АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
(конспект лекций Е. В. Троицкого,
1-й курс, математики, осенний семестр 1999/2000 уч.года)

Оглавление

1. Векторы в пространстве

Замечание 1.1. Следуем наглядно-геометрическим представлениям, возможен аксиоматический подход.

Определение 1.2. Закрепленный *вектор* — направленный отрезок, т. е. упорядоченная пара точек. Будем обозначать векторы $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \ldots$

Определение 1.3. Вектор $\overleftrightarrow{AA}$ называется *нулевым* и обозначается 0_A.

Определение 1.4. *Длина вектора* — расстояние между его концами:

$$|\overleftrightarrow{AB}| := \rho(A, B).$$

В частности, длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда он нулевой.
Определение 1.5. Закрепленные векторы *коллинеарны,* если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается параллельным, а следовательно, и коллинеарным любому вектору.
Определение 1.6. Закрепленные векторы *компланарны,* если существует плоскость, которой они параллельны.
Определение 1.7. Закрепленные векторы *равны,* если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.
Определение 1.8. Напомним, что *отношением эквивалентности* на множестве M называется некоторое множество упорядоченных пар S (т. е. $S \subset M \times M$), причем выполнены аксиомы (условие $(m, n) \in S$ обычно записывется как $m \sim n$):

- $m \sim m$ (тождества)
- из $m \sim n$ следует $n \sim m$ (симметричности)
- из $m \sim n$ и $n \sim k$ следует $m \sim k$ (транзитивности)

для любых $m, n, k \in M$.

В этой ситуации M распадается на непересекающиеся множества, состоящие из всех элементов, эквивалентных одному. Эти множества называются *классами эквивалентности.* Класс эквивалентности, содержащий $m \in M$, обозначается $[m]$.

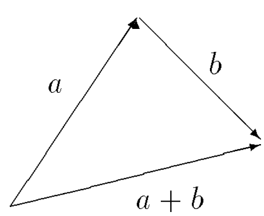
Лемма 1.9. *Равенство является отношением эквивалентности на множестве закрепленных векторов.*

Доказательство. Очевидно. $\square$
Определение 1.10. *Вектором* (или *свободным вектором*) называется соответствующий класс эквивалентности.

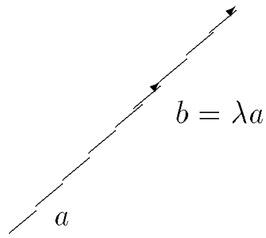
Будем обозначать векторы $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}, \ldots$ (хотя правильнее $[\overleftrightarrow{AB}], [\overleftrightarrow{CD}], \ldots$) или $a, b, \ldots$, а вещественные числа — $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$

Понятия коллинеарности и компланарности переносятся на (свободные) векторы.
Определение 1.11. *Линейные операции над векторами :*

1) *Сложение* по правилу треугольника:



2) *Умножение* вектора на вещественное число:



по правилу:

1) b коллинеарен a;

2) $|b| = |\lambda| \cdot |a|$;

3) b сонаправлен с a, если $\lambda > 0$, и противонаправлен, если $\lambda < 0$.

Эти операции корректно определены на множестве (свободных) векторов.

Свойства линейных операций над векторами :

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения = правило параллелограмма);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения = правило четырехугольника);
3. $a + 0 = a$ (существование нулевого вектора $= [0_A]$);
4. $a + (-1) \cdot a = 0$ (существование обратного);
5. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ (ассоциативность);
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (6, 7 — дистрибутивность);
8. $1 \cdot a = a$ (единица).

Определение 1.12. Множество с операцией сложения и операцией умножения на числа, удовлетворяющими этим аксиомам, называется *линейным пространством.*

Заметим, что все основные утверждения про операции над геометрическими векторами могут быть выведены из этих аксиом, без привлечения конкретного описания операций (но, например, это не относится к длинам и т. п.). В этом смысле аксиомы образуют полную систему. Более того, она излишне полна (что можно выбросить ?).

Определение 1.13. *Линейной комбинацией* векторов $a_1, \ldots, a_n$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ называется вектор вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$. Если все α_i равны нулю, то линейная комбинация называется *тривиальной,* а в противном случае — *нетривиальной.*

Определение 1.14. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ *линейно зависимы,* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, т. е. найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. В противном случае векторы *линейно независимы,* т. е. из равенства $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$ всегда следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Лемма 1.15. *Система веторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю: $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Один из коэффициентов, скажем, α_i, не равен нулю. Тогда

$$a_i = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right) \cdot a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right) \cdot a_{i-1} + \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right) \cdot a_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right) \cdot a_n.$$

Достаточность. Пусть $a_i = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{i-1} a_{i-1} + \beta_{i+1} a_{i+1} + \ldots \beta_n a_n$. Тогда

$$(-1)a_i + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{i-1} a_{i-1} + \beta_{i+1} a_{i+1} + \ldots \beta_n a_n = 0$$

— нетривиальная (первый коэффициент — ненулевой) линейная комбинация, равная нулю. □

Лемма 1.16. *Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — линейно зависимая система векторов. Тогда $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ — линейно зависимая система, каковы бы не были векторы $a_{k+1}, \ldots, a_n$.*

Доказательство. Если $\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_k a_k = 0$ — нетривиальная комбинация, то $\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_n = 0$ также нетривиальная комбинация. □

Лемма 1.17. *1) Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

2) Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

3) Четыре вектора всегда линейно зависимы.

Доказательство. 1. По определению операции умножения на число.

2. По лемме 1.15 из линейной зависимости следует, что $c = \alpha a + \beta b$, т. е. c компланарен a и b.

Обратно, пусть a и b коллинеарны, тогда они линейно зависимы и по лемме 1.16 a, b, c линейно зависимы. Если же a и b неколлинеарны, то c можно представить в виде $c = \alpha a + \beta b$, "достроив параллелограмм".

3. Если какие-либо 3 вектора компланарны, то они линейно зависимы по предыдущему пункту, а по лемме 1.16 зависимы все 4. Если же таких 3 векторов среди a, b, c, d нет, то пары a и b, c и d неколлинеарны, а следовательно определяют (с точностью до параллельного переноса) две плоскости, которые не параллельны (иначе все 4 были бы компланарны). Тогда направляющий вектор f прямой пересечения раскладывается, с одной стороны, в линейную комбинацию a и b, а с другой — c и d (ср. с доказательством п. 2):

$$\alpha a + \beta b = f = \gamma c + \delta d.$$

Если при этом один из коэффициентов, скажем, α, равен 0, то b, c, d компланарны, что противоречит предположению. Таким образом,

$$\alpha a + \beta b \Leftrightarrow \gamma c \Leftrightarrow \delta d = 0$$

— нетривиальная комбинация. □

Определение 1.18. *Базисом* на прямой (соотв., на плоскости, в пространстве) называется упорядоченный набор из 1 (соотв., 2, 3) линейно независимых векторов.

Замечание 1.19. Для прямой это означает, что вектор ненулевой.

Теорема 1.20. *Всякий вектор пространства (соотв., плоскости, прямой) однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов данного базиса.*

Доказательство. Докажем существование комбинации. Пусть e_1, e_2, e_3 — данный базис, а a — произвольный вектор. По лемме 1.17 (п. 3) векторы a, e_1, e_2, e_3 линейно зависимы, так что существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha a + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. Пусть $\alpha = 0$. Тогда $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$ — нетривиальная линейная комбинация, что противоречит линейной независимости векторов базиса. Значит, $\alpha \neq 0$ и искомая комбинация

$$a = \left(\Leftrightarrow\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \cdot e_1 + \left(\Leftrightarrow\frac{\alpha_2}{\alpha}\right) \cdot e_2 + \left(\Leftrightarrow\frac{\alpha_3}{\alpha}\right) \cdot e_3.$$

Докажем единственность. Пусть имеются две различные тройки: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, причем

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3.$$

Тогда $0 = (\alpha_1 \Leftrightarrow \beta_1) e_1 + (\alpha_2 \Leftrightarrow \beta_2) e_2 + (\alpha_3 \Leftrightarrow \beta_3) e_3$ — нетривиальная комбинация, что противоречит линейной независимости базиса.

Аналогично для прямой и плоскости. □

Определение 1.21. *Координатами* (или *компонентами*) вектора *a относительно базиса* e_1, e_2, e_3 называются такие (однозначно определенные) числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Будем записывать также $a(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Лемма 1.22. *Координаты суммы векторов равны сумме координат. Координаты λa равны $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3$ (в обозначениях определения).*

Доказательство. Пусть $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. По свойствам 1, 2, 5, 6, 7:

$$a + b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) =$$

$$= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_3 e_3 = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + (\alpha_3 + \beta_3) e_3,$$

$$\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \lambda(\alpha_1 e_1) + \lambda(\alpha_2 e_2) + \lambda(\alpha_3 e_3) = (\lambda\alpha_1) e_1 + (\lambda\alpha_2) e_2 + (\lambda\alpha_3) e_3.$$

□

Определение 1.23. *Аффинная система координат* в пространстве задается выбором *репера* — произвольной точки O и базиса e_1, e_2, e_3.

Координаты точки X относительно репера $Oe_1e_2e_3$ определяются как координаты вектора $\overrightarrow{OX}$ в базисе e_1, e_2, e_3:

$$\overrightarrow{OX} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

(их мы будем обозначать латинскими буквами). Записываем $X(x_1, x_2, x_3)$.

Лемма 1.24. *Пусть $X(x_1, x_2, x_3)$ и $Y(y_1, y_2, y_3)$ — координаты двух точек. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{XY}$ относительно базиса, входящего в данную аффинную систему координат, равны $(y_1 \Leftrightarrow x_1, y_2 \Leftrightarrow x_2, y_3 \Leftrightarrow x_3)$.*

Доказательство. По определению аффинной системы координат $\overrightarrow{OX}(x_1, x_2, x_3)$ и $\overrightarrow{OY}(y_1, y_2, y_3)$, а $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}$. По лемме 1.22 получаем требуемый результат. □

Определение 1.25. Базис называется *ортогональным,* если векторы e_1, e_2, e_3 перпендикулярны. Если они к тому же единичной длины, то базис называется *ортонормированным.* Аффинная система координат называется *прямоугольной,* если соответствующий базис ортонормирован.

2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть заданы две точки A и B своими аффинными координатами (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) (в некотором репере) и отношение $\frac{\lambda}{\mu}$. Найдем аффинные координаты (x_1, x_2, x_3) такой точки X отрезка AB, что $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{\lambda}{\mu}$, т. е. делящей отрезок в данном отношении.

Координаты векторов $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{XB}$ в данном базисе по лемме 1.24 равны, соответственно, $(x_1 \Leftrightarrow a_1, x_2 \Leftrightarrow a_2, x_3 \Leftrightarrow a_3)$ и $(b_1 \Leftrightarrow x_1, b_2 \Leftrightarrow x_2, b_3 \Leftrightarrow x_3)$. По лемме 1.22 условие отношения (поскольку векторы сонаправлены) перейдет в совокупность условий:

$$\begin{aligned} \mu(x_1 \Leftrightarrow a_1) &= \lambda(b_1 \Leftrightarrow x_1), \\ \mu(x_2 \Leftrightarrow a_2) &= \lambda(b_2 \Leftrightarrow x_2), \\ \mu(x_3 \Leftrightarrow a_3) &= \lambda(b_3 \Leftrightarrow x_3), \end{aligned}$$

имеющих единственное решение

$$x_i = \frac{\mu a_i + \lambda b_i}{\mu + \lambda}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что можно рассматривать и отрицательные λ или μ, так что условие деления в этой общей форме будет иметь вид

$$\mu\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{XB}.$$

Формулы ответа будут, конечно, теми же, что и выше.

3. Скалярное произведение

Определение 3.1. *Скалярным произведением* двух (ненулевых) векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\langle a, b\rangle := |a| \cdot |b| \cdot \cos \widehat{a, b}.$$

Если один из векторов нулевой, то положим $\langle a, b\rangle := 0$.

Лемма 3.2. *Пусть в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 вектор a имеет координаты a_1, a_2, a_3. Тогда*

$$a_i = \langle a, e_i\rangle, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Координаты вектора могут быть найдены путем проекций в прямоугольном параллелепипеде (т. к. единственность доказана). Таким образом,

$$a_i = |a| \cdot \cos \widehat{a, e_i} = |a| \cdot |e_i| \cdot \cos \widehat{a, e_i} = \langle a, e_i\rangle. \qquad \square$$

Теорема 3.3. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами, определяющими его однозначно:*

1) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ *(симметричность);*
2) $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$*;*
3) $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda \langle a, b\rangle$ *(2)+3) = линейность по первому аргументу);*
4) $\langle a, a\rangle = |a|^2 \geq 0$*, в частности,* $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *(положительность и связь с длиной).*

Доказательство. Пункты 1, 3 и 4 очевидны. Если $c = 0$, то п. 2 выполняется. Если же $c \neq 0$, то можно путем деления на $|c|$ т применения пп. 1 и 3 свести к случаю $|c| = 1$. В этой ситуации рассмотрим ортонормированный базис $e_1 = c, e_2, e_3$. Тогда соответствующие скалярные произведения совпадают с первыми координатами:

$$\langle a, c\rangle = \langle a, e_1\rangle = a_1, \qquad \langle b, c\rangle = \langle b, e_1\rangle = b_1.$$

Поскольку координаты суммы равны сумме координат, то

$$\langle a + b, c\rangle = a_1 + b_1 = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle.$$

Покажем, что свойства 1-4 однозначно определяют значения скалярного произведения. Свойство 4 определяет $\langle a, a\rangle$. В силу пп. 1 и 4 имеем

$$\langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle = 2\langle a, b\rangle + \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle,$$

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2} \cdot \{\langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle \Leftrightarrow \langle a + b, a + b\rangle\}. \qquad \square$$

Теорема 3.4. *В произвольном ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 скалярное произведение имеет вид*

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Доказательство.

$$\langle a, b\rangle = \langle a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b\rangle \overset{2)}{=} \sum_{i=1}^{3}\langle a_ie_i, b\rangle \overset{3)}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i\langle e_i, b\rangle \overset{1)}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i\langle b, e_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i\langle b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, e_i\rangle = \overset{2,3)}{=} \sum_{i,j=1}^{3} a_ib_j\langle e_i, e_j\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad \square$$

Следствие 3.5. *В прямоугольной системе координат угол между векторами определяется формулой*

$$\langle a, b\rangle = \frac{\langle a, b\rangle}{|a|\cdot|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

4. Площадь, объем и ориентация

Вычислим площадь S параллелограмма $\Pi(a, b)$, натянутого на вектора a и b на плоскости. Пусть задан ортонормированный базис e_1, e_2 плоскости, так что $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Тогда (если угол между a и b равен φ)

$$S = |a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi = |a|\cdot|b|\cdot\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = |a|\cdot|b|\cdot\sqrt{1 - \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2)}} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} = \sqrt{(a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 - 2a_1b_1a_2b_2} = |a_1b_2 - a_2b_1|.$$

Напомним, что выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем* det матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Определение 4.1. *Ориентированной площадью параллелограмма* $\Pi(a, b)$ относительно базиса e_1, e_2 называется величина $S_{or}(a, b) = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Ее абсолютная величина совпадает с площадью параллелограмма, а знак (в случае линейно независимых a и b) называется *ориентацией пары* a, b относительно базиса e_1, e_2.

Лемма 4.2. *Ориентированная площадь обладает следующими свойствами:*

1) $S_{or}(a, b) = -S_{or}(b, a)$ *(кососимметричность);*

2) $S_{or}(a + b, c) = S_{or}(a, c) + S_{or}(b, c)$,

3) $S_{or}(\lambda a, b) = \lambda S_{or}(a, b)$ *(2+3=линейность по первому аргументу);*

4) $S_{or}(a, a) = 0$.

Доказательство. Все утверждения следуют немедленно из формулы. □

Лемма 4.3. *Ориентация пары a, b относительно базиса e_1, e_2 положительна, если кратчайший поворот от a к b происходит в том же направлении, что и от e_1 к e_2.*

Доказательство. Будет проведено сразу для трехмерного случая. □

Определение 4.4. *Ориентированным объемом параллепипеда* $\Pi(a, b, c)$, построенного на векторах a, b и c пространства, относительно ортонормированного базиса $\varepsilon := (e_1, e_2, e_3)$ называется определитель

$$V_{or}^{\varepsilon}(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 \Leftrightarrow b_1a_2c_3 \Leftrightarrow a_1c_2b_3 \Leftrightarrow c_1b_2a_3.$$

В случае линейно независимых векторов a, b, c его знак называется *ориентацией тройки* a, b, c относительно ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3.

После доказательства некоторых свойств мы докажем следующее утверждение, оправдывающее это название.

Теорема 4.5. *Абсолютная величина ориентированного объема параллелепипеда равна объему параллелепипеда.*

Лемма 4.6. *Пусть фиксирован базис e_1, e_2, e_3 и некоторый вектор вращается в плоскости или вокруг оси с постоянной скоростью. Тогда его коэффициенты являются непрерывными функциями времени. Аналогично для растяжения или сжатия вектора.*

Доказательство. Посокльку компоненты вектора относительно одного фиксированного базиса являются линейными функциями коэффициентов относительно другого базиса, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть удобный базис. Для вращения таковым будет e_3 =ось вращения причем направление вращения видно с конца e_3 протв чачовой стрелки, e_1 =направление проекции начального положения вектора. Тогда (с точностью до выбора скорости вращения) вращающийся вектор будет иметь координаты $(\alpha \cdot \cos t, \alpha \cdot \sin t, \beta)$. Для растяжения же — $(\alpha t, \beta t, \gamma t)$, где t пробегает некоторый отрезок. Эти формулы показывают искомую непрерывную зависимость. □

Лемма 4.7 (из курса алгебры). *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк является линейной комбинацией других.*

Лемма 4.8. *Ориентированный объем равен нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

Доказательство. Сразу следует из предыдущей леммы. □

Теорема 4.9. *Базис a, b, c имеет положительную ориентацию относительно базиса e_1, e_2, e_3 тогда и только тогда, когда непрерывной деформацией в пространстве базисов его можно перевести в e_1, e_2, e_3 (под непрерывной деформацией понимается такое семейство базисов, каждая координата каждого вектора которых является непрерывной функцией параметра).*

Доказательство. Допустим, такая деформация существует. Тогда определитель $V_{or}^{\varepsilon}(a(t), b(t), c(t))$ является непрерывной функцией параметра t и принимает все промежуточные значения. В частности, если значение $V_{or}^{\varepsilon}(a, b, c) < 0$, то в какой-то момент должен получиться 0, так как $V_{or}^{\varepsilon}(e_1, e_2, e_3) = 1$. Это противоречит предыдущей лемме.

Обратно, построим по лемме 4.6 непрерывную деформацию: сначала совместим a с e_1 так, чтобы b лежал в плоскости e_1, e_2 с той же стороны, что и e_2. Затем совместим b с e_2. Раз знак $+$, то e_3 и c лежат с одной стороны от плоскости и их можно совместить. □

Следствие 4.10 (из доказательства). *Два базиса имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда с конца третьего вектора кратчайшее движение от первого ко второму осуществляется в одну сторону (либо против, либо по часовой стрелке).*

Следствие 4.11. *Все базисы распадаются на два класса, представителей каждого из которых можно связать непрерывной деформацией.*

Определение 4.12. *Заданием ориентации* называется выбор одного из этих классов. Обычно при движении "против" (см. следствие 4.10) ориентация называется правой, а в другом случае — левой. Пространство с выбранной ориентацией будем называть *ориентированным пространством* (о. п.).

Замечание 4.13. Можно показать, что матрица из координат третьего базиса в первом равна произведению матриц третьего во втором и второго в первом. Определители при этом перемножаются. Таким образом, все базисы внутри одного класса имеют положительный объем друг относительно друга.

Лемма 4.14. *Ориентация b, a, c противоположна ориентации a, b, c.*

Доказательство. Повернем тройку b, a, c как твердое тело так, чтобы b совпало с a, а a — с b. Тогда c и образ c окажутся с разных сторон от плоскости a, b. □

Определение 4.15. *Ориентированным объемом* параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c *ориентированного пространства* называется число $V_{or}(a, b, c)$, равное по абсолютной величине объему этого параллелепипеда, и имеющее знак "+", если тройка a, b, c положительно ориентирована, и знак "-" в противном случае. Заметим (как видно из обозначения), что новое определение не связано с конкретным базисом.

Определение 4.16. *Векторным произведением* двух векторов a и b в ориентированном пространстве называется вектор c, обозначаемый $[a, b]$, и определяемый следующим образом.

Если векторы a и b **неколлинеарны**, то c обладает следующими свойствами:

1) длина c равна площади параллелограмма $\Pi(a, b)$;

2) вектор c перпендикулярен a и b;

3) тройка a, b, c имеет положительную ориентацию.

По определению ориентации такой вектор c существует и однозначно определен.

Если векторы a и b **коллинеарны**, то $c := 0$.

Лемма 4.17. *Пусть e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис. Тогда*

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = -e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1.$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Определение 4.18. Число $\langle a, b, c\rangle := \langle [a, b], c\rangle$ называется *смешанным произведением* тройки a, b, c.

Теорема 4.19. $\langle a, b, c\rangle := V_{or}(a, b, c)$.

Доказательство. То, что знаки совпадают, сразу следует из определения ориентации. Проверим совпадение абсолютных величин, т. е. что модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда.

$$|\langle a, b, c\rangle| = |\,[a, b]\,| \cdot |c| \cdot |\cos\,(\widehat{c, [a, b]})| = S \cdot h = |V_{or}(a, b, c)|,$$

поскольку c перпендикулярно плоскости, натянутой на a и b. Здесь через S обозначена площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b, а h — соответствующая высота параллелепипеда. $\square$

Теорема 4.20. *Смешанное произведение кососимметрично по любой паре аргументов и линейно по каждому из них:*

1) $\langle a, b, c\rangle = -\langle b, a, c\rangle = \langle b, c, a\rangle = -\langle c, b, a\rangle = \langle c, a, b\rangle = -\langle a, c, b\rangle;$

2) $\langle a + b, c, d\rangle = \langle a, c, d\rangle + \langle b, c, d\rangle; \qquad \langle \lambda a, b, c\rangle = \lambda\langle a, b, c\rangle;$

$\langle a, b + c, d\rangle = \langle a, b, d\rangle + \langle a, c, d\rangle; \qquad \langle a, \lambda b, c\rangle = \lambda\langle a, b, c\rangle;$

$\langle a, b, c + d\rangle = \langle a, b, c\rangle + \langle a, b, d\rangle; \qquad \langle a, b, \lambda c\rangle = \lambda\langle a, b, c\rangle.$

Доказательство. 1) По предыдущему утверждению абсолютная величина (т. е. объем параллелепипеда) не меняется. Утверждение про знаки следует из леммы 4.14.

2) Линейность по третьему аргументу очевидна. Из этого при помощи п. 1 следует линейность по остальным аргументам. $\square$

Теорема 4.21. *Векторное произведение обладает следующими свойствами:*

1) $[a, b] = \Leftrightarrow[b, a]$*;*

2) $[\lambda a, b] = \lambda[a, b]$*;*

3) $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$.

Доказательство. Пп. 1 и 2 сразу вытекают из определения. Для доказательства п. 3 рассмотрим вектор $d = [a + b, c] \Leftrightarrow[a, c] \Leftrightarrow[b, c]$. Тогда

$$\langle d, d\rangle = \langle [a + b, c] \Leftrightarrow[a, c] \Leftrightarrow[b, c], d\rangle = \langle a + b, c, d\rangle \Leftrightarrow\langle a, c, d\rangle \Leftrightarrow\langle b, c, d\rangle = 0.$$

Значит, $d = 0$, а это и есть п. 3. $\square$

Теорема 4.22. *Пусть* e_1, e_2, e_3 *— ортонормированный базис положительной ориентации. Тогда*

$$[a, b] = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot e_1 + \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot e_3$$

и

$$\langle a, b, c\rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Первое равенство символически записывают в виде

$$[a, b] = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой и леммой 4.17:

$$[a, b] = [a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3] = a_1b_1 \underbrace{[e_1, e_1]}_{0} + a_1b_2 \underbrace{[e_1, e_2]}_{e_3} + a_1b_3 \underbrace{[e_1, e_3]}_{-e_2} +$$

$$+ a_2b_1 \underbrace{[e_2, e_1]}_{-e_3} + a_2b_2 \underbrace{[e_2, e_2]}_{0} + a_2b_3 \underbrace{[e_2, e_3]}_{e_1} + a_3b_1 \underbrace{[e_3, e_1]}_{e_2} + a_3b_2 \underbrace{[e_3, e_2]}_{-e_1} + a_3b_3 \underbrace{[e_3, e_3]}_{0} =$$

$$= (a_2b_3 \Leftrightarrow a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 \Leftrightarrow a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 \Leftrightarrow a_2b_1)e_3 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot e_1 + \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot e_3.$$

Для доказательства второго соотношения воспользуемся определением смешанного произведения, первым соотношением и записью скалярного произведения в прямоугольных координатах:

$$\langle a, b, c\rangle = \langle [a, b], c\rangle = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot c_1 + \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} \cdot c_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot c_3 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Следствие 4.23. *Пусть в ориентированном пространстве выбран ортонормированный базис* $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ *положительной ориентации. Тогда*

$$\langle a, b, c\rangle = V_{or}(a, b, c) = V_{or}^{\varepsilon}(a, b, c)$$

для любых векторов a, b, c. *В частности, мы доказали теорему* 4.5, *сформулированную в начале параграфа:* $|V_{or}^{\varepsilon}(a, b, c)|$ *равняется объему соответствующего параллелепипеда.*

Будем обозначать $\det(A)$ через $|A|$.

Следствие 4.24. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* a *и* b *пространства записывается в прямоугольных координатах (любой ориентации !) как*

$$S(\Pi(a, b)) = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Теорема 4.25. *Имеют место следующие формулы:*

1) $[a, [b, c]] = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$ *(формула двойного векторного произведения или "бац минус цаб");*

2) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ *(тождество Якоби).*

Доказательство. 1). Выберем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 положительной ориентации так, что

$$a = (a_1, a_2, a_3), \qquad b = (b_1, b_2, 0), \qquad c = (c_1, 0, 0),$$

т. е. e_1 сонаправлен с c, e_2 лежит в плоскости b, c. Тогда

$$[b, c] = \left(\begin{vmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, -b_2 c_1),$$

$$[a, [b, c]] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 0 & -b_2 c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ -b_2 c_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-a_2 b_2 c_1, a_1 b_2 c_1, 0).$$

С другой стороны,

$$\langle a, c\rangle = a_1c_1, \qquad b\langle a, c\rangle = (a_1c_1b_1, a_1c_1b_2, 0),$$

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2, \qquad c\langle a, b\rangle = (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1, 0, 0),$$

откуда

$$b\langle a, c\rangle \Leftrightarrow c\langle a, b\rangle = (\Leftrightarrow a_2b_2c_1, a_1c_1b_2, 0) = [a, [b, c]].$$

2). По п. 1) :

$$\begin{array}{lrcl} & [a,[b,c]] & = & b\langle a,c\rangle \Leftrightarrow c\langle a,b\rangle \\ + & [b,[c,a]] & = & c\langle a,b\rangle \Leftrightarrow a\langle b,c\rangle \\ & [c,[a,b]] & = & a\langle b,c\rangle \Leftrightarrow b\langle a,c\rangle \\ \hline & [a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]] & = & 0 \end{array}$$

□

5. Прямые на плоскости

Определение 5.1. *Алгебраическая линия (кривая)* на плоскости — множество, задаваемое в некоторой аффинной системе координат уравнением вида $F(x, y) = 0$, где F — многочлен:

$$F(x, y) = \sum_{i,j\le n} a_{ij}x^iy^j, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Число n называется *степенью многочлена* F и *порядком соответствующей кривой*, если хотя бы один из коэффициентов a_{ij} с $i + j = n$ отличен от 0.

Параметрическим уравнением кривой называется

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \vec{r} = \vec{r}\,(t),$$

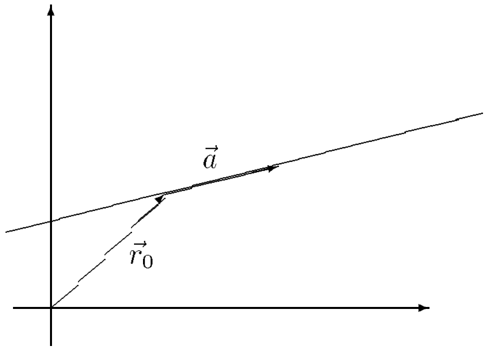
где t — параметр.

Пример 5.2. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ может быть задана в виде

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$



Здесь $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ — некоторая точка на прямой (начальная), а $\vec{a} = (\alpha, \beta)$ — некоторый ненулевой вектор (направляющий). Выражая t, получаем *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{\alpha} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{\beta}.$$

Замечание 5.3. В каноническом уравнении допускается равенство нулю некоторых (не всех) знаменателей. При этом соответствующий числитель приравнивается к 0.

Пример 5.4.

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{0} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{\beta} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x_0.$$

Перейдем к *общему уравнению*:

$$\beta(x \Leftrightarrow x_0) \Leftrightarrow \alpha(y \Leftrightarrow y_0) = 0, \qquad Ax + By + C = 0,$$

где

$$A = \beta, \qquad B = \Leftrightarrow \alpha, \qquad C = \alpha y_0 \Leftrightarrow \beta x_0.$$

Итак, всякая прямая задается уравнением первого порядка. Обратно, всякое уравнение первого порядка задает прямую. Действительно, расссмотрим уравнение $Ax + By + C = 0$. Пусть, например, $A \neq 0$. Возьмем в качестве начальной точки $(x_0, 0)$, где x_0 определим из уравнения

$$Ax_0 + C = 0, \qquad x_0 = \Leftrightarrow \frac{C}{A}.$$

В качестве направляющего вектора выберем $(\Leftrightarrow B, A)$. Тогда исходное уравнение равносильно каноническому

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{\Leftrightarrow B} = \frac{y \Leftrightarrow 0}{A}.$$

Теорема 5.5. *Прямые на плоскости есть в точности алгебраические линии первого порядка. При этом два уравнения*

$$F_1(x, y) := A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

и

$$F_2(x, y) := A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

задают одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда они пропорциональны (система координат фиксирована !), т. е. существует такое $\lambda \neq 0$, что $F_1 = \lambda F_2$, так что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$.

Доказательство. Первое утверждение уже доказано. Достаточность во втором очевидна. Докажем необходимость. Пусть уравнения задают одну и ту же прямую. Как мы показали, ее направляющий вектор $(\Leftrightarrow B_1, A_1)$ или $(\Leftrightarrow B_2, A_2)$. Они коллинеарны, так что найдется такое $\lambda \neq 0$, что

$$A_1 = \lambda A_2, \qquad B_1 = \lambda B_2.$$

Рассмотрим любую точку (x_0, y_0) прямой. Тогда

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \Leftrightarrow \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0,$$

$$C_1 \Leftrightarrow \lambda C_2 = 0, \qquad C_1 = \lambda C_2. \qquad \square$$

Лемма 5.6. *Векторы (α, β), параллельные прямой $Ax + By + C = 0$, определяются соответствующим однородным уравнением $A\alpha + B\beta = 0$.*

Доказательство. В классе любого вектора (α, β), параллельного прямой, имеется представитель $\overleftrightarrow{PQ}$, где P, а следовательно, и Q, лежит на прямой. Тогда, если $P(x_P, y_P)$, а $Q(x_Q, y_Q)$, то

$$Ax_P + By_P + C = 0, \qquad Ax_Q + By_Q + C = 0,$$

так что

$$A(x_Q \Leftrightarrow x_P) + B(y_Q \Leftrightarrow y_P) = 0, \qquad A\alpha + B\beta = 0.$$

Обратно, если $A\alpha + B\beta = 0$, то отложим его от точки (x_P, y_P) на прямой. Тогда другой конец $(x_Q, y_Q) = (x_P + \alpha, y_P + \beta)$ удовлетворяет уравнению

$$Ax_Q+By_Q+C = A(x_P+\alpha)+B(y_P+\beta)+C = (Ax_P+By_P+C)+(A\alpha+B\beta) = 0+0 = 0. \quad \square$$

Теорема 5.7. *Две прямые с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются (в одной точке), если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, и параллельны (в т. ч. могут совпадать), если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.*

Доказательство. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, т. е. $(\Leftrightarrow B_1, A_1)$ коллинеарен $(\Leftrightarrow B_2, A_2)$, что означает равенство нулю определителя $\begin{vmatrix} \Leftrightarrow B_1 & A_1 \\ \Leftrightarrow B_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Методом исключения получаем и первое утверждение. $\square$

Определение 5.8. Пусть фиксировано (!) уравнение некоторой прямой $F(x, y) = Ax+By+C = 0$. *Положительная полуплоскость* для F определяется как множество F_+ точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $F(x, y) > 0$. Аналогично определяется *отрицательная полуплоскость* F_- как $F(x, y) < 0$.

Замечание 5.9. Пока мы не доказали, что это действительно полуплоскости.

Теорема 5.10. *Если точки P и Q лежат в одной полуплоскости, то и весь отрезок PQ лежит в ней. Если P и Q лежат в разных полуплоскостях, то отрезок PQ пересекает данную прямую. В частности, F_+ и F_- действительно полуплоскости с границей, равной данной прямой.*

Доказательство. Пусть $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$. Координаты точек отрезка PQ имеют вид

$$\begin{cases} x &= \frac{\mu x_P+\lambda x_Q}{\mu+\lambda} \\ y &= \frac{\mu y_P+\lambda y_Q}{\mu+\lambda} \end{cases}, \qquad \mu, \lambda > 0.$$

Тогда

$$F(X) = Ax+By+C = A\frac{\mu x_P + \lambda x_Q}{\mu + \lambda}+B\frac{\mu y_P + \lambda y_Q}{\mu + \lambda}+C\frac{\mu + \lambda}{\mu + \lambda} = \frac{1}{\mu + \lambda}\cdot[\mu F(P)+\lambda F(Q)],$$

причем множитель строго положителен. Значит, если P и Q принадлежат F_+ или F_-, т. е. $F(P)$ и $F(Q)$ одного знака, то $F(X)$ того же знака. Если же $F(P)$ и $F(Q)$ разных знаков, то при $\mu = \frac{1}{|F(P)|}$ и $\lambda = \frac{1}{|F(Q)|}$ соответствующее $F(X)$ обращается в 0. $\square$

Замечание 5.11. Вектор (A, B) при этом “указывает” положительную полуплоскость в следующем смысле. Если отложить его от некоторой точки (x_0, y_0) на прямой, то его конец окажется в F_+. Действительно,

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = (Ax_0 + By_0 + C) + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.$$

Определение 5.12. Множество всех прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку, называется *собственным пучком,* а сама фиксированная точка — *центром пучка.*

Множество всех прямых на плоскости, параллельных данной прямой, называется *несобственным пучком.* (Терминология связана с проективной геометрией.)

Теорема 5.13. *Прямая l с уравнением $F = Ax + By + C = 0$ принадлежит (собственному или несобственному) пучку, задаваемому парой несовпадающих прямых l_1 и l_2 с уравнениями $F_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $F_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тогда и только тогда когда ее уравнение является нетривиальной линейной комбинацией уравнений l_1 и l_2: $F = \alpha F_1 + \beta F_2$.*

Доказательство. Рассмотрим случай собственного пучка: $l_1 \cap l_2 = P_0(x_0, y_0)$. Прямая l принадлежит этому пучку тогда и только тогда, когда $P_0 \in l$.

Необходимость. Пусть $P \neq P_0$ — произвольная точка l. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 \Leftrightarrow F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение не старше первой степени. При этом $F_1(P_0)$ и $F_2(P_0)$ не могут оба равняться 0. Так как (A_1, B_1) и (A_2, B_2) неколлинеарны, то получаем, что $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \neq 0$. Таким образом, это уравнение первой степени и задает прямую. Подставляя P и P_0 в $\widetilde{F}$, убеждаемся, что эта прямая через них проходит, т. е. является l. По теореме 5.5 данное выражение F

$$F = \lambda \widetilde{F} = (\lambda F_2(P_0)) \cdot F_1 + (\Leftrightarrow \lambda F_1(P_0)) \cdot F_2 = 0, \qquad \lambda \neq 0.$$

Достаточность. $F(P_0) = \alpha F_1(P_0) + \beta F_2(P_0) = 0$, $P_0 \in l$.

Рассмотрим случай несобственного пучка: $l_1 \| l_2$, $l_1 \neq l_2$.

Необходимость. Пусть P_0 — произвольная точка l. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 \Leftrightarrow F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение не старше первой степени. При этом $F_1(P_0)$ и $F_2(P_0)$ не равняются 0. Так как (A_1, B_1) и (A_2, B_2) коллинеарны, то получаем, что либо $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0$, либо этот вектор ненулевой и коллинеарен (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Поскольку $\widetilde{F} = 0$ имеет решения, например, P_0, то из $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = 0$ должно следовать $\widetilde{C} = 0$, т. е. F_1 и F_2 пропорциональны, а значит, по теореме 5.5 $l_1 = l_2$, что противоречит условиям. Таким образом, это уравнение первого порядка, задающее прямую, проходящую через P_0 и параллельную l_1 и l_2, т. е. l. Доказательство необходимости завершается так же, как и в собственном случае.

Достаточность. $F = \alpha F_1 + \beta F_2$, значит, (A, B) коллинеарен (A_1, B_1) и (A_2, B_2). Раз это уравнение прямой, то $(A, B) \neq 0$. Следовательно, $l \| l_1 \| l_2$. □

Следствие 5.14. *Три прямые $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5.1. Прямая на плоскости в прямоугольных координатах

Лемма 5.15. *Вектор $n := (A, B)$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$.*

Доказательство. Векторы, параллельные прямой, задаются уравнением (см. лемму 5.6) $A\alpha + B\beta = 0$ или (т. к. координаты прямоугольные) $\langle n, (\alpha, \beta) \rangle = 0$. □

Определение 5.16. Вектор $n = (A, B)$ называется *нормалью* к прямой $Ax + By + C = 0$. (Прямоугольная система координат и уравнение фиксированы.)

Предложение 5.17. *Расстояние от точки $P(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ равно*

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Пусть $P_1(x_1, y_1)$ — произвольная точка на прямой. Тогда

$$\rho(P, l) = |PP_1| \cdot \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{P_1P}, n}\right)\right| = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1P}, n\rangle|}{|n|} = \frac{|A(x_0 \Leftrightarrow x_1) + B(y_0 \Leftrightarrow y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|(Ax_0 + By_0 + C) \Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad \square$$

Определение 5.18. Уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ называется *нормальным,* если $A^2 + B^2 = 1$, т. е. вектор нормали $n = (A, B)$ имеет единичную длину.

Замечание 5.19. Каждая прямая имеет два нормальных уравнения. Они получаются из произвольного уравнения $Ax + By + C = 0$ как

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0.$$

Определение 5.20. Для нормального уравнения $F(x, y) = Ax + By + C = 0$ величина $F(x, y)$ называется *отклонением* точки (x, y) от прямой.

Имеем (для нормального уравнения)

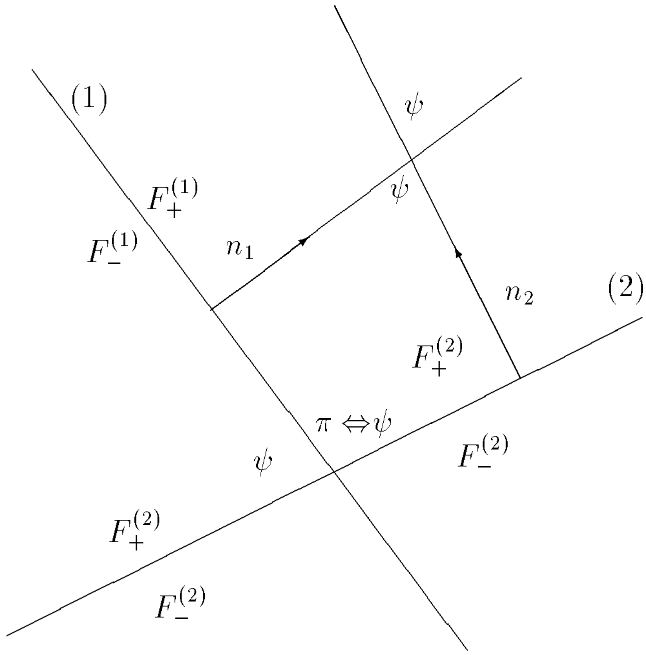
$$F(x, y) = \varepsilon \cdot \rho((x, y), l), \qquad \varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad (x, y) \in F_+ \\ \Leftrightarrow 1, & \text{если} \quad (x, y) \in F_- \end{cases}.$$

5.2. Угол между прямыми на плоскости

Пусть в прямоугольной системе координат две прямые имеют уравнения $A_1x + B_1y + C = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

$$\cos\varphi = \left|\frac{\langle n_1, n_2\rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Тогда (см. рис.)



формула

$$\cos\psi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

задает величину угла ψ между прямыми, равного пересечению $F_+^{(1)} \cap F_-^{(2)}$ (или $F_-^{(1)} \cap F_+^{(2)}$).

6. Плоскости и прямые в пространстве

6.1. Плоскости в пространстве

Пока система координат произвольная аффинная.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два линейно независимых вектора, параллельных плоскости. Это базис плоскости. Поэтому любой вектор однозначно представляется в виде их линейной комбинации. Следовательно, взяв произвольную точку плоскости с радиус-вектором $\vec{r}_0$, получим *параметрические уравнения плоскости*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b},$$

где s и t — параметры.

Из этих уравнений (или из геометрических соображений) ясно, что точка с радиус-вектором $\vec{r}$ лежит в плоскости тогда и только тогда, когда $\vec{r} \Leftrightarrow \vec{r}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$

компланарны, т. е. линейно зависимы. Переходя к аффинным координатам и вспоминая теорему из алгебры, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначая

$$A := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad C := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$D := -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \begin{vmatrix} -x_0 & -y_0 & -z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

преобразуем уравнение к виду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $(A, B, C) \neq 0$. Увидеть это можно, например, из следующего рассуждения. Допустим, a_i и b_j — координаты некоторых векторов $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ относительно прямоугольной системы координат $\varepsilon' = (e_1', e_2', e_3')$ положительной ориентации. Эти тройки чисел ненулевые непропорциональные, так что $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$ неколлинеарны. Значит, $[\vec{a}', \vec{b}'] \neq 0$. Но компоненты этого вектора (в ε') в точности равны (A, B, C).

Итак, $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение первого порядка. Оно называется *общим уравнением плоскости.*

Обратно, рассмотрим произвольное уравнение первого порядка $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда один из коэффициентов при переменных, например, A, не равен 0. Рассмотрим точку $M(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ и векторы $\vec{a} = (-B, A, 0)$ и $\vec{b} = (-C, 0, A)$. Векторы неколлинеарны, поэтому уравнение

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$$

задает плоскость, проходящую через точку M параллельно $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Но если мы распишем определитель, то получим в точности исходное уравнение.

Таким образом, плоскости в пространстве и алгебраические уравнения первого порядка от трех переменных — это одно и то же (никакой однозначности соответствия даже при фиксированной аффинной системе координат не утверждается).

Замечание 6.1. В полной аналогии со случаем прямой на плоскости, плоскость в пространстве, заданная уравнением $F(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$, разбивает пространство на два полупространства

$$F_+ = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) > 0\}, \qquad F_- = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) < 0\}.$$

Вектор (A,B,C) опять указывает на F_+.

Лемма 6.2. *Вектор (α,β,γ) параллелен плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ тогда и только тогда, когда $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.*

Доказательство. Аналогично прямой на плоскости. □

Теорема 6.3. *Плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) коллинеарны, т. е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Эти плоскости совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.*

Доказательство. Достаточность. Из условия пропорциональности следует, что множества решений уравнений $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma = 0$ и $A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma = 0$ совпадают, т. е. плоскостям параллельны одни и те же множества векторов, а значит, плоскости параллельны.

Необходимость. (Можно воспользоваться предыдущей леммой и фактом из теории линейных систем, однако приведем полное доказательство). Один из коэффициентов первого уравнения должен быть отличен от нуля. Без ограничения общности, это A_1. Тогда по лемме, неколлинеарные векторы $(-B_1, A_1, 0)$ и $(-C_1, 0, A_1)$ параллельны плоскости π_1 и, таким образом, образуют базис. Поскольку $\pi_1 \parallel \pi_2$, то

$$A_2 \cdot (-B_1) + B_2 \cdot A_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \qquad A_2 \cdot (-C_1) + B_2 \cdot 0 + C_2 \cdot A_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Перейдем ко второй эквивалентности. Достаточность очевидна.

Необходимость. По первой части $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ и $C_2 = \lambda C_1$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка совпадающих плоскостей, так что

$$0 = \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) - (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = \lambda D_1 - D_2.$$

Пропорциональность четверок установлена. □

Следствие 6.4. *Плоскости π_1 и π_2 (в обозначениях предыдущей теоремы) пересекаются (по прямой) тогда и только тогда, когда векторы (A_1,B_1,C_1) и (A_2,B_2,C_2) неколлинеарны.*

Определение 6.5. *Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую. *Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

Теорема 6.6. *Плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит пучку плоскостей, определяемому двумя несовпадающими плоскостями $F_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $F_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$, где α_1 и α_2 не равны одновременно нулю.*

Доказательство. Полностью аналогично случаю прямых. Напомним основные этапы.

Рассмотрим случай собственного пучка: $\pi_1 \cap \pi_2 = l$. Плоскость π принадлежит этому пучку тогда и только тогда, когда $l \subset \pi$.

Необходимость. Пусть $P_0 \notin l$ — произвольная точка π. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 \Leftrightarrow F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение первой степени так как (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) неколлинеарны (иначе не может быть собственным пучком). Таким образом, это уравнение задает плоскость. При этом l и P_0 в ней содержатся. Значит, это π. Дальше умножаем на константу.

Достаточность очевидна.

Рассмотрим случай несобственного пучка: $\pi_1 \| \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$.

Необходимость. Пусть P_0 — произвольная точка π, параллельной π_1 и π_2. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{F} := F_2(P_0) \cdot F_1 \Leftrightarrow F_1(P_0) \cdot F_2 = 0.$$

Это уравнение первой степени. Действительно, так как (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) коллинеарны, то либо $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}) = 0$, либо этот вектор ненулевой и коллинеарен (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2). Поскольку $\widetilde{F} = 0$ имеет решения, например, P_0, то из $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}) = 0$ должно следовать $\widetilde{D} = 0$, т. е. F_1 и F_2 пропорциональны, а значит, $\pi_1 = \pi_2$, что противоречит условиям. Таким образом, это уравнение первого порядка, задающее плоскость, проходящую через P_0 и параллельную π_1 и π_2, т. е. π. Доказательство необходимости завершается так же, как и в собственном случае.

Достаточность очевидна. □

Определение 6.7. *Собственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную точку. *Несобственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной прямой.

Замечание 6.8. Три любые плоскости, не принадлежащие одному пучку, однозначно определяют связку. (см. задачу из задачника о взаимном расположении трех плоскостей)

Теорема 6.9. *Плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит связке плоскостей, определяемому тремя несовпадающими плоскостями $F_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$ (в предположении, что в результате получилась плоскость, т. е. уравнение первого порядка), или, эквивалентно,*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Прежде всего покажем эквивалентность последних двух условий. В одну сторону очевидно. В другую: допустим, что определитель равен нулю (при условии связки). Тогда строки линейно зависимы. Допустим, что коэффициент при F равен нулю, т. е. зависимы уравнения $F_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$. Поскольку имеем связку, то такого быть не может (получаем, разобрав случаи).

Собственный случай. Пусть (x_0, y_0, z_0) — единственная точка пересечения трех плоскостей.

Достаточность. Если имеем линейную комбинацию, то из $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, следует, что и $F(x_0, y_0, z_0) = \alpha_1 F_1(x_0, y_0, z_0) + \alpha_2 F_2(x_0, y_0, z_0) + \alpha_3 F_3(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Необходимость. Пусть (x_0, y_0, z_0) — единственная точка пересечения всех четырех плоскостей. Тогда в указанной матрице из коэффициентов линейная комбинация столбцов с коэффициентами $(x_0, y_0, z_0, 1)$ нетривиальна и равна нулю. Значит, определитель равен нулю.

Несобственный случай. Пусть (α, β, γ) — направляющий вектор прямой, которой параллельны плоскости связки.

Достаточность. Если имеем линейную комбинацию, то из $A_i\alpha + B_i\beta + C_i\gamma = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, следует, что линейная комбинация $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\alpha + \ldots$ также равна нулю. Осталось воспользоваться критерием параллельности вектора и плоскости.

Необходимость. Линейная комбинация столбцов с коэффициентами $(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ равна 0, что влечет равенство нулю определителя. $\square$

6.2. Плоскость в прямоугольной системе координат

Предложение 6.10. *Рассмотрим плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $n := (A < B, C)$ перпендикулярен плоскости.*

Доказательство. Вектор (α, β, γ) параллелен плоскости тогда и только тогда, когда

$$0 = A\alpha + B\beta + C\gamma = \langle n, (\alpha, \beta, \gamma) \rangle,$$

т. е. вектор n перпендикулярен любому вектору плоскости π. $\square$

Определение 6.11. Этот вектор n, зависящий от системы координат и уравнения, называется *нормалью* к плоскости.

Теорема 6.12. *Пусть плоскость* π *имеет уравнение* $Ax + By + Cz + D = 0$, *а* P_0 *с координатами* (x_0, y_0, z_0) *— произвольная точка. Тогда*

$$\rho(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. Пусть $P_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка π. Тогда

$$\rho(P, \pi) = |PP_1| \cdot \left|\cos\left(\widehat{\overleftrightarrow{P_1P}, n}\right)\right| = \frac{|\langle \overleftrightarrow{P_1P}, n\rangle|}{|n|} = \frac{|A(x_0 \Leftrightarrow x_1) + B(y_0 \Leftrightarrow y_1) + C(z_0 \Leftrightarrow z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \square$$

Углы между плоскостями, нормальное уравнение и т. д. также определяютя и вычисляются полностью аналогично случаю прямых на плоскости.

6.3. Прямая в пространстве

Текущий вектор точки на прямой запишется в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$, где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки, а $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой (см. рис. 1).

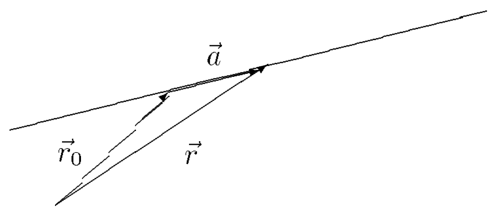


Рис. 1.

Если в координатах $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, то получаем *параметрические уравнения*

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

Без параметра они могут быть записаны как *канонические уравнения*

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{\alpha} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{\beta} = \frac{z \Leftrightarrow z_0}{\gamma}.$$

Заметим, что в пространстве прямая определяется уже двумя линейными уравнениями, иными словами, как пересечение двух плоскостей. Действительно, $\vec{a} \neq 0$, допустим, что $\alpha \neq 0$ и возникают две пересекающиеся плоскости

$$\begin{aligned} \beta(x \Leftrightarrow x_0) \Leftrightarrow \alpha(y \Leftrightarrow y_0) &= 0 \\ \gamma(x \Leftrightarrow x_0) \Leftrightarrow \alpha(z \Leftrightarrow z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Обратно, пусть имеем пересечение двух плоскостей, т. е. систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

причем (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) неколлинеарны.

Предложение 6.13. *В этом случае направляющий вектор прямой пересечения равен*

$$(\alpha, \beta, \gamma) := \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Доказательство. Заметим, что указанный вектор не является векторным произведением, так как система координат не обязана быть прямоугольной.

Надо доказать, что (1) указанный вектор является ненулевым и (2) он параллелен плоскостям, т. е.

$$\begin{cases} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0 \\ A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0 \end{cases}$$

Начнем с (2):

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, для второго уравнения.

(1). Допустим, что вектор нулевой. Тогда

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{A_1}{A_2}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

и векторы (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) коллинеарны. Противоречие. (Можно также доказывать, рассуждая с векторным произведением в другой системе координат.)
□

6.4. Некоторые формулы в прямоугольной системе координат

1. Угол между прямыми с параметрическими уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \cdot t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \cdot t$:

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

2. Угол между прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми с параметрическими уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 \cdot t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \cdot t$. Построим параллелепипед со сторонами $\vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{r}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Тогда искомое расстояние — высота этого параллелепипеда:

$$\rho = \frac{V}{S} = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{r}_2 \rangle|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|} = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} x_1 \Leftrightarrow x_2 & y_1 \Leftrightarrow y_2 & z_1 \Leftrightarrow z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

4. Расстояние от точки с радиус-вектором $\vec{r}_1$ до прямой с параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$. Построим параллелограмм со сторонами $\vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{r}_0$ и $\vec{a}$. Тогда искомое расстояние — высота этого параллелелограмма:

$$\rho = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 \Leftrightarrow y_0 & z_1 \Leftrightarrow z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 \Leftrightarrow z_0 & x_1 \Leftrightarrow x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 \Leftrightarrow x_0 & y_1 \Leftrightarrow y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

7. Замены координат

Напомним, что аффинная система координат в пространстве задается репером $Oe_1e_2e_3$, а точка M приобретает координаты (x, y, z), если $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Рассмотрим также другой репер $O'e_1'e_2'e_3'$ и соответствующую систему координат. Разложим новые векторы по старому базису:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' & = & c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' & = & c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' & = & c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

Определение 7.1. *Матрицей перехода* от $Oe_1e_2e_3$ к $O'e'_1e'_2e'_3$ называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

т. е. такая матрица, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Замечание 7.2. Как было показано, напрмер, при определении ориентации, $e'_1e'_2e'_3$ является базисом тогда и только тогда, когда C невырождена, т. е. $\det C \neq 0$.

Напомним некоторые определения и свойства операций над матрицами. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица $m \times n$, так что в ней m строк и n столбцов, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $B = \|b_{kl}\|$ — матрица $n \times p$. *Произведением матриц* A и B (число столбцов A должно совпадать с числом строк B) называется матрица C размера $m \times p$, матричные элементы которой определяются форрмулой

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

("умножение i-й строки A на j-й столбец B").

Транспонированной матрицей к матрице A называется такая матрица $A^T = \|a^T_{ij}\|$ размера $n \times m$, что $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Выполняется следующие свойства (во все пунктах, кроме первого, матрицы квадратные):

1) $(AB)^T = B^T A^T$,

2) $\det A^T = \det A$,

3) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,

4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (если обратная матрица существует).

Теорема 7.3. *Координаты точки в старой и новой системе координат связаны соотношениями*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где C — матрица перехода от старого базиса к новому, (x_0, y_0, z_0) — координаты O' (нового начала координат) в старой системе координат, (x, y, z) и (x', y', z') — координаты данной точки в старой и новой системах координат, соответственно.

Доказательство. Обозначим данную точку через M. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \qquad \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 + z'\vec{e}\,'_3 =$$

$$= x'(c_{11}\,\vec{e}_1 + c_{21}\,\vec{e}_2 + c_{31}\,\vec{e}_3) + y'(c_{12}\,\vec{e}_1 + c_{22}\,\vec{e}_2 + c_{32}\,\vec{e}_3) + z'(c_{13}\,\vec{e}_1 + c_{23}\,\vec{e}_2 + c_{33}\,\vec{e}_3) =$$

$$= (x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})\,\vec{e}_1 + (x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})\,\vec{e}_2 + (x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})\,\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OM} = (x_0 + x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})\,\vec{e}_1 +$$

$$+(y_0 + x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})\,\vec{e}_2 + (z_0 + x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})\,\vec{e}_3. \qquad \square$$

Следствие 7.4. *Координаты векторов в старой и новой системах связаны соотношениями:*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}.$$

Замечание 7.5. Всякое соотношение вида (1) с невырожденной матрицей C может быть проинтерпретировано как переход к некоторой новой системе координат. В частности, применяя к координатам базисных векторов, получаем однозначность.

Теорема 7.6. *Пусть C — матрица перехода от $Oe_1e_2e_3$ к $Oe'_1e'_2e'_3$, а D — матрица перехода от $Oe'_1e'_2e'_3$ к $Oe''_1e''_2e''_3$. Тогда CD — матрица перехода от $Oe_1e_2e_3$ к $Oe''_1e''_2e''_3$.*

Доказательство. (Фактически это первое свойство транспонирования.)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = CD \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \qquad \square$$

7.1. Прямоугольные системы координат и ортогональные матрицы

Определение 7.7. Квадратная матрица C называется *ортогональной*, если $C^T = C^{-1}$, т. е. $C^TC = E$ и $CC^T = E$.

Теорема 7.8. *Матрица C является ортогональной тогда и только тогда, когда она является матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.*

Доказательство. Рассмотрим соотношение $C^T C = E$. В матрице C^T в i-й строке записаны координаты $\vec{e}\,'_i$ в базисе $\vec{e}_j$ (так же, как и в i-м столбце C). Поэтому, если $\vec{e}_j$ — произвольный ортонормированный базис, то правило умножения матриц "строка на столбец" запишется как

$$\langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j \rangle = E_{ij} = \delta_{ij},$$

а это и есть условие ортонормированности базиса $\vec{e}\,'_j$. $\square$

Утверждение 7.9. *Ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов:*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Угол φ можно считать принадлежащим $[0, 2\pi)$.

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу как матрицу перехода от ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к ортонормированному базисау $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$. Тогда вектор $\vec{e}\,'_1$ имеет координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ для некоторого φ. Перпендикулярный ему вектор единичной длины (два) равен $(\mp\sin\varphi, \pm\cos\varphi)$. $\square$

Замечание 7.10. В первом случае $\det 1$, а геометрический смысл — поворот на угол φ. Во втором случае $\det C = -1$, а геометрический смысл — композиция поворота на угол φ и симметрии относительно $\vec{e}_1$, повернутого на угол φ.

Утверждение 7.11. *Определитель ортогональной матрицы C любого порядка равен* ± 1.

Доказательство. $1 = \det E = \det(C^T C) = \det(C^T)\det C = (\det C)^2$. $\square$

Определение 7.12. Ортогональная матрица с определителем $+1$ называется *специальной ортогональной.* Множество таких матриц размерности $n \times n$ обозначается $SO(n)$.

Замечание 7.13. Мы показали, что $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$. Описание $SO(3)$ составляет содержание следующего пункта.

7.2. Углы Эйлера

Рассмотрим переход от прямоугольной системы $Oe_1e_2e_3$ к прямоугольной системе $Oe'_1e'_2e'_3$. Считаем, что они одинаковой положительной ориентации. Если $\vec{e}\,'_3 = \vec{e}_3$, то все сводится к замене координат на плоскости с $\det = +1$. Если $\vec{e}\,'_3 = -\vec{e}_3$, то все сводится к замене координат на плоскости с $\det = -1$. Таким образом, можем считать, что векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}\,'_3$ неколлинеарны. Это нормальные векторы к плоскостям $\pi = Oe_1e_2$ и $\pi' = 0e'_1e'_2$. Тогда $\vec{f} := \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}\,'_3]}{\|[\vec{e}_3, \vec{e}\,'_3]\|}$ является направляющим вектором прямой d пересечения этих плоскостей. Произведем переход от репера

$Oe_1e_2e_3$ к $Ofge_3$, сохраняя ориентацию. Это вращение вокруг $\vec{e}_3$ на некоторый угол φ (угол от $\vec{e}_1$ к $\vec{f}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$). Таким образом, соответствующая матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \Leftrightarrow\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем вращение вокруг $\vec{f}$ так, чтобы $\vec{e}_3$ совместился с $\vec{e}\,'_3$. В силу выбора направления $\vec{f}$ это вращение на угол $\theta \in [0, \pi]$. Получаем переход к некоторому реперу $Ofhe'_3$, причем плоскость Ofh совпадает с $Oe'_1e'_2$, а матрица его равна

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \Leftrightarrow\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Осталось осуществить вращение вокруг $\vec{e}\,'_3$ (т. е. в плоскости $Ofh = Oe'_1e'_2$), чтобы совместить $\vec{f}$ с $\vec{e}\,'_1$. При этом, в силу согласованности ориентаций, образ $\vec{e}_2$ перейдет в $\vec{e}\,'_2$. Соответствующая матрица перехода

$$F = \begin{pmatrix} \cos\psi & \Leftrightarrow\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi \in [0.2\pi).$$

В силу теоремы 7.6, результирующая матрица перехода от $Oe_1e_2e_3$ к $Oe'_1e'_2e'_3$ равна

$$CDF = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \Leftrightarrow\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \Leftrightarrow\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \Leftrightarrow\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \Leftrightarrow\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & \Leftrightarrow\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \Leftrightarrow\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \Leftrightarrow\sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \Leftrightarrow\cos\varphi\sin\psi \Leftrightarrow\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \Leftrightarrow\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \Leftrightarrow\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол от $\vec{e}_1$ к $\vec{f}$, $\psi \in [0, 2\pi)$ — угол от $\vec{f}$ к $\vec{e}\,'_1$, а $\theta \in [0, \pi]$ — угол между $\vec{e}_3$ и $\vec{e}\,'_3$.

8. Полярные, сферические и цилиндрические координаты

Определение 8.1. *Полярная система координат* на ориентированной плоскости задается выбором точки O, называемой *началом* или *полюсом,* и луча, выходящего из точки O, называемого *полярной осью.*

Полярные координаты точки M — это *радиус,* равный расстоянию от M до полюса: $r = |OM|$, и *угол* φ, равный углу между полярной осью и лучом OM, причем угол измеряется в соответствии с ориентацией (таким образом φ является вещественным числом, определенным с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$). Для точки O угол φ не определяется, так что полярные координаты в этой точке не определены.

Если у нас имеется положительный прямоугольный репер, начало координат которого совпадает с полюсом, а вектор $\vec{e}_1$ направлен по полярной оси, то говорят, что данные прямоугольная и полярная системы координат *естественно связаны.*

Непосредственно из определения получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.2. *Для естественно связанных прямоугольной и декартовой систем координат имеют место следующие формулы, выражающие одни через другие:*

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{cases}$$

Обратно, $r = \sqrt{x^2+y^2}$*, а* φ *(с точностью до угла* $2\pi k$ *) определяется формулами*

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

или

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{при} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{при} \quad x < 0, \\ \pi/2, & \text{при} \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & \text{при} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

В пространстве имеются два естественных обобщения полярной системы координат. Выберем в пространстве

1) ориентированную плоскость π (*экваториальная плоскость*),

2) точку O на ней (*полюс*),

3) луч Ox на плоскости (*полярная ось*),

4) перпендикулярную к π ось Oz (*зенитная ось*).

Для произвольной точки M пространства обозначим через M' ее ортогональную проекцию на π, а через M'' — ее ортогональную проекцию на Oz.

Цилиндрические координаты (ρ, φ, z) точки M определяются следующим образом: ρ, φ — полярные координаты M' на плоскости π (т. е. $\rho = |OM'I$, φ — угол от Ox к OM'), а z — координата M'' на оси Oz. Для точек зенитной оси $\rho = 0$, а координата φ не определена.

Сферические координаты (r, φ, θ) точки M определяются следующим образом:

- $r = |OM|$ (*радиус*),

- φ — угол от Ox к OM' (*долгота*),
- θ — угол от OM' к OM (со знаком соответствия направлению Oz) (*широта*), $\theta \in [\Leftrightarrow\pi/2, \pi/2]$.

Для точек зенитной оси $\theta = \pm\pi/2$, а координата φ не определена. Для точки O: $r = 0$, а φ и θ не определены.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oe_1e_2e_3$, где $\vec{e}_1$ имеет направление Ox, $\vec{e}_2 \in \pi$, причем ориентация $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ положительна для плоскости π, а $\vec{e}_3$ имеет направление оси Oz. Говорят, что данная прямоугольная система координат естественно связана с указанными выше сферической и цилиндрической.

Тогда прямоугольные и цилиндрические координаты связаны формулами:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \rho\ \cos\varphi, \\ y &=& \rho\ \sin\varphi, \\ z &=& z, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} z &=& z, \\ \rho &=& \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi &=& \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &=& \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{array}\right.$$

(конечно, можно получить более конкретные выражения, как для полярных координат).

Прямоугольные и сферические координаты связаны формулами:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \rho\ \cos\theta\ \cos\varphi, \\ y &=& \rho\ \cos\theta\ \sin\varphi, \\ z &=& \rho\ \sin\theta, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta &=& \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\varphi &=& \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &=& \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{array}\right.$$

(поскольку $r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}$).

9. Эллипс, гипербола и парабола (ЭГП)

9.1. Геометрическое определение ЭГП

Определение 9.1. *Эллипсом* называется геометрическое место точек (ГМТ) X на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна заданному числу (см. рис. 2):

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами.*

Предполагается, что $a > c \geq 0$, где $2c = |F_1F_2|$. В случае $a = c$ получаем отрезок, а в случае $c = 0$ — окружность.

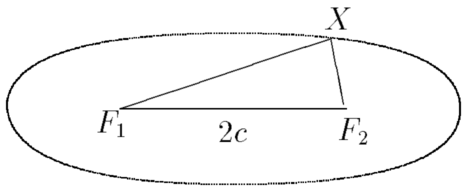


Рис. 2.

Определение 9.2. *Гиперболой* называется ГМТ X на плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 равен заданному числу (см. рис. 3):

$$\Big| |F_1X| \Leftrightarrow |F_2X| \Big| = 2a.$$

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами.*

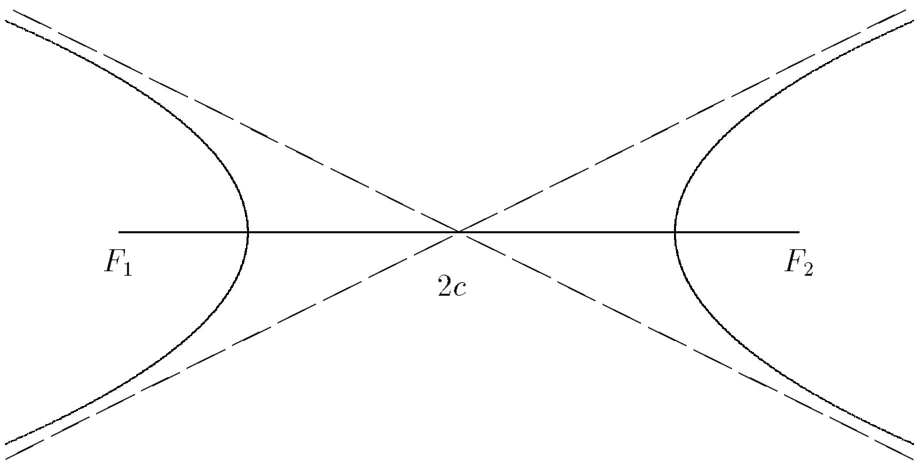


Рис. 3.

Предполагается, что $c > a > 0$, где $2c = |F_1F_2$. В случае $a = c$ получаем два противонаправленных луча, выходящих из фокусов.

Определение 9.3. *Параболой* называется ГМТ X на плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой *фокусом,* и прямой d, называемой директрисой (см. рис. 4). Предполагается, что $F \notin d$.

9.2. ЭГП как конические сечения

Теорема 9.4. *Сечение прямого кругового (бесконечного в обе стороны) конуса*

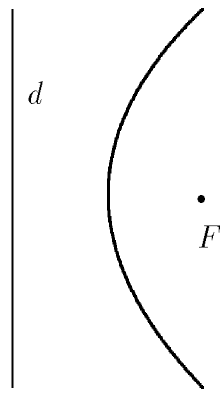


Рис. 4.

плоскостью, не проходящей через вершину, является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой.

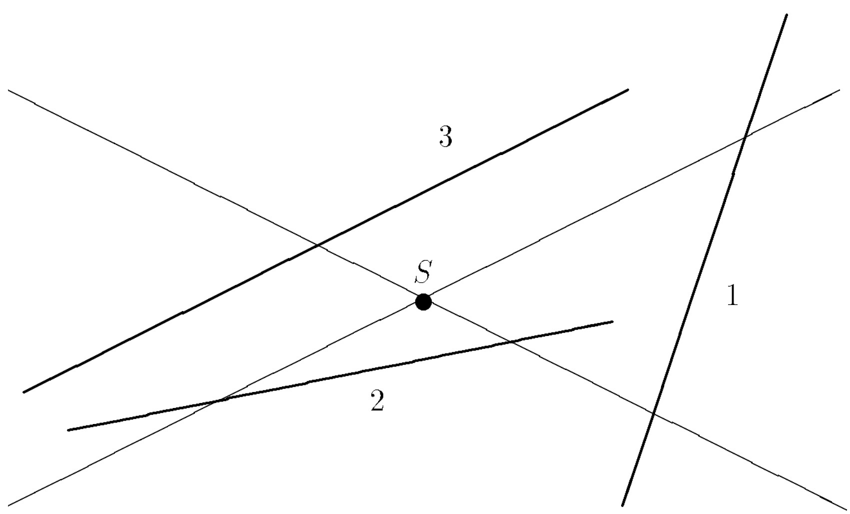
Доказательство. Указанная плоскость может располагаться тремя способами:

1) пересекать одну половинку конуса;

2) пересекать обе половинки конуса;

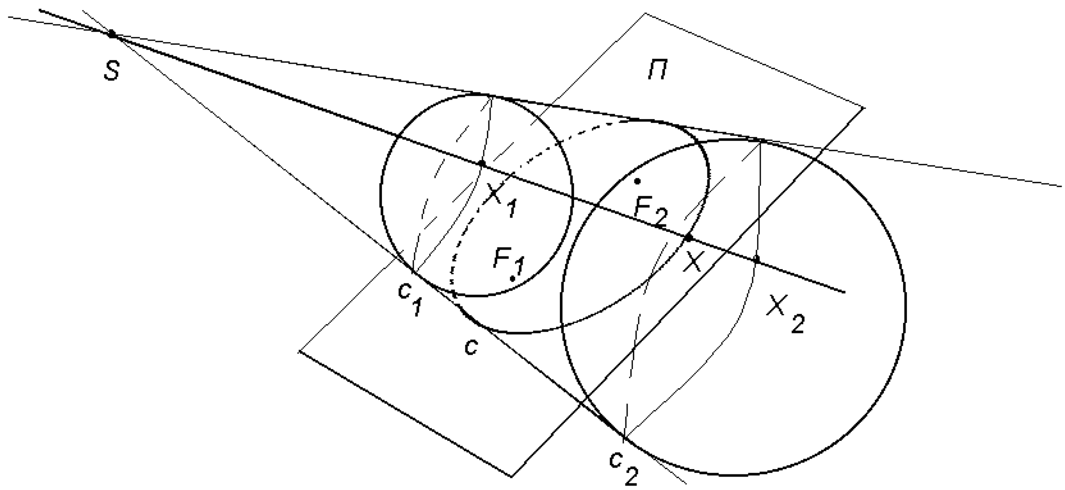
3) быть параллельной образующей конуса.

На рисунке изображено сечение плоскостью, проходящей через вершину, и перпендикулярной данной (так что данная плоскость изображается прямой):



Более точно, мы докажем, что в случае 1 получается эллипс, 2 — гипербола и 3 — парабола. Основным геометрическим инструментом будут шары Данделена — шары, вписанные в конус и касающиеся данной плоскости.

Первый случай. Пусть c — интересующее нас сечение конуса плоскостью Π. Обозначим через F_1 и F_2 точки касания шаров Данделена и плоскости Π, а через c_1 и c_2 — окружности касания шаров с конусом. Пусть X — произвольная точка на сечении c. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения SX с c_1 и c_2 соответственно.

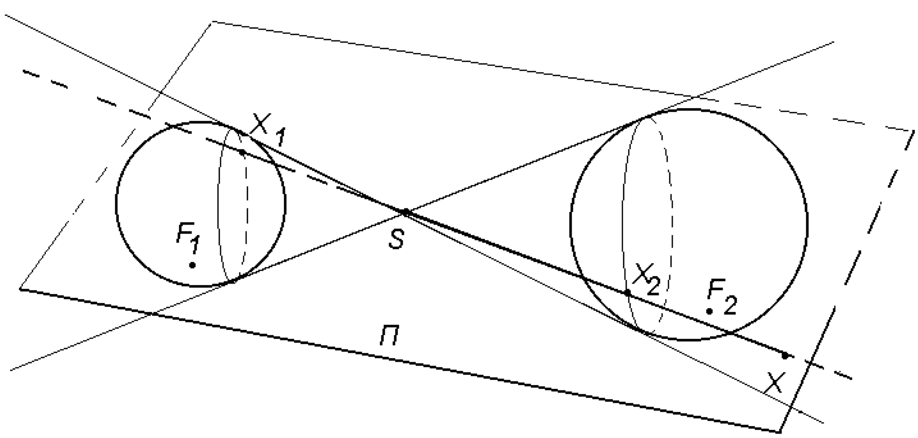


Тогда (равны касательные, проведенные к шару из одной точки)

$$|XF_1| = |XX_1|, \qquad |XF_2| = |XX_2|,$$

$$|XF_1| + |XF_2| = |XX_1| + |XX_2| = |X_1X_2| = \text{const}.$$

Второй случай. Сохраним прежние обозначения.

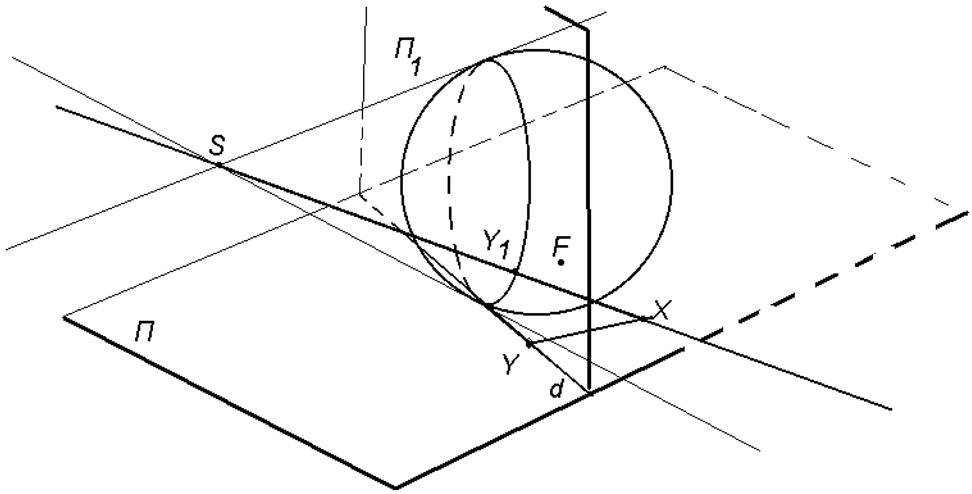


Тогда (равны касательные, проведенные к шару из одной точки)

$$|XF_1| = |XX_1|, \qquad |XF_2| = |XX_2|,$$

$$\Big|\,|XF_1| \Leftrightarrow |XF_2|\,\Big| = \Big|\,|XX_1| \Leftrightarrow |XX_2|\,\Big| = |X_1X_2| = \mathrm{const}.$$

Третий случай. В этом случае шар Данделена только 1.



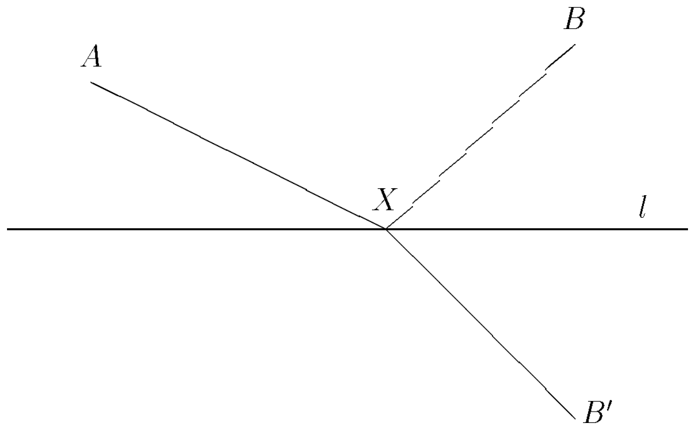
Пусть c_1 — окружность касания шара с конусом, Π_1 — плоскость, содержащая эту окружность, прямая $d = \Pi \cap \Pi_1$, Y — проекция произвольной точки X исследуемого сечения на d, Y_1 — точка персечения SX с c_1. Как касательные к шару, проведенные из одной точки, равны $|XF| = |XY_1|$. Далее, SY_1, а следовательно, и XY_1 наклонена к плоскости Π_1 под углом $\pi/2 \Leftrightarrow \alpha$, где α — угол между образующей конуса и его осью. С другой стороны, YX параллельна той единственной образующей конуса, которой параллельна плоскость Π. Значит, она образует с Π_1 также угол $\pi/2 \Leftrightarrow \alpha$. Следовательно, $|XY_1| = |XY|$ как наклонные к плоскости Π_1 из одной точки под одним углом. Таким образом, $|XF| = |XY|$. $\square$

Определение 9.5. В соответствии с этой теоремой ЭГП еще называют *кониками.*

Замечание 9.6. Позже мы докажем теорему более общего характера: сечение поверхности второго порядка плоскостью является кривой второго порядка.

9.3. Оптические (фокальные) свойства коник

Замечание 9.7. Решим вспомагательную задачу: для данной прямой l и двух точек A и B, лежащих по одну сторону от нее, найти такую точку $X \in l$, что сумма расстояний $|XA| + |XB|$ минимальна. Построим точку B', симметричную B относительно l.



Ясно, что $|AX| + |XB'|$ минимально при $X = (AB') \cap l$. Но $|XB| = |XB'|$, так что минимум достигается при равенстве острых углов, образуемых AX и BX с l.
Замечание 9.8. Каждая из коник имеет в каждой своей точке касательную. Точка касания является единственной точкой пересечения коники и касательной. Касательная является единственной прямой, удовлетворяющей этому требованию (кроме прямых, параллельных оси параболы). Интуитивно эти утверждения очевидны, но строгое рассуждение требует знания уравнений коник и способа нахождения касательной по уравнению (а также доказательства, что после подходящей замены координат эта "алгебраически" определенная касательная станет "касательной к графику"). После этого можно аналитически найти точку пересечения (решить систему) и убедиться что она ровно одна. Необходимый материал (конечно, не использующий результатов данного пункта) будет разобран позже.
Замечание 9.9. Основное правило оптики кривых: луч отражается от кривой как от ее касательной.

Теорема 9.10.
- *Лучи, выходящие из одного фокуса* **эллипса,** *концентрируются в другом.*
- *Лучи, выходящие из одного фокуса* **гиперболы,** *после отражения "исходят" из другого, т. е. продолжение отраженного луча за точку отражения попадает в другой фокус.*
- *Лучи, выходящие из фокуса* **параболы,** *после отражения становятся параллельными друг другу.*

Доказательство. Эллипс. Пусть луч вышел из фокуса A и, отразившись от точки X эллипса, не попал в другой фокус B. Значит, если l — касательная в точке X, то угол падения на l не равен углу отражения по замечанию 9.9. Значит, по замечанию 9.7, $|AX| + |BX|$ не минимально при пробегании X по l. Но это противоречит геометрическому определению эллипса, так как остальные точки касательной лежат вне его (по замечанию 9.8).

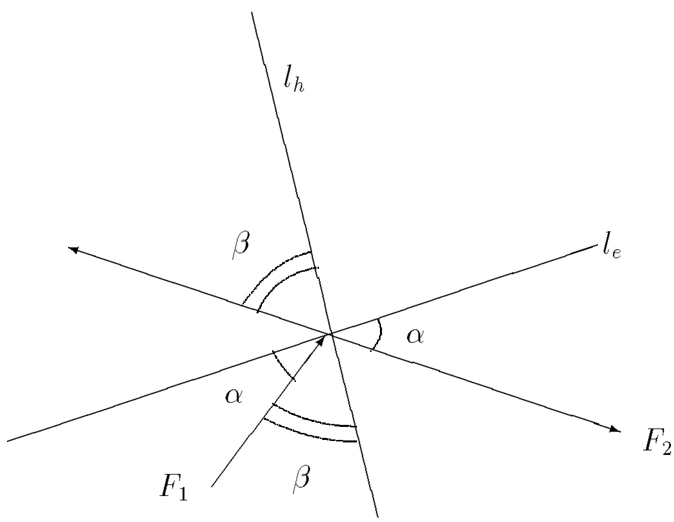
Гипербола. Аналогично эллипсу.

Парабола. Рассмотрим параболу с фокусом F и директрисой d. Пусть l — серединный перпендикуляр к YF. По определению параболы, треугольник равнобедренный и l проходит через X. Докажем, что l является касательной к параболе в точке X. Предположим противное, тогда (по замечанию 9.8) имеется еще одна точка пересечения l с параболой — $X' \neq X$, а Y' — ее проекция на директрису d. Тогда (по свойству серединного перпендикуляра) $|YX'| = |X'F$, а так как X' — точка параболы, то $|Y'X'| = |X'F|$. Значит, $|X'Y'| = |X'Y|$, но длина наклонной должна быть больше длины перпендикуляра. Таким образом, l является касательной.

При этом углы между YX и l и между FX и l равны, так что отраженный луч лежит на продолжении $YX \perp d$. $\square$

Следствие 9.11. *Эллипс и парабола с общими фокусами пересекаются под прямым углом.*

Доказательство. Пусть l_e и l_h — касательные в точке пересечения к эллипсу и гиперболе, соответственно. По доказанной теореме, углы будут такими, как обозначено на рисунке:



Следовательно, $2\alpha + 2\beta = \pi$ и $\alpha + \beta = \pi/2$. $\square$

9.4. Аналитические определения коник

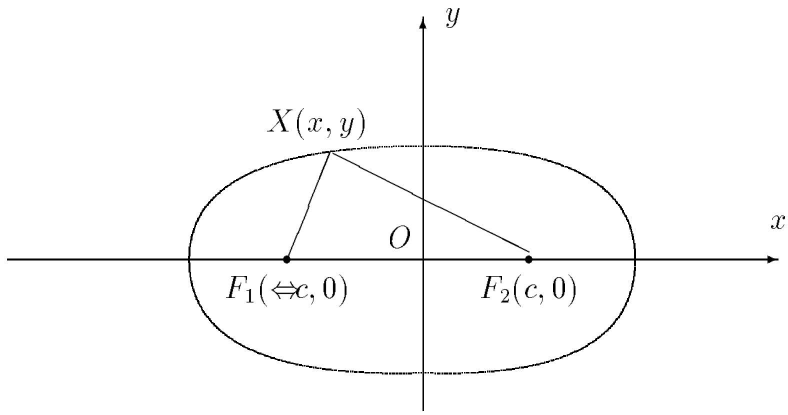
Определение 9.12. **(аналитичесое определение ЭГП)** *Эллипсом* называется кривая второго порядка, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a \geq b); \tag{2}$$

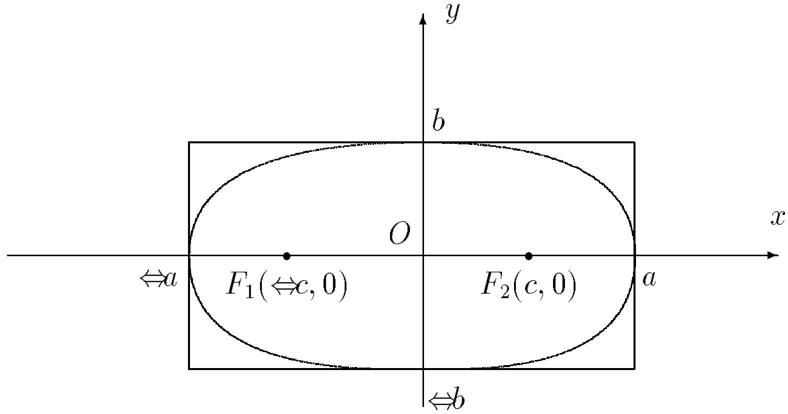
гиперболой —
$$\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (3)$$
параболой —
$$y^2 = 2px, \qquad (p > 0). \qquad (4)$$

Теорема 9.13. *Аналитические и геометрические определения ЭГП эквивалентны.*

Доказательство. Эллипс. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке



Тогда геометрическое определение $\{X \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$ перепишется в виде
$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x \Leftrightarrow c)^2 + y^2},$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x \Leftrightarrow c)^2 + y^2},$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x \Leftrightarrow c)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x \Leftrightarrow c)^2 + y^2},$$
$$a^2 \Leftrightarrow cx = a\sqrt{(x \Leftrightarrow c)^2 + y^2},$$
$$a^4 \Leftrightarrow 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 \Leftrightarrow 2a^2cx + a^2y^2,$$
$$a^4 \Leftrightarrow a^2c^2 = (a^2 \Leftrightarrow c^2)x^2 + a^2y^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 := a^2 \Leftrightarrow c^2. \qquad (5)$$
Непосредственно из уравнения видно, что эллипс заключен в прямоугольник, причем на границе его лежат лишь точки пересечения с осями:



Этот прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется *основным прямоугольником* эллипса.

Обратно, пусть точка (x, y) удовлетворяет уравнению (5), т. е.

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Тогда

$$r_1 := \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2} =$$

$$= \left|\frac{c}{a}\,x + a\right| = a + \frac{c}{a}\,x,$$

где выражение под знаком модуля положительно, так как $|x| < a$, $\left|\frac{c}{a}\,x\right| < c$. Аналогично,

$$r_2 = a - \frac{c}{a}\,x.$$

Таким образом, для любой точки, удовлетворяющей уравнению (5) выполняется $r_1 + r_2 = 2a$, т. е. она принадлежит геометрическому эллипсу.

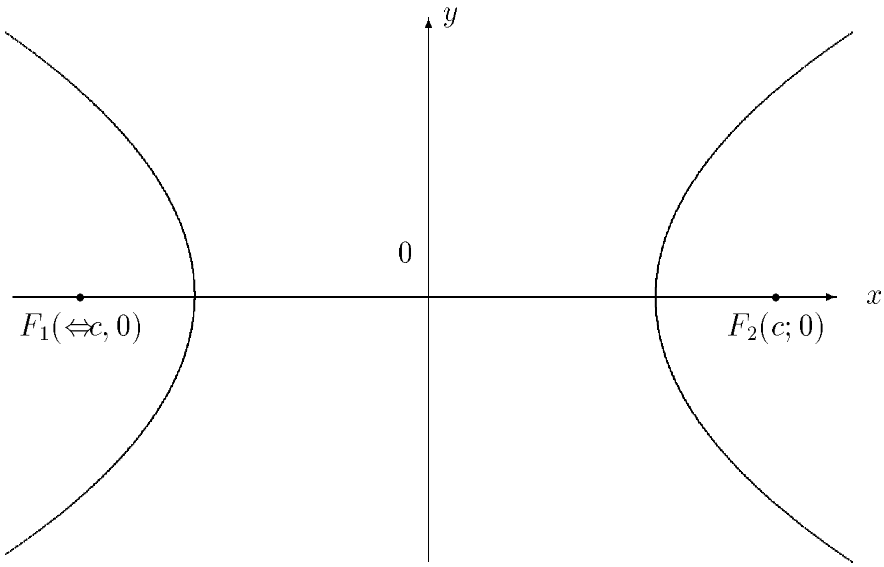
Прежде, чем перейти к случаю гиперболы, дадим следующее определение.

Определение 9.14. Отношение

$$e := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса.

Гипербола. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке



Аналогично эллипсу, упрощая соотношение $|r_1 - r_2| = 2a$ из определения гиперболы, приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 := c^2 - a^2. \tag{6}$$

Для гиперболы положим *эксцентриситет* равным

$$e := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Таким образом для эллипса $e > 1$, а для гиперболы $e < 1$.

Обратные вычисления проводим так же, как и для эллипса, и получаем

$$r_1 = |a + ex|, \qquad r_2 = |a - ex|,$$

причем для правой ветви гиперболы (т. е. при $x > 0$)

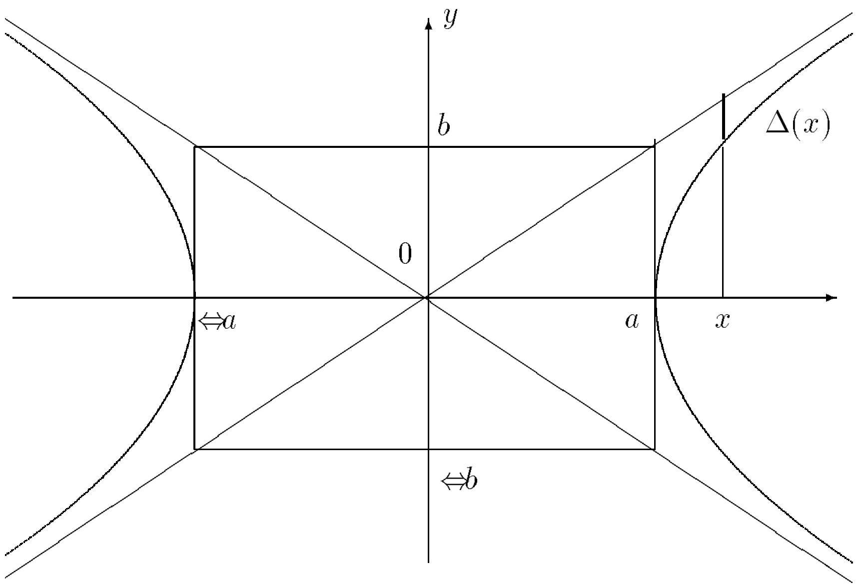
$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = -a + ex,$$

а для левой ветви гиперболы (т. е. при $x < 0$)

$$r_1 = -a - ex, \qquad r_2 = a - ex,$$

что и завершает обратное рассуждение.

Основной прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ для гиперболы имеет вид



Его диагонали имеют уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x$$

и являются асимптотами гиперболы. Докажем это, например, для $y = \frac{b}{a}\, x$. Имеем (см. рис.)

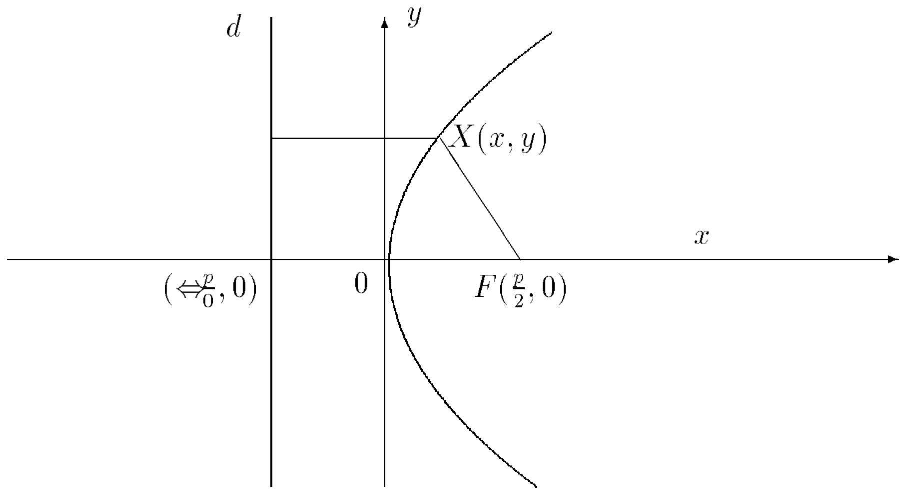
$$\Delta(x) = \frac{b}{a}\, x \Leftrightarrow b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow 1},$$

$$\lim_{x \to \infty} \Delta(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{b}{a}\, (x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 \Leftrightarrow a^2}) = 0.$$

Парабола. Для параболы положим *эксцентриситет* равным единице: $e = 1$.

Заметим, что в школе обычно рассматривают параболу $y = a\, x^2$. Тут мы меняем оси и переобозначаем параметр: $a = 1/2p$. Получаем $y^2 = 2px$. Число p называется *фокальным параметром.*

Выберем систему координат, как показано на рисунке, положив p равным расстоянию между директрисой и фокусом.



Тогда соотношение из геометрического определения параболы примет вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px.$$

Обратно, для кривой, определяемой уравнением $y^2 = 2px$, обозначим через d прямую $y = -p/2$, а через F — точку $(p/2, 0)$. Заметим, что для точек этой кривой всегда $x \geq 0$, так что для произвольной ее точки $X(x, y)$ имеем $\rho(X, d) = p/2 + x$, а

$$\rho(X, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right) + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2},$$

и геометрическое определение параболы имеет место.

9.5. Директориальные свойства коник

Составим следующую таблицу (где новым будет только определение директрис эллипса и гиперболы).

	уравнение	c	фокус(ы)	эксцентриситет	директриса
эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$F_{1,2} = (\pm c, 0)$	$e = \frac{c}{a} < 1$	$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$
гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$F_{1,2} = (\pm c, 0)$	$e = \frac{c}{a} > 1$	$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$
парабола	$y^2 = 2px$	—	$F = (\frac{p}{2}, 0)$	$e = 1$	$x = \pm\frac{a}{e}$

Заметим, что для окружности (т. е. эллипса с $a = b$ и $e = 0$) директрисы не определены.

Теорема 9.15. *Отношение расстояния от точки коники (отличной от октужности) до фокуса к расстоянию до соответствующей (ближайшей) директрисы постоянно и равно эксцентриситету.*

Доказательство. Для параболы это определение.

Рассмотрим случай эллипса. Тогда (для левого фокуса, в обозначениях предыдущей теоремы) $|F_1X| = r_1 = a + ex$, а $\rho(X, d_1) = \left|x + \frac{a}{e}\right| = x + \frac{a}{e}$, так что

$$\frac{|F_1X|}{\rho(X,d)} = e.$$

Для гиперболы надо лишь в двух местах поменять знаки. $\square$

Задача 1. Доказать обратное утверждение. Именно, пусть дана прямая d и точка $F \notin d$. Доказать, что ГМТ X, удовлетворяющих $\dfrac{|FX|}{\rho(X,d)} = e > 0$, является эллипсом (при $e < 1$), гиперболой (при $e > 1$) или параболой (при $e = 1$).

Задача 2. Дать геометрическое доказательство директориального свойства, используя шары Данделена.

9.6. Фокальный параметр. Полярные уравнения коник

Определение 9.16. *Фокальный параметр* p коники, соответствующий уравнению (2), (3) или (4), это число p из уравнения в случае параболы, и число

$$p := \frac{b^2}{a}$$

в двух других случаях.

Таким образом, на первый взгляд, p зависит от уравнения. Однако, фокальный параметр имеет простой геометрический смысл (см. теорему 9.18)

Определение 9.17. *Фокальной хордой* называется хорда (т. е. отрезок, соединяющий две точки кривой), проходящий через фокус перпендикулярно *фокальной оси* — оси симметрии, содержашей один фокус (а значит, и второй, если их два).

Теорема 9.18. *Фокальный параметр p равен половине длины фокальной хорды.*

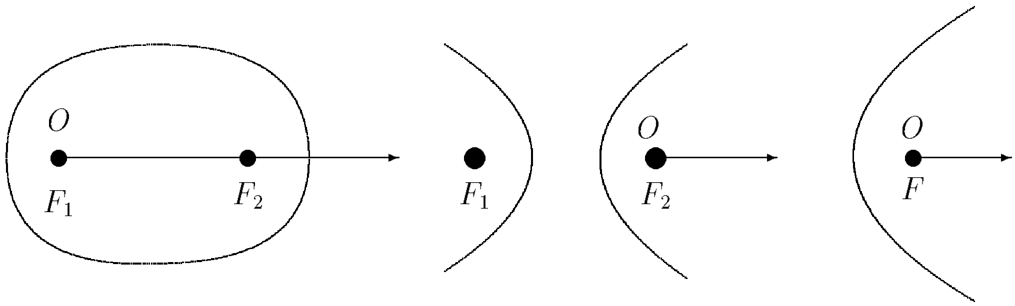
Доказательство. Половина длины фокальной хорды равна для ЭГП соответственно:

$$\sqrt{b^2\left(1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}\right)} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a},$$

$$\sqrt{b^2\left(\frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow 1\right)} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{a},$$

$$\sqrt{2p\frac{p}{2}} = p. \qquad \square$$

Введем полярную систему координат, поместив полюс в случае эллипса в один из фокусов и направив полярную ось в сторону другого, поместив полюс в случае гиперболы в один из фокусов и направив полярную ось в сторону другого, а в случае параболы поместив полюс в фокус и направив полярную ось от директрисы:



Ориентация здесь не важна, так как интересующие нас коники симметричны относительно указанной полярной оси. Введенная полярная система координат не является естественно связанной с прямоугольной системой, в которой мы выписывали уравнения. Поэтому мы будем называть ее *фокальной полярной системой координат.*

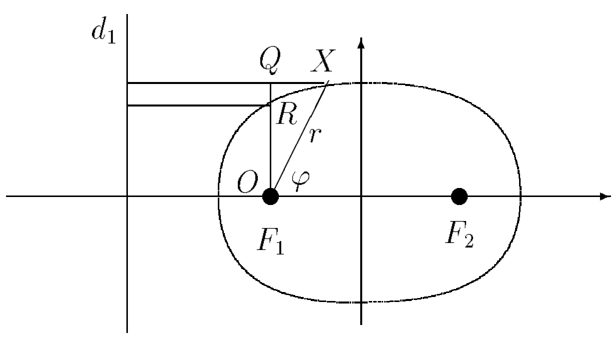
Теорема 9.19. *В фокальной полярной системе координат уравнения эллипса, параболы и ветви гиперболы, ближайшей к полюсу, будут записываться одной формулой:*

$$r = \frac{p}{1 \Leftrightarrow e\cos\varphi},$$

а уравнение другой ветви гиперболы —

$$r = \Leftrightarrow \frac{p}{1 \Leftrightarrow e\cos\varphi}.$$

Доказательство. Проведем для эллипса. Пусть X — произвольная точка эллипса, OR — половина фокальной хорды, Q — точка пересечения ее продолжения с перпендикуляром к директрисе, проведенным через точку X:



Пусть (r,φ) — полярные координаты точки X. Воспользуемся директориальным свойством. Имеем:

$$|OR| = p, \qquad |QX| = r\cos\varphi, \qquad \frac{|OR|}{\rho(R,d_1)} = e,$$

$$\rho(Q,d_1) = \rho(R,d_1) = \frac{|OR|}{e} = \frac{p}{e},$$

$$e = \frac{r}{\rho(X,d_1)} = \frac{r}{|XQ| + \rho(Q,d_1)} = \frac{r}{|XQ| + \frac{p}{e}} = \frac{r}{r\cos\varphi + \frac{p}{e}},$$

$$r = er\cos\varphi + p, \qquad r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{7}$$

Чтобы показать, что мы не приобрели лишних точек, заметим, что это уравнение дает для каждого $\varphi \in [0, 2\pi)$ ровно одно положительное значение r. Таким образом, любая прямая, проходящая через фокус, пересечет множество решений уравнения (7) ровно в двух точках. Осталось показать, что тем же свойством обладает и эллипс. Действительно, пусть прямая проходит через фокус $(-c, 0)$, так что ее параметрические уравнения

$$x = -c + \alpha t, \qquad y = \beta t.$$

Точки ее пересечения с эллипсом находятся из квадратного уравнения от t:

$$\frac{(-c+\alpha t)^2}{a^2} + \frac{(\beta t)^2}{b^2} = 1,$$

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)t^2 - 2c\alpha b^2 t + (c^2 - a^2)b^2 = 0.$$

Для дискриминанта D имеем (так как $c^2 = a^2 - b^2$):

$$D/4 = c^2\alpha^2 b^4 - (c^2 - a^2)b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) =$$

$$= c^2\alpha^2 b^4 - c^2 b^4\alpha^2 - c^2 b^2 a^2\beta^2 + a^2 b^4\alpha^2 + a^4 b^2\beta^2 =$$

$$= -a^4 b^2\beta^2 + b^4 a^2\beta^2 + a^2 b^4\alpha^2 + a^4 b^2\beta^2 = b^4 a^2(\alpha^2 + \beta^2) > 0.$$

Таким образом, решений два. $\square$

Задача 3. Провести доказательство в остальных случаях.

10. Общая теория кривых второго порядка

10.1. Канонические уравнения

Согласно общему определению кривые второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат на плоскости уравнением второй степени $F(x,y) = 0$, где

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = \tag{8}$$

$$= (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_1, a_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0 = X^T Q X + 2LX + a_0 = \qquad (9)$$

$$= (x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

и хотя бы один из коэффициентов a_{ij} отличен от нуля. Матрица Q размера 2×2 называется матрицей *квадратичной части,* а матрица L размера 1×2 называется матрицей *линейной части,*

Замечание 10.1. Заметим, что указанные матрицы однозначно определяются уравнением, т. е. если например,

$$F(x, y) = (x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $A = B$.

Предложение 10.2. *При замене кооринат $(x, y) \to (x', y')$ уравнение второй степени $F(x, y) = 0$ переходит в уравнение второй степени*

$$F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')) = 0.$$

Доказательство. Замена координат осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\deg F' \leq 2$. Если $\deg F' \leq 1$, то проделав обратную замену координат, получим, что $\deg F \leq 1$. Пришли к противоречию. □

Замечание 10.3. Для кривых первого порядка, т. е. прямых, было получено, что два уравнения $F = 0$ и $G = 0$ задают одну и ту же кривую тогда и только тогда, когда $F = \lambda G$ для некоторого ненулевого множителя λ. Для кривых второго порядка это не так.

Определение 10.4. *Квадрикой* будем называть класс эквивалентности уравнений 2-ой степени относительно умножения на некоторый ненулевой множитель:

$$(F = 0) \equiv (G = 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \lambda G, \quad \lambda \neq 0.$$

При замене координат $(x, y) \to (x', y')$ квадрика $F(x, y) = 0$ переходит в квадрику $F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')) = 0$.

Далее будет доказано, что утверждение из предыдущего замечания будет верным для тех квадрик, которые состоят более, чем из одной точки (а если считать переменные комплексными, то всегда).

Пример 10.5. *Мнимый эллипс* — квадрика, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением вида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \Leftrightarrow 1$. *Мнимые параллельные прямые* — уравнением $y^2 + a^2 = 0$, $a \neq 0$. Оба уравнения задают на вещественной плоскости пустое множество точек, но комплексных решений у них разные множества.

Теорема 10.6. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых* **каноническими уравнениями данной квадрики** *):*

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geq b > 0)$, *эллипс;*

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \Leftrightarrow 1$, $(a \geq b > 0)$, *мнимый эллипс;*

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geq b > 0)$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*

4) $\dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0,\ b > 0)$, *гипербола;*

5) $\dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ $(a \geq b > 0)$, *пара пересекающихся прямых;*

6) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$, *парабола;*

7) $y^2 \Leftrightarrow a^2 = 0$, $(a > 0)$, *пара параллельных прямых;*

8) $y^2 + a^2 = 0$, $(a > 0)$, *пара мнимых параллельных прямых;*

9) $y^2 = 0$, *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямоугольную систему координат. В ней квадрика имеет вид (8) – (9). Основная часть доказательства состоит из следующих двух лемм, соответствующих двум заменам координат, или двум шагам так называемого *приведения кривой к каноническому виду.*

Лемма 10.7. *Подходящим поворотом осей координат можно добиться того, что* $a'_{12} = 0$*, где штрих означает соответствующий коэффициент уравнения квадрики в новой системе координат.*

Доказательство. (леммы) Рассмотрим произвольный поворот:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \Leftrightarrow\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F'(x',y') := F(x(x',y'),y(x',y')) = a_{11}(\cos\varphi\, x' \Leftrightarrow \sin\varphi\, y')^2 +$$

$$+2a_{12}(\cos\varphi\, x' \Leftrightarrow \sin\varphi\, y')\,(\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y') + a_{22}(\sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y')^2 + \boxed{\text{линейная часть}}.$$

Коэффициент при $2x'y'$, т. е. a'_{12}, равен

$$\Leftrightarrow a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi \Leftrightarrow \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= (a_{22} \Leftrightarrow a_{11})\frac{\sin 2\varphi}{2} + a_{12}\cos 2\varphi.$$

Мы хотим найти такое φ, чтобы $a'_{12} = 0$, т. е.

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a_{11} \Leftrightarrow a_{22}}{2\,a_{12}}.$$

Задача разрешима, так как если бы $a_{12} = 0$, то не требовалось бы никакого поворота. В повернутой (штрихованной) системе координат многочлен F примет вид

$$F'(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 = 0. \qquad \square \tag{11}$$

Лемма 10.8. *Многочлен вида* (11) *параллельным переносом приводится к одному из следующих видов:*

1) $F'' = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$*;*

2) $F'' = \lambda_2(y'')^2 + 2b_1x'' \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0)$*;*

3) $F'' = \lambda_2(y'')^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0)$.

Доказательство. 1: $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда выделяем полные квадраты:

$$F'(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 =$$

$$= \lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{b_1^2}{\lambda_1} \Leftrightarrow \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой.

2: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (если $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, то поменяем координаты местами). Возможны два случая.

а) Если $b_1 \neq 0$, то

$$F'(x',y') = \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 =$$

$$= \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1 x' + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) =$$
$$= \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'',$$

где
$$x'' := x' + \frac{1}{2\,b_1}\left(b_0 \Leftrightarrow \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right), \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой.

б) Если $b_1 = 0$, то
$$F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2b_2 y' + b_0 =$$
$$= \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) = \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где
$$x'' := x', \qquad y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

— формулы замены координат, обратной к искомой. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы и разберем различные случаи уравнений из предыдущей леммы. Мы не будем оговаривать очевидные операции, когда умножаем уравнение на ненулевой скаляр или меняем названия координат.

1). 1. λ_1 и λ_2 — одного знака, τ — противоположного. Получаем уравнение эллипса.

2. $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ — одного знака. Получаем уравнение мнимого эллипса.

3. λ_1 и λ_2 — одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.

4. λ_1 и λ_2 — разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола.

5. λ_1 и λ_2 — разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.

2). 6. Парбола.

3). 7. $\tau < 0$. Пара параллельных прямых.

8. $\tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.

9. $\tau = 0$. Пара совпдающих прямых. □

Следствие 10.9. *Уравнение второй степени на плоскости задает одну из следующих кривы (как множество точек): эллипс; гипербола; парабола; пара пересекающихся прямых; пара параллельных прямых; пара совпдающих прямых; точка; пустое множество.*

10.2. Инварианты многочлена второй степени

Определение 10.10. Функция J от коэффициентов многочлена F называется *ортогональным инвариантом,* если она не меняется при переходе от отной прямоугольной системы координат к другой, т. е.

$$J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = J(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'_0).$$

Определение 10.11. Сумма диагональных элементов матрицы A называется *следом матрицы* A:

$$\operatorname{Tr} A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Теорема 10.12. *Следующие три функции:*

$$S := \operatorname{Tr} Q, \qquad \delta := \det Q, \qquad \Delta := \det A$$

являются ортогональными инвариантами.

Доказательство. Рассмотрим переход от (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

где $C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — произвольная ортогональная матрица. Наряду с C рассмотрим еще 3×3-матрицу

$$D := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 10.13. *Матрицы A' и Q', отвечающие многочлену*

$$F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')),$$

связаны с матрицами A и Q соотношениями

$$A' = D^T A D, \qquad Q' = C^T Q C.$$

Доказательство.

$$F'(x', y') = (x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x', y', 1) D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В силу замечания 10.1 это означает, что $A' = D^T AD$. Аналогично доказывается и второе утверждение. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы, ортогональности C и явного вида D получаем

$$\det Q' = \det(C^T QC) = \det C^T \det Q \det C = (\det C)^2 \det Q = \det Q,$$
$$\det A' = \det(D^T QD) = \det D^T \det A \det D = (\det D)^2 \det A = \det A,$$

так как $\det C = 1$, а $\det A = \det C$. Инвариантность δ и Δ установлена.

По лемме

$$Q' = C^T QC, \qquad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} & c_{11}a_{12} + c_{21}a_{22} \\ c_{12}a_{11} + c_{22}a_{12} & c_{12}a_{12} + c_{22}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$
$$a'_{11} = c_{11}^2 a_{11} + c_{21}c_{11}a_{12} + c_{11}c_{21}a_{12} + c_{21}^2 a_{22},$$
$$a'_{22} = c_{12}^2 a_{11} + c_{22}c_{12}a_{12} + c_{12}c_{22}a_{12} + c_{22}^2 a_{22},$$
$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(c_{11}^2 + c_{12}^2) + 2a_{12}(c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}) + a_{22}(c_{21}^2 + c_{22}^2).$$

Вспомним явный вид двумерных ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \Leftrightarrow\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \Leftrightarrow\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Так что

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} &= \cos\varphi(\pm\sin\varphi) \mp \sin\varphi\cos\varphi = 0, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

Значит, $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. $\square$

Замечание 10.14. Указанные инварианты **не** являются инвариантами относительно умножения уравнения на ненулевое λ. Эта операция не является заменой прямоугольных координат.

Задача 4. Можно ли найти более широкий класс замен, чтобы сохранялись указанные инварианты ?

Замечание 10.15. Инвариантность S и δ можно получить из некоторой более общей теоремы, которую мы сейчас докажем.

Определение 10.16. *Характеристическим многочленом матрицы* Q называется $\chi_Q := \det(Q \Leftrightarrow\lambda E)$, где E — единичная матрица.

Теорема 10.17. *Коэффициенты характеристического многочлена матрицы* Q *являются ортогональными инвариантами.*

Доказательство.

$$\chi_{Q'}(\lambda) = \det(Q' \Leftrightarrow\lambda E) = \det(C^T QC \Leftrightarrow\lambda E) = \det(C^T QC \Leftrightarrow\lambda C^T C) =$$
$$= \det(C^T(Q \Leftrightarrow\lambda E)C) = (\det C)^2 \det(Q \Leftrightarrow\lambda E) = \chi_Q(\lambda). \qquad \square$$

10.3. Определение канонического уравнения по инвариантам

Как было показано при доказательстве теоремы о приведении к каноническому виду, любое уравнение второго порядка заменой прямоугольных координат приводится к одному из следующих видов

1) $F = \lambda_1(x)^2 + \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$;

2) $F = \lambda_2(y)^2 + 2b_1x \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0)$;

3) $F = \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0)$.

На этом этапе были проведены только замены прямоугольных координат (никакаих умножений на ненулевые множители еще не производилось), поэтому все инварианты сохранились. Значит, если мы сможем по инвариантам в этом виде найти уравнение, то и в исходном тоже.

Составим таблицу

Сучай	A	S	δ	Δ
1	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	$\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1\lambda_2$	$\lambda_1\lambda_2\tau$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	λ_2	0	$\Leftrightarrow\lambda_2 b_1^2$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	λ_2	0	0

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 10.18. *Типы квадрик $1 \Leftrightarrow 3$ однозначно определяются значениями инвариантов*

1) $\delta \neq 0$*;*

2) $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$*;*

3) $\delta = 0,\ \Delta = 0,\ S \neq 0$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. $F = \lambda_1(x)^2 + \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$.

Предложение 10.19. *Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы Q.*

Доказательство. $\chi_Q = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 \Leftrightarrow \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda)(\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda)$. □

Итак, в первом случае ответ следующий: λ_1 и λ_2 находятся как корни характеристического многочлена $\lambda^2 \Leftrightarrow S\lambda + \delta = 0$, а $\tau = \Delta/\delta$.

Следствие 10.20. *Характеристический многочлен имеет вещественные корни.*

2. $F = \lambda_2(y)^2 + 2b_1x \qquad (\lambda_2, b_1 \neq 0).$

В этом случае $\lambda_2 = S$, $b_1 = \pm\sqrt{\Leftrightarrow\frac{\Delta}{S}}$. Это парабола с фокальным параметром $p = \sqrt{\Leftrightarrow\frac{\Delta}{S^3}}$.

3. $F = \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_2 \neq 0).$

Тут $\lambda_2 = S$, но вычислить τ через S, δ и Δ невозможно. Необходим еще "почти инвариант".

Определим функцию K формулой

$$K := \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Лемма 10.21. *Корни характеристического многочлена матрицы A не меняются при заменах прямоугольных координат с общим началом.*

Доказательство. В этом случае матрица $D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ортогональна. Дальше дословно как в теореме 10.17. $\square$

Теорема 10.22. *Если $\delta = \Delta = 0$, то функция K является ортогональным инвариантом.*

Доказательство. Заметим, что характеристический многочлен A имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} \Leftrightarrow\lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} \Leftrightarrow\lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \Leftrightarrow\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \Leftrightarrow\lambda^3 + (a_0 + a_{11} + a_{22})\lambda^2 \Leftrightarrow\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\right) \lambda + \Delta =$$

$$= \Leftrightarrow\lambda^3 + (a_0 + S)\lambda^2 \Leftrightarrow(K + \delta)\ \lambda + \Delta.$$

В силу предыдущей леммы k инвариантен при прямоугольных заменах, сохраняющих начало. В общем случае требуем $\delta = \Delta = 0$. Поскольку добиться $a_{12} = 0$ можно одним и тем же поворотом для систем, отличающихся на сдвиг, то можно считать, что уже $a_{12} = 0$ у исходного уравнения. Поскольку в этом случае $\delta = a_{11}a_{22} = 0$, то без ограничения общности можно считать, что $a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq 0$. Из $\Delta = \Leftrightarrow a_1^2 a_{22} = 0$ получаем $a_1 = 0$. Тогда F принимает вид $F = a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0$. Рассмотрим сдвиг

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0.$$

Тогда

$$F' = a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_2(y' + y_0) + a_0 = a_{22}(y')^2 + 2(a_{22}y_0 + a_2)y' + (a_{22}y_0^2 + 2a_2y_0 + a_0),$$

$$a'_{22} = a_{22}, \qquad a'_2 = a_{22}y_0 + a_2, \qquad a'_0 = a_{22}y_0^2 + 2a_2y_0 + a_0.$$

При этом

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_2 \\ 0 & a'_2 & a'_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $K = a_{22}a_0 \Leftrightarrow a_2^2$, а

$$K' = a_{22}(a_{22}y_0^2 + 2a_2y_0 + a_0) \Leftrightarrow (a_{22}y_0 + a_2)^2 = a_{22}a_0 \Leftrightarrow a_2^2 = K. \qquad \square$$

Вернемся к третьему случаю: $F = \lambda_2 y^2 + \tau$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \qquad S = \lambda_2, \qquad \delta = \Delta = 0,$$

$$K = \lambda_2\tau, \qquad \tau = \frac{K}{S}.$$

Теорема 10.23. *Следующая таблица дает необходимые и достаточные условия принадлежности кривой второго порядка к одному из девяти видов в терминах инвариантов:*

1. Эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta < 0$
2. Мнимый эллипс	$\delta > 0$	$S\Delta > 0$
3. Пара мнимых пересекающихся прямых	$\delta > 0$	$\Delta = 0$
4. Гипербола	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$
5. Пара пересекающихся прямых	$\delta < 0$	$\Delta = 0$
6. Парабола	$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$
7. Пара параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K < 0$
8. Пара мнимых параллельных прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K > 0$
9. Пара совпадающих прямых	$\delta = \Delta = 0$	$K = 0$

Доказательство. Проведем для эллипса.

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow 1 = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0, \quad S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 0, \quad \Delta = \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} < 0.$$

При переходе к другой системе координат инварианты не изменятся. Если умножим F на положительную константу, то знаки инвариантов останутся прежними, а если умножим F на отрицательную константу, то знак δ не изменится, а знаки S и Δ изменятся, значит, знак $S\Delta$ останется прежним.

Обратно, рассмотрим квадрику с $\delta > 0$ и $S\Delta < 0$. Так как $\delta \neq 0$, то она приведется к первому типу:

$$F = \lambda_1(x)^2 + \lambda_2(y)^2 + \tau \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad S = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \lambda_1\lambda_2 \quad \Delta = \lambda_1\lambda_2\tau.$$

Так как $\delta > 0$, то λ_1 и λ_2 одного знака, значит, и S того же знака. Так как $S\Delta < 0$, то Δ другого знака, и $\tau = \Delta/\delta$ тоже. Поэтому после деления на $-\tau$ приходим к уравнению эллипса. $\square$

Следствие 10.24. *Поскольку коэффициенты канонического уравнения выражаются через инварианты и семиинвариант, то уравнения определены однозначно.*

Пример 10.25. Определить тип кривой $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 1/2 \\ -5/2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S = 5, \quad \delta = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4}, \quad \Delta = -8 - \frac{5}{4} - \frac{5}{4} - 1 - 1 + \frac{25}{2} = 0,$$

таким образом, это пара пересекающихся прямых.

Пример 10.26. Определить тип кривой $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{pmatrix},$$

$$S = 5, \quad \delta = -36, \quad \Delta = 2 \cdot 36 \cdot 11 + 36 \cdot 19 - 36 \cdot 5 = 792 + 504 = 1296,$$

таким образом, это гипербола.

Задача 5. Найти (с помощью инвариантов) канонические уравнения этих кривых.

10.4. Распадающиеся кривые

Определение 10.27. Алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$ называется *распадающейся*, если $F = F_1 \cdot F_2$, где F_1 и F_2 — многочлены ненулевой степени.

Предложение 10.28. *Если алгебраическая кривая произвольного порядка $F = 0$ содержит прямую $Ax + By + C = 0$, то $F = f \cdot F_1$, т. е. многочлен F делится на f ьез остатка.*

Доказательство. Пусть $A \neq 0$ (для $B \neq 0$ аналогично). Разделим многочлен F на f как многочлены от x с остатком $r(y)$. Предположим, что $r \neq 0$, т. е. найдется такая точка y_0, что $r(y_0) \neq 0$. Выберем x_0 так, чтобы

$$f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad x_0 = \Leftrightarrow\frac{1}{A} \cdot (By_0 + C).$$

Тогда $(x_0, y_0) \in \{f = 0\} \subset \{F = 0\}$ и

$$0 = F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \cdot F_1(x_0, y_0) + r(y_0) = 0 \cdot F_1(x_0, y_0) + r(y_0) = r(y_0).$$

Противоречие. $\square$

Следствие 10.29. *Если кривая второго порядка $F(x, y) = 0$ содержит прямую $Ax + By + C = 0$, то $F = (Ax + By + C) \cdot (A_1 x + B_1 y + C_1)$. Это возможно сделать тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение получается сразу из предыдущего предложения, а второе — из первого и теоремы об определении вида кривой по инвариантам. $\square$

Пример 10.30.

$$F(x, y) = x^2 \Leftrightarrow 5xy + 4y^2 + x + 2y \Leftrightarrow 2 = x^2 \Leftrightarrow (5y \Leftrightarrow 1)x + (4y^2 + 2y \Leftrightarrow 2),$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \Leftrightarrow 1 \pm (3y \Leftrightarrow 3)}{2}, \quad x_1 = 4y \Leftrightarrow 2, \quad x_2 = y + 1,$$

$$F(x, y) = (x \Leftrightarrow x_1) \cdot (x \Leftrightarrow x_2) = (x \Leftrightarrow 4y + 2) \cdot (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow 1).$$

Задача 6. Доказать, что если $a_{11} \neq 0$, то квадратное уравнение $F(x, y) = 0$ относительно x имеет соим дискриминантом квадратный трехчлен относительно y, дискриминант которого в свою очередь равен $a_1 1\Delta$. В частности, корень извлекается точно при $\Delta = 0$.

Теорема 10.31. * *Произвольный ортогональный инвариант J многочлена второй степени, полиномиально зависящий от его коэффициентов, является многочленом от S, δ и Δ.*

10.5. Теоремы единственности для кривых второго порядка

Напомним, что квадрика — это алгебраическое уравнение второго порядка с точностью до умножения на ненулевой множитель.

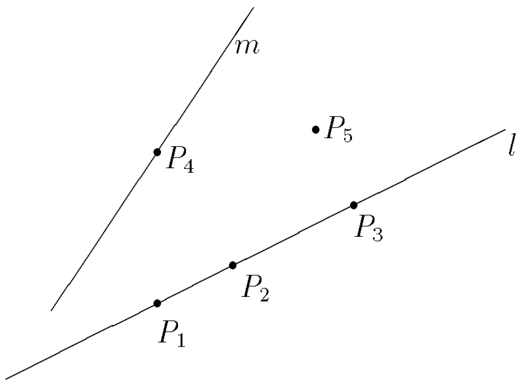
Теорема 10.32. *Сущестует и единствена квадрика, проходящая через данные различные пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, — эти точки в некоторой прямоугольной системе координат. Для нахождения коэффициентов уравнения искомой квадрики возникает система из 5 линейных уравнений:

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_1x_i + 2a_2y_i + a_0 = 0, \qquad i = 1, \ldots 2,$$

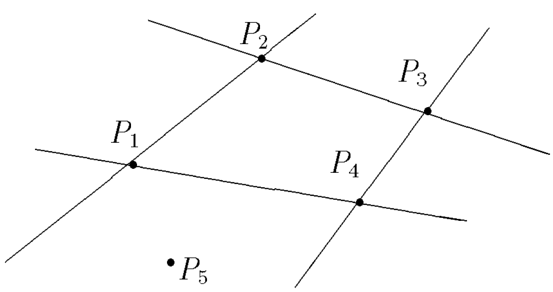
от 6 неизвестных с точностью до умножения на ненулевой множитель. Такая система всегда имеет решение. Оно однозначно с точностью до умножения на ненулевой множитель, если уравнения линейно независимы. Допустим противное. Пусть, например, пятое уравнение является линейной комбинайией первых четырех, так что любая квадрика, проходящая через $P_1, \ldots, P_4$, проходит и через P_5. Рассмотрим два случая.

1: три точки из $P_1, \ldots, P_4$, например, P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, которую обозначим l.



Проведем прямую m, содержащую P_4 и не содержащую P_5. Так как 4 точки не лежат на одной прямой, то $m \neq l$ и $m \cup l$ — квадрика, не содержащая P_5. Противоречие.

2: никакие три точки из $P_1, \ldots, P_4$ не лежат на одной прямой. Тогда определены две квадрики: $q_1 := (P_1P_2) \cup (P_3P_4)$ и $q_2 := (P_1P_4) \cup (P_2P_3)$.



По предположению, $P_5 \in q_1$, $P_5 \in q_2$. Но $q_1 \cap q_2 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Противоречие. $\square$

Теорема 10.33. *Если два уравнения второй степени $F = 0$ и $G = 0$ задают одну и ту же кривую, т. е. одно и то же множество точек, причем содержащую более одной точки, то $F = \lambda G$, $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. ГМТ, подпадающие под формулировку теоремы, назовем содержательными (ЭГП и пары прямых, быть может совпадающих), прочие — несодержательными (точка и пустое множество). Для всех содержательных кривых, кроме совпадающих прямых, существуют принадлежащие им 4 точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому утверждение теоремы для них следует из предыдущей теоремы. Остался случай двух совпадающих прямых. Пусть $F = 0$ и $G = 0$ содержат $Ax + Bx + C = 0$. Тогда по предложению о распадающихся кривых,

$$F = (Ax + By + C) \cdot (A_1x + B_1y + C_1), \qquad G = (Ax + By + C) \cdot (A_2x + B_2y + C_2).$$

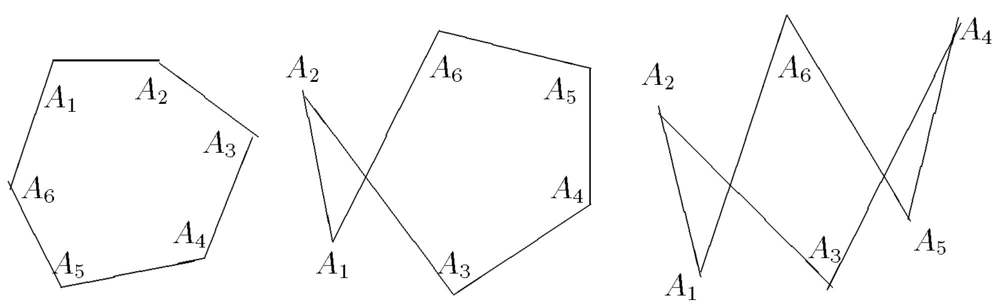
Когда речь идет о совпавших прямых, то вторые сомножители должны определять ту же прямую $Ax+Bx+C = 0$, а значит, по теореме об уравнениях первого порядка, задающих одну и ту же кривую,

$$A_1x + B_1y + C_1 = \lambda\,(Ax + Bx + C), \qquad A_2x + B_2y + C_2 = \mu\,(Ax + Bx + C),$$

так что $G = \dfrac{\lambda}{\mu} F$. □

10.6. Теорема Паскаля. “Построение” кривой второго порядка по пяти заданным точкам.

Определение 10.34. *Шестивершинником* называется упорядоченный набор $A_1, \ldots, A_6$ шести точек на плоскости, находящихся в общем положении, т. е. никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Его *стороны*: A_1A_2, A_2A_3, ... A_6A_1. *Противоположные стороны*: A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1.



Замечание 10.35. Никакие 3 точки ЭГП не лежат на одной прямой. Это следует из рассмотрения множества точек пересечения прямой, заданной параметрически, с кривой. В результате получаем уравнение не старше второго порядка на параметр. Значит, если кривая пересекается с прямой больше, чем по 2 точкам, то она прямую содержит. Подробные выкладки будут проведены в следующих параграфах. Таким образом, упорядоченный набор 6 различных точек ЭГП задает шестивершинник.

Теорема 10.36 (Паскаля). *Точки пересечения противоположных сторон шестивершинника, вписанного в ЭГП, лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть $P_1 = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $P_2 = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $P_3 = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$. Докажем, что $P_3 \in (P_1P_2)$.

Рассмотрим уравнения кривых третьей степени

$$P(x,y) = a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}y^2 + a_{222}y^3 + a_{011}x^2 + a_{012}xy + a_{022}y^2 + a_{001}x + a_{002}y + a_{000} = 0,$$

проходящих через 8 точек: $A_1, \ldots, A_6, P_1, P_2$. Возникает однородная система из 8 уравнений на 10 коэффициентов a_{ijk}. Покажем, что эти 8 уравнений линейно независимы. Предположим, что это не так, т. е. одно из уравнений линейно выражается через остальные. Это означает, что любая кубическая кривая, проходящая через 7 точек, проходит и через восьмую.

Допустим, уравнение, отвечающее P_2, выражается через остальные. Рассмотрим кубическое уравнение, равное произведению уравнения нашей квадрики на уравнение прямой, проходящей через P_1, но не через P_2. Противоречие.

Аналогично для P_1.

Пусть теперь “зависимая” точка — A_1. Тогда противоречие получается из кубики $(A_4A_5) \cup (A_2A_3) \cup (A_5A_6)$. Аналогично для остальных A_i.

Итак 8 уравнений линейно независимы и любое решение является линейной комбинацией двух линейно независимых решений. Два решения, определяющие различные ГМТ будут линейно независимы (от противного). В частности, кубические уравнения ГМТ $(A_1A_2) \cup (A_3A_4) \cup (A_5A_6)$ и $(A_2A_3) \cup (A_4A_5) \cup (A_6A_1)$ линейно независимы. Значит, уравнение $Q \cup (P_1P_2)$, где Q — исходная коника, выражается в виде их линейной комбинации. Значит,

$$P_3 \in \Big((A_1A_2) \cup (A_3A_4) \cup (A_5A_6)\Big) \cap \Big((A_2A_3) \cup (A_4A_5) \cup (A_6A_1)\Big) \subset Q \cup (P_1P_2).$$

В силу замечания 10.35 P_3 не может лежать на Q. Значит, $P_3 \in (P_1P_2)$. $\square$

Теорема Паскаля позволяет проводить следующие построения только с помощью линейки.

Построение 1. Допустим, нам известны 5 точек $A_1, \ldots, A_5$, лежащие на квадрике (для простоты будем считать их последовательно лежащими). Рассмотрим точку $P_1 = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$ и прямые $l_2 = (A_2A_3)$ и $l_3 = (A_3A_4)$. Тогда по каждой точке P_2 на прямой l_2 мы можем построить точку A_6 на конике по следующему правилу. Проведем прямую (P_2P_1) до пересечения с l_3 в точке P_3. Тогда $A_6 = (P_2A_5) \cap (P_3A_1)$.

Построение 2. Поскольку касательная является предельным положением секущей, то, устремляя $A_6 \to A_5$, мы приходим к следующему. Допустим, нам известны 5 точек $A_1, \ldots, A_5$, лежащие на квадрике (для простоты будем считать их последовательно лежащими). Мы хотим построить касательную в точке A_5. Построим точки $P_1 = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $P_3 = (A_3A_4) \cap (A_5A_1)$. Пусть $P_2 = (P_1P_3) \cap (A_2A_3)$. Тогда (P_2A_5) — искомая касательная.

Теорема 10.37 (Паппа). * *Теорема Паскаля верна и в случае двух несовпадающих прямых, если потребовать, чтобы вершины вписанного шестивершинника лежали через одну на каждой из прямых, т. е.* A_1, A_3, A_4 *— на одной, а остальные — на другой.*

Внимательно проанализировав доказательство теоремы Паскаля, можно убедиться, что верна также

Теорема 10.38 (обратная теорема Паскаля). * *Если точки пересечения противоположных сторон шестивершинника лежат на одной прямой, то вокруг него можно описать конику.*

Задача 7. Провести подробное доказательство теоремы Паппа.
Задача 8. Провести подробное доказательство обратной теоремы Паскаля.

11. Пересечение кривой второго порядка с прямой

Рассмотрим кривую второго порядка , , заданную в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

и прямую l, заданную параметрически

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \end{cases}.$$

Для нахождения точек пересечения , и l подставим параметрические уравнения в $F = 0$:

$$a_{11}(x_0+\alpha t)^2 + 2a_{12}(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t) + a_{22}(y_0+\beta t)^2 + 2a_1(x_0+\alpha t) + 2a_2(y_0+\beta t) + a_0 = 0,$$

или

$$F_2t^2 + 2F_1t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha,\beta), \\ F_1 &= \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \\ F_0 &= F(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Определение 11.1. Ненулевой вектор (α,β) имеет *асимптотическое направление* по отношению к кривой второго порядка , , если $F_2 = q(\alpha,\beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$.

Легко видеть, что это свойство не меняется при умножении уравнения на ненулевой множитель, т. е. является свойством квадрики, а не кривой.

Предложение 11.2. *Определение асимптотического направления корректно, т. е. не зависит от выбора системы координат.*

Доказательство. Фактически необходимые выкладки уже проводились: если имеется замена координат (так как имеем дело только с квадратичной частью, то можно считать, что сдвига нет) с матрицей C, то

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \qquad Q' = C^T Q C, \qquad \text{где} \quad Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$q(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T Q C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T C^T Q C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \right)^T Q' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = q'(\alpha', \beta').$$

Таким образом, результат подстановки вектора в квадратичную часть не зависит от выбора системы координат. □

Теорема 11.3. *Прямая l неасимптотического направления по отношению к кривой второго порядка , либо имеет с ней 2 общие точки (различные или совпавшие) либо не пересекается с ней. Прямая l асимптотического направления по отношению к кривой второго порядка , либо содержится в , , либо имеет с ней одну общую точку, либо не пересекается с ней.*

Замечание 11.4. "Две совпавшие точки" означает, что имеется сколь угодно близкая прямая, имеющая 2 точки пересечения (секущая). Рассматриваются точки, отличные от точки пересечения пересекающихся прямых, всех точек пары совпадающих прямых и единственной точки пары мнимых пересекающихся прямых.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $F_2 t^2 + F_1 t + F_0 = 0$, где $F_2 = q(\alpha, \beta)$, а (α, β) — направляющий вектор l.

Если направление неасимптотическое, то $F_2 = q(\alpha, \beta) \neq 0$ и квадратное уравнение невырождено. Оно может иметь 2, 1 или 0 решений. При этом 1 решение, когда полный квадрат. Мы можем считать, что начальная точка (x_0, y_0) лежит на кривой. Тогда $F_0 = 0$ и вторая точка совпадает с начальной, если $F_1 = 0$. Допустим, что при любом малом изменении точки (x_0, y_0) до другой точки (x_1, y_1) на кривой, все равно будем получать $F_1 = 0$. Это означает, что оба коэффициента при α и β (как вектор) коллинеарны для всех близких точек, т. е.

$$\frac{a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_1}{a_{12} x_1 + a_{22} y_1 + a_2} = \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}.$$

Значит, в окрестности (x_0, y_0), кривая содержит интервал прямой, и следовательно, является распадающейся. Отбросив исключения (совпавшие, мнимые пересекающиеся и точка пересечения), видим, что в этих случаях никакая прямая не может пересечь такое множество по одной точке. (Мы доказывали для близкой параллельной, чтобы использовать рассуждение при доказательстве утверждения 11.12 о геометрической характеризации асимптотических направлений. Если рассматривать возмущение поворотом, то рассуждение упрощается (см. нахождение касательных ниже).)

Если же направление асимптотическое, то $F_2 = 0$ и уравнение принимает вид $2F_1 t + F_0 = 0$. Если $F_1 \neq 0$, то имеется единственная точка пересечения. Если $F_1 = 0$, а $F_0 \neq 0$, то пересечение пусто. Если $F_1 = F_0 = 0$, то пересечение l и , совпадает с l. □

Следствие 11.5. *Никакие три точки коники не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда прямая, содержащая эти три точки, имеет асимптотическое направление и целиком содержится в кривой. Значит, кривая распадается на две прямые и не является коникой. □

11.1. Нахождение асимптотических направлений

Уравнение для асимптотических направлений:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то $\beta \neq 0$, так как иначе и $\alpha = 0$. Делим на β^2:

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0,$$

или $a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$, где $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Тогда

$$k = \frac{\Leftrightarrow a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 \Leftrightarrow a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{\Leftrightarrow a_{12} \pm \sqrt{\Leftrightarrow \delta}}{a_{11}}.$$

Определение 11.6. Квадрика $F = 0$ имеет *эллиптический, гиперболический или параболический тип,* если, соотвественно, $\delta > 0$, $\delta < 0$ или $\delta = 0$.

Лемма 11.7. *Это определение корректно, т. е. знак δ не зависит от выбора системы координат и умножения уравнения на ненулевое λ.*

Доказательство. Заметим, что δ — инвариант только ортогональных замен, но при произвольной замене

$$\operatorname{sgn}\, \delta' = \operatorname{sgn}\, \det Q' = \operatorname{sgn}\, \det(C^T Q C) = \operatorname{sgn}\, (\det C)^2 \det Q = \operatorname{sgn}\, \delta.$$

При переходе от F к $\lambda \cdot F$, сходным образом, δ переходит в $\lambda^2 \cdot \delta$. □

Теорема 11.8. *Кривые эллиптического типа не имеют асимптотических направлений; кривые гиперболического типа имеют два асимптотических направления; кривые параболического типа имеют одно асимптотическое направление.*

Доказательство. Если $a_{11} \neq 0$, то была получена формула $k = \dfrac{\Leftrightarrow a_{12} \pm \sqrt{\Leftrightarrow\delta}}{a_{11}}$, из которой утверждение следует очевидным образом. Аналогично для случая $a_{22} \neq 0$. Если же $a_{11} = a_{22} = 0$, то $\delta = \Leftrightarrow a_{12}^2 < 0$ и уравнение для асимптотических направлений примет вид

$$q(\alpha, \beta) = 2a_{12}\alpha\beta = 0,$$

откуда получаем два асимптотических направления: $(0,1)$ и $(1,0)$. □

Пример 11.9. Асимптотические направления гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1$$

должны удовлетворять

$$\frac{\alpha^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{b^2} = 0, \qquad k = \frac{\alpha}{\beta} = \pm\frac{a}{b}.$$

Т. е. асимптотические направления гиперболы — направления ее асимптот.

Пример 11.10. У эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

нет асимптотических направлений:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Пример 11.11. Парабола имеет одно асимптотическое направление (направление ее оси): $y^2 \Leftrightarrow 2px = 0$ дает $q(\alpha, \beta) = \beta^2 = 0$ и направление $(1,0)$.

Задача 9. Установить, что асимптотические направления пары пересекающихся прямых — направления этих прямых (аналитически и через теорему о числе точек пересечения). Установить, что асимптотические направления пары параллельных или совпавших прямых — направления этих прямых.

Следствие 11.12 (из теоремы 11.3, примеров и задачи). *Для содержательных кривых, за исключением совпавших прямых, можно определить неасимптотическое направление геометрически: прямая l имеет неасимптотическое направление тогда и только тогда, когда найдется параллельная ей прямая, пересекающая кривую ровно в двух точках.*

11.2. Диаметры и центры кривых второго порядка

Рассмотрим непустую кривую второго порядка , , заданную в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

и прямую l неасимптотического направления, заданную параметрически

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \end{cases}.$$

Пусть l пересекает , в двух (возможно совпавших) точках, и (x_0, y_0) — середина соответствующего отрезка (хорды). Поскольку для нахождения t_1 и t_2, соответствующих точкам пересечения, мы имели уравнение

$$F_2t^2 + 2F_1t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha, \beta), \\ F_1 &= \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \\ F_0 &= F(x_0, y_0), \end{aligned}$$

причем в нашем случае $F_2 \neq 0$. По теореме Виета для $t_0 = 0$, отвечающего (x_0, y_0), условие середины хорды примет вид

$$0 = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2}, \qquad F_1 = 0.$$

Теорема 11.13. *Середины хорд кривой , данного неасимптотического направления (α, β) лежат на прямой*

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Доказательство. В силу рассуждения перед теоремой, осталось доказать, что данное уравнение задает прямую, т. е. это уравнение первой степени, а не нулевой. Перепишем:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0$$

Если бы

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta &= 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta &= 0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times\alpha \\ \times\beta \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta &= 0, \\ a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 &= 0, \end{cases} \quad \Big| +$$

и $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$, что противоречит неасимптотичности направления. $\square$

Определение 11.14. Прямая $\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+\beta(a_{12}x+a_{22}y+a_2)=0$ называется *диаметром* кривой второго порядка $F = a_{11}x^2 + \ldots = 0$, *сопряженным данному неасимптотическому направлению* (α, β).

Определение 11.15. *Центр кривой* , — такая точка $M(x_0, y_0)$, что вместе с любой точкой P содержит и точку P', симметричную P относительно M. Таким образом, M — центр симметрии , .

Лемма 11.16. *Пусть $M(x_0, y_0)$ — центр кривой , . Существуют две различных прямых неасимптотических направлений, проходящие через M и пересекающие , .*

Доказательство. Для точки и прямых утверждение очевидно. Для ЭГП рассмотрим две точки P и Q, отличные от M, несимметричные относительно M и лежащие на , . Тогда $(PM)\cap, \ \supset \{P, P'\}$, $(QM)\cap, \ \supset \{Q, Q'\}$, где P' и Q' — соответствующие симметричные точки. Более того, третьих точек в пересечениях нет, так как это противоречит следствию 11.5. Таким образом, это нужные прямые. $\square$

Теорема 11.17. *Точка $M(x_0, y_0)$ является центром непустой кривой второго порядка*

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases} \qquad \textit{(уравнения центра)}$$

В терминах частных производных уравнения запишутся в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть (α_i, β_i), $i = 1, 2$, — направляющие векторы прямых, определенных по предыдущей лемме. Тогда (x_0, y_0), как середина соответствующих хорд, принадлежит соответствующим диаметрам, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\alpha_i(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta_i(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Обозначив выражения в скобках через u и v соответсвенно, получим, что u и v удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 v = 0 \\ \alpha_2 u + \beta_2 v = 0 \end{cases}$$

При этом уравнения линейно независимы, так как вектора (α_i, β_i) неколлинеарны. Значит, единственная возможность: $u = v = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть точка $M(x_0, y_0)$ удовлетворяет “уравнениям центра”. Перейдем к новой системе координат (x', y'):

$$x' = x \Leftrightarrow x_0, \qquad y' = y \Leftrightarrow y_0,$$

так что

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0.$$

Тогда

$$F'(x', y') = a_{11}(x'+x_0)^2+2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0)+a_{22}(y'+y_0)^2+2a_1(x'+x_0)+2a_2(y'+y_0)+a_0 =$$

$$= a_{11}(x')^2+2a_{12}x'y'+a_{22}(y')^2+2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x'+2(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)y'+F(x_0, y_0) =$$
$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a_0' = 0.$$

Очевидно, что если точка (x', y') удовлетворяет этому уравнению, то и $(\Leftrightarrow x', \Leftrightarrow y')$ — тоже, а координаты M в новой системе: $(0, 0)$. $\square$

Следствие 11.18. *Непустая кривая второго порядка* $F(x, y) = a_{11}x^2 + \ldots = 0$

1) *имеет единственный центр* $\Leftrightarrow \quad \delta = 0$;

2) *не имеет центра* $\Leftrightarrow \quad \delta = 0,\ \Delta \neq 0$, *т. е. , — парабола;*

3) *имеет целую прямую центров* $\Leftrightarrow \quad \delta = \Delta = 0$.

Доказательство. Действительно, уравнения центра

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 & = & 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 & = & 0 \end{cases}$$

имеют единственное решение тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta \neq 0$. Если мы обозначим через r ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

то при $\delta = 0$ система не имеет решений тогда и только тогда, когда $r = 2$, и имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $r = 1$ (нулевым ранг быть не может). Очевидно, что $\Delta \neq 0$ влечет $r = 2$, а $r = 1$ влечет $\Delta = 0$. Докажем обратные импликации. Итак, пусть $\delta = \Delta = 0$ и предположим противное требуемому, т. е. $r = 2$. Значит, третья строка матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

(определителем которой является Δ) выражается через первые. В частности, $a_1 = \lambda a_{11} + \mu a_{12}$, $a_2 = \lambda a_{12} + \mu a_{22}$ при некоторых λ и μ. Это означает, что последний столбец матрицы B выражается через два первых, которые, в свою очередь, линейно зависимы (так как $\delta = 0$). Значит, $r = 1$. Противоречие. Методом логического исключения получаем вторую обратную импликацию. $\square$

Следствие 11.19. *Любой диаметр проходит через все центры кривой.*

Доказательство. Среди прямых того неасимптотического направления, которому сопряжен данный диаметр, надо выбрать ту, которая проходит через данный центр. Либо это точка, соответствующая хорде, либо продолжению множества середин хорд. В любом случае это точка диаметра. $\square$

11.3. Сопряженные диаметры и направления

Теорема 11.20. *Если непустая кривая второго порядка имеет единственный центр, т. е. $\delta \neq 0$, то диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению (α, β), имеет направление (α^*, β^*), также являющееся неасимптотическим. При этом диаметр, сопряженный направлению (α^*, β^*), имеет направление (α, β).*

Доказательство. Сопряженный к (α, β) диаметр имеет уравнение

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Направление (u, v) прямой $ax+by+c = 0$, как мы знаем, должно обнулять однородную часть: $au + bv = 0$. В нашем случае:

$$\alpha(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*) + \beta(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*) = (\alpha, \beta)A \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

Предположим, что (α^*, β^*) — асимптотическое направление. Тогда

$$\alpha^* \underbrace{(a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^*)}_{V} + \beta^* \underbrace{(a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^*)}_{W} = 0.$$

Вместе с (12) получаем систему

$$\begin{cases} \alpha V + \beta W &= 0, \\ \alpha^* V + \beta^* W &= 0. \end{cases}$$

Если V и W не обращаются одновременно в ноль, то (α, β) и (α^*, β^*) коллинеарны, в частности, (α^*, β^*) неасимптотическое или (α, β) асимптотическое — противоречие (не говоря о том, что по геометрическим соображениям оно не может быть коллинеарным). Значит, $V = W = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^* &= 0 \\ a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^* &= 0. \end{aligned}$$

Но $\delta \neq 0$, и эта система имеет только тривиальное решение $\alpha^* = \beta^* = 0$, что не может быть направляющим вектором диаметра.

Вторая часть теоремы получается из явного вида уравнения (12) (надо транспонировать). □

Следствие 11.21. *Для кривой с единственным центром любая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр, является диаметром.*

Доказательство. Эта прямая — диаметр, сопряженный к направлению сопряженного диаметра. □

Определение 11.22. Два диаметра кривой с единственным центром, делящие пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются *сопряженными диаметрами.*

Определение 11.23. Два направления (α, β) и (α^*, β^*) называются *сопряженными направлениями* (относительно данной кривой), если они удовлетворяют уравнению (12).

Замечание 11.24. Из доказанного ясно, что сопряженные диаметры всегда имеют сопряженные направления. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 11.25. *Если кривая является параболой, т. е.* $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, *то все ее диаметры имеют асимптотическое направление.*

Доказательство. Рассмотрим направление (α, β). Тогда сопряженный диаметр будет иметь направление (α^*, β^*), удовлетворяющее

$$\alpha^*(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) + \beta^*(a_{12}\alpha + a_{22}\beta) = 0,$$

откуда, с точностью до множителя,

$$\alpha^* = -(a_{12}\alpha + a_{22}\beta), \qquad \beta^* = a_{11}\alpha + a_{12}\beta.$$

Имеем (поскольку $\delta = 0$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha^* + a_{12}\beta^* & = & -\delta\beta = 0, \\ a_{12}\alpha^* + a_{22}\beta^* & = & \delta\alpha = 0, \end{array}\right. \quad \left| \begin{array}{c} \alpha^* \\ \beta^* \end{array} \right. +$$

$$a_{11}(\alpha^*)^2 + 2a_{12}\alpha^*\beta^* + a_{22}(\beta^*)^2 = 0,$$

т. е. направление асимптотическое. □

Задача 10. Доказать, что любая прямая асимптотического направления по отношению к параболе является диаметром.

Задача 11. Убедиться, что предыдущая теорема верна для существенных кривых параболического типа, а не только для параболы.

Задача 12. Записать уравнение эллипса в системе координат, осями которой служат два сопряженных диаметра, а базисными векторами — половины хорд этих диаметров.

11.4. Главные диаметры и оси симметрии

В этом параграфе система координат предполагается прямоугольной. Пусть l — *ось симметрии* содержательной кривой второго порядка , , т. е. , вместе с любой точкой P содержит и P', симметричную P относительно l. Уравнение , : $F(x, y) = a_{11}x^2 + \ldots = 0$.

Возможны два случая:

Первый случай: перпендикулярное к l направление является асимптотическим. Если у , нет точек вне l, то , $= l$. Если же такая точка P имеется, то симметричная ей относительно l точка P' также принадлежит , . Поскольку направление $\overleftrightarrow{PP'}$ — асимптотическое, то и вся прямая (PP') должна содержаться в , . Итак, , в этом случае распалась на (PP') и некоторую прямую m, которая также должна быть симметричной относительно l. Возможны три случая: $m = (PP')$, $m \| (PP')$ и $m = l$. Итак, если одна из осей симметрии перпендикулярна асимптотическому направлению, то возможны следующие варианты:

1) , — совпавшие прямые. Осью симметрии может быть сама эта прямая и любая прямая, ей перпендикулярная.

2) , — параллельные прямые. Осью симметрии может быть равноудаленная от них прямая и любая прямая, ей перпендикулярная.

3) , — перпендикулярные прямые. Имеется четыре оси симметрии (прямые и биссектрисы углов).

Второй случай: перпендикулярное к l направление является неасимптотическим.

Определение 11.26. Неасимптотическое направление, перпендикулярное сопряженному ему диаметру называется *главным направлением* кривой , , а диаметр называется *гдавным диаметром.*

Теорема 11.27. *Главный диаметр является осью симметрии кривой , . Обратно, для содержательных кривых второго порядка, отличных от пары параллельных, совпадающих или перпендикулярных прямых (т. е. получившихся в первом случае), ось симметрии является главным диаметром.*

Доказательство. В этом случае диаметр состоит из середин перпендикулярных хорд, т. е. является осью симметрии.

Обратно, по рассуждению про первый случай, мы исключили те случаи, когда ось симметрии может быть перпендикулярна асимптотическому направлению. Поэтому перпендикулярное оси направление — неасимптотическое. Как ось симметрии, она делит хорды этого направления попалам, и таким образом, является диаметром. Поскольку перпендикулярны, то главным. □

Теорема 11.28. *Вектор (α, β) задает главное направление кривой $F = a_{11}x^2 + \ldots = 0$, тогда и только тогда, когда он является решением уравнения*

$$Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а λ — ненулевой корень характеристического уравнения

$$\det(Q \Leftrightarrow \lambda E) = \lambda^2 \Leftrightarrow S\lambda + \delta = 0.$$

Такой вектор называется СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРОМ *матрицы Q, отвечающим* СОБСТВЕННОМУ ЗНАЧЕНИЮ λ.

Доказательство. Пусть (α, β) — главное направление. Тогда уравнение соответствующего сопряженного диаметра

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0,$$

причем его нормаль n по условию коллинеарна (α, β), т. е.

$$n = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

или

$$Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Перепишем:

$$(Q \Leftrightarrow \lambda E) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет ненулевое решение (α, β). Для этого определитель ее должен равняться нулю: $\det(Q \Leftrightarrow \lambda E) = \chi_Q(\lambda) = \lambda^2 \Leftrightarrow S\lambda + \delta = 0$. Рассмотрим его корень λ. Если $\lambda = 0$, то система перепишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{rcl|c} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & = & 0 & \alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta & = & 0 & \beta \end{array} \right. +$$

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

т. е. (α, β) — асимптотическое направление.

Обратно, если $\lambda \neq 0$, то

$$\left\{ \begin{array}{rcl|c} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & = & \lambda\alpha & \alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta & = & \lambda\beta & \beta \end{array} \right. +$$

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0.$$

Таким образом, направление, определяемое собственным вектором Q, отвечающим $\lambda \neq 0$, неасимптотическое, а следовательно, главное, так как условие коллинеарности (α, β) и нормали к сопряженному диаметру, как мы показали, эквивалентны условию

$$(Q \Leftrightarrow \lambda E)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Лемма 11.29. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — корни характеристического уравнения. Тогда соответствующие собственные векторы (α_1, β_1) и (α_2, β_2) неколлинеарны.*

Доказательство. Тогда один из корней отличен от 0, пусть для определенности — λ_1. Кроме того, очевидно, можно считать векторы совпадающими, обозначим его через (α, β). Тогда

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

что возможно только при нулевом векторе (α, β). $\square$

Следствие 11.30. *Эллипс с различными полуосями (т. е. отличный от окружности) и гипербола имеют ровно две оси симметрии, которые тем самым совпадают с осями канонической системы координат. Парабола имеет ровно одну ось симметрии, совпадающую с осью Ox канонической системы координат.*

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического многочлена. Если они различные и ненулевые, то имеем по лемме два разных главных направления. $\square$

Замечание 11.31. Для окружности, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, любое направление является главным.

12. Вид и расположение кривых второго порядка

Вид канонического уравнения мы умеем вычислять с помощью инвариантов. Кроме того, мы умеем приводить с помощью подбора угла φ, и т. д. Сейчас мы обсудим другой алгоритм, более универсального характера (например, аналогичный алгоритм будет работать для поверхностей).

1. Решаем уравнения центра:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} & = & a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} & = & a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0, \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0) — решение (возможно не единственное). Случай параболы рассмотрим отдельно.

2. Производим сдвиг:

$$\begin{cases} x' & = & x \Leftrightarrow x_0, \\ y' & = & y \Leftrightarrow y_0, \end{cases}$$

$$F'(x',y') = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + \tau = 0, \qquad \tau = F(x_0,y_0)$$

(коэффициенты квадратичной части остались прежними).

3. Ищем корни λ_1, λ_2 характеристического многочлена

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0, \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и соответствующие им собственные вектора (α_1,β_1), (α_2,β_2). Если λ_1 и λ_2 различные ненулевые, то положим

$$e_i'' := \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}(\alpha_i,\beta_i), \qquad i = 1,2.$$

Если они совпадающие (ненулевые), то матрица квадратичной части уже диагональна ($a_{12} = 0$). В новой системе координат

$$F''(x'',y'') = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau = 0.$$

Таким образом действуем в случае *эллипса или гиперболы.*

Если в F' имеем $\tau = 0$ или оказалось $\lambda_1 = 0$, то *распадающаяся* кривая и надо раскладывать на множители.

Остался случай *параболы.* В этом случае сначала находим асимптотическое направление (α,β) из

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Диаметр, соответствующий перпендикулярному направлению,

$$-\beta \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

является осью. Заметим, что уравнение параболы теперь может быть переписано в виде

$$(\beta x - \alpha y)^2 + Ax + By + C = 0. \tag{13}$$

Вершина (x_0,y_0) находится из системы

$$\begin{aligned} -\beta \cdot \tfrac{\partial F}{\partial x} + \alpha \cdot \tfrac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ F(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Каноническая система:

$$e_1 = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha,\beta), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\beta,\alpha),$$

$\varepsilon = \pm 1$. Знак у e_1 выбирается из следующих соображений. Уравнение (13) показывает, что парабола лежит в отрицательной полуплоскости прямой $Ax + By + C = 0$.

Значит, направление ее ветвей, точнее, правильное направление e_1, образует тупой угол с (A, B). Таким образом, знак выбирается из условия $\varepsilon(A\alpha + B\beta) < 0$.

Каноническое уравнение проще всего найти, непосредственно осуществив переход к канонической системе координат.

Пример 12.1. Определить вид и расположение кривой $5x^2+12xy-22x-12y-19 = 0$.

1. Центр:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10x + 12y - 22 &=& 0, \\ 12x - 12 &=& 0, \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_0 &=& 1, \\ y_0 &=& 1. \end{array}\right.$$

2. Замена:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x' + 1 \\ y &=& y' + 1 \end{array}\right.$$

Промежуточное уравнение:

$$F'(x', y') = 5(x')^2 + 12x'y' + F(1,1) = 5(x')^2 + 12x'y' - 36 = 0.$$

3. $Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $Q - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix}$, $\chi_Q(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. Таким образом, в канонической системе (x'', y''):

$$F''(x'', y'') = 9(x'')^2 - 4(y'')^2 - 36 = 0, \qquad \boxed{\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{9} = 1}$$

— канонический вид.

4. Для нахождения e_1'':

$$(Q - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{частное решение: } \alpha = 3, \beta = 2,$$

Из него e_1'' получается нормированием, а e_2'' ему ортогонален:

$$e_1'' = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2), \qquad e_2'' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3).$$

Окончательно получаем: кривая является гиперболой с указанным каноническим видом и канонической системой с началом $(1,1)$ и базисными векторами e_1'' и e_2'' найденными в п.4.

Пример 12.2. Определить вид и расположение кривой $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7 = 0$.

1. Центр:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y + 4 &=& 0, \\ -4x + 8y - 3 &=& 0, \end{array}\right. \quad \text{система несовместна} \quad \Rightarrow \quad \text{парабола.}$$

2. Асимптотическое направление:

$$\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 = 0, \qquad (\alpha - 2\beta)^2, \qquad \text{частное решение: } \alpha = 2, \beta = 1.$$

3. Ось симметрии:

$$-\beta\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha\frac{\partial F}{\partial y}=(-1)\cdot(2x-4y+4)+2\cdot(-4x+8y-3)=0,$$

$$-10x+20y-10=0,\qquad x-2y+1=0$$

— ось.

4. Вершина:

$$\begin{cases} x-2y &= -1\\ (x-2y)^2+4x-3y-7 &= 0\end{cases}\qquad \begin{cases} x-2y &= -1\\ 4x-3y &= 6\end{cases},$$

откуда вершина: $(3,2)$.

5. Канонический базис:

$$e_1'=\varepsilon\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),\qquad e_2'=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2),$$

причем $\varepsilon=\pm1$ находится из условия $\varepsilon(4\cdot 2-3\cdot 1)<0$, так что $\varepsilon=-1$.

Таким образом, замена координат:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}.$$

6. Канонический вид:

$$(x-2y)^2+4x-3y-7=(-\sqrt{5}y'-1)^2-\frac{4}{\sqrt{5}}(2x'+y')+12+\frac{3}{\sqrt{5}}(x'-2y')-6-7=$$

$$=5(y')^2+2\sqrt{5}y'+1-\frac{5}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{0}\sqrt{5}y'-1=5(y')^2-\sqrt{5}x'=0,$$

$$\boxed{(y')^2=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}x'.}$$

13. Касательные к кривым второго порядка

Определение 13.1. *Особой точкой* кривой второго порядка называется центр, принадлежащий кривой (точка пересечения пересекающихся прямых, все точки пары совпадающих прямых и единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых).

Эти точки характеризуются условием $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Определение 13.2. *Касательной* к кривой второго порядка , в неособой точке (x_0,y_0) называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая , в двух совпавших точках, либо содержащаяся в , .

Теорема 13.3. *Касательная к кривой*

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

в неособой точке (x_0, y_0) *имеет уравнение*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x \Leftrightarrow x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y \Leftrightarrow y_0) = 0$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_0) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Прямая

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \end{cases}$$

пересекает кривую в точках, соответствующих решениям уравнения

$$F_2t^2 + 2F_1t + F_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = q(\alpha,\beta), \\ F_1 &= \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = \alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \beta\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0), \\ F_0 &= F(x_0,y_0) = 0, \end{aligned}$$

поскольку точка лежит на кривой. Условие касания: $F_1 = 0$, т. е.

$$\alpha\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + \beta\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$$

так что частное решение (направление)

$$\alpha = \Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0), \qquad \beta = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Поскольку точка неособая, то это ненулевой вектор. Поскольку при сколь угодно малом возмущении (повороте) вектора будет уже $F_1 \neq 0$, т. е. секущая, то это две совпавшие точки. Получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x \Leftrightarrow x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y \Leftrightarrow y_0) = 0$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x \Leftrightarrow x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y \Leftrightarrow y_0) = 0.$$

С учетом $F(x_0,y_0)$ это дает

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_0) = 0. \qquad \square$$

13.1. Поляра точки относительно коники

Пусть коника , задана уравнением $F(x, y) = a_{11}x^2 + \ldots$ в произвольной аффинной системе координат. Тогда уравнение касательной (14) может быть записано в виде

$$(x_0, y_0, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

где A — матрица F. Рассмотрим любую точку $P(x_0, y_0)$ плоскости, отличную от центра кривой.

Определение 13.4. Прямая с уравнением 15 называется *полярой точки P относительно коники* , .

Замечание 13.5. Условие отличия P от центра гарантирует, что получаем прямую, т. е. уравнение первого, а не нулевого порядка.

Пример 13.6. Если точка $P(x_0, y_0)$ принадлежит , , то получаем, что поляра является касательной.

Предложение 13.7. *Если из точки P можно провести к конике , две касательных с точками касания M и N, то MN является полярой P.*

Доказательство. Если (x_k, y_k) — координаты точки касания касательной, проведенной из точки $P(x_0, y_0)$, то $(x_k, y_k, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ — уравнение этой касательной. Поскольку P ей принадлежит, то $(x_k, y_k, 1)A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Транспонируя, получаем, что (x_k, y_k) должна удовлетворять системе

$$\begin{cases} F(x_k, y_k) = 0, & \text{— уравнение ,} \\ (x_0, y_0, 1)A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{pmatrix} = 0, & \text{— уравнение поляры т. } P \end{cases}$$

Таким образом, (x_k, y_k) — точка пересечения поляры с коникой, и предложение доказано. □

Замечание 13.8. Пока определение формально зависит от выбора системы координат. Независимость можно вывести из геометрических способов построения (см. ниже), но мы докажем это непосредственно.

Предложение 13.9. *Поляра не зависит от выбора системы координат.*

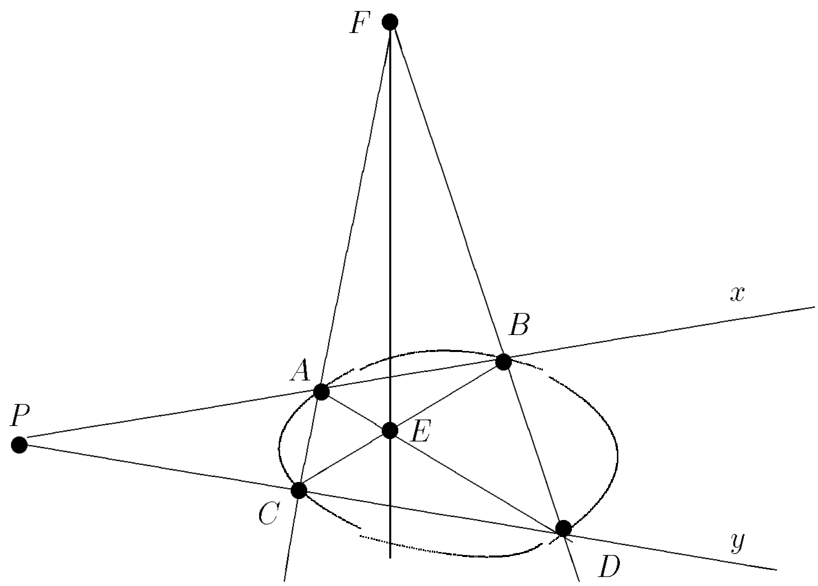
Доказательство. Напомним (см. § про инварианты), что матрица A и компоненты $(x, y, 1)$ меняются по законам $A' = D^T A D$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда из (15) получаем требуемый результат. $\square$

Теорема 13.10. *Пусть A, B и C, D — точки пересечения двух секущих, проведенных из P к конике, точки E и F — точки пересечения AD с BC и AC с BD, соответственно. Тогда прямая (EF) является полярой P.*

Доказательство.



Рассмотрим аффинную систему координат, у которой прямые AB и CD являются осями, а точка P — началом. Таким образом, A и B удовлетворяют $y = 0$, а значит, A и B имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_1 x + a_0 = 0. \qquad (16)$$

Аналогично, C и D имеют координаты y_1 и y_2, причем

$$a_{22}y^2 + 2a_2 y + a_0 = 0. \qquad (17)$$

Получаем соответствующие уравнения "в отрезках":

$$(AD): \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1,$$

$$\begin{aligned}
(BC):&\qquad \frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_1}=1,\\
(AC):&\qquad \frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1,\\
(BD):&\qquad \frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_2}=1.
\end{aligned}$$

При этом $(AD)\cap(BC)=E$ и $(AC)\cap(BD)=F$. Уравнение EF имеет вид

$$\frac{x}{x_1}+\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_1}+\frac{y}{y_2}=2,$$

поскольку E и F ему удовлетворяют (как удовлетворяющие соответственно первой и второй паре уравнений из четырех, записанных выше). Следовательно,

$$(EF):\qquad \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\cdot x+\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\cdot y=2.$$

Из уравнений (16) и (17) по теореме Виета получаем

$$x_1+x_2=\Leftrightarrow\frac{2a_1}{a_{11}},\qquad x_1x_2=\frac{a_0}{a_{11}},\qquad y_1+y_2=\Leftrightarrow\frac{2a_2}{a_{22}},\qquad y_1y_2=\frac{a_0}{a_{22}},$$

откуда

$$(EF):\qquad \frac{\Leftrightarrow 2a_1}{a_0}\cdot x+\frac{\Leftrightarrow 2a_2}{a_0}\cdot y=2,$$

или

$$a_1x+a_2y+a_0=0.$$

Как легко видеть, это уравнение поляры точки P, имеющей координаты $(0,0)$ в используемой системе. □

Следствие 13.11. *Точки пересечения диагоналей четырехугольников, образованных секущими, проведенными из одной точки к данной конике, лежат на одной прямой — поляре этой точки.*

Следствие 13.12. *В условиях теоремы треугольник PEF является автополярным, т. е. для каждой вершины противоположная сторона является ее полярой.*

Теорема 13.13. *Точка P принадлежит поляре точки Q тогда и только тогда, когда Q принадлежит поляре P.*

Доказательство. Сразу вытекает из симметрии уравнения поляры. Одно соотношение переходит в другое при транспонировании. □

Определение 13.14. Точка, для которой строится поляра, называется *полюсом* этой поляры.

Замечание 13.15. Для внешних точек полюс определен однозначно по предложению 13.7. Для внутренних это следует из двойственности: проведем две хорды и т. д. (см. способ построения ниже).

Замечание 13.16. В обычной (непроективной) геометрии не всякая точка имеет поляру (например, центр не имеет) и не всякая прямая имеет полюс, т. е. является полярой (диаметр центральной кривой).

Сейчас мы обсудим еще один способ построения поляры. Мы будем иметь дело с внутренними точками. Пусть P — такая точка. Проведем через нее две секущие (хорды), а через их концы — пары касательных. Если P не является центром, то прямые внутри хотя бы одной пары не параллельны. Так что получаем либо две точки пересечения, либо точку и направление. Можно провести рассуждение и во второй ситуации, но мы просто выберем другую хорду. Итак, имеем две точки пересечения: E и F. Утверждается, что EF — поляра P. Действительно, по предложению 13.7, точка P принадлежит полярам и E и F, значит, по предыдущей теореме, E и F принадлежат поляре P.

Задача 13. (Теорема Брианшона) Диагонали шестиугольника, описанного около коники, пересекаются в одной точке. *Указание*: Диагонали являются полярами точек пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника, образованного точками касания. А эти точки пересечения по теореме Паскаля лежат на одной прямой. Точка пересечения — ее полюс.

14. Аффинные преобразования

Определение 14.1. *Преобразованием* называется взаимно-однозначное отображение множества на себя.

Определение 14.2. Отображение плоскости (пространства) в себя называется *аффинным преобразованием,* если найдутся такие две аффинные системы координат, что координаты любой точки в одной из них являются координатами ее образа в другой.

Замечание 14.3. Очевидно, что аффинное преобразование является преобразованием.

Замечание 14.4. Допустим, первая из фигурирующих в определении аффинного преобразования f систем координат $Oe_1e_2e_3$ фиксирована (аналогично для плоскости). Пусть M_i — концы векторов e_i, отложенных от точки O. Тогда вторая система обязательно имеет вид $O' = f(O)$, $e_i' = \overrightarrow{f(O)f(M_i)}$ ($i = 1, 2, 3$, или $i = 1, 2$ для плоскости). Это сразу следует из определения координат.

Теорема 14.5. *Пусть f — аффинное преобразование, $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$ — система координат, фигурирующая в определении. Пусть C — матрица f (зависящая от репера): по столбцам выписаны координаты e_i' в старом базисе. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты O' в старом репере. Рассмотрим произвольную точку*

P и ее образ $P' = f(P)$. Тогда их координаты (x, y, z) и (x', y', z') в старом репере связаны формулами

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Обратно, если фиксирована аффинная система координат, то любая формула вида (18) с невырожденной матрицей C задает некоторое аффинное преобразование.

Аналогично для плоскости.

Доказательство. Таким образом, матрица C — это матрица перехода от базиса $e_1 e_2 e_3$ к базису $e_1' e_2' e_3'$:

$$\begin{aligned} e_1' &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3, \\ e_2' &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3, \\ e_3' &= c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3. \end{aligned}$$

Для произвольной точки $P(x, y, z)$ и ее образа $\widetilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (все координаты в первоначальном репере) имеем

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}, \qquad \overrightarrow{OO'} = x_0\, e_1 + y_0\, e_2 + z_0\, e_3, \qquad \overrightarrow{O'P} = x\, e_1' + y\, e_2' + z\, e_3',$$

$$\overrightarrow{OP} = \tilde{x}\, e_1 + \tilde{y}\, e_2 + \tilde{z}\, e_3 = x_0\, e_1 + y_0\, e_2 + z_0\, e_3 + x\, e_1' + y\, e_2' + z\, e_3' =$$

$$= x_0\, e_1 + y_0\, e_2 + z_0\, e_3 + x\,(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3) + y\,(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3) + z\,(c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3),$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\, c_{11} + y\, c_{12} + z\, c_{13} + x_0 \\ x\, c_{21} + y\, c_{22} + z\, c_{23} + y_0 \\ x\, c_{31} + y\, c_{32} + z\, c_{33} + z_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Те же выкладки, проведенные в обратном порядке, показывают, что верно обратное утверждение. При этом условие невырожденности матрицы C гарантирует, что штрихованная система является репером, т. е. линейно независима. □

Следствие 14.6. *Если преобразование f является аффинным относительно одного репера, то и относительно любого.*

Доказательство. Пусть f является аффинным относительно репера $Oe_1e_2e_3$, тогда по теореме имеют место формулы (18). Пусть $O^* e_1^* e_2^* e_3^*$ — произвольный репер. Пусть D — матрица перехода от $Oe_1e_2e_3$ к $O^* e_1^* e_2^* e_3^*$, так что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \\ z_0^* \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты $(\widetilde{x}_*, \widetilde{y}_*, \widetilde{z}_*)$ образа $\widetilde{P} = f(P)$ и координаты (x_*, y_*, z_*) точки P в репере $O^* e_1^* e_2^* e_3^*$ связаны формулами

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_* \\ \widetilde{y}_* \\ \widetilde{z}_* \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix} = D^{-1}\, C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + D^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix} =$$

$$= D^{-1}\, C\, D \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z* \end{pmatrix} + \underbrace{D^{-1}\, C \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \\ z_0^* \end{pmatrix} + D^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{pmatrix}}_{\text{постоянный вектор}}.$$

Применяя обратное утверждение теоремы, получаем требуемое утверждение. □

Определение 14.7. Определим действие аффинного преобразования f на представителях векторов формулой $f(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$.

Следствие 14.8. *Действие f на векторах корректно определено в координатах формулой*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\gamma} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

где (α, β, γ) — координаты вектора v, а $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ — координаты вектора $f(v)$. В частности, для линейных комбинаций векторов

$$f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

Теорема 14.9. *Всякое аффинное преобразование*

1) *переводит прямые в прямые, плоскости — в плоскости, сохраняя свойство параллельности,*

2) *сохраняет отношение длин отрезков на параллельных прямых.*

Доказательство. Уравнения прямых и плоскостей в первой системе координат совпадают с уравнениями их образов относительно второй системы координат. Это доказывает пункт 1).

Пункт 2) следует из следствия про отображение векторов. □

Задача 14. Доказать обратное: преобразование плоскости или пространства с условиями 1) и 2) является аффинным.

14.1. Изометрические преобразования

Определение 14.10. Аффинное преобразование называется *изометрическим* (или *изометрией*), если оно сохраняет расстояния между точками:

$$\rho(f(P), f(Q)) = \rho(P, Q).$$

Задача 15. Доказать, что аффинности можно не требовать, т. е. из сохранения расстояния аффинность следует всегда.

Предложение 14.11. *Изометрия сохраняет углы между прямыми.*

Доказательство. Равенство треугольников, в частности углов, по трем сторонам. □

Теорема 14.12. *Пусть f — аффинное преобразование, а $Oe_1e_2e_3$ — прямоугольная система координат. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *f — изометрия;*

2) *соответствующий репер $O'e_1'e_2'e_3' = f(O)f(e_1)f(e_2)f(e_3)$ является прямоугольным;*

3) *в соответствующей координатной записи f матрица C является ортогональной.*

Доказательство. Второй и третий пункт эквивалентны по теореме 7.8.

Из 1) следует 2) так как изометрия сохраняет длины, а по предложению, и углы. Обратно, пусть произвольные точки P и Q имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, относительно прямоугольной системы $Oe_1e_2e_3$. Тогда их образы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ имеют те же координаты в прямоугольной системе $O'e_1'e_2'e_3'$. По формуле для нахождения расстояния в прямоугольной системе координат имеем в первой и второй системах соответственно:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 \Leftrightarrow x_2)^2 + (y_1 \Leftrightarrow y_2)^2 + (z_1 \Leftrightarrow z_2)^2},$$

$$\rho(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = \sqrt{(x_1 \Leftrightarrow x_2)^2 + (y_1 \Leftrightarrow y_2)^2 + (z_1 \Leftrightarrow z_2)^2}. \qquad \square$$

Определение 14.13. Преобразование, заданное в некоторой прямоугольной системе координат формулами

$$\widetilde{x} = x + a, \qquad \widetilde{y} = \Leftrightarrow y,$$

называется *скользящей симметрией*. Это композиция симметрии относительно некоторой прямой и сдвига вдоль нее.

Теорема 14.14 (Шаля). *Всякая изометрия плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом относительно некоторой точки, либо скользящей симметрией относительно некоторой прямой.*

Доказательство. Напомним, что ортогональные матрицы 2×2 имеют один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала изометрии с $\det C = 1$ (изометрии первого рода). Если $\varphi = 0$, то $C = E$ и f является параллельным переносом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Если $\varphi \neq 0$ (с точностью до $2\pi k$), то найдем неподвижные точки отображения f, т. е. такие P_*, что $f(P_*) = P_*$. Имеем для координат (x_*, y_*) точки P_* уравнения

$$\begin{cases} \tilde{x}_* &= x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi + x_0 &= x_* \\ \tilde{y}_* &= x_* \sin\varphi + y_* \cos\varphi + y_0 &= y_* \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_*(\cos\varphi - 1) - y_* \sin\varphi &= -x_0 \\ x_* \sin\varphi + y_*(\cos\varphi - 1) &= -y_0 \end{cases}.$$

Поскольку $\varphi \neq 0$, то $\cos\varphi \neq 1$ и определитель системы

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi \neq 0.$$

Следовательно, неподвижная точка $P_*(x_*, y_*)$ существует и единственна. Рассмотрим новую систему координат (x', y'), заданную соотношениями

$$x' = x - x_*, \qquad y' = y - y_*$$

(т. е. сдвинем начало координат в точку P_*). В новой системе координат формулы преобразования f будут иметь вид

$$\begin{aligned} \widetilde{x'} &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ \widetilde{y'} &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \end{aligned}$$

т. е. преобразование является поворотом на угол φ.

Рассмотрим теперь изометрию второго рода: $\det C = -1$. Покажем, что в этом случае существует неподвижный (свободный) вектор. Имеем для его координат (α, β) систему уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi\,\alpha + \sin\varphi\beta &= \alpha \\ \sin\varphi\,\alpha - \cos\varphi\beta &= \beta \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -(\cos\varphi + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом
$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -(\cos\varphi + 1) \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$$
для любого угла φ. Поэтому существует ненулевое решение (α, β). Рассмотрим систему координат с тем же началом, что и исходная, и базисными векторами
$$e_1' := \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,(\alpha, \beta), \qquad e_2' := \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,(-\beta, \alpha).$$
Поскольку $f(e_1') = e_1'$, то $C' = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$. Так как C' ортогональна и $\det C' = -1$, то $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Значит, в штрихованной системе координат f имеет формулы
$$\begin{aligned} \widetilde{x}' &= x' + a, \\ \widetilde{y}' &= -y' + b, \end{aligned}$$
где a и b — некоторые константы. Перейдем к новой системе координат (x'', y''), положив
$$x'' = x', \qquad y'' = y' - \frac{b}{2}.$$
Тогда для образа $(\widetilde{x''}, \widetilde{y''})$ точки (x'', y'') имеем
$$\widetilde{x''} = x'' + a, \qquad \widetilde{y''} = \widetilde{y}' - \frac{b}{2} = -y' + b - \frac{b}{2} = -y'' - \frac{b}{2} + b - \frac{b}{2} = -y'',$$
т. е. скользящую симметрию относительно оси $O''x''$. $\square$

В пространстве введем следующие понятия:

Определение 14.15. *Винтовое вращение* — композиция поворота относительно некоторой прямой и сдвига вдоль нее;

скользящая симметрия — композиция симметрии относительно некоторой плоскости и сдвига параллельно ей;

зеркальное вращение — композиция поворота относительно некоторой прямой и симметрии относительно перпендикулярной ей плоскости.

Прежде, чем перейти к пространственному аналогу предыдущей теоремы, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 14.16. *Любая ортогональная трехмерная матрица имеет собственный вектор, отвечающий собственному значению* ± 1.

Доказательство. Поскольку мы имеем дело с изометриями, то собственный вектор, если таковой существует, не может изменить длину. Поэтому собственное значение может быть равным только ± 1.

С другой стороны, характеристический многочлен имеет в случае пространства степень 3, а его корни вещественны или попарно комплексно сопряжены. Значит, хотя бы один из них вещественен, и следовательно, равен ± 1. $\square$

Теорема 14.17. *Всякая изометрия пространства является одним из следующих преобразований:*

1) *винтовое вращение (в частности, параллельный перенос);*

2) *скользящая симметрия;*

3) *зеркальное вращение.*

Доказательство. Выберем ортонормированный базис, взяв в качестве e_1 собственный вектор из леммы. Тогда в этом базисе матрица f будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0\ 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{G} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

где G — ортогональная 2×2-матрица.

Пусть $\det G = -1$, тогда из доказательства теоремы 14.14 следует, что e_2 и e_3 можно выбрать таким образом, что $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а для матрицы f мы имеем две возможности:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По тем координатам, где (-1), произведем сдвиг, как в теореме 14.14. В результате получим в новой системе координат два варианта формул f:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & x' + a \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{(z')} & = & -z' \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & -x' \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{(z')} & = & -z' \end{array}.$$

В первом случае имеем скользящую симметрию, а во втором — винтовое вращение на угол π.

Пусть теперь $\det G = 1$. Тогда $G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Если $\varphi = 0$, то получаем либо параллельный перенос (частный случай винтового вращения), либо, если в левом верхнем углу стоит (-1), сделав опять сдвиг "на половину свободного члена", отображение с формулами

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & -x' \\ \widetilde{y'} & = & y' + b \\ \widetilde{z'} & = & z' + c \end{array},$$

т. е. скользящую симметрию. Если $\varphi \neq 0$, то так же как в соответствующей части доказательства теоремы 14.14, найдем точку (y_*, z_*) и произведем соответствующий сдвиг таким образом, что в новой системе координат (x', y', z') формулы f будут

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x'} & = & \pm x' + a \\ \widetilde{y'} & = & y' \cos\varphi - z' \sin\varphi \\ \widetilde{z'} & = & y' \sin\varphi + z' \cos\varphi. \end{array}$$

В случае (+) получили винтовое вращение. В случае (⇔), сделав опять сдвиг "на половину свободного члена", получим отображение с формулами

$$\begin{aligned}\widetilde{x}' &= \Leftrightarrow x'\\ \widetilde{y}' &= y'\cos\varphi \Leftrightarrow z'\sin\varphi\\ \widetilde{z}' &= y'\sin\varphi + z'\cos\varphi,\end{aligned}$$

т. е. зеркальное вращение. □

15. Аффинная и метрическая классификация квадрик

Определение 15.1. Две существенные квадрики *аффинно* (соотв., *метрически*) *эквивалентны,* если одна из них может быть переведена в другую аффинным (соотв., изометрическим) преобразованием как множество точек.

Определение 15.2. Две квадрики *сильно аффинно* (соотв., *метрически*) *эквивалентны,* если одна из них может быть переведена в другую аффинным (соотв., изометрическим) преобразованием как множество точек и уравнение первой кривой в любой системе координат совпадает (с точностью до ненулевого множителя) с уравнением второй кривой в отображенной системе.

Заметим, что образ существенной квадрики при аффинном преобразовании — квадрика, имеющая в отображенном репере то же уравнение, что исходная квадрика в исходном репере. Таким образом для существенных квадрик понятия эквивалентности и сильной эквивалентности совпадают.

Теорема 15.3. *Две существенные квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид. Для несущественных одинаковый канонический вид является достаточным условием метрической эквивалентности.*

Две квадрики сильно метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.

Доказательство. Достаточность. Любая квадрика имеет в некоторой прямоугольной (канонической) системе координат каноническое уравнение одного из девяти типов, причем однозначно определенное (в отличие от канонической системы), как показывает теория инвариантов и семиинварианта. Пусть две квадрики имеют одинаковые канонические уравнения в системах Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$ соответственно. Тогда изометрия, переводящая первый репер во второй, переводит первую квадрику во вторую.

Необходимость. Рассмотрим две метрически эквивалентные существенные квадрики. Рассмотрим каноническую систему Oxy для первой из них и ее образ $O'x'y'$ при данной изометрии. В первой системе квадрики имеют уравнения $F_1(x,y) = 0$ и $F_2(x,y) = 0$, причем F_1 — каноническое. Тогда вторая квадрика имеет два уравнения в новой системе координат: то же, что первая кривая имела в исходной системе, т. е. $F_1(x', y') = 0$ и то, что получается заменой координат, т. е. $F_2'(x', y') = F_2(x(x', y'), y(x', y')) = 0$. Но поскольку квадрика существенная, то они отличаются лишь на ненулевой множитель. Таким образом, $F_1(x', y') = 0$ — каноническое уравнение и для второй квадрики.

Очевидно, что если добавить условие сильной эквивалентности, то от существенности в последнем рассуждении можно отказаться. □

Лемма 15.4. *Для любой квадрики существует аффинная система координат, в которой она имеет одно из следующих уравнений:*

1) $x^2 + y^2 = 1$, *эллипс;*

2) $x^2 + y^2 = \Leftrightarrow 1$, *мнимый эллипс;*

3) $x^2 + y^2 = 0$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*

4) $x^2 \Leftrightarrow y^2 = 1$, *гипербола;*

5) $x^2 \Leftrightarrow y^2 = 0$, *пара пересекающихся прямых;*

6) $y^2 \Leftrightarrow 2x = 0$, *парабола;*

7) $y^2 \Leftrightarrow 1 = 0$, *пара параллельных прямых;*

8) $y^2 + 1 = 0$, *пара мнимых параллельных прямых;*

9) $y^2 = 0$, *пара совпдающих прямых.*

Доказательство. Берем каноническое уравнение и растягиваем оси. □

Теорема 15.5. *Две квадрики сильно аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство. По лемме, аналогично теореме о метрической классификации, получаем, что квадрики одного названия аффинно эквивалентны.

Обратно, докажем, что квадрики с различными названиями аффинно неэквивалентны.

У ЭГП никакие три точки не лежат на одной прямой, в отличие от остальных квадрик.

Поскольку при аффинных преобразованиях сохраняется условие числа точек пересечения и деления в данном отношении, то центр переходит в центр, а асимптотическое направление — в асимптотическое.

Так как у параболы нет центра, а у эллипса и гиперболы — есть, причем у эллипса нет асимптотических направлений, а у гиперболы — есть, то эллипс, гипербола и парабола аффинно неэквивалентны.

Существенные распадающмеся кривые различаются геометрически (так как тут сильная эквивалентность равносильна эквивалентности).

Наконец, у мнимого эллипса нет асимптотических направлений, а у пары мнимых параллельных прямых — есть. □

Следствие 15.6. *Две существенные квадрики аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Для определения названия (типа) квадрики применяют **метод Лагранжа** выделения полных квадратов. Например, рассмотрим кривую

$$x^2 \Leftrightarrow 4xy + 6y^2 + 2x + 4y \Leftrightarrow 10 = 0,$$

$$(x \Leftrightarrow 2y + 1)^2 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y \Leftrightarrow 1 + 6y^2 + 4y \Leftrightarrow 10 = 0,$$
$$(x \Leftrightarrow 2y + 1)^2 + 2y^2 + 8y \Leftrightarrow 11 = 0,$$
$$(x \Leftrightarrow 2y + 1)^2 + (\sqrt{2}y + 2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 8 \Leftrightarrow 11 = 0,$$
$$\left(\frac{x \Leftrightarrow 2y + 1}{\sqrt{19}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = 0,$$
$$(x')^2 + (y')^2 \Leftrightarrow 1 = 0,$$

эллипс. Заметим, что всегда имеем преобразование с треугольной матрицей, т. е. невырожденное.

16. Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y,z) = \underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz}_{\substack{q(x,y,z)\\ \text{квадратичная часть}}} +$$

$$+ \quad \underbrace{2a_1x + 2a_2y + 2a_3z}_{\substack{l(x,y,z)\\ \text{однородная линейная часть}}} \quad + a_0 = 0. \tag{19}$$

При этом требуется, чтобы квадратичная часть была отлична от нуля. Если ввести обозначаения

$$Q := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\ A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix},\ L := (a_1, a_2, a_3),\ X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то уравнение примет вид

$$X^T QX + LX + a_0 = (x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{20}$$

Как и раньше будем называть *квадрикой* многочлен второй степени с точностью до умножения на ненулевой множитель.

Пока будем считать систему координат прямоугольной.

Теорема 16.1 (из курса линейной алгебры). *Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задана квадратичная часть $q(x, y, z)$. Тогда найдется другая прямоугольная система координат с тем же началом, в которой квадратичная часть примет диагональный вид*

$$q'(x', y', z') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения Q, т. е. корни характеристического многочлена

$$\chi_Q(\lambda) = \det (Q \Leftrightarrow \lambda E) = 0,$$

а новые базисные вектора e_1', e_2', e_3' являются соответствующими собственными векторами. В частности, все собственные значения вещественны, а собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма 16.2. *Для любого многочлена второй степени в пространстве существует прямоугольная система координат, в которой он принимает один из следующих пяти видов:*

(i) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0)$;

(ii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z \qquad (\lambda_1 \lambda_2 b_3 \neq 0)$;

(iii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \lambda_2 \neq 0)$;

(iv) $F = \lambda_1 x^2 + 2c_2 y \qquad (\lambda_1 c_2 \neq 0)$;

(v) $F = \lambda_1 x^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \neq 0)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы можем найти такую прямоугольную систему, в которой квадратичная часть диагональна, т. е.

$$F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b_0 = 0.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

(i) При $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(x + \frac{b_3}{\lambda_3} \right)^2 + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \Leftrightarrow \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} \Leftrightarrow \frac{(b_3)^2}{\lambda_3} \right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \tau.$$

(ii) При $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2\beta_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_3 z + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \Leftrightarrow \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} \right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_3 z + \tau = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 \left(z + \frac{\tau}{2b_3} \right) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z'.$$

(iii) При $\lambda_3 = \beta_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_1 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \Leftrightarrow \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} \right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau.$$

(iv) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и хотя бы один из b_2 и b_3 не равен нулю. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2b_2 y + 2b_3 z + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \right) = \lambda_1(x')^2 + 2c_2 y',$$

где

$$\begin{aligned}
x' &= x + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad\qquad c_2 = \sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2} \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}} \left(b_2 y + b_3 z + \frac{1}{2} \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \right) \right) \\
z' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}} \left(\Leftrightarrow b_3 y + b_2 z \right).
\end{aligned}$$

Такая “нормировка” функций перехода гарантирует ортогональность соответствующей матрицы и, тем самым, ортогональность замены.

Если же $b_2 = b_3 = 0$, то мы сразу имеем выражение конечного вида.

(v) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = b_2 = b_3 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left(b_0 \Leftrightarrow \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \right) = \lambda_1(x')^2 + \tau.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 16.3. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:*

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geq b \geq c > 0)$ *(эллипсоид)*;
2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (a \geq b \geq c > 0)$ *(мнимый эллипсоид)*;
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geq b > 0)$ *(однополостный гиперболоид)*;
4) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geq b > 0)$ *(двуполостный гиперболоид)*;
5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (a \geq b > 0)$ *(конус (второго порядка))*;
6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (a \geq b > 0)$ *(мнимый конус (второго порядка))*;
7) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p \geq q > 0)$ *(эллиптический параболоид)*;
8) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (p \geq q > 0)$ *(гиперболический параболоид)*;
9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a \geq b > 0)$ *(эллиптический цилиндр)*;
10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (a \geq b > 0)$ *(мнимый эллиптический цилиндр)*;
11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (a \geq b > 0)$ *(две мнимые пересекающиеся плоскости)*;
12) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a \geq b > 0)$ *(гиперболический цилиндр)*;
13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (a \geq b > 0)$ *(две пересекающиеся плоскости)*;
14) $y^2 = 2px \qquad (p > 0)$ *(параболический цилиндр)*;
15) $y^2 = a^2 \qquad (a > 0)$ *(две параллельных плоскости)*;
16) $y^2 = -a^2 \qquad (a > 0)$ *(две мнимых параллельных плоскости)*;
17) $y^2 = 0$ *(две совпадающих плоскости)*.

Доказательство. Сначала применяем лемму, а потом для каждого из типов (i)–(v) рассматриваем все случаи. Например, возьмем (i). Возможны случаи:

Если все λ_i одного знака, а τ — противоположного, то делением на $-t$ и переменой осей уравнение приводится к виду 1) (эллипсоид).

Если все λ_i и τ одного знака, то делением на t и переменой осей уравнение приводится к виду 2) (мнимый эллипсоид).

Если все λ_i одного знака, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 6) (мнимый конус).

Если λ_i разных знаков, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 5) (конус).

Если λ_i разных знаков, причем у одного тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 3) (однополостный гиперболоид).

Если λ_i разных знаков, причем у двух тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $\Leftrightarrow\tau$ уравнение приводится к виду 4) (однополостный гиперболоид).

Таким образом, случай (i) дает 1)–6). Аналогично с другими:

(i)	1, 2, 3, 4, 5, 6
(ii)	7, 8
(iii)	9, 10, 11, 12, 13
(iv)	14
(v)	15, 16, 17

□

Теорема 16.4. *Каноническое уравнение, в отличие от канонической системы координат, определено однозначно (для видов* $5, 6, 11, 13$ *— с точностью до множителя).*

Доказательство. Так же, как и в случае кривых, доказывается, что коэффициенты (в частности, определитель δ и след S) и корни λ_i характеристического многочлена матрицы Q являются ортогональными инвариантами, а также определитель Δ матрицы A. Также инвариантны ранги r и R матриц Q и A.

Тогда поверхность однозначно относится к одному из типов (i)–(v), так как

(i)	$r = 3$; $R = 3$ или $R = 4$
(ii)	$r = 2$, $R = 4$
(iii)	$r = 2$, $R = 2$ или $R = 3$
(iv)	$r = 1$, $R = 3$
(v)	$r = 1$, $R = 1$ или $R = 2$

Внутри типа (i) λ_i — инварианты, а $\tau = \Delta/\delta$. Внутри типа (ii) λ_1, λ_2 — инварианты, а $(b_3)^2 = \Leftrightarrow\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}$.

Остальные поверхности, являясь цилиндрическими, имеют канонические уравнения, не содержащие z. Допустим, имеется замена прямоугольных координат, переводящая одно из таких уравнений в другое. Тогда x и y не зависят от z' (и поэтому доказательство сводится к доказанному двумерному случаю). Покажем это, например, для уравнения вида $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tau = 0$. Пусть $x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + c_1$ и $y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' + c_2$, а результирующее выражение не зависит от z'. Тогда

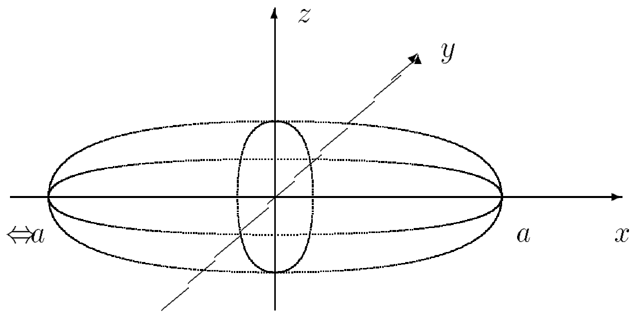
$$\begin{aligned} \lambda c_{11}c_{31} &= \Leftrightarrow\mu c_{12}c_{32} \\ \lambda c_{21}c_{31} &= \Leftrightarrow\mu c_{22}c_{32} \\ \lambda c_{31}c_{31} &= \Leftrightarrow\mu c_{32}c_{32} \\ \lambda c_{1}c_{31} &= \Leftrightarrow\mu c_{2}c_{32}, \end{aligned}$$

в частности, если хотя бы одно из c_{31} и c_{32} отлично от 0, то две первые строки матрицы перехода линейно зависимы и получаем противоречие.

Уравнения распадающихся поверхностей (11, 13, 15, 16, 17) определяются однозначно также из геометрических соображений (теория плоскостей). □

16.1. Основные виды поверхностей второго порядка и их геометрические свойства

1) эллипсоид. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Поскольку $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$, то эллипсоид ограничен.

Теорема 16.5. *Плоское сечение поверхности второго порядка есть кривая порядка не выше двух.*

Доказательство. Выберем систему координат, в которой уравнение плоскости: $z = 0$. Тогда уравнение сечения $G(x, y) := F(x, y, 0) = 0$. □

Следствие 16.6. *Непустое плоское сечение эллипсоида — эллипс или точка.*

Доказательство. Это единственные непустые ограниченные кривые 0, 1 или 2-го порядка. □

3) однополостный гиперболоид (рис. 5 а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

В сечении плоскостью $z = 0$ получается эллипс $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, называемый *горловым.*

Однополостный гиперболоид обладает следующим замечательным свойством.

Определение 16.7. Назовем *прямолинейной образующей* поверхности прямую, целиком в ней содержащуюся. Как правило, это понятие не применяется к распадающимся поверхностям.

Теорема 16.8. *Однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства, и эти две прямые пересекаются ровно по этой точке. Две различные прямые из одного семейства скрещиваются, а из разных — пересекаются или параллельны.*

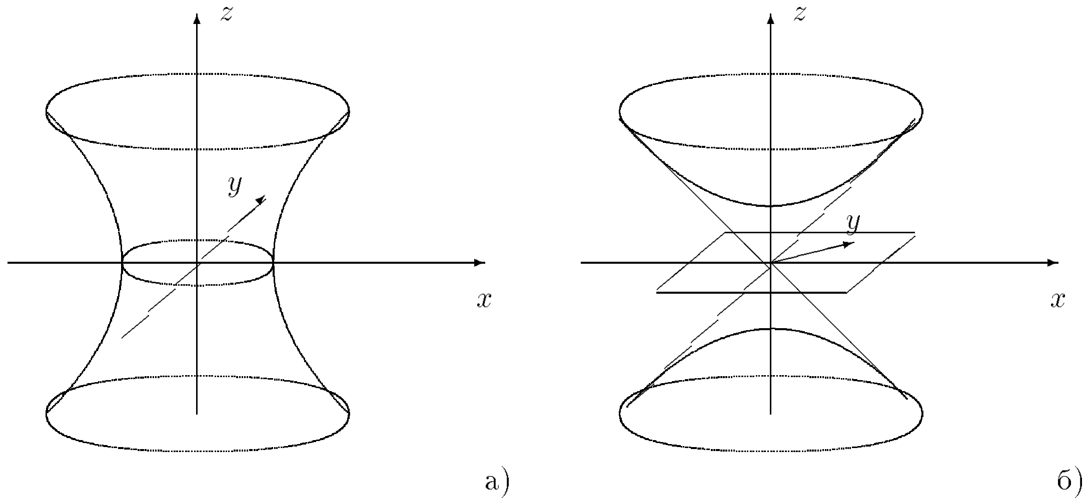


Рис. 5.

Доказательство. Заметим, что указанные свойства являются аффинными, а не метрическими, поэтому достаточно доказать теорему для гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$. Перепишем это уравнение в виде

$$x^2-z^2=1-y^2, \qquad (x-z)(x+z)=(1-y)(1+y).$$

Отсюда сразу видим два семейства прямолинейных образующих:

$$\text{I:}\quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda(x-z) & = & \mu(1-y) \\ \mu(x+z) & = & \lambda(1+y) \end{array}\right. \qquad \text{II:}\quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda(x-z) & = & \mu(1+y) \\ \mu(x+z) & = & \lambda(1-y) \end{array}\right. ,$$

где λ и μ — произвольные вещественные числа, не обращающиеся в нуль одновременно. Тогда

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2-\mu^2<0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\mu^2>0,$$

так что пары плоскостей в пересечении действительно дают прямую.

Пусть точка (x_0,y_0,z_0) принадлежит гиперболоиду. Тогда, взяв для I $\lambda=x_0+z_0$ и $\mu=1+y_0$, а для II — $\lambda=x_0+z_0$ и $\mu=1-y_0$, получим прямые, проходящие через данную точку. Поскольку одно из чисел $1-y_0$ или $1+y_0$ отлично от 0, то пара (λ,μ) определена по точке (x_0,y_0,z_0) однозначно (с точностью до множителя) для каждого семейства. Итак, через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства.

Покажем, что других образующих нет. Допустим, что образующая параллельна плоскости $z=0$, т. е. содержится в плоскости $z=z_0$. Тогда она должна содержаться в окружности $x^2+y^2=1+z_0^2$, что невозможно. Итак, всякая образующая пересекает $z=0$, а значит, и горловой эллипс (окружность). В силу вращательной симметрии достаточно исследовать одну его точку, например, $(1,0,0)$. Пусть через нее проходит прямолинейная образующая с некоторым направляющим вектором (α,β,γ):

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+\alpha t \\ y & = & \beta t \\ z & = & \gamma t \end{array}\right.$$

так что уравнение (результат подстановки в уравнение гиперболоида)

$$(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)t^2+2\alpha t=0$$

должно иметь решением любое t, откуда

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & = & 0 \\ 2\alpha & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta^2-\gamma^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Значит, направляющий вектор (с точностью до ненулевого множителя) равен $(0,1,\pm1)$, т. е. имеются две возможности, а их мы уже нашли — это прямая первого семейства и прямая второго. Итак, других образующих нет.

Из аналогичного соображения получаем, что прямые одного семейства не могут пересекаться. Пусть они параллельны одному вектору (α,β,γ). Значит, он параллелен каждой из 4-х плоскостей, фигурирующих в записи двух прямых семейства. Тогда он является ненулевым решением системы 4-х линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & -\lambda \\ \mu & -\lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' & -\lambda' \\ \mu' & -\lambda' & \mu' \end{pmatrix}$$

Если $\mu=\mu'=0$, то прямые совпадают. Если $\mu=0$ и $\mu'\neq0$, т. е. можно считать $\lambda=\mu'=1$, то ранг не меньше трех (поскольку должно быть $\mu'=u\lambda$ и $\mu'=-u\lambda$). Аналогично в обратной ситуации. Значит, можно считать, что $\mu=\mu'=1$, а λ и λ' — ненулевые. Тогда для условия $\operatorname{rk}<3$ необходимо

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & -\lambda \\ \mu & -\lambda & \mu \\ \mu' & -\lambda' & \mu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2+1+\lambda\lambda'-\lambda^2-1+\lambda\lambda'=2\lambda(\lambda'-\lambda)=0,$$

что в данной ситуации возможно только если $\lambda=\lambda'$ и прямые совпадают. Итак, две прямые одного семейства скрещиваются.

Семейства не пересекаются, так как отображение $(x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z)$ переводит прямые одного семейства в прямые другого, параллельные своим прообразам. Действительно, если бы прямая принадлежала обоим семейтвам, то ее образ — также, и тем самым, мы имели бы две параллельные прямые из одного семейства.

Теперь рассмотрим две прямые l_1 и l_2 из разных семейств. Пусть π — плоскость, проходящая через l_1 и некоторую точку $P\in l_2$, $P\notin l_1$. Поэтому соответствующее плоское сечение гиперболоида, являясь по теореме 16.5 кривой порядка не старше 2, должно быть парой параллельных или пересекающихся прямых. Одна из них — l_1, а другая — некоторая прямолинейная образующая $l \ni P$. Она не совпадает и не скрещивается с l_1, поэтому, по доказанному, не может принадлежать первому семейству, а значит, принадлежит второму, и в силу единственности прямой второго семейства, проходящей через P, совпадает с l_2. $\square$

4) двуполостный гиперболоид (рис. 5 б) $\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}\Leftrightarrow\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Плоскость $z=0$ не пересекает гиперболоид и разделяет его на две части, называемые *полостями*.

Теорема 16.9. *Двуполостный гиперболоид не имеет прямолинейных образующих.*

Доказательство. Прямолинейная образующая не может пересекать плоскость $z=0$. Значит, она лежит в плоскости $z=z_0$. Но соответствующее плоское сечение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}\Leftrightarrow 1$$

ограничено (эллипс, точка или $\emptyset$) и не может содержать прямую. $\square$

5) конус второго порядка (рис. 6 а)) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\Leftrightarrow\dfrac{z^2}{c^2}=0$

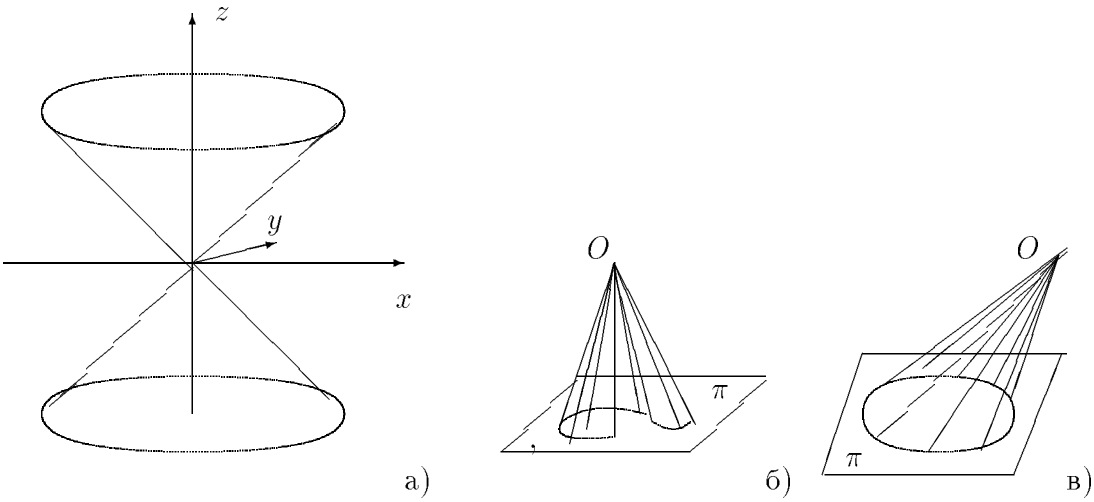


Рис. 6.

Заметим, что уравнение однородно (второго порядка): $F(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda, 2\,F(x,y,z)$, и таким образом, любая прямая, содержащая O и некоторую другую точку конуса, является прямолинейной образующей.

Определение 16.10. Пусть , — произвольная кривая, лежащая в плоскости π, а точка O не принадлежит π. *Конической поверхностью* над , с центром в O называется объединение всех прямых вида OX, $X \in$, (рис. 6 б)). Прямые OX называются *образующими,* а кривая , — *направляющей* конической поверхности.

Теорема 16.11. *Коническая поверхность над эллипсом является конусом второго порядка.*

Доказательство. Выберем такую систему координат с центром в O, что плоскость π задается уравнением $z = h \neq 0$ (рис. 6 в)). Если мы выберем направления осей Ox и Oy параллельно главным осям эллипса , , то уравнение эллипса в плоскости π примет вид:

$$F(x, y) = a_{11}(x \Leftrightarrow x_0)^2 + a_{22}(y \Leftrightarrow y_0)^2 \Leftrightarrow 1 = 0,$$

где $0 < a_{11} \leq a_{22}$. Тогда уравнение конической поверхности над ним:

$$\Phi(x, y, z) = z^2\, F\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h\right) = 0.$$

Действительно, точка (x, y, z), $z \neq 0$, принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h, h\right)$ принадлежит кривой, т. е. $F\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h\right) = 0$. Но при сделанном предположении $z \neq 0$ данное уравнение равносильно выводимому. Осталось доказать, что при $z = 0$ выводимое уравнение определено и его множество решений совпадает с O. Определенность следует из того, что во втором сомножителе степень $1/z$ равна 2 и при умножении пропадает. После умножения уравнение превращается (при $z = 0$) в $h^2\, q(x, y) = 0$. Поскольку асимптотических направлений у эллипса нет, то $x = y = 0$.

Итак,

$$\Phi(x, y, z) = z^2 \left(a_{11}\left(\frac{x \Leftrightarrow x_0}{z}\,h\right)^2 + a_{22}\left(\frac{y \Leftrightarrow y_0}{z}\,h\right)^2 \Leftrightarrow 1\right) = 0.$$

После замены $x' = x \Leftrightarrow x_0$, $y' = y \Leftrightarrow y_0$, $z' = z$ получаем

$$\Phi(x', y', z') = a_{11}h^2(x')^2 + a_{22}h^2(y')^2 \Leftrightarrow (z')^2 = 0,$$

т. е. конус. □

Задача 16. Что представляют собой конические поверхности над гиперболой и параболой ? Ответ: обычный конус без двух или одной прямой.

7) эллиптический параболоид (рис. 7 а)) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$

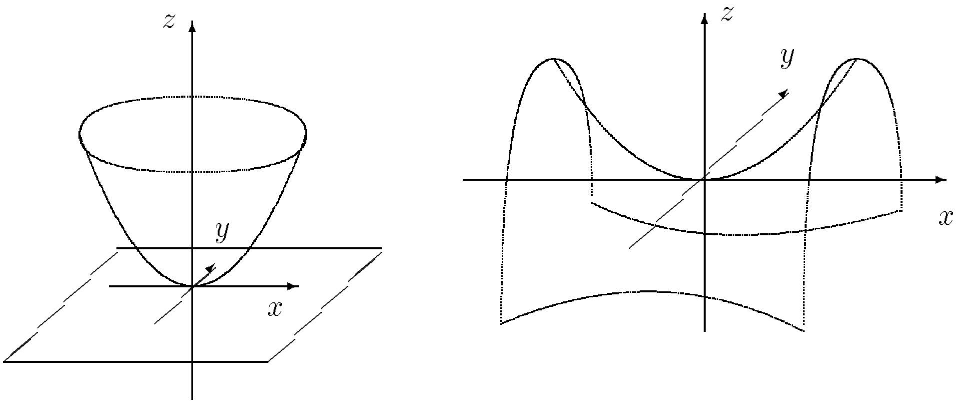
Теорема 16.12. *Эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих.*

Доказательство. Дословно как с двуполостным гиперболоидом. □

8) гиперболический параболоид (рис. 7 б)) $\dfrac{x^2}{p} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{q} = 2z$

Определение 16.13. Ненулевой вектор (α, β, γ) задает *асимптотическое направление для поверхности* $F = 0$, если он обуляет квадратичную форму уравнения

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0.$$



а) б)

Рис. 7.

Теорема 16.14. *Асимптотические направления не зависят от выбора системы координат.*

Доказательство. Дословно, как для кривых. $\square$

Теорема 16.15. *Прямолинейные образующие любой поверхности имеют асимптотическое направление.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= z_0 + \gamma t \end{cases}$$

— прямолинейная образующая. Подставив в уравнение $F = 0$, получим $F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0$ для любого t. Значит, $F_2 = q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. $\square$

Теорема 16.16. *Гиперболический параболоид имеет два семейства образующих, проходящих через каждую точку. Образующие одного семейства попарно скрещиваются и параллельны одной плоскости, а разных — пересекаются.*

Доказательство. Асимптотические направления (α, β, γ) гиперболического параболоида находятся из уравнения $\dfrac{\alpha^2}{p} \Leftrightarrow \dfrac{\beta^2}{q} = 0$, т. е. лежат в плосокстях

$$\pi_1 : \quad \frac{\alpha}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0, \qquad \pi_1 : \quad \frac{\alpha}{\sqrt{p}} + \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0.$$

С учетом уравнения параболоида

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\,z$$

это означает, что имеются два семейства прямолинейных образующих

$$\mathrm{I}: \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{q}} &= k \\ k\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2z \end{cases}; \qquad \mathrm{II}: \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= k \\ k\left(\frac{x}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2z \end{cases}.$$

Действительно, если мы имеем образующую, параллельную, скажем, π_1, то расстояние (со знаком) от любой ее точки до π_1 постоянно, т. е. с некоторой константой k мы имеем $\dfrac{x}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \dfrac{y}{\sqrt{q}} = k$, откуда из уравнения поверхности получаем второе уравнение (I). Таким образом, других образующих нет.

Через каждую точку параболоида проходит ровно по одной образующей каждого семейства, так как k определяется однозначно.

Заметим, что никакая вертикальная прямая не может быть прямолинейной образующей. Действительно, в этом случае $x = const$, $y = const$, откуда и $z = const$.

Два семейства не пересекаются. Действительно, предположим, что общая прямая имеет направляющий вектор (α, β, γ). Тогда он должен удовлетворять однородной части первых уравнений обеих систем:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\sqrt{q}} &= 0, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{p}} + \frac{\beta}{\sqrt{q}} &= 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha = \beta = 0$ и прямая вертикальна, что невозможно.

Образующие из одного семейства не могут пересекаться, так как это противоречило бы единственности. Они не могут быть параллельны, так как их направляющие вектора — $(\sqrt{p}, \sqrt{q}, k)$ с различными k. Значит, они скрещиваются, причем (по определению) параллельны фиксированной плоскости.

Пусть теперь l_1 и l_2 — образующие из разных семейств. Покажем, что они пересекаются. Рассмотрим плоское сечение параболоида, проходящее через l_1 и $P \in l_2$, $P \notin l_1$. Это кривая, порядка не выше 2, значит состоящая из двух прямых l_1 и l. Предположим $l \neq l_2$, причем они пересекаются (в точке P). Значит, l не принадлежит второму семейству, т. е. принадлежит первому. Но тогда она должна скрещиваться с l_1 и не может лежать с ней в одной плоскости. Значит, $l = l_2$. Допустим, $l_1 \| l_2$. Тогда координаты (α, β, γ) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\alpha}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0, \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{p}} + \frac{\beta}{\sqrt{q}} = 0,$$

откуда $\alpha = \beta = 0$ и образующая вертикальна, что невозможно. □

Вернемся к **гиперболоидам**. Их *асимптотический конус* определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{21}$$

Из уравнения однополостного гиперболоида имеем для положительных z:

$$z_1 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow 1},$$

а из уравнения (21) —

$$z_2 = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}},$$

откуда

$$z_2 - z_1 = \frac{c}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}} \to 0 \qquad (x^2 + y^2 \to 0).$$

Аналогично для двуполостного.

Предложение 16.17. *Асимптотические направления (α, β, γ) однополостного гиперболоида совпадают с направлениями образующих его асимптотического конуса и являются решениями* (21).

Доказательство. По определению асимптотических направлений. □

Теорема 16.18. *Никакие три различных прямолинейных образующих однополостного гиперболоида из одного семейства не параллельны одной плоскости. Любые три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, являются прямолинейными образующими некоторого однополостного гиперболоида.*

Доказательство. Рассмотрим три прямолинейных образующих из одного семейства. Допустим, они параллельны одной плоскости. Так как центральное плоское сечение (асимптотического) конуса состоит из двух пересекающихся или одной прямой, то две из трех прямых должны быть параллельны. Противоречие.

Рассмотрим три попарно скрещивающиеся прямые и некоторую аффинную систему координат, в которой они имеют вид:

$$l_1 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = x_2 \\ z = z_2 \end{cases} \qquad l_3 : \begin{cases} y = y_3 \\ z = z_3 \end{cases}$$

Следующая квадрика содержит все эти прямые:

$$(x - x_1)(y - y_3)(z - z_2) - (x - x_2)(y - y_1)(z - z_3) = 0.$$

Это действительно квадрика, так как коэффициент при x^3 равен нулю, а, скажем при xy равен $-z_2 + z_3 \neq 0$, так как прямые скрещиваются. Из классификации квадрик и доказанных свойств следует, что это — однополостный гиперболоид (у цилиндров таких образующих не может быть, это мы докажем в следующем предложении 16.19). □

Рассмотрим теперь нераспадающиеся цилиндры

9) эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

12) гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

14) параболический цилиндр $y^2 = 2px$

Предложение 16.19. *Все прямолинейные образующие нераспадающихся цилиндров являются их образующими (образующие цилиндров определяются по аналогии с коническими поверхностями) и, следовательно, параллельны между собой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямолинейную образующую и спроектируем ее на плоскость $z = 0$. Тогда результат проекции должен целиком принадлежать направляющей (конике), что возможно только тогда, когда проекция — точка, т. е. прямолинейная образующая параллельна оси Oz, т. е. образующим. □

16.2. Общая теория поверхностей второго порядка

Рассмотрев уравнение (19), введем обозначения (частные производные):

$$\begin{aligned} F_x &= 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1), \\ F_y &= 2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2), \\ F_z &= 2(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3). \end{aligned}$$

Пересечение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \tag{22}$$

с данной плоскостью описывается уравнением

$$F_2 t^2 + 2F_1 t + F_0 = 0, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= q(\alpha, \beta, \gamma), \\ 2F_1 &= (\alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)}, \\ F_0 &= F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Теорема 16.20. *Прямая неасимптотического направления имеет с поверхностью либо две общие точки (возможно, совпавшие), либо не пересекает поверхности.*

Прямая асимптотического направления либо лежит на поверхности, либо имеет с ней единственную общую точку, либо не пересекает ее.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $F_2 t^2 + F_1 t + F_0 = 0$, где $F_2 = q(\alpha, \beta, \gamma)$, а (α, β, γ) — направляющий вектор l.

Если направление неасимптотическое, то $F_2 = q(\alpha, \beta, \beta) \neq 0$ и квадратное уравнение невырождено. Оно может иметь 2, 1 или 0 решений. При этом 1 решение, когда полный квадрат. Мы можем считать, что начальная точка (x_0, y_0, z_0) лежит на кривой. Тогда $F_0 = 0$ и вторая точка совпадает с начальной, если $F_1 = 0$. Поскольку при сколь угодно малом возмущении (повороте) вектора (α, β, γ) будет уже $F_1 \neq 0$, т. е. секущая, то это две совпавшие точки.

Если же направление асимптотическое, то $F_2 = 0$ и уравнение принимает вид $2F_1 t + F_0 = 0$. Если $F_1 \neq 0$, то имеется единственная точка пересечения. Если $F_1 = 0$, а $F_0 \neq 0$, то пересечение пусто. Если $F_1 = F_0 = 0$, то пересечение l и , совпадает с l. $\square$

Теорема 16.21. *Середины хорд данного неасимптотического направления* (α, β, γ) *лежат в одной плоскости*

$$\alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z = 0, \tag{24}$$

называемой ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ, СОПРЯЖЕННОЙ ДАННОМУ НЕАСИМПТОТИЧЕСКОМУ НАПРАВЛЕНИЮ.

Доказательство. Пусть l, заданная параметрически (22), пересекает поверхность в двух (возможно совпавших) точках, и (x_0, y_0, z_0) — середина соответствующего отрезка (хорды). Для нахождения t_1 и t_2, соответствующих точкам пересечения, мы имели уравнение (23), причем в нашем случае $F_2 \neq 0$. По теореме Виета для $t_0 = 0$, отвечающего (x_0, y_0), условие середины хорды примет вид

$$0 = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2}, \qquad F_1 = 0.$$

Докажем, что данное уравнение задает плоскость, т. е. это уравнение первой степени, а не нулевой. Перепишем:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23})y + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)z + (a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) = 0$$

Если

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &=& 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma &=& 0, \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma &=& 0, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times\alpha \\ \times\beta \\ \times\gamma \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta + a_{13}\alpha\gamma &=& 0, \\ a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + a_{23}\beta\gamma &=& 0, \\ a_{13}\alpha\gamma + a_{23}\beta\gamma + a_{33}\gamma^2 &=& 0, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ + \\ \\ \end{array}\right.$$

и $q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, что противоречит неасимптотичности направления. $\square$

Лемма 16.22. *Для всякой поверхности второго порядка существуют три некомпланарных неасимптотических направления.*

Доказательство. Уравнение для нахождения асимптотических направлений $q(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ определяет, как видно после диагонализации, конус, мнимый конус или пару пересекающихся (быть может, мнимых) плоскостей. Всегда для них можно найти три искомых направления. $\square$

Теорема 16.23. Центры (*симметрии*) *непустой поверхности находятся из системы*

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_x &=& 0 \\ F_y &=& 0 \\ F_z &=& 0. \end{array}\right. \tag{25}$$

Доказательство. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть (x_0, y_0, z_0) — центр. Пусть $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$, — направляющие векторы прямых, определенных по предыдущей лемме, причем пересекающих поверхность. Тогда (x_0, y_0, z_0), как середина соответствующих хорд, принадлежит соответствующим диаметральным плоскостям, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\alpha_i(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1) + \beta_i(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2) +$$

$$+\gamma_i(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3) = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Обозначив выражения в скобках через u, v и w соответсвенно, получим, что u, v и w удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w & = & 0 \\ \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w & = & 0 \\ \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w & = & 0 \end{cases}$$

При этом уравнения линейно независимы, так как вектора $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ неколлинеарны. Значит, единственная возможность: $u = v = w = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет "уравнениям центра". Перейдем к новой системе координат (x', y', z'):

$$x' = x \Leftrightarrow x_0, \qquad y' = y \Leftrightarrow y_0, \qquad z' = z \Leftrightarrow z_0,$$

так что

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \qquad z = z' + z_0.$$

Тогда

$$F'(x', y', z') = a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + a_{33}(z' + z_0)^2 +$$

$$+2a_{13}(x' + x_0)(z' + z_0) + 2a_{23}(y' + y_0)(z' + z_0) + 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + 2a_3(z' + z_0) + a_0 =$$

$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}(z')^2 +$$

$$+2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y' +$$

$$+2(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_1)z' + F(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}(z')^2 = 0.$$

Очевидно, что если точка (x', y', z') удовлетворяет этому уравнению, то и $(\Leftrightarrow x', \Leftrightarrow y', \Leftrightarrow z')$ — тоже, а координаты M в новой системе: $(0, 0, 0)$. $\square$

Теорема 16.24. *Поверхность является* ЦЕНТРАЛЬНОЙ, *т. е. имеет единственный центр, тогда и только тогда, когда* $\delta = \det Q \neq 0$.

Доказательство. Матрица системы уравнений центра совпадает с Q. □

Определение 16.25. Неасимптотическое направление называется *главным,* если сопряженная ему диаметральная плоскость перпендикулярна ему.

Следующие два утверждения мы приводим без доказательства, аналогичного случаю кривых.

Теорема 16.26 (*). *Главные направления совпадают с собственными векторами матрицы Q квадратичной части.*

Теорема 16.27 (*). *Плоскость, сопряженная главному направлению, является плоскостью симметрии поверхности.*

Определение 16.28. Точка $P(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F = 0$ назывется *особой,* если $F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$. Таким образом, особые точки — это центры, принадлежащие поверхности.

Поверхность называется *неособой,* если она не имеет особых точек.

Неособые поверхности: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры, пара параллельных плоскостей.

Особые поверхности: конусы, пара пересекающихся плоскостей, пара совпадающих плоскостей.

Определение 16.29. Поверхность называется *невырожденной,* если $\det A \neq 0$.

Невырожденные поверхности: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды.

Определение 16.30. *Касательная прямая к поверхности $F = 0$ в неособой точке* P — прямая, имеющая с поверхностью две общие точки, совпадающие с P, либо принадлежащая поверхности.

Теорема 16.31. *Множество касательных прямых к поверхности в неособой точке P совпадает с плоскостью*

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x \Leftrightarrow x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y \Leftrightarrow y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z \Leftrightarrow z_0) = 0 \qquad (26)$$

или

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y + \\ &+ (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) = 0, \end{aligned} \qquad (27)$$

называемой КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ К ПОВЕРХНОСТИ В НЕОСОБОЙ ТОЧКЕ.

Доказательство. Пусть $P = (x_0, y_0, z_0)$, тогда для прямой (22) $F_0 = F(P) = 0$ и точки пересечения находятся из $F_2t^2 + 2F_1t = 0$, так что касание имеет место в случае $F_1 = 0$, т. е.

$$\alpha F_x(P) + \beta F_y(P) + \gamma F_z(P) = 0.$$

Это условие является необходимым и достаточным. Аналогично теории кривых доказывается, что это действительно совпавшие точки при $F_2 \neq 0$ и прямолинейная образующая, если $F_2 = 0$. □

Теорема 16.32. *Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, проходящие через данную точку образуют сечение поверхности касательной плоскостью в данной точке.*

Доказательство. Прямолинейные образующие являются касательными и, следовательно, лежат в касательной плоскости. Других точек пересечения нет, так как плоское сечение — кривая порядка не выше двух. □

16.3. Аффинная и метрическая классификация поверхностей второго порядка

Поскольку мы не доказали теоремы единственности для существенных поверхностей, а только теорему единственности канонического уравнения, то мы докажем классификационные теоремы для сильных эквивалентностей.

Теорема 16.33. *Две квадрики в пространстве сильно метрически эквивалентны тогда и толко тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.*

Теорема 16.34. *Две квадрики в пространстве сильно аффинно эквивалентны тогда и толко тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство теорем дословно повторяет случай кривых, за исключением доказательства аффинной неэквивалентности поверхностей с разными названиями. Проведем его.

Прежде всего заметим, что ранги r и R являются аффинными, а не только ортогональными инвариантами. Поэтому надо доказать неэквивалентность лишь в пределах каждого из классов (i)–(v).

Точка (мнимый конус), прямая (пара мнимых пересекающихся плоскостей), пара параллельных, пересекающихся или совпадающих плоскостей, очевидно, аффинно неэквивалентны ни друг другу, ни другим поверхностям. Для пустых множеств: мнимый эллиптический цилиндр имеет 1 асимптотическое направление, мнимый эллипсоид не имеет асимптотических направлений, пара мнимых параллельных плоскостей имеет целую плоскость асимптотических направлений.

Кроме того, эллипсоид ограничен в отличие от других нерассмотренных поверхностей. В типе (ii) остался один конус. Для оставшихся имеем

Тип	Название	Наличие центров	Прямолин. образующие
(i)	однополостный гиперболоид	1	есть
	двуполостный гиперболоид	1	нет
	эллиптический параболоид	нет	нет
	гиперболический параболоид	нет	есть

Тип	Название	Наличие центров	Асимптот. направления
(iii)	эллиптический цилиндр	прямая	одно
	гиперболический цилиндр	прямая	две плоскости
	параболический цилиндр	нет	

Теорема доказана. □

17. Элементы проективной геометрии

17.1. Пополнение плоскости

Пополненная плоскость — это плоскость, к которой присоединены некоторые “бесконечно удаленные” элементы (точки). Именно, каждому несобственному пучку ставится в соответствие *несобственная точка.* При этом считается, что собственный пучок пересекается в собственной точке, а несобственный — в несобственной. Объединение всех несобственных точек называется *несобственной прямой.*

Таким образом, выполнены следующие **аксиомы**:

AI. Через две любые различные точки проходит единственная прямая.

AII. Две любые различные прямые пересекаются в единственной точке.

Если мы забываем про то, что некоторые точки были несобственными, т. е. присоединенными, то приходим к понятию *проективной* плоскости.

Для того, чтобы эти аксиомы записать в более симметричном виде, вводится следующее понятие инцидентности.

Определение 17.1. Точка назывется *инцидентной* прямой, если точка лежит на этой прямой. Прямая называется *инцидентной* точке, если прямая проходит через эту точку.

Аксиомы примт вид:

AI. Для любых двух различных точек существует единственная прямая, инцидентная им.

AII. Для любых двух различных прямых существует единственная точка, инцидентная им.

Сформулируем следующий

Принцип двойственности: Если верно некоторое общее утверждение о точках, прямых и инцидентности между ними на проективной плоскости, то верно и двойственное утверждение, в котором точки и прямые меняются местами.

Мы не будем обсуждать полный набор аксиом, а также непротиворечивость и так далее. Мы просто построим естественную модель проективной плоскости, для которой будут выполнены указанные аксиомы и принцип двойственности.

17.2. Связка как модель проективной плоскости

Определение 17.2. *Связкой* прямых и плоскостей с центром O в трехмерном простанстве называется множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку O. Обозначаться связка будет той же буквой O. Прямая связки *инцидентна* плоскости, если она в ней содержится, плоскость связки *инцидентна* прямой, если она через нее проходит.

Определение 17.3. *Перспективное соответствие* осуществляет взаимно однозначное отображение пополненной плоскости на связку, т. е. отображение точек пополненной плоскости на множество прямых связки, определяемое следующим образом. Рассмотрим пополняемую плоскость π как лежащую в трехмерном пространстве. Пусть точка O не принадлежит π и определяет связку. Каждой собственной точке π поставим в соответствие единственную прямую связки, проходящую через нее. Каждой несобственной точке π, т. е. направлению или несобственному пучку на π, поставим в соответствие единственную прямую связки, имеющую то же направление.

Очевидно, что выполнены следующие условия.

Предложение 17.4. *При перспективном соответствии прямые переходят в плоскости и сохраняется отношение инцидентности. Поэтому прямые связки называют "точками", а плоскости — "прямыми" данной модели проективной плоскости.*

Замечание 17.5. При перспективном соответствии несобственная прямая переходит в плоскость связки, параллельную π. Таким образом, пополненная плоскость соответствует связке с выделенной плоскостью, а проективная плоскость — просто связке.

Пусть теперь $Oe_1e_2e_3$ — произвольный репер с центром в O. Рассмотрим направляющий вектор прямой l из связки O. Допустим, что он имеет координаты (x_1, x_2, x_3). Координаты другого направляющего вектора l будут отличаться от них ненулевым множителем. Тройка чисел $(x_1 : x_2 : x_3)$, определенная с точностью до ненулевого множителя называется *однородными координатами* l относительно указанного репера.

Заметим, что все три числа x_1, x_2, x_3 не могут быть нулевыми одновременно.

Рассмотрим плоскость $\pi : x_3 = 1$ и репер Ee_1e_2 в ней, где E имеет в $Oe_1e_2e_3$ координаты $(0, 0, 1)$ (см рис. 8).

При соответствии, обратном к перспективному, точке $(x_1 : x_2 : x_3)$ с $x_3 \neq 0$ отвечает точка плоскости π с координатами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Остальным точкам соответствуют несобственные точки пополненной плоскости π.

Уравнение прямой в однородных координатах имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

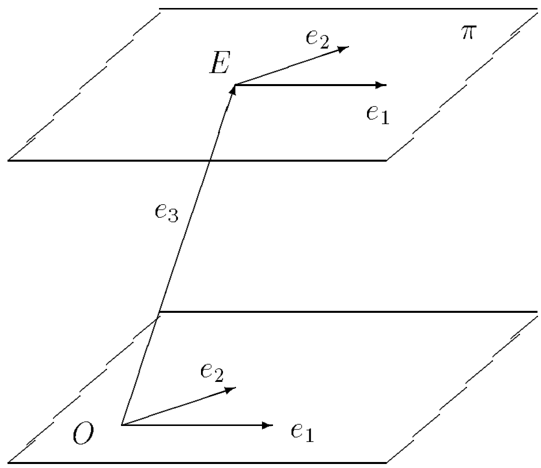


Рис. 8.

где тройка (a_1, a_2, a_3) определена с точностью до ненулевого множителя, а a_1, a_2, a_3 не обращаются в нуль одновременно. Таким образом, прямая также приобретает "однородные координаты" $(a_1 : a_2 : a_3)$.

Если a_1 или a_2 не обращаются в нуль, то это обычная прямая, пополненная несобственной точкой. Если же $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, то это несобственная прямая $x_3 = 0$.

Предложение 17.6. *Три точки X, Y и Z проективной плоскости с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$, $(y_1 : y_2 : y_3)$ и $(z_1 : z_2 : z_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Равенство нулю определителя есть условие компланарности соответствующих векторов. $\square$

Теорема 17.7. *Для проективной плоскости в модели связки выполнен принцип двойственности.*

Доказательство. Условие инцидентности в координатах записывается в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

симметричном по двум объектам. $\square$

Теорема 17.8 (Дезарга). *Пусть на проективной плоскости заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, причем одноименные вершины и стороны, точнее, прямые, их содержащие, не совпадают. Тогда три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим указанные точки пересечения через P, Q и R,

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть S — точка пересечения прямых AA', BB' и CC'. Пусть $a, b, c, a', b', c', p, q, r, s$ — некоторые представители (тройки) однородных координат точек $A, B, C, A', B', C', P, Q, R, S$: $a = (a_1, a_2, a_3), \ldots$ Тогда для некоторых $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$

$$\begin{cases} s &= \alpha a + \alpha' a' \\ s &= \beta b + \beta' b' \\ s &= \gamma c + \gamma' c' \end{cases}$$

Заметим, что для этого необходимо было несовпадение a и a' и т. д. Тогда

$$\begin{cases} u &:= \beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b' \\ v &:= \gamma c - \alpha a = \alpha' a' - \gamma' c' \\ w &:= \alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a' \end{cases}$$

Таким образом, u отвечает точке лежащей и на прямой BC и на $B'C'$, т. е. Q. Аналогично, v — некоторый представитель координат R, а w — P. Сложив почленно равенства, определяющие u, v и w, получим $u + v + w = (0, 0, 0)$, т. е. точки лежат на одной прямой (плоскости связки).

$\boxed{\Leftarrow}$ Переформулируем доказанное утверждение в следующем виде.

Пусть на проективной плоскости заданы две тройки точек ABC и $A'B'C'$, ни одна из которых не инцидентна одной прямой, обозначим через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ *прямые, инцидентные B и C, A и C, A и B, B' и C', A' и C', A' и B', и пусть $A \neq A'$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$, $B \neq B'$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$, $C \neq C'$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}'$. Обозначим через* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *прямые, инцидентные точкам A и A', B и B', C и C' соответственно. Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ точки, инцидентные прямым* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{C}'$ *соответственно. Пусть три прямые* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *инцидентны одной точке. Тогда три точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ инцидентны одной прямой.*

По принципу двойственности, мы доказали тем самым следующее двойственное утверждение.

Пусть на проективной плоскости заданы две тройки прямых $\mathbf{ABC}$ *и* $\mathbf{A'B'C'}$, *ни одна из которых не инцидентна одной точке, обозначим через A, B, C, A', B', C' точки, инцидентные* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ *и* $\mathbf{C}'$, $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{C}'$, $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{B}'$, *и пусть $A \neq A'$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$, $B \neq B'$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$, $C \neq C'$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}'$. Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ точки, инцидентные прямым* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{C}'$ *соответственно. Обозначим через* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *прямые, инцидентные точкам A и A', B и B', C и C' соответственно. Пусть три точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ инцидентны одной прямой. Тогда три прямые* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *инцидентны одной точке.*

Но это и есть обратное утверждение. $\square$

17.3. Проективные преобразования

Определение 17.9. Всякое аффинное преобразование пространства, оставляющее центр связки O на месте, отображает прямые, проходящие через O в некоторые другие прямые, проходящие через O. Возникающее таким образом отображение связки в себя называется *проективным.*

Непосредственно из определения следует, что проективное преобразование переводит прямые проективной плоскости в прямые, сохраняя отношение инцидентности.

Если C — матрица аффинного преобразования в репере $Oe_1e_2e_3$, то в соответствующих однородных координатах проективное преобразование запишется в виде

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \\ \widetilde{x_3} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где λ — произвольный ненулевой множитель. В соответствующих аффинных координатах на плоскости:

$$\widetilde{x} = \frac{\widetilde{x_1}}{\widetilde{x_3}} = \frac{c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3} = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}, \tag{28}$$

$$\widetilde{y} = \frac{\widetilde{x_2}}{\widetilde{x_3}} = \frac{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3}{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3} = \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}. \tag{29}$$

Определение 17.10. *Фундаментальной четверкой* называется четверка точек $X_1X_2X_3E$ точек проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

В модели связки это четыре прямые, никакие три из которых не лежат на одной плоскости. Всякая система однородных координат определяет фундаментальную четверку $X_1 = (1 : 0 : 0)$, $X_2 = (0 : 1 : 0)$, $X_3 = (0 : 0 : 1)$, $E = (1 : 1 : 1)$. Обратно, каждая четверка тем же способом определяет с точностью до коэффициента пропорциональности однозначно тройку векторов e_1, e_2, e_3. Но пропорциональность не влияет на тройку однородных координат, которая определена с точностью до коэффициента. Таким образом, фундаментальная четверка определяет систему однородных координат.

Задача 17. Пусть $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$ — две фундаментальные четверки. Тогда существует ровно одно проективное преобразование, переводящее одну в другую.

Задача 18. Как следствие, для любой прямой существует проективное преобразование, переводящее ее в несобственную.

Задача 19. Центральная проекция плоскости на плоскость является проективным преобразованием.

17.4. Проективно-аффинные преобразования

Определение 17.11. Проективное преобразование φ пополненной плоскости (т. е. проективной плоскости, у которой выделена несобственная прямая), переводящее эту выделенную прямую в себя, называется *проективно-аффинным.*

Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы две различные несобственные точки перешли в несобственные. Поскольку прямая переходит в прямую, в частности, несобственная, то никакая собственная точка не может отобразиться в несобственную. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 17.12. Обозначим через f_0 ограничение f на собственные точки, т. е. непополненную плоскость. Тогда f_0 отображает непополненную плоскость на себя.

Предложение 17.13. *Отображение f_0 является аффинным.*

Доказательство. Пусть введены однородные координаты и $x_3 = 0$ — несобственная прямая. Пусть f имеет матричную запись

$$\begin{array}{rcl} \lambda\widetilde{x_1} & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \lambda\widetilde{x_2} & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \lambda\widetilde{x_3} & = & c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{array}$$

Если при любых x_1 и x_2 из $x_3 = 0$ следует $\widetilde{x_3} = 0$, то $c_{31} = c_{32} = 0$ и из (28) и (29) получаем

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{x} & = & \dfrac{c_{11}}{c_{33}}x + \dfrac{c_{12}}{c_{33}}y + \dfrac{c_{13}}{c_{33}}, \\ \widetilde{y} & = & \dfrac{c_{21}}{c_{33}}x + \dfrac{c_{22}}{c_{33}}y + \dfrac{c_{23}}{c_{33}}. \end{array} \qquad \square$$

17.5. Проективная прямая

Проективная прямая (прямая, пополненная одной точкой) определяется аналогичным образом. Роль модели связки теперь играет собственный пучок прямых на плоскости, так что его прямая, параллельная пополняемой прямой, соответствует бесконечно удаленной точке. Проективное преобразование в однородных координатах записывается формулами

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\widetilde{x_1} & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \lambda\widetilde{x_2} & = & c_{12}x_1 + c_{22}x_2 \end{array} \right. , \qquad \det C = \det \|c_{ij}\| \neq 0.$$

Простое отношение трех различных точек A_1, A_2 и A_3 на прямой — это такое число λ, что $\overleftrightarrow{A_1A_3} = \lambda \cdot \overleftrightarrow{A_2A_3}$. Обозначение: $\lambda = \dfrac{A_1A_3}{A_2A_3}$.

Двойное (или сложное) отношение четырех различных точек A_1, A_2, A_3 и A_4 на прямой — это
$$(A_1A_2A_3A_4) := \frac{A_1A_3}{A_2A_3} : \frac{A_1A_4}{A_2A_4}.$$
В аффинных координатах
$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{x_3 \Leftrightarrow x_1}{x_3 \Leftrightarrow x_2} : \frac{x_4 \Leftrightarrow x_1}{x_4 \Leftrightarrow x_2}.$$

Очевидны свойства двойного отношения:

1) $\quad (A_1A_2A_3A_4) = (A_3A_4A_1A_2)$,

2) $\quad (A_1A_2A_4A_3) = \dfrac{1}{(A_1A_2A_3A_4)}$.

Доопределим двойное отношение
$$(A_1A_2A_3\infty) := \frac{A_1A_3}{A_2A_3} = \frac{x_3 \Leftrightarrow x_1}{x_3 \Leftrightarrow x_2}.$$

Лемма 17.14. *В соответствующих однородных координатах $(x : y)$:*
$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}.$$

Доказательство. Правая часть определена корректно, т. е. не меняется при заменах $(x_i, y_i) \to (\lambda x_i, \lambda y_i)$ и совпадает с формулой в аффинных координатах при $y_i = 1$, причем, если $y_4 = 0$, то имеем формулу для $(A_1A_2A_3\infty)$. $\square$

Теорема 17.15. *Двойное отношение четырех точек на проективной прямой не зависит от выбора однородных координат.*

Доказательство. При замене вида $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ имеем
$$\lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{pmatrix},$$
$$\lambda_i\lambda_j \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = \det C \cdot \begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix}.$$
Подставляя, видим, что λ_i и $\det C$ сокращаются. $\square$

Следствие 17.16. *Двойное отношение не меняется при проективных преобразованиях прямой.*

Простое отношение не сохраняется при проективных преобразованиях (в отличие от аффинных). Более полный ответ дает следующая теорема.

Теорема 17.17. *Для любых двух троек различных точек A_1, A_2, A_3 и A'_1, A'_2, A'_3 на прямой существует и единствено такое проективное преобразование f, что $f(A_i) = A'_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. В модели пучка прямых выберем на прямых вектора так, что $e_2 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e'_1 + e'_3$ (см. рис. 9). Проективное преобразование отвечает паре

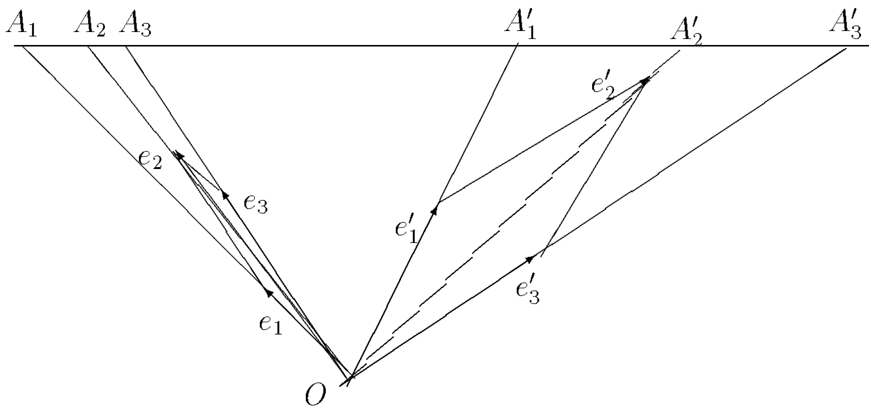


Рис. 9.

реперов Oe_1e_3 и $O'e'_1e'_3$.

Докажем единственность. Пусть имеется наряду с построенным преобразованием φ и другое — ψ. Тогда имеется точка A_4, такая, что $\varphi(A_4) \neq \psi(A_4)$. Но положение образа точки A_4 полностью определяется двойным отношением A_4 с A_1, A_2, A_3, так как двойное отношение инвариантно при замене координат, а следовательно, и при преобразовании. □

Лемма 17.18. *Пусть l_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — четыре прямые из одного пучка на проективной плоскости, а прямая l этому пучку не принадлежит. Обозначим точки пересечения l с l_i через A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$ зависит лишь от l_i и не зависит от l.*

Доказательство. Если рассмотреть другую прямую, то лучи пучка осуществляют проективное преобразование (центральная проекция), переводящее точки пересечения с l в точки пересечения с другой прямой. По теореме 17.15 двойное отношение сохраняется. □

17.6. Кривые второго порядка на проективной плоскости

Кривая второго порядка на проективной плоскости определяется как однородное уравнение второго порядка в некоторой однородной системе координат:

$$q(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}(x_3)^2 = 0.$$

Очевидно, что при проективном преобразовании она перейдет в кривую второго порядка, и что определение корректно, т. е. не зависит от умножения тройки однородных координат на ненулевой множитель.

По той же теореме из линейной алгебры, которой мы пользовались, когда говорили о поверхностях, существует такая проективная замена координат, что в новой системе уравнение примет вид

$$q'(x') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2 = 0.$$

В зависимости от знаков λ_i возможны пять случаев:

$\boxed{1}$ λ_1 и λ_2 одного знака, а λ_3 — противоположного, заменой базиса уравнение приводится к виду

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 \Leftrightarrow (x''_3)^2 = 0.$$

$\boxed{2}$ все λ_i одного знака, уравнение приводится к виду

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2 = 0.$$

$\boxed{3}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 разных знаков, тогда

$$(x''_1)^2 \Leftrightarrow (x''_2)^2 = 0.$$

$\boxed{4}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 одного знака, тогда

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 = 0.$$

$\boxed{5}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тогда

$$(x''_1)^2 = 0.$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 17.19. *Существует система однородных координат, в которой данная кривая второго порядка имеет один из следующих видов:*

$\boxed{1}$ $(x_1)^2 + (x_2)^2 \Leftrightarrow (x_3)^2 = 0$ (овал)
$\boxed{2}$ $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$ (мнимый овал)
$\boxed{3}$ $(x_1)^2 \Leftrightarrow (x_2)^2 = 0$ (пара различных прямых)
$\boxed{4}$ $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$ (пара мнимых прямых)
$\boxed{5}$ $(x_1)^2 = 0$ (пара совпавших прямых)

Теорема 17.20. *Существует ровно пять указанных классов эквивалентности кривых второго порядка относительно проективных преобразований.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы нужно только показать, что кривые из разных классов неэквивалентны. Это следует сразу из того, что прямые переходят в прямые и что ранг матрицы сохраняется. □

Замечание 17.21. Как мы уже видели, аффинное преобразование — это проективное, переводящее несобственную прямую в несобственную, и ограниченное на собственные точки. Таким образом, проективные классы могут содержать несколько аффинных. Именно, овал — это эллипс, гипербола и парабола, мнимый овал — мнимый эллипс, различные прямые — параллельные или пересекающиеся прямые, аналогично для мнимых. При этом эллипс — овал, не пересекающий несобственную прямую, гипербола — овал, пересекающий несобственную прямую, парабола — овал, касающийся несобственной прямой.