n. Будем иметь

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\Big(2\pi i(f(x)-nx)\Big)dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi(x_n)\exp\Big(2\pi i(f(x_n)-nx_n)\Big)}{\sqrt{f''(x_n)}} + O(HAU^{-1}) +$$

$$+O\left(H\min\left(\left|f'(a)-n\right|^{-1},\sqrt{A}\right)\right) + O\left(H\min\left(\left|f'(b)-n\right|^{-1},\sqrt{A}\right)\right)$$

Суммируя последнее соотношение по n, $[f'(a)]+1 \le n \le [f'(b)]$, получим

$$\sum_{[f'(a)]<n\le[f'(b)]} \int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i\, f(x)\right)dx =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{f'(a)\le n\le f'(b)} \frac{\varphi(x_n)\exp\Big(2\pi i(f(x_n)-nx_n)\Big)}{\sqrt{f''(x_n)}} +$$

$$+O\left(H\min\left(\left\|f'(a)\right\|^{-1},\sqrt{A}\right)\right) + O\left(H\min\left(\left\|f'(b)\right\|^{-1},\sqrt{A}\right)\right) +$$

$$+O\Big(H\log\left(f'(b)-f'(a)+2\right)\Big).$$

В правой части соотношения (9) могут быть еще два слагаемых вида

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)dx,$$

где $n = [f'(a)]$ или $n = [f'(b)]$. В этих случаях при $a \le x \le b$

$$\frac{d}{dx}(f(x)-nx) \neq 0,$$

поэтому, интегрируя по частям, а затем оценивая правую часть тривиально, найдем

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)dx = \frac{\varphi(x)\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)}{2\pi i(f'(x)-n)}\Bigg|_a^b -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\varphi'(x)(f'(x)-n)-\varphi(x)f''(x)}{(f'(x)-n)^2}\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)dx \ll$$

$$\ll \frac{H}{\|f'(\mu)\|},$$

где $\mu = a$, если $n = [f'(a)]$, и $\mu = b$, если $n = [f'(b)]+1$. Для этого же интеграла по следствию 2 выполняется и такая оценка:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\exp\left(2\pi i(f(x)-nx)\right)dx \ll H\sqrt{A}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы в случае $\|f'(a)\| \neq 0$, $\|f'(b)\| \neq 0$. Пусть теперь $\|f'(a)\| = 0$, т.е. $f'(a)$ — целое число, $\|f'(b)\| \neq 0$. Опять по лемме 1 выполняется (9). Выделяя справа слагаемое при $n = f'(a)$, к оставшейся сумме применим уже проведенное выше рассуждение; получим

$$\sum_{a<x\le b} \varphi(x)\exp(2\pi i\, f(x)) = \int\limits_a^b \varphi(x)\exp(2\pi i(f(x)-f'(a)x))dx +$$

$$+\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{f'(a)<n\le f'(b)} \frac{\varphi(x_n)\exp(2\pi i(f(x_n)-nx_n))}{\sqrt{f''(x_n)}} +$$

$$+O\left(H\min\left(\left\|f'(b)\right\|^{-1},\sqrt{A}\right)\right)+O\left(H\log\left(f'(b)-f'(a)+2\right)\right).$$

Но выделенный интеграл вычислен в лемме 2, в которой следует положить $c=a$, и он равен

$$\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi(a)\exp(2\pi i(f(a)-f'(a)a))}{\sqrt{f''(a)}}+O(HA(b-a)^{-1}).$$

Отсюда видно, что утверждение теоремы справедливо и при $\|f'(a)\|=0$, $\|f'(b)\|\neq 0$. Аналогично доказывается утверждение теоремы и двух других оставшихся случаев, именно, для $\|f'(a)\|\neq 0$, $\|f'(b)\|=0$ и $\|f'(a)\|=\|f'(b)\|=0$. Теорема полностью доказана.

§ 2. Простейшее приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s;\alpha)$

Будем приближать $\zeta(s;\alpha)$ суммою первых членов ряда Дирихле, которым определяется $\zeta(s;\alpha)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s>1$. Сначала получим простейшее приближение, которое характеризуется относительно большим количеством слагаемых в приближаемой сумме.

Теорема 1. *При $0<\sigma_0\leq\sigma\leq 2$, $\pi x\geq|t|\geq 2\pi$ справедлива формула*

$$\zeta(s;\alpha)=\sum_{0\leq n\leq x}\frac{1}{(n+\alpha)^s}+\frac{x^{1-s}}{s-1}+O(x^{-\sigma}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от σ_0.

Доказательство. По лемме I.4.3 при $N>x$ имеем

$$\zeta(s;\alpha)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+\alpha)^s}+\frac{1}{s-1}(N+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s}+s\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{\rho(u)}{(u+\alpha)^{s+1}}du. \quad (1)$$

Последнее слагаемое этой формулы тривиально оценивается величиной $O(|t|N^{-\sigma})$. Рассмотрим теперь сумму

$$S=\sum_{x<n\leq N+1/2}\frac{1}{(n+\alpha)^s},\qquad s=\sigma+it,\quad t>0,$$

Введем обозначения

$$\varphi(n)=(n+\alpha)^{-\sigma},\qquad f(n)=\frac{t}{2\pi}\log(n+\alpha);$$

тогда S перепишется так:

$$S=\sum_{x<n\leq N}\varphi(n)\exp\left(-2\pi i f(n)\right).$$

К S применим следствие леммы 1.1; чтобы условия этой лемм выполнялись, разобьем промежуток суммирования $(x,N]$ на промежутки вида $(2^kx,2^{k+1}x]$, $k=0,1,\ldots,r$, $(2^{r+1}x,N]$, причем здесь $2^{r+1}x<$ и $2^{r+2}x\geq N$. На каждом из указанных промежутков функции $f''(n)$ и $\varphi'(n)$ непрерывны и, кроме того,

$$0<f''(n)=\frac{t}{2\pi(n+\alpha)^2}\leq\frac{|t|}{2\pi x^2}\leq\frac{\pi}{2t^2}\leq\frac{1}{8\pi};$$

$$\varphi(n)\ll H_k=2^{-k\sigma}x^{-\sigma};\qquad\varphi'(n)\ll H_kU^{-1},\quad U=2^kx;$$

$$\left|f'(n)\right|\leq\frac{t}{2\pi n}\leq\frac{t}{2\pi x}\leq\frac{1}{2}.$$

Применяя на каждом промежутке суммирования упомянутое следствие, а затем, складывая получившиеся величины, найдем

$$S=\int_x^N\varphi(u)\exp(-2\pi i f(u))du+O\left(\sum_{k=0}^{r+1}2^{-k\sigma}x^{-\sigma}\right)=$$

$$=\int_x^{N+1/2}(u+\alpha)^{-\sigma-it}du+O(x^{-\sigma})=$$

$$=\frac{1}{1-s}\left((N+\frac{1}{2}+\alpha)^{1-s}-(x+\alpha)^{1-s}\right)+O(x^{-\sigma}).$$

Вместе с (1) это приводит к соотношению

$$\zeta(s;\alpha)=\sum_{0\leq n\leq x}\frac{1}{(n+\alpha)^s}+\frac{(x+\alpha)^{1-s}}{s-1}+O(x^{-\sigma})+O(|t|N^{-\sigma}).$$

Переходя в нем к пределу $N\to+\infty$ и пользуясь тем, что

$$\frac{1}{1-s}((x+\alpha)^{1-s}-x^{1-s})=\left|\int_x^{x+\alpha}u^{-s}du\right|\leq\int_x^{x+\alpha}u^{-\sigma}du\leq x^{-\sigma},$$

получаем утверждение теоремы.

Следствие 1. *Полагая в теореме 1.1 $\alpha=1$, получим*

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s}+\frac{x^{1-s}}{s-1}+O(x^{-\sigma}). \quad (2)$$

Следствие 2. *Пусть χ — примитивный характер по модулю q. Тогда*

$$L(s,\chi)=\sum_{1\leq n\leq qx}\frac{\chi(n)}{n^s}+O(q^{1-\sigma}x^{-\sigma}).$$

Доказательство. Поскольку

$$L(s,\chi)=\sum_{\nu=1}^{q-1}\chi(\nu)q^{-s}\zeta\left(s,\frac{\nu}{q}\right),$$

то

$$L(s,\chi)=\sum_{1\leq n\leq qx}\frac{\chi(n)}{n^s}+O(q^{1-\sigma}x^{-\sigma}).$$

Следствие 3. *При $\sigma \in (1/2, 1)$ имеет место формула*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_1^T \left|\zeta(\sigma+it)\right|^2 dt = \zeta(2\sigma).$$

Доказательство. В силу следствия 1 имеем при $t \geq 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n<t} n^{-s} + O(t^{-\sigma}) = Z + O(t^{-\sigma}).$$

Далее,

$$\int_1^T |Z|^2 dt = \int_1^T \left(\sum_{n<t} n^{-\sigma-it}\right) \overline{\left(\sum_{n<t} n^{-\sigma-it}\right)} dt =$$

$$= \sum_{1\leq n_1,n_2<T} (n_1n_2)^{-\sigma} \int_{\max(n_1,n_2)}^T \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum_{n<T} n^{-2\sigma}(T-n) + \sum_{\substack{1\leq n_1,n_2<T\\ n_1\neq n_2}} (n_1n_2)^{-\sigma} \frac{(n_1/n_2)^{iT} - (n_1/n_2)^{\max(n_1,n_2)}}{i\log(n_1/n_2)} =$$

$$= T\sum_{1\leq n<T} n^{-2\sigma} - \sum_{n<T} n^{1-2\sigma} + O\left(\sum_{0<n_1<n_2<T} (n_1n_2)^{-\sigma} \log^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right).$$

Используя теорему II.4.4, получим

$$\int_1^T |Z|^2 dt = T\zeta(2\sigma) + O(T^{2-2\sigma}\log T).$$

Следовательно,

$$\int_1^T |\zeta(s)|^2 dt = \int_1^T |Z|^2 dt + O\left(\int_1^T |Z|t^{-\sigma} dt\right) + O\left(\int_1^T t^{-2\sigma} dt\right).$$

Применяя теперь неравенство Коши, получаем

$$\int_1^T |\zeta(s)|^2 dt = T\zeta(2\sigma) + O(T^{2-2\sigma}\log T + (T\log^2 T)^{1/2}).$$

Следствие доказано.

§ 3. Приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s)$

Применение теоремы 1.1 позволяет заменить приближенное уравнение (2.2) функции $\zeta(s)$ другим, которое отличается от (2.2) тем, что вместо отрезка ряда Дирихле для $\zeta(s)$ длины $x \geq |t|/\pi$ стоит сумма двух похожих отрезков, длины которых меньше $|t|/\pi$ и даже могут быть равными $\sqrt{|t|/\pi}$.

Теорема 1. *Пусть $t \geq 2\pi$, положительные числа x и y удовлетворяют условиям $x \geq h > 0$, $y \geq h > 0$, $2\pi xy = t$. Тогда при $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ справедливо следующее равенство:*

$$\zeta(s) = \zeta(\sigma+it) = \sum_{n\leq y} \frac{1}{n^s} + \exp(-2\pi i\theta(t)) \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \times$$

$$\times \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^{1-s}} + O(t^{1/2-\sigma}x^{-1+\sigma}) + O(y^{-\sigma}\log t), \qquad (1)$$

где $\theta(t) = \frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8}$ и постоянные в знаках O зависят только от h и σ_0.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $t \geq 2\pi$. Полагая в теореме 2.1 $x = t/\pi$, $\alpha = 1$, найдем

$$\zeta(s) = \sum_{1\leq n\leq t/\pi} \frac{1}{n^s} + O(t^{-\sigma}). \qquad (2)$$

Преобразуем сумму

$$K = \sum_{t/(2\pi x)<n\leq t/\pi} \frac{1}{n^s} = \sum_{t/(2\pi x)<n\leq t/\pi} n^{-\sigma} \exp\left(-2\pi i\frac{t}{2\pi}\log n\right).$$

Для этого промежуток суммирования по n, $t/(2\pi x) < n \leq t/\pi$, разобьем на промежутки вида

$$a_\mu < n \leq 2a_\mu, \qquad a_\mu = 2^{-\mu}t/\pi,$$

где $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$, $t/(2\pi x) < 2^{-\mu_0}t/\pi \leq t/(\pi x)$; $a = t/(2\pi x) < n \leq a_{\mu_0}$. Сумма K разобьется на $\mu_0 + 1$ сумм K_μ, каждой из которых отвечает свой промежуток суммирования:

$$K_\mu = \sum_{a_\mu<n\leq 2a_\mu} n^{-\sigma-it}, \qquad 1 \leq \mu \leq \mu_0;$$

$$K_{\mu_0+1} = \sum_{a<n\leq a_{\mu_0}} n^{-\sigma-it}.$$

К суммам K_μ применим теорему 1.1, полагая в ней $a = a_\mu$, $b = 2a_\mu$ при $\mu = 1, \ldots, \mu_0$ и $a = t/(2\pi x)$, $b = a_{\mu_0}$ при $\mu = \mu_0 + 1$,

$$f(x) = -\frac{t}{2\pi}\log x, \qquad \varphi(x) = x^{-\sigma},$$

$$H = a_\mu^{-\sigma}, \qquad U = a_\mu, \qquad A = a_\mu^2 t^{-1}.$$

Все условия теоремы 1.1 выполняются. Далее легко находим

$$f'(x_n) = -\frac{t}{2\pi x_n} = n; \qquad x_n = -\frac{t}{2\pi n};$$

$$f'(a) = -\frac{t}{2\pi a_\mu} = -2^{\mu-1}, \qquad f'(b) = -2^{\mu-2}, \quad \mu = 1, \ldots, \mu_0;$$

$$f'(a) = -x, \quad f'(b) = -2^{\mu_0 - 1} \qquad \text{при} \quad \mu = \mu_0 + 1;$$

$$f(x_n) - nx_n = -\frac{t}{2\pi} \log\left(-\frac{t}{2\pi n}\right) + \frac{t}{2\pi};$$

$$\varphi(x_n) = \left(-\frac{t}{2\pi n}\right)^{-\sigma} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\sigma} (-n)^\sigma;$$

$$f''(x_n) = \frac{t}{2\pi}\left(\frac{2\pi n}{t}\right)^2 = \frac{2\pi}{t} n^2;$$

$$Z(n) = \exp\left(2\pi i\left(-\frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)\right)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \frac{1}{(-n)^{1-\sigma-it}};$$

$$R_\mu \ll a_\mu^{-\sigma}(a_\mu^2 t^{-1} a_\mu^{-1} + \log(a_\mu + 2)) = $$
$$= a_\mu^{1-\sigma} t^{-1} + a_\mu^{-\sigma} \log(a_\mu + 2), \quad \mu = 1, \ldots, \mu_0;$$

$$R_{\mu_0+1} \ll a_{\mu_0}^{-\sigma}(a_{\mu_0}^2 t^{-1} a_{\mu_0}^{-1} + a_{\mu_0} t^{-1/2} + \log(a_{\mu_0} + 2)) =$$
$$= a_{\mu_0}^{1-\sigma} t^{-1} + a_{\mu_0}^{1-\sigma} t^{-1/2} + a_{\mu_0}^{-\sigma} \log(a_{\mu_0} + 2) \ll$$
$$\ll t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma} \log t.$$

Следовательно, при $\mu = 1, \ldots, \mu_0$ получаем

$$K_\mu = \exp\left(2\pi i\left(-\frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{8}\right)\right)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \times$$
$$\times \sum_{-2^{\mu-1} \le n \le -2^{\mu-2}} \frac{c(n)}{(-n)^{1-\sigma-it}} + R_\mu =$$
$$= \exp\left(-2\pi i \theta(t)\right)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \sum_{2^{\mu-2} \le n \le 2^{\mu-1}} \frac{c(-n)}{n^{1-\sigma-it}} + R_\mu,$$

где

$$\theta(t) = \frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8},$$

$c(-n) = 1/2$ при $n = 2^{\mu-2}, 2^{\mu-1}$, $c(-n) = 1$ при $2^{\mu-2} < n < 2^{\mu-1}$;

$$K_{\mu_0+1} = \exp\left(-2\pi i\theta(t)\right)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \sum_{2^{\mu_0-1} \le n \le x} \frac{c(-n)}{n^{1-\sigma-it}} + R_{\mu_0+1};$$

где $c(-n) = 1/2$ при $n = 2^{\mu_0-1}$, $n = x$, $c(-n) = 1$ при $2^{\mu_0-1} < n < x$.

Складывая все K_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0 + 1$, найдем

$$K = \sum_{\mu=1}^{\mu_0+1} K_\mu = \exp\left(-2\pi i\theta(t)\right)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \sum_{n \le x} \frac{1}{n^{1-\sigma-it}} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\mu_0+1} R_\mu + O(t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma}).$$

Заметим, что последний O-член появился из-за того, что при целом x коэффициент $c(-x)$ равен 0,5, а в выписанной формуле он равен 1. Если x не целое число, то $c(-x) = 1$ и последний O-член отсутствует. Сумму слагаемых R_μ легко оценить, пользуясь уже полученными неравенствами

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_0+1} R_\mu \ll \sum_{\mu=1}^{\mu_0} (a_\mu^{1-\sigma} t^{-1} + a_\mu^{-\sigma} \log(a_\mu + 2)) +$$
$$+ t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma} \log t \ll t^{-\sigma} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} 2^{-\mu(1-\sigma)} +$$
$$+ t^{-\sigma}(\log t) \sum_{\mu=1}^{\mu_0} 2^{\mu\sigma} + t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma} \log t \ll$$
$$\ll t^{-\sigma} \log t + t^{-\sigma} x^\sigma \log t + t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma} \log t \ll$$
$$\ll t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma} \log t.$$

Так как по формуле (2)

$$\zeta(s) = \sum_{n \le t/(2\pi x)} \frac{1}{n^s} + K + O(t^{-\sigma}),$$

то из вышеприведенных оценок находим

$$\zeta(s) = \sum_{n \le y} \frac{1}{n^s} + \exp(-2\pi i\theta(t))\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \sum_{n \le x} \frac{1}{n^{1-s}} +$$
$$+ O(t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma}) + O(y^{-\sigma} \log t).$$

Теорема доказана.

Формулу (1) теоремы можно записать в симметричном виде. Пользуясь формулой Стирлинга (теорема II.3.5), легко получим при $s = \sigma + it$, $t \ge 2\pi$:

$$\frac{\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} \exp\left(-2\pi i\theta(t)\right)\left(1 + O(t^{-1})\right).$$

Подставляя это выражение в (1), найдем

$$\zeta(s) = \sum_{n \le y} \frac{1}{n^s} + \frac{\pi^{-(1-s)/2}\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n \le x} \frac{1}{n^{1-s}} +$$
$$+ O(t^{1/2-\sigma} x^{-1+\sigma}) + O(y^{-\sigma} \log t);$$

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n \le y} \frac{1}{n^s} +$$
$$+ \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\sum_{n \le x} \frac{1}{n^{1-s}} + O(R),$$

где

$$R = \left|\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| (t^{1/2-\sigma}x^{-1+\sigma} + y^{-\sigma}\log t).$$

§ 4. Приближенное функциональное уравнение функции Харди $Z(t)$ и ее производных

Изучение нулей $\zeta(s)$ на критической прямой сводится к изучени вещественных нулей функции Харди $Z(t)$. Для этого определим $Z(t)$ докажем ряд простейших свойств как самой $Z(t)$, так и ее производны $Z^{(k)}(t)$, $k \geq 0$.

Определение. *Функция Харди $Z(t)$ задается равенством*

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \qquad (1$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \pi^{-it/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1}. \qquad (2$$

1. Нули функции $Z(t)$.

Лемма 1. *Функция Харди $Z(t)$ принимает вещественные зн чения при вещественных значениях t и вещественные нули $Z(t)$ яв ются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.*

Доказательство. Из функционального уравнения $\zeta($ (теорема I.2.1), полагая в нем $s = 1/2 + it$, получим

$$\pi^{-it/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \pi^{it/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right).$$

Разделим обе части этого равенства на

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right| = \left|\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)\right|,$$

и, пользуясь определением $Z(t)$, найдем

$$e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = Z(t) = e^{-i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right) = \overline{Z(t)}.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы; второе утверждение о видно.

В следующей лемме дается явная формула для функции $\theta(t)$.

2. Формула для $\theta(t)$.

Лемма 2. *При $t \geq 2$ для функции $\theta(t)$, определенной равенств (2), справедлива формула*

$$\theta(t) = t\log\sqrt{t/(2\pi)} - t/2 - \pi/8 + \Delta(t), \qquad ($$

где

$$\Delta(t) = \frac{t}{4}\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t} - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4)^2+t^2/4},$$

$$\rho(u) = 1/2 - \{u\}.$$

Доказательство. Возведем обе части равенства (2) в квадрат; найдем

$$e^{2i\theta(t)} = \pi^{-it}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right);$$

$$2i\theta(t) = -it\log\pi + \log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right). \qquad (4)$$

Ко второму и третьему слагаемым применим формулу Стирлинга (теорема II.3.5) в виде

$$\log\Gamma(s) = (s-1/2)\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+s}.$$

Тогда для величин ξ_1 и ξ_2,

$$\xi_1 = \log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right), \qquad \xi_2 = \log\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right),$$

получаем равенства

$$\xi_1 = -\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) + \frac{it}{2}\log\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{it}{2} + $$
$$+ \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+1/4+it/2},$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right) - \frac{it}{2}\log\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{it}{2} + $$
$$+ \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{u+1/4-it/2}.$$

Следовательно,

$$\xi_1 - \xi_2 = -\frac{1}{4}\log\frac{1/4+it/2}{1/4-it/2} + \frac{it}{2}\log\left(\frac{1}{16}+\frac{t^2}{4}\right) - it -$$
$$-it\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4)^2+t^2/4} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2t}\right) +$$
$$+\frac{it}{2}\log\left(\frac{1}{16}+\frac{t^2}{4}\right) - it - it\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4)^2+t^2/4}.$$

Подставляя полученное значение $\xi_1 - \xi_2$ в (4) и производя сокращение, приходим к (3).

3. Формула для $Z^{(k)}(t)$.

Теорема 1. *При любом целом числе $k \geq 0$ и $t \geq 2\pi$ справедливо следующее равенство:*

$$Z^{(k)}(t) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \log n \right)^k \times$$

$$\times \cos \left(t \log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - t \log n - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \right) + O(t^{-1/4} \log^{k+1} t)$$

причем постоянная в знаке O зависит только от k.

Доказательство. К функции $Z(t)$, заданной равенство (1), применим формулу дифференцирования Лейбница:

$$Z^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} \right) \left(\frac{d^{k-r}}{dt^{k-r}} \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right). \qquad (5$$

Получим приближенное функциональное уравнение для

$$\frac{d^m}{dt^m} \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right), \qquad 0 \leq m \leq k.$$

По следствию I.3.1 при $N \geq 1$ имеем

$$\zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = \sum_{n \leq N} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-it} + \frac{N^{1/2-it}}{it - 1/2} - \frac{1}{2} N^{-1/2-it} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + it \right) \int_N^\infty \rho(u) u^{-3/2-it} d$$

Дифференцируя m раз это равенство по t и тривиально оценив после дифференцирования слагаемые, в которые входит интегр найдем

$$\frac{d^m}{dt^m} \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = (-i)^m \sum_{n=1}^{N} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it} +$$

$$+ \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{N^{1/2-it}}{it - 1/2} \right) + O \left(\frac{t \log^m N}{\sqrt{N}} \right); \qquad ($$

постоянная в знаке O зависит только от m.

Будем теперь предполагать, что $N > N_0 = t/\pi$. Преобразуе сумму S,

$$S = \sum_{N_0 < n \leq N} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it}.$$

Для этого воспользуемся частным суммированием (теорема II.1.1

полагая в этой теореме

$$f(u) = \frac{\log^m u}{\sqrt{u}},$$

$$c_n = n^{-it}.$$

Получаем

$$S = -\int_{N_0}^{N} C(u) df(u) + C(N) f(N).$$

К сумме $C(u)$,

$$C(u) = \sum_{N_0 < n \leq u} c_n = \sum_{N_0 < n \leq u} \exp \left(-2\pi i \frac{t}{2\pi} \log n \right),$$

применим следствие леммы 1; условие следствия выполняются, так как

$$\frac{d}{dv} \left(-\frac{t}{2\pi} \log v \right) = \left| -\frac{t}{2\pi v} \right| \leq \frac{1}{2},$$

$$N_0 < v \leq u,$$

$$0 < \frac{d^2}{dv^2} \left(-\frac{t}{2\pi} \log v \right) = \frac{t}{2\pi v^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$C(u) = \int_{N_0}^{u} v^{-it} dv + O(1) = \frac{u^{1-it} - N_0^{1-it}}{1 - it} + O(1).$$

Поэтому для суммы S получаем следующее выражение:

$$S = -\int_{N_0}^{N} C(u) df(u) + C(N) f(N) =$$

$$= -\int_{N_0}^{N} \frac{u^{1-it} - N_0^{1-it}}{1 - it} df(u) + O \left(\frac{\log^m t}{\sqrt{N}} \right) +$$

$$+ \frac{N^{1-it} - N_0^{1-it}}{1 - it} \cdot \frac{\log^m N}{\sqrt{t}} =$$

$$= \int_{N_0}^{N} \frac{\log^m u}{\sqrt{u}} u^{-it} du + O \left(\frac{\log^m t}{\sqrt{N}} \right).$$

Далее, производя в последнем интеграле интегрирование по частям, найдем

$$\int\limits_{N_0}^{N} \frac{\log^m u}{\sqrt{u}} u^{-it} du =$$

$$= \frac{(\log^m u) u^{1/2-it}}{1/2-it}\Bigg|_{N_0}^{N} - \frac{m}{1/2-it} \int\limits_{N_0}^{N} \frac{\log^{m-1} u}{u^{1/2+it}} du =$$

$$= -N^{1/2-it} \left(\frac{\log^m N}{it-1/2} + \frac{m \log^{m-1} N}{(it-1/2)^2} + \frac{m(m-1)\log^{m-2} N}{(it-1/2)^3} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}{(it-1/2)^{m+1}} \right) + O\left(\frac{\log^m t}{\sqrt{t}}\right). \qquad (7)$$

В свою очередь, имеем

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{N^{1/2-it}}{it-1/2}\right) =$$

$$= N^{1/2} \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{d^r}{dt^r}\left(\frac{1}{it-1/2}\right) \frac{d^{m-r}}{dt^{m-r}} (\exp(-it\log N)) =$$

$$= (-i)^m N^{1/2-it} \sum_{r=0}^{m} m(m-1)\cdots(m-r+1) \frac{\log^{m-r} N}{(it-1/2)^{r+1}}. \qquad (8)$$

Из (5) – (8) следует

$$\frac{d^m}{dt^m}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = (-i)^m \sum_{n\le N_0} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it} + O\left(\frac{\log^m t}{\sqrt{t}}\right) + O\left(\frac{t\log^m N}{\sqrt{N}}\right).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $N \to +\infty$, получим простейшее приближенное уравнение m-й производной дзета-функции Римана на критической прямой

$$\frac{d^m}{dt^m}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = (-i)^m \sum_{n\le t/\pi} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it} + O\left(\frac{\log^m t}{\sqrt{t}}\right). \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь сумму

$$V = \sum_{\sqrt{t/(2\pi)}<n\le t/\pi} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it},$$

причем для преобразования V будем применять теорему 1. Чтобы все условия этой теоремы выполнялись,разобьем промежуток суммирования V на $\ll \log t$ промежутков вида

$$(a_\mu, 2a_\mu), \qquad a_\mu = 2^{-\mu}\frac{t}{\pi}, \quad \mu = 1, 2, \ldots;$$

левый конец последнего из получившихся промежутков равен $\sqrt{t/(2\pi)}$.

Таким образом, приходим к $\ll \log t$ суммам V_μ вида

$$V_\mu = \sum_{a_\mu<n\le 2a_\mu} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} \exp(-2\pi i f(n)),$$

$$f(n) = \frac{t}{2\pi}\log n, \quad \mu = 1, 2\ldots$$

Применим к каждой сумме V_μ теорему 1, полагая в ней

$$H = \log^m t/\sqrt{a_\mu}, \quad a = a_\mu, \quad b = 2a_\mu, \quad U = a_\mu,$$

$$A = a_\mu^2/t; \quad \varphi(x) = \log^m x/\sqrt{x}, \quad f(x) = -t\log x/(2\pi).$$

Легко находим

$$f'(x) = -\frac{t}{2\pi x}; \qquad -\frac{t}{2\pi x_n} = n; \qquad x_n = -\frac{t}{2\pi n};$$

$$f'(a) = -\frac{t}{2\pi a_\mu}, \qquad f'(b) = -\frac{t}{2\pi\cdot 2a_\mu},$$

$$f(x_n) - nx_n = -\frac{t}{2\pi}\log\left(-\frac{t}{2\pi n}\right) + \frac{t}{2\pi},$$

$$\varphi(x_n) = \frac{\log^m(-t/(2\pi n))}{\sqrt{-t/(2\pi n)}}; \qquad f''(x_n) = \frac{2\pi n^2}{t},$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\log^m(-t/(2\pi n))}{\sqrt{-t/(2\pi n)}\sqrt{2\pi n^2/t}} \exp\left(2\pi i(f(x_n) - nx_n)\right).$$

Заметим, что при всех значениях μ, кроме, быть может, последнего, числа $f'(a_\mu)$ — целые:

$$f'(a_\mu) = -\frac{2^\mu t\pi}{2\pi t} = -2^{\mu-1};$$

последнее же равно

$$f'(a_\mu) = -\sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

поэтому, если это необходимо, добавим в формулу (1.3) теоремы 1.1 одно слагаемое и воспользуемся при

$$-\sqrt{\frac{t}{2\pi}} < n \le -\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + 1$$

оценкой $Z(n)$:

$$Z(n) \ll \frac{\log^m t}{\sqrt{|n|}} \ll t^{-1/4}\log^m t.$$

Первая сумма по n будет состоять из одного слагаемого, так как $-1 \le n \le -1/2$. Таким образом, приходим к формуле

$$V_\mu = \sum_{f'(2a_\mu)\le n\le f'(a_\mu)} b(n)Z(n) + O(t^{-1/4}\log^m t),$$

причем при всех $\mu = 1, 2 \ldots$, включая последнее, можно считать $f'(a_\mu)$ целыми числами. Складывая V_μ, предварительно заменив n на $-n$, получим

$$V = \frac{1+i}{2} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^m (t/(2\pi n))}{\sqrt{n}} \exp\left(i(-t\log t + t\log 2\pi n + t)\right) +$$

$$+O(t^{-1/4}\log^{m+1} t) =$$

$$= e^{i\theta_1(t)} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^m (t/(2\pi n))}{\sqrt{n}} n^{-it} + O(t^{-1/4}\log^{m+1} t),$$

где $\theta_1(t) = -t\log t + t\log 2\pi + t + \pi/4$. Отсюда и из (9) следует равенство

$$\frac{d^m}{dt^m}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) =$$

$$= (-i)^m \left\{ \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^m n}{\sqrt{n}} n^{-it} + e^{i\theta_1(t)} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^m (t/(2\pi n))}{\sqrt{n}} n^{it} \right\} +$$

$$+O(t^{-1/4}\log^{m+1} t). \qquad (10)$$

Это есть приближенное функциональное уравнение m-й производной дзета-функции Римана на критической прямой.

Если тривиально оценить правую часть (10), то получим простейшую оценку

$$\frac{d^m}{dt^m}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^{1/4}\log^m t). \qquad (11)$$

Из леммы 2 легко находим при любом целом $r \ge 0$:

$$\frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} = i^r \left(\theta'(t)\right)^r e^{i\theta(r)} + O(t^{-1}\log^{r-1} t).$$

Действительно, воспользуемся известной формулой для производной сложной функции: если $y = F(\tau)$, $\tau = f(t)$, то

$$\frac{d^r}{dt^r} F(f(t)) = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=r \\ k_1\ge 0, k_2\ge 0,\ldots,k_r\ge 0}} \frac{r!}{k_1!\ldots k_r!} \cdot \frac{d^{k_1+\cdots+k_r}F}{d\tau^{k_1+\cdots+k_r}} \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{f^{(r)}(t)}{r!}\right)^{k_r}.$$

В нашем случае

$$F(\tau) = e^\tau, \qquad \tau = i\theta(t);$$

$$\frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} = e^{i\theta(t)} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=r \\ k_1\ge 0, k_2\ge 0,\ldots,k_r\ge 0}} \frac{r!}{k_1!\ldots k_r!} \left(\frac{i\theta'(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{i\theta^{(r)}(t)}{r!}\right)^{k_r}.$$

Выделим справа слагаемое при $k_1 = r$ (считаем далее, что $r > 0$); находим

$$e^{-i\theta(t)} \frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} =$$

$$= (i\theta'(r))^r + \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=r \\ 0\le k_1<r,\ldots,0\le k_r}} \frac{r!}{k_1!\ldots k_r!} \left(\frac{i\theta'(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{i\theta^{(r)}(t)}{r!}\right)^{k_r}.$$

Последняя кратная сумма такова:

$$\frac{r!}{t^r} \sum_{m=1}^{r-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=r \\ 0\le k_1<r,\ldots,0\le k_r \\ k_1+\cdots+k_r=m}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_r!} \left(\frac{i\theta'(t)t}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{i\theta''(t)t^2}{2!}\right)^{k_2} \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{i\theta^{(r)}(t)t^r}{r!}\right)^{k_r}.$$

Переходя к неравенствам и отбрасывая условие $k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r = r$, получим

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} - e^{i\theta(t)} (i\theta'(t))^r \right| \le$$

$$\le \frac{r!}{t^r} \sum_{m=1}^{r-1} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=m \\ k_1\ge 0,\ldots,k_r\ge 0}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_r!} \left|\frac{\theta'(t)t}{1!}\right|^{k_1} \cdots \left|\frac{\theta^{(r)}(t)t^r}{r!}\right|^{k_r} =$$

$$= \frac{r!}{t^r} \sum_{m=1}^{r-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{\nu=1}^{r} \left| \frac{\theta^{(\nu)}(t)t^\nu}{\nu!} \right| \right)^m.$$

Но из леммы III.4.2 следует, что

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}\log\frac{t}{2\pi} + \frac{1}{4}\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+1/(4t^2)}\left(-\frac{1}{2t^3}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+1/(4t^2)}\left(-\frac{1}{2t^2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4+it/2)^2} +$$

$$+\left(-\frac{i}{2}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4-it/2)^2}.$$

Поэтому при $\nu \ge 2$ имеем

$$|\theta^{(\nu)}(t)| = O(t^{-\nu+1}).$$

Тем самым получаем

$$\frac{r!}{t^r} \sum_{m=1}^{r-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{\nu=1}^{r} \left| \frac{\theta^{(\nu)}(t)t^\nu}{\nu!} \right| \right)^m = O(t^{-1}\log^{r-1} t);$$

$$\frac{d^r}{dt^r} e^{i\theta(t)} = i^r \left(\theta'(r)\right)^r e^{i\theta(r)} + O(t^{-1}\log^{r-1} t). \qquad (12)$$

Подставим теперь (10) в (5). Пользуясь (12) и (11), получим равенство

$$Z^{(k)}(t) =$$
$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} i^r (\theta'(t))^r e^{i\theta(t)} (-i)^{k-r} \left\{ \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^{k-r} n}{\sqrt{n}} n^{-it} + \right.$$
$$\left. + e^{i\theta_1(t)} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\log^{k-r} (t/(2\pi n))}{n} n^{it} + O(t^{-1/4} \log^{k-r+1} t) \right\} =$$
$$= Z_1(t) + Z_2(t) + O(t^{-1/4} \log^{k+1} t), \qquad (13)$$

где

$$Z_1(t) = (-i)^k e^{i\theta(t)} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-it} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-\theta'(t))^r \log^{k-r} n =$$
$$= i^k e^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{(\theta'(t) - \log(t/(2\pi n)))^k}{\sqrt{n}} n^{it},$$
$$Z_2(t) = i^k e^{i(\theta(t)+\theta_1(t))} \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{(\theta'(t) - \log(t/(2\pi n)))^k}{\sqrt{n}} n^{it}.$$

Преобразуем функции $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$. Прежде всего,

$$\theta'(t) = \frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right);$$

поэтому

$$(\theta'(t) - \log n)^k = \left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \log n\right)^k + O(t^{-1} \log t);$$
$$\left(\theta'(t) - \log \frac{t}{2\pi n}\right)^k = (-1)^k \left(\frac{1}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \log n\right)^k + O(t^{-1} \log t) =$$
$$= (-1)^k (\theta'(t) - \log n)^k + O(t^{-1} \log t).$$

Подставляя найденные выражения, определяющие $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$, приходим к равенству

$$Z_1(t) + Z_2(t) = \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{(\theta'(t) - \log n)^k}{\sqrt{n}} \left(e^{i\theta_2(t)} + e^{i\theta_3(t)}\right) +$$
$$+ O(t^{-3/4} \log t), \qquad (14)$$

где

$$\theta_2(t) = \theta_2(t; n) = \theta(t) + \frac{\pi k}{2} - t \log n;$$
$$\theta_3(t) = \theta_3(t; n) = \theta(t) - \frac{\pi k}{2} + t \log n + \theta_1(t).$$

Ввиду того, что

$$\theta(t) = \frac{1}{2} t \log t - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$
$$\theta_1(t) = -t \log t + t \log 2\pi + t + \frac{\pi}{4},$$

получаем

$$\theta_2(t) = \frac{1}{2} t \log t + \frac{\pi k}{2} - t \log n - \frac{1}{2} t \log 2\pi - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right);$$
$$\theta_3(t) = -\frac{1}{2} t \log t - \frac{\pi k}{2} + t \log n + \frac{1}{2} t \log 2\pi + \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right);$$
$$e^{i\theta_2(t)} + e^{i\theta_3(t)} = e^{i\theta_2(t)} + e^{-i\theta_2(t)} + O(t^{-1}) =$$
$$= 2 \cos\left(\theta(t) + \frac{\pi k}{2} - t \log n\right) + O(t^{-1}).$$

Тем самым из (13), (14) приходим к равенству

$$Z^{(k)}(t) = 2 \sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{(\theta'(t) - \log n)^k}{\sqrt{n}} \cos\left(\theta(t) - t \log n + \frac{\pi k}{2}\right) +$$
$$+ O(t^{-1/4} \log^{k+1} t),$$

из которого уже следует утверждение теоремы, так как

$$\theta(t) = t \log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O(t^{-1}).$$

Замечание. Формула теоремы при $k = 0$ называется *формулой Римана—Зигеля.*

§ 5. Приближенное функциональное уравнение функции Харди—Сельберга $F(t)$

Определим функцию Харди—Сельберга $F(t)$ и получим для нее приближенное функциональное уравнение.

Определение. *Функция Харди—Сельберга $F(t)$* задается равенством

$$F(t) = Z(t) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2,$$

где

$$\varphi(s) = \varphi_X(s) = \sum_{\nu \le X} \frac{\beta(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)(1 - \log\nu/\log X), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

а вещественные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Из определения $F(t)$ следует, что $F(t)$ принимает вещественные значения при вещественных t, а вещественные нули $F(t)$ нечетного порядка являются вещественными нулями нечетного порядка функции $\zeta(1/2 + it)$. Функция $F(t)$ зависит еще от вещественного параметра $X > 1$, который в зависимости от решаемой задачи выбирается некоторым оптимальным образом. Везде ниже считаем, что $X < t$.

Теорема 1. *При $t \ge 2\pi$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = F_1(t) + \overline{F_1(t)} + O(t^{-1/4}X^2 \log t),$$

где

$$F_1(t) = e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda < \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it},$$

$$\theta_1(t) = t \log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}, \qquad a(\lambda) = \sum_{n\nu_2/\nu_1 = \lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_1},$$

λ — рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X.

Доказательство. Прежде всего, из определения чисел $\alpha(\nu)$, именно из того, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{1/2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{2p^s} - \cdots\right),$$

следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$, т.е. при $(\nu_1, \nu_2) = 1$ имеем

$$\alpha(\nu_1\nu_2) = \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_2).$$

Кроме того, $\alpha(1) = 1$, $|\alpha(\nu)| \le 1$ при любом $\nu \ge 1$. Следовательно, $\beta(1) = 1, |\beta(\nu)| \le 1, \nu \ge 1$;

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{\nu < X} \frac{\beta(\nu)}{\sqrt{\nu}} \nu^{-it} = O\left(\sqrt{X}\right).$$

Возьмем в формуле (2.2) $s = 1/2 + it$, $x = tX^2$; получим

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n \le tX^2} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{-it} + O(t^{-1/2}X).$$

Из определения $F(t)$ и $Z(t)$ находим

$$e^{-i\theta(t)}F(t) = \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{n \le tX^2} \sum_{\nu_1, \nu_2 < X} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_2}{n\nu_1}\right)^{it} + O(t^{-1/2}X^2). \qquad (1)$$

Буквой λ обозначим рациональную дробь, знаменатель которой не превосходит X. Обозначим, далее, символом $a(\lambda)$ следующее число:

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_1/\nu_2 = \lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}; \qquad (2)$$

здесь суммирование ведется по натуральным числам n, ν_1, ν_2, причем $n \le tX^2$, $\nu_1 < X$, $\nu_2 < X$. Тогда (1) перепишется так:

$$e^{-i\theta(t)}F(t) = \sum_{\lambda < tX^3} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} + O(t^{-1/2}X^2). \qquad (3)$$

Разобьем сумму по λ на две: $\lambda \le tX$ и $tX < \lambda \le tX^3$. Первая сумма S_1 имеет вид

$$S_1 = \sum_{\lambda \le tX} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it};$$

так как в этой сумме $\lambda = n\nu_1/\nu_2 \le tX$, то для n получаем неравенство

$$n \le \frac{tX\nu_2}{\nu_1} \le tX^2;$$

поэтому в представлении $a(\lambda)$ вида (2) условие $n \le tX^2$ выполняется всегда и его можно опустить. Оценим вторую сумму S_2,

$$S_2 = \sum_{tX < \lambda \le tX^3} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-it} = \sum_{tX < \frac{n\nu_1}{\nu_2} \le tX^3} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}} \left(\frac{n\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} =$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{it} \sum_{tX\nu_2/\nu_1 < n \le tX^2} n^{-1/2-it}.$$

К сумме по n применим следствие леммы 1.1; условия следствия выполняются, так как

$$f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log x, \qquad |f'(x)| \le \frac{t}{2\pi x} \le \frac{\nu_1}{2\pi X\nu_2} \le \frac{1}{2\pi}.$$

Поэтому, разбивая промежуток суммирования по n на новые промежутки точками вида 2^μ, применяя к каждому такому промежутку следствие леммы 1.1 и складывая получившиеся при этом выражения, находим

$$\sum_{tX\nu_2/\nu_1<n\le tX^2} n^{-1/2-it} = \int_{tX\nu_2/\nu_1}^{tX^2} u^{-1/2-it}du + O\left(\sqrt{\frac{\nu_1}{tX\nu_2}}\right) = O(t^{-1/2}X);$$

$$S_2 = O(t^{-1/2}X^2).$$

Из (1) и определения сумм S_1 и S_2 приходим к формуле

$$e^{-i\theta(t)}F(t) = S_1 + O(t^{-1/2}X^2).$$

Преобразуем теперь сумму S_3,

$$S_3 = \sum_{\sqrt{t/(2\pi)}<\lambda\le tX} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

В силу определения λ и $a(\lambda)$, имеем равенства

$$S_3 = \sum_{\sqrt{t/(2\pi)}<\frac{n\nu_1}{\nu_2}\le tX} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}}\left(\frac{n\nu_1}{\nu_2}\right)^{-it} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{it} \sum_{\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\frac{\nu_2}{\nu_1}<n\le tX\frac{\nu_2}{\nu_1}} n^{-1/2-it}. \qquad (4)$$

К сумме по n применим теорему 1.1 подобно тому, как это был сделано при доказательстве теорем 3.1 и 4.1, получим

$$\sum_{\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\frac{\nu_2}{\nu_1}<n\le tX\frac{\nu_2}{\nu_1}} n^{-1/2-it} = e^{i\theta_2(t)} \sum_{n<\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\frac{\nu_1}{\nu_2}} n^{-1/2+it} + O(t^{-1/4}X^2\log t),$$

где $\theta_2(t) = -t\log\frac{t}{2\pi} + t + \frac{\pi}{4}$. Подставляя это выражение в (4), найде

$$S_3 = e^{i\theta_2(t)} \sum_{\nu_1,\nu_2} \sum_{\frac{n\nu_2}{\nu_1}<\sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{n\nu_1\nu_2}}\left(\frac{n\nu_2}{\nu_1}\right)^{it} + O(t^{-1/4}X^2\log t) =$$

$$= e^{i\theta_2(t)} \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + O(t^{-1/4}X^2\log t), \qquad ($$

где $\lambda = n\nu_2/\nu_1$, $a(\lambda) = \sum\limits_{n\nu_2/\nu_1=\lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_1}$. По сумму S_1 можно пред ставить так:

$$S_1 = \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + S_3.$$

Поэтому из (3), определения S_1, оценки S_2 и (5) приходим к формуле для $F(t)$:

$$F(t) = e^{i\theta(t)} \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + e^{i(\theta(t)+\theta_2(t))} \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(t^{-1/4}X^2\log t). \qquad (6)$$

Поскольку

$$\theta(t) = t\log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O(t^{-1}),$$

то

$$\theta(t) + \theta_2(t) = -t\log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + O(t^{-1}).$$

Кроме того,

$$\left|\sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it}\right| \le \sum_{\nu_1,\nu_2<X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \sum_{n\nu_2/\nu_1<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} = O(t^{1/4}X\log X).$$

Поэтому, заменяя в (6) функцию $\theta(t)$ функцией $\theta_1(t) = t\log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}$, получим

$$F(t) = e^{i\theta_1(t)} \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} + e^{-i\theta_1(t)} \sum_{\lambda<\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(t^{-1/4}X^2\log t),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Первые формулы замены тригонометрической суммы более "короткой" содержатся в работах И.М.Виноградова [7], Г.Харди и Д.Литтлвуда [125] и Корпута [115]. Мы следовали изложению статьи [142].

2. Приближенное функциональное уравнение $\zeta(s)$ принадлежит Б.Риману; полное доказательство опубликовано К.Зигелем [165]. Теорема 3.1 доказана Г.Харди и Д.Литтлвудом [127].

3. Приближенное уравнение $Z(t)$—это формула Римана—Зигеля. Приближенные уравнения $Z^{(k)}(t)$ получены в [37]. Общий способ получения приближенных функциональных уравнений был предложен А.Ф.Лавриком [46–48].

4. Функция $F(t)$ определена и исследована в [41].

ГЛАВА IV

МЕТОД ВИНОГРАДОВА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

§ 1. Теорема Виноградова о среднем

Теорема о среднем — это теорема об оценке $J = J(P; n, k)$ числ решений следующей системы уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 = y_1^2 + \dots + y_k^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = y_1^n + \dots + y_k^n \end{cases} \qquad (1$$

$$1 \le x_1, \dots, x_k, \quad y_1, \dots, y_k \le P.$$

Пользуясь тем, что

$$\int_0^1 \exp(2\pi i\, \alpha m) d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \ne 0,\ m \text{ — целое,} \end{cases}$$

легко получаем равенство

$$J = J(P; n, k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \le P} \exp\left(2\pi i\, f(x)\right) \right|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \qquad (2$$

где $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$. Формула (2) показывает, что величи на $J = J(P; n, k)$ является средним значением $2k$-й степени модул тригонометрической суммы с многочленом n-й степени в экспоненте Докажем четыре вспомогательных утверждения.

1. Лемма о распределении простых чисел.

Лемма 1. *При любом натуральном числе n и $x \ge (2n)^2$ на пр межутке $(x, 2x]$ содержится по крайней мере n различных просты чисел.*

Доказательство. При $x \le 1024$ утверждение лемм проверяется непосредственно, поэтому будем считать, что $x > 1024$.

Из очевидных неравенств

$$[x] \le x < [x] + 1 < 2[x] \le 2x < 2[x] + 2$$

следует, что $(x, 2x] \subset ([x], 2[x] + 2)$, т.е.

$$\psi(2x) - \psi(x) \le \psi(2m+1) - \psi(m) \le$$
$$\le \psi(2m) - \psi(m) + \log(2m+1), \quad m = [x]. \qquad (3)$$

Для любого натурального числа m выполняются неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{4m}} \le \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m} \le \frac{1}{\sqrt{2m+2}}. \qquad (4)$$

Далее, так как

$$\log(k!) = \sum_{n \le k} \log n = \sum_{n \le k} \sum_{d | n} \Lambda(d) =$$
$$= \sum_{d \le k} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \le k \\ n \equiv 0 \pmod d}} 1 = \sum_{d \le k} \Lambda(d) \sum_{rd \le k} 1 =$$
$$= \sum_{r \le k} \sum_{d \le k/r} \Lambda(d) = \sum_{r \le k} \psi(k/r),$$

то

$$\log\binom{2m}{m} = \log\frac{(2m)!}{(m!)^2} = \sum_{r \le 2m} \psi\left(\frac{2m}{r}\right) - 2\sum_{r \le m} \psi\left(\frac{2m}{2r}\right) =$$
$$= \psi(2m) - \psi\left(\frac{2m}{2}\right) + \psi\left(\frac{2m}{3}\right) - \dots + \psi\left(\frac{2m}{2m-1}\right).$$

Поскольку функция $\psi(x)$ неубывающая, то

$$\psi(2m) - \psi(m) \le \log\binom{2m}{m} \le \psi(2m) - \psi(m) + \psi\left(\frac{2}{3}m\right). \qquad (5)$$

Следовательно, из (4) и (5) находим

$$\psi(2x) - \psi(x) \ge \log\binom{2m}{m} - \psi\left(\frac{2}{3}m\right) \ge$$
$$\ge m\log 4 - \frac{1}{2}\log 4m - \psi\left(\frac{2}{3}m\right), \qquad (6)$$

где $m = [x]$. Оценим сверху $\psi(x)$, пользуясь (5). Полагая $m_1 = [x/2]$, $m_2 = [x/4]$, ..., из (3), (4) и (5) получаем

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \le \log\binom{2m_1}{m_1} \le m_1 \log 4 + \frac{1}{2}\log(2m_1 + 1),$$
$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) \le m_2 \log 4 + \frac{1}{2}\log(2m_2 + 1),$$
$$\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{8}\right) \le m_3 \log 4 + \frac{1}{2}\log(2m_3 + 1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Складывая левые и правые части получившихся неравенств, находим

$$\psi(x) \le (m_1+m_2+m_3+\cdots)\log 4 + \frac{1}{2}\log(2m_1+1)+$$
$$+\frac{1}{2}\log(2m_2+1)+\frac{1}{2}\log(2m_3+1)+\cdots<$$
$$<\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\cdots\right)\log 4+\log^2(x+1)\le x\log 4+\log^2(x+1).$$

Из этого неравенства и (6) получаем ($m=[x]\ge 1024$)

$$\psi(2x)-\psi(x)\ge m\log 4-\frac{1}{2}\log 4m-\frac{2}{3}m\log 4-\log^2\left(\frac{2}{3}m+1\right)\ge$$
$$\ge\frac{m}{3}\log 4-\log^2 m. \qquad (7)$$

Заметим, что

$$\psi(2m)-\psi(m)=\sum_{m<n\le 2m}\Lambda(n)=\sum\nolimits_{1}_{m<n\le 2m}\Lambda(n)+\sum\nolimits_{2}_{m<n\le 2m}\Lambda(n),$$

где символ $\sum_1$ означает суммирование по простым числам, $\sum_2$ — п всем остальным. Каждому числу n во второй сумме, для которого $\Lambda(n)\ne 0$, поставим в соответствие простое число p_n такое, что $p_n|n$. Очевидно,

$$\Lambda(p_n)=\Lambda(n) \quad \text{и} \quad p_n\le\sqrt{2m}.$$

В силу этого,

$$\sum\nolimits_{2}_{m<n\le 2m}\Lambda(n)\le\psi(\sqrt{2m})\le\sqrt{2m}\log 4+\log^2 m.$$

Отсюда и из (7) следует, что

$$\sum\nolimits_{1}_{m<n\le 2m}\Lambda(n)=\sum_{m<p\le 2m}\log p\ge\frac{m}{3}\log 4-2\log^2 m-\sqrt{2m}\log 4,$$

или

$$\sum_{m<p\le 2m}1\ge\frac{1}{\log 2m}\left(\frac{m}{3}\log 4-\sqrt{2m}\log 4-2\log^2 m\right).$$

Вспоминая, что $m=[x]$, $x\ge(2n)^2$, $x>1024$, легко убедимся, что правая часть последнего неравенства больше $\sqrt{x}/2\ge n$. Лемма доказана.

2. Лемма Линника.

Л е м м а 2. *Пусть p — простое число, $p>n$, $1\le P\le p^n$, a — целое число. Тогда для числа T решений системы сравнений*

$$x_1+\cdots+x_n\equiv y_1+\cdots+y_n \pmod p$$
$$x_1^2+\cdots+x_n^2\equiv y_1^2+\cdots+y_n^2 \pmod{p^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^n+\cdots+x_n^n\equiv y_1^n+\cdots+y_n^n \pmod{p^n}$$

$$1-a\le x_1,\ldots,x_n,\quad y_1,\ldots,y_n\le P-a,\quad x_i\not\equiv x_j \pmod p,\quad i\ne j,$$

справедлива оценка

$$T\le n!p^{n(n-1)/2}P^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $T\le P^nT_1$, где T_1 — число решений следующей системы сравнений:

$$\begin{aligned} x_1+\cdots+x_n&\equiv\lambda_1 \pmod p\\ x_1^2+\cdots+x_n^2&\equiv\lambda_2 \pmod{p^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1^n+\cdots+x_n^n&\equiv\lambda_n \pmod{p^n}\end{aligned} \qquad (8)$$
$$1\le x_1,\ldots,x_n\le p^n,\quad x_i\not\equiv x_j \pmod p,\quad i\ne j,$$

и $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — некоторый фиксированный набор целых чисел. Чтобы оценить T_1, представим x_t для каждого $t=1,2,\ldots,n$ в виде

$$x_t=x_{1,t}+px_{2,t}+\cdots+p^{n-1}x_{n,t},$$

где $-a+1\le x_{1,t}\le p-a$, $0\le x_{2,t},\ldots,x_{n,t}\le p-1$.

Чтобы набор $x_1,\ldots,x_n$ был решением системы (8), необходимо, чтобы переменные $x_{1,1},\ldots,x_{1,n}$ удовлетворяли системе сравнений

$$x_{1,1}^\nu+\cdots+x_{1,n}^\nu\equiv\lambda_\nu \pmod p,\quad \nu=1,2,\ldots,n,$$

а переменные $x_{s,1},\ldots,x_{s,n}$, $s=2,\ldots,n$, — своей системе линейных сравнений (при фиксированных $x_{1,1},\ldots,x_{1,n}$):

$$x_{s,1}(\nu x_{1,1}^{\nu-1})+\cdots+x_{s,n}(\nu x_{1,n}^{\nu-1})\equiv\lambda_{\nu,s} \pmod p,\quad \nu=s,\ldots,n,$$

где $\lambda_{s,s},\ldots,\lambda_{n,s}$ — некоторые целые числа.

Число решений первой системы не превосходит $n!$, так как из элементарной теории симметрических функций следует, что при $p>n$ и фиксированных λ_ν все решения этой системы есть перестановки некоторого единственного решения. Далее, матрица коэффициентов каждой из линейных систем сравнений имеет в силу попарной несравнимости переменных x_t по модулю p максимальный ранг, и поэтому число ее решений не превышает величины p^s. Для T_1 и T получаем оценки

$$T_1\le n!pp^2\ldots p^{n-1}=n!p^{n(n-1)/2};\qquad T\le n!p^{n(n-1)/2}P^n.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — целые числа, $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $J(P;n,k;\Lambda)$ — число решений системы уравнений*

$$\begin{aligned} x_1+\cdots-x_{2k}&=\lambda_1\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_1^n+\cdots-x_{2k}^n&=\lambda_n,\end{aligned} \qquad (9)$$
$$1\le x_1,\ldots,x_{2k}\le P.$$

Справедливы следующие соотношения:

а) $J(P;n,k;\Lambda)=\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\left|\sum\limits_{x\le P}\exp(2\pi i(\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n))\right|^{2k}\times$

$$\times\exp(-2\pi i(\alpha_1\lambda_1+\dots+\alpha_n\lambda_n))d\alpha_1\dots d\alpha_n;$$

б) $J(P;n,k;\Lambda)\le J(P;n,k;0)=J(P;n,k)=J$;

в) $\sum\limits_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}J(P;n,k;\Lambda)=P^{2k}$;

г) $|\lambda_1|<kP,\dots,|\lambda_n|<kP^n$;

д) $J=J(P;n,k)>(2k)^{-n}P^{2k-(n^2+n)/2}$;

е) $\left|\sum\limits_{x\le P}\exp(2\pi i(\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n))\right|^{2k}=$

$$=\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}J(P;n,k;\Lambda)\exp(2\pi i(\alpha_1\lambda_1+\dots+\alpha_n\lambda_n)).$$

Доказательство. Соотношение а) получим, если возведем модуль подынтегральной суммы в степень $2k$ и проинтегрируем по $\alpha_1,\dots,\alpha_n$; б) следует из того, что модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции; в) следует из того, что левая часть равенства есть число всех возможных наборов $x_1,\dots,x_{2k}$ системы (9), т.е. P^{2k}; г) следует из условий на $x_1,\dots,x_{2k}$; д) следует из в), б) и г); е) получим, если возведем модуль суммы в степень $2k$ и соберем вместе слагаемые с условием $x_1+\dots-x_{2k}=\lambda_1,\dots,x_1^n+\dots-x_{2k}^n=\lambda_n$. Лемма доказана.

3. Рекуррентная формула для $J(P;n,k)$. Докажем теперь основное соотношение, из которого уже легко получить доказательство теоремы о среднем.

Лемма 4. *Пусть $k\ge n$, $P\ge1$. Тогда существует число p, принадлежащее промежутку $(P^{1/n},2P^{1/n}]$ и такое, что*

$$J=J(P;n,k)\le4k^{2n}p^{2k-2n+n(n-1)/2}P^nJ(P_1;n,k-n)+(2n)^{2kn}P^k, \tag{10}$$

где

$$P_1=Pp^{-1}+1.$$

Доказательство. Если $P\le(4n^2)^n$, то, полагая $p=2P^{1/n}$, видим, что второе слагаемое неравенства (10) не меньше чем P^{2k}, а первое слагаемое всегда неотрицательно, т.е. неравенство (10) в этом случае становится тривиальным. Поэтому будем считать, что

$$P>(4n^2)^n.$$

Тогда на промежутке $(P^{1/n},2P^{1/n})$ по лемме 1 содержится не менее n различных простых чисел из этого промежутка и обозначим их

буквами $p_1,\dots,p_n$. Пусть

$$f(x)=\alpha_1x+\dots+\alpha_nx^n.$$

Тогда J представится в виде кратного интеграла:

$J=J(P;n,k)=$

$$=\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\left|\sum_{x_1\le P}\dots\sum_{x_k\le P}\exp\{2\pi i(f(x_1)+\dots+f(x_k))\}\right|^2d\alpha_1\dots d\alpha_n. \tag{11}$$

Множество всех наборов $\overline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ разобьем на два класса A и B: набор $\overline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ отнесем к классу A, если среди чисел $p_1,\dots,p_n$ существует такое число p_s, что среди чисел $x_1,\dots,x_k$ найдется по крайней мере n попарно не сравнимых по модулю p_s чисел; все остальные наборы $\overline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ отнесем к классу B.

Вводя для краткости новые обозначения (развернутый вид этих обозначений очевиден), равенство (11) преобразуем в следующее неравенство:

$$J=\int\limits_\Omega\left|\sum_{\overline{x}\in A}+\sum_{\overline{x}\in B}\right|^2d\Omega\le$$

$$\le2\int\limits_\Omega\left|\sum_{\overline{x}\in A}\right|^2d\Omega+2\int\limits_\Omega\left|\sum_{\overline{x}\in B}\right|^2d\Omega=2J_1+2J_2.$$

Оценим интеграл J_1. Величина J_1 — это число решений системы уравнений (1) при условии, что $\overline{x}=(x_1,\dots,x_k)\in A$, $\overline{y}=(y_1,\dots,y_k)\in A$. Все наборы $\overline{x}=(x_1,\dots,x_k)\in A$ разобьем на n совокупностей $A_1,\dots,A_n$, относя в одну совокупность те из них, которые отвечают своему $p_s=p$, $s=1,\dots,n$. Если набор отвечает нескольким p_s, то для определенности отнесем его в ту совокупность, которая отвечает наименьшему p_s. Применяя опять очевидные сокращенные обозначения, найдем

$$J_1=\int\limits_\Omega\left|\sum_{\overline{x}\in A}\right|^2d\Omega=\int\limits_\Omega\left|\sum_{s=1}^n\sum_{\overline{x}\in A_s}\right|^2d\Omega\le$$

$$\le n\sum_{s=1}^n\int\limits_\Omega\left|\sum_{\overline{x}\in A_s}\right|^2d\Omega=n\sum_{s=1}^nJ_{1,s}.$$

Оценим $J_{1,s}$. Сумма, квадрат модуля которой стоит под интегралом $J_{1,s}$, имеет вид

$$\sum_{\overline{x}\in A_s}=\sum_{x_1}\dots\sum_{x_k},$$

причем $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A$, т.е. среди чисел $x_1, \ldots, x_k$ есть n попарно не сравнимых между собой по модулю p_s чисел. Все наборы из совокупности A_s разобьем на классы, возможно пересекающиеся, следующим образом. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — натуральные числа, $1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le k$. Все наборы $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ такие, что числа $x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}$ попарно не сравнимы между собой по модулю p_s, отнесем в один класс. Пусть R_1 и R_2 — два разных класса совокупности A_s. Сделав перенумерацию неизвестных, можно легко убедиться в том, что

$$\int\limits_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in R_1} \right|^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left| \sum_{\bar{x} \in R_2} \right|^2 d\Omega.$$

Поскольку всего классов, очевидно,

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!},$$

то, обозначая символом $A_{1,s}$ набор, соответствующий $t_1 = 1$, $t_2 = 2, \ldots, t_n = n$, получим

$$J_{1,s} \le \binom{k}{n}^2 \int\limits_{\Omega} \left| \sum_{A_{1,s}} \right|^2 d\Omega \le$$

$$\le \binom{k}{n}^2 \int\limits_{\Omega} \left| \sum\nolimits'_{x_1, \ldots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{x \in P} \exp(2\pi i f(x)) \right|^{2k-2n} d\Omega.$$

Здесь штрих в первой сумме означает, что суммирование ведется по наборам чисел $x_1, \ldots, x_n$, попарно не сравнимых между собой по модулю $p_s = p$. Сплошное суммирование по всей сумме разобьем на p прогрессий с разностью p и применим неравенство Гельдера. Получим

$$J_{1,s} \le \binom{k}{n}^2 \int\limits_{\Omega} \left| \sum\nolimits'_{x_1, \ldots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{x \le P} \exp\left(2\pi i f(x)\right) \right|^{2k-2n} d\Omega \le$$

$$\le \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n-1} \sum_{y=1}^{p} \int\limits_{\Omega} \left| \sum\nolimits'_{x_1, \ldots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{0 \le z \le Pp^{-1}} \exp\left(2\pi i f(y + pz)\right) \right|^{2k-2n} d\Omega.$$

Пусть y_0 — то значение y, при котором последний интеграл максимален. Пользуясь тем, что если $x_1^0, \ldots, x_k^0$, $y_1^0, \ldots, y_k^0$ — решение системы (1), то и $x_1^0 + a, \ldots, x_k^0 + a, y_1^0 + a, \ldots, y_k^0 + a$ — тоже решение системы (1), приходим к неравенству

$$J_{1,s} \le \binom{k}{n}^2 p^{2k-2n} \int\limits_{\Omega} \left| \sum\nolimits''_{x_1, \ldots, x_n} \right|^2 \left| \sum_{0 \le z \le Pp^{-1}} \exp\left(2\pi i f(pz)\right) \right|^{2k-2n} d\Omega,$$

где символ $\sum''$ означает суммирование по всем наборам чисел $x_1, \ldots, x_n$, которые изменяются в пределах от $1 - y_0$ до $P - y_0$ и попарно не сравнимы по модулю p. Интеграл справа равен числу решений следующей системы уравнений (это число обозначим символом J'):

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_n &= p(z_1 + \cdots + z_{k-n} - v_1 - \cdots - v_{k-n}) \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 &= p^2(z_1^2 + \cdots + z_{k-n}^2 - v_1^2 - \cdots - v_{k-n}^2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n - y_1^n - \cdots - y_n^n &= p^n(z_1^n + \cdots + z_{k-n}^n - v_1^n - \cdots - v_{k-n}^n), \end{aligned}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют сформулированному выше для переменных $x_1, \ldots, x_n$ условию, а переменные $z_1, \ldots, z_{k-n}$, $v_1, \ldots, v_{k-n}$ принимают все целые значения от нуля до Pp^{-1}.

Пусть символ $J'(Pp^{-1}; n, k-n; \Lambda)$, где $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — некоторый набор целых чисел, означает число решений системы уравнений

$$z_1^\nu + \cdots + z_{k-n}^\nu - v_1^\nu - \cdots - v_{k-n}^\nu = \lambda_\nu, \qquad \nu = 1, 2 \ldots, n.$$

Очевидно, что имеет место неравенство

$$J'(Pp^{-1}; n, k-n; \Lambda) \le J(P_1; n, k-n)$$

(мы, кроме того, что J' принимает наибольшее значение при $\Lambda = (0, \ldots, 0)$, опять воспользовались тем, что если к решению системы (1) прибавить некоторое число, то снова получится решение системы (1)). Пусть также символ $D(\Lambda)$ означает число решений системы уравнений

$$x_1^\nu + \cdots + x_n^\nu - y_1^\nu - \cdots - y_n^\nu = p^\nu \lambda_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда, обозначая символом $\sum\limits_{\Lambda}$ суммирование по всевозможным наборам Λ, получим

$$J' = \sum_{\Lambda} D(\Lambda) J'(Pp^{-1}; n, k-n; \Lambda) \le$$

$$\le J(P_1; n, k-n) \sum_{\Lambda} D(\Lambda) = J(P_1; n, k-n) T,$$

где T есть число решений системы сравнений

$$x_1^\nu + \cdots + x_n^\nu - y_1^\nu - \cdots - y_n^\nu \equiv 0 \pmod{p^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$
$$-y_0 + 1 \le x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \le P - y_0.$$

К величине T применима оценка леммы 2:

$$T \le n! p^{n(n-1)/2} P^n.$$

Следовательно, собирая найденные оценки, для J_1 получаем такое неравенство:

$$J_1 \le n! \binom{k}{n}^2 n^2 p^{2k-2n+n(n-1)/2} P^n J(P_1; n, k-n),$$

где p означает то из p_s, при котором правая часть последнего неравенства максимальна.

Оценим теперь J_2. Величина J_2 — число решений системы уравнений (1) при условии, что $\overline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in B$, $\overline{y} = (y_1,\dots,y_k) \in B$. Оценим сверху число элементов $\overline{x} \in B$. Пусть p_s одно из чисел $p_1,\dots,p_n$. Для каждого набора $\overline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in B$ рассмотрим набор $\overline{x}^{(s)}$, состоящий из остатков от деления на p_s координат $\overline{x}$:

$$\overline{x}^{(s)} = (x_1^{(s)},\dots,x_k^{(s)}), \qquad x_i \equiv x_i^{(s)} \pmod{p_s},$$

$$0 \le x_i^{(s)} < p_s, \qquad i = 1,2,\dots,k.$$

Обозначим символом B_s множество таким образом полученных наборов $\overline{x}^{(s)}$. Оценим число элементов B_s. Оно не превосходит числа $\binom{p_s}{n-1}(n-1)^k$. Тем самым для каждого $\overline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in B$ получаем систему сравнений

$$\overline{x} \equiv \overline{x}^{(s)} \pmod{p_s}, \qquad s = 1,2,\dots,n.$$

Эту систему сравнений можно заменить одним сравнением вида

$$\overline{x} \equiv \overline{M} \pmod{p_1 \dots p_n},$$

где $\overline{M} = (M_1,\dots,M_k)$ — фиксированный набор и $0 \le M_i < p_1 \dots p_n$, $i = 1,\dots,k$. Так как каждая координата $\overline{x}$ не превосходит P, $P < p_1 \dots p_n$, то последнее сравнение эквивалентно уравнению $\overline{x} = \overline{M}$. Тем самым число наборов B не превосходит числа наборов $\overline{M}$, т.е. произведения

$$\binom{p_1}{n-1}(n-1)^k \cdots \binom{p_n}{n-1}(n-1)^k.$$

Оценим теперь количество $\overline{y} = (y_1,\dots,y_k)$, исходя из условия, что они удовлетворяют системе (1). Если зафиксировать $k-n$ из них, то оставшиеся определяются однозначно, с точностью до порядка слагаемых, т.е. всех $\overline{y} = (y_1,\dots,y_k)$ не более $n!P^{k-n}$.

Итак,

$$J_2 \le (n-1)^{kn}\binom{p_1}{n-1}\dots\binom{p_n}{n-1}n!P^{k-n} \le n^{2kn}P^{k-1}.$$

Объединяя вместе оценки J_1 и J_2, найдем

$$J \le 2J_1 + 2J_2 \le 2n^2\binom{k}{n}^2 n!p^{2k-2n+n(n-1)/2}P^n J(P_1;n,k-n) + $$
$$+(2n)^{2kn}P^{k-1}.$$

Огрубляя правую часть, получим утверждение леммы:

$$J \le 4k^{2n}p^{2k-2n+n(n-1)/2}P^n J(P_1;n,k-n) + (2n)^{2kn}P^k.$$

4. Формулировка и доказательство теоремы о среднем.

Теорема 1. *Пусть n, k, τ — натуральные числа. Тогда при $k \ge n\tau$, $P \ge 1$ имеет место оценка*

$$J = J(P;n,k) \le n^{2\Delta n}2^{\text{æ}}(8k)^{2n\tau}P^{2k-\Delta},$$

где

$$\Delta = \Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{n})^\tau,$$

$$\text{æ} = \text{æ}(\tau) = n^2\tau + \frac{n(n+1)}{2}\tau - \frac{n^2(n-1)}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau\right) < \frac{3(n+1)^2}{2}\tau.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $k = n\tau$, $n \ge 2$. Проведем доказательство индукцией по параметру τ. При $\tau = 1$ утверждение теоремы справедливо, так как в этом случае $k = n$, $\Delta(1) = n$, $\text{æ}(1) = n^2 + n$, и оценка выглядит так:

$$J \le n^{2n^2}2^{n^2+n}(8n)^{2n}P^{2k-n},$$

что несколько хуже просто получаемой оценки

$$J \le n!P^{2k-n}.$$

Предположим теперь, что теорема справедлива для $\tau = m \ge 1$ и докажем ее справедливость для $\tau = m+1$. К величине $J(P;n,n(m+1))$ применим лемму 4. Получаем неравенство

$$J(P;n,n(m+1)) \le 4k^{2n}p^{2k-2n+n(n-1)/2}P^n J(P_1;n,k-n) + (2n)^{2kn}P^k, \qquad (11)$$

где $k = n(m+1)$. К величине $J(P_1;n,k-n)$ применим оценку теоремы с $\tau = m$:

$$J(P_1;n,k-n) \le n^{2\Delta n}2^{\text{æ}}(8nm)^{2nm}P_1^{2k-\Delta},$$

где

$$\Delta = \Delta(m) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,$$

$$\text{æ} = \text{æ}(m) = n^2m + \frac{n(n+1)}{2}m - \frac{n^2(n-1)}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right).$$

Осталось подставить эту оценку в (11) и показать, что получившаяся при этом оценка не хуже, чем оценка теоремы при $\tau = m+1$. Заметим, что можно считать $P > (4k)^2$, так как в противном случае оценка теоремы хуже тривиальной P^{2k}. Действительно, всегда $\Delta(\tau) \le n\tau$, и поэтому при $P \le (4k)^2$

$$P^{2k} \le (8k)^{2n\tau}P^{2k-\Delta}.$$

Итак, $P > (4k)^2$. Тогда

$$pP^{-1} \le 2P^{-1+1/n} \le 2P^{-1/2} < (2k)^{-1};$$

поэтому

$$P_1^{2k-2n-\Delta(m)} = (Pp^{-1}+1)^{2k-2n-\Delta(m)} \le$$
$$\le P^{2k-2n-\Delta(m)}p^{-2k+2n+\Delta(m)}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \le 3P^{2k-2n-\Delta(m)}p^{-2k+2n+\Delta(m)}.$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части (11) не превосходит

$$12k^{2n}n^{2\Delta(m)n}2^{\varkappa(m)}(8nm)^{2nm}p^{\Delta(m)+n(n-1)/2}P^{2k-n-\Delta(m)} \le$$
$$\le 12k^{2n}2^{\varkappa(m)+\Delta(m)+n(n-1)/2}n^{2\Delta(m)n}(8nm)^{2nm}\times$$
$$\times P^{2k-(\Delta(m)+n+1/2-(n/2+\Delta(m)/n))} \le$$
$$\le 0,5n^{2\Delta(m+1)n}2^{\varkappa(m+1)}(8k)^{2n(m+1)}P^{2k-\Delta(m+1)},$$

так как из определения величин $\Delta(\tau)$ и $\varkappa(\tau)$ следует, что

$$\Delta(m+1) = \Delta(m)+n+\frac{1}{2}-\left(\frac{n}{2}+\frac{\Delta(m)}{n}\right),$$
$$\varkappa(m+1) \ge \varkappa(m)+\Delta(m)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Покажем теперь, что второе слагаемое в (11) также не превосходит

$$0,5n^{2\Delta(m+1)n}2^{\varkappa(m+1)}(8k)^{2n(m+1)}P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Поскольку $\Delta(m+1) \le k$, то можно считать, что

$$P > (2n)^{2n};$$

в противном случае понижение по P в оценке теоремы меньше, чем первый множитель, и утверждение становится тривиальным. Итак,

$$P > (2n)^{2n}, \quad \left((2n)^{-2n}P\right)^{k-\Delta(m+1)} \ge 1,$$
$$(2n)^{2kn}P^k\left((2n)^{-2n}P\right)^{k-\Delta(m+1)} \ge (2n)^{2kn}P^k,$$

т.е.

$$(2n)^{2kn}P^k \le n^{2\Delta(m+1)n}P^{2k-\Delta(m+1)};$$
$$0,5(2n)^{2\Delta(m+1)n}P^k \le 0,5n^{2\Delta(m+1)n}2^{\varkappa(m+1)}(8k)^{2n(m+1)}P^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Тем самым получена нужная оценка для $J(P;n,n\tau)$ при $\tau = m+1$. Теорема доказана.

§ 2. Оценка дзетовой суммы и следствия из нее

Из теоремы о среднем можно получить нетривиальные оценки индивидуальных тригонометрических сумм с многочленом в экспоненте или с функцией, близкой к многочлену. Такие суммы возникают в

теории дзета-функции Римана и имеют следующий вид:

$$S = \sum_{a<n\le b} n^{it}. \tag{1}$$

Суммы S вида (1) будем называть *дзетовыми*.

1. Вспомогательные леммы. Докажем предварительно две простые леммы.

Лемма 1. *При $P>1$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i\alpha x)\right| \le \min\left(P, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right).$$

Доказательство. Можно считать, никак не ограничивая общности, что $0<\alpha<1$. Тогда имеем

$$\left|\sum_{x=1}^{P}\exp(2\pi i\alpha x)\right| = \frac{|\exp(2\pi i\alpha P)-1|}{|\exp(2\pi i\alpha)-1|} \le \frac{1}{|\sin\pi\alpha|} \le \frac{1}{2\|\alpha\|}.$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $q\ge 1$, $(a,q)=1$, $|\theta|\le 1$. Тогда при любом β и $U>0$, $P\ge 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{x=1}^{P}\min\left(U, \|\alpha x+\beta\|^{-1}\right) \le 6(Pq^{-1}+1)(U+q\log q).$$

Доказательство. Достаточно показать, что при любом β_1

$$S = \sum_{x=1}^{q}\min\left(U, \|\alpha x+\beta_1\|^{-1}\right) \le 6(U+q\log q).$$

Имеем следующее равенство:

$$\alpha x+\beta_1 = \frac{ax+[q\beta_1]}{q}+\frac{\theta_1(x)}{q^2},$$

где $\theta_1(x) = \theta x+\{q\beta_1\}q$, $|\theta_1(x)|<2q$. Так как функция $\|x\|$ является периодической с периодом 1, то, делая замену $y = ax+[q\beta_1]$, найдем

$$S \le \sum_{|y|\le q/2}\min\left(U, \left\|\frac{y+\theta_2(y)}{q}\right\|^{-1}\right),$$

где $|\theta_2(y)|<2$. Можно считать $q>6$, так как в противном случае оценка S тривиальна. Если $2<|y|\le q/2$, то $\left\|\frac{y+\theta_2(y)}{q}\right\| \ge \frac{|y|-2}{q}$ и для S легко находим нужную оценку:

$$S \le 5U+\sum_{2<|y|\le q/2}\frac{q}{|y|-2} < 6(U+q\log q).$$

Лемма доказана.

2. Оценка дзетовой суммы и $|\zeta(s)|$ при $\operatorname{Re} s = 1$.

Т е о р е м а 1. *Существуют две абсолютные постоянные $c > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при $2 \le N \le t$ справедлива следующая оценка:*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} n^{it}\right| \le cN \exp\left(-\gamma \frac{\log^3 N}{\log^2 t}\right). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $100 \le M \le N$; оценим $|S|$,

$$S = \sum_{n=M+1}^{2M} n^{it}.$$

Возьмем $a = [M^{5/11}]$, $1 \le x, y \le a$. Имеем

$$S = \sum_{n=M+1}^{2M} \exp\left(it \log(n + xy)\right) + 2\theta a^2, \quad |\theta| \le 1.$$

Отсюда находим

$$|S| \le a^{-2} \sum_{n=M+1}^{2M} |W(n)| + 2a^2,$$

где

$$W(n) = W = \sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a} \exp\left(it \log(1 + \frac{xy}{n})\right).$$

Будем оценивать $|W|$. Так как $|e^{i\varphi} - 1| = 2|\sin(\varphi/2)| \le |\varphi|$, то при $r \ge 1$

$$\exp\left(it \log(1 + \frac{xy}{n})\right) = \exp\left(it F_r(xy)\right) + t\theta_1 \left(\frac{a^2}{n}\right)^{r+1},$$

где

$$F_r(xy) = \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left(\frac{xy}{n}\right)^m, \quad |\theta_1| \le 1.$$

Определим целое число r из условий $r - 1 < \frac{11 \log t}{\log M} \le r$. Тогда

$$W = W_1 + 4\theta_2 a^2 M^{-1/13},$$

где

$$W_1 = \sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a} \exp\left(2\pi i(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_r x^r y^r)\right),$$

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1}}{2\pi m} \cdot \frac{t}{n^m}, \quad m = 1, 2, \dots, r; \quad |\theta_2| \le 1.$$

При целом $k \ge 1$, пользуясь леммой 1.3 и неравенством Гельдера, находим

$$|W_1|^{2k} \le a^{2k-1} \sum_{x=1}^{a} \left|\sum_{y=1}^{a} \exp\left(2\pi i(\alpha_1 xy + \dots + \alpha_r x^r y^r)\right)\right|^{2k} \le$$

$$\le a^{2k-1} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J(P; n, k; \Lambda) \left|\sum_{x=1}^{a} \exp\left(2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \dots + \alpha_r \lambda_r x^r)\right)\right|;$$

опять пользуясь неравенством Гельдера, леммой 1.3 и леммой 1, находим

$$|W_1|^{4k^2} \le a^{4k^2 - 2k} \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} J(P; n, k; \Lambda)\right)^{2k-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} J(P; n, k; \Lambda) \left|\sum_{x=1}^{q} \exp\left(2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 x + \dots + \alpha_r \lambda_r x^r)\right)\right|^{2k} \le$$

$$\le a^{8k^2 - 4k} J(P; n, k) \left|\sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r}} J(P; n, k, M) \exp\left(2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r \mu_r)\right)\right| \le$$

$$\le a^{8k^2 - 4k} J(P; n, k) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} J(P; n, k; M) \times$$

$$\times \min\left(2A_1, \|\alpha_1 \mu_1\|^{-1}\right) \dots \min\left(2A_r, \|\alpha_r \mu_r\|^{-1}\right) \le$$

$$\le a^{8k^2 - 4k} J^2(P; n, k) \prod_{m=1}^{r} \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \|\alpha_m \mu_m\|^{-1}\right),$$

где буквой M обозначен вектор $(\mu_1, \dots, \mu_r)$, $A_m = 2ka^m$, $m = 1, \dots, r$. Для целых m из отрезка

$$4 \frac{\log t}{\log M} \le m \le 8 \frac{\log t}{\log M} \tag{4}$$

сумму по μ_m оценим, пользуясь леммой 2; для остальных m сумму по μ_m оценим тривиально, именно величиной $(2A_m)^2$. Для m из (4) имеем

$$\sigma_m = \sum_{|\mu_m| < A_m} \min\left(2A_m, \|\alpha_m \mu_m\|^{-1}\right) \le$$

$$\le 6(2A_m q_m^{-1} + 1)(2A_m + q_m \log q_m) \le$$

$$\le 6(2A_m)^2 (q_m^{-1} + A_m^{-1} + 0,25 q_m A_m^{-2}) \log q_m,$$

где

$$\alpha_m = \frac{(-1)^{m-1} t}{2\pi m n^m} = \frac{a_m}{q_m} + \frac{\theta_m}{q_m^2},$$

$$a_m = (-1)^{m-1}, \quad q_m = [2\pi m n^m t^{-1}], \quad |\theta_m| \le 1.$$

Из условий на m находим

$$\sigma_m \le 400(32)^r (2A_m)^2 t^{-2/11};$$

$$|W_1|^{4k^2} \le a^{8k^2 - 4k} J^2(P; n, k)(400)^r (32)^{r^2} (4k)^{2r} a^{r^2 + r} t^{-\frac{k}{11} \cdot \frac{\log t}{\log M}}.$$

Выбирая наименьшее целое r из условия $e^r \geq 380^r$, применяя к оценке $J(P;n,k)$ теорему 1.1 при $k = r\tau$ и помня, что $a \leq M^{5/11}$, получим

$$|W_1|^{4k^2} \leq a^{8k^2}(400)^r(32)^{r^2}(4k)^{2r}(2r\tau)^{10r^2\tau}t^{-\frac{4}{11}\cdot\frac{\log t}{\log M}};$$

$$|W_1| \leq c_1 a^2 \exp\left(-\gamma_1\frac{\log^3 M}{\log^2 t}\right),$$

где $c_1 > 0$ и $\gamma_1 > 0$ — абсолютные постоянные. Отсюда следует нужная оценка $|S|$, а из нее оценка (3). Теорема доказана.

Следствие 1. *При $|t| \geq 2$ справедлива следующая оценка:*

$$\zeta(1+it) = O\left(\log^{2/3}|t|\right). \tag{5}$$

Доказательство получается из теоремы 1.

Оценка $\zeta(s)$ типа (5) может быть получена в левой окрестности прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$.

3. Оценка $|\zeta(s)|$ при $\mathrm{Re}\, s < 1$.

Теорема 2. *Существует абсолютная постоянная $\gamma_1 > 0$ такая, что при*

$$\sigma \geq 1 - \frac{\gamma_1}{\log^{2/3}|t|}, \quad |t| \geq 2,$$

выполняется оценка

$$\zeta(\sigma+it) = O\left(\log^{2/3}|t|\right).$$

Доказательство. Можно предполагать, что $\sigma \leq 2$. Возьмем $\gamma_1 = 0,5\gamma$, где $\gamma > 0$ — абсолютная постоянная теоремы 1, $N = \exp(\log^{2/3}|t|)$, $x = |t|$. В силу следствия I.4.1 имеем $(s = \sigma + it)$

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq N} n^{-s} + \sum_{N<n\leq x} n^{-s} + O(1).$$

Модуль первой суммы не превосходит Y,

$$Y = \sum_{n\leq N} n^{-\sigma} \leq 1 + \int_1^N u^{-\sigma}du = 1 + \int_1^N \frac{u^{1-\sigma}}{u}du =$$

$$= O(\log N) = O\left(\log^{2/3}|t|\right).$$

Для оценки второй суммы применим частное суммирование (теорема II.1.1), полагая

$$c(n) = n^{-it}, \quad \mathrm{C}(u) = \sum_{N<n\leq u} n^{-it}, \quad f(u) = u^{-\sigma},$$

и теорему 1:

$$\left|\sum_{N<n\leq x} n^{-s}\right| \leq \sigma\int_N^x |\mathrm{C}(u)|u^{-1-\sigma}du + |\mathrm{C}(x)|x^{-\sigma} =$$

$$= O\left(\int_N^x u^{-\sigma}\exp\left(-\gamma\frac{\log^3 u}{\log^2|t|}\right)du\right) + O\left(|t|^{-1-\sigma-\gamma}\right) =$$

$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x}\exp\left(v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\log^2|t|}\right)dv\right) + O(1) =$$

$$= O\left(\int_{\log N}^{\log x}\exp\left(-\gamma\frac{v^3}{\log^2|t|}\right)dv\right) + O(1) = O\left(\log^{2/3}|t|\right).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 уже достаточно просто получить уточнение теоремы Валле-Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$. Однако мы сейчас докажем теорему об оценке $|\zeta(s)|$ в критической полосе, которая будет равномерной по параметрам t и σ. Следствие этой оценки мы применим к уточнению границы нулей $\zeta(s)$.

4. Оценка $|\zeta(s)|$ в окрестности прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Теорема 3. *При $0,5 \leq \mathrm{Re}\, s = \sigma \leq 1$, $|t| \leq 2$ справедлива следующая оценка:*

$$\zeta(s) = O\left(|t|^{a(1-\sigma)^{3/2}}\log|t|\right), \tag{6}$$

где $a > 0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Будем считать $t \geq 2$. В силу следствия I.4.1 при $x = t$, $s = \sigma + it$ имеем

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq t} n^{-s} + O(1).$$

Применяя к сумме по n частное суммирование, как и при доказательстве теоремы 2, найдем

$$\left|\sum_{n\leq t} n^{-\sigma}n^{it}\right| \leq \sigma\int_1^t |C(u)|u^{-1-\sigma}du + |C(t)|t^{-\sigma} =$$

$$= O\left(\int_1^t u^{-\sigma}\exp\left(-\gamma\frac{\log^3 u}{\log^2 t}\right)du\right) + O(1) =$$

$$= O\left(\int_0^{\log t}\exp\left(v(1-\sigma) - \gamma\frac{v^3}{\log^2 t}\right)dv\right) + O(1),$$

где $\gamma > 0$ — постоянная теоремы 1.

Подынтегральная функция достигает своего максимального значения при

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{3\gamma}} \log t,$$

причем это максимальное значение равно

$$\exp\left(\frac{2}{3\sqrt{3\gamma}}(1-\sigma)^{3/2}\log t\right) = t^{\frac{2(1-\sigma)^{3/2}}{3\sqrt{3\gamma}}}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы с $a = 2/(3\sqrt{3\gamma})$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $c > 0$ — произвольное фиксированное число, $t \ge 10$; тогда существует такая постоянная $c_1 > 0$, что при $\sigma \ge 1 - c(\log\log t)^{2/3}\log^{-2/3} t$, $t \ge 10$, выполняется оценка*

$$\zeta(s) = O(\log^{c_1} t).$$

Утверждение следствия при $\sigma \le 1$ получается из теоремы 3, а при $\sigma > 1$ — из теоремы 2.

§ 3. Граница нулей $\zeta(s)$

Т е о р е м а 1. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что в области s-плоскости вида*

$$t \ge 10, \quad \sigma \ge 1 - c(\log\log t)^{-1/3}\log^{-2/3} t,$$

дзета-функция Римана $\zeta(s)$ не имеет нулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Никак не ограничивая общности, будем считать $t \ge t_0 > 0$, где t_0 — достаточно большое число. Пусть $\rho = \sigma + it$ — нуль $\zeta(s)$; положим $\sigma = 1 - a(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3}$, $0 \le a \le 1$, и докажем, что $a \ge c_2 > 0$. Рассмотрим точку s_0,

$$s_0 = \sigma_0 + it, \quad \sigma_0 = 1 + b(\log t)^{-2/3}(\log\log t)^{-1/3}, \quad b = \frac{c}{52(c_1+1)},$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$ — абсолютные постоянные следствия 2, и из точки s_0 опишем окружность радиуса r, $r = c(\log\log t)^{2/3}(\log t)^{-2/3}$.

Точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $0,5r$ с центром s_0, так как $t \ge t_0$. Полагая в теореме П.2.5 $F(s) = \zeta(s)$, оценим $\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right|$ в круге $|s - s_0| \le r$. По следствию 2 в указанном круге для $\zeta(s)$ справедлива оценка

$$\zeta(s) = O(\log^{c_1} t);$$

кроме того,

$$|\zeta(s_0)|^{-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma_0} \le 1 + \int_1^{\infty} u^{-\sigma_0}du = 1 + (\sigma_0 - 1)^{-1},$$

поэтому имеем

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}\right| \le M = c_2\log^{c_1+1} t.$$

Точно такая же оценка имеет место и в круге $|s - s_1| \le r$, $s_1 = \sigma_0 + 2it$. Так как $\zeta(s) \ne 0$ в областях $|s - s_0| \le 0,5r$, $\mathrm{Re}\,(s - s_0) \ge 0$, и $|s - s_1| \le 0,5r$, $\mathrm{Re}\,(s - s_1) \ge 0$, то, применяя теорему П.2.5, найдем

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} \le \frac{4}{r}\log M - \mathrm{Re}\,\frac{1}{s_0 - \rho} \le$$

$$\le \left(\frac{5(c_1+1)}{c} - \frac{1}{b+a}\right)(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3};$$

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(s_1)}{\zeta(s_1)} \le \frac{4}{r}\log M \le \frac{5(c_1+1)}{c}(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3};$$

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \le \frac{1}{\sigma_0 - 1} + c_3 \le \frac{1}{b}(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3}.$$

Далее, пользуясь неравенством

$$0 \le 3\left\{-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}\right\} + 4\left\{-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma_0+it)}{\zeta(\sigma_0+it)}\right\} + \left\{-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma_0+2it)}{\zeta(\sigma_0+2it)}\right\},$$

легко находим

$$0 \le \frac{3}{b} - \frac{4}{b+a} + \frac{26(c_1+1)}{c}; \quad a \ge \frac{1 - b\cdot 26(c_1+1)c^{-1}}{3b^{-1} + 26(c_1+1)c^{-1}} = \frac{c}{364(c_1+1)},$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\psi(x) = x + O\left(x\exp\left(-c(\log x)^{0,6}(\log\log x)^{-0,2}\right)\right);$$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x\exp\left(-c_1(\log x)^{0,6}(\log\log x)^{-0,2}\right)\right).$$

§ 4. Многомерная проблема делителей Дирихле

Применение оценки (2.6) к многомерной проблеме делителей Дирихле позволяет получить при больших значениях k принципиальное улучшение результатов Дирихле, Харди—Литтлвуда, Ландау.

Т е о р е м а 1. *При $x \ge 2$ справедлива асимптотическая формула:*

$$T_k(x) = \sum_{n \le x}\tau_k(n) = xP_{k-1}(\log x) + \theta x^{\alpha(k)}(c\log x)^k,$$

где $P_{k-1}(u)$ — многочлен степени $k-1$, $|\theta| \le 1$, $\alpha(k) = 1 - c_1k^{-2/3}$, $c > 0$, $c_1 > 0$ — абсолютные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в теореме П.5.2 $a(n) = \tau_k(n)$, $F(s) = \zeta^k(s)$, $A(\xi) = T_k(\xi)$, $b = 1 + \log^{-1}x$, $e^2 \le T \le x$. По теореме П.10.3 имеем

$$0 \le A(\xi) \le \xi\frac{(\log\xi + k - 1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

поэтому

$$B(b)=\int_1^\infty \frac{|A(\xi)|}{\xi^{b+1}}d\xi \le \int_1^\infty \frac{(\log\xi+k-1)^{k-1}}{\xi^b(k-1)!}d\xi \le$$
$$\le \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{b-1}+\frac{1}{(b-1)^2}+\dots+\frac{1}{(b-1)^k}\right)\le 2(3\log x)^k.$$

Кроме того, $\max\limits_{x-1\le\xi\le x+1}|A(\xi)| \le \max\limits_{0,5x\le\xi\le 1,5x}|A(\xi)| \le 4x(3\log x)^{k-1}$. Следовательно, по теореме II.5.2

$$|R(x)| \le c\left(x^2T^{-1}(3\log x)^k + x(3\log x)^{k-1}\log T\right) \le c_1x^2T^{-1}(3\log x)^k.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\int_1^x T_k(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds + c_1\theta x^2T^{-1}(3\log x)^k. \quad (1)$$

Вычислим последний интеграл. По теореме 2.3 при некотором фиксированном числе $a>1$ и $|t|\ge 2$ справедлива оценка

$$|\zeta(\sigma+it)| \le c|t|^{a(1-\sigma)^{3/2}}\log|t|, \quad 1/2\le\sigma\le 1. \quad (2)$$

Возьмем $\alpha = 1-(2ak)^{-2/3}$, $T=x^{1-\alpha}$, и рассмотрим интеграл J по контуру Γ прямоугольника с вершинами $b\pm iT$, $\alpha\pm iT$:

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds.$$

Этот интеграл, с одной стороны, равен сумме вычетов подынтегральной функции; подынтегральная функция имеет полюс в точке $s=1$ с вычетом, равным $x^2P(\log x)$, где $P(u)$ — многочлен степени, не большей $k-1$. С другой стороны, J равняется сумме четырех интегралов по сторонам прямоугольника Γ, т.е.

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds - J_1 - J_2 - J_3, \quad (3)$$

где

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds,$$
$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+iT}^{b+iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds,$$
$$J_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{b-iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds.$$

Оценим каждый интеграл J_1, J_2, J_3 по абсолютной величине. Пусть $4\le T_1\le T$; тогда из (2) имеем

$$\left|\int_{T_1}^{2T_1}\frac{\zeta^k(\alpha+it)x^{\alpha+1+it}}{(\alpha+it)(\alpha+1+it)}dt\right| \le \frac{x^{\alpha+1}}{T_1}T_1^{ka(1-\alpha)^{3/2}}(c\log T_1)^k.$$

Поскольку $ka(1-\alpha)^{3/2}=1/2$, то правая часть последнего неравенства не превосходит $T_1^{-1/2}x^{\alpha+1}(c\log x)^k$, и, следовательно,

$$|J_1|\le x^{\alpha+1}(c\log x)^k.$$

Модули интегралов J_2 и J_3 равны, поэтому

$$|J_2|=|J_3|\le\int_\alpha^b|\zeta(\sigma+it)|^kT^{-2}x^{\sigma+1}d\sigma\le$$
$$\le T^{ka(1-\alpha)^{3/2}-2}(c\log T)^kx^2 \le x^{\alpha+1}(c_2\log x)^k.$$

Из оценок интегралов J_1, J_2, J_3, равенства (3) и значения J получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\zeta^k(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds = x^2P(\log x)+\theta_1x^{\alpha+1}(c\log x)^k.$$

Наконец, из (1) и последнего равенства находим

$$\int_1^x T_k(\xi)d\xi = x^2P(\log x)+\theta x^{\alpha+1}(c\log x)^k.$$

Поскольку $T_k(\xi)$ — неубывающая функция ξ, то при $h=x^{(\alpha+1)/2}$ будем иметь

$$T_k(x)\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}T_k(\xi)d\xi = \frac{1}{h}\left(\int_1^{x+h}T_k(\xi)d\xi - \int_1^x T_k(\xi)d\xi\right)=$$
$$=\frac{(x+h)^2P(\log(x+h))-x^2P(\log x)}{h}+\theta h^{-1}x^{\alpha+1}(c\log x)^k=$$
$$=xP_{k-1}(\log x)+\frac{1}{2}hR_1(x,h)+\theta x^{0,5(\alpha+1)}(c\log x)^k,$$

где $R_1(x,h)$ — вторая производная от $x^2P(\log x)$ в точке $x+\theta_1h$, $0\le\theta_1\le 1$. Аналогично получаем

$$T_k(x)\ge\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}T_k(\xi)d\xi = h^{-1}\left(\int_1^{x}T_k(\xi)d\xi - \int_1^{x-h} T_k(\xi)d\xi\right)=$$
$$=h^{-1}\left(x^2P(\log x)-(x-h)^2P(\log(x-h))\right)+\theta_1h^{-1}x^{\alpha+1}(c\log x)^k=$$
$$=xP_{k-1}(\log x)+0,5hR_2(x,h)+\theta x^{0,5(\alpha+1)}(c\log x)^k,$$

где, как и выше, $R_2(x,h)$ — вторая производная от $x^2P(\log x)$ только в точке $x-\theta_2 h$, $0\le\theta_2\le 1$.

Осталось оценить сверху $|R_1(x,h)|$ и $|R_2(x,h)|$, другими словами, надо оценить сверху по абсолютной величине вычет $\Phi(x)$ функции $\zeta^k(s)x^{s-1}$ в точке $x+\theta_3 h$, $|\theta_3|\le 1$, т.е. $|\Phi(x+\theta_3 h)|$. Имеем

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\zeta^k(s)x^{s-1}ds,$$

где Γ_1 — контур прямоугольника с вершинами $b\pm i$, $0,5\pm i$, $b=1+$ $+\log^{-1}x$. В силу следствия I.4.1 при $\operatorname{Re}s>0$, $N=1$

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}-s\int\limits_1^\infty\frac{\{u\}du}{u^{s+1}}.$$

На каждой из сторон Γ_1 выполняются оценки $|\zeta(s)|\le c\log x$, $|x^{s-1}|\le c$, поэтому

$$\big|\Phi(x)\big|\le(c\log x)^k;\quad \big|\Phi(x+\theta_3 h)\big|\le(c\log x)^k.$$

Из нижней и верхней оценок $T_k(x)$, определения величин h и α находим

$$T_k(x)=xP_{k-1}(\log x)+\theta x^{1-\alpha(k)}(c\log x)^k,$$

где $\alpha(k)=0,5(2ak)^{-2/3}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Теорема 1.1 является одним из вариантов теоремы Виноградова о среднем и служит основой метода И.М.Виноградова оценок сумм Г.Вейля. Современное состояние вопроса см. в [3, 14].

2. Первое усиление теоремы Ш.Валле-Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$ (и, как ее следствие, — уточнение остаточного члена в асимптотическом законе распределения простых чисел) получено Д.Литтлвудом [149]. Литтлвуд при этом пользовался оценками тригонометрических сумм по методу Г.Вейля, и его результат выглядит так:

$$\pi(N)=\int\limits_2^N\frac{du}{\log u}+O\big(R(N)\big),\quad R(N)=N\exp\left(-c\sqrt{\log N\log\log N}\right).$$

Принципиальное уточнение результатов Валле-Пуссена и Литтлвуда на основе метода Виноградова получено Н.Г.Чудаковым [88], который доказал, что

$$R(N)=N\exp\left(-c(\log N)^{4/7-\varepsilon}\right).$$

В 1942 г. И.М.Виноградов анонсировал [10], а в 1958 г. опубликовал [12] полное доказательство следующего результата (более точно, опубликована оценка тригонометрической суммы, из которой этот результат следует):

$$R(N)=N\exp\left(-c(\log N)^{3/5-\varepsilon}\right).$$

И.М.Виноградов надеялся получить своим методом и более точный результат, о чем можно судить по его замечанию в [14, с.13]: "... По-видимому, добиться существенных сдвигов в решении вопроса о порядке R (хотя бы найти $R=O(N^{1-c})$ пусть даже с $c=0,000001$) с помощью только улучшения оценок сумм Г.Вейля без дополнительных существенных сдвигов в теории функции $\zeta(s)$ трудно".

3. Проблему получения правильного порядка остаточного члена теоремы 4.1 иногда называют проблемой Пильтца. Л.Дирихле [117] (см. также Э.Ландау [144]) доказал, что

$$\alpha(k)\le 1-1/k,\quad k=2,3,\dots;$$

Г.Ф.Вороной [172] и Э.Ландау [144] доказали, что

$$\alpha(k)\le 1-2/(k+1),\quad k=2,3,\dots;$$

а Г.Харди и Д.Литтлвуд [127] доказали, что

$$\alpha(k)\le 1-3/(k+2),\quad k=4,5,\dots;$$

В 1934 г. И.М.Виноградов, разрабатывая свой метод оценок тригонометрических сумм в [8, с.186, п. 2], замечает, что "...например, в многомерной задаче Пильтца

$$x_1x_2\dots x_n\le a$$

остаточный член получается порядка несравненно более низкого, чем все известные ранее".

В 1960 г. Х.Е.Рихерт [161] на основе метода оценок тригонометрических сумм И.М.Виноградова доказал, что если

$$\theta_k=\inf\left\{\xi\,\Bigg|\sum_{n\le x}\tau_k(n)-\operatorname*{Res}_{s=1}\frac{x^s}{s}\zeta^k(s)=O(x^\xi)\right\},$$

то

$$\theta_k\le 1-ck^{-2/3},$$

другими словами, для $\alpha(k)$ выполняется оценка

$$\alpha(k)\le 1-ck^{-2/3}+\varepsilon.$$

Теорема 4.1 доказана [35] (см. также [34], [36]). Все последующие исследования на эту тему связаны с обобщением задачи, вычислением и уточнением постоянной c и проводятся по схеме работы [34] (см. [31], [118], [136], [137], [75]).

Г.Харди [124] доказал, что для $\alpha(k)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\alpha(k)\ge\frac12-\frac{1}{2k},\quad k=2,3,\dots.$$

ГЛАВА V
ПЛОТНОСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $N(\sigma, T)$ обозначает число нулей дзета-функции Римана, лежащих в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$. Во многих задачах теории чисел удается избежать использования недоказанной гипотезы Римана в ее различных вариантах путем применения *плотностных теорем*. Так называются нетривиальные оценки сверху для функции $N(\sigma, t)$ при $1/2 \leq \sigma < 1$. Ниже будут доказаны две теоремы об оценках сверху $N(\sigma, T)$ и дано применение второй из них к вопросу о простых числах в интервалах малой длины.

§1. Вспомогательные неравенства

Лемма 1. *Пусть $S(t)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция, $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k$. Тогда, полагая $\delta = \min\limits_{0 \leq r < k}(t_{r+1} - t_r)$, будем иметь*

$$\sum_{r=1}^{k} |S(t_r)|^2 \leq \delta^{-1} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt + 2 \left(\int_{t_0}^{t_k} |S(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_k} |S'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Определим функцию $\omega_r(t)$ следующим образом:

$$\omega_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_r \leq t \leq t_{r+1}, \\ 0, & \text{если } t \notin [t_r, t_{r+1}]. \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_0}^{t} \omega_r(u) du,$$

тогда

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} \varphi_r(t) \left(|S(t)|^2 \right)' dt = \varphi_r(t) |S(t)|^2 \Big|_{t_r}^{t_{r+1}} - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 \omega_r(t) dt =$$

$$= |S(t_{r+1})|^2 - \frac{1}{t_{r+1} - t_r} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 dt;$$

$$|S(t_{r+1})|^2 \leq \delta^{-1} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)|^2 dt + 2 \int_{t_r}^{t_{r+1}} |S(t)||S'(t)| dt.$$

Суммируя обе части неравенства по r, $0 \leq r < k$, и применяя к интегралу от произведения неравенство Коши (квадрат интеграла от произведения неотрицательных функций не превосходит произведения интегралов от квадратов функций), получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $a(n)$ — произвольные комплексные числа,* $0 < X < X_1 \leq 2X$, $3 \leq N < N_1 \leq 2N$,

$$I = \int_X^{X_1} \left| \sum_{N < n \leq N_1} a(n) n^{it} \right|^2 dt.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I \leq (X + 32 N \log N) \sum_{N < n \leq N_1} |a(n)|^2.$$

Доказательство. Имеем

$$I = \sum_{N < n, m \leq N_1} a(n)\overline{a(m)} \int_X^{X_1} \left(\frac{n}{m} \right)^{it} dt = (X_1 - X) \sum_{N < n \leq N_1} |a(n)|^2 + W,$$

где

$$W = \sum_{\substack{N < n, m \leq N_1 \\ n \neq m}} a(n)\overline{a(m)} \left(\left(\frac{n}{m} \right)^{iX_1} - \left(\frac{n}{m} \right)^{iX} \right) \left(i \log \frac{n}{m} \right)^{-1}.$$

Легко видеть, что

$$|W| \leq 4 \sum_{N < n, m \leq N_1} |a(n)||a(m)| \left| \log^{-1} \frac{n}{m} \right|.$$

Полагая

$$m = n + r, \quad 1 \leq r < N_1 - N \leq N, \quad a(n) = 0 \quad \text{при} \quad n > N_1,$$

последовательно получаем

$$\log \frac{m}{n} = \log \left(1 + \frac{r}{n} \right) = \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \cdots \geq \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} \geq \frac{r}{2n},$$

$$\log^{-1} \frac{m}{n} \leq \frac{2n}{r} < \frac{2N_1}{r},$$

$$|W| \le 8N_1 \sum_{1\le r<N} r^{-1} \sum_{N<n<N_1} |a(n)||a(n+r)| \le$$

$$\le 8N_1 \sum_{1\le r<N} r^{-1} \left(\sum_{N<n\le N_1} |a(n)|^2 \sum_{N<n\le N_1} |a(n+r)|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le 16 N_1 \log N \sum_{N<n\le N_1} |a(n)|^2 < 32N\log N \sum_{N<n\le N_1} |a(n)|^2.$$

Таким образом,

$$I \le (X + 32N\log N) \sum_{N<n\le N_1} |a(n)|^2,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Простейшая оценка $N(\sigma, T)$

Теорема 1. *При* $1/2 \le \sigma \le 1$, $T \ge 2$ *имеет место оценка*

$$N(\sigma, T) \le cT^{4\sigma(1-\sigma)} \log^{13} T.$$

Доказательство. Пусть $T \ge T_1 \ge 2$ и $R = N_1(\sigma, T_1)$ число нулей $\zeta(s)$ вида $s = \rho$, $\mathrm{Re}\,\rho \ge \sigma$, $0,5T_1 < \mathrm{Im}\,\rho \le T_1$. Возьмем теореме III.2.1 $x = T_1$, тогда при $0,5T_1 < t \le T_1$, $0,5 \le \sigma \le 1$, $s = \sigma + i$ имеем

$$\zeta(s) = \sum_{n\le T_1} \frac{1}{n^s} + \frac{T_1^{1-s}}{s-1} + O(T_1^{-\sigma} \log T_1).$$

Умножая последнее равенство на

$$M_X(s) = \sum_{n\le X} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad X = T_1^{2\sigma-1},$$

найдем

$$\zeta(s) M_X(s) = \Phi(s) + R(s), \tag{1}$$

где

$$\Phi(s) = \sum_{m\le X} \frac{\mu(m)}{m^s} \sum_{n\le T_1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\le XT_1} \frac{a(n)}{n^s},$$

$$a(n) = \sum_{\substack{m|n\\ m\le X\\ n\le mT_1}} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1;\\ 0, & \text{если } 1 < n \le X;\end{cases} \tag{2}$$

$$R(s) = O\left(|M_X(\rho)| T_1^{-\sigma} \log T_1\right).$$

Очевидно, что $|a(n)| \le \tau(n)$. Пусть теперь $s = \rho$ — нуль $\zeta(s$ с условием $0,5T_1 < \mathrm{Im}\,\rho \le T_1$. Тогда из (1) и (2) последователы

находим

$$1 \le \left| \sum_{X<n\le XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \right| + O\left(T_1^{-\sigma} \log T_1 |M_X(\rho)|\right);$$

$$1 \ll \left| \sum_{X<n\le XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \right|^2 + T_1^{-2\sigma} \log^2 T_1 |M_X(\rho)|^2.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по всем нулям $\zeta(s)$ из прямоугольника $\sigma \le \mathrm{Re}\, s \le 1, 0,5T_1 < \mathrm{Im}\, s \le T_1$, получим

$$R \ll \sum_\rho \left(\left| \sum_{X<n\le XT_1} \frac{a(n)}{n^\rho} \right|^2 + |M_X(\rho)|^2 T_1^{-2\sigma} \log^2 T_1 \right).$$

Преобразуем сумму по ρ следующим образом. Разобьем отрезок $[0,5T_1, T_1]$ на отрезки длины 1 вида $2m+n$, $n = 1, 2$; $0,25T_1 - 1 \le$ $\le m \le 0,5T_1 = K$. Вводя очевидное сокращенное обозначение, будем иметь

$$\sum_\rho \le \sum_{0,25T_1-1\le m\le 0,5T_1} \sum_{n=1}^{2} \sum_{2m+n-1<\mathrm{Im}\,\rho\le 2m+n} \le$$

$$\le 2 \max_{1\le n\le 2} \sum_{0,25T_1-1\le m\le 0,5T_1} \sum_{2m+n-1<\mathrm{Im}\,\rho\le 2m+n}$$

Поскольку в каждом прямоугольнике вида $2m + n - 1 < \mathrm{Im}\,\rho \le$ $\le 2m + n$ не более $c_2 \log T_1$ нулей, то, выбирая по одному нулю из каждого такого прямоугольника, получим не более $c_2 \log T_1$ сумм; обозначая через $\sum_\rho'$ наибольшую из них, найдем

$$\sum_\rho \ll (\log T_1) \sum_\rho{}';$$

$$R \ll (\log T_1) \sum_\rho{}' \left(\left| \sum_{X<n\le T_1X} \frac{a(n)}{n^\rho} \right|^2 + \left| \sum_{m\le X} \frac{\mu(m)}{m^\rho} \right|^2 T_1^{-2\sigma} \log^2 T_1 \right). \tag{3}$$

Подчеркнем еще раз то, что суммирование в $\sum_\rho'$ ведется по числам ρ с условием $0,5T_1 \le \mathrm{Im}\,\rho \le T_1$, $\sigma \le \mathrm{Re}\,\rho \le 1$, $|\mathrm{Im}\,\rho - \mathrm{Im}\,\rho_1| \ge 1$. Оценим теперь сумму

$$S(Y) = \sum_\rho{}' \left| \sum_{Y<n\le Y_1} \frac{b(n)}{n^\rho} \right|^2, \qquad Y_1 \le 2Y,$$

где $b(n)$ — произвольные числа такие, что $|b(n)| \le \tau(n)$, $T_1 \ge Y \ge 1$. Пусть $\rho = \sigma_r + it_r$, $\sigma_r \ge \sigma$. К внутренней сумме применим частное суммирование (теорема II.1.1):

$$\sum_{Y<n\le Y_1} b(n)n^{-it_r}n^{-\sigma_r}=\int_Y^{Y_1} C(u)du^{-\sigma_r}+Y_1^{-\sigma_r}C(Y_1),$$

$$C(u)=\sum_{Y<n\le Y_1} b(n)n^{-it_r}.$$

Далее, переходя к оценкам и применяя неравенство Коши, последовательно получаем

$$\left|\sum_{Y<n\le Y_1} b(n)n^{-\rho}\right|\ll Y^{-\sigma-1}\int_Y^{Y_1}|C(u)|du+Y^{-\sigma}|C(Y_1)|;$$

$$\left|\sum_{Y<n\le Y_1} b(n)n^{-\rho}\right|^2\ll Y^{-2\sigma-1}\int_Y^{Y_1}|C(u)|^2du+Y^{-2\sigma}|C(Y_1)|^2;$$

$$S(Y)\ll Y^{-2\sigma}{\sum_r}'\left|\sum_{Y<n\le Y_2} b(n)n^{-it_r}\right|^2,$$

где $Y_2\le Y_1$. Вспоминая, что $t_{r+1}-t_r\ge 1$ и пользуясь леммой 1, найдем

$$S(Y)\ll Y^{-2\sigma}(I_1+\sqrt{I_1I_2}),$$

где

$$I_1=\int_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{Y<n\le Y_2} b(n)n^{it}\right|^2 dt,\qquad I_2=\int_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{Y<n\le Y_2} b(n)\log n\cdot n^{it}\right|^2$$

Каждый из интегралов оценим по лемме 1.2, учитывая, что $1\le Y\le T_1$, $|b(n)|\le\tau(n)$ и применяя лемму II.10.4:

$$I_1\ll(T_1+Y)(\log T_1)\sum_{Y<n\le 2Y}\tau^2(n)\ll(T_1Y+Y^2)\log^5 T_1;$$

$$I_2\ll(T_1Y+Y^2)\log^7 T_1.$$

Следовательно,

$$S(Y)\ll Y^{-2\sigma}(T_1Y+Y^2)\log^6 T_1.$$

Теперь, разбивая в (3) первую в скобках сумму на $\ll\log T_1$ сумм и применяя (4), помня, что в этом случае $X<Y\le T_1X$, найдем

$${\sum_\rho}'\left|\sum_{X<n\le T_1X}\frac{a(n)}{n^\rho}\right|^2\ll(T_1X^{1-2\sigma}+(XT_1)^{2-2\sigma})\log^8 T_1.$$

Аналогично, разбивая вторую сумму в скобках формулы (3) на $\ll\log T_1$ сумм и применяя (4), помня, что в этом случае $1\le Y\le X$, найдем

$$T_1^{-2\sigma}(\log T_1)^2{\sum_\rho}'\left|\sum_{m\le X}\frac{\mu(m)}{m^\rho}\right|^2\ll$$

$$\ll T_1^{-2\sigma}\log^4 T_1(T_1+X^{2-2\sigma})\log^6 T_1=T_1^{-2\sigma}(T_1+X^{2-2\sigma})\log^{10}T_1. \qquad (6)$$

Из (3), (5), (6) и определения X следует

$$N_1(\sigma,T_1)\ll T_1^{4\sigma(1-\sigma)}\log^{12}T_1,\qquad N(\sigma,T)\ll T^{4\sigma(1-\sigma)}\log^{13}T,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Современная оценка $N(\sigma,T)$

Теорема 1. *При $1/2\le\sigma\le 1$, $T\ge 2$ имеет место оценка*

$$N(\sigma,T)\le cT^{2,4(1-\sigma)}\log^{c_1}T,$$

где c и c_1 — абсолютные положительные постоянные.

Доказательство. Пусть $T\ge T_1\ge 2$, $R=N_1(\sigma,T_1)$ — число нулей $\zeta(s)$ вида $s=\rho$, $\operatorname{Re}\rho\ge\sigma$, $0,5T_1<\operatorname{Im}\rho\le T_1$. Положим в теореме III.3.1 $x=\sqrt{T_1/(2\pi)}$, $y=t/(2\pi x)$, получим

$$\zeta(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(T_1^{-\sigma/2}\log T_1). \qquad (1)$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, возьмем $X=T_1^{0,1}$,

$$M_X(s)=\sum_{m\le X}\frac{\mu(m)}{m^s};$$

умножая обе части (1) на $M_X(s)$ и преобразуя правую часть, найдем

$$\zeta(s)M_X(s)=1+\sum_{X<k\le xX}\frac{a(k)}{k^s}+\chi(s)M_X(s)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-s}}+$$

$$+O\left(T_1^{-\sigma/2}|M_X(s)|\log T_1\right), \qquad (2)$$

где $a(k)=\sum_{\substack{m|k\\ m\le X,\,k\le mx}}\mu(m)$, $|a(k)|\le\tau(k)$. Поскольку

$$|M_X(s)|\le\sum_{m\le X}\frac{1}{m^\sigma}\ll X^{1-\sigma}\log X\ll T_1^{(1-\sigma)/10}\log T_1,$$

то O-член в (2) равен

$$O(T_1^{(1-\sigma)/10-\sigma/2}\log^2 T_1)=O(T_1^{-1/5}\log^2 T_1).$$

Если $s=\rho$, то левая часть (2) обращается в нуль, поэтому

$$\left|1+O(T_1^{-1/5}\log^2 T_1)\right| = \left|\sum_{X<k\le xX}\frac{a(k)}{k^\rho}+\chi(\rho)M_X(\rho)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-\rho}}\right|$$

или, предполагая $T_1 \gg 1$, имеем неравенство

$$1\le 2\left|\sum_{X<k\le xX}\frac{a(k)}{k^\rho}\right|+2|\chi(\rho)|\left|\sum_{m\le X}\frac{\mu(m)}{m^\rho}\right|\left|\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-\rho}}\right|.$$

Промежутки суммирования по k,m,n разобьем на промежутки вид $Y<Y_1\le 2Y$. В каждом случае получится $\ll \log T_1$ промежутков, мы приходим к такому неравенству:

$$1\le 2\sum^{\log T_1}\left|\sum_{K<k\le K_1}\frac{a(k)}{k^\rho}\right|+$$

$$+2\sum^{\log T_1}\sum^{\log T_1}|\chi(\rho)|\left|\sum_{Y<n\le Y_1}\frac{1}{n^{1-\rho}}\right|\left|\sum_{M<m\le M_1}\frac{\mu(m)}{m^\rho}\right|=2\sum^{\log^2 T_1}|S(\rho)|, \quad (3)$$

где $S(\rho)$ имеет один из двух видов:

$$S(\rho)=\sum_{K<k\le K_1}\frac{a(k)}{k^\rho}, \quad (4)$$

$$S(\rho)=\chi(\rho)\sum_{Y<n\le Y_1}\frac{1}{n^{1-\rho}}\sum_{M<m\le M_1}\frac{\mu(m)}{m^\rho}. \quad (5)$$

Обозначим буквой D количество сумм $S(\rho)$ в правой части (3) $D\ll \log^2 T_1$; занумеруем эти суммы в произвольном порядке: $S_1(\rho)$, $S_2(\rho),\dots,S_D(\rho)$. Все нули ρ с условием $\operatorname{Re}\rho\ge\sigma$, $0,5T_1<\operatorname{Im}\rho\le T_1$, их R штук, разобьем на классы $A_1,A_2,\dots,A_D$ следующим образом: класс A_ν отнесем те ρ, для которых

$$|S_\nu(\rho)|\ge(2D)^{-1}, \qquad 1\le\nu\le D.$$

Каждое ρ из общего количества R попадает хотя бы в один класс A; действительно, если бы некоторое ρ не попало ни в один из классов A, то для этого ρ получаем

$$|S_\nu(\rho)|<(2D)^{-1}, \qquad \nu=1,2,\dots,D;$$

$$2\sum_{\nu=1}^{D}|S_\nu(\rho)|<1,$$

что противоречит (3). Далее, найдется хотя бы один класс A_ν, $1\le\nu\le D$, в котором не меньше чем RD^{-1} элементов ρ. Обозначим этот класс буквой A, а отвечающую ему сумму символом $S(\rho)$. Имеет место неравенство

$$(2D)^{-1}\le|S(\rho)|, \quad \rho\in A, \quad |A|\ge RD^{-1}.$$

Мнимые части $\rho\in A$ лежат на промежутке $(0,5T_1,T_1]$. Будем считать, что $\operatorname{Im}\rho=\gamma$ занумерованы в порядке возрастания γ. Разделим этот промежуток на промежутки вида $(n,n+1]$; те из промежутков, для которых n — четное число, отнесем к множеству B_1, оставшиеся — к множеству B_2. Соответственно ρ отнесем к B_1 или к B_2. Одно из множеств B_1 или B_2 имеет не менее чем $0,5RD^{-1}$ элементов ρ; обозначим его буквой B. Наконец, B разобьем на $\ll\log T_1$ множеств ρ следующим образом: к множеству E_1 отнесем ρ, у которых мнимые части γ являются первыми на своих промежутках $(n,n+1]$ (если таких несколько, берем любое из них), к множеству E_2 отнесем те ρ, у которых γ являются вторыми на своих промежутках, и так далее. Так как на промежутке $(n,n+1]$ лежит не более чем $c\log T_1$ чисел γ, то и множеств E_ν будет не более чем $c\log T_1$ штук. Следовательно, найдется такое E_ν, в котором будет $\gg RD^{-1}\log^{-1}T_1$ нулей ρ. Итак, получили множество E такое, что

$$(2D)^{-1}\le|S(\rho)|, \qquad \rho\in E,$$
$$|E|\gg RD^{-1}\log^{-1}T_1. \quad (6)$$

Отметим, что если ρ, $\rho'\in E$, $\rho\ne\rho'$, то

$$|\operatorname{Im}\rho-\operatorname{Im}\rho'|=|\gamma-\gamma'|\ge 1.$$

Неравенство (6) будет основным в дальнейших рассуждениях.

1. Первый случай значения суммы $S(\rho)$. Пусть $S(\rho)$ имеет вид (4). Из условий на k получаем

$$T_1^{0,1}=X<K\le K_1\le xX<T_1^{0,5+0,1}.$$

Промежуток $(X,xX]$ точками $T_1^{1/r}$, $2\le r\le 9$, разделим на девять промежутков F_r, $r=1,2,\dots,9$,

$$F_1=(T_1^{0,5},xX], \quad F_r=(T_1^{1/(r+1)},T_1^{1/r}), \quad r=2,\dots,9.$$

Ясно, что $K\in F_r$, $1\le r\le 9$. Возведем обе части (6) в степень $2(r+1)$. Прежде всего, находим

$$S^{r+1}(\rho)=\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}}\frac{A_{r+1}(k)}{k^\rho}, \quad (7)$$

где

$$A_{r+1}(k)=\sum_{\substack{k_1\dots k_{r+1}=k\\ K^{r+1}<k_1,\dots,k_{r+1}\le K_1^{r+1}}}a(k_1)\dots a(k_{r+1}).$$

Так как $|a(k)|\le\tau(k)$, то

$$|A_{r+1}(k)|\le\sum_{k_1\dots k_{r+1}=k}\tau(k_1)\dots\tau(k_{r+1})=\tau_{2(r+1)}(k). \quad (8)$$

Из (6) и (7) находим

$$1 \le (2D)^{2r+2}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \frac{A_{r+1}(k)}{k^{\rho}}\right|^2.$$

Суммируя обе части этого неравенства по $\rho \in E$ и помня, что $D \ll \ll \log^2 T_1$, $|E| \gg R\log^{-3} T_1$, получим

$$R \ll (\log T_1)^{4r+7}\sum_{\rho\in E}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \frac{A_{r+1}(k)}{k^{\rho}}\right|^2.$$

Во внутренней сумме по k проведем частное суммирование (теорема II.1.1):

$$\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \frac{A_{r+1}(k)}{k^{\beta+i\gamma}} = -\int_{K^{r+1}}^{K_1^{r+1}} \mathrm{C}(u)du^{-\beta} + \mathrm{C}(K_1^{r+1})K_1^{-\beta(r+1)},$$

$$\mathrm{C}(u) = \sum_{K^{r+1}<k\le u} A_{r+1}(k)k^{-i\gamma}.$$

Помня, что $\beta = \operatorname{Re}\rho \ge \sigma$, и пользуясь неравенством Коши, найдем

$$\left|\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \frac{A_{r+1}(k)}{k^{\beta+i\gamma}}\right|^2 \ll K^{-(r+1)-2(r+1)\sigma}\int_{K^{r+1}}^{K_1^{r+1}} |\mathrm{C}(u)|^2du + $$
$$+K^{-2(r+1)\sigma}|\mathrm{C}(K_1^{r+1})|;$$

$$R \ll K^{-2(r+1)\sigma}(\log T_1)^{4r+7}\sum_{\rho\in E}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le u} A_{r+1}(k)k^{-i\gamma}\right|^2. \qquad (9)$$

Здесь $u \le K_1^r$ и такое, при котором правая часть (9) максимальна. К сумме по ρ применим лемму 1.1, полагая в ней $t_\nu = \gamma$, $\delta = 1$. Находим

$$\Sigma = \sum_{\rho\in E}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le u} A_{r+1}(k)k^{-i\gamma}\right|^2 \ll I_1 + \sqrt{I_1I_2}, \qquad (10)$$

где

$$I_1 = \int_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le u} A_{r+1}(k)k^{-i\gamma}\right|^2 d\gamma,$$

$$I_2 = \int_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{K^{r+1}<k\le u} A_{r+1}(k)(\log k)k^{-i\gamma}\right|^2 d\gamma.$$

Каждый интеграл I_1 и I_2 оценим, пользуясь леммой 1.2 (предварительно следует разбить промежуток суммирования по k на промежутки вида $N < k \le N_1 \le 2N$):

$$I_1 \ll (T_1 + K^{r+1}\log T_1)\log^2 T_1 \sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} |A_{r+1}(k)|^2 \ll$$

$$\ll (T_1 + K^{r+1})(\log T_1)^3 \sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(k);$$

$$I_2 \ll (T_1 + K^{r+1})(\log T_1)^5 \sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(k).$$

Наконец, последнюю сумму по k оценим, пользуясь теоремой П.10.4:

$$\sum_{K^{r+1}<k\le K_1^{r+1}} \tau_{2r+2}^2(k) \ll K^{r+1}(\log T_1)^{(2r+2)^2-1}.$$

Тем самым из (10) и (9) получаем

$$\Sigma \ll (T_1 + K^{r+1})K^{r+1}(\log T_1)^{(2r+2)^2+3};$$
$$R \ll (T_1 + K^{r+1})K^{(r+1)(1-2\sigma)}(\log T_1)^{(2r+2)^2+4r+10}. \qquad (11)$$

Поскольку $K \in F_r$, то $K > T_1^{1/(r+1)}$, $K^{r+1} > T_1$, и, следовательно,

$$R \ll K^{2(r+1)(1-\sigma)}(\log T_1)^{(2r+2)^2+4r+10}. \qquad (12)$$

Опять, так как $K \in F_r$, то $K \le T_1^{1/r}$ при $r = 2,\ldots,9$ и $K \le T_1^{3/5}$ при $r = 1$; поэтому если $r = 1$ или если $r \ge 5$, то из (12) имеем

$$R \ll T_1^{2,4(1-\sigma)}\log^{c_1} T_1, \qquad c_1 = 20^2 + 46 = 446.$$

Осталось рассмотреть случаи $K \in F_r$, $r = 2,3,4$. Если $K \le \le T_1^{1,2/(r+1)}$, то из (12) следует

$$R \ll T_1^{2,4(1-\sigma)}\log^{c_1} T_1.$$

Итак, пусть $r = 2,3,4$, $T_1^{1,2/(r+1)} < K \le T_1^{1/r}$. Заменяя в (11) $r+1$ на r, найдем

$$R \ll (T_1 + K^r)K^{r(1-2\sigma)}(\log T_1)^{(2r)^2+4r+6}.$$

Поскольку $T_1 \ge K^r$, $\sigma \ge 1/2$, то

$$R \ll T_1K^{r(1-2\sigma)}\log^{c_1} T_1 \ll T_1^{1+\frac{6r}{5(r+1)}(1-2\sigma)}\log^{c_1} T_1. \qquad (13)$$

Если для σ выполняются неравенства $0,5 \le \sigma \le 0,5 + (r+1)/12$, то

$$1 + \frac{6r}{5(r+1)}(1-2\sigma) \le \frac{12}{5}(1-\sigma),$$

и нужная оценка для R следует из (13). Пусть теперь $0,5+(r+1)/12 < < \sigma \le 1$, $2 \le r \le 4$. Вернемся к (6). Возведем обе части (6) в степень

r, найдем

$$1 \ll (\log T_1)^{2r} |S^r(\rho)| = (\log T_1)^{2r} \left| \sum_{K^r < k \le K_1^r} \frac{A_r(k)}{k^\rho} \right|. \tag{14}$$

Пусть

$$\theta = \theta(\rho) = \arg \sum_{K^r < k \le K_1^r} \frac{A_r(k)}{k^\rho}.$$

Тогда (14) перепишется так:

$$1 \ll (\log T_1)^{2r} e^{-i\theta(\rho)} \sum_{K^r < k \le K_1^r} \frac{A_r(k)}{k^\rho}.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по $\rho \in E$ и меняя порядки суммирования местами, найдем

$$R \ll (\log T_1)^{2r+3} \sum_{K^r < k \le K_1^r} |A_r(k)| \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\theta(\rho)} k^{-\rho} \right|.$$

Возведем это неравенство в квадрат и воспользуемся неравенством Коши:

$$R^2 \ll (\log T_1)^{4r+6} \sum_{K^r < k \le K_1^r} |A_r(k)|^2 \sum_{K^r < k \le K_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\theta(\rho)} k^{-\rho} \right|^2.$$

Для первой суммы по k имеем оценку

$$\sum_{K^r < k \le K_1^r} |A_r(k)|^2 \ll \sum_{K^r < k \le K_1^r} \tau_{2r}^2(k) \ll K^r (\log T_1)^{(2r)^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$R^2 \ll K^r (\log T_1)^{(2r)^2 + 4r + 5} W, \tag{15}$$

$$W = \sum_{K^r < k \le K_1^r} \left| \sum_{\rho \in E} e^{-i\theta(\rho)} k^{-\rho} \right|^2.$$

Далее,

$$W = \sum_{K^r < k \le K_1^r} \sum_{\rho, \rho_1 \in E} \frac{\exp\big(-i(\theta(\rho) - \theta(\rho_1))\big)}{k^{\beta + \beta_1 + i(\gamma - \gamma_1)}} =$$

$$= \sum_{\gamma = \gamma_1} \exp\big(-i(\theta(\rho) - \theta(\rho_1))\big) \sum_{K^r < k \le K_1^r} k^{-(\beta + \beta_1)} +$$

$$+ \sum_{\gamma \ne \gamma_1} \exp\big(-i(\theta(\rho) - \theta(\rho_1))\big) \sum_{K^r < k \le K_1^r} k^{-(\beta + \beta_1)} k^{-i(\gamma - \gamma_1)};$$

$$|W| \ll RK^{r - 2r\sigma} \log T_1 + \sum_{\gamma \ne \gamma_1} \left| \sum_{K^r < k \le K_1^r} k^{-(\beta + \beta_1)} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|.$$

В последней сумме по k проведем частное суммирование; помня, что $\beta, \beta_1 \ge \sigma$, найдем

$$\sum_{K^r < k \le K_1^r} k^{-(\beta + \beta_1)} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} = -\int_{K^r}^{K_1^r} C(u) du^{-(\beta + \beta_1)} + C(K_1^r) K_1^{-r(\beta + \beta_1)};$$

$$\sum_{\gamma \ne \gamma_1} \left| \sum_{K^r < k \le K_1^r} k^{-(\beta + \beta_1)} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right| \ll K^{-2r\sigma} \sum_{\gamma \ne \gamma_1} \left| \sum_{K^r < k \le u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|,$$

причем $u \le K_1^r$ и такое, для которого правая часть максимальна. Итак,

$$|W| \ll RK^{r - 2r\sigma} \log T_1 + K^{-2r\sigma} \sum_{\gamma \ne \gamma_1} \left| \sum_{K^r < k \le u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|.$$

Двойную сумму по $\gamma \ne \gamma_1$ разобьем на $\ll \log T_1$ сумм вида $V < \gamma - \gamma_1 \le 2V$, где, как это легко видеть, $1 \le V < 2V \le T_1$. Тогда, переходя к максимальной по модулю сумме, найдем

$$|W| \ll RK^{r - 2r\sigma} \log T_1 + K^{-2r\sigma} (\log T_1) \sum_{V < \gamma - \gamma_1 \le 2V} \left| \sum_{K^r < k \le u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right| \ll$$

$$\ll RK^{r - 2r\sigma} \log T_1 + RK^{-2r\sigma} (\log T_1) \sum_{V < \gamma - \gamma_1 \le 2V} \left| \sum_{K^r < k \le u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} \right|,$$

где внешнее суммирование проводится по числам γ, а γ_1 — фиксированное число из промежутка $(0,5T_1, T_1)$. Если $2V \le \pi K^r$, то к сумме по k применима формула замены суммы интегралом (следствие III.1.1); поэтому

$$\sum_{K^r < k \le u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} = \int_{K^r}^{u} k^{-i(\gamma - \gamma_1)} dk + O(1) =$$

$$= \frac{u^{-i(\gamma - \gamma_1) + 1} - K^{-ir(\gamma - \gamma_1) + r}}{-i(\gamma - \gamma_1) + 1} + O(1) \ll \frac{K^r}{|\gamma - \gamma_1| + 1};$$

$$|W| \ll RK^{r - 2r\sigma} \log T_1 + RK^{-2r\sigma} (\log T_1) \sum_{V < \gamma - \gamma_1 \le 2V} \frac{K^r}{|\gamma - \gamma_1| + 1} \ll$$

$$\ll RK^{r - 2r\sigma} \log^2 T_1.$$

Если $V > 0,5\pi K^r$, то к сумме по k применим теорему III.1.1;

последовательно находим

$$\sum_{K^r<k\le u} k^{-i(\gamma-\gamma_1)} = \sum_{K^r<k\le u}\exp\left(-2\pi i\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi}\log k\right);$$

$$f(x)=\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi}\log x,\quad f'(x)=\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi x},\quad \frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi x_n}=n;$$

$$\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r};\quad x_n=\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi n};\quad |f''(x_n)|=\frac{2\pi n^2}{\gamma-\gamma_1};$$

$$f(x_n)-nx_n=\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi n}-n\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi n};$$

$$|f''(x_n)|\asymp A^{-1},\quad A=K^{2r}V^{-1}\gg 1;$$

$$\sum_{K^r<k\le u}k^{-i(\gamma-\gamma_1)}=e^{-i\varphi}\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\frac{1}{|f''(x_n)|^{1/2}}\times$$

$$\times\exp\left(-2\pi i(f(x_n)-nx_n)\right)+O(\sqrt{A})=$$

$$=e^{-i\varphi}\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\frac{\sqrt{\gamma-\gamma_1}}{\sqrt{2\pi}n}\times$$

$$\times\exp\left(-2\pi i\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi e}-\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi}\log n\right)+$$

$$+O(K^rV^{-0,5})\ll V^{0,5}\left|\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|+K^rV^{-0,5}.$$

Таким образом, при любом V для $|W|$ выполняется оценка

$$|W|\ll RK^{r-2r\sigma}\log^2T_1+RV^{0,5}K^{-2r\sigma}(\log T_1)\times$$

$$\times\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}\left(\left|\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|+K^rV^{-1}\right).\quad(16)$$

Границы изменения n зависят от переменной суммирования γ; освободимся от этой зависимости за счет незначительного огрубления оценки. Возьмем целое четное число $B=2[VK^{-r}]$; имеем цепочку равенств:

$$\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}=$$

$$=\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}B^{-1}\sum_{|b|\le B/2}\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le m\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\exp\left(2\pi i\frac{b(n-m)}{B}\right)=$$

$$=B^{-1}\left(\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le m\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}1\right)\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}+$$

$$+B^{-1}\sum_{\substack{|b|\le B/2\\ b\ne0}}\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}e^{2\pi i\frac{bn}{B}}\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le m\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}e^{-2\pi i\frac{bm}{B}}.$$

Последняя сумма по m суммируется и легко оценивается:

$$\left|\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le m\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}\exp\left(-2\pi i\frac{bm}{B}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\exp(-2\pi i\alpha_1 b/B)-\exp(-2\pi i\alpha_2 b/B)}{\exp(-2\pi ib/B)-1}\right|\le\frac{2}{\exp(-2\pi ib/B)-1}=$$

$$=\frac{1}{|(\exp(-\pi ib/B)-\exp(\pi ib/B))/(2i)|}=\frac{1}{|\sin(\pi b/B)|}\le\frac{B}{|b|}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi u}\le n\le\frac{\gamma-\gamma_1}{2\pi K^r}}n^{-1}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|\ll\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}n^{-1}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|+$$

$$+\sum_{\substack{|b|\le 0,5B\\ b\ne0}}|b|^{-1}\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}n^{-1}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\exp(2\pi ibn/B)\right|\ll$$

$$\ll\sum_{|b|\le 0,5B}(|b|+1)^{-1}\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}n^{-1}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\exp(2\pi ibn/B)\right|.$$

Подставляя эту оценку в (16), находим

$$|W|\ll RK^{r-2r\sigma}\log^2T_1+RV^{0,5}K^{-2r\sigma}(\log^2T_1)\times$$

$$\times\sum_{V<\gamma-\gamma_1<2V}1\left(\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le\frac{V}{\pi K^r}}n^{-1}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\exp(2\pi ibn/B)\right|+K^rV^{-1}\right),\quad(17)$$

где $|b|\le 0,5B$ и такое, при котором правая часть (17) максимальна. По основному неравенству (6)

$$1\ll(\log T_1)^2\left|\sum_{K<k\le K_1}a(k)k^{-(\beta+i\gamma)}\right|,$$

или, если возвести его в степень r, то

$$1\ll(\log T_1)^{2r}\left|\sum_{K^r<k\le K_1^r}A_r(k)k^{-(\beta+i\gamma)}\right|.\quad(18)$$

Поэтому, заменяя единицу в правой части (17) под знаком суммы по большей величиной, именно правой частью (18), получаем

$$|W| \ll RK^{r-2r\sigma}\log^2 T_1 + RV^{0,5}K^{-2r\sigma}(\log T_1)^{2r+2}\times$$
$$\times \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}\left(\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le \frac{V}{\pi K^r}}\ \sum_{K^r<k\le K_1^r}\frac{1}{n}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\exp\left(2\pi i\frac{bn}{B}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{A_r(k)}{k^\beta}k^{i\gamma}\right| + K^rV^{-1}\left|\sum_{K^r<k\le K_1^r}\frac{A_r(k)}{k^\beta}k^{i\gamma}\right|\right);$$

Наконец, в последних двух суммах проведем частное суммирование по n и k и по k, как это неоднократно делалось выше; при этом з знак модуля вынесется максимум величин n^{-1} и $k^{-\beta}$, а верхние гр ницы изменения по n и k заменятся какими-то другими. Получим

$$|W| \ll RK^{r-2r\sigma}\log^2 T_1 + RV^{0,5}K^{-2r\sigma}(\log T_1)^{2r+2}\times$$
$$\times \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}\left(V^{-1}K^rK^{-r\sigma}\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le \frac{V_1}{\pi K^r}}\ \sum_{\hat{K}^r<k\le K_2}A_r(k)n^{i(\gamma-\gamma_1)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left(2\pi i\frac{bn}{B}\right)k^{i\gamma}\right| + K^{r-r\sigma}V^{-1}\left|\sum_{K^r<k\le K_3}A_r(k)k^{i\gamma}\right|\right), \qquad (19)$$

где $V_1\le V$, $K_2\le K_1^r$, $K_3\le K_1^r$.

Оценим две суммы W_1 и W_2.

$$W_1 = \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}\left|\sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le \frac{V_1}{\pi K^r}}\ \sum_{K^r<k\le K_2}n^{i(\gamma-\gamma_1)}\exp\left(2\pi i\frac{bn}{B}\right)A_r(k)k^{i\gamma}\right|,$$
$$W_2 = \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}\left|\sum_{K^r<k\le K_3}A_r(k)k^{i\gamma}\right|.$$

Записывая модуль суммы в виде произведения суммы на $e^{-i\theta(\gamma)}$ и меняя порядки суммирования, находим

$$|W_1| \ll \sum_{\frac{V}{2\pi u}\le n\le \frac{V_1}{\pi K^r}}\ \sum_{K^r<k\le K_2}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta(\gamma)}(nk)^{i\gamma}\right| \ll$$
$$\ll \sum_{\frac{VK^r}{2\pi u}<m\le\frac{V_1K_2}{\pi K^r}}B(m)\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|, \qquad (20)$$

где

$$B(m)\le\sum_{nk=m}|A_r(k)| \ll \sum_{k|m}\tau_{2r}(k) \ll \tau_{2r+1}(m);$$
$$|W_2| \ll \sum_{K^r<k\le K_3}|A_r(k)|\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta_1(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|. \qquad (21)$$

Применяя к правым частям (20) и (21) неравенство Коши, найдем

$$|W_1| \ll \sqrt{S_1}\sqrt{S_2}, \qquad |W_2| \ll \sqrt{S_3}\sqrt{S_4},$$

где

$$S_1 = \sum_{\frac{VK^r}{2\pi u}<m\le\frac{V_1K_2}{\pi K^r}}B^2(m),$$
$$S_2 = \sum_{\frac{VK^r}{2\pi u}<m\le\frac{V_1K_2}{\pi K^r}}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|^2,$$
$$S_3 = \sum_{K^r<k\le K_3}|A_r(k)|^2,$$
$$S_4 = \sum_{K^r<k\le K_3}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta_1(\gamma)}k^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|^2.$$

Заметим, что нижняя и верхняя границы изменения m удовлетворяют неравенствам

$$\frac{VK^r}{2\pi u}\ge 2^{-r}V, \qquad \frac{V_1K_2}{\pi K^r}\le 2^rV.$$

Как и раньше, применяя теорему II.10.4, получаем

$$S_1 \ll \sum_{2^{-r}V\le m\le 2^rV}B^2(m) \ll \sum_{m\le 2^rV}\tau^2_{2r+1}(m) \ll V(\log T_1)^{(2r+1)^2-1};$$
$$S_3 \ll \sum_{k\le 2^rK^r}\tau^2_{2r}(k) \ll K^r(\log T_1)^{(2r)^2-1}.$$

К суммам S_2 и S_4 применим лемму 1.1:

$$S_2 \ll I_1 + \sqrt{I_1I_2}, \qquad S_4 \ll I_3 + \sqrt{I_3I_4},$$

где

$$I_1 = \int_{2^{-r}V}^{2^rV}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}e^{-i\theta(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_1)}\right|^2dm,$$
$$I_2 = \int_{2^{-r}V}^{2^rV}\left|\sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V}(\gamma-\gamma_1)e^{-i\theta(\gamma)}m^{i(\gamma-\gamma_1)-1}\right|^2dm,$$

$$I_3 = \int\limits_{K^r}^{K_3} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V} e^{-i\theta_1(\gamma)} k^{i(\gamma-\gamma_1)} \right|^2 dk,$$

$$I_4 = \int\limits_{K^r}^{K_3} \left| \sum_{V<\gamma-\gamma_1\le 2V} (\gamma-\gamma_1) e^{-i\theta_1(\gamma)} k^{i(\gamma-\gamma_1)-1} \right|^2 dk.$$

Интегралы I_1, I_2, I_3, I_4 оцениваются одинаково: после возведения модуля соответствующей суммы в квадрат, интеграл берется и затем сумма по γ, γ' оценивается тривиально суммою модулей слагаемых (следует помнить, что число слагаемых по γ, γ' не превосходит R, а γ, γ' таковы, что $|\gamma - \gamma'| \ge 1$). Последовательно находим

$$I_1 \ll VR + \sum_{\gamma\ne\gamma'} \frac{V}{|\gamma-\gamma'|+1} \ll VR\log T_1,$$

$$I_2 \ll VR\log T_1,$$

$$I_3 \ll K^r R + \sum_{\gamma\ne\gamma'} \frac{K^r}{|\gamma-\gamma'|+1} \ll K^r R\log T_1,$$

$$I_4 \ll (VK^{-r})^2 K^r R\log T_1 = V^2 K^{-r} R\log T_1,$$

$$S_1 \ll VR\log T_1, \qquad S_4 \ll VR\log T_1.$$

Из (20), (21), (19), оценок S_1, S_2, S_3, S_4 получаем цепочку неравенств

$$|W_1| \ll \sqrt{S_1 S_2} \ll V\sqrt{R}(\log T_1)^{2r^2+2r+1},$$

$$|W_2| \ll \sqrt{S_3 S_4} \ll \sqrt{VK^r R}(\log T_1)^{2r^2} \ll V\sqrt{R}(\log T_1)^{2r^2},$$

$$|W| \ll RK^{r-2r\sigma}(\log T_1)^2 + R^{1,5}\sqrt{V}K^{r(1-3\sigma)}(\log T_1)^{4r^2+2r+2}.$$

Подставляя эту оценку в (15), находим

$$R \ll K^{2r(1-\sigma)}(\log T_1)^{(2r)^2+4r+7} + \sqrt{RV}K^{r(2-3\sigma)}(\log T_1)^{8r^2+6r+7}.$$

Если первое слагаемое больше второго, то

$$R \ll K^{2r(1-\sigma)}\log^{c_1} T_1 \ll T^{2(1-\sigma)}\log^{c_1} T_1.$$

Если второе слагаемое больше первого, то

$$R^{0,5} \ll V^{0,5}K^{r(2-3\sigma)}(\log T_1)^{8r^2+6r+7},$$

$$R \ll VK^{2r(2-3\sigma)}\log^{c_1} T_1 \ll TK^{2r(2-3\sigma)}\log^{c_1} T_1.$$

Мы рассматриваем случаи $r = 2, 3, 4$, $0,5 + (r+1)/12 < \sigma \le 1$, $T^{1,2/(r+1)} < K \le T_1^{1/r}$. Легко видеть, что тогда $\sigma > 3/4 > 2/3$,

$$R \ll T^{1+\frac{12r}{5(r+1)}(2-3\sigma)}\log^{c_1} T_1,$$

и, кроме того,

$$1 + \frac{12r}{5(r+1)}(2-3\sigma) \le \frac{12}{5}(1-\sigma),$$

т.е. $R \ll T^{2,4(1-\sigma)}\log^{c_1} T_1$. Случай, когда $S(\rho)$ имеет вид (4), рассмотрен полностью.

2. Второй случай значения $S(\rho)$. Пусть $S(\rho)$ имеет вид (5). В силу формулы Стирлинга (теорема П.3.5)

$$|\chi(\rho)| = \left| \frac{\pi^{-(1-\rho)/2}\Gamma((1-\rho)/2)}{\pi^{-\rho/2}\Gamma(\rho/2)} \right| \ll T_1^{0,5-\beta}, \quad \beta = \operatorname{Re}\rho.$$

Поэтому, переходя в (6) к неравенствам, найдем

$$1 \ll (\log T_1)^2 T_1^{0,5-\beta} \left| \sum_{Y<n\le Y_1} \frac{1}{n^{1-\rho}} \right| \left| \sum_{M<m\le M_1} \frac{\mu(m)}{m^\rho} \right|, \tag{22}$$

где $Y_1 \le y = \gamma/(2\pi x)$, $x = \sqrt{T_1/(2\pi)}$, $0,5T_1 \le \gamma \le T_1$, $M_1 \le T^{0,1}$.

Возведем (22) в четвертую степень и просуммируем обе части получившегося неравенства по $\rho \in E$, найдем

$$R \ll (\log T_1)^{11} \sum_{\rho\in E} T_1^{4(0,5-\beta)} \left| \sum_{Y<n\le Y_1} \frac{1}{n^{1-\beta-i\gamma}} \right|^4 \left| \sum_{M<m\le M_1} \frac{\mu(m)}{m^{\beta+i\gamma}} \right|^4.$$

Произведя частное суммирование по n и m, приходим к неравенству

$$R \ll (\log T_1)^{11} \sum_{\rho\in E} T^{4(0,5-\beta)} Y^{-4(1-\beta)} M^{-4\beta} \left| \sum_{Y<n<Y_2} \frac{1}{n^{i\gamma}} \right|^4 \times$$

$$\times \left| \sum_{M<m\le M_2} \frac{\mu(m)}{m^{i\gamma}} \right|^4 \ll (\log T_1)^{11} T_1^{4(0,5-\sigma)} Y^{-4(1-\sigma)} M^{-4\sigma} \times$$

$$\times \sum_{\rho\in E} \left| \sum_{YM<k\le Y_2 M_2} \frac{a(k)}{k^{i\gamma}} \right|^4,$$

где $a(k) = \sum'_{m|k} \mu(m)$, $|a(k)| \le \tau(k)$, $Y_2 \le Y_1$, $M_2 \le M_1$.

Опять вводя $A_2(k) = \sum'_{k_1 k_2 = k} a(k_1)a(k_2)$, получаем

$$R \ll (\log T_1)^{11} T_1^{4(0,5-\sigma)} Y^{-4(1-\sigma)} M^{-4\sigma} \sum_{\rho\in E} \left| \sum_{(YM)^2<k\le (Y_2 M_2)^2} \frac{A_2(k)}{k^{i\gamma}} \right|^2.$$

Границы изменения k могут зависеть от γ, так как от γ, вообще говоря, зависят Y_1 и Y_2, поэтому, применяя прием, который был применен для преобразования (16), получаем

$$R \ll (\log T_1)^{11} T_1^{4(0,5-\sigma)} Y^{-4(1-\sigma)} M^{-4\sigma} \sum_{\rho\in E} \left| \sum_{K<k\le K_1} \frac{A_2(k)}{k^{i\gamma}} \exp\left(2\pi i \frac{bk}{B}\right) \right|^2,$$

где $K < K_1 \le 2K \ll (YM)^2$, b и B — некоторые целые числа. К сумме по ρ применим лемму 1.1, найдем

$$S = \sum_{\rho\in E}\left|\sum_{K<k\le K_1}\frac{A_2(k)}{k^{i\gamma}}\exp\left(2\pi i\frac{bk}{B}\right)\right|^2 \ll I_1 + \sqrt{I_1 I_2}, \qquad (23)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{K<k\le K_1} A_2(k)\exp\left(2\pi i\frac{bk}{B}\right)k^{i\gamma}\right|^2 d\gamma,$$

$$I_2 = \int\limits_{0,5T_1}^{T_1}\left|\sum_{K<k\le K_1} A_2(k)\log k\exp\left(2\pi i\frac{bk}{B}\right)k^{i\gamma}\right|^2 d\gamma.$$

Для оценки I_1 и I_2 воспользуемся леммой 1.2; найдем

$$I_1 \ll (T_1+K)(\log T_1)\sum_{K<k\le K_1}|A_2(k)|^2 \ll$$

$$\ll (T_1+K)(\log T_1)\sum_{K<k\le K_1}\tau_4^2(k) \ll (T_1+K)(\log T_1)K(\log T_1)^{4^2-1};$$

$$I_2 \ll (T_1+K)K(\log T_1)^{4^2-1}.$$

Поэтому

$$S \ll (T_1+K)K(\log T_1)^{18} \ll (T_1+Y^2M^2)Y^2M^2(\log T_1)^{18},$$

$$R \ll T_1^{2-4\sigma}Y^{-4+4\sigma}M^{-4\sigma}(T_1Y^2M^2+Y^4M^4)\log^{c_1}T_1 \ll$$

$$\ll (T_1^{3-4\sigma}Y^{-2+4\sigma}M^{2-4\sigma}+T_1^{2-4\sigma}Y^{4\sigma}M^{4(1-\sigma)})\log^{c_1}T_1.$$

Поскольку $1\le Y \ll T_1^{0,5}$, $1 \le M \ll T_1^{0,1}$, $1/2\le\sigma\le 1$, то из последнего неравенства находим

$$R \ll (T^{2(1-\sigma)}+T^{2,4(1-\sigma)})\log^{c_1}T_1 \ll T^{2,4(1-\sigma)}\log^{c_1}T_1.$$

Теорема доказана.

§ 4. Плотностные теоремы и простые числа в промежутках малой длины

Установим связь оценок $N(\sigma,T)$ вида

$$N(\sigma,T) \ll T^{a(1-\sigma)}\log^c T, \quad a\ge 2, \quad c>0, \qquad (1)$$

с задачей распределения простых чисел в промежутках малой длины.

Т е о р е м а 1. *Пусть $a\ge 2$ и $c>0$ — абсолютные постоянные такие, что при $T\ge T_0$ выполняется неравенство (1). Тогда при $x\ge x_0>0$, $x\ge h\ge x^{1-1/a}\exp(\log^{0,8}x)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\psi(x+h)-\psi(x) = h + O\big(h\exp(-\log^{0,1}x)\big). \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме II.4.1 при $2\le T\le x$ имеем

$$\psi(x) = x - \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right);$$

следовательно,

$$\psi(x+h)-\psi(x) = h - \sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}\frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right). \qquad (3)$$

Поскольку

$$\left|\frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho}\right| = \left|\int\limits_x^{x+h}u^{\rho-1}du\right| \le \int\limits_x^{x+h}u^{\sigma-1}du \le hx^{\sigma-1}, \qquad \sigma=\mathrm{Re}\,\rho,$$

то

$$S = \left|\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}\frac{(x+h)^\rho-x^\rho}{\rho}\right| \le hx^{-1}\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}x^\sigma =$$

$$= hx^{-1}\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}\left(\log x\int\limits_0^\sigma x^u du + 1\right) =$$

$$= hx^{-1}\left(N(T) + \log x\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}\int\limits_0^1 x^u F(u,\sigma)du\right),$$

где $F(u,\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0\le u\le\sigma; \\ 0, & \text{если } \sigma<u\le 1. \end{cases}$

Из определения $F(u,\sigma)$ следует равенство

$$\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T}F(u,\sigma) = N(u,T).$$

Величину $N(u,T)$ при $0\le u\le 1$ будем оценивать тремя разными формулами: при $0\le u\le 1/2$ — тривиальной величиной $N(T) \ll T\log T$, при $1/2<u\le 1-\gamma(T)$, где $\gamma(T)=c_1(\log T\log\log T)^{-2/3}$, $c_1>0$ — постоянная теоремы IV.3.2, — по формуле (1) и, наконец, при $1-\gamma(T)<u\le 1$ — величиной 0. Считая $x\ge 2T^a$, находим

$$S \ll hx^{-1}\left(T\log T + (\log x)\int\limits_0^{0,5}x^u T\log T\,du + \right.$$

$$\left. +(\log x)\int\limits_{0,5}^{1-\gamma(T)}x^u T^{a(1-u)}\log^c T\,du\right) \ll$$

$$\ll hx^{-1}(x^{0,5}T\log^2 x + x(xT^{-a})^{-\gamma(T)}\log^{c+1}x) \ll$$

$$\ll h(x^{-0,5}T\log^2 x + (xT^{-a})^{-\gamma(T)}\log^{c+1}x).$$

Полагая теперь $T^a = x\exp(-\log^{0,8} x)$, видим, что при $h \ge x^{1-1/a}\times \times\exp(\log^{0,8} x)$ формула (3) запишется так:

$$\psi(x+h)-\psi(x) = h\left(1+O\left(\exp(-\log^{0,1} x)\right)+O\left(\frac{x\log^2 x}{Th}\right)\right) = $$
$$= h\left(1+O\left(\exp(-\log^{0,1} x)\right)\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *При $x \ge x_0 > 0$, $x \ge h \ge x^{7/12}\exp(\log^{0,8} x)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\psi(x+h)-\psi(x) = h + O(h\exp(-\log^{0,1} x)). \tag{4}$$

Утверждение получается из теорем 3.1 и 1. Из (4), кроме того, находим

$$\sum_{x<p\le x+h}\log p = h + O(h\exp(-\log^{0,1} x)),$$

т.е. интервал $(x, x+h)$ содержит $K \sim h(\log x)^{-1}$ простых чисел.

§ 5. Нули $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой

Из теоремы 1.1 следует, что почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в окрестности критической прямой. Именно, при всяком $\delta > 0$ $N(1/2+\delta, T)/N(0,T) \to 0$ при $T\to\infty$. Здесь будет получен более точный результат.

Будем далее в этом параграфе считать ε произвольно малым фиксированным положительным числом, не превосходящим $0,001$. Пусть, кроме того, $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $L = \log T$, $x = T^{0,01\varepsilon}$; $c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные.

1. Вспомогательные утверждения о суммировании арифметических функций.

Лемма 1. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\Phi(X) = \sum_{n\le X}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = c_0\log X + O\left(\exp\left(-\log^{3/5} X(\log\log X)^{-1/5}\right)\right),$$

где $c_0 = \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-1}\right) > 0.$

Доказательство. Определим производящую функцию $F(s)$ равенством

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)n^s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Тогда

$$F(s) = \prod_p\left(1+\frac{\mu^2(p)}{\varphi(p)p^s}\right) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\right) =$$
$$= \zeta(s+1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)\left(1+\frac{1}{(p-1)p^s}\right); \quad \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Полагая в теореме II.5.1 $f(s) = F(s)$, $\sigma_1 = 0$, $\alpha = 1$, $x = X = N + 1/2$, $X \ge X_0 > 0$, $b = \log^{-1} X$, $A(n) = n^{-1}\log\log n$, $T = \exp(2(\log X)^{3/5}\times \times(\log\log X)^{-1/5})$, найдем

$$\Phi(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F(s)\frac{X^s}{s}ds + O(T^{-1}\log^2 X).$$

Переносим прямую интегрирования на прямую $\mathrm{Re}\, s = -b_1$, где

$$b_1 = c(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3},$$

здесь $c > 0$ — постоянная теоремы IV.3.1. Подынтегральная функция имеет в точке $s = 0$ полюс с вычетом $c_0\log X$. Оценивая интегралы по отрезкам $s = -b_1 + it$, $|t| \le T$, $s = \sigma \pm iT$, $-b_1 \le \sigma \le b$, тривиально, пользуясь только оценкой

$$|F(s)| = O\left(\log^{2/3}(|t|+10)\right),$$

получим утверждение леммы.

Введем необходимые нам в дальнейшем числа

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu<x}\frac{\mu(r\nu)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{\mu(\nu)}{\varphi(\nu)}\sum_{\substack{r\nu<x\\(r,\nu)=1}}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1}.$$

Из определения $\delta(\nu)$ следует, что эти числа зависят еще от вещественного параметра x, и, кроме того, $|\delta(\nu)| \le \varphi^{-1}(\nu)$.

Лемма 2. *Пусть* $d = (\nu_1, \nu_2)$ *и*

$$S_3 = \sum_{\nu_1<x}\sum_{\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d\log d.$$

Тогда справедливо неравенство

$$S_3 \le 2\left(\sum_{n<x}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}\right)^{-1}\log x.$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi_a(n)$ равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_a(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-a-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s-a-1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{km=n}\frac{\mu(k)}{m^{-a-1}};$$

тогда

$$\varphi_a(n)=n^{1+a}\sum_{k|n}\frac{\mu(k)}{k^{1+a}}=n^{1+a}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^{1+a}}\right).$$

Далее, определим функцию $f(n)$ равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Будем иметь

$$-\zeta'(s-1)=\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-s}\sum_{k|n}f(k)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\log n}{n^s},$$

т.е.

$$n\log n=\sum_{k|n}f(k).$$

Отсюда следует, что

$$d\log d=\sum_{k|d}f(k);$$

$$S_3=\sum_{\nu_1<x}\sum_{\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)\sum_{k|d}f(k)=\sum_{k<x}f(k)\sum_{\substack{k|\nu_1\\ \nu_1<x}}\delta(\nu_1)\sum_{\substack{k|\nu_2\\ \nu_2<x}}\delta(\nu_2)=$$

$$=\sum_{k<x}f(k)\left(\sum_{\substack{k|\nu\\ \nu<x}}\delta(\nu)\right)^2.$$

В силу определения функций $\varphi_a(n)$ и $f(n)$ имеем

$$f(k)=\left[\frac{\partial}{\partial a}\varphi_a(k)\right]_{a=0}=\varphi(k)\left(\log k+\sum_{p|k}\frac{\log p}{p-1}\right);$$

$$f(k)\le\varphi(k)\left(\log k+\sum_{p|k}\log p\right)\le 2\varphi(k)\log k.$$

Кроме того,

$$\sum_{\substack{\nu<x\\ \nu\equiv 0(k)}}\delta(\nu)=\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1}\sum_{\substack{r\nu<x\\ \nu\equiv 0(k)}}\frac{\mu(r\nu)\mu(r)}{\varphi(r\nu)}=$$

$$=\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1}\sum_{\substack{n<x\\ n\equiv 0(k)}}\frac{\mu(n)}{\varphi(n)}\sum_{r|(\frac{n}{k})}\mu(r)=\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1}\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}.$$

Следовательно,

$$S_3\le 2\sum_{k<x}\varphi(k)\log k\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-2}\frac{\mu^2(k)}{\varphi^2(k)}\le 2\log x\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $d=(\nu_1,\nu_2)$,

$$S_1=\sum_{\nu_1<x}\sum_{\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d,$$

$$S_2=\sum_{\nu_1<x}\sum_{\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d\log\nu_1.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$S_1=\left(\sum_{r\le x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1};\quad S_2=0.$$

Доказательство. При любом фиксированном $\nu_2\le x$ имеем

$$\sum_{\nu_1<x}(\nu_1,\nu_2)\delta(\nu_1)=\left(\sum_{r<x}\frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)}\right)^{-1}\sum_{\nu_1<x}\sum_{r\nu_1<x}\frac{(\nu_1,\nu_2)\mu(r\nu_1)\mu(r)}{\varphi(r\nu_1)}.$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$(\nu_1,\nu_2)=\sum_{\nu|(\nu_1,\nu_2)}\varphi(\nu)=\sum_{\nu|\nu_1,\nu|\nu_2}\varphi(\nu),$$

тогда получим

$$W=\sum_{\nu_1<x}\sum_{r\nu_1<x}\frac{(\nu_1,\nu_2)\mu(r\nu_1)\mu(r)}{\varphi(r\nu_1)}=$$

$$=\sum_{\nu_1<x}\sum_{r\nu_1<x}\frac{\mu(r\nu_1)\mu(r)}{\varphi(r\nu_1)}\sum_{\nu|\nu_2,\nu|\nu_1}\varphi(\nu)=$$

$$=\sum_{\nu|\nu_2}\varphi(\nu)\sum_{\substack{\nu_1<x\\ \nu|\nu_1}}\sum_{r\nu_1<x}\frac{\mu(r\nu_1)\mu(r)}{\varphi(r\nu_1)}.$$

Пусть $r\nu_1 = l$, тогда $r\nu | r\nu_1$, т.е. $r\nu | l$, следовательно,

$$W = \sum_{\nu|\nu_2} \varphi(\nu) \sum_{l<x} \frac{\mu(l)}{\varphi(l)} \sum_{r|\frac{l}{\nu}} \mu(r) = \sum_{\nu|\nu_2} \varphi(\nu) \frac{\mu(\nu)}{\varphi(\nu)} =$$

$$= \sum_{\nu|\nu_2} \mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_2 = 1, \\ 0, & \text{если } \nu_2 > 1. \end{cases}$$

Поэтому получаем

$$\sum_{\nu_2<x} \sum_{\nu_1<x} (\nu_1, \nu_2)\delta(\nu_1)\delta(\nu_2) = \left(\sum_{r<x} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{-1} \delta(1) = \left(\sum_{r<x} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{-1};$$

$$\sum_{\nu_2<x} \sum_{\nu_1<x} (\nu_1, \nu_2)\delta(\nu_1)\delta(\nu_2) \log \nu_1 = \left(\sum_{r<x} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{-1} \delta(1) \log 1 = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Из лемм 1 – 3 получаем

$$S_1 = O(\log^{-1} x), \quad S_2 = 0, \quad S_3 = O(1). \tag{1}$$

2. Оценка одной кратной тригонометрической суммы.

Л е м м а 4. *Пусть* $0 \le \xi, \eta < 1$, h — *целое неотрицательное число,*

$$x^{-2} \le |\xi - \eta + h|, \quad H = T^{27/82+\varepsilon},$$
$$N \le x\sqrt{T}, \quad c_1 N \le N_1 < N_2 \le c_2 N.$$

Тогда для тригонометрической суммы

$$W = \sum_{0 \le h \le NH^{-1}L} \left| \sum_{N_1 < n \le N_2} \left(\frac{n+h+\xi}{n+\eta} \right)^{iT} \right|$$

справедлива следующая оценка:

$$W = O(NT^{-4\varepsilon/3}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы дословно совпадает с доказательством леммы VI.3.4, более точно, — с оценкой модуля суммы $C(u)$ этой леммы.

Л е м м а 5. *Пусть* $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $P_1 = xP$. *При натуральных числах* m, m_1, m_2 *положим*

$$a(m) = \sum_{\substack{n\nu = m \\ n \le P, \nu < x}} \frac{\sqrt{\nu}\delta(\nu)}{\sqrt{n}},$$

$$D(m_1, m_2) = a(m_1)a(m_2) \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{-iT}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$W = \sum_{0<m_1<m_2<P_1} D(m_1, m_2) = O(T^{-\varepsilon}),$$

причем постоянная в знаке O *зависит только от* ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интервал суммирования по m_1, $0 < m_1 < P_1$, разобьем на $\ll \log T$ интервалов вида $1 \le M \le m_1 < M_1 \le 2M$, и рассмотрим одну из сумм $W(M)$, образовавшихся после такого разбиения:

$$W(M) = \sum_{\substack{0<m_1<m_2<P \\ M<m_1<M_1}} D(m_1, m_2).$$

Если $m_2 - m_1 > K = MH^{-1}L$, то $\log(m_2/m_1) > (4H)^{-1} \log T$. Действительно, при $2(m_2 - m_1) > m_1$

$$\log \frac{m_2}{m_1} = \log\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1} + 1 \right) > \log \frac{3}{2} > \frac{1}{4H} \log T.$$

Таким образом, если $m_2 - m_1 > K$, то

$$\left(\frac{H}{2} \log \frac{m_2}{m_1} \right)^2 > \left(\frac{1}{8} \log T \right)^2,$$

и соответствующая часть суммы $W(M)$ есть величина порядка

$$O(\exp(-0,01L^2)). \tag{2}$$

Заметим также, что при $M \le HL^{-1}$ все суммы $W(M)$ имеют порядок (2). Оценим оставшуюся часть суммы $W(M)$, которую обозначим символом $W_1(M)$,

$$W_1(M) = \sum_{M \le m_1 < M_1} \sum_{m_1 < m_2 \le m_1 + K} D(m_1, m_2);$$

$$M > HL^{-1}, \qquad K = MH^{-1}L.$$

Записывая слагаемые $D(m_1, m_2)$ в явном виде, получим

$$W_1(M) = \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \delta(\nu_1)\delta(\nu_2)\sqrt{\nu_1\nu_2} W(\nu_1, \nu_2),$$

где

$$W(\nu_1, \nu_2) = \sum_{\substack{M \le n_1\nu_1 < M_1 \\ n_1 \le P}} \sum_{\substack{n_1\nu_1 < n_2\nu_2 \le n_1\nu_1 + K \\ n_2 < P}} (n_1 n_2)^{-0,5} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{n_1\nu_1}{n_2\nu_2} \right)^2 \right) \left(\frac{n_1\nu_1}{n_2\nu_2} \right)^{-iT}.$$

Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел ν_1 и ν_2. Тогда $\nu_1 = ad$, $\nu_2 = bd$, $(a, b) = 1$. Переменные суммирования n_1, n_2 представим так:

$$n_1 = bn_3 + n_3', \qquad n_2 = an_4 + n_4',$$

10*

причем n_3', n_4' меняются в пределах $0 \le n_3' < b$, $0 \le n_4' < a$, и при заданных n_3', n_4' переменные n_3, n_4 меняются в пределах

$$N_3 = (M\nu_1^{-1} - n_3')b^{-1} \le n_3 < (M_1\nu_1^{-1} - n_3')b^{-1} = N_3',$$

$$n_3 \le (P - n_3')b^{-1},$$

$$(n_1\nu_1\nu_2^{-1} - n_4')a^{-1} < n_4 \le (n_1\nu_1\nu_2^{-1} - n_4' + K\nu_2^{-1})a^{-1},$$

$$n_4 \le (P - n_4')a^{-1}.$$

Далее, имеем

$$(n_1\nu_1\nu_2^{-1} - n_4')a^{-1} = ((bn_3 + n_3')ab^{-1} - n_4')a^{-1} =$$

$$= n_3 + n_3'b^{-1} - n_4'a^{-1} = n_3 + \xi, \qquad \xi = n_3'b^{-1} - n_4'a^{-1},$$

поэтому

$$n_3 + \xi < n_4 \le n_3 + \xi + K\nu_2^{-1}a^{-1}, \qquad n_4 \le (P - n_4')a^{-1}.$$

Пользуясь введенными обозначениями, представим дробь $\frac{n_1\nu_1}{n_2\nu_2}$ в виде

$$\frac{n_1\nu_1}{n_2\nu_2} = \frac{n_1 a}{n_2 b} = \frac{abn_3 + an_3'}{abn_4 + bn_4'} = \frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}, \quad \alpha = n_3'b^{-1}, \beta = n_4'a^{-1}.$$

Сумма $W(\nu_1, \nu_2)$ будет выглядеть следующим образом:

$$W(\nu_1, \nu_2) = \sum_{0 \le n_3' < b} \sum_{0 \le n_4' < a} W_1(n_3', n_4'),$$

где

$$W_1(n_3', n_4') =$$

$$= \sum_{\substack{N_3 \le n_3 < N_3' \\ n_3 \le (P - n_3')b^{-1}}} \sum_{\substack{n_3 + \xi < n_4 \le n_3 + \xi + K_1 \\ n_4 \le (P - n_4')a^{-1}}} ((bn_3 + n_3')(an_4 + n_4'))^{-0,5} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}\right)^2\right) \exp\left(-iT\log\frac{n_3 + \alpha}{n_4 + \beta}\right),$$

где $K_1 = K\nu_2^{-1}a^{-1}$.

Переменная суммирования n_4 принимает все значения натуральных чисел из полуинтервала $(n_3 + \xi, n_3 + \xi + K_1]$, поэтому n_4 можно заменить величиной $n_3 + h$, $n_4 = n_3 + h$, где h принимает значения $1 \le h \le \min(K_1 + \xi; (P - n_3')b^{-1} - N_3)$ и, может быть, значение 0, причем если $h = 0$, то должно быть $\xi = \alpha - \beta \ne 0$, так как иначе получим $n_3' = n_4' = 0$, $n_3 = n_4$, $n_1 = bn_3$, $n_2 = an_4$, $n_1\nu_1 = bn_3ad = n_2\nu_2 = an_4bd$, что противоречит условию $n_1\nu_1 < n_2\nu_2$. Поэтому справедлива оценка

$$|W_1(n_3', n_4')| \le \sum_{0 \le h \le K_1 + 1} \left| \sum_{N_3 \le n_3 < N_3'} G(n_3) \exp\left(iT\log\frac{n_3 + h + \beta}{n_3 + \alpha}\right) \right|,$$

где

$$G(n_3) = ((bn_3 + n_3')(an_3 + ah + n_4'))^{-0,5} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_3 + h + \beta}{n_3 + \alpha}\right)^2\right).$$

Поскольку функция $G(n_3)$ кусочно монотонна, то, применяя к сумме по n_3 частное суммирование (теорема II.1.1) и переходя к оценкам, найдем

$$W_1(n_3', n_4') = O\left(M^{-1} \sum_{0 \le h \le K_1 + 1} \left| \sum_{N_3 \le n_3 < N_3''} \exp\left(iT\log\frac{n_3 + h + \beta}{n_3 + \alpha}\right) \right| \right),$$

где $N_3'' \le N_3'$. Для оценки последней суммы воспользуемся леммой 4. Последовательно находим:

$$W_1(n_3', n_4') = O(M^{-1}N_3T^{-4\varepsilon/3}) = O(\nu_1^{-1}\nu_2^{-1}dT^{-4\varepsilon/3});$$

$$W(\nu_1, \nu_2) = O(d^{-1}T^{-4\varepsilon/3}); \qquad W_1(M) = O(x^2T^{-4\varepsilon/3});$$

$$W(M) = O(T^{-1,1\varepsilon}).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Л е м м а 6. *При условиях и обозначениях леммы 5 справедлива оценка*

$$\sum = \sum_{m < P_1} a^2(m) = O(1),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения чисел $a(m)$ следует, что

$$\sum = \sum_{m < P_1} \sum_{n_1\nu_1 = n_2\nu_2 = m} \sqrt{\frac{\nu_1\nu_2}{n_1 n_2}}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2),$$

причем $n_1, n_2 \le P$, $\nu_1, \nu_2 < x$. Поменяем порядок суммирования в кратной сумме; внешним сделаем суммирование по ν_1, ν_2. Находим

$$\sum = \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \delta(\nu_1)\delta(\nu_2)R(\nu_1, \nu_2), \tag{3}$$

где

$$R(\nu_1, \nu_2) = \sum_{\substack{n_1\nu_1 = n_2\nu_2 < P_1 \\ n_1, n_2 \le P}} \sqrt{\frac{\nu_1\nu_2}{n_1 n_2}}.$$

Пусть $d = (\nu_1, \nu_2)$, тогда $\nu_1 = d\nu_1'$, $\nu_2 = d\nu_2'$, $(\nu_1', \nu_2') = 1$. В сумме $R(\nu_1, \nu_2)$ суммирование ведется по натуральным числам n_1, n_2, не превосходящим P и таким, что $n_1\nu_1 = n_2\nu_2 < P_1$. Отсюда следует, что

$$n_1\nu_1' = n_2\nu_2' < Pd^{-1}.$$

Так как $(\nu_1', \nu_2') = 1$, то числа n_1 кратны ν_2', а числа n_2 кратны ν_1', следовательно, $n_1 = k\nu_2'$, $n_2 = k\nu_1'$, где

$$k\nu_1'\nu_2' < P_1 d^{-1}, \quad k\nu_1' \le P, \quad k\nu_2' \le P.$$

Таким образом, для $R(\nu_1,\nu_2)$ получаем

$$R(\nu_1,\nu_2)=\sum_{\substack{n_1\nu_1=n_2\nu_2<P_1\\ n_1,n_2\le P}}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_2}{n_1n_2}}=\sum_{k<K}\sqrt{\frac{d^2\nu_1'\nu_2'}{k^2\nu_1'\nu_2'}}=d\sum_{k<K}\frac{1}{k},$$

где

$$K=\min(P_1d^{-1}(\nu_1',\nu_2')^{-1},P(\nu_1')^{-1},P(\nu_2')^{-1})=$$
$$=\min(Pd\nu_1^{-1},Pd\nu_2^{-1})=Pd\min(\nu_1^{-1},\nu_2^{-1}).$$

Применяя теперь формулу суммирования Эйлера, находим

$$R(\nu_1,\nu_2)=d(\log K+c+O(K^{-1}))=$$
$$=d(\log P+c+\log d+\log\min(\nu_1^{-1},\nu_2^{-1}))+O(P^{-1}x).$$

Подставим получившееся выражение $R(\nu_1,\nu_2)$ в (3), получим

$$\Sigma=(\log P+c)\sum_{\nu_1,\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d+$$
$$+\sum_{\nu_1,\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d\log d+\sum_{\nu_1,\nu_2<x}\delta(\nu_1)\delta(\nu_2)d\log\min(\nu_1^{-1},\nu_2^{-1})+$$
$$+O(P^{-1}x\log^4 x)$$

Вспоминая обозначения лемм 1 – 3, видим, что

$$\Sigma=(\log P+c)S_1+S_3-S_2+O(P^{-1}x\log^4 x).$$

Из (1) следует оценка

$$\Sigma=O\left(\frac{\log P}{\log x}\right)+O(1)=O(1),$$

что и требовалось доказать.

3. Оценка количества нулей $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой. Теперь докажем теоремы, касающиеся нулей $\zeta(s)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $H=T^{27/82+\varepsilon}$. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$\int_{0,5}^{1}(N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T))d\sigma=O(H).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\Phi(s)$,

$$\Phi(s)=\zeta(s)f(s),\qquad f(s)=\sum_{\nu<x}\delta(\nu)\nu^{1-s},$$

и прямоугольник Γ с вершинами $s=0,5+iT$, $s=0,5+i(T+H)$, $s=3+iT$, $s=3+i(T+H)$. Пользуясь теоремой II.2.11, найдем

$$2\pi\int_{0,5}^{3}(N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T))d\sigma=2\pi\int_{0,5}^{1}(N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T))d\sigma=$$

$$=\int_T^{T+H}\left(\log\left|\Phi(0,5+it)\right|-\log\left|\Phi(3+it)\right|\right)dt+$$
$$+\int_{0,5}^{3}\left(\arg\Phi(\sigma+i(T+H))-\arg\Phi(\sigma+iT)\right)d\sigma.$$

Второй интеграл оценим величиной $O(\log T)$, применяя теорему II.2.12. Вторая подынтегральная функция первого интеграла есть величина порядка $O(1)$, поэтому, применяя к первому интегралу теорему II.7.2, найдем

$$2\pi\int_{0,5}^{1}(N(\sigma,T+H)-N(\sigma,T))d\sigma\le$$
$$\le\frac{H}{2}\log\left(\frac{1}{H}\int_T^{T+H}\left|\zeta(0,5+it)\right|^2\left|f(0,5+it)\right|^2dt\right)+O(H).$$

Оценим последний интеграл, который обозначим буквой J. Из приближенного функционального уравнения для $\zeta(0,5+it)$ (см. теорему III.3.1) при $T\le t\le T+H$ получаем $|\zeta(0,5+it)|\le 2\left|\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}n^{it}\right|+$ $+O(T^{-1/4})$, где $P=\sqrt{T/(2\pi)}$. Далее, имеем тривиальные оценки

$$\left|\delta(\nu)\right|\le\varphi^{-1}(\nu),\qquad\left|f(0,5+it)\right|\le\sum_{\nu<x}\frac{\sqrt{\nu}}{\varphi(\nu)}=O(\sqrt{x}\log T).$$

Следовательно, для J получаем такое неравенство:

$$J\le 8J_1+O(HT^{-0,5}x\log^4 T),$$

где

$$J_1=\int_T^{T+H}\left|\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}n^{it}\right|^2\left|f(0,5+it)\right|^2dt\le$$
$$\le e\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t/H)^2}\left|\sum_{m<P_1}a(m)m^{i(t+T)}\right|^2dt,$$

здесь $P_1=xP$, числа $a(m)$ определены в лемме 5. После интегрирования по t приходим к неравенству

$$J_1\le e\sqrt{\pi}H\sum_{m_1,m_2<P_1}a(m_1)a(m_2)\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT}\le$$
$$\le e\sqrt{\pi}H(\Sigma+2|W|),$$

где величины Σ и W определены в леммах 5 и 6. Применяя оценки этих лемм, последовательно находим

$$J_1 = O(H), \qquad J = O(H),$$

$$\int\limits_{0,5}^{1} (N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T))d\sigma = O(H),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если $H = T^\alpha$, где $\alpha > 27/82$, то при $0,5 < \sigma \le 1$ равномерно по σ справедлива оценка*

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha - 27/82 = \varepsilon < 0,001$. Пусть $\sigma > 0,5$; возьмем $\sigma_1 = 0,5 + 0,5(\sigma - 0,5) < \sigma$. Функция $g(\alpha)$,

$$g(\alpha) = N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T),$$

не возрастает с ростом α, т.е. $g(\alpha_2) \le g(\alpha_1)$, если $\alpha_1 \le \alpha_2$. Пользуясь этим свойством $g(\alpha)$ и применяя теорему 1, найдем

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \le \frac{1}{\sigma - \sigma_1} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma} (N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T))d\alpha \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma - 0,5} \int\limits_{0,5}^{1} (N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T))d\alpha = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть $\Phi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда области s-плоскости вида $|\sigma - 0,5| < \dfrac{\Phi(t)}{\log t}$, $T < t \le T+H$, лежит*

$$(N(T+H) - N(T))(1 + O(\Phi^{-1}(T)))$$

нулей функции $\zeta(s)$.

§ 6. Связи между распределением нулей функции $\zeta(s)$ и оценками ее модуля. Гипотеза Линделефа и плотностная гипотеза

Заметим, что между оценками дзетовых сумм и оценкой $|\zeta(\alpha+it)|$ где $0,5 \le \alpha < 1$, α — фиксированное число, $t \to +\infty$, существу тесная связь. Докажем одно утверждение, которое демонстрирует э замечание.

Теорема 1. *Пусть при некотором β, $0 < \beta < 1$, и любых $t \ge 2$ выполняется оценка*

$$|\zeta(0,5+it)| \ll t^\beta. \tag{1}$$

Тогда при $2 \le x \le t$ для дзетовой суммы будет справедлива следующая оценка:

$$\left|\sum_{n \le x} n^{it}\right| \ll \sqrt{x} t^\beta \log t. \tag{2}$$

Наоборот, пусть при некотором β, $0 < \beta < 1$, и любых x и t с условием $2 \le x \le \sqrt{t}$ выполняется оценка (2). Тогда для $|\zeta(0,5+it)|$ будет справедлива следующая оценка:

$$|\zeta(0,5+it)| \ll t^\beta \log^2 t. \tag{3}$$

Доказательство. Применим теорему II.5.1, полагая в ней $b = 1 + \log^{-1} t$, $T = 0,5t$, $x = N + 0,5$; найдем

$$\sum_{n \le x} n^{it} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \zeta(s+it)\frac{x^s}{s} ds + O(xT^{-1}\log t).$$

Пусть Γ — контур прямоугольника с вершинами $b \pm iT$, $0,5 \pm iT$; тогда по теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \zeta(s+it)\frac{x^s}{s} ds = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \zeta(s+it)\frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0,5-iT}^{0,5+iT} \zeta(s+it)\frac{x^s}{s} ds +$$

$$+ O\left(t^{-1} \int\limits_{0,5}^{b} \left|\zeta(\sigma + i(t \pm T))\right| x^\sigma d\sigma\right).$$

Пользуясь условием теоремы, первый интеграл правой части оценим величиной $O(\sqrt{x} t^\beta \log t)$. Второй интеграл оценим, пользуясь простейшей оценкой $|\zeta(\sigma+it)|$ вида

$$|\zeta(\sigma+it)| = O(t^{1-\sigma}\log t), \qquad 0,5 \le \sigma \le b;$$

получим, что он есть величина порядка $O(\log t)$. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Пусть теперь выполняется (2). Воспользуемся следствием приближенного функционального уравнения для $\zeta(s)$ (см. теорему III.3.1):

$$|\zeta(0,5+it)| \ll \left|\sum_{n\le\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it}\right| + 1.$$

Применяя формулу частного суммирования, получим

$$\sum_{n\le\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} = -\int_1^{\sqrt{t/(2\pi)}} \left(\sum_{n\le x} n^{it}\right) d\frac{1}{\sqrt{x}} +$$

$$+\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4} \sum_{n\le\sqrt{t/(2\pi)}} n^{it} \ll t^{\beta}\log^2 t,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Гипотеза Линделефа, т.е. соотношение вида*

$$\zeta(0,5+it) = O(|t|^{\varepsilon}), \qquad |t|\ge 2,$$

и оценка дзетовой суммы вида

$$\left|\sum_{n\le x} n^{it}\right| \ll \sqrt{x}|t|^{\varepsilon}, \qquad 1\le x\le\sqrt{|t|},$$

являются эквивалентными утверждениями.

Из гипотезы Линделефа следует, что $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s \ge \alpha > 0,5$ может хорошо приближаться очень коротким начальным отрезком своего ряда Дирихле.

Теорема 2. *Пусть α и β — положительные числа, причем $0,5<\alpha<1$, $0<\beta<1$. Тогда при $T\ge T_0(\beta)>0$, $0,5T\le t\le T$, $\sigma\ge\alpha$, справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\zeta(\sigma+it) = \sum_{n\le T^{\beta}} \frac{1}{n^{\sigma+it}} + O\left(\frac{1}{\alpha-0,5} T^{\varepsilon-\beta(\alpha-0,5)}\right),$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое фиксированное число и постоянная в знаке O зависит только от ε.

Доказательство. Возьмем в простейшем приближении $\zeta(s)$ $x=T/\pi$ (см.теорему III.2.1); найдем

$$\zeta(s) = \sum_{n\le T/\pi} n^{-s} + O(T^{-\sigma}\log T) =$$

$$= \sum_{n\le T^{\beta}} n^{-s} + \sum_{T^{\beta}<n\le T/\pi} \frac{1}{n^{\sigma+it}} + O(T^{-\sigma}\log T).$$

Пользуясь формулой частного суммирования и следствием к теореме 1, легко находим при $\sigma\ge\alpha$

$$\sum_{t^{\beta}<n\le T/\pi} n^{-(\sigma+it)} = -\int_{T^{\beta}}^{T/\pi} C(u)d(u^{-\sigma}) + (T/\pi)^{-\sigma}C(T/\pi) \ll$$

$$\ll T^{\varepsilon}\int_{T^{\beta}}^{T/\pi} u^{-0,5-\alpha}du + T^{\varepsilon}T^{0,5-\alpha} \ll (\alpha-0,5)^{-1}T^{-\beta(\alpha-0,5)+\varepsilon}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Определение 1. Оценку плотности $N(\sigma,T)$ вида

$$N(\sigma,T) \ll T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)}\log^c T, \tag{4}$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое фиксированное число, $c=c(\varepsilon)\ge 0$, а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε, будем называть *плотностной гипотезой.*

Теорема 3. *Из гипотезы Линделефа следует плотностная гипотеза.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — фиксированное число, не превосходящее $0,01$. Будем считать, кроме того, $\sigma\ge 0,5+0,5\varepsilon$, так как в противном случае оценка (4) хуже тривиальной. Возьмем в теореме 2

$$\alpha = 0,5+0,5\varepsilon, \qquad \beta = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$

Находим: при $\sigma\ge\alpha$, $0,5T\le t\le T$,

$$\zeta(\sigma+it) = \sum_{n\le T^{\beta}} n^{-(\sigma+it)} + O(T^{-0,40\varepsilon\beta}). \tag{5}$$

Далее повторяем доказательство теоремы 1.1. Пусть

$$X = T^{0,96\varepsilon\beta}, \qquad M_X(s) = \sum_{n\le X}\mu(n)n^{-s}.$$

Тогда

$$|M_X(s)| \le \sum_{n\le X}\frac{1}{\sqrt{n}} = O(T^{0,48\varepsilon\beta});$$

следовательно, при $s=\sigma+it$, $\sigma\ge\alpha$, $0,5T\le t\le T$,

$$\zeta(s)M_X(s) = 1 + \sum_{X<n\le XT^{\beta}} a(n)n^{-s} + O(T^{-0,01\varepsilon\beta}),$$

где $|a(n)|\le\tau(n)$. Как и раньше, приходим к неравенству

$$Y^{\sigma}N_1(\sigma,T) \ll (\log^2 T)\sum_{\gamma}\left|\sum_{Y<n\le Y_1} a(n)n^{i\gamma}\right|, \tag{6}$$

где $X < Y \le XT^{\beta}$, $Y_1 \le 2Y$, и суммирование ведется по ординатам нулей ρ функции $\zeta(s)$ с условием $\operatorname{Re}\rho \ge \sigma$, $0,5T \le \gamma \le T$, $|\gamma - \gamma'| \gg \gg \log T$. Определим натуральное число k из условий

$$T^{1/(k+1)} < Y \le T^{1/k}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2k} < \frac{1}{k+1} < \frac{\log Y}{\log T} \le \frac{1}{k};$$
$$\frac{1}{k} < \frac{2\log Y}{\log T} \le 2(0,96\varepsilon\beta + \beta) < \varepsilon.$$

Возведем обе части неравенства (6) в степень $2k+2$, применим неравенство Гельдера и лемму 1,1 о замене суммы по γ интегралом; найдем

$$Y^{2(k+1)\sigma} N_1(\sigma, T) \ll (\log T)^{4(k+1)} \sum_{\gamma} \left| \sum_{Y<n\le Y_1} a(n) n^{i\gamma} \right|^{2(k+1)} =$$
$$= (\log T)^{4(k+1)} \sum_{\gamma} \left| \sum_{Y^{k+1}<n\le Y_1^{k+1}} b(n) n^{i\gamma} \right|^2 \ll$$
$$\ll (\log T)^{4(k+1)} (I_1 + \sqrt{I_1 I_2}),$$

где

$$I_1 = \int_{0,5T}^{T} \left| \sum_{Y^{k+1}<n\le Y_1^{k+1}} b(n) n^{it} \right|^2 dt,$$
$$I_2 = \int_{0,5T}^{T} \left| \sum_{Y^{k+1}<n\le Y_1^{k+1}} b(n)(\log n) n^{it} \right|^2 dt,$$

$$b(n) \le \sum_{n_1 \ldots n_{k+1} = n} \tau(n_1)\ldots\tau(n_{k+1}) \le$$
$$\le \sum_{n_1 \ldots n_{k+1} = n} \tau_{2k+2}(n_1 \ldots n_{k+1}) = \tau_{k+1}(n)\tau_{2k+2}(n).$$

Интегралы, подобные I_1 и I_2, уже оценивались раньше (см. доказательство теоремы 3.1):

$$I_1 \ll T \sum_{Y^{k+1}<n\le(2Y)^{k+1}} |b(n)|^2 + Y^{k+1} \times$$
$$\times \sum_{r=1}^{(2Y)^{k+1}} r^{-1} \left(\sum_{Y^{k+1}<m\le(2Y)^{k+1}} |b(m)|^2 \sum_{Y^{k+1}<m\le(2Y)^{k+1}} |b(m+r)|^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll TY^{k+1} (\log T)^{(2k+2)^4 - 1} + Y^{2(k+1)} (\log T)^{(2k+2)^4} \ll$$
$$\ll Y^{2k+2} (\log T)^{16(k+1)^4};$$
$$I_2 \ll Y^{2k+2} (\log T)^{16(k+1)^4 + 2}.$$

Следовательно, для $N_1(\sigma, T)$ находим оценку

$$Y^{2(k+1)\sigma} N_1(\sigma, T) \ll Y^{2k+2} (\log T)^{16(k+1)^4 + 4(k+1) + 1};$$
$$N_1(\sigma, T) \ll Y^{2(k+1)(1-\sigma)} \log^c T \ll$$
$$\ll T^{2(1+1/k)(1-\sigma)} \log^c T \ll T^{2(1+\varepsilon)(1-\sigma)} \log^c T,$$

где $c = 16(k+1)^4 + 4(k+1) + 1 = c(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Результаты типа теоремы 2.1 и теоремы 3.1 получены в [129, 135].

Теорема 3.1 доказана М.Хаксли [133]. Настоящее изложение отличается от оригинала.

2. Впервые плотностные теоремы к проблеме попадания простых чисел в интервал малой длины применил Г.Гогейзель [129]. Это направление получило большое развитие [73, 87, 132, 140].

3. По теореме Мангольдта [152] имеем

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{1}$$

В 1924 г. Д.Литтлвуд [149] доказал, что при $0,5 < \sigma \le 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma, T) = O\left(\frac{T}{\sigma - 0,5} \log \frac{1}{\sigma - 0,5} \right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует теорема Литтлвуда:

Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области

$$|\sigma - 0,5| < \Phi(t) \frac{\log\log t}{\log t}, \qquad t > e. \tag{3}$$

В 1942 г. А.Сельберг [162], наряду с теоремами о нулях $\zeta(s)$ на критической прямой, доказал теорему Д, из которой следовало усиление результатов (2) и (3). Эта теорема формулируется так [162, с.57]:

Если $H \ge T^{\alpha}$, где $\alpha > 0,5$, то при $0,5 < \sigma \le 1$ равномерно по σ справедлива оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5} \right). \tag{4}$$

Отсюда, в частности, следует усиление оценки (2) и уточнение упомянутой выше теоремы Литтлвуда:

В области

$$|\sigma - 0,5| < \Phi(t)\log^{-1} t, \quad \Phi(t) \to \infty \qquad при \qquad t \to \infty,$$

лежат почти все комплексные нули $\zeta(s)$.

В той же работе [162] А.Сельберг высказал гипотезу (вместе с гипотезой о нулях $\zeta(s)$ на критической прямой), что условие $\alpha > 0,5$ в теореме Д может быть заменено условием $\alpha > \theta$, где $\theta < 0,5$.

Результат теорем 5.1 и 5.2 — гипотеза А.Сельберга с $\theta = 27/82$; эти теоремы доказаны в [44].

ГЛАВА VI

НУЛИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, ЛЕЖАЩИЕ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

§ 1. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой

Как это отмечалось в гл.III, нули функции $\zeta(s)$ на критической прямой — это вещественные нули функции $Z(t)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $T \ge T_0 > 0$, $H \ge T^{1/6}\log^2 T$. *Тогда промежуток* $(T, T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже считаем, что t принадлежит промежутку $(T, T+H)$, $H = T^{1/6}\log^2 T$. Не ограничивая общности, можно считать число T таким, что

$$\frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} = 2\pi K,$$

где K — целое число. Воспользуемся формулой Римана—Зигеля (см. теорему III.3.1):

$$Z(t) = 2\sum_{n \le \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{\cos(\theta(t) - t\log n)}{\sqrt{n}} + O(t^{-1/4}\log t).$$

Упростим правую часть. Прежде всего, верхнюю границу изменения n, т.е. величину $\sqrt{t/(2\pi)}$ заменим величиной $\sqrt{T/(2\pi)}$. От такой замены правая часть может измениться на величину порядка не выше $T^{-1/4}$. Далее, по лемме III.4.2

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \Delta(t),$$

где

$$\theta_0(t) = t\log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}, \qquad \Delta(t) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Пусть $\theta_1(t) = t\log\sqrt{\frac{T}{2\pi}} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8}$, тогда

$$\theta_0(t) - \theta_1(t) = t\log\sqrt{\frac{t}{T}} - \frac{1}{2}(t - T) =$$

$$= -\frac{1}{2}t\log\left(1 + \frac{T-t}{t}\right) + \frac{1}{2}(T - t) = O(H^2T^{-1}).$$

Поэтому $\theta(t) - \theta_1(t) = O(H^2T^{-1})$,

$$Z(t) = 2\sum_{n\le P}\frac{\cos(\theta_1(t) - t\log n)}{\sqrt{n}} + O(H^2T^{-3/4}) + O(T^{-1/4}\log T),$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$. Вспоминая, что $T/2 + \pi/8 = 2\pi K$, $H = T^{1/6}\log^2 T$ окончательно приходим к формуле

$$Z(t) = 2\sum_{n\le P}\frac{\cos t\log(P/n)}{\sqrt{n}} + O(T^{-1/4}\log T).$$

Определим числа t_ν из уравнения $t_\nu \log P = \pi\nu$ и будем рассм тривать ν такие, чтобы выполнялись неравенства

$$T < \frac{\pi\nu}{\log P} < T + H. \qquad (1$$

Для этого возьмем

$$\nu_0 = \left[\frac{T\log P}{\pi}\right] + 1, \quad r = [\log T], \quad H_1 = \left[\frac{H\log P}{\pi r}\right],$$

и определим числа ν равенством $\nu = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_r$, $0 \le \nu_1, \dots, \nu_r \le H_1 - 1$, в котором ν_0 — постоянное число, а числа $\nu_1, \dots, \nu_r$ м гут принимать значения любых целых чисел из промежутка $[0, H_1)$ Очевидно, что так определенные ν удовлетворяют указанным нер венствам (1).

Далее, рассмотрим две суммы S_1 и S_2,

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\dots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} Z(t_\nu), \quad S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\dots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}(-1)^\nu Z(t_\nu).$$

Если будет доказано неравенство

$$|S_2| > |S_1|,$$

то тем самым будет доказано изменение знака у функции $Z(t)$ пр некотором $t = t_\nu$, т.е. будет доказано существование нечетного нул функции $Z(t)$ на промежутке $(T, T + H)$.

В силу определения t_ν имеем

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\dots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{\pi(\nu_0+\nu_1+\dots+\nu_r)}{\log P}\log\frac{P}{n}\right) +$$
$$+O(H_1^rT^{-1/4}\log T$$

$$S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\dots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{\pi(\nu_0+\nu_1+\dots+\nu_r)}{\log P}\log n\right) +$$
$$+O(H_1^rT^{-1/4}\log T$$

Оценим сверху $|S_1|$. Интервал суммирования по n в сумме S разобьем на два интервала вида $1 \le n \le (1-\Delta)P$ и $(1-\Delta)P < n \le P$, где $\Delta = 8H_1^{-1}\log P$. Соответственно этому разбиению S

представится суммою двух слагаемых:

$$S_1 = S_3 + S_4.$$

Оценим S_3. Пользуясь формулой Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

и вводя, для краткости, обозначение $\alpha = \frac{1}{2}\log^{-1}P\log(P/n)$, найдем

$$|S_3| \le \sum_{n\le(1-\Delta)P}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1}\exp(2\pi i\alpha\nu)\right|^r.$$

При любом вещественном числе α справедливо неравенство

$$\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1}\exp(2\pi i\alpha\nu)\right| \le \min\left(H_1, \|\alpha\|^{-1}\right),$$

где $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$. В рассматриваемом случае

$$\|\alpha\| = \left\|\frac{1}{2}\log^{-1}P\log\frac{P}{n}\right\| \ge \left\|-\frac{1}{2}\log^{-1}P\log(1-\Delta)\right\| \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\Delta\log^{-1}P = 4H_1^{-1};$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1}\exp(2\pi i\alpha\nu)\right| \le \frac{1}{4}H_1;$$

$$|S_3| \le 4^{-r}H_1^r\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}} = O(H_1^rT^{-1/4}\log T).$$

Оценим S_4. Опять применяя формулу Эйлера, находим:

$$|S_4| \le H_1^r\left|\sum_{P(1-\Delta)<n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left(i\pi\nu\frac{\log n}{\log P}\right)\right|,$$

где ν — некоторое целое число с условием

$$T < \frac{\pi\nu}{\log P} < T + H.$$

Обозначим дробь $\pi\nu\log^{-1}P$ буквой t, тогда

$$0 < t - T < H.$$

Применяя частное суммирование (теорема П.1.1), будем иметь

$$\sum_{P(1-\Delta)<n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\exp(it\log n) = -\int_{P(1-\Delta)}^{P}C(u)d\frac{1}{\sqrt{u}} + C(P)\frac{1}{\sqrt{P}},$$

где

$$C(u) = \sum_{P(1-\Delta)<n\le u}\exp(it\log n).$$

Для оценки $|C(u)|$ применим теорему П.11.3, полагая в этой реме $k = 3$, $K = 4$, $a = P(1-\Delta)$, $b = u$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\log x$, $\lambda_3 = T^{-1/2}$ $h = \mathrm{const}$; находим

$$|C(u)| \ll P\Delta T^{-1/12} + (P\Delta)^{1/2}T^{1/12}.$$

Тем самым получаем

$$\left|\sum_{P(1-\Delta)<n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\exp(it\log n)\right| \ll T^{1/6}H^{-1}\log T;$$

$$|S_4| \ll H_1^r T^{1/6}H^{-1}\log T; \quad |S_1| \ll H_1^r T^{1/6}H^{-1}\log T.$$

Оценим снизу $|S_2|$. Для этого выделим в сумме, которой зад S_2, слагаемое с $n = 1$, оно будет равно числу H_1^r. Оставшуюся суммы S_2 оценим сверху величиной R подобно тому, как оценивал сумма S_3:

$$R \le \sum_{2\le n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1}\exp\left(2\pi i\frac{\nu\log n}{2\log P}\right)\right|^r \le$$

$$\le \sum_{2\le n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\log n}{2\log P}\right)^{-r} < T^{1/4}(2\log T)^r.$$

Таким образом, собирая вместе полученные выше оценки, наход

$$|S_2| \ge H_1^r - T^{1/4}(2\log T)^r; \quad |S_1| \ll H_1^r T^{1/6}H^{-1}\log T.$$

Следовательно, чтобы выполнялось неравенство $|S_2| > |S_1|$, достаточно выполнения соотношения

$$H_1^r > T^{1/4}(2\log T)^r + O(H_1^r T^{1/6}H^{-1}\log T),$$

которое будет справедливо при $H = T^{1/6}\log^2 T$, $T \ge T_0 > 0$. Теоре доказана.

Заметим, что величина H в доказанной теореме существенно з висит от оценки суммы S_4, которая, в свою очередь, сводится к сум $C(u)$.

Ниже будет получена оценка тригонометрической суммы вид $C(u)$, которая позволит уточнить результат теоремы 1. Сумма $C(u)$ хотя и похожа на дзетовые суммы гл.V, однако имеет свои особенности что позволяет получить результат более точный, чем существующи в настоящее время для порядка роста $|\zeta(1/2+it)|$.

Л е м м а 1. *Пусть $t \ge t_0 > 0$, $P = [\sqrt{t/(2\pi)}]$, $\sqrt{P} \le M \le P$. Рассмотрим тригонометрическую сумму*

$$V(t) = \sum_{M<m\le M_1}\exp\left(it\log(P-m)\right), \quad M_1 \le 2M.$$

Тогда для $|V(t)|$ справедлива следующая оценка:

$$V(t) \ll P^{-2/7}M^{8/7} + P^{-13/28}M^{19/14}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения P следует, что

$$t = 2\pi(P+\theta)^2, \qquad 0 \le \theta < 1. \tag{2}$$

Применяя формулу Тейлора и пользуясь (1), будем иметь

$$t\log(P-m) = t\log P - 2\pi Pm - \frac{2\pi(2P\theta+\theta^2)m}{P} - \pi m^2 -$$

$$-\frac{2\pi(2\theta+\theta^2)}{2P^2}m^2 - t\left(\frac{m^3}{3P^3}+\frac{m^4}{4P^4}+\cdots\right).$$

Разбивая суммирование в V по четным и нечетным m, приходим к неравенству

$$|V| \le |V_1| + |V_2|,$$

где

$$V_1 = \sum_{0{,}5M<m\le 0{,}5M_1}\exp\left(2\pi i f(m)\right),$$

$$V_2 = \sum_{0{,}5(M-1)<m\le 0{,}5(M_1-1)}\exp\left(2\pi i g(m)\right),$$

причем

$$f(m) = \alpha_1(2m) + \alpha_2(2m)^2 + t_1\left(\frac{(2m)^3}{3P^3}+\frac{(2m)^4}{4P^4}+\cdots\right),$$

$$g(m) = \alpha_1(2m+1) + \alpha_2(2m+1)^2 + t_1\left(\frac{(2m+1)^3}{3P^3}+\frac{(2m+1)^4}{4P^4}+\cdots\right),$$

$$\alpha_1 = (2\theta P+\theta^2)P^{-1}, \quad \alpha_2 = (2\theta P+\theta^2)P^{-2}, \quad t_1 = \frac{t}{2\pi}.$$

Суммы V_1 и V_2 оцениваются одинаковым образом. Оценим, например, V_1. Для этого преобразуем V_1, пользуясь теоремой III.1.1. Положим в этой теореме $\varphi(x) = 1$, $H = 1$, $U = M$, $a = 0{,}5M$, $b = 0{,}5M_1$, $A = PM^{-1}$. Из уравнения $f'(x_n) = n$ находим x_n:

$$x_n = \frac{1}{8}\left(\sqrt{n^2+8P(n-2\alpha_1)} - n\right).$$

Обозначим n_1, n_2, $\Phi(n)$ соответствующие величины $n_1 = f'(0{,}5M)$, $n_2 = f'(0{,}5M_1)$, $\Phi(n) = \sqrt{|f''(x_n)|}$. Легко видеть, что $1 \ll M^2P^{-1} \ll n_1 < n_2 \ll M^2P^{-1}$, что функция $\Phi(n)$ монотонно возрастает и, кроме того, $\sqrt{MP^{-1}} \ll \Phi(n) \ll \sqrt{MP^{-1}}$. Применяя теорему III.1.1, находим

$$|V_1| \ll \left|\sum_{n_1<n\le n_2}\Phi^{-1}(n)\exp\left(2\pi i(f(x_n)-nx_n)\right)\right| + \sqrt{PM^{-1}}.$$

К сумме по n применим частное суммирование (теорема II.1.1);

11*

пользуясь монотонностью $\Phi(n)$, получим

$$|V_1| \ll \sqrt{PM^{-1}} \left| \sum_{n_1 < n \le n_3} \exp\left(2\pi i (f(x_n) - n x_n)\right) \right| + \sqrt{PM^{-1}}. \quad ($$

Последнюю сумму оценим, применяя теорему II.11.3, полагая в ней $k = 4$. Так как x_n является корнем уравнения $f'(x_n) = n$, то

$$\frac{d^4}{dn^4}(f(x_n) - n x_n) = -\frac{d^3}{dn^3} x_n;$$

$$\frac{d^3 x_n}{dn^3} = \frac{6P(P+\alpha_1)(n+4P)}{(n^2 + 8P(n-2\alpha_1))^{5/2}} \asymp P^3 M^{-5}.$$

Поэтому в теореме II.11.3 можно взять $h = 1, \lambda_k = P^3 M^{-5}, K = 8$. Дл оцениваемой тригонометрической суммы получаем верхнюю границу которая не превосходит величины B,

$$B \ll M^2 P^{-1} (P^3 M^5)^{1/14} + (M^2 P^{-1})^{3/4} (P^3 M^{-5})^{-1/14}.$$

Отсюда и из (3) следует утверждение леммы.

Замечание. Если для оценки тригонометрической суммы в (3 применить более сложные методы, например метод экспоненциальных пар, то для суммы V получится более точная оценка.

Теорема 2. *При $H = T^{5/32} \log^2 T$, $T \ge T_0 > 0$, промежуто $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z(t)$.*

Доказательство. Будем повторять рассуждения теоремы 1. Придем к сумме

$$C(u) = \sum_{P(1-\Delta) < n \le u} \exp(it \log n).$$

Здесь $T \le t \le T + H, P = \sqrt{T/(2\pi)}$. Заменим в этой сумме P на P_1, $P_1 = [\sqrt{t/(2\pi)}]$. От такой замены $C(u)$ изменится не более чем на $O(1)$. Поэтому имеем

$$C(u) = \sum_{P_1(1-\Delta) < n \le u_1} \exp(it \log n) + O(1) =$$

$$= \sum_{P_1 - u_1 \le m < P_1 \Delta} \exp\left(it \log(P_1 - m)\right) + O(1).$$

Разобьем промежуток суммирования по m на $\ll \log T$ промежутков вида $M < m \le M_1 \le 2M < P_1 \Delta$, тогда, очевидно, что

$$|C(u)| \ll \max_M \left| \sum_{M < m \le M_1} \exp\left(it \log(P_1 - m)\right) \right| \log T + 1.$$

Если $M \le \sqrt[3]{P_1}$, то последнюю сумму оценим тривиально числом слагаемых; если $\sqrt[3]{P_1} < M \le \sqrt{P_1}$, то к ее оценке применим теорему II.11.3,

полагая в ней $k = 3$; легко находим, что она не превосходит B,

$$B \ll M P_1^{-1/6} + M^{1/2} P_1^{1/6} \ll P_1^{5/12};$$

если же $\sqrt{P_1} < M$, то к оценке рассматриваемой суммы применим лемму 1; получим, что она не превосходит B,

$$B \ll P_1^{-2/7} M^{8/7} + P_1^{-13/28} M^{19/14} \ll P_1^{6/7} \Delta^{8/7} + P_1^{25/38} \Delta^{19/14}. \quad (4)$$

Напомним, что $\Delta = 8H_1^{-1} \log P$, $H_1 = \left[\frac{H \log P}{\pi \varepsilon}\right] \asymp H$. Будем считать, что $T^{1/10} \ll H \ll T^{1/6}$. Тогда первое слагаемое неравенства (4) больше второго и, следовательно, при любых возможных значениях $M \le P_1 \Delta$ для $|C(u)|$ справедлива оценка

$$|C(u)| \ll (P_1^{5/12} + P_1^{6/7} \Delta^{8/7}) \log T \ll (T^{5/24} + T^{3/7} H^{-8/7} \log^{8/7} T) \log T.$$

Подставляя эту оценку в формулу, которой оценивалась величина $|S_4|$, находим

$$|S_4| \ll H_1^r T^{-1/4} (T^{5/24} + T^{3/7} H^{-8/7} \log^{8/7} T) \log T.$$

Все остальные оценки теоремы 1 оставляем без изменений. Тем самым получаем

$$|S_1| \le |S_3| + |S_4| \ll$$

$$\ll H_1^r (T^{-1/4} \log T + T^{-1/24} \log T + T^{5/28} H^{-8/7} \log^{15/7} T);$$

$$|S_2| \ge H_1^r - T^{1/4} (2 \log T)^r.$$

Отсюда видно, что при $H \ge T^{5/32} \log^2 T$, $T \ge T_0 > 0$, будет выполняться неравенство

$$|S_2| > |S_1|,$$

а это и требовалось доказать.

§ 2. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(k)}(t)$, $k \ge 1$

Вместе с задачей о соседних нулях функции $Z(t)$ можно ставить задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции $Z(t)$ или в более общей постановке — о соседних нулях функции $Z^{(k)}(t)$, $k \ge 1$. Оказывается, что с увеличением k длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(k)}(t)$, уменьшается.

Теорема 1. *Пусть k — натуральное число, $T \ge T_0(k) > 0$, $H \ge \ge cT^{1/(6k+6)} (\log T)^{2/(k+1)}$, $c = c(k) > 0$. Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(k)}(t)$.*

Доказательство. Прежде всего упростим приближенные уравнения функции $Z^{(k)}(t)$, полученные в теореме III.4.1. Будем считать, что t принадлежит промежутку $(T, T+H)$, $H \le T^{1/6}$. Пусть k — четное число. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $T/2+\pi/8 = 2\pi K$, K — целое число. По теореме III.4.1 имеем

$$Z^{(k)}(t) = (-1)^{k/2}\cdot 2 \sum_{n\le\sqrt{t/(2\pi)}} \frac{(\theta'(t)-\log n)^k}{\sqrt{n}} \cos(\theta(t) - t\log n) + $$
$$+O(t^{-1/4}\log^{k+1} t). \qquad (1$$

Верхнюю границу изменения n, т.е. величину $\sqrt{t/(2\pi)}$, заменим личиной $P = \sqrt{T/(2\pi)}$. От такой замены правая часть (1) мож измениться на величину порядка не выше $T^{-1/4}\log^k T$. Далее,

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \Delta(t),$$

где

$$\theta_0(t) = t\log\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8},$$

$$\Delta(t) = \frac{t}{4}\log\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t} - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+1/4)^2+t^2/4},$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}.$$

Отсюда легко находим, что $\Delta(t) = O(1/T)$, $\Delta'(t) = O(1/T)$; $\theta'(t) = 0,5\log(t/(2\pi)) + O(1/T)$, поэтому, заменяя в (1) функцию $\theta(t)$ и $\theta_0(t)$, $\theta'(t)$ на $0,5\log(t/(2\pi))$, мы изменим правую часть (1) на величин порядка не выше $T^{-3/4}\log^k T$. Возьмем $\theta_1(t) = t\log P - T/2 - \pi/8$ имеем

$$\theta_0(t) - \theta_1(t) = -\frac{t}{2}\log\left(1+\frac{T-t}{t}\right) + \frac{1}{2}(T-t) = O(H^2T^{-1});$$

кроме того,

$$\frac{1}{2}\log\frac{t}{2\pi} = \frac{1}{2}\log\frac{T}{2\pi} + O(HT^{-1}),$$

поэтому, заменяя, в свою очередь, $\theta_0(t)$ на $\theta_1(t)$, $0,5\log t$ на $0,5\log T$, можем изменить правую часть (1) на величину порядка не выше

$$H^2T^{-3/4}\log^k T = O(T^{-1/4}\log^{k+1} T).$$

Следовательно, после всех упомянутых замен вместо (1) получаем такое равенство:

$$Z^{(k)}(t) = (-1)^{k/2} 2\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\log^k\frac{P}{n}\cos\left(t\log P - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} - t\log n\right) + $$
$$+O(T^{-1/4}\log^{k+1} T).$$

Вспоминая, что $T/2+\pi/8 = 2\pi K$, окончательно приходим к формуле

$$Z^{(k)}(t) = (-1)^{k/2} 2\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\log^k\frac{P}{n}\cos t\log\frac{P}{n} + O(T^{-1/4}\log^{k+1} T).$$

Проводя аналогичные рассуждения при нечетном k и предполагая, опять не ограничивая общности, что $T/2+\pi/8 = 2\pi K + \pi/2$, приходим к формуле

$$Z^{(k)}(t) = (-1)^{(k+1)/2} 2\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\log^k\frac{P}{n}\cos t\log\frac{P}{n} + O(T^{-1/4}\log^{k+1} T).$$

Таким образом, в обоих случаях, т.е. как при четном, так и при нечетном k можно рассматривать функцию

$$\Phi(t) = \Phi_k(t) = \sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\log^k\frac{P}{n}\cos t\log\frac{P}{n} + O(T^{-1/4}\log^{k+1} T),$$

и доказывать существование у нее нечетного нуля на промежутке $(T, T+H)$. Повторяем рассуждения теоремы 1.1. Определяя такие же параметры $\nu_0, r, H_1, \nu_1, \ldots, \nu_r, \nu, t_\nu$, рассмотрим две суммы S_1 и S_2,

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\cdots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}\Phi(t_\nu), \qquad S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\cdots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}(-1)^\nu\Phi(t_\nu),$$

и будем доказывать неравенство

$$|S_2| > |S_1|.$$

Представим S_1 в виде суммы двух слагаемых подобно тому, как это было сделано в теореме 1.1:

$$S_1 = S_3 + S_4.$$

Сумма S_3 оценивается так:

$$|S_3| \ll 4^{-r}H_1^r T^{1/4}\log^k T \ll H_1^r T^{-1/4}\log^{k+1} T.$$

Для суммы S_4 получаем такое неравенство:

$$|S_4| \ll H_1^r\left|\sum_{P_1(1-\Delta)<n\le P_1} n^{-1/2}\left(\log\frac{P}{n}\right)^k \exp(it\log n)\right| + H_1^r T^{-1/4}\log^{k+1} T,$$

где $P_1 = [P]$, $\Delta = 8H_1^{-1}\log P$.

Оценим теперь $|S_5|$,

$$S_5 = \sum_{0\le m<\Delta P_1}\frac{(\log\frac{P}{P_1-m})^k}{\sqrt{P_1-m}}\exp\left(it\log(P_1-m)\right).$$

Промежуток суммирования по m разобьем на $\ll \log T$ промежутков вида $a < m \le b \le 2a < \Delta P_1$; найдем

$$|S_5| \ll \left|\sum_{a<m\le b}(P_1-m)^{-1/2}\left(\log\frac{P}{P_1-m}\right)^k\exp\left(it\log(P_1-m)\right)\right|\log T.$$

Применяя частное суммирование (теорема П.1.1), получим

$$|S_5| \ll a^k P^{-k-1/2} \left| \sum_{a<m\le b_1} \exp(it\log(P_1-m)) \right| \log T.$$

Если $a \le \sqrt[3]{P}$ последнюю тригонометрическую сумму оценим тривиально числом слагаемых. Если же $a > \sqrt[3]{P}$, то воспользуемся теоремой П.11.3, полагая в ней $k=3$. Помня, что $H \le T^{1/6}$, будем иметь

$$|S_5| \ll a^k P^{-k-1/2} æ \log T,$$

где

$$æ = \begin{cases} a, & \text{если } a \le \sqrt[3]{P}, \\ aP^{-1/6}, & \text{если } \sqrt[3]{P} < a \le \Delta P. \end{cases}$$

В первом случае при любом $k \ge 0$

$$|S_5| \ll P^{(k+1)/3} P^{-k-1/2} \log T \ll P^{-1/6} \log T \ll T^{-1/12} \log T.$$

Во втором случае

$$|S_5| \ll a^{k+1} P^{-k-1/2-1/6} \log T \ll T^{1/6} H^{-(k+1)} \log^{k+2} T.$$

Следовательно, для S_1 получим окончательную оценку:

$$S_1 \ll H_1^r (T^{-1/4} \log^{k+1} T + T^{-1/12} \log T + T^{1/6} H^{-(k+1)} \log^{k+2} T).$$

Для S_2 находим, как и в теореме 1.1, асимптотическую формулу:

$$S_2 = H_1^r (\log P)^k \left(1 + O(T^{1/4}(4H_1^{-1}\log P)^r) + O(T^{-1/4}\log^{k+1} T)\right).$$

Для выполнения неравенства $|S_2| > |S_1|$ достаточно, чтобы выполнялись четыре неравенства:

$$1 \gg T^{-1/4}\log^{k+1} T; \qquad \log^k T \gg T^{-1/12} \log T;$$
$$(\log P)^k \gg T^{1/6} H^{-(k+1)} \log^{k+2} T; \qquad T^{1/4}(4H_1^{-1}\log P)^r \ll 1.$$

Третье неравенство выполняется, если

$$H \gg T^{1/(6k+6)} (\log T)^{2/(k+1)};$$

остальные три неравенства выполняются, если

$$T \ge T_0(k) > 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Гипотеза А.Сельберга о нулях дзета-функции Римана, лежащих на коротких промежутках критической прямой

Основу доказательства теоремы А.Сельберга о нулях функции $\zeta(s)$ на критической прямой составляет лемма об оценке суммы специального вида $S(\theta)$. Эта лемма существенно используется и при доказательстве гипотезы А.Сельберга.

Напомним (необходимое сейчас) определение чисел $\beta(\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$:

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\log \nu}{\log X}\right), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases}$$

а числа $\alpha(\nu)$ находятся из тождества

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Суммой Сельберга* $S(\theta)$ назовем следующую сумму:

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

где $q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$, $0 \le \theta \le 1/2$ и суммирование ведется по всем натуральным числам $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$.

Докажем несколько простых свойств чисел $\alpha(\nu)$ и получим оценку сумматорной функции чисел $\alpha(\nu)\log(Y/\nu)$.

Л е м м а 1. *Функция $\alpha(\nu)$ натурального аргумента ν мультипликативная и*

$$\sum_{\nu_1\nu_2=n} |\alpha(\nu_1)\alpha(\nu_2)| \le 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мультипликативность $\alpha(\nu)$ следует из тождества

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{1/2}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1. \tag{1}$$

Из этого же тождества следует, что $\alpha(1) = 1$. Далее, определим $\alpha'(\nu)$ тождеством

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1/2}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1. \tag{2}$$

Функция $\alpha'(\nu)$ также мультипликативна. Из (1) и (2) находим

$$\alpha(p^\nu) = (-1)^\nu \binom{1/2}{\nu} = (-1)^\nu \frac{\frac12\left(\frac12 - 1\right)\ldots\left(\frac12 - \nu + 1\right)}{\nu!},$$

$$\alpha'(p^\nu) = (-1)^\nu \binom{-\frac12}{\nu} = (-1)^\nu \frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac12 - 1\right)\ldots\left(-\frac12 - \nu + 1\right)}{\nu!} =$$
$$= \frac{\frac12\left(\frac12 + 1\right)\ldots\left(\frac12 + \nu - 1\right)}{\nu!},$$

$|\alpha(p^\nu)| \le \alpha'(p^\nu)$, $|\alpha(n)| \le \alpha'(n)$.

Из (2) получаем при $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu)}{\nu^s}\right)^2 =$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \frac{\alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2)}{(\nu_1\nu_2)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{\nu_1\nu_2=n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2)\right),$$

т.е.

$$\sum_{\nu_1\nu_2=n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 1;$$

$$\left|\sum_{\nu_1\nu_2=n} \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_2)\right| \le \sum_{\nu_1\nu_2=n} |\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \le \sum_{\nu_1\nu_2=n} \alpha'(\nu_1)\alpha'(\nu_2) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 1 следует, что $|\alpha(n)| \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$, хотя это видно непосредственно из формулы для $\alpha(p^\nu)$.

Л е м м а 2. *Пусть $0 \le \theta \le 1/2$, $Y \ge 1$, $d \ge 1$,*

$$K = \sum_{\substack{\nu<Y \\ (\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \log\frac{Y}{\nu}. \tag{3}$$

Тогда для K справедлива следующая оценка:

$$K \ll Y^\theta \sqrt{\log(Y+1)} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

причем постоянная в знаке $\ll$ — абсолютная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать $Y \ge e^{10}$, так как в противном случае оценка (4) становится тривиальной. При $\operatorname{Re} s > \theta$ рассмотрим "производящую" функцию $f(s)$,

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^{1-\theta}} \cdot \frac{1}{n^s} = \zeta(s+1-\theta)^{-1/2} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{-1/2}.$$

Воспользуемся следующей формулой (см.теорему II.1.3):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{x^s}{s^2} ds = \begin{cases} \log x, & \text{если } x \ge 1, \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Поскольку $0 \le \theta \le 1/2$, то

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} f(s) \frac{Y^s}{s^2} ds. \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно два случая: случай "малых" значений θ, $0 \le \theta \le \log^{-1} Y$, и случай "больших" значений θ, $\log^{-1} Y < \theta \le 1/2$.

1. Пусть $0 \le \theta \le \log^{-1} Y$. Тогда (4) можно переписать так:

$$K \ll \sqrt{\log Y} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Контур интегрирования в (5) перенесем на кривую, состоящую из двух частей, причем первая часть имеет вид

$$\operatorname{Re} s = \theta, \qquad |\operatorname{Im} s| \ge \sqrt{4\log^{-2} Y - \theta^2}$$

(две вертикальные полупрямые), а вторая часть имеет вид

$$\operatorname{Re} s \ge \theta, \qquad |s| = 2\log^{-1} Y.$$

Интеграл K представится суммою двух слагаемых: $K = K_1 + K_2$. Оценим K_2. На полуокружности имеем такие оценки:

$$|Y^s| \le e^2; \qquad \left|\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)\right|^{-1/2} = O\left(\prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2}\right);$$

$$|\zeta(1 - \theta + s)| \ge c \log Y.$$

Следовательно, для K_2 находим

$$K_2 \ll (\log^{-1/2} Y) \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} \int \frac{|ds|}{|s|^2} \ll \log^{1/2} Y \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2}.$$

Далее, при всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$|\zeta(1 + it)|^{-1} \le ct \tag{7}$$

(см.следствие I.6.5), поэтому интеграл K_1 по полупрямым оценится так:

$$K_1 \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2} \int_{\sqrt{3}\log^{-1} Y}^{\infty} t^{-3/2} dt \ll \sqrt{\log Y} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1/2}.$$

Соотношение (6) доказано.

2. Пусть $\log^{-1} Y < \theta \le 1/2$. Перенесем контур интегрирования на кривую, состоящую из двух частей: одна часть — две вертикальные прямые вида $\operatorname{Re} s = \theta$, $|\operatorname{Im} s| \ge r$; другая часть — полуокружность вида $s = \theta + re^{i\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Интеграл K представится суммою двух слагаемых: $K = K_1 + K_2$. Интеграл K_2 по полуокружности стремится к нулю при $r \to 0$, так как

$$|K_2| \ll \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(\theta + re^{i\varphi})| \frac{Y^{\theta + r\cos\varphi} r|d\varphi|}{\theta^2 + r^2},$$

$$|f(\theta + re^{i\varphi})| = |\zeta(1 + re^{i\varphi})|^{-1/2} \prod_{p|d} \left|1 - \frac{1}{p^{1+re^{i\varphi}}}\right|^{-1/2}$$

Оценим интеграл K_1. Воспользуемся (7) и тем, что

$$\left|\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^{1+it}}\right)\right|^{-1} \ll \prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right);$$

тогда получим

$$K_1 \ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{|t|}dt}{\theta^2+t^2} \ll$$

$$\ll Y^{\theta}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}\frac{1}{\theta} \ll Y^{\theta}\sqrt{\log Y}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}.$$

Утверждение леммы полностью доказано.

Лемма 3. *При $0 \le \theta \le 1/2$ справедлива оценка*

$$S(\theta) \ll X^{2\theta}\log^{-1}X,$$

причем постоянная в знаке $\ll$ — абсолютная.

Доказательство. Определим функцию $\gamma(d)$ натурального аргумента d равенством

$$\sum_{d|q}\gamma(d) = q^{1-\theta}. \tag{8}$$

Пользуясь формулой обращения Мебиуса, найдем

$$\gamma(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^{1-\theta} = n^{1-\theta}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^{1-\theta}}\right),$$

т.е. $0 < \gamma(n) \le n^{1-\theta}$. Поставим (8) в формулу, которой определялась сумма $S(\theta)$:

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4}\sum_{d|(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}\gamma(d) =$$

$$= \sum_{d\le X^2}\gamma(d)\sum_{\nu_1\nu_4\equiv O(d)}\sum_{\nu_2\nu_3\equiv O(d)}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_2\nu_3^{1-\theta}\nu_4} =$$

$$= \sum_{d\le X^2}\gamma(d)\left(\sum_{\nu_1\nu_4\equiv O(d)}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4}\right)^2.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму последней формулы, которую обозначим буквой V. Пусть δ_1 и δ_4 — натуральные числа, простые делители которых совпадают с простыми делителями d, и пусть, далее, $\nu_1 = \delta_1\nu_1'$, $\nu_4 = \delta_4\nu_4'$, $\delta_1 < X$, $\delta_4 < X$, где $(\nu_1', d) = (\nu_4', d) = 1$. Тогда имеем

$$V = \sum_{\nu_1\nu_4\equiv O(d)}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} =$$

$$= \sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(d)}\frac{1}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\sum_{\substack{\delta_1\nu_1'<X\\(\nu_1',d)=1}}\frac{\beta(\delta_1\nu_1')}{(\nu_1')^{1-\theta}}\sum_{\substack{\delta_4\nu_4'<X\\(\nu_4',d)=1}}\frac{\beta(\delta_4\nu_4')}{\nu_4'}.$$

Вспоминая определение $\beta(\delta_1\nu_1')$, находим

$$\beta(\delta_1\nu_1') = \alpha(\delta_1\nu_1')\left(1-\frac{\log\delta_1\nu_1'}{\log X}\right) = \frac{\alpha(\delta_1\nu_1')}{\log X}\log\frac{X}{\delta_1\nu_1'}.$$

Поскольку простые делители δ_1 являются делителями d, а $(d,\nu_1') = 1$, то $(\delta_1,\nu_1') = 1$ и, следовательно,

$$\alpha(\delta_1\nu_1') = \alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1'),$$

$$\beta(\delta_1\nu_1') = \frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\nu_1')}{\log X}\log\frac{X}{\delta_1\nu_1'};$$

$$\beta(\delta_4\nu_4') = \frac{\alpha(\delta_4)\alpha(\nu_4')}{X}\log\frac{X}{\delta_4\nu_4'}.$$

Таким образом, для V получим формулу

$$V = \frac{1}{\log^2 X}\sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(d)}\frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\left(\sum_{\substack{\nu_1'<X\delta_1^{-1}\\(\nu_1',d)=1}}\frac{\alpha(\nu_1')}{(\nu_1')^{1-\theta}}\log\frac{X}{\delta_1\nu_1'}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{\nu_4'<X\delta_4^{-1}\\(\nu_4',d)=1}}\frac{\alpha(\nu_4')}{\nu_4'}\log\frac{X}{\delta_4\nu_4'}\right).$$

Но каждая из сумм в скобках является суммой K леммы 2; применяя оценку леммы 2, найдем

$$V \ll \frac{1}{\log^2 X}\sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(d)}\frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4}\left(\frac{X}{\delta_1'}\right)^{\theta}(\log X)\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{X^{\theta}}{\log X}\left(\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(d)}\frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4}.$$

Последнюю сумму оценим, пользуясь леммой 1:

$$\sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(d)}\frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1\delta_4} = \sum_{D\equiv O(d)}\frac{1}{D}\sum_{\delta_1\delta_4=D}|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)| \le \sum_{D\equiv O(d)}{}'\frac{1}{D}.$$

Причем штрих в сумме означает, что суммирование ведется по натуральным числам D, простые делители которых совпадают с простыми делителями d. Поэтому

$$\sum_{D\equiv O(d)}{}' \frac{1}{D} \le \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \ll \frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Тем самым получаем

$$V \ll \frac{X^{\theta}}{\log X}\cdot\frac{1}{d}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^2;$$

$$S(\theta) \ll \sum_{d\le X^2}\gamma(d)|V|^2 \ll$$

$$\ll \sum_{d\le X^2} d^{1-\theta}\frac{X^{2\theta}}{\log^2 X}\cdot\frac{1}{d^2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \frac{X^{2\theta}}{\log^2 X}\sum_{d\le X^2}\frac{1}{d^{1+\theta}}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4.$$

Наконец, последнюю сумму по d оценим, пользуясь следующими простыми рассуждениями:

$$\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{4}{p}\right) \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \ll \sum_{n|d}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\sum_{d\le X^2}\frac{1}{d^{1+\theta}}\sum_{n|d}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\le X^2}\frac{1}{n^{3/2+\theta}}\sum_{d_1\le X^2 n^{-1}}\frac{1}{d_1^{1+\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\right)\left(\sum_{d\le X^2}\frac{1}{d}\right) \ll \log X.$$

Окончательно находим

$$S(\theta) \ll X^{2\theta}\log^{-1} X,$$

что и требовалось доказать.

Теперь оценим тригонометрические суммы специального вида. При $j = 0, 1, 2$ определим три вида таких сумм $W_j(T)$. Прежде всего введем параметры, от которых могут зависеть эти суммы: Y—растущий параметр, $Y \ge Y_0 > 0$, где Y_0 — достаточно большое число; $0,5Y \le T \le Y$; $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $P_0 = \sqrt{Y/(2\pi)}$; $0 < X \le P$; $A \ge 10$, A—постоянное число; $0 < \varepsilon_1 < 0,01$, ε_1 — постоянное число; $L = \log Y$; $h = AL^{-1}$; $0 < H < \sqrt[3]{Y}$; $H_1 = H + h$; $0 < \varepsilon < 0,001$, ε — постоянное число.

Приводимые ниже оценки сумм $W_j(T)$ будут равномерными по введенным параметрам, и, тем самым, постоянные в знаках $\ll$ и O будут абсолютными.

Пользуясь определением чисел $a(\lambda)$ (см.теорему III.5.1), суммы

$W_j = W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0 = W_0(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right);$$

$$W_1 = W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P_0^{1-\varepsilon_1}}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}\times$$

$$\times\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right),$$

где

$$B(\lambda) = \frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\log(P/\lambda)};$$

$$W_2 = W_2(T) = \sum_{P_0^{1-\varepsilon_1}<\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right).$$

Лемма 4. *Пусть $X = Y^{0,01\varepsilon}$, $H = Y^{27/82+\varepsilon}$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$W_0(T) \ll Y^{-\varepsilon},$$
$$W_1(T) \ll (\varepsilon_1^{-2}L^{-2} + \varepsilon_1^{-1}AL^{-2})Y^{-\varepsilon},$$
$$W_2(T) \ll Y^{-\varepsilon}.$$

Доказательство. По определению

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_2/\nu_1=\lambda}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_1},$$

причем здесь λ — рациональное число, знаменатель которого не превосходит X, $\nu_1,\nu_2 \le X$, $|\beta(\nu)| \le 1$. Пусть $\lambda = a/b$, $(a,b) = 1$, $b \le X$. Так как всегда $\lambda < P$, то $a < bP \le XP$, $n\nu_2 \le XP$, поэтому

$$|a(\lambda)| \le \sum_{n\nu_2/\nu_1=a/b}\frac{1}{\nu_1} \le \sum_{\substack{mb=\nu_1 a\\ m\le XP}}\frac{\tau(m)}{\nu_1}.$$

Из равенства $mb = \nu_1 a$ следует, что $m = m_1 a$, $\nu_1 = m_1 b$, $m_1 \le XP$; таким образом,

$$|a(\lambda)| \le \sum_{m_1\le XP}\frac{\tau(m_1 a)}{m_1 b} \le \tau(a)\sum_{m_1\le XP}\frac{\tau(m_1)}{m_1} \ll \tau(a)\log^2 Y.$$

Рассмотрим слагаемые сумм W_j, у которых $\lambda_2 > \lambda_1(1 + H^{-1}L)$; для таких слагаемых

$$\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \log(1 + H^{-1}L) > 0,5H^{-1}L,$$

и часть W_j, отвечающая таким слагаемым, есть величина порядка

$$O(B^2 e^{-0,1L^2}),\tag{9}$$

где $B = \max\limits_{\lambda < P_0^{1-\varepsilon_1}} |B(\lambda)| = O(\varepsilon_1^{-1}L^{-1})$ или $B = 1$ в зависимости от значения j. Осталось рассмотреть слагаемые с условием $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1(1 + H^{-1}L)$. Промежуток изменения чисел λ_1, $0 < \lambda_1 < P$ (или $0 < \lambda_1 < P_0^{1-\varepsilon_1}$, или $P_0^{1-\varepsilon_1} < \lambda_1 < P$) разобьем целыми числами Λ на $\ll L$ промежутков вида $\Lambda < \lambda_1 \le \Lambda_1 \le 2\Lambda$. Обозначая $W(\Lambda)$ максимальную из получившихся таким образом сумм, приходим к неравенству

$$W \ll LW(\Lambda) + B^2 e^{-0,1L^2}.$$

Можно считать $\Lambda > HX^{-2}L^{-1}$, так как в противном случае, в силу определения чисел λ_1 и λ_2, будем иметь

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \ge 1 + \frac{1}{\lambda_1 X^2} \ge 1 + 0,5H^{-1}L,$$

и сумма $W(\Lambda)$ оценивается величиной (9).

Пусть $B_1(\lambda) = 1$, если $W(\Lambda)$ получена из $W_0(T)$ или $W_2(T)$, и $B_1(\lambda) = B(\lambda)$, если $W(\Lambda)$ получена из $W_1(T)$. Тогда

$$W(\Lambda) = \Bigg| \sum_{\Lambda < \lambda_1 \le \Lambda_1} \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1(1+H^{-1}L)} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \times$$
$$\times B_1(\lambda_1)\overline{B_1(\lambda_2)} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)\Bigg|,$$

где $\delta = 0$ при $j = 1$ и $\delta = 1$ при $j = 0, 2$,

$$HX^{-2}L^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \le 2\Lambda < P.$$

Из определения $a(\lambda)$ имеем

$$W(\Lambda) = \Bigg| \sum_{\Lambda < \frac{n_1\nu_1}{\nu_2} \le \Lambda_1} \sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} < \frac{n_2\nu_3}{\nu_4} \le \frac{n_1\nu_1}{\nu_2}(1+H^{-1}L)} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\sqrt{n_1 n_2 \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \times$$
$$\times \left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^{iT} B_1\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B_1\left(\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2\right)\Bigg|.$$

Зафиксируем ν_1, ν_2, ν_3, ν_4; пусть $\frac{\nu_2\nu_3}{\nu_1\nu_4} = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$. Полагая $N = \Lambda\nu_2/\nu_1$, $N_1 = \Lambda_1\nu_2/\nu_1$, рассмотрим сумму W_4 по n_1, n_2,

$$W_4 = \Bigg| \sum_{N < n_1 \le N_1} \sum_{n_1 b a^{-1} < n_2 \le n_1 b a^{-1}(1+H^{-1}L)} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \left(\frac{n_2 a}{n_1 b}\right)^{iT} \times$$
$$\times B_1\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B_1\left(\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{n_2 a}{n_1 b}\right)^2\right)\Bigg|.$$

Очевидно неравенство

$$W(\Lambda) \le \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_4.$$

Оценим W_4. Запишем n_1 и n_2 в виде

$$n_1 = am_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < a, \quad (N - r_1)a^{-1} < m_1 \le (N_1 - r_1)a^{-1},$$
$$n_2 = bm_2 + r_2, \quad 0 \le r_2 < b,$$
$$m_1 + r_1 a^{-1} - r_2 b^{-1} < m_2 \le m_1 + r_1 a^{-1} - r_2 b^{-1} + (m_1 + r_1 a^{-1})H^{-1}L.$$

Пусть $m_2 = m_1 + r$; тогда из неравенства $n_1 b a^{-1} < n_2$ следует, что $r \ge 0$, и если $r = 0$, то $r_2 b^{-1} > r_1 a^{-1}$. Таким образом, делая суммирование по r_1, r_2 внешним, приходим к следующему соотношению:

$$W_4 \le \sum_{0 \le r_1 < a} \sum_{0 \le r_2 < b} W_5,$$

где

$$W_5 = \Bigg| \sum_{(N-r_1)a^{-1} < m_1 \le (N_1 - r_1)a^{-1}} \sum_{\xi < r \le \xi + \xi_1} \frac{B_2(m_1)\overline{B_3(m_1;r)}}{\sqrt{(am_1 + r_1)(bm_1 + r + r_2)}} \times$$
$$\times \left(\frac{m_1 + r + r_2 b^{-1}}{m_1 + r_1 a^{-1}}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{m_1 + r + r_2 b^{-1}}{m_1 + r_1 a^{-1}}\right)^2\right)\Bigg|,$$

$$\xi = r_1 a^{-1} - r_2 b^{-1}, \qquad \xi_1 = (m_1 + r_1 a^{-1})H^{-1}L,$$

$$B_2(m_1) = B_1\left(\frac{(am_1 + r_1)\nu_1}{\nu_2}\right), \quad \overline{B_3(m_1;r)} = B_1\left(\frac{(bm_1 + br + r_2)\nu_3}{\nu_4}\right).$$

Меняя порядки суммирования по r и m_1 и несколько огрубляя оценки, приходим к неравенству

$$W_5 \le \frac{1}{\sqrt{ab}} \sum_{0 \le r \le H_2} \Bigg| \sum_{M < m \le M_1} \frac{B_2(m)B_3(m;r)}{\sqrt{(m + \xi_2)(m + r + \xi_3)}} \times$$
$$\times \left(\frac{m + r + \xi_3}{m + \xi_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{m + r + \xi_3}{m + \xi_2}\right)^2\right)\Bigg|,\tag{10}$$

где введены новые обозначения:

$$H_2 = 2N_1 a^{-1}H^{-1}L, \qquad \xi_2 = r_1 a^{-1}, \qquad \xi_3 = r_2 b^{-1},$$
$$Na^{-1} < M \le M_1 \le N_1 a^{-1}.$$

К сумме по m применим частное суммирование (теорема П.1.1), полагая

$$c_m = \left(\frac{m + r + \xi_3}{m + \xi_2}\right)^{iT},$$

12–4419

$$f(u)=\frac{B_2(u)B_3(u;r)}{\sqrt{(u+\xi_2)(u+r+\xi_3)}}\exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{u+r+\xi_3}{u+\xi_2}\right)^2\right);$$

получаем (сумму по m записываем коротко):

$$\sum_{M<m\le M_1}=-\int_M^{M_1}\mathbf{C}(u)df(u)+\mathbf{C}(M_1)f(M_1),$$

где

$$\mathbf{C}(u)=\sum_{M<m\le u}\left(\frac{m+r+\xi_3}{m+\xi_2}\right)^{iT}.$$

Модуль суммы $\mathbf{C}(u)$ оценим двояко в зависимости от величины M. Если M лежит в промежутке $T^{27/82}\le M\le T^{55/164}$, то для оценки $|\mathbf{C}(u)|$ воспользуемся теоремой II.11.3. Положим в этой теореме $f(x)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{x+r+\xi_3}{x+\xi_2}$, $a=M$, $b=u$, $k=3$, $\lambda_3=T|r+\xi_3-\xi_2|M^{-4}$; найдем $K=4$, $2K-2=6$, $f''(x)\asymp\lambda_3$. Следовательно, для $|\mathbf{C}(u)|$ получаем

$$|\mathbf{C}(u)|\ll M(T|r+\xi_3-\xi_2|M^{-4})^{1/6}+M^{1/2}(T|r+\xi_3-\xi_2|M^{-4})^{-1/6}.$$

Пусть теперь M лежит в промежутке $T^{55/164}<M\le T^{1/2}X$. В этом случае к сумме $\mathbf{C}(u)$ применим теорему III.1.1, полагая в ней

$$f(x)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{x+r+\xi_3}{x+\xi_2}.$$

После несложных вычислений приходим к формуле

$$\mathbf{C}(u)=e^{i\pi/4}\sum_{N\le n<N_1}\frac{1}{\sqrt{|f''(x_n)|}}\exp(2\pi i g(n))+$$
$$+O(M^{3/2}T^{-1/2}|r+\xi_3-\xi_2|^{-1/2})+O(L),$$

где $N=f'(M)$, $N_1=f'(u)$,

$$x_n=-\frac{r+\xi_2+\xi_3}{2}+\sqrt{\frac{(r+\xi_3-\xi_2)^2}{2}+\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}},$$
$$g(n)=f(x_n)-nx_n.$$

Функция $|f''(x_n)|$ монотонно возрастает с возрастанием n, поэтому, применяя частное суммирование к сумме по n, приходим к неравенству

$$|\mathbf{C}(u)|\ll\sqrt{MN^{-1}}\left|\sum_{N<n\le N_2}\exp(2\pi i g(n))\right|+$$
$$+M^{3/2}T^{-1/2}|r+\xi_3-\xi_2|^{-1/2}+L;\qquad N_2\le N_1.$$

Для оценки последней тригонометрической суммы опять воспользуемся теоремой II.11.3, полагая в ней $f(x)=g(x)$, $a=N$, $b=N_2$,

$k=5$; $\lambda_5=(T|r+\xi_3-\xi_2|N^{-9})^{1/2}$. Поскольку

$$\frac{dg(n)}{dn}=-x_n=\frac{\xi_3+\xi_2+r}{2}-\sqrt{\frac{(r+\xi_3-\xi_2)^2}{2}+\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}},$$

то

$$\left|\frac{d^5g(n)}{dn^5}\right|=\left|\frac{d^4x_n}{dn^4}\right|=\left|\frac{d^4}{dn^4}\sqrt{\frac{(r+\xi_3-\xi_2)^2}{2}+\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}}\right|.$$

Разложим функцию $v(n)$,

$$v(n)=\sqrt{\frac{(r+\xi_3-\xi_2)^2}{2}+\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}}=$$
$$=\left(\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\pi n(r+\xi_3-\xi_2)}{T}\right)^{1/2}$$

в ряд Тейлора по степеням величины $\pi n(r+\xi_3-\xi_2)T^{-1}\ll T^{-1/6}$; получаем

$$v(n)=\sqrt{\frac{T(r+\xi_3-\xi_2)}{2\pi n}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi n(r+\xi_3-\xi_2)}{T}+\dots\right);$$
$$\left|\frac{d^4x_n}{dn^4}\right|=\left|\frac{d^4v(n)}{dn^4}\right|\asymp\lambda_5.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{N\le n\le N_2}\exp(2\pi i g(n))\right|\ll N\lambda_5^{1/30}+N^{7/8}\lambda_5^{-1/30};$$

$$|\mathbf{C}(u)|\ll\sqrt{MN}((T(r+\xi_3-\xi_2)N^{-9})^{1/60}+$$
$$+N^{-1/8}(T(r+\xi_3-\xi_2)N^{-9})^{-1/60})+M^{3/2}T^{-1/2}(r+\xi_3-\xi_2)^{-1/2}+L.$$

Функция $G(u)$,

$$G(u)=\frac{B_2(u)B_3(u;r)}{\sqrt{(u+\xi_2)(u+r+\xi_3)}}\exp\left(-\left(\frac{H+\delta h}{2}\log\frac{u+r+\xi_3}{u+\xi_2}\right)^2\right),$$

непрерывно дифференцируема. Пусть $B_0>0$ таково, что при $M\le$ $\le u\le 2M$

$$|f'(u)|\le B_0u^{-2}.$$

Тогда из (10) частным суммированием получаем

$$W_5\ll\frac{1}{\sqrt{ab}}\sum_{0\le r\le H_2}B_0M^{-1}\max_{M<u\le 2M}|\mathbf{C}(u)|.$$

Применяя к $|\mathbf{C}(u)|$ полученные выше оценки в зависимости от величины M, после несложных вычислений найдем

$$W_5\ll\frac{1}{\sqrt{ab}}B_0T^{-4\varepsilon/3};\qquad W_4\ll\sqrt{ab}B_0T^{-4\varepsilon/3};$$
$$W(\Lambda)\ll B_0X^4T^{-4\varepsilon/3};\qquad W\ll B_0X^4T^{-4\varepsilon/3}L+B^2e^{-0,1L^2}.$$

Вспоминая определение величин B и B_0, убеждаемся в справедливости утверждения леммы:

$$W \ll BY^{-\varepsilon}.$$

Докажем теперь теорему о вещественных нулях $\zeta(1/2+it)$ на коротких промежутках вида $T \le t \le T+H$. Утверждение этой теоремы в более слабой форме было высказано в качестве гипотезы А.Сельбергом.

Теорема 1. *Пусть ε — произвольное положительное число, не превосходящее $0,001$, $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$.*

Тогда существует положительная постоянная $c = c(\varepsilon)$ такая, что

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge cH\log T.$$

Доказательство. Возьмем $X = T^{0,01\varepsilon}$ и рассмотрим при $T \le t \le T+H$ функцию $F(t)$ Харди—Сельберга, определенную в главе III. По теореме III.5.1 имеем равенство

$$F(t) = F_0(t) + \overline{F_0(t)} + O(T^{-1/4}X^2\log T),$$

где

$$F_0(t) = e^{i\theta(t)}\sum_{\lambda<P_1}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}, \qquad P_1 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

$$\theta(t) = t\log P_1 - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Заменяя P_1 на $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $\theta(t)$ на $\theta_1(t) = t\log P - T/2 - \pi/8$ и пользуясь тем, что

$$\theta(t) - \theta_1(t) = -\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{T-t}{t}\right) + \frac{1}{2}(T-t) + O\left(\frac{1}{T}\right) = O(H^2T^{-1}),$$

получаем

$$F(t) = F_1(t) + \overline{F_1(t)} + O(\log^{-5}T),$$

где

$$F_1(t) = e^{i\theta_1(t)}\sum_{\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

Не ограничивая общности, будем считать T таким, что $T/2+$ $+\pi/8 = 2\pi K$, K — целое число. Тогда

$$F_1(t) = e^{it\log P}\sum_{\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

Возьмем $h = A\log^{-1}T$, где $A \ge 10$ — положительная постоянная, значение которой более точно определим позднее, и буквой E обозначим подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором выполняется

неравенство

$$\int_t^{t+h}|F(u)|du > \left|\int_t^{t+h}F(u)du\right|, \qquad t \in E.$$

Поскольку вне E выписанные интегралы равны, то

$$\int_E dt\left(\int_t^{t+h}|F(u)|du\right) \ge \int_T^{T+H}\left(\int_t^{t+h}|F(u)|du - \left|\int_t^{t+h}F(u)du\right|\right)dt.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши, приходим к соотношению

$$I_1 \le \sqrt{\mu(E)I_2} + \sqrt{HI_3}, \tag{11}$$

где

$$I_1 = \int_T^{T+H}\int_t^{t+h}|F(u)|du\,dt, \qquad I_2 = \int_T^{T+H}\left(\int_t^{t+h}|F(u)|du\right)^2 dt,$$

$$I_3 = \int_T^{T+H}\left|\int_t^{t+h}F(u)du\right|^2 dt.$$

Далее будем оценивать I_1 снизу, а I_2 и I_3 — сверху.

Оценим интеграл I_1 снизу. Прежде всего, последовательно получаем такие соотношения:

$$I_1 = \int_T^{T+H}\int_t^{t+h}|F(u)|du\,dt \ge h\int_{T+h}^{T+H}|F(u)|du \ge$$

$$\ge h\left|\int_{T+h}^{T+H}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+it\right)dt\right|.$$

Пусть Γ — прямоугольник вида $s = 1/2+it$, $s = 2+it$, $T+h \le$ $\le t \le T+H$; $s = \sigma + i(T+h)$, $s = \sigma + i(T+H)$, $1/2 \le \sigma \le 2$. Тогда справедливо равенство

$$\int_\Gamma \zeta(s)\varphi^2(s)ds = 0,$$

которое можно переписать в следующей форме:

$$\int_{T+h}^{T+H}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+it\right)dt = \int_{T+h}^{T+H}\zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt +$$

$$+i\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+i(T+H))\varphi^2(\sigma+i(T+H))d\sigma -$$

$$-i\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+i(T+h))\varphi^2(\sigma+i(T+h))d\sigma. \qquad (12)$$

По определению функции $\varphi(s)$,

$$\varphi(s)=\sum_{\nu<X}\frac{\beta(\nu)}{\nu^s},$$

$\beta(1)=1$, $|\beta(\nu)|\le 1$, $\nu\ge 1$; следовательно, при $\operatorname{Re} s>1$ имеем

$$\zeta(s)\varphi^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu_1<X}\sum_{\nu_2<X}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{(n\nu_1\nu_2)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

причем

$$a(n)=\sum_{m\nu_1\nu_2=n}\beta(\nu_1)\beta(\nu_2),$$

и, следовательно,

$$|a(n)|\le\sum_{m\nu_1\nu_2=n}1\le\tau_3(n).$$

Отсюда находим

$$\int_{T+h}^{T+H}\zeta(2+it)\varphi^2(2+it)dt=H-h+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a(n)}{n^2}\int_{T+h}^{T+H}n^{-it}dt=H-h+O(1). \qquad (13)$$

Кроме того, пользуясь оценками

$$\zeta(\sigma+it)=O(t^{1/6}\log t),\quad \varphi(\sigma+it)=O(\sqrt{X}),\quad \sigma\ge 1/2,$$

получаем ($T_1=T+H, T+h$)

$$\int_{1/2}^{2}\zeta(\sigma+iT_1)\varphi^2(\sigma+iT_1)d\sigma=O(T^{1/6}X\log T). \qquad (14)$$

Из (12) – (14) следует нужная оценка снизу для I_1:

$$I_1\ge hH-h^2+O(T^{1/6}X\log T). \qquad (15)$$

Оценим интеграл I_2 сверху. Тривиально имеем

$$I_2\ll h^2\int_{T}^{T+H_1}|F(t)|^2dt\ll h^2(J+HL^{-10}),$$

где

$$J=\int_{T}^{T+H_1}|F_1(t)|^2dt,\qquad H_1=H+h,\qquad L=\log T.$$

Воспользуемся следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-t^2-i\alpha t)dt=\sqrt{\pi}\exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right). \qquad (16)$$

Применяя (16), последовательно находим

$$J=\int_{T}^{T+H_1}\left|\sum_{\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it}\right|^2dt\ll\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{t}{H_1}\right)^2\right)\left|\sum_{\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{iT}\lambda^{it}\right|^2dt=$$

$$=\sum_{\lambda_1<P}\sum_{\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{t}{H_1}\right)^2+it\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)dt=$$

$$=\sqrt{\pi}H_1\sum_{\lambda_1<P}\sum_{\lambda_2<P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$J\ll H_1(\Sigma_0+W_0),$$

где

$$\Sigma_0=\sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_0=\left|\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\sum\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)\right|.$$

Для оценки Σ_0 рассмотрим при вещественном числе θ, $1/4\le\theta<1/2$, сумму $\Sigma(\theta)$,

$$\Sigma(\theta)=\sum_{\lambda<Y}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}, \qquad (17)$$

и вычислим ее. Будем считать, что $\sqrt{P}\le Y\le P$. Пользуясь определением чисел $a(\lambda)$ и λ, последовательно получаем

$$\Sigma(\theta)=\sum_{\lambda<Y}\frac{1}{\lambda^{2\theta}}\sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}=\lambda}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}=$$

$$=\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}}\sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}<Y}\frac{1}{n_1^{\theta}n_2^{\theta}}.$$

Обозначим буквой q наибольший общий делитель чисел $\nu_1\nu_4$ и $\nu_2\nu_3$, т.е. $q=(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)$. Тогда $\nu_1\nu_4=aq$, $\nu_2\nu_3=bq$, $(a,b)=1$. Следовательно, из равенства $n_1\nu_1\nu_4=n_2\nu_2\nu_3$ получаем $an_1=bn_2$,

$n_1 = bm$, $n_2 = am$. Поэтому

$$\sum_{\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}<Y} \frac{1}{n_1^\theta n_2^\theta} = \frac{1}{a^\theta b^\theta} \sum_{m<\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}} \frac{1}{m^{2\theta}}.$$

К последней сумме применим формулу суммирования Эйлера (теорема П.1.1):

$$\sum_{\frac12<m<\frac{Y\nu_2}{\nu_1 b}} \frac{1}{m^{2\theta}} = \int\limits_{1/2}^{Y\nu_2(\nu_1 b)^{-1}} \frac{dx}{x^{2\theta}} + O\left(\frac{\nu_1^{2\theta}b^{2\theta}}{\nu_2^{2\theta}Y^{2\theta}}\right) +$$

$$+2\theta \int\limits_{1/2}^{Y\nu_2(\nu_1 b)^{-1}} \rho(x)x^{-1-2\theta}dx = \frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}\cdot\frac{\nu_2^{1-2\theta}}{\nu_1^{1-2\theta}b^{1-2\theta}}+$$

$$+c(\theta) + O(\nu_1^{2\theta}b^{2\theta}\nu_2^{-2\theta}Y^{-2\theta}),$$

где

$$c(\theta) = \frac{2^{2\theta-1}}{2\theta-1} + 2\theta\int\limits_{1/2}^{\infty}\left(\frac12 - \{x\}\right)x^{-1-2\theta}dx.$$

Тем самым приходим к формуле для $\Sigma(\theta)$:

$$\Sigma(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_1^\theta\nu_2^{1-\theta}\nu_3^\theta\nu_4^{1-\theta}}\cdot\frac{1}{a^\theta b^\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}\cdot\frac{\nu_2^{1-2\theta}}{\nu_1^{1-2\theta}b^{1-2\theta}} + c(\theta) + O\left(\frac{\nu_1^{2\theta}b^{2\theta}}{\nu_2^{2\theta}Y^{2\theta}}\right)\right) =$$

$$= \frac{Y^{1-2\theta}}{1-2\theta}S(0) + c(\theta)S(1-2\theta) + O(Y^{-2\theta}X^{2+2\theta}),$$

где

$$S(\theta) = \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\\(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)=q}} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

и $|c(\theta)| \le 2(1-\theta)/(1-2\theta)$. Положим теперь в (17) $Y = P$, $\theta = 1/2-$ $-(2\log P)^{-1}$; получим

$$\Sigma(\theta) = \sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda}\lambda^{1/\log P} > e^{-1}\sum_{\lambda<P}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda} = e^{-1}\Sigma_0.$$

Из леммы 3 имеем

$$\Sigma(\theta) = \frac{P^{1-2\theta}}{1-2\theta}S(0) + c(\theta)S(1-2\theta) + O(P^{-2\theta}X^{2+2\theta}) = O\left(\frac{\log P}{\log X}\right);$$

$$\Sigma_0 = O\left(\frac{\log P}{\log X}\right). \qquad (18)$$

Для оценки W_0 применим лемму 4, полагая в ней $Y = T$; получим

$$W_0 = O(T^{-\epsilon}).$$

Тем самым находим оценку интеграла I_2:

$$I_2 \ll h^2\left(H_1\frac{\log P}{\log X} + H_1T^{-\epsilon}\right) \le c(\epsilon)h^2H_1.$$

Теперь оценим сверху интеграл I_3. Как и при оценке I_2, приходим к неравенству

$$I_3 \ll J + Hh^2L^{-10},$$

где

$$J = \int\limits_T^{T+H}\left|\int\limits_t^{t+h}F_1(u)du\right|^2 dt,$$

$$F_1(u) = \exp(it\log P)\sum_{\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it}.$$

Пусть ϵ_1 — положительное число, не превосходящее 0,1, которое более точно определим позднее. Разбивая в $F_1(u)$ суммирование по λ на две части: $\lambda < P^{1-\epsilon_1}$ и $P^{1-\epsilon_1} \le \lambda < P$, приходим к соотношению

$$J \ll J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int\limits_T^{T+H}\left|\int\limits_t^{t+h}\sum_{\lambda<P^{1-\epsilon_1}}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du\right|^2 dt,$$

$$J_2 = \int\limits_T^{T+H}\left|\int\limits_t^{t+h}\sum_{P^{1-\epsilon_1}\le\lambda<P}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du\right|^2 dt.$$

Интеграл J_1 оценим, предварительно проинтегрировав по u. Применяя затем (16), получаем

$$J_1 = \int\limits_T^{T+H}\left|\sum_{\lambda<P^{1-\epsilon_1}}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it}\frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\log(P/\lambda)}\right|^2 dt \ll$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(t/H)^2}\left|\sum_{\lambda<P^{1-\epsilon_1}}\frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}\frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\log(P/\lambda)}\right|^2 dt \ll$$

$$\ll H(\Sigma_1 + W_1),$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda<P^{1-\epsilon_1}}\frac{a^2(\lambda)}{\lambda\log^2(P/\lambda)},$$

$$W_1 = \left| \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_1}} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \times \right.$$
$$\left. \times B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)\right|$$
$$B(\lambda) = \frac{(P/\lambda)^{ih}-1}{\log(P/\lambda)}.$$

Для Σ_1, воспользовавшись оценкой (18), получим
$$\Sigma_1 = O\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2\log^2 P}\cdot\frac{\log P}{\log X}\right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon_1^2 \log P\log X}\right).$$

Для оценки W_1 применим лемму 4; получим
$$W_1 = O((A\varepsilon_1^{-1}L^{-2} + \varepsilon_1^{-2}L^{-2})T^{-\varepsilon}).$$

Следовательно,
$$J_1 = O(H\varepsilon_1^{-2}\log^{-1}P\log^{-1}X) + O(HT^{-\varepsilon}A\varepsilon_1^{-1}L^{-2}) + O(HT^{-\varepsilon}\varepsilon_1^{-2}L^{-2})$$

Интеграл J_2 оценим так же, как был оценен интеграл I_2:
$$J_2 \ll h^2 \int_T^{T+H_1} \left| \sum_{P^{1-\varepsilon_1}\le\lambda<P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it}\right|^2 dt \ll H_1h^2(\Sigma_2 + W_2),$$
где
$$\Sigma_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_1}\le\lambda<P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$
$$W_2 = \left|\sum_{P^{1-\varepsilon_1}\le\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right)\right|.$$

Сумма Σ_2 оценивается сверху разностью двух сумм (17) типа $\Sigma(\theta)$ полагая $\theta = 1/2 - (2\log P)^{-1}$, пользуясь леммой 3 и формулой дл $\Sigma(\theta)$, получим
$$\Sigma_2 \le \sum_{P^{1-\varepsilon_1}\le\lambda<P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} = \frac{P^{1-2\theta} - P^{(1-\varepsilon_1)(1-2\theta)}}{1-2\theta}S(0) +$$
$$+ O(P^{-1+\varepsilon_1}X^3) = O\left(\frac{\varepsilon_1\log P}{\log X}\right)$$

Для оценки W_2 воспользуемся леммой 4; получим
$$W_2 = O(T^{-\varepsilon}).$$

Следовательно,
$$J_2 = O(H_1h^2\varepsilon_1\log P\log^{-1}X) + O(H_1h^2T^{-\varepsilon}); \quad J \ll J_1 + J_2;$$

$$I_3 \ll J + Hh^2L^{-10} \le c_1H_1(\varepsilon_1^{-2}\log^{-1}P\log^{-1}X +$$
$$+ A\varepsilon_1^{-1}T^{-\varepsilon}L^{-2} + \varepsilon_1^{-2}T^{-\varepsilon}L^{-2} + \varepsilon_1h^2\log P\log^{-1}X + h^2T^{-\varepsilon} + h^2L^{-10}).$$

Величины X и h определялись так:
$$X = T^{0,01\varepsilon}, \qquad h = A\log^{-1}T = AL^{-1}, \qquad H_1 = H + h,$$
поэтому
$$I_3 \le c_2Hh^2(1 + AL^{-1}T^{-0,25})(A^{-2}\varepsilon_1^{-2}\varepsilon^{-1} +$$
$$+ A^{-1}\varepsilon_1^{-1}T^{-\varepsilon} + A^{-2}\varepsilon_1^{-2}T^{-\varepsilon} + \varepsilon_1\varepsilon^{-1} + T^{-\varepsilon} + L^{-10}),$$
где $c_2 > 0$ — абсолютная постоянная. Возьмем теперь
$$A = ((32c_2 + 32)\varepsilon^{-1})^{1,5},$$
$$\varepsilon_1 = (32c_2 + 32)^{-1}\varepsilon$$
и число $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство
$$I_3 \le \frac{1}{4}Hh^2.$$

Таким образом, из оценки снизу для I_1 и оценок сверху для I_2 и I_3 находим
$$\sqrt{\mu(E)I_2} \ge I_1 - \sqrt{HI_3} \ge \frac{1}{2}hH - h^2 + O(T^{1/6}X\log T) \ge \frac{1}{3}hH;$$
$$\mu(E) \ge c_3H, \qquad c_3 = c_3(\varepsilon) > 0.$$

Разделим интервал $(T, T+H)$ на интервалы вида $(nh, nh+h)$, $n = [Th^{-1}], [Th^{-1}]+1, \ldots, [(T+H)h^{-1}]$. По крайней мере $[c_3Hh^{-1}] - 2$ из них содержат точки t из E. Но если интервал $(nh, nh+h)$ содержит точку t из E, то в интервале $(t, t+h)$, а следовательно, и в интервале $(nh, nh+2h)$ содержится хотя бы один нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. Следовательно, нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$ на интервале $(T, T+H)$ не меньше чем
$$\frac{1}{2}([c_3Hh^{-1}] - 2) \ge c_4H\log T, \qquad c_4 > 0,$$
что и требовалось доказать.

§ 4. Распределение нулей дзета-функции Римана на критической прямой

Как это отмечалось выше, основу доказательства теоремы 3.1 составляет оценка тригонометрической суммы специального вида — лемма 3.4; эта же лемма определяет границу величины H,
$$H = T^a, \qquad a > \frac{27}{82}.$$

Понятно, что "в среднем" суммы $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$, оцениваются много точнее. Это обстоятельство и позволяет доказать следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *— произвольно малое фиксиров ное число,* $0,5Y \le T \le Y$, $H = Y^{\varepsilon}$, $Y \ge Y_0(\varepsilon) > 0$. *Рассмотр соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge cH\log T, \qquad (1$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ *— некоторая постоянная, зависящая только от и обозначим символом* E_1 *множество тех* T *из промежутка* $0,5Y \le T \le Y$, *для которых* (1) *не выполняется. Тогда для меры это множества* $\mu(E_1)$ *справедлива оценка*

$$\mu(E_1) \ll Y^{1-0,5\varepsilon}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *— произвольно малое фиксированн число,* $Y \ge Y_0(\varepsilon) > 0$, $H = Y^{\varepsilon}$, $K = [0,5YH^{-1}]$. *При* $k = K+1, K+2, \dots, 2K$ *рассмотрим интервалы вида* $(kH, kH+H)$. *Тогда в ждом из указанных интервалов, за исключением не более* $K^{1-0,5\varepsilon}$ *них, содержится не менее чем* $c_1H\log Y$ *нулей нечетного поряд функции* $\zeta(1/2+it)$, $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$.

Основу доказательства этих теорем составляют леммы 1 и 2 следствия из них.

Лемма 1. *При условиях и обозначениях леммы 3.4 справедли неравенство*

$$\int_{0,5Y}^{Y} (W_0^2(T) + W_1^2(T) + W_2^2(T))dT \ll (\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2}A^2)YH^{-1}X^{12}L^7.$$

Следствие 1. *Пусть* δ *— произвольное положительное чис не превосходящее* 1, E_2 *— множество таких* T, $0,5Y \le T \le Y$, *которых*

$$W_0^2(T) + W_1^2(T) + W_2^2(T) \ge (\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2}A^2)Y^{1-\delta}H^{-1}X^{12}L^7.$$

Тогда для меры этого множества $\mu(E_2)$ *справедлива оценка*

$$\mu(E_2) \ll Y^{\delta}.$$

Лемма 2. *При условиях и обозначениях леммы* 3.4, $K = [0,5YH^{-1}]$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=K+1}^{2K} (W_0^2(kH) + W_1^2(kH) + W_2^2(kH)) \ll (\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2}A^2)KH^{-1}X^{12}L.$$

Следствие 2. *Пусть* δ *— произвольное положител число, не превосходящее* 1, E_3 *— множество таких* k, $K < k \le 2$ *для которых*

$$W_0^2(kH) + W_1^2(kH) + W_2^2(kH) \ge (\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2}A^2)K^{1-\delta}H^{-1}X^{12}L^8.$$

Тогда для количества элементов этого множества $\mu(E_3)$ *сп ведлива оценка*

$$\mu(E_3) \ll K^{\delta}.$$

Заметим, что доказательства следствий из утверждений лемм следуют немедленно.

Доказательство леммы 1. Пусть $W(T)$ — одна из сумм $W_j(T)$. Подобно тому, ка. это было сделано в лемме 3.4, получаем

$$W(T) \ll \left| \sum_{\Lambda<\lambda_1<P_1} \sum_{\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_1(1+LH^{-1})} D(\lambda_1,\lambda_2) \right| + \varepsilon_1^{-2}e^{-0,1L^2},$$

где $D(\lambda_1,\lambda_2)$ — короткое обозначение слагаемого суммы $W(T)$, $\Lambda \ge HX^{-2}L^{-1}$, P_1 равняется либо P, либо $P_0^{1-\varepsilon_1}$. Пользуясь определением чисел λ_1, λ_2, перепишем последнее соотношение так:

$$W(T) \ll$$

$$\ll \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \left| \sum_{\Lambda\nu_2\nu_1^{-1}<n_1\le P_1\nu_2\nu_1^{-1}} \sum_{n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}<n_2\le n_1\frac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3}(1+\frac{L}{H})} D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right) \right| +$$

$$+\varepsilon_1^{-2}e^{-0,1L^2}.$$

Подставляя эту оценку в интеграл леммы, приходим к неравенству

$$\int_{0,5Y}^{Y} W^2(T)dT \ll X^8J + \varepsilon_1^{-4}Ye^{-0,2L^2},$$

где

$$J = \int_{0,5Y}^{Y} \left| \sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_1\alpha} \sum_{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1})} D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right) \right|^2 dT,$$

$\alpha = \nu_2\nu_1^{-1}$, $\beta = \nu_1\nu_4\nu_2^{-1}\nu_3^{-1}$, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — фиксированные натуральные числа, не превосходящие X. Верхняя граница изменения величины n_1 зависит от T, если $W(T) = W_j(T)$, $j = 0, 2$, так как в этом случае $P_1 = \sqrt{T/(2\pi)}$. Освободимся от этой зависимости за счет незначительного огрубления оценки J. Возьмем $P_2 = \sqrt{Y/(2\pi)}$, $M_2 = [P_2X] + 1$, и положим далее

$$\Phi(n_1) = \sum_{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1})} D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right).$$

Имеем последовательность соотношений

$$\left| \sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_1\alpha} \Phi(n_1) \right| =$$

$$= \left| M^{-1} \sum_{a=0}^{M-1} \sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_2\alpha} \Phi(n_1) \sum_{\Lambda\alpha<m\le P_1\alpha} \exp\left(2\pi i \frac{a(n_1-m)}{M}\right) \right| \le$$

$$\le M^{-1}\sum_{a=0}^{M-1}\left|\sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_2\alpha}\Phi(n_1)\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right)\right|\times$$

$$\times\left|\sum_{\Lambda\alpha<m\le P_1\alpha}\exp\left(2\pi i\frac{am}{M}\right)\right|\ll$$

$$\ll\sum_{a=0}^{M-1}\frac{1}{a+1}\left|\sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_2\alpha}\Phi(n_1)\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right)\right|\ll$$

$$\ll\left(L\sum_{a=0}^{M-1}\frac{1}{a+1}\left|\sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_2\alpha}\Phi(n_1)\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

Подставляя полученную оценку в J, находим

$$J\ll L^2\int_{0,5Y}^{Y}\left|\sum_{\Lambda\alpha<n_1\le P_2\alpha}\Phi(n_1)\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right)\right|^2dT,$$

где a—фиксированное целое число, $0\le a\le M-1$. Разделим промеж ток суммирования по n_1 на $\ll L$ промежутков вида $N<n_1\le N_1\le 2N$ рассмотрим наибольший из получившихся при этом интегралов. Пр ходим к неравенству

$$J\ll L^4\int_{0,5Y}^{Y}\left|\sum_{N<n_1\le N_1}\Phi(n_1)\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right)\right|^2dT, \qquad ($$

где $\Lambda\alpha\le N<N_1\le P_2\alpha$.

Если же $W(T)=W_1(T)$, то $P_1=P_0^{1-\varepsilon_1}$ и верхняя граница из нения величины n_1 не зависит от T, но от T зависят коэффициен $B(\lambda)$. Освободимся теперь от этой зависимости. Предварительно делим промежуток суммирования по n_1 на $\ll L$ промежутков ві $N<n_1\le N_1\le 2N$; получим, как и выше, неравенство

$$J\ll L^2\int_{0,5Y}^{Y}\left|\sum_{N<n_1\le N_1}\ \sum_{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1})}D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2},\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\right|^2dT,$$

где

$$D\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2},\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)=\frac{1}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^{iT}B\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)\overline{B\left(\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)}\times$$

$$\times\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2\right.$$

$$B\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}\right)=\left(\left(\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}\right)^{ih}-1\right)\log^{-1}\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}.$$

К сумме по n_1, n_2 применим кратное частное суммирование в следующей форме: если $g_1(u)$ и $g_2(v)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\sum_{A_1<n_1\le B_1}\ \sum_{A_2<n_2\le B_2}G(n_1,n_2)g_1(n_1)g_2(n_2)=$$

$$=\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}F(u,v)g_1'(u)g_2'(v)\,du\,dv-g_1(B_1)\int_{A_2}^{B_2}F(B_1,v)g_2'(v)\,dv-$$

$$-g_2(B_2)\int_{A_1}^{B_1}F(u,B_2)g_1'(u)\,du+g_1(B_1)g_2(B_2)F(B_1,B_2), \tag{4}$$

где

$$F(u,v)={}'\sum_{A_1<n_1\le u}\ \sum_{A_2<n_2\le v}G(n_1,n_2).$$

Возьмем в этой формуле

$$A_1=N,\qquad B_1=N_1,\qquad A_2=N\beta,\qquad B_2=N_1\beta(1+LH^{-1}),$$

$$g_1(u)=B\left(\frac{u\nu_1}{\nu_2}\right),\qquad \overline{g_2(v)}=B\left(\frac{v\nu_3}{\nu_4}\right),$$

$$G(n_1,n_2)=\frac{1}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^{iT}\times$$

$$\times\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2\right)E(n_1,n_2),$$

где

$$E(n_1,n_2)=\begin{cases}1, & \text{если } A_1<n_1\le B_1,\ n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1}),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Переходя от соотношения (4) к неравенству и пользуясь интегральным неравенством Коши, получим

$$\left|\sum_{A_1<n_1\le B_1}\ \sum_{A_2<n_2\le B_2}G(n_1,n_2)g_1(n_1)g_2(n_2)\right|^2\ll$$

$$\ll\left(\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}u^{-1}v^{-1}|F(u,v)|^2\,du\,dv\right)\left(\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2}uv|g_1'(u)|^2|g_2'(v)|^2\,du\,dv\right)+$$

$$+|g_1(B_1)|^2\left(\int\limits_{A_2}^{B_2} v^{-1}|F(B_1,v)|^2dv\right)\left(\int\limits_{A_2}^{B_2} v|g_2'(v)|^2dv\right)+$$

$$+|g_2(B_2)|^2\left(\int\limits_{A_1}^{B_1} u^{-1}|F(u,B_2)|^2du\right)\left(\int\limits_{A_1}^{B_1} u|g_1'(u)|^2du\right)+$$

$$+|g_1(B_1)|^2|g_2(B_2)|^2|F(B_1,B_2)|^2. \qquad ($$

В силу определения функций $g_1(u)$, $g_2(u)$ легко находим, что

$$|g_1(u)| \ll 1+\varepsilon_1^{-1}L^{-1};$$
$$|g_2(v)| \ll 1+\varepsilon_1^{-1}L^{-1};$$
$$|g_1'(u)| \ll u^{-1}(\varepsilon_1^{-2}L^{-2}+\varepsilon_1^{-1}AL^{-2});$$
$$|g_2'(v)| \ll v^{-1}(\varepsilon_1^{-2}L^{-2}+\varepsilon_1^{-1}AL^{-2}).$$

Поэтому правая часть (5) не превосходит R

$$R \ll (\varepsilon_1^{-2}+\varepsilon_1^{-1}A)^2L^{-2}\int\limits_{A_1}^{B_1}\int\limits_{A_2}^{B_2} u^{-1}v^{-1}|F(u,v)|^2dudv+$$

$$+(1+\varepsilon_1^{-1}L^{-1})^2(\varepsilon_1^{-2}+\varepsilon_1^{-1}A)L^{-1}\left(\int\limits_{A_1}^{B_1} u^{-1}|F(u,B_2)|^2du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{A_2}^{B_2} v^{-1}|F(B_1,v)|^2dv\right)+(1+\varepsilon_1^{-1}L^{-1})^4|F(B_1,B_2)|$$

Подставляя эту оценку в (3), получим

$$J \ll (\varepsilon_1^{-2}+\varepsilon_1^{-1}A)^2\int\limits_{A_1}^{B_1}\int\limits_{A_2}^{B_2} u^{-1}v^{-1}I(u,v)dudv+$$

$$+(L+\varepsilon_1^{-1})^2(\varepsilon_1^{-2}+\varepsilon_1^{-1}A)L^{-1}\left(\int\limits_{A_1}^{B_1} u^{-1}I(u,B_2)du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{A_2}^{B_2} v^{-1}I(B_1,v)dv\right)+(L+\varepsilon_1^{-1})^4L^{-2}I(B_1,B_2), \qquad ($$

где для краткости введено обозначение

$$I(u,v)=\int\limits_{0,5Y}^{Y}|F(u,v)|^2dT.$$

Оценим при $A_1 < u \le B_1$, $A_2 < v \le B_2$ интеграл I_0,

$$I_0=\int\limits_{0,5Y}^{Y}|F_1(u,v)|^2dT,$$

$$F_1(u,v)=\sum_{A_1<n_1\le u}\ \sum_{A_2<n_2\le v} G_1(n_1,n_2)E(n_1,n_2),$$

$$G_1(n_1,n_2)=\frac{1}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2\right)\times$$
$$\times\exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right).$$

Заметим, что такой же вид имеет интеграл в правой части (2). Кроме того, $I(u,v)\le I_0$. Применяя употреблявшийся уже прием (см. доказательство теоремы 3.1), приходим к неравенству

$$I_0 \ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(T/Y)^2}|F_1(u,v)|^2dT \ll$$

$$\ll \frac{Y}{\nu_1\nu_3\nu_3\nu_4}\sum_{A_1<n_1,n_3\le u}\ \sum_{A_2<n_2,n_4\le v}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}\times$$

$$\times E(n_1,n_2)E(n_3,n_4)\exp\left(-\left(\frac{Y}{2}\log\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^2\right) \ll$$

$$\ll \frac{Y}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sum_{N<n_1,n_3\le N_1}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1})\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+LH^{-1})}}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}\times$$

$$\times\exp\left(-\left(\frac{Y}{2}\log\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^2\right) \ll$$

$$\ll \frac{YN^{-2}\beta^{-2}}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sum_{N<n_1,n_3\le 2N}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1})\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+LH^{-1})}}\exp\left(-\left(\frac{Y}{2}\log\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^2\right).$$

Если $|n_2n_3-n_1n_4| > N^2\beta Y^{-1}L$, то

$$\left|\log\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right|=\left|\log\left(1+\frac{n_2n_3-n_1n_4}{n_1n_4}\right)\right| \gg Y^{-1}L,$$

и часть последней кратной суммы по n_1, n_2, n_3, n_4, отвечающая таким слагаемым, есть величина порядка $N^2\beta e^{-\varepsilon L^2}$, где $\varepsilon>0$ — абсолютная постоянная. Оставшуюся часть суммы оценим количеством слагаемых, т.е. количеством n_1, n_2, n_3, n_4, удовлетворяющих неравенствам

$$|n_2n_3-n_1n_4| \le N^2\beta Y^{-1}L, \qquad (7)$$

$$N<n_1,n_2\le 2N, \qquad n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+LH^{-1}), \qquad (8)$$

$$n_3\beta < n_4 \le n_3\beta(1+LH^{-1}),$$

причем буквой β было обозначено число $\nu_1\nu_4\nu_2^{-1}\nu_3^{-1}$, где ν_j — натуральные числа, не превосходящие X. Из неравенств (8), (9) и определения β получаем

$$n_1\nu_1\nu_4 < n_2\nu_2\nu_3 \le n_1\nu_1\nu_4(1+LH^{-1}),$$
$$n_3\nu_1\nu_4 < n_4\nu_2\nu_3 \le n_3\nu_1\nu_4(1+LH^{-1}),$$

т.е.

$$n_2\nu_2\nu_3 = n_1\nu_1\nu_4 + h_2, \qquad 1 \le h_2 \le 2N\nu_1\nu_4LH^{-1},$$
$$n_4\nu_2\nu_3 = n_3\nu_1\nu_4 + h_4, \qquad 1 \le h_4 \le 2N\nu_1\nu_4LH^{-1}.$$

Из (7) следует

$$|h_2n_3 - h_4n_1| \le N^2\nu_1\nu_4Y^{-1}L.$$

Число решений этого неравенства в числах n_1, n_3, h_2, h_4 не превосходит величины æ,

$$\text{æ} = N^2\nu_1\nu_4Y^{-1}L + 1,$$

умноженной на число решений уравнения $h_2n_3 = h_4n_1$, которое, в свою очередь, не превосходит æ_1,

$$\text{æ}_1 = \sum_{m\le 4N^2\nu_1\nu_4LH^{-1}} \tau^2(m) \ll N^2\nu_1\nu_4H^{-1}L^4.$$

Собирая полученные оценки и пользуясь тем, что $N \ll X\sqrt{Y}$, приходим к формуле

$$I_0 \ll \frac{YN^{-2}\beta^{-2}}{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\text{æ}\text{æ}_1 + N^2\beta e^{-cL^2}) \ll YH^{-1}X^4L^5.$$

Таким образом, из последней оценки следует

$$J \ll ((\varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_1^{-1}A)^2L^2 + (L+\varepsilon_1^{-1})^2(\varepsilon_1^{-2}+\varepsilon_1^{-1}A) + $$
$$+(L+\varepsilon_1^{-1})^4L^2)YH^{-1}X^4L^5 \ll (\varepsilon_1^{-4}+\varepsilon_1^{-2}A^2)YH^{-1}X^4L^7.$$

Подставляя это в формулу, которой определялся интеграл J, получаем

$$\int\limits_{0,5Y}^{Y} W^2(T)dT \ll (\varepsilon_1^{-4}+\varepsilon_1^{-2}A^2)YH^{-1}X^{12}L^7,$$

откуда следует утверждение леммы.

Доказательство леммы 2. Повторим рассуждения леммы 1, заменяя $W(t)$ на $W(kH)$, а интеграл по T на сумму по k. Придем к неравенству, аналогичному (6), и сумме Σ, аналогичной интегралу I_0:

$$\Sigma = \sum_{k=K+1}^{2K} |F_1(u,v)|^2, \tag{10}$$

$$F_1(u,v) = \sum_{A_1<n_1\le u}\ \sum_{A_2<n_2\le v} G_1(n_1,n_2)E(n_1,n_2),$$

$$G_1(n_1,n_2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{ikH} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right)^2\right)\ \exp\left(2\pi i\frac{an_1}{M}\right).$$

К правой части (10) применим лемму V.1.1 о замене суммы интегралом; полагая в этой лемме $t_k = kH$, $\delta = H$, будем иметь

$$\Sigma \ll H^{-1}\int\limits_{0,5Y}^{Y}|F_1(u,v)|^2dT +$$
$$+\left(\int\limits_{0,5Y}^{Y}|F_1(u,v)|^2dT\right)^{1/2}\left(\int\limits_{0,5Y}^{Y}|F_2(u,v)|^2dT\right)^{1/2},$$

где $F_2(u,v)$ подобна сумме $F_1(u,v)$, только отличие ее от $F_1(u,v)$ состоит в том, что каждое слагаемое $F_1(u,v)$ умножается на число $\log(n_2/n_1)$. Поэтому мы можем воспользоваться оценкой интеграла I_0 леммы 1. Последний же интеграл от квадрата модуля $F_2(u,v)$ оценим величиной I_0, умноженной на квадрат максимума $\left|\log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4}\right|$. По величины n_1, n_2 меняются так, что

$$n_1\beta < n_2 \le n_1\beta(1+LH^{-1}), \qquad \beta = \nu_1\nu_4\nu_2^{-1}\nu_3^{-1},$$

т.е.

$$1 < \frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4} \le 1 + LH^{-1}, \qquad 0 < \log\frac{n_2\nu_2\nu_3}{n_1\nu_1\nu_4} \le 2LH^{-1}.$$

Отсюда находим

$$\Sigma \ll LH^{-1}I_0 \ll YH^{-2}X^4L^5.$$

Вспоминая, что $K = [0,5YH^{-1}]$, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Будем следовать рассуждениям теоремы 3.1. Возьмем $X = H^{0,01}$, $L = \log Y$ и определим функцию $F(t)$ Харди—Сельберга. Далее, возьмем в следствии 1 $\delta = 1 - 0,5\varepsilon$ и будем рассматривать те числа T из промежутка $0,5Y \le T \le Y$, которые не принадлежат множеству E_2; для них выполняется оценка

$$W_0^2(T) + W_1^2(T) + W_2^2(T) < (\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2}A^2)H^{-0,5}X^{12}L^7. \tag{11}$$

Из этих чисел T выбросим те из них, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{0,5}^{2}\zeta(\sigma+i(T+H))\varphi^2(\sigma+i(T+H))d\sigma\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{0,5}^{2}\zeta(\sigma+i(T+h))\varphi^2(\sigma+i(T+h))d\sigma\right| > HL^{-1}.$$

Мера выброшенных чисел T есть величина порядка

$$O(XH^{-2}L^{14}) = O(X^{1-\epsilon}).$$

Обозначим буквой E подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором выполняется неравенство

$$\int_t^{t+h} |F(u)|du > \left| \int_t^{t+h} F(u)du \right|, \quad t \in E.$$

Как и в теореме 3.1, приходим к неравенству

$$I_1 \le \sqrt{\mu(E) I_2} + \sqrt{H I_3}, \tag{12}$$

где $\mu(E)$ — мера E,

$$I_1 = \int_T^{T+H} \int_t^{t+h} |F(u)|du dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H} \left(\int_t^{t+h} |F(u)|du \right)^2 dt,$$

$$I_3 = \int_T^{T+H} \left| \int_t^{t+h} F(u)du \right|^2 dt.$$

Для I_1 подобно тому, как это было сделано в теореме 3.1, получим оценку снизу:

$$I_1 \ge hH - h^2 + O(hHL^{-1}).$$

Для I_2, как и в теореме 3.1, имеем оценку сверху:

$$I_2 \ll h^2(J + H_1 L^{-10}), \quad H_1 = H + h,$$

$$J = \sqrt{\pi} H_1 \sum_{\lambda_1, \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2} \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right);$$

следовательно,

$$J \ll H_1(\Sigma_0 + W_0),$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{\lambda < P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_0 = \left| \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2} \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right) \right|.$$

Сумма Σ_0 оценена в теореме 3.1: $\Sigma_0 = O(\log P \log^{-1} X)$. Для суммы W_0 справедлива оценка, которая следует из (11):

$$W_0 \le \sqrt{\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2} A^2} H^{-0,25} X^6 L^{3,5}.$$

Тем самым получаем

$$I_2 \ll h^2 H_1(\varepsilon_1^{-1} + (\varepsilon_1^{-2} + \varepsilon_1^{-1} A) H^{-0,15} L^{3,5}).$$

Для I_3 из теоремы 3.1 имеем оценку сверху:

$$I_3 \ll J_1 + J_2 + Hh^2 L^{-10}, \tag{13}$$

где

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \int_t^{t+h} \sum_{\lambda < P_0^{1-\epsilon_1}} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{iu} du \right|^2 dt,$$

$$J_2 = \int_T^{T+H} \left| \int_t^{t+h} \sum_{P_0^{1-\epsilon_1} \le \lambda < P} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{iu} du \right|^2 dt.$$

Для интеграла J_1 получаем

$$J_1 \ll H(\Sigma_1 + W_1), \tag{14}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\lambda < P_0^{1-\epsilon_1}} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda \log^2(P/\lambda)},$$

$$W_1 = \\ = \left| \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P_0^{1-\epsilon_1}} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right) \right|,$$

$$B(\lambda) = \frac{(P/\lambda)^{ih} - 1}{\log(P/\lambda)}.$$

Сумма Σ_1 оценена в теореме 3.1:

$$\Sigma_1 = O(\varepsilon_1^{-2} \log^{-1} P_0 \log^{-1} X). \tag{15}$$

Для суммы W_1 справедлива оценка из (11):

$$W_1 \le \sqrt{\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2} A^2} H^{-0,25} X^6 L^{3,5}. \tag{16}$$

Интеграл J_2 оценивается аналогично:

$$J_2 \ll H_1 h^2 (\Sigma_2 + W_2), \tag{17}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{P_0^{1-\epsilon_1} \le \lambda < P} \frac{a^2(\lambda)}{\lambda},$$

$$W_2 = \left| \sum_{P_0^{1-\epsilon_1} \le \lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H_1}{2} \log \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right) \right|.$$

Сумма Σ_2 оценена в теореме 3.1:

$$\Sigma_2 = O(\varepsilon_1 \log P \log^{-1} X). \tag{18}$$

Для суммы W_2 справедлива оценка из (11):

$$W_2 \le \sqrt{\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2} A^2} H^{-0,25} X^6 L^{3,5}. \tag{19}$$

Тем самым, из (13) — (19) получаем

$$I_3 \le cH_1 h^2 \Big(L^{-10} + h^{-2} \varepsilon_1^{-2} \log^{-1} Y \log^{-1} X + \text{æ} h^{-2} + \\ + \varepsilon_1 \log P \log^{-1} X + \text{æ} \Big),$$

где $\text{æ} = \sqrt{\varepsilon_1^{-4} + \varepsilon_1^{-2} A^2} H^{-0,25} X^6 L^{3,5}$, $c > 10$—абсолютная постоянная.

Возьмем теперь A и ε_1 такими:

$$A = (1600c\varepsilon^{-1})^{3/2}, \qquad \varepsilon_1 = (1600c)^{-1}\varepsilon;$$

тогда будет выполняться неравенство

$$ch^{-2}\varepsilon_1^{-2} \log^{-1} Y \log^{-1} X + c\varepsilon_1 \log P \log^{-1} X \le \frac{1}{8}.$$

Далее, возьмем $Y_0(\varepsilon) > 0$ таким большим, чтобы при $Y \ge Y_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$cL^{-10} + c\text{æ} h^{-2} + c\text{æ} \le 1/16.$$

Таким образом, при $Y \ge Y_0(\varepsilon)$ получаем

$$I_3 \le \frac{3}{16} H_1 h^2.$$

Наконец, возьмем $Y_1(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы было

$$\frac{3}{16} H_1 h^2 \le \frac{1}{4} H h^2.$$

Тогда при $Y \ge Y_1(\varepsilon)$ находим

$$I_3 \le \frac{1}{4} H h^2.$$

Тем самым из (12), оценок I_2 и I_3 приходим к неравенству

$$\mu(E) \ge c_1(\varepsilon) H, \qquad c_1(\varepsilon) > 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

§ 5. Нули функции, аналогичной функции $\zeta(s)$, для которой гипотеза Римана неверна

В этом параграфе рассмотрим функцию, имеющую функциональное уравнение риманова типа, но не имеющую эйлерова произведения, и исследуем расположение ее нулей. Пусть χ_j для $j = 1, 2$ являются характерами Дирихле по модулю 5, причем $\chi_1(2) = i$, $\chi_2(2) = -i$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2} \sec\theta \left\{ e^{-i\theta} L(s, \chi_1) + e^{i\theta} L(s, \chi_2) \right\} = \\ &= \frac{1}{1^s} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{2^s} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots = \\ &= \frac{1}{5^s} \left\{ \zeta\left(s, \frac{1}{5}\right) + \operatorname{tg}\theta\, \zeta\left(s, \frac{2}{5}\right) - \operatorname{tg}\theta\, \zeta\left(s, \frac{3}{5}\right) - \zeta\left(s - \frac{4}{5}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\zeta(s, a)$ — дзета-функция Гурвица, определенная в §2 гл.I. В силу результатов §2 гл.I функция $f(s)$ является целой функцией s. Из функционального уравнения для ζ-функции Гурвица заключаем, что для $\sigma < 0$ выполняется

$$\begin{aligned} f(s) = \frac{2\Gamma(1-s)}{5^s (2\pi)^{1-s}} \Bigg\{ &\sin \frac{1}{2}\pi s \sum_{m=1}^{\infty} \left(\cos\frac{2m\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \cos\frac{4m\pi}{5} - \right. \\ &\left. - \operatorname{tg}\theta \cos\frac{6m\pi}{5} - \cos\frac{8m\pi}{5} \right) \frac{1}{m^{1-s}} + \cos\frac{1}{2}\pi s \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sin\frac{2m\pi}{5} + \right. \\ &\left. + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{4m\pi}{5} - \operatorname{tg}\theta \sin\frac{6m\pi}{5} - \sin\frac{8m\pi}{5} \right) \frac{1}{m^{1-s}} \Bigg\} = \\ = \frac{4\Gamma(1-s)\cos(\pi s/2)}{5^s(2\pi)^{1-s}} &\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sin\frac{2m\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{4m\pi}{5} \right) \frac{1}{m^{1-s}}. \end{aligned}$$

Если

$$\sin\frac{4\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{8\pi}{5} = \operatorname{tg}\theta \left(\sin\frac{2\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{4\pi}{5} \right), \tag{1}$$

то последнее выражение есть

$$\frac{4\Gamma(1-s)\cos(\pi s/2)}{5^s(2\pi)^{1-s}} \left(\sin\frac{2\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{4\pi}{5} \right) f(1-s);$$

тем самым доказано, что

$$f(s) = C \frac{4\Gamma(1-s)\cos(\pi s/2)}{5^s(2\pi)^{1-s}} f(1-s), \tag{2}$$

где $C = \sin(2\pi/5) + \operatorname{tg}\theta \sin(4\pi/5)$.

Уравнение (1) приводится к уравнению

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

В качестве θ возьмем его корень, заключенный между 0 и $\pi/4$. Тогда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1} \quad \text{и} \quad \sin\frac{2\pi}{5} + \operatorname{tg}\theta \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

При таком выборе θ уравнение (2) запишется в виде

$$f(s) = \frac{2\Gamma(1-s)\cos(\pi s/2)}{5^{s-1/2}(2\pi)^{1-s}} f(1-s). \qquad (3)$$

Это уравнение является уравнением риманова типа. Его можно записать в виде

$$\left(\frac{5}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right) f(s) = \left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2-s/2} \Gamma\left(1-\frac{1}{2}s\right) f(1-s). \qquad (4)$$

Рассмотрим вопрос о расположении нулей $f(s)$ в критической полосе. Будем различать три случая: $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 1$, $\mathrm{Re}\, s = 1/2$, $0 < \mathrm{Re}\, s < 1/2$. Ясно, что с помощью уравнения (4) случай $\mathrm{Re}\, s < 1/2$ сводится к двум первым.

1. Случай $1/2<\mathrm{Re}\, s<1$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$. Тогда в полосе $\sigma_1 < \mathrm{Re}\, s < \sigma_2$ содержится бесконечно много нулей функции $f(s)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $f(s)$ следует, что

$$f(s) = c_1 L(s,\chi_1) + c_2 L(s,\chi_2),$$

причем $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и χ_1, χ_2 — неэквивалентные характеры. Пусть $r < 1/4$ таково, что $\sigma_1 > 3/4 - r$, $3/4 + r > \sigma_2$, и пусть $f_1(s) = 10 + (s - (\sigma_1+\sigma_2)/2)$, $f_2(s) = -10$. В силу теоремы VII.3.1 для всякого $\varepsilon > 0$ существует T такое, что

$$\left|L(s+iT,\chi_1) - \frac{10 + (s-(\sigma_1+\sigma_2)/2)}{c_1}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|L(s+iT,\chi_2) + \frac{10}{c_2}\right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|f(s+iT) - (s-(\sigma_1+\sigma_2)/2)| =$$

$$= \left|c_1 L(s+iT,\chi_1) + c_2 L(s,\chi_2) - \left(10 + \left(s - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) - 10\right)\right| =$$

$$= \left|c_1 \left(L(s+iT,\chi_1) - \frac{1}{c_1}\left(10 + \left(s - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right)\right) + \right.$$

$$\left. + c_2\left(L(s,\chi_2) + \frac{1}{c_2}\cdot 10\right)\right| \le (|c_1| + |c_2|)\varepsilon.$$

Взяв ε достаточно малым и применив принцип аргумента (теорема II.2.6), получим утверждение теоремы.

2. Случай $\mathrm{Re}\, s=1/2$. Используя гораздо более простую технику, чем была использована в предыдущих параграфах этой главы, можно показать, что число нулей $f(s)$ вида $1/2+it$ для $0 < t < T$ при достаточно больших T больше $c_0 T$ (где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная). Сейчас будет доказано, что число нулей $f(s)$ указанного вида превосходит $\Omega(T)T$, где $\Omega(T) \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Существует абсолютная постоянная $c_0 > 0$ такая, что при $T > T_0$ отрезок $[1/2, 1/2+iT]$ содержит более чем*

$$T\exp\left(c_0\sqrt{\log\log\log\log T}\right)$$

нулей $f(s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\varphi(s) = \left(\frac{5}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right) f(s).$$

Будем сравнивать интегралы I и J, где

$$I = I(t) = \int_t^{t+H} \varphi(s)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{T}\right)u\right) du,$$

$$J = J(t) = \int_t^{t+H} |\varphi(s)|\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{T}\right)u\right) du,$$

где $s = 1/2+iu$, $0 < H < 1$ и $t \in (T, 2T)$, $T > 10$. Тогда $J(t)$ имеет место оценка снизу:

$$J(t) \ge AT^{1/4}\int_t^{t+H} \left|e^{-i\theta}L(s,\chi_1) + e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right| du, \qquad (5)$$

где A — некоторая положительная постоянная. Действительно,

$$\left|\varphi(\frac{1}{2}+iu)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{5}{\pi}\right)^{s/2}\right| \left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iu}{2}\right)\right| \left|\frac{1}{2}\sec\theta\left\{e^{-i\theta}L(s,\chi_1) + e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right\}\right|.$$

Вследствие формулы Стирлинга (теорема II.3.5)

$$\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{iu}{2}\right)\right| = u^{1/4}e^{-\pi u/4}(2\pi)^{1/2}\left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+iu\right)\right| e^{\pi u/4} \gg T^{1/4}\left|e^{-i\theta}L(s,\chi_1) + e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right|. \qquad (6)$$

Интегрируя неравенство (6), получим неравенство (5). Пусть $M = M(y)$ есть подмножество натуральных чисел, которые разлагаются на простые числа, меньшие, чем y и не равные 5. Будем считать, что $y < \log\log T$. Для $j = 1, 2$ положим

$$P(s,\chi_j) = \prod_{p\in M}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$$Q(s,\chi_j) = P^{-1}(s,\chi_j)L(s,\chi_j).$$

Тогда

$$e^{-i\theta}L(s,\chi_1)+e^{i\theta}L(s,\chi_2)=$$
$$=\text{æ}(s)+e^{-i\theta}P(s,\chi_1)(Q(s,\chi_1)-1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2)(Q(s,\chi_2)-1),$$

где $\text{æ}(s)=e^{-i\theta}P(s,\chi_1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2)$.

Пусть

$$g(s)=\overline{\text{æ}(s)}\frac{|\text{æ}(s)|}{1+|\text{æ}(s)|^2}, \tag{7}$$

где под $\operatorname{Arg}(e^{-i\theta}P(s,\chi_1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2))$ в дальнейшем понимается любое значение аргумента. Так как $|g(s)|\le 1$, то

$$\int\limits_t^{t+H}\left|e^{-i\theta}L(s,\chi_1)+e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right|du\ge$$
$$\ge\int\limits_t^{t+H}\left|g(s)\left(e^{-i\theta}L(s,\chi_1)+e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right)\right|du=$$
$$=\int\limits_t^{t+H}\Big|g(s)\Big(e^{-i\theta}P(s,\chi_1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2)\Big)+g(s)e^{-i\theta}P(s,\chi_1)(Q(s,\chi_1)-1)+$$
$$+e^{i\theta}g(s)P(s,\chi_2)(Q(s,\chi_2)-1)\Big|du\ge$$
$$\ge\int\limits_t^{t+H}\left|g(s)\left(e^{-i\theta}P(s,\chi_1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2)\right)\right|du+$$
$$+O\left(\left|\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_1)(Q(s,\chi_1)-1)du\right|\right)+$$
$$+O\left(\left|\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_2)(Q(s,\chi_2)-1)du\right|\right)=$$
$$=\int\limits_t^{t+H}\left|g(s)\left(e^{-i\theta}P(s,\chi_1)+e^{i\theta}P(s,\chi_2)\right)\right|du+O(|J_1|)+O(|J_2|), \tag{8}$$

где

$$J_1=\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_1)(Q(s,\chi_1)-1)du,$$
$$J_2=\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_2)(Q(s,\chi_2)-1)du.$$

Действительно, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — вещественные функции, причем $f_1(x)\ge 0$, то

$$|f_1(x)+f_2(x)|\ge f_1(x)+f_2(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b|f_1(x)+f_2(x)|dx\ge\int\limits_a^b f_1(x)dx+\int\limits_a^b f_2(x)dx\ge$$
$$\ge\int\limits_a^b f_1(x)dx-\left|\int\limits_a^b f_2(x)dx\right|.$$

Если $f_2(x)$ — комплекснозначная функция, то

$$\int\limits_a^b|f_1(x)+f_2(x)|dx\ge\int\limits_a^b|f_1(x)+\operatorname{Re}f_2(x)|\,dx\ge$$
$$\ge\int\limits_a^b f_1(x)dx-\left|\int\limits_a^b\operatorname{Re}f_2(x)dx\right|\ge\int\limits_a^b f_1(x)dx-\left|\int\limits_a^b f_2(x)dx\right|.$$

Интегралы $\int\limits_T^{2T}|J_1|dt$ и $\int\limits_T^{2T}|J_2|dt$ исследуются одинаковым способом. Оценим первый из них. Так как вследствие следствия III.2.2

$$L(s,\chi_1)=\sum_{n\le cT}\chi_1(n)n^{-s}+O(T^{-1/2}),$$

где $c>0$ — некоторая абсолютная постоянная, то

$$J_1=\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_1)\left(P^{-1}(s,\chi_1)\sum_{n\le cT}\chi_1(n)n^{-s}-1\right)du+$$
$$+O\left(\int\limits_t^{t+H}T^{-1/2}du\right)=$$
$$=\int\limits_t^{t+H}g(s)P(s,\chi_1)(\tilde{Q}_1(s)-1)du+O(T^{-1/2}), \tag{9}$$

где

$$\tilde{Q}_1(s)=P^{-1}(s,\chi_1)\left(\sum_{n\le cT}\chi_1(n)n^{-s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_n}{n^s}. \tag{10}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_t^{t+H} g(s)P(s,\chi_1) \sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s} du =$$

$$= \int\limits_t^{t+H} g(s)P(s,\chi_1) d\left(\sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\right) =$$

$$= g(s)P(s,\chi_1) \sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\Bigg|_t^{t+H} -$$

$$- \int\limits_t^{t+H} \left[\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\left(\sum_{T^{1/10}<n} \frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\right)\right] du. \quad (1$$

Для оценки среднего значения модуля последнего интеграла воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$\int\limits_T^{2T}\left|\int\limits_t^{t+H}\left[\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right]\left(\sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\right) du\right| dt \le$$

$$\le \int\limits_T^{2T}\int\limits_t^{t+H}\left|\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right|\left|\sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s\log n}\right| du dt \ll$$

$$\ll H\int\limits_T^{4T}\left|\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right|\left|\sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s\log n}\right| du \ll$$

$$\ll H\left(\int\limits_T^{4T}\left|\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right|^2 du\right)^{1/2}\left(\int\limits_T^{4T}\left|\sum_{n>T^{1/10}} \frac{\Delta_n}{n^s\log n}\right|^2 du\right)^{1/2}.$$

Поскольку коэффициенты ряда Дирихле функции $\sum\limits_{n>T^{1/10}} n \quad og$, мажорируются коэффициентами Дирихле функции

$$\frac{10}{\log T}\left(\sum_{n\in M}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n\le cT}\frac{1}{n^s}\right), \quad (12$$

то, применяя теорему II.4.3 и следствие III.2.3, получим

$$\int\limits_T^{2T}\left|\sum_{n>T^{1/10}}\frac{\Delta_n}{n^s\log n}\right|^2 du \ll \max_{T<n\le 2T}\left|\sum_{n\in M}\frac{1}{n^s}\right|^2 T\log^{-1}T. \quad (13$$

Так как $\sum\limits_{n\in M}\frac{1}{n^s} = \prod\limits_{p\le y}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}$, то

$$\left|\sum_{n\in M}\frac{1}{n^s}\right|^2 \ll \exp\left(\sum_{p\le y}\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \ll \exp(c_1\sqrt{y}). \quad (14)$$

Аналогично, используя определение $g(s)$, имеем

$$\left|\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right| \ll \exp(c_2\sqrt{y}),$$

где c_1 и c_2 — некоторые подходящие постоянные. В силу выбора y ($y<\log\log T$) отсюда получаем

$$\int\limits_T^{2T}\left|\int\limits_t^{t+H}\left[\frac{d}{du}(g(s)P(s,\chi_1))\right]\left(\sum_{n>T^{1/10}}\frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\right) du\right| dt \ll T\log^{-1/4}T. \quad (15)$$

Такая же оценка получается для интегралов

$$\int\limits_T^{2T}\left|g(s)P(s,\chi_1)\sum_{n>T^{1/10}}\frac{\Delta_n}{n^s(-i\log n)}\Bigg|_t^{t+H}\right| dt.$$

Перейдем к оценке интеграла

$$\int\limits_T^{2T}\left|\int\limits_t^{t+H} g(s)P(s,\chi_1)\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^s}du\right| dt.$$

Обозначим его буквой S. Заметим здесь, что для $\Delta_k\ne 0$ таких, что $k\le T^{1/10}$ из определения Δ_k следует $(k,p)=1$ и $\Delta_k=1$ при любом $p\le y$. Докажем далее, что

$$g(s)P(s,\chi_1) = \sum_{\substack{m,n\in M\\(m,n)=1}} c_{m,n}\left(\frac{m}{n}\right)^{iu}, \quad (16)$$

причем ряд $\sum\limits_{m,n}$ абсолютно сходится. Более того, ряд, стоящий в правой части равенства (16), можно сколько угодно раз почленно дифференцировать. Действительно, пусть θ_p — вещественные переменные, индексированные простыми числами; пусть

$$æ(s) = \sum_{n\in M}\frac{a_n}{n^s} = \sum_{n\in M}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\exp\left(-2\pi i\left(\sum_p \alpha_p(n)\frac{\log p}{2\pi}u\right)\right),$$

где $\alpha_p(n)$ определяются каноническим разложением по простым числам $n=\prod\limits_p p^{\alpha_p(n)}$. Пусть

$$F(\theta_2,\theta_3,\ldots) = \sum_{n\in M}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\exp\left(-2\pi i\sum_p\theta_p\alpha_p(n)\right). \quad (17)$$

Тогда функция

$$\Phi = \overline{F}\frac{|F|}{1+|F|^2} \tag{1}$$

допускает разложение в ряд Фурье (относительно переменных $\theta_3, \ldots$), который можно дифференцировать почленно сколь угодно м го раз.

Так как после подстановки $\theta_p = \frac{u \log p}{2\pi}$ функция Φ переходит $g(s)$, то существование разложения (16) доказано.

Таким образом,

$$S = \int_T^{2T} \left| \int_t^{t+H} \sum_{\substack{m,n\in M,\\ (m,n)=1}} c_{m,n} \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^{1/2}} \left(\frac{m}{uk}\right)^{iu} du \right| dt.$$

Положим

$$S_1 = \int_T^{2T} \left| \int_t^{t+H} \sum_{m,n\in M'} c_{m,n} \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^{1/2}} \left(\frac{m}{uk}\right)^{iu} du \right| dt,$$

$$S_2 = \int_T^{2T} \left| \int_t^{t+H} \sum_{\max(|m|,|n|)>T^{1/10}} c_{m,n} \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^{1/2}} \left(\frac{m}{uk}\right)^{iu} du \right| dt,$$

где M' определяется условием $m,n \le T^{1/10}$ и считается, что $c_{m,n} =$ при $(m,n)=1$. Тогда

$$S \le S_1 + S_2.$$

Далее, имеем

$$\int_t^{t+H} \left(\frac{m}{uk}\right)^{iu} du = \frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{i(t+H)} - \left(\frac{m}{nk}\right)^{it}}{i\log\left(\frac{m}{nk}\right)}.$$

Следовательно,

$$S_1 = \int_T^{2T} \left| \sum_{m,n\in M'} c_{m,n} \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^{1/2}} \cdot \frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH} - 1}{\log\left(\frac{m}{nk}\right)} \left(\frac{m}{nk}\right)^{it} \right| dt.$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$S_1^2 \le T \int_T^{2T} \left| \sum_{m,n\in M'} c_{m,n} \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^{1/2}} \cdot \frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH} - 1}{\log\frac{m}{nk}} \left(\frac{m}{nk}\right)^{it} \right|^2 dt =$$

$$= T \sum_{m,n\in M'} \sum_{m_1,n_1\in M'} c_{m,n}\bar{c}_{m_1,n_1} \sum_{k,k_1\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k \overline{\Delta}_{k_1}}{(kk_1)^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH} - 1}{\log\frac{m}{nk}} \cdot \frac{\left(\frac{m_1}{n_1k_1}\right)^{-iH} - 1}{\log\frac{m_1}{n_1k_1}} \int_T^{2T} \left(\frac{m}{nk}\right)^{it} \left(\frac{m_1}{n_1k_1}\right)^{-it} dt.$$

Если $\Delta_k = \Delta_{k_1} = 1$ и $\frac{m}{nk} = \frac{m_1}{n_1k_1}$, то это означает, что $k = k_1$, $m = m_1$ и $n = n_1$. Пусть $\tilde{S}_1$ — часть суммы, стоящей в правой части последнего неравенства, для которой выполняется $(m,n,k) = (m_1,n_1,k_1)$. Оставшуюся часть обозначим $\tilde{\tilde{S}}_1$. Имеем

$$\tilde{S}_1 \le T^2 \sum_{m,n\in M} |c_{m,n}|^2 \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k} \left| \frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH} - 1}{\log\frac{m}{nk}} \right|^2.$$

Поскольку

$$\frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH} - 1}{\log\frac{m}{nk}} \ll \min\left(H, \left|\log\frac{m}{nk}\right|^{-1}\right),$$

то

$$\tilde{S}_1 \ll T^2 \sum_{m,n\in M'} |c_{m,n}|^2 \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k} \min\left(H^2, \left|\log\frac{m}{nk}\right|^{-2}\right).$$

Заметим, что в силу теоремы II.9.11 и асимптотического закона распределения простых чисел выполняется

$$\sum_{\substack{k\le T^{1/10}\\ U<k\le 2U}} \frac{\Delta_k}{k} \ll O(\log^{-1} y). \tag{19}$$

Пусть, далее,

$$B_\alpha = \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{|\Delta_k|}{k} \min(H^2, |\log \alpha k|^{-2}).$$

Для k таких, что $|\log\alpha k| \le H^{-1}$, выполняется

$$\frac{1}{\alpha}e^{-1/H} \le k \le \frac{1}{\alpha}e^{1/H}.$$

Разбивая интервал $(\frac{1}{\alpha}e^{-1/H}, \frac{1}{\alpha}e^{1/H})$ на $O(H^{-1})$ подынтервалов вида $U < U' \le 2U$, получим, используя оценку (19),

$$\sum_{\alpha^{-1}e^{-1/H}\le k\le\alpha^{-1}e^{1/H}} \frac{\Delta_k}{k} \min(H^2, |\log\alpha k|^{-2}) \ll$$

$$\ll H^{-1}H^2\log^{-1} y \ll H\log^{-1} y. \tag{20}$$

Если же $k \notin (\alpha^{-1}e^{-1/H}, \alpha^{-1}e^{1/H})$, то, разбивая интервал $(\alpha^{-1}e^{1/H}, \infty)$ на интервалы вида $I_r = [2^r e^{1/H}, 2^{r+1}e^{1/H}]$, получим

$$\sum_{\substack{k\in I_r\\ k\le T^{1/10}}} \frac{\Delta_k}{k} \min(H^2, |\log\alpha k|^{-2}) \ll \sum_{\substack{k\in I_r\\ k\le T^{1/10}}} \frac{\Delta_k}{k} \cdot \frac{1}{|\log\alpha k|^2} \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{k\in I_r\\ k\le T^{1/10}}} \frac{\Delta_k}{k}\left(\frac{1}{H}+r\right)^{-2} \ll \log^{-1} y\cdot\left(\frac{1}{H}+r\right)^{-}$$

Суммируя по всем возможным r, получим

$$\sum_{\substack{k\le T^{1/10}\\ k>\alpha^{-1}e^{1/H}}} \frac{\Delta_k}{k}\min(H^2, |\log\alpha k|^{-2}) \ll H\log^{-1} y. \qquad ($$

Подобная оценка выполняется и для суммы по k, лежащим левее $\alpha^{-1}\times e^{-1/H}$. Из оценок (20) и (21) получаем

$$B_\alpha \ll H\log^{-1} y.$$

Теперь из соотношения (18) следует, что

$$S_1 \ll T^2\left(\sum_{m,n\in M'}|c_{m,n}|^2\right)\frac{H}{\log y}.$$

Поскольку из равенства (16) следует

$$\sum_{\substack{(m,n)=1\\ m,n\in M'}} |c_{m,n}|^2 = \lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|g(s)P(s,\chi_1)|^2du \le$$

$$\le \lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|P(s,\chi_1)|^2du \ll \log y,$$

то

$$\tilde{S}_1 \ll T^2 H. \qquad ($$

Перейдем к оценке $\tilde{\tilde{S}}_1$. Имеем

$$\tilde{\tilde{S}}_1 = T\sum_{\substack{m,n,k\\ m_1,n_1,k_1}}{}^{*} c_{m,n}\bar{c}_{m_1,n_1}\frac{\Delta_k\overline{\Delta}_{k_1}}{(kk_1)^{1/2}}\cdot\frac{\left(\frac{m}{nk}\right)^{iH}-1}{\log\frac{m}{nk}}\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{m_1}{n_1k_1}\right)^{iH}-1}{\log\frac{m_1}{n_1k_1}}\int_T^{2T}\left(\frac{mn_1k_1}{m_1nk}\right)^{it}$$

где знак $\sum^*$ означает суммирование по тем наборам, для котор $(m,n,k)\ne(m_1,n_1,k_1)$, $(m,n)=(m_1,n_1)=1$, $m,n,m_1,n_1\in M'$ $k,k_1\le T^{1/10}$.

Из того, что $(m,n,k)\ne(m_1,n_1,k_1)$, следует, что

$$\left|\log\frac{mn_1k_1}{m_1nk}\right| \gg T^{-3/10}.$$

Следовательно, заменяя Δ_k и Δ_{k_1} единицами, получаем

$$\tilde{\tilde{S}}_1 \ll T\sum_{\substack{m,n,k\\ m_1,n_1,k_1}}|c_{m,n}||c_{m_1,n_1}|(kk_1)^{-1/2}H^2T^{3/10} \ll$$

$$\ll T^{1,4}\left(\sum_{m,n\le T^{1/10}}|c_{m,n}|\right)^2.$$

Используя неравенство Коши, выводим

$$\tilde{\tilde{S}}_1 \ll T^{1,6}\sum_{m,n}|c_{m,n}|^2 \ll T^{1,6}\log y. \qquad (23)$$

Из неравенств (22) и (23) следует, что

$$|S_1|^2 \ll T^2H. \qquad (24)$$

Перейдем к оценке S_2. Имеем по определению

$$S_2 = \int_T^{2T}\left|\int_t^{t+H}\sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}c_{m,n}\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^{1/2}}\left(\frac{m}{nk}\right)^{iu}du\right|dt =$$

$$= \int_T^{2T}\left|\int_t^{t+H}\sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}c_{m,n}\left(\frac{m}{n}\right)^{iu}\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^{1/2}}k^{-iu}du\right|dt \ll$$

$$\ll \sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}|c_{m,n}|\int_T^{2T}\int_t^{t+H}\left|\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^{1/2}}k^{-iu}\right|du\,dt \ll$$

$$\ll \sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}|c_{m,n}|\int_T^{2T}\left|\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^{1/2}}k^{-it}\right|dt.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Коши, получим

$$S_2 \ll \left(\sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}|c_{m,n}|\right)T^{1/2}\left(\int_T^{2T}\left|\sum_{k\le T^{1/10}}\frac{\Delta_k}{k^{1/2}}k^{-it}\right|^2dt\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll T\log T\left(\sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}|c_{m,n}|\right). \qquad (25)$$

Пусть функции $g(s)P(s,\chi_1) = \sum_{\substack{m,n\in M\\ (m,n)=1}} c_{m,n}\left(\frac{m}{n}\right)^{iu}$ соответствует ряд Фурье

$$\Phi_1(\theta_2,\theta_3,\ldots) = \Phi_1(\bar{\theta}) = \sum_{\bar{k}\in\mathbb{Z}^\infty(y)} b_{\bar{k}}\exp(2\pi i(\bar{k},\bar{\theta}));$$

таким образом, при $\bar{k} = (\alpha_2(m),\ldots,\alpha_p(m),\ldots)-(\alpha_2(n),\ldots,\alpha_p(n),\ldots)$, где

$m=\prod_p p^{\alpha_p(m)}$, $n=\prod_p p^{\alpha_p(n)}$, выполняется $b_{\overline{k}}=c_{m,n}$. Тогда

$$\sum_{\max(m,n)>T^{1/10}}|c_{m,n}|\le \sum_{\sum_p|k_p|\ge 0,1\log T\log^{-1}y}|b_{\overline{k}}|. \tag{26}$$

Действительно, условие $\max(m,n)>T^{1/10}$ означает, что либо

$$\sum_{p\le y}\alpha_p(m)\log p>0,1\log T,$$

либо

$$\sum_{p\le y}\alpha_p(n)\log p>0,1\log T.$$

Поскольку $p\le y$, то из этих условий следует выполнение неравенства

$$\sum_p|k_p|>0,1\log T\log^{-1}y.$$

Далее, интегрируя по частям, получим для натурального числа l

$$\underbrace{\int_0^1\dots\int_0^1}_{\pi(y)}\left(\sum_{p\le y}\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\right)\Phi_1(\overline{\theta})\exp\left(-2\pi i(\overline{k},\overline{\theta})\right)d\theta_2d\theta_3\ldots=$$

$$=\underbrace{\int_0^1\dots\int_0^1}_{\pi(y)}\Phi_1(\overline{\theta})\left(\sum_{p\le y}\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\right)\exp(-2\pi i(\overline{k},\overline{\theta}))d\theta_2d\theta_3\ldots=$$

$$=(2\pi i)^{2l}\left(\sum_{p\le y}k_p^{2l}\right)\underbrace{\int_0^1\dots\int_0^1}_{\pi(y)}\Phi_1(\overline{\theta})\exp(-2\pi i(\overline{k},\overline{\theta}))d\theta_2d\theta_3\ldots=$$

$$=(2\pi i)^{2l}\left(\sum_{p\le y}k_p^{2l}\right)b_{\overline{k}}.$$

Предыдущее равенство означает, что

$$|b_{\overline{k}}|\le(2\pi)^{-2l}\left(\sum_{p\le y}k_p^{2l}\right)^{-1}\int_0^1\dots\int_0^1\left|\left(\sum_{p\le y}\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\right)\Phi_1(\overline{\theta})\right|d\theta_2d\theta_3\ldots,$$

поэтому

$$\sum_{\sum|k_p|>0,1\log T\log^{-1}y}|b_{\overline{k}}|\le$$

$$\le(2\pi)^{-2l}\left(\int_0^1\dots\int_0^1\left|\sum_{p\le y}\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\Phi_1(\overline{\theta})\right|d\theta_2\ldots d\theta_p\ldots\right)\cdot V, \tag{27}$$

где

$$V=\sum_{\Sigma|k_p|>0,1\log T\log^{-1}y}\frac{1}{k_2^{2l}+k_3^{2l}+\ldots}.$$

Таким образом, задача оценки суммы, стоящей в правой части (25), сводится к оценке модуля частных производных функций $\Phi_1(\overline{\theta})$ и V. Поскольку функции $P(s,\chi_j)$ соответствует ряд Фурье

$$\prod_{p\le y}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{1/2}}\exp(-2\pi i\theta_p)\right)^{-1},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\theta_p}\prod_{p\le y}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^{1/2}}\exp(-2\pi i\theta_p)\right)^{-1}\ll\exp\left(\frac{c\sqrt{y}}{\log y}\right).$$

Следовательно, при изменении θ_p в окрестности вещественной оси на величину $\exp(-c\sqrt{y}\log^{-1}y)$ при достаточно большом y величина $\Phi_1(\overline{\theta})$ изменяется не более чем на 1. Для оценки $\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\Phi_1(\bar\theta)$ применим интегральную формулу Коши. Имеем

$$\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\Phi_1(\theta_2,\ldots,\theta_p,\ldots)=\frac{(2l)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Phi_1(\theta_2,\ldots,z_p,\ldots)}{(z_p-\theta_p)^{2l+1}}dz_p,$$

где γ — окружность радиуса $\asymp e^{-\sqrt{y}}$, проходимая против часовой стрелки. Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{\partial^{2l}}{\partial\theta_p^{2l}}\Phi_1(\theta_2,\ldots,\theta_p,\ldots)\right|\le\exp(c\sqrt{y}l)\cdot(2l)!, \tag{28}$$

где c — некоторая абсолютная постоянная, больная нуля.

Для заданного положительного B число целых точек $(k_2,k_3,\ldots)\in\in\mathbf{R}^{\pi(y)}$ с условием $\max(|m_2|,|m_3|,\ldots)=B$ не превосходит $2\pi(y)(2B+{}+1)^{\pi(y)-1}$, поэтому, полагая $l=y$, получим

$$V\le2\pi(y)\sum_{B>0,1\log T(\pi(y)\log y)^{-1}}B^{-2l}\cdot3^{\pi(y)}B^{\pi(y)}\ll$$

$$\ll4^{\pi(y)}\left(0,1\frac{\log T}{\pi(y)\log y}\right)^{-y}\ll\exp\left(-\frac12 y\log\log T\right)$$

(по условию $y<\log\log T$). Из неравенств (27), (28) следует, что

$$\sum_{\Sigma|k_p|>0,1\log T\log^{-1}y}|b_{\overline{k}}|\ll\exp\left(c\sqrt{y}\cdot y-\frac14 y\log\log T\right)\ll$$

$$\ll\exp\left(-\frac18 y\log\log T\right).$$

Вспоминая неравенство (26), выводим теперь из соотношения (25) неравенство

$$S_2 \ll T\exp(-0,1y\log\log T), \tag{29}$$

а из соотношений (24) и (29) имеем

$$S = \int_T^{2T} \left| \int_t^{t+H} g(s)P(s,\chi_1) \sum_{k\le T^{1/10}} \frac{\Delta_k}{k^s} du \right| dt \ll$$
$$\ll T(H^{1/2} + \exp(-0,1y\log\log T)). \tag{30}$$

Из определения и оценок (15), (30) следует, что

$$\int_T^{2T} |J_1| dt \ll T(H^{1/2} + \exp(-0,1y\log\log T)) \tag{31}$$

и аналогичная оценка для $\int_T^{2T} |J_2|dt$.

Перейдем теперь к интегралу I. Пусть α — вещественное число, $\delta > 0$ и $z = \exp(-\alpha - i(\pi/4-\delta))$. Тогда для $s = \sigma + iu$

$$|z^s| = \left|\exp\left(s(-\alpha - i(\frac{\pi}{4}-\delta))\right)\right| = \exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)u - \alpha\sigma\right).$$

Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s) z^s ds, \qquad c > 1. \tag{32}$$

Поскольку $L(\sigma+iu) \ll |u|$ при $\sigma > 0$, то в интеграле равенства (32) можно переместить контур на прямую $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Таким образом,

$$\Phi(z) = \frac{z^{1/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2}+iu\right) z^{iu} du. \tag{33}$$

С другой стороны,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{5}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2}\sec\theta \left\{e^{-i\theta}L(s,\chi_1) + e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right\} z^s\, ds.$$

Для $\mathrm{Re}\, s > 1$ имеем с некоторыми коэффициентами a_n

$$\frac{1}{2}\sec\theta\left\{e^{-i\theta}L(s,\chi_1) + e^{i\theta}L(s,\chi_2)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{34}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)\left(\frac{5}{\pi}\right)^{s/2} \frac{z^s}{n^s} ds =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{5z^2}{\pi n^2}\right)^{-1/2} \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Gamma\left(\frac{s'}{2}\right)\left(\frac{5z^2}{\pi n^2}\right)^{s'/2} ds' =$$
$$= \left(\frac{5}{\pi}\right)^{-1/2} \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \exp\left(-\frac{\pi n^2}{5z^2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi(z)}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{2}+iu\right)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)u\right)\exp(i\alpha u) du =$$
$$= \left(\frac{5}{\pi}\right)^{-1/2} \frac{1}{z^{3/2}} \cdot 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \exp\left(-\frac{\pi n^2}{5z^2}\right).$$

Таким образом, функции

$$F(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\varphi\left(\frac{1}{2}+iu\right)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)u\right),$$
$$\nu(\alpha) = 2\left(\frac{5}{\pi}\right)^{-1/2} z^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \exp\left(-\frac{\pi n^2}{5z^2}\right),$$

где $z = \exp(-\alpha - i(\pi/4-\delta))$, являются преобразованиями Фурье друг друга. В таком случае функции

$$\int_t^{t+H} F(u)du \qquad \text{и} \qquad \nu(\alpha)\frac{e^{-i\alpha H}-1}{i\alpha}$$

также являются преобразованиями Фурье друг друга. Вследствие равенства Парсеваля имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu(\alpha)|^2 \frac{4\sin^2(H\alpha/2)}{\alpha^2} d\alpha.$$

Поскольку $F(u)$ — вещественнозначная функция, то $|\nu(\alpha)|$ является четной функцией. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{|\nu(\alpha)|^2 4\sin^2(H\alpha/2)}{\alpha^2} d\alpha \le$$

$$\le 2H^2 \int\limits_0^{1/H} |\nu(\alpha)|^2 d\alpha + 8 \int\limits_{1/H}^{\infty} \frac{|\nu(\alpha)|^2}{\alpha^2} d\alpha. \tag{35}$$

Положим

$$\psi(v) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \exp\left(-\frac{\pi}{5} n^2 v\right). \tag{36}$$

Тогда

$$\nu(\alpha) = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} \exp\left(\frac{3}{2}\left(\alpha + i\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)\right)\right) \psi\left(\exp\left(2\left(\alpha + i\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right)\right)\right).$$

Полагая $x = \exp(3\alpha)$ и $G = \exp(3/H)$, получаем

$$\int\limits_0^{H^{-1}} |\nu(\alpha)|^2 d\alpha = \frac{4\pi}{15} \int\limits_1^{\exp(3H^{-1})} \left|\psi\left(x^{2/3} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right)\right)\right)\right|^2 dx =$$

$$= \frac{4\pi}{15} \int\limits_1^{G} \left|\psi\left(x^{3/2} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right)\right)\right)\right|^2 dx, \tag{37}$$

$$\int\limits_{H^{-1}}^{\infty} \frac{|\nu(\alpha)|^2}{\alpha^2} d\alpha = \frac{12\pi}{5} \int\limits_G^{\infty} \left|\psi\left(x^{2/3} e\left(i\left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right)\right)\right)\right|^2 \frac{dx}{\log^2 x}. \tag{38}$$

Будем считать, что $\delta = T^{-1}$. Поскольку

$$\left|\psi\left(x^{2/3} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right)\right)\right)\right|^2 =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \exp\left(-\frac{1}{5} n^2 x^{2/3} (\sin 2\delta + i \cos 2\delta)\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \exp\left(-\frac{2\pi}{5} n^2 x^{2/3} \sin 2\delta\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{n,m \\ n \ne m}} n m a_n a_m \exp\left(-\frac{\pi}{5}(n^2 + m^2) x^{2/3} \sin 2\delta + i(m^2 - n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \cos 2\delta\right),$$

вклады от диагональных членов в (37) и (38) не будут превосходить соответственно

$$\ll \int\limits_1^G \left(\frac{1}{x^{2/3}\delta}\right)^{3/2} dx \quad \text{и} \quad \ll \int\limits_G^{\infty} \left(\frac{1}{x^{2/3}\delta}\right)^{3/2} \frac{dx}{\log^2 x},$$

т.е. $\ll \delta^{-3/2} \log G \asymp H^{-1}\delta^{-3/2}$ и, следовательно,

$$\ll \delta^{-3/2} \log^{-1} G \asymp \delta^{-3/2} (H^{-1})^{-1} \tag{39}$$

Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\beta n^2} \ll e^{-\beta} \qquad \text{для} \quad \beta \ge 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\beta n^2} \ll \sum_{n \le 2\beta^{-1/2}} n^2 + \sum_{n > \beta^{-1/2}} n^2 e^{-\beta \cdot n \beta^{-1/2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^3 \ll \left(\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \qquad \text{для} \quad 0 < \beta \le 1.$$

Значит, вклад от диагональных членов в правую часть (35) не превосходит $\ll H\delta^{-3/2}$. Недиагональные члены добавляют в правую часть равенства (35) по всем $m \ne n$ величины

$$O\left(mn \int\limits_G^{\infty} \exp\left(-(m^2 + n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \sin 2\delta + i(m^2 - n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \cos 2\delta\right) \frac{dx}{\log^2 x}\right)$$

и

$$O\left(mn \int\limits_1^{G} \exp\left(-(m^2 + n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \sin 2\delta + i(m^2 - n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \cos 2\delta\right) dx\right).$$

Положим $x = u^{3/2}$. Тогда

$$\int\limits_G^{\infty} \exp\left(-(m^2 + n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \sin 2\delta + i(m^2 - n^2)\frac{\pi}{5} x^{2/3} \cos 2\delta\right) \frac{dx}{\log^2 x} \ll$$

$$\ll \left|\int\limits_{G^{2/3}}^{\infty} \exp\left(-(m^2 + n^2)\frac{\pi}{5} u \sin 2\delta + i(m^2 - n^2)\frac{\pi}{5} u \cos 2\delta\right) \frac{du}{\log^2 u} \sqrt{u}\right|.$$

Интегрированием по частям получим для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующее равенство:

$$\int\limits_{G^{2/3}}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha + i\beta)u} \sqrt{u}\, du}{\log^2 u} = -\frac{1}{(\alpha + i\beta)} e^{-(\alpha + i\beta)u} \left.\frac{\sqrt{u}}{\log^2 u}\right|_{G^{2/3}}^{\infty} -$$

$$- \int\limits_{G^{2/3}}^{\infty} \frac{1}{-(\alpha + i\beta)} e^{-(\alpha + i\beta)u} d\left(\frac{\sqrt{u}}{\log^2 u}\right). \tag{40}$$

Первый член в правой части этого равенства оценивается как

$$\ll \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-\alpha G^{2/3}) \frac{\sqrt{G^{2/3}}}{H^{-2}}. \tag{41}$$

Для оценки второго члена в равенстве (40) используем лемму III.1.2.

Имеем

$$\int_{G^{2/3}}^{\infty} e^{-\alpha u}\cdot e^{-i\beta u} d\left(\frac{\sqrt{u}}{\log^2 u}\right) = \int_{G^{2/3}}^{\infty} e^{-\alpha u}\frac{0,5\log u - 2}{\sqrt{u}\log^3 u} e^{-i\beta u} du.$$

Поскольку при $H < H_0$ функция

$$e^{-\alpha u}\frac{0,5\log u - 2}{\sqrt{u}\log^3 u}$$

монотонно убывает при $u > G^{2/3}$, то из упомянутой леммы следует, что

$$\int_{G^{2/3}}^{\infty} e^{-\alpha u}\cdot e^{-i\beta u} d\left(\frac{\sqrt{u}}{\log^2 u}\right) \le \frac{4}{\beta}\exp(-\alpha G^{2/3})\frac{G^{1/3}\log^3(G^{2/3})}{0,5\log(G^{2/3}) - 2}.$$

Из этой оценки и оценки (41) получаем, что

$$\int_G^{\infty} \exp\left(-(m^2+n^2)\frac{\pi}{5}x^{2/3}\sin 2\delta + i(m^2-n^2)\frac{\pi}{5}x^{2/3}\cos 2\delta\right)\frac{dx}{\log^2 x} \ll$$

$$\ll \frac{1}{|m^2-n^2|}\exp\left(-(m^2+n^2)\frac{\pi}{5}G^{2/3}\sin 2\delta\right) G^{1/3}H^{-2}.$$

Вклад от всех членов вида $mn\int_G^{\infty}$ с $m \ne n$ в правую часть (35) не превосходит величины

$$\ll G^{1/3}H^{-2}\sum_{m\ne n}\frac{mn}{|m^2-n^2|}\exp\left(-(m^2+n^2)\frac{\pi}{5}\sin 2\delta G^{2/3}\right) \ll$$

$$\ll G^{1/3}H^{-2}\sum_{m=2}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi}{5}m^2\sin 2\delta\right)\sum_{n=1}^{m-1}\frac{n}{m-n} \ll$$

$$\ll G^{1/3}H^{-2}\sum_{m=2}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi}{5}m^2\sin 2\delta\right) m\log m \ll$$

$$\ll G^{1/3}H^{-2}\left(\sum_{m\le\delta^{-1/2}\log^2\delta} m\log m + \sum_{m>\delta^{-1/2}\log^2\delta}\frac{m\log m}{\exp(\frac{1}{2}m^2\frac{\pi}{5}\sin 2\delta)}\right) \ll$$

$$\ll G^{1/3}H^{-2}\delta^{-1}\log^6\delta.$$

Оставшаяся сумма

$$\sum_{m\ne n} mn\left|\int_1^G \exp\left(-(m^2+n^2)\frac{\pi}{5}x^{2/3}\sin 2\delta + i(m^2-n^2)\frac{\pi}{5}x^{2/3}\cos 2\delta\right) dx\right|$$

оценивается аналогично.

Из оценок (35), (39) и (42) заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt \ll HT^{3/2}.$$

Поскольку $F(u) = (2\pi)^{-1/2}\varphi(1/2+iu)e^{(\pi/4-\delta)u}$, то, используя неравенство Коши, получим

$$\int_T^{2T}\left|\int_t^{t+H}\varphi(s)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{T}\right)u\right)du\right| dt \ll T^{1/2}(HT^{3/2})^{1/2} = H^{1/2}T^{5/4}. \tag{43}$$

Обозначим буквой S множество точек t из интервала $(T, 2T)$ таких, что

$$J(t) = \int_t^{t+H}\left|\varphi(s)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{T}\right)u\right)\right| du =$$

$$= \left|\int_t^{t+H}\varphi(s)\exp\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{T}\right)u\right)du\right| = |I(t)|.$$

Пусть $E = (T, 2T)\backslash S$. Из определения множества E ясно, что интервал $(t, t+H)$ содержит нуль $\varphi(1/2+iu)$. Оценим сверху меру S. Имеем

$$\int_S J(t)dt \ge AT^{1/4}\left(\int_S\int_t^{t+H}\frac{|æ(s)|^3}{1+|æ(s)|^2}du\, dt + \right.$$

$$\left. + O\left(\int_T^{2T}|J_1|dt\right) + O\left(\int_T^{2T}|J_2|dt\right)\right),$$

где $æ(s) = e^{-i\theta}P(s,\chi_1) + e^{i\theta}P(s,\chi_2)$. Далее, из оценки (31) получаем, что при $H \gg \log^{-1}T$

$$\int_S J(t)dt \ge AT^{1/4}\int_S\int_t^{t+H}\frac{|æ(s)|^3}{1+|æ(s)|^2}du dt + O(T^{5/4}H^{1/2}).$$

Поскольку $\int_S Jdt = \int_S Idt$, то из неравенства (43) следует, что

$$\int_S\int_t^{t+H}\frac{|æ(s)|^3}{1+|æ(s)|^2}du dt \ll H^{1/2}T. \tag{44}$$

Пусть $\gamma(t)$ обозначает характеристическую функцию множест S. Тогда

$$\int\limits_S \int\limits_t^{t+H} \frac{|\text{æ}(s)|^3}{1+|\text{æ}(s)|^2} du\, dt = \int\limits_T^{2T} \gamma(t) \int\limits_0^H \frac{|\text{æ}(s)|^3}{1+|\text{æ}(s)|^2} du\, dt =$$

$$= \int\limits_0^H \left(\int\limits_T^{2T} \gamma(t) \frac{|\text{æ}(1/2+i(t+v))|^3}{1+|\text{æ}(1/2+i(t+v))|^2} dt \right) dv \gg$$

$$\gg H \min_{0<v\le H} \int\limits_T^{2T} \gamma(t) \frac{|\text{æ}(1/2+i(t+v))|^3}{1+|\text{æ}(1/2+i(t+v))|^2} dt =$$

$$= H \int\limits_S \frac{|\text{æ}(1/2+i(t+v_0))|^3}{1+|\text{æ}(1/2+i(t+v_0))|^2}$$

для некоторого $v_0 \in [0,H]$. Из неравенства (44) следует, что при так v_0 выполняется

$$\int\limits_S \frac{|\text{æ}(1/2+i(t+v_0))|^3}{1+|\text{æ}(1/2+i(t+v_0))|^2} dt \ll H^{-1/2}T. \qquad (4$$

Пусть M_1 и M_2 — подмножества M, такие, что $M_1 \cup M_2 = M$ $\chi_1(p) = \chi_2(p)$ для $p \in M_1$, $\chi_1(p) = -\chi_2(p)$ для $p \in M_2$. Тогда

$$\text{æ}(s) = e^{-i\theta} P(s,\chi_1) + e^{i\theta} P(s,\chi_2) = \prod_{p\in M_1} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(e^{-i\theta} \prod_{p\in M_2} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} + e^{i\theta} \prod_{p\in M_2} \left(1 + \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \right)$$

Пусть

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

и пусть $h_1(x)$ — некоторая неотрицательная монотонно растущ функция. Для произвольных непрерывных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, опр деленных на интервале $(T,2T)$, положим

$$U_0 = \{t : t \in [T,2T]; \quad \textit{либо} \quad f_1(t) \le 0, \quad \textit{либо} \quad f_2(t) \le 0\},$$
$$U_1 = \{t : \quad \textit{либо} \quad h_1(f_1(t)) > 1, \quad \textit{либо} \quad h_1(f_2(t)) > 1\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{U_0} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt \le h_1(0) \int\limits_{U_0} h_1(f_2(t))dt +$$

$$+ h_1(0) \int\limits_{U_0} h_1(f_1(t))dt \le h_1(0) \int\limits_T^{2T} (h_1(f_2(t)) + h_1(f_1(t)))dt; \qquad (46)$$

$$\int\limits_{U_1} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt \le \int\limits_{U_1} h(f_1(t))h(f_2(t))dt +$$

$$+ \int\limits_T^{2T} h_1^2(f_1(t))h_1(f_2(t))dt + \int\limits_T^{2T} h_1^2(f_2(t))h_1(f_1(t))dt. \qquad (47)$$

Для точек множества $[T,2T] \backslash (U_0 \cup U_1)$ выполняется

$$h_1(f_1(t)) \le h(f_1(t)) \quad \textit{и} \quad h_1(f_2(t)) \le h(f_2(t)).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[T,2T]\backslash(U_0\cup U_1)} h(f_1(t))h(f_2(t))dt \ge \int\limits_{[T,2T]\backslash(U_0\cup U_1)} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt. \qquad (48)$$

Из неравенств (46), (47) и (48) заключаем, что

$$\int\limits_T^{2T} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt \le \int\limits_T^{2T} h(f_1(t))h(f_2(t))dt +$$

$$+ h_1(0) \int\limits_T^{2T} (h_1(f_2(t)) + h_1(f_1(t)))dt +$$

$$+ \int\limits_T^{2T} (h_1^2(f_1(t))h_1(f_2(t)) + h_1(f_1(t))h_1^2(f_2(t)))dt. \qquad (49)$$

Положим

$$f_1(t) = \left(\frac{1}{2}\log\log y\right)^{-1/2} \operatorname{Re} \sum_{p\in M_1} \frac{\chi_1(p)}{p^{1/2}} p^{-i(t+v_0)} - \frac{1}{10},$$

$$f_2(t) = \left(\frac{1}{2}\log\log y\right)^{-1/2} \operatorname{Re} \sum_{p\in M_2} \frac{\chi_1(p)}{p^{1/2}} p^{-i(t+v_0)} - \frac{1}{10}.$$

Нам необходимо оценить снизу следующую величину:

$$\operatorname{mes}\{t : t \in [T,2T]; f_1(t) > 0, f_2(t) > 0\} = \int\limits_T^{2T} h(f_1(t))h(f_2(t))dt,$$

для чего нужно подобрать соответствующим образом $h_1(x)$.

Вычислим при вещественных a и b интеграл

$$\int_T^{2T} \exp(af_1(t)+bf_2(t))dt.$$

Положим для краткости

$$\beta_p = \frac{\operatorname{Re}[\chi_1(p)p^{-i(t+v_0)}]}{\sqrt{2^{-1}p\log\log y}}.$$

При $|a|$, $|b| \le (\log\log y)^{1/3}$ имеем

$$\int_T^{2T} \exp(af_1(t)+bf_2(t))dt = \exp\left(-\frac{a+b}{10}\right)\int_T^{2T}\prod_{p\in m_1} e^{a\beta_p}\prod_{p\in M_2} e^{b\beta_p}dt =$$

$$= \exp\left(-\frac{a+b}{10} + O\left((\log\log y)^{-1/2}\right)\right)\times$$

$$\times\int_T^{2T}\prod_{p\in M_1}\left(1+a\beta_p+\frac{(a\beta_p)^2}{2}\right)\prod_{p\in M_2}\left(1+b\beta_p+\frac{(b\beta_p)^2}{2}\right), \qquad ($$

так как при $|\alpha| \ll 1$ найдется постоянная c такая, что

$$\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-c|\alpha|^2} < e^\alpha < \left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{c|\alpha|^2}.$$

Заметим здесь, что (полагая $t_1 = t + v_0$)

$$1+a\beta_p+\frac{(a\beta_p)^2}{2} = 1+\frac{1}{2}a(\overline{\chi}_1(p)p^{-it_1}+\chi_1(p)p^{it_1})\frac{1}{\sqrt{2^{-1}p\log\log y}}+$$

$$+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}(\overline{\chi}_1^2p^{-2it_1}+2+\chi_1^2(p)p^{2it_1})\frac{1}{p\log\log y} =$$

$$= \left(1+\frac{a^2}{2p\log\log y}\right)+\frac{a}{\sqrt{2p\log\log y}}(\overline{\chi}_1(p)p^{-it_1}+\chi_1(p)p^{it_1})+$$

$$+\frac{a^2}{4p\log\log y}(\overline{\chi}_1^2p^{-2it_1}+\chi_1^2p^{2i}$$

Поэтому, раскрывая скобки в произведении равенства (50), полу свободный член вида

$$\prod_{p\in M_1}\left(1+\frac{a^2}{2p\log\log y}\right)\prod_{p\in M_2}\left(1+\frac{b^2}{2p\log\log y}\right)$$

и не более 5^y членов вида

$$\prod p^{i\delta_p T}, \qquad \delta_p = 0, \pm1, \pm2,$$

с коэффициентами $\ll 1$. Так как не все δ_p в таких членах равны ну

го

$$\int_T^{2T}\prod_{p\in M} p^{\pm i\delta_p t}dt \ll \left|\log\prod_{p\in M}p^{\pm\delta_p}\right|^{-1} \ll \prod_{p\in M}p^2 \ll 10^y.$$

Таким образом, общий вклад в интеграл от произведения, вносимый осциллирующими членами, не превосходит

$$\exp(cy) \ll \log^c T.$$

Вклад от свободного члена будет

$$T\prod_{p\in M_1}\left(1+\frac{a^2}{2p\log\log y}\right)\prod_{p\in M_2}\left(1+\frac{b^2}{2p\log\log y}\right) =$$

$$= T\left(\prod_{p\in M_1}\exp\left(\frac{a^2}{2p\log\log y}\right)\prod_{p\in M_2}\exp\left(\frac{b^2}{2p\log\log y}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log y}\right)\right)\right) =$$

$$= T\exp\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log y}\right)\right).$$

Следовательно, учитывая все множители в правой части (50), получаем

$$\int_T^{2T}\exp(af_1(t)+bf_2(t))dt =$$

$$= T\exp\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{1}{10}(a+b)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log y}}\right)\right). \qquad (51)$$

Функцию $h_1(x)$ будем выбирать в форме $h_1 = Ke^{ax}$. Найдем, во-первых, достаточно большое a такое, что

$$\frac{1}{10}\int_T^{2T}\exp(af_1(t)+af_2(t))dt > \int_T^{2T}\exp(af_1(t))dt+\int_T^{2T}\exp(af_2(t))dt. \quad (52)$$

Такой выбор возможен в силу равенства (51). Во-вторых, найдем число D такое, что

$$\int_T^{2T}\exp(2af_1(t)+af_1(t))dt+\int_T^{2T}\exp(af_1(t)+2af_2(t))dt \le$$

$$\le e^{aD}\cdot\frac{1}{10}\int_T^{2T}\exp(af_1(t)+af_2(t))dt. \qquad (53)$$

Положим $h_1(x) = e^{-aD} \cdot e^{ax}$. Из неравенства (52) заключаем,

$$\frac{1}{10}\int_T^{2T} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt \geq h_1(0)\left[\int_T^{2T} h_1(f_1(t))dt + \int_T^{2T} h_1(f_2(t))dt\right].$$

Далее, пользуясь неравенством (53), получим

$$\int_T^{2T} h_1^2(f_1(t))h_1(f_2(t))dt + \int_T^{2T} h_1(f_1(t))h_1^2(f_2(t))dt =$$

$$= e^{-3aD}\left[\int_T^{2T} \exp(2af_1(t) + af_2(t))dt + \int_T^{2T} \exp(af_1(t) + 2af_2(t))dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{10}e^{-3aD}\left[e^{aD}\int_T^{2T} \exp(af_1(t) + a_2(t))dt\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\int_T^{2T} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))$$

Из неравенства (49) теперь находим

$$\text{mes}\{f_1(t) > 0, f_2(t) > 0\} \geq \frac{7}{10}\int_T^{2T} h_1(f_1(t))h_1(f_2(t))dt =$$

$$= \frac{7}{10}e^{-2aD}\int_T^{2T} \exp(af_1(t) + af_2(t)$$

Вследствие (51) отсюда заключаем, что при достаточно больши выполняется

$$\text{mes}\{t : t \in [T, 2T], f_1(t) > 0, f_2(t) > 0\} > c_0 T > 0,$$

где c_0 — абсолютная постоянная. Множество таких t обозначим с волом T^+. Имеем из неравенства (45) и определения S, что

$$\int_{T^+\cap S} |æ(s + iv_0)|dt \ll H^{-1/2}T;$$

с другой стороны, на множестве T^+ выполняются неравенства $f_1(t$ > 0 и $f_2(t) > 0$ и, следовательно, неравенства

$$\text{Re}\sum_{p\in M_1} \frac{\chi_1(p)}{\sqrt{p}}p^{-i(t+v_0)} > \frac{1}{10\sqrt{2}}(\log\log y)^{1/2},$$

$$\text{Re}\sum_{p\in M_2} \frac{\chi_1(p)}{\sqrt{p}}p^{-i(t+v_0)} > \frac{1}{10\sqrt{2}}(\log\log y)^{1/2}.$$

Заметим здесь, что из неравенства Чебышева (теорема П.7.1) следует

$$\text{mes}\left\{t : t \in [T, 2T], \left|\log\prod_{p\in M}\left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^{1/2+i(t+v_0)}}\right)^{-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \text{Re}\sum_{p\leq y}\frac{\chi_1(p)p^{i(t+v_0)}}{\sqrt{p}}\right| > \frac{(\log\log y)^{1/2}}{20\sqrt{2}}\right\} \leq c_1 T(\log\log y)^{-1}$$

с некоторой абсолютной постоянной $c_1 > 0$. Поэтому

$$\int_{T^+\cap S} |æ(s + iv_0)|dt \geq \frac{1}{200}c_0 \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log y}\right) \text{mes}\,(T^+ \cap S).$$

Отсюда заключаем, что $\text{mes}\,(T^+ \cap S) \ll \frac{T}{\sqrt{H}\exp(-0,05\sqrt{\log\log y})}$. Полагая $H = \exp(-0,05\sqrt{\log\log y})$, $y = \log\log T$, получим, что

$$(\text{mes}\, T^+ \cap E) > 1/2\, c_0 T.$$

Отсюда следует, что интервал $(T, 2T)$ содержит более чем

$$T\exp\left(\frac{1}{40}\sqrt{\log_4 T}\right)$$

нулей функции $\varphi(1/2 + it)$, где $\log_4 T = \log\log\log\log T$. Теорема доказана.

§ 6. О нулях функции Дэвенпорта—Хейльбронна, лежащих на критической прямой

В этом параграфе помещена статья А.А.Карацубы "О нулях функции Дэвенпорта—Хейльбронна, лежащих на критической прямой" (Изв.АН СССР. Сер. мат. — 1990.— Т.54, N 2.— С.303 — 315). Результаты статьи были получены уже после окончания работы над книгой. Нам не хотелось менять что-либо в структуре книги, а вместе с тем хотелось, чтобы книга отражала современное состояние теории. Поэтому мы решили поместить указанную статью без существенных изменений в качестве отдельного параграфа.

1. Введение. Формулировка теоремы. Пусть $\chi_1(n)$ — комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi_1(2) = i$

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}.$$

Определение. *Функцией Дэвенпорта—Хейльбронна* назовем функцию

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2}L(s, \chi_1) + \frac{1 + iæ}{2}L(s, \overline{\chi}_1), \quad (1)$$

где

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Функция $f(s)$ введена и исследована в [116] (см. также [83 с.28 287]). Она удовлетворяет уравнению римановского типа:

$$g(s)=g(1-s),$$

где $g(s)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s)$. Однако для $f(s)$ гипотеза Римана (*все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой* $\mathrm{Re}\,s=1$ не выполняется. Более того, число нулей $f(s)$ в области $\mathrm{Re}\,s>0<\mathrm{Im}\,s\leq T$ превосходит $cT, c>0$ — абсолютная постоянная. 1980 г. С.М.Воронин [23] (см.также обзор [24]) доказал, что, тем менее, прямая $\mathrm{Re}\,s=1/2$ является исключительным множеством нулей $f(s)$. Пусть $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка $f(s)$ промежутке $\mathrm{Re}\,s=1/2, 0<\mathrm{Im}\,s\leq T$. Теорема С.М.Воронина фор лируется так:

$$N_0(T)>cT\exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\right),\quad c>0-\textit{постоянная}.$$

Продолжим исследования, связанные с нулями $f(s)$, лежащими прямой $\mathrm{Re}\,s=1/2$, которую в дальнейшем будем называть к*тической*. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть ε и ε_1 — произвольно малые фиксиров ные положительные числа, не превосходящие* 0,01. *Тогда при* $H=T^{27/82+\varepsilon_1}$, $T\geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)>O$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geq H(\log T)^{1/2-\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$N_0(T)>T(\log T)^{1/2-\varepsilon}, T>T_0(\varepsilon)>0,$$

где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое фиксированное число. Отметим основные идеи, позволившие доказать теорему:

1) использовать наличие у функции $f(s)$ при $\mathrm{Re}\,s>1$ множи

$$f_1(s)=\prod_{p\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)}(1-\chi_1(p)p^{-s})^{-1};$$

$f_1(s)$ является общим делителем $L(s,\chi_1)$ и $L(s,\overline{\chi}_1)$;

2) сравнивать малые положительные степени абсолютных ве чин интегралов от вещественной функции $F(t)$, соответствующей $f($

Кроме указанных соображений существенно используются иде методы работ [41–43, 56, 126, 162].

Обобщения полученных результатов очевидны. В частности, метим, что любая линейная комбинация L-рядов Дирихле имеет общ делитель вида $f_1(s)$ с сомножителями по простым числам p таким,

$p\equiv1(\mathrm{mod}\,K)$, где K — наименьшее общее кратное модулей, отвечающих рассматриваемым L-рядам.

Весьма желательно было бы доказать для $N_0(T)$ оценку вида $N_0(T)\geq cT\log T$ (аналог известной теоремы А.Сельберга). Может оказаться, что "почти все" комплексные нули $f(s)$ лежат на критической прямой.

Ниже употребляются, кроме уже введенных, устоявшиеся обозначения, положительные постоянные $c, c_1,\ldots$, а также в знаках $\ll$ и O — абсолютные; считаем выполненными условия теоремы; $X=T^{0{,}01\varepsilon_1}$;

$$r(n)=\frac{1-i\ae}{2}\chi_1(n)+\frac{1+i\ae}{2}\overline{\chi}_1(n)=0,1,\ae,-\ae,-1$$

при $n\equiv0,1,2,3,4\,(\mathrm{mod}\,5)$.

2. Вспомогательные утверждения. На протяжении всего параграфа будем ссылаться на [43], где содержится весь необходимый для дальнейшего вспомогательный материал.

Построим, прежде всего функцию $F(t)$, аналогичную $F(t)$ из [43, с.28]. Определим, числа $\alpha(\nu)$ и $\beta(\nu)$ соотношениями

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s}=\prod_{p\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)}(1-\frac{1}{p^s})^{1/2};\quad \mathrm{Re}\,s>1;$$

$$\beta(\nu)=\begin{cases}\alpha(\nu)(1-\frac{\log\nu}{\log X}), & 1\leq\nu<X;\\ 0, & \nu\geq X.\end{cases}$$

Из этого определения следует мультипликативность $\alpha(\nu)$, а также равенство

$$\beta(\nu)\chi_1(\nu)=\beta(\nu)\overline{\chi}_1(\nu)\stackrel{\mathrm{def}}{=}h(\nu).$$

Пусть далее,

$$\varphi(s)=\sum_{\nu<X}\frac{\beta(\nu)\chi_1(\nu)}{\nu^s}=\sum_{\nu<X}\frac{h(\nu)}{\nu^s}.$$

Определение. Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами

$$F(t)=\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-it/2}\frac{\Gamma(3/4+it/2)}{|\Gamma(3/4+it/2)|}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=$$

$$=e^{i\theta(t)}f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

Из определения $F(t)$ и (2) следует, что $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечетного порядка являются нулями нечетного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой.

Л е м м а 1. *Пусть T таково, что $T - \pi/4 = 4\pi k$, k — целое число. Тогда при $T \le t \le T + H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = 2\sum_{\lambda \le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \log \frac{P}{\lambda} + O(T^{-0{,}01}),$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X, $P = \sqrt{5T/(2\pi)}$,

$$A(\lambda) = \sum_{n\nu_1/\nu_2 = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о (следуем [43, с.28]). Пользуясь формулой Стирлинга, для $\theta(t)$ находим

$$\theta(t) = t\log P_1 - \frac{t}{2} + \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

где

$$P_1 = \sqrt{5t/(2\pi)},$$

$$\Delta(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{2t} + \frac{t}{4}\log\left(1 + \frac{9}{4t^2}\right) - \frac{t}{2}\int_0^\infty \frac{\rho(u)du}{(u+3/4)^2 + t^2/4},$$

$$\rho(u) \doteq \frac{1}{2} - \{u\}.$$

Пусть

$$G(t;\chi_1) = L\left(\frac{1}{2} + it; \chi_1\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2;$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{\nu < X} \frac{h(\nu)}{\sqrt{\nu}}\nu^{-it}; \qquad |h(\nu)| \le 1;$$

тогда

$$F(t) = e^{i\theta(t)}\left\{\frac{1 - i\varkappa}{2}G(t;\chi_1) + \frac{1 + i\varkappa}{2}G(t;\overline{\chi}_1)\right\}.$$

Для функции $G(t;\chi_1)$ подобно тому, как это сделано в [43, с.28–30], получаем приближенную формулу

$$G(t;\chi_1) = \sum_{\lambda \le P_1} \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} +$$

$$+\tau(\chi_1)\exp\left(\left(\frac{\pi!}{4} + t - 2t\log P_1\right)\right)\sum_{\lambda \le P_1} \frac{\overline{a(\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(T^{-1/4}X^{3/2}),$$

где

$$a(\lambda) = \sum_{n\nu_1/\nu_2 = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\chi_1(n)}{\nu_2}, \quad \tau(\chi_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{l=1}^{4}\chi_1(l)e^{-2\pi il/5}.$$

Воспользуемся формулой [83, с.283]

$$\sin\frac{4\pi}{5} + \varkappa\sin\frac{8\pi}{5} = \varkappa(\sin\frac{2\pi}{5} + \varkappa\sin\frac{4\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}\varkappa;$$

находим

$$\tau(\chi_1) = \frac{-2i}{\sqrt{5}}\left(\sin\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right);$$

$$\frac{1 - i\varkappa}{2}\tau(\chi_1)\overline{\chi}_1(n) - \frac{1 + i\varkappa}{2}\overline{\tau}(\chi_1)\chi_1(n) =$$

$$= 2i\,\mathrm{Im}\,\frac{1 - i\varkappa}{2}\tau(\chi_1)\overline{\chi}_1(n) = -ir(n).$$

Следовательно,

$$\frac{1 - i\varkappa}{2}a(\lambda) + \frac{1 + i\varkappa}{2}\overline{a}(\lambda) =$$

$$= \sum_{n\nu_1/\nu_2 = \lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)\left(\frac{1 - i\varkappa}{2}\chi_1(n) + \frac{1 + i\varkappa}{2}\overline{\chi}_1(n)\right)}{\nu_2} = A(\lambda);$$

$$\frac{1 - i\varkappa}{2}\tau(\chi_1)\overline{a}(\lambda) + \frac{1 + i\varkappa}{2}\tau(\overline{\chi}_1)a(\lambda) = -iA(\lambda);$$

$$F(t) = e^{i\theta(t)}\sum_{\lambda \le P_1} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{-it} +$$

$$+\exp\left(i\left(\theta(t) - \frac{\pi}{4} + t - 2t\log P_1\right)\right)\sum_{\lambda \le P_1} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{it} + O(T^{-1/4}X^{3/2}).$$

Заменяя $\theta(t)$ на $t\log P - \frac{T}{2} + \frac{\pi}{8}$, P_1 на P и пользуясь специальным видом числа T, получим утверждение леммы.

Л е м м а 2. *Пусть $T^{0,1} \le Y \le T$, $1/4 \le \theta \le 1/2$,*

$$S(Y) = \sum_{\lambda \le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.$$

Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$S(Y) = \frac{2(1 + \varkappa^2)}{5(1 - 2\theta)}Y^{1-2\theta}W(0) +$$

$$+\left(\frac{c_1}{1 - 2\theta} + c_2\right)W(1 - 2\theta) + O(Y^{-2\theta}X^2\log^2 X),$$

где

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4},$$

$$q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3).$$

Доказательство. Пользуясь определением $A(\lambda)_r$ находи

$$S(Y) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\nu_1^{\theta}\nu_2^{1-\theta}\nu_3^{\theta}\nu_4^{1-\theta}} \sum_{n_1\nu_1/\nu_2=n_2\nu_3/\nu_4\le Y} \frac{r(n_1)r(n_2)}{(n_1n_2)^{\theta}}. \tag{3}$$

Вычислим сумму по n_1, n_2, которую обозначим символом $S_1(Y)$. Пусть $q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$; тогда $\nu_1\nu_4 = aq$, $\nu_2\nu_3 = bq$, $(a,b) = 1$. Из соотношения

$$n_1\nu_1\nu_4 = n_2\nu_2\nu_3 \le Y\nu_2\nu_4$$

следует $n_1 = bm$, $n_2 = am$, $m \le Y\nu_2\nu_4(abq)^{-1} = Y_1$;

$$S_1(Y) = (ab)^{-\theta} \sum_{m\le Y_1} \frac{r(am)r(bm)}{m^{2\theta}}.$$

Так как $r(n) = \frac{1-i\ae}{2}\chi_1(n) + \frac{1+i\ae}{2}\overline{\chi}_1(n)$, то при любом $k \equiv \pm1 (\bmod 5)$ выполняется равенство $r(kn) = \chi_1(k)r(n)$. Поэтому, помня, что a и b — делители $\nu_1\nu_4$ и $\nu_2\nu_3$, получаем

$$S_1(Y) = \frac{\chi_1(a)\chi_1(b)}{(ab)^{\theta}} \sum_{m\le Y_1} \frac{r^2(m)}{m^{2\theta}} =$$

$$= \frac{\chi_1(a)\chi_1(b)}{(ab)^{\theta}} \left(\sum_{\substack{m\le Y_1\\ m\equiv\pm1 (\bmod 5)}} m^{-2\theta} + \ae^2 \sum_{\substack{m\le Y_1\\ m\equiv\pm2 (\bmod 5)}} m^{-2\theta} \right). \tag{4}$$

Обозначим через K число $(Y_1 - l)/5, 0 \le l \le 4$; пользуясь формулоı суммирования Эйлера, найдем

$$\sum_{1/2<k\le K} \frac{1}{(5k+l)^{2\theta}} = \int_{1/2}^{K} \frac{du}{(5u+l)^{2\theta}} + \rho(K)\frac{1}{(5K+l)^{2\theta}} +$$

$$+10\theta \int_{1/2}^{K} \frac{\rho(u)du}{(5u+l)^{2\theta+1}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{Y_1^{1-2\theta} - (2,5+l)^{1-2\theta}}{1-2\theta} + c(l) + O(Y_1^{-2\theta});$$

$$\rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}; \qquad |c(l)| \le 100.$$

Отсюда и из (4) получаем

$$S_1(Y) = \frac{2(1+\ae^2)Y_1^{1-2\theta}}{5(1-2\theta)} \cdot \frac{\chi_1(a)\chi_1(b)}{(ab)^{\theta}} + \frac{c_1\chi_1(a)\chi_1(b)}{(1-2\theta)(ab)^{\theta}} +$$

$$+\frac{c_2\chi_1(a)\chi_1(b)}{(ab)^{\theta}} + O((ab)^{-\theta}Y_1^{-2\theta}), \ |c_1| \le c, \ |c_2| \le c.$$

Подставляя найденную формулу для $S_1(Y)$ в (3), приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. *При $0 \le \theta \le 1/2$ для $W(\theta)$ справедлива оценка*

$$W(\theta) = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\log X}}\right).$$

Доказательство. Определим функцию $\gamma(d)$ равенством

$$\sum_{d|q} \gamma(d) = q^{1-\theta};$$

тогда

$$\gamma(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^{1-\theta} = n^{1-\theta}\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^{1-\theta}}\right), \quad 0 < \gamma(n) < n^{1-\theta}.$$

Как и в [43, с.53—57], находим

$$W(\theta) = \sum_{d\le X^2}{}' \gamma(d) \left(\sum_{\nu_1\nu_4\equiv O(\bmod d)} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} \right)^2,$$

где числа d, являясь делителями $(\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$ состоят из простых сомножителей p вида $p \equiv \pm1 \pmod 5$.

Обозначая последнюю скобку буквой V, будем иметь

$$V = \frac{1}{\log^2 X} \sum_{\delta_1\delta_4\equiv O(\bmod d)} \frac{\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{\nu_1 < X\delta_1^{-1}\\ (\nu_1', d)=1}} \frac{\alpha(\nu_1')}{(\nu_1')^{1-\theta}} \log\frac{X}{\delta_1\nu_1'} \right) \left(\sum_{\substack{\nu_4' < X\delta_4^{-1}\\ (\nu_4', d)=1}} \frac{\alpha(\nu_4')}{\nu_4'} \log\frac{X}{\delta_4\nu_4'} \right).$$

Оценим $K = K(d)$

$$K = \sum_{\substack{\nu < X\delta^{-1}\\ (\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \log\frac{X}{\delta\nu} = \sum_{\substack{\nu < Y\\ (\nu,d)=1}} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^{1-\theta}} \log\frac{Y}{\nu}.$$

Будем пользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{x^s}{s^2} ds = \begin{cases} \log x, & x \ge 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Пусть при $\operatorname{Re} s > 1$

$$f_1(s) = \prod_{p\equiv\pm1(\bmod 5)} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad f_2(s) = \prod_{p\equiv\pm2(\bmod 5)} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

Справедливо равенство

$$f_1^2(s) = \zeta(s)L(s,\chi)f_2(s),$$

где $\chi = \chi(n) = \left(\frac{n}{5}\right)$ — символ Лежандра по модулю 5. Следовательно, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = ((f_1(s))^{-1/2} = (\zeta(s)L(s,\chi)f_2(s))^{-1/4}.$$

Рассмотрим теперь $g(s)$:

$$g(s) = \sum_{(n,d)=1}\frac{\alpha(n)}{n^{1-\theta}}\cdot\frac{1}{n^s} = (f_1(s+1-\theta))^{-1/2}\prod_{\substack{p|d\\ p\equiv\pm1 (\operatorname{mod} 5)}}\left(1-\frac{1}{p^{s+1-\theta}}\right)^{-1/2}.$$

Тогда

$$K = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} g(s)\frac{Y^s}{s^2}ds. \qquad (5)$$

Считаем $Y > 2$.

1. Пусть $\theta \geq (\log Y)^{-1}$. Перенесем прямую интегрирования в (5) на кривую Γ, состоящую из полуокружности вида $s = \theta + re^{i\varphi}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, и двух полупрямых вида $\operatorname{Re} s = \theta$, $|\operatorname{Im} s| \geq r$, $0 < r < 1$. Тогда K представится суммою двух слагаемых

$$K = K_1 + K_2.$$

Оценим K_1 — интеграл по полуокружности. Имеем неравенство

$$K_1 \ll \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\theta+re^{i\varphi})+re^{i\varphi})|\frac{Y^{r+\theta}rd\varphi}{|\theta+r\cos\varphi+ir\sin\varphi|^2};$$

$$|g(\theta+re^{i\varphi})+re^{i\varphi}| \ll |f_1(1+re^{i}\varphi)|^{-1/2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}.$$

Пользуясь тем, что $|\zeta(s)|^{-1} \ll |1-s|$ при $s \to 1$, будем иметь

$$|f_1(1+it)|^{-1} \ll |\zeta(1+it)L(1+it,\chi)f_2(1+it)|^{-1/2} \ll \sqrt{|t|};$$

$$|f_1(1+re^{i\varphi})|^{-1/2} \ll r^{1/4} \quad \text{при} \quad r \to 0;$$

$$K_1 \ll Y^{\theta+r}\theta^{-2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2} r^{5/4} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Оценим K_2 — интеграл по полупрямым. Имеем $s = \theta + it$, $|t| \geq r$;

$$K_2 \ll \int\limits_r^\infty |g(\theta+it)|\frac{Y^\theta}{\theta^2+t^2}dt \ll$$

$$\ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}\int\limits_r^\infty |f_1(1+it)|^{-1/2}\frac{dt}{\theta^2+t^2} \ll$$

$$\ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt[4]{t}dt}{\theta^2+t^2} \ll Y^\theta\prod_{p|d}(1+\frac{1}{p})^{1/2}\theta^{-3/4} \ll$$

$$\ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4}.$$

Получили

$$K \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4}. \qquad (6)$$

2. Пусть $0 \leq \theta < (\log Y)^{-1}$. Возьмем $r_1 = 2(\log Y)^{-1}$ и перенесем прямую интегрирования в (5) на кривую Γ, состоящую из дуги окружности вида $|s| = r_1$, $\operatorname{Re} s \geq \theta$, и двух полупрямых вида $\operatorname{Re} s = \theta$, $|\operatorname{Im} s| \geq \sqrt{r_1^2 - \theta^2}$. Опять имеем равенство

$$K = K_1 + K_2.$$

Оценим K_1 — интеграл по дуге окружности $s = r_1e^{i\varphi}$, $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$:

$$K_1 \ll \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |g(r_1e^{i\varphi})||Y^s|r_1^{-1}d\varphi.$$

Для множителей, стоящих под интегралом, справедливы такие неравенства

$$|g(r_1e^{i\varphi})| \ll |f_1(1+r_1\cos\varphi+ir_1\sin\varphi)|^{-1/2}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll r_1^{1/4}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}; \qquad |Y^s| \ll 1;$$

следовательно,

$$K_1 \ll \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} r_1^{-3/4}\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}d\varphi \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4}.$$

Оценим K_2 — интеграл по полупрямым:

$$K_2 \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}\int\limits_{\sqrt{3}(\log Y)^{-1}}^{\infty} t^{1/4-2}dt \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4}.$$

Получили

$$K \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4}. \qquad (7)$$

Тем самым для K всегда справедлива оценка

$$K \ll Y^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log Y)^{3/4} \ll \left(\frac{X}{\delta}\right)^\theta\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/2}(\log X)^{3/4}.$$

Далее, повторяя рассуждения из [43, с.56—57], приходим к неравенствам

$$V \ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\log X}} \sum_{\delta_1\delta_4 \equiv O(\mathrm{mod}\, d)} \frac{|\alpha(\delta_1)||\alpha(\delta_4)|}{\delta_1^{1-\theta}\delta_4} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right) \ll$$

$$\ll \frac{X^\theta}{\sqrt{\log X}} \frac{1}{d} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^2.$$

Подставляя эту оценку в формулу, которой определялась $W(\theta)$, будем иметь

$$W(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{\log X} \sum_{d\le X^2}{}' \frac{\gamma(d)}{d^2} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \frac{X^{2\theta}}{\log X} \sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4, \tag{8}$$

причем штрих в сумме означает суммирование по таким d, простые делители p которых имеют вид $p \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 5)$. Далее находим

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \le 1 + \frac{1}{\sqrt{p}}, \qquad p \gg 1;$$

$$\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \ll \sum_{n|d}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)^4 \ll \sum_{d\le X^2}{}' \frac{1}{d^{1+\theta}} \sum_{n|d}\frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{d\le X^2 \\ d\equiv O(\mathrm{mod}\, n)}} \frac{1}{d^{1+\theta}} \ll \sum_{n\le X^2}{}' \frac{1}{n^{1,5+\theta}} \sum_{k\le X^2}{}' \frac{1}{k^{1+\theta}} \ll$$

$$\ll \sum_{k\le X^2}{}' \frac{1}{k} \ll 1 + \int_2^{X^2} C(u)u^{-2}du + C(X^2)X^{-2}, \tag{9}$$

где $C(u) = \sum\limits_{k\le u}{}' 1$ и штрих опять означает суммирование по натуральным числам k, простые делители которых сравнимы с ± 1 по mod 5. Нетрудно доказать (см., например, [80, с.166]), что

$$C(u) \sim \frac{u}{\sqrt{\log u}} \ll \frac{u}{\sqrt{\log u}},$$

т.е.

$$\int_2^{X^2} C(u)u^{-2}du \ll \sqrt{\log X}. \tag{10}$$

Из (8), (9), (10) следует утверждение леммы.

Л е м м а 4. *Пусть* $H = T^{27/82+\varepsilon_1}$, $0 < \varepsilon_1 < 0{,}01$, $0 < \varepsilon_2 < 1$, $0 < h < 1$, $k \ge 1$. *Рассмотрим при* $j = 0, 1, 2$ *суммы* W_j:

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B}(\lambda_2) \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right),$$

где $B(\lambda) = ((P\lambda^{-1})^{ih} - 1)^k (\log P\lambda^{-1})^{-k}$;

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\right).$$

Тогда для W_j *справедливы следующие оценки:*

$W_0 \ll T^{-\varepsilon_1}$; $W_2 \ll T^{-\varepsilon_1}$; $W_1 \ll (\varepsilon_2^{-2k}(\log T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k}h^k(\log T)^{-k})T^{-\varepsilon_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы дословно повторяет доказательство леммы 2 [43, с. 37 — 41].

3. Доказательство теоремы. Пусть a — произвольное фиксированное число с условием $0 < a < 1$; $T \le t \le T + H$; $T \ge T_0 > 0$; $k = [c \log\log T]$, $A = c_1 k\sqrt{\log T}$, $c > 1$, $c_1 > 1$ — постоянные, значения которых определим позднее; $h = A(\log T)^{-1}$, $h_1 = hk^{-1}$.

Обозначим буквой E подмножество интервала $(T, T+H)$, состоящее из чисел t таких, что

$$\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1} |F(t+u_1+\cdots+u_k)|du_1\ldots du_k >$$

$$> \left|\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1} F(t+u_1+\cdots+u_k)du_1\ldots du_k\right|.$$

Возводя обе части неравенства в степень a и пользуясь определением E, получаем

$$I_1 + I_2 \ge I_3, \tag{11}$$

где

$$I_1 = \int_E dt \left(\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1} |F(t+u_1+\cdots+u_k)|du_1\ldots du_k\right)^a;$$

$$I_2 = \int_T^{T+H} \left|\int_0^{h_1}\cdots\int_0^{h_1} F(t+u_1+\cdots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^a dt;$$

$$I_3 = \int_T^{T+H} \left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)| du_1 \dots du_k \right)^a dt.$$

Оценим I_3 снизу. Применяя неравенство Гельдера, находим

$$\left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)|^a du_1 \dots du_k \right)^{1/a} \le$$

$$\le h_1^{k(1/a-1)} \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)| du_1 \dots du_k;$$

$$\left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)| du_1 \dots du_k \right)^a \ge$$

$$\ge h_1^{k(a-1)} \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)|^a du_1 \dots du_k;$$

$$I_3 \ge h_1^{k(a-1)} \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} \int_T^{T+H} |F(t+u_1+\dots+u_k)|^a dt du_1 \dots du_k \ge$$

$$\ge h_1^{ka} \int_{T+h}^{T+H} |F(t)|^a dt.$$

Для оценки снизу последнего интеграла воспользуемся теоремой Гэбриэла [174] о выпуклости среднего значения по двум переменным в формулировке, приведенной в [83, с.238]. Если

$$J(\sigma,\lambda) = \left(\int_0^{H-h} |f(\sigma+it)\varphi^2(\sigma+it)|^{1/\lambda} dt \right)^\lambda, \qquad \lambda > 0,$$

то выполняется неравенство:

$$J(\sigma, p\lambda+q\mu) \ll J^p(\alpha,\lambda) J^q(\beta,\mu); \tag{12}$$

$$\alpha < \sigma < \beta, p = \frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}, q = \frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Положим в (12)

$$\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{a}, \beta = 2, \mu = \frac{1}{2-a}, p = \frac{a}{2}, q = \frac{2-a}{2}, \sigma = 2 - \frac{3a}{4}.$$

Легко находим, что

$$p\lambda + q\mu = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a} + \frac{2-a}{2}\cdot\frac{1}{2-a} = 1;$$

$$J(\sigma, p\lambda+q\mu) = J\left(2-\frac{3a}{4}, 1\right) = \int_0^{H-h} \left| g\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+h)\right)\right| dt;$$

$$g(s) = f(s)\varphi^2(s);$$

$$|f(s)\varphi^2(s)| = \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{r(n)}{n^s} \sum_{\nu_1,\nu_2} \frac{\alpha(\nu_1)\alpha(\nu_2)}{(\nu_1\nu_2)^s} \right| = \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{r_1(n)}{n^s} \right|,$$

где

$$r_1(n) = \sum_{m\nu_1\nu_2=n} r(m)\alpha(\nu_1)\alpha(\nu_2); \quad r_1(1)=1; \quad |r_1(n)| \le \tau_3(n);$$

поэтому

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) \ge \left| \int_0^{H-h} \sum_{n=1}^\infty \frac{r_1(n)}{n^{2-3a/4}} n^{-i(t+T+h)} dt \right| \ge H + O(1).$$

Кроме того,

$$J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) = \left(\int_{T+h}^{T+H} |F(t)|^a dt \right)^{1/a},$$

$$J\left(2, \frac{1}{2-a}\right) = \left(\int_{T+h}^{T+H} |g(2+it)|^{2-a} dt \right)^{1/(2-a)} \ll H^{1/(2-a)};$$

Тем самым из (12) находим

$$H \ll \left(\int_{T+h}^{T+H} |F(t)|^a dt \right)^{1/2} \cdot H^{1/2}; \qquad \int_{T+h}^{T+H} |F(t)|^a dt \gg H;$$

$$I_3 \gg h_1^{ka} H. \tag{13}$$

Это и есть нужная нам оценка снизу для I_3.

Оценим I_1 сверху. Пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$I_1^{2/a} \le (\mu(E))^{2/a-1} \int_T^{T+H} \left(\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} |F(t+u_1+\dots+u_k)| du_1 \dots du_k \right)^2 dt \le$$

$$\le (\mu(E))^{2/a-1} h_1^{2k} \int_T^{T+H+1} |F(t)|^2 dt.$$

Для оценки последнего интеграла применим известный прием и лему 1:

$$\int_T^{T+H+1} |F(t)|^2 dt \ll \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{H+1}\right)^2\right) \left|\sum_{\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{-i(T+t)}\right|^2 dt +$$

$$+HT^{-0,2} \ll H \sum_{\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} + H|W_0$$

Сумму по λ оценим, пользуясь леммой 2 с $Y = P$, $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\log}$ и леммой 3; кратная сумма W_0 оценивается леммой 4; в результа получаем

$$I_1^{2/a} \ll (\mu(E))^{2/a-1} h_1^{2k} H \frac{\log T}{\sqrt{\log X}};$$

$$I_1 \ll (\mu(E))^{1-a/2} h_1^{ka} H^{a/2} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^{a/2}. \qquad (14$$

Оценим I_2 сверху. Из леммы 1 находим

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + O(T^{-0,1}),$$

где

$$F_1(t) = 2\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \log\frac{P}{\lambda}, \quad F_2(t) = 2\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \log\frac{P}{\lambda}$$

и $0 < \varepsilon_2 < 1$; число ε_2 более точно определим позднее. Опять применяем неравенство Гёльдера; будем иметь

$$I_2^{2/a} \le H^{2/a-1} \int_T^{T+H} \left|\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k\right|^2 dt \ll$$

$$\ll H^{2/a-1}(I_{21} + I_{22} + Hh_1^{2k}T^{-0,2}), \qquad (15)$$

где

$$I_{21} = \int_T^{T+H} \left|\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k\right|^2 dt;$$

$$I_{22} = \int_T^{T+H} \left|\int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_1} F(t+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k\right|^2 dt.$$

Интеграл I_{21} оценим, предварительно проинтегрировав $F_1(t+u_1+ +\dots+u_k)$ по $u_1,\dots,u_k$; найдем

$$I_{21} \ll \int_T^{T+H} \left|\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \frac{((P/\lambda)^{ih_1}-1)^k}{(\log(P/\lambda))^k}\right|^2 dt \ll$$

$$\ll H\left(\sum_{\lambda\le P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} \frac{2^{2k}}{(\log(P/\lambda))^{2k}} + |W_1|\right) \ll$$

$$\ll H\left(\frac{4}{\varepsilon_2 \log T}\right)^{2k} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}} + (1+\varepsilon_2^k h_1^k \log^k T)T^{-\varepsilon_1}\right). \qquad (16)$$

Интеграл I_{22} оценим подобно тому, как был оценен интеграл I_1:

$$I_{22} \ll h_1^{2k} \int_T^{T+H+1} |F_2(t)|^2 dt \ll h_1^{2k} H \left(\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} + |W_2|\right).$$

Полагая $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\log P}$ и применяя леммы 2, 3, 4, последовательно, получаем

$$\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} \ll \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\le P} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}} = \frac{2(1+\varkappa^2)W(0)}{5(1-2\theta)} \times$$

$$\times (P^{1-2\theta} - P^{(1-\varepsilon_2)(1-2\theta)}) + O(P^{-1/2}X^2\log^2 X) \ll \frac{\varepsilon_2 \log T}{\sqrt{\log T}};$$

$$I_{22} \ll h_1^{2k} H \frac{\varepsilon_2 \log T}{\sqrt{\log T}}. \qquad (17)$$

Из (15), (16), (17) находим

$$I_2^{2/a} \ll H^{2/a}\left(\left(\frac{4}{\varepsilon_2 \log T}\right)^{2k} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log T}} + (1+\varepsilon_2^k h_1^k \log^k T)T^{-\varepsilon_1}\right) + \right.$$

$$\left. + h_1^{2k} \frac{\varepsilon_2 \log T}{\sqrt{\log T}} + h_1^{2k} T^{-0,2}\right) \ll$$

$$\ll H^{2/a} h_1^{2k} \left(\varepsilon_2 + \left(\frac{4}{\varepsilon_2 h_1 \log T}\right)^{2k} + (1+\varepsilon_2^k h_1^k \log^k T)T^{-\varepsilon_1}\right) \frac{\log T}{\sqrt{\log X}};$$

$$I_2 \ll H h_1^{ka} \Delta^{a/2},$$

где

$$\Delta = \left(\varepsilon_2 + \left(\frac{4}{\varepsilon_2 h_1 \log T}\right)^{2k} + (1+\varepsilon_2^k h_1^k \log^k T)T^{-\varepsilon_1}\right) \frac{\log T}{\sqrt{\log X}}.$$

Возьмем $\varepsilon_2 = \varepsilon_3/\sqrt{\log T}$, где $\varepsilon_3 > 0$ (более точно оно будет определено позднее). Так как $k = [c \log\log T]$, $A = c_1 k\sqrt{\log T}$, $h = A(\log T)^{-1}$, $h_1 = hk^{-1}$, то при $c_1 = 16\varepsilon_3^{-1}$

$$\frac{4}{\varepsilon_2 h_1 \log T} = \frac{4}{\varepsilon_3 c_1} = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_2 h_1 \log T}\right)^{2k} = 4^{-2k} \le 4\cdot 4^{-2c\log\log T} =$$

$$= \frac{4}{(\log T)^{2c\log 4}} \le \frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\log T}} = \frac{\varepsilon_2}{2} \quad \text{при} \quad c > c(\varepsilon$$

$$T^{\varepsilon_1}(1+\varepsilon_2^k h_1^k \log^k T) \le \frac{\varepsilon_2}{2} \quad \text{при} \quad T \ge T_0 > 0.$$

Поэтому при сделанных ограничениях

$$\Delta \le 2\varepsilon_2 \frac{\log T}{\sqrt{\log X}} = 2\varepsilon_3 \sqrt{\frac{\log T}{\log X}} = \frac{20\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}; \qquad I_2 \ll H h_1^{ka} \left(\frac{20\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{a/2}. \quad (1$$

Возвращаясь к (11) и помня, что постоянные в знаках $\ll$ и O абсо ные, находим из (13), (14), (18):

$$c_3 h_1^{ka} H \le c_4(\mu(E))^{1-a/2} h_1^{ka} H^{a/2} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^a + c_5 H h_1^{ka} \left(\frac{20\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{a/2};$$

$$c_4(\mu(E))^{1-a/2} H^{a/2} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^a \ge H\left(c_3 - c_5\left(\frac{20\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{a/2}\right). \quad (1$$

Теперь за ε_3 возьмем наибольшее положительное число с условием

$$c_5\left(\frac{20\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{a/2} < \frac{1}{2}c_3.$$

Из (19) последовательно получаем

$$c_4(\mu(E))^{1-a/2} H^{a/2} \left(\frac{\log T}{\sqrt{\log X}}\right)^a \ge \frac{1}{2} c_3 H;$$

$$\mu(E) \ge c_6 H(\log T)^{-a/(2-a)}, \quad c_6 = c_6(a;\varepsilon_1).$$

Так как

$$h = \frac{A}{\log T} = \frac{c_1[c\log\log T]}{\sqrt{\log T}},$$

то количество нулей $F(t)$ на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$c_7 H(\log T)^{1/2-a/(2-a)}(\log\log T)^{-1} \ge H(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

если только $a = \varepsilon, T \ge T_1(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VI

1. В 1914 г. Г.Харди [123] доказал, что на критической прямой лежит бесконечно много нулей $\zeta(s)$. Э.Ландау [145] писал по этому поводу: "К самым значительным успехам математики настоящего времени принадлежит заметка господина Г.Харди "О нулях функции $\zeta(s)$ Римана".

2. В 1918 г. Г.Харди и Д.Литтлвуд [125] доказали, что при $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $H \ge T^{1/4+\varepsilon}$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$.

3. Теорема 1.1 доказана Я.Мозером [55] в 1976 г. Настоящее изложение несколько отличается от оригинала.

4. Лемма 1.1 доказана в [37]; сведение специального вида тригонометрической суммы к более короткой и последующая оценка короткой суммы — оригинальная часть рассуждений при доказательстве утверждений о нулях $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой; все последующие уточнения опираются на это соображение.

5. Теорема 2.1 доказана в [37]; последующие уточнения см. в [137].

6. Теорема 2.2 доказана в [37]; последующие уточнения см. в [138]; подобное утверждение, но равномерное по T и k, доказано в [49].

7. В 1921 г. Г.Харди и Д.Литтлвуд [126] доказали, что при $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $H \ge T^{1/2+\varepsilon}$ в промежутке $(T, T+H)$ содержится не меньше, чем cH нулей нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$, $c = c(\varepsilon) > 0$. В 1942 г. А.Сельберг [162] доказал, что при условии теоремы Харди—Литтлвуда в промежутке $(T, T+H)$ содержится не меньше, чем $cH\log T$ нулей нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Из формулы Мангольдта о количестве $N(T)$ следует неулучшаемость результата Сельберга. В той же работе Сельберг высказал гипотезу о том, что его результат должен иметь место и при $H = T^{a+\varepsilon}$, где a — фиксированное положительное число, меньшее 0,5.

8. В 1974 г. Н.Левинсон [147] доказал, что по крайней мере треть всех нулей $\zeta(s)$ лежит на критической прямой.

9. В 1980 г. Я.Мозер [61] доказал, что промежуток $(T, T+H)$, $H \ge T^{5/12}\log^2 T$, $T \ge T_0 > 0$, содержит более cH нулей нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$; это — первый шаг в направлении доказательства гипотезы Сельберга.

10. Лемма 3.3 доказана А.Сельбергом [162] и вместе с леммой 3.4 из [41] составляет основу доказательства гипотезы Сельберга.

11. Теорема 3.1 доказана в [41]; утверждение этой теоремы и есть гипотеза Сельберга с $a = 27/82$.

12. Утверждения §4 доказаны в [42]. В работе [45] доказано, что теоремы 4.1 и 4.2 имеют место при условии, что $0,5Y \le T \le 0,5Y + Y_1$, где $Y^{11/12+\varepsilon} \le Y_1 \le 0,5Y$.

13. Функция $f(s)$ определена в [116]; там же исследованы ее нули правее прямой $\operatorname{Re} s = 1$; теорема 5.2 доказана в [23].

14. К изложенным в этой главе результатам примыкают работы [54, 71, 155].

ГЛАВА VII

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕНУЛЕВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Дзета-функция Римана является мероморфной функцией. П му все утверждения общей теории распределения значений меромор ных функций справедливы и для $\zeta(s)$. Наличие функционального ур нения риманова типа и эйлеровского произведения по простым числ для $\zeta(s)$ позволяют получить более точные результаты в подоб рода вопросах.

§ 1. Теорема об универсальности дзета-функции Римана

В этом параграфе доказывается теорема о том, что вертикал ные сдвиги $\zeta(s)$ приближают с любой точностью весьма общий кл аналитических функций. Именно этот смысл вкладывается в терм "универсальность".

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0 < r < \frac{1}{4}$. *Пусть* $g(s)$ — *аналитич ская функция на внутренности круга* $|s| \le r$, *непрерывная вплоть границы этого круга. Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $T = T($ *такое, что*

$$\max_{|s|\le r}\left|g(s) - \ln\zeta\left(s+\frac{3}{4}+iT\right)\right| < \varepsilon,$$

где под $\ln\zeta(s+it)$ *понимается ветвь* $\ln\zeta(s)$, *вещественная при* $s \in$ *и аналитически продолженная вдоль отрезков* $[2, 2+it], [2+it, \sigma+it]$

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение (лемму 1).

О п р е д е л е н и е 1. *Множество* Ω — множество всех на ров вещественных чисел, индексированных простыми числами, т.е. состоит из векторов вида $\bar\theta = (\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p, \ldots)$, где индекс p пробега все простые числа.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть M — конечное множество просты чисел. Для $s \in \mathbf{C}$, $\bar\theta \in \Omega$ полагаем

$$\zeta_M(s,\bar\theta) = \prod_{p\in M}\left(1 - e^{-2\pi i\theta_p}/p^s\right)^{-1}.$$

Л е м м а 1. *Пусть* $0 < r < \frac{1}{4}$, $g(s)$ *аналитична при* $|s| <$ *и непрерывна при* $|s| \le r$. *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *и* $y >$ *существует конечное множество* M *такое, что*

1) $M \supset \{p : p \le y\}$,

2) $\max\limits_{|s|\le r}\left|g(s) - \ln\zeta_M\left(s+\frac{3}{4}, \bar\theta_0\right)\right| < \varepsilon$, *где* $\bar\theta_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$ *и*

$$\ln\zeta_M(s,\bar\theta) = -\sum_{p\in M}\ln\left(1 - \frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^s}\right) = \sum_{p\in M}\left(\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^s} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2\cdot 2\pi i\theta_p}}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности $g(s)$ существует $\gamma > 1$ такое, что $\gamma^2 r < 1/4$ и

$$\max_{|s|\le r}\left|g(s) - g(s/\gamma^2)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Очевидно, что $g(s/\gamma^2)$, ограниченная на круг $|s| \le \gamma r$, принадлежит пространству Харди $\mathbf{H}_2^{(\gamma\varepsilon)}$ (см. определение II.2.1).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_k(s), \tag{2}$$

где

$$u_k(s) = \ln\left(1 - \frac{\exp(-2\pi i\theta_{p_k})}{p_k^{3/4+s}}\right)^{-1}, \tag{3}$$

p_k — k-е простое число, $\ln(1-z)^{-1} = z + \frac{z^2}{2} + \ldots$

Докажем, что для всякого $v(s) \in \mathbf{H}_2^{(\gamma\varepsilon)}$ найдется перестановка ряда (2) такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{j_k}(s) = v(s). \tag{4}$$

Если положить $v(s) = g(s)$, то в силу теоремы II.2.7 достаточно длинная частная сумма ряда (4) может быть взята в качестве $\ln\zeta_M(s+\frac{3}{4}, \bar\theta_0)$. Поэтому из существования равенства (4) для произвольной $v(s) \in \mathbf{H}_2^{(\gamma r)}$ следует справедливость леммы 1.

Зададим в $\mathbf{H}_2^{(R)}$ скалярное произведение функций $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ формулой

$$(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = \mathrm{Re}\int\!\!\int_{|s|\le R}\varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)}\,d\sigma dt.$$

Тем самым $\mathbf{H}_2^{(R)}$ превращается в вещественное гильбертово пространство.

Для доказательства существования перестановки ряда (2) такой, что выполняется соотношение (4), применим теорему II.6.1.

Пусть $R = \gamma\varepsilon$. Поскольку ряд (2) отличается на абсолютно сходящийся ряд от ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi ik/4}/p_k^{s+3/4}, \tag{5}$$

то достаточно проверить выполнение условий теоремы П.6.1 для ряда (5).

Во-первых, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\eta_k(s)\|^2 \ll \sum_{k=1}^{\infty}\left|p_k^{-3/4+R}\right|^2 < \infty,$$

так как $0 < R < 1/4$. Проверим, во-вторых, что для любой $\varphi(s) \in \in \mathbf{H}_2^{(R)}, \|\varphi(s)\| = 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\eta_k(s), \varphi(s)) \tag{6}$$

является сходящимся при некоторой перестановке его членов. Для этого достаточно установить, что

а) общий член ряда (6) стремится к нулю,

б) существуют два подряда ряда (6), сходящиеся к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно.

Имеем

$$(\eta_k(s), \varphi(s)) = \operatorname{Re}\iint\limits_{|s|\le R} e^{-2\pi ik/4}\cdot p^{-(s+3/4)}\overline{\varphi(s)}\,d\sigma dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left[e^{-2\pi ik/4}\iint\limits_{|s|\le R} p_k^{-(s+3/4)}\overline{\varphi(s)}\,d\sigma dt\right] = \operatorname{Re}\left[e^{-2\pi ik/4}\Delta(\ln p_k)\right], \tag{7}$$

где

$$\Delta(x) = \iint\limits_{|s|\le R} e^{-(s+3/4)x}\overline{\varphi(s)}\,d\sigma dt. \tag{8}$$

Пусть

$$\varphi(s) = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m s^m. \tag{9}$$

Выразим через α_m функцию $\Delta(x)$. Имеем

$$\Delta(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\iint\limits_{|s|\le R} e^{-sx}\overline{\varphi(s)}\,d\sigma dt =$$

$$= e^{-\frac{3}{4}x}\iint\limits_{|s|\le R}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-sx)^m}{m!}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m s^m\right)}\,d\sigma dt =$$

$$= e^{-\frac{3}{4}x}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1}x^{m_1}}{m_1!}\bar{\alpha}_{m_2}\iint\limits_{|s|\le R} s^{m_1}\bar{s}^{m_2}\,d\sigma dt.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_{|s|\le R} s^{m_1}\bar{s}^{m_2}\,d\sigma dt = 0 \qquad npu \qquad m_1 \ne m_2$$

и

$$\iint\limits_{|s|\le R} s^m\bar{s}^m\,d\sigma dt = \int_0^R\int_0^{2\pi}\rho^{2m}\cdot\rho\,d\rho d\theta = 2\pi\frac{R^{2m+2}}{2m+2}.$$

Поэтому

$$\Delta(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m\bar{\alpha}_m}{m!}\pi\frac{R^{2m+2}}{m+1} =$$

$$= \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m\bar{\alpha}_m}{(m+1)!}R^{2m} = \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(xR)^m, \tag{10}$$

где $\beta_m = (-1)^m R^m\bar{\alpha}_m/(m+1)$. Из формулы (9) заключаем, что

$$1 = \iint\limits_{|s|\le R}|\varphi(s)|^2\,d\sigma dt = \sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_m|^2\iint\limits_{|s|\le R}|s|^{2m}\,d\sigma dt = \pi R^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\alpha_m|^2 R^{2m}}{(m+1)}.$$

Поэтому

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty}|\beta_m|^2 \le 1, \tag{11}$$

а следовательно,

$$|\beta_m| \le 1. \tag{12}$$

Рассмотрим целую функцию $F(u) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}u^m$. Докажем, что при выполнении неравенств (11) и (12) для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность $u_1, u_2, \ldots \to +\infty$ такая, что

$$|F(u_j)| > e^{-(1+2\delta)u_j}. \tag{13}$$

Предположим противное. Тогда существует $\delta \in (0,1)$ и постоянная $A > 0$ такие, что $|F(u)| < Ae^{-(1+2\delta)u}$ для любых $u \ge 0$. Следовательно,

$$\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right| < Ae^{-\delta|u|} \qquad npu \qquad u \ge 0 \tag{14}$$

и, в силу неравенства (12),

$$\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right| < A_1 e^{-\delta|u|} \qquad npu \qquad u < 0.$$

В силу теоремы П.2.8 из неравенств (14) следует, что

$$e^{(1+\delta)u}F(u) = \int_{-3}^{3} f_0(\xi)e^{i\xi u}\,d\xi$$

для некоторой $f_0(\xi) \in L_2(-3,3)$. Но из неравенств (14) следует, $f_0(\xi)$ не может быть финитной функцией. Действительно,

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{(1+\delta)u}F(u)\right)e^{-i\xi u}du.$$

Следовательно, $f_0(\xi)$ является аналитической функцией в некото полосе около вещественной оси. Полученное противоречие доказыва что для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность $u_1, u_2, \ldots \to +$ такая, что выполняется неравенство (13). Положим $x_j = u_j/R$. определения следует, что

$$|\Delta(x_j)| > ce^{-\frac{3}{4}x_j}F(x_jR) \geq ce^{-\frac{3}{4}x_j}e^{-(1+2\delta)(x_jR)} = ce^{-x_j(\frac{3}{4}+R+2\delta R)}. \quad (15$$

Взяв $\delta_0 > 0$ достаточно малым, выведем из неравенства (15) с ществование последовательности $x_j \to +\infty$ такой, что

$$|\Delta(x_j)| > e^{-(1-\delta_0)x_j}. \quad (1$$

Приблизим теперь $\Delta(x)$ на отрезке $[x_j-1, x_j+1]$ многочленом. Име

$$\Delta(x) = \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(xR)^m.$$

Положим $N = [x_j] + 1$. В силу оценки (12) имеем

$$\sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(xR)^m \ll \sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{(xR)^m}{m!} \ll \frac{(xR)^{N^2}}{(N^2)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(xR)^m}{m!} \ll$$

$$\ll \frac{N^{N^2}}{(N^2)!}e^N \ll \frac{N^{N^2}}{(N^2/e)^{N^2}}e^N \ll e^{-2x_j}, \qquad \text{если} \quad x \in [x_j-1, x_j+1].$$

Далее, $\sum\limits_{m=0}^{N}\frac{\beta_m}{m!}(xR)^m \ll e^{xR}$. Аналогично,

$$\sum_{m=N^2+1}^{\infty}\frac{(\frac{-3}{4}x)^m}{m!} \ll e^{-2x_j} \qquad \text{для} \qquad x \in [x_j-1, x_j+1],$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{-3}{4}x)^m}{m!} \ll e^{\frac{3}{4}x}.$$

Поэтому $\Delta(x)$ приближается при $x \in [x_j-1, x_j+1]$ полиномом степени N^4 с точностью до $o(e^{-x_j})$. Из неравенства (16) следует, что

$$\max_{|x_i - x_j| \leq 1}|\Delta(x)| > e^{-(1-\delta_0)x_j}.$$

В силу теоремы II.2.9 из последнего неравенства получаем, что при достаточно больших x_j внутри отрезков $[x_j-1, x_j+1]$ найдутся отрезки τ_j длиной, большей чем $\frac{1}{100}N^{-8}$, во всех точках которых выполняется

одно из неравенств

$$|\mathrm{Re}\,\Delta(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x},$$
$$|\mathrm{Im}\,\Delta(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x}. \quad (17)$$

Предположим для определенности, что выбирается подряд ряда (6), расходящийся к $+\infty$, и на отрезке τ_j выполняется соотношение (17). Другие возможные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $\tau_j = [\alpha, \alpha+\beta]$. В силу теоремы II.5.1 в интервале $[e^\alpha, e^{\alpha+\beta}]$ содержится более чем

$$\int\limits_{e^\alpha}^{e^{\alpha+\beta}}\frac{dx}{\ln x} + O\left(e^{\alpha+\beta}e^{-c\sqrt{\alpha}}\right) \gg \frac{e^\alpha}{\alpha}\left((e^\beta - 1) + O\left(\frac{e^\beta}{e^{c\sqrt{\alpha}}}\right)\right)$$

простых чисел. Отобрав из них те p_k, для которых $k \equiv 0 \pmod 4$, получим вследствие соотношений (7) и (17)

$$\sum_{\substack{k \\ \ln p_k \in \tau_j \\ k \equiv 0 \pmod 4}} \mathrm{Re}\left[e^{-2\pi i\frac{k}{4}}\Delta(\ln p_k)\right] \gg e^{-(1-\delta_0)x_j}e^{x_j}\cdot\frac{1}{x_j} \gg e^{\frac{\delta_0}{2}x_j}.$$

Тем самым доказано существование подряда ряда (6), расходящегося к $+\infty$. Это доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon_1 \in (0,1]$. Выберем $\gamma > 1$ таким, чтобы выполнялось

а) $\gamma r < 1/4$,

б) $\max\limits_{|s|\leq r}|g(s) - g(s/\gamma)| < \varepsilon_1$. (18)

Положим $Q = \{p : p \leq z\}$. Оценим

$$J = \int\limits_T^{2T}\int\limits_E\int\left|\zeta\left(s+\frac{3}{4}+i\tau\right)\zeta_Q^{-1}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)-1\right|^2 d\sigma dt d\tau,$$

где $E = \{s : -\gamma r < \mathrm{Re}\,s \leq 2, -1 \leq \mathrm{Im}\,s \leq 1\}$. В силу следствия III.2.1 при $t \in [T-1, 2T+1], T \geq 2$ выполняется

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s} + \frac{T^{1-s}}{s-1} + O(T^{-\sigma}) = \sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s} + O(T^{-\sigma}).$$

Поэтому

$$J = \int\limits_E\int\left(\int\limits_T^{2T}\left|\zeta(s+\frac{3}{4}+i\tau)\zeta_Q^{-1}(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0})-1\right|^2 d\tau\right)d\sigma dt \ll$$

$$\ll \int\limits_{E+3/4}\int\left(\int\limits_T^{2T}\left|\zeta(s+i\tau)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar{0})-1\right|^2 d\tau\right)d\sigma dt \ll$$

$$\ll \int\int\int\limits_{E+3/4\,T}^{\;\;2T} \left|\left(\sum_{n\le T}\frac{1}{n^{s+i\tau}}\right)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)-1\right|^2 d\tau d\sigma dt +$$

$$+O\left(T^{-2(\frac34-\gamma r)}\max_{s\in E+3/4}\int\limits_T^{2T}|\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)|^2d\tau\right). \qquad (1$$

Имеем

$$T^{-2(\frac34-\gamma r)}\max_{s\in E+3/4}\int\limits_T^{2T}\left|\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)\right|^2 d\tau \le T^{2\gamma r-\frac12}\left|\zeta_Q\left(\frac34-\gamma r,\bar 0\right)\right|^2. \qquad (2$$

Далее, при $T>z$ выполняется

$$\left(\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}\right)\zeta_Q^{-1}(s,\bar 0)=1+\sum_{z<n\le z_1T}\frac{b_n}{n^s},$$

где $z_1=z^\varepsilon$ и $|b_n|\le\tau(n)$. Поэтому при $T>z$

$$\int\limits_T^{2T}\left|\left(\sum_{n\le T}\frac{1}{n^{s+i\tau}}\right)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)-1\right|^2d\tau=\int\limits_T^{2T}\left|\sum_{z<n\le z_1T}\frac{b_n}{n^s}\right|^2d\tau=$$

$$=T\sum_{z<n\le z_1T}\frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma}}+O\left(\sum_{0<n<m\le z_1T}\frac{|b_n||b_m|}{n^\sigma m^\sigma}\int\limits_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{i\tau}d\tau\right)\ll$$

$$\ll T\sum_{n>z}\frac{\tau^2(n)}{n^{2\sigma}}+\sum_{0<n<m<z_1T}\frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^\sigma}\cdot\frac{1}{|\ln(m/n)|}\ll$$

$$\ll Tz^{1-2\sigma+\varepsilon_1}+(z_1T)^{\varepsilon_1}\sum_{0<n<m\le z_1T}\frac{1}{(nm)^\sigma}\cdot\frac{1}{|\ln(m/n)|} \qquad (21)$$

(так как $\tau(n)\ll n^\varepsilon$).

Далее,

$$\sum_{1\le n<m\le z_1T}\frac{1}{m^\sigma n^\sigma}\cdot\frac{1}{\ln(m/n)}=\sum_{1\le n<m/2\le z_1T}\frac{1}{m^\sigma n^\sigma}\cdot\frac{1}{\ln(m/n)}+$$

$$+\sum_{1\le m/2\le n<m\le z_1T}\frac{1}{m^\sigma n^\sigma}\cdot\frac{1}{\ln(m/n)}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{n\le z_1T}\frac{1}{n^\sigma}\right)^2+\sum_{1\le m\le z_1T}\frac{1}{m^2\sigma}m\ln(z_1T)\ll$$

$$\ll(z_1T)^{2-2\sigma}+\ln^2(z_1T)+\sum_{1\le m\le z_1T}\frac{1}{m^{2}\sigma}m\ln(z_1T)\ll$$

$$\ll\ln^2(z_1T)\left((z_1T)^{2-2\sigma}+1\right). \qquad (22)$$

Из оценок (21) и (22) получим, что для произвольного $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int\int\int\limits_{E+3/4\,T}^{\;\;2T}\left|\left(\sum_{n\le T}\frac{1}{n^{\sigma+i\tau}}\right)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)-1\right|^2d\tau d\sigma dt\ll z^{2\gamma r-\frac12+\varepsilon}. \qquad (23)$$

Теперь из оценок (19), (20) и (23) заключаем, что для всякого $\varepsilon_2>0$ найдется $z_0=z_0(\varepsilon_2)$ такое, что

$$J\ll\varepsilon_2^4T, \qquad (24)$$

если только $z>z_0$ и $T>T_0(\varepsilon_2,z)$.

Положим

$$A_T=\left\{\tau:\tau\in[T,2T],\int\int\limits_{E+3/4}\left|\zeta(s+i\tau)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)-1\right|^2d\sigma dt<\varepsilon_2^2\right\}.$$

Из соотношения (24) следует, что при достаточно больших z и $T>$ $>T_0(\varepsilon_2,z)$ выполняется

$$\operatorname{mes}A_T>(1-\varepsilon_2)T. \qquad (25)$$

Из теоремы II.2.7 получаем, что для $\tau\in A_T$ выполняется

$$\max_{|s|\le r}\left|\zeta(s+i\tau)\zeta_Q^{-1}(s+i\tau,\bar 0)-1\right|<c(\gamma)\varepsilon_2. \qquad (26)$$

Будем считать, что ε достаточно мало. Тогда из неравенства (26) следует, что

$$\max_{|s|\le r}\left|\ln\zeta\left(s+\frac34+i\tau\right)-\ln\zeta_Q\left(s+\frac34+i\tau,\bar 0\right)\right|<2c(\gamma)\varepsilon_2, \qquad (27)$$

если только $\tau\in A_T$.

Воспользуемся теперь леммой 1. В силу леммы найдется последовательность конечных множеств простых чисел $M_1\subset M_2\subset\ldots$ такая, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ содержит все простые числа и

$$\lim_{k\to\infty}\max_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac34;\bar\theta_0\right)-g\left(\frac{s}{\gamma}\right)\right|=0. \qquad (28)$$

В силу непрерывности $\zeta_{M_k}\left(s+\frac34,\bar\theta_0\right)$ для всякого $\varepsilon_1>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из выполнения для всех $p\in M_k$ неравенств

$$\|\theta_p-\theta_p^{(0)}\|<\delta \qquad (29)$$

следует выполнение неравенства

$$\max_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac34;\bar\theta\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac34;\bar\theta_0\right)\right|<\varepsilon. \qquad (30)$$

Положим $V_T = \left\{\tau : \tau \in [T, 2T], \left(\tau \frac{\ln p}{2\pi} - \theta_p^{(0)}\right) < \delta\right\}$. Имеем

$$\frac{1}{T}\int\limits_{V_T}\iint\limits_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 d\sigma dt d\tau =$$

$$=\iint\limits_{|s|\le\gamma r}\frac{1}{T}\int\limits_{V_T}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 d\tau d\sigma dt =$$

$$=\iint\limits_{|s|\le\gamma r}\frac{1}{T}\int\limits_{V_T}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}(\tau)\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}(\tau)\right)\right|^2 d\tau d\sigma dt, \quad (31)$$

где $\bar{\theta}(\tau) = \left(\tau\frac{\ln 2}{2\pi}, \tau\frac{\ln 3}{2\pi}, \ldots\right)$. В силу теоремы Кронекера об аппроксимациях (теорема П.8.1) кривая $\gamma(\tau) = \left(\tau\frac{\ln 2}{2\pi}, \ldots, \tau\frac{\ln p_N}{2}\right)$ равномерно распределена по mod 1 в пространстве $\mathbb{R}^N$. Применяя теорему П.8.3, получим, что соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{V_T}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}(\tau)\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}(\tau)\right)\right|^2 d\tau =$$

$$=\int\limits_{\mathcal{D}}\!\!\ldots\!\!\int\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)\right|^2 d\mu_\Omega, \quad (32)$$

где $\mathcal{D}$ — подобласть единичного куба, задаваемая неравенствами (29) для $p \in M_k$, выполняется равномерно по s, если $|s| \le \gamma r$.

Из определения $\zeta_M(s,\bar{\theta})$ следует, что при $Q \supset M_k$

$$\zeta_Q(s,\bar{\theta}) = \zeta_{M_k}(s,\bar{\theta})\zeta_{Q\setminus M_k}(s,\bar{\theta}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\!\!\ldots\!\!\int\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)\right|^2 d\mu_\Omega =$$

$$=\int\limits_{\mathcal{D}}\!\!\ldots\!\!\int\left|\ln\zeta_{Q\setminus M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)\right|^2 d\mu_\Omega =$$

$$= \operatorname{mes}\mathcal{D}\int\limits_0^1\!\ldots\!\int\limits_0^1\left|\ln\zeta_{Q\setminus M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)\right|^2 d\mu_\Omega.$$

Поскольку

$$\ln\zeta_{Q\setminus M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right) = \sum_{p\in Q\setminus M_k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^{n(\frac{3}{4}+s)}}\right),$$

то

$$\int\limits_0^1\!\ldots\!\int\limits_0^1\left|\ln\zeta_{Q\setminus M_k}\left(s+\frac{3}{4},\bar{\theta}\right)\right|^2 d\mu_\Omega = \sum_{p\in Q\setminus M_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{p^{2(\frac{3}{4}+\operatorname{Re}s)}}.$$

Если M_k содержит все простые числа, меньшие, чем y_k, то

$$\sum_{p\in Q\setminus M_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{p^{2(\frac{3}{4}+\operatorname{Re}s)}} \ll y_k^{2\gamma r-1/2}.$$

Из соотношений (31) и (32) теперь следует, что при $T > T_1(M_k, Q)$

$$\frac{1}{T}\int\limits_{V_T}\iint\limits_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 d\sigma dt d\tau \ll$$

$$\ll \operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot y_k^{2\gamma r-1/2}. \quad (33)$$

Применяя опять теорему Кронекера (теорема П.8.1), получим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{mes}V_T = \operatorname{mes}\mathcal{D}. \quad (34)$$

Из оценок (33) и (34) получаем, что при y_k, достаточно большом, и $T\to\infty$

$$\operatorname{mes}\left\{\tau : \tau\in V_T, \iint\limits_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 d\sigma dt < y_k^{\gamma r-1/4}\right\} > \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot T.$$

Применяя теорему П.8.3, отсюда получим, что

$$\operatorname{mes}\left\{\tau : \tau\in V_T, \max_{|s|\le\gamma r}\left|\ln\zeta_Q\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\zeta_{M_k}\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 < y_k^{\frac{1}{2}(\gamma r-\frac{1}{4})}\right\} > \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot T. \quad (35)$$

Если теперь взять $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\operatorname{mes}\mathcal{D}$, то в силу неравенства (25) $\operatorname{mes}(A_T \cap V_T) > 0$ и для $\tau \in A_T \cap V_T$ из соотношений (28),(30),(35) и (27) следует утверждение теоремы 1.

Т е о р е м а 2 (об универсальности дзета-функции Римана). *Пусть $0 < r < 1/4$. Пусть $f(s)$ — функция, аналитическая внутри круга $|s| \le r$ и непрерывная вплоть до границы этого круга. Если $f(s) \ne 0$ при $|s| < r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что*

$$\max_{|s|\le r}\left|f(s)-\zeta\left(s+\frac{3}{4}+iT\right)\right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Пусть $\gamma > 1$ таково, что

$\gamma r < 1/4$ и $\max\limits_{|s|\le r}|f(s) - f(s/\gamma)| < \varepsilon_1$. В силу теоремы 1 для задан $\varepsilon \in (0,1)$ найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s|\le r}\left|\ln\zeta(s+iT) - g\left(\frac{s}{\gamma}\right)\right| < \varepsilon,$$

где $f(s) = \exp(g(s))$. Тогда

$$\max_{|s|\le r}\left|\zeta(s+iT) - f\left(\frac{s}{\gamma}\right)\right| = \max_{|s|\le r}\left|\zeta(s+iT) - e^{g(s/\gamma)}\right| =$$

$$= \max_{|s|\le r}\left|e^{g(s/\gamma)}\right|\cdot\left|e^{\ln\zeta(s+iT)-g(s/\gamma)} - 1\right| \ll \max_{|s|\le r}\left|f\left(\frac{s}{\gamma}\right)\right|\varepsilon.$$

В силу произвольности ε_1 и ε получаем утверждение теоремы.

§ 2. Дифференциальная независимость $\zeta(s)$

В этом параграфе рассматривается вопрос о возможных функциональных и дифференциальных соотношениях для $\zeta(s)$. Этот вопрос восходит к Д.Гильберту. Подход, излагаемый здесь, основан на применении теорем §1 этой главы.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ задается формулой*

$$\gamma(t) = (\ln\zeta(\sigma+it), [\ln\zeta(\sigma+it)]', \ldots, [\ln\zeta(\sigma+it)]^{(N-1)}),$$

где σ фиксировано, $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$. Тогда $\gamma(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathbb{C}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задан вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$. Пусть $r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\min(\sigma - \frac{1}{2}, 1-\sigma)$. Вследствие теоремы 1.1 произвольную функцию $g(s)$, аналитическую в окрестности круга радиуса r, можно с любой точностью приблизить функцией $\ln\zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right)$ за счет выбора τ. Положим

$$g(s) = b_0 + \frac{1}{1!}b_1 s + \ldots + \frac{1}{(N-1)!}b_{N-1}s^{N-1}.$$

Тогда для $k = 0, \ldots, N-1$ $g^{(k)}(0) = b_k$. Поскольку для произвольной аналитической функции $f(s)$ в круге $|s| \le r$ выполняется равенство

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(s)}{s^{k+1}}ds, \qquad (1)$$

где Γ — произвольная окружность радиуса, меньшего, чем r, то теорема 1 следует из возможности приближения $g(s)$ с любой точностью функцией $\ln\zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right)$ на круге $|s| \le r$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ задается формулой*

$$\gamma(t) = (\zeta(\sigma+it), \zeta'(\sigma+it), \ldots, \zeta^{(N-1)}(\sigma+it)),$$

где $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$ фиксировано. Тогда $\gamma(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathbb{C}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукцией по m докажем, что для любого набора чисел $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}, a_0 \ne 0$, найдутся числа $b_0, b_1, \ldots, b_m$

такие, что

$$e^{b_0+b_1 z+\ldots+b_m z^m} \equiv a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \ldots + \frac{a_m}{m!}z^m \pmod{z^{m+1}}.$$

Утверждение справедливо при $m = 0$, так как можно положить $b_0 = \ln a_0$. Если

$$e^{b_0+b_1 z+\ldots+b_m z^m} \equiv a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \ldots + \frac{a_m}{m!}z^m + \alpha z^{m+1} \pmod{z^{m+2}},$$

то

$$e^{b_0+b_1 z+\ldots+b_m z^m+\beta z^{m+1}} \equiv$$

$$\equiv \left(a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \ldots + \frac{a_m}{m!}z^m + \alpha z^{m+1}\right)\left(1 + \beta z^{m+1}\right) \left(\operatorname{mod} z^{m+2}\right).$$

Пусть b_{m+1} является решением уравнения относительно β,

$$\beta a_0 + \alpha = \frac{a_{m+1}}{(m+1)!},$$

которое всегда разрешимо в силу условия $a_0 \ne 0$. Тогда

$$e^{b_0+b_1 z+\ldots+b_{m+1}z^{m+1}} \equiv a_0 + \frac{a_1}{1!}z + \ldots + \frac{a_{m+1}}{(m+1)!}z^{m+1} \pmod{z^{m+2}}.$$

Положим

$$f(s) = e^{b_0+b_1 s+\ldots+b_{N-1}s^{N-1}} \equiv a_0 + a_1\frac{z}{1!} + \ldots + a_{N-1}\frac{z^{N-1}}{(N-1)!} \pmod{s^N}.$$

В силу теоремы 1.2 найдется последовательность $\tau_j \to \infty$ такая, что

$$\max_{|s|\le r}\left|\zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau_j\right) - f(s)\right| \to 0,$$

где $r \in (0, \frac{1}{4})$ — некоторое фиксированное число. Вследствие соотношения (1) для $k = 0, \ldots, N-1$ выполняется

$$\max_{|s|\le r-\delta}\left|\zeta^{(k)}\left(s + \frac{3}{4} + i\tau_j\right) - f^{(k)}(s)\right| \to 0$$

при произвольном фиксированном $\delta > 0$. Это доказывает теорему 2.

Т е о р е м а 3. *Если тождественно по $s \in \mathbb{C}$ выполняется равенство*

$$F\left(\zeta(s), \zeta'(s), \ldots, \zeta^{(N-1)}(s)\right) = 0, \qquad (2)$$

где $F(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$ — непрерывная функция, то F равна нулю тождественно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть $F(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}) \not\equiv 0$. Тогда найдется точка $\bar{a} \in \mathbb{C}^N$ такая, что $F(\bar{a}) \ne 0$. Вследствие непрерывности F найдутся открытая окрестность U точки $\bar{a}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для $\bar{z} \in U$ выполняется

$$|F(\bar{z})| > \varepsilon. \qquad (3)$$

Выбрав какое-либо $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1)$, применим теорему 2.

Поскольку кривая

$$\gamma(t) = (\zeta(\sigma+it), \zeta'(\sigma+it), \ldots, \zeta^{(N-1)}(\sigma+it))$$

всюду плотна в $\mathbf{C}^N$, то найдутся значения t, для которых $\gamma(t) \in$
Тем самым получим противоречие между соотношениями (2) и (3
Теорема 3 доказана.

Утверждение теоремы 3 допускает некоторое усиление.

Т е р е м а 4. *Если $F_0(\bar{z}), F_1(\bar{z}), ..., F_m(\bar{z})$ — непрерывные функци определенные на $\mathbf{C}^N$, не все равные нулю тождественно, то*

$$s^m F_m\left(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s)\right) + s^{m-1} F_{m-1}\left(\zeta(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s)\right) + ...$$
$$... + F_0\left(\zeta(s), ..., \zeta^{(N-1)}(s)\right) \neq$$

при некотором $s \in \mathbf{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что функц $F_0(z_1, ..., z_{N-1})$ не равна нулю тождественно. Тогда найдутся $\varepsilon >$ и некоторое ограниченное открытое множество $U \subset \mathbf{C}^N$ такие, ч для $\bar{z} \in U$ выполняется $|F(\bar{z})| > \varepsilon$.

Пусть m_0 — максимальный индекс такой, что

$$\sup_{\bar{z} \in U} |F_{m_0}(\bar{z})| \neq 0.$$

Если $m_0 = 0$, то утверждение теоремы 4 следует из предыдущей ремы. Если $m_0 > 0$, то, взяв окрестность $V \subset U$ такую, что

$$\inf_{\bar{z} \in V} |F_{m_0}(\bar{z})| > \varepsilon_1$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$, воспользуемся теоремой 1.2. Пусть последовательность $t_j \to \infty$ такова, что

$$\gamma(t_j) = (\zeta(\sigma + it_j), \zeta'(\sigma + it_j), ..., \zeta^{(N-1)}(\sigma + it_j)) \in V.$$

Тогда

$$|(\sigma + it_j)^{m_0} F_{m_0}(\gamma(t_j)) + ... + F_0(\gamma(t_j))| \to \infty$$

при $t_j \to \infty$. Это доказывает теорему.

§ 3. Распределение ненулевых значений L-функций Дирихле

В настоящем параграфе обобщается теорема об универсальност дзета-функции Римана на L-функции Дирихле. Схема доказательств теоремы об универсальности $\zeta(s)$ сохраняется, хотя и усложняется ническими деталями.

Пусть множество Ω задается определением 1.1.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть

$$F(s) = \prod_p f_p(p^{-s}),$$

где $f_p(z)$ — рациональная функция переменной z. Если M — конечное

множество простых чисел, $\bar{\theta} = (\theta_2, \theta_3, \ldots) \in \Omega$, то по определению

$$F_M(s, \bar{\theta}) = \prod_{p \in M} f_p\left(p^{-s} e^{-2\pi i \theta_p}\right).$$

1. Вспомогательные леммы.

Л е м м а 1. *Пусть аналитические функции $F_1(s), \ldots, F_n(s)$ представляются в области $\mathrm{Re}\, s > 1$ произведениями*

$$F_k(s) = \prod_p f_{p,k}(p^{-s}),$$

где $f_{p,k}(z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{p,k}^{(m)} z^m$ — рациональные функции z, не имеющие полюсов при $|z| < 1$, такие, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\left|a_{p,k}^{(m)}\right| \leq c(\varepsilon) p^{m\varepsilon}$$

равномерно по p. Пусть каждая $F_k(s)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ за исключением, быть может, конечного числа полюсов, лежащих на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$, имеет там конечный порядок в смысле определения П.2.2 и

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |F_k(\alpha + it)|^2\, dt$$

ограничено при $T \to \infty$ для всех $\alpha \in (1/2, 1)$. Пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ — конечные множества простых чисел такие, что

1) *$\cup M_j$ содержит все простые числа,*

2) *$F_{k,M_j}(s, \bar{\theta}_j) \to f_k(s)$ равномерно по s при $|s - 3/4| \leq r < 1/4$, $k = 1, \ldots, n$.*

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $A \subset \mathbf{R}$ такое, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{|s-3/4| \leq r-\varepsilon} |F_k(s + it) - f_k(s)| < \varepsilon$$

для любого $t \in A$ и

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t :\ t \in A, 0 < t < T\}}{T} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $F_{k,M_j}(s, \bar{\theta})$ непрерывно зависит от переменных θ_p для индексов $p \in M_j$. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta \in (0, 1/4)$ такое, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left|F_{k,M_j}(s, \bar{\theta}^{(1)}) - F_{k,M_j}(s, \bar{\theta}^{(2)})\right| < \varepsilon$$

при всяком s, $|s - 3/4| \leq r$, если только $|\theta_p^{(1)} - \theta_p^{(2)}| < \delta$ для всех $p \in M_j$. Если j настолько велико, что

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{|s-3/4| \leq r} \left|F_{k,M_j}(s, \bar{\theta}_j) - f_k(s)\right| < \varepsilon,$$

то

$$\max_{1\le k\le n}\max_{|s-3/4|\le r}\left|F_{k,M_j}(s,\bar\theta)-f_k(s)\right|<\varepsilon$$

при

$$|\theta_p-\theta_{j,p}|<\delta=\delta(j,\varepsilon).$$

Из определения 1 следует, что если

$$\bar\theta'=\left(\tau\frac{\ln 2}{2\pi},\tau\frac{\ln 3}{2\pi},\dots,\tau\frac{\ln p}{2\pi},\dots\right),$$

то

$$F_{k,M}(s+i\tau,\bar 0)=F_{k,M}(s,\bar\theta').$$

Поэтому, если для всех $p\in M_j$ выполняются неравенства

$$\left\|\tau\frac{\ln p}{2\pi}-\theta_{j,p}\right\|<\delta, \qquad (2)$$

то вследствие неравенства (1) имеем

$$\max_{1\le k\le n}\max_{|s-3/4|\le r}\left|F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar 0)-f_k(s)\right|<2\varepsilon. \qquad (3)$$

Оценим сверху при $T\to\infty$ величину

$$B=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_1}\iint_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar 0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau, \qquad (4)$$

где $\int_{T_0}^{T_1}\dots$ обозначает интегрирование по тем $\tau\in(T_0,T_1)$, для котор выполняется неравенство (2), T_0 таково, что в области $\mathrm{Re}\,s>1/2$ $\mathrm{Im}\,s>T_0-1$ все функции $F_0(s),F_1(s),\dots,F_n(s)$ регулярны. Вследстви неравенства Коши имеем

$$A\le 2S_1+2S_2, \qquad (5)$$

где

$$S_1=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_1}\iint_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_{k,Q}(s+i\tau,\bar 0)-F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar 0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau, \qquad (6)$$

$$S_2=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_1}\iint_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,Q}(s+i\tau,\bar 0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau. \qquad (7)$$

Пусть $Q=\{p:\ p\le z\}$. Будем считать, что $z>\max_{p\in M_j}p$. Оценим S_1. Имеем вследствие равенства (6)

$$S_1=\iint_{|s-3/4|\le r}\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n}\int_{T_0}^{T_1}\left|F_{k,Q}(s,\bar\theta(\tau))-F_{k,M_j}(s,\bar\theta(\tau))\right|^2 d\tau\,d\sigma\,dt,$$

где

$$\bar\theta(\tau)=\left(\tau\frac{\ln 2}{2\pi},\tau\frac{\ln 3}{2\pi},\dots\right)$$

В силу теоремы II.8.1 кривая $\gamma(\tau)=\left(\tau\frac{\ln 2}{2\pi},\tau\frac{\ln 3}{2\pi},\dots,\tau\frac{\ln p_{\pi(z)}}{2\pi},\dots\right)$ равномерна по mod 1 в единичном кубе пространства $\mathrm{R}^{\pi(z)}$. Поскольку семейство функций $\left|F_{k,Q}(s,\bar\theta(\tau))-F_{k,M_j}(s,\bar\theta(\tau))\right|^2$, зависящих от параметра s, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то в силу теоремы II.8.3 равномерно по параметру s, $|s-3/4|\le r<1/4$, выполняется

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_1}\left|F_{k,Q}(s,\bar\theta(\tau))-F_{k,M_j}(s,\bar\theta(\tau))\right|^2 d\tau=$$

$$=\int\dots\int_{\mathcal D}\left|F_{k,Q}(s,\bar\theta)-F_{k,M_j}(s,\bar\theta)\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}, \qquad (8)$$

где область интегрирования определяется неравенствами (2).

Далее, в силу определения $F_{k,M}(s,\bar\theta)$, имеем

$$F_{k,Q}(s,\bar\theta)=F_{k,M_j}(s,\bar\theta)F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta). \qquad (9)$$

Поэтому в силу неравенств (1) и определения $\mathcal D$

$$\int\dots\int_{\mathcal D}\left|F_{k,Q}(s,\bar\theta)-F_{k,M_j}(s,\bar\theta)\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}=$$

$$=\int\dots\int_{\mathcal D}\left|F_{k,M_j}(s,\bar\theta)\right|^2\left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}\le$$

$$\le\left[\max_{|s-3/4|\le r}|f_k(s)|+2\varepsilon\right]^2\int\dots\int_{\mathcal D}\left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}. \qquad (10)$$

Поскольку область $\mathcal D$ определена ограничениями лишь на те θ_p, индексы которых входят в множество простых чисел M_j, то

$$\int\dots\int_{\mathcal D}\left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}=$$

$$=\mathrm{mes}\,\mathcal D\int_0^1\dots\int_0^1\left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}. \qquad (11)$$

Представляя $F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)$ в виде ряда Дирихле и интегрируя по $\bar\theta$, получим

$$\int_0^1\dots\int_0^1\left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\dots d\theta_{p_{\pi(z)}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|b_m|^2}{m^{2\mathrm{Re}\,s}},$$

где b_m — коэффициенты Дирихле функции $F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1$. В си условий леммы, наложенных на коэффициенты Дирихле сомножи эйлеровского произведения функций $F_k(s)$, выполняется неравенство

$$b_m \ll m^{\varepsilon_1},$$

где ε_1 — произвольное положительное число. Поэтому если M_j соде жит все простые числа, меньшие, чем y_j, то

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \left|F_{k,Q\setminus M_j}(s,\bar\theta)-1\right|^2 d\theta_2\,d\theta_3\ldots d\theta_{p_{\pi(s)}} \ll$$

$$\ll \sum_{m\ge y_j}\frac{m^{\varepsilon_1}}{m^{2(3/4-r)}} \ll y_j^{2r-\frac12+\varepsilon_1}. \qquad \text{(1}$$

Из неравенств (12), (11), (10), (8) и (7) следует, что

$$S_1 \ll n\left[\max_{1\le k\le n}\max_{|s-3/4|\le r}|f_k(s)|+2\varepsilon\right]^2\cdot \operatorname{mes}\mathcal{D}\, y^{2r-\frac12+\varepsilon_1}.$$

Отсюда следует, что при $j>j_0$ и достаточно больших T выполняетс

$$S_1=\int_{T_0}^{T_1}\int\!\!\int_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)-F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau <$$

$$<\frac14 T\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot\varepsilon^2. \qquad \text{(1}$$

Оценим теперь при фиксированном j, $j>j_0$, величину S_2. Име

$$S_2=\frac1T\int_{T_0}^{T_1}\int\!\!\int_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau\le$$

$$\le\int\!\!\int_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\frac1T\int_{T_0}^{T_1}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\tau\,d\sigma\,dt. \qquad \text{(1}$$

Пусть $z_1,\ldots,z_N$ — все полюсы функций $F_1(s),F_2(s),\ldots,F_n(s)$. Т как функция $1-2^{\rho-s}$ при $s=\rho$ обращается в нуль, то подходящ степень в функции

$$\varphi(s)=\prod_{m=1}^{N}\left(1-2^{z_m-s}\right)$$

будет иметь в точках $z_1,z_2,\ldots,z_N$ нули большей кратнос чем кратность полюсов каждой из функций $F_1(s),F_2(s),\ldots,F_n(s)$. При

$1/2<\mathrm{Re}\,s\le 3/4+\varepsilon$ будет выполняться $\varphi(s)\gg 1$. Поэтому

$$\frac1T\int_{T_0}^{T}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\tau\ll$$

$$\ll\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\varphi^l(s+i\tau)F_k(s+i\tau)-\varphi^l(s+i\tau)F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\tau.$$

Применим теорему II.2.10. В силу этой теоремы равномерно по s из области $|s-3/4|\le r$ выполняется

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\varphi^l(s+i\tau)F_k(s+i\tau)-\varphi^l(s+i\tau)F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\tau=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|C_m|^2}{m^{2\mathrm{Re}\,s}}, \qquad (15)$$

где C_m — коэффициенты Дирихле функции $\varphi^l(s)\left(F_k(s)-F_{k,Q}(s,\bar0)\right)$.

Из соотношения (15) следует, что при достаточно большом z и $T>T(z)$ будет выполняться

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\varphi^l(s+i\tau)F_k(s+i\tau)-\varphi^l(s+i\tau)F_{k,Q}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\tau\le$$

$$\le\frac18\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot\varepsilon^2. \qquad (16)$$

Из неравенств (14), (15) и (16) выводим, что при z и T, достаточно больших, выполняется

$$S_2\le\frac14\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot\varepsilon^2. \qquad (17)$$

Из определения S_1 и S_2, неравенств (13) и (17) следует, что при соответствующем j и T, достаточно большом,

$$\int_{T_0}^{T_1}\int\!\!\int_{|s-3/4|\le r}\sum_{k=1}^{n}\left|F_k(s+i\tau)-F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar0)\right|^2 d\sigma\,dt\,d\tau<$$

$$<T\operatorname{mes}\mathcal{D}\cdot\varepsilon^2. \qquad (18)$$

В силу определения $\int'\ldots d\tau$ и линейной независимости логарифмов простых чисел над полем рациональных чисел, применяя теорему II.8.1, получим

$$\lim_{T\to\infty}\frac1T\int_{T_0}^{T_1}d\tau=\operatorname{mes}\mathcal{D}. \qquad (19)$$

Из неравенств (18) и (19) заключаем, что при достаточно большом T существует множество $Y \subset [T_0, T]$, $\operatorname{mes} Y > \frac{1}{4} \operatorname{mes} \mathcal{D} \cdot T$, для всех точек которого выполнены неравенства (2) и неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{|s-3/4|\le r} \left|F_k(s+i\tau) - F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar{0})\right|^2 d\sigma\, dt < 2\varepsilon^2. \qquad (20)$$

Вследствие (1) имеем для $\tau \in Y$

$$\left|F_{k,M_j}(s+i\tau,\bar{0}) - f_k(s)\right| < 2\varepsilon.$$

В силу неравенства (20) теперь имеем при $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\iint\limits_{|s-3/4|\le r} |F_k(s+i\tau) - f_k(s)|^2\, d\sigma\, dt < 8\varepsilon^2.$$

Вследствие произвольности ε, применив теорему II.2.7, получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $0 < r < 1/4$; пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле, $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$ — функции, аналитические внутри круга $|s| \le r$, непрерывные вплоть до границы круга, такие, что $\min\limits_{1\le j\le n} \min\limits_{|s|\le r} |f_j(s)| > 0$. Тогда для произвольных $\varepsilon > 0$ и $y > 0$ существует конечное множество простых чисел M, содержащее все $p \le y$, такое, что*

$$\max_{1\le j\le n} \max_{|s|\le r} \left| f_j(s) - L_M\left(s + \frac{3}{4}, \chi_j, \bar{\theta}_0\right)\right| < \varepsilon,$$

где $\bar{\theta}_0 \in \Omega$ зависит лишь от $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$.

Доказательство. В силу непрерывности $f_j(s)$ существует $\gamma > 1$ такое, что $\gamma^2 r < 1/4$ и для $j = 1, \ldots, n$ выполняется

$$\max_{|s|\le r} \left|f_j(s) - f_j(s/\gamma^2)\right| < \varepsilon. \qquad (21)$$

Поскольку каждая $f_j(s)$ не имеет нулей в области $|s| \le r$, то существуют функции $g_j(s)$, аналитические в области $|s| < \gamma^2 r$, такие, что

$$f_j(s/\gamma^2) = e^{g_j(s)} \qquad \text{при} \qquad |s| < \gamma^2 r.$$

Ограничение каждой $g_j(s)$ на круг $|s| < \gamma r$ будет принадлежать $\mathrm{H}_2^{(\gamma r)}$ (см. определение II.2.1). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{u}_k(s), \qquad (22)$$

где

$$\vec{u}_k(s) \in \underbrace{\mathrm{H}_2^{(\gamma r)} \times \ldots \times \mathrm{H}_2^{(\gamma r)}}_{n}$$

и определяется формулой

$$\vec{u}_k(s) = \left(\ln\left(1 - \frac{\chi_1(p_k)e^{-2\pi i\rho_k}}{p_k^{s+3/4}}\right)^{-1}, \ldots, \ln\left(1 - \frac{\chi_n(p_k)e^{-2\pi i\rho_k}}{p_k^{s+3/4}}\right)^{-1}\right). \qquad (23)$$

Вещественные числа ρ_k определяются следующим образом: если P_a — множество простых чисел таких, что $p \equiv a(\operatorname{mod} \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ есть произведение модулей характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, то, занумеровав простые числа из P_a в порядке возрастания, положим $\rho_k = \rho(p_k) = l/4$, где l — номер p_k в соответствующем множестве P_a (в том P_a, к которому принадлежит p_k).

Докажем, что для всякого набора

$$(v_1(s), \ldots, v_n(s)) \in \mathrm{H}_2^{(\gamma r)} \times \ldots \times \mathrm{H}_2^{(\gamma r)}$$

найдется перестановка ряда (22) такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{u}_{j_k}(s) = (v_1(s), \ldots, v_n(s)). \qquad (24)$$

Поскольку в равенстве (24) можно положить $v_j(s) = g_j(s)$, то, взяв достаточно длинную частную сумму переставленного ряда, получим утверждение леммы, так как в силу теоремы II.2.7 сходимость в $\mathrm{H}_2^{(\gamma r)}$ влечет за собой равномерную сходимость функций на области $|s| \le r$.

Для доказательства существования перестановки ряда (22), для которой выполняется равенство (24), применим теорему II.6.1.

Если в $\mathrm{H}_2^{(R)}$ задать скалярное произведение функций $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ формулой

$$(\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = \operatorname{Re} \iint\limits_{|s|\le R} \varphi_1(s)\bar{\varphi}_2(s)\, d\sigma\, dt,$$

то $\mathrm{H}_2^{(R)}$ можно рассматривать как вещественное гильбертово пространство. Теорему II.6.1 будем применять к $\mathrm{H} = \underbrace{\mathrm{H}_2^{(\gamma r)} \times \ldots \times \mathrm{H}_2^{(\gamma r)}}_{n}$, рассматриваемому как вещественное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение двух наборов $\vec{\varphi} = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))$ и $\vec{\psi} = (\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))$ задается формулой

$$\left(\vec{\varphi}, \vec{\psi}\right) = \operatorname{Re} \iint\limits_{|s|\le \gamma r} \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(s)\bar{\psi}_l(s)\, d\sigma\, dt.$$

Положим $R = \gamma r$. Поскольку ряд (22) отличается на абсолютно сходящийся ряд от ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vec{\eta}_k(s), \qquad (25)$$

где

$$\vec{\eta}_k(s) = \left(\frac{\chi_1(p_k)e^{-2\pi i\rho_k}}{p_k^{s+3/4}}, \ldots, \frac{\chi_n(p_k)e^{-2\pi i\rho_k}}{p_k^{s+3/4}} \right),$$

то достаточно проверить выполнение условий теоремы П.6.1 для ряда (25). Имеем, во-первых,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\vec{\eta}_k(s)\|^2 \ll \sum_{k=1}^{\infty} n \left| p_k^{-3/4+R} \right|^2 < \infty,$$

так как $0 < R < 1/4$. Проверим, во-вторых, что для всякого $\vec{\varphi}(s) = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) \in \mathrm{H}$ такого, что $\|\vec{\varphi}(s)\| = 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s)) \tag{26}$$

будет условно сходящимся при некоторой его перестановке. Для этого достаточно установить, что общий член ряда (26) стремится к нулю, и что найдутся два подряда ряда (26), расходящиеся к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно. Имеем

$$(\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s)) = \mathrm{Re} \iint\limits_{|s| \le R} \sum_{l=1}^{n} \chi_l(p_k) e^{-2\pi i\rho_k} \cdot p_k^{-(s+\frac{3}{4})} \bar{\varphi}_l(s) d\sigma\, dt =$$

$$= \mathrm{Re} \left[e^{-2\pi i\rho_k} \iint\limits_{|s| \le R} p_k^{-(s+\frac{3}{4})} \sum_{l=1}^{n} \chi_l(p_k) \bar{\varphi}_l(s) d\sigma\, dt \right]. \tag{27}$$

Так как $0 < R < 1/4$, то вследствие неравенства Коши заключаем

$$|(\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s))| \to 0 \qquad \text{при} \qquad k \to \infty.$$

Докажем, далее, что существует натуральное число a_0, $(a_0, \mathcal{D}) = 1$, такое, что

$$\bar{\varphi}_0(s) = \sum_{l=1}^{n} \chi_l(a_0) \bar{\varphi}_l(s) \not\equiv 0 \qquad \text{при} \qquad |s| < R \tag{28}$$

($\mathcal{D}$ — произведение модулей характеров $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$). Действительно, если a_0 пробегает все классы вычетов по модулю $\mathcal{D}$, взаимно простые с $\mathcal{D}$, то в силу теоремы П.12.1 равенство

$$\sum_{l=1}^{n} \chi_l(a_0) \bar{\varphi}_l(s) = 0$$

для всякого a_0 и s, $|s| < R$, влечет равенство

$$\bar{\varphi}_l(s) \equiv 0$$

для каждой $\varphi_l(s)$. Поскольку не все $\varphi_l(s)$ равны тождественно нулю, то найдется a_0 такое, что выполняется неравенство (28). Если теперь

$p_k \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, \mathcal{D})$, то вследствие (27)

$$(\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s)) = \mathrm{Re}\, e^{-2\pi i\rho_k} \iint\limits_{|s| \le R} e^{-(s+\frac{3}{4}) \ln p_k} \bar{\varphi}_0(s) d\sigma\, dt =$$

$$= \mathrm{Re} \left[e^{-2\pi i\rho_k} \Delta(\ln p_k) \right], \tag{29}$$

где

$$\Delta(x) = \iint\limits_{|s| \le R} e^{-(s+\frac{3}{4})x} \bar{\varphi}_0(s) d\sigma\, dt.$$

Пусть $\varphi_0(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n s^n$. Выразим $\Delta(x)$ через коэффициенты Тейлора α_n функции $\varphi_0(s)$. Имеем

$$\Delta(x) = e^{-\frac{3}{4}x} \iint\limits_{|s| \le R} e^{-sx} \bar{\varphi}_0(s) d\sigma\, dt =$$

$$= e^{-\frac{3}{4}x} \iint\limits_{|s| \le R} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-sx)^m}{m!} \right) \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s^n \right)} d\sigma\, dt =$$

$$= e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^m \bar{\alpha}_m}{m!} \iint\limits_{|s| \le R} s^m \bar{s}^n d\sigma\, dt.$$

Для вычисления $\iint_{|s| \le R} s^m \bar{s}^n d\sigma\, dt$ перейдем к полярным координатам. Поскольку

$$\iint\limits_{|s| \le R} s^m \bar{s}^n d\sigma dt = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^m e^{im\varphi} \rho^n e^{-in\varphi} \rho d\rho\, d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \ne n, \\ 2\pi \dfrac{R^{2m+2}}{2m+2}, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

то

$$\Delta(x) = e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m \bar{\alpha}_m}{m!} \cdot 2\pi \frac{R^{2m+2}}{2m+2} =$$

$$= \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m \bar{\alpha}_m}{(m+1)!} R^{2m} =$$

$$= \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \bar{\alpha}_m (xR^2)^m}{(m+1)!} = \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (xR)^m, \tag{30}$$

где $\beta_m = (-1)^m R^m \bar{\alpha}_m / (m+1)$. Из определения $\varphi_0(s)$ следует, что

$$\iint\limits_{|s| \le R} |\varphi_0(s)|^2 d\sigma\, dt \ll 1. \tag{31}$$

Из определения α_m и соотношения (31) теперь заключаем, что

$$\iint_{|s|\le R} |\varphi_0(s)|^2\, d\sigma\, dt = \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m|^2 \iint_{|s|\le R} |s|^{2m} d\sigma\, dt =$$

$$= \pi R^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\alpha_m|^2 R^{2m}}{m+1} \ll$$

Поэтому $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |\beta_m|^2 \ll 1$ и, следовательно,

$$|\beta_m| \ll 1. \qquad ($$

Рассмотрим функцию

$$F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} u^m.$$

В силу неравенства (32) $F(u)$ является целой функцией. Докажем, для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность $u_1, u_2, \ldots \to +\infty$ так что

$$|F(u_j)| > e^{-(1+2\delta)u_j}. \qquad ($$

Предположим противное. Тогда существует $\delta \in (0,1)$ и константа такая, что

$$|F(u)| < Ae^{-(1+2\delta)u}$$

при всех $u \ge 0$. Если это так, то

$$\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right| < Ae^{-\delta|u|}$$

при $u \ge 0$. В силу неравенства (32) при $u \le 0$ имеем

$$\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right| \le A_1 e^{-\delta|u|}.$$

Следовательно, для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ выполняется

$$\left|e^{(1+\delta)u}F(u)\right| \ll e^{-\delta|u|}. \qquad ($$

В силу теоремы II.2.8 найдется в таком случае $f_0(\xi) \in L_2(-3,+3)$ такая, что

$$e^{(1+\delta)u}F(u) = \int_{-3}^{3} f_0(\xi) e^{i\xi u} d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{(1+\delta)u}F(u)\right) e^{-i\xi u} du.$$

Вследствие оценки (34) $f_0(\xi)$ должна быть аналитической функцией в некоторой полосе около вещественной оси. Это противоречит финитности $f_0(\xi)$. Полученное противоречие показывает, что для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность $u_1, u_2, \ldots \to +\infty$, для которой выполняется (33). Полагая $x_j = u_j/R$, получим

$$|\Delta(x_j)| > ce^{-\frac{3}{4}x_j}F(x_jR) \ge ce^{-\frac{3}{4}x_j}e^{-(1+2\delta)x_jR} = ce^{-x_j(\frac{3}{4}+R+2\delta R)}. \qquad (35)$$

Если $\delta_0 > 0$ достаточно мало, то из неравенства (35) следует существование последовательности $x_j \to +\infty$ такой, что

$$|\Delta(x_j)| > e^{-(1-\delta_0)x_j}. \qquad (36)$$

Приблизим теперь $\Delta(x)$ на отрезке $[x_j - 1, x_j + 1]$ многочленом. Имеем

$$\Delta(x) = \pi R^2 e^{-\frac{3}{4}x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m.$$

В силу оценки (32) справедливо неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m \ll e^{xR},$$

и при $N = [x_j] + 1$, $x \in [x_j - 1, x_j + 1]$ — неравенство

$$\sum_{m=N^2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m \ll \sum_{m=N^2}^{\infty} \frac{(xR)^m}{m!} \ll \frac{(xR)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xR)^m}{m!} \ll$$

$$\ll \frac{N^{N^2}}{(N^2)!}e^N \ll \frac{N^{N^2}}{(N^2/e)^{N^2}}e^N \ll \frac{e^{N^2+N}}{N^{N^2}} \ll e^{-2x_j}.$$

Из формул (30) теперь выводим, что

$$\Delta(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{3}{4}x)^m}{m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m (xR)^m}{m!}\right) + O\left(e^{-\frac{5}{4}x_j}\right) =$$

$$= P_{N^2}(x) + O\left(e^{-\frac{5}{4}x_j}\right),$$

где P_{N^2} — полином степени не выше N^4. Из неравенства (36) заключаем, что при достаточно больших x_j выполняются неравенства

$$\max_{|x-x_j|\le 1} |P_{N^2}(x)| > \frac{1}{2}e^{-(1-\delta_0)x_j}.$$

В силу теоремы II.2.9

$$\max_{|x-x_j|\le 1} |P'_{N^2}(x)| \le N^8 \max_{|x-x_j|\le 1} |P_{N^2}(x)|.$$

Поэтому при достаточно больших x_j внутри отрезков $[x_j - 1, x_j + 1]$ найдутся отрезки I_j длиной, большей, чем $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{N^8}$, во всех точках которых выполняется одно из неравенств

$$|\mathrm{Re}\, P_{N^2}(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x}, \qquad |\mathrm{Im}\, P_{N^2}(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x}.$$

Следовательно, при $x \in I_j$ выполняется также одно из неравенств

$$|\mathrm{Re}\,\Delta(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x}, \qquad |\mathrm{Im}\,\Delta(x)| > \frac{1}{100}e^{-(1-\delta_0)x}. \qquad (37)$$

Необходимые неравенства для получения подрядов ряда (26), расходящихся к $+\infty$ и к $-\infty$, получено.

В силу равенства (29) для $p_k \in P_{a_0}$, т.е. $p_k \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, \mathcal{D})$, имеет место равенство

$$(\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s)) = \mathrm{Re}\left[e^{-2\pi i \rho_k}\Delta(\ln p_k)\right].$$

Для определенности предположим, что выбирается подряд, расходящийся к $+\infty$. Будем также предполагать, что для $x \in I_j$ выполнено первое из неравенств (37). Подряд будем набирать лишь из членов с индексами k, для которых $p_k \in P_{a_0}$, $\ln p_k \in I_j$ и $\mathrm{Re}\left[e^{-2\pi i \rho_k}\Delta(\ln p_k)\right] > 0$. Если I_j есть отрезок $[\alpha, \alpha+\beta]$, то индексов k, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, будет

$$\frac{1}{4}\left(\pi\left(e^{\alpha+\beta}; \mathcal{D}, a_0\right) - \pi\left(e^{\alpha}; \mathcal{D}, a_0\right)\right) + O(1).$$

В силу теоремы II.5.2 имеем

$$\pi\left(e^{\alpha+\beta}; \mathcal{D}, a_0\right) - \pi\left(e^{\alpha}; \mathcal{D}, a_0\right) = \frac{1}{\varphi(\mathcal{D})}\int_{e^{\alpha}}^{e^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\ln x} + O\left(e^{\alpha+\beta}e^{-c\sqrt{\alpha}}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\varphi(\mathcal{D})}\left[e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha}\right]\frac{1}{\alpha+\beta} + O\left(\frac{e^{\alpha+\beta}}{e^{c\sqrt{\alpha}}}\right) \geq \frac{1}{\mathcal{D}}e^{\alpha}\left[\frac{e^{\beta}-1}{\alpha+\beta} + O\left(\frac{e^{\beta}}{e^{c\sqrt{\alpha}}}\right)\right].$$

Поскольку $\beta \geq \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{N^8} \geq \frac{1}{200}\cdot\frac{1}{x_j^8}$, то при достаточно больших x выполняется

$$\pi\left(e^{\alpha+\beta}; \mathcal{D}, a_0\right) - \pi\left(e^{\alpha}; \mathcal{D}, a_0\right) \geq \frac{e^{x_j}}{\mathcal{D}}\cdot\frac{1}{x_j^{10}}. \qquad (38)$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{k \\ p_k \in P_{a_0},\, \ln p_k \in I_j, \\ \mathrm{Re}[e^{-2\pi i \rho_k}\Delta(\ln p_k)]>0}} (\vec{\eta}_k(s), \vec{\varphi}(s)) > \frac{1}{1000}e^{-(1-\delta_0)x_j}\frac{e^{x_j}}{\mathcal{D}}\cdot\frac{1}{x_j^{10}} > c_1 e^{\frac{\delta_0}{2}x_j}.$$

Тем самым доказана возможность выбора подряда ряда (26), расходящегося к $-\infty$. Аналогично выбирается подряд, расходящийся к $-$ Лемма доказана.

2. Теорема о сдвигах L-функций Дирихле.

Т е о р е м а 1. *Пусть $0 < r < 1/4$, пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле, $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ — функции, аналитические внутри круга $|s| \leq r$, непрерывные вплоть до границы круга и не имеющие нулей при $|s| < r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что для всех $j = 1, \ldots, n$ выполняется*

$$\max_{|s|\leq r}\left|f_j(s) - L\left(s + \frac{3}{4} + iT, \chi_j\right)\right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $\gamma > 1$ таким, чтобы выполнялось $\gamma^2 r < 1/4$ и

$$\max_{1\leq j\leq n}\max_{|s|\leq r}\left|f_j\left(\frac{s}{\gamma r}\right) - f_j(s)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (39)$$

В силу леммы 2 существует $\bar{\theta}_0 \in \Omega$ и последовательность конечных множеств простых чисел $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ такая, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ содержит все простые числа и для всякого $j = 1, \ldots, n$

$$\max_{|s|\leq\gamma r}\left|L_{M_k}\left(s + \frac{3}{4}, \chi_j, \bar{\theta}_0\right) - f_j\left(\frac{s}{\gamma^2}\right)\right| \to 0.$$

Поскольку L-функции Дирихле удовлетворяют условиям леммы 1, то найдутся значения $T > 0$ такие, что

$$\max_{1\leq k\leq n}\max_{|s|\leq r}\left|L\left(s + \frac{3}{4} + iT, \chi_j\right) - f_j\left(\frac{s}{\gamma^2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (40)$$

Из неравенств (39) и (40) следует утверждение теоремы 1.

З а м е ч а н и е. Из леммы 1 следует более сильное утверждение. Именно, найдется постоянная $c = c(f_1, \ldots, f_n, \chi_1, \ldots, \chi_n, \varepsilon) > 0$ такая, что при достаточно больших T_0 мера тех $T \in (0, T_0)$, для которых выполняется неравенство (38), будет больше cT_0.

3. Теоремы о сдвигах ζ-функций числовых полей. Теоремы этого пункта являются следствиями теоремы п.2. Доказательства их основываются на возможности представления ζ-функций некоторых полей в виде произведения L-функций Дирихле.

Т е о р е м а 2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — попарно различные квадратичные расширения поля рациональных чисел; $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$ и r удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что*

$$\max_{1\leq j\leq n}\max_{|s|\leq r}\left|f_j(s) - \zeta_{K_j}\left(s + \frac{3}{4} + iT\right)\right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если K_j — квадратичное расширение поля рациональных чисел, то $\zeta_{K_j}(s) = \zeta(s)L(s, \chi_j)$, причем различным полям соответствуют различные попарно неэквивалентные характеры Дирихле χ_j. Поэтому утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1.

Т е о р е м а 3. *Пусть $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ и r удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ — попарно различные бесквадратные нечетные числа, ξ_j — примитивный корень степени $\mathcal{D}_j$ из единицы, $K_j = \mathbf{Q}(\xi_j)$.*

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $T > 0$ такое, что

$$\max_{1\le j\le n}\max_{|s|\le r}\left|\zeta_{K_j}\left(s+\frac{3}{4}+iT\right)-f_j(s)\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Имеем

$$\zeta_{K_j}(s)=\prod_{\chi}L(s,\chi),$$

где произведение берется по всем примитивным характерам по mod для всех $d|\mathcal{D}_j$. Поскольку в каждое произведение $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ $L(s,\chi)$ с вещественным примитивным характером по $\bmod\,\mathcal{D}$, то орема 3 следует из теоремы 1.

4. Независимость L-функций Дирихле. В этом пункте р сматривается вопрос о возможных функциональных соотношен для L-функций Дирихле и связанных с ними ζ-функций.

Лемма 3. *Если $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, причем $a_0 \neq 0$, то существу полином $g(z)$ такой, что*

$$a_k=\left[e^{g(z)}\right]^{(k)}\Big|_{z=0}.$$

Доказательство. Действительно, формулы

$$f(z)=e^{g(z)},\ f'(z)=g'(z)e^{g(z)},\dots,f^{(k)}(z)=$$
$$=g^{(k)}(z)e^{g(z)}+P_k\left(g'(z),g''(z),\dots,g^{(k-1)}(z)\right)e^{g(z)},\dots,\qquad(41$$

где P_k — некоторые полиномы с постоянными коэффициентами, оп деляют взаимно однозначное соответствие φ между

$$(-\infty,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{C}^n\qquad\text{и}\qquad[\mathbb{C}\backslash\{0\}]\times\mathbb{C}^n.$$

По определению полагаем

$$\varphi(x+iy,s_1,s_2,\dots,s_n)=\left(e^{x+iy},s_1e^{x+iy},\dots,s_ke^{x+iy}+\right.$$
$$\left.+P_k(s_1,\dots,s_{k-1})e^{x+iy},\dots,s_ne^{x+iy}+P_n(s_1,\dots,s_{n-1})e^{x+iy}\right).\qquad(42$$

Из вида формул (2) видно, что $x+iy$, $s_1,\dots,s_n$ однозначно определяютс значениями

$$e^{x+iy},\ s_1e^{x+iy},\dots,s_ne^{x+iy}+P_n(s_1,\dots,s_{n-1})e^{x+iy}.$$

Тем самым лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_n$ — попарно неэквивалентные характеры Дирихле. Пусть отображение $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{n\times m}$ задается формулой*

$$\gamma(t)=\left(L(\sigma+it,\chi_1),L'(\sigma+it,\chi_1),\dots,L^{(m-1)}(\sigma+it,\chi_1)\right.,$$
$$\left.L(\sigma+it,\chi_2),\dots,L^{(m-1)}(\sigma+it,\chi_n)\right),\qquad\frac{1}{2}<\sigma<1.$$

Тогда образ $\mathbb{R}$ при отображении γ всюду плотен в $\mathbb{C}^{n\times m}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого набора $a_{jk}(j=0,\dots,m-1;k=1,\dots,n)$ такого, что $a_{0k}\neq 0$, и $\varepsilon>0$ найдется T такое, что

$$\left|L^{(j)}(\sigma+it,\chi_k)-a_{jk}\right|<\varepsilon.\qquad(43)$$

Пользуясь леммой 3, найдем полиномы $g_k(z)$ такие, что

$$a_{jk}=\left[e^{g_k(z)}\right]^{(j)}\Big|_{z=0}.$$

Пусть $r=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\min\left(1-\sigma,\sigma-\frac{1}{2}\right)$. В силу теоремы 1 для всякого $\sigma>0$ найдется T такое, что

$$\max_{|s|\le r}\left|L\left(s+\frac{3}{4}+iT,\chi_k\right)-e^{g_k(s-\sigma)}\right|<\delta.$$

Вследствие интегральной формулы Коши при достаточно малом δ будут выполняться неравенства (43). Теорема доказана.

Аналогично доказательству теоремы 4 доказывается теорема 5.

Теорема 5. *Пусть $K_1,K_2,\dots,K_n$ — поля из условий теоремы 2, либо теоремы 3. Тогда кривая*

$$\gamma(t)=$$
$$=\left(\zeta_{K_1}(\sigma+it),\zeta'_{K_1}(\sigma+it),\dots,\zeta^{(m)}_{K_1}(\sigma+it),\zeta_{K_2}(\sigma+it),\dots,\zeta^{(m)}_{K_n}(\sigma+it)\right)$$

всюду плотна в $\mathbb{C}^{n\times(m+1)}$.

В качестве следствий теорем 4 и 5 получаются теоремы о дифференциальной и функциональной независимости L- и ζ-функций.

Теорема 6. *Если либо $\varphi_j(s)=L(s,\chi_j)$, либо $\varphi_j(s)=\zeta_{K_j}(s)$, где K_j — поля из условий теоремы 2 или 3 ($j=1,2,\dots,n$), и тождественно по S выполняется соотношение*

$$\sum_{k=0}^{N}s^kF_k\left(\varphi_1(s),\varphi_1'(s),\dots,\varphi_1^{(m)}(s),\dots,\varphi_n^{(m)}(s)\right)=0,$$

где F_k — непрерывные функции, то $F_k\equiv 0$ при $k=0,1,\dots,N$.

Доказательство. Пусть $1/2<\sigma<1$. Можно считать, что F_N не равна нулю тождественно. Пусть $U\subset\mathbb{C}^{n\times(n+1)}$ — открытое подмножество $\mathbb{C}^{n\times(m+1)}$, для точек которого выполняется

$$|F_N(z)|>\delta>0.$$

В силу теорем 4 и 5 существует последовательность $t_1,t_2,\dots\to+\infty$ такая, что $\left(\varphi_1(s),\varphi_1'(s),\dots,\varphi_1^{(m)}(s),\dots,\varphi_n^{(m)}(s)\right)\Big|_{s=\sigma+it_k}\in U$. Отсюда следует, что F_N равна нулю тождественно. Теорема доказана.

5. Нули $\zeta(s,\alpha)$. В этом пункте теорема о распределении значений L-функций Дирихле (теорема 1) применяется к вопросу о положении нулей ζ-функции Гурвица. Напомним, что дзета-функция Гурвица при $\mathrm{Re}\, s > 1$ и $0 < \alpha < 1$ определяется равенством

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}.$$

Теорема 7. *Пусть $q > 2$, $\alpha = a/q$, $(a,q) = 1$ и $0 < a$. Тогда для любых σ_1, σ_2 таких, что $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, в области определяемой неравенствами $\sigma_1 < \mathrm{Re}\, s < \sigma_2, |\mathrm{Im}\, s| < T$, найдется достаточно большом T более чем cT нулей $\zeta(s,\alpha)$ ($c = c(\alpha, \sigma_1, \sigma_2)$ положительная постоянная, не зависимая от T).*

Доказательство. Имеем

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^s}{(a+qn)^s} = q^s \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) L(s,\chi).$$

Следовательно, нули $\zeta(s,\alpha)$ совпадают с нулями линейной комбинации L-функций Дирихле — $\sum\limits_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) L(s,\chi)$.

Занумеруем каким-либо образом характеры Дирихле по mod q. Положим

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \quad f_1(s) = \chi_1(a)\left[(s-\sigma)+10\right], \quad f_2(s) = \chi_2(a) \cdot 10,$$

$$f_3(s) = f_4(s) = \ldots = f_{\varphi(q)}(s) = \delta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{200 \cdot q}.$$

В силу теоремы 1 найдутся t такие, что

$$\max_{1 \le k \le \varphi(q)} \max_{|s-3/4| \le r} |L(s+it,\chi_k) - f_k(s)| < \delta,$$

где $r = \max(|\sigma_2 - 3/4|, |\sigma_1 - 3/4|)$. Следовательно, для таких t будет выполняться

$$\left| \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) L(s+it,\chi) - \sum_{k=1}^{\varphi(q)} \bar{\chi}_k(a) f_k(s) \right| < \varphi(q)\delta \le \frac{\sigma_2-\sigma_1}{200}. \qquad (44)$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\varphi(q)} \bar{\chi}(a) f_k(s) = (s-\sigma) + (\varphi(q)-2)\delta$, то

$$\min_{|s-\sigma| = (\sigma_2-\sigma_1)/2} \left| \sum_{k=1}^{\varphi(q)} \bar{\chi}(a) f_k(s) \right| \ge \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2-\sigma_1}{200}. \qquad (45)$$

Вследствие теоремы II.2.6 из оценок (44) и (45) следует, что внутри круга $|s - (\sigma_1+\sigma_2)/2| \le (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ найдется нуль функции

$$\sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(a) L(s+it,\chi).$$

Вследствие замечания к теореме 1 мера таких $t \in (0,T)$ при T, достаточно больших, будет больше cT. Теорема доказана.

§ 4. Нули дзета-функций квадратичных форм

В этом параграфе рассматриваются дзета-функции квадратичных форм от двух переменных, представимые в виде линейной комбинации L-функций Гекке. Необходимые сведения из алгебраической теории чисел можно найти в монографиях [10,11].

Будем считать, что Ω и $L_M(s,\bar{\theta})$ определены выше, в §1 и §3.

1. Основные леммы.

Лемма 1. *Пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ — некоторый набор характеров группы классов дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}), d > 0$. Пусть $\chi_j \neq \chi_k$ и $\chi_j \neq \bar{\chi}_k$ при $j \neq k$. Тогда для всякого $y > 0, \sigma \in (1/2, 1)$ и произвольного $\bar{\theta}' \in \Omega$ множество векторов вида*

$$\left(\ln L_M(\sigma,\chi_1,\bar{\theta}), \ln L_M(\sigma,\chi_2,\bar{\theta}), \ldots, \ln L_M(\sigma,\chi_n,\bar{\theta})\right),$$

где M пробегает всевозможные конечные множества простых чисел, содержащие все $p \le y$, $\bar{\theta} = (\theta_2, \theta_3, \ldots)$ — всевозможные элементы из Ω такие, что $\theta_p = \theta'_p$ при $p \le y$, будет всюду плотным в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Можно считать, что d — бесквадратное число. Имеем по определению $L(s,\chi) = \prod\limits_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$, $N(\mathfrak{p})$ — норма дивизора $\mathfrak{p}$. Пусть P_1 — множество простых чисел, которые остаются простыми в целом замыкании $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$, P_2 — множество простых чисел, которые разлагаются в произведение двух различных простых дивизоров поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$: $p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Тогда

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathcal{D}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\in P_1} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \prod_{p \in P_2} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p}_2)}{p^s}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{D}$ — дискриминант поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = p$. Поскольку χ — характер группы классов дивизоров, то из равенства $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = p$ следует, что

$$\chi(\mathfrak{p}_1) = \bar{\chi}(\mathfrak{p}_2).$$

Следовательно, равенство (1) можно записать в виде

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathcal{D}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\in P_1} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \prod_{p \in P_2} \left(1 - \frac{2\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Не умаляя общности доказательства, будем в дальнейшем считать, что $y > \mathcal{D}$. Поскольку произведение $\prod\limits_{p \in P_1} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$ абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1/2$, то утверждение леммы будет следовать всюду плотности в $\mathbf{C}^n$ вектора

$$(\ln F_M(\sigma, \chi_1, \bar{\theta}), \ldots, \ln F_M(\sigma, \chi_n, \bar{\theta})), \tag{3}$$

где

$$F_M(\sigma, \chi, \bar{\theta}) = \prod_{\substack{p \in P_2 \\ p > y \\ p \notin M}} \left(1 - 2\frac{\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s} e^{-2\pi i \theta_p} + \frac{1}{p^{2s}} e^{-4\pi i \theta_p}\right)^{-1},$$

а M содержит все $p \le y$.

Докажем, что ряд $\sum\limits_{p \in P_2} V_p$, где

$$V_p = \left(\frac{\mathrm{Re}\,\chi_1(\mathfrak{p}_1)}{p^\sigma} e^{-2\pi i \theta_p}, \ldots, \frac{\mathrm{Re}\,\chi_n(\mathfrak{p}_1)}{p^\sigma} e^{-2\pi i \theta_p}\right), \tag{4}$$

при надлежащем выборе $\bar{\theta} = (\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_p, \ldots)$ удовлетворяет условиям теоремы II.6.1. Так как $2V_p$ отличается от

$$\left(\ln\left(1 - 2\frac{\mathrm{Re}\,\chi_1(\mathfrak{p}_1)}{p^\sigma} e^{-2\pi i \theta_p} + \frac{1}{p^{2\sigma}} e^{-4\pi i \theta_p}\right), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \ln\left(1 - 2\frac{\mathrm{Re}\,\chi_n(\mathfrak{p}_n)}{p^\sigma} e^{-2\pi i \theta_p} + \frac{1}{p^{2\sigma}} e^{-4\pi i \theta_p}\right)\right)$$

на величину, не превосходящую по норме $O(1/p^{2\sigma})$, а ряд $\sum \frac{1}{p^{2\sigma}}$ сходится, то из выполнения условий теоремы II.6.1 для ряда (4) будет следовать утверждение леммы 1.

Определим надлежащим образом θ_p. Пусть $\mathrm{Cl}_1, \mathrm{Cl}_2, \ldots, \mathrm{Cl}_h$ — все классы дивизоров поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Пусть P_{Cl_j} — множество простых чисел, которые являются нормами простых дивизоров $\mathfrak{p} \in \mathrm{Cl}_j$. Тогда P_{Cl_j} и P_{Cl_k} либо не пересекаются, либо совпадают (в случае $\mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_k^{-1}$). Обозначим через $p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \ldots$ все простые числа множества P_{Cl_j}, расположенные в порядке возрастания. Положим

$$\theta_{p_k^{(j)}} = \frac{2\pi k}{4}. \tag{5}$$

Проверим выполнение условий теоремы II.6.1 для ряда (4) с таким образом определенными θ_p. Пусть $\mathbf{e} = (\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n, \alpha_n')$ — единичный вектор из $\mathbf{R}^{2n}$. Имеем

$$(V_p, \mathbf{e}) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\left[(\alpha_k - i\alpha_k')\frac{\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathfrak{p}_1)}{p^\sigma} e^{-2\pi i \theta_p}\right] =$$

$$= \frac{1}{p^\sigma} \mathrm{Re} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')(\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathfrak{p}_1)) e^{-2\pi i \theta_p}.$$

Докажем, что хотя бы для одного Cl_j будем иметь

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathfrak{p}) \ne 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{Cl}_j. \tag{6}$$

Действительно, левую часть (6) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')(\chi_k(\mathfrak{p}) + \bar{\chi}_k(\mathfrak{p})).$$

Поскольку равенства вида $\chi_k = \bar{\chi}_j$ или $\chi_k = \chi_j$ невозможны по условию леммы, то в силу теоремы II.12.1 существует класс дивизоров Cl_j такой, что

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathrm{Cl}_j) \ne 0.$$

Покажем теперь, что из ряда $\sum (V_p, \mathbf{e})$ можно выбрать подряд, расходящийся к $+\infty$ и, аналогично, подряд, расходящийся $-\infty$. Тогда ряд $\sum (V_p, \mathbf{e})$ будет условно сходящимся и лемма будет доказана.

Пусть r_1 и r_2 — классы вычетов по mod 4 такие, что

$$(V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e}) > \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(p_m^{(j)})^\sigma} \left|\sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathfrak{p}_j)\right| \tag{7}$$

для $m \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $p_m^{(j)} \in P_{\mathrm{Cl}_j}$, $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Cl}_j$ и

$$(V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e}) < -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(p_m^{(j)})^\sigma} \left|\sum_{k=1}^n (\alpha_k - i\alpha_k')\mathrm{Re}\,\chi_k(\mathfrak{p}_j)\right|$$

для $m \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ 4)$, $p_m^{(j)} \in P_{\mathrm{Cl}_j}$, $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Cl}_j$

В качестве подряда, расходящегося к $+\infty$, возьмем ряд

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ 4) \\ p_m^{(j)} > y}}^{\infty} (V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e})$$

и, соответственно,

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ 4) \\ p_m^{(j)} > y}}^{\infty} (V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e})$$

в случае подряда, расходящегося к $-\infty$. В силу теоремы II.12.2 из неравенства (7) следует, что при x, достаточно большом, выполняется

$$\sum_{\substack{p_m^{(j)} < x \\ m \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ 4)}} \left(V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e}\right) > Ax^{-\sigma}\frac{x}{\ln x}, \qquad \sum_{\substack{p_m^{(j)} < x \\ m \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ 4)}} \left(V_{p_m^{(j)}}, \mathbf{e}\right) < -Ax^{-\sigma}\frac{x}{\ln x},$$

где A — некоторая положительная постоянная. Тем самым лемма казана.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда множество векторов вида*

$$(\ln L_M(\sigma,\chi_1,\bar\theta),...,\ln L_M(\sigma,\chi_n,\bar\theta)),$$

где M пробегает все множества простых чисел вида $\{p : p \le z\}$, $z > y$; $\bar\theta$ пробегает все наборы из Ω, причем $\theta_p = \theta'_p$ при $p \le y$, всюду плотно в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Пусть M_1 — некоторое конечное множество простых чисел, содержащее все $p \le y$. Пусть $M \supset M_1$, $M = \{p : p \le z\}$. Рассмотрим

$$I = \int_0^1 ... \int_0^1 \sum_{k=1}^n |\ln L_M(\sigma,\chi_k,\bar\theta) - \ln L_{M_1}(\sigma,\chi_k,\bar\theta)|^2 d\bar\theta,$$

где θ_p для $p \in M_1$ фиксированы, а интегрирование ведется по всем остальным θ_p. В силу определений

$$I = \int_0^1 ... \int_0^1 \sum_{k=1}^n |\ln L_{M\setminus M_1}(\sigma,\chi_k,\bar\theta)|^2 d\bar\theta = \sum_{k=1}^n I_k,$$

где

$$I_k = \int_0^1 ... \int_0^1 |\ln L_{M\setminus M_1}(\sigma,\chi_k,\bar\theta)|^2 d\bar\theta.$$

Вследствие ортогональности $e^{2\pi i m\theta_p}$ при различных p и m из формулы (2) получаем

$$I_k \ll \sum_{p>y} \frac{1}{p^{2\sigma}} \ll y^{1-2\sigma}.$$

Таким образом, для всякого множества M найдутся значения θ_p для $p \in M\setminus M_1$ такие, что

$$\sum_{k=1}^n |\ln L_M(\sigma,\chi_k,\bar\theta) - \ln L_{M_1}(\sigma,\chi_k,\bar\theta)|^2 \ll y^{1-2\sigma}. \tag{8}$$

Из оценки (8) и утверждения леммы 1 следует теперь утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда для всякого $\sigma \in (1/2, 1)$ найдется множество Q, состоящее из $2n$ простых чисел, такое, что образ Ω при отображении $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$, задаваемое формулой*

$$f(\bar\theta) = (\ln L_Q(\sigma,\chi_1,\bar\theta),...,\ln L_Q(\sigma,\chi_n,\bar\theta))$$

содержит открытое множество.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, ..., \mathfrak{a}_h$ — представители всех классов дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, ..., \chi_h$ — все характеры группы классов дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Рассмотрим матрицу

$$A = (\chi_j(\mathfrak{a}_k)).$$

В силу теоремы II.12.1 характеры χ_j линейно независимы над полем $\mathbb{C}$. Следовательно, $\det A \ne 0$. Прибавим теперь к каждой строке с номером j, $j = 1,2,...,n$, строку, соответствующую $\bar\chi_j$. Получим некоторую новую матрицу B. Поскольку от этой операции определитель матрицы не изменится, то

$$\det B = \det A.$$

Разлагая определитель матрицы B по правилу Лапласа по первым n строкам, заключаем, что найдутся классы дивизоров $\mathrm{Cl}_1, ..., \mathrm{Cl}_n$, для которых выполняется

$$\det(\operatorname*{Re}_{1\le j\le n,\,1\le k\le n} \chi_j(\mathrm{Cl}_k)) \ne 0. \tag{9}$$

При достаточно большом X выберем из интервала $(X, 2X)$ различные простые числа $q_1, ..., q_n, q'_1, ..., q'_n \in P_2$ так, чтобы выполнялось

$$q_k = \mathfrak{p}_1^{(k)}\mathfrak{p}_2^{(k)}, \qquad q'_k = \mathfrak{p}_3^{(k)}\mathfrak{p}_4^{(k)}, \qquad \mathfrak{p}_1^{(k)}, \mathfrak{p}_3^{(k)} \in \mathrm{Cl}_k,$$

для $k = 1,2,...,n$. В силу теоремы II.12.2 такой выбор возможен. Положим $N = \{q_1, q'_1, ..., q_n, q'_n\}$. Переменные θ_p, соответствующие $p \in N$, обозначим $x_1, x'_1, ..., x_n, x'_n$. Разделяя вещественную и мнимую части, будем рассматривать $\mathbb{C}$ как $\mathbb{R}^{2n}$. Для доказательства леммы достаточно установить, что при некотором $\bar\theta \in \Omega$

$$\det Df(\bar\theta) \ne 0,$$

где Df — матрица Якоби отображения f, рассматриваемого как отображение $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. Будем считать X достаточно большим. Имеем

$$\frac{1}{2}f(\bar\theta) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re}\chi_1(\mathfrak{p}_1^{(k)})e^{-2\pi i x_k}}{q_k^\sigma} + \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re}\chi_1(\mathfrak{p}_3^{(k)})e^{-2\pi i x'_k}}{q_k'^\sigma}, ..., \right.$$
$$\left. ..., \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re}\chi_n(\mathfrak{p}_1^{(k)})e^{-2\pi i x_k}}{q_k^\sigma} + \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Re}\chi_n(\mathfrak{p}_3^{(k)})e^{-2\pi i x'_k}}{q_k'^\sigma}\right) +$$
$$+ \bar R(x_1, x'_1, ..., x_n, x'_n),$$

причем все частные производные $\frac{\partial R}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial R}{\partial x'_k}$ есть $O(X^{-2\sigma})$. Пусть $x_j = -1/4$, $x'_j = 1/2$. Тогда при соответствующей нумерации переменных в пространстве образов будем иметь

$$Df = \begin{pmatrix} C_1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & C_2 \end{pmatrix} + D\bar R,$$

где

$$\frac{1}{4\pi}C_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\chi_1(\mathrm{Cl}_1)q_1^{-\sigma}, \dots, \mathrm{Re}\chi_1(\mathrm{Cl}_n)q_n^{-\sigma} \\ \mathrm{Re}\chi_2(\mathrm{Cl}_1)q_1^{-\sigma}, \dots, \mathrm{Re}\chi_2(\mathrm{Cl}_n)q_n^{-\sigma} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Re}\chi_n(\mathrm{Cl}_1)q_1^{-\sigma}, \dots, \mathrm{Re}\chi_n(\mathrm{Cl}_n)q_n^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

и

$$\frac{1}{4\pi}C_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\chi_1(\mathrm{Cl}_1)q_1'^{-\sigma} & \dots\dots\dots\dots \\ & \ddots \\ \dots\dots\dots\dots & \mathrm{Re}\chi_n(\mathrm{Cl}_n)q_n'^{-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Вследствие соотношения (9) имеем

$$|\det f| \geq c\left(X^{-\sigma n}\right)^2 + O\left(X^{-(2n+1)\sigma}\right), \tag{10}$$

где c — некоторая положительная величина, не зависящая от X. Из неравенства (10) следует утверждение леммы 3.

Согласно формуле (2)

$$L(s,\chi) = \varepsilon(s)\prod_{p\in P_1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\prod_{p\in P_2}\left(1-\frac{2\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1},$$

где $\mathfrak{p}_1 \mid P_1$. Положим

$$F(s,\chi) = \\ = \varepsilon(s)\prod_{p\in P_1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\prod_{p\in P_2}\left(1-2\frac{\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}e^{-2\pi i\theta_p^{(0)}}+\frac{e^{-4\pi i\theta_p^{(0)}}}{p^{2s}}\right)^{-1},$$

где $\mathfrak{p}_1$ — простой дивизор, $\mathfrak{p}_1 \mid p$, а $\theta_p^{(0)}$ определены следующим образом: $\theta_p^{(0)} = m/2$ для $p \in P_2$, если p есть m-е число в порядке следования среди простых чисел из класса P_{Cl_k}. Тогда

$$\prod_{p\in P_2}\left(1-2\frac{\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p}_1)}{p^s}e^{-2\pi i\theta_p^{(0)}}+\frac{e^{-4\pi i\theta_p^{(0)}}}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

сходится при всяком χ в области $\mathrm{Re}\,s > 1/2$ и определяет там некоторую аналитическую функцию.

Пусть ω — множество наборов вещественных чисел, индексированных простыми числами, все из которых, кроме, быть может, конечного числа, равны нулю. Тогда при всяком $\bar\theta \in \omega$ формула

$$F(s,\chi,\bar\theta) = \varepsilon(s,\bar\theta)\prod_{p\in P_1}\left(1-\frac{e^{-4\pi i\theta_p}}{p^{2s}}\right)^{-1}\times \\ \times\prod_{p\in P_2}\left(1-2\frac{\mathrm{Re}\,\chi(\mathfrak{p})}{p^s}e^{-2\pi i(\theta_p^{(0)}+\theta_p)}+\frac{e^{-4\pi i(\theta_p^{(0)}+\theta_p)}}{p^{2s}}\right) \tag{11}$$

определяет аналитическую функцию в области $\mathrm{Re}\,s > 1/2$.

Лемма 4. *Для всякого $\sigma \in (1/2,1)$ и произвольного $\bar a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{C}^n$, $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_n \neq 0$, существует $\bar\theta \in \omega$ такое, что $(F(\sigma,\chi_1,\bar\theta),\dots,F(\sigma,\chi_n,\bar\theta)) = \bar a$, если только $\chi_1,\dots,\chi_n$ таковы, что $\chi_j \neq \chi_k$ и $\chi_j \neq \bar\chi_k$ при $j \neq k$.*

Доказательство. Пусть N — множество простых чисел, для которого справедлива лемма 3. Пусть y больше любого простого числа, входящего в N. В силу леммы 2 вектор

$$(\ln F(\sigma,\chi_1,\bar\theta),\dots,\ln F(\sigma,\chi_n,\bar\theta)),$$

где $\bar\theta \in \omega$, $\theta_p = 0$ для $p \leq y$, всюду плотен в $\mathbf{C}^n$. Меняя θ_p в интервале (0,1) для $p \leq y$ получим в силу лемма 3, что ω при отображении

$$\bar\theta \to (\ln F(\sigma,\chi_1,\bar\theta),\dots,\ln F(\sigma,\chi_n,\bar\theta))$$

покрывает все $\mathbf{C}^n$. Отсюда следует утверждение леммы.

2. Совместное распределение значений L-функций Гекке.

Теорема 1. *Пусть $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_n$ — характеры группы классов дивизоров $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, где $d > 0$ — бесквадратное натуральное число. Если $\chi_j \neq \chi_k$, $\chi_j \neq \bar\chi_k$ при $j \neq k$, то кривая $\gamma(t) = (L(\sigma+it,\chi_1),\dots,L(\sigma+it,\chi_n))$ при всяком $\sigma \in (1/2,1)$ всюду плотна в $\mathbf{C}^n$.*

Доказательство. В силу леммы 4 п. 1 этого параграфа для всякого $\bar a \in \mathbf{C}^n$ такого, что $a_1 \neq 0,\dots,a_n \neq 0$ существуют конечные множества простых чисел $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ и $\cup M_j$ содержит все простые числа, для которых при некоторых $\bar\theta_j \in \omega$ выполняется равномерно по s из области $\mathrm{Re}\,s > 1/2$, $|\mathrm{Im}\,s| < 10$

$$L_{M_j}(s,\chi_k,\bar\theta_j) \to f_k(s),$$

где $f_k(s)$ — некоторые аналитические функции, причем $f_k(\sigma) = a_k$ для $k = 1,2,\dots,n$.

Воспользуемся теперь леммой 3.1. Проверим выполнение условий этой леммы. Из теоремы II.12.3 и теоремы II.12.4 следует, что $L(s,\chi)$ допускает аналитическое продолжение в область $\mathrm{Re}\,s > 1/2$, регулярна в этой области, за исключением полюса в точке $s = 1$, и имеет конечный порядок. Проверим, что при $\sigma \in (1/2,1)$

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\chi)|^2dt = O(1). \tag{12}$$

Из соотношения (12) в силу леммы 3.1 будет следовать теорема 1. Для доказательства соотношения (12) применим теорему II.12.4. Пусть $L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}$ при $\mathrm{Re}\,s > 1$. Положим в условиях теоремы II.12.4

$$X = Y = \frac{|t|}{2\pi}\sqrt{D}.$$

При $T > 10$ имеем

$$\int_{-T}^{T} |L(s,\chi)|^2 dt \ll 1 + \int_{1<|t|\leq T} |L(s,\chi)|^2 dt \ll$$

$$\ll 1 + \int_{-T}^{T} \left| \sum_{m\leq X} \frac{a_m}{m^s} \right|^2 dt + \int_{-T}^{T} |\psi(s)|^2 \left| \sum_{m\leq X} \frac{\bar{a}_m}{m^{1-s}} \right|^2 dt +$$

$$+ \int_{-T}^{T} X^{2(\frac{1}{2}-\sigma)} \ln(1+|X|)\, dt = 1 + A_1 + A_2 + O\left(T^{2-2\sigma+\varepsilon}\right). \quad (13)$$

Далее,

$$A_1 = \int_{-T}^{T} \left| \sum_{m\leq X} \frac{a_m}{m^s} \right|^2 dt = \int_{-T}^{T} \sum_{m\leq c|t|} \sum_{k\leq c|t|} \frac{a_m \bar{a}_k}{(mk)^\sigma} \left(\frac{m}{k}\right)^{it} dt =$$

$$= \sum_{m\leq cT} \sum_{m\leq cT} \frac{a_m \bar{a}_k}{(mk)^\sigma} \int_{\frac{\max(m,k)}{c}<|t|<T} \left(\frac{m}{k}\right)^{it} dt \ll$$

$$\ll T \sum_{m\leq cT} \frac{|a_m|^2}{m^{2\sigma}} + \sum_{0<m<k\leq cT} \frac{|a_m||a_k|}{m^\sigma k^\sigma \ln(k/m)}, \quad (14)$$

где $c = \sqrt{D}/(2\pi)$. Так как $a_m \ll m^\varepsilon$, то

$$\sum_{0<m<k\leq cT} \frac{|a_m||a_k|}{m^\sigma k^\sigma \ln(k/m)} \ll$$

$$\ll T^\varepsilon \sum_{\substack{0<m<k\leq cT \\ |k-m|\leq m/2}} \frac{1}{m^\sigma k^\sigma |m-k|/m} + T^\varepsilon \sum_{\substack{0<m<k\leq cT \\ |k-m|>m/2}} \frac{1}{m^\sigma k^\sigma} \ll$$

$$\ll T^\varepsilon \sum_{0<m\leq cT} \frac{m}{m^{2\sigma}} \sum_{0<r\leq m/2} \frac{1}{r} + T^\varepsilon \left(\sum_{0<m\leq cT} \frac{1}{m^\sigma} \right)^2 \ll$$

$$\ll T^\varepsilon \cdot T^{2-2\sigma} \ln T + T^\varepsilon \cdot T^{2-2\sigma} \ll T^{2-2\sigma+\varepsilon} \ln T.$$

Поэтому из неравенства (14) следует, что

$$A_1 \ll T. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь A_2. Пусть

$$J(\tau) = \int_{-\tau}^{\tau} \left| \sum_{m\leq X} \frac{\bar{a}_m}{m^{1-s}} \right|^2 dt = \sum_{m\leq c\tau} \sum_{k\leq c\tau} \frac{a_m \bar{a}_k}{(mk)^{1-\sigma}} \int_{\frac{\max(m,k)}{c}<|t|<\tau} \left(\frac{m}{k}\right)^{it} dt.$$

Имеем, вследствие оценки $a_m \ll m^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$J(\tau) \ll \tau \sum_{m\leq c\tau} \frac{|a_m|^2}{m^{2-2\sigma}} + \sum_{0<m<k<c\tau} \frac{|a_m||a_k|}{m^{1-\sigma} k^{1-\sigma}} \overline{\ln(k/m)} \ll \tau^{2\sigma+\varepsilon} + \tau^\varepsilon R_1,$$

где

$$R_1 = \sum_{0<m<k<c\tau} \frac{1}{m^{1-\sigma} k^{1-\sigma} \ln(k/m)} \ll \sum_{\substack{0<m<k<c\tau \\ |k-m|\leq m/2}} \frac{1}{m^{1-\sigma} k^{1-\sigma} \ln(k/m)} +$$

$$+ \sum_{\substack{0<m<k<c\tau \\ |k-m|>m/2}} \frac{1}{m^{1-\sigma} k^{1-\sigma}} \ll \sum_{m<c\tau} \frac{1}{m^{2-2\sigma}} \sum_{r\leq m/2} \frac{m}{r} + \left(\sum_{m<c\tau} \frac{1}{m^{1-\sigma}} \right)^2 \ll$$

$$\ll \tau^{2\sigma} (\ln \tau + 1) \ll \tau^{2\sigma+\varepsilon}. \quad (16)$$

Поэтому $J(\tau) \ll \tau^{2\sigma+\varepsilon}$. Отсюда следует

$$A_2 = \int_{-T}^{T} |\psi(s)|^2 \left| \sum_{m\leq X} \frac{\bar{a}_m}{m^{1-s}} \right|^2 dt \ll \int_0^T |\psi(s)|^2 dJ(\tau).$$

Поскольку

$$|\psi(\sigma+it)| = c_1 \frac{|\Gamma(1-s)|}{|\Gamma(s)|} \ll |t|^{1-2\sigma} \qquad (|t|>1),$$

то из неравенства (16) получим

$$A_2 \ll \int_0^T \tau^{2-4\sigma} dJ(\tau) \ll T^{2-4\sigma} \cdot T^{2\sigma+\varepsilon} + \int_0^T J(\tau) \tau^{1-4\sigma} d\tau \ll T^{2-2\sigma+\varepsilon}. \quad (17)$$

Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ из оценок (15) и (17) следует справедливость оценки (12). Тем самым теорема 1 доказана.

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям §2 этой главы, получаем в качестве следствия из теоремы 1 следующее утверждение.

Теорема 2. *Если характеры Гекке $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d натуральное, таковы, что $\chi_j \neq \chi_k$ и $\chi_j \neq \bar{\chi}_k$, то не существует непрерывной функции $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, отличной от нуля, для которой*

$$F(L(s,\chi_1), L(s,\chi_2), \ldots, L(s,\chi_n)) = 0$$

тождественно по s.

3. Нули дзета-функций квадратичных форм. Пусть $K(x,y)$ — положительно определенная квадратичная форма от двух переменных. По определению при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s,K) = \sum_{\substack{m^2+n^2\neq 0 \\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2}} \frac{1}{K(m,n)^s}.$$

Т е о р е м а 3 . *Пусть число классов дивизоров поля* $\mathbf{Q}($ — *где* $d > 0$, $d \in \mathbf{N}$, *больше одного. Пусть дискриминант квадрати ной формы* K *с целыми коэффициентами равен дискриминанту по* $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. *Тогда для любых* σ_1 *и* σ_2 *таких, что* $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, *области* $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$, $|\operatorname{Im} s| < T$ *при* T *достаточно большом име ется более чем* cT *нулей* $\zeta(s, K)$; $c = c(\sigma_1, \sigma_2, K)$ — *положительна величина, не зависящая от* T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы П.12.3

$$\zeta(s, K) = \frac{2}{h(-d)} \sum_{\chi \in \mathrm{Cl}} \bar{\chi}(A) L(s, \chi). \tag{18}$$

Поскольку $L(s,\chi) = L(s,\bar{\chi})$, то, объединяя в сумме (18) члены с одинаковыми $L(s,\chi)$, получим

$$\zeta(s, K) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L(s, \chi_k), \tag{19}$$

причем $\chi_k \neq \chi_j$ и $\chi_k \neq \bar{\chi}_j$ при $k \neq j$. Заметим, что при наши предположениях в формуле (19) число слагаемых n больше единицы.

Рассмотрим функцию

$$f(s, \bar{\theta}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(s, \chi_k, \bar{\theta}),$$

где $F(s, \chi_k, \bar{\theta})$ определены формулой (11) этого параграфа. Так как среди чисел α_k по крайней мере два отличных от нуля, то можно найти числа $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = 0.$$

В силу леммы 4.4 существует $\bar{\theta} \in \omega$ такое, что $F\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \chi_k, \bar{\theta}\right) = a_k$. Поэтому для такого $\bar{\theta} \in \omega$

$$f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \bar{\theta}\right) = 0.$$

Поскольку

$$F(s, \chi, \bar{\theta}) = \varepsilon(s, \bar{\theta}) \prod_{p \in P_1} \left(1 - \frac{e^{-4\pi i \theta_p}}{p^{2s}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{p \in P_2} \left(1 - 2\frac{\operatorname{Re} \chi(\mathrm{p})}{p^s} e^{-2\pi i(\theta_p^{(0)} + \theta_p)} + \frac{e^{-4\pi i(\theta_p^{(0)} + \theta_p)}}{p^{2s}}\right)^{-1},$$

причем произведения по простым числам равномерно сходятся в области $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$, $|\operatorname{Im} s| < 10$, то можно найти множества простых чисел $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, удовлетворяющие условиям леммы 3.1. Можно

считать, что $M_j = \{p : p \leq j\}$, $\bar{\theta}_j = \bar{\theta}$. Вследствие оценки (12)

$$\int_{-T}^{T} |L(\sigma + it, \chi)|^2 \, dt \ll T.$$

Поэтому из леммы 3.1 заключаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся t, для которых при $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{\left|s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right| \leq r} \left|L(s + it, \chi_k) - F(s, \chi_k, \bar{\theta})\right| < \varepsilon, \tag{20}$$

где $r \in (0, (\sigma_2 - \sigma_1)/2)$— фиксированное число. Возьмем r таким, чтобы выполнялось

$$\min_{\left|s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right| = r} |f(s, \bar{\theta})| > 0.$$

В силу неравенства (20) и произвольности $\varepsilon > 0$ найдутся t такие, что

$$\max \left|\zeta(s + it, K) - f(s, \bar{\theta})\right| < \frac{1}{5} \min_{\left|s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right| = r} \left|f(s, \bar{\theta})\right|.$$

Из теоремы П.2.6 теперь заключаем, что $\zeta(s + it, K)$ имеет нуль внутри круга $\left|s - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right| < r$. Поскольку из теоремы П.8.1 следует, что мера таких $t \in (0, T)$ при T, достаточно больших, больше чем cT , то теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Изучением распределения значений $\zeta(\sigma + it)$ при фиксированном σ и меняющемся $t \in (-\infty, \infty)$ первым начал заниматься Г.Бор. Им, совместно с Курантом, доказана, в частности, теорема о всюду плотности $\zeta(\sigma + it), -\infty < t < \infty, \sigma \in (1/2, 1)$. (См. [92—113].)

2. Вопрос дифференциальной независимости $\zeta(s)$ был затронут в 1900 г. Д.Гильбертом [26]. Он предполагал, что $\zeta(s)$ и подобные ей функции не удовлетворяют алгебраическим дифференциальным уравнениям. Утверждения, сформулированные Д.Гильбертом, были доказаны в [73,156]. Как это следует из доклада Д.Гильберта, он мог, основываясь на теореме Гельдера об алгебраической дифференциальной независимость $\Gamma(s)$, доказывать алгебраическую дифференциальную независимость $\zeta(s)$. (См.также [78, 79].)

3. Изложение теорем об универсальности и их приложений к дифференциальной независимости следовало работе [22], а также более ранним вариантам в [18]. Другие подходы к этой тематике, обобщения и усиления теорем этой главы см. [159, 50, 51, 91, 119].

4. В работе [116] Г.Давенпортом и Г.Хейльбронном было показано, что дзета-функции класса идеалов квадратичного поля имеют бесконечно много нулей в области $\operatorname{Re} s > 1$, если только число классов поля больше единицы.

ГЛАВА VIII
Ω-ТЕОРЕМЫ

Пусть $f(t)$ — комплекснозначная функция, $\varphi(t)$ — положительн функция. Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены при $t \in [T_0, \infty)$.

Определение 1. Равенство

$$f(t) = \Omega(\varphi(t)), \qquad t \to \infty, \qquad (1$$

означает, что существуют число $A > 0$ и последовательность $t_j \to \infty$, $t_j \in [T_0, \infty)$, для которых выполняется

$$|f(t_j)| > A\varphi(t_j).$$

В определении 1 знак ∞ может быть заменен на $-\infty$ и, бол общо, на некоторую предельную точку области определения $f(t)$ $\varphi(t)$. Утверждения типа (1) называются *Ω-теоремами*. Ясно, что теоремы являются отрицаниями o-теорем.

Заметим здесь, что утверждение

$$f(t) = \Omega(\varphi(t)), \qquad t \to \infty, \quad \text{для} \quad \varphi(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

означает, что $\varphi(T) \ll \sup\limits_{0 \le t \le T} |f(t)|$ при T достаточно больших.

В этой главе рассматриваются Ω-теоремы, касающиеся поведения $\zeta(\sigma + it)$ при фиксированном σ и растущем t. Ограничимся рассмотрением случая $\sigma \ge 1/2$, так как вследствие функционального уравнения Римана для дзета-функции случай $\sigma < 1/2$ сводится к случаю $\sigma > 1/2$.

§ 1. Поведение $|\zeta(\sigma + it)|$, $\sigma > 1$

В области $\mathrm{Re}\, s > 1$ дзета-функция Римана представляется абсолютно сходящимся рядом Дирихле. При фиксированном $\sigma > 1$ функция $\zeta(\sigma + it)$ является равномерной почти периодической функцией (в смысле Г.Бора). Поэтому все общие теоремы, касающиеся поведения почти периодических функций, будут выполняться и для $\zeta(\sigma + it)$. Наше изложение будет свободным от ссылок на общую теорию.

Теорема 1. *Если $\sigma > 1$, то $|\zeta(\sigma + it)| \le \zeta(\sigma)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и в то же время неравенство*

$$|\zeta(\sigma + it)| > (1 - \varepsilon)\zeta(\sigma)$$

разрешимо для любых $\varepsilon > 0$ и сколь угодно больших t.

Доказательство. Поскольку $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, то

$$|\zeta(\sigma + it)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} = \zeta(\sigma).$$

Для доказательства второго утверждения применим теорему II.8.4 (теорему Дирихле об аппроксимациях).

Для произвольного натурального N выполняется

$$|\zeta(\sigma + it)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \ge \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| - \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \ge$$

$$\ge \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} e^{-it\ln n}\right| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}. \qquad (1)$$

В силу теоремы II.8.4 для заданных натурального $q \ge 4$ и вещественного $t_0 > 0$ найдется $t \in (t_0, t_0 q^N)$ такое, что

$$\left\| t \frac{\ln n}{2\pi} \right\| < \frac{1}{q} \qquad (2)$$

при $n = 1, 2, \ldots, N$. Будем считать, что $t_0 > 1$. Для t, удовлетворяющих неравенствам (2), выполняется неравенство $\cos(t \ln n) \ge \cos(2\pi/q)$. Поэтому для таких t

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} e^{-it\ln n}\right| \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} \cos(t \ln n) \ge \cos\frac{2\pi}{q} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} >$$

$$> \cos\frac{2\pi}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \cos\frac{2\pi}{q} \cdot \zeta(\sigma) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

В силу неравенства (1) из последнего неравенства следует, что

$$|\zeta(\sigma + it)| \ge \cos\frac{2\pi}{q} \cdot \zeta(\sigma) - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}. \qquad (3)$$

Поскольку

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < \int_N^{\infty} u^{-\sigma} du = \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma - 1},$$

а

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \ge \int_1^{\infty} u^{-\sigma} du = \frac{1}{\sigma - 1},$$

что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma} < N^{1-\sigma}\zeta(\sigma). \qquad (4)$$

Из неравенства (3) и (4) заключаем, что для t, удовлетворяющих неравенствам (2), выполняется неравенство

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \left(\cos\frac{2\pi}{q} - 2N^{1-\sigma}\right)\zeta(\sigma). \qquad (5)$$

Поскольку в неравенстве (5) t_0, q и N могут быть выбраны сколь угодно большими, то теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Функция* $\zeta(\sigma)$ *неограничена в области* $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Im} s > 1$.

Доказательство. Действительно, $\zeta(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to 1+0$. Из неравенства $|\zeta(\sigma+it)| > (1-\varepsilon)\zeta(\sigma)$ при сколь угодно больших t следует справедливость следствия 1.

Докажем теперь аналогичную теорему для функции $\frac{1}{\zeta(s)}$. Так как

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

то коэффициенты ряда Дирихле для $\frac{1}{\zeta(s)}$ не все одного знака. В такой ситуации рассуждения доказательства теоремы 1, основанные на применении теоремы Дирихле, не ведут к желаемой цели. Поэтому здесь будем применять теорему Кронекера об аппроксимациях — теорему П.8.1.

Теорема 2. *При* $\sigma > 1$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leq \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ *и в то же время для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует сколь угодно большие* t, *для которых* $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \geq (1-\varepsilon)\frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}$.

Доказательство. Из основной теоремы арифметики — теоремы об однозначном разложении на простые множители целых чисел — следует, что натуральные логарифмы простых чисел линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Действительно, пусть существует соотношение

$$\sum_p \alpha_p \ln p = 0, \qquad (6)$$

в котором $\alpha_p \in \mathbb{Q}$, $\alpha_p = 0$ за исключением конечного числа p и $\sum_p |\alpha_p| \neq \neq 0$. Умножая на общий знаменатель чисел α_p, можно считать, что в соотношении (6) все α_p целые. Потенцируя соотношение (6), получим

$$\prod_p p^{\alpha_p} = 1. \qquad (7)$$

В силу однозначности разложения на простые множители в кольце $\mathbb{Z}$

из равенства (7) следует, что $\alpha_p = 0$ для всех p. Полученное противоречие показывает, что числа $\ln p$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. В силу теоремы П.8.1 (теоремы Кронекера) из линейной независимости $\ln p$ следует, что система неравенств

$$\left\| t\frac{\ln p}{2\pi} - \frac{1}{2}\right\| < \delta, \qquad p \leq N, \qquad (8)$$

разрешима относительно t при произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Из неравенства (8) следует, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\prod_{p\leq N}\left(1-p^{-(\sigma+it)}\right)\right| = \prod_{p\leq N}(1+p^{-\sigma}). \qquad (9)$$

Заметим теперь, что при $\sigma > 1$

$$|\zeta^{-1}(s)| = \left|\prod_{p\leq N}(1-p^{-s})\right|\cdot\left|\prod_{p>N}(1-p^{-s})\right| =$$

$$= \left|\prod_{p\leq N}(1-p^{-s})\right|\cdot\left[1 + O\left(\left|\prod_{p>N}(1-p^{-s}) - 1\right|\right)\right]. \qquad (10)$$

Поскольку

$$\left|\sum_{p>N}(1-p^{-s}) - 1\right| \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n^\sigma} \leq \int_N^\infty u^{-\sigma}du = \frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1},$$

то из соотношения (10) получаем

$$|\zeta^{-1}(s)| = \left|\prod_{p\leq N}(1-p^{-s}) + O\left(\frac{N^{1-\sigma}}{\sigma-1}\left|\prod_{p\leq N}(1-p^{-s})\right|\right)\right|.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\zeta^{-1}(s)| = \lim_{N\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\prod_{p\leq N}(1-p^{-s})\right| =$$

$$= \prod_p(1+p^{-\sigma}) = \prod_p\frac{1-p^{-2\sigma}}{1-p^{-\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}.$$

Это доказывает теорему 2.

Следствие 2. *Функция* $\zeta^{-1}(s)$ *неограничена в области* $\operatorname{Re} s > 1$.

Доказательство. В области $\sigma > 1$ функция $\zeta(2\sigma) \asymp 1$, а $|\zeta(\sigma)|$ неограничена. В силу теоремы 2 функция $|\zeta^{-1}(s)|$ также будет неограниченной.

§ 2. Ω-теоремы для ζ-функции Римана в критической полосе

В области $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$ ряд Дирихле для дзета-функции Римана расходится. Поэтому непосредственное применение теоремы Дирихле и теоремы Кронекера невозможно. Доказательство теорем этого параграфа будет основано на следующем соображении.

Лемма 1. *Пусть $F(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой отличной от тождественного нуля непрерывной функции $\varphi(t)$, определенной на $[a,b]$, выполняется*

$$\max_{t\in[a,b]}|F(t)| \geq \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}, \qquad \min_{t\in[a,b]}|F(t)| \leq \sqrt{\frac{I_1}{I_0}},$$

где

$$I_0 = \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt, \qquad I_1 = \int_a^b |\varphi(t)|^2 |F(t)|^2 dt.$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$I_1 = \int_a^b |\varphi(t)|^2|F(t)|^2dt \leq \max_{t\in[a,b]}|F(t)|^2 \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt = \left(\max_{t\in[a,b]}|F(t)|\right)^2 I_0,$$

$$I_1 = \int_a^b |\varphi(t)|^2|F(t)|^2dt \geq \min_{t\in[a,b]}|F(t)|^2 \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt = \left(\min_{t\in[a,b]}|F(t)|\right)^2 I_0,$$

что и доказывает лемму 1.

Будем считать, что

$$\varphi(t) = \prod_{p\leq x}\left(1+\frac{l_p}{p^{it}}\right),$$

где $l_p \in \mathbb{C}$ и $|l_p| = 1$. Полагая $F(t) = \zeta(\sigma+it)$, получим вследствие леммы 1

$$\max_{t\in[T,2T]}|\zeta(\sigma+it)| \geq \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}, \tag{1}$$

$$\min_{t\in[T,2T]}|\zeta(\sigma+it)| \leq \sqrt{\frac{I_1}{I_0}}, \tag{2}$$

где

$$I_0 = \int_T^{2T} |\varphi(t)|^2 dt, \qquad I_1 = \int_T^{2T} |\varphi(t)|^2|\zeta(\sigma+it)|^2 dt.$$

Подбирая соответствующим образом $\varphi(t)$ и значения l_p, получим в этом разделе две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть σ — фиксированное число, $1/2 < \sigma < 1$. Тогда существует постоянная $c = c(\sigma) > 0$ такая, что неравенство*

$$|\zeta(\sigma+it)| > \exp\left(c\frac{(\ln|t|)^{1-\sigma}}{\ln\ln|t|}\right)$$

выполняется для сколь угодно больших значений t. Другими словами,

$$\zeta(\sigma+it) = \Omega\left(\exp\left(c\frac{(\ln|t|)^{1-\sigma}}{\ln\ln|t|}\right)\right).$$

Теорема 2. *Пусть σ — фиксированное число, $1/2 < \sigma < 1$. Тогда существует постоянная $c = c(\sigma)$ такая, что неравенство*

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} > \exp\left(c\frac{(\ln|t|)^{1-\sigma}}{\ln\ln|t|}\right)$$

выполняется для сколь угодно больших значений t, т.е.

$$\zeta^{-1}(\sigma+it) = \Omega\left(\exp\left(c\frac{(\ln|t|)^{1-\sigma}}{\ln\ln|t|}\right)\right).$$

Для доказательства теоремы 1 и теоремы 2 сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. Найдем для I_1 более подходящее нашим целям выражение.

В силу следствия III.2.1 при $s = \sigma+it, t\in[T,2T], T \geq 1$, выполняется

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s} - \frac{T^{1-s}}{1-s} + O\left(T^{-\sigma}\right) = \sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s} + O\left(T^{-\sigma}\right).$$

Следовательно,

$$I_1 = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s}+O\left(T^{-\sigma}\right)\right|^2 dt = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s}\right|^2 dt +$$
$$+O\left(T^{-\sigma}\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s}\right|dt\right) + O\left(T^{-2\sigma}I_0\right).$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$I_1 = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s}\right|^2 dt +$$
$$+O\left(T^{-\sigma}\left(\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\leq T}\frac{1}{n^s}\right|^2dt\right)^{1/2} I_0^{1/2}\right) + O\left(T^{-2\sigma}I_0\right). \tag{3}$$

Положим $\zeta_x(s) = \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$. Тогда

$$\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}\right|^2 dt = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\zeta_x(s)+\left(\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}-\zeta_x(s)\right)\right|^2 dt =$$

$$= \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\,|\zeta_x(s)|^2\,dt +$$

$$+O\left(\left(\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\,|\zeta_x(s)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}-\zeta_x(s)\right|^2 dt\right)^{1/2}\right)+$$

$$+O\left(\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}-\zeta_x(s)\right|^2 dt\right). \qquad (4)$$

Положим, далее,

$$I_1' = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2|\zeta_x(s)|^2 dt, \qquad (5)$$

$$I_1'' = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\sum_{n\le T}\frac{1}{n^s}-\zeta_x(s)\right|^2 dt. \qquad (6)$$

Из соотношений (3) и (4) получим, что

$$I_1 = I_1' + O\left((I_1')^{1/2}(I_1'')^{1/2}\right) + O(I_1'')+$$
$$+O\left(T^{-\sigma}I_0^{1/2}\left({I_1'}^{1/2}+{I_1''}^{1/2}\right)\right)+O\left(T^{-2\sigma}I_0\right). \qquad (7)$$

Для доказательства теорем 1 и 2 будем оценивать сверху I_1'', а для I_0 и I_1' найдем асимптотические выражения.

Л е м м а 2. *Пусть* $U\ge 1$, $\sigma\in(1/2,1]$, $1\le n_1,n_2\le Q$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{1}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll Q+U^{2(1-\sigma)}\ln^3 U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{1}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} = \sum_{\substack{(m_1,m_2)=1\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}\times$$

$$\times\sum_{\substack{k\\ k\max(m_1,m_2)\le U}}\frac{1}{(km_1)^\sigma}\cdot\frac{1}{(km_2)^\sigma} \ll \left(\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\right)\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\ (m_1,m_2)=1\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{1}{(m_1m_2)^\sigma}\times$$

$$\times\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll \sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\ (m_1,m_2)=1\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{1}{(m_1m_2)^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}. \qquad (8)$$

Пусть $\Pi = \Pi[V_1,V_2]$ обозначает множество пар натуральных чисел (m_1,m_2) с условиями $V_1<m_1\le 2V_1, V_2<m_2\le 2V_2$, $(m_1,m_2)=1$, $m_1n_1\ne m_2n_2$. Если пара $(m_1,m_2)\in\Pi$, то поскольку $|\ln(a/b)|\ge$ $\ge(\min(a,b))^{-1}$ для $a,b\in\mathbb{N}$, $a\ne b$,

$$\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right| \gg (\min(m_1n_1,m_2n_2))^{-1} \gg (Q\sqrt{m_1m_2})^{-1} \gg Q^{-1}(V_1V_2)^{-1/2}. \qquad (9)$$

Если пары (m_1,m_2) и (m_1',m_2') принадлежат Π, $(m_1,m_2)\ne(m_1',m_2')$, то

$$\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}-\ln\frac{m_1'n_1}{m_2'n_2}\right| = \left|\ln\frac{m_1}{m_2}-\ln\frac{m_1'}{m_2'}\right| = \left|\ln\frac{m_1m_2'}{m_2m_1'}\right| \gg (V_1V_2)^{-1}. \quad (10)$$

Расположим числа $\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}$ в порядке возрастания. Оценка (10) показывает, что расстояние между соседними числами будет $\gg(V_1V_2)^{-1}$. В силу оценки (9) получаем

$$\sum_{(m_1,m_2)\in\Pi}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll Q(V_1V_2)^{1/2}+\sum_{k\ll V_1V_2}\frac{1}{kh},$$

где $h=(V_1V_2)^{-1}$. Поэтому

$$\sum_{(m_1,m_2)\in\Pi}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll Q(V_1V_2)^{1/2}+V_1V_2\ln(V_1V_2).$$

Следовательно,

$$\sum_{(m_1,m_2)\in\Pi}\frac{1}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll$$

$$\ll (V_1V_2)^{-\sigma}\left(Q(V_1V_2)^{1/2}+V_1V_2\ln(V_1V_2)\right) =$$

$$= Q(V_1V_2)^{1/2-\sigma}+(V_1V_2)^{1-\sigma}\ln(V_1V_2). \qquad (11)$$

Разобьем сумму $\sum\limits_{\substack{m_1,m_2\le U\\ (m_1,m_2)=1\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}$ в правой части неравенства (8) на суммы вида $\sum\limits_{(m_1,m_2)\in\Pi}$. Применяя к каждой получившейся сумме неравенство (11), получим

$$\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\(m_1,m_2)=1\\m_1n_1\ne m_2n_2}} \frac{1}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1} \ll Q+U^{2(1-\sigma)}\ln^3 U. \qquad (1$$

Из неравенств (8) и (12) следует утверждение леммы 2.

Л е м м а 3. *Пусть Q, $U\ge 1$, $\sigma\in(1/2,1]$ фиксировано, $a_n\in$ Тогда*

$$\sum_{n_1,n_2\le Q}\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\m_1n_1\ne m_2n_2}} \frac{|a_{n_1}||a_{n_2}|}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{n\le Q}|a_n|^2\right)Q\left(Q+U^{2(1-\sigma)}\ln^3 U\right)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $|a_{n_1}||a_{n_2}|\ll|a_{n_1}|^2+|a_{n_2}|^2$ Поэтому вследствие леммы 2

$$\sum_{n_1,n_2\le Q}\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\m_1n_1\ne m_2n_2}} \frac{|a_{n_1}||a_{n_2}|}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}\ll$$

$$\ll\sum_{n_1,n_2\le Q}\left(|a_{n_1}|^2+|a_{n_2}|^2\right)\sum_{\substack{m_1,m_2\le U\\m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{1}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}\ll$$

$$\ll\sum_{n_1,n_2\le Q}\left(|a_{n_1}|^2+|a_{n_2}|^2\right)\left(Q+U^{2(1-\sigma)}\ln^3 U\right)\ll$$

$$\ll\left(\sum_{n\le Q}|a_n|^2\right)Q\left(Q+U^{2(1-\sigma)}\ln^3 U\right),$$

что и доказывает лемму.

Пусть M — множество натуральных чисел, в разложение которых входят лишь простые числа, не превосходящие x. Положим

$$Q=\prod_{p\le x}p. \qquad (13)$$

Л е м м а 4. *При $x\ge 10$ имеет место неравенство*

$$\exp\left(x-A\frac{x}{\ln x}\right)\le Q\le\exp\left(x+A\frac{x}{\ln x}\right),$$

где A — некоторая положительная постоянная, а Q определено равенством (13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения Q следует, что

$$\ln Q=\sum_{p\le x}\ln p=\psi(x)+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$$

где $\psi(x)$ — функция Чебышева. Из асимптотического закона распределения простых чисел — теоремы II.5.1 — получаем

$$\ln Q=x+O\left(x\exp\left(-c\sqrt{\ln x}\right)\right)=x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Это доказывает лемму.

Л е м м а 5. *Пусть $x\ge 10, T>Q^3$. Тогда*

$$I_0=2^{\pi(x)}\left(T+O(Q^2)\right),$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Раскрывая скобки в выражении для $\varphi(t)$, получим

$$\varphi(t)=\sum_{n\in M}\frac{a_n}{n^{it}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{it}}.$$

Тогда

$$I_0=\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2dt=\int_T^{2T}\left|\sum_{n\in M}\frac{a_n}{n^{it}}\right|^2dt=$$

$$=T\sum_{n\in M}|a_n|^2+O\left(\sum_{n_1\ne n_2}|a_{n_1}||a_{n_2}|\left|\ln\frac{n_1}{n_2}\right|^{-1}\right). \qquad (14)$$

Полагая $U=1$, получим из леммы 3

$$\sum_{n_1\ne n_2}|a_{n_1}||a_{n_2}|\left|\ln\frac{n_1}{n_2}\right|^{-1}\ll Q^2\sum_n|a_n|^2. \qquad (15)$$

Так как

$$\varphi(t)=\prod_{p\le x}\left(1+\frac{l_p}{p^{it}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{it}}, \qquad (16)$$

то

$$\sum_n|a_n|^2=2^{\pi(x)}. \qquad (17)$$

Следовательно, из неравенств (15) и (17) получаем

$$\sum_{n_1\ne n_2}|a_{n_1}||a_{n_2}|\left|\ln\frac{n_1}{n_2}\right|^{-1}\ll Q^2 2^{\pi(x)}. \qquad (18)$$

Из неравенств (14) и (18) следует, что

$$I_0=T2^{\pi(x)}+O\left(Q^2 2^{\pi(x)}\right). \qquad (19)$$

Лемма тем самым доказана.

Л е м м а 6. *Пусть x, Q и T такие же, как и в формулировке леммы 5, $\sigma\in(1/2,1)$. Тогда*

$$I_1'\asymp T2^{\pi(x)}\prod_{p\le x}\left(1+\frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right).$$

Доказательство. Из определения I'_1, $\varphi(t)$, M и $\zeta_x(s)$ и

$$I'_1 = \int\limits_T^{2T} \left|\sum_{n\in M} \frac{a_n}{n^{it}}\right|^2 \left|\sum_{m\in M} \frac{1}{m^\sigma} m^{-it}\right|^2 dt,$$

где коэффициенты a_n определены равенством $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in M} \frac{a_n}{n^{it}}$.

Поскольку при $\sigma > 1/2$

$$\left|\sum_{m\in M} \frac{1}{m^\sigma} m^{-it}\right| = \left|\prod_{p\le x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| = \left|\prod_{p\le x} \frac{1+1/p^s}{1-1/p^{2s}}\right| \asymp \left|\prod_{p\le x} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\right|, \tag{20}$$

то

$$I'_1 \asymp I'_2 = \int\limits_T^{2T} \left|\sum_{n\in M} \frac{a_n}{n^{it}}\right|^2 \left|\prod_{p\le x} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\right|^2 dt. \tag{21}$$

Далее,

$$I'_2 = \int\limits_T^{2T} \left(\sum_{n\in M} \frac{a_n}{n^{it}}\right) \left(\overline{\sum_{n\in M} \frac{a_n}{n^{it}}}\right) \left(\sum_{m\in M} \frac{|\mu(m)|}{m^\sigma} m^{-it}\right) \left(\sum_{m\in M} \frac{|\mu(m)|}{m^\sigma} m^{it}\right) dt =$$

$$= \sum_{n_1,n_2\in M} \sum_{m_1,m_2\in M} a_{n_1}\bar a_{n_2} \frac{|\mu(m_1)|}{m_1^\sigma} \cdot \frac{|\mu(m_2)|}{m_2^\sigma} \int\limits_T^{2T} \left(\frac{n_1 m_1}{n_2 m_2}\right)^{it} dt =$$

$$= T\Sigma_1 + O(\Sigma_2), \tag{22}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n_1,n_2\in M} \sum_{\substack{m_1,m_2\in M \\ m_1 n_1 = m_2 n_2}} \frac{a_{n_1}\bar a_{n_2} |\mu(m_1)||\mu(m_2)|}{m_1^\sigma m_2^\sigma},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{n_1,n_2\in M} \sum_{\substack{m_1,m_2\in M \\ m_1 n_1 \ne m_2 n_2}} \frac{|a_{n_1}||a_{n_2}||\mu(m_1)||\mu(m_2)|}{m_1^\sigma m_2^\sigma} \left|\ln \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}\right|^{-1}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\Sigma_2 \ll \left(\sum_{n\in M} |a_n|^2\right) Q \left(Q + Q^{2(1-\sigma)} \ln^3 Q\right) \ll Q^2 \sum_{n\in M} |a_n|^2.$$

Из равенства (20) получаем, что

$$\Sigma_2 \ll Q^2 2^{\pi(x)}. \tag{23}$$

Для подсчета Σ_1 введем, как и в доказательстве леммы 5, вещественные независимые переменные θ_p, индексированные простыми

числами. Имеем, вследствие теоремы П.8.2,

$$\Sigma_1 = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int\limits_{-\tau}^{\tau} |\varphi(t)|^2 \left|\prod_{p\in M} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} p^{-it}\right)\right|^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \left|\prod_{p\le x} (1 + l_p e^{-2\pi i\theta_p})\right|^2 \left|\prod_{p\le x} \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} e^{-2\pi i\theta_p}\right)\right|^2 d\theta_2 d\theta_3 \dots =$$

$$= \prod_{p\le x} \left(\int\limits_0^1 |1 + l_p e^{-2\pi i\theta}|^2 \left|1 + \frac{1}{p^\sigma} e^{-2\pi i\theta}\right|^2 d\theta\right).$$

Поскольку

$$(1 + l_p e^{-2\pi i\theta}) \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} e^{-2\pi i\theta}\right) = 1 + \left(l_p + \frac{1}{p^\sigma}\right) e^{-2\pi i\theta} + \frac{l_p}{p^\sigma} e^{-4\pi i\theta},$$

то

$$\int\limits_0^1 |1 + l_p e^{-2\pi i\theta}|^2 \left|1 + \frac{1}{p^\sigma} e^{-2\pi i\theta}\right|^2 d\theta = 1 + \left|l_p + \frac{1}{p^\sigma}\right|^2 + \frac{|l_p|^2}{p^{2\sigma}} =$$

$$= 1 + |l_p|^2 + \frac{1}{p^\sigma}(l_p + \bar l_p) + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{|l_p|^2}{p^{2\sigma}} = 2\left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}}\right).$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 = \prod_{p\le x} \left(2\left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}}\right)\right) \asymp 2^{\pi(x)} \prod_{p\le x} \left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right). \tag{24}$$

Из соотношений (22), (23) и (24) получим

$$I'_2 \asymp 2^{\pi(x)} \left(T \prod_{p\le x} \left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right) + Q^2\right).$$

Так как

$$\ln \prod_{p\le x} \left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right) = \sum_{p\le x} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \gg -\sum_{n\le x} \frac{1}{n^\sigma} \gg -c_0\sqrt{x},$$

где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная, а вследствие леммы 4 $Q \ge \exp\left(x - A\frac{x}{\ln x}\right)$, то из условия $T > Q^3$ получим

$$I'_2 \asymp T 2^{\pi(x)} \prod_{p\le x} \left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right).$$

Вследствие равенства (21) имеем

$$I'_1 \asymp T 2^{\pi(x)} \prod_{p\le x} \left(1 + \frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right),$$

что и доказывает лемму 6.

Лемма 7. *Пусть выполняются условия леммы 5. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*
$$I_1'' \ll T2^{\pi(x)} \prod_{p\le x}\left(1+\frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right)\left(x^{1-2\sigma}T + Q^4 + QT^{2(1-\sigma)+\varepsilon}\right)$$
(I_1'' определено равенством (6)).

Доказательство. Из определения $\zeta_x(s)$ имеем
$$\sum_{m\le T}\frac{1}{m^s} - \zeta_x(s) = \sum_{m\le T}\frac{1}{m^s} - \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} =$$
$$= \zeta_x(s)\left(\left(\sum_{m\le T}\frac{1}{m^s}\right)\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)-1\right) = \zeta_x(s)\sum_{m\le TQ}\frac{b_m}{m^s},$$
где числа b_m удовлетворяют соотношениям $b_1 = 0$; $b_m = 0$ при $(m,Q) > 1$ и $m\in[1,T]$; $b_m = 1$ при $(m,Q) = 1$ и $m\in[1,T]$; $|b_m| \le \tau(m) \ll m^\varepsilon$.

Из равенства (6) получаем
$$I_1'' = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\zeta_x(s) - \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right|^2 dt \ll A_1 + A_2, \tag{25}$$
где
$$A_1 = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2|\zeta_x(s)|^2\left|\sum_{m\le T}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt, \tag{26}$$
$$A_2 = \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2|\zeta_x(s)|^2\left|\sum_{T<m\le TQ}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt. \tag{27}$$
Поскольку
$$|\zeta_x(s)| = \left|\prod_{p\le x}\frac{1+1/p^s}{1-1/p^{2s}}\right| \asymp \left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|,$$
то
$$A_1 \ll \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2\left|\sum_{x<m\le T}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt =$$
$$= \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2\left(\sum_{x<m_1\le T}\frac{b_{m_1}}{m_1^s}\right)\left(\sum_{x<m_2\le T}\frac{\bar b_{m_2}}{m_2^{\bar s}}\right)dt =$$
$$= \int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2\sum_{x<m\le T}\frac{|b_m|^2}{m^{2\sigma}}dt +$$

$$+\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2\sum_{\substack{x<m_1\le T\\ x<m_2\le T\\ m_1\ne m_2}}\frac{b_{m_1}\bar b_{m_2}}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{it}dt. \tag{28}$$

Первую сумму в правой части неравенства (28) обозначим символом A_1', вторую — символом A_1''. Из определения A_1' имеем
$$A_1' \asymp \left(\sum_{x<m\le T}\frac{|b_m|^2}{m^{2\sigma}}\right)\int_T^{2T}|\varphi(t)|^2|\zeta_x(s)|^2 dt = I_1'\sum_{x<m\le T}\frac{|b_m|^2}{m^{2\sigma}}.$$

Поскольку $\sum\limits_{x<m\le T}\frac{|b_m|^2}{m^{2\sigma}} \ll x^{1-2\sigma}$, то из леммы 6 следует, что
$$A_1' \ll x^{1-2\sigma}T\cdot 2^{\pi(x)}\prod_{p\le x}\left(1+\frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right). \tag{29}$$
Для оценки A_1'' применим лемму 3. Пусть
$$\varphi(t)\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right) = \sum_n\frac{c_n}{n^{it}}.$$
Тогда, выражая A_1'' через c_n, получим
$$A_1'' = \int_T^{2T}\sum_{n_1,n_2}c_{n_1}\bar c_{n_2}\sum_{\substack{x<m_1,m_2\le T\\ m_1\ne m_2}}\frac{b_{m_1}\bar b_{m_2}}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left(\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right)^{it}dt =$$
$$= \sum_{n_1,n_2}\sum_{\substack{x<m_1\le T\\ (m_1,Q)=1}}\sum_{\substack{x<m_2\le T\\ (m_2,Q)=1\\ m_1\ne m_2}}\frac{c_{n_1}c_{n_2}}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\int_T^{2T}\left(\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right)^{it}dt. \tag{30}$$
Так как при $m_1\ne m_2$ в суммах, входящих в равенство (30), выполняется $m_1n_1\ne m_2n_2$ и при $A>0$
$$\int_T^{2T}A^{it}dt \ll \frac{1}{|\ln A|},$$
то
$$A_1'' \ll \sum_{n_1,n_2}\sum_{x<m_1\le T}\sum_{\substack{x<m_2\le T\\ m_1n_1\ne m_2n_2}}\frac{|c_{n_1}||c_{n_2}|}{m_1^\sigma m_2^\sigma}\left|\ln\frac{m_1n_1}{m_2n_2}\right|^{-1}.$$
Применяя лемму 3, получим
$$A_1'' \ll \left(\sum_n|c_n|^2\right)Q^2\left(Q^2 + T^{2(1-\sigma)}\ln^3 T\right). \tag{31}$$

Из равенства (24) заключаем, что

$$\sum_n |c_n|^2 \ll 2^{\pi(x)} \prod_{p\le x}\left(1+\frac{\operatorname{Re} l_p}{p^\sigma}\right).$$

Подставляя последнюю оценку в неравенство (31), получим

$$A_1'' \ll 2^{\pi(x)} \prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right) Q^2\left(Q^2+T^{2(1-\sigma)}\ln^3 T\right). \tag{32}$$

Далее, из формулы (23) выводим

$$A_2 \ll B\int_T^{2T}\left|\sum_{T<m\le QT}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt, \tag{33}$$

где

$$B = \sup_{-\infty<t<+\infty} |\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2.$$

Так как

$$\int_T^{2T}\left|\sum_{T<m\le QT}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt = T\sum_{T<m\le QT}\frac{|b_m|^2}{m^{2\sigma}}+$$

$$+O\left(\sum_{T<m_1\le QT}\ \sum_{\substack{T<m_2\le QT\\ m_1\ne m_2}}\frac{|b_{m_1}||b_{m_2}|}{m_1^{2\sigma}m_2^{2\sigma}}\left|\ln\frac{m_1}{m_2}\right|^{-1}\right),$$

то, учитывая неравенство $b_m \ll m^\varepsilon$, получим из леммы 2

$$\int_T^{2T}\left|\sum_{T<m\le QT}\frac{b_m}{m^s}\right|^2 dt \ll T\cdot T^{1-2\sigma+\varepsilon}+(QT)^{2(1-\sigma)+\varepsilon} \ll (QT)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}. \tag{34}$$

Поскольку

$$B = \sup_t |\varphi(t)|^2\left|\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\right|^2 \ll 2^{2\pi(x)}\cdot 2^{2\pi(x)} = 2^{4\pi(x)},$$

то из неравенств (33) и (34) следует, что

$$A_2 \ll 2^{4\pi(x)}(QT)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}. \tag{35}$$

Так как вследствие леммы 4

$$\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right) \ll \exp\left(c_0\sqrt{x}\right),\quad \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \ll \exp\left(-c_0\sqrt{x}\right)$$

с некоторой константой $c_0>0$, то из соотношений (25), (28), (29), (32) и (35) получается утверждение леммы 7.

Доказательство теоремы 1. Положим $l_p = 1$ для всех простых чисел p. Тогда

$$\varphi(t) = \prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^{it}}\right).$$

Положим $T = Q^{4/(2\sigma-1)}$. Тогда при достаточно больших x вследствие леммы 5 выполняется

$$I_0 < 2T\cdot 2^{\pi(x)}. \tag{36}$$

Далее, из лемм 4 и 7 получаем

$$I_1'' \ll 2^{\pi(x)}\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right)x^{1-2\sigma}T. \tag{37}$$

Вследствие леммы 6

$$I_1' \asymp T\cdot 2^{\pi(x)}\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right). \tag{38}$$

Поэтому из неравенства (37) следует

$$I_1'' \ll x^{1-2\sigma}I_1'. \tag{39}$$

Из соотношений (7), (36) и (39) заключаем

$$I_1 = I_1' + O\left(x^{\frac12(1-2\sigma)}I_1'\right)+O\left(T^{-\sigma}I_1'\right) = I_1'\left(1+O\left(x^{\frac12-\sigma}\right)\right). \tag{40}$$

Теперь из неравенства (1) и неравенств (36), (38) следует, что при достаточно больших T

$$\max_{t\in[T,2T]}|\zeta(\sigma+it)| \gg \sqrt{\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right)} \gg \exp\left(\frac12\sum_{p\le x}\frac{1}{p^\sigma}\right).$$

Так как $\sum\limits_{p\le x}\frac{1}{p^\sigma} \gg \pi(x)\frac{1}{x^\sigma} \gg \frac{x^{1-\sigma}}{\ln x}$, то

$$\max_{t\in[T,2T]}|\zeta(\sigma+it)| \gg \exp\left(c_1\frac{x^{1-\sigma}}{\ln x}\right) \tag{41}$$

с некоторой положительной постоянной c_1.

Из леммы 4 следует $x \gg \ln Q$. Ввиду соотношения $Q = T^{(2\sigma-1)/4}$ из неравенства (41) следует теорема 1.

Доказательство теоремы 2. Положим $l_p = -1$. Тогда

$$\varphi(t) = \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^{it}}\right).$$

Полагая, как и в доказательстве теоремы 1, $T = Q^{4/(2\sigma-1)}$, получим при достаточно больших T

$$I_0 > 2^{-1} T \cdot 2^{\pi(x)}. \tag{42}$$

Далее, из лемм 4 и 7 следует, что

$$I_1'' \ll x^{1-2\sigma} T \cdot 2^{\pi(x)} \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right). \tag{43}$$

Из леммы 6 получаем

$$I_1' \ll T \cdot 2^{\pi(x)} \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right). \tag{44}$$

В силу формулы (2) из (42), (43) и (44) находим

$$\min_{t \in [T, 2T]} |\zeta(\sigma + it)| \ll \sqrt{\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)}.$$

Так как $\prod\limits_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \ll \exp\left(-c_2 \frac{x^{1-\sigma}}{\ln x}\right)$ с некоторой положительной постоянной c_2, то вследствие соотношения $\ln Q = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ теорема доказана.

§ 3. Многомерные Ω-теоремы

1. Формулировки теорем. В гл. VII была доказана теорема о всюду плотности в $\mathbf{C}^N$ кривой

$$\gamma(t) = \left(\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \ldots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it)\right),$$

где $\sigma \in (1/2, 1)$ — фиксированное число, t принимает все значения из интервала $(-\infty, \infty)$.

Доказательство этой теоремы было основано на теореме II.6.1, которая является неэффективной; поэтому, задавшись вектором $v \in \mathbf{C}^N$, числами $\sigma \in (1/2, 1)$ и $\varepsilon > 0$, из доказательства нельзя указать T такое, что в интервале $(0, T)$ найдется точка t со свойством

$$\|\gamma(t) - v\| < \varepsilon.$$

Классические Ω-теоремы теории ζ-функции Римана естественно рассматривать как эффективные утверждения о попадании $\zeta(\sigma + it)$ в окрестность бесконечно удаленной точки на римановой сфере. Обобщением таких утверждений являются теоремы о попадании вектора $\gamma(t)$ в окрестность заданной точки из $\mathbf{C}^N$. В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые из теорем этого рода.

Пусть, далее, $\|\mathbf{a}\| = \sum\limits_{j=0}^{N-1} |a_j|$, если $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}) \in \mathbf{C}^N$, и пусть $\exp_2 x = \exp(\exp x)$. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть N — натуральное число, $\sigma_0 \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}) \in \mathbf{C}^N$. Тогда для разрешимости системы неравенств*

$$\left| \left(\frac{d}{ds}\right)^k \log \zeta(s) \big|_{s = \sigma_0 + it} - a_k \right| < \varepsilon, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

при некотором $t \in [T, 2T]$ достаточно выполнения неравенства

$$T > c(N, \sigma_0) \exp_2 \left(5 \left(\|\mathbf{a}\| + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{8}{1-\sigma_0} + \frac{8}{\sigma_0 - 1/2}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma_0 \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}) \in \mathbf{C}^N$, $|b_0| > \varepsilon$. Тогда для разрешимости системы неравенств*

$$\left| \left(\frac{d}{ds}\right)^k \zeta(s) \big|_{s = \sigma_0 + it} - b_k \right| < \varepsilon, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

при некотором $t \in [T, 2T]$ достаточно выполнения неравенства

$$T > c(N, \sigma_0) \exp_2 \left(5 \left(|\log b_0| + \frac{\|b\|^{N^2}}{\varepsilon^{N^2}}\right)^{\frac{8}{1-\sigma_0} + \frac{8}{\sigma_0 - 1/2}}\right).$$

Замечание. В формулировках теорем 1 и 2 $c(N, \sigma_0)$ — некоторая эффективно вычислимая функция σ_0 и N.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательству теоремы предпошлем доказательство следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\sigma_0 \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существует $c = c(\sigma_0, N) > 0$ такая, что при*

$$Q > c(\|\mathbf{a}\| + 1/2)^{\frac{8}{1-\sigma_0}}$$

найдется набор вещественных чисел, индексированных простыми числами, $\theta_1 = (\theta_2^{(1)}, \theta_3^{(1)}, \ldots, \theta_p^{(1)}, \ldots)$, для которого при $k = 0, 1, \ldots, N-1$ выполняется

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \log \zeta_Q(\sigma_0, \theta_1) - a_k \right| < \varepsilon,$$

где $\zeta_Q(\sigma_0, \theta) = \prod\limits_{p \le Q} \left(1 - \dfrac{\exp(-2\pi i \theta_p)}{p^s}\right)^{-1}$.

2.1. Доказательство леммы 1. Пусть $U_0 > (200)^N$ и пусть для $j = 0, 1, \ldots, N-1$

$$M_j = \left\{p : U_0 2^j < p \le U_0 2^j + H\right\}, \tag{1}$$

где $0 < H \le U_0/2$. Более точно U_0 и H определим в дальнейшем. Для конечного множества простых чисел положим

$$\varphi_M(s, \theta) = \sum_{p \in M} p^{-s} \exp(-2\pi i \theta_p),$$

где $\theta = (\theta_2, \theta_3, ..., \theta_p, ...)$ — набор независимых вещественных переменных, индексированных простыми числами.

Для $k = 0, 1, ..., N-1$ имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k}\varphi_{M_j}(s,\theta) = (-\log U_j)^k \varphi_{M_j}(s,\theta) + R_{j,k}, \qquad (2)$$

где $U_j = 2^j U_0$, а

$$R_{j,k} = \sum_{p\in M_j} \left[(-\log p)^k - (-\log U_j)^k\right] p^{-s} \exp(-2\pi i\theta_p).$$

Из формулы (1) следует, что

$$R_{j,k} \ll_N \sum_{p\in M_j} (\log U_0)^{k-1} \frac{H}{U_0} p^{-\sigma_0} \ll (\log U_0)^{N-1} H^2 U_0^{-(1+\sigma)}. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений относительно неизвестных z_j:

$$\sum_{j=0}^{N-1} (-\log U_j)^k z_j = a_k; \quad k = 0, 1, ..., N-1. \qquad (4)$$

Матрица коэффициентов этой системы уравнений является матрицей Ван-дер-Монда, поэтому, используя теорему Крамера о решениях системы линейных уравнений, получим,что система (4) имеет решение $\mathbf{z} = (z_0, z_1, ..., z_{N-1})$, для которого выполняется

$$\|\mathbf{z}\| \ll_N (\log U_0)^{N-1} \|\mathbf{a}\|. \qquad (5)$$

Выясним теперь, каким надо взять U_0 для того, чтобы были разрешимы относительно θ уравнения

$$\varphi_{M_j}(s,\theta) = z_j, \qquad j = 0, 1, ..., N-1. \qquad (6)$$

Заметим, что если множество M_j содержит более трех простых чисел, то множество значений $\varphi_{M_j}(s,\theta)$ при всевозможных значениях θ представляет собой круг радиуса

$$\sum_{p\in M_j} \frac{1}{p^\sigma}.$$

Поэтому, чтобы система уравнений (6) была разрешима относительно θ, достаточно вследствие неравенства (5) выполнения неравенства

$$\sum_{p\in M_j} \frac{1}{p^\sigma} \gg_N (\log U_0)^{N-1}(\|\mathbf{a}\| + 1)$$

с соответствующей постоянной в знаке $\gg_N$ и присутствия в каждом M_j хотя бы трех простых чисел. Из теоремы V.4.1 заключаем, что при

$H = U_0^{(1+3\sigma)/4}$ и $U_0 \gg_N 1$ (т.е. достаточно большом) выполняется

$$\sum_{p\in M_j} \frac{1}{p^\sigma} \gg_N \frac{1}{\log U_0} H U_0^{-\sigma}. \qquad (7)$$

(Действительно, если $\sigma \in (1/2, 1)$, то $(1+3\sigma)/4 \le 7/12$.)

Таким образом, если U_0 таково, что

$$\frac{1}{\log U_0} H\, U_0^{-\sigma} \gg_N (\log U_0)^{N-1}(\|\mathbf{a}\| + 1), \qquad (8)$$

то система уравнений (6) разрешима относительно θ. В силу выбора H неравенство (8) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$(\log U_0)^{-1} U_0^{(1+3\sigma)/4-\sigma} \gg_N (\log U_0)^{N-1}(\|\mathbf{a}\| + 1),$$

т.е. тогда, когда

$$U_0^{(1-\sigma)/4} (\log U_0)^{-N} \gg_N \|\mathbf{a}\| + 1.$$

Последнее неравенство будет выполняться при выполнении неравенства

$$U_0 \gg_{N,\sigma} (\|\mathbf{a}\| + 1)^{8/(1-\sigma)} \qquad (9)$$

(с соответствующей константой в знаке $\gg_{N,\sigma}$).

Заметим теперь, что при

$$U_0 \ge \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{4/(1-\sigma)} \qquad (10)$$

выполняется

$$(\log U_0)^{N-1} H^2 U_0^{-(1+\sigma)} \le (\log U_0)^{N-1} U_0^{(1+3\sigma)/2} U_0^{-(1+\sigma)} \le$$
$$\le (\log U_0)^{N-1} U_0^{-(1-\sigma)/2} \ll_{N,\sigma} U_0^{-(1-\sigma)/4} \ll_{N,\sigma} \varepsilon.$$

Следовательно, из оценки (3) и последнего неравенства заключаем, что при выполнении неравенства (10) имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_{j,k}| \ll_{N,\sigma} \varepsilon.$$

Таким образом, из соотношения

$$U_0 \gg_{N,\sigma} \left(\|\mathbf{a}\| + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{8/(1-\sigma)} \qquad (11)$$

следует разрешимость системы неравенств

$$\left|\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^k}{\partial s^k}\varphi_{M_j}(s,\theta) - a_k\right| < \frac{\varepsilon}{10}, \qquad k = 0, 1, ..., N-1. \qquad (12)$$

Заметим, что погрешность, возникающая при замене $\varphi_{M_j}(s,\theta)$ и $\log\zeta_{M_j}(s,\theta) = \sum_{p\in M_j}\log\left(1 - \frac{\exp(-2\pi i\theta_p)}{p^s}\right)^{-1}$ не превосходит величины

$$O\left(\frac{H}{U_0^{2\sigma}}\log^{N-1}U_0\right) \ll_N U_0^{-1/4}.$$

Действительно, так как

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\left(1-\frac{\exp(-2\pi i\theta_p)}{p^s}\right)^{-1} - \frac{\partial^k}{\partial s^k}\cdot\frac{\exp(-2\pi i\theta_p)}{p^s}\right| \ll_{k,\sigma} \frac{\log^k p}{p^{2\sigma}},$$

то в силу определения $\varphi_M(s,\theta)$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{M_j}(s,\theta) - \frac{\partial^k}{\partial s^k}\varphi_{M_j}(s,\theta)\right| \ll_{N,\sigma} \frac{\log^k U_0}{U_0^{2k}}H \ll$$

$$\ll (\log U_0)^k U_0^{(1-5\sigma)/4} \ll (\log U_0)^k U_0^{-3/8},$$

поэтому, увеличивая, быть может, постоянную в символе $\ll_{N,\sigma}$ в неравенстве (11), добьемся того, что система неравенств

$$\left|\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{M_j}(s,\theta) - a_k\right| < \frac{\varepsilon}{5}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (13)$$

разрешима относительно θ.

Пусть $\theta_0 = (\theta_2^{(0)},\theta_3^{(0)},\ldots,\theta_p^{(0)},\ldots) = (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\ldots)$. Заметим, что для $k\in[0,N)$ ряды

$$\sum_p \frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}\left[\log\left(1-\frac{\exp(-2\pi i\theta_p^{(0)})}{p^\sigma}\right)^{-1}\right]$$

сходятся. Пусть

$$\sum_p \frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}\left[\log\left(1-\frac{\exp(-2\pi i\theta_p^{(0)})}{p^\sigma}\right)^{-1}\right] = \gamma_k.$$

Если $\hat{Q}$ есть множество простых чисел, не превосходящих числа Q и $Q > 2^N U_0$, то

$$\sum_{p\in\hat{Q}\setminus\bigcup_{j=0}^{N-1}M_j}\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}\left[\log\left(1-\frac{\exp(-2\pi i\theta_p^{(0)})}{p^\sigma}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \gamma_k + O_N(U_0^{-\sigma}\log^{N-1}U_0).$$

Взяв решение θ системы неравенств (13) с $s=\sigma$ и положив $\theta_p^{(1)} = \theta_p^{(0)}$ для $p\in\hat{Q}\setminus\bigcup_{j=0}^{N-1}M_j$, $\theta_p^{(1)} = \theta_p$ для $p\in\bigcup_{j=0}^{N-1}M_j$, получим

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\sigma^k}\left[\sum_{p\in\hat{Q}}\log\left(1-\frac{\exp(-2\pi i\theta_p^{(1)})}{p^\sigma}\right)^{-1}\right] - (a_k+\gamma_k)\right| < \varepsilon,$$

$$k = 0,\ldots,N-1.$$

Поскольку γ_k — абсолютные постоянные, то это доказывает лемму.

2.2. Начало доказательства теоремы 1. Пусть Q удовлетворяет неравенству леммы 1. Пусть θ_1 определен в той же лемме 1. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left(\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{\hat{Q}}(s,\theta)\right) \ll \frac{\log^k p}{p^{\sigma_0}}.$$

Следовательно, если взять

$$\delta = Q^{-1}, \qquad (14)$$

то при выполнении неравенств

$$\left|\theta_p^{(1)} - \theta_p\right| < \delta \qquad (15)$$

будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{\hat{Q}}(s,\theta) - \frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{\hat{Q}}(s,\theta_1)\right| \ll \sum_{p\le Q}\frac{\log^k p}{p^{\sigma_0}}\delta \ll$$

$$\ll_{N,\sigma_0} Q^{-\sigma_0}\log^N Q \ll Q^{-1/4} \ll \varepsilon \ \ (k=0,1,\ldots,N-1), \qquad (16)$$

поэтому при выполнении неравенств (15) будет выполняться

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\log\zeta_{\hat{Q}}(s,\theta) - a_k\right| \ll_{N,\sigma_0} \varepsilon. \qquad (17)$$

Пусть теперь $\lambda(x)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая функция такая, что

1) $\lambda(x)\ge 0$, 2) $\operatorname{supp}\lambda\subset[-1,1]$, 3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(x)dx = 1$.

Для $\delta\in(0,1/2)$ и $|\theta_p| < 1/2, p = 2,3,\ldots$, положим $L(\theta) = \prod_{p\in\hat{Q}}\lambda(\theta_p/\delta)$.

Продолжим $L(\theta)$ на все Ω по периодичности с периодом 1 по каждой переменной θ_p. Функция $\lambda(\theta/\delta)$, продолженная по периодичности на $(-\infty,+\infty)$ с периодом 1, представляется в виде ряда Фурье

$$\lambda(\theta/\delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\exp(2\pi in\theta),$$

причем $\alpha_0 = 1, \alpha_n \ll \min\left(1,(\delta^2n^2)^{-1}\right)$.

Разложение в ряд Фурье функции $L(\theta)$ будет иметь вид

$$L(\theta)=\sum_{\mathbf{n}}\beta_{\mathbf{n}}\exp\left(2\pi i(\mathbf{n},\theta)\right),$$

где $\mathbf{n}$ пробегает все целочисленные векторы $\pi(Q)$-мерного пространства, $\beta_{\mathbf{n}}=\prod_{p\le Q}\alpha_{n_p}$, $\mathbf{n}=(\ldots,n_p,\ldots)$.

Для доказательства теоремы 1 будем рассматривать интеграл

$$I=\int_{D_T}\sum_{k=0}^{N-1}L\left(\gamma(t)-\theta_1\right)\left|(\log\zeta(\sigma_0+it))^{(k)}-\left(\log\zeta_{\hat{Q}}(\sigma_0+it)\right)^{(k)}\right|^2dt,\tag{18}$$

где $\gamma(t)=\left(\frac{\log 2}{2\pi}t,\frac{\log 3}{2\pi}t,\ldots,\frac{\log p}{2\pi}t,\ldots\right)\in\Omega$, D_T — подмножество $[T,2T]$ определяемое следующим образом. Каждый нуль $\zeta(s)$, лежащий области $\operatorname{Re}s>0,5(0,5+\sigma_0)$, окружим прямоугольником $P_\rho^{(h)}=\{s:0,5(0,5+\sigma_0)\le\operatorname{Re}s\le 15;|\operatorname{Im}(s-\rho)|\le h\}$, где $h<T$ — некоторы параметр, $h\ge 10$. Положим

$$D_T=\left\{t:\,t\in[T,2T],\sigma_0+it\notin\bigcup_\rho P_\rho^{(h)}\right\}.\tag{19}$$

Теорема 1 будет доказана, если показать, что при соответствующих δ,Q и T будет иметь место неравенство

$$I\ll_N\varepsilon^2\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\,dt.\tag{20}$$

Для представления $[\log\zeta(s)]^{(k)}$ в критической полосе воспользуемся теоремой II.4.3. В силу этой теоремы имеем

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^s}+\frac{x^{2(1-s)}-x^{1-s}}{(1-s)^2\log x}+$$
$$+\frac{1}{\log x}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{x^{-2q-s}-x^{-2(2q+s)}}{(2q+s)^2}+\frac{1}{\log x}\sum_\rho\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}.\tag{21}$$

Пусть

$$F(s,z)=\int_{s+10}^{s}\frac{x^{z-w}-x^{2(z-w)}}{(w-z)^2}dw.$$

Интегрируя равенство (21), получим

$$\log\zeta(s)=\log\zeta(s+10)+\left(\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^s\log n}-\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^{s+10}\log n}\right)-$$
$$-\frac{1}{\log x}F(s,1)+\frac{1}{\log x}\sum_{q=1}^{\infty}F(s,-2q)+\frac{1}{\log x}\sum_\rho F(s,\rho)=$$

$$=\sum_{n\le x^2}\frac{\Lambda_x(n)}{n^s\log n}+\sum_{n>x}\left(\Lambda(n)-\Lambda_x(n)\right)\frac{1}{n^{s+10}\log n}-$$
$$-\frac{1}{\log x}F(s,1)+\frac{1}{\log x}\sum_\rho F(s,\rho)+\frac{1}{\log x}\sum_{q=1}^{\infty}F(s,-2q).\tag{22}$$

При $k=1,\ldots,N-1$ для оценки I будем пользоваться формулой (21), при $k=0$ будем пользоваться равенством (22). Выбирать Q, x и T будем такими, чтобы $Q<x\ll T^\alpha$, где $0<\alpha<1/200$. Положим

$$I_k=\int_{D_T}L\left(\gamma(t)-\theta_1\right)\left|(\log\zeta(\sigma_0+it))^{(k)}-(\log\zeta_{\hat{Q}}(\sigma_0+it))^{(k)}\right|^2dt,$$

и пусть $P=\prod_{p\le Q}p$. В силу равенства (18) выполняется

$$I=\sum_{k=0}^{N-1}I_k.\tag{23}$$

Из равенства (21) заключаем

$$I_k\ll\mathcal{A}_k+\mathcal{B}_k+\mathcal{C}_k+\mathcal{D}_k+\mathcal{E}_k,\tag{24}$$

где

$$\mathcal{A}_k=\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt,$$

$$\mathcal{B}_k=\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}-\sum_{(m,P)=1}\frac{\Lambda(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt,$$

$$\mathcal{C}_k=\frac{1}{\log^2x}\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{x^{-2q-s}-x^{-2(2q+s)}}{(2q+s)^2}\right)^{(k-1)}\right|^2dt,$$

$$\mathcal{D}_k=\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\frac{x^{2(1-s)}-x^{1-s}}{(1-s)^2\log x}\right)^{(k-1)}\right|^2dt,$$

$$\mathcal{E}_k=\frac{1}{\log^2x}\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_\rho\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\right)^{(k-1)}\right|^2dt.$$

В случае $k=0$ в определениях $\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0,\ldots,\mathcal{E}_0$ необходимо в соответствии с формулой (22) произвести очевидные изменения.

2.3. Оценка A_k. Из определения $L(\theta)$ и оценок (17) следует, что
$$L(\theta-\theta_1)=\sum_{\mathbf{n}}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta)),$$
причем выполняется
$$\gamma_{\mathbf{n}}\ll\prod_{p\le Q}\min\left(1,(\delta^2 n_p^2)^{-1}\right),\qquad \gamma_0=1.$$
Отсюда получаем для всякого $M>1$, что
$$L(\theta-\theta_1)=\sum_{\substack{\mathbf{n}\\ \max|n_p|\le M}}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta))+O\left(\frac{\pi(Q)}{M}\left(\frac{c_3}{\delta}\right)^{\pi(Q)}\right).\qquad(25)$$
Действительно, поскольку
$$L(\theta-\theta_1)=\sum_{\max|n_p|\le M}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta))+$$
$$+O\left(Q\left(\sum_{|n|>M}|\alpha_n|\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|\right)^{\pi(Q)-1}\right),$$
то из очевидных неравенств
$$\sum_{|n|>M}|\alpha_n|\ll\frac{1}{\delta^2 M},\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|\le\frac{c^3}{\delta}$$
следует справедливость формулы (25). Поскольку $\delta=Q^{-1}$, то
$$\pi(Q)\left(\frac{c_3}{\delta}\right)^{\pi(Q)}\ll\exp(2Q).$$
Следовательно, из формулы (25) следует
$$L(\theta-\theta_1)=\sum_{\max|n_p|\le M}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta))+O\left(\frac{\exp(2Q)}{M}\right).\qquad(26)$$
Если
$$V=\max_{-\infty<T<\infty}\ \max_{|n_p|\le M}\ \max_{\substack{m_1<m_2\le x^2\\(m_1,P)=1\\(m_2,P)=1}}\left|\int_{-T}^{T}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\gamma(t)))\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{it}dt\right|,$$
то из определения A_k и равенства (26) следует, что
$$A_k=\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt\le$$
$$\le\int_T^{2T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt=$$

$$=\int_T^{2T}\left(\sum_{\max|n_p|\le M}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta))\right)\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt+$$
$$+O\left(\frac{\exp(2Q)}{M}\int_T^{2T}\left|\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\right|^2dt\right)=$$
$$=\int_T^{2T}\left(\sum_{\max|n_p|\le M}\gamma_{\mathbf{n}}\exp(2\pi i(\mathbf{n},\theta))\right)\left(\sum_{\substack{m_1\le x^2\\(m_1,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m_1)\log^{k-1}m_1}{m_1^s}\right)\times$$
$$\times\left(\overline{\sum_{\substack{m_2\le x^2\\(m_2,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m_2)\log^{k-1}m_2}{m_2^s}}\right)dt+$$
$$+O\left(\frac{\exp(2Q)}{M}\int_T^{2T}\left(\sum_{\substack{m_1\le x^2\\(m_1,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m_1)\log^{k-1}m_1}{m_1^s}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\overline{\sum_{\substack{m_2\le x^2\\(m_2,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m_2)\log^{k-1}m_2}{m_2^s}}\right)dt\right)\ll_{N,\sigma_0}$$
$$\ll_{N,\sigma_0}\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\log^{2k}m}{m^{2\sigma_0}}\right)T+\left(\sum_{\mathbf{n}}|\gamma_{\mathbf{n}}|\right)Vx^4+$$
$$+\frac{\exp(2Q)}{M}\left(\sum_{m\le x^2}\frac{\log^{2k}m}{m^{2\sigma_0}}\right)T+\frac{\exp(2Q)}{M}Vx^4.\qquad(27)$$
Поскольку
$$\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\log^{2k}m}{m^{2\sigma_0}}\le\sum_{m>Q}\frac{\log^{2k}m}{m^{2\sigma_0}}\ll Q^{1-2\sigma_0}\log^{2k}Q,$$
$$\sum_{\mathbf{n}}|\gamma_{\mathbf{n}}|\le\delta^{-\pi(Q)}\ll\exp(2Q),$$
то
$$A_k\ll Q^{1-2\sigma_0}(\log Q)^{2k}T\left(1+\frac{\exp(2Q)}{M}\right)+Vx^4\exp(2Q).\qquad(28)$$

2.4. Оценка $\mathcal{B}_k$. Из определения $\Lambda_x(m)$ имеем

$$\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}-\sum_{(m,P)=1}\frac{\Lambda(m)}{m^s}=\sum_{p\le Q}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{p,l}}{p^{ls}},$$

где $a_{p,l}=0$ при $p^l\le x$ и $|a_{p,l}|\le\log p$ при всех значениях p и l. Поскольку

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a_{p,l}}{p^{ls}}=\sum_{\substack{l=1\\p^l>x}}^{\infty}\frac{a_{p,l}}{p^{ls}}\ll\log p\frac{x^{-\sigma_0}}{1-p^{-\sigma_0}},$$

то

$$\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}-\sum_{(m,P)=1}\frac{\Lambda(m)}{m^s}\ll\pi(Q)(\log Q)x^{-\sigma_0}\ll Qx^{-\sigma_0}. \tag{29}$$

Рассуждая аналогично при $k>1$, получим

$$\left(\sum_{\substack{m\le x^2\\(m,P)=1}}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s}-\sum_{(m,P)=1}\frac{\Lambda(m)}{m^s}\right)^{(k-1)}\ll_k Qx^{-\sigma_0}\log^k Q. \tag{30}$$

Теперь из оценок (29) и (30) получаем при $k\le N$

$$\mathcal{B}_k\ll_N Qx^{-\sigma_0}(\log Q)^N\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt. \tag{31}$$

2.5. Оценка $\mathcal{E}_k$. Заметим здесь, что величины $\mathcal{C}_k,\mathcal{D}_k$ и $\mathcal{E}_k$ имеют вид

$$\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|(f(s))^{(k-1)}\right|dt, \tag{32}$$

где $f(s)$ — некоторая аналитическая функция. Интегралы такого вида будем оценивать сверху величиной

$$\max_{t\in D_T}\left|(f(s))^{(k-1)}\right|^2\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt.$$

Поскольку $f(s)$ — аналитическая функция, то, оценив $\max\limits_{s\in\tilde D}|f(s)|$, где

$$\tilde D=\left\{s:T-1\le\operatorname{Im}s\le 2T+1,\ \operatorname{Re}s>\sigma_0-0,1(\sigma_0-0,5),\ s\notin\bigcup_\rho P_\rho^{(h-1)}\right\},$$

можно воспользоваться для выражения $f^{(k-1)}(s)$ интегральной формулой Коши, выражая $f^{(k-1)}(s)$ в виде контурного интеграла по окружности радиуса $0,1(\sigma_0-0,5)$ с центром в точке $s=\sigma_0+it$. Оценивая таким способом интеграл (32), получим

$$\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)\left|f^{(k-1)}(s)\right|dt\ll\max_{s\in\tilde D}|f(s)|^2\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt. \tag{33}$$

Перейдем к оценке $\mathcal{E}_k$. Имеем

$$\mathcal{E}_k\ll\frac{1}{\log^2 x}\max_{s\in\tilde D}\left|\sum_\rho\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\right|^2\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt.$$

Пусть $\sigma_1=0<\sigma_2<\sigma_3<\ldots<\sigma_l=1$, причем $l\ll\log T$ и $|\sigma_{j+1}-\sigma_j|\ll\ll\log^{-1}T$. При $\sigma_j>\operatorname{Re}s=\sigma_0$ выполняется

$$\sum_{\sigma_j<\operatorname{Re}\rho\le\sigma_{j+1}}\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\ll\sum_{\sigma_j<\operatorname{Re}\rho\le\sigma_{j+1}}\frac{x^{2(\sigma_j-\sigma_0)}}{|s-\rho|^2}\ll\frac{1}{h}x^{2(\sigma_j-\sigma_0)}\log T, \tag{34}$$

так как имеется $\ll\log(\tau+2)$ нетривиальных нулей дзета-функции Римана с условием $\tau<\operatorname{Im}\rho\le\tau+1$. Рассуждая таким же образом, получим аналогично, что при $0,5(0,5+\sigma_0)<\sigma_j\le\sigma_0$ выполняется

$$\sum_{\sigma_j<\rho\le\sigma_{j+1}}\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\ll\frac{1}{h}x^{\sigma_j-\sigma_0}\log T. \tag{35}$$

При $\sigma_j\le 0,5(0,5+\sigma_0)$ имеем

$$\sum_\rho\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\ll x^{\sigma_j-\sigma_0}\frac{1}{\sigma_0-0,5}\log T. \tag{36}$$

Рассмотренные случаи учитывают все возможности расположения нулей $\zeta(s)$ в критической полосе, поэтому из оценок (34)–(36) заключаем, что для $s\in\tilde D$ выполняется

$$\sum_\rho\frac{x^{\rho-s}-x^{2(\rho-s)}}{(s-\rho)^2}\ll_{\sigma_0}\frac{1}{h}x^{2(1-\sigma)}\log^2 T+$$

$$+x^{0,5(0,5+\sigma_0)-(\sigma_0-0,1(\sigma_0-0,5))}\log^2 T\ll\frac{x}{h}\log^2 T+x^{-0,4(\sigma_0-0,5)}\log^2 T. \tag{37}$$

Из оценки (37) теперь следует, что

$$\mathcal{E}_k\ll_{\sigma_0}\left(\frac{x^2}{h^2}+x^{-0,8(\sigma_0-0,5)}\right)\log^4 T\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt. \tag{38}$$

2.6. Оценки $\mathcal{C}_k$ и $\mathcal{D}_k$. Согласно сделанному в начале п.3 замечания имеем

$$\mathcal{C}_k\ll\log^{-2}x\max_{s\in\tilde D}\left|\sum_{q=1}^{\infty}\frac{x^{-2q-s}-x^{-2(2q+s)}}{(2q+s)^2}\right|^2\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt.$$

Тривиально оценивая $\sum_q$, получим

$$\mathcal{C}_k\ll\frac{1}{x^2T}\int_{D_T}L(\gamma(t)-\theta_1)dt. \tag{39}$$

20*

Аналогично,

$$\mathcal{D}_k \ll \frac{x^2}{T^4} \int\limits_{D_T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt. \tag{40}$$

2.7. Оценка снизу $\int\limits_{D_T} L(...)dt$. Из определения области интегрирования D_T имеем

$$\int\limits_{D_T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt \ge \int\limits_{T}^{2T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt - \left(\sum_n |\gamma_n|\right) hN(0,5(0,5+\sigma_0),3T). \tag{41}$$

Для оценки первого интеграла в правой части неравенства (41) применим формулу (26). Получим

$$\int\limits_{T}^{2T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt \ge T + \left(\sum_{\substack{n\neq 0\\ \max|n_p|\le M}} |\gamma_n|\right) V + O\left(\frac{T}{M}\exp(2Q)\right).$$

Поскольку $\sum\limits_n |\gamma_n| \ll (c_3/\gamma)^{\pi(Q)} \ll \exp(2Q)$, то из последнего неравенства заключаем

$$\int\limits_{T}^{2T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt \ge T + O(V\exp(2Q)) + O\left(\frac{T}{M}\exp(2Q)\right). \tag{42}$$

Второй член в правой части (41) оценим с помощью теоремы V.2.1. Так как

$$N(0,5(0,5+\sigma_0),3T) \ll T^{1-\Delta(\sigma_0)},$$

где $\Delta(\sigma_0) > 0$, то

$$\left(\sum_n |\gamma_n|\right) hN(0,5(0,5+\sigma_0),3T) \ll T^{1-\Delta(\sigma_0)} h\exp(2Q). \tag{43}$$

Положим $h = T^{\Delta(\sigma_0)/2}$. Тогда из неравенств(42) и (43) получим

$$\int\limits_{D_T} L(\gamma(t)-\theta_1)dt \ge T + O\left(TM^{-1}e^{2Q}\right) +$$

$$+O\left(T^{1-\Delta(\sigma_0)/2}e^{2Q}\right) + O\left(Ve^{2Q}\right). \tag{44}$$

2.8. Оценка V. Воспользуемся следующим неравенством: если m и n — натуральные числа и $\max(m,n) > 1$, то при $m \neq n$ выполняется неравенство

$$\left|\log\frac{m}{n}\right| \ge \frac{1}{\max(m,n)}$$

(лемма 2.2). Если $|n_p| \le M$ для $p \le Q$, то

$$2\pi i(\mathbf{n},\gamma(t)) = it\left(\sum_{p\le Q} n_p \log p\right) = it\log\left(\prod_{p\le Q} p^{n_p}\right) = it\log\frac{Q_+}{Q_-},$$

где

$$Q_+ = \prod_{\substack{p\le Q\\ n_p>0}} p^{n_p}, \qquad Q_- = \prod_{\substack{p\le Q\\ n_p<0}} p^{-n_p}.$$

Следовательно, при $m_1, m_2 \le x^2$, $(m_1,P)=1$, $(m_2,P)=1$,

$$\exp(2\pi i(\mathbf{n},\gamma(t)))\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{it} = \left(\frac{m_1Q_+}{m_2Q_-}\right)^{it},$$

поэтому

$$\int\limits_{2T}^{-T} \exp(2\pi i(\mathbf{n},\gamma(t)))\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{it} dt \ll \left|\log\frac{m_1Q_+}{m_2Q_-}\right|^{-1} \ll \max(m_1Q_+,m_2Q_-). \tag{45}$$

Так как $\max(Q_+,Q_-) \le \prod\limits_{p\le Q} p^M = P^M$, а $\max(m_1,m_2) \le x^2$, то из оценки (45) заключаем, что

$$V \ll P^M x^2.$$

Используя асимптотический закон распределения простых чисел, получаем $\log P = \sum\limits_{p\le Q}\log p \le 2Q$ и, окончательно,

$$V \ll \exp(2MQ)x^2. \tag{46}$$

2.9. Окончание доказательства теоремы 1. Положим

$$M = e^{3Q}, \qquad x = T^{\min(1/200,\Delta(\sigma_0)/4)}.$$

Тогда из неравенства (46) следует, что

$$V \ll T^{0,01}\exp(\exp(4Q)) = T^{0,01}\exp_2(4Q), \tag{47}$$

поэтому при $T \gg \exp_2(5Q)$

$$\int\limits_{D_T} L(\gamma(t)-\theta_1)\,dt \ge T + O(T\exp(-Q)).$$

Следовательно, при $Q \gg_{N,\sigma_0} 1$ и $T \gg \exp_2(5Q)$

$$\int\limits_{D_T} L(\gamma(t)-\theta_1)\,dt \ge T/2. \tag{48}$$

Из оценок $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{D}_k$ и $\mathcal{E}_k$ и неравенства (24) получаем для $k = 0,1,...,N-1$

$$I_k \ll \mathcal{A}_k + \mathcal{B}_k + \mathcal{C}_k + \mathcal{D}_k + \mathcal{E}_k \ll_{N,\sigma_0} TQ^{1-2\sigma_0}\log^{2k} Q + O(Te^{-Q}).$$

что при

$$Q \gg \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{4/(2\sigma_0-1)} \qquad (49$$

постоянной в знаке $\gg$ выполняется

$$\sum_{k=0}^{N-1} I_k \le \varepsilon^2 T. \qquad (5$$

и неравенств (48), (50) следует оценка (20), е

$$\left(\|\mathrm{a}\| + \frac{1}{\varepsilon}\right)^{8\left((1-\sigma_0)^{-1}+(\sigma_0-0,5)^{-1}\right)}$$

доказана.

тво теоремы 2. Пусть переменные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

, ... связаны соотношениями

$$+ a_2 z^2 + \ldots) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \qquad (51)$$

тся в смысле равенства формальных степенных коэффициенты при одинаковых степенях z, a_n есть полином от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и каждое α_n есть Тем самым определены полиномиальные отобра- ${}^{N-1}$ и $F^{-1} : \mathbf{C}^{N-1} \to \mathbf{C}^{N-1}$, где F определено

$$) = (\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1, a_2), \ldots, \alpha_{N-1}(a_1, \ldots, a_{N-1})).$$

произвольной аналитической функции $f(s)$ при

$$\cdot \frac{d^2}{ds^2} \log f(s_0), \ldots, \frac{1}{(N-1)!} \cdot \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} \log f(s_0)\Big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{f(s_0)} \left(\frac{f'(s)}{1!}, \ldots, \frac{f^{(N-1)}(s)}{(N-1)!}\right). \qquad (52)$$

$\mathbf{C}^{N-1}$ найдем $(a_1, \ldots, a_{N-1})$ такое, что

$a_1, \ldots, a_{N-1})) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$.

${}_{N-1})\|$. Так как

$$a_2 z^2 + \ldots = \log(1 + \alpha_1 z + \ldots), \qquad (53)$$

жорируется рядом функции $-\log(1 - \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| z^j)$;

$\alpha_j| \le 1$, то, полагая $z = 1/3$ и $\alpha_k = 0$ при $k \ge N$,

$$\sum_{j=1}^{N-1} |a_j| \left(\frac{1}{3}\right)^j \le 1. \qquad (54)$$

Если же $\max\limits_{1 \le j \le N-1} |\alpha_j| > 1$, то, полагая $z = (3 \max\limits_{1 \le j \le N-1} |\alpha_j|)^{-1}$, получим

$$\sum_{j=1}^{N-1} |a_j| \left(3 \max_{1 \le k \le N-1} |\alpha_k|\right)^{-j} \le 1. \qquad (55)$$

Из оценок (54) и (55) следует, что при любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{N-1} |a_j| \le 3^{N-1} \left(1 + \max_{1 \le j \le N-1} |\alpha_j|\right)^{N-1},$$

т.е.

$$\|(a_1, \ldots, a_{N-1})\| \ll_N 1 + \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})\|^{N-1}. \qquad (56)$$

Оценим теперь элементы якобиана отображения F, т.е. $\partial\alpha_j/\partial a_k$. Рассматривая $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ как функции от $a_1, a_2, \ldots$, продифференцируем соотношение (51) по a_k. Получим равенство

$$z^k \exp(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_k} z + \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_k} z^2 + \ldots,$$

из которой следует, что ряд, стоящий в правой части этой формулы, мажорируется рядом Тейлора функции $z^k \exp(|a_1|z + |a_2|z^2 + \ldots)$. Отсюда заключаем, что при $1 \le k \le N-1$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left|\frac{\partial \alpha_j}{\partial a_k}\right| \ll_N \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |a_j|\right)^{N-1}. \qquad (57)$$

Из формулы (57) следует, что если $\|\mathrm{a} - \mathrm{a}'\| < \delta < 1 + \|\mathrm{a}\|$, то

$$\|F(\mathrm{a}) - F(\mathrm{a}')\| \ll_N \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} |a_j|\right)^{N-1} \delta.$$

Пусть теперь $\mathrm{b} \in \mathbf{C}^N$, причем $b_0 \ne 0$. Тогда в силу оценки (56) имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|F^{-1}\left((b_0^{-1} b_1, b_0^{-1} b_2, \ldots, b_0^{-1} b_{N-1})\right)\right\| \ll_N \\
&\ll_N 1 + \|(b_1, \ldots, b_{N-1})\|^{N-1} |b_0|^{-(N-1)} \ll \\
&\ll \|(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})\|^{N-1} |b_0|^{-(N-1)}.
\end{aligned} \qquad (58)$$

Из равенства (52) и оценки (57) заключаем, что если

$$\Bigg\| \left(\frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \log \zeta(\sigma_0 + it), \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \log \zeta(\sigma_0 + it), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \frac{1}{(N-1)!} \cdot \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} \log \zeta(\sigma_0 + it)\right) -$$

$$- F^{-1}\left(b_0^{-1}(b_1, b_2, \ldots, b_{N-1})\right) \Bigg\| < \delta < 1, \qquad (59)$$

то

$$\left\|\zeta^{-1}(\sigma_0+it)\left(\zeta'(\sigma_0+it),\frac{1}{2!}\zeta''(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-\right.$$

$$\left.-b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\ll_N b_0^{-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}$$

Умножая это неравенство на b_0, получим при $|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|<(1/2)|b_0|$

$$|b_0\zeta^{-1}(\sigma_0+it)|\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\frac{1}{2!}\zeta''(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right.$$

$$\left.-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\ll_N b_0^{1-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta, \qquad (6$$

и, следовательно,

$$\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\frac{1}{2!}\zeta''(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right\|\ll_N$$

$$\ll_N b_0^{1-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta+\|(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\|, \qquad (61$$

поэтому при $|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|<(1/2)|b_0|$ имеем

$$\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|=$$

$$=|\zeta(\sigma_0+it)|\left\|\zeta^{-1}(\sigma_0+it)\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-\right.$$

$$-b_0^{-1}\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)+$$

$$+b_0^{-1}\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})+$$

$$\left.+b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})-\zeta^{-1}(\sigma_0+it)(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\le$$

$$\le|\zeta(\sigma_0+it)|\left(\left\|\zeta^{-1}(\sigma_0+it)\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right.\right.$$

$$\left.-b_0^{-1}\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right\|+$$

$$+\left\|b_0^{-1}\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|$$

$$\left.+\left\|b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})-\zeta^{-1}(\sigma_0+it)(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\right)\ll$$

$$\ll|\zeta(\sigma_0+it)|\left(\left|\zeta^{-1}(\sigma_0+it)-b_0^{-1}\right|\times\right.$$

$$\times\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right\|+$$

$$+|b_0^{-1}|\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|+$$

$$\left.+\left|b_0^{-1}-\zeta^{-1}(\sigma_0+it)\right|\|(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\|\right)=$$

$$=|b_0|^{-1}|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\right\|+$$

$$+|\zeta(\sigma_0+it)||b_0|^{-1}\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|+$$

$$+|b_0|^{-1}|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|\|(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\|$$

и, следовательно, из оценок (59), (60) получаем

$$\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\ll_N$$

$$\ll_N b_0^{-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|+$$

$$+\|\mathbf{b}\||b_0|^{-1}|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|+b_0^{-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta|\zeta(\sigma_0+it)|+$$

$$+\|\mathbf{b}\||b_0|^{-1}|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|\ll\left(b_0^{-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta+\|\mathbf{b}\||b_0|^{-1}\right)\times$$

$$\times|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|+b_0^{1-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}\delta. \qquad (62)$$

Заметим, что если $|x-x'|\le\delta<1$, то $|e^x-e^{x'}|\ll e^x\delta$, поэтому при выполнении условия

$$|\log\zeta(\sigma_0+it)-\log b_0|<\delta<1 \qquad (63)$$

имеем

$$|\zeta(\sigma_0+it)-b_0|\ll|b_0|\delta. \qquad (64)$$

Следовательно, при выполнении (64)

$$\left\|\left(\zeta'(\sigma_0+it),\dots,\frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)-(b_1,b_2,\dots,b_{N-1})\right\|\ll_N$$

$$\ll_N\left(b_0^{1-(N-1)^2}\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}+\|\mathbf{b}\|\right)\delta=$$

$$=\delta\|\mathbf{b}\|\left(1+(\|\mathbf{b}\|/b_0)^{(N-1)^2-1}\right)\ll\delta\|\mathbf{b}\|^{(N-1)^2}(1/\varepsilon)^{(N-1)^2-1}. \qquad (65)$$

Положим $\delta=(\varepsilon\|\mathbf{b}\|^{-1})^{(N-1)^2}$, $a_0=\log b_0$, $(a_1,a_2,\dots,a_{N-1})=F^{-1}(b_0^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_{N-1}))$. В силу теоремы 1 при

$$T>c(N,\sigma_0)\exp_2(5\|\mathbf{a}\|+1/\delta)^{\frac{8}{1-\sigma_0}+\frac{8}{\sigma_0-1/2}}$$

найдется значение $t \in [T, 2T]$ такое, при котором выполняются неравенства (59) и (63). Следовательно, будут выполнятся неравенства (64) и (65) и, значит, вследствие выбора δ неравенство

$$\left\| \left(\zeta(\sigma_0 + it), \zeta'(\sigma_0 + it), \ldots, \frac{1}{(N-1)!}\zeta^{(N-1)}(\sigma_0 + it) \right) - \right.$$

$$\left. -(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}) \right\| \ll_N \varepsilon.$$

Вследствие неравенства (58) теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Ω-теория возникла в работах Г.Бора и Е.Ландау [99, 112]. Дальнейшее ее развитие связано с работами Д.Литтлвуда [150, 151], Е.Титчмарша [168] и Х.Л.Монтгомери [154].

2. Утверждение Ω-теорем отличаются от известных O-теорем теории дзета-функции Римана большей близостью к следствиям из гипотезы Римана. Например, доказано, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t} \geq e^{\gamma}, \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\log\log t} \geq \frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}$$

(γ — постоянная Эйлера), в то время, как из гипотезы Римана следуют оценки

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|}{\log\log t} \leq 2e^{\gamma}$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\log\log t} \leq \frac{12}{\pi^2}e^{\gamma}.$$

(См. [150, 151].)

3. Многомерные Ω-теоремы появились в работе [25].

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. Суммирование по Абелю (частное суммирование)

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, c_n — произвольные комплексные числа,* $C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n$.

Тогда

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)dx + C(b)f(b).$$

Доказательство см. в [38, с. 29].

Используя интеграл Стильтьеса, можно доказать теорему 1 интегрированием по частям:

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_{a+0}^{b+0} f(x)dC(x) = f(b)C(b) - \int_a^b C(x)df(x).$$

Теорема 2 (формула суммирования Эйлера). *Пусть $f(n)$ — комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$.*

Тогда

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \rho_1(x)f'(x)dx + \rho_1(a)f(a) - \rho_1(b)f(b),$$

где $\rho_1(x) = x - [x] - 1/2$.

Доказательство. Положим в теореме 1 $c_n = 1$. Тогда $C(x) = [x] - [a]$. Следовательно,

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = ([b] - [a])\,f(b) - \int_a^b ([x] - [a])\,f'(x)dx =$$

$$= ([b] - [a])\,f(b) + [a]\,(f(b) - f(a)) - \int_a^b [x]f'(x)dx.$$

Так как $[x] = x - 1/2 - \rho_1(x)$, то, интегрируя по частям, получим

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = ((b - \rho_1(b)) - (a - \rho_1(a)))\,f(b) +$$

$$+\left(a-\frac{1}{2}-\rho_1(a)\right)(f(a)-f(b))-\int\limits_a^b\left(x-\frac{1}{2}-\rho_1(x)\right)f'(x)dx=$$
$$=\rho_1(a)f(a)-\rho_1(b)f(b)+bf(b)-af(b)+\rho_1(a)f(b)+af(b)-$$
$$-af(a)-\frac{1}{2}(f(b)-f(a))-\rho_1(a)f(b)-xf(x)\Big|_a^b+$$
$$+\frac{1}{2}(f(b)-f(a))+\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b\rho_1(x)f'(x)dx.$$

Производя сокращение подобных членов, получим утверждение теоремы.

§ 2. Некоторые утверждения из теории аналитических функций

Т е о р е м а 1. *Пусть $f_n(z)$ при всяком натуральном n является аналитической функцией в области $G\subset\mathbb{C}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ равномерно сходится во всякой замкнутой области $F\subset G$, то он сходится и в каждой точке из G и поточечный предел этого ряда является аналитической функцией в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [81, с. 191].

Т е о р е м а 2 (критерий сходимости бесконечного произведения). *Пусть $u_n(s)$ — последовательность аналитических функций в области G, причем*

а) *$u_n(s)\neq -1$ тождественно при всяком n;*

б) *для всякого компакта $K\subset G$*

$$\sum\sup_{s\in K}|u_n(s)|<\infty.$$

Тогда для всякого $s\in G$ существует

$$v(s)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+u_n(s))$$

и $v(s)$ является аналитической функцией в области G, не равной нулю тождественно.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [81, с. 270].

Т е о р е м а 3. *Если две функции $f(z)$ и $\varphi(.)$ голоморфны в некоторой области G и имеют равные значения на бесконечном множестве точек E в этой области, причем множество E допускает по крайней мере одну предельную точку, лежащую внутри G, то эти функции равны между собой всюду в области G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [81, с. 203].

Т е о р е м а 4. *Пусть $G(s)$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости (целой функцией), $G(s)\not\equiv 0$. Пусть P обозначает множество нулей $G(s)$ и $\nu_\rho(G)$ обозначает кратность нуля функции G в точке ρ. Если для всякого $\varepsilon>0$ и $R>0$ выполняется соотношение*

$$\log\max_{|s|=R}|G(s)|\ll_\varepsilon(R+1)^{1+\varepsilon},$$

то

а) *произведение*

$$f(s)=\prod_{\rho\in P,\rho\neq 0}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{\nu_\rho(G)}$$

равномерно сходится на каждом компакте комплексной плоскости (определяя тем самым целую функцию $f(s)$),

б) *имеет место равенство*

$$G(s)=s^{\nu_0(G)}\exp(As+B)f(s),$$

где A и B — некоторые комплексные числа,

в) *ряд*

$$\sum_{\rho\in P,\rho\neq 0}\frac{\nu_\rho(G)}{|\rho|^2}$$

сходится,

г) *если ряд*

$$\sum_{\rho\in P,\rho\neq 0}\frac{\nu_\rho(G)}{|\rho|}$$

сходится, то найдется постоянная $c>0$ такая, что

$$\log\max_{|s|=R}|G(s)|\le c(R+1).$$

Доказательству теоремы 4 предпошлем две вспомогательные леммы, имеющие самостоятельное значение.

Л е м м а 1. *Пусть $f(s)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности круга $|s|\le R$. Пусть $0<r<R$ и $n=\sum\limits_{|\rho|\le r}\nu_\rho(f)$, где суммирование ведется по всем нулям $f(s)$, лежащим в круге $|s|\le r$. Тогда*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n\le|f(0)|^{-1}\max_{|s|=R}|f(s)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n$ — все нули $f(s)$ в круге $|s|\le r$, причем среди чисел $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n$ число повторений всякого ρ равно $\nu_\rho(f)$. Рассмотрим функцию

$$F(s)=f(s)\prod_{k=1}^{n}\frac{R^2-s\bar\rho_k}{R(s-\rho_k)}.$$

Тогда $F(s)$ — аналитическая функция в круге $|s| \le R$ и, вследствие равенства

$$\left|\frac{R^2 - s\bar{\rho}_k}{R(s-\rho_k)}\right| = 1$$

при $|s| = R$, выполняется равенство $|F(s)| = |f(s)|$ при $|s| = R$. Так как аналитическая функция в области достигает максимума модуля на границе области, то

$$|F(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \le \max_{|s|=R} |F(s)| = \max_{|s|=R} |f(s)|.$$

Отсюда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $R > 0$ и функция $f(s)$ является аналитической в окрестности круга $|s| = R$. Пусть*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \qquad и \qquad M = \max_{|s|=R} \mathrm{Re}\,(f(s) - f(0)).$$

Тогда

а) $\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(0)\right| = |a_n| \le 2R^{-n}M$ *для* $n \ge 1$;

б) $\max\limits_{|s|\le r} |f(s) - f(0)| \le \frac{2r}{R-r} M$ *при* $0 < r < R$;

в) $\max\limits_{|s|\le r} \left|f^{(n)}(s)\right| \le 2n! \frac{R}{(R-r)^{n+1}} M$ *при* $n \ge 1$ *и* $0 < r < R$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно ограничиться случаем $a_0 = f(0) = 0$. Положим $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$, $s = Re^{i\varphi}$. Тогда

$$\mathrm{Re}\, f(Re^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \cos(n\varphi + \varphi_n).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n$ абсолютно сходится, то, переставляя суммирование с интегрированием, получим

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(Re^{i\varphi}) d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi + \varphi_m) \mathrm{Re}\, f(Re^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi + \varphi_m)\cos(n\varphi + \varphi_n) d\varphi = \pi |a_m| R^m$$

при $m \ge 1$. Следовательно,

$$\pi |a_n| R^n = \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\varphi + \varphi_n))\, \mathrm{Re}\, f(Re^{i\varphi}) d\varphi \le$$

$$\le M \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\varphi + \varphi_n))\, d\varphi = 2\pi M.$$

Отсюда получаем $|a_n| \le 2MR^{-n}$. Это доказывает а). Далее, при $|s| \le r$ имеем

$$|f(s)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \le 2M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = 2M \frac{r}{R-r},$$

$$\left|f^{(n)}(s)\right| \le \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m-1)...(m-n+1)|s|^{m-n} \le$$

$$\le 2M \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)...(m-n+1) R^{-n} r^{m-n} =$$

$$= 2M \frac{d^n}{dr^n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m = 2n! M \frac{R}{(R-r)^{n+1}}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $N(R)$ обозначает число нулей $G(s)$ в круге $|s| \le R$ с учетом их кратностей, т.е.

$$N(R) = \sum_{\rho \in P, |\rho| \le R} \nu_\rho(G).$$

Из леммы 1 заключаем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$N(R) \ll_\varepsilon (R+1)^{1+\varepsilon}. \tag{1}$$

Из этой оценки получаем при $\varepsilon = 1/2$

$$\sum_{1<|\rho|<R} \frac{\nu_\rho(G)}{|\rho|^2} = \int_{1+0}^{R+0} x^{-2} dN(x) =$$

$$= N(x)x^{-2}\Big|_{1+0}^{R+0} + 2\int_1^R N(x)x^{-3}dx \ll N(1) + \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx,$$

что доказывает утверждение в) теоремы. Для доказательства а) достаточно доказать, что для всякого $R > 0$ ряд

$$\sum_{\rho \in P, |\rho| > 2R} \nu_\rho(G) \left[\frac{s}{\rho} + \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)\right]$$

(где под $\log(1-z)$ при $|z| < 1$ подразумевается $-(z + z^2/2+$

$+z^3/3+\dots))$ равномерно сходится при $|s|\le R$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что ряд
$$\sum_{\rho\in P,|\rho|>2R}\nu_\rho(G)\max_{|s|\le R}\left|\frac{s}{\rho}+\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right|$$
сходится абсолютно. Так как при $|z|\le 1/2$ выполняется $|z+\log(1-z)|\ll |z|^2$, то утверждение а) следует из в).

Для доказательства б) достаточно доказать, что функция
$$\varphi(s)=G(s)s^{-\nu_0(G)}f^{-1}(s),$$
где
$$f(s)=\prod_{\rho\in P,\rho\ne0}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{\nu_\rho(G)},$$
является функцией вида $\exp(As+B)$. Поскольку $\varphi(s)$ не имеет нулей, то $\log\varphi(s)$, где под $\log\varphi(s)$ понимается произвольная ветвь логарифма, является аналитической функцией на всей комплексной плоскости.

Пусть $\log\varphi(s)=a_0+a_1s+\dots+a_ns^n+\dots$ Покажем, что при $n\ge2$ выполняется $a_n=0$. Чтобы воспользоваться леммой 2, оценим $\max\limits_{|s|\le R}|\varphi(s)|$. Имеем при $R>1$
$$\varphi(s)=G(s)s^{-\nu_0(G)}\prod_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}\times$$
$$\times\prod_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|>2R}}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}.$$
Поэтому, используя принцип максимума, получаем
$$\max_{|s|=R}|\varphi(s)|\le\max_{|s|=R}\left|G(s)s^{-\nu_0(G)}\prod_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}\right|\times$$
$$\times\max_{|s|=R}\left|\prod_{\rho\in P,|\rho|>2R}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}\right|\le$$
$$\le\max_{|s|=4R}\left|G(s)s^{-\nu_0(G)}\prod_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}\right|\times$$
$$\times\max_{|s|=R}\left|\prod_{\rho\in P,|\rho|>2R}\left[\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}\right]^{-\nu_\rho(G)}\right|\le$$

$$\le\max_{|s|=4R}|G(s)|(4R)^{-\nu_0(G)}\max_{|s|=4R}\left|\exp\left(-s\sum_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\frac{\nu_\rho(G)}{\rho}\right)\right|\times$$
$$\times\max_{|s|=R}\left|\exp\left(\sum_{\rho\in P,|\rho|>2R}\left(-\nu_\rho(G)\left(\frac{s}{\rho}+\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right)\right)\right)\right|.\qquad(2)$$
Далее,
$$\sum_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\frac{\nu_\rho(G)}{\rho}=\int\limits_{\delta-0}^{2R+0}x^{-1}dN(x)=x^{-1}N(x)\Big|_{\delta-0}^{2R+0}+\int\limits_{\delta}^{2R}N(x)\frac{dx}{x^2},$$
где $\delta=\min\limits_{\rho\in P,\rho\ne0}|\rho|$. Из (1) заключаем, что при всяком $\varepsilon>0$
$$\sum_{\substack{\rho\in P,\rho\ne0,\\|\rho|\le2R}}\frac{\nu_\rho(G)}{\rho}\ll_\varepsilon(R+1)^\varepsilon.\qquad(3)$$
Рассуждая аналогично, получим при $|s|=R$
$$\sum_{\rho\in P,|\rho|>2R}\left(-\nu_\rho(G)\left(\frac{s}{\rho}+\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right)\right)\ll$$
$$\ll\sum_{\rho\in P,|\rho|>2R}\nu_\rho(G)\frac{|s|^2}{|\rho|^2}\ll|s|^2\sum_{\rho\in P,|\rho|>2R}\frac{\nu_\rho(G)}{|\rho|^2}\ll|s|^2\int\limits_{2R+0}^{\infty}x^{-2}dN(x)\ll$$
$$\ll|s|^2\left(x^{-2}N(x)\Big|_{2R+0}^{\infty}+2\int\limits_{2R}^{\infty}N(x)\frac{dx}{x^3}\right)\ll_\varepsilon(R+1)^{1+\varepsilon}.\qquad(4)$$
Из оценок (3), (4) и оценки $\log\max|G(x)|\ll_\varepsilon(R+1)^{1+\varepsilon}$ следует, что $\log\max\limits_{|s|=R}|\varphi(s)|\ll_\varepsilon(R+1)^{1+\varepsilon}$.

Поскольку $\operatorname{Re}\log\varphi(s)=\log|\varphi(s)|$, то отсюда следует
$$M=\max_{|s|=R}\operatorname{Re}(\log\varphi(s)-\log\varphi(0))\ll_\varepsilon(R+1)^{1+\varepsilon},$$
поэтому из леммы 2 следует, что $\log\varphi(s)=As+B$. Утверждение в) теоремы 4 доказано.

Докажем утверждение г). Для этого достаточно доказать, что
$$\log\max_{|s|=R}|f(s)|\ll R+1.\qquad(5)$$
Имеем
$$\max_{|s|=R}|f(s)|\le\max_{|s|=R}\prod_{\rho\in P,\rho\ne0}\left(1+\frac{|s|}{|\rho|}\right)e^{|s|/|\rho|}\le$$
$$\le\prod_{\rho\in P,\rho\ne0}\exp\left(2\frac{|s|}{|\rho|}\right)\le\exp\left(2R\sum_{\rho\in P,\rho\ne0}\frac{1}{|\rho|}\right).$$

Так как $\max_{|s|=R}|f(s)| \ge |f(0)| \ne 0$, то утверждение г) доказано. Тем самым теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть $F(s)$ — аналитическая функция в окрестности круга $|s-s_0| \le r$, $F(s_0) \ne 0$, и в этом круге*

$$\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right| \le M.$$

Если $F(s) \ne 0$ в области $|s-s_0| \le r/2$, $\mathrm{Re}(s-s_0) \ge 0$, то

а) $\mathrm{Re}\,\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M$;

б) $\mathrm{Re}\,\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M + \mathrm{Re}\,\frac{1}{s_0-\rho}$,

где ρ — любой нуль $F(s)$ в области $|s-s_0| \le r/2$, $\mathrm{Re}(s-s_0) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(s) = F(s)\prod_{\rho}(s-\rho)^{-1},$$

где ρ пробегает все нули функции $F(s)$, лежащие в круге $|s-s_0| \le r/2$ с учетом их кратностей. Тогда $g(s)$ будет аналитической функцией в круге $|s-s_0| \le r$ и $g(s) \ne 0$ при $|s-s_0| \le r/2$. На окружности $|s-s_0| = r$ выполняется

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right| = \left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\prod_{\rho}\frac{s_0-\rho}{s-\rho}\right| \le M.$$

Следовательно, такое же неравенство имеет место в круге $|s-s_0| \le r$. Рассмотрим функцию $f(s) = \log\frac{g(s)}{g(s_0)}$ в круге $|s-s_0| \le r/2$, где выбирается непрерывная ветвь логарифма при условии, что $f(0) = 0$. При $|s-s_0| \le r/2$ имеем

$$\mathrm{Re}\, f(s) = \log\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \le \log M;$$

поэтому, применяя лемму 2, получим

$$|f'(s_0)| = \left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right| \le \frac{4}{r}\log M.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{g'(s_0)}{g(s_0)}\right| = \left|\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} - \sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right|, \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} - \sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right\} \ge -\frac{4}{r}\log M.$$

Поскольку $\mathrm{Re}(s_0-\rho) > 0$, то из неравенства

$$\mathrm{Re}\,\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M + \mathrm{Re}\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}$$

следует утверждение теоремы 5.

Теорема 6 (принцип аргумента). *Если две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические внутри и на контуре Γ, удовлетворяют на Γ условиям $\varphi(z) \ne 0$ и $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$, то внутри Γ функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z)+\psi(z)$ имеют одинаковое число нулей.*

Доказательство см. в [81, с.246].

Теорема 7. *Если $f(z)$ регулярна при $|z-z_0| \le R$ и*

$$\iint_{|z-z_0|\le R} |f(z)|^2\,dxdy = H,$$

то

$$|f(z)| \le \frac{(H/\pi)^{1/2}}{R-R'}$$

при $|z-z_0| \le R' < R$.

Доказательство. Вследствие формулы Коши имеем

$$f^2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z'-z|=r}\frac{f^2(z')}{z'-z}dz' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(z+re^{i\theta})d\theta.$$

Следовательно,

$$|f^2(z)|\int_0^{R-R'} r\,dr \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{R-R'}\int_0^{2\pi}\left|f(z+re^{i\theta})\right|^2 r\,dr\,d\theta = \frac{H}{2\pi}.$$

Теорема доказана.

Определение 1. *Пространством Харди $\mathbf{H}_2^{(R)}$* называется множество функций $f(s)$, определенных для $|s| < R$ и аналитических в этой области, для которых

$$\|f\| = \lim_{r\to R}\iint_{|s|<r}|f(s)|\,d\sigma dt < \infty.$$

Теорема 8 (Пели – Винера). *Пусть $\sigma > 0$. Равенство*

$$F(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

выполняется для некоторой функции $f(\xi)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2\,dx < \infty$$

и $F(x)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, причем для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$F(z) \ll_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

Доказательство см. в [6, с. 26; 4, с. 179].

Теорема 9 (А.Маркова). *Пусть полином n-й степени $P(x)$ имеет вещественные коэффициенты и удовлетворяет неравенству*

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \le 1.$$

Тогда

$$\max_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \le n^2.$$

Доказательство см. в [4, с.323].

Определение 2. Пусть $f(s)$— мероморфная функция в полосе $\sigma_0 < \operatorname{Re} s < \sigma_0'$. Если для любых σ_1, σ_2 таких, что $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_0'$, для $|t| > T_0(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 \le \operatorname{Re} s \le \sigma_2$ выполняется

$$|f(s)| = O\left(|t|^A\right),$$

где $A > 0$ — некоторая независимая от t величина, то $f(s)$ называется *функцией конечного порядка* (в теории рядов Дирихле).

Теорема 10. *Пусть при $\sigma \ge \alpha$ функция $f(s)$ регулярна и имеет конечный порядок. Пусть при $\sigma > \sigma_0$ выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty \quad \text{и} \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Если

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\alpha + it)|^2 \, dt$$

остается ограниченным при $T \to \infty$, то при $\sigma > \alpha$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{2T} |f(\sigma + it)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}$$

равномерно в каждой полосе $\alpha < \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$.

Доказательство теоремы см. в [84, с. 311—314].

Теорема 11. *Пусть C — контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, где $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Пусть $f(z)$ аналитична, не обращается в нуль на C и мероморфна внутри C. Положим $F(z) = \log f(z)$, $z = x + iy$, определив логарифм следующим образом: начинаем с какой-либо непрерывной ветви $\log f(z)$ на прямой $x = x_2$ и получаем значение $\log f(x + iy)$ из $\log f(x_2 + iy)$ путем непрерывного изменения вдоль прямой $y = \text{const}$ до тех пор, пока не окажется $f(x + iy) = 0$ или $f(x + iy) = \infty$. Таким образом, на конечном множестве отрезков, параллельных оси x, $\log f(z)$ может быть не определена.*

Тогда имеет место соотношение

$$\int_C F(z) dz = -2\pi i \int_{x_1}^{x_2} (N(x) - P(x)) \, dx, \tag{6}$$

где $N(x)$ — число нулей $f(z)$ в области $x_1 < \operatorname{Re} z < x$, $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$, $P(x)$ — число полюсов функции $f(z)$ в той же области.

Доказательство см. в [84, с. 141].

Один из вариантов доказательства теоремы состоит в представлении $f(z)$ в виде

$$f(z) = f_0(z) \prod_{\rho_1} (z - \rho_1) \cdot \prod_{\rho_2} (z - \rho_2)^{-1},$$

где $f_0(z)$ — функция, не имеющая ни нулей, ни полюсов на прямоугольнике C, ρ_1 пробегает все нули $f(z)$ и ρ_2 — все полюсы функции $f(z)$. Вследствие линейности правой и левой частей формулы (6) по F, достаточно проверить справедливость тождества для $F = \log f_0(z)$ и $F = \log(z - \rho)$, что нетрудно проделать, используя теорему Коши об интеграле по контуру.

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы* 11. *Тогда*

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} (N(x) - P(x)) \, dx = \int_{y_1}^{y_2} (\log |f(x_1 + it)| - \log |f(x_2 + it)|) \, dt +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} (\arg f(\sigma + iy_2) - \arg f(\sigma + iy_1)) \, d\sigma. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку правая часть равенства (6) является чисто мнимой, то, отделяя мнимую часть в $\int_C \log f(z) dz$, получим равенство (7).

Теорема 12. *Пусть $f(s)$ — аналитическая функция при $|s| \le R$. Пусть $f(s) \ne 0$ при вещественных s, $f(0) \in \mathbb{R}$. Тогда для любой непрерывной ветви аргумента и $0 < r < 0{,}5R$ выполняется*

$$\arg f(r) - \arg f(0) \ll \log \max_{|s|=R} |f(s)| - \log |f(0)| + 1.$$

Доказательство. Можно считать, что $f(s)$ не является постоянной. Пусть $f_1(s) = f(s) + \overline{f(\bar{s})}$. Тогда $f_1(s)$ — аналитическая функция, вещественная при вещественных s. Если $\arg f(x) \equiv \pi (\operatorname{mod} 2\pi)$, то $f_1(s) = 0$. Поэтому

$$\arg f(r) - \arg f(0) \ll n + 1,$$

где n — число нулей $f_1(s)$. Применяя лемму 1, получим утверждение теоремы.

§ 3. Гамма-функция Эйлера

Определение 1. *Гамма-функция Эйлера* $\Gamma(s)$ задается равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\exp(\gamma s)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}, \qquad (1)$$

где γ — постоянная Эйлера, т.е. $\gamma = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-1} - \log N\right)$.

Определение корректно, так как при $n > 2|s|$ выполняется неравенство

$$-\frac{s}{n} + \log\left(1+\frac{s}{n}\right) = -\frac{s}{n} + \left(\frac{s}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{n^2} + \ldots\right) \ll \frac{|s|^2}{n^2}.$$

Следовательно, произведение, входящее в определение $\Gamma(s)$, (1), равномерно сходится на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$.

Из теоремы 4 §2 следует, что $\Gamma(s)$ аналитична на всей плоскости $\mathbf{C}$, за исключением точек $s = 0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюсы.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Доказательство. Из определения $\Gamma(s)$ получаем

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\lim_{m\to\infty}\exp\left(s\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m} - \log m\right)\right)\times$$

$$\times\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n} =$$

$$= s\lim_{m\to\infty} m^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right) = s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right) =$$

$$= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right) =$$

$$= s\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{s}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right) = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\left(1+\frac{s}{n}\right),$$

так как $(1+1/m)^s \to 1$ при $m\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Справедливо соотношение*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}.$$

Следствие 2. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Теорема 2 (функциональное уравнение для $\Gamma(s)$). *Имеет место равенство*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Доказательство. В силу следствия 2 получаем

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^{s+1}}{(s+1)\ldots(s+n)}\left(\frac{(n-1)!n^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\right)^{-1} =$$

$$= s\lim_{n\to\infty}\frac{n}{s+n} = s.$$

Следствие 3. *Для натуральных n справедливо равенство*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Теорема 3 (формула дополнения). *При s, не равном целому числу, имеет место равенство*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Доказательство. Так как $\log\max\limits_{|s|=R}|\sin\pi s| \ll R+1$, то в силу теоремы 4 §2 имеет место равенство

$$\sin\pi s = s\exp(As+B)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

Логарифмируя это равенство, а затем дифференцируя, получим

$$\pi\frac{\cos\pi s}{\sin\pi s} = \frac{1}{s} + A - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s}{n^2-s^2}.$$

Устремляя s к нулю, найдем, что $A = 0$. Отсюда следует, что $\sin(\pi s)/s = e^B\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-s^2/n^2)$. Опять устремляя s к нулю, найдем, что $e^B = \pi$. Таким образом, $\sin\pi s = \pi s\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-s^2/n^2)$. Из определения $\Gamma(s)$ следует, что

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = -s\Gamma(s)\Gamma(-s) = (-s)\frac{1}{-s^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

Это доказывает теорему 3.

Следствие 4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Следствие 5 (формула удвоения).

$$\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2\sqrt{\pi}2^{-2s}\Gamma(2s).$$

Доказательство. В силу следствий 1 и 4

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\cdot\frac{(n-1)!n^{s+1/2}}{(s+1/2)\ldots(s+n-1/2)};$$

$$2\sqrt{\pi}2^{-2s}\Gamma(2s) = 2^{1-2s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2s) =$$

$$= 2^{1-2s}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^{1/2}}{(1/2)(1/2+1)...(1/2+n-1)}\cdot\frac{(2n-1)!(2n)^{2s}}{2s(2s+1)...(2s+2n-1)} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^{1/2}}{2^{-n}\cdot(1\cdot 3\cdot 5...(2n-1))}\times$$

$$\times\frac{2\cdot 4...(2n-2)\,(1\cdot 2...(2n-1))\,n^{2s}}{2^n s(s+1)...(s+n-1)(s+1/2)...(s+n-1/2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^{1/2}}{s(s+1)...(s+n-1)}\cdot\frac{(n-1)!n^{2s}}{(s+1/2)...(s+n-1/2)}.$$

Отсюда следует утверждение следствия.

Теорема 4 (интегральная формула). *При* $\mathrm{Re}\, s > 0$ *выполняется равенство*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Доказательство. Пусть

$$\Pi(s;n) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt.$$

Тогда

$\Pi(s;n) =$

$$= n^s\int_0^1 (1-t)^n t^{s-1}dt = \frac{n^s}{s}\int_0^1 (1-t)^n dt^s = n^s\frac{n}{s}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^s dt = ...$$

$$... = n^s\frac{n(n-1)...1}{s(s+1)...(s+n-1)}\int_0^1 t^{s+n-1}dt = n^s\frac{n(n-1)...1}{s(s+1)...(s+n)}.$$

В силу следствия 1

$$\lim_{n\to\infty}\Pi(s;n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s (n+1)^s\frac{n...1}{s(s+1)...(s+n)} = \Gamma(s).$$

С другой стороны, при $0 < y < 1$ имеем

$$\log(1-y) = -(y+\frac{1}{2}y^2+...) < -y,$$

$$\log(1-y) = \log\frac{1-y^2}{1+y} = \log(1-y^2)-(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-...) > -y+\log(1-y^2),$$

поэтому $(1-y^2)e^{-y} < 1-y < e^{-y}$. Полагая $y = t/n$, получим для

$0 < t < n$

$$e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right) < \left(1-\frac{t}{n}\right)^n < e^{-t},$$

$$0 < e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n < e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right).$$

Поскольку для $y\in(0,1)$ выполняется $1-(1-y)^n \le ny$, то при $0 < t < n$ справедливо неравенство

$$0 < e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n < e^{-t}\frac{t^2}{n}.$$

Отсюда выводим, что

$$\int_0^n t^{s-1}e^{-t}dt - \Pi(s;n) = \int_0^n t^{s-1}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt \ll$$

$$\ll \frac{1}{n}\int_0^n t^{\mathrm{Re}\,s+1}e^{-t}dt \ll \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\,s+1}e^{-t}dt.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\Pi(s;n) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt.$$

Теорема 4 доказана.

Следствие 6. $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)du = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)du = 2\int_0^\infty \exp(-u^2)du =$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u}d(\sqrt{u}) = \int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Из следствия 4 получаем следствие 6.

Теорема 5 (формула Стирлинга). *При* $\delta > 0$ *и* $-\pi+\delta \le \arg s \le$ $\le \pi-\delta$ *имеют место равенства*

а) $\log\Gamma(s) = (s-1/2)\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + O\left(|s|^{-1}\right)$, *причем постоянная в знаке* O *зависит только от* δ;

б) $\log\Gamma(s) = (s-1/2)\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \frac{\rho(u)}{u+s}du$, *где* $\rho(u) =$ $= 1/2 - \{u\}$.

Доказательство. Из определения $\Gamma(s)$ следует, что

$$\log\Gamma(s) = -\gamma s - \log s + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s}{n} - \log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right).$$

Положим для $N \in \mathbf{N}$

$$\Sigma_1 = \sum_{1/2<n<N+1/2} n^{-1}, \qquad \Sigma_2 = \sum_{0<n<N+1/2} \log(n+s),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{1/2<n<N+1/2} \log n.$$

Используя теорему 1.2, получим

$$\Sigma_1 = \log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \Sigma_3 = \int_{1/2}^{N+1/2} \log x\,dx + \int_{1/2}^{N+1/2} \rho_1(x)\frac{dx}{x},$$

$$\Sigma_2 = \int_0^{N+1/2} \log(x+s)dx + \int_0^{N+1/2} \rho_1(x)\frac{dx}{x+s} - \frac{1}{2}\log s,$$

где $\rho_1(x) = x - [x] - 1/2$.

Из полученных формул для Σ_1, Σ_2 и Σ_3 следует, что

$$\log\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\left(-\gamma s - \log s + s\left(\log N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \right.$$

$$-\left(\int_0^{N+1/2} \log(x+s)dx + \int_0^{N+1/2} \rho_1(x)\frac{dx}{x+s} - \frac{1}{2}\log s\right) + \left(\int_{1/2}^{N+1/2} \log x\,dx + \right.$$

$$\left.\left. + \int_{1/2}^{N+1/2} \rho_1(x)\frac{dx}{x}\right)\right) = \left(s - \frac{1}{2}\right)\log s - s + c - \int_0^{\infty} \rho_1(x)\frac{dx}{x+s}, \qquad (3)$$

где c — абсолютная постоянная. Далее, полагая $\sigma_1(x) = \int_0^x \rho_1(y)dy$, получим интегрированием по частям

$$\int_0^{\infty} \rho_1(x)\frac{dx}{x+s} = \int_0^{\infty} \sigma_1(x)\frac{dx}{(x+s)^2}.$$

Поскольку при $|s| > 1$

$$\int_0^{\infty} \sigma_1(x)\frac{dx}{(x+s)^2} \ll \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + |s|^2 - 2x|s|\cos\delta} \ll \frac{1}{|s|},$$

то

$$\log\Gamma(s) = (s - 1/2)\log s - s + c + O\left(|s|^{-1}\right). \qquad (4)$$

Положим в этой формуле поочередно $s = N$, $N + 1/2$, $2N$ и воспользуемся следствием 5. Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, то, устремляя N к ∞, получим $c = \log\sqrt{2\pi}$. Равенства (4) и (3) с учетом значения c доказывают теорему 5.

Следствие 7. $\log \max_{|s|=R} |\Gamma^{-1}(s)| \ll (R+1)\log(R+2)$.

Следствие 8. *При* $\alpha \le \sigma \le \beta$ *и* $t > 1$

$$\Gamma(\sigma+it) = t^{\sigma+it-1/2}\exp\left(-\frac{\pi}{2}t - it + i\frac{\pi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\right)\sqrt{2\pi}\left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\},$$

причем постоянная в знаке O зависит лишь от α и β.

Следствие 9. *Дифференцируя* (4), *найдем* ($|\arg s| < \pi$), *что*

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

§ 4. Общие свойства рядов Дирихле

Определение 1. *Рядами Дирихле* называется выражение

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

где a_n — комплексные числа (коэффициенты ряда Дирихле), $s = \sigma + it$.

Теорема 1. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s_0}$ *сходится. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *сходится равномерно в каждой замкнутой области, которая целиком лежит в области* $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. *Функция* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *аналитична при* $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

Доказательство. Пусть $A(x) = \sum_{n\le x} a_n n^{-s_0}$. Тогда если N_0 и N_1 — натуральные числа, то

$$\sum_{N_0-1/2\le n\le N_1+1/2} a_n n^{-s} = \int_{N_0-1/2}^{N_1+1/2} x^{s_0-s}\,d\left(A(x) - A(N_0-1/2)\right).$$

Интегрируя по частям, получаем при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$

$$\sum_{N_0-1/2\le n\le N_1+1/2} a_n n^{-s} = x^{s_0-s}\left(A(x) - A(N_0-1/2)\right)\Big|_{N_0-1/2}^{N_1+1/2} -$$

$$-\int_{N_0-1/2}^{N_1+1/2} \left(A(x) - A(N_0-1/2)\right)d(x^{s_0-s}) \ll$$

$$\ll (N_1+1/2)^{\operatorname{Re} s_0 - \operatorname{Re} s}\left|A(N_1+1/2) - A(N_0-1/2)\right| +$$

$$+|s_0-s|\int\limits_{N_0-1/2}^{N_1+1/2} x^{\operatorname{Re}s_0-\operatorname{Re}s-1}|A(x)-A(N_0-1/2)|\,dx \ll$$

$$\ll \sum_{N_0-1/2\le x\le N_1+1/2} |A(x)-A(N_0-1/2)|\times$$

$$\times\left((N_1+1/2)^{\operatorname{Re}s_0-\operatorname{Re}s}+\frac{|s-s_0|}{\operatorname{Re}(s-s_0)}(N_0-1/2)^{\operatorname{Re}(s_0-s)}\right).$$

Так как по условию теоремы $A(x)$ стремится к конечному пределу, то, применяя критерий сходимости Коши, получим утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть для каждого σ в области $\sigma_0<\sigma<\infty$*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s},\quad G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{-s}$$

и $F(\sigma)=G(\sigma)$. Тогда $a_n=b_n$ для всех $n=1,2\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{-\sigma},\tag{1}$$

и оба ряда в области $\sigma>\sigma_0+1$ равномерно сходятся, поэтому

$$\lim_{\sigma\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\sigma\to\infty}a_n n^{-\sigma}=a_1,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{-\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\sigma\to\infty}b_n n^{-\sigma}=b_1,$$

так что $a_1=b_1$. Далее, если уже доказано, что $a_n=b_n$ при всех $n<m$, то из (1) следует, что

$$\sum_{n=m}^{\infty}a_n n^{-\sigma}=\sum_{n=m}^{\infty}b_n n^{-\sigma}.$$

Умножая обе части на m^{σ} и устремляя σ к ∞, получим $a_m=b_m$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Если ряды*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s},\qquad g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{-s}$$

абсолютно сходятся для $\sigma=\sigma_0$ и если $|a_n|\le b_n$ для всех n, тогда для любого $T\ge 0$

$$\int\limits_{-T}^{T}|f(\sigma_0+it)|^2\,dt\le 2\int\limits_{-2T}^{2T}|g(\sigma_0+it)|^2\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int\limits_{-T}^{T}|f(\sigma_0+it)|^2\,dt\le 2\int\limits_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|t|}{2T}\right)|f(\sigma_0+it)|^2\,dt=$$

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m\bar a_n}{(mn)^{\sigma_0}}\int\limits_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|t|}{2T}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{-it}dt\le$$

$$\le 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_m\bar b_n}{(mn)^{\sigma_0}}\int\limits_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|t|}{2T}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{-it}dt=$$

$$=2\int\limits_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|t|}{2T}\right)|g(\sigma_0+it)|^2\,dt\le 2\int\limits_{-2T}^{2T}|g(\sigma_0+it)|^2\,dt,$$

ибо $\int\limits_{-1}^{1}(1-|t|)y^{it}\,dt\ge 0$ для любого вещественного значения y. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *Оценка*

$$\sum_{0<m<n<T}\frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\log(n/m)}=O(T^{2-2\sigma}\log^2 T)$$

справедлива равномерно для $1/2\le\sigma\le 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\sum_{0<m<n<T}\frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\log(n/m)}=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1=\sum_{0<m<n/2<n<T}\frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\log(n/m)},$$

$$\Sigma_2=\sum_{0<n/2\le m<n<T}\frac{1}{m^{\sigma}n^{\sigma}\log(n/m)}.$$

Поскольку при $m<n/2$ выполняется $\log(n/m)\gg 1$, то

$$\Sigma_1\ll\sum_{0<m<n<T}m^{-\sigma}n^{-\sigma}\ll\left(\sum_{0<n<T}n^{-\sigma}\right)^2\ll T^{2-2\sigma}\log^2 T.$$

Далее, при $n/2\le m<n$ выполняется

$$\log\left(\frac{n}{m}\right)=\log\left(1+\frac{n-m}{m}\right)\gg\frac{n-m}{m}.$$

Следовательно, полагая $n - m = r$, получим

$$\Sigma_2 \ll \sum_{n<T, r\le n/2} \frac{(n-r)^{-\sigma} n^{-\sigma}}{r/n} \ll \sum_{n<T} n^{1-2\sigma} \sum_{r\le n/2} r^{-1} \ll T^{2-2\sigma} \log^2 T,$$

тем самым теорема 4 доказана.

§ 5. Формула обращения

Т е о р е м а 1. *Пусть* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, *причем при всех* $\sigma > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} < \infty$. *Предположим, что* $|a_n| \le A(n)$, *где* $A(n) > 0$ — *монотонно возрастающая функция* n *и при* $\sigma \to 1+0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma-1)^{-\alpha}),$$

где α — *некоторая положительная постоянная.*

Тогда при любых $b_0 \ge b > 1, T \ge 1, x = N + 1/2$ *имеет место формула*

$$\Phi(x) = \sum_{n\le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds +$$

$$+ O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

где постоянная в знаке O *зависит только от* b_0.

Докажем сначала следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Имеет место соотношение* ($b > 0$)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(a^b T^{-1} |\log a|^{-1}\right), & \text{если } a > 1, \\ O\left(a^b T^{-1} |\log a|^{-1}\right), & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $a > 1$. Возьмем $U > b$ и рассмотрим контур Γ (рис. 2). По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a^s ds}{s} = 1,$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s ds}{s} = 1 + R, \qquad (2)$$

где R — соответствующие интегралы по сторонам I, II и III. Заметим,

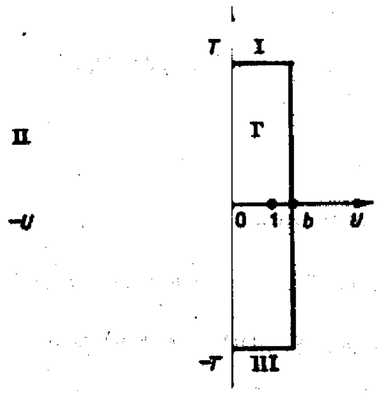

Рис.2

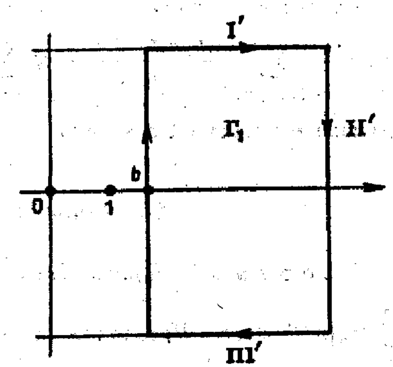

Рис.3

что интегралы по I и III равны по абсолютной величине. Далее, при $U \to +\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathrm{I}} \frac{a^s}{s} ds\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{b} \frac{a^{\sigma} d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}} \le \frac{a^b}{T \log a},$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathrm{II}} \frac{a^s}{s} ds\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{a^{-U} dt}{\sqrt{U^2+t^2}} = O(a^{-U}) \to 0.$$

Переходя в (2) к пределу при $U \to +\infty$, получим (1) при $a > 1$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Рассмотрим контур Γ_1, изображенный на рис. 3. Опять по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{a^s ds}{s} = 0,$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s ds}{s} = R_1, \qquad (3)$$

где R_1 — соответствующие интегралы по сторонам I′, II′ и III′, причем интегралы по сторонам I′ и III′ равны по абсолютной величине. Имеем при $U \to +\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathrm{I}'} \frac{a^s ds}{s}\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{b}^{U} \frac{a^{\sigma} d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}} \le \frac{a^b}{T|\log a|},$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Pi'} \frac{a^s\,ds}{s}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{a^U\,dt}{\sqrt{U^2+t^2}} = O(a^U) \to 0.$$

Опять же, переходя к пределу при $U \to +\infty$ в (3), получим (1) при $0 < a < 1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $x = N+1/2$, то $x/n \ne 1$ при натуральном n. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ абсолютно сходится при $s = b+it$. Итегрируя его почленно, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}\right) = \sum_{n\le x} a_n + R,$$

где в силу леммы

$$R = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1}\left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1}\right).$$

Сумму под знаком O разобьем на две: в первую отнесем те слагаемые, где $x/n \le 1/2$ или $x/n \ge 2$; для них $|\log(x/n)| \ge \log 2$, и так как по условию теоремы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} = O((b-1)^{-\alpha}),$$

то первая сумма будет

$$O\left(x^b T^{-1}(b-1)^{-\alpha}\right);$$

вторая сумма имеет вид

$$\sum_{x/2<n\le 2x} |a_n|\left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1}\left|\log\frac{x}{n}\right|^{-1} \le$$

$$\le T^{-1}A(2x)\cdot 2^b \sum_{x/2<n<2x}\left|\log\frac{N+0,5}{n}\right|^{-1}.$$

Выделяя в последней сумме слагаемые с $n = N-1, N, N+1$, которые являются величинами порядка $O(x)$, для $\varkappa$ — оставшейся части — находим оценку

$$\varkappa \le \int_{x/2}^{N-1}\left(\log\frac{N+0,5}{u}\right)^{-1}du + \int_{N+1}^{2x}\left(\log\frac{u}{N+0,5}\right)^{-1}du = O(x\log x).$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \tag{4}$$

причем этот ряд абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1$, *и пусть при некотором* $b > 1$

$$B(b) = \int_1^{\infty} \frac{|A(\xi)|d\xi}{\xi^{b+1}}, \qquad A(\xi) = \sum_{n\le\xi} a(n).$$

Тогда при $x \ge 1$, $T \ge 2$ *имеет место формула*

$$\int_1^x A(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds + R(x),$$

где

$$R(x) \le c\left(B(b)\frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\left(\frac{x\log x}{T} + \log T\right)\max_{0,5x\le\xi\le 1,5x}|A(\xi)|\right).$$

Доказательство. При $\mathrm{Re}\, s > 1$ с помощью частного суммирования (теорема 1.1) получаем

$$\frac{F(s)}{s} = \int_1^{\infty} A(\xi)\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $x^{s+1}(s+1)^{-1}$ и интегрируя по отрезку $[b+iT, b-iT]$, найдем

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{F(s)}{s(s+1)}x^{s+1}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\int_1^{\infty}\frac{A(\xi)d\xi}{\xi^{s+1}}\right)ds.$$

Поскольку несобственный интеграл по ξ абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\, s > 1$ и $b > 1$, то, меняя порядок интегрирования, получим

$$J = \int_1^{\infty} A(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{s+1}\frac{ds}{s+1}\right)d\xi = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \int_1^{x-1} A(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{s+1}\frac{ds}{s+1}\right)d\xi,$$

$$J_2 = \int_{x-1}^{x+1} A(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{s+1}\frac{ds}{s+1}\right)d\xi,$$

$$J_3 = \int_{x+1}^{\infty} A(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{s+1}\frac{ds}{s+1}\right)d\xi.$$

22-4419

Вычислим интегралы $J_j, j = 1,2,3$. Известно, что при $0 < a < 1$, $\alpha > 0, T \geq 2$ имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\frac{a^s}{s}ds = \begin{cases} 1+2\theta a^\alpha T^{-1}\log^{-1}a, & \text{если } a>1,\\ 2\theta a^\alpha T^{-1}\log^{-1}a, & \text{если } a<1,\end{cases} \tag{5}$$

где $|\theta| \leq 1$. Пользуясь определением J_1, найдем ($\alpha = b+1$)

$$J_1 = \int\limits_1^{x-1} A(\xi)d\xi + \int\limits_1^{x-1} A(\xi)\theta(x;\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{b+1} T^{-1}\log^{-1}\frac{x}{\xi}d\xi.$$

Последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_1^{0,5x}|A(\xi)|\frac{x^{b+1}}{\xi^{b+1}}\cdot\frac{d\xi}{T\log 2} + \int\limits_{0,5x}^{x-1}|A(\xi)|\frac{x^{b+1}}{\xi^{b+1}}\cdot\frac{d\xi}{T\log(x/\xi)} \leq$$

$$\leq c\frac{x^{b+1}}{T}B(b) + 2^{b+1}\max_{0,5x\leq\xi\leq x-1}|A(\xi)|\frac{1}{T}\int\limits_{0,5x}^{x-1}\frac{d\xi}{\log(x/\xi)};$$

$$\left|\int\limits_{0,5x}^{x-1}\frac{d\xi}{\log(x/\xi)}\right| = x\left|\int\limits_{0,5}^{1-1/x}\frac{du}{\log(1+(u-1))}\right| \leq x\left|\int\limits_{0,5}^{1-1/x}\frac{du}{1-u}\right| \leq x\log x.$$

Следовательно,

$$J_1 = \int\limits_1^{x-1}A(\xi)d\xi + c\theta\left(B(b)x^{b+1}T^{-1} + 2^bT^{-1}x\log x\max_{0,5x\leq\xi\leq x-1}|A(\xi)|\right).$$

Интегралы J_2 и J_3 оценим сверху. Имеем

$$|J_2| \leq \int\limits_{x-1}^{x+1}|A(\xi)|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{x}{\xi}\right)^{b+1}\frac{dt}{\sqrt{(b+1)^2+t^2}}\right)d\xi \leq$$

$$\leq c\cdot 2^b\max_{x-1\leq\xi\leq x+1}|A(\xi)|\log T.$$

Далее, пользуясь (5) и определением J_3, находим ($\alpha = b+1$)

$$|J_3| \leq 2\int\limits_{x+1}^{\infty}|A(\xi)|\left(\frac{x}{\xi}\right)^{b+1}\frac{d\xi}{T|\log(\xi/x)|} \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{x+1}^{1,5x}|A(\xi)|\left(\frac{x}{\xi}\right)^{b+1}\frac{d\xi}{T\log(\xi/x)} + 4\int\limits_{1,5x}^{\infty}|A(\xi)|\frac{x^{b+1}}{\xi^{b+1}}\frac{d\xi}{T\log 2} \leq$$

$$\leq c\left(2^b\max_{x+1\leq\xi\leq1,5x}|A(\xi)|T^{-1}x\log x + B(b)T^{-1}x^{b+1}\right).$$

Из определения J и полученных оценок следует утверждение теоремы.

Л е м м а 2. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{x^s}{s^2}ds = \begin{cases}\log x, & \text{если } x\geq 1,\\ 0, & \text{если } 0<x<1.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычет функции x^s/s^2 при $s=0$ равен $\log x$. При $x \geq 1$ будем переносить контур интегрирования на прямую $\operatorname{Re} s = -B$, при $0 < x < 1$ — на прямую $\operatorname{Re} s = B$. Устремляя B к $+\infty$, получим утверждение леммы.

§ 6. Теорема об условно сходящихся рядах в гильбертовом пространстве

Т е о р е м а 1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *из векторов вещественного гильбертова пространства* H *удовлетворяет условию* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|u_n\|^2 < \infty$ *и для любого вектора* $e \in H$, $\|e\| = 1$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n, e)$ *сходится условно при некоторой перестановке членов, то для любого* $s \in H$ *существует перестановка* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *натурального ряда, при которой*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k} = s$$

в смысле нормы H.

Будем следовать работе Д.В.Печерского [76].

Для доказательства этой теоремы понадобятся два вспомогательных утверждения.

Т е о р е м а 2 (об отделимости). *Пусть* X *— линейное нормированное пространство,* $D \subset X$ *— выпуклое множество, замкнутое в смысле нормы* X. *Тогда для любого вектора* $s \in X\backslash D$ *существуют* $\varepsilon > 0$ *и линейный функционал* $f \in X^*$ *такие, что*

$$f(x) \leq f(s) - \varepsilon$$

при всех $x \in D$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* H *— вещественное гильбертово пространство,* $D \subset H$ *— выпуклое множество, замкнутое в смысле нормы* H. *Тогда если* $D \neq H$, *то существует вектор* $e \in H$, $\|e\| = 1$, *такой, что*

$$\sup_{x\in D}(x, e) < +\infty.$$

22*

Доказательства теоремы 2 и следствия 1 см. в [27, с.452].

Л е м м а 1. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из векторов вещественного гильбертова пространства H удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

и для любого вектора $e \in H$, $\|e\| = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n, e)$ сходится условно при некоторой перестановке членов.

Тогда для любого $s \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют номер N и числа $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$, равные 0 или 1, такие, что

$$\left\| s - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \cdot u_n \right\| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s \in H$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Выберем номер m так, чтобы

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|u_n\|^2 < \varepsilon^2/9.$$

Обозначим символом P_m множество всех векторов $x \in H$ вида

$$x = \sum_{n=m}^{N} \lambda_n \cdot u_n,$$

где $\lambda_n \in [0,1], n = m, m+1, ..., N$, а $N = m, m+1, m+2, ...$

Очевидно множество P_m выпукло. Пусть $\bar{P}_m$ — замыкание множества P_m в смысле нормы H. Тогда $\bar{P}_m$ — замкнутое выпуклое множество. Покажем, что $\bar{P}_m = H$.

Допустим противное. Тогда по следствию 1 существует $e \in H$, $\|e\| = 1$, такой, что $\sup\limits_{x \in \bar{P}_m} (x, e) < +\infty$. По условию ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (u_n, e)$ сходится условно при некоторой перестановке членов и, следовательно, расходится ряд из положительных членов этого ряда; поэтому для любого $c > 0$ существует номер N и числа $\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, ..., \varepsilon_N$, равные 0 или 1, такие, что $\sum\limits_{n=m}^{N} \varepsilon_n (u_n, e) > c$, откуда $\left(\sum\limits_{n=m}^{N} \varepsilon_n \cdot u_n, e \right) > c$. Так как $\sum\limits_{n=m}^{N} \varepsilon_n \cdot u_n \in \bar{P}_m$, то $\sup\limits_{x \in \bar{P}_m} (x, e) = +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\bar{P}_m = H$. Следовательно, существуют номер $N \geq m$ и числа $\lambda_m \in [0,1], \lambda_{m+1} \in [0,1], ..., \lambda_N \in [0,1]$ такие, что

$$\left\| s - \sum_{n=m}^{N} \lambda_n \cdot u_n \right\| < \varepsilon/3.$$

Построим индуктивно числа $\varepsilon_m, ..., \varepsilon_N$, равные 0 или 1, такие, что при любом $p, p = m, m+1, ..., N$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{n=m}^{p} \lambda_n \cdot u_n - \sum_{n=m}^{p} \varepsilon_n \cdot u_n \right\|^2 \leq \sum_{n=m}^{p} \|u_n\|^2.$$

Положим $\varepsilon_m = 1$, и пусть числа $\varepsilon_m, ..., \varepsilon_p$ построены так, что выполняется последнее неравенство. Выберем тогда $\varepsilon_{p+1} (\varepsilon_{p+1} = 0$ или $\varepsilon_{p+1} = 1)$ так, чтобы

$$(\lambda_{p+1} - \varepsilon_{p+1}) \cdot \left(\sum_{n=m}^{p} (\lambda_n - \varepsilon_n) \cdot u_n, u_{p+1} \right) \leq 0.$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=m}^{p+1} \lambda_n \cdot u_n - \sum_{n=m}^{p+1} \varepsilon_n \cdot u_n \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{n=m}^{p} (\lambda_n - \varepsilon_n) \cdot u_n + (\lambda_{p+1} - \varepsilon_{p+1}) \cdot u_{p+1} \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{n=m}^{p} (\lambda_n - \varepsilon_n) \cdot u_n \right\|^2 + (\lambda_{p+1} - \varepsilon_{p+1})^2 \cdot \|u_{p+1}\|^2 +$$

$$+ 2(\lambda_{p+1} - \varepsilon_{p+1}) \left(\sum_{n=m}^{p} (\lambda_n - \varepsilon_n) \cdot u_n, u_{p+1} \right) \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{n=m}^{p} (\lambda_n - \varepsilon_n) \cdot u_n \right\|^2 + \|u_{p+1}\|^2 \leq \sum_{n=m}^{p+1} \|u_n\|^2.$$

Итак, существуют $\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, ..., \varepsilon_N$, равные 0 или 1, такие, что

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} \lambda_n \cdot u_n - \sum_{n=m}^{N} \varepsilon_n \cdot u_n \right\|^2 \leq \sum_{n=m}^{N} \|u_n\|^2 \leq \varepsilon^2/9.$$

Тогда

$$\left\| s - \sum_{n=m}^{N} \varepsilon_n \cdot u_n \right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из векторов вещественного гильбертова пространства H удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

и для любого вектора $e \in H$, $\|e\| = 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n, e)$ сходится условно при некоторой перестановке членов.

Тогда для любого $s \in H$ существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ сходится к s по норме H.

Доказательство. Пусть $s \in H$ произволен. Построим перестановку $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел следующим образом. Положим $n_1 = 1$. На основании леммы 1, примененной к ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, существует конечное множество номеров $T_1 \subset \{2, 3, \dots\}$ такое, что

$$\left\| s - u_1 - \sum_{n \in T_1} u_n \right\| < 1/2.$$

После номера $n_1 = 1$ выпишем номера, входящие во множество T_1 в произвольном порядке. Затем выпишем номер 2, если $2 \notin T_1$. Обозначим символом T_2 множество всех выписанных номеров. Пусть $N_1 = \max\limits_{n \in T_2}\{n\}$. Применим лемму 1 к ряду $\sum\limits_{n=N_1+1}^{\infty} u_n$. На основании этой леммы существует конечное множество номеров $T_3 \subset \{N_2 + 1, N_2 + 2, \dots\}$ такое, что

$$\left\| s - \sum_{n \in T_2} u_n - \sum_{n \in T_3} u_n \right\| < 1/4.$$

После номеров из множества T_2 выпишем номера, входящие в T_3 в произвольном порядке. Затем выпишем номер 3, если $3 \notin T_2 \cup T_3$, и т.д.

Лемма 3. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, N — произвольный номер, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ — произвольные векторы из H такие, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \nu_n = 0$.*

Тогда существует перестановка $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ множества $\{1, 2, \dots, N\}$, при которой

$$\max_{1 \le m \le N} \left\| \sum_{k=1}^{m} \nu_{n_k} \right\| \le \left(\sum_{n=1}^{N} \|\nu_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Построим перестановку $\{n_1, \dots, n_N\}$ индуктивно. Положим $n_1 = 1$ и пусть номера $n_1, \dots, n_p$, $1 \le p \le N-1$, построены так, что

$$\max_{1 \le m \le p} \left\| \sum_{k=1}^{m} \nu_{n_k} \right\|^2 \le \sum_{n=1}^{p} \|\nu_n\|^2. \qquad (1)$$

Выберем тогда номер n_{p+1} из числа оставшихся так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k}, \nu_{n_{p+1}} \right) \le 0. \qquad (2)$$

Такой номер n_{p+1} существует, так как в противном случае было бы

$$\sum_{i \ne n_k\, (k=1,\dots,p)} \left(\sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k}, \nu_i \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k}, -\sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k} \right) > 0.$$

Если $\nu_{n_{p+1}}$ удовлетворяет неравенству (2), то

$$\left\| \sum_{k=1}^{p+1} \nu_{n_k} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k} \right\|^2 + \|\nu_{n_{p+1}}\|^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k}, \nu_{n_{p+1}} \right) \le$$
$$\le \left\| \sum_{k=1}^{p} \nu_{n_k} \right\|^2 + \|\nu_{n_{p+1}}\|^2 \le \sum_{k=1}^{p+1} \|\nu_{n_k}\|^2$$

в силу неравенства (1).

Построенная перестановка $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ удовлетворяет неравенству из формулировки леммы.

Следствие 2. *Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ — произвольные векторы вещественного гильбертова пространства H. Тогда существует перестановка $\{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ множества $\{1, 2, \dots, N\}$, при которой*

$$\max_{1 \le m \le N} \left\| \sum_{k=1}^{m} \nu_{n_k} \right\| \le \left(\sum_{n=1}^{N} \|\nu_n\|^2 \right)^{1/2} + 2\left\| \sum_{n=1}^{N} \nu_n \right\|.$$

Доказательство. Положим

$$\nu_{N+1} = -\sum_{n=1}^{N} \nu_n$$

и применим лемму 3 ко множеству векторов $\{\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_{N+1}\}$. Существует перестановка $\{n_1, n_2, \dots, n_{N+1}\}$ множества $\{1, \dots, N, N+1\}$, при которой

$$\max_{1 \le m \le N+1} \left\| \sum_{k=1}^{m} \nu_{n_k} \right\| \le \left(\sum_{n=1}^{N} \|\nu_n\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} \nu_n \right\|^2 \right)^{1/2} \le$$
$$\le \left(\sum_{n=1}^{N} \|\nu_n\|^2 \right)^{1/2} + \left\| \sum_{n=1}^{N} \nu_n \right\|.$$

Вычеркнем из набора $\{\nu_{n_1}, \dots, \nu_{n_{N+1}}\}$ вектор ν_{N+1}. Оставшийся набор будет удовлетворять неравенству из формулировки следствия.

Лемма 4. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из векторов вещественного гильбертова пространства H удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$$

и некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по норме H к вектору $s \in H$, то существует перестановка $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел, при которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = s$$

по норме H.

Доказательство. Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, n = 1, 2, ...$, и пусть подпоследовательность $\{s_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к вектору $s \in H$ по норме H. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ переставим набор векторов $\{u_{n_i+1}, u_{n_i+2}, ..., u_{n_{i+1}}\}$ так, чтобы у полученного набора $\{u'_{n_i+1}, ..., u'_{n_{i+1}}\}$ величина

$$\sigma_i = \max_{1 \le m \le n_{i+1} - n_i} \left\| \sum_{n=n_i+1}^{n_i+m} u'_n \right\|$$

стала минимальной. По следствию 2

$$\sigma_i \le \left(\sum_{n=n_i+1}^{\infty} \|u_n\|^2 \right)^{1/2} + 2 \left\| s_{n_{i+1}} - s_{n_i} \right\| \underset{i \to \infty}{\to} 0.$$

Следовательно, полученный ряд будет сходиться к s по норме H. Лемма доказана.

Теорема 1 следует теперь из лемм 2 и 4.

§ 7. Некоторые неравенства

Теорема 1 (неравенство Чебышева). *Пусть $f(x)$ — измеримая вещественнозначная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Тогда для $A > 0$*

$$\text{mes}\{x : x \in [a, b], |f(x)| \ge A\} \le A^{-2} \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_M |f(x)|^2 dx + \int_{[a,b]\setminus M} |f(x)|^2 dx,$$

где $M = \{x : x \in [a, b], |f(x)| \ge A\}$. Поэтому

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \ge \text{mes}\, M \cdot A^2.$$

Это доказывает теорему.

Теорема 2. *Для любой неотрицательной функции $f(t)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(t) dt \le \log \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right).$$

Доказательство проводится с использованием неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом и определения интеграла, как предела интегральных сумм.

§ 8. Теоремы Кронекера и Дирихле об аппроксимациях

Определение 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \subset \mathbb{R}^N$. Запись $\mathbf{x} \in \gamma \bmod 1$ обозначает, что найдется целочисленный вектор $\mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^N$ такой, что $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \gamma$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ — вещественные числа, линейно независимые над полем рациональных чисел; γ — подобласть N-мерного единичного куба с объемом в смысле Жордана* Г. *Пусть, далее, $I_\gamma(T)$ — мера множества $t \in (0, T)$, для которых $(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots$ $\ldots, \alpha_N t) \in \gamma \bmod 1$.*

Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{I_\gamma(T)}{T} = \Gamma.$$

Доказательство. Из определения меры по Жордану следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют две конечные совокупности открытых параллелепипедов $\{\Pi'_j\}$ и $\{\Pi''_j\}$, для которых выполняется

$$\overline{\cup \Pi'_j} \subset \text{Int}\gamma \subset \bar{\gamma} \subset \cup \Pi''_j, \qquad (1)$$

причем $\text{mes}\left((\cup \Pi''_j) \setminus (\cup \Pi'_j)\right) < \varepsilon$ (где для произвольного множества M, $\bar{M}$ — замыкание M, $\text{Int} M = M \setminus (\bar{M} \setminus M)$).

Пусть χ' — характеристическая функция $\cup\Pi'_j$ по модулю 1 (т.е. $\chi'(\mathbf{x}) = 1$, если $\mathbf{x} \in \cup\Pi'_j \bmod 1$, и $\chi'(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \notin \cup\Pi'_j \bmod 1$), χ — характеристическая функция γ по модулю 1 и, соответственно, χ'' — характеристическая функция $\cup\Pi''_j$ по модулю 1. Тогда

$$0 \le \chi'(\mathbf{x}) \le \chi(\mathbf{x}) \le \chi''(\mathbf{x}) \le 1,$$

причем

$$\int \dots \int (\chi''(\mathbf{x}) - \chi'(\mathbf{x}))dx_1 \dots dx_N < \varepsilon.$$

Пусть $\varphi(x)$ определяется следующим образом: $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge \ge 1/2$; $\varphi(x) = C\exp\left(-\left(\frac{1}{x+1/2} + \frac{1}{x-1/2}\right)\right)$ при $|x| < 1/2$, где C выбирается такой, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi(x)dx = 1.$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией. Следовательно, бесконечно дифференцируемыми функциями будут при $0 < \delta < 1$ функции

$$\tilde{\chi}'(\mathbf{x}) = \delta^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \chi'(\mathbf{y})\varphi\left(\frac{x_1 - y_1}{\delta}\right) \dots \varphi\left(\frac{x_N - y_N}{\delta}\right) dy_1 \dots dy_N,$$

$$\tilde{\chi}''(\mathbf{x}) = \delta^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \chi''(\mathbf{y})\varphi\left(\frac{x_1 - y_1}{\delta}\right) \dots \varphi\left(\frac{x_N - y_N}{\delta}\right) dy_1 \dots dy_N.$$

Из соотношения (1) следует, что при достаточно малом δ будет выполняться

$$0 \le \tilde{\chi}'(\mathbf{x}) \le \chi(\mathbf{x}) \le \tilde{\chi}''(\mathbf{x}) \le 1, \tag{2}$$

причем

$$0 \le \int_0^1 \dots \int_0^1 (\tilde{\chi}''(\mathbf{x}) - \tilde{\chi}'(\mathbf{x}))\, dx_1 \dots dx_N < 2\varepsilon. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) заключаем, что

$$\int_0^T \tilde{\chi}''(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_N t)dt \le I_\gamma(T) \le \int_0^T \tilde{\chi}'(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_N t)dt, \tag{4}$$

$$0 \le \int_0^T \tilde{\chi}'(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t)dt - \int_0^T \tilde{\chi}''(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t)dt \le 2\varepsilon T. \tag{5}$$

Ввиду утверждения нижеследующей леммы 1 и произвольности $\varepsilon > 0$ теорема доказана.

Л е м м а 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $f(x_1, \dots, x_N)$ — бесконечно дифференцируемая функция, периодичная по каждой переменной с периодом 1.*

Тогда

$$\lim_{T \to \infty} T^{-1} \int_0^T f(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t)dt = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_N)dx_1 \dots dx_N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим $f(x_1, \dots, x_N)$ в ряд Фурье:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N} c_{\mathbf{n}} \exp(2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_N x_N)), \tag{6}$$

где

$$c_{\mathbf{n}} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_N) \exp(-2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_N x_N))dx_1 \dots dx_N. \tag{7}$$

Интегрированием по частям получаем неравенство

$$c_{\mathbf{n}} \ll_{k,f} \prod_{j=1}^N (|n_j| + 1)^{-k}, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Следовательно, ряд (6) сходится абсолютно, поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество $M \subset \mathbf{Z}^N$ такое, что

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mathbf{n} \in M} c_{\mathbf{n}} \exp(2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_N x_N)) + R(x_1, \dots, x_N),$$

где $|R(x_1, \dots, x_N)| < \varepsilon$. Отсюда выводим

$$T^{-1} \int_0^T f(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t)dt =$$

$$= T^{-1} \int_0^T \sum_{\mathbf{n} \in M} c_{\mathbf{n}} \exp(2\pi i(n_1 \alpha_1 t + \dots + n_N \alpha_N t))dt + \theta\varepsilon,$$

где $|\theta| < 1$. Следовательно,

$$T^{-1} \int_0^T f(\alpha_1 t, \dots, \alpha_N t)dt =$$

$$= c_0 + \sum_{\mathbf{n} \in M, \mathbf{n} \ne 0} c_{\mathbf{n}} T^{-1} \int_0^T \exp(2\pi i(n_1 \alpha_1 + \dots + n_N \alpha_N)t)dt + \theta\varepsilon.$$

Так как $n_1\alpha_1 + ... + n_N\alpha_N \neq 0$, то при $\mathbf{n} \neq \bar{0}$

$$\int_0^T \exp(2\pi i(n_1\alpha_1 + ... + n_N\alpha_N)t)dt = O(1).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует утверждение леммы.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\gamma(t)$ — непрерывная функция с областью определения $[0,\infty)$ и областью значений $\mathbf{R}^N$. Кривая $\gamma(t)$ равномерно распределена по mod 1 в пространстве $\mathbf{R}^N$, если для всякого параллелепипеда $\Pi = [\alpha_1, \beta_1] \times ... \times [\alpha_N, \beta_N]$, $0 \le \alpha_j < \beta_j \le 1$ для $j = 1, ..., N$, выполняется соотношение

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\operatorname{mes}\{t : 0 \le t \le T, \gamma(t) \in \Pi \bmod 1\} = \prod_{j=1}^{N}(\beta_j - \alpha_j).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_N(t)) \in \mathbf{R}^N$ равномерно распределена по модулю 1 в пространстве $\mathbf{R}^N$. Тогда для любой функции $F(x)$, интегрируемой по Риману на единичном кубе пространства $\mathbf{R}^N$, выполняется соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T F(\{\gamma_1(t)\}, ..., \{\gamma_N(t)\})dt = \int_0^1 ... \int_0^1 F(x_1, ..., x_N)dx_1...dx_N.$$

Доказательство этого утверждения следует из определения интеграла как предела римановых интегральных сумм.

Т е о р е м а 3. *Пусть кривая $\gamma(t)$ равномерно распределена по модулю 1 в пространстве $\mathbf{R}^N$. Пусть D — замкнутая подобласть единичного куба $\mathbf{R}^N$, измеримая в смысле Жордана; Ω — семейство комплекснозначных непрерывных функций, определенных на D. Если Ω равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то равномерно по $f \in \Omega$ выполняется*

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^{T}{}' f(\{\gamma(t)\})dt = \int_D f dx_1...dx_N,$$

где $\int_0^T{}' ...$ означает интегрирование по $t \in (0,T)$, для которых $\gamma(t) \in D$ по модулю 1 и $\{\gamma(t)\} = (\{\gamma_1(t)\}, ..., \{\gamma_N(t)\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы множество функций Ω равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор $f_1, ..., f_n \in \Omega$ такой, что для всякой $f \in \Omega$ найдется f_j, для которой выполняется

$$\sup_{x\in D} |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

В силу теоремы 2 найдется T_0 такое, что при всяком $T > T_0$ для каждой функции $f_1, f_2, ..., f_N$ выполняется

$$\left|\int ... \int_D f_j(\mathbf{x})dx_1...dx_N - T^{-1}\int_0^{T}{}' f_j(\{\gamma(t)\})dt\right| < \varepsilon.$$

Поэтому для всякой функции $f \in \Omega$ при $T > T_0$ будет выполняться

$$\left|\int ... \int_D f(\mathbf{x})dx_1...dx_N - T^{-1}\int_0^{T}{}' f(\{\gamma(t)\})dt\right| \le$$

$$\le \left|\int ... \int_D f_j(\mathbf{x})dx_1...dx_N - T^{-1}\int_0^{T}{}' f_j(\{\gamma(t)\})dt\right| +$$

$$+\left|\int ... \int_D \varepsilon dx_1...dx_N\right| + T^{-1}\int_0^T \varepsilon dt < 4\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (Дирихле). *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in \mathbf{R}^N$; $q \in \mathbf{N}$. Тогда для всякого $t_0 > 0$ можно найти $t \in [t_0, t_0 q^N]$ такое, что при $n = 1, 2, ..., N$ выполняется*

$$\|t\alpha_n\| \le 1/q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для $k = 0, 1, ..., q^N$ целочисленные векторы $\mathbf{v}_k = ([qk\alpha_1], [qk\alpha_2], ..., [qk\alpha_N])$. Так как их в точности $q^N + 1$, то найдутся значения k_1 и k_2 такие, что $\mathbf{v}_{k_1} \equiv \mathbf{v}_{k_2} (\bmod q)$, т.е. для $n = 1, 2, ..., N$ выполняется

$$[qk_1\alpha_n] \equiv [qk_2\alpha_n] (\bmod q).$$

Следовательно,

$$[qk_1\alpha_n] - [qk_2\alpha_n] = q(k_1 - k_2)\alpha_n + (\{qk_2\alpha_n\} - \{qk_1\alpha_n\}) \in q\mathbf{Z}.$$

Полагая $k_0 = k_1 - k_2, \theta_n = \{qk_2\alpha_n\} - \{qk_1\alpha_n\}$, получим

$$k_0\alpha_n + \theta_n/q \in \mathbf{Z}.$$

Так как $|\theta_n| < 1$, то теорема доказана.

§ 9. Утверждения из элементарной теории чисел

Т е о р е м а 1 (основная теорема арифметики). *Всякое натуральное число, большее единицы, разлагается на произведение простых сомножителей и притом единственным способом (если отвлечься от порядка сомножителей).*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [15, с.15].

Т е о р е м а 2 (китайская теорема об остатках). *Пусть* $m = m_1m_2...m_k$ *и* $(m_i, m_j) = 1$ *при* $i \neq j$. *Для любых* $b_1, b_2, ..., b_k$ *система сравнений*

$$x \equiv b_1 (\operatorname{mod} m_1)$$
$$x \equiv b_2 (\operatorname{mod} m_2)$$
$$.....................$$
$$x \equiv b_k (\operatorname{mod} m_k)$$

всегда имеет решение и любые два решения попадают в один класс вычетов по модулю m.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [15, с.58].

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $a, m \in \mathbb{Z}$. Число a называется *примитивным (первообразным) корнем* по модулю m, если для всякого $b, (b, m) = 1$, разрешимо сравнение $a^\nu \equiv b(\operatorname{mod} m)$.

Т е о р е м а 3. *Для всякого нечетного простого числа* p *и натурального* l *существуют первообразные корни по модулю* p^l.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [15, с.87].

Т е о р е м а 4. *При* $m = 2^l, l = 1, 2$, *существует первообразный корень по модулю* m. *Если* $l \geq 3$, *то числа* $\{(-1)^\alpha 5^\beta : \alpha = 0, 1$ *и* $0 \leq \beta < 2^{l-2}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ *составляют без повторений приведенную систему вычетов по модулю* m (*т.е. для всякого нечетного числа* n *разрешимо сравнение* $n \equiv (-1)^\alpha 5^\beta (\operatorname{mod} 2^l)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [15, с.97].

О п р е д е л е н и е 2. *Характером Дирихле по модулю* m называется всякая функция, определенная для всех целых a и удовлетворяющая условиям

а) $\chi(a) = 0$, если $(a, m) > 1$,

б) $\chi(a)$ не равна нулю тождественно,

в) $\chi(a_1a_2) = \chi(a_1)\chi(a_2)$,

г) $\chi(a + m) = \chi(a)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Главным характером по модулю* m называется функция

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } (a, m) = 1, \\ 0, & \text{если } (a, m) > 1. \end{cases}$$

Т е р е м а 5. *Пусть* χ — *характер Дирихле по модулю* m. *Пусть* $m = \prod_{p|m} p^{\alpha_p}$. *Тогда*

$$\chi(a) = \prod_{p|m} \chi_p(a), \qquad (1)$$

где $\chi_p(a)$ — *характеры Дирихле по модулю* p^{α_p}. *Представление характера* χ *в форме* (1) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 2. Пусть для $p_0|m$ натуральное число A_{p_0} определено из системы сравнений $A_{p_0} \equiv 1(\operatorname{mod} p_0^{\alpha_{p_0}})$, $A_{p_0} \equiv 0(\operatorname{mod} p^{\alpha_p})$ при $p|m, p \neq p_0$. Положим

$$\chi_{p_0}(a) = \chi\left(aA_{p_0} + \sum_{p \neq p_0, p|m} A_p\right). \qquad (2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\chi_{p_0}(a)$ является характером Дирихле по модулю $p_0^{\alpha_{p_0}}$. Далее,

$$\prod_{p|m} \chi_p(a) = \chi\left(\sum_{p|m} aA_p\right) = \chi(a).$$

Теорема 5 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если* $m = \prod_{p|m} p^{\alpha_p}$, *то множество характеров по модулю* m *находится во взаимно однозначном соответствии с наборами характеров по всем модулям* $p^{\alpha_p}, p|m$. *Соответствие задается формулами* (1) *и* (2).

О п р е д е л е н и е 4. Характер Дирихле $\chi(a)$ по модулю p^α называется *примитивным*, если период $\chi(a)$ (как функции от a) в точности равен p^α.

О п р е д е л е н и е 5. Характер Дирихле $\chi(a)$ по модулю m называется *примитивным*, если $m = \prod_{p|m} p^{\alpha_p}$ и $\chi(a) = \prod_{p|m} \chi_p(a)$, где $\chi_p(a)$ — примитивный характер по модулю p^{α_p}.

Т е о р е м а 6 (простейшие свойства характеров). *Пусть* χ — *характер Дирихле. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) $\chi(1) = 1$.

б) $\chi(-1) = \pm 1$.

в) $\chi(a)^{\varphi(m)} = 1$, *если* $(a, m) = 1$ *и* χ — *характер Дирихле по модулю* m.

г) *Существует в точности* $\varphi(m)$ *характеров по модулю* m.

д) $\sum_{a=0}^{m-1} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \textit{если } \chi \textit{ — главный характер}, \\ 0, & \textit{для всех других характеров}. \end{cases}$

е) $\sum_{\chi \bmod m} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \textit{для } a \equiv 1(\operatorname{mod} m), \\ 0, & \textit{в противном случае}. \end{cases}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Так как $\chi(a) \not\equiv 0$ тождественно, то найдется a такое, что $\chi(a) \neq 0$. Тогда $\chi(a) = \chi(a \cdot 1) = \chi(a) \cdot \chi(1)$. Сокращая на $\chi(a)$, получим $\chi(1) = 1$.

б) Имеем $1 = \chi(1) = \chi((-1)^2) = (\chi(-1))^2$, т.е. $\chi(-1) = \pm 1$.

в) Имеем $1 = \chi(1) = \chi(a^{\varphi(m)}) = (\chi(a))^{\varphi(m)}$, если $(a, m) = 1$.

г) В силу теоремы 5 достаточно доказать, что для $m = p^\alpha$ существует в точности $\varphi(p^\alpha)$ различных характеров по модулю p^α. Поскольку характер χ по модулю p^α при нечетном p полностью определен значением $\chi(g)$, где g — первообразный корень по модулю p^α, а значение $\chi(g)$ можно выбрать любым из корней уравнения $x^{\varphi(p^\alpha)}-1=0$, то в силу утверждения в) утверждение г) доказано для $m=p^\alpha$ и нечетного p.

В случае $m=2^\alpha, \alpha\ge 2$, каждой паре чисел (ν_0,ν_1) поставим в соответствие функцию

$$\varphi(n)=(-1)^{\nu_0 a_0}\exp\left(2\pi i\frac{a_1\nu_1}{2^{\alpha-2}}\right),$$

где числа a_0, a_1 определяются из соотношения (теорема 4) $n\equiv(-1)^{a_0}\times 5^{a_1}(\operatorname{mod}2^\alpha)$. Ясно, что все такие возможные различные функции получаются, если $\nu_0=0,1;\nu_1=0,1,\ldots,2^{\alpha-2}-1$, и каждая такая функция будет являться характером Дирихле по модулю 2^α. Так как в случае $m=2$ существует единственный характер Дирихле — главный, то г) доказано.

д) Если χ является главным характером, то ясно из определения 3, что $\sum\limits_{a\bmod m}\chi(a)=\varphi(m)$. Если же $\chi(a)\not\equiv\chi_0(a)$, то найдется $a\in\mathbb{Z}$ такое, что $\chi(a)\ne 1$. Так как

$$\sum_{\nu\bmod m}\chi(\nu)=\sum_{\nu\bmod m}\chi(a\nu)=\chi(a)\sum_{\nu\bmod m}\chi(\nu),$$

то $(1-\chi(a))\left(\sum\limits_{\nu\bmod m}\chi(\nu)\right)=0$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{\nu\bmod m}\chi(0)=\nu$.

е) Пусть $m=\prod\limits_{p|m}p^{\alpha_p}$. Если $a\not\equiv 1(\operatorname{mod}m)$, то найдется p такое, что $a\not\equiv 1(\operatorname{mod}p^{\alpha_p})$.

Положим $\chi_p(g)=\exp(2\pi i/\varphi(p^{\alpha_p}))$, где g — первообразный корень по модулю p^{α_p}, и доопределим χ_p далее по мультипликативности. Тогда

$$\chi'(a)=\chi_0(a)\chi_p(a),$$

где $\chi_0(a)$ — главный характер по модулю m, будет являться характером по модулю m и $\chi'(a)\ne 1$. Имеем

$$\sum_{\chi\bmod m}\chi(a)=\sum_{\chi\bmod m}\chi'\chi(a)=\chi'(a)\sum_{\chi\bmod m}\chi(a).$$

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{\chi\bmod m}\chi(a)=0.$$

Если $a\equiv 1(\operatorname{mod}m)$, то утверждение е) очевидно следует из утверждения г). Теорема 6 доказана.

Определение 6. *Суммой Гаусса* называется

$$S(m;a,\chi)=\sum_{\nu\bmod m}\chi(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu}{m}\right),$$

где χ — характер Дирихле по модулю m.

Теорема 7. *Имеет место формула*

$$\chi(\nu)=\frac{1}{m}\sum_{a\bmod m}S(m;a,\chi)\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{1}{m}\sum_{a\bmod m}\exp\left(2\pi i\frac{a}{m}(\nu_1-\nu)\right)=\begin{cases}1 & \text{при } \nu\equiv\nu_1(\operatorname{mod}m),\\ 0 & \text{при } \nu\not\equiv\nu_1(\operatorname{mod}m),\end{cases}$$

то

$$\chi(\nu)=\sum_{\nu_1\bmod m}\chi(\nu_1)\frac{1}{m}\sum_{a\bmod m}\exp\left(2\pi i\frac{a}{m}(\nu_1-\nu)\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{a\bmod m}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)\left(\sum_{\nu_1\bmod m}\chi(\nu_1)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu_1}{m}\right)\right).$$

Теорема 8. *Для всякого характера Дирихле χ и $a\in\mathbb{N}$, $(a,m)=1$, имеет место формула*

$$S(m;a,\chi)=\bar\chi(a)S(m;1,\chi).$$

Доказательство. Действительно,

$$S(m;a,\chi)=\sum_{\nu\bmod m}\chi(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)=$$

$$=\bar\chi(a)\sum_{\nu\bmod m}\chi(a\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)=\bar\chi(a)S(m;1,\chi).$$

Теорема 9. *Пусть χ — примитивный характер Дирихле по модулю m, $(a,m)=1$. Тогда*

$$|S(m;a,\chi)|=\sqrt{m}.$$

Если $(a,m)>1$, то $S(m;a,\chi)=0$.

Доказательство. Пусть $m=\prod\limits_{k=1}^{n}p_k^{\alpha_k}$. В силу теоремы 2 найдутся числа $A_1,\ldots,A_n$ такие, что для $1\le k,\ k_1\le n$ выполняется

$$A_k\equiv\delta_{k,k_1}(\operatorname{mod}p^{k_1}),$$

где

$$\delta_{k,k_1}=\begin{cases}1 & \text{при } k=k_1,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

$$S(m;a,\chi)=\sum_{\nu\bmod m}\chi(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)=$$

$$=\sum_{\nu_1\bmod p_1^{\alpha_1}}\ldots\sum_{\nu_n\bmod p_n^{\alpha_n}}\chi(\nu_1A_1+\ldots+\nu_nA_n)\exp\left(2\pi i\frac{a\sum\nu_jA_j}{m}\right).$$

Пользуясь теоремой 5, получим отсюда

$$S(m;\,a,\chi)=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu_k \bmod p_k^{\alpha_k}}\chi_{p_k}(\nu_k A_k)\exp\left(2\pi i\frac{a\nu_k A_k}{m}\right)\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu \bmod p_k^{\alpha_k}}\chi_{p_k}(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{aA_k}{m}\nu\right)\right).$$

Далее, пусть $A_k=Q_k\prod_{k_1\neq 1,\,k_1\neq k}p_{k_1}^{\alpha_{k_1}}$. Тогда

$$S(m;\,a,\chi)=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu \bmod p_k^{\alpha_k}}\chi_{p_k}(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{aQ_k}{p_k^{\alpha_k}}\nu\right)\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}S\left(p_k^{\alpha_k};aQ_k,\chi_{p_k}\right). \qquad (3)$$

Так как $(Q_k,p_k)=1$, то в силу соотношения (3) заключаем, что теорему 9 достаточно доказать в случае $m=p^\alpha,\alpha\geq 1$.

Заметим здесь, что если χ — примитивный характер по модулю p^α, то найдется ν_0 такое, что

$$\chi(1+\nu_0p^{\alpha-1})\neq 1. \qquad (4)$$

Действительно, так как период χ равен в точности p^α, то найдутся a_1 и a_2, $a_1\equiv a_2(\bmod p^{\alpha-1})$, $(a_1,p)=1$, такие, что $\chi(a_1)\neq\chi(a_2)$. Поэтому, определяя a_1' из сравнения $a_1a_1'\equiv 1(\bmod p^\alpha)$, получим

$$1\neq\chi(a_2)\chi(a_1')=\chi(a_2a_1'),$$

причем $a_2a_1'\equiv 1(\bmod p^{\alpha-1})$.

Докажем теперь, что при $\alpha>1$ для первообразного характера χ по модулю p^α выполняется

$$\sum_{\nu=0}^{p-1}\chi(b+\nu p^{\alpha-1})=0. \qquad (5)$$

Действительно,

$$\left(\sum_{\nu=0}^{p-1}\chi(b+\nu p^{\alpha-1})\right)\chi(1+\nu_0p^{\alpha-1})=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{p-1}\chi(b+(\nu+\nu_0)p^{\alpha-1})=\sum_{\nu=0}^{p-1}\chi(b+\nu p^{\alpha-1});$$

поэтому

$$\left(\sum_{\nu=0}^{p-1}\chi(b+\nu p^{\alpha-1})\right)\left(1-\chi(1+\nu_0p^{\alpha-1})\right)=0.$$

В силу неравенства (4) отсюда следует соотношение (5). Из равенства (5) получаем при $\alpha>1$

$$S(p^\alpha;ap,\chi)=\sum_{\nu \bmod p^\alpha}\chi(\nu)\exp\left(2\pi i\frac{a}{p^{\alpha-1}}\nu\right)=$$

$$=\sum_{\nu_1=0}^{p^{\alpha-1}-1}\sum_{\nu_2=0}^{p-1}\chi(\nu_1+p^{\alpha-1}\nu_2)\exp\left(2\pi i\frac{a}{p^{\alpha-1}}\nu_1\right)=$$

$$=\sum_{\nu_1=0}^{p^{\alpha-1}-1}\exp\left(2\pi i\frac{a}{p^{\alpha-1}}\nu_1\right)\sum_{\nu_2=0}^{p-1}\chi(\nu_1+p^{\alpha-1}\nu_2)=0. \qquad (6)$$

Из теоремы 7 и равенства (6) теперь заключаем, что

$$\chi(\nu)=\frac{1}{p^\alpha}\sum_{\substack{a \bmod p^\alpha\\(a,p)=1}}S(p^\alpha;a,\chi)\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{p^\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu \bmod p^\alpha}|\chi(\nu)|^2=p^{-2\alpha}\sum_{\nu \bmod p^\alpha}\left|\sum_{\substack{a \bmod p^\alpha,\\(a,p)=1}}S(p^\alpha;a,\chi)\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{p^\alpha}\right)\right|^2=$$

$$=p^{-2\alpha}\sum_{\substack{a_1,a_2 \bmod p^\alpha,\\(a_1,p)=1,\\(a_2,p)=1}}S(p^\alpha;a_1,\chi)\overline{S(p^\alpha;a_2,\chi)}\sum_{\nu \bmod p^\alpha}\exp\left(-2\pi i\frac{a_1-a_2}{p^\alpha}\nu\right)=$$

$$=p^{-\alpha}\sum_{a \bmod p^\alpha}|S(p^\alpha;a,\chi)|^2.$$

Пользуясь теоремой 8, отсюда получаем для всякого a, $(a,p)=1$,

$$\varphi(p^\alpha)=p^{-\alpha}\varphi(p^\alpha)\,|S(p^\alpha;a,\chi)|^2,$$

т.е.

$$|S(p^\alpha;a,\chi)|=\sqrt{p^\alpha}.$$

Теорема 9 тем самым доказана.

Т е о р е м а 10. *Пусть χ — примитивный характер Дирихле по модулю $m, m>1$. Тогда*

$$\left|\sum_{1\leq\nu\leq x}\chi(\nu)\right|\leq\sqrt{m}\log m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 7 имеем

$$\sum_{1\leq\nu\leq x}\chi(\nu)=\frac{1}{m}\sum_{a \bmod m}S(m;a,\chi)\sum_{1\leq\nu\leq x}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right).$$

Используя теорему 9, получим отсюда

$$\left|\sum_{1\le\nu\le x}\chi(\nu)\right|\le\frac{1}{m}\sum_{\substack{a \bmod m\\(a,m)=1}}\sqrt{m}\left|\sum_{1\le\nu\le x}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{\substack{a=0\\(a,m)=1}}^{m-1}\left|\sum_{1\le\nu\le x}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)\right|. \quad (7)$$

Далее, при $(a,m)=1$

$$\sum_{1\le\nu<x}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)=\frac{1-\exp(-2\pi ia[x]/m)}{1-\exp(-2\pi ia/m)}.$$

Следовательно, для $1\le a\le m/2$ выполняется

$$\left|\sum_{1\le\nu<x}\exp\left(-2\pi i\frac{a\nu}{m}\right)\right|\le\frac{1}{|\sin(\pi a/m)|}\le\frac{m}{2|a|}, \quad (8)$$

так как $\sin\pi\alpha\ge2\alpha$ при $0\le\alpha\le1/2$.

Если m — нечетное число, то из неравенств (7) и (8) имеем

$$\left|\sum_{1\le\nu<x}\chi(\nu)\right|\le\sqrt{m}\sum_{k=1}^{(m-1)/2}k^{-1}. \quad (9)$$

Если же m — четное число, то

$$\left|\sum_{1\le\nu<x}\chi(\nu)\right|\le\sqrt{m}\sum_{k=1}^{m/2-1}k^{-1}+\frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (10)$$

Поскольку при $k\ge1$ $\log\frac{2k+1}{2k-1}\le\frac{1}{k}$, то

$$\sum_{k=1}^{(m-1)/2}k^{-1}\le\log m$$

при нечетном m и

$$\sum_{k=1}^{m/2-1}k^{-1}\le\log(m-1)\le\log m-m^{-1}$$

при четном m.

Подставляя полученные оценки в неравенства (9) и (10), получим утверждение теоремы.

Т е о р е м а 11. *Пусть* $1\le z\le x$; $D=\prod_{p\le z}p$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{1\le n\le x,\\(n,D)=1}}1\ll x(\log z)^{-1}+z^2\log^2 z.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [80, с.53].

§ 10. Некоторые теоретико-числовые неравенства

В этом параграфе приводятся некоторые часто используемые неравенства, касающиеся числа делителей натуральных чисел.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\tau_k(n)$ есть *число решений уравнения в натуральных числах* $x_1x_2...x_k=n$. При $k=2$ индекс 2 часто опускается, т.е. $\tau(n)=\tau_2(n)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N},\varepsilon>0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\tau(n)\le\left(\frac{2}{\varepsilon\log2}\right)^{2^{1/\varepsilon}}n^\varepsilon$$

т.е. $\tau(n)\ll_\varepsilon n^\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители. В силу формулы II.1.(5) $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$. Поэтому

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon}=\frac{\alpha_1+1}{p_1^{\varepsilon\alpha_1}}...\frac{\alpha_k+1}{p_k^{\varepsilon\alpha_k}}.$$

Если $p_s\ge2^{1/\varepsilon}$, то

$$\frac{\alpha_s+1}{p_s^{\varepsilon\alpha_s}}\le\frac{\alpha_s+1}{2^{\alpha_s}}\le1.$$

Если $p_s<2^{1/\varepsilon}$, то

$$\frac{\alpha_s+1}{p_k^{\varepsilon\alpha_s}}\le\frac{\alpha_s+1}{2^{\varepsilon\alpha_s}}\le\frac{\alpha_s+1}{\varepsilon\alpha_s\log2}\le\frac{2}{\varepsilon\log2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon}\le\left(\frac{2}{\varepsilon\log2}\right)^{2^{1/\varepsilon}}.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Для натуральных n и k, вещественного $\varepsilon>0$ справедливо неравенство*

$$\tau_k(n)\ll_{k,\varepsilon}n^\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывать теорему будем индукцией по k. Для $k=2$ утверждение теоремы 2 составляет утверждение уже доказанной теоремы 1. Поскольку

$$\tau_k(n)=\sum_{x_k|n}\tau_{k-1}\left(\frac{n}{x_k}\right)\le\sum_{x_k|n}\tau_{k-1}(n)=\tau(n)\tau_{k-1}(n),$$

то теорема 2 следует из теоремы 1.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $k\ge2$. *Тогда при* $x\ge1$ *выполняется*

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n)\le x\frac{(\log x+k-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Доказательство. Будем считать, что $\tau_1(n)=1$. Тогда при $k=1$ утверждение теоремы очевидно. Для доказательства теоремы в общем случае применим индукцию по k. Имеем

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n)=\sum_{1\le m\le x}\sum_{n\le x/m}\tau_{k-1}(n)\le\sum_{m\le x}\frac{x}{m}\cdot\frac{(\log(x/m)+k-2)^{k-2}}{(k-2)!}=$$

$$=\frac{x}{(k-2)!}\sum_{m\le x}\frac{1}{m}\left(\log\left(\frac{x}{m}\right)+k-2\right)^{k-2}. \quad (1)$$

При $y\in(1,x)$ функция $\frac{1}{y}\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)+k-2\right)^{k-2}$ в зависимости от y монотонно убывает. Поэтому

$$\sum_{m\le x}\frac{1}{m}\left(\log\left(\frac{x}{m}\right)+k-2\right)^{k-2}\le$$

$$\le(\log x+k-2)^{k-2}+\int_1^x\frac{1}{y}\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)+k-2\right)^{k-2}dy=$$

$$=(\log x+k-2)^{k-2}-\int_1^x\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)+k-2\right)^{k-2}d\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)+k-2\right)=$$

$$=(\log x+k-2)^{k-2}+\int_A^B z^{k-2}dz,$$

где $B=\log x+k-2$, $A=k-2$. Значит,

$$\sum_{m\le x}\frac{1}{m}\left(\log\frac{x}{m}+k-2\right)^{k-2}\le$$

$$\le(\log x+k-2)^{k-2}+\frac{1}{k-1}(\log x+k-2)^{k-1}=$$

$$=\frac{1}{k-1}\left((\log x+k-2)^{k-1}+(k-1)(\log x+k-2)^{k-2}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{k-1}(\log x+k-1)^{k-1}.$$

Вместе с неравенством (1) последнее неравенство доказывает теорему.

Теорема 4. *При $x\ge 2$ и натуральном l имеем*

$$\sum_{0<n\le x}(\tau(n))^l\ll_l x(\log x)^{2^l-1}.$$

Доказательство. Заметим, что $(\alpha+1)(\beta+1)\ge\alpha+\beta+1$, если $\alpha,\beta\ge 0$. Поэтому в силу формулы II.1.(5) имеем

$$\tau(mn)\le\tau(m)\tau(n). \quad (2)$$

Используя неравенство (2), получим

$$T_l(x)=\sum_{0<n\le x}(\tau(n))^l=$$

$$=\sum_{\substack{0<n,m\le x,\\ mn\le x}}(\tau(mn))^{l-1}\le\sum_{m\le x}(\tau(m))^{l-1}\sum_{n\le x/m}(\tau(n))^{l-1}.$$

Если для всех $x\ge 1$

$$T_{l-1}(x)=\sum_{n\le x}(\tau(n))^{l-1}\ll x(\log x)^{2^{l-1}-1}+1, \quad (3)$$

то

$$T_l(x)\ll x(\log x)^{2^{l-1}-1}\sum_{m\le x}(\tau(m))^{l-1}\cdot\frac{1}{m}+1. \quad (4)$$

Поскольку

$$\sum_{m\le x}(\tau(m))^{l-1}\cdot\frac{1}{m}=\int_{1-0}^{x+0}\frac{1}{x}dT_{l-1}(x)=T_{l-1}(x)\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^x+\int_{1-0}^{x+0}T_{l-1}(x)\frac{dx}{x^2},$$

то из неравенства (3) следует что при $x\ge 2$

$$\sum_{m\le x}(\tau(m))^{l-1}\cdot\frac{1}{m}\ll(\log x)^{2^{l-1}-1}+(\log x)^{2^{l-1}-1}\int_1^x\frac{dx}{x}\ll(\log x)^{2^{l-1}}. \quad (5)$$

Теорема 4 следует из неравенств (4) и (5).

Аналогично доказывается общее неравенство:

$$\sum_{n\le x}(\tau_k(n))^l\le c(k,l)x(\log x+1)^{k^l-1}$$

(Марджанишвили К.К., Оценка одной арифметической суммы //ДАН СССР.—1939.—Т.22,N1.—С. 391—393.)

§ 11. Оценки тригонометрических сумм (по Ван дер Корпуту)

Теорема 1. *Если $f(x)$ — вещественная, дважды дифференцируемая функция и $0<\lambda_2\le f''(x)\le h\lambda_2$ (или $\lambda_2\le -f''(x)\le h\lambda_2$) на всем интервале $(a,b)(a+1\le b)$, то*

$$\sum_{a<n\le b}\exp(2\pi i f(n))=O\left(h(b-a)\lambda_2^{1/2}+\lambda_2^{-1/2}\right).$$

Докажем сначала два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, $F'(x)$ монотонна и $F'(x)\ge\lambda_1>0$ (или $F'(x)\le-\lambda_1<0$) на* *всем интервале* (a,b). *Тогда*

$$\left|\int_a^b \exp(iF(x))dx\right| \le 4\lambda_1^{-1}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b \exp(iF(x))dx = \int_a^b \frac{1}{iF'(x)} d\exp(iF(x)) =$$

$$= \frac{1}{iF'(x)}\exp(iF(x))\Big|_a^b - \frac{1}{i}\int_a^b \exp(iF(x))d\left(\frac{1}{F'(x)}\right). \quad (1)$$

Так как функция $(F'(x))^{-1}$ монотонна, то

$$\left|\int_a^b \exp(iF(x))d\left(\frac{1}{F'(x)}\right)\right| \le \left|\frac{1}{F'(a)} - \frac{1}{F'(b)}\right| \le 2\lambda_1^{-1}.$$

Утверждение леммы теперь следует из равенства (1).

Лемма 2. *Пусть* $F(x)$ *— вещественная, дважды дифференцируемая функция и пусть* $F''(x) \ge \lambda_2 > 0$ *(или* $F''(x) \le -\lambda_2 < 0$*) на интервале* (a,b). *Тогда*

$$\left|\int_a^b \exp(iF(x))dx\right| \le 8\lambda_2^{-1/2}.$$

Доказательство. Пусть $F''(x) > 0$. Тогда $F'(x)$ — монотонная функция и, следовательно, она обращается в нуль на интервале (a,b) не более одного раза. Пусть

$$M_1 = \left\{x : x \in (a,b), F'(x) < -2\lambda_2^{1/2}\right\},$$

$$M_2 = \left\{x : x \in (a,b), |F'(x)| \le 2\lambda_2^{1/2}\right\},$$

$$M_3 = \left\{x : x \in (a,b), F'(x) > 2\lambda_2^{1/2}\right\}.$$

В силу леммы 1

$$\left|\int_{M_1} \exp(iF(x))dx\right| \le 4(2\lambda_2^{1/2})^{-1}, \quad (2)$$

$$\left|\int_{M_3} \exp(iF(x))dx\right| \le 4(2\lambda_2^{1/2})^{-1}. \quad (3)$$

Оценивая $\int_{M_2} \exp(iF(x))dx$ как $\operatorname{mes} M_2$, получим

$$\left|\int_{M_2} \exp(iF(x))dx\right| \le 2\cdot\frac{2\lambda_2^{1/2}}{\lambda_2} = 4\lambda_2^{-1/2}. \quad (4)$$

Оценки (2), (3) и (4) доказывают лемму в случае $F''(x) > 0$. Случай $F''(x) < 0$ рассматривается аналогичным образом.

Доказательство теоремы 1. Если $\lambda_2 \ge 1$, то утверждение теоремы тривиально. Если же $0 < \lambda_2 < 1$, то, воспользовавшись леммой III.1.1, получим

$$\sum_{a<n\le b} \exp(2\pi i f(n)) = \sum_{f'(a)-\frac12 \le n \le f'(b)+\frac12} \int_a^b \exp(2\pi i(f(x)-nx))dx +$$
$$+O(\log(2+f'(b)-f'(a))). \quad (5)$$

Применяя к оценке интегралов в правой части равенства (5) лемму 2, находим

$$\sum_{a<n\le b} \exp(2\pi i f(n)) \ll (f'(b)-f'(a)+1)\lambda_2^{-1/2}+$$
$$+\log(2+f'(b)-f'(a)) \ll h(b-a)\lambda_2^{1/2}+\lambda_2^{-1/2},$$

ибо при $x > 0$ $\log(1+x) < x$ и $0 < \lambda_2 < 1$.

Аналогично рассматривается случай $f''(x) < 0$. Теорема доказана. (Заметим, что теорема 1 не является следствием III.1.2.)

Лемма 3. *Пусть* $f(n)$ *— вещественная функция,* $a < n \le b$, *а* q *— натуральное число,* $q \le b-a$. *Тогда*

$$\left|\sum_{a<n\le b} \exp(2\pi i f(n))\right| \ll$$

$$\ll \frac{b-a}{\sqrt{q}} + \left\{\frac{b-a}{q}\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-r} \exp\left(2\pi i(f(n+r)-f(n))\right)\right|\right\}^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $e(n) = \exp(2\pi i f(n))$ при $n \in (a,b]$ и $e(n) = 0$ при $n \notin (a,b]$. Тогда выполняется

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n) = \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=1}^{q} e(n+m).$$

Поскольку при $n \notin (a-q, b-1]$ внутренняя сумма по m обращается в нуль, то, применяя неравенство Коши, получим

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n)\right| < \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=1}^{q} e(n+m)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{q}\left(\sum_{n\in(a-q,b-1]} 1\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=1}^{q} e(n+m)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Так как число целых n, попадающих в полуинтервал $(a-q, b-1]$, не превосходит $b-a+q\le 2(b-a)$, то

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n)\right| \le \frac{1}{q}\left\{2(b-a)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=1}^{q} e(n+m)\right|^2\right\}^{1/2}. \qquad (6)$$

Далее,

$$\left|\sum_{m=1}^{q} e(n+m)\right|^2 = \sum_{m_1=1}^{q}\sum_{m_2=1}^{q} e(n+m_1)\overline{e(n+m_2)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{q}|e(n+m)|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{\substack{m_1,m_2\\ 1\le m_1<m_2\le q}}\overline{e(n+m_1)}e(n+m_2).$$

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{m=1}^{q} e(n+m)\right|^2 \le 2(b-a)q + 2\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{1\le m_1<m_2\le q}\overline{e(n+m_1)}e(n+m_2)\right|. \qquad (7)$$

Заметим, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{1\le m_1<m_2\le q}\overline{e(n+m_1)}e(n+m_2) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{1\le r\le q-1}\sum_{1\le m\le q-r}\overline{e(n+m)}e(n+m+r) =$$

$$= \sum_{1\le r\le q-1}(q-r)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{e(n)}e(n+r).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{1\le m_1<m_2\le q}\overline{e(n+m_1)}e(n+m_2)\right| \le q\sum_{1\le r\le q-1}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{e(n)}e(n+r)\right|. \qquad (8)$$

Из неравенств (6), (7) и (8) получаем

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n)\right| \le \frac{1}{q}\left\{4(b-a)^2 q + 4(b-a)q\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{e(n)}e(n+r)\right|\right\}^{1/2}.$$

Тем самым лемма доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f(x)$ — вещественнозначная функция, непрерывная вместе со своими производными до k-го порядка ($k\ge 2$) включительно. Пусть, далее, $0<\lambda_k\le f^{(k)}(x)\le h\lambda_k$ (либо $0<\lambda_k\le$ $\le -f^{(k)}(x)\le h\lambda_k$), $b-a\ge 1$ и $K=2^{k-1}$.*

4419

Тогда

$$\sum_{a<n\le b}\exp\left(2\pi i f(n)\right) \ll h^{2/K}(b-a)\lambda_k^{1/(2K-2)} + (b-a)^{1-2/K}\lambda_k^{-1/(2K-2)} \qquad (9)$$

(постоянная в знаке $\ll$ является абсолютной).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda_k\ge 1$ теорема, очевидно, справедлива. Будем считать, что $0<\lambda_k<1$. Докажем, что при достаточно большой, но не зависимой от k, постоянной A_1 в знаке $\ll$ в неравенстве (9) возможно сделать индукционный переход от $k-1$ к k. Положим $g(x)=f(x+r)-f(x)$. Тогда при $r>0$

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x+r) - f^{(k-1)}(x) = rf^{(k)}(\xi),$$

где $x<\xi<x+r$. Отсюда следует, что для $a\le x\le b-r$

$$r\lambda_r \le g^{(k-1)}(x) \le hr\lambda_k.$$

В силу неравенства (9) при степени многочлена, равной $k-1$, имеем

$$\sum_{a<n\le b-r}\exp(2\pi i g(n)) \le A_1(h^{4/K}(b-a)(r\lambda_k)^{1/(K-2)} +$$
$$+ (b-a)^{1-4/K}(r\lambda_k)^{-1/(K-2)}).$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-r}\exp(2\pi i g(n))\right| < A_1\Big(h^{4/K}(b-a)q^{1+1/(K-2)}\lambda_k^{1/(K-2)} +$$
$$+ (b-a)^{1-4/K}\lambda_k^{-1/(K-2)}\sum_{r=1}^{q-1} r^{-1/(K-2)}\Big). \qquad (10)$$

Далее, при $r\ge 1$ справедливо неравенство

$$(r+1)^{1-1/(K-2)} - r^{1-1/(K-2)} \ge \left(1-\frac{1}{K-2}\right) r^{-1/(K-2)},$$

поэтому

$$\sum_{r=1}^{q-1} r^{-1/(K-2)} \le 2q^{1-1/(K-2)}.$$

Отсюда заключаем, что из неравенства (10) следует неравенство

$$\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\le b-r}\exp(2\pi i g(n))\right| < 2A_1\left(h^{4/K}(b-a)q^{1+1/(K-2)}\lambda_k^{1/(K-2)} +\right.$$
$$\left.+ (b-a)^{1-4/K}q^{1-1/(K-2)}\lambda_k^{-1/(K-2)}\right).$$

В силу леммы 3 имеем теперь

$$\left|\sum_{a<n\le b}\exp(2\pi i f(n))\right| \le A(b-a)q^{-1/2}+A(b-a)^{1/2}q^{-1/2}\times$$
$$\times\sqrt{2A_1}\big(h^{2/K}(b-a)^{1/2}q^{1/2+0,5/(K-2)}\lambda_k^{0,5/(K-2)}+$$
$$+(b-a)^{1/2-2/K}q^{1/2-0,5/(K-2)}\lambda_k^{-0,5/(K-2)}\big), \quad (11)$$

где A — постоянная в знаке $\ll$ в формулировке леммы 3.

Положим $q=[\lambda_k^{-1/(K-1)}]+1$. Тогда $\lambda_k^{-1/(K-1)}\le q\le 2\lambda_k^{-1/(K-1)}$ и, следовательно,

$$q^{0,5/(K-2)}\lambda_k^{0,5/(K-2)}\le(2\lambda_k^{1-1/(K-1)})^{0,5/(K-2)}=$$
$$=2^{0,5/(K-2)}\lambda_k^{0,5/(K-1)}\le 2\lambda_k^{0,5/(K-1)};$$

$$q^{-0,5/(K-2)}\lambda_k^{-0,5/(K-2)}\le(\lambda_k^{1-1/(K-1)})^{-0,5/(K-2)}=\lambda_k^{-0,5/(K-1)}.$$

Из неравенства (11) теперь следует, что

$$\left|\sum_{a<n\le b}\exp(2\pi i f(n))\right|\le\left(A+2A\sqrt{2A_1}\right)h^{2/K}(b-a)\lambda_k^{0,5/(K-1)}+$$
$$+A\sqrt{2A_1}(b-a)^{1-2/K}\lambda_k^{-0,5/(K-1)}.$$

Так как A — абсолютная постоянная, то, взяв A_1 достаточно большим, докажем возможность индукционного перехода от $k-1$ к k. Используя затем теорему 1, получим утверждение теоремы.

§ 12. Некоторые сведения из алгебры

Т е о р е м а 1. *Пусть $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n$ — различные гомоморфизмы некоторой группы G в группу ненулевых комплексных чисел по умножению. Тогда $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [53, с.238].

Т е о р е м а 2. *Пусть A — некоторый класс дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Тогда*

$$\sum_{\mathfrak{p}\in A,\,N(\mathfrak{p})\le x}1=\frac{1}{h(d)}\cdot\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

где $h(d)$ — число классов дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [173].

Т е о р е м а 3. *Пусть χ — неглавный характер группы классов дивизоров поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d — бесквадратное, $d>0$. Пусть*

$$L(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s},\qquad \mathrm{Re}\,s>1,$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает все целые дивизоры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Тогда $L(s,\chi)$ — целая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [52, гл.VII].

Т е о р е м а 4. *Пусть $L(s,\chi)$ определена в условиях теоремы 3. Пусть $X,Y>0$, $X\le Y\log^2 Y$, $XY=\left(\frac{\mathrm{Im}\,s}{2\pi}\right)^2D$, где D — дискриминант поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Тогда при $0<\mathrm{Re}\,s<1$, $|\mathrm{Im}\,s|<1$, выполняется*

$$L(s,\chi)=\sum_{N(\mathfrak{a})<X}\frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}+\psi(s)\sum_{N(\mathfrak{a})<Y}\frac{\overline{\chi}(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}+R,$$

где $\psi(s)=\dfrac{((2\pi)^{-2}d_\chi)^{(1-s)/2}\Gamma(1-s)}{\theta(\chi)((2\pi)^{-2}d_\chi)^{-s/2}\Gamma(s)}$, $\theta(\chi)$, $d_\chi>0$ зависят лишь от χ, $|\theta(\chi)|=1$; $R\ll X^{1/2-\sigma}\log^2 X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [48]

§ 13. Неравенство Габриэла

Пусть для $d>0$ область $D\subset\mathbb{C}$ определяется неравенством $|\mathrm{Im}\,z|<d$, $K_1=\{z:\mathrm{Im}\,z=d\}$, $K_2=\{z:\mathrm{Im}\,z=-d\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности, содержащей $D\cup K_1\cup K_2$. Предположим, что равномерно по y выполняется*

$$\big|f(x+iy)\big|\to 0$$

при $|x|\to\infty$, $|y|\le d$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{2/(a+b)}dx\right)^{(a+b)/2}\le\left(\int_{K_1}|f(z)|^{1/a}dz\right)^{a/2}\left(\int_{K_2}|f(z)|^{1/b}dz\right)^{b/2},$$

где a и b — произвольные положительные числа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(z)$ регулярна в области D и непрерывна вплоть до границы D. Для произвольных вещественных чисел A и B, $A<B$, положим $D'=D\cap\{z:A<\mathrm{Re}\,z<B\}$; K_1' — объединение отрезков $[A,A+id]$, $[A+id,B+id]$ и $[B+id,B]$; $K_2'=\overline{K_1'}$. Тогда

$$\int_A^B|\varphi(z)|^2|dz|=\left|\int_A^B\varphi(z)\overline{\varphi}(\overline{z})dz\right|. \quad (1)$$

Поскольку $\overline{\varphi}(\overline{z})$ является аналитической функцией, то вследствие теоремы Коши об интеграле от аналитической функции имеем

$$\int_A^B \varphi(z)\overline{\varphi}(\overline{z})\,dz = \int_{K_1'} \varphi(z)\overline{\varphi}(\overline{z})\,dz.$$

Следовательно,

$$\int_A^B |\varphi(z)|^2|dz| \le \int_{K_1'} |\varphi(z)||\varphi(\overline{z})||dz|.$$

Пользуясь неравенством Гельдера, получим для произвольных p, $p' > 1$, $1/p + 1/p' = 1$,

$$\int_A^B |\varphi(z)|^2|dz| \le \left(\int_{K_1'} |\varphi(z)|^p|dz|\right)^{1/p}\left(\int_{K_2'} |\varphi(z)|^{p'}|dz|\right)^{1/p'}. \tag{2}$$

Если $f(z)$ не имеет нулей внутри D, то, полагая $\varphi(z) = f(z)^{1/(a+b)}$, $p = (a+b)/a$, $p' = (a+b)/b$, получим

$$\left(\int_A^B |f(z)|^{2/(a+b)}|dz|\right)^{(a+b)/2} \le \left(\int_{K_1'} |f(z)|^{1/a}|dz|\right)^{a/2}\left(\int_{K_2'} |f(z)|^{1/b}|dz|\right)^{b/2}. \tag{3}$$

Устремляя A к $-\infty$, а B к $+\infty$, выводим из неравенства (3) утверждение теоремы.

Если же $f(z)$ имеет нули внутри D, то представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = f_1(z)\prod_{j=1}^n u(z, z_j),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все нули $f(z)$ с учетом кратности, лежащие в области D'; $u(z, z_j)$ — аналитическая функция z, отображающая D' взаимно однозначно на внутренность единичного круга, причем $u(z_j, z_j) = 0$. Тогда по принципу максимума

$$\int_A^B |f(z)|^{2/(a+b)}|dz| \le \int_A^B |f_1(z)|^{2/(a+b)}|dz|.$$

Так как $f_1(z)$ не имеет нулей внутри D' и $|f_1(z)| = |f(z)|_{z\in K_1'\cup K_2'}$, то из неравенства (3) следует утверждение теоремы 1 и в этом случае.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f(z)$ — регулярная функция в полосе $\alpha \le x \le \beta$, $z = x + iy$. Пусть $|f(z)|_{|z|\to\infty} = o(1)$ равномерно по $x \in [\alpha, \beta]$ и пусть*

$$I(x; c) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^{1/c}dy\right)^c.$$

Тогда справедливо неравенство

$$I(x; \lambda a + \lambda' b) \le I^{\lambda}(\alpha; a)I^{\lambda'}(\beta; b),$$

где $\lambda = (\beta - x)/(\beta - \alpha)$, $\lambda' = (x - \alpha)/(\beta - \alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 выполняется

$$I\left(x_0; \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \le I^{1/2}(\alpha; a)I^{1/2}(\beta; b),$$

где $x_0 = (\alpha+\beta)/2$. Пусть теорема верна для $x = x_1$ и $x = x_2$. Докажем, что она верна и для $x = (x_1 + x_2)/2$. Для $j = 1, 2$ пусть $\lambda_j = (\beta - x_j)/(\beta - \alpha)$, $\lambda_j' = (x_j - \alpha)/(\beta - \alpha)$. Если $\lambda = (\beta - x)/(\beta - \alpha)$, $\lambda' = (x - \alpha)/(\beta - \alpha)$ и $x = (x_1 + x_2)/2$, то $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $\lambda' = (\lambda_1' + \lambda_2')/2$. Имеем

$$I(x; \lambda a + \lambda' b) = I\left(x; \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)a + \frac{1}{2}(\lambda_1' + \lambda_2')b\right) = $$
$$= I\left(x; \frac{1}{2}(\lambda_1 a + \lambda_1' b) + \frac{1}{2}(\lambda_2 a + \lambda_2' b)\right).$$

Так как $x = (x_1 + x_2)/2$, то, применяя теорему 1, получим

$$I\left(x; \frac{1}{2}(\lambda_1 a + \lambda_1' b) + \frac{1}{2}(\lambda_2 a + \lambda_2' b)\right) \le$$
$$\le I^{1/2}(x_1; \lambda_1 a + \lambda_1' b)I^{1/2}(x_2; \lambda_2 a + \lambda_2' b).$$

Поскольку по предположению теорема 2 верна для x_1 и x_2, то

$$I(x; \lambda a + \lambda' b) \le [I(x_1; \lambda_1 a + \lambda_1' b)]^{1/2}[I(x_2; \lambda_2 a + \lambda_2' b)]^{1/2} \le$$
$$\le \left[I^{\lambda_1}(\alpha; a)I^{\lambda_1'}(\beta; b)\right]^{1/2}\left[I^{\lambda_2}(\alpha; a)I^{\lambda_2'}(\beta; b)\right]^{1/2} \le$$
$$\le \left[I(\alpha; a)^{(\lambda_1+\lambda_2)/2}I^{(\lambda_1'+\lambda_2')/2}(\beta; b)\right] = I^{\lambda}(\alpha; a)I^{\lambda'}(\beta; b).$$

Тем самым теорема 2 доказана для всюду плотного множества $x \in [\alpha, \beta]$, поэтому она справедлива для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г.И., Карацуба А.А. Новая оценка интеграла И.М. Виноградова // Изв. АН СССР. Сер мат. — 1978. — Т. 42, N 4. — С. 751—762.
2. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы // Тр. МИАН. — Т. 151. — М.: Наука, 1980.
3. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.
6. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. — М.: Наука, 1964.
7. Виноградов И.М. О среднем значении числа классов собственных примитивных форм отрицательного дискриминанта // Сообщение Харьковского Мат. об-ва. — 1918. — Т. 16, N 1—2. — С. 10 — 38.
8. Виноградов И.М. Некоторые теоремы аналитической теории чисел // ДАН СССР. — 1934. — Т. 4, N 4. — С. 185—187.
9. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. — 1937. — Т. 15, N 6,7. — С. 291.
10. Виноградов И.М. Об оценках тригонометрических сумм// ДАН СССР. — 1942. — Т. XXXIV, N 7. — С. 199—200.
11. Виноградов И.М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
12. Виноградов И.М. Новая оценка $\zeta(1+it)$ //Изв.АН СССР. Сер.мат. — 1958. — Т. 22, N 1. — С. 161 — 164.
13. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976.
14. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
16. Вон Р. Метод Харди — Литтлвуда. — М.: Мир, 1985.
17. Воронин С. М. О распределении ненулевых значений дзета-функции Римана// Тр. МИАН. — 1972. — Т. 128. — С. 153—175.
18. Воронин С. М. О дифференциальной независимости ζ-функций // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, N 6. — С. 1264—1266.
19. Воронин С. М. О функциональной независимости L-функций Дирихле // Acta Arithm. — 1975. — T.XXVII 27. — С. 493—503.
20. Воронин С. М. Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана// Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1975. — Т. 39,N 3. — С. 475—486.
21. Воронин С. М. О нулях дзета-функции квадратичных форм // Тр. МИАН. — 1976. — Т. 142. — С. 135—147.
22. Воронин С. М. Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. МИАН СССР. — М., 1977. — 90 с.
23. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1980. — Т. 44, N 1. — С. 63—91.
24. Воронин С. М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле //Тр.МИАН. — 1984. — Т. 163. — С. 74—77.
25. Воронин С. М.. Об Ω-теоремах теории дзета-функции Римана // Изв.АН СССР.Сер.мат. — 1988. — Т. 52, N 2. — С. 424—436.
26. Гильберт Д. Доклад на математическом конгрессе 1900 г. // Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969.
27. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т. 1. — М.: ИЛ, 1962.
28. Джаббаров И.Ш. Нули и средние значения L-функций Дирихле: Дис. ... канд.физ.-мат.наук. — М.,1986. — 150 с.
29. Дирихле П.Г.Л. Лекции по теории чисел. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.
30. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971.
31. Едгоров Ж. Асимптотика суммы произведений функции делителей // ДАН УзССР. — 1973. — N 10. — С. 3—5.
32. Журавлев В.Г. Вычисление постоянной в теореме А.Сельберга о нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Исследования по теории функций функциональному анализу. — Владимир; ВПИ, 1981. — С. [illegible]
33. Ингам А.Е. Распределение простых чисел. — М.: ОНТИ, 1936
34. Карацуба А.А. Оценки тригонометрических сумм методом И М Виноградова и их применения // Тр.МИАН. — 1971. — Т. 112. — С. [illegible]
35. Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1972. — Т. [illegible] — С 475—483.
36. Карацуба А.А. Проблема делителей Дирихле в числовых полях // ДАН СССР. — 1972. — Т. 204, N 3. — С. 540—541.
37. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. МИАН. — 1981 — Т. 157. С. 49—63.
38. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. — М Наука, 1983.
39. Карацуба А.А. О нулях дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой // ДАН СССР. — 1983. — Т. [illegible] — С 1312—1314

40. К а р а ц у б а А.А. О нулях дзета-функции Римана // ДАН СССР. — 1984. — Т. 276, N 3. — С. 535—539.
41. К а р а ц у б а А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв.АН СССР. Сер.мат. — 1984. — Т. 48, N 3. — С. 569—584.
42. К а р а ц у б а А.А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв.АН СССР. Сер.мат. — 1984. — Т. 48, N 6. — С. 1214 — 1224.
43. К а р а ц у б а А.А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. — 1985. — Т. 40, вып. 5(245). — С. 19—70.
44. К а р а ц у б а А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер.мат. — 1985. — Т. 49, N 2. — С. 326—333.
45. К и с е л е в а Л.В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР.Сер.мат. — 1988. — Т. 52, N 3. — С. 479—500.
46. Л а в р и к А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях //Изв. АН СССР.Сер.мат. — 1966. — Т. 30, N 2. — С. 433—448.
47. Л а в р и к А.Ф. О функциональных уравнениях функций Дирихле // Изв. АН СССР.Сер.мат. — 1967. — Т. 31, N 2. — С. 431—442.
48. Л а в р и к А.Ф. Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля //Мат.заметки. — 1967. — Т. 2, вып. 5. — С. 475—482.
49. Л а в р и к А.А. Аналитические свойства производных Z-функции Харди: Дис. канд.физ.-мат.наук. — М.: МГУ, 1989. — 120 с.
50. Л а у р и н ч и к а с А.П. Распределение значений производящих рядов Дирихле мультипликативных функций // Лит.мат.сб. — 1982. — Т. 22, N 1. — С. 101—111.
51. Л а у р и н ч и к а с А.П. О нулях линейных комбинаций рядов Дирихле // Литов.мат.сб. — 1986. — Т. 26, N 3. — С. 468—477.
52. Л е н г С. Алгебраические числа. — М.: Мир, 1966.
53. Л е н г С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
54. М о з е р Я. Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой //Acta Arithm. — 1974. — V. 26. — С. 33—39.
55. М о з е р Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta Arithm. — 1976. — V. 31. — С. 31—43.
56. М о з е р Я. Об одной теореме Харди — Литтлвуда в теории дзета-функции Римана // Acta Arithm. — 1976. — V. 31. — P. 45—51. Добавление // Acta Arithm. — 1979. — V. 35. — P. 403—404.
57. М о з е р Я. О законе Грама в теории дзета-функции Римана // Acta Arithm. — 1977. — V. 32. — С. 107—113.
58. М о з е р Я. Доказательство гипотезы Е.К.Титчмарша в теории дзета-функции Римана // Acta Arithm. — 1980. — V. 36. — С. 147—156.

59. М о з е р Я. О корнях уравнения $Z'(t)=0$ // Acta Arithm. — 1981. — V. 40. — С. 79—89; С. 97—107.
60. М о з е р Я. Новые следствия из формулы Римана — Зигеля // Acta Arithm. — 1982. — V. 42. — С. 1—10.
61. М о з е р Я. Улучшение теоремы Харди — Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1983. — V. 42—43. — С. 41—50.
62. М о з е р Я. Об одной биквадратичной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1983. — V. 42 — 43. — С. 35—39.
63. М о з е р Я. Некоторые следствия из формулы Римана — Зигеля // Тр.МИАН. — 1984. — Т. 163. — С. 183—186.
64. М о з е р Я. Дзета-функция Римана и уравнение Эйнштейна — Фридмана // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1984. — V. 44 — 45. — С. 115—125.
65. М о з е р Я. Новые теоремы о среднем для функции $|\zeta(1/2+it)|^2$ // Acta math. Univ. Comen. Bratislava. — 1985. — V. 46—47. — С. 21—40.
66. М о з е р Я. О поведении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в теории дзета-функции Римана // Acta math. Univ. Comen. Bratislava. — 1985. — V. 46 — 47. — С. 41—48.
67. М о з е р Я. Задача Харди — Литтлвуда и гипотеза Линделефа // Acta math. Univ, Comen. Bratislava. — 1985. — V. 46—47. — С. 49—62.
68. М о з е р Я. Структура одной формулы А.Сельберга в теории дзета-функции Римана // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1986. — V. 48—49. — С. 93—121.
69. М о з е р Я. Замечания к теоремам А.Сельберга о нулях функции $\zeta(1/2+it)$ // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1987 — V. 50—51. — С. 111—132.
70. М о з е р Я. Кубические теоремы о среднем в теории дзета-функций Римана // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1987.— V. 50—51. — С. 133—163.
71. М о з е р Я. О мерах некоторых множеств на критической прямой // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1987. — V. 50—51. — С. 177—194.
72. М о з е р Я. О распределении корней уравнений $Z(t)=0$, $Z'(t)=0$ в теории дзета-функции Римана // Acta math.Univ.Comen.Bratislava. — 1988. — V. 52—53. — С. 7—19.
73. М о н т г о м е р и Х. Мультипликативная теория чисел. — М.: Мир, 1974.
74. М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д.Д. О задаче Гильберта // Изв.политехн.ин-та. — Варшава, 1914.
75. П а н т е л е е в а Е.И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Мат.заметки. — 1988. Т. 44, N 4.— С. 494—505.
76. П е ч е р с к и й Д.В. Теорема о проекциях переставленных рядов с членами из L_p // Изв.АН СССР.Сер.мат. — 1977. — Т. 41, N 1. — С. 203—214.
77. П е ч е р с к и й Д.В. О перестановке членов в функциональных рядах // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, N 6. — С. 1285—1287.
78. П о с т н и к о в А.Г. О дифференциальной независимости рядов Дирихле // ДАН СССР. — 1949. — Т. 66, N 4. — С. 561—564.

79. Постников А.Г. Обобщение одной из задач Гильберта // ДАН СССР. — 1956. — Т. 107, N 4. — С. 512—515.

80. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.

81. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977.

82. Риман В. О числе простых чисел, не превышающих данной величин // Сочинения. — М.: ОГИЗ, 1948. — С. 216—224.

83. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.

84. Титчмарш Е.К. Теория функций. — М.: Наука, 1980.

85. Тырина О.В. Новая оценка тригонометрического интеграла И.М.Виноградова // Изв. АН СССР.Сер.мат. — 1987. — Т. 51, N 2. — С. 363—378.

86. Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. — М.: Мир, 1964.

87. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. — М.: Мир, 1974.

88. Чудаков Н.Г. On zeros of Dirichlet's L-functions // Мат.сб. — 1936. Т. 1(43). — С. 591—602.

89. Чудаков Н.Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М.: Гостехиздат, 1947.

90. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. — М.: ОНТИ, 1936.

91. Bagchi B. A Joint universality theorem for Dirichlet L- functions // Math.Zeit. — 1982. — V. 181. — P. 319 — 335.

92. Bohr H. En Saetning om ζ-Functionen // Nyt.Tidss. for Math. — 1910. — V — 21. — P. 61—66.

93. Bohr H. Uber das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene // Gott.Nachr. — 1911. — P. 409—428.

94. Bohr H. Sur lexistence de valeurs'arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)$ de Riemann pour $\sigma>1$ //Oversihg Vidensk Selsk Kobenhavn. — 1911. —P. 201—208.

95. Bohr H. Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma>1$ // C.K.Acad.Sci — 1912. — V. 154. — P. 1078—1081.

96. Bohr H. Uber die Funktion $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma>1$ // C.R.Acad.Sci — 1912. — V. 154. — P. 217—234.

97. Bohr H. En nyt Bevis for, at den Riemann'ske Zetafunktion $\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)$ har uendelij mange Nulpunkten indenfor Parallelstrimlen $O\leq\sigma\leq1$ // Nyt.Tidss.for Math.(B) 1912. — V. 23. — P. 81—85.

98. Bohr H. Om de Vardier, den Riemann'ske Funktion $\zeta(\sigma+it)$ antager i Halvplanen $\sigma>1$ // Skand.Math.Kongr. — 1912 — P. 113—121.

99. Bohr H. Note sur zeta de Riemann $\zeta(s)=\zeta(\sigma+it)$ sur la droite $\sigma=1$ // Oversigt Vidensk.Selsk.Kobenhavn. — 1913. — P. 3—11.

100. Bohr H. Lousung des absoluten Konvergenzproblems einer allgreinen Klasse Dirichletscher Reihen // Acta Math. — 1913. - V. 36. — P. 197—240.

101. Bohr H. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // C.R.Acad.Sci — 1914. — V. 158. — P. 1986—1988.

102. Bohr H. Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion im Kritischen Srteifen // Acta Math. — 1915. — V. 40. — P. 67—100.

103. Bohr H. Die Riemannsche Zetafunktion // Jahresberichte Deutsche Math.Ver. — 1918. — V. 24. — P. 1—17.

104. Bohr H. Uber eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen // Math.Ann. — 1922. — V. 85.

105. Bohr H. Uber diophantische Approximationen und ihre Anwendungen auf Dirichletsche Reihen, besonders auf die Riemannsche Zetafunktion // Scand.Math.Kongr. — 1923. — P. 131—154.

106. Bohr H., Courant R. Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion // Jreine angew.Math. — 1944. — P. 249—274.

107. Bohr H., Jessen B. Uber die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion // Acta Math. — 1930. — V. 54. — P. 1 — 35; 1932. — V. 58. — P. 1—55.

108. Bohr H., Jessen B. On the distribution of the values of the Riemann zeta-function // Amer.J.Math. — 1936. — V. 58. — P. 35 — 44.

109. Bohr H., Landau E. Uber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_L(s)$ in der Nahe der Geraden $\sigma=1$ // Gott.Nachr. — 1910. — P. 303—330.

110. Bohr H., Landau E. Ein Satz uber Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen // Kend. di Palermo. — 1914. — V. 37. — P. 269—272.

111. Bohr H., Landau E. Sur les zeros de la fonction de Riemann C.R.Acad.Sci. — 1914. — V. 158. — P. 106—110.

112. Bohr H., Landau E. Nachtrag zu unseren Abhandlugen aus den J[illegible]ngen 1910 un 1923 // Gott.Nachr. — 1924. — P. 168—172.

113. Borchsenius V., Jessen B. Mean motions and values [illegible] Riemann zeta-function // Acta Math. — 1948. — V. 80. — P. 99—166.

114. Carlson F. Uber die Nullstellon der Dirichletschen Reihen und de[illegible]mannschen ζ-Funktion // Arkiv for Mat.Astr.Fysik. — 1920. — N 20. — P. 107[illegible].

115. Corput J. G. van der. Zahlen theoretische Abschatsungen // M.A[illegible] 1921 — V. 84. — P. 53—79.

116. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros certain Diric[illegible]series I, II // J.Lond.Math.Soc. — 1936. — V. 11 — P. 181—185 and 307—312.

117. Dirichlet L. Uber die besttimmung der mittleren Werte in d[illegible]lentheorie // Abh.Akad.Berlin (Werhe, 2, 49—66) — 1849. Math.Abh., 69—83.

118. Fujii A. On the problem of divisors // Acta Arith. — 1976. — [illegible] P. 355—360.

119. Conek S.M. Analytic properties of zeta and L-functions // The[illegible]iv Ann Arb[illegible] Michigan, 1979.

120. H a d a m a r d J. Sur la distribution des zeros de la finction $\zeta(s)$ et ses consequences arithmetiques // Bull.soc.math.France. — 1896. — V. 24. — P. 199—220.
121. H a m b u r g e r H. Uber die Riemannsche Funktionalagleichung der ζ-Funktion // Math.Zs. — 1921. — V. 10. — P. 240 — 254; — 1922. — V. 11. — P. 224—245. — 1922. — V. 13. — P. 283 — 311.
122. H a m b u r g e r H. Uber einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion aquivalent sind // Math.Ann — 1922. — V. 85. — P. 129—140.
123. H a r d y G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann //Compt.Rend.Acad.Sci — 1914. — V. 158. — P. 1012 — 1014.
124. H a r d y G.H. On dirichlrt's divisor problem // Proc.Lond.Math. Soc. — 1915. — V. 15. — P. 1—25.
125. H a r d y G.H., L i t t l e w o o d J.E. Contributions to the theory of Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes // Acta Math. — 1918. — V. 41. — P. 119—196.
126. H a r d y G.H., L i t t l e w o o d J.E. The zeros of Riemann's zeta-functions an the critical line // Math.Zs. — 1921. — V. 10. — P. 283—317.
127. H a r d y G.H., L i t t l e w o o d J.E. The approximate functional equation in the theory of the zeta-functional, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz // Proc.Lond.Math.Soc. — 1922. — V. 21(2). — P. 39—74.
128. H a r d y G.H., L i t t l e w o o d J.E. The approximate functional equations for $\zeta(s)$ and $\zeta^2(s)$// Proc.Lond.Math.Soc. — 1929. —V. 29(2). — P. 81 — 97.
129. H o h e i s e l G. Primzahlprobleme in der Analysis // Sitzungsber.Preuss.Acad.Wiss. — 1930. — P. 580—588.
130. H u r w i t z A. Mathematische Werke, B.II — Basel, 1933. — 72—88.
131. H u x l e y M.N. On the Differences of primes in arithmetical progressions //Acta Arith. — 1969. — V. 15. — P. 367—392.
132. H u x l e y M.N. The distribution of prime numbers. — Oxford: Clarendon Press, 1972.
133. H u x l e y M.N. On the Difference between Consecntive Primes // Invention math. — 1972. — V. 15, — P. 164—170.
134. H u x l e y M.N. The distribution of Prime numbers. — Oxford: Clarendon Press, 1972.
135. I n g h a m A.E. On the difference between consecutive primes // Quart J.Math. 1937. — V. 8. — P. 255—266.
136. I v i c A. Topics in Recent Zeta-Function Theory // Publ.Math.d'Orsay, Universite de Paris-Sud, Orsay, 1983.
137. I v i c A. The Riemann Zeta-Function. — New Jork J.Wiley and Sons, 1985.
138. I v i c A. On a Problem Connected with Zeros of $\zeta(s)$ on the Critical Line // Mh.Math. — 1987. — V. 104. — P. 17 — 27.

139. I v i c A., J u t i l a M. Gaps Between Consecultive Zeros of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line // Mh.Math. — 1988. — V. 105. — P. 59—73.
140. J u t i l a M. A method in the theory of exponential sums // Tata Inst.of Fundamental Research. — Bombay, 1987.
141. J u t i l a M. Lectures on a method in the theory of exponential sums. — New Jork — Heidelberg — Tokyo: Springer — Verlag, 1987.
142. K a r a t s u b a A.A. Approximation of exponential sums by shorter ones // Proc. Indian Acad.Sci. — 1987. — V. 97, N 1—3. — P. 167—178.
143. K e r s h n e r R., W i n t e r A. On the asymptotic distribution of $\zeta'/\zeta(s)$ in the critical strip // Amer.J.Math. — 1937. — V. 59. — P. 673—678.
144. L a n d a u E. Uber die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen // Gott.Nachr. — 1912. — S. 687—771.
145. L a n d a u E. Uber die Hardysche Eutdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reelen Teil 1/2 // Math.Ann. — 1915. B. 76. — S. 212—243.
146. L a n d a u E. Uber die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemanschen ζ-Funktion // Arkiv for Mat.Asrt.och Fysik. — 1921. — V. 16, N 7. — S. 98—104.
147. L e v i n s o n N. More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma=1/2$ // Adv. in Math. — 1974. — V. 13. — P. 383—436.
148. L i t t l e w o o d J.E. Researches in the theory of Riemann's ζ-function //Proc. Lond. Math. Soc. — 1922. — V. 20(2). — P. XXII — XXVIII.
149. L i t t l e w o o d J.E. On the zeros of Riemann zeta-function // Proc.Cambr.Phil.Soc. — 1924. — V. 22. — P. 295—318.
150. L i t t l e w o o d J.E. On the Riemann zeta-function // Proc.Lond.Math.Soc. — 1925. — V. 24(2). — P. 175—201.
151. L i t t l e w o o d J.E. on the function $1/\zeta(1+it)$ // Proc.Lond.Math.Soc. — 1928. — V. 27(2). — P. 349 — 357.
152. M a n g o l d t H. Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ // Math.Annalen. — 1905. — B. 60. — S. 1 — 19.
153. M o n t g o m e r y H.L. Zeros of L-Functions // Invent.math. — 1969. — V. 8. — P. 346—354.
154. M o n t g o m e r y H.L. Extreme values of the Rieman zeta-function // Comment.Math Helv. — 1977. — V. 52. — P. 511 — 518.
155. M o t o h a s h i Y. Riemann — Siegel Formula // Univ.of Colorado, 1987.
156. O s t r o w s k i A. Uber Dirichletsche Reien und algebraische Differentialgleichungen // Math.Z. — 1920. — V. 8. — P. 241.
157. P a g e A. On the number of primes in an arithetic progression // Proc.Lond.Moth.Soc. — 1935. — V. 39. — P. 116—141.
158. P o t t e r H.S.A., T i t c h m a r s h E.C. The zeros of Epstein's zeta-functions // Proc.Lond.Math.Soc. — 1935. — V. 39(2). — P. 372—384.
159. R e i c h A. Universelle Werteverteilung von Eulerprodukten // Nachr.Akad.Wiss, Gottingen II (math.-phys.) K1. — 1977. — N1. — S. 1—17.

160. R e i c h A. Werteverteilung von Zetafunktionen // Arch.Math. — 1980. — V. 34.

161. R i c h e r t H.-E. Einfuhrung in die Theorie der starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen // Nachr.Akad.Wiss.Gottiggen (Math.-Physik). — 1960. — S. 17—75.

162. S e l b e r g A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Shr.Norske Vid.Akad.Oslo. — 1942. — V. 10. — P. 1—59.

163. S e l b e r g A. An elementary proof og the prime number theorem // Ann. of Math.— 1949. — V. 50(2). P. 305—313.

164. S i e g e l C.L. Bemerkung zu einem Satz von Hamburger uber die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion // Math.Ann. — 1922. — B. 86. — S. 276—279.

165. S i e g e l C.L. Uber Riemann Nachlass zur analytischen Zahlen theorio //Quellen und Studien sur Geschichte der Math.Astr. und Physic. Abt.B: Studien 1932. — B 2. — S. 45—80.

166. S i e g e l C.L. Uber die Classenzahl quadratischer Korper // Acta Arith. — 1936. B. 1. — S. 83—86.

167. S t a r k H.M. Mathematica 14.Part. 1. — 1967. — N 27. — P. 12—25.

168. T i t c h m a r s h E.C. On an inequality satisfield by the zeta-function of Riemann // Proc.Lond.Math.Soc. — 1928. — V. 28(2). — P. 70—80.

169. T i t c h m a r s h E.C. On the zeros of the Riemann zeta-function// Proc. Lond. Math. Soc. — 1929. — V. 30(2). — P. 319 — 321.

170. T i t c h m a r s h E.C. On the Riemann zeta-function // Proc.Cambr.Phil.Soc. — 1932. — V. 28. — P. 273—274.

171. T i t c h m a r s h E.C. The theory of the Riemann Zeta-function. Second eddition. Oxford science publications, 1986.

172. V o r o n o i G.F. Sur un probleme du calcul des fonctions asymptotiques // J.reine angew.Math. — 1903 — V. 126. — P. 241 — 282.

173. V a l l e - P o u s s i n C.J. de la Recherches analytigues sur la theorie des nombres; partie I, II, III // Ann.Soc.Sci.Bruxelles.Ser.A. — 1896–1897. — T. 20—21.

174. G a b r i e l R.M. Some results concerning the integrals of moduli of regulars functions along certain curves // J.Lond.Math.Soc. — 1927. — V. 2. — P. 112—117.