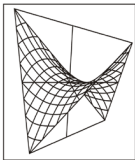


В. Блашке

**ВВЕДЕНИЕ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ
ГЕОМЕТРИЮ**



В. БЛАШКЕ

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Издание второе, исправленное и дополненное

Перевод с немецкого
А. П. Широкова
под редакцией
А. П. Нордена, В. А. Александрова

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2000

УДК 517.4
Б 719

Библиотека «*Математика*»

Том 5

Б 719 **Блашке В.**

Введение в дифференциальную геометрию. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет». 2000. 232 с.

В этой книге излагаются в элементарной форме основы теории кривых и поверхностей с помощью метода внешних форм Картана. Идеи этого метода изложены в объеме, достаточном для понимания основного материала. В конце каждой главы приведены задачи и вопросы. В комментариях В. А. Александрова отражено современное состояние обсуждаемых вопросов.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области математики.

ISBN 5-7029-0342-0

© НИЦ «Регулярная
и хаотическая динамика», 2000

Содержание

Предисловие редактора	6
Предисловие	7
I. Векторы, определители, матрицы	8
§ 11. Сумма векторов	8
§ 12. Скалярное произведение	12
§ 13. Полярные произведения; определители	13
§ 14. Векторное произведение	17
§ 15. Матрицы	19
II. Полосы и линии	23
§ 21. Сопровождающий триэдр	23
§ 22. Интегральные инварианты полосы	26
§ 23. Вращение полосы вокруг ее линии	29
§ 24. Теорема о четырех вершинах	30
§ 25. Соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера	32
§ 26. Деформация полосы	36
§ 27. Задачи, теоремы	40
§ 28. Линии откоса на квадраках вращения	45
§ 29. Основное изопериметрическое свойство круга	51
III. Формы Пфаффа	57
§ 31. Альтернированное произведение	57
§ 32. Внешний дифференциал	59
§ 33. Производные, отвечающие паре форм Пфаффа	61
§ 34. Альтернированные дифференциальные формы	62
IV. Внутренняя геометрия поверхностей	64
§ 40. Исторические сведения	64
§ 41. Основные уравнения	67
§ 42. Площадь поверхности и интегральная кривизна	69
§ 43. Инвариантность меры кривизны при изгибании	72

§ 44. Интегральная формула Гаусса–Бонне	74
§ 45. Параллельное перенесение на поверхности	76
§ 46. Распространение формулы Гаусса–Бонне на многоуголь- ные области	79
§ 47. Формула Гаусса–Бонне для замкнутых поверхностей . .	81
§ 48. Косоугольные сети линий	85
§ 49. Задачи, теоремы	89
V. Геодезические линии	92
§ 51. Геодезические как кратчайшие	92
§ 52. Поверхности постоянной меры кривизны	96
§ 53. Полуплоскость Пуанкаре и гиперболическая геометрия .	98
§ 54. Параллельные линии на поверхности	101
§ 55. Формулы Грина	104
§ 56. Сети Лиувилля	108
§ 57. Поведение геодезических на поверхности постоянной от- рицательной кривизны	112
§ 58. Конформное отображение	120
§ 59. Задачи, теоремы	122
VI. Внешняя геометрия поверхностей	128
§ 61. Главные кривизны	128
§ 62. Кривизна линий на поверхности	135
§ 63. Теорема Дюпена об ортогональных системах поверхностей	140
§ 64. Конформные отображения пространства	145
§ 65. Асимптотические линии	147
§ 66. Асимптотические линии на линейчатых поверхностях . .	151
§ 67. Жесткость овальных поверхностей	153
§ 68. Деформации поверхности	157
§ 69. Задачи, теоремы	162
VII. Минимальные поверхности	174
§ 71. Минимальные поверхности как поверхности переноса . .	174
§ 72. Определение асимптотических линий и линий кривизны	180
§ 73. Присоединенные минимальные поверхности	184
§ 74. Изгибание минимальных поверхностей	187
§ 75. Формулы Римана и Вейерштрасса	189
§ 76. Минимальные поверхности Шерка	196

§ 77. Минимальные поверхности Эннепера	199
§ 78. Взгляд на задачу Плато	203
§ 79. Задачи, теоремы	206
Комментарии	209
Литература	222
Алфавитный указатель	225

Предисловие редактора

Вы держите в руках книгу, написанную около 60 лет назад Вильгельмом Блашке (1885–1962) — одним из крупнейших геометров XX века, создателем большой геометрической школы, влияние которой проявляется до сих пор. Книга была написана как учебник по геометрии для студентов университетов. Но не для студентов-школяров, которые озабочены лишь тем, как сдать очередной экзамен с минимальными затратами, а для тех — кто стремится проникнуть в суть геометрии.

Как принято сейчас говорить — книга эта многоуровневая. Основной текст содержит элементарное (но — мастерски написанное) введение в дифференциальную геометрию кривых и поверхностей, изложенное с помощью метода внешних форм Картана. Второй уровень в книге — это напечатанные мелким шрифтом параграфы «Задачи, теоремы», приведенные в конце большинства глав. Здесь автор, будучи свободен от необходимости излагать материал подробно и последовательно, дает широкую панораму современной ему геометрии, указывая глубокие факты и устанавливая важные связи с другими областями математики.

В целом книга написана с большой любовью и уважением к геометрии. Геометрические идеи оказываются на первом плане даже там, где приходится использовать нетривиальную технику из дифференциальных уравнений или комплексного анализа.

Предыдущее издание этой книги на русском языке вышло в 1957 году. В нем были сделаны дополнительные примечания, которые, в отличие от примечаний автора, помечены звездочками. Данное издание снабжено комментариями, отражающими современное состояние некоторых из затронутых в книге вопросов. Комментарии приведены в конце книги, а ссылки на них даны в соответствующих местах книги в квадратных скобках.

Новосибирск, Академгородок
январь 2000

В. А. Александров

Предисловие

Этот учебник следует двум образцам: Гауссу и Картану. Как и у Гаусса, предпочтение здесь оказывается внутренним свойствам поверхности, зависящим лишь от измерений на самой поверхности и потому сохраняющимся при изгибании. Однако в то время как гауссово учение о поверхностях опирается на рассмотрение квадратичных дифференциальных форм, здесь, согласно Картану, используются линейные формы, введенные Пфаффом.

Эта книга была написана в Гамбурге во время войны 1939–1945 гг., но ее печатание затянулось в силу условий военного и послевоенного времени. Я признателен многим коллегам за совет и помощь, особенно мне помогли G. Bol, W. Buran, W. Haack, J. E. Hofmann, R. Sauer, K. Strubecker, W. Weber и E. Witt.

Гамбург, 1949

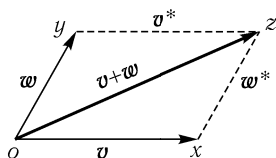
Вильгельм Блашке

I. Векторы, определители, матрицы

§ 11. Сумма векторов

В этом вступительном первом разделе мы дадим краткую сводку тех вспомогательных средств из аналитической геометрии и дифференциального исчисления, которые понадобятся нам впоследствии.

Фламандский купец из Брюгге Стэвин (S. Stevin, 1548–1620) столкнулся в механике с *законом параллелограмма*. Этот закон учит, как «складывать» *силы*, действующие на одну и ту же материальную точку o . Такую силу можно изобразить прямолинейным направленным отрезком, начинающимся в o , или, как говорят, «вектором». Если x, y — конечные точки двух векторов v, w , скрепленных в o , то конечная точка z суммарного вектора



$$s = v + w \quad (1)$$

такова, что точки o, x, z, y образуют, как на рис. 1, последовательность вершин *параллелограмма*, обходимого один раз. Мы говорим тогда о «*параллелограмме, построенном на векторах*» v, w .

Нечто подобное производилось уже А р х и м е д о м (287–212 до н. э.) для *скоростей*.

Это определение суммы можно распространить на большее число векторов следующим образом. Введем прежде всего обозначение для вектора v с начальной точкой o и конечной точкой x :

$$v = \overrightarrow{ox}. \quad (2)$$

Итак, вектор является упорядоченной парой (вещественных собственных) точек нашего евклидова пространства R_3 . Два вектора v и

$$v^* = \overrightarrow{yz}$$

называются *равными*: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$, если точки o, x, y, z совпадают с вершинами параллелограмма, т. е. если $\mathbf{v}^*$ получается из $\mathbf{v}$ «сдвигом» («трансляцией») на вектор

$$\overrightarrow{oy} = \overrightarrow{xz}$$

(рис. 1). Тогда, если

$$\mathbf{v}_j = \overrightarrow{p_j q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

— n векторов, то надлежащими сдвигами мы можем предварительно добиться того, чтобы конец q_{j-1} каждого вектора $\mathbf{v}_{j-1}$ совпадал с началом p_j вектора $\mathbf{v}_j$:

$$q_{j-1} = p_j \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (4)$$

После этого определяем сумму наших векторов:

$$\overrightarrow{p_1 q_n} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n \quad (5)$$

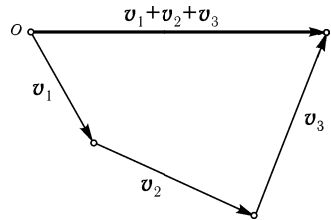


Рис. 2

(многоугольник, изображенный на рис. 2, где $n = 3$, не обязательно располагается в одной плоскости).

С другой стороны, если с векторами сопоставить сдвиги* пространства R_3 , то сложению векторов отвечает «соединение» (последовательное выполнение) соответствующих сдвигов. В частности, если начало и конец вектора совпадают, то мы получаем «нулевой вектор». Все такие векторы равны между собой и для них вводят обозначение

$$\overrightarrow{xx} = 0. \quad (6)$$

Среди всевозможных сдвигов нулевому вектору отвечает «тождественное отображение» или «отображение покоя», переводящее каждую точку саму в себя. Для определенного нами сложения векторов справедливы три вычислительных закона. Во-первых, «ассоциативный закон»:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3); \quad (7)$$

* Слово Schiebung мы здесь переводим как «сдвиг», хотя в других местах используем термины «параллельное смещение» и «параллельный перенос».

во-вторых, «коммутативный», или перестановочный, закон:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1. \quad (8)$$

Из справедливости (7) и (8) легко заключить, что подобные же соотношения имеют место и для n векторов. В-третьих, векторное уравнение (1) при данных s, w однозначно разрешимо относительно v («разрешимость»):

$$v = s - w. \quad (9)$$

Что касается сдвигов, сопоставленных векторам, то уравнения (7), (8) и (9) равносильны тому, что сдвиги образуют «абелеву группу»¹.

Наряду со сложением можно рассматривать *умножение векторов на вещественные числа*, или «скаляры»:

$$w = sv = vs. \quad (10)$$

Если здесь

$$v = \overrightarrow{ox}, \quad w = \overrightarrow{oy},$$

то точки o, x, y расположены на одной прямой так, что длины отрезков

$$\overline{ox} = v \geq 0, \quad \overline{oy} = w \geq 0$$

удовлетворяют соотношению

$$w = sv;$$

при этом для $s > 0$ точки x, y лежат по одну, а для $s < 0$ — по разные стороны от o .

Определенные выше сложение и умножение удовлетворяют «*дистрибутивному закону*», названному так в 1765 г. Л а м б е р т о м (J.H.Lambert, 1728–1777):

$$s(v + w) = sv + sw, \quad (s + t)v = sv + tv; \quad (11)$$

другими словами, сложение и умножение перестановочны между собой.

Два вектора v, w называются «*линейно независимыми*», если векторное уравнение

$$av + bw = 0$$

¹Название введено норвежцем А б е л е м (N.H.Abel, 1802–1829).

имеет в отношении скаляров a, b только «тривиальное решение» $a = b = 0$. Геометрически линейная зависимость означает, что векторы v, w направлены параллельно одной прямой. Соответственно этому *линейная зависимость* трех векторов характеризуется существованием трех не равных одновременно нулю скаляров s_j , для которых

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = 0.$$

Геометрическим условием линейной зависимости является то, что существует (хотя бы одна) плоскость, которой параллельны все эти три вектора.

Четыре вектора нашего евклидова пространства R_3 всегда линейно зависимы. Следовательно, каждый вектор можно «*линейно скомбинировать*» из трех линейно независимых v_j

$$v = s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3, \quad (12)$$

и притом однозначно. Величины s_i называются «*координатами*» вектора v по отношению к «*базису*» v_j .

В частности, если за базис взяты три попарно ортогональных «*единичных вектора*» e_j , т. е. взаимно ортогональных вектора единичной длины, то говорят о «*прямоугольном*» или «*декартовом*» базисе. Это название связано с именем основного создателя аналитической геометрии Декарта (1596–1650). В этом случае

$$v = \overrightarrow{ox} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (13)$$

и величины x_j называются также *прямоугольными* или *декартовыми координатами* точки x по отношению к *декартову реперу**

$$\{0; e_1, e_2, e_3\}$$

с «*началом*» o .

Если мы дополним (13) обозначениями

$$x_1 e_1 = \overrightarrow{op}, \quad x_1 e_1 + x_2 e_2 = \overrightarrow{oq}, \quad (14)$$

то в прямоугольном треугольнике с вершинами o, p, q (рис. 3) мы будем иметь по теореме Пифагора (580–501? гг. до н. э.)

$$\overrightarrow{oq}^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

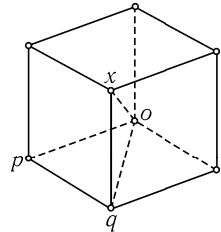


Рис. 3

* Слово Achsenkreuz мы здесь переводим словом «репер»; в дальнейшем используется также термин «система координат».

и аналогично из прямоугольного треугольника o, q, x получим

$$\overline{ox}^2 = \overline{oq}^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Таким образом, для длины v ($v \geq 0$) вектора $\mathbf{v}$ с декартовыми координатами x_i справедливо соотношение

$$v^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (15)$$

В частности, из равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \overrightarrow{xy}, \quad \overrightarrow{ox} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \\ \overrightarrow{oy} &= y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

для длины v вектора $\mathbf{v} = \overrightarrow{oy} - \overrightarrow{ox} = \overrightarrow{xy}$ следует

$$v^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2. \quad (16)$$

Мы будем здесь, как правило, обозначать скаляры латинскими буквами нормального, векторы — латинскими буквами жирного шрифта. Из формулы (16) для расстояния можно вывести все соотношения евклидовой геометрии. Формула (16) образует естественный исходный пункт «аналитической геометрии»¹.

§ 12. Скалярное произведение

Возьмем два вектора $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ с координатами x_j , y_j относительно декартова базиса $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{ox} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{oy} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Тогда в силу (11,16)² для длины $\overrightarrow{xy}$ вектора

$$\overrightarrow{xy} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

мы имеем

$$\overline{xy}^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \theta. \quad (2)$$

¹Сравни здесь и в дальнейшем книгу Блашке «Analytische Geometrie», Wölfenbüttel, 1948.

²Это означает § 11, уравнение (16).

Здесь $v \geq 0$, $w \geq 0$ обозначают длины наших векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$:

$$v^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad w^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

а θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) — угол между ними. Но из формул (2) и (3) следует

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = vw \cos \theta.$$

Это «билинейное» выражение называют «внутренним произведением» или «скалярным произведением» векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и пишут

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \mathbf{vw}^* \quad (5)$$

Как легко видеть, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{vw} &= \mathbf{wv}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= \mathbf{vw}_1 + \mathbf{vw}_2, \\ (s\mathbf{v})\mathbf{w} &= s(\mathbf{vw}). \end{aligned} \quad (6)$$

Прямоугольные координаты x_j вектора $\mathbf{v}$ относительно декартова базиса $\mathbf{e}_j$ являются скалярными произведениями

$$x_j = \mathbf{ve}_j. \quad (7)$$

Равенство нулю скалярного произведения означает перпендикулярность (ортогональность) сомножителей. Нулевой вектор перпендикулярен к любому вектору. Условия $\mathbf{vw} > 0$ и $\mathbf{vw} < 0$ означают, что наши векторы образуют острый, соответственно тупой, угол:

$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad \theta > \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Выражение $\mathbf{vv}$ записывают также, как v^2 .

§ 13. Полярные произведения; определители

Преподаватель гимназии в Штеттине Г. Г р а с с м а н (1809–1877), отличавшийся большой разносторонностью, ввел в своем «учении о протяжении» в 1862 г. (Werke, 1, 2, Leipzig, 1896) «альтернированное» или «полярное произведение» векторов. Альтернированное произведение трех векторов обозначается через $(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)^{**}$ и удовлетворяет следую-

* В настоящей книге автор обозначает скалярное произведение символом $\langle \mathbf{vw} \rangle$, однако в русской математической литературе такие обозначения не приняты.

** Альтернированное произведение трех векторов называется обычно их «смешанным произведением». Здесь мы изменили обозначение этого произведения, которое автор записывает в виде $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]$.

щим правилам счета:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) + (\mathbf{v}'_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3), \\ (c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= c(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Однако главным является то, что эти произведения меняют знак при перестановке двух векторов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) &= (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = \\ &= -(\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1) = -(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2) = -(\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3). \end{aligned} \quad (2)$$

При этом не предполагается, что эти произведения — снова векторы.

Выберем базис $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ и составим из него линейной комбинацией векторы $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}_j = a_{j1} \mathbf{v}_1 + a_{j2} \mathbf{v}_2 + a_{j3} \mathbf{v}_3 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Тогда справедливо равенство

$$(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3) = A(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3), \quad (4)$$

где скалярный множитель A имеет значение

$$\begin{aligned} A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned} \quad (5)$$

Три члена с плюсом, а также три члена с минусом происходят от какого-нибудь одного из них в результате *круговой перестановки* (циклирования) вторых значков 1, 2, 3. A называют «*определителем*», составленным из a_{jk} , и пишут

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Идея определителей берет начало от Г. Лейбница (1646–1716), 1676 г. и японца Seki Shinsuke (1642–1708), 1683 г.

Из (5) и (6) следует *инвариантность при замене строк на столбцы*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

При введении определителей по методу Грассмана (4) становятся весьма очевидными их основные свойства, в частности «теорема об умножении». Именно, если мы перейдем от $\mathbf{v}_j$ к новому базису $\mathbf{e}_j$, так что

$$\mathbf{v}_j = b_{j1}\mathbf{e}_1 + b_{j2}\mathbf{e}_2 + b_{j3}\mathbf{e}_3, \quad (8)$$

то, подставляя из (8) в (3) значения для $\mathbf{v}_j$ и упорядочивая по $\mathbf{e}_j$, мы получим

$$\mathbf{w}_j = c_{j1}\mathbf{e}_1 + c_{j2}\mathbf{e}_2 + c_{j3}\mathbf{e}_3, \quad (9)$$

где

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + a_{j3}b_{3k} = \sum_s a_{js}b_{sk}. \quad (10)$$

Тогда в силу (4), (8) и (9) мы имеем

$$(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3) = A(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) = AB(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = C(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3), \quad (11)$$

т. е.

$$AB = C.$$

Здесь определитель A дается формулой (6), а B и C равны:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Формулы (10) и (12) содержат теорему об умножении Лагранжа (1773 г.). Так как при замене строк на столбцы определитель B не изменяется, то этой теореме можно придать и другую форму, положив

$$c_{jk} = \sum_s a_{js}b_{ks}. \quad (14)$$

В частности, если векторы $\mathbf{e}_j$, а также и $\mathbf{v}_j$, образуют декартов базис, то скалярные произведения $\mathbf{v}_j \mathbf{v}_k$ будут

$$\mathbf{v}_j \mathbf{v}_k = \sum_s b_{js}b_{ks} = \varepsilon_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = k, \\ 0 & \text{для } j \neq k. \end{cases} \quad (15)$$

Но тогда в силу (14) и (15)

$$B^2 = 1, \quad B = \pm 1, \quad (16)$$

т. е. на основании (12)

$$C = \pm A.$$

Это означает, что определитель, составленный из координат трех векторов w_j , не изменяется, если мы *непрерывно* переходим от одного декартова базиса e_j к другому декартову базису v_j .

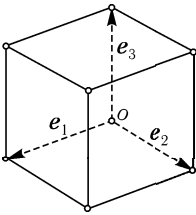


Рис. 4

Такой переход всегда возможен в том случае, если оба декартовых базиса «правые» (см. рис. 4, где изображен куб, построенный на трех базисных векторах), т. е. если e_1, e_2, e_3 следуют друг за другом так же, как большой, указательный и средний пальцы правой руки в их естественном расположении. Если v_j , как и e_j , образуют правый декартов базис, то при этом $B = 1$, и мы можем условиться считать

$$(v_1 v_2 v_3) = (e_1 e_2 e_3) = 1. \quad (17)$$

Тогда из (9), (11) и (17) мы видим, что определитель C равен

$$C = (w_1 w_2 w_3). \quad (18)$$

Этот определитель из координат трех векторов, или, что теперь то же самое, их альтернированное произведение, имеет простой геометрический смысл. Так как выбор правого декартова базиса e_j ничем не ограничен, то мы можем, в частности (вообще однозначно), расположить его так, чтобы выполнялись условия

$$c_{11} \geq 0, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0, \quad c_{22} \geq 0, \quad c_{23} = 0. \quad (19)$$

Но тогда мы имеем

$$C = c_{11}c_{22}c_{33}. \quad (20)$$

Здесь $c_{11}c_{22} \geq 0$ означает площадь параллелограмма, построенного на векторах w_1, w_2 , и если мы будем рассматривать этот параллелограмм как «основание» «параллелепипеда», построенного на векторах w_1, w_2, w_3 , то $c_{33} = w_3 e_3$ будет соответствующей «высотой». Тем самым показано, что

определитель $(w_1 w_2 w_3)$ означает объем параллелепипеда, построенного на трех векторах w_1, w_2, w_3 , и он будет положителен или отрицателен в зависимости от того, образуют ли три вектора в этой последовательности правую или левую тройку.

Условие

$$(w_1 w_2 w_3) = 0$$

является условием линейной зависимости трех векторов.

Обратно, исходя из этого геометрического истолкования, можно было бы вывести свойства определителей (*Вейерштрасс*, 1864 г.). Теорема об умножении, представленная в форме (14), записывается теперь так:

$$(v_1 v_2 v_3)(w_1 w_2 w_3) = \begin{vmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Здесь справа в качестве элементов определителя стоят скалярные произведения $v_j w_k$.

§ 14. Векторное произведение

Пусть v, w — два вектора; вектор p называется их «*внешним произведением*», или «*векторным произведением*», если для всех векторов x справедливо соотношение

$$(vwx) = px. \quad (1)$$

Здесь справа стоит скалярное произведение. В декартовых координатах наше требование (1) дает:

$$v_2 w_3 - v_3 w_2 = p_1, \quad v_3 w_1 - v_1 w_3 = p_2, \quad v_1 w_2 - v_2 w_1 = p_3. \quad (2)$$

Векторное произведение обыкновенно обозначают следующим образом:

$$p = [vw],^* \quad (3)$$

так что (1) равносильно записи

$$(vwx) = [vw]x. \quad (4)$$

Из этого определения следует:

$$\begin{aligned} [vw] + [wv] &= 0, \\ [(sv)w] &= s[vw], \\ [(v_1 + v_2)w] &= [v_1 w] + [v_2 w]. \end{aligned} \quad (5)$$

* В немецком издании книги автор обозначает векторное произведение символом $v \times w$.

Далее, из (1) получается следующее *истолкование векторного произведения* $\mathbf{p}$. Если $\mathbf{x}$ в формуле (1) линейно зависит от $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, то левая сторона обращается в нуль, т. е. и $\mathbf{p}\mathbf{x} = 0$, что означает перпендикулярность вектора $\mathbf{p}$ к сомножителям $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Тем самым в случае линейно независимых $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ найдено *направление* $\mathbf{p}$. С другой стороны, возьмем в этом случае за $\mathbf{x}$ единичный вектор, идущий в найденном направлении, причем так, что

$$D = (\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{x}) > 0.$$

Тогда из (1) следует, что $\mathbf{p} = D\mathbf{x}$.

Следовательно, *длина* $\mathbf{p}$ равна площади D параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, а *ориентация* $\mathbf{p}$ должна быть выбрана так, чтобы последовательность векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$ образовала правую тройку. В частности, для нашего декартова базиса мы будем иметь

$$[\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3. \quad (6)$$

Равенство нулю векторного произведения

$$[\mathbf{v}\mathbf{w}] = 0 \quad (7)$$

означает *линейную зависимость* сомножителей $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Векторное и скалярное произведения связаны друг с другом «*тождеством Лагранжа*» (1773 г.):

$$[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2][\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2] = (\mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1)(\mathbf{v}_2 \mathbf{w}_2) - (\mathbf{v}_1 \mathbf{w}_2)(\mathbf{v}_2 \mathbf{w}_1). \quad (8)$$

Здесь слева стоит скалярное произведение двух векторных произведений. Для доказательства (8) заметим, что как левая, так и правая стороны зависят линейно и однородно от каждого из четырех векторов $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{w}_j$. Поэтому достаточно предположить, что эти векторы каким-либо образом совместились с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Однако в этом случае проверка равенства (8) не составляет никакого труда. Тождество (8) равносильно следующему соотношению:

$$[[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] \mathbf{v}_3] = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1. \quad (9)$$

Например, умножая левую и правую стороны скалярно на $\mathbf{v}_4$, мы из (9) получим снова (8), только в иных обозначениях. Наконец, тождества (8) и (9) точно так же равносильны соотношению

$$[[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2][\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2]] = (\mathbf{v}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2) \mathbf{v}_1. \quad (10)$$

Векторное произведение позволяет получать из векторов векторы, но в общем случае оно неассоциативно. Так, например,

$$[[e_2 e_2] e_1] = 0, \quad [e_2 [e_2 e_1]] = -e_1.$$

Изложенное здесь для векторов трехмерного пространства уже было проведено Г р а с с м а н о м для векторов с любым числом координат $n > 2$. Особенно просто это можно выполнить применительно к содержанию §§ 11–13, т.е. для определителей n -го порядка.

§ 15. Матрицы

Ряд приведенных выше положений можно изложить более прозрачно, если ввести «матрицы». Примером *матрицы* может служить система девяти чисел, расположенных в прямоугольную таблицу:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

или, короче,

$$\mathfrak{A} = (a_{jk}). \quad (2)$$

Матрицы

$$\mathfrak{A} = (a_{jk}), \quad \mathfrak{B} = (b_{jk}), \quad \mathfrak{C} = (c_{jk}) \quad (3)$$

складываются как векторы, т.е. равенство

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \quad (4)$$

означает девять равенств:

$$a_{jk} + b_{jk} = c_{jk}; \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Мы полагаем

$$\mathfrak{A} = 0 \quad (6)$$

только тогда, если все $a_{jk} = 0$. Матрица $c\mathfrak{A}$ состоит из элементов ca_{jk} . Используем уравнения (13,10), чтобы определить *произведение матриц*; положим

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}, \quad (7)$$

если справедливы все девять равенств

$$\sum a_{js}b_{sk} = c_{jk}. \quad (8)$$

Тогда теорема об умножении определителей (§ 13) может быть записана следующим образом:

$$\det(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \det(\mathfrak{A}) \cdot \det(\mathfrak{B}). \quad (9)$$

Здесь $\det(\mathfrak{A})$, например, означает определитель матрицы $\mathfrak{A}$.

Обратно, можно было бы показать, что равенство (9) выделяет определители из совокупности всех непостоянных полиномов наименьшей степени относительно a_{jk} ; С т е ф а н о с (К. Stephanos, 1857–1917), 1913.

Для умножения матриц справедливы законы

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) &= \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}, \\ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} &= \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) &= (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

в то время как коммутативный закон, вообще говоря, несправедлив. Это видно уже на примере матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривают также матрицы с n строками и m столбцами. Если для двух матриц $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ совпадают числа строк и столбцов: $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$, то их называют «однотипными». Однотипные матрицы можно складывать по правилу (5). Однако умножение по правилу (8) возможно только тогда, если $m_1 = n_2$; в результате получается матрица-произведение, для которой $n = n_1$, $m = n_2$. Если мы будем смотреть на вектор $\mathbf{x}$ трехмерного пространства как на матрицу-столбец

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

то матричное уравнение

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} \quad (12)$$

означает линейную подстановку

$$y_j = \sum a_{jk} x_k. \quad (13)$$

Умножение матриц отвечает тогда последовательному применению двух подстановок $y = \mathfrak{A}x$, $z = \mathfrak{B}y$, поскольку в результате получается подстановка $z = \mathfrak{B}\mathfrak{A}x$.

Операция замены строк матрицы на столбцы обозначается штрихом. Это значит, что из

$$\mathfrak{A} = (a_{jk}) \quad (14)$$

следует

$$\mathfrak{A}' = (a'_{jk}), \quad (15)$$

где

$$a'_{jk} = a_{kj}. \quad (16)$$

При этом $n' = m$, $m' = n$. Инвариантность определителя при замене строк на столбцы в матричной записи выглядит так:

$$\det(\mathfrak{A}) = \det(\mathfrak{A}'). \quad (17)$$

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{vw}$ можно записать с помощью матриц следующим образом:

$$\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v}; \quad (18)$$

действительно, после перемножения мы получаем матрицу с $n = m = 1$, т. е. скаляр.

Пусть вектор $\boldsymbol{v}$ представлен с помощью двух различных декартовых базисов:

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3 = v_1^* \boldsymbol{e}_1^* + v_2^* \boldsymbol{e}_2^* + v_3^* \boldsymbol{e}_3^*. \quad (19)$$

Введем скалярные произведения

$$\boldsymbol{e}_j^* \boldsymbol{e}_k = c_{jk}. \quad (20)$$

Тогда из (19) следует

$$v_j^* = \sum_k c_{jk} v_k, \quad v_j = \sum_k c_{kj} v_k^*, \quad (21)$$

или, короче, в матрицах:

$$\mathbf{v}^* = \mathfrak{C} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathfrak{C}' \mathbf{v}^*. \quad (22)$$

Таким образом, справедливы уравнения

$$\mathfrak{C} \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}' \mathfrak{C} = \mathfrak{E}, \quad (23)$$

где $\mathfrak{E}$ означает «единичную матрицу»:

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матрицы, удовлетворяющие условию (23), называются *ортогональными*. В силу (9), (17) и (23)

$$\det \mathfrak{C} = \pm 1. \quad (25)$$

Если выполняется условие (23) и $\det \mathfrak{C} = +1$, то $\mathfrak{C}$ называют *собственно ортогональной*, если же $\det \mathfrak{C} = -1$, то — *несобственно ортогональной*.

Если мы будем рассматривать $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^*$ как векторы, отнесенные к одному и тому же базису $\mathbf{e}_j$, то преобразование

$$\mathbf{v}^* = \mathfrak{C} \mathbf{v}, \quad \mathfrak{C} \mathfrak{C}' = \mathfrak{E}, \quad \det \mathfrak{C} = +1 \quad (26)$$

дает движение, а преобразование

$$\mathbf{v}^* = \mathfrak{C} \mathbf{v}, \quad \mathfrak{C} \mathfrak{C}' = \mathfrak{E}, \quad \det \mathfrak{C} = -1 \quad (27)$$

— *обращение*, причем в обоих случаях начало координат o остается неизменным. Если снять это ограничение и обозначить через $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^*$ матрицы из координат соответственных точек относительно одного и того же декартова репера $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, то движения (обращения) записываются следующим образом:

$$\mathbf{x}^* = \mathfrak{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \quad \mathfrak{C} \mathfrak{C}' = \mathfrak{E}, \quad \det \mathfrak{C} = +1 \quad (\det \mathfrak{C} = -1). \quad (28)$$

В механике прежде вместо матриц говорили о «*диадах*».

Название «вектор» предложил в 1845 г. ирландец Гамильтон (W.R. Hamilton, 1805–1865). Идея вектора появлялась уже раньше

у Эйлера (L. Euler, 1707–1783), 1765 г.; Весселя (C. Wessel, 1745–1818); Гаусса (K. F. Gauß, 1777–1855), Мёбиуса (A. F. Möbius, 1790–1868), Беллавитиса (G. Bellavitis, 1803–1880) и Грассмана (H. Graßmann, 1809–1877). Матричное исчисление в основном берет начало от английского геометра и адвоката Кэли (A. Cayley, 1821–1895), начиная с 1858 г.

В векторных обозначениях нет единства. Например, векторное произведение записывают также $\mathbf{v} \times \mathbf{v}'$, а в Италии чаще всего для скалярного произведения пишут $\mathbf{v} \times \mathbf{v}'$, для векторного же $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$. Векторы часто отличают от скаляров посредством стрелки вверх: $\vec{v}$. Между приверженцами различных способов записи разгорались жаркие споры.

II. Полосы и линии

§ 21. Сопровождающий триэдр

Пусть x_j ; $j = 1, 2, 3$ — координаты точки x относительно фиксированного декартова репера $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Предположим, что x_j зависят от «времени» t :

$$x_j = x_j(t); \quad j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$t_0 \leq t \leq t_1$. О функциях $x_j(t)$ мы пока будем предполагать, что они имеют непрерывные производные и не все постоянны. Позднее мы будем требовать их разложимости в сходящиеся степенные ряды в некоторой области. Поскольку мы обозначаем вектор, идущий от 0 к x , также через $\mathbf{x}$, то вместо (1) мы запишем короче

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

Тогда мы имеем перед собой «параметрическое представление» «линии» или «кривой». В классической дифференциальной геометрии оказалось целесообразным связывать с точкой x некоторый (сначала произвольный) декартов репер, «сопровождающий триэдр» линии: $\{\mathbf{x}(t); \mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\}$. Подобное было уже сделано Эйлером в 1736 г. в его Механике, и этот метод сопровождающего триэдра в основном развит французскими геометрами Дарбу (G. Darboux, 1842–1917) и Э. Картаном (E. Cartan, 1869–1951). Обозначим через $d\mathbf{x}$

вектор с координатами

$$dx_j = x'_j(t) dt \quad (3)$$

относительно «первоначального репера» e_j .

Пусть σ_j — координаты $d\mathbf{x}$ по отношению к сопровождающему триэдру:

$$\sigma_j = \mathbf{a}_j d\mathbf{x}, \quad (4)$$

так что

$$d\mathbf{x} = \sum_1^3 \mathbf{a}_j \sigma_j. \quad (5)$$

С другой стороны, положим

$$d\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_k \omega_{jk}, \quad (6)$$

где, следовательно,

$$\omega_{jk} = d\mathbf{a}_j \mathbf{a}_k. \quad (7)$$

Величины σ_j , ω_{jk} являются «пфаффовыми формами» от одной переменной t , т. е. выражениями, линейными и однородными относительно dt :¹

$$\sigma = h(t) dt.$$

Тот факт, что $\mathbf{a}_j$ образуют декартов репер, обуславливает следующее строение скалярных произведений:

$$\mathbf{a}_j \mathbf{a}_k = \varepsilon_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = k, \\ 0 & \text{для } j \neq k. \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда, дифференцируя и используя (7), мы находим

$$\omega_{jk} + \omega_{kj} = 0. \quad (9)$$

Тем самым из девяти пфаффовых форм ω остается по существу лишь три, и потому мы введем для них ради упрощения только один нижний значок, полагая

$$\omega_{23} = \omega_1, \quad \omega_{31} = \omega_2, \quad \omega_{12} = \omega_3. \quad (10)$$

Тогда равенства (6) перепишутся в виде

$$d\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \omega_3 - \mathbf{a}_3 \omega_2, \quad d\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \omega_1 - \mathbf{a}_1 \omega_3, \quad d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \omega_2 - \mathbf{a}_2 \omega_1. \quad (11)$$

¹Название дано в честь J. Fr. Pfaff'a (1765–1825), учителя Гаусса.

Представим себе, что в нашем сопровождающем триэдре зафиксирован вектор $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + c_3 \mathbf{a}_3 \quad (12)$$

с постоянными координатами c_j ; тогда с помощью (11) можно показать, что

$$d\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{v}], \quad (13)$$

где Ω означает «вектор вращения»^{*}:

$$\Omega = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \omega_2 \mathbf{a}_2 + \omega_3 \mathbf{a}_3. \quad (14)$$

В самом деле, будучи развернутым, равенство (13) дает

$$d\mathbf{v} = (c_3\omega_2 - c_2\omega_3) \mathbf{a}_1 + (c_1\omega_3 - c_3\omega_1) \mathbf{a}_2 + (c_2\omega_1 - c_1\omega_2) \mathbf{a}_3, \quad (15)$$

и то же самое выражение можно получить, дифференцируя (12) и используя (11). Если мыслить триэдр связанным с неподвижной точкой o , то в силу (13) переход к соседнему положению можно осуществить «поворотом» вокруг оси, идущей в направлении Ω , причем длина Ω задает угол поворота, а направление Ω определяет направление вращения.

Возникает мысль выбрать сопровождающий триэдр $\{x; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ особым образом: так, чтобы вектор $\mathbf{a}_1$ расположился на касательной линии в точке x , а направление его определялось вектором $d\mathbf{x}$, который мы предположим не равным 0. Тогда в формуле (5) будет $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, и мы положим $\sigma_1 = \sigma$. После этого соотношение (5) примет вид

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \sigma. \quad (16)$$

Теперь мы имеем следующий образ: линию $x(t)$ и единичный вектор $\mathbf{a}_3$, заданный вдоль этой линии, причем

$$\mathbf{a}_3 d\mathbf{x} = 0. \quad (17)$$

Такой образ называют *полосой*, и $\mathbf{a}_3$ называется *нормальным вектором полосы*. Полосу можно представлять себе в виде узкой ленты, тянущейся вдоль линии $x(t)$ и поворачивающейся так, чтобы все время оставаться перпендикулярной к вектору $\mathbf{a}_3(t)$.

Выпишем еще раз *дериwационные уравнения* (16), (11) для полосы:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{a}_1 \sigma, \\ d\mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2 \omega_3 - \mathbf{a}_3 \omega_2, \quad d\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \omega_1 - \mathbf{a}_1 \omega_3, \quad d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \omega_2 - \mathbf{a}_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (18)$$

^{*}Этот вектор называется также «вектором скорости вращения». См.: С. П. Ф и н и к о в. «Курс дифференциальной геометрии». Учпедгиз, 1952. Стр. 92.

§ 22. Интегральные инварианты полосы

Введем интегралы:

$$s = \int_{t_0}^t \sigma, \quad u_j = \int_{t_0}^t \omega_j; \quad (1)$$

тогда мы сможем записать

$$\sigma = ds, \quad \omega_j = du_j, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (2)$$

s называют *длиной дуги* полосы или «несущей» ее линии $x(t)$ между положениями t_0 и t , и вслед за тем вводят следующие термины:

$$u_1 = \int \omega_1 = - \int \mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_3 = \int (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3) \quad (3)$$

— *интегральное геодезическое кручение* полосы,

$$u_2 = \int \omega_2 = \int \mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_3 \quad (4)$$

— *интегральная нормальная кривизна* полосы,

$$u_3 = \int \omega_3 = \int \mathbf{a}_2 d\mathbf{a}_1 = \int (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_1) \quad (5)$$

— *интегральная геодезическая кривизна* полосы.

Наряду с этими «интегральными инвариантами» применяются следующие «дифференциальные инварианты»:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{du_1}{ds} = \frac{\omega_1}{\sigma} = \left(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \frac{d\mathbf{a}_3}{ds} \right) && \text{— геодезическое кручение,} \\ k_2 &= \frac{du_2}{ds} = \frac{\omega_2}{\sigma} = \mathbf{a}_1 \frac{d\mathbf{a}_3}{ds} && \text{— нормальная кривизна,} \\ k_3 &= \frac{du_3}{ds} = \frac{\omega_3}{\sigma} = \left(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} \right) && \text{— геодезическая кривизна.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При этом первый инвариант не зависит от «ориентаций» полосы: если изменить знак нормального вектора $\mathbf{a}_3$, то это не окажет никакого влияния на $\frac{\omega_1}{\sigma}$, а если изменить направление вектора $\mathbf{a}_1$ на противоположное, то при этом σ также изменит знак, и отношение $\frac{\omega_1}{\sigma}$ снова останется неизменным.

Плоскость, проходящая через точку x параллельно векторам $\mathbf{a}_1$ и $d\mathbf{a}_1$ (т. е. двум «соседним» касательным), называется *соприкасающейся плоскостью* линии $x(t)$. Она была введена в 1728 г. Иоганном Бернулли (I. Bernoulli, 1667–1748). Если вектор $\mathbf{a}_2 \sin \varphi + \mathbf{a}_3 \cos \varphi$ перпендикулярен к соприкасающейся плоскости, то на основании (21,11) должно быть

$$(\mathbf{a}_2 \sin \varphi + \mathbf{a}_3 \cos \varphi)(\mathbf{a}_2 \omega_3 - \mathbf{a}_3 \omega_2) = \omega_3 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_2}{\omega_3}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь *специальные виды полос*, для которых одна из пфаффовых форм σ, ω_j тождественно обращается в нуль.

Во-первых, пусть $\sigma = 0$. Вырожденные полосы с $\sigma = 0$, линия которых стянулась в точку, называются *коническими*.

Во-вторых, $\omega_2 = 0$. Полосы, для которых ω_2 тождественно обращается в нуль, т. е. у которых в силу (8) нормаль перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, называются *асимптотическими полосами*. Через линию $x(t)$ в общем случае проходит одна и только одна асимптотическая полоса. Соприкасающаяся плоскость будет неопределенна только при $[\mathbf{a}_1 d\mathbf{a}_1] = 0$, т. е., согласно (21,11), при $\omega_2 = \omega_3 = 0$, но тогда вектор $\mathbf{a}_1$ постоянен, и мы получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 s + \mathbf{x}_0, \quad (9)$$

так что в этом случае линия будет прямой. Поэтому для асимптотической полосы ($\omega_2 = 0$) величины

$$k = \frac{\omega_3}{\sigma}, \quad w = \frac{\omega_1}{\sigma} \quad (10)$$

естественно назвать *кривизной* и *кручением* несущей линии. Условия $\omega_1 = \omega_2 = 0$ характеризуют *плоские полосы*, линия которых лежит в неизменной плоскости, а нормаль перпендикулярна к этой плоскости; в самом деле, из (21,11) следует, что в этом случае вектор $\mathbf{a}_3$ постоянен, а интегрируя затем соотношение $\mathbf{a}_3 d\mathbf{x} = 0$, мы получим уравнение g плоскости полосы:

$$\mathbf{a}_3 \mathbf{x} = \text{const}. \quad (11)$$

В-третьих, $\omega_1 = 0$. Постараемся охарактеризовать полосы, нормали которых образуют «торс», т. е. в общем случае являются касательными некоторой линии. Предельные случаи здесь появляются тогда,

когда нормали образуют конус или цилиндр. Пусть эта линия будет

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + r \mathbf{a}_3. \quad (12)$$

Для того чтобы ее касательные имели направление вектора $\mathbf{a}_3$, должно быть $[d\mathbf{y} \mathbf{a}_3] = 0$. Учитывая (12) и применяя уравнения (21,11), мы получим отсюда

$$\sigma + r\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 0. \quad (13)$$

Таким образом, искомые полосы, называемые *полосами кривизны*, характеризуются как раз условием $\omega_1 = 0$.

Из (21,16) и (13) следует

$$d\mathbf{x} = -\mathbf{a}_1 r \omega_2, \quad (14)$$

а из (21,11) и (13)

$$d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \omega_2. \quad (15)$$

Отсюда мы находим еще одно *характерное свойство полос кривизны*:

$$d\mathbf{x} = -r d\mathbf{a}_3, \quad (16)$$

где величина r имеет тот же смысл, что и в формуле (12).

В-четвертых, $\omega_3 = 0$. Полоса называется *геодезической*, если ее нормаль всегда лежит в соответственной соприкасающейся плоскости. Условием этого в силу (7) является $\omega_3 = 0$.

Дадим сводку введенных обозначений:

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma = 0 & \text{для конических полос,} \\ \omega_1 = 0 & \text{для полос кривизны,} \\ \omega_2 = 0 & \text{для асимптотических полос,} \\ \omega_3 = 0 & \text{для геодезических полос.} \end{array} \right\} \quad (17)$$

Если отношения наших пфаффовых форм

$$\sigma : \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$$

известны как функции времени t , то из дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \sigma; \quad d\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k \omega_l - \mathbf{a}_l \omega_k \quad (18)$$

($j, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$) можно однозначно восстановить всю полосу (если только задано начальное положение сопровождающего триэдра $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ для $t = t_0$). Таким образом, задание этих отношений определяет нашу полосу однозначно с точностью до движений.

§ 23. Вращение полосы вокруг ее линии

Пусть две полосы имеют общую несущую линию. Положим $x^* = x$ и, вводя угол $\theta = \theta(t)$, запишем

$$\begin{aligned} a_1^* &= +a_1, \\ a_2^* &= +a_2 \cos \theta + a_3 \sin \theta, \\ a_3^* &= -a_2 \sin \theta + a_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \sigma, \\ \omega_1^* &= +\omega_1 + d\theta, \\ \omega_2^* &= +\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta, \\ \omega_3^* &= -\omega_2 \sin \theta + \omega_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Если мы хотим выбрать θ так, чтобы полоса, помеченная звездочкой, была полосой кривизны ($\omega_1^* = 0$), то в силу (21,11) мы должны взять

$$\begin{aligned} d\theta &= -\omega_1, \\ \theta &= -u_1 + \theta_0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом заключается геометрический смысл интегрального инварианта u_1 . Соответствующий смысл инварианта u_3 мы выясним в § 45. Полагая в формулах (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$, мы сможем затем истолковать и значение инварианта u_2 . Из (3) мы находим также следующий результат: *две полосы кривизны с общей несущей линией заключают между собой постоянный угол* (O. Bonnet, 1853 г.).

Из (2) следует, что величина

$$\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{\sigma^2} = k^2 \quad (4)$$

инвариантна при вращении полосы вокруг несущей линии. В случае асимптотической полосы ($\omega_2 = 0$) мы называли k *кривизной ее несущей линии*. Поэтому и в самом общем случае величину k естественно называть кривизной несущей линии нашей полосы.

Точно так же мы будем смотреть на величину

$$\omega = \frac{\omega_1^*}{\sigma} = \frac{\omega_1}{\sigma} + \frac{d\theta}{ds}, \quad (\omega_2^* = \omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta = 0) \quad (5)$$

как на *кручение несущей линии*.

§ 24. Теорема о четырех вершинах

Приведем еще раз сводку наших формул для асимптотических плоск. Для $\omega_2 = 0$ мы находим следующие «*дериwационные уравнения*», которым присвоено имя Френета (F. Frenet, 1816–1868), 1847 г.:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \mathbf{a}_1, \\ \frac{d\mathbf{a}_1}{ds} &= k\mathbf{a}_2, \quad \frac{d\mathbf{a}_2}{ds} = -k\mathbf{a}_1 + w\mathbf{a}_3, \quad \frac{d\mathbf{a}_3}{ds} = -w\mathbf{a}_2; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь использованы обозначения (22,10). Прямая, проходящая через x в направлении $\mathbf{a}_1$, называется *касательной*; наряду с этим прямая, проходящая через x в направлении $\mathbf{a}_2$, называется *главной нормалью*, а в направлении $\mathbf{a}_3$ — *бинормалью* нашей линии в точке x .

Предположим, в частности, что наша линия лежит в одной плоскости, так что мы можем считать $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \left\{ +\frac{dx_1}{ds} = +\cos \tau, \quad \frac{dx_2}{ds} = +\sin \tau, \quad 0 \right\}, \\ \mathbf{a}_2 &= \left\{ -\frac{dx_2}{ds} = -\sin \tau, \quad \frac{dx_1}{ds} = +\cos \tau, \quad 0 \right\}; \end{aligned} \quad (2)$$

тогда мы получаем для кривизны следующее выражение:

$$k = \frac{d\tau}{ds}. \quad (3)$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} = -k \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{d^2 x_2}{ds^2} = +k \frac{dx_1}{ds}. \quad (4)$$

Используем вместе с Герглотцем (G. Herglotz, род. 1881) эти формулы для вывода простой теоремы из «дифференциальной геометрии в целом», впервые, по-видимому, найденной бенгальцем S. Mukhopadhyaya (1867–1935). Под «*овалом*» будем разумеать замкнутую плоскую линию, не имеющую ни с какой прямой больше двух общих точек, а под «*вершиной*» овала — точку, в которой $\frac{dk}{ds}$ обращается в нуль, т. е. точку, в которой кривизна овала *стационарна*. Докажем *теорему о четырех вершинах*: *овал имеет по меньшей мере четыре вершины*.

Прежде всего докажем равенство нулю интеграла, взятого вдоль e :

$$\int (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) \frac{dk}{ds} ds = 0 \quad (5)$$

при произвольных постоянных a_j . Это сводится к доказательству трех равенств:

$$\begin{aligned} \int \frac{dk}{ds} ds &= \int dk = 0, \\ \int x_1 \frac{dk}{ds} ds &= - \int k \frac{dx_1}{ds} ds = - \int \frac{d^2 x_2}{ds^2} ds = 0, \\ \int x_2 \frac{dk}{ds} ds &= - \int k \frac{dx_2}{ds} ds = + \int \frac{d^2 x_1}{ds^2} ds = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

а их справедливость вытекает из (4) и из замкнутости e . Мы предполагаем функцию k непрерывной и имеющей непрерывную производную на e . Тогда, наверное, имеются наибольшее и наименьшее значения k , а значит, и наверное существуют две вершины с $\frac{dk}{ds} = 0$. Но если бы имелись только эти вершины, то мы могли бы провести через них прямую $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, и интеграл (5) не смог бы обратиться в нуль, так как подинтегральное выражение не меняло бы знака. При этом использовано то, что e — овал.

Таким образом, на e происходит по меньшей мере четыре переменны знака производной $\frac{dk}{ds}$. В существовании овалов ровно с четырьмя вершинами мы убеждаемся на примере эллипсов.

В случае неплоской линии можно также назвать «вершиной» точку, в которой $\frac{dk}{ds} = 0$. О минимальном числе вершин замкнутых пространственных линий (образующих определенное число «узлов»), по-видимому, неизвестно ничего. Например, на «кольцевой поверхности» (торе)

$$\begin{aligned} x_1 &= (a + b \cos \psi) \cos \varphi, \\ x_2 &= (a + b \cos \psi) \sin \varphi, \\ x_3 &= b \sin \psi; \end{aligned} \quad (7)$$

при $a > b > 0$ линия

$$3\varphi = 2\psi \quad (8)$$

образует петлю в форме «листа клевера». На рис. 5 мы ее изобразили в виде *ортогональной проекции* в направлении третьей оси. Точка этой линии $\varphi = \psi = 0$ наверняка будет вершиной, так как одновременной перемене знаков φ и ψ отвечает зеркальное отражение

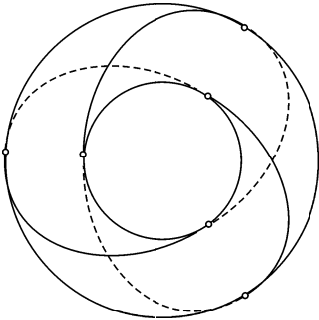


Рис. 5

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = -x_2, \quad x_3^* = -x_3,$$

переводящее нашу линию в себя. На точно таком же основании вершинами клеверообразной петли будут все шесть точек, помеченные на рисунке кружочками и отвечающие значениям $\psi \equiv 0 \pmod{\pi}$. В 1937 г. Герике (Gericke) показал, что имеются замкнутые пространственные кривые с двумя вершинами [1].

§ 25. Соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера

Из (24,1) следует $\left(k' = \frac{dk}{ds}\right)$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{a}_1, \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = k\mathbf{a}_2, \quad \frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3} = k'\mathbf{a}_2 + k(-k\mathbf{a}_1 + w\mathbf{a}_3). \quad (1)$$

Если при $s = 0$ мы положим $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j$, то разложения x_j в ряды по степеням s начнутся так:

$$\begin{aligned} x_1 &= s - \frac{k^2}{6}s^3 + \dots, \\ x_2 &= \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + \dots, \\ x_3 &= \frac{k w}{6}s^3 + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где отброшенные члены имеют по меньшей мере четвертый порядок относительно s , а k, w, k' вычислены при $s = 0$. Из (2) следует, что прямоугольные проекции нашей линии на три координатные плоскости выглядят при $k > 0, w > 0$ так, как это показано на рис. 6.

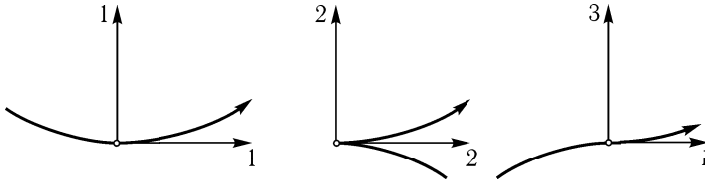


Рис. 6

Ряды (2) могут быть продолжены как угодно далеко; это обуславливает тот факт, что задание функций $k(s)$, $w(s)$ определяет нашу линию с точностью до движений [2]. Далее, формулы (2) позволяют, например, высказать еще следующее предложение:

Из всех плоскостей, проходящих через касательную к линии в точке, где $kw \neq 0$, только соприкасающаяся плоскость пересекает линию в этой точке.

Далее: постараемся найти окружность, имеющую в начале соприкосновение второго порядка с нашей линией, т. е. такую окружность, у которой разложения (2) совпадают с подобными разложениями для нашей линии, включая и члены второго порядка. Ее центр y должен лежать на нормали в соприкасающейся плоскости:

$$y = x + r a_2.$$

Полагая поэтому

$$x_1 = r \sin \frac{s}{r}, \quad x_2 = r \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right), \quad x_3 = 0,$$

мы получим отсюда разложения

$$x_1 = s + \dots, \quad x_2 = \frac{s^2}{2r} + \dots, \quad x_3 = 0.$$

Таким образом, сравнивая их с разложениями (2), мы видим, что:

Единственной окружностью, имеющей в x соприкосновение второго (по меньшей мере) порядка с данной линией, является окружность («круг кривизны») в соприкасающейся плоскости; центр ее («центр кривизны») находится в точке

$$y = x + r a_2, \quad (3)$$

а радиус («радиус кривизны») равен

$$r = \frac{1}{k}. \quad (4)$$

Запишем условие того, что точка z лежит в нормальной плоскости кривой x :

$$(z - x)a_1 = 0. \quad (5)$$

Найдем огибающую этих нормальных плоскостей. Для этого продифференцируем записанное уравнение по s , считая z постоянным. Получаем

$$(z - x)ka_2 = 1, \quad (6)$$

или в силу (4)

$$(z - x)a_2 = r. \quad (7)$$

Это означает, что *нормальные плоскости линии касаются огибающего их торса вдоль «оси кривизны»* (5), (7), *ортогонально пересекающей соприкасающуюся плоскость в центре кривизны.*

Дифференцируя (7) еще раз по s и используя (5), мы получим

$$(z - x)wa_3 = r'. \quad (8)$$

Таким образом, точка z

$$z = x + ra_2 + \frac{r'}{w}a_3; \quad r' = \frac{dr}{ds} \quad (9)$$

описывает линию, касательные которой служат осями кривизны исходной линии. Точка z является центром *соприкасающейся сферы*, имеющей с нашей линией в точке x соприкосновение по меньшей мере третьего порядка. Это означает, что разложение величины

$$\sqrt{(z - x)^2 - r^2 - \left(\frac{r'}{w}\right)^2}$$

по степеням s начинается членами не ниже четвертого порядка относительно s .

Поставим еще такой вопрос: в каком случае существует постоянный единичный вектор v , образующий с касательными нашей линии постоянный угол α ? Тогда мы будем иметь

$$va_1 = \cos \alpha; \quad (10)$$

отсюда, дифференцируя с учетом (24,1)

$$va_2 = 0, \quad (11)$$

и затем

$$v(k\mathbf{a}_1 - \omega\mathbf{a}_2) = 0, \quad (12)$$

или в силу (10) и (11)

$$k \cos \alpha - \omega \sin \alpha = 0. \quad (13)$$

Следовательно, наши «*линии откоса*» обладают еще теми свойствами, что их соприкасающиеся плоскости также образуют с v постоянный угол α , и что $\frac{k}{\omega} = \operatorname{tg} \alpha$. Каждое из этих свойств является для них характеристическим.

В частности, линии, для которых k и ω оба постоянны, называются *винтовыми линиями*. При подходящем выборе координатных осей их можно представить так:

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = a \sin \varphi, \quad x_3 = b\varphi.$$

Отсюда легко вычислить инварианты: длину дуги

$$s = c\varphi, \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

а затем кривизну и кручение

$$k = \frac{a}{c^2}, \quad \omega = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Если вектор $\mathbf{x}$ задан как функция произвольного параметра t , то в результате небольшого подсчета можно получить следующие выражения для кривизны и кручения:

$$k^2 = \frac{[x'x''] [x'x'']}{(x'x')^3} = \frac{(x'x')(x''x'') - (x'x'')^2}{(x'x')^3}, \quad (14)$$

$$\omega = \frac{(x'x''x''')}{[x'x''] [x'x'']} = \frac{(x'x''x''')}{(x'x')(x''x'') - (x'x'')^2}.$$

Знак кручения имеет геометрический смысл. Если выбрать правую систему координат (рис. 4), то винтовая линия с $\omega > 0$ выглядит так, как на рис. 7, а с $\omega < 0$ — так, как на рис. 8. Линии с $\omega > 0$ называют также *правозакрученными*, а линии с $\omega < 0$ — *левозакрученными*.

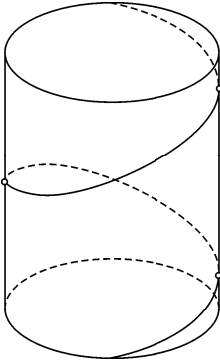


Рис. 7

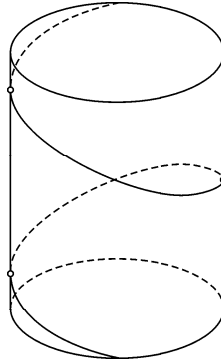


Рис. 8

§ 26. Деформация полосы

До сих пор мы рассматривали одну-единственную полосу $\mathfrak{S}$; теперь обратимся к семейству полос $\mathfrak{S}_v$, зависящих от одного параметра v . Мы можем представить это семейство так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, v); \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3(t, v), \quad (1)$$

где вдоль полосы $\mathfrak{S}_v$ изменяется только t , а v остается постоянным. Мы будем обозначать частные производные по t штрихом, а частные производные по v — точкой. Если $\mathbf{a}_j(t, v)$ — единичные векторы сопровождающего триэдра полосы $\mathfrak{S}_v$, то в силу (21,18) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{a}_1 h; \\ \mathbf{a}_1' &= (\mathbf{a}_2 c_3 - \mathbf{a}_3 c_2) h, \quad \mathbf{a}_2' = (\mathbf{a}_3 c_1 - \mathbf{a}_1 c_3) h, \\ \mathbf{a}_3' &= (\mathbf{a}_1 c_2 - \mathbf{a}_2 c_1) h, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\mathbf{x}' \mathbf{x}' = h^2, \quad h dt = \sigma = ds, \quad c_j h dt = \omega_j. \quad (3)$$

С другой стороны, положим для производных по v

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_1 p_1 + \mathbf{a}_2 p_2 + \mathbf{a}_3 p_3, \\ \dot{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{a}_2 q_3 - \mathbf{a}_3 q_2, \quad \dot{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_3 q_1 - \mathbf{a}_1 q_3, \quad \dot{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_1 q_2 - \mathbf{a}_2 q_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Длина несущей линии полосы $\mathfrak{S}_v$ получается из (3):

$$s = \int_{t_0}^t h \, dt. \quad (5)$$

Делая надлежащие предположения о дифференцируемости, вычислим частную производную от s по v , считая пределы в интеграле постоянными:

$$\dot{s} = \int_{t_0}^t \dot{h} \, dt. \quad (6)$$

Смешанную производную

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial v} = \dot{x}' \quad (7)$$

можно найти как из (2) с учетом (4):

$$\dot{x}' = a_1 \dot{h} + (a_2 q_3 - a_3 q_2) h, \quad (8)$$

так и из (4) с учетом (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}' = a_1 \{p'_1 + (c_2 p_3 - c_3 p_2) h\} + a_2 \{p'_2 + (c_3 p_1 - c_1 p_3) h\} + \\ + a_3 \{p'_3 + (c_1 p_2 - c_2 p_1) h\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), получаем прежде всего:

$$\dot{h} = p'_1 + (c_2 p_3 - c_3 p_2) h. \quad (10)$$

Если положить затем

$$\dot{h} \, dt = \dot{\sigma}, \quad dp_1 = p'_1 \, dt, \quad (11)$$

то равенство (10) примет вид

$$\dot{\sigma} = dp_1 + \omega_2 p_3 - \omega_3 p_2. \quad (12)$$

Из (10), интегрируя при постоянном v с учетом (6) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{s} = [p_1]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (c_2 p_3 - c_3 p_2) h \, dt, \quad \dot{s} = [p_1]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (c_2 p_3 - c_3 p_2) \, ds, \\ \dot{s} = [p_1]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (\omega_2 p_3 - \omega_3 p_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее выражение для «*вариации длины дуги*» по-новому освещает значение форм ω_2, ω_3 . Далее, из сравнения (8) и (9) следует

$$\begin{aligned} +q_3 h &= p'_2 + (c_3 p_1 - c_1 p_3) h, \\ -q_2 h &= p'_3 + (c_1 p_2 - c_2 p_1) h. \end{aligned} \quad (14)$$

Предположим теперь, что несущие линии полос $\mathfrak{S}_v$ отображены друг на друга с сохранением длин дуг при одинаковых значениях t , так что мы можем положить

$$t = s, \quad h = 1. \quad (15)$$

Тогда уравнения (10) и (14) упрощаются:

$$\begin{aligned} 0 &= p'_1 + c_2 p_3 - c_3 p_2, \\ +q_3 &= p'_2 + c_3 p_1 - c_1 p_3, \\ -q_2 &= p'_3 + c_1 p_2 - c_2 p_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Если мы затем подсчитаем из (2) и (4) смешанные производные $\dot{a}'_j$, предполагая справедливость равенств (15), то сравнение результатов приведет нас к соотношениям:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= q'_1 + c_2 q_3 - c_3 q_2, \\ \dot{c}_2 &= q'_2 + c_3 q_1 - c_1 q_3, \\ \dot{c}_3 &= q'_3 + c_1 q_2 - c_2 q_1, \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\dot{\omega}_j = dq_j + \omega_k q_l - \omega_l q_k, \quad (18)$$

где положено

$$\dot{c}_j dt = \dot{\omega}_j, \quad dq_j = q'_j dt, \quad (19)$$

а индексы пробегают серии значений

$$j, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.$$

Введем в рассмотрение «*вектор вращения*»

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 q_1 + \mathbf{a}_2 q_2 + \mathbf{a}_3 q_3; \quad (20)$$

тогда из (2), (15) и (17) следует, что

$$\mathbf{v}' = \mathbf{a}_1 \dot{c}_1 + \mathbf{a}_2 \dot{c}_2 + \mathbf{a}_3 \dot{c}_3. \quad (21)$$

Наконец, если мы рассмотрим еще интегральные инварианты нашей полосы $\mathfrak{S}_v$ (§ 22), т. е. интегралы

$$u_j = \int_{x_0}^x \omega_j = \int_{x_0}^x c_j ds, \quad (22)$$

взятые при постоянном v и в предположении (15), то в силу (17) мы найдем для их вариаций

$$\dot{u}_j = \int_{x_0}^x \dot{c}_j ds \quad (23)$$

следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= [q_1]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (\omega_2 q_3 - \omega_3 q_2), \\ \dot{u}_2 &= [q_2]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (\omega_3 q_1 - \omega_1 q_3), \\ \dot{u}_2 &= [q_3]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (\omega_1 q_2 - \omega_2 q_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Из равенств (16) и (17) мы получаем условия для «изгибаний» полосы, т. е. таких ее деформаций, при которых остаются неизменными ds и c_3 :

$$p'_1 + c_2 p_3 - c_3 p_2 = 0, \quad q'_3 + c_1 q_2 - c_2 q_1 = 0. \quad (25)$$

Если полоса не является асимптотической ($c_2 \neq 0$), то при ее изгибании величины q_i можно выразить через p_j , пользуясь уравнениями (16) и (25).

Наконец, рассмотрим частный случай изгибания *асимптотической полосы* ($c_2 = 0$), при котором она остается асимптотической полосой. Введем, как в (22,10), кривизну и кручение такой полосы:

$$k = c_3, \quad \omega = c_1. \quad (26)$$

Тогда из (8) следует

$$\dot{x} = \int_0^S (a_2 q_3 - a_3 q_2) ds, \quad (27)$$

а в силу (17)

$$\frac{dq_2}{ds} + kq_1 - \omega q_3 = 0, \quad \frac{dq_3}{ds} + \omega q_2 = 0. \quad (28)$$

Если задана функция $q_3(s)$, то из последнего уравнения можно найти q_2 , а затем из первого q_1 ; после этого из (27) мы найдем $\dot{x}$ и, наконец, на основании (4) вычислим значения

$$p_j = \dot{x} a_j. \quad (29)$$

Формулы этого параграфа можно было бы получить несколько короче из уравнений (21,18), применяя дифференцирование по v ; только тогда нужно было бы выяснить смысл величин $\dot{\omega}_j$. Еще проще наши результаты могли бы быть получены с помощью пфаффовых форм от двух переменных, которые мы будем рассматривать в III¹.

§ 27. Задачи, теоремы

1. Пара кривых Бертрана. Могут ли существовать линии с общими главными нормальными? Покажите, что для каждой такой линии имеет место линейное соотношение между кривизной и кручением:

$$Ak + B\omega = 1. \quad (1)$$

Эти линии в общем случае появляются парами. J. Bertrand (1822–1900), C. R. Acad. Sci., Paris, 36 (1850). Ср. также E. Salkowski, Math. Ann., 67 (1909). Дальнейшая литература в энциклопедии: Enzyklopädie, III, D4, № 28, 33.

¹Именно, положим

$$dx = \sum a_k \sigma_k, \quad da_j = \sum a_k \tau_{jk}; \quad [d\sigma_j] = \sum [\sigma_s \tau_{sj}], \quad [d\tau_{jk}] = \sum [\tau_{js} \tau_{sk}],$$

где σ, τ — пфаффовы формы от t, v ($\tau_{jk} + \tau_{kj} = 0$). Если мы введем символы дифференцирования d_1, d_2 , для которых $d_1 v = 0, d_2 t = 0$, то условие интегрируемости для $[d\sigma_1]$ запишется подробно так:

$$\begin{vmatrix} d_1 \sigma_1 & (d_1) \\ d_2 \sigma_1 & (d_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{21}(d_1) \\ \sigma_2(d_2) & \tau_{21}(d_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \tau_{31}(d_1) \\ \sigma_3(d_2) & \tau_{32}(d_2) \end{vmatrix},$$

поскольку $\sigma_3(d_1) = \sigma_2(d_1) = 0$. Интегрируя по t , получим отсюда вариацию длины дуги:

$$d_2 \int_a^b \sigma_1(d_1) = [\sigma_1(d_2)]_a^b + \int_a^b \{\sigma_2(d_2) \tau_{21}(d_1) + \sigma_3(d_2) \tau_{31}(d_1)\}.$$

Ср. § 32.

2. Теорема Бельтрами. Поверхность, образованная касательными пространственной линии, пересекает соприкасающуюся плоскость этой линии по плоской кривой, которая в точке соприкосновения первоначальной линии и плоскости имеет кривизну, равную $\frac{3}{4}$ кривизны данной линии. E. Beltrami (1835–1900), Opere, I (1865), стр. 261.

3. Теорема Якоби. Если отложить от постоянной начальной точки o единичные векторы бинормалей a_3 линии L , то их концы опишут на сфере единичного радиуса с центром o «индикатрису бинормалей» L_3 линии L . L_3 делит поверхность сферы пополам. C. G. Jacobi (1804–1851), Werke, 7, 39 (1842).

4. Об овалах. Пусть E — овал, пробегаемый против часовой стрелки, в плоскости с декартовыми координатами x, y ; пусть h — расстояние ориентированной касательной к E от начала o , причем h считается положительным, если вращение касательной вокруг o происходит против часовой стрелки.

Если τ — угол этой касательной с осью x , то ее уравнение будет

$$x \cos \tau + y \sin \tau = h(\tau), \quad (2)$$

и $h(\tau)$ называется *опорной функцией* овала E ; она удовлетворяет условию $h(\tau) = h(\tau + 2\pi)$. Для радиуса кривизны E получается выражение

$$r = h + \frac{d^2 h}{d\tau^2}. \quad (3)$$

Отсюда для длины E вытекает формула Коши (1789–1857), 1841 г.:

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Если расстояние между параллельными противоположно ориентированными касательными к E постоянно и равно $2a$:

$$h(\tau) + h(\tau + \pi) = 2a, \quad (5)$$

то говорят, что E имеет «*постоянную ширину*»; в этом случае

$$U = 2\pi a. \quad (6)$$

Примером такого овала служит «треугольник Рело», изображенный на рис. 9 (Fr. Reuleaux, 1829–1905). Он состоит из трех круговых дуг, центры и концевые

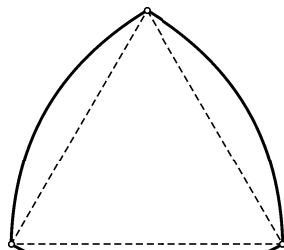


Рис. 9

точки которых совпадают с вершинами равностороннего треугольника [3]. Из (3) вытекает выражение для площади A овала E :

$$A = \frac{1}{2} \int h \left(h + \frac{d^2 h}{d\tau^2} \right) d\tau = \frac{1}{2} \int \left\{ h^2 - \left(\frac{dh}{d\tau} \right)^2 \right\} d\tau. \quad (7)$$

Овал $E_p < h$ с опорной функцией $n+p$ ($p = \text{const}$) называется «параллельным» к E и отстоящим от него на расстояние p . Из (7) и (4) для его площади получается формула Штейнера (1840 г.):

$$A_p = A + Up + \pi p^2. \quad (8)$$

Отметим еще смысл величины $h'(\tau) = \frac{dh}{d\tau}$, а именно: $h'(\tau)$ служит опорной функцией эволюты (огibaющей нормалей) овала E . Название «эволюта» было введено Гюйгенсом (1629–1695).

5. Разложения Фурье для овалов. Радиус кривизны овала E можно разложить в ряд Фурье (J. B. J. Fourier, 1768–1830) (1822 г.) по углу τ , определяющему направление касательной:

$$r = \frac{1}{2} a_0 + \sum (a_k \cos k\tau + a'_k \sin k\tau),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} r \cos k\tau d\tau, \quad a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} r \sin k\tau d\tau. \quad (9)$$

Тогда длина U овала E будет

$$U = \pi a_0. \quad (10)$$

Исходя из соотношения $a_1 = a'_1 = 0$, или

$$\int_{-\pi}^{+\pi} r \cos \tau d\tau = \int_{-\pi}^{+\pi} r \sin \tau d\tau = 0, \quad (11)$$

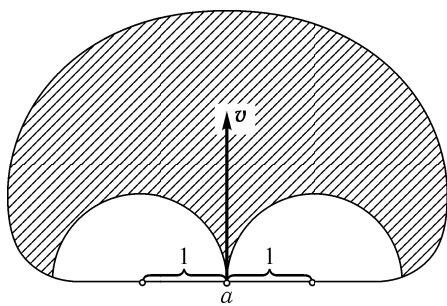
докажите теорему о четырех вершинах (§ 24), рассматривая r как плотность распределенной вдоль единичной окружности нагрузки с центром тяжести в центре окружности.

Векторы

$$\sqrt[k]{a_k + ia'_k}, \quad i^2 = -1; \quad k = 2, 3, \dots \quad (12)$$

в плоскости комплексного переменного $x + iy$ образуют совместно с a_0 «полную систему инвариантов» E ; A. Hurwitz (1859–1919), Werke 1 (1902 г.), стр. 522–525.

—



пересечет прямую, соединяющую центр кривизны o_0 линии L_0 в x с центром кривизны o линии η в y , в такой точке p , что прямая px перпендикулярна к прямой yx . Эйлер (1765 г.), Савари (F. Savary, 1845 г.). Литература в Encyclopädie, III, D 1, 2, № 17.

13. Интегральные векторы для замкнутых полос. Показать, что векторы

$$\begin{aligned} v_2 &= \oint a_2 \sigma, \quad v_3 = \oint a_3 \sigma, \quad v_{jk} = \oint a_j \omega_k, \quad v_{jk} - v_{kj} = 0, \\ v &= \oint [xa_1] \sigma = \oint [x dx], \quad w_2 = \oint [xa_2] \sigma, \quad w_3 = \oint [xa_3] \sigma, \\ w_{jk} &= \oint [xa_j] \omega_k, \quad w_{23} - w_{32} = 0, \quad w_{31} - w_{13} = -v_3, \\ w_{12} - w_{21} &= +v_2, \quad w = -\oint (xx) dx \end{aligned} \quad (15)$$

преобразуются при сдвиге

$$x^* = x + x_0$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} v_j^* &= v_j, \quad w^* = w + [x_0 v], \\ w_j^* &= w_j + [x_0 v_j], \quad w_{jk}^* = w_{jk} + [x_0 v_{jk}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Получить инварианты

$$vv, \quad v_j v_j, \quad v_{jk} v_{jk}, \quad ww, \quad v_j w_j, \quad v_{jk} w_{jk}. \quad (17)$$

«Интегральными винтами» называются пары

$$\{v, w\}, \quad \{v_j, w_j\}, \quad \{v_{jk}, w_{jk}\}. \quad (18)$$

§ 28. Линии откоса на квадриках вращения

Будем искать на поверхности второго порядка («квадрике») Q , переходящей в себя при вращениях вокруг третьей (вертикальной) координатной оси, линию L , касательные к которой образуют с этой осью постоянный угол $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Мы назовем L «линией откоса на квадрике вращения» и рассмотрим здесь в качестве упражнения эти линии. Соприкасающиеся плоскости линии L образуют с третьей координатной осью постоянный угол α и, следовательно, пересекают Q по коническим сечениям R , которые все подобны друг другу. Точка x соприкосновения R с L является вершиной R , так как горизонтальная главная нормаль H линии L в точке x является главной осью R .

R имеет с L в точке x соприкосновение второго порядка. Центр z кривой R мы получим, пересекая H плоскостью, проведенной из центра o квадрики Q перпендикулярно к H . Исследуем «горизонтальную проекцию» L^* линии L на плоскость координатных осей 1, 2, проходящую через o . Тогда подобные друг другу конические сечения R^* будут касаться линии L^* в точке x^* на оси H^* , перпендикулярной к L^* в x^* , и центр z^* линии R^* будет соответственно основанием перпендикуляра, опущенного из o на H^* . Пусть x' — центр кривизны линий L^* и R^* в точке x^* . Тогда из подобия всех R^* следует, что отношение отрезков

$$\overline{x^*x'} : \overline{x^*z^*} = \lambda \quad (1)$$

будет постоянным. Итак, резюмируем:

Основание z^ перпендикуляра, опущенного из o на нормаль H^* линии L^* в точке x^* , делит радиус кривизны линии L^* в x^* в постоянном отношении. Это условие вполне характеризует плоские линии L^* .*

Рассмотрим различные случаи.

I. Пусть Q — эллипсоид. Тогда $0 < \lambda < 1$, и L^* будет «циклоидальной кривой», описываемой точкой x^* периферии круга K , катящегося по фиксированному кругу K_0 , причем круги K_0 и K лежат один вне другого. На рис. 12 изображен случай $\lambda = 3 : 5$; здесь L^* замкнута. Рис. 13 дает представление о ходе соответствующей линии L на поверхности сферы Q . На рис. 12 изображено также геометрическое место L' точек x' , т.е. огибающая нормалей («эволюта») линии L^* , которая снова является циклоидальной кривой, порожденной кругами K' , K'_0 .

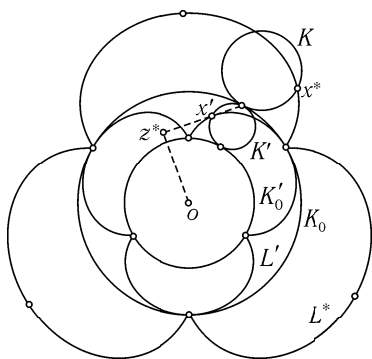


Рис. 12

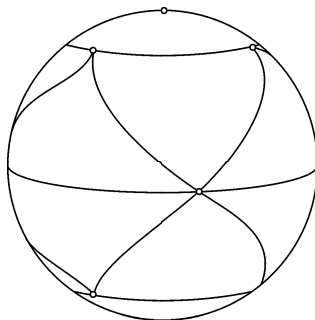


Рис. 13

II. Пусть Q — однополостный гиперболоид, например

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad (2)$$

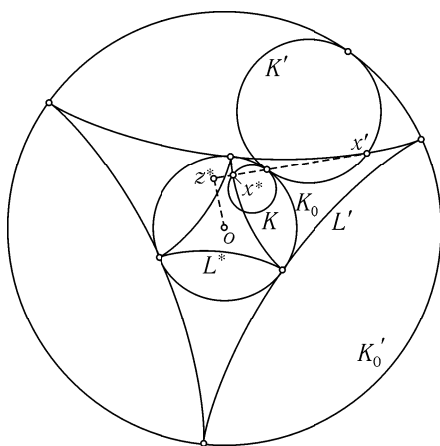


Рис. 14

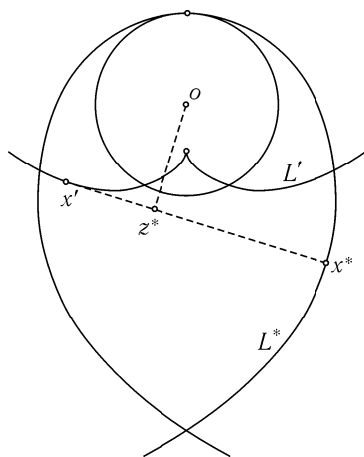


Рис. 15

и пусть $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Тогда $\lambda < -1$, и L^* будет снова циклоидальной кривой, описываемой граничной точкой круга K , катящегося внутри фиксированного круга K_0 . На рис. 14 изображена, в частности, кривая Штейнера (1856 г.), с тремя острями, для которой $\lambda = -8$. Рассмотрение циклоидальных кривых, или *циклоид*, восходит к древним греческим астрономам («эпицикл» в системе Птолемея, примерно 150 г.); их рассматривал также Альбрехт Дюрер (1471–1528) в своем сочинении «Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit» (1525 г.).

III. Пусть Q — снова *однополостный гиперboloид* (2), но теперь $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Тогда $\lambda > 1$ (на рис. 15 $\lambda = \frac{3}{2}$). Линия L^* в этом случае имеет две всюду гладкие бесконечные ветви, напоминающие пару зеркально симметричных логарифмических спиралей. Окружность на рис. 15 является горловой линией гиперboloида. Граничный случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$ дает прямолинейные образующие гиперboloида (2).

IV. Пусть Q — *двуполостный гиперboloид*

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad (3)$$

причем $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Тогда $\lambda > 1$ (на рис. 16 $\lambda = 2$). Кривая L^* имеет одно острие и снова уходит в бесконечность подобно паре зеркально симметричных логарифмических спиралей. При переходе к рассмотрению эволют ($L^* \rightarrow L'$) следует переменить местами рисунки в разделах III и IV. С линиями L^* из

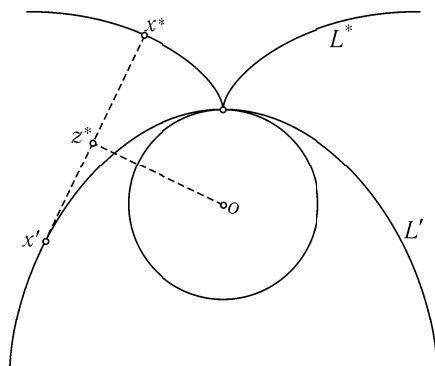


Рис. 16

пунктов III и IV впервые столкнулся в 1750 г. Эйлер, занимаясь вопросом о линиях, подобных их «вторым эволютам».

V. Пусть Q — конус

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad (4)$$

и $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Тогда линии L^* являются логарифмическими спиралями (рис. 17). Они были введены в 1640 г. Декартом и Торричелли (Е. Torricelli, 1608–1647).

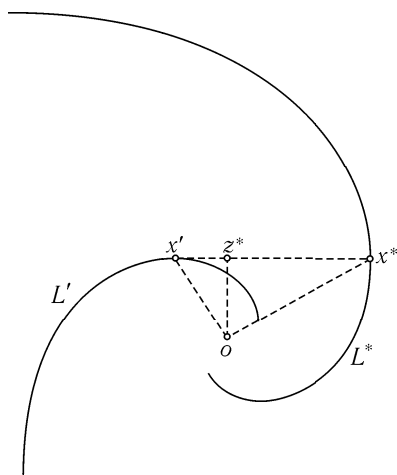


Рис. 17

Линия L^* пересекает под постоянным углом прямые, проходящие через вершину конуса. Здесь $\lambda > 1$ (в частности, на рис. 17 $\lambda = \frac{4}{3}$).

VI. Пусть Q — параболоид

$$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3. \quad (5)$$

Линии L^* являются тогда «эвольвентами окружности», т. е. имеют окружности в качестве эволют (рис. 18).

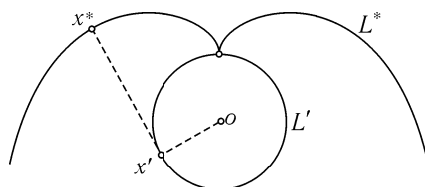


Рис. 18

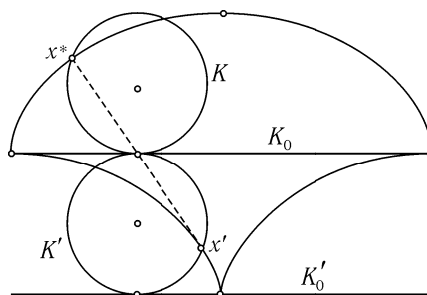


Рис. 19

Наконец, с помощью предельного перехода из I или II можно получить еще следующий случай:

VII. Q — цилиндр

$$x_3^2 = 2x_1. \quad (6)$$

Линии L^* превращаются здесь в «обыкновенные циклоиды» (рис. 19). Они описываются граничной точкой x^* круга K , катящегося по прямой K_0 . Такие линии рассматривал Галилео Галилей (1564–1642); в механике они играют роль «таухтохрон» и «брахистохрон».

Все эти линии обладают следующим свойством: плоскость, неподвижно скрепленная с сопровождающим триэдром $\{x; a_1, a_2, a_3\}$ линии откоса на

квадрике вращения (она не обязательно проходит через x), огибает снова линию откоса* на квадрике, имеющей с первоначальной общую ось вращения. Проводя рассуждения так же, как в начале этого пункта, покажите без вычислений:

VIII. Линии откоса L на цилиндре

$$x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad (7)$$

при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ проектируются на плоскость $x_3 = 0$ в линии L^* , обладающие следующим характерным свойством. Чтобы построить центр кривизны x' линии L^* на нормали в точке x^* , надо найти на этой нормали точку, симметричную относительно x^* точке ее пересечения y с осью $x_2 = 0$ (рис. 20). Таким образом, L^* является «цепной линией»

$$x_2 = \operatorname{ch} x_1 = \frac{e^{+x_1} + e^{-x_1}}{2}. \quad (8)$$

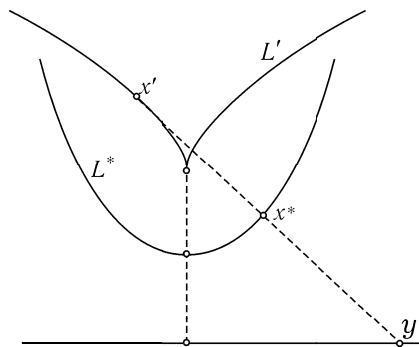


Рис. 20

Эта линия напоминает параболу и является формой равновесия однородной гибкой тяжелой нити. Ее неоднократно рассматривали, начиная с 1646 г., Гюйгенс (Ch. Huygens, 1629–1695), Лейбниц и Иоганн Бернулли.

IX. Проекциями линий откоса на цилиндре

$$x_2^2 = 2x_3 \quad (9)$$

служат эволюты цепных линий.

* Другими словами, вторая линия откоса служит ребром возврата развертываемой поверхности, огибающей рассматриваемое однопараметрическое семейство.

В отношении содержания этого параграфа ср. Б л а ш к е Mh. Math. Phys., т. 19 (1908). Обобщениями занимались W. Wunderlich и F. Fabricius-Bjerre. 1949.

Рассмотренные здесь плоские линии характеризуются еще очень простой (квадратичной) зависимостью между длиной дуги s и кривизной $\frac{1}{r}$;* в общем случае такая зависимость:

$$f(r, s) = 0$$

называется по Чезаро (E. Cesaro, 1859–1906) «натуральным уравнением» (equazione intrinseca). Ср. E. Cesaro, Lezione di geometria intrinseca, Neapel, 1896; на немецком языке есть книга G. Kowalewski, 1901.

§ 29. Основное изопериметрическое свойство круга

Между длиной U и площадью A плоской области $\mathfrak{B}$ существует «изопериметрическое» соотношение

$$U^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (1)$$

причем равенство выполняется только в том случае, если $\mathfrak{B}$ является кругом (единственность). Таким образом, при заданном U площадь A достигает своего максимального значения в случае круга. Этот факт, с которым были знакомы уже древние греки, называется *основным изопериметрическим свойством круга*. Мы здесь укажем некоторые доказательства соотношения (1), ограничиваясь *овальными областями* $\mathfrak{B}$ (выпуклыми областями).

1. Доказательство по Кроне и Фробениусу. Пусть E — овал, обходимый против часовой стрелки, E_p — параллельная ему линия, проходящая

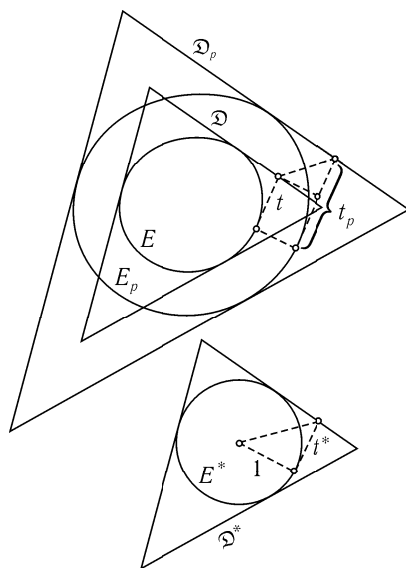


Рис. 21

* Эта зависимость имеет вид

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1.$$

См. упоминающуюся автором книгу Чезаро, стр. 83.

извне на расстоянии p от этого овала¹, E^* — единичный круг, обходимый против часовой стрелки, $\mathfrak{D}$ — треугольник из касательных к E , содержащий E , а $\mathfrak{D}_p$ и $\mathfrak{D}^*$ — два одинаково ориентированных треугольника с параллельными сторонами, описанных около E_p и E^* ; t — длина отрезка ориентированной касательной к E от точки прикосновения до точки пересечения с $\mathfrak{D}$, и t_p , t^* — соответственные отрезки одинаково ориентированных касательных к E_p , E^* (рис. 21); τ — угол между этими касательными и фиксированным направлением; D , D_p , D^* — площади $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_p$, $\mathfrak{D}^*$; A , A_p , $A^* = \pi$ — площади E , E_p , E^* ; r — радиус окружности, вписанной в $\mathfrak{D}$. Тогда

$$t_p(\tau) = t(\tau) + pt^*(\tau),$$

$$A_p = D_p - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} t_p^2 d\tau = D^*(p+r)^2 - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (t + pt^*)^2 d\tau. \quad (2)$$

С другой стороны, для площади E_p справедлива формула Штейнера (27,8). Из (2) следует, что входящий в эту формулу полином относительно p имеет вещественные корни. Отсюда для его дискриминанта вытекает соотношение (1). Далее, из (2) легко следует единственность. См. Кроне (C. Krone, 1855 г.), *Nyt Tidskrift*, т. 4 (1904 г.); Фробениус (G. Frobenius, 1849–1917), *Berl. Ber.*, 1915.

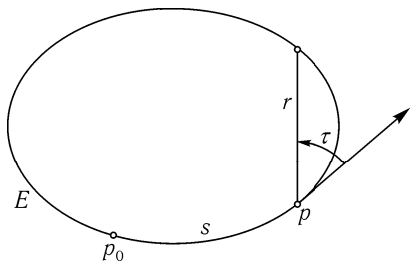


Рис. 22

2. Доказательство Кноте (H. Knothe). Выберем на овале E (рис. 22) начальную точку p_0 для отсчета дуги s . Тогда каждому значению $0 \leq s < U$ отвечает точка p на E . Прямую g , проходящую через p , мы можем задать углом τ с касательной в точке p ($0 \leq \tau \leq \pi$); пусть $r \geq 0$ — длина ее хорды в овале E . Тогда для двух точек p , p' , движущихся по E , справедливо соотношение

$$\int_0^U \int_0^\pi \int_0^U \int_0^\pi (r \sin \tau' - r' \sin \tau)^2 ds d\tau ds' d\tau' = 2\pi A(U^2 - 4\pi A). \quad (3)$$

Отсюда вытекает соотношение (1) для овалов. Единственность также следует непосредственно. Блашке, *Rendiconti Seminario Matematico Roma* (4), т. 1 (1936), стр. 233–234.

¹См. § 27, пункт 4.

3. Доказательство Боля (G. Bol). Пусть в плоскости с декартовыми координатами x, y выпуклая область $\mathfrak{B}$ задана неравенствами:

$$x \cos \tau + y \sin \tau \leq h(\tau) = h(\tau + 2\pi), \quad (4)$$

где τ принимает любое значение. Назовем направление τ «обычным», если соответствующее $h(\tau)$ нельзя уменьшить, не изменив $\mathfrak{B}$. Мы можем предположить, что для $\mathfrak{B}$ все направления τ обычны. Пусть r — радиус наибольшего из кругов, лежащих в $\mathfrak{B}$ («внутренний круг»). Рассмотрим семейство выпуклых областей

$$\mathfrak{B}_p (\mathfrak{B}_p < \mathfrak{B}_{p'} \text{ для } p < p') : \quad (5)$$

$$x \cos \tau + y \sin \tau \leq h(\tau) - r + p, \quad 0 \leq p \leq r.$$

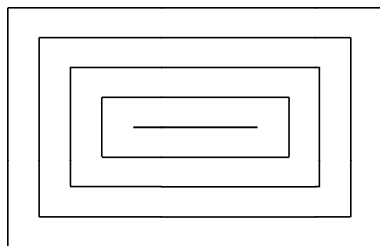


Рис. 23

При этом $\mathfrak{B}_0$ является точкой или отрезком, а $\mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}$. Если, как на рис. 23, $\mathfrak{B}$ будет прямоугольником, то и все $\mathfrak{B}_p$ также будут прямоугольниками. Рассмотрим далее выпуклые области G_p ($0 < p \leq r$), заданные неравенствами

$$x \cos \tau + y \sin \tau \leq p(\tau) \quad (6)$$

лишь для тех значений τ , которые являются обычными для $\mathfrak{B}_p$ и удовлетворяющие условию $G_p \geq G_{p'}$ при $p < p'$. В нашем примере G_p являются одним и тем же квадратом. Пусть $A(p)$, $U(p)$ — площадь и длина $\mathfrak{B}_p$, а $\alpha(p)$ — площадь G_p ; обозначим далее

$$D(p) = (U(p))^2 - 4\pi A(p). \quad (7)$$

Тогда, как показал Боль,

$$D(r) = D(0) + 4 \int_0^r U(p) \{ \alpha(p) - \pi \} dp. \quad (8)$$

Здесь $D(0)$ дает учетверенный квадрат длины $\mathfrak{B}_0$, а $\alpha(p) \geq \pi$ и не убывает монотонно. Отсюда следует (1), именно

$$D(r) = U^2 - 4\pi A \geq 0,$$

причем равенство нулю может выполняться только тогда, когда $\mathfrak{B}$ — круг. *G. Bol*, Jber. deutsch. Math. — Ver., т. 51 (1941), стр. 219–257. Линии, проходящие внутри овала параллельно ему, рассматривали также *Sz. v. Nagy* и *Th. Kaluza*.

4. Первое доказательство Гурвица (А. Hurwitz, 1859–1919). Используя обозначения (27,9), найти следующее соотношение для площади A овала E :

$$U^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_2^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k^2 - 1}. \quad (9)$$

Отсюда следует как неравенство (1), так и единственность.

5. Второе доказательство Гурвица. Оно не требует выпуклости. Пусть функции

$$x(s), \quad y(s), \quad x(s+U) = x(s), \quad y(s+U) = y(s); \quad 0 \leq s < U$$

являются декартовыми координатами точки, описывающей замкнутую линию длины U . Положим

$$\alpha = \frac{2\pi}{U} s, \quad -\pi \leq \alpha \leq +\pi. \quad (10)$$

Введем ряды Фурье:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos k\alpha + a_k' \sin k\alpha), \\ y &= \frac{1}{2}b_0 + \sum_1^{\infty} (b_k \cos k\alpha + b_k' \sin k\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left(\frac{dx}{d\alpha} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \right\} d\alpha &= 2\pi \left(\frac{U}{2\pi} \right)^2 = \\ &= \pi \sum_1^{\infty} k^2 (a_k^2 + a_k'^2 + b_k^2 + b_k'^2), \end{aligned} \quad (12)$$

и для площади получается выражение

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{dy}{d\alpha} d\alpha = \pi \sum_1^{\infty} k (a_k b_k' - b_k a_k'). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует

$$U^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum \{(ka_k - b'_k)^2 + (ka'_k + b_k)^2 + (k^2 - 1)(b_k^2 + b'^2_k)\}. \quad (14)$$

Из этого равенства вытекает соотношение (1) вместе с единственностью. Это последнее доказательство предполагает лишь «кусочную гладкость» граничной линии. Г у р в и ц, Ann. l'École normale (3), т. 19 (1902), стр. 357–408, Werke I, стр. 509–554. Счет может быть сокращен введением комплексной комбинации $x + iy$, $i^2 = -1$.

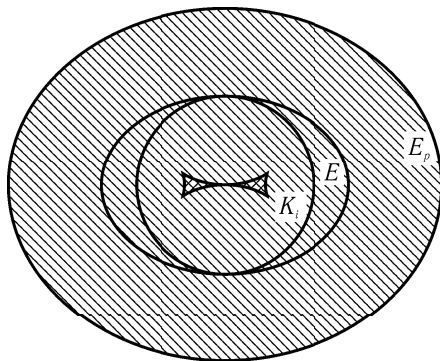


Рис. 24

6. Первое доказательство Сантало (L. A. Santaló). Пусть n — число точек пересечения подвижной окружности K постоянного радиуса r с фиксированным овалом E ; x, y — декартовы координаты центра этой окружности. Тогда справедливо соотношение

$$\int n \, dx \, dy = 2F_2 + 4F_4 + 6F_6 + \dots = 4rU, \quad (15)$$

где U — длина E , а F_k — площадь области, заполненной центрами всех K , имеющих точно k точек пересечения с E . На рис. 24 E является эллипсом, а K имеет тот же радиус, что и внутренний круг эллипса K_i , область F_2 заштрихована в одном, а область F_4 — в двух направлениях. Площадь области центров всех K , вообще пересекающих E , равна

$$G = F_2 + F_4 + F_6 + \dots \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует

$$2rU - G = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \dots \quad (17)$$

Пусть r_i, r_u — радиусы внутреннего и внешнего кругов овала E , т.е. радиус наибольшего круга, содержащегося в E , и радиус наименьшего круга, содержащего E . Тогда для

$$r_i \leq r \leq r_u \quad (18)$$

область центров окружностей K , пересекающих E , не имеет пустот и ограничена линией E_r , параллельно отстоящей от E на расстоянии r . Таким образом, по формуле Штейнера (27,8)

$$G = A_r = A + Ur + \pi r^2, \quad (19)$$

и отсюда

$$2rU - G = rU - A - \pi r^2 = \left(\frac{U^2}{4\pi} - A \right) - \pi \left(\frac{U}{2\pi} - r \right)^2. \quad (20)$$

Из сравнения с (17) получается уравнение Сантало:

$$\frac{U^2}{4\pi} - A = \pi \left(\frac{U}{2\pi} - r \right)^2 + F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \dots \quad (21)$$

Отсюда следует справедливость неравенства (1). Однако из (21) можно вывести и более тонкое соотношение Боннезена (Т. Bonnesen, 1929 г.):

$$U^2 - 4\pi A \geq \pi(r_u - r_i)^2, \quad (22)$$

из которого единственность видна особенно отчетливо. Ср. Б л а ш к е, Лекции по интегральной геометрии I, § 11. 2-е издание, Leipzig und Berlin, 1936.

7. Второе доказательство Сантало. Пусть E_0 — зафиксированный в плоскости овал, а E — движущийся в этой же плоскости овал, конгруэнтный E_0 . Чтобы определить меру множества положений E , рассмотрим движущуюся точку (x, y) , скрепленную с E , и переменное направление τ , также зафиксированное относительно E . Тогда эта мера дается интегралом Пуанкаре (Н. Poincaré, 1854–1912):

$$\iiint dx dy d\tau = J. \quad (23)$$

Она не зависит от выбора точки и направления. Если J_k — мера множества положений E , имеющих с E_0 точно k общих точек, то, по Сантало,

$$U^2 - 4\pi A = J_4 + 2J_6 + 3J_8 + \dots \quad (24)$$

В этой формуле содержится неравенство (1). Доказательство единственности здесь менее просто. Ср. вышеупомянутую «Интегральную геометрию»,

§ 13. Там же даны другие доказательства в § 15 и 20. Другое простое доказательство предложено Шмидтом (E. Schmidt), Math. Z., т. 44 (1939), стр. 690–694. Дальнейшие варианты — в сочинении Блашке, Kreis und Kugel, Leipzig, 1916; Т. Bonnesen и W. Fenchel, Théorie der konvexen Körper, Ergebn. Math., т. 3 (Berlin, 1934), стр. 1.

Простое доказательство изопериметрии, принадлежащее Радону (H. Radon), скоро появится в Annali di Matématica, 1949.

III. Формы Пфаффа

§ 31. Альтернированное произведение

Способ записи определенного интеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (1)$$

предложенный в 1675 г. Лейбницем (G. W. Leibniz), имеет главным образом то преимущество, что при введении новых переменных

$$x = x(u), \quad x_j = x(u_j); \quad x' = \frac{dx}{du} > 0 \quad (2)$$

он непосредственно приводит к правильной вычислительной формуле

$$J = \int_{u_1}^{u_2} f(x(u)) x'(u) du. \quad (3)$$

Этого же преимущества можно достичь и в записи двойных интегралов, если вместо обычного произведения дифференциалов использовать *альтернированное* произведение, подобное тому, которое мы ввели по Грассману в § 13 для векторов. Рассмотрим двойной интеграл

$$J = \iint_g f(x, y) [dx dy], \quad (4)$$

распространенный на односвязную область g в плоскости x, y . Положим

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (5)$$

предполагая положительность функционального определителя:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u > 0, \quad (6)$$

и пусть g служит образом области h в плоскости u, v при отображении (5). Тогда, как известно,

$$J = \iint_h f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} [du dv]. \quad (7)$$

Ту же формулу можно получить чисто формально следующим образом: положим прежде всего

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad dy = y_u du + y_v dv \quad (8)$$

и образуем, исходя отсюда, альтернированное произведение или *полярное произведение**

$$[dx dy] = [x_u du + x_v dv, y_u du + y_v dv].$$

После перемножения получаем

$$[dx dy] = (x_u y_v - x_v y_u) [du dv]. \quad (9)$$

Выражение вида

$$\omega = p(u, v) du + q(u, v) dv \quad (10)$$

называется *формой Пфаффа* в переменных u, v . Определим полярное произведение двух таких форм:

$$[\omega_1 \omega_2] = -[\omega_2 \omega_1] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) [du dv]. \quad (11)$$

Тогда равенство

$$[\omega_1 \omega_2] = 0 \quad (12)$$

будет условием *линейной зависимости* этих пфаффовых форм.

* Это произведение чаще называется «внешним произведением».

Полярное произведение не зависит от выбора координат (инвариантность). Именно, если мы положим

$$\omega_j = p_j du + q_j dv, \quad \overline{\omega}_j = a_j dx + b_j dy, \quad (13)$$

то на основании (8) будем иметь:

$$\begin{aligned} p_j &= a_j x_u + b_j y_u, & q_j &= a_j x_v + b_j y_v; \\ [\omega_1 \omega_2] &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) [du dv] = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} [du dv] = \\ &= (a_2 b_2 - a_2 b_1) [dx dy] = [\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2], \end{aligned} \quad (14)$$

что и доказывает высказанное предложение.

§ 32. Внешний дифференциал

Пусть прямоугольная система координат u, v в плоскости такова, что положительная ось v идет влево от положительной оси u (рис. 25). Если g — односвязная область, то известна формула Гаусса (1777–1855) и Грина (1793–1841):

$$\iint_g (q_u - p_v) [du dv] = \int_{r(g)} (p du + q dv), \quad (1)$$

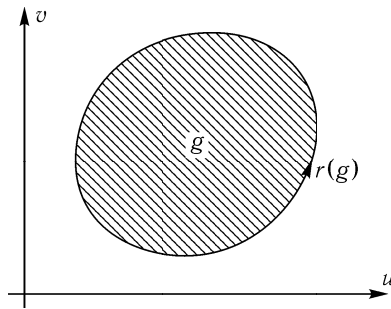


Рис. 25

сводящая двойной интеграл по области g к криволинейному интегралу, взятому по границе $r(g)$ области g . При этом граница должна обходить-

ся так, чтобы область g оставалась при обходе слева (рис. 25). Положим

$$p du + q dv = \omega, \quad (2)$$

$$(q_u - p_v)[du dv] = [d\omega]^*; \quad (3)$$

тогда наша формула Гаусса или Грина (1) запишется короче:

$$\int_g [d\omega] = \int_{r(g)} \omega, \quad (4)$$

если только мы условимся ради сокращения писать один значок интегрирования и у поверхностного интеграла. $[d\omega]$ называется *внешним дифференциалом* (или картановым дифференциалом) нашей пфафовой формы ω и вычисляется по правилам

$$[d(p du + q dv)] = [dp du] + [dq dv] = (q_u - p_v)[du dv]. \quad (5)$$

В процессе этого «дифференцирования» дифференциалы рассматриваются как постоянные. Тогда условие

$$[d\omega] = 0 \quad (6)$$

выражает тот факт, что форма

$$\omega = df \quad (7)$$

является *полным дифференциалом* скалярной функции $f(u, v)$.

Из определения (3) полного дифференциала тотчас же следует

$$[d(f\omega)] = [df, \omega] + f[d\omega], \quad (8)$$

или, что равносильно,

$$[d(\omega f)] = [d\omega]f - [\omega df]. \quad (9)$$

Внешний дифференциал также не зависит от выбора координат (свойство инвариантности). В самом деле, если мы положим

$$\omega = p du + q dv, \quad \bar{\omega} = a dx + b dy, \quad (10)$$

* Автор употребляет для внешнего дифференциала символ $d\omega$, хотя и отмечает в сноске, что было бы естественнее писать $[d\omega]$ вместо $d\omega$. Мы решили последовать этому указанию.

где

$$p = ax_u + by_u, \quad q = ax_v + by_v, \quad (11)$$

то получим:

$$q_u - p_v = (b_x - a_y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (12)$$

Следовательно, согласно утверждению

$$[d\omega] = (q_u - p_v)[du dv] = (b_x - a_y)[dx dy] = [d\bar{\omega}]. \quad (13)$$

То же самое вытекает и из формулы (1). Другими словами: переход к новым координатам и внешнее дифференцирование являются перестановочными операциями¹.

§ 33. Производные, отвечающие паре форм Пфаффа

Пусть ω_1, ω_2 — две линейно независимые пфаффовы формы в переменных u, v :

$$\omega_1 = p du + q dv, \quad \omega_2 = r du + s dv; \quad [\omega_1 \omega_2] \neq 0. \quad (1)$$

Тогда мы можем однозначно представить полный дифференциал функции $f(u, v)$ в виде линейной комбинации форм ω_j :

$$df = f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$f_u = pf_1 + rf_2, \quad f_v = qf_1 + sf_2, \quad (3)$$

или

$$f_1 = \frac{+sf_u - rf_v}{ps - qr}, \quad f_2 = \frac{-qf_u + pf_v}{ps - qr}. \quad (3^*)$$

¹Геометрический смысл $[d\omega]$ выявляется из следующей формулы:

$$\begin{aligned} d_1\omega(d_2) - d_2\omega(d_1) &= d_1(p d_2u + q d_2v) - d_2(p d_1u + q d_1v) = \\ &= (q_u - p_v) \begin{vmatrix} d_1u & d_2v \\ d_2u & d_2v \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

При этом d_1, d_2 означают дифференцирования в двух направлениях, ср. § 33.

Выражения f_i называются (ковариантными) производными скаляра f по отношению к паре пфаффовых форм ω_j .

Для этих производных тотчас же устанавливаются обычные законы, например,

$$(f + g)_1 = f_1 + g_1, \quad (fg)_1 = f_1g + fg_1. \quad (4)$$

Однако перестановочность в общем случае не имеет места. В самом деле, если мы положим

$$df_j = f_{j1}\omega_1 + f_{j2}\omega_2, \quad (5)$$

то тем самым будут определены вторые производные f_{jk} по отношению к нашей паре форм ω_1, ω_2 . Но в результате внешнего дифференцирования с учетом (32,8) и (5) мы получим из (2):

$$(f_{12} - f_{21})[\omega_1\omega_2] = f_1[d\omega_1] + f_2[d\omega_2]. \quad (6)$$

Следовательно, вторые производные от любых f не будут зависеть от порядка дифференцирования только в том случае, если ω_1 и ω_2 являются полными дифференциалами ($[d\omega_1] = [d\omega_2] = 0$). Но тогда мы возвращаемся к обычным производным.

§ 34. Альтернированные дифференциальные формы

Этих простых понятий о пфаффовых формах двух переменных u, v вполне достаточно для теории поверхностей. Бросим, однако, взгляд и на случай n переменных. Пфаффова форма от n переменных выглядит так:

$$\omega = \sum_1^n p_j du_j, \quad (1)$$

где p_j зависят от u . Ее внешний дифференциал имеет вид

$$[d\omega] = \sum [dp_j du_j] = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial u_j} - \frac{\partial p_j}{\partial u_k} \right) [du_j du_k]; \quad (2)$$

его называют также *билинейным инвариантом** формы ω . Так приходится к необходимости рассматривать наряду с пфаффовыми формами,

* Чаще это выражение называется билинейным ковариантом формы ω .

или «дифференциальными формами первой степени», также дифференциальные формы «высшей степени», например второй степени:

$$\omega = \sum p_{jk} [du_j du_k]. \quad (3)$$

При этом достаточно считать, что

$$p_{jk} + p_{kj} = 0. \quad (4)$$

Внешний дифференциал $[d\omega]$ будет тогда определен так:

$$[d\omega] = \sum [dp_{jk}, du_j, du_k] = \sum \frac{\partial p_{jk}}{\partial u_i} [du_i du_j du_k]. \quad (5)$$

Отсюда следует (Пуанкаре):

$$[d[d\omega]] = 0. \quad (6)$$

Если мы возьмем $n = 3$ и

$$\omega = a[du, dv] + b[du, dw] + c[dv, dw], \quad (7)$$

то

$$[d\omega] = (a_u + b_v + c_w)[du dv dw]. \quad (8)$$

Здесь также справедлива формула (32,4):

$$\begin{aligned} \int_g (a_u + b_v + c_w)[du dv dw] = \\ = \int_{r(g)} \{a[du, dv] + b[du, dw] + c[dv, dw]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом g является трехмерной областью в u, v, w -пространстве, а $r(g)$ служит ее двумерной, определенным образом ориентированной, границей. Формула (9) — пространственная интегральная формула Гаусса*. Очень удобно, что формулы Гаусса и Стокса (1819–1903) охватываются одной формулой (32,4).

*Эту формулу называют также формулой Остроградского.

Приведем обобщение формулы (32,8):

$$[d[\omega_1\omega_2]] = [[d\omega_1], \omega_2] + (-1)^n[\omega_1, [d\omega_2]], \quad (10)$$

где ω_1 — «альтернированная дифференциальная форма» r -й ступени:

$$\omega_1 = \sum a_{j_1, j_2 \dots j_r} [du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_r}]. \quad (11)$$

Например, из (10) следует, что для трех пфаффовых форм

$$[d[\omega_1\omega_2\omega_3]] = [[d\omega_1], \omega_2\omega_3] - [\omega_1[d\omega_2]\omega_3] + [\omega_3\omega_2[d\omega_3]]. \quad (12)$$

П ф а ф ф (J. F. Pfaff, 1765–1825) ввел свои формы в 1814 г. Внешние дифференциалы и формулы (32,4) использовал Э. К а р т а н, начиная с 1899 г. Подобные попытки делал уже Г р а с с м а н. Теория пфаффовых форм с их применением к дифференциальным уравнениям в смысле Э. К а р т а н а изложена в книжечке Э. К э л е р а (E. Kähler) за 1934 г. Ср. также: Э. К а р т а н. «Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques». Paris, 1945.

IV. Внутренняя геометрия поверхностей

§ 40. Исторические сведения

По-видимому, дату рождения дифференциальной геометрии можно отнести к 1687 г., когда Иоганн Б е р н у л л и (1667–1748) поставил задачу найти «кратчайший путь» на данной кривой поверхности. Из этой же задачи развилось и *вариационное исчисление*, находящееся в тесном родстве с дифференциальной геометрией. В 1760 г. вышло сочинение другого великого базельского математика, Э й л е р а (1707–1783), о кривизне линии на поверхности и в том же году — работа Л а г р а н ж а о «минимальных поверхностях», первый пример вариационной задачи для двойного интеграла¹.

¹Л. Э й л е р родился в Базеле в 1707 г., в 1730 г. вступил в должность профессора в Петербурге, а в 1741 г. по приглашению короля Фридриха — в прусскую Берлинскую академию; в 1766 г. он вернулся обратно в Петербург, где и умер в 1783 г. См. по этому поводу R. Fueter: L. Euler, Basel, 1948.

Первая учебная книга по нашему предмету создана Г а с п а р о м М о н ж е м (G. Monge, 1746–1818). Она появилась в Париже в 1795–1807 гг. под названием «Приложение анализа к геометрии»¹.

По М о н ж у, учение о поверхностях состоит в исследовании различных семейств поверхностей.

При этом вычислительные и наглядные методы тесно связаны друг с другом. М о н ж является основателем французской школы дифференциальной геометрии. К ней принадлежат, в частности, Д ю п е н (Ch. Dupin, 1784–1873), Л а м э (G. Lamé, 1795–1870), Л и у в и л ь (J. Liouville, 1809–1882), Б о н н е (O. Bonnet, 1819–1892), Д а р б у (G. Darboux, 1842–1917), Р и б о к у р (A. Ribaucour, 1845–1893), Г и ш а р (C. Guichard, 1861–1924) и Э. К а р т а н (E. Cartan, 1869–1951).

В связи с геодезическими измерениями в Ганновере (1821–1841) к дифференциальной геометрии пришел Г а у с с (K. F. Gauß, 1777–1855). В 1827 г. появилось его основное сочинение в этой области «Disquisitiones generales circa superficies curvas». Сюда же, в частности, относится небольшое посмертное издание сочинения о геодезической кривизне (Seitenkrümmung).

Исходным пунктом исследований Г а у с с а является вопрос: что можно сказать о форме поверхности в пространстве, исходя из измерений на самой поверхности? Дифференциально-геометрические исследования Гаусса связаны с его исследованиями по основаниям геометрии, что он, впрочем, скрывал.

Р и м а н (B. Riemann, 1826–1866) впервые высказал и развил дальше эти идеи в своей пробной лекции перед престарелым Г а у с с о м

Что касается Л а г р а н ж а, то как итальянцы, так и французы склонны считать его соотечественником. В предисловии к собранию сочинений его французское происхождение обосновывается, между прочим, тем забавным аргументом, что его мать в девичестве носила фамилию Gros. Он родился в Турине в 1736 г., в 1766 г. прибыл в Берлинскую академию как преемник Эйлера, затем в 1787 г., как раз в начале революции, перебрался в Париж, где умер в 1813 г. Эйлер и Лагранж известны как создатели вариационного исчисления и основные творцы механики после Ньютона.

¹ Г. М о н ж происходит из Савойи. Он родился в 1746 г. в Beaun'e, во время Французской революции был морским министром; с 1794 г. — основатель и главный деятель парижской Политехнической школы. В 1795 г. появилась его «Начертательная геометрия». Он был близок к Наполеону (как учитель), принимал участие вместе с ним в первом итальянском походе и в египетской авантюре. В 1818 г. он умер в Париже. Его жизнеописания составлены О. Spiess'ем в 1929 г. и Louis de Launay в Париже в 1934 г.

10.6.1854 г. в Геттингене. Оба происходят из Нижней Саксонии: Гаусс из Брауншвейга, Риман из Ганновера¹.

Основная цель настоящего учебника и заключается в том, чтобы ввести читателя в круг этих идей Гаусса, а отчасти и Римана.

В Италии также имеется школа дифференциальной геометрии. Если не считать Лагранжа, то ее наиболее выдающимися умами являются Бельтрами (E. Beltrami, 1835–1900), Дини (U. Dini, 1845–1918), Риччи (G. Ricci–Curbastro, 1853–1925) и Бьянки (L. Bianchi, 1856–1928). Почти все они родом из долины По, оттуда, где в Италии менее всего ощущается наследие не склонных к математике римлян: Лагранж из Турина, Бельтрами из Кремоны, Риччи из Ровенны, Бьянки из Пармы, и только Дини происходит из Пизы.

В Германии дифференциальной геометрией занимались, например, Якоби (C. G. J. Jacobi, 1804–1851), Миндинг (F. Minding, 1806–1885), Вейерштрасс (K. Weierstraß, 1815–1897), Кристоффель (E. B. Cristoffel, 1829–1900), Вейнгартен (J. Weingarten, 1836–1910), Шварц (H. A. Schwarz, 1843–1921), Фосс (A. Voss, 1845–1931), Клейн (F. Klein, 1849–1925), Штуди (E. Study, 1862–1930), Гильберт (D. Hilbert, 1862–1943) и норвежец Ли (S. Lie, 1842–1899).

Тремя наиболее выдающимися учебниками по нашему предмету являются: во-первых, «Приложение анализа к геометрии» Монжа, Paris, 1807, пятое издание которого было выпущено Лиувиллем в 1850 г.; затем большой труд Дарбу «Leçon sur la théorie générale des surfaces», Paris, 1887–1896 (также в двух изданиях) и, наконец, Бьянки «Lezioni di geometria differenziale», появившиеся с 1886 г.; третье издание Pisa, 1922–1924. Имеется также сокращенный немецкий перевод сочинения Бьянки².

¹О творчестве Гаусса и Римана см.: Клейн, «Лекции о развитии математики в 19 столетии». 1, Берлин, 1926 г. Далее P. Stäckel (1862–1919), K. P. Gauß als Geometer, Göttinger Nachrichten, 1917=Gauß, Werke, т. 10 (1922–1933). См. там также следующее затем сообщение O. Bolza (1857–1942), Gauß und die Variationsrechnung (см. также сборник Карл Фридрих Гаусс, АН СССР, 1956; и Б. Риман. «Сочинения». Гостехиздат, 1948 (Ред.).

²Дарбу родился в Ниме, в 1842 г. В возрасте 18 лет он прибыл в Париж и в течение 57 лет принимал большое участие в его научной жизни. В 1880 г. он был приглашен в Сорбонну как преемник Шаля (Charles, 1793–1880). О жизни и деятельности Дарбу см. статью Фосса в Ежегоднике Баварской Академии за 1917 г., а также доклад Дарбу на римском математическом конгрессе в 1908 г., Atti, I, стр. 105–122.

§ 41. Основные уравнения

Будем теперь считать координаты x_j точки x функциями двух параметров u, v и положим, как в (21,2),

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v); \quad u_0 \leq u \leq u_1, \quad v_0 \leq v \leq v_1. \quad (1)$$

u и v называются «координатами на поверхности» или «*криволинейными координатами на поверхности*». При этом мы будем иметь гладкую поверхность f и допустимое параметрическое представление, если предположим, что векторы $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ линейно независимы, то есть что

$$[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v] \neq 0. \quad (2)$$

Обозначения здесь таковы:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}. \quad (3)$$

«Касательный вектор»

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv, \quad (4)$$

к линии $u = u(t), v = v(t)$, проведенной на f , лежит в *касательной плоскости* $\{x; \mathbf{x}_u; \mathbf{x}_v\}$, проходящей через точку поверхности x параллельно векторам $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$. В большинстве случаев от функций $x_j(u, v)$ приходится требовать существования и непрерывности производных вплоть до третьего порядка (включительно) или даже разложимости в некоторой области в сходящиеся степенные ряды.

Введем на f ортогональную *сеть линий* N так, чтобы через каждую точку x на f проходили две линии сети N , пересекающиеся под прямым углом. Обозначим через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ единичные векторы касательных к линиям сети в точке x и дополним их *единичным вектором нормали* $\mathbf{a}_3$ к поверхности f в x до *сопрядающего триэдра* $\{x; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

Л. Бьянки родился в Парме в 1856 г. и в 1873 г. поступил в Высшую нормальную школу в Пизе, из которой вышли многие видные итальянские математики. В Пизе он провел всю свою дальнейшую жизнь: с 1881 г. — как профессор Нормальной школы, с 1886 г. и до смерти в 1928 г. — как профессор университета. Зимой 1909–1910 гг. у него в Пизе учился автор. Лучшим некрологом, посвященным Бьянки, мы обязаны итальянскому алгебраисту Скорца (G. Scorcia) из Калабрии (1876–1939); он помещен в *Annali della R. Scuola Normale Superiore*, т. 16 (1930 г.). Скорца разделял со своим учителем Бьянки лучшие черты его характера. Бьянки оказал большое влияние в Италии своим преподаванием и своими учебниками.

нашей поверхности f . Иногда вместо $\mathbf{a}_3$ мы будем писать короче, $\mathbf{a}$. При этом мы можем выбрать направление векторов $\mathbf{a}_j$ так, чтобы

$$[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v] = c \mathbf{a}_3, \quad c > 0, \quad (5)$$

т.е. чтобы триэдр $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{a}_3$ был правым, как и триэдр $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (рис. 4, стр. 16).

Как и в § 21, мы получим затем «*дериwационные уравнения*»

$$d\mathbf{x} = \sum_j \mathbf{a}_j \sigma_j, \quad d\mathbf{a}_j = \sum_k \mathbf{a}_k \omega_{jk}. \quad (6)$$

Что касается пфаффовых форм σ_j от переменных u, v , то в силу выбора нашего триэдра мы имеем

$$\sigma_3 = 0, \quad (7)$$

а матрица форм ω_{jk} будет «кососимметричной», т.е. как и в (21,7), (21,9),

$$\omega_{jk} + \omega_{kj} = 0. \quad (8)$$

В известной мере тут все обстоит так же, как и в случае линий (§ 21). Но вслед за тем возникает и нечто новое, а именно *условия интегрируемости*, сыгравшие, впрочем, известную роль и в § 26. Если мы образуем внешние дифференциалы обеих сторон равенств (6), то из первого уравнения с использованием второго мы получим

$$\sum_{j,k} \mathbf{a}_k [\omega_{jk} \sigma_j] + \sum_k \mathbf{a}_k [d\sigma_k] = 0, \quad (9)$$

и в силу линейной независимости векторов $\mathbf{a}_k$

$$[d\sigma_j] = \sum_k [\omega_{jk} \sigma_k]. \quad (10)$$

Аналогично из второго уравнения (6) следует

$$[d\omega_{jk}] = \sum_s [\omega_{js} \omega_{sk}]. \quad (11)$$

Если, как и в (21,10), мы изменим обозначения, положив

$$\omega_{23} = \omega_1, \quad \omega_{31} = \omega_2, \quad \omega_{12} = \omega_3, \quad (12)$$

то *деривационные уравнения* запишутся так:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{a}_1\sigma_1 + \mathbf{a}_2\sigma_2, \\ d\mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2\omega_3 - \mathbf{a}_3\omega_2, \quad d\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3\omega_1 - \mathbf{a}_1\omega_3, \quad d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1\omega_2 - \mathbf{a}_2\omega_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Сюда присоединяются шесть *условий интегрируемости*:

$$\begin{aligned} [d\sigma_1] &= +[\omega_3\sigma_2], \quad [d\sigma_2] = +[\sigma_1\omega_2], \quad 0 = [\sigma_1\omega_2] + [\omega_1\sigma_2]; \\ [d\omega_1] &= -[\omega_2\omega_3], \quad [d\omega_2] = -[\omega_3\omega_2], \quad [d\omega_3] = -[\omega_1\omega_2]. \end{aligned} \quad (14)$$

Все учение о поверхностях состоит в истолковании и использовании этих уравнений (6), (10), (11) или (13) и (14), что по существу (если отвлечься от способа записи) уже сделал Гаусс в своих «Disquisitiones» в 1827 г.

Здесь не будет доказываться тот факт, что условия (14) не только необходимы, но и достаточны для интегрируемости системы (13). Знания форм σ, ω достаточно для того, чтобы определить поверхность (вместе с ее сетью N) с точностью до движений.

§ 42. Площадь поверхности* и интегральная кривизна

Подсчитаем, как изменятся наши формы σ, ω , если мы заменим сеть линий N аналогичной сетью N^* на той же поверхности f , т.е. повернем наши триэдры $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ вокруг $\mathbf{a}_3$ на угол $\tau(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^* &= +\mathbf{a}_1 \cos \tau + \mathbf{a}_2 \sin \tau, \\ \mathbf{a}_2^* &= -\mathbf{a}_1 \sin \tau + \mathbf{a}_2 \cos \tau, \\ \mathbf{a}_3^* &= +\mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы находим:

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= +\sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \sin \tau; \\ \sigma_2^* &= -\sigma_1 \sin \tau + \sigma_2 \cos \tau; \\ \omega_1^* &= +\omega_1 \cos \tau + \omega_2 \sin \tau; \\ \omega_2^* &= -\omega_1 \sin \tau + \omega_2 \cos \tau; \\ \omega_3^* &= +\omega_3 + d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

* Автор вводит термин «Flächenmaß», который мы переводим здесь просто как «площадь поверхности».

Если r — ориентированная линия, проведенная на f , и

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_1 \cos \tau + \mathbf{a}_2 \sin \tau$$

— вектор касательной в точке x , движущейся по r , то в силу (2) формы

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \sin \tau = ds, \\ \omega_3^* &= \omega_3 + d\tau = \chi \end{aligned} \quad (3)$$

являются теми двумя пфаффовыми формами полосы, определенной вдоль r посредством x , $\mathbf{a}_3$, которые были введены в § 21. Мы можем представлять себе эту «поверхностную полосу» реализованной в виде узкой ленты, высеченной из f вдоль r . Согласно (22,5), нами была определена «интегральная геодезическая кривизна» полосы:

$$\int_r \chi = \int_r (\omega_3 + d\tau). \quad (4)$$

Здесь мы будем называть эту величину «интегральной геодезической кривизной линии r на f ». Посредством (22,6) мы определили также «геодезическую кривизну полосы» в точке x :

$$g = \frac{\chi}{\sigma} = \frac{\omega_3 + d\tau}{\sigma} = \frac{\omega_3}{\sigma} + \frac{d\tau}{ds}. \quad (5)$$

По Гауссу эта величина называется «боковой кривизной» (Seitenkrümmung) нашей линии в точке x . После Бонне эту величину принято называть «геодезической кривизной» линии r на поверхности f в точке x .

При нашем вращении триэдра (1), (2) сохраняются альтернированные дифференциальные формы второй степени:

$$\varphi = [\sigma_1 \sigma_2], \quad \psi = [\omega_1 \omega_2] \quad (6)$$

($\varphi^* = \varphi$, $\psi^* = \psi$). При взаимной перестановке линий сети ($\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2^* = \mathbf{a}_1$) обе эти формы изменяют знак, так что отношение $\varphi : \psi$ сохраняется.

Двойной интеграл

$$A = \int_f \varphi = \int_f [\sigma_1 \sigma_2] \quad (7)$$

называется «площадью» (Oberfläche) поверхности f .¹ *

Используя тождество Лагранжа (14,8) и учитывая, что $\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$, мы находим:

$$\begin{aligned} \varphi &= [\sigma_1 \sigma_2] = [(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \mathbf{a}_1, (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \mathbf{a}_2] = \\ &= \{(\mathbf{x}_u \mathbf{a}_1)(\mathbf{x}_v \mathbf{a}_2) - (\mathbf{x}_u \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_v \mathbf{a}_1)\} [du dv] = [\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v] \mathbf{a}_3 [du dv]. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, в силу (41,5)

$$\varphi = [\sigma_1 \sigma_2] = c [du dv] \neq 0. \quad (9)$$

Итак, учитывая (41,1), мы получаем

$$A = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} c [du dv], \quad (10)$$

причем $A > 0$.

Если откладывать вектор $\mathbf{a}_3$ от некоторой фиксированной точки o , то его конец, который мы снова обозначим через a_3 , опишет кусок k единичной сферы с центром в o . Согласно Гауссу, k называется *сферическим отображением* поверхности f , если только мы поставим в соответствие каждой точке x поверхности f ее образ a_3 на сфере k . Принимая во внимание разложение $d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \omega_2 - \mathbf{a}_2 \omega_1$ и (6), мы получим меру площади k (снабженную знаком):

$$S = \int_f \psi = \int_f [\omega_1 \omega_2]. \quad (11)$$

По Гауссу S называется *интегральной кривизной* (curvatura integra) поверхности f .

Отношение «элементов площади» k и f :

$$K = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{[\omega_1 \omega_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]} \quad (12)$$

¹ В 1949 году Чезари (L. Cesari), полагая в основу определение Лебега, ввел понятие меры площади поверхности при весьма широких предположениях относительно f .

* В конце этой фразы, который мы опускаем, автор указывает, что он предпочитает термин «Flächenmaß» термину «Oberfläche». В этом переводе мы употребляем термины «площадь» и «мера» площади.

называется (*гауссовой*) *мерой кривизны* поверхности f в рассматриваемой точке x . Она не зависит от выбора сети N на f и от знака a_3 .

Наряду с альтернированными дифференциальными формами второй степени φ , ψ , инвариантными при вращении (1), мы можем легко построить и обычные (т. е. не альтернированные) *квадратичные дифференциальные формы*, обладающие тем же свойством. Для этого достаточно рассмотреть скалярные произведения $d\mathbf{x}$ с самим собой и с da_3 :

$$d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad d\mathbf{x} da_3 = \sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1. \quad (13)$$

Обе эти основные квадратичные формы взяты Гауссом за исходный пункт его учения о поверхностях*; особенно выдающуюся роль играет первая форма, так называемый «*линейный элемент*» или «*элемент дуги*» (возведенный в квадрат). К этим формам надо еще присоединить третью основную квадратичную форму, *линейный элемент сферического отображения*:

$$da_3 da_3 = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (14)$$

§ 43. Инвариантность меры кривизны при изгибании

Введенная выше мера кривизны K обладает, однако, еще одним весьма важным свойством инвариантности: «*инвариантностью при изгибании*», о которой здесь и будет идти речь. Установление этого свойства является главным результатом «Disquisitiones» Гаусса, и с помощью формул § 42 доказывается следующим образом.

Предположим, что соответствие между точками $x(u, v)$ и $x^*(u, v)$ с одинаковыми значениями параметров устанавливает такое отображение двух поверхностей f и f^* друг на друга, при котором равны длины соответственных дуг соответствующих линий. Тогда это отображение называют *сохраняющим длины* или *изометрическим*, а также говорят, что f^* получена из f посредством «*изгибания*» (причем мы не должны обязательно думать о непрерывном переходе от одной поверхности

* Однако при определении коэффициентов второй квадратичной формы Гаусс не предполагал вектор нормали единичным. См., например, сборник Карл Фридрих Гаусс. Изд. АН СССР, 1956, стр. 120. Кроме того, второй квадратичной формой обычно принято считать форму $a_3 d^2\mathbf{x} = -d\mathbf{x} da_3$. См. § 69, п. 1.

к другой)*. Выбирая сети линий N и N^* на f и f^* соответствующими друг другу при этом отображении, мы можем предположить, что

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \sigma_2^* = \sigma_2. \quad (1)$$

Следовательно, при изометрическом отображении можно требовать инвариантности пфаффовых форм σ_j , которые мы выбрали линейно независимыми (42,9):

$$[\sigma_1 \sigma_2] \neq 0. \quad (2)$$

В силу (2) мы можем линейно разложить форму ω_3 по σ_1, σ_2 :

$$\omega_3 = g_1 \sigma_1 + g_2 \sigma_2. \quad (3)$$

Вдоль нашей кривой $\sigma_1 = \sigma \cos \tau$, $\sigma_2 = \sigma \sin \tau$.

Итак, из (42,5) и (3) вытекает «формула Гаусса – Лиувилля»:

$$g = \frac{d\tau}{ds} + g_1 \cos \tau + g_2 \sin \tau. \quad (4)$$

Эта формула позволяет истолковать значения g_j : в каждой точке x поверхности f величина g_j является геодезической кривизной линии сети N с касательным вектором $\mathbf{a}_j$. Формула (4) имеется по существу в наследии Гаусса (Werke, т. 8, стр. 385); она найдена также Лиувиллем и приведена на стр. 575 книги Монжа «Application ... » за 1850 г.¹

Из условий интегрируемости (41,14) следует

$$[d\sigma_1] = g_1[\sigma_1 \sigma_2], \quad [d\sigma_2] = g_2[\sigma_1 \sigma_2]. \quad (5)$$

Тем самым ω_3 может быть выражена только через σ_1, σ_2 :

$$\omega_3 = \frac{[d\sigma_1]}{[\sigma_1 \sigma_2]} \sigma_1 + \frac{[d\sigma_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]} \sigma_2. \quad (6)$$

Но из (41,14) мы имеем также

$$[\omega_1 \omega_2] = -d\omega_3. \quad (7)$$

* Говорят также, что f^* «наложима» на f . Этим термином «наложимость» мы иногда пользуемся в дальнейшем.

¹ В формуле (4) величины g_i не являются ковариантными производными от g (§ 33).

В результате гауссова мера кривизны может быть определена только через посредство форм σ_1, σ_2 :

$$K = -\frac{[d\omega_3]}{[\sigma_1\sigma_2]} = -\frac{1}{[\sigma_1\sigma_2]} \left[d \left\{ \frac{[d\sigma_1]}{[\sigma_1\sigma_2]} \sigma_1 + \frac{[d\sigma_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} \sigma_2 \right\} \right]. \quad (8)$$

Если мы введем, как в § 33, производные от g_j относительно пары форм σ_1, σ_2 :

$$dg_j = g_{j1}\sigma_1 + g_{j2}\sigma_2, \quad (9)$$

то из (3) посредством внешнего дифференцирования с учетом (5) получим

$$[d\omega_3] = (g_{21} - g_{12} + g_1^2 + g_2^2)[\sigma_1\sigma_2]. \quad (10)$$

Тем самым для K получается еще одно выражение,

$$K = g_{12} - g_{21} - g_1^2 - g_2^2, \quad (11)$$

каждый член которого имеет геометрическое истолкование, инвариантное относительно изгибания. Эта формула имеется у Бонне, 1848 г.

В формуле (8) или (11) содержится «Theorema Egregium», найденная Гауссом в 1816 г:

Поверхности, отображенные друг на друга с сохранением длин, имеют в соответственных точках одинаковую меру кривизны.

Все, что можно вычислить с помощью одних форм σ_1, σ_2 , принадлежит к «инвариантам изгибания» или «внутренним» свойствам нашей поверхности f и не зависит от того, как f реализована в пространстве. При этом особенно существенны те внутренние свойства поверхности f , которые не зависят от выбора сети N на f . К такому отделению «внутренних» свойств Гаусс пришел совершенно естественно, как геодезист, и мы на первых порах (в разделах IV и V) уделим этому вопросу основное внимание.

§ 44. Интегральная формула Гаусса–Бонне

К важнейшим результатам внутренней геометрии поверхности относится интегральная формула, к которой близко подошел Гаусс в своем сочинении о «боковой кривизне»*, но которая в отчетливой

* То есть о геодезической кривизне. См. стр. 70.

форме была представлена лишь О. Бонне (O. Bonnet) в 1848 г. Если мы применим формулу (32,4) к последнему из условий интегрируемости (41,14), то найдем, что полная кривизна односвязного куска поверхности f может быть представлена интегралом по его границе:

$$\int_f [\omega_1 \omega_2] + \int_{r(f)} \omega_3 = 0. \quad (1)$$

Это по существу и есть искомая интегральная формула. Правда, она пока обладает одним недостатком: подынтегральное выражение криволинейного интеграла в силу (42,2) зависит от выбора сети N на f . Однако этот недостаток можно легко устранить. Для этого нам достаточно положить вдоль r , как в § 42,

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cos \tau + \mathbf{a}_2 \sin \tau) \sigma \quad (2)$$

и

$$\omega_3 + d\tau = \chi. \quad (3)$$

Тогда χ инвариантна по отношению к вращению (42,1), т. е. $\chi^* = \chi$. С другой стороны, из односвязности f следует, что полное приращение угла τ равно

$$\int_{r(f)} d\tau = 2\pi. \quad (4)$$

В самом деле, это приращение, будучи целым кратным 2π , в силу непрерывности остается неизменным, если мы непрерывно стягиваем $r(f)$ к некоторой точке поверхности f . При этом предполагается, что наша сеть не имеет на f исключительных точек (ср. в дальнейшем § 49,8). Теперь интегральной формуле (1) можно придать уже инвариантный вид

$$\int_f [\omega_1 \omega_2] + \int_{r(f)} \chi = 2\pi \quad (5)$$

или

$$\int_f K\varphi + \int_{r(f)} g\sigma = 2\pi. \quad (6)$$

Если мы скажем, что вектор $\mathbf{a}_2$ направлен «влево» от $\mathbf{a}_1$, то в (5) и (6) контур r должен пробегаться так, чтобы при этом f лежала слева от r .

Второй член левой части является интегральной геодезической кривизной граничного контура, введенной в § 42. В этих формулах (5) и (6) Гаусса и Бонне все входящие величины инвариантны при изгибании, в частности также χ и g , так как слева в (3) стоят величины, инвариантные при изгибании. В частности, мы отмечаем: *если две поверхности находятся в изометрическом соответствии, то соответственные линии поверхностей имеют в соответствующих точках равные геодезические кривизны.*

Если выбрана определенная ориентация поверхности, т. е. в каждой точке x поверхности определено положительное направление вращения, переводящего $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (в пространстве это сводится к установлению знака у $\mathbf{a}_3$), то знак геодезической кривизны зависит только от направления движения по кривой; для плоских линий это вытекает уже из результатов § 24.

Формула (5) или (6) и есть формула Гаусса – Бонне, опубликованная Бонне в 1848 г. Формула, равносильная (3), имеется у Гаусса (Werke, т. 8, стр. 385). В формулах (5) и (6) поверхность f предполагается гладкой и односвязной, а линия $r(f)$ — гладкой. Эта формула особенно важна потому, что она связывает теорию поверхностей с топологией (§ 47). Прежде чем обратиться к этому предмету, скажем еще пару слов о «перенесении» или «параллелизме» на поверхности.

§ 45. Параллельное перенесение на поверхности

Легко несколько обобщить формулу Гаусса (44,3). Рассмотрим на нашей поверхности f некоторую линию r и зададим вдоль r единичный вектор $\mathbf{v}$, касающийся поверхности f . Пусть

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 \cos \alpha + \mathbf{a}_2 \sin \alpha. \quad (1)$$

Говорят, что семейство векторов $\mathbf{v}$ состоит из векторов, «параллельных вдоль линии r », если вдоль r

$$\omega_3 + d\alpha = 0. \quad (2)$$

Это позволяет ввести на поверхности понятие *параллельного перенесения* или *параллельного переноса* (§ 11)*. При вращении (42,1) сопровож-

* Имеется еще термин «псевдопараллельный перенос».

дающего триэдра a_j , мы будем иметь

$$\omega_3^* = \omega_3 + d\tau, \quad \alpha^* = \alpha - \tau, \quad (3)$$

т. е. наше требование (2) не зависит от выбора сети. Конечно, это «параллельное перенесение» в общем случае отличается от обычного параллельного переноса* в пространстве. Для осуществления этого перенесения следует вычислить интеграл

$$\int_r \omega_3, \quad (4)$$

входящий в исходную формулу Гаусса – Бонне (44,1).

Из (2) получается такое следствие: при параллельном перенесении двух различных векторов вдоль одной и той же линии угол между ними сохраняется. Если линия r замкнута, то при перенесении вдоль r мы, вообще говоря, не вернемся к исходному вектору. Это означает: *параллельное перенесение в общем случае зависит от пути r* . Если же перенесение от пути не зависит, то $d\alpha$ будет полным дифференциалом на поверхности f и, дифференцируя внешним образом (2), мы получим

$$[d\omega_3] = 0. \quad (5)$$

Итак, учитывая (43,8), мы находим: *односвязные поверхности, на которых гауссова мера кривизны всюду равна нулю, имеют то характерное свойство, что параллельное перенесение на них не зависит от пути*.

В силу инвариантности формы ω_3 при изгибании (§ 43) перенесение, определяемое условием (2), также инвариантно при изгибании и принадлежит, следовательно, к «внутренней геометрии поверхности». В частности, если f — плоскость, то мы можем выбрать векторы a_j постоянными и будем иметь тогда $\omega_3 = 0$; в этом случае параллельное перенесение в силу (2) будет определяться условием $d\alpha = 0$, и мы получим обычное параллельное перенесение векторов в плоскости.

Это приводит к простому *геометрическому истолкованию параллельного перенесения* на произвольной поверхности f . Представим себе узкую ленту («полосу»), высеченную на поверхности f вдоль незамкнутой линии r . Ее можно «развернуть» на плоскость, т. е. расположить в плоскости, сохранив длину дуги и геодезическую кривизну. Если мы

* См. примечание на стр. 9.

теперь зададим на этой плоской ленте семейство параллельных векторов, то после обратного изгибания на поверхность f они дадут нам семейство векторов, «параллельных» вдоль линии r на f в смысле (2). Подобную изгибаемую ленту можно с успехом приготовить из бумаги, так что наш мысленный эксперимент легко осуществить на модели; аналогичные способы предложил в 1899 г. Финстервальдер (S. Finsterwalder, род. 1862 г.). В дальнейшем (§ 48) мы познакомимся с другим истолкованием параллельного перенесения посредством «сети Чебышева».

С помощью этого перенесения мы получаем также *истолкование интегральной геодезической кривизны* u_3 линии r на f . Возьмем касательный вектор $\frac{dx}{ds}$ линии r в ее начальной точке x_0 и пусть v_1 — результат перенесения этого вектора в конечную точку x линии r по закону (2). Тогда интегральная геодезическая кривизна линии r равна углу между касательным вектором $\frac{dx}{ds}$ этой линии в точке x_1 и перенесенным вектором v . Точнее, *интегральная геодезическая кривизна u_3 есть мера угла между касательным вектором $\frac{dx}{ds}$ и вектором v , полученным из касательного вектора в начальной точке x_0 линии r в результате параллельного перенесения вдоль r .*

Это можно выразить формулой

$$u_3 = \int_r \chi = \int_r d(\alpha - \tau), \quad (6)$$

где $\alpha - \tau$ означает угол между $\frac{dx}{ds}$ и v ; короче говоря, u_3 *выражает изменение направления касательного вектора.*

В заключение несколько видоизменим аналитическую форму условия (2) перенесения вектора вдоль линии r на поверхности. Для этого слегка обобщим (1), положив

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad (7)$$

где

$$v_1 = v \cos \alpha, \quad v_2 = v \sin \alpha. \quad (8)$$

Тогда, если длина v вектора v постоянна, то в силу (8) и (2)

$$dv_1 = +v_2 \omega_3, \quad dv_2 = -v_1 \omega_3. \quad (9)$$

§ 46. Распространение формулы Гаусса – Бонне на многоугольные области 79

Если мы снова вернемся к прежним обозначениям (41,12), помечая формы ω_j двумя нижними значками и полагая

$$\omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21}, \quad \omega_{jj} = 0, \quad (10)$$

то условие параллельного перенесения вектора (7) выразится теперь вместо (9) новой формулой

$$dv_j + \sum_{k=1}^2 v_k \omega_{kj} = 0; \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

которая оказывается весьма удобной для обобщений.

Идея параллельного перенесения, полученного нами в результате истолкования формулы Гаусса (44,3), была высказана лишь в 1916 г. Леви-Чивита (T. Levi-Civita, 1873–1941). Правда, он пришел к этому несколько иначе, так как брал в основу линейчатую поверхность, образованную прямыми, проходящими через точки x линии r в направлении v . Родственные исследования в это же примерно время выполнили Гессенберг (G. Hessenberg, 1874–1925), голландец Схоутен (J. A. Schouten, род. 1883 г.), Г. Вейль (H. Weyl, род. 1885 г.) и Э. Картан.

§ 46. Распространение формулы Гаусса – Бонне на многоугольные области

Наше истолкование интегральной геодезической кривизны

$$u_3 = \int \chi,$$

как изменения направления касательного вектора $\frac{dx}{ds}$ вдоль линии r на поверхности f , уже наводит на мысль, каким образом нужно понимать этот интеграл в том случае, когда линия r располагается на f не гладко, а имеет углы. При этом r называется *гладкой*, если в формуле (44,2) направление τ линии r^* непрерывно зависит от длины дуги s этой линии.

Предположим теперь, что на нашей гладкой поверхности f дана односвязная область g с n угловыми точками x_j ; $j = 0, 1, 2, \dots, n$;

* τ — угол между касательным вектором к линии r и вектором a_1 ; поэтому угол τ определяет направление линии r .

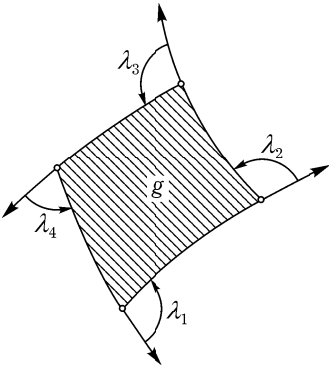


Рис. 26

$x_0 = x_n$. При этом дуга $x_{j-1}x_j$ границы r области g должна быть гладкой, включая ее концы, но направление $\bar{\tau}_j$ линии r , в котором мы подходим к точке x_j , отлично от направления $\bar{\tau}_j$, в котором мы начинаем удаляться от этой точки.

Пусть при обходе линии r , начиная от точки x_0 , мы имеем (рис. 26)

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_j - \tau_j &= \lambda_j; \\ j &= 1, 2, \dots, n-1; \\ \bar{\tau}_0 - \tau_n &= \lambda_n - 2\pi.\end{aligned}\quad (1)$$

При этом мы можем (если область g на f является *однолистной*, т. е. каждая точка f несет самое большее одну точку из g) подчинить *внешние углы* λ_j ограничению

$$-\pi \leq \lambda \leq +\pi.$$

Тогда для g снова справедлива формула (44,1), или

$$S_g + \int_{r(g)} \omega_3 = 0, \quad S_g = \int_g [\omega_1 \omega_2]. \quad (2)$$

Теперь, используя (44,3), произведем преобразование интеграла по границе:

$$\int_r \omega_3 = \sum_1^n \left\{ -\tau_j + \bar{\tau}_{j-1} + G_{j-1}^j \right\}, \quad G_{j-1}^j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \chi. \quad (3)$$

Отсюда в силу (1) и (2) получается новая (обобщенная) формула Гаусса – Бонне:

$$S_g + \sum_1^n \left\{ \lambda_j + G_{j-1}^j \right\} = 2\pi. \quad (4)$$

Словами: *интегральная кривизна S_g односвязного куска g гладкой поверхности f , будучи сложена с суммой внешних углов и интегральными геодезическими кривизнами гладких составляющих дуг границы r этого куска, дает 2π .*

В частности, если составляющие дуги границы r *геодезические*, то вдоль них $\chi = 0$, а также $G_{j-1}^j = 0$, и формула (4) упрощается:

$$S_g + \sum_1^n \lambda_j = 2\pi. \quad (5)$$

Если для $n = 3$ мы возьмем вместо внешних углов λ_j *внутренние углы*

$$\mu_j = \pi - \lambda_j, \quad (6)$$

то получим формулу Гаусса для геодезического треугольника:

$$S_g = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \pi. \quad (7)$$

В частности, если область g расположена на единичной сфере, то S_g будет равна мере площади A_g треугольника g , и мы находим

$$A_g = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \pi. \quad (8)$$

Справа стоит превышение суммы углов над π , которое называют «сферическим избытком». То, что он является мерой площади треугольника, знал Ганс Мюллер, который во Франции известен под именем Региомонтана (Regiomontanus) по месту своего рождения, Кенигсберга (1436–1476)*. Простое доказательство для (8) дал Кавальери (B. Cavalieri, 1598–1647) в 1632 г. в Болонье. Если всюду на f $K = 0$, то из (7) следует, что сумма углов в геодезическом треугольнике равна π :

$$S_g = 0, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \pi. \quad (9)$$

Обратно, из (8) можно было бы снова вывести формулу (4), если рассматривать f как предел некоторого многогранника¹.

§ 47. Формула Гаусса – Бонне для замкнутых поверхностей

Особенно интересно перенести соотношение (44,5) на случай *замкнутой* поверхности f . Предположим, что такая поверхность f состав-

*Regiomontanus — приблизительный перевод на латинский язык слова Кенигсберг.

¹Ср. R. Suaer, Münchener Berichte, 1928, стр. 100–104, и W. Scherrer, Commentarii mathematici helvetici, т. 16 (1944).

лена из n_2 односвязных кусков f_j :

$$f = \sum_1^n f_j, \quad (1)$$

причем граница $r(f_j)$ обладает конечным числом вершин, в которых смыкается по меньшей мере три куска f_j . Тогда в силу (44,5) и (46,4) мы получим для f_j

$$\int_{f_j} [\omega_1 \omega_2] + \int_{r(f_j)} \chi + \sum_{r(f_j)} \lambda = 2\pi. \quad (2)$$

Введем снова вместо «внешних углов» λ «внутренние углы»

$$\mu = \pi - \lambda. \quad (3)$$

Соберем теперь n_2 уравнений (2) для всей поверхности f . При этом f предполагается «двусторонней» или «ориентируемой», т. е. для f_j должны быть установлены такие направления обхода, чтобы при этом каждое «ребро», по которому смыкаются f_j и f_k , проходило дважды в противоположных направлениях. Так, на рис. 27 сферическая поверхность f составлена из $n_2 = 8$ треугольников f_j , причем $n_0 = 6$ их вершин принадлежат правильному октаэдру. Мы установим направление обхода, определяющее «ориентацию» f , если потребуем, чтобы для наблюдателя вне сферы каждый треугольник f_j обходился против часовой стрелки.

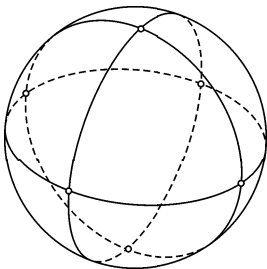


Рис. 27

Пример неориентируемой поверхности f дает круговой диск (рис. 28), если мы условимся не считать различными точками границы точки, симметричные относительно центра диска. Тогда ориентация, установленная на рис. 28, вступает в противоречие с направлением обхода на границе окружности. Существование неориентируемых поверхностей отметил в 1858 г. Мебиус (F. Möbius, 1790–1868).

При суммировании формул (2) по всей поверхности f криволинейные интегралы уничтожаются в силу ориентируемости этой поверхности. В каждой из n_0 «вершин» сумма $\sum \mu$ дает 2π . При этом речь идет о тех вершинах куска f_j , каждая из которых принадлежит по меньшей

мере трем f_j . На рис. 27 эти вершины помечены кружочками. Наконец, число слагаемых π , получающихся в результате подстановки $\lambda = \pi - \mu$, вдвое больше числа n_1 «ребер», т. е. гладких неориентированных дуг, по которым смыкаются два f_j . Если мы положим еще

$$[\omega_1 \omega_2] = K \varphi, \quad (4)$$

то получим таким образом из (2) следующую формулу:

$$S_f = \int_f K \varphi = 2\pi(n_0 - n_1 + n_2). \quad (5)$$

Следовательно, целое число, стоящее в скобках справа, не зависит от разбиения f на односвязные частичные области f_j , так как слева стоит интегральная кривизна поверхности f , разумеется, не зависящая от этого разбиения. На рис. 27 мы имеем $n_0 = 6$, $n_1 = 12$, $n_2 = 8$, а на рис. 28 — $n_0 = 3$, $n_1 = 6$, $n_2 = 4$.

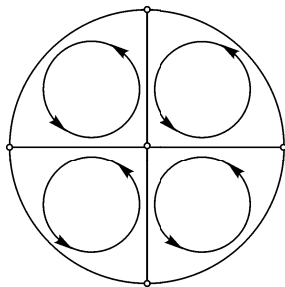


Рис. 28

Мы утверждаем, что для ориентируемой поверхности f

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2(1 - p), \quad p \geq 0, \quad (6)$$

причем целое число p называется «родом» поверхности f . Это p имеет простой геометрический смысл: оно равно максимальному числу независимых (т. е. не пересекающих друг друга) замкнутых путей на f , обладающих тем свойством, что f не распадается, будучи разрезана вдоль этих p путей. Так разрезанную поверхность f , которую мы назовем f' , можно представить себе наглядно в виде сферы с $2p$ «дырками», причем границы двух дырок, отвечающих обоим берегам одного замкнутого разреза на f , соответствуют друг другу (с изменением направления обхода). Затем с помощью $2p - 1$ «промежуточных разрезов», соединяющих каждые две из этих дыр, можно превратить f' в односвязную поверхность f'' . На f'' можно применить формулу Гаусса – Бонне для односвязной области с углами. При этом снова уничтожатся криволинейные интегралы, а от каждого промежуточного разреза произойдет слагаемое 2π . Таким образом получаем:

$$S_f = \int_f K \varphi = 4\pi(1 - p). \quad (7)$$

Из сравнения (5) и (7) и вытекает справедливость нашего утверждения (6).

Для сферы $p = 0$, а для кольцевой поверхности (тора) $p = 1$.

Из (6) следует, что между числом вершин n_0 , числом ребер n_1 и числом граней n_2 выпуклого многогранника ($p = 0$) имеет место соотношение (как и для правильных тел Платона):

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2. \quad (8)$$

По сообщению Лейбница, Декарт заметил это соотношение примерно в 1620 г., а в 1752 г. его снова нашел Эйлер. «Род» p замкнутой ориентируемой поверхности ввел в 1857 г. Риман. Формула (7) дает представление «топологического» инварианта p с помощью интеграла. Обобщения формулы (8) составляют основу «комбинаторной топологии».

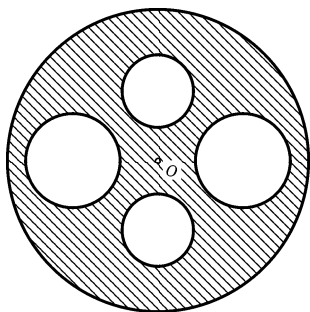


Рис. 29

Наконец, бросим еще взгляд на *замкнутые* неориентируемые поверхности. Если мы «ориентируем» точки такой поверхности f , приписав каждой из них определенное направление обхода, то f окажется дважды покрытой совокупностью f' «ориентированных» точек, причем f' будет связна (в силу неориентируемости f). Из определения f' следует, что f' ориентируема. Итак, каждая неориентируемая поверхность несет ориентируемую (и неразветвленную) «*накрывающую*» поверхность f дважды. Обратно, для каждой ориентируемой по-

верхности f' обязательно найдется одна неориентируемая f , по отношению к которой f' является накрывающей поверхностью. Представим себе f' построенной следующим образом: возьмем круговой диск с центром o и вырежем в нем p дыр, попарно симметричных друг другу относительно o (рис. 29). Если мы затем «раздуем»* этот продырявленный диск, то поверхность полученного таким образом тела образует ориентируемую поверхность f' . В самом деле, очевидно, что граница

*Продырявленный диск надо представлять себе в виде двух одинаково продырявленных резиновых дисков, наложенных друг на друга и скрепленных друг с другом вдоль их краев и вдоль краев всех дыр. После этого ясно, что надо понимать под «раздуванием» этого диска.

каждой области ориентируема. Однако, если мы условимся не считать различными две точки на f' , когда они симметричны относительно o , то получится неориентируемая поверхность f , имеющая f' в качестве накрывающей поверхности. Отсюда для полной кривизны неориентируемых поверхностей вытекает формула

$$S = \int K \varphi = 2\pi(1 - p), \quad (9)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$. В примере на рис. 28 имеем $K = 0$, т. е. $p = 1$.

§ 48. Косоугольные сети линий

Мы обозначили через N ортогональную сеть линий на f , для которой

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \sigma_1 + \mathbf{a}_2 \sigma_2, \quad (1)$$

причем $\mathbf{a}_j$ — единичные векторы касательных к линиям сети в точке x . Исходя отсюда, построим *косоугольную сеть* M с «сетевым углом» 2θ и касательными векторами

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_1 \cos \theta - \mathbf{a}_2 \sin \theta, \quad \mathbf{a}_{II} = \mathbf{a}_1 \sin \theta + \mathbf{a}_2 \cos \theta. \quad (2)$$

Тогда N называется «*биссекторной сетью*» сети M . Если мы положим

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_I \sigma_I + \mathbf{a}_{II} \sigma_{II}, \quad (3)$$

то из (1), (2), (3) следует

$$\sigma_1 = (\sigma_I + \sigma_{II}) \cos \theta, \quad \sigma_2 = (\sigma_{II} - \sigma_I) \sin \theta. \quad (4)$$

Подсчитаем теперь геодезические кривизны g_I и g_{II} линий сети M по формуле Гаусса — Лиувилля (43,4). Для этого положим

$$d\theta = \theta_I \sigma_I + \theta_{II} \sigma_{II}, \quad (5)$$

так что θ_I, θ_{II} означают производные от θ по отношению к паре форм σ_I, σ_{II} . Таким образом,

$$g_I = g_1 \cos \theta - g_2 \sin \theta - \theta_I, \quad g_{II} = g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta + \theta_{II}. \quad (6)$$

По (43,3)

$$\omega_3 = g_1 \sigma_1 + g_2 \sigma_2, \quad (7)$$

откуда в силу (4)

$$\omega_3 = (g_1 \cos \theta - g_2 \sin \theta) \sigma_I + (g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta) \sigma_{II} \quad (8)$$

и на основании (6)

$$\omega_3 = (g_I + \theta_I) \sigma_I + (g_{II} - \theta_{II}) \sigma_{II}. \quad (9)$$

Отсюда прежде всего вытекает формула для меры кривизны K , данная Ли и виллем. А именно, в силу (43,8) и (9)

$$-K[\sigma_1 \sigma_2] = [d(\theta_I \sigma_I - \theta_{II} \sigma_{II})] + [d(g_I \sigma_I + g_{II} \sigma_{II})]. \quad (10)$$

Это и есть уже искомая формула (если отвлечься от способа записи).

Полагая

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sqrt{E} du, & \sigma_{II} &= \sqrt{G} dv, \\ \sigma^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ \varphi &= [\sigma_1 \sigma_2] = \sqrt{EG - F^2} [du dv], \\ \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}} &= \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

мы получим

$$K = \frac{2\theta_{uv} + (g_I \sqrt{E})_v - (g_{II} \sqrt{G})_u}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (12)$$

Это выражение для меры кривизны найдено в 1851 г. Ли и виллем. Формулу (12) можно было бы получить короче, применяя формулу Гаусса–Бонне к сетевому четырехугольнику сети M .

Многие геометры, как Ротте (R. Rothe), Шефферс (G. Scheffers), Лилиенталь (R. v. Lilienthal, 1857–1935), рассматривали сети линий M , для которых либо

$$[d(\sigma_I + \sigma_{II})] = 0, \quad (13)$$

либо

$$[d(\sigma_{II} - \sigma_I)] = 0. \quad (14)$$

Если условиться переходить от некоторой фиксированной точки x_0 к другой фиксированной точке x поверхности f только лишь по линиям сети M , то тогда в силу (13) или (14) при надлежащей ориентации линий сети полная длина пути не зависит от выбора этого пути. В этом случае говорят о «*сетях равных путей*». В силу (4) и (43,5) мы имеем

$$\begin{aligned} [d(\sigma_I + \sigma_{II})] &= [d \frac{\sigma_I}{\cos \theta}] = \frac{g_1 \cos \theta - \theta_2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} [\sigma_I \sigma_2], \\ [d(\sigma_{II} - \sigma_I)] &= [d \frac{\sigma_2}{\sin \theta}] = \frac{g_2 \sin \theta - \theta_1 \cos \theta}{\sin^2 \theta} [\sigma_I \sigma_2]. \end{aligned} \quad (15)$$

Возьмем теперь сеть M , для которой справедливы оба соотношения (13) и (14), т. е. σ_I, σ_{II} являются полными дифференциалами:

$$\sigma_I = dp, \quad \sigma_{II} = dq. \quad (16)$$

Тогда элемент дуги имеет вид

$$\sigma^2 = dp^2 + 2 \cos 2\theta dp dq + dq^2; \quad (17)$$

линейный элемент такого вида впервые рассматривал русский ученый П. Л. Чебышев (1821–1894) в 1878 г. (Сочинения, т. 2, стр. 708). Сеть M имеет теперь характерное свойство: в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны имеют равную длину. Если наложить на кривую поверхность f рыболовную сеть с мелкими квадратными ячейками, то при таком «одевании» поверхности f и возникает подобная сеть M .

В 1922 г. Бьянки заметил, что эти сети стоят в простом отношении к «параллельному перенесению», введенному в § 45. А именно, в нашем случае на основании (15) и (16)

$$\theta_1 \cos \theta = g_2 \sin \theta, \quad \theta_2 \sin \theta = g_1 \cos \theta, \quad (18)$$

или

$$d\theta = \sigma_1 g_2 \operatorname{tg} \theta + \sigma_2 g_1 \operatorname{ctg} \theta. \quad (19)$$

Используя (6), найдем отсюда

$$g_I = -2\theta_I, \quad g_{II} = +2\theta_{II}. \quad (20)$$

На основании (9) и (45,2) это означает: *чебышевские сети характеризуются тем, что они являются «сетями параллельного переноса»*,

т. е. векторы x_v переходят друг в друга при «параллельном перенесении» вдоль q -линии ($p = \text{const}$), так же как и векторы x_q при перенесении вдоль p -линий.

Отсюда и из формулы Гаусса–Бонне вытекает соотношение для полной кривизны сетевого четырехугольника f с вершинами x_0, x_1, x_2, x_3 :

$$\int_f K \varphi + 4(\theta_0 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3) = 0, \quad (21)$$

где $2\theta_i$ означает сетевой угол в точке x_j . Это уже раньше обнаружили J. N. Hatzidakis в 1880 г. и Ф о с с (A. Voß) в 1882 г.

Из свойства нашей сети быть сетью параллельного переноса следует, что наиболее общие чебышевские сети в плоскости можно представить так:

$$x_j = f_j(p) + g_j(q); \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Далее: у нашей сети M на поверхности f можно выбрать наперед p -линию $q = q_0$ и q -линию $p = p_0$. Тем самым сеть M на f определится в малом.

Исходя от линии $q = q_0$, «перенесем» ее в положение $q = q_0 + dq_0$ так, чтобы малые векторы, определяемые точками (p, q_0) и $(p, q_0 + dq_0)$, получались из вектора, определяемого точками (p_0, q_0) и $(p, q_0 + dq_0)$, параллельным переносом вдоль линии $q = q_0$. Отправляясь затем от линии $q = q_0 + dq_0$, продолжим этот процесс дальше. Можно доказать, что эта конструкция действительно приводит к «сети параллельного переноса». Отыскание нашей сети на поверхностях постоянной кривизны K связано с отысканием поверхностей постоянной отрицательной кривизны K в евклидовом пространстве R_3 . Р а д о н (H. Radon) в 1940 г. с помощью вариационной проблемы установил новую связь этих сетей с поверхностями постоянной отрицательной кривизны K .

В 1881 г. А . Ф о с с рассмотрел сети с элементом дуги

$$\sigma^2 = E dp^2 + 2F dp dq + E dq^2, \quad (23)$$

которые он назвал «ромбическими» и наглядно представил с помощью бумажной модели. Инварианты изгибания сетей обстоятельно изучил в 1940 г. В е й з е (K. H. Weise). Позднее (в § 56) мы рассмотрим еще сети, изученные впервые Л и у в и л л е м .

§ 49. Задачи, теоремы

Сначала дадим некоторые выражения для гауссовой меры кривизны K , исходя из общей формы линейного элемента

$$\sigma^2 = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad W^2 = EG - F^2 > 0. \quad (1)$$

1. Начнем с формулы, данной Гауссом в § 11 его «Disquisitiones»:

$$\begin{aligned} 4W^4 K = & E (E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + \\ & + F (E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u) + \\ & + G (E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) - 2W^2 (E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned} \quad (2)$$

2. Затем приведем выражение Бальцера (R. Baltzer, 1818–1887), Leipzig, Ber., т. 18 (1866 г.), стр. 1–6:

$$\begin{aligned} W^4 K = & \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}\right) & \frac{1}{2}E_u & \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) \\ F_u - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \\ & - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Третье (иррациональное только по виду) выражение дано Фробениусом:

$$K = -\frac{1}{4W^4} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} + \frac{1}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{F_v - G_u}{W} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{F_u - E_v}{W} \right\}. \quad (4)$$

4. Наконец, имеется несимметричная формула Лиувилля С. R. Acad. Sci. (1851 г.), стр. 533 и Бельтрами, Werke, т. 1 (1865 г.), стр. 191:

$$K = -\frac{1}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{W} \left(G_u - \frac{F}{E} E_v \right) + \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{W} \left(E_v - 2E_u + \frac{F}{E} E_u \right) \right\}. \quad (5)$$

После этого мы дадим два выражения для геодезической кривизны.

5. Прежде всего выражение, указанное по существу Миндингом, Crelles J., т. 6 (1830 г.), стр. 160 и в отчетливой форме Бельтрами, Werke, т. 1 (1865 г.), стр. 178. Пусть линия на поверхности задана посредством зависимостей $u(t)$, $v(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} g &= \frac{\Gamma}{W} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3, & \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2, \\ \Gamma &= W^2(u'v'' - v'u'') + \\ &+ (Eu' + Fv') \left\{ \left(F_u - \frac{1}{2}E_v \right) u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 \right\} - \\ &- (Fu' + Gv') \left\{ \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + \left(F_v - \frac{1}{2}G_u \right) v'^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

6. Пусть теперь линия на поверхности задана соотношением $f(u, v) = c$ и пробегается в таком направлении, что область $f > c$ лежит слева. Тогда, как показал Бонне, C. R. Acad. Sci., Paris, 1856, стр. 1137:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{W} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{Ff_v - Gf_u}{N} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{Ff_u - Ef_v}{N} \right\}, \\ N^2 &= Ef_v^2 - 2Ff_u f_v + Gf_u^2, \end{aligned} \quad (7)$$

причем $W, N > 0$.

7. Горловая линия семейства линий на поверхности.

Точки, в которых линии семейства ($v = \text{const}$) расположены всего плотнее, образуют «горловую линию» этого семейства. Она удовлетворяет уравнению

$$E^2 G_u - 2EFF_u + F^2 E_u = 0. \quad (8)$$

В точках горловой линии обращается в нуль геодезическая кривизна ортогональных траекторий семейства. Бриоси (F. Brioschi, 1824–1897), 1856; Бельтрами, Werke, т. 1 (1865 г.) стр. 185–186.

Затем приведем некоторые («топологические») теоремы для (ортогональной) сети линий N на поверхности, причем N может иметь лишь конечное число исключительных точек.

8. В (44,4) мы установили, что «изменение направления» замкнутой линии r , ограничивающей односвязный кусок поверхности f , на которой дана ортогональная сеть N без исключительных точек, составляет 2π . Допустим теперь, что внутри f находится конечное число исключительных точек, как на рис. 30, и затем с помощью интеграла

$$\int_{r(f)} d\tau = D(f) \quad (9)$$

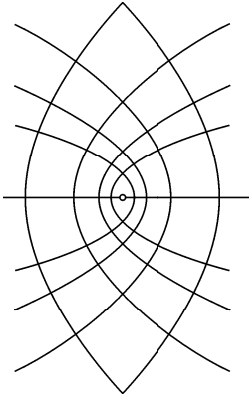


Рис. 30

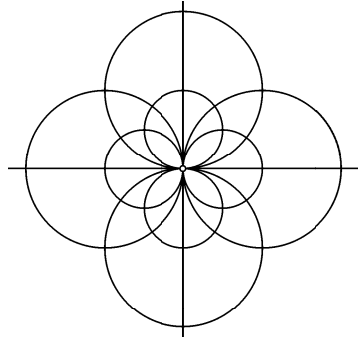


Рис. 31

определим «вычет»^{*} f . При этом граница r ориентирована так, что при ее обходе f лежит слева. D есть целое кратное π . Все f , содержащие лишь одну исключительную точку x_0 данной сети, имеют одно и то же D . Поэтому мы говорим о «вычете» $D(x_0)$. На рис. 31 $D = -2\pi$, на рис. 30 $D = -\pi$. В частности, если за r взять многоугольник из линий сети N , то

$$D(f) = \frac{\pi}{2}(a - e), \quad (10)$$

где a — число «выступающих», e — число «западающих» вершин r^{**} .

9. Пусть g — замкнутая поверхность, имеющая связность сферы. Рассечем g на два односвязных куска f_1 и f_2 , $g = f_1 + f_2$. Тогда

$$D(f_1) + D(f_2) = 0. \quad (11)$$

Если бы g не содержала исключительных точек, то было бы $D(f_j) = 2\pi$. Таким образом, в (11) содержится следующий результат: на замкнутой поверхности g со связностью сферы всякая сеть содержит по меньшей мере одну исключительную точку x_0 . В частности, если из g вырезать небольшой сетевой четырехугольник f_2 , не содержащий исключительных точек, то $D(f_1) = D(x_1) = -2\pi$. Итак, если на g имеется только одна-единственная

^{*}Словом «вычет» мы переводим немецкий термин «Drall».

^{**}Вершина такого ориентированного многоугольника называется «выступающей», если при его обходе вращение касательной происходит в этой вершине против часовой стрелки. Если же вращение касательной в вершине происходит по часовой стрелке, то она называется «западающей».

исключительная точка x_0 , то ее вычет равен -2π . Если g — сфера и сеть N состоит из сечений этой сферы плоскостями, проходящими через две взаимно ортогональные касательные в точке x_0 , то мы получаем сеть желаемого типа (рис. 31).

10. Наряду с вычетом $D(f)$ односвязного куска поверхности рассмотрим «дефект»^{*} f , определяемый выражением

$$U(f) = D(f) - 2\pi \quad (12)$$

и, соответственно этому, дефект изолированной исключительной точки: $U(x_0) = D(x_0) - 2\pi$. Докажите: U «аддитивен», т. е. из $f = f_1 + f_2$ следует $U(f) = U(f_1) + U(f_2)$.

11. Из заключений § 47 и упражнения 10 мы получаем: если замкнутая ориентируемая поверхность g рода p несет сеть с конечным числом исключительных точек x_j , то их дефекты удовлетворяют соотношению

$$\sum U(x_j) = -4\pi(1 - p). \quad (13)$$

Для $p = 1$, и только для $p = 1$, имеются сети без исключительных точек. В формуле (13) содержится следующий результат: если поверхность со связностью сферы ($p = 0$) имеет лишь те исключительные точки, для которых $D = +\pi$, $D = -\pi$, то их число в точности равно четырем.

Эти идеи в основном берут начало от Пуанкаре, J. de Math., 1881–1886; ср. также Н. Hamburger (1940 г.).

V. Геодезические линии

§ 51. Геодезические как кратчайшие

В дальнейшем мы продолжим рассмотрение внутренней геометрии поверхностей и обратимся к поставленному Иоганном Бернулли в 1687 г. вопросу о кратчайшем пути на данной поверхности. Эта классическая задача вариационного исчисления послужила стимулом к развитию упомянутой ветви математики, где ищутся экстремумы интегралов. Учение о геодезических с большим мастерством представлено в обширном труде Дарбу: «Leçons sur la théorie générale des surfaces ...», четыре тома первого издания которого появились в Париже

^{*}Словом «дефект» переведен термин «Unregelmäßigkeit».

с 1887 по 1896 гг.; этим вопросам посвящены, в частности, пункты 514–536 и 578–671 второго и третьего томов. Здесь, в этом введении, мы ограничимся некоторыми простыми фактами и удовольствуемся всего лишь одной «изюминкой» (§ 57).

При отыскании кратчайшего пути W_0 между двумя точками x_0, x_1 на поверхности f можно следующим образом прийти к простейшему необходимому условию для W_0 . Представим себе, что путь W_0 включен в однопараметрическое семейство W_ω путей между x_0 и x_1 на f . Тогда длина каждого из этих путей будет зависеть от ω : $s = s(\omega)$. Для наименьшего значения $s(0)$ во всяком случае является необходимым обращение в нуль первой производной $s'(0)$, вместо которой можно записать также δs или «первую вариацию» (говоря на языке параграфа 26). Полагая в найденной там формуле (26,13) $p_3 = 0$, $\omega_3 = \chi$ и считая концы x_0, x линии зафиксированными, мы получим следующее выражение для вариации длины дуги линии на нашей поверхности f :

$$\delta s = - \int_{x_0}^x \chi p_2. \quad (1)$$

Если условие $\delta s = 0$ выполняется при любом выборе p_2 , то должно быть $\chi = 0$, т. е. поверхностная полоса вдоль нашей линии является геодезической. Согласно Кнезеру (А. Кнесер, 1862–1930) это выражают следующим образом:

Геодезические $\chi = 0$ поверхности f являются «экстремальными» вариационной проблемы отыскания ее кратчайших линий.

Введем на время такие координаты u, v на f , чтобы линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ совпадали с линиями сети $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$. Тогда мы будем иметь

$$\sigma_1 = a du, \quad \sigma_2 = b dv. \quad (2)$$

В силу (42,3) для геодезической линии

$$\chi = \omega_3 + d\tau = 0. \quad (3)$$

На основании § 43 пфаффова форма ω_3 выражается через σ_1, σ_2 :

$$\omega_3 = \frac{[d\sigma_1]}{[\sigma_1\sigma_2]} \sigma_1 + \frac{[d\sigma_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} \sigma_2. \quad (4)$$

Мы имеем далее,

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \frac{dv}{du}. \quad (5)$$

Если мы предположим, что равенство $du = 0$ не имеет места ни в одной точке рассматриваемой дуги нашей геодезической, то из (3), (4) и (5) для геодезической получается дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2 v}{du^2} = A(u, v) + B(u, v) \frac{dv}{du} + C(u, v) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + D(u, v) \left(\frac{dv}{du} \right)^3. \quad (6)$$

Из хорошо известных теорем о наличии решений при надлежащих предположениях о функциях, входящих в правую часть (6), следует: *на поверхности f через точку u_0, v_0 в данном направлении $\frac{du}{dv}$ проходит одна и только одна геодезическая.*

Поставим вопрос об условии, которому должна удовлетворять ортогональная сеть линий N на f для того, чтобы линии сети $\sigma_2 = 0$ или $\tau = 0$ были геодезическими. Тогда в силу (3) из $\sigma_2 = 0$ должно следовать $\omega_3 = 0$.

На основании (4) это равносильно требованию

$$[d\sigma_1] = 0. \quad (7)$$

Тем самым показано: *линии сети $\sigma_2 = 0$ образуют геодезическое «поле», если σ_1 является полным дифференциалом:*

$$\sigma_1 = dp(u, v). \quad (8)$$

Тогда

$$p = \int \sigma_1 \quad (9)$$

является в нашем поле простейшим интегралом, *не зависящим от пути*; такие интегралы были введены Б е л ь т р а м и (1868 г.) и Г и л ь б е р т о м (1900 г.). Линии $p(u, v) = \text{const}$ служат здесь линиями $\sigma_1 = 0$ сети N , или «ортогональными траекториями» нашего поля геодезических $\sigma_2 = 0$. Пусть последние заданы уравнением $q(u, v) = \text{const}$. Тогда

$$[dq, \sigma_2] = 0, \quad [dp dq] \neq 0. \quad (10)$$

Следовательно, мы имеем

$$\sigma_2 = f dq \quad (11)$$

и можем считать, что f выражена в виде $f = f(p, q)$. После этого «линейный элемент» приобретает форму Гаусса:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = dp^2 + f^2 dq^2. \quad (12)$$

Здесь, а также в (8), содержится следующий результат Гаусса: *ортогональные траектории $p = p_1, p_2$ некоторого поля высекают на геодезических $q = \text{const}$ этого поля дуги равной длины $p_2 - p_1$. Обратное, это свойство характеризует семейство геодезических.* Впрочем, это можно было бы также усмотреть из формулы

$$\delta s = [p_1]_{x_0}^x \quad (13)$$

для вариации длины s геодезической ($\chi = 0$) с подвижными концами; эта формула следует из (26,13).

Для длины дуги s линии $p = p(t)$, $q = q(t)$, не покидающей нашего поля и соединяющей точки x_0, x_1 с координатами $p = p(t) < p_1 = p(t_1)$, $q(t_0) = q(t_1) = q_0$, мы находим

$$s = \int_{x_0}^{x_1} |\sqrt{dp^2 + f^2 dq^2}| \geq \int_{x_0}^{x_1} |dp| \geq \int_{p_0}^{p_1} dp = p_1 - p_0. \quad (14)$$

Это означает:

Из всех линий, не покидающих геодезического поля, геодезические являются кратчайшими.*

В том, что предположение «включимости» в некоторое поле («условие Якоби») не является несущественным, можно убедиться уже на примере поверхности сферы. По этому поводу см. в дальнейшем § 59, 5.

Из нашей формулы (3), справедливой для геодезических, можно непосредственно получить следствие, которым мы обязаны Л и у в и л л ю: *Если на поверхности f имеется два поля геодезических, пересекающихся под постоянным углом α , то всюду на f $K = 0$.*

* Мы говорим, что линия не покидает поля, если она целиком расположена в области задания этого поля.

В самом деле, если в (3) должно быть $\chi = 0$ для $\tau = 0$ и $\tau = \alpha$, то ω_3 должна обращаться в нуль для всех направлений. Отсюда при учете формулы

$$K = -\frac{[d\omega_3]}{[\sigma_1\sigma_2]} \quad (15)$$

и следует указанное обращение K в нуль. Мы теперь займемся такими поверхностями с $K = 0$ и, вообще, поверхностями с постоянной мерой кривизны K .

§ 52. Поверхности постоянной меры кривизны*

Вычислим еще меру кривизны K в случае линейного элемента Γ а-у с с а $\sigma_1 = dp$, $\sigma_2 = f dq$. Мы находим

$$[d\sigma_1] = 0, \quad [d\sigma_2] = f_p[dp dq], \quad \varphi = [\sigma_1\sigma_2] = f[dp dq]. \quad (1)$$

Затем в силу (51,4)

$$\omega_3 = f_p dq. \quad (2)$$

Таким образом, на основании (41,14)

$$-[d\omega_3] = -f_{pp}[dp, dq] = [\omega_1\omega_2] = \psi, \quad (3)$$

и, наконец,

$$K = \frac{\psi}{\varphi} = -\frac{f_{pp}}{f}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь в первую очередь поверхность f , на которой K всюду равна нулю. Возьмем на ней поле геодезических $q = \text{const}$, пересекающих под прямым углом некоторую фиксированную геодезическую $p = 0$, и выберем в качестве параметра q длину дуги на линии $p = 0$. Тогда прежде всего

$$f(0, q) = 1. \quad (5)$$

Так как линия $p = 0$ геодезическая, то в силу (51,3), (51,4) следует, что $d\sigma_2 = 0$ для $p = 0$, т. е. на основании (1)

$$f_p(0, q) = 0. \quad (6)$$

* Обычно говорят просто о поверхностях постоянной кривизны.

Наше требование $K = 0$ или, согласно (4),

$$f_{pp} = 0 \quad (7)$$

в силу начальных условий (5), (6) дает нам $f = 1$. Тем самым

$$\sigma^2 = dp^2 + dq^2, \quad (8)$$

т. е.:

Каждая поверхность, на которой K всюду равна нулю, отображима в малом изометрически на евклидову плоскость. Поэтому такие поверхности называют также «развертывающимися» поверхностями.

То, что в целом это отображение может не иметь места, видно на примере неориентируемой замкнутой поверхности, указанной в § 47.

Если мы перейдем теперь к более общему случаю $K = \text{const} \neq 0$ и предположим сначала

$$K = k^2 > 0, \quad (9)$$

то, интегрируя соотношение

$$f_{pp} + k^2 f = 0 \quad (10)$$

и учитывая начальные условия (5) и (6), получим

$$f = \cos kp. \quad (11)$$

Точно так же для

$$K = -k^2 < 0 \quad (12)$$

получается результат

$$f = \text{ch } kp = \frac{1}{2}(e^{+kp} + e^{-kp}). \quad (13)$$

В этих формулах содержится следующий факт: *каждая поверхность постоянной меры кривизны K может быть так изометрически отображена в малом на любую другую поверхность той же кривизны (разумеется, также и сама на себя), что при этом некоторая точка x_0 и исходящее из нее направление dx_0 будут иметь наперед заданные образы.* В частности, следовательно, каждая поверхность с постоянной положительной $K = k^2$ отображима в малом с сохранением длин на сферу радиуса $\frac{1}{k}$.

Обратно, в силу теоремы *Egregium* условие $K = \text{const}$ является также и необходимым для возможности изометрических отображений поверхности f на себя, при которых каждая точка f может быть переведена в любую другую. Нам будет полезно подробнее изучить внутреннюю геометрию в малом на поверхности с постоянной K . Для $K = 0$ мы имеем в качестве модели евклидову плоскость, для $K > 0$ — сферу. Осталось, следовательно, получить модель для $K < 0$ (§ 53).

Заметим еще, что для трех наших линейных элементов,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= dp^2 + dq^2, \\ \sigma^2 &= dp^2 + (\cos kp)^2 dq^2, \\ \sigma^2 &= dp^2 + (\text{ch } kp)^2 dq^2,\end{aligned}\tag{14}$$

отображение

$$p^* = -p, \quad q^* = q,\tag{15}$$

оставляющее геодезическую $p = 0$ точечно неподвижной, является изометрическим отображением. Следовательно, в наших трех случаях существует (в малом) «изометрическое отражение» в каждой геодезической. Это свойство характеризует поверхности с постоянной K , а также геодезические на них, как линии, в которых поверхность допускает изометрическое отражение. В самом деле, при изометрическом отображении, изменяющем ориентацию, геодезическая кривизна $g = \frac{\chi}{\sigma}$ меняет свой знак. Следовательно, для каждой линии, в которой возможно произвести изометрическое отражение, должно быть $\chi = 0$. Отсюда, например, тотчас же следует: геодезические на сфере являются ее большими кругами.

§ 53. Полуплоскость Пуанкаре и гиперболическая геометрия

Возьмем линейный элемент

$$\sigma_1 = dp, \quad \sigma_2 = e^{-p} dp; \quad \sigma^2 = dp^2 + e^{-2p} dq^2,\tag{1}$$

для которого, согласно (52,4),

$$f = e^{-p}, \quad K = -1.\tag{2}$$

Будем считать величины

$$x = q, \quad y = e^{+p}; \quad \sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (3)$$

прямоугольными координатами в некоторой плоскости e . Тогда «меропределение» или «метрика», заданная посредством σ^2 , применима в «верхней полуплоскости» $y > 0$. Для угла α между двумя единичными векторами

$$v = \frac{a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2}{\sigma}, \quad v' = \frac{a_1 \sigma'_1 + a_2 \sigma'_2}{\sigma'} \quad (4)$$

мы имеем

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_1 \sigma'_1 + \sigma_2 \sigma'_2}{\sigma \sigma'} = \frac{dx dx' + dy dy'}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{dx'^2 + dy'^2}}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что углы на поверхности f сохраняют свою величину и в нашей плоскости, т. е. что отображение f на евклидову плоскость e *конформно*.

Положим, согласно Гауссу,

$$x + iy = z; \quad i^2 = -1 \quad (6)$$

и рассмотрим отображения

$$z^* = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (7)$$

с действительными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и условием

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0. \quad (8)$$

При этих отображениях верхняя полуплоскость переходит сама в себя, так как, полагая $\bar{z} = x - iy$, мы находим

$$y^* = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)(\gamma \bar{z} + \delta)} y. \quad (9)$$

Далее, из (7) следует

$$dz^* = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} dz. \quad (10)$$

Из (3), или

$$\sigma^2 = \frac{dz d\bar{z}}{y^2}, \quad (11)$$

в силу (9) и (10) следует

$$\sigma^{*2} = \frac{dz^* d\bar{z}^*}{y^{*2}} = \sigma^2. \quad (12)$$

Это значит, что отображениям (7) верхней полуплоскости z на саму себя отвечают изометрические отображения нашей поверхности на себя. Но точно так же и отображения

$$z^* = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma < 0 \quad (13)$$

полуплоскости $y > 0$ в себя тоже дают изометрические отображения поверхности. Разница между (7) и (13) такова: отображения (7) сохраняют направление обхода, а отображения (13) меняют его. К числу отображений (13) принадлежат «отражения» в окружностях, ортогонально пересекающих прямую $y = 0$, именно

$$z^* - x_0 = \frac{r^2}{\bar{z} - x_0}; \quad x_0 = \bar{x}_0. \quad (14)$$

Это отражение оставляет неизменными точки окружности

$$(z - x_0)(\bar{z} - \bar{x}_0) = r^2. \quad (15)$$

К этим окружностям нужно еще причислить в качестве предельных случаев прямые $x = x_0$, определяющие отображения

$$z^* - x_0 = -(\bar{z} - x_0). \quad (16)$$

Из соображений, приведенных в конце § 52, следует: *полуокружности в полуплоскости $y > 0$, пересекающие под прямым углом ее границу, являются образами геодезических поверхности f .*

«Геометрия», определенная метрикой (3) в «полуплоскости Пуанкаре» $y > 0$, называется «гиперболической неевклидовой геометрией»; упоминавшиеся выше полуокружности называются ее «прямыми», а «углы» в этой геометрии совпадают с углами евклидова образа в полуплоскости $y > 0$.

Если условиться не различать точки единичной сферы обычного евклидова пространства, симметричные относительно центра, то на сфере возникает другая разновидность «неевклидовой геометрии», так называемая «*эллиптическая геометрия*».

Согласно § 46, сумма углов треугольника в эллиптической геометрии $> \pi$, а в гиперболической геометрии $< \pi$.

Гаусс пришел к неевклидовой геометрии, отправляясь от вопросов геометрической аксиоматики, которой он начал заниматься с 1792 г. Однако, страшая «крика беотийцев», он в своих письмах лишь от случая к случаю сообщал кое-что об этом предмете и его связи со своим учением о поверхностях. Первые публикации по гиперболической геометрии принадлежат венгру Больяи (J. Boljaj, 1802–1860) и русскому Н. И. Лобачевскому (1792–1856) [4]. Идея реализации гиперболической геометрии на поверхностях постоянной отрицательной меры кривизны была впервые опубликована в 1868 г. Бельтрами (1835–1900). В частности, отображение гиперболической геометрии на полуплоскость было использовано Пуанкаре (1854–1912) примерно в 1882 г. для целей теории функций. Конформные отображения (7) и (13) числовой плоскости Гаусса, переводящие круги в круги, были изучены Мебиусом (A. F. Möbius, 1790–1868), однако они восходят еще к Аполлонию из Перге (250–200? гг. до н. э.)¹.

§ 54. Параллельные линии на поверхности

Ортогональные траектории поля геодезических называются «*параллельными*» друг другу. Это согласуется также с понятием «параллелизма», введенным в § 45, так как направления, перпендикулярные к геодезической, переходят друг в друга при параллельном перенесении вдоль геодезической.

Пусть h — произвольная функция на нашей поверхности.

Мы можем разложить ее полный дифференциал dh по линейно независимым пфаффовым формам σ_1, σ_2 :

$$dh = h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2; \quad (1)$$

в § 33 мы называли h_1, h_2 производными от h по отношению к паре форм σ_1, σ_2 ; например, если положить $\sigma_2 = 0$, то *величину* h_1 можно

¹По поводу неевклидовой геометрии ср. также Н. Tietze, «Решенные и нерешенные математические проблемы», 1949, 14, Vorles.

истолковать как прои водну от h по ду вдоль линии .

й a_1 , a , ы я м м (4 ,):

$$\begin{aligned} a_1^* &+ a_1 \cos \theta + a \sin \theta, \\ a^* &- a_1 \sin \theta + a \cos \theta, \end{aligned} \quad ()$$

ч ы h_j п б з ю я ч :

$$\begin{aligned} h_1^* &+ h_1 \cos \theta + h \sin \theta, \\ h^* &- h_1 \sin \theta + h \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

В м «в ктор спада» « ради нт» ц h :

$$g \quad a_1 h_1 + a \quad h \quad (4)$$

зм я я п (). В ч , мы ыб м a
 ым «линии уровн » $h \quad \text{const}$, п х я й ч з
 м м ю ч , п ч м $h \quad g \quad a_1 h_1$, я
 я на ни g .
 мы м м ц h, h' , ы я

$$\begin{aligned} \nabla(h, h') &h_1 h'_1 + h \quad h' \quad g g', \\ \theta(h, h') &h_1 h' - h \quad h'_1 \end{aligned} \quad (5)$$

зм яю я п (). К ы г g б з
 ч ю

$$\nabla(h, h) \quad \nabla(h) \quad \nabla h \quad h_1 + h \quad g g \quad (5^*)$$

зы ю ы , ч ю я Га сса, п рвым
 дифф р нциальным парам тром (п ым ц м) Бель -
 рами. б з ч ч з α г м ям я
 ц й h, h' ,

$$\frac{\nabla(h, h')}{\overline{\nabla(h)} \quad \overline{\nabla(h')}} \cos \alpha, \quad \frac{\theta(h, h')}{\overline{\nabla(h)} \quad \overline{\nabla(h')}} \sin \alpha. \quad ()$$

В ч , я г ых й я

$$\nabla(h, h') \quad . \quad ()$$

В самом деле, из предположения

$$\nabla(p) = p_1^2 + p_2^2 = 1 \quad (18)$$

посредством дифференцирования по λ (при фиксированных u, v) следует

$$p_1 p_{\lambda 1} + p_2 p_{\lambda 2} = \nabla(p, p_\lambda) = 0, \quad (19)$$

т. е. линии $p_\lambda = \text{const}$ ортогональны линиям $p = \text{const}$, откуда и вытекает справедливость нашего утверждения*. Остается лишь точнее установить, что следует понимать, например, под $p_{\lambda 1}$. Мы имеем

$$\sigma_1 = \alpha du + \beta dv, \quad \sigma_2 = \gamma du + \delta dv, \quad (20)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — функции только от u, v с условием $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Тогда

$$p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 = (\alpha p_1 + \gamma p_2) du + (\beta p_1 + \delta p_2) dv, \quad (21)$$

следовательно,

$$p_u = \alpha p_1 + \gamma p_2, \quad p_v = \beta p_1 + \delta p_2. \quad (22)$$

Если продифференцировать эти уравнения по λ при фиксированных u, v , то получим

$$p_{\lambda u} = \alpha p_{\lambda 1} + \gamma p_{\lambda 2}, \quad p_{\lambda v} = \beta p_{\lambda 1} + \delta p_{\lambda 2}, \quad (23)$$

откуда и определяются $p_{\lambda 1}, p_{\lambda 2}$.

Формула (17) дает семейство геодезических, зависящих, согласно (16), от двух параметров λ, μ .

§ 55. Формулы Грина

Два скаляра h_1, h_2 , заданные на нашей поверхности f , определяют «векторное поле на f », образованное векторами

$$\mathbf{h} = h_1 \mathbf{a}_1 + h_2 \mathbf{a}_2. \quad (1)$$

Чтобы вектор $\mathbf{h}$ служил градиентом скаляра h на f , должно быть

$$h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2 = dh, \quad (2)$$

*Здесь неявно используется перестановочность производных $p_{1\lambda} = p_{\lambda 1}, p_{2\lambda} = p_{\lambda 2}$.

и, следовательно, внешний дифференциал равен нулю:

$$[d(h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2)] = 0. \quad (3)$$

Положив

$$dh_j = h_{j1}\sigma_1 + h_{j2}\sigma_2, \quad (4)$$

мы найдем из (3) следующие условия симметрии для «вторых ковариантных производных» по отношению к паре форм σ_1, σ_2 :

$$(h_{21} - h_{12})[\sigma_1\sigma_2] + h_1[d\sigma_1] + h_2[d\sigma_2] = 0. \quad (5)$$

Согласно (51,4), вместо (5) можно также положить

$$(h_{21} - h_{12})[\sigma_1\sigma_2] + [(h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2)\omega_3] = 0. \quad (6)$$

Будем истолковывать h как «поле скоростей потока» на f . Тогда, если r — ориентированная линия на f , то мы можем назвать интеграл

$$\int_r (h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1) = \int_r h_n\sigma \quad (7)$$

потоком через r (за единицу времени).

При этом величина

$$h_n = h_1 \frac{\sigma_2}{\sigma} - h_2 \frac{\sigma_1}{\sigma} = \mathbf{h}\mathbf{n} \quad (8)$$

является компонентой $\mathbf{h}$ в направлении нормали

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \frac{\sigma_2}{\sigma} - \mathbf{a}_2 \frac{\sigma_1}{\sigma} \quad (9)$$

линии r . Если r — граница односвязного куска поверхности f , то согласно (32,4),

$$\int_f [d(h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1)] = \int_{r(f)} h_n\sigma,$$

или, после введения величины

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \frac{[d(h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1)]}{[\sigma_1\sigma_2]} \quad (10)$$

в качестве «дивергенции» нашего векторного поля $\mathbf{h}$:

$$\int_f \operatorname{div} \mathbf{h} \cdot \varphi = \int_{r(f)} h_n \sigma. \quad (11)$$

В этой формуле h_n является компонентой $\mathbf{h}$ в направлении *внешней* нормали (9) к границе r куска f , так что при обходе этой границы f остается слева, если считать $\mathbf{a}_2$ идущим влево от $\mathbf{a}_1$. Формула (11) выясняет значение $\operatorname{div} \mathbf{h}$ и показывает ее неизменность при вращении (54,2). В случае (2), когда $\mathbf{h}$ является градиентом скаляра h , мы получим *второй дифференциальный параметр*:

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \Delta(h) = \frac{[d(h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1)]}{[\sigma_1\sigma_2]}, \quad (12)$$

введенный Б е л ь т р а м и в 1864 г. Тогда из (11) вытекает формула Г р и н а:

$$\int_f \Delta(h) \varphi = \int_{r(f)} h_n \sigma, \quad (13)$$

в которой h_n означает теперь производную от h в направлении внешней нормали к r . Согласно (11), для *несжимаемой жидкости*

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \quad \text{или} \quad [d(h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1)] = 0. \quad (14)$$

Более общие формулы Г р и н а мы найдем, вычисляя внешний дифференциал $[d\{h'(h_1\sigma_2 - h_2\sigma_1)\}]$ и применяя (32,4). Таким образом, получается формула

$$\int_{r(f)} h' h_n \sigma = \int_f \nabla(h, h') \varphi + \int_f h' \Delta(h) \varphi. \quad (15)$$

Переставляя местами h, h' и вычитая, получим формулу

$$\int_{r(f)} (h' h_n - h h'_n) \sigma = \int_f \{h' \Delta(h) - h \Delta(h')\} \varphi. \quad (16)$$

Преобразуя $\nabla(h + h')$, находим

$$\nabla(h + h') = \nabla(h) + 2\nabla(h, h') + \nabla(h'). \quad (17)$$

Если мы предположим, что граничные значения h' равны нулю, а h удовлетворяет «дифференциальному уравнению Лапласа» (1749–1827):

$$\Delta(h) = 0, \quad (18)$$

то из (17) и (15) следует, что

$$\int_f \nabla(h + h')\varphi = \int_f \nabla(h)\varphi + \int_f \nabla(h')\varphi. \quad (19)$$

Однако, согласно определению,

$$\nabla(h') = h_1'^2 + h_2'^2 \geq 0. \quad (20)$$

Поэтому из (19) получается следующий результат:

Из всех функций

$$g = h + h'$$

на поверхности f , имеющих заданные граничные значения, функция h , удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta(h) = 0,$$

придает наименьшее значение «интегралу Дирихле» (1805–1859):

$$D = \int_f \nabla(g)\varphi.$$

Этот простой факт может быть обращен (хотя и не так легко) и применен к отысканию решения «краевой задачи» для дифференциального уравнения (18), исходя из требования минимальности интеграла D ; эти соображения использовались многими математиками (по крайней мере, для случая евклидовой метрики). В евклидовом случае

$$\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h} &= \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y}, \\ \Delta h &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

§ 56. Сети Лиувилля

Сеть линий N на поверхности f называется именем Лиувилля (J. Liouville, 1809–1882), 1846 г., если она обладает в малом следующем «диагональным свойством»: в каждом сетевом четырехугольнике имеются две геодезические диагонали равной длины. Например, в плоскости этим свойством обладает всякая ортогональная прямолинейная сеть. Будем считать поверхность f «геодезически выпуклой», так что для любых двух ее точек имеется ровно одна дуга геодезической на f , соединяющая их. Прежде всего мы покажем: ортогональность сети N есть следствие ее диагональности. В самом деле, достаточно малый сетевой четырехугольник можно прибли-

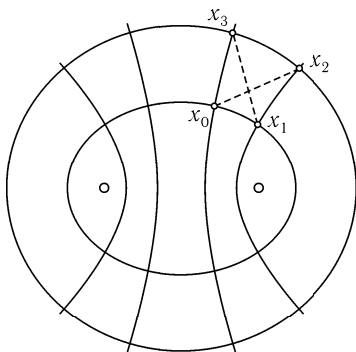


Рис. 32

женно рассматривать как плоский параллелограмм, и в случае равенства его диагоналей он должен быть прямоугольником.

Беря теперь линии сети N за линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, мы имеем

$$\sigma_1 = \sqrt{E} du, \quad \sigma_2 = \sqrt{G} dv; \quad \sigma^2 = E du^2 + G dv^2. \quad (1)$$

Рассмотрим (рис. 32) сетевой четырехугольник с вершинами

$$x_0 = \{u_0, v_0\}, \quad x_1 = \{u_1, v_0\}, \quad x_2 = \{u_1, v_1\}, \quad x_3 = \{u_0, v_1\}. \quad (2)$$

Тогда, согласно (51,13), изменение длины диагонали x_0x_2 при неизменном x_0 и смещении x_2 равно

$$\delta D = E \frac{du}{ds} \delta u_1 + G \frac{dv}{ds} \delta v_1, \quad (3)$$

где $du, dv; \delta s$ относятся к геодезической диагонали, оканчивающейся в точке x_2 . Введем для этого элемента следующие величины, определяющие его направление:

$$E \frac{du}{ds} = a, \quad G \frac{dv}{ds} = b. \quad (4)$$

В силу (1) для них справедливо соотношение

$$\frac{a^2}{E} + \frac{b^2}{G} = 1. \quad (5)$$

Тогда (3) запишется проще:

$$\delta D = a_2 \delta u_1 + b_2 \delta v_1, \quad (6)$$

и, в частности, для $\delta v_1 = 0$

$$\delta D = a_2 \delta u_1. \quad (7)$$

Точно так же и для другой диагонали (имеющей, по предположению, ту же самую длину)

$$\delta D = a_1 \delta u_1, \quad (8)$$

где a_1, b_1 — величины, аналогичные (4) и определяющие направление этой диагонали в ее концевой точке x_1 . Следовательно, согласно (7) и (8),

$$a_1 = a_2; \quad (9)$$

точно так же, изменяя только δv_0 , мы получаем

$$b_0 = b_1. \quad (10)$$

Итак (отвлекаясь от знака), мы получим направление диагонали a, b в точке x , если сначала перенесем диагональное направление a_0, b_0 в точке x_0 вдоль стороны $v = v_0$ при постоянном v_0 в точку x_1 , а затем перенесем его из точки x_1 в точку x_2 вдоль стороны $u = u_1$ при постоянном u_1 . Замечая еще, что вершина x_0 не играет на f никакой исключительной роли, мы видим: на f существует поле геодезических, для которого

$$a = a(u, c), \quad b = b(v, c), \quad (11)$$

и которое зависит еще от диагонального направления

$$c = \frac{dv}{du} \quad (12)$$

в точке x_0 . Из (5) и (11) получается уравнение для E и G :

$$\frac{U}{E} + \frac{V}{G} = 1, \quad (13)$$

где мы положили $a^2 = U, b^2 = V$. Беря частную производную по c , получим отсюда

$$\frac{U'}{E} + \frac{V'}{G} = 0. \quad (14)$$

При этом по смыслу с (12) вблизи x_0 определитель $UV' - VU'$ заведомо не равен нулю. Из (13) и (14) следует

$$E = +\frac{UV' - VU'}{V'}, \quad G = -\frac{UV' - VU'}{U'}. \quad (15)$$

Таким образом, для линейного элемента нашей поверхности f получается выражение

$$\sigma^2 = (UV' - VU') \left(\frac{du^2}{V'} - \frac{dv^2}{U'} \right) = \left(\frac{U}{U'} - \frac{V}{V'} \right) (U' du^2 - V' dv^2). \quad (16)$$

Наконец, если здесь ввести вместо u надлежащую функцию от u , а вместо v — надлежащую функцию от v , то мы получим более простое выражение:

$$\sigma^2 = (U + V)(du^2 + dv^2). \quad (17)$$

Линейный элемент такого вида был введен в 1846 г. Лиувиллем. Уравнение (5) выглядит теперь так:

$$a^2 + b^2 = U + V. \quad (18)$$

Следовательно, для рассматривавшегося поля геодезических (11) мы имеем теперь

$$a = \sqrt{U + C}, \quad b = \sqrt{V - C}, \quad (19)$$

где C — постоянная. Учитывая выражения (4) для направляющих величин a, b и принимая во внимание (17), мы получим отсюда следующее соотношение для наших геодезических:

$$\frac{du}{\sqrt{U + C}} - \frac{dv}{\sqrt{V - C}} = 0, \quad (20)$$

или, интегрируя,

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{U + C}} - \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{V - C}} = \text{const.} \quad (21)$$

Тем самым геодезические на поверхности Лиувилля находятся посредством двух квадратур.

Согласно (6) и (19), с нашим полем (21) связан интеграл, не зависящий от пути (51,9):

$$p = \int_{u_0}^u \sqrt{U+C} du + \int_{v_0}^v \sqrt{V-C} dv. \quad (22)$$

Наряду с (21) рассмотрим следующее поле геодезических

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{U+C}} + \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{V-C}} = \text{const} \quad (23)$$

вместе с соответствующим интегралом, не зависящим от пути

$$q = \int_{u_0}^u \sqrt{U+C} du - \int_{v_0}^v \sqrt{V-C} dv. \quad (24)$$

Тогда из формул (21)–(24) следует, что в каждом сетевом четырехугольнике с диагональю из (21) имеется равная ей по длине диагональ из (23). Тем самым установлено обратное: каждая сеть (17) действительно обладает диагональным свойством, о котором мы говорили вначале.

Истолкование сетей Лиувилля посредством диагонального свойства было предложено Цвиernerом (K. Zwirner) и мной в 1927 г. То, что семейства конфокальных конических сечений и их предельных случаев (рис. 32, 30, 47) в плоскости обладают диагональным свойством, заметил в 1809 г. англичанин J. Ivory (1765–1842). Конфокальные конические сечения рассмотрел еще в 1695 г. Чирнгаузен (E. W. Graf von Tschirnhaus, 1651–1708). Если положить в (17) меру кривизны равной нулю, то вместе с Вейнахтом (J. Weinacht, 1924 г.) легко усмотреть, что конфокальные конические сечения и их предельные случаи образуют единственные сети Лиувилля в плоскости [5].

Если обвить вокруг эллипса нерастяжимую замкнутую нить и натянуть ее с помощью некоторого острья, то это острие будет двигаться по конфокальному эллипсу (рис. 33). Впервые это заметил Лейбниц в 1704 г. Как обнаружил Дарбу, соответствующая теорема справедлива и для сети Лиувилля на кривой поверхности. Рассматриваемые ниже (§ 63) линии кривизны на квадрике (поверхности второго порядка)

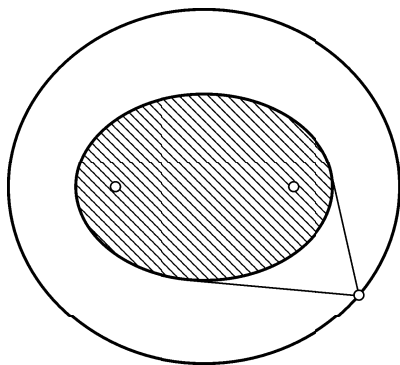


Рис. 33

образуют сеть Лиувилля. Поэтому на квадрике удастся определить геодезические. Что же касается определения всех замкнутых поверхностей со связностью сферы, являющихся одновременно поверхностями Лиувилля, то здесь, по-видимому, не известно ничего.

§ 57. Поведение геодезических на поверхности постоянной отрицательной кривизны¹

Рассмотрим, как и в § 53, «верхнюю» полуплоскость $y > 0$ в плоскости комплексных чисел $z = x + iy$ с гиперболической метрикой

$$\sigma = \frac{|dz|}{y}. \quad (1)$$

Условимся затем *не считать различными две точки z, z^* в нашей полуплоскости, если имеет место соотношение*

$$z^* = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \quad (2)$$

с действительными целочисленными a, b, c, d .

Нетрудно показать, что эта «модулярная группа» подстановок (2) может быть «порождена» двумя следующими подстановками:

$$z^* = z + 1, \quad z^* = -\frac{1}{z}. \quad (3)$$

¹Может быть пропущен.

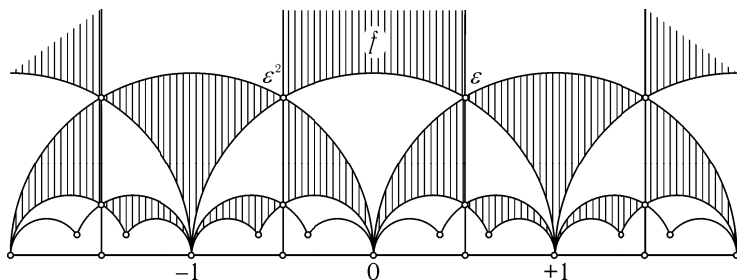


Рис. 34

Поэтому, согласно Гауссу, для группы (2) существует «*фундаментальная область*» f , заштрихованная вверх и в середине рис. 34 и представленная в полуплоскости $y > 0$ неравенствами

$$|x| \leq \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 \geq 1. \quad (4)$$

Это означает, что для каждой точки z полуплоскости имеется эквивалентная ей точка в области f , и две точки из f эквивалентны лишь тогда, если они лежат на границе f симметрично относительно оси OY . Более подробные пояснения можно найти, например, в книге Клейна и Фрике о модулярных функциях за 1890 г.

Итак, наша поверхность, которую мы обозначим через f' , получается из нашего «треугольника» f с метрикой (1) посредством отождествления в нем любых двух граничных точек ($z = x + iy$, $-\bar{z} = -x + iy$), симметричных относительно оси OY .

На этой поверхности f' с метрикой (1) и будет исследовано поведение геодезических в целом, причем, согласно Артину (E. Artin) и Герглотцу (G. Herglotz) (1924 г.), мы используем при этом цепные дроби.

Поведение геодезической на f мы установим следующим образом. Прежде всего образы геодезических в полуплоскости $y > 0$ являются полукружностями, ортогонально пересекающими прямую $y = 0$ (§ 53). Если при движении по геодезической мы пересекаем в некоторой точке a границу f , то в зеркально-симметричной точке $a' = -\bar{a}$ мы движемся так, что угол с эквивалентной границей f сохраняется и по направлению. На рис. 35 изображен один кусок продолженной таким образом геодезической. Выведем замечательный результат:

Заданная надлежащим образом геодезическая на f' при ее доста-

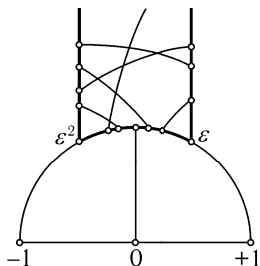


Рис. 35

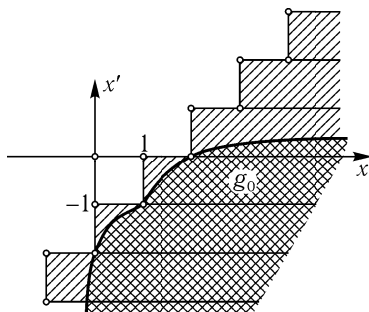


Рис. 36

точном продолжении подходит сколь угодно близко к любой геодезической дуге на f' .

Каждую полуокружность в полуплоскости $y > 0$ с центром на оси $y = 0$ можно задать вещественными координатами x, x' точек ее пересечения с вещественной осью. После этого остается показать, что с помощью подходящего отображения (2) можно переместить надлежащим образом выбранную полуокружность $\{x_0, x'_0\} = \{x'_0, x_0\}$ сколь угодно близко к каждой другой полуокружности $\{x, x'\}$.

Прежде всего отметим, что для доказательства достаточно принять $1 < x, -1 < x' < 0$. Иначе говоря, беря x, x' за прямоугольные координаты в некоторой x, x' -плоскости, мы утверждаем: достаточно показать, что образы полуокружности $\{x_0, x'_0\}$ покрывают полосу $g_0\{1 < x, -1 < x' < 0\}$ плотно.

В самом деле, тогда в этой плоскости будет плотно покрыта и ступенчатая область g , получающаяся из g_0 сдвигами $z^* = z + n$, $x^* = x + n$, $x'^* = x' + n$ с целым (положительным или отрицательным) n , заштрихованная на рис. 36 (по меньшей мере однократно). Нам достаточно рассмотреть лишь полуокружности, пересекающие f , т.е. окружающие по меньшей мере один из «углов» f , а именно:

$$z = \varepsilon, \quad z = \varepsilon^2, \quad \varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Для таких полуокружностей координаты x и x' наряду с неравенст-

вом $x' < x$ удовлетворяют хотя бы одному из неравенств

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(+\frac{1}{2} - x'\right) &> \frac{3}{4}, \\ \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - x'\right) &> \frac{3}{4}, \end{aligned} \quad (6)$$

а эта область в x, x' -плоскости, заштрихованная на рис. 36 двукратно и ограниченная дугами двух гипербол, целиком лежит в рассматривавшейся выше ступенчатой области g .

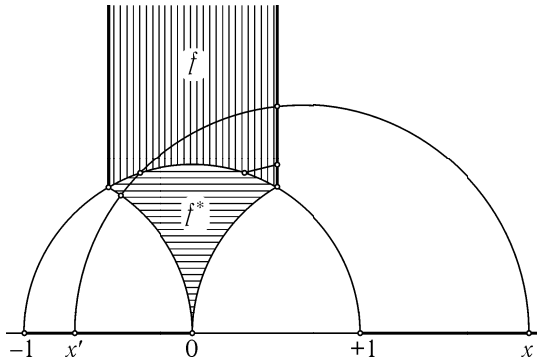


Рис. 37

Но каждая полуокружность $\{x, x'\}$, $1 < x$, $-1 < x' < 0$ пересекает либо f , либо треугольник f^* , получающийся из f преобразованием $z^* = -\frac{1}{z}$, либо f и f^* одновременно (рис. 37). Следовательно, каждой такой полуокружности $\{x, x'\}$ отвечает геодезическая дуга из f , соединяющая две точки $|x| = \frac{1}{2}$ и либо пересекающая границу $|z| = 1$ (рис. 37), либо нет. Наконец, отметим, что обе полуокружности

$$\{x, x'\} \quad \text{и} \quad \left\{-\frac{1}{x'}, -\frac{1}{x}\right\} \quad (7)$$

отвечают одной и той же дуге в f .

Разложим теперь обе координаты

$$x, x' \quad (x > 1, -1 < x' < 0)$$

в «цепные дроби»! Под этим понимают следующее. Возьмем оба числа x и x' иррациональными. Пусть a_0 — наибольшее целое число, меньшее x , т. е.

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}; \quad a_0 \geq 1, \quad x_1 > 1. \quad (8)$$

Аналогично введем целочисленные a_n :

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}; \quad a_n \geq 1, \quad x_n > 1. \quad (9)$$

Тем самым определены положительные целочисленные a_n для целых $n \geq 0$. Отправляясь от x' , мы определим подобные же величины с отрицательными n , полагая

$$-x' = \frac{1}{a_{-1} - x'_{-1}}. \quad (10)$$

Здесь a_{-1} означает наибольшее целое число, не превосходящее $-\frac{1}{x'}$. Тем самым $a_{-1} \geq 1$, $-1 < x'_{-1} < 0$. Аналогично, пусть будет

$$-x'_{-n} = \frac{1}{a_{-n-1} - x'_{-n-1}} \quad (11)$$

с целочисленным $a_{-n-1} \geq 1$ и $-1 < x'_{-n-1} < 0$. После этого пишут

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}, \quad -x' = \frac{1}{a_{-1} + \frac{1}{a_{-2} + \ddots}} \quad (12)$$

и называют эти разложения цепными дробями. Для иррациональных x , x' они никогда не обрываются. В соответствии с (9) и (11), для произвольного положительного или отрицательного n мы положим

$$x_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \ddots}}, \quad -x'_n = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \ddots}} \quad (13)$$

Тогда для всех n справедливы соотношения

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x'_n = a_n + \frac{1}{x'_{n+1}}. \quad (14)$$

Исходя из формул

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned} \quad (15)$$

и учитывая начальные условия

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0, \quad P_0 = 1, \\ Q_{-1} &= 1, \quad Q_0 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

можно шаг за шагом определить целочисленные P_n, Q_n для всех n . Затем по индукции от n к $n+1$ мы покажем, что

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}, \quad x' = \frac{P_n x'_n + P_{n-1}}{Q_n x'_n + Q_{n-1}}, \quad (17)$$

причем в x и x' входят одни и те же целые числа P, Q . При этом, согласно (15),

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}), \quad (18)$$

т. е. согласно (16),

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \quad (19)$$

Тем самым на основании (17), (19) и (7) полуокружности

$$\{x, x'\}, \quad \{x_n, x'_n\}, \quad \left\{-\frac{1}{x'_n}, -\frac{1}{x_n}\right\} \quad (20)$$

при четных n эквивалентны с точки зрения преобразований (2).

Таким образом, показано: каждой полуокружности $\{x, x'\}$ $1 < x$, $-1 < x' < 0$ отвечает «цепочка» положительных целых чисел

$$\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, \quad (21)$$

не кончающаяся ни слева, ни справа. Справедливо и обратное. В силу (7) цепочка

$$a_k^* = a_{-k-1} \quad (22)$$

представляет ту же самую полуокружность. В силу же (17) и (19) цепочка

$$a_k^* = a_{k+2n} \quad (23)$$

представляет эквивалентную полуокружность. Итак, геодезическая поверхности f' , отвечающая цепочке (21), остается неизменной при «отражении» цепочки (22) и при ее «сдвиге» (23).

Легко показать, что если две цепные дроби

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad \tilde{x} = \tilde{x}_0 + \frac{1}{\tilde{a}_1 + \frac{1}{\tilde{a}_2 + \dots}}$$

совпадают друг с другом на достаточном протяжении:

$$a_k = \tilde{a}_k; \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

то величина $|x - \tilde{x}|$ сколь угодно мала.

В самом деле, из (15) следует, что для $n \geq 0$ последовательность целых чисел P_n возрастает, так же как и последовательность Q_n для $n \geq 2$. Из (17) и (19) для $n \geq 1$ получим

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n (Q_n x_n + Q_{n-1})}. \quad (24)$$

Следовательно, для $n \geq 1$

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < x < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}. \quad (25)$$

С другой стороны, для $n \geq 2$ мы получаем

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}. \quad (26)$$

Неравенство (25) справедливо и для $\tilde{x}$, если $2n \leq m+1$, поэтому отношение

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} \frac{Q_{2n}}{P_{2n}} < \frac{\tilde{x}}{x} < \frac{Q_{2n-1}}{P_{2n-1}} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad (27)$$

сколь угодно мало отличается от единицы.

Отсюда мы можем сделать вывод:

для того чтобы наша геодезическая могла сколь угодно близко подойти к любой геодезической дуге, необходимо и достаточно, чтобы,

соответствующая цепочка (21) содержала любой наперед заданный «сегмент»^{*}; другими словами, цепочка чисел a должна удовлетворять тому условию, чтобы для произвольно заданных целых положительных чисел $s; c_0, c_1, \dots, c_s$ всегда можно было подобрать такое r , что

$$a_r = c_0, \quad a_{r+1} = c_1, \quad \dots, \quad a_{r+s} = c_s.$$

Чтобы убедиться в необходимости этого условия, достаточно потребовать приближения к полуокружности

$$\left\{ x_0, x'_0 = -\frac{1}{x_0} \right\}, \quad x_0 > 1.$$

Обратно, если наше условие выполнено, то существование сегмента

$$b_m b_{m-1} \dots b_1 c_0 c_1 \dots c_m b_m b_{m-1} \dots b_1 c_0 c_1 \dots c_m$$

позволяет приблизиться к полуокружности

$$x_0 = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots + \frac{1}{c_m}}}, \quad -x'_0 = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_m}}}.$$

Одно из этих c_0 будет тогда иметь в цепочке непременно четный индекс.

Построение цепочки, содержащей любые сегменты, можно осуществить следующим образом. Прежде всего произведем упорядоченное размещение «слов» с r «буквами» $c_1, c_2, \dots, c_r$ — положительными целыми числами $\leq s$ — в «словарь» B_{rs} , располагая их в ряд сначала по возрастающим c_1 , затем по возрастающим c_2 и т. д. Обозначим такое слово из B_{rs} через W_{rst} , причем номер t пробегает значения $1, 2, \dots, s^r$. Теперь станем изменять также r , s и составим новое упорядочение всех слов W_{rst} , сначала по возрастанию $r + s + t$, затем по возрастанию r и, наконец, по возрастанию s . Упорядочив так все слова, мы распишем их затем в порядке очереди по буквам и таким образом получим вполне однозначно последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$, охватывающую уже все сегменты; ее можно затем дополнить до искомой цепочки с помощью произвольно выбранных $a_{-1}, a_{-2}, \dots$.

В частности, отсюда уже следует существование бесконечно большого числа замкнутых геодезических на f' , отвечающих периодическим дробям ($a_{k+m} = a_k$ для всех k).

^{*} Словом «сегмент» переведен термин «Ausschnitt».

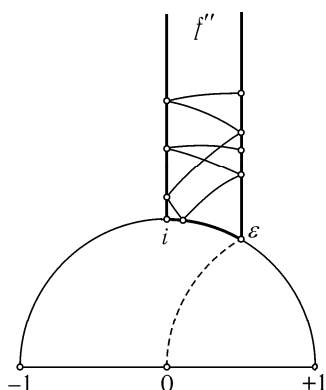


Рис. 38

Если расширить положенную в основу «модулярную группу» (2), присоединив отражение в оси y :

$$z = -\bar{z},$$

то основная область сведется к треугольнику с вершинами i, ε, ∞ , именно:

$$0 < x < \frac{1}{2},$$

$$x^2 + y^2 > 1, \quad y > 0.$$

Геодезические на новой поверхности f'' будут тогда отражаться от границ фундаментальной области, как это показано на рис. 38, так что мы можем назвать f'' «гиперболическим бильярдом». Так как теперь в x, x' -плоскости имеется еще больше эквивалентных точек, чем прежде, то теперь на f'' имеется еще больше геодезических, сколь угодно близко приближающихся к произвольно заданной геодезической дуге.

Это исследование заимствовано из одной работы Артина, Hamburg. Abhandlungen, т. 3 (1929 г.). Начиная с Пуанкаре, поведением геодезических в целом занимались многие геометры, например Биркгофф (G. D. Birkhoff), Лобель (F. Löbell), Морс (Marston Morse), Майерберг (P. J. Myrberg), Нильсон (J. Nielsen), Вейль (H. Weyl).

§ 58. Конформное отображение

Если обе основные пфаффовы формы σ_1, σ_2 поверхности f (§ 41) имеют простой вид:

$$\sigma_1 = f du, \quad \sigma_2 = f dv; \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = f^2(du^2 + dv^2), \quad (1)$$

то координаты u, v на f называются *изотермическими* [6]. Если их рассматривать одновременно как прямоугольные координаты в некоторой плоскости e , то для угла φ между двумя направлениями, исходящими из одной точки поверхности f или плоскости e , мы получим одинаковые

формулы

$$\cos \varphi = \frac{du \delta u + dv \delta v}{ds \delta s}, \quad \sin \varphi = \frac{du \delta v - \delta u dv}{ds \delta s}. \quad (2)$$

Поэтому говорят об отображении f на e , «сохраняющем углы»; согласно Шуберту (Schubert, 1758–1825), 1788 г., и Гауссу, 1843 г., это отображение называют также «конформным». Первым примером конформного отображения кривой поверхности на плоскость считается «стереографическая проекция» сферы, рассматривавшаяся Птолемеом около 150 года (ср. в дальнейшем § 71). Затем следует сферическая карта Кремера–Меркатора (1512–1594), в 1568 г., ставшая обычной для морских карт. Дальнейшие примеры конформных «карт» предложены Ламбертом (J. H. Lambert, 1728–1777), 1772 г., Эйлером, 1775 г. (1778 г.) и Лагранжем, 1779 г., которому принадлежит и отображение поверхности вращения (1781 г.). Общую задачу конформного отображения в малом произвольной аналитической поверхности на плоскость решил в 1822 г. Гаусс в своем сочинении на соискание Копенгагенской премии. Изучение конформных отображений в целом, которыми мы здесь не будем заниматься, начинается с диссертации Римана в 1851 г.

Из (1) в силу § 33 следует

$$du = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 = u_1 f du, \quad dv = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 = v_2 f dv, \quad (3)$$

т. е.

$$u_1 = v_2 = \frac{1}{f}, \quad u_2 = v_1 = 0. \quad (4)$$

Тем самым для u, v справедливы так называемые «уравнения Коши–Римана»:

$$u_1 - v_2 = 0, \quad u_2 + v_1 = 0. \quad (5)$$

Остается показать, что уравнения (5) сохраняются при изменении сети N (§ 42) на поверхности f . Но при вращении (54,2) сети N

$$\begin{aligned} u_2^* - v_2^* &= +(u_1 - v_2) \cos \theta + (u_2 + v_1) \sin \theta, \\ u_2^* + v_1^* &= -(u_1 - v_2) \sin \theta + (u_2 + v_1) \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) и вытекает инвариантность системы уравнений (5). Согласно (5), выражение

$$-u_2 \sigma_1 + u_1 \sigma_2 = v_1 \sigma_1 + v_2 \sigma_2 = dv \quad (7)$$

является полным дифференциалом. Поэтому в обозначениях (55,12)

$$\Delta(u) = 0. \quad (8)$$

Обратно, если u удовлетворяет этому «дифференциальному уравнению Лапласа», то функция

$$v = \int (u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) \quad (9)$$

определится в результате интегрирования полного дифференциала с точностью до аддитивной константы, и u, v будут удовлетворять уравнениям Коши–Римана (5). После этого основные формы Пфаффа σ_1, σ_2 принимают вид (1).

Тем самым задача конформного отображения поверхности f на плоскость e сведена к решению дифференциального уравнения Лапласа (8) на поверхности f . В соответствии с замечанием в конце § 55, эта задача связана с решением «минимальной задачи Дирихле» на f .

Как легко установить, пара изотермических координат u, v на поверхности f обладает следующими характерными свойствами: 1. Сеть $u, v = \text{const}$ ортогональна. 2. Сеть $u \pm v = \text{const}$ является биссекторной сетью сети $u, v = \text{const}$.

§ 59. Задачи, теоремы

1. Геодезические полярные координаты. Геодезические g , проходящие через точку x_0 поверхности f , можно задать с помощью угла φ , образуемого ими с некоторым фиксированным направлением в x_0 : точки на g можно задать их расстоянием r от x_0 , измеренным вдоль g . Тогда в достаточно малой окрестности x_0 величины r, φ называются «геодезическими полярными координатами» на f , а величины $u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi$ — «римановыми нормальными координатами». В координатах r, φ линейный элемент f принимает следующий вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \left\{ 1 - \frac{K_0}{3} r^2 - \frac{1}{6} (K_1 \cos \varphi + K_2 \sin \varphi) r^3 + \dots \right\} d\varphi^2. \quad (1)$$

Здесь K_0 означает меру кривизны f в точке x_0 , K_1 — производную от K по r в точке x_0 в направлении геодезической $\varphi = 0$, K_2 — такую же производную в направлении геодезической $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В римановых нормальных координатах

$$ds^2 = du^2 + dv^2 - \frac{K_0}{3} (u dv - v du)^2 + \dots \quad (2)$$

Из (1) вытекают следующие выражения для длины линии $r = \text{const}$, называемой, согласно Гауссу, *геодезической окружностью* с центром x_0 :

$$U = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K_0 r^3, \quad (3)$$

а также для площади этого «круга»:

$$A = \pi r^2 - \frac{\pi}{2} K_0 r^4 + \dots \quad (4)$$

Эти формулы содержат новое доказательство инвариантности K при изгибании.

2. Линии постоянной геодезической кривизны¹. Эти линии служат «экстремальными» «изопериметрической задачи» на f : найти замкнутые линии на f , охватывающие наибольшую площадь при заданной длине (Миндинг, 1879 г.). Если на поверхности f все геодезические окружности являются также линиями постоянной геодезической кривизны, то из (1) следует, что мера кривизны K поверхности f должна быть постоянной. Более того, можно показать, как это сделал Бауле (В. Baule, 1921 г.), что для замкнутости линий постоянной геодезической кривизны условие $K = \text{const}$ является необходимым.

3. Истолкование геодезической кривизны. С помощью формулы Гаусса – Бонне можно прийти к следующему результату.

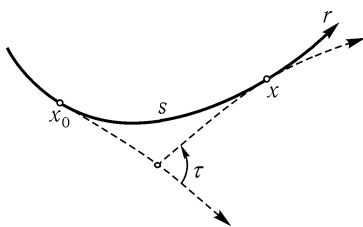


Рис. 39

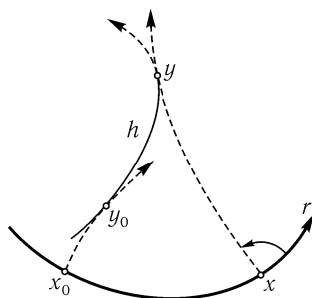


Рис. 40

¹Геодезические окружности, введенные в предыдущем пункте, называются *кругами Гаусса*, а также *кругами Бьянки*. Кривые постоянной геодезической кривизны рассматривал неоднократно Миндинг (впервые в работе «Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen», Journ. für die reine und angew. Math., т. 5 (1830 г.) стр. 297–304. Однако в литературе они известны под именем «кругов Дарбу». Автор использует для них термин «geodätische Krümmungskreise».

Пусть две точки x_0, x лежат на линии r на расстоянии s друг от друга (расстояние измеряется по линии r), и пусть геодезические, касающиеся в этих точках линии r , образуют угол τ (рис. 39). Тогда для геодезической кривизны линии r в x_0 справедливо соотношение

$$g = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau}{s}. \quad (5)$$

4. Теорема об огибающих. Пусть геодезические, ортогонально пересекающие линию r , имеют огибающую h . Пусть x_0, x — две точки на r , а y_0, y — соответственные точки на h (рис. 40). Тогда при надлежащем выборе знака для дуг имеет место соотношение Якоби, 1836 г.

$$\check{x}y = \check{x}_0y_0 + \check{y}_0y. \quad (6)$$

5. Сопряженные точки геодезической. Пусть на f лежит геодезическая g и s означает длину ее дуги. Рассмотрим меру кривизны K поверхности f вдоль g как функцию от s и составим «дифференциальное уравнение Якоби»*,

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + K(s)t = 0, \quad (7)$$

решениям t которого соответствуют на f геодезические, «бесконечно близкие» к g . Если $s_0 < s'_0$ — два следующие друг за другом нуля такого решения $t(s)$, т. е. если $t(s_0) = t(s'_0) = 0, t(s) \neq 0$ при $s_0 < s < s_1$, то в этом случае точка $x'_0 = x(s'_0)$ на g называется «сопряженной» точке $x_0 = x(s_0)$. Если геодезические, проходящие через точку x_0 , имеют огибающую, то x'_0 является первой следующей за x_0 точкой соприкосновения g с этой огибающей. Если точка $x_1 = x(s_1)$ лежит на g по другую сторону от x'_0 ($s_1 > s'_0$), то путь от x_0 к x_1 вдоль g не является уже кратчайшим путем на f . Якоби, 1836 г., Вейерштрасс.

6. Теоремы Штурма. Если для двух геодезических g, g^* , находящихся в точечном соответствии, при котором соответственные дуги равны, и расположенных на двух поверхностях f, f^* , меры кривизны f и f^* в соответственных точках удовлетворяют соотношению

$$K(s) \geq K^*(s), \quad (8)$$

то сопряженные точки на g лежат «плотнее», чем на g^* . Это означает, что если s'_0 и s'^*_0 — сопряженные точки к s_0 , то

$$s'_0 \leq s'^*_0. \quad (9)$$

* См.: Б л а ш к е. «Дифференциальная геометрия», т. I, § 99, ОНТИ, 1935.

В частности, из

$$K(s) \geq \frac{1}{a^2} \quad (10)$$

следует

$$s'_0 - s_0 \leq \pi a, \quad (11)$$

и точно так же из

$$K(s) \leq \frac{1}{b^2} \quad (12)$$

следует

$$s'_0 - s_0 \geq \pi b. \quad (13)$$

В случае $K \leq 0$ сопряженных точек нет вовсе. Штурм [J. F. Sturm, 1803–1855], 1836 г.

7. Вопрос о поверхностях встречи. Сфера обладает тем свойством, что точка x'_0 , сопряженная x_0 , не зависит от выбора геодезической, проходящей через x_0 . До сих пор не решен вопрос, являются ли сферы единственными замкнутыми поверхностями с таким свойством (*поверхностями встречи*). Некоторые (частично ошибочные) данные по этому вопросу находятся в моей дифференциальной геометрии за 1924 и 1930 гг. Ср. в дальнейшем § 69, 7.

8. Геодезически выпуклые поверхности. Если для любых двух точек x_0, x поверхности f всегда существует только одна геодезическая дуга, соединяющая их, то f называется геодезически выпуклой. Если ее граница $r(f)$ имеет непрерывную геодезическую кривизну g , то она удовлетворяет соотношению $g \geq 0$. Если f односвязна, всюду на f $K \leq 0$ и вдоль границы $r(f)$ всюду $g \geq 0$, то f геодезически выпукла.

9. Интегральная геометрия геодезических. Зададим геодезическую g на геодезически выпуклой поверхности f одной из ее точек x и направлением τ^* g в x . Для этого мы предположим, что на f , как в § 41, задана ортогональная сеть N , и за касательный вектор к линии g в x возьмем вектор $a_1 \cos \tau + a_2 \sin \tau$. Для двупараметрического семейства $\mathfrak{S}$ геодезических (например $x(u, v)$, $\tau(u, v)$, $u^2 + v^2 < 1$) интеграл (Пуанкаре):

$$M(\mathfrak{S}) \int_{\mathfrak{S}} [d(\sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \sin \tau)], \quad d\mathbf{x} = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2, \quad (14)$$

не зависит от выбора точек x на геодезических g семейства. Обратно, если такая независимость имеет место для некоторого семейства линий g , то линии g — геодезические. Для поля геодезических интеграл

$$\int (\sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \sin \tau) \quad (15)$$

* τ — угол между касательным вектором к g и вектором a_1 .

является «интегралом независимости»*, введенным Бельтрами и Гильбертом. Если r — линия на f и $n(g)$ — число точек ее пересечения с геодезической $g(x, \tau)$, то для длины L линии r справедливо соотношение

$$2L = \int n(g) |d(\sigma_1 \cos \tau + \sigma_2 \sin \tau)|. \quad (16)$$

Интеграл здесь распространен на все геодезические линии поверхности f . За «меру» трехпараметрического семейства «линейных элементов» $x(u, v, w)$, $\tau(u, v, w)$ на f можно принять интеграл

$$\int [\sigma_1 \sigma_2 d\tau]. \quad (17)$$

Ср. Б л а ш к е, «Интегральная геометрия» 11, Hamburg, Abh., т. 11 (1936 г.), стр. 359–366.

10. Теорема Бельтрами. Если поверхность f можно отобразить в малом на евклидову плоскость так, чтобы геодезическим на f отвечали прямые плоскости, то f обладает постоянной мерой кривизны. Б е л ь т р а м и, Орега, т. 1 (1866 г.), стр. 262–280. Д а р б у, Surfaces, т. 3, стр. 40–44. То же самое имеет место и в том случае, если потребовать, чтобы образами геодезических являлись окружности и прямые плоскости. С е г р е, Bulletino della unione matematica italiana, 1949, стр. 16–22.

11. Теорема Дини о геодезическом отображении поверхностей. Если поверхность f^* может быть получена преобразованием подобия из поверхности, допускающей изометрическое отображение на f , то геодезические на f и f^* соответствуют друг другу. Б е л ь т р а м и поставил общий вопрос о парах поверхностей f, f^* , на которых в малом имеет место это соответствие**. Д и н и показал, что такие пары поверхностей принадлежат классу Лиувилля и имеют линейные элементы

$$\begin{aligned} ds^2 &= (U - V)(du^2 + dv^2), \\ ds^2 &= \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right) \left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

При этом, не изменяя ds^2 , можно заменить U, V на $U + h, V + h$ с постоянным h . Д и н и, 1869 г.

12. Дифференциальные параметры Бельтрами. Если линейный элемент поверхности f имеет вид

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad EG - F^2 = W^2 > 0,$$

* «Unabhängigkeitsintegral».

** Если одна из них не наложима на поверхность, подобную другой.

то для дифференциального параметра ∇ функции $f(u, v)$ (§ 54) получается выражение

$$\nabla f = -\frac{1}{W^2} \begin{vmatrix} E & F & f_u \\ F & G & f_v \\ f_u & f_v & 0 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

а для смешанного

$$\nabla(f, g) = -\frac{1}{W^2} \begin{vmatrix} E & F & f_u \\ F & G & f_v \\ g_u & g_v & 0 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Второй дифференциальный параметр (§ 55) будет

$$\Delta f = \frac{1}{W} \left\{ \left(\frac{E f_u - F f_v}{W} \right)_v + \left(\frac{G f_u - F f_v}{W} \right)_u \right\}. \quad (21)$$

Бельтрами, 1864 г.

13. Выражение Бельтрами для геодезической кривизны. Пусть линия r на f задана уравнением $f(u, v) = c$ и ориентирована так, что область $f < c$ лежит слева от нее. Тогда ее геодезическая кривизна равна

$$g = -\frac{\Delta f}{\sqrt{\nabla f}} - \nabla \left(f, \frac{1}{\sqrt{\nabla f}} \right), \quad \sqrt{\nabla f} > 0, \quad (22)$$

Бельтрами, Werke, т. 1 (1865 г.), стр. 176.

14. Вопрос Миндинга о наложимости двух поверхностей друг на друга. Имеется в виду вопрос, при каком условии два линейных элемента

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ ds'^2 &= E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2 \end{aligned} \quad (23)$$

допускают изометрическое отображение

$$u' = u'(u, v), \quad v' = v'(u, v); \quad \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} \neq 0. \quad (24)$$

Необходимые условия таковы:

$$K(u, v) = K'(u', v'), \quad \nabla K(u, v) = \nabla' K'(u', v'). \quad (25)$$

Если

$$\frac{\partial(K, \nabla K)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(K', \nabla K')}{\partial(u', v')} = 0, \quad (26)$$

то они недостаточны для решения вопроса. Тогда присоединяем третье условие:

$$\Delta K(u, v) = \Delta' K'(u', v'). \quad (27)$$

Если и оно не даст ничего нового по сравнению с (25), то можно показать, что обе поверхности (23) изометричны одной и той же поверхности вращения (а следовательно, и наложимы друг на друга). Миндинг, 1839 г.; Дарбу, Surfaces, т. 3, № 686–697.

Задачу Миндинга можно видоизменить так, чтобы отправляться не от квадратичной дифференциальной формы ds^2 , а от пфаффовых форм $\sigma_1 \sigma_2$.

15. Вопрос Гаусса и Бура о всех поверхностях в R_3 с данным ds^2 . Если линейный элемент

$$ds^2 = E du^2 + 2f du dv + G dv^2$$

положительно определен, то у поверхности с этим линейным элементом каждая декартова координата $x(u, v)$ удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных; его можно тотчас же найти, потребовав, согласно Дарбу, чтобы обращалась в нуль мера кривизны квадратичной дифференциальной формы $ds^2 - dx^2$ от переменных u, v :

$$K(ds^2 - dx^2) = 0. \quad (28)$$

В самом деле, если мы обозначим прямоугольные координаты точки поверхности через x, y, z , то $ds^2 - dx^2 = dy^2 + dz^2$. Если известно решение этого дифференциального уравнения, то соответствующую поверхность можно определить с помощью квадратур. «Характеристиками» дифференциального уравнения (28) служат асимптотические линии (§ 61). Бур (E. Bour), 1862 г.; Дарбу, Surfaces, т. 3. 1872 г., № 698/708.

В наших обозначениях (41.14) задача Гаусса и Бура приводится к тому, чтобы при данных $\sigma_1, \sigma_2, \omega_3$ определить пфаффовы формы ω_1, ω_2 из уравнений

$$\begin{aligned} [\sigma_1 \omega_2] + [\omega_1 \sigma_2] &= 0, \\ [d\omega_1] &= [\omega_3 \omega_2], \quad [d\omega_2] = [\omega_1 \omega_3]. \end{aligned} \quad (29)$$

Эта задача устанавливает связь между учением о «внутренней геометрии» поверхностей, с которым мы имели дело в главах IV, V, и учением о «внешней геометрии», к которому мы теперь и обратимся.

VI. Внешняя геометрия поверхностей

§ 61. Главные кривизны

Разделы IV и V были в основном посвящены *внутренним* свойствам поверхностей, сохраняющимся при *изометрических* отображе-

ниях» (или «изгибаниях») поверхностей. Теперь мы обратимся к исследованию внешних свойств, которые определяются тем, как наша поверхность реализована в евклидовом пространстве R_3 , и которые сохраняются только при *движениях* поверхности в этом пространстве. В соответствующие формулы входят тогда наряду с основными формами σ_1, σ_2 (а значит, и ω_3) еще формы ω_1, ω_2 . При избытии фактического материала, созданного в этой области со времен Эйлера, Монжа и Гаусса, естественно, необходим узкий и нередко произвольный выбор. В качестве «изюминки» этого раздела мы приводим в § 67 доказательство жесткости, принадлежащее Герглотцу.

В § 41 мы имели *деривационные уравнения*

$$\begin{aligned} dx &= a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2, \\ da_1 &= a_2 \omega_3 - a_3 \omega_2, \quad da_2 = a_3 \omega_1 - a_1 \omega_3, \quad da_3 = a_1 \omega_2 - a_2 \omega_1 \end{aligned} \quad (1)$$

для «сопровождающего триэдра» $\{x; a_1, a_2, a_3\}$ поверхности f с нормальным вектором a_3 . Им отвечают *условия интегрируемости*

$$\begin{aligned} [d\sigma_1] &= [\omega_3 \sigma_2], \quad [d\sigma_2] = [\sigma_1 \omega_3], \quad 0 = [\sigma_1 \omega_2] + [\omega_1 \sigma_2], \\ [d\omega_1] &= [\omega_3 \omega_2], \quad [d\omega_2] = [\omega_1 \omega_3], \quad [d\omega_3] = -[\omega_1 \omega_2]. \end{aligned} \quad (2)$$

Как уже говорилось, в формулах (1) и (2) заключается все учение о поверхностях.

Если откладывать вектор $a_3 = a(u, v)$ от фиксированной точки o , то его конец $a(u, v)$ опишет кусок k на поверхности единичной сферы с центром в o , так как $aa = 1$. Согласно Гауссу, мы назовем это отображение $f \rightarrow k$ *шаровым* или *сферическим отображением*.

Рассмотрим теперь *полосу* «на поверхности f », т.е. полосу, точки которой x лежат на f , а нормали которой a_3 одновременно являются нормальными к поверхности. Пусть сопровождающий триэдр полосы образован векторами a_j^* :

$$\begin{aligned} a_1^* &= +a_1 \cos \tau + a_2 \sin \tau, \\ a_2^* &= -a_1 \sin \tau + a_2 \cos \tau, \\ a_3^* &= a_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем считать, что a_1^* — касательный вектор полосы. Тогда, согласно § 21, мы можем получить выражения для пфаффовых форм σ, ω_j^* , отвечающих нашей полосе; сначала получаем

$$\sigma_1 = \sigma \cos \tau, \quad \sigma_2 = \sigma \sin \tau, \quad (4)$$

и затем для форм

$$\omega_1^* = a_3 da_2^*, \quad \omega_2^* = a_1^* da_3, \quad \omega_3^* = a_2^* da_1^* \quad (5)$$

находим:

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= +\omega_1 \cos \tau + \omega_2 \sin \tau, \\ \omega_2^* &= -\omega_1 \sin \tau + \omega_2 \cos \tau, \\ \omega_3^* &= +\omega_3 + d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Если, в частности, полоса является асимптотической, то ее несущая линия называется *асимптотической линией*. Ее соприкасающиеся плоскости являются касательными плоскостями поверхности f . Согласно § 22, в этом случае

$$\omega_2^* = a_1^* da_3 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, асимптотические линии характеризуются тем, что для них обращается в нуль вторая основная квадратичная форма нашей поверхности:

$$dx da_3 = \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1. \quad (8)$$

Итак, асимптотические линии нашей поверхности соответствуют своим сферическим отображениям ортогональностью касательных.

В силу $[\sigma_1 \sigma_2] \neq 0$ мы можем положить

$$+\omega_2 = c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2, \quad -\omega_1 = c_{21}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2. \quad (9)$$

Тогда из третьего уравнения (2) следует

$$c_{12} = c_{21}, \quad (10)$$

т. е. на основании (8)

$$dx da_3 = c_{11}\sigma_1^2 + 2c_{12}\sigma_1\sigma_2 + c_{22}\sigma_2^2. \quad (11)$$

Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие существования вещественных асимптотических линий:

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = \frac{[\omega_1\omega_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} = K < 0. \quad (12)$$

Выражение (11) может обращаться в нуль для всех $\sigma_1 : \sigma_2$ в некоторой точке поверхности тогда и лишь тогда, когда в этой точке все $c_{ij} = 0$. В этом случае говорят о *точке уплощения* на f .

Рассмотрим также *линии кривизны поверхности* f , отвечающие полосам кривизны на f ; вдоль этих линий, следовательно, нормали к поверхности образуют торсы. Для них $\omega_1^* = 0$ или, согласно (4) и (6),

$$\sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 = 0, \quad (13)$$

или же, в силу (9), (10),

$$c_{12}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + (c_{11} - c_{22})\sigma_1 \sigma_2 = 0. \quad (14)$$

Если $\sigma'_1 : \sigma'_2, \sigma''_1 : \sigma''_2$ — два решения этого уравнения, то левая часть (14) только множителем отличается от

$$\begin{aligned} (\sigma'_2 \sigma_1 - \sigma'_1 \sigma_2)(\sigma''_2 \sigma_1 - \sigma''_1 \sigma_2) = \\ = \sigma'_2 \sigma''_2 \sigma_1^2 - (\sigma'_1 \sigma''_2 + \sigma'_2 \sigma''_1) \sigma_1 \sigma_2 + \sigma'_1 \sigma''_1 \sigma_2^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Тем самым из сравнения (14) и (15) получается

$$\sigma'_1 \sigma''_1 + \sigma'_2 \sigma''_2 = 0. \quad (16)$$

Это означает, что в общем случае через каждую точку поверхности проходят ровно две линии кривизны, пересекаясь в ней под прямым углом. Исключение может представиться лишь тогда, если в точке поверхности условие (14) выполняется для всех $\sigma_1 : \sigma_2$, т. е. если

$$c_{11} = c_{22} = c, \quad c_{12} = 0. \quad (17)$$

Тогда, согласно (1), (9) и (17), мы будем для всех $\sigma_1 : \sigma_2$ иметь в этой точке соотношение

$$c d\mathbf{x} = da_3 \quad (18)$$

при постоянном c . Точки поверхности f , характеризующиеся свойством (17) или (18), называются *омбилическими*.

Из (16) следует также, что линии кривизны всегда вещественны. В самом деле, если бы уравнение (14) имело два мнимо-сопряженных решения $\sigma'_1 : \sigma'_2, \sigma''_1 : \sigma''_2$, то мы могли бы взять $\sigma''_1 = \overline{\sigma'_1}, \sigma''_2 = \overline{\sigma'_2}$ (комплексно сопряженные!), и получили бы

$$\sigma'_1 \sigma''_1 + \sigma'_2 \sigma''_2 = \sigma'_1 \overline{\sigma'_1} + \sigma'_2 \overline{\sigma'_2} > 0,$$

что противоречит равенству (16).

Отметим, наконец, что из (6) можно снова вывести *дифференциальное уравнение геодезических*, именно $\omega_3^* = 0$, или

$$\omega_3 + d\tau = 0. \quad (19)$$

Вернемся к линиям кривизны. Рассмотрим «центр главной кривизны», соответствующий точке x поверхности:

$$y = x + r a_3; \quad (20)$$

этот центр является точкой прикосновения нормали к поверхности в x с огибающей нормалей вдоль одной из линий кривизны, проходящих через x . Тогда, согласно (22,16), для смещения dx вдоль линии кривизны справедливо соотношение

$$dx = -r da_3, \quad (21)$$

т. е. в силу (1)

$$\sigma_1 + r\omega_2 = 0, \quad \sigma_2 - r\omega_1 = 0. \quad (22)$$

На основании (21) линии кривизны обладают свойством соответствовать своим сферическим отображениям параллельностью касательных.

На *поверхности вращения* линии кривизны можно определить тотчас же. Действительно, требуемым свойством обладают «параллели» и «меридианы» поверхности (т. е. линии сечения поверхности плоскостями, перпендикулярными к оси вращения и проходящими через нее); в самом деле, соответствующие нормали образуют торсы: конусы вращения и плоскости. Поэтому один из центров главной кривизны совпадает с центром кривизны y_1 меридиана, проходящего через рассматриваемую точку поверхности x , а другой центр y_2 лежит на оси вращения (рис. 41).

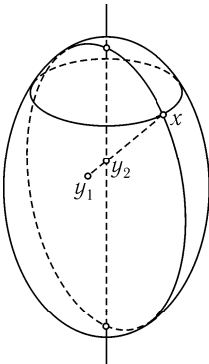


Рис. 41

При исключении r из (22) снова получается условие (13). С другой стороны, если мы подставим для ω_j значения из (9), то получатся уравнения

$$\begin{aligned} \left(c_{11} + \frac{1}{r}\right) \sigma_1 + c_{12} \sigma_2 &= 0, \\ c_{12} \sigma_1 + \left(c_{22} + \frac{1}{r}\right) \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда для «главных кривизн» $\frac{1}{r_j}$ получается квадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} c_{11} + \frac{1}{r} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} + \frac{1}{r} \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

или

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) + (c_{11} + c_{22})\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (25)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} &= c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = \frac{[\omega_1\omega_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} = K, \\ \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} &= -(c_{11} + c_{22}) = 2H. \end{aligned} \quad (26)$$

В первой формуле (26), наряду с (9), содержится «внешнее» геометрическое истолкование меры кривизны K . H называется средней кривизной поверхности f в точке x . Из (9) и (26) вытекает еще соотношение для H :

$$[\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_2] = 2H[\sigma_1\sigma_2]. \quad (27)$$

Если мы возьмем за линии $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = 0$ сети N линии кривизны и обозначим через $\frac{1}{r_1}$ кривизну линии $\sigma_2 = 0$, то согласно (22), (9), (26), (11)

$$\begin{aligned} \sigma_1 + r_1\omega_2 &= 0, & \sigma_2 - r_2\omega_2 &= 0; \\ c_{11} &= -\frac{1}{r_1}, & c_{12} &= 0, & c_{22} &= -\frac{1}{r_2}, \\ -d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 &= \frac{\sigma_1^2}{r_1} + \frac{\sigma_2^2}{r_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из последнего уравнения следует: линии кривизны делят пополам угол между асимптотическими линиями.

На рис. 42 изображено поведение линий кривизны в окрестности точки с $K > 0$, а на рис. 43 — в окрестности точки с $K < 0$, причем представлено и сферическое отображение.

Из (1), как и на стр. 71, следует, что выражение

$$[\omega_1\omega_2] = K[\sigma_1\sigma_2] \quad (29)$$

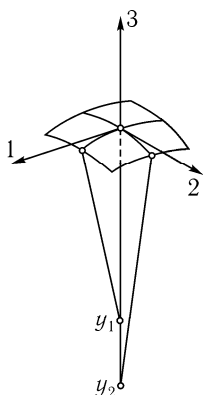


Рис. 42

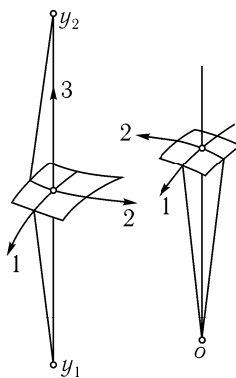


Рис. 43

является элементом площади сферического отображения k нашей поверхности f . Следовательно, *интегральная кривизна поверхности f равна мере площади k , взятой с надлежащим знаком*. Наконец, в соответствии с (28), квадрат элемента дуги k равен

$$da da = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{r_2^2}. \quad (30)$$

Сферическое отображение k поверхности f не обязательно покрывает единичную сферу однолистно; оно может покрывать ее многократно, подобно римановым поверхностям, рассматривающимся в теории функций. Однако в состав сферического отображения могут входить еще и «складки»*, соответствующие в общем случае «*параболическим линиям*» на f , т. е. линиям, в точках которых $K = 0$.

Двупараметрическое семейство прямых, или конгруэнцию, мы можем представить следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(u, v) + w\mathbf{a}(u, v); \quad \mathbf{a}\mathbf{a} = 1. \quad (31)$$

Прямая конгруэнции будет тогда определена фиксированными значениями u, v . Постараемся теперь определить $w(u, v)$ так, чтобы прямые конгруэнции ортогонально пересекали получающуюся поверх-

*То есть границы областей, двулистно покрывающих сферу.

ность $x(u, v)$. В этом случае

$$\mathbf{a} \, d\mathbf{x} = \mathbf{a} \, d\mathbf{p} + d\mathbf{w} = 0. \quad (32)$$

Итак, для нормальной конгруэнции выражение

$$-d\mathbf{w} = \mathbf{a} \, d\mathbf{p} \quad (33)$$

должно быть полным дифференциалом, т. е.

$$[d(\mathbf{a} \, d\mathbf{p})] = 0, \quad (34)$$

или, подробнее,

$$\mathbf{a}_u \mathbf{p}_v - \mathbf{a}_v \mathbf{p}_u = 0. \quad (35)$$

Если условие (35) выполнено, то для нашей конгруэнции прямых существует однопараметрическое семейство ортогонально секущих поверхностей (*параллельных поверхностей*).

Наши результаты относительно линий кривизны показывают, что торсы, *содержащиеся в конгруэнции нормалей поверхности, пересекаются под прямым углом*. Теперь мы покажем, что *это свойство характеризует нормальные конгруэнции*. В самом деле, если конгруэнция (31) обладает свойством ортогональности торсов, то мы можем выбрать координаты u, v так, чтобы торсы, заданные в общем случае условием

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = 0, \quad (36)$$

представлялись уравнениями $u = \text{const}, v = \text{const}$. Тогда $\mathbf{a}, \mathbf{a}_u, \mathbf{p}_u$, с одной стороны, и $\mathbf{a}, \mathbf{a}_v, \mathbf{p}_v$ — с другой, линейно зависимы, и так как $\mathbf{a}, \mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v$ образуют ортогональный триэдр, то $\mathbf{a}_u \mathbf{p}_v = 0$ и $\mathbf{a}_v \mathbf{p}_u = 0$. Таким образом, для нормальных конгруэнций условие (35) действительно выполняется.

§ 62. Кривизна линий на поверхности

Проведем на поверхности f через одну из ее точек x линию L с вектором касательной (61,3)

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_1 \cos \tau + \mathbf{a}_2 \sin \tau \quad (1)$$

и вектором главной нормали (т. е. нормали, расположенной в соприкасающейся плоскости)

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}_2^* \cos \theta + \mathbf{a}_3 \sin \theta, \quad \mathbf{a}_2^* = -\mathbf{a}_1 \sin \tau + \mathbf{a}_2 \cos \tau. \quad (2)$$

Тогда θ является углом, который соприкасающаяся плоскость линии L в x образует с касательной плоскостью поверхности f в x . Пусть обе эти плоскости различны. Если $\frac{1}{r}$ обозначает кривизну L в x , то согласно (24,1), мы будем иметь в наших обозначениях

$$\frac{d\mathbf{a}_1^*}{ds} = \frac{\mathbf{h}}{r} = \frac{\mathbf{a}_2^* \cos \theta + \mathbf{a}_3 \sin \theta}{r} \quad (3)$$

и, с другой стороны, согласно (61,1),

$$\frac{d\mathbf{a}_1^*}{ds} = \frac{\mathbf{a}_2^* \omega_3^* - \mathbf{a}_3 \omega_2^*}{\sigma}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4) и учитывая (61,6), получим

$$\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{\omega_2^*}{\sigma} = \frac{\omega_1 \sin \tau - \omega_2 \cos \tau}{\sigma}. \quad (5)$$

Подставляя сюда для ω_1, ω_2 значения из (61,28) и полагая, наконец, $\sigma_1 = \sigma \cos \tau, \sigma_2 = \sigma \sin \tau$, мы получим

$$\frac{\sin \theta}{r} = \frac{\cos^2 \tau}{r_1} + \frac{\sin^2 \tau}{r_2} = -\frac{dx \, da_3}{dx \, dx}. \quad (6)$$

Отсюда следует: *линии на поверхности, касающиеся в точке x и имеющие в ней общую соприкасающуюся плоскость, обладают в x одной и той же кривизной $\frac{1}{r}$. Если соприкасающаяся плоскость линии проходит через нормаль к поверхности, то, как обнаружил Эйлер в 1760 г.,*

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\cos^2 \tau}{r_1} + \frac{\sin^2 \tau}{r_2}. \quad (7)$$

Кривизны же линий на поверхности, касающихся друг друга в точке x , связаны между собой следующим образом:

$$\frac{\sin \theta}{r} = \frac{1}{r_0}. \quad (8)$$

Эту формулу предложил Менье (M. Ch. Meusnier, 1754–1793) в 1776 г.

Зависимость (8) можно истолковать следующим образом: *у линий на поверхности, касающихся друг друга в точке x , оси кривизны (§ 25) все проходят через одну точку*

$$y = x + r_0 a_3.$$

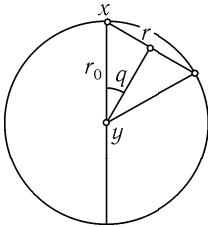


Рис. 44

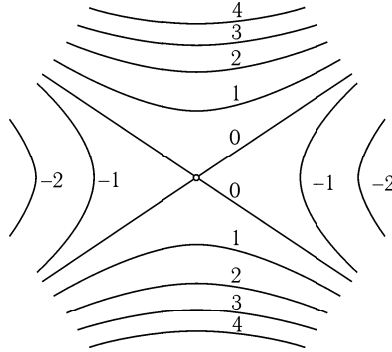


Рис. 45

Поэтому все соответствующие круги кривизны лежат на сфере с центром y и радиусом r_0 (рис. 44).

Зададим временно поверхность следующим уравнением хорошо известного вида:

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = F(u, v), \quad (9)$$

и пусть f проходит через начало o , касаясь там плоскости $x_3 = 0$. Тогда разложение F по степеням u, v начнется с членов второй степени:

$$x_3 = \frac{1}{2}(F_{11}u^2 + 2F_{12}uv + F_{22}v^2) + \dots \quad (10)$$

Отсюда векторы x_u, x_v будут

$$x_u = (1, 0, F_{11}u + F_{12}v + \dots), \quad x_v = (0, 1, F_{12}u + F_{22}v + \dots), \quad (11)$$

а вектор нормали примет вид

$$a_3 = (-F_{11}u - F_{12}v + \dots, -F_{12}u - F_{22}v + \dots, 1) \quad (12)$$

и будет единичным в точке o . Поэтому основные квадратичные формы в точке o будут выглядеть следующим образом:

$$d\mathbf{x} d\mathbf{x} = du^2 + dv^2, \quad -d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = F_{11}du^2 + 2F_{12}du dv + F_{22}dv^2. \quad (13)$$

Если в точке o мы положим

$$\sigma_1 = du, \quad \sigma_2 = dv, \quad (14)$$

то согласно (13) и (61,28), получим

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2}{r_1} + \frac{\sigma_2^2}{r_2}.$$

Итак, при нашем специальном выборе пространственной системы координат разложение в ряд для поверхности f в o начинается так:

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{r_1} + \frac{x_2^2}{r_2} \right). \quad (15)$$

Следовательно, при

$$K = \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} > 0$$

поверхность f в окрестности точки o расположена целиком по одну сторону от касательной плоскости, в то время как при $K < 0$ поверхность f пересекает свою касательную плоскость в o . Асимптотические касательные в точке o касаются во втором случае линий пересечения. Поведение поверхности в точке o наглядно поясняет рис. 45. На нем изображены «проекции» «линий уровня» $x_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ поверхности (15). Начало координат играет роль «перевала» (или «седла»).

Если мы станем пересекать поверхность (15) плоскостью $x_3 = c$ при малых $|c|$ и затем «растягивать» эти линии уровня в отношении длин

$$1 : \sqrt{2|c|},$$

полагая для этого

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{2|c|}}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{2|c|}},$$

то после перехода к пределу при $c \rightarrow 0$ мы получим линию

$$\frac{\xi_1^2}{r_1} + \frac{\xi_2^2}{r_2} = \pm 1.$$

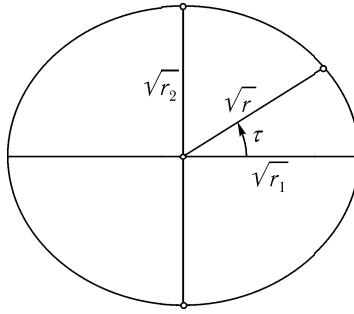


Рис. 46

Это коническое сечение, или пара конических сечений, называется, согласно Дю п е н у (Ch. Dupin, 1813 г.), «индикатрисой» рассматриваемой точки поверхности. Если мы разрежем поверхность нормальной плоскостью $x_1 \sin \tau - x_2 \cos \tau = 0$, то соответствующий радиус индикатрисы, согласно (7), равен квадратному корню из радиуса кривизны $|r|$,^{*} как это показано на рис. 46.

Откажемся теперь снова от специальной системы координат и рассмотрим три основные квадратичные формы:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} d\mathbf{x} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \\ d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 &= \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1, \\ d\mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3 &= \omega_1^2 + \omega_2^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Если мы возьмем, в частности, за N сеть линий кривизны, то согласно (61,28), (61,30),

$$-d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = \frac{\sigma_1^2}{r_1} + \frac{\sigma_2^2}{r_2}, \quad d\mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3 = \frac{\sigma_1^2}{r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{r_2^2}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для любых $\sigma_1 : \sigma_2$

$$\frac{1}{r_1 r_2} d\mathbf{x} d\mathbf{x} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 + d\mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3 = 0. \quad (18)$$

Между тремя основными квадратичными формами имеет место линейная зависимость:

$$K(d\mathbf{x} d\mathbf{x}) + 2H(d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3) + (d\mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3) = 0.$$

^{*} $|r|$ — радиус кривизны рассматриваемого нормального сечения.

§ 63. Теорема Дюпена об ортогональных системах поверхностей

Выберем прямоугольную систему координат $\{x; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ и будем обозначать координаты точки через u_1, u_2, u_3 . Обозначим

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1\sigma_1 + \mathbf{a}_2\sigma_2 + \mathbf{a}_3\sigma_3 \quad (1)$$

и предположим, что формы σ_j являются полными дифференциалами с точностью до скалярных множителей c_j :

$$\sigma_j = c_j dv_j; \quad [\sigma_1\sigma_2\sigma_3] \neq 0. \quad (2)$$

Тогда три семейства поверхностей ($v_j = \text{const}$) пересекаются ортогонально, и мы имеем перед собой «триортогональную систему поверхностей» («триортогональную систему»). Величины v_1, v_2, v_3 являются «криволинейными» ортогональными координатами точки. Из (2) с помощью внешнего дифференцирования следует

$$[d\sigma_j] = [dc_j dv_j], \quad (3)$$

и потому

$$[\sigma_j[d\sigma_j]] = c_j[dv_j dc_j dv_j]. \quad (4)$$

С другой стороны, если мы положим, как в (61,1),

$$d\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2\omega_3 - \mathbf{a}_3\omega_2 \quad (5)$$

с дальнейшей круговой перестановкой 1, 2, 3, то, дифференцируя (1) и используя (5), мы получим в качестве условия интегрируемости соотношение

$$[d\sigma_1] = [\omega_3\sigma_2] - [\omega_2\sigma_3] \quad (6)$$

и другие круговой перестановкой. Поэтому в силу (4) мы будем иметь равенство

$$-[\sigma_1[d\sigma_1]] = [\sigma_1\sigma_2\omega_3] + [\sigma_3\sigma_1\omega_2] = 0 \quad (7)$$

и аналогичные, получаемые круговой перестановкой. Но отсюда следует

$$[\sigma_1\sigma_2\omega_3] = [\sigma_2\sigma_3\omega_1] = [\sigma_3\sigma_1\omega_2] = 0. \quad (8)$$

Если мы теперь рассмотрим, например, линию пересечения поверхностей $v_2, v_3 = \text{const}$, т. е. линию $\sigma_2\sigma_3 = 0$, то согласно (8), вдоль нее будет

и $\omega_1 = 0$, так что на основании (61,13) она является линией кривизны на поверхности $v_3 = \text{const}$ или $\sigma_3 = 0$.

Тем самым доказана теорема, опубликованная в 1813 г. Дюпеном в его работе «Développements de géométrie»: *поверхности $v_j = \text{const}$, $v_k = \text{const}$ ($j \neq k$) триортогональной системы пересекаются по линиям, являющимся линиями кривизны на обеих этих поверхностях.* Между прочим, согласно Дарбу, эту теорему можно в известной мере обратить*.

Мы получим *первый пример* такой ортогональной системы поверхностей, если возьмем за основу поверхность с сетью линий кривизны в качестве сети N и отыщем для нее «параллельные поверхности»:

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \mathbf{x}_0(u, v) + w\mathbf{a}_3(u, v). \quad (9)$$

Тогда параллельные поверхности $w = \text{const}$ совместно с торсами, образованными нормальными $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ вдоль линий кривизны, составляют триортогональную систему поверхностей. В самом деле, из (8) и (61,28) следует

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \left(1 - \frac{w}{r_1}\right) \sigma_1 + \mathbf{a}_2 \left(1 - \frac{w}{r_2}\right) \sigma_2 + \mathbf{a}_3 dw. \quad (10)$$

Вторым примером является система «конфокальных квадрик» (поверхностей второго порядка). Возьмем уравнение вида

$$f(t) = \frac{x_1^2}{t - a_1} + \frac{x_2^2}{t - a_2} + \frac{x_3^2}{t - a_3} = 1, \quad (11)$$

где $a_1 > a_2 > a_3 > 0$. При фиксированном t оно представляет квадрику. Будем считать $x_j > 0$ и рассматривать (11) как уравнение третьей степени относительно t . Из соображений непрерывности ясно, что оно имеет три вещественных решения для t , и притом в следующих интервалах:

$$t_1 > a_1 > t_2 > a_2 > t_3 > a_3; \quad (12)$$

t_1 отвечает эллипсоиду, t_2 — однополостному, а t_3 — двухполостному гиперboloиду, проходящим через точку x . Нормаль к нашей поверхности имеет направление

$$\left\{ \frac{x_1}{t_j - a_1}, \frac{x_2}{t_j - a_2}, \frac{x_3}{t_j - a_3} \right\}.$$

*Теорему Дарбу см. в книге В. Ф. Кагана, «Основы теории поверхностей», часть II, § 56, Гостехиздат, 1948. Стр. 64.

Но две такие нормали действительно перпендикулярны, так как из $f(t_j) - f(t_k)$ получается

$$\frac{x_1^2}{(t_j - a_1)(t_k - a_1)} + \frac{x_2^2}{(t_j - a_2)(t_k - a_2)} + \frac{x_3^2}{(t_j - a_3)(t_k - a_3)} = 0. \quad (13)$$

Подобное же имеет место и в предельном случае параболоида. Отсюда следует теорема Дюпена:

Линии кривизны квадрики являются в общем случае пространственными кривыми четвертого порядка, высекаемыми на них конфокальными квадриками.

Изучим поведение линий кривизны на эллипсоиде ($t_1 = \text{const}$). Для этого выразим из (11) прямоугольные координаты через «эллиптические» координаты t_1, t_2, t_3 :

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(t_1 - a_1)(t_2 - a_1)(t_3 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \\ x_2^2 &= \frac{(t_1 - a_2)(t_2 - a_2)(t_3 - a_2)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}, \\ x_3^2 &= \frac{(t_1 - a_3)(t_2 - a_3)(t_3 - a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда получаются уравнения ортогональной проекции линий кривизны эллипсоида $t_1 = \text{const}$ на плоскость $x_1 = 0$:

$$x_2^2 = c_2 \xi_2^2, \quad x_3^2 = c_3 \xi_3^2, \quad (15)$$

где c_2, c_3 — положительные константы.

Но вторые множители в формулах (15):

$$\xi_2^2 = \frac{(t_2 - a_2)(t_3 - a_2)}{a_3 - a_2}, \quad \xi_3^2 = \frac{(t_2 - a_3)(t_3 - a_3)}{a_2 - a_3} \quad (16)$$

определяют в плоскости ξ_2, ξ_3 конфокальные конические сечения, аналогично равенствам (14):

$$\frac{\xi_2^2}{t - a_2} + \frac{\xi_3^2}{t - a_3} = 1. \quad (17)$$

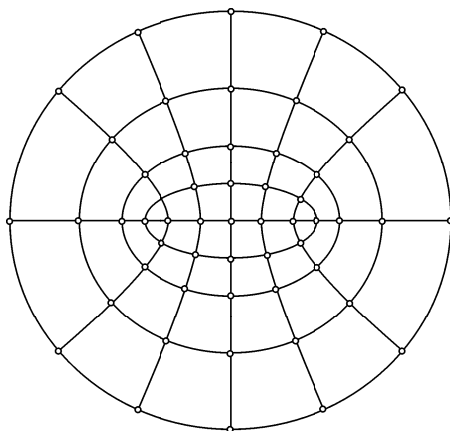


Рис. 47

Первые же положительные множители в (15) постоянны на нашем эллипсоиде t_1 . Следовательно, искомые ортогональные проекции линий кривизны получаются из конфокальных конических сечений с помощью «аффинного отображения» $x_2 = \sqrt{c_2} \xi_2$, $x_3 = \sqrt{c_3} \xi_3$ (рис. 47). Таким образом, на нашем эллипсоиде имеется ровно четыре омбилические точки, лежащие на плоскости $x_2 = 0$, и в их окрестности линии кривизны ведут себя так же, как и конфокальные конические сечения вблизи их общих фокусов. По этому поводу полезно произвести сравнение с задачей 11 параграфа 49. Омбилические точки эллипсоида связаны с так называемыми «фокальными коническими сечениями» семейства (11). А именно, с помощью предельного перехода $t_1 \rightarrow a_1$ мы получаем из эллипсоидов семейства дважды покрытую внутренность эллипса

$$x_1 = 0, \quad \frac{x_2^2}{A_2^2} + \frac{x_3^2}{A_3^2} = 1; \quad (18)$$

$$A_2^2 = a_1 - a_2, \quad A_3^2 = a_1 - a_3,$$

фокусы которого лежат на третьей оси на расстоянии E от начала, где

$$E^2 = A_3^2 - A_2^2 = a_2 - a_3. \quad (19)$$

В результате предельного перехода $t_2 \rightarrow a_2$ получается дважды покры-

тая внешняя область гиперболы

$$\begin{aligned} x_2 = 0, \quad -\frac{x_1^2}{B_1^2} + \frac{x_3^2}{B_3^2} = 1; \\ B_1^2 = a_1 - a_2, \quad B_3^2 = a_2 - a_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Ее фокусы лежат на третьей оси на расстоянии H от начала, где

$$H^2 = a_1 - a_3. \quad (21)$$

Итак, эта пара фокальных конических сечений является эллипсом и гиперболой, лежащими во взаимно перпендикулярных плоскостях и в силу соотношений $E = B_3$, $H = A_3$ фокусы каждого из обоих конических сечений являются вершинами другого. Таким образом, омбилические точки эллипсоида ($t_1 = \text{const}$) лежат на фокальной гиперболе¹.

Для линейного элемента

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

из (14) получается выражение

$$4 ds^2 = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}{(t_1 - a_1)(t_1 - a_2)(t_1 - a_3)} dt_1^2 + \dots, \quad (22)$$

где два ненаписанных члена получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

В (22) входят только члены с квадратами дифференциалов; это означает ортогональность нашей системы поверхностей. Если мы снова сосредоточим свое внимание на эллипсоиде $t_1 = \text{const}$, то из (22) следует

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{t_2 - t_3}{4} \left\{ \frac{t_2 - t_1}{(t_2 - a_1)(t_2 - a_2)(t_2 - a_3)} dt_2^2 - \right. \\ \left. - \frac{t_3 - t_1}{(t_3 - a_1)(t_3 - a_2)(t_3 - a_3)} dt_3^2 \right\} = (t_2 - t_3) \{ f(t_2) dt_2^2 + g(t_3) dt_3^2 \}. \end{aligned} \quad (23)$$

¹Каждый конус с вершиной на одном из фокальных конических сечений и проходящий через другое является конусом вращения.

Однако, согласно § 56, это есть линейный элемент в форме Лиувилля. Следовательно, линии кривизны на эллипсоиде t_1 образуют сеть Лиувилля. Поэтому, согласно (56,21), на эллипсоиде оказывается возможным *определение геодезических*, что еще в 1839 г. заметил Якоби. При этом в решение входят «гиперэллиптические интегралы».

Конфокальные квадратики были введены для целей небесной механики Лапласом в 1799 г., Ивори (J. Ivory, 1765–1842) в 1809 г. и Гауссом в 1813 г. (Werke, т. V, стр. 19). В 1795 г. Монж нашел линии кривизны на квадратах. Определение всех ортогональных семейств поверхностей в евклидовом R_3 является трудной задачей, которой занимались многие геометры, например, Дарбу в работе «Leçons sur les systèmes orthogonaux ...», 1910 г.¹ Эти вопросы можно хорошо обозреть с точки зрения римановой геометрии².

§ 64. Конформные отображения пространства

Рассмотрим следующее соответствие между точками пространства:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{xx}. \quad (1)$$

Оно называется «*отражением*» в единичной сфере $xx = 1$, или «инверсией» относительно этой сферы. Каждая пара точек x , x^* располагается при этом на полупрямой, проходящей через начало координат, и притом так, что произведение их расстояний от o равно единице. Если точка x приближается к началу o , то в силу (1) x^* удаляется «в бесконечность». Следовательно, преобразование (1) можно искусственно сделать взаимно однозначным без всякого исключения, если ввести единственную *несобственную* точку как образ o^* точки o при отображении (1). Отражение (1) переводит сферы всегда снова в сферы, если только мы причислим к сферам и плоскости, как предельный случай (сферы, проходящие через o^*). В самом деле, уравнение сферы

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4(xx) = 0 \quad (2)$$

переходит снова в уравнение такого же вида:

$$A_0(\mathbf{x}^*\mathbf{x}^*) + A_1x_1^* + A_2x_2^* + A_3x_3^* + A_4 = 0. \quad (3)$$

¹В отношении других сочинений см. E. Salkowsky, «Enzyklopädie», III, т. 9.

²По этому поводу см. также Блашке, «Analytische Geometrie», Wolfenbüttel, 1948 г. Стр. 84–105.

Элементы дуг выражаются друг через друга при преобразовании (1) следующим образом:

$$ds^{*2} = d\mathbf{x}^* d\mathbf{x}^* = \frac{d\mathbf{x} d\mathbf{x}}{(\mathbf{x}\mathbf{x})^2} = \frac{ds^2}{(\mathbf{x}\mathbf{x})^2}. \quad (4)$$

Следовательно, они умножаются на множитель, не зависящий от направления, и потому углы, определяющиеся формулой

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x} \delta \mathbf{x}}{ds \delta s}, \quad (5)$$

остаются неизменными. Итак, отражение (1) служит нетривиальным примером *конформного* преобразования пространства, если только мы рассматриваем *подобные преобразования* как тривиальный пример конформных отображений.

Группа точечных преобразований пространства, порожденная отражениями в сферах и обладающая характерным свойством переводить сферы в сферы, была введена в 1855 г. Мёбиусом под названием «кругового сродства» (Kreisverwandschaft).

Теперь, при надлежащих предположениях о непрерывности, мы докажем теорему, установленную в 1855 г. Лиувиллем:

Каждое конформное преобразование пространства переводит сферы снова в сферы.

Согласно (63,9) и (63,10), каждая поверхность может быть в малом включена в триортогональную систему поверхностей, и так как ортогональность такой системы сохраняется при конформном преобразовании, то эти преобразования переводят линии кривизны в линии кривизны. Тем самым наше утверждение сводится к следующему: сферы являются единственными поверхностями, на которых каждая линия является линией кривизны. Другими словами:

Сферы являются единственными поверхностями (за исключением плоскостей), состоящими только из омбилических точек [7].

Согласно (61,18), такая «омбилическая поверхность» характеризуется тем, что на f существует функция точки c , для которой

$$d\mathbf{a}_3 = c d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Отсюда внешним дифференцированием получаем

$$[dc d\mathbf{x}] = 0, \quad (7)$$

или, подробнее,

$$[dc \, dx_j] = 0; \quad j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Так как среди dx_j имеется два линейно независимых, то из (8) получается

$$dc = 0, \quad c = \text{const}. \quad (9)$$

Для $c = 0$ из (6) следует $a_3 = \text{const}$, и из $a_3 dx = 0$ путем интегрирования мы получаем $a_3 x = \text{const}$, т.е. уравнение плоскости. При постоянном $c \neq 0$, именно $c = \frac{1}{r}$, мы положим

$$y = x - r a_3, \quad (10)$$

и находим тогда $dy = 0$, т.е. $y = \text{const}$, а значит, точка x лежит на сфере с центром y и постоянным радиусом r , что и требовалось доказать.

§ 65. Асимптотические линии

В § 61 асимптотические линии поверхности f были определены уравнением

$$dx \, da_3 = \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1 = \sum c_{ik} \sigma_j \sigma_k = 0. \quad (1)$$

Линия на поверхности, касающаяся в точке x асимптотической линии, но имеющая в x другую соприкасающуюся плоскость, согласно (62,6), обладает в x нулевой кривизной. Поэтому линии (1) можно было бы называть также «*линиями спрямления*» (Wendelinien).

Согласно (62,15), каждая касательная к асимптотической линии имеет в точке соприкосновения касание с f по меньшей мере второго порядка, т.е. может быть названа *соприкасающейся касательной* поверхности, и наоборот; отсюда происходит и немецкое название этих линий Schmieglinien. Соприкасающаяся плоскость асимптотической линии в той точке x , где ее кривизна отлична от нуля, касается в x поверхности f . Если поверхность содержит прямые линии, то они являются асимптотическими линиями поверхности. Таким образом, на линейчатой квадрике прямолинейные образующие являются асимптотическими линиями. С понятием асимптотических касательных тесно связано понятие *сопряженных касательных* в точке x поверхности

(Дю пен, 1813 г.). Пусть точка x описывает линию w на f ; будем искать огибающую касательных плоскостей в точках x :

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mathbf{a}_3 = 0. \quad (2)$$

Дифференцируя вдоль w при постоянном $\mathbf{y}$, получим в силу $\mathbf{a}_3 d\mathbf{x} = 0$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{a}_3 = 0, \quad (3)$$

или, обозначая через $\delta\mathbf{x}$ направляющий вектор $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ касательной прямой,

$$\delta\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = 0. \quad (4)$$

Два касательные направления $d\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{x}$ в точке x , удовлетворяющие этому условию, называются «сопряженными». Условие (4) симметрично. Действительно, если в соответствии с (61,9) мы положим

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= \mathbf{a}_1 \sigma'_1 + \mathbf{a}_2 \sigma'_2, \\ d\mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_1 \omega_2 - \mathbf{a}_2 \omega_1 = \mathbf{a}_1 (c_{21} \sigma_2 + c_{22} \sigma_2) + \mathbf{a}_2 (c_{11} \sigma_1 + c_{12} \sigma_2), \end{aligned} \quad (5)$$

то будем иметь

$$\delta\mathbf{r} d\mathbf{a}_3 = \sigma'_1 \omega_2 - \sigma'_2 \omega_1 = \sum c_{jk} \sigma'_j \sigma_k. \quad (6)$$

Но согласно (61,10), мы имели $c_{12} = c_{21}$, а отсюда и вытекает указанная симметрия выражения (6):

$$\delta\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = d\mathbf{x} \delta\mathbf{a}_3, \quad (7)$$

или

$$\sigma'_1 \omega_2 - \sigma'_2 \omega_1 = \sigma_1 \omega'_2 - \sigma_2 \omega'_1. \quad (8)$$

Так как выражение (6) представляет собой поляризованную квадратичную дифференциальную форму $d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3$, то асимптотические касательные гармонично разделяют сопряженные касательные.

Найдем условие, при котором оба семейства линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на f являются «сопряженными» семействами, т. е. в каждой точке поверхности x касательные к этим линиям, проходящие в направлениях $\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{x}_v$, сопряжены. Из (4) вытекает условие

$$\mathbf{x}_u [\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v]_v = 0. \quad (9)$$

После упрощения оно сведется к равенству нулю определителя

$$(x_u x_v x_{uv}) = 0. \quad (10)$$

Отсюда также очевидна упоминавшаяся выше симметрия. Рассмотрим, в частности, поверхности f , допускающие следующее параметрическое представление:

$$x = y(u) + z(v). \quad (11)$$

Они неоднократно изучались под именем *поверхностей переноса* сначала Монжем, а впоследствии главным образом С. Ли в 1892 г. Так как для поверхностей переноса $x_{uv} = 0$, то согласно (10), их «линии переноса» $u, v = \text{const}$ сопряжены по направлению. К числу поверхностей переноса принадлежит «*поверхность середин хорд*» линии $p(t)$:

$$x = \frac{1}{2}\{p(u) + p(v)\}. \quad (12)$$

Линии кривизны поверхности в общем случае характеризуются тем, что они образуют ортогональную сопряженную сеть.

Если мы рассмотрим на f асимптотическую линию, то вдоль нее $dx da_3 = 0$, и поэтому в силу (62,19)

$$\frac{da_3 da_3}{dx dx} = -K. \quad (13)$$

Но так как для асимптотической линии вектор a_3 перпендикулярен к ее соприкасающейся плоскости, то из (13) и (24,1) следует

$$w^2 = \frac{da_3 da_3}{dx dx} = -K, \quad (14)$$

где w означает кручение асимптотической линии. Это свойство заметили Бельтрами в 1866 г. и Эннепер (А. Еппер) в 1870 г. Согласно (14), асимптотические линии на поверхности постоянной меры кривизны обладают постоянным кручением.

Далее можно установить, что кручения обеих асимптотических линий, проходящих через точку x , имеют противоположные знаки. Действительно, если зеркально отразить поверхность f аномальной плоскости, проходящей через x и касающейся там одной из линий кривизны, то получится поверхность f^* , имеющая с f в x соприкосновение по

меньшей мере второго порядка. Но кручение асимптотических линий в точке x зависит лишь от производных вплоть до второго порядка. Следовательно, поверхности f и f^* имеют асимптотические линии, попарно касающиеся в точке x и обладающие там одинаковым кручением. Но так как при зеркальном отражении знак кручения изменяется, то отсюда и следует справедливость нашего утверждения.

Изучим еще асимптотические линии на поверхностях «параболической кривизны», т. е. на которых $K = 0$ или $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0$. Дискриминант уравнения для определения асимптотических касательных

$$\sum c_{jk}\sigma_j\sigma_k = 0$$

обращается здесь в нуль. Поэтому имеется только одно семейство асимптотических линий. Выберем на f сеть N так, чтобы эти линии совпали с линиями $\sigma_2 = 0$. Тогда $c_{11} = 0$ и также $c_{12} = 0$, т. е. согласно (61,9),

$$\omega_1 = -c_{22}\sigma_2, \quad \omega_2 = 0.$$

Но отсюда, в силу уравнения (61,2) для ω_2 , мы имеем

$$[\omega_1\omega_3] = c_{22}[\omega_2\sigma_2] = 0.$$

Следовательно, вдоль линий $\sigma_2 = 0$ обращается в нуль, наряду с ω_1, ω_2 , также и ω_3 , а значит, в силу (61,1), равны нулю и

$$da_j = a_k\omega_l = a_l\omega_k.$$

Таким образом, линии $\sigma_2 = 0$ являются прямыми, и вдоль каждой из этих прямых касательная плоскость к поверхности f остается неизменной. Поэтому поверхности, на которых $K = 0$, являются огибающими однопараметрического семейства плоскостей, т. е. торсами¹.

Тем самым, при надлежащих предположениях о непрерывности и при учете результатов § 43, показано:

Торсы являются единственными поверхностями, наложимыми в малом на плоскость.

¹Можно предложить и более геометричную форму доказательства. Из $K = 0$ или $[\omega_1\omega_2] = 0$ следует, что сферическое отображение нашей поверхности стягивается в линию (или в точку). Но если все точки некоторой линии поверхности имеют одно и то же сферическое отображение, то вдоль этой линии поверхность касается одной и той же плоскости. Следовательно, искомые поверхности являются огибающими однопараметрического семейства плоскостей (или плоскостями).

В том, что торсы действительно изометричны в малом евклидовой плоскости (Эйлер, Монж, 1771 г.), можно убедиться следующим образом. Ограничимся общим случаем, когда торс состоит из касательных к линии $\mathbf{p}(u)$:

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p}(u) + (v - u)\mathbf{p}'(u).$$

Мы можем выбрать за u длину дуги линии $\mathbf{p}(u)$, тогда $\mathbf{p}'\mathbf{p}' = 1$, $\mathbf{p}'\mathbf{p}'' = 0$, и мы будем иметь

$$d\mathbf{x} = (v - u)\mathbf{p}'' du + \mathbf{p}' dv,$$

$$d\mathbf{x} d\mathbf{x} = (v - u)^2 (\mathbf{p}'' \mathbf{p}'') du^2 + dv^2 = k^2 (v - u)^2 du^2 + dv^2,$$

где k обозначает кривизну линии $\mathbf{p}(u)$. С другой стороны, если мы возьмем плоскую линию, кривизна k которой является той же функцией $k(u)$ ее длины дуги, то получим точно такой же линейный элемент $d\mathbf{x} d\mathbf{x}$. Тем самым изгибаемость в малом доказана.

Каждая линия на поверхности, состоящая из точек уплощения, является плоской. Действительно, пусть в точке поверхности $d\mathbf{a}_3 = 0$. Тогда вдоль рассматриваемой линии вектор $\mathbf{a}_3$ постоянен, и путем интегрирования соотношения $\mathbf{a}_3 d\mathbf{x} = 0$ мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения: $\mathbf{a}_3 \mathbf{x} = \text{const.}$

Вопрос Ли относительно условий, которым должна удовлетворять поверхность, чтобы на ней имелась параметризация, в которой она допускает представление (11), был впервые решен К. Рейдемейстером (1922 г.). Сам Ли с помощью «теоремы» своего соотечественника Абеля определил все поверхности, которые могут быть различными способами представлены как поверхности переноса. Ср. Виртингер (W. Wirtinger, 1865–1945), Monatshefte, т. 46, 1938 г.

§ 66. Асимптотические линии на линейчатых поверхностях

Поверхность, несущая на себе семейство прямых, называется *линейчатой*. Прямолинейные «образующие» дают на ней одно из семейств асимптотических линий. Найдем второе семейство. Зададим поверхность, беря за основу кривую линию $\mathbf{y}(v)$ на этой поверхности и направление $\mathbf{z}(v)$ образующих в точках $\mathbf{y}(v)$. Тогда f будет представлена в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(v) + u\mathbf{z}(v), \quad (1)$$

причем можно считать, что $zz = 1$. Если $z(t)$ — асимптотическая линия на f , то ее соприкасающаяся плоскость в точке x должна совпадать с касательной плоскостью к поверхности в этой же точке, а значит «вектор ускорения» $\frac{d^2x}{dt^2}$ должен линейно разлагаться по векторам x_u, x_v .

Это сводится к равенству нулю определителя

$$(x_{uu}du^2 + 2x_{uv}dudv + x_{vv}dv^2, x_u, x_v) = 0. \quad (2)$$

Если сюда подставить значения из (1) и отбросить решение $dv = 0$, отвечающее образующим, то из (2) получается уравнение

$$(z'zy')du + (y'' + uz'', z, y' + uz')dv = 0. \quad (3)$$

Наложив условие

$$(z'zy') \neq 0, \quad (4)$$

мы исключим торсы, у которых касательная плоскость одна и та же вдоль всей образующей. После этого поверхность называется «косой», и (3) дает нам дифференциальное уравнение вида

$$\frac{du}{dv} = Pu^2 + 2Qu + R, \quad (5)$$

в котором коэффициенты P, Q, R зависят лишь от v . Эти уравнения принято называть именем итальянского иезуита Риккати (J. Riccati, 1676–1754). Из (5) следует: *четыре асимптотические линии $u = u_j$ отсекают на прямолинейных образующих $v = \text{const}$ четверки точек с постоянным «двойным отношением»:*

$$D = \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} : \frac{u_1 - u_4}{u_2 - u_4} = \text{const}. \quad (6)$$

Это вытекает из того, что в силу (5) выражение

$$\frac{d}{dv} \ln D = \frac{u'_1 - u'_3}{u_1 - u_3} - \frac{u'_2 - u'_3}{u_2 - u_3} - \frac{u'_1 - u'_4}{u_1 - u_4} + \frac{u'_2 - u'_4}{u_2 - u_4} \quad (7)$$

обращается в нуль. Действительно, из (5) следует, например,

$$\frac{u'_1 - u'_3}{u_1 - u_3} = P(u_1 + u_3) + 2Q, \quad (8)$$

а отсюда и ясна справедливость нашего утверждения.

В частности, здесь содержится тот известный факт проективной геометрии, что на линейчатой квадрике четыре образующие одного семейства отсекают на двух образующих другого семейства четверки точек с равным двойным отношением.

§ 67. Жесткость овальных поверхностей

Со времен Гаусса многие геометры занимались вопросами изгибания поверхностей, например, вопросом реализации поверхности в нашем евклидовом пространстве, когда известна ее основная квадратичная форма ds^2 . Однако в этой области имеется лишь немного результатов о поверхностях в целом. Прекраснейший из них был найден в 1942 г. Герглотцем (G. Herglotz, род. 1881 г.). Мы сейчас и займемся его выводом.

Область g нашего пространства R_3 называется *выпуклой*, если наряду с каждым двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок. Мы будем также предполагать g *ограниченной*, т.е. расположенной внутри достаточно большого шара. Граница такой области g называется *овальной поверхностью*, если она может быть всюду представлена с помощью функций $x_j(u, v)$, имеющих непрерывные производные вплоть до третьего порядка, и при этом $[x_u x_v] \neq 0$, а полная кривизна K всюду больше нуля.

Тогда справедлива теорема:

Если две овальные поверхности допускают точечное изометрическое отображение друг на друга с сохранением ориентации, то это отображение тривиально, т.е. существует движение, совмещающее первую овальную поверхность со второй, при котором каждая точка переходит в свою соответствующую [8].

Если отказаться от требования «сохранения ориентации», то наряду с движениями войдут и «зеркальные отражения».

Мы начнем доказательство с вывода одной интегральной формулы. Если $\{x; a_1, a_2, a_3\}$ — сопровождающий триэдр поверхности f , то рассмотрим скалярные произведения

$$x a_j = p_j, \quad (1)$$

из которых, в частности, p_3 выражает расстояние от касательной плоскости к f в точке x до начала координат. Дифференцируя (1) и используя (61,1), мы получим

$$\begin{aligned} dp_1 &= p_2 \omega_3 - p_3 \omega_2 + \sigma_1, \\ dp_2 &= p_3 \omega_1 - p_1 \omega_3 + \sigma_2, \\ dp_3 &= p_1 \omega_2 - p_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Возьмем теперь две изометрично соответствующие друг другу односвязные поверхности f, f' , на которых в соответственных точках $\sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_2 = \sigma'_2$, а значит (§ 43), и $\omega_3 = \omega'_3$. Тогда на основании (2) и (61,2) мы получаем

$$[d(p_1\omega'_1 + p_2\omega'_2)] = p_3([\omega'_1\omega_2] + [\omega_1\omega'_2]) + [\sigma_1\omega'_1] + [\sigma_2\omega'_2]. \quad (3)$$

Пусть E и E' — две овальные поверхности, изометрично соответствующие друг другу с сохранением ориентации. Рассечем E на два односвязных куска f_1, f_2 . Мы замечаем, что согласно (61,3) и (61,6), три формы

$$p_1\omega'_1 + p_2\omega'_2, \quad [\omega'_1\omega_2] + [\omega_1\omega'_2], \quad [\sigma_1\omega'_1] + [\sigma_2\omega'_2],$$

входящие в равенство (3), не зависят от выбора криволинейных координат u, v и осей $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, если только мы направляем нормальные векторы $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}'_3$ во внешнюю сторону поверхностей E, E' и выбираем u, v на E и E' так, что

$$(\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \mathbf{a}_3) = (\mathbf{x}'_u \mathbf{x}'_v \mathbf{a}'_3) > 0. \quad (4)$$

Соотношения (4) выражают предположенное выше сохранение ориентации при отображении $x \rightarrow x'$. Применяя соотношение (3) к f_1 и f_2 и учитывая, что при сложении интегралы по границе уничтожаются*, мы получим интегральную формулу Г е р г л о т ц а :

$$-\int_E p_3([\omega'_1\omega_2] + [\omega_1\omega'_2]) = \int_E ([\sigma_1\omega'_1] + [\sigma_2\omega'_2]) = 2 \int_E H'[\sigma_1\sigma_2]. \quad (5)$$

Если мы рассмотрим частный случай, когда все соответственные точки овальных поверхностей E и E' совпадают, то получим

$$-\int_E p_3[\omega_1\omega_2] = \frac{1}{2} \int_E ([\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_2]) = \int_E H[\sigma_1\sigma_2]. \quad (6)$$

Эту формулу нашел еще примерно в 1900 г. выдающийся исследователь в области теории чисел и геометрии Г. Минковский (1864–1909). Она означает, что *интеграл от средней кривизны овальной поверхности*

$$M = \int_E H[\sigma_1\sigma_2], \quad (7)$$

*Предполагается, что для каждой из областей вычисляется интеграл $\int [d(p_1\omega'_1 + p_2\omega'_2)]$ и применяется формула Гаусса – Грина.

введенный по существу в 1840 г. Штейнером (1796–1863), с точностью до числового множителя равен среднему значению расстояний от касательных плоскостей до начала:

$$-\frac{1}{4\pi}M = \frac{1}{4\pi} \int_E p_3[\omega_1\omega_2] = \frac{1}{4\pi} \int_E p_3K[\sigma_1\sigma_2]. \quad (8)$$

Вернемся теперь снова к общему случаю двух овалых поверхностей E, E' . Из формул (5), (6), (7) получается соотношение

$$-\int_E p_3[\omega_1 - \omega'_1, \omega_2 - \omega'_2] = 2(M - M'), \quad (9)$$

если заметить, что, согласно Гауссу (§ 43),

$$[\omega_1\omega_2] = [\omega'_1\omega'_2] = K[\sigma_1\sigma_2]. \quad (10)$$

Мы можем теперь прийти к выводам о знаке левой части равенства (9). Если выбрать начало o внутри E , то прежде всего мы будем иметь

$$p_3 = \mathbf{x}\mathbf{a}_3 > 0, \quad (11)$$

так как $\mathbf{a}_3$ должен быть вектором *внешней* нормали. Затем, в силу предположения $K > 0$, квадратичные формы в переменных σ_1, σ_2 :

$$d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = \sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1, \quad d\mathbf{x}' d\mathbf{a}'_3 = \sigma_1\omega'_2 - \sigma_2\omega'_1 \quad (12)$$

являются положительно определенными. Поэтому форма

$$(d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3) - h(d\mathbf{x}' d\mathbf{a}'_3) = \sigma_1(\omega_2 - h\omega'_2) - \sigma_2(\omega_1 - h\omega'_1) \quad (13)$$

будет также положительно определенной при $h = 0$, но при возрастании h в конце концов потеряет это свойство¹.

¹Для $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$ мы имеем

$$d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 = -\frac{1}{r}, \quad d\mathbf{x}' d\mathbf{a}'_3 = -\frac{1}{r'},$$

если точки $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{a}_3, \mathbf{y}' = \mathbf{x}' + r'\mathbf{a}'_3$ являются центрами кривизны соответствующих нормальных сечений.

Следовательно, ее дискриминант*

$$D(h) = \frac{[\omega_1 - h\omega'_1, \omega_2 - h\omega'_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} \quad (14)$$

имеет корень $c > 0$. Но так как, согласно Гауссу,

$$[\omega_1\omega_2] = [\omega'_1\omega'_2] = K[\sigma_1\sigma_2], \quad (15)$$

то другой корень будет $\frac{1}{c}$, и мы получим, таким образом, тождество относительно h :

$$D(h) = \frac{[\omega_1 - h\omega'_1, \omega_2 - h\omega'_2]}{[\sigma_1\sigma_2]} = K(h - c) \left(h - \frac{1}{c} \right). \quad (16)$$

Отсюда при $h = 1$ мы будем иметь в силу $c > 0$, $K > 0$:

$$[\omega_1 - \omega'_1, \omega_2 - \omega'_2] = -\frac{(1 - c)^2}{c} K[\sigma_1\sigma_2] \leq 0. \quad (17)$$

При этом равенство $D(1) = 0$ может выполняться лишь для $c = 1$, что влечет за собой равенства

$$\omega_1 = \omega'_1, \quad \omega_2 = \omega'_2. \quad ** \quad (18)$$

Из (9), (11), (17) следует

$$M - M' \geq 0. \quad (19)$$

Но так как овалы поверхности E и E' равноправны, то таким же точно образом можно вывести неравенство $M' - M \geq 0$ и, следовательно, должно быть

$$M = M'. \quad (20)$$

* См. (61, 12).

** Так как обе квадратичные формы (12) положительно определенные, то линейным преобразованием переменных σ_1, σ_2 их можно одновременно привести к виду

$$dx \, da_3 = c\xi^2 + \frac{1}{c}\eta^2, \quad dx' \, da'_3 = \xi^2 + \eta^2.$$

Теперь ясно, что при $c = 1$ обе формы (12) совпадают. Но если у двух поверхностей совпадают первые и вторые квадратичные формы, то из (12) следует, что $\omega_1 = \omega'_1$, $\omega_2 = \omega'_2$.

Наконец, отсюда в силу (9), (11), (17) и (18) следует справедливость нашего утверждения, а именно существование движения, переводящего E в E' и совмещающего соответственные точки x, x' .

Это же доказательство остается применимым и в предельном случае, когда овальные поверхности E, E' переводятся друг в друга «бесконечно малой деформацией». Этот случай мы еще рассмотрим в конце § 68.

Мы не будем здесь затрагивать вопроса о том, всегда ли можно реализовать в евклидовом пространстве R_3 замкнутую поверхность с $K > 0$ и с заданной наперед метрикой, т. е. вопроса *существования* (Г. Вейль, Герглотц, Блашке, и особенно, Каччиопполи (R. Caccioppoli)); вопрос *единственности* только что рассмотрен [9].

§ 68. Деформации поверхности

Рассмотрим теперь семейство поверхностей f_w , зависящих от одного переменного w . Тогда мы можем задать точку x поверхности f_w , с помощью векторной функции

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w), \quad (1)$$

причем из трех ее криволинейных координат на f_w изменяются только u и v . Частные производные по w мы будем обозначать точкой сверху. Так, например, если на f_w задана пфаффова форма

$$\omega = p(u, v, w) du + q(u, v, w) dv, \quad (2)$$

то мы пишем

$$\dot{\omega} = \frac{\partial p}{\partial w} du + \frac{\partial q}{\partial w} dv. \quad (3)$$

Обозначим затем дифференциал функции f на поверхности f_w через

$$df(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (4)$$

Тогда для каждой поверхности f_w имеют место формулы (61,1), (61,2), и мы положим, кроме того,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_1 r_1 + \mathbf{a}_2 r_2 + \mathbf{a}_3 r_3, \\ \dot{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{a}_2 q_3 - \mathbf{a}_3 q_2, \quad \dot{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_3 q_1 - \mathbf{a}_1 q_3, \quad \dot{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_1 q_2 - \mathbf{a}_2 q_1. \end{aligned} \quad (5)$$

После этого из (61,1) и (5) следует

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}_1(\dot{\sigma}_1 - q_3\sigma_2) + \mathbf{a}_2(\dot{\sigma}_2 + q_3\sigma_1) + \mathbf{a}_3(q_1\sigma_2 - q_2\sigma_1) = \\ &= \mathbf{a}_1(dr_1 + r_1\omega_2 - r_2\omega_3) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Использованная здесь перестановочность обоих дифференцирований сводится к тому, что если мы положим $u = u(t)$, $v = v(t)$, то

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t \partial w} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial w \partial t}.$$

Из равенства (6) следует

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 - q_3\sigma_2 &= dr_1 + r_3\omega_2 - r_2\omega_3, \\ \dot{\sigma}_2 + q_3\sigma_1 &= dr_2 + r_1\omega_3 - r_3\omega_1, \\ q_1\sigma_2 - q_2\sigma_1 &= dr_3 + r_2\omega_1 - r_1\omega_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Точно так же, находя двумя способами $d\dot{\mathbf{a}}_j$ и сравнивая результаты, получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= dq_1 + q_3\omega_2 - q_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= dq_2 + q_1\omega_3 - q_3\omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= dq_3 + q_2\omega_1 - q_1\omega_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Если мы положим

$$\mathbf{v} = q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + q_3 \mathbf{a}_3, \quad (9)$$

то из (61,1) и (8) следует

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}_1\dot{\omega}_1 + \mathbf{a}_2\dot{\omega}_2 + \mathbf{a}_3\dot{\omega}_3. \quad (10)$$

Элемент площади φ поверхности f_w равен

$$\varphi = [\sigma_1\sigma_2]; \quad (11)$$

отсюда посредством частного дифференцирования по w находим

$$\dot{\varphi} = [\dot{\sigma}_1\sigma_2] + [\sigma_1\dot{\sigma}_2]. \quad (12)$$

Если мы здесь заменим $\dot{\sigma}_j$ их выражениями из (7) и преобразуем правую часть с помощью условий интегрируемости (61,2), то получим

$$\dot{\varphi} = [d(r_1\sigma_2 - r_2\sigma_1)] - r_3([\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_2]). \quad (13)$$

Отсюда получается выражение для *вариации меры площади поверхности* f :

$$\dot{A} = \int_f \dot{\varphi} = \int_{r(f)} (r_1 \sigma_2 - r_2 \sigma_1) - \int_f r_2 ([\sigma_1 \omega_1] + [\sigma_2 \omega_2]), \quad (14)$$

или в силу (61,27)

$$\dot{A} = \int_{r(f)} (r_1 \sigma_2 - r_2 \sigma_1) - 2 \int_f r_3 H \varphi. \quad (15)$$

Эта формула берет начало от Гаусса с 1830 г. (Werke, т. 5, стр. 65). Ее вывод можно было бы упростить, распространив надлежащим образом аппарат пфаффовых форм на случай трех переменных¹.

В силу равенств (5) и соотношения $d\mathbf{x} = \sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2$ криволинейный интеграл (15) можно записать также следующим образом:

$$\int_{r(f)} (r_1 \sigma_2 - r_2 \sigma_1) = \int_{r(f)} (\dot{\mathbf{x}}, d\mathbf{x}, \mathbf{a}_3). \quad (16)$$

Дальнейшие вычисления сделаем в предположении, что соответствие между точками поверхностей f_w с равными значениями u, v является *изометрическим*, и что мы, следовательно, имеем дело с *частным случаем изгибания* поверхности f_w .

¹Если мы поступим так же, как и в примечании к § 26, где σ и τ означают теперь пфаффовы формы в переменных u, v, w с условиями $d_1 w = d_2 w = 0, d_3 u = d_3 v = 0$, то получим

$$[d\sigma_1 \sigma_2] = [\sigma_3 \tau_{31} \sigma_2] - [\sigma_3 \tau_{32} \sigma_1],$$

или, подробнее,

$$\begin{vmatrix} d_1 & \sigma_1(d_1) & \sigma_2(d_1) \\ d_2 & \sigma_1(d_2) & \sigma_2(d_2) \\ d_3 & \sigma_1(d_3) & \sigma_2(d_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \tau_{31}(d_1) & \sigma_2(d_1) \\ 0 & \tau_{31}(d_2) & \sigma_2(d_2) \\ \sigma_3(d_3) & \tau_{31}(d_3) & \sigma_2(d_3) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \tau_{32}(d_1) & \sigma_1(d_1) \\ 0 & \tau_{32}(d_2) & \sigma_1(d_2) \\ \sigma_3(d_3) & \tau_{32}(d_3) & \sigma_1(d_3) \end{vmatrix},$$

так как $\sigma_3(d_1) = \sigma_3(d_2) = 0$. Отсюда

$$d_3 [\sigma_1 \sigma_2] - [d\{\sigma_1(d_3) \sigma_2 - \sigma_2(d_3) \sigma_1\}] = -2H \sigma_3(d_3) [\sigma_1 \sigma_2],$$

или, на основании интегральной формулы Гаусса,

$$d_3 \iint [\sigma_1 \sigma_2] = \oint \{\sigma_1(d_3) \sigma_2 - \sigma_2(d_3) \sigma_1\} - 2 \iint H \sigma_3(d_3) [\sigma_1 \sigma_2].$$

Тогда справедливы равенства

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = \dot{\omega}_3 = 0. \quad (17)$$

Далее, из (8) следует

$$dq_3 = q_1\omega_2 - q_2\omega_1, \quad (18)$$

а из третьего условия интегрируемости (61,2) с учетом равенств (17) получается соотношение

$$[\sigma_1\dot{\omega}_2] + [\dot{\omega}_1\sigma_2] = 0. \quad (19)$$

Подставляя сюда значения ω_j из (8), мы найдем

$$[d(q_1\sigma_2 - q_2\sigma_1)] = 2Hq_3\varphi. \quad (20)$$

Из (18) и (20) получается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для определения q_3 :

$$\left[d \left\{ \frac{[dq_3\omega_2]}{[\omega_1\omega_2]} \sigma_1 + \frac{[\omega_1 dq_3]}{[\omega_1\omega_2]} \sigma_2 \right\} \right] = 2Hq_3\varphi. \quad (21)$$

Подсчитаем еще внешний дифференциал определителя $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, d\mathbf{v})$. В легко понятных обозначениях находим:

$$[d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, d\mathbf{v})] = [(d\mathbf{x}, \mathbf{v}, d\mathbf{v})] + [(\mathbf{x}, d\mathbf{v}, d\mathbf{v})]. \quad (22)$$

Подставляя сюда значения

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{a}_1\sigma_1 + \mathbf{a}_2\sigma_2, & \mathbf{x} &= \mathbf{a}_1p_1 + \mathbf{a}_2p_2 + \mathbf{a}_3p_3, \\ d\mathbf{v} &= \mathbf{a}_1\dot{\omega}_1 + \mathbf{a}_2\dot{\omega}_2, & \mathbf{v} &= \mathbf{a}_1q_1 + \mathbf{a}_2q_2 + \mathbf{a}_3q_3, \end{aligned} \quad (23)$$

мы получим, с учетом (19), простой результат:

$$[d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, d\mathbf{v})] = 2p_3[\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2]. \quad (24)$$

Если поверхность f_w односвязна, то отсюда

$$\int_{r(f_w)} (\mathbf{x}\mathbf{v} d\mathbf{v}) = 2 \int_{f_w} p_3[\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2]. \quad (25)$$

Поэтому для овальной поверхности E

$$\int_E p_3 [\dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2] = 0, \quad (26)$$

что следует также из (67,9) и (67,20). Из этого результата вытекает «невозможность бесконечно малых изгибаний» овальной поверхности. В самом деле, из условий

$$[\omega_1 \omega_2] > 0, \quad [\omega_1 \dot{\omega}_2] + [\dot{\omega}_1 \omega_2] = 0 \quad (27)$$

следует, что

$$[\dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2] \leq 0, \quad (28)$$

и равенство может достигаться лишь при $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2 = 0$.^{*} Отсюда и из соотношения (26) при условии $p_3 > 0$ следует жесткость овальной поверхности: $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$.

Эта «жесткость в бесконечно малом» не вытекает, как нечто само собой разумеющееся, из жесткости в целом, с которой мы имели дело в § 67. Это можно пояснить на примере двух стержней AB и BC ,

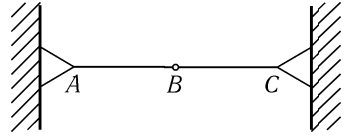


Рис. 48

^{*} Положим $\omega_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2$, $\omega_2 = c\sigma_1 + d\sigma_2$. Тогда в силу (61,9) $a + d = 0$. Квадратичная форма

$$dx \, da = \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1 = c\sigma_1^2 - 2a\sigma_1 \sigma_2 - b\sigma_2^2$$

будет положительно определенной, и следовательно,

$$a^2 + bc < 0. \quad (I)$$

Так как, далее, $\frac{[\omega_1 \omega_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]} = K$, то, дифференцируя обе части этого равенства по w , получаем $[\omega_1 \dot{\omega}_2] + [\dot{\omega}_1 \omega_2] = 0$. Из этого условия следует $a\dot{d} - b\dot{c} + d\dot{a} - c\dot{b} = 0$, или с учетом $a + d = 0$, $\dot{a} + \dot{d} = 0$,

$$c\dot{b} + b\dot{c} + 2a\dot{a} = 0. \quad (II)$$

Положим теперь $a = y_1$, $b = y_2$, $c = y_3$; $\dot{a} = z_1$, $\dot{b} = z_2$, $\dot{c} = z_3$ и будем смотреть на y_j и x_j , как на однородные координаты двух точек y и z в проективной плоскости. Зададим в этой плоскости конику $x_1^2 + x_2 x_3 = 0$. Тогда из (I) следует, что точка y лежит внутри этой коники, а из (II) вытекает, что y и z полярно сопряжены относительно коники, так что точка z лежит вне коники (исключение здесь может представиться только в том случае, если одновременно $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = \dot{d} = 0$). Поэтому $z_1^2 + z_2 z_3 \geq 0$, или $\dot{a}^2 + \dot{b}\dot{c} \geq 0$. Отсюда и следует, что $[\dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2] \leq 0$, и что равенство выполняется лишь при условии $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$.

укрепленных с помощью шарниров в точках A и C и соединенных друг с другом в B также с помощью шарнира (рис. 48). Такая «стержневая конструкция» не допускает никаких конечных движений, но допускает «бесконечно малые». В самом деле, это — «шаткая» конструкция [10].

Приведенное здесь доказательство жесткости овальных поверхностей «в бесконечно малом» было предложено Г. Вейлем и мной в 1912, 1917, 1921 гг.

§ 69. Задачи, теоремы

Мы начнем с формул, устанавливающих связь с другими способами изложения теории поверхностей.

1. Основные формулы Гаусса. Если, подобно Гауссу, исходить из квадратичных дифференциальных форм поверхности f :

$$\begin{aligned} + d\mathbf{x} d\mathbf{x} &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ - d\mathbf{a} d\mathbf{x} &= L du^2 + 2M du dv + N dv^2, \end{aligned} \quad (1)$$

то прежде всего получается следующее выражение для меры кривизны:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (2)$$

Можно вывести следующие «деривационные уравнения» ($\mathbf{a} = \mathbf{a}_3$):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_u &= \frac{(FM - LN)\mathbf{x}_u + (FL - EM)\mathbf{x}_v}{EG - F^2}, \\ \mathbf{a}_v &= \frac{(FN - GM)\mathbf{x}_u + (FM - EN)\mathbf{x}_v}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (3)$$

(Вейнгартен), 1861 г., а также

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L\mathbf{a}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + M\mathbf{a}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + N\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Входящие сюда величины Γ называются «символами Кристоффеля вто-

рого рода» (ср. в дальнейшем 4). Они выражаются через E, F, G :

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{+GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2W^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2W^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2W^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-FG_u + 2GF_v - GG_u}{2W^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{+EG_u - 2FF_v + FG_u}{2W^2},\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$EG - F^2 = W^2 > 0. \quad (6)$$

В качестве условий интегрируемости из (3) и (4) получается прежде всего уравнение (2), совместно с (49,2), а затем — часто употребляемые уравнения, названные именами Майнард и (G. Mainardi, 1800–1879), 1857 г. и Кодаци (D. Codazzi, 1824–1873), 1868 г., которые по аналогии с (49,4) можно представить в виде (Штуди):

$$\begin{aligned}& (EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0, \\ & -(EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) \\ & (EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0, \\ & -(EN - 2FM + GL)(F_v - G_u)\end{aligned}\quad (7)$$

Со времени «Disquisitiones» Гаусса формулы (4) обычно принимаются за исходный пункт теории поверхностей.

2. Основные формулы для линий кривизны. В частном случае, когда линии $u, v = \text{const}$ являются линиями кривизны, мы имеем $F = M = 0$ и получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}dx dx &= E du^2 + G dv^2, & -da dx &= L du^2 + N dv^2, \\ K &= \frac{LN}{EG} = -\frac{L}{2W} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{W} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{W} \right\}, & W^2 &= EG; \\ 2L_v &= \frac{EN + GL}{EG} E_v, & 2N_u &= \frac{EN + GL}{EG} G_u.\end{aligned}\quad (8)$$

3. Тензорный способ записи. Введем теперь вместо u, v обозначения u^1, u^2 (верхние значки не являются показателями степени), и запишем линейный элемент в виде

$$ds^2 = dx dx = g_{jk} du^j du^k. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование от 1 до 2 по одинаковым индексам, стоящим сверху и снизу. Пусть, далее, $g_{jk} = g_{kj}$, так что в соответствии с (1) мы имеем

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G. \quad (10)$$

Введем затем «символы Кристоффеля первого рода»:

$$\Gamma_{jk, l} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} \right\} = \Gamma_{kj, l}. \quad (11)$$

Пусть, далее, g^{jk} образуют матрицу, обратную к g_{jk} , так что

$$g^{js} g_{sk} = g_k^j = 0 \quad \text{или} \quad 1, \quad (12)$$

в зависимости от того, будет ли $j \neq k$ или $j = k$. Отсюда мы получаем «символы Кристоффеля второго рода»:

$$\Gamma_{jk}^r = \Gamma_{kj}^r, \quad \Gamma_{jk}^r = g^{rs} \Gamma_{jk, s}. \quad (13)$$

Тогда дифференциальные уравнения геодезических на f будут таковы:

$$\frac{d^2 u^r}{ds^2} + \Gamma_{jk}^r \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0; \quad g_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 1. \quad (14)$$

Назовем систему величин v^j , преобразующуюся при замене криволинейных координат v^j , так же, как и du^j , *контравариантным вектором*. Его направление на f и его длину v мы определим следующим образом:

$$\lambda v^j = du^j, \quad v^2 = g_{ij} v^i v^j; \quad (15)$$

затем мы назовем величины

$$v_j = g_{jk} v^k \quad (16)$$

«ковариантными координатами» этого вектора. Согласно Кристоффелю (1869 г.), образуем из v_j *ковариантную производную, соответствующую фундаментальной форме* (9):

$$v_{jk} = \frac{\partial v_j}{\partial u^k} - \Gamma_{jk}^s v_s. \quad (17)$$

При этом v_{jk} является «тензором» второй валентности, т. е. выражение

$$v_{jk} w^j r^k,$$

где w, r — два произвольных вектора, остается инвариантным при введении новых криволинейных координат. После этого «параллельное перенесе-

ние» вектора v в направлении du^j можно определить из условий

$$dv_j - \Gamma_{jk}^s v_s du^k = 0, \quad (18)$$

или

$$v_{jk} du^k = 0. \quad (19)$$

Для контравариантных координат вектора эти условия выглядят так:

$$dv^j + \Gamma_{ks}^j v^k du^s = 0. \quad (20)$$

Если h_{jk} — тензор, то изменение величины $h_{jk} v^j w^k$ при условии, что v^j, w^k переносятся параллельно, равно

$$d(h_{jk} v^j w^k) = h_{jks} v^j w^k du^s, \quad (21)$$

где

$$h_{jks} = \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^s} - \Gamma_{js}^r h_{rk} - \Gamma_{sk}^r h_{jr}. \quad (22)$$

h_{jks} называется ковариантной производной тензора h_{jk} ; h_{jks} также является тензором, т. е. величина

$$h_{jks} p^j q^k r^s \quad (23)$$

является скалярным инвариантом при любом выборе векторов p, q, r . В частности, ковариантная производная фундаментального тензора равна нулю:

$$g_{jks} = 0. \quad (24)$$

Если f — скаляр и его полный дифференциал равен

$$df = f_j du^j, \quad (25)$$

то говорят, что система величин

$$f_j = \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad (26)$$

определяет ковариантную производную первого порядка от f . Затем, согласно (17), можно образовать тензор второй ковариантной производной и установить его симметрию: $f_{jk} = f_{kj}$. Однако тензор третьей производной от f , образованный из тензора второй производной по способу (22), в общем случае уже не будет симметричен, а будет удовлетворять соотношению

$$f_{jkr} - f_{jrk} = (g_{jr} f_k - g_{jk} f_r) K, \quad (27)$$

где K означает меру кривизны фундаментальной формы (9). Все вышесказанное, кроме (27), справедливо и в случае n переменных $u^1, u^2, \dots, u^n$. Распространению этого «тензорного исчисления» способствовали многие геометры, например Кристоффель (1869 г.) и Риччи (1887 г.).

4. Дифференциальные параметры в тензорной записи. С помощью введенных выше производных дифференциальные параметры Бельтрами выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla f &= g^{jk} f_j f_k, \\ \nabla(f, f') &= g^{jk} f_j f'_k, \\ \Delta f &= g^{jk} f_{jk}.\end{aligned}\tag{28}$$

5. Основные уравнения поверхностей в тензорном виде. Если $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки на поверхности, $\mathbf{a}$ — единичный вектор нормали к поверхности в этой точке, то деривационные уравнения выглядят следующим образом:

$$\mathbf{x}_{jk} = -h_{jk} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_j = -h_j^s \mathbf{x}_s.\tag{29}$$

При этом введены обозначения

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} d\mathbf{x} &= g_{ij} du^i du^j, & -d\mathbf{a} d\mathbf{x} &= h_{jk} du^j du^k, \\ h_{jk} &= g_{js} h_s^k; & g_{jk} &= g_{kj}, \quad h_{jk} = h_{kj}.\end{aligned}\tag{30}$$

Условия интегрируемости уравнений (29) таковы:

$$\begin{aligned}\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} &= K, \\ h_{jkr} &= h_{jrk}.\end{aligned}\tag{31}$$

Первое из этих условий заменит (2), а два последних эквивалентны (7).

Хотя этот вид основных уравнений теории поверхностей в смешанных векторно-тензорных обозначениях и короче уравнений (41,13), (41,14), записанных с помощью пфаффовых форм, однако он, пожалуй, хуже поддается геометрическому истолкованию и несколько более абстрактен, так как здесь одновременно применяются различные векторные обозначения. Я не знаю, когда впервые появился этот способ изложения. Например, он был использован в моей дифференциальной геометрии II за 1923 г. и в написанной Бервальдом статье энциклопедии, появившейся в том же году.

Дальше следуют некоторые теоремы об овальных поверхностях. Это — замкнутые поверхности, окружающие выпуклую область нашего пространства, поверхности, о которых мы предположим, что они всюду гладкие и допускают такое представление в малом с помощью криволинейных координат, что выполняются условия параграфа 41.

6. Формула Штейнера для объема параллельных поверхностей. Пусть e_0 — овальная поверхность и e_h — параллельная ей поверхность,

проходящая извне на расстоянии h . Она снова является овальной поверхностью. Тогда, согласно Штейнеру, Werke, т. 2 (1840 г.), стр. 171–176, для объема e_h справедлива формула

$$J_h = J_0 + A_0 h + M_0 h^2 + \frac{1}{3} S_0 h^3. \quad (32)$$

Здесь A_0 — площадь e_0 , M_0 — интегральная средняя кривизна e_0 :

$$M_0 = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dA = \int p dS, \quad (33)$$

где

$$dA = [\sigma_1 \sigma_2], \quad dS = [\omega_1 \omega_2], \quad (34)$$

а $p > 0$ — расстояние от касательной плоскости до начала (лежащего внутри e_0); $S_0 = 4\pi$ — интегральная гауссова кривизна t_0 .^{*} Штейнер предложил наглядный вывод этой формулы для выпуклых многогранников. Она дала повод к многочисленным исследованиям, например, к учению Брунна (H. Brunn, 1862–1939) и Г. Минковского, высшим достижением которого являются неравенства

$$M^2 \geq 4\pi A, \quad A^2 \geq 3JM, \quad (35)$$

закрывающие в себе изопериметрическое неравенство Шварца:

$$A^3 \geq 36\pi J^2. \quad (36)$$

Данные по этому предмету находятся в книге Блашке, Kreis und Kugel, 1916 г., и в книге T. Bonnesen, W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, 1934 г. В 1941 г. Боль (G. Bol) установил, при каких условиях во втором из соотношений (35) имеет место равенство, Hamburg. Abh., т. 15 (1943), стр. 37–56. Распространения формулы (32) на случай невыпуклых областей были предложены Сантало и мной в работе Блашке, Vorlesungen über Integralgeometrie т. 2 (1937 г.). Обобщения на случай неевклидовых пространств получены Герглотцем, Hamburg. Abh., т. 15 (1943 г.), стр. 165–177 [11].

7. Еще раз о поверхностях встречи. Каждая поверхность встречи (§ 59,7) с $K > 0$ является овальной поверхностью с центром. Для этого достаточно показать, что отображение $x \rightarrow x'$ изометрично, и затем применить результаты § 67.

^{*}Так как $K dA$ есть элемент площади сферического отображения овальной поверхности e_0 , то $\int_{e_0} K dA = 4\pi$.

8. Теорема Функа. Не существует непрерывных деформаций сферы, при которых она остается поверхностью встречи. *P. Funk*, Math. Z., т. 16, 1923, стр. 159–162.

9. Теорема Кристоффеля об овальных поверхностях. Пусть k — сферическое отображение овальной поверхности e . Если сумма главных радиусов кривизны этой поверхности $r_1 + r_2$ задана как функция точки на K , то тем самым овальная поверхность e определена однозначно с точностью до параллельного смещения. Функция $r_1 + r_2$ на k может быть задана произвольно, удовлетворяя лишь условиям

$$\int_k (r_1 + r_2) a_j dS = 0; \quad j = 1, 2, 3, \quad (37)$$

где dS означает элемент площади единичной сферы k в точке с координатами a_j . При доказательстве используются сферические функции. Кристоффель, Werke, т. 1, 1865, стр. 162–177.

10. Теорема Г. Минковского об овальных поверхностях. Аналогично, хотя и сложнее, обосновывается следующий результат Минковского, связанный с пунктом 6: если на сферическом отображении k овальной поверхности e задать кривизну K этой поверхности, то тем самым e определяется однозначно с точностью до параллельного смещения. При этом $K(a)$ удовлетворяет лишь условиям

$$\int_k a_j \frac{dS}{K} = 0; \quad j = 1, 2, 3. \quad (38)$$

Иными словами, при выполнении условий (38) для данного $K(a) > 0$ существует овальная поверхность (единственная с точностью до параллельного смещения). Этот результат содержит в себе теорему о неизгибаемости сферы. Минковский, Werke, т. 2, 1903, § 10, стр. 230–276. Гильберт, Integralgleichungen, 1912, гл. 19. Дальнейшие исследования произв. Д. Александров. Аналогичные вопросы о замкнутых, ориентируемых, но не выпуклых поверхностях, по-видимому, еще не разрабатывались [12].

11. Овальные поверхности постоянной ширины. Пусть p — расстояние от начала координат до касательной плоскости к овальной поверхности e в точке с внешней нормалью a . Тогда условие

$$p(+a) + p(-a) = 2c = \text{const} \quad (39)$$

является условием «постоянной ширины» овальной поверхности. Согласно (33), для такой овальной поверхности

$$M = 4\pi c. \quad (40)$$

Если около e описать цилиндр, то длина его ортогонального сечения $2\pi c$ не зависит от направления образующих цилиндра. Согласно Минковскому, это свойство характеризует овальные поверхности постоянной ширины. Werke, т. 2 (1904), стр. 277–279.

12. Теорема Герглотца. Для каждой овальной поверхности e можно определить другую овальную поверхность e^* так, что длина ортогонального сечения, описанного около e цилиндра с образующими, параллельными вектору a , равна площади ортогонального сечения цилиндра с тем же направлением образующих, описанного около e^* .

13. Теорема Бонне о диаметре овальной поверхности. Если мера кривизны K овальной поверхности удовлетворяет условию

$$K \geq \frac{1}{a^2}, \quad (41)$$

то ее диаметр (наибольшее расстояние между двумя ее точками) удовлетворяет неравенству

$$D < \pi a. \quad (42)$$

Эта граница не может быть улучшена. Если предположить существование кратчайшего пути на овальной поверхности, то неравенство (42) легко следует из теорем Штурма (§ 59,6). Бонне, 1855 г. Если r — «радиус внутреннего шара» нашей овальной поверхности (радиус наибольшего содержащегося внутри нее шара), то

$$D < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 s} \, ds. \quad (43)$$

Эта граница также не может быть улучшена. Бласске, Kreis und Kugel, 1916, § 25, 26 [13].

14. Огибающие плоскостей, ортогональных образующим цилиндров, описанных около овальной поверхности. Если провести две такие плоскости, расстояние которых до фиксированной точки равно площади ортогонального сечения цилиндра, то эти плоскости снова огибают овальную поверхность. Выбранная точка является ее центром. Бласске, Kreis und Kugel, 1916, стр. 148.

15. Овальные поверхности вращения с замкнутыми геодезическими. Пусть в плоскости дан овал e , обладающий осью симметрии g , и существует такая окружность k , что каждые две параллели к g высекают на g и на k дуги, суммы длин которых равны. Тогда, вращая e вокруг g , мы получим овальную поверхность, содержащую лишь замкнутые геодезические. Дарбу, Surfaces, т. 3, № 580.

16. Обращение теоремы Архимеда. Пусть овальная поверхность e имеет следующее общее со сферой свойство: если взять слой поверхности e , заключенный между двумя параллельными плоскостями (пересекающими e), то площадь этого слоя с точностью до постоянного множителя k равна расстоянию h между плоскостями (при этом k может зависеть от наклона плоскостей). Тогда e является сферой. Б л а ш к е, Ш т а м м (O. Stamm).

Бросим теперь взгляд на два важных предмета.

17. Замкнутые геодезические. Пусть на овальной поверхности e лежит замкнутая линия r без двойных точек, сферическое отображение r^* которой делит единичную сферу на две равновеликие по площади части. Если длина такой линии r минимальна, то r является замкнутой геодезической на e ; Пу а н к а р е, 1905 г. Дальнейшей разработкой этих идей, пограничных между топологией и вариационным исчислением, занимались Б и р к г о ф ф (G. D. Birkhoff, 1884–1944) и М о р с (Marston Morse); см. Marston Morse, The calculus of variations in the large, New York, 1934, а также Зейферт (H. Seifert) и Трельфалль (W. Threlfall, 1888–1949), Variationsrechnung in Grossen, Leipzig, 1938. Отметим также новые исследования Люстерника [14].

18. Омбилическая точка поверхности. Одним из наиболее привлекательных вопросов дифференциальной геометрии, который рассматривался неоднократно, но все еще не исчерпан до конца, является вопрос о (топологическом) поведении линий кривизны в окрестности изолированной омбилической точки (§ 61) на аналитической поверхности f положительной меры кривизны. Старые исследования по этому вопросу изложены в книге Д а р б у, Surfaces, т. 4, 1896, стр. 448–465. Особенно важны статьи Гу л л ь - с т р а н д а (A. Gullstrand), исходящие из вопросов оптики: Allgemeine Theorie der monochromatischen Abberationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie, Nova Acta Upsala, т. 20, 1900, стр. 1–204 и Zur Kenntnis der Kreispunkte, Acta math., Stockh. т. 29, 1904, стр. 59–100.

В последнее время (1943 г.) Боль показал, что (в терминах § 49,8), для такой омбилической точки вычет $D \geq -2\pi$; поэтому, согласно полученным там результатам, число изолированных омбилических точек на овальной поверхности по меньшей мере равно 2, как это уже раньше предполагал К а р а т е о д о р и (род. 1873 г.). Этими же вопросами занимался Г а м б у р г е р (H. Hamburger) в трех больших статьях за 1940–1941 гг. В своем докладе в Риме в 1942 г. я указал, что, по моему мнению, полная топологическая классификация таких омбилических точек возможна, и что в этом вопросе к вещественным поверхностям можно применить результаты исследований комплексной алгебраической геометрии по классификации особенностей плоских алгебраических линий. Недавно Боль далеко продвинулся в выяснении поведения линий кривизны в окрестности омбилической точки [15].

Наконец, приведем еще некоторые классические результаты.

19. Поверхности вращения постоянной средней кривизны. Если линия L в плоскости $\mathfrak{M}$ при вращении $\mathfrak{M}$ вокруг оси A , расположенной в $\mathfrak{M}$, описывает поверхность постоянной средней кривизны, то L обладает следующим свойством. Пусть x — точка линии L , y — соответствующий центр кривизны, а z — точка пересечения нормали xy линии L в точке x с осью A ; тогда длины отрезков $\overline{xy} = r_1$, $\overline{xz} = r_2$ связаны соотношением

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2H = \text{const.} \quad (44)$$

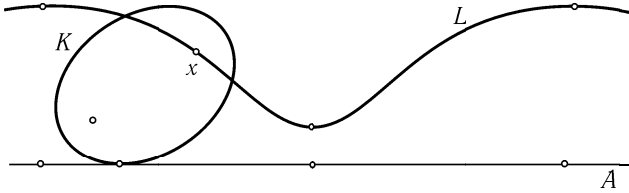


Рис. 49

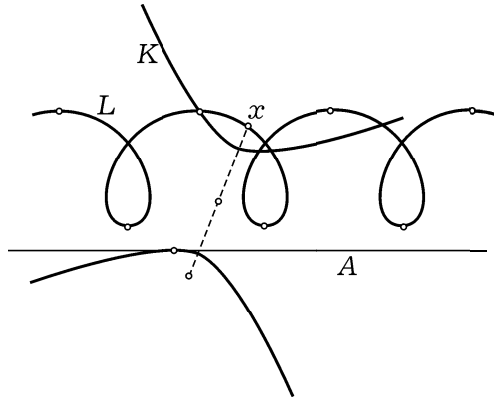


Рис. 50

Согласно Делоне (Ch. Delaunay) (1816–1872), 1841 г., каждая такая линия L может быть получена следующим образом. Если коническое сечение K катится в плоскости $\mathfrak{M}$ по прямой A , то каждый из фокусов x этого конического сечения описывает линию L . На рисунках 49, 50 и 51 изображены случаи, когда K является эллипсом, гиперболой и параболой. При желании можно наглядно представить процесс качения во втором случае, нарисовав

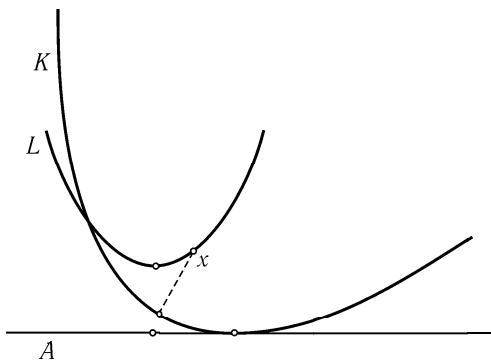


Рис. 51

гиперболу K на прозрачной бумаге. Если K — парабола, то L будет цепной линией.

20. Связь между поверхностями с постоянной H и поверхностями с постоянной K . Если точка x описывает поверхность f с нормальным вектором $a = a_3$, то точка $\bar{x} = x + ha$ пробегает параллельную к f поверхность $\bar{f}$, находящуюся от нее на постоянном расстоянии h . Из соотношения $d\bar{x}a = 0$ следует, что линии кривизны на f и $\bar{f}$ соответствуют друг другу и что между главными кривизнами имеется соотношение

$$\bar{r}_j = r_j - h.$$

Если поверхность $\bar{f}$ обладает постоянной мерой кривизны, то, полагая

$$\frac{1}{K} = \bar{r}_1 \bar{r}_2 = h^2,$$

мы получим

$$(r_1 - h)(r_2 - h) = h^2$$

или

$$2H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{h},$$

так что поверхность f будет обладать постоянной средней кривизной. Бонне, 1853 г.

21. Поверхность вращения трактрисы. Плоская линия S , для которой отрезки касательных между точкой прикосновения x и точкой пересечения с фиксированной прямой A имеют постоянную длину t (рис. 52), называется *линией погони* или *трактрисой*. Ее эволюта является цепной линией. При вращении линии S вокруг A она порождает поверхность постоянной отрицательной кривизны, называемую псевдосферой (Лиувиль).

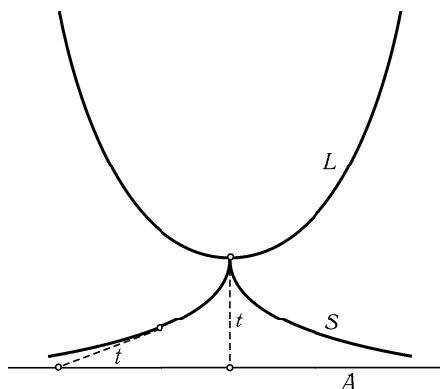


Рис. 52

В 1868 г. Бельтрами использовал эти поверхности для реализации гиперболической неевклидовой геометрии. В 1865 г. Дини (U. Dini) определил поверхности с постоянной K . Трактрису рассматривали уже Лейбниц и Гюйгенс. См. литературные указания в Enzyklopädie III D 1, 2, № 20.

22. Циклиды. Ориентированная сфера, касающаяся трех фиксированных ориентированных сфер, огибает «циклиду» (Дюпен, 1822 г.). Циклида является одновременно огибающей второго семейства сфер. Каждая сфера обоих семейств касается циклиды вдоль окружности, являющейся линией кривизны этой циклиды. Центры сфер обоих огибаемых семейств расположены на двух «фокальных конических сечениях». В общем случае они состоят из эллипса и гиперболы, причем фокусы каждой из коник являются вершинами другой, а их плоскости пересекаются под прямым углом (ср. § 63). Литературу о циклидах см. в Enzyklopädie III D 5, № 10.

23. Фокальные конические сечения. Каждая ортогональная проекция пары фокальных конических сечений на плоскость дает пару конических сечений с общими фокусами¹ (или их предельные случаи). Обратно, если две линии L_1, L_2 обладают тем свойством, что их ортогональные проекции L_1^*, L_2^* на любую плоскость всегда пересекаются под прямым углом, то L_j являются фокальными коническими сечениями или их предельными

¹ Возьмем в плоскости F : 1) эллипс e , отличный от окружности, 2) гиперболу h , имеющую общие фокусы с e , 3) прямую g , проходящую через центр e и h и пересекающую h внутри e . Тогда существует пара P фокальных конических сечений, ортогональная проекция которых на F даст коники e и h , причем прямая g будет ортогональной проекцией прямой пересечения плоскостей фокальных конических сечений. Эта пара P определяется однозначно с точностью до отражения в F и сдвигов в перпендикулярном к F направлении.

случаями. Для доказательства можно использовать следствие этого предположения: прямые, пересекающие одновременно направляющие линии L_1 и L_2 , образуют нормальную конгруэнцию (§ 61).

24. Изотропная проекция. Поставим в соответствие ориентированной сфере пространства R_3 с центром x_1, x_2, x_3 и радиусом r точку в R_4 с координатами $x_1, x_2, x_3, x_4 = r$. «Расстояние» t между двумя точками R_4 введем так:

$$t^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (x_4 - x'_4)^2.$$

Тогда «окружностям» этого R_4 соответствуют в R_3 циклиды, а «конформным» отображениям R_4 отвечают «контактные преобразования» сфер в R_3 , введенные Ли. При этих преобразованиях сохраняются линии кривизны на поверхностях (как огибающих двупараметрического семейства сфер). Ср. Б л а ш к е и Т о м с о н, Differentialgeometrie, т. 3, Berlin, 1929.

VII. Минимальные поверхности

§ 71. Минимальные поверхности как поверхности переноса

В этом разделе мы обратимся к изучению класса поверхностей с $H = 0$, которые, начиная с 1760 г., чаще всего привлекали к себе внимание геометров и, кроме того, могут быть легко осуществлены механически.

Вопрос о равновесии тонкой мыльной пленки естественно приводит к «задаче П л а т о» (J. Plateau, 1801–1883), сформулированной в 1866 г.: *дана замкнутая линия r ; требуется натянуть на r поверхность f с границей r так, чтобы мера площади $A(f)$ была наименьшей.*

Согласно (68,15), в случае обращения в нуль смещений r_j на границе r вариация A равна

$$\dot{A} = -2 \int_f r_3 H \varphi. \quad (1)$$

Следовательно, если эта вариация обращается в нуль при произвольном (за исключением условия на границе) выборе r_3 , то, как нашел в 1760 г.

Лагранж (Werke, т. 1, стр. 335), средняя кривизна всюду на f должна равняться нулю: $H = 0$. Этот факт можно выразить следующим образом:

«Экстремальями» нашей минимальной задачи являются поверхности нулевой средней кривизны.

По этой причине они называются *минимальными поверхностями*. Как мы вскоре покажем, эти поверхности тесно связаны с функциями комплексного переменного и потому составляют излюбленный предмет для геометров от *Лагранжа* до наших дней.

Так, ими занимались, в частности, Монж, Риман, Вейерштрасс, Шварц, Бельтрами, Ли и Рибокур. Связные изложения теории минимальных поверхностей находятся в статье Бельтрами за 1868 г. (Орега, т. 2, стр. 1–54), в первом томе собрания трудов Шварца за 1890 г., где собрана его переписка за 1865–1887 гг., в сочинении на премию Рибокура за 1881 г., в большом труде Дарбу (т. 1, кн. 3) за 1887 г., у Бьянки (т. 1, 3, Aufl., 1922, стр. 531–606). Новые сочинения тщательно собраны в книге Радó (T. Radó, «On the problem of Plateau») за 1933 г. Если сравнить первое и последнее из этих изложений, то можно противопоставить бурную молодость геометрического вопроса его усталой старости. В новейшее время Курант (R. Courant) успешно занялся вновь старыми вопросами.

Мы здесь будем предполагать известными некоторые факты из теории функций комплексного переменного. Прежде всего мы отметим, что *минимальная поверхность непременно является аналитической*. Точнее, это означает следующее: пусть кусок поверхности f с $H = 0$ представлен с помощью криволинейных координат u, v так, что $[x_u x_v] \neq 0$, а функции x_j имеют непрерывные производные вплоть до третьего порядка (достаточно было бы и менее сильных предположений); тогда координаты u, v можно выбрать таким образом, что функции $x_j(u, v)$ будут разложимы в сходящиеся степенные ряды.

Для этого мы покажем: на f можно ввести «изотермические координаты» u, v (§ 58) [16], т. е. криволинейные координаты, в которых линейный элемент поверхности f принимает вид

$$\sigma^2 = ds^2 = \lambda(da^2 + db^2). \quad (2)$$

Другими словами: поверхность f можно в малом «конформно» отобразить на a, b -плоскость. Это (т. е. существование изотермических координат) удается установить из рассмотрения сферического отображе-

ния. Например, из формулы (61,30) получается результат: *сферическое отображение поверхности f будет конформным и сохраняющим ориентацию ($K > 0$) тогда и лишь тогда, если $r_1 - r_2 = 0$, т.е. если в согласии с § 64 f является сферой; оно будет конформным а изменяющим ориентацию ($K < 0$) тогда и лишь тогда, если f является (неплоской) минимальной поверхностью ($r_1 + r_2 = 0$).* Для нашей цели достаточно воспользоваться формулой (62,18) и установить что при $H = 0$

$$dx \, dx = -\frac{1}{K}(da_3 \, da_3). \quad (3)$$

Таким образом, нам достаточно лишь ввести координаты a, b , для которых линейный элемент сферического отображения $da_3 \, da_3$ принимает изотермический вид (2). Но это можно осуществить уже с помощью «стереографической проекции сферы», введенной Птоломеем. При этом ввиду особой простоты вопроса мы исключаем из рассмотрения плоскости, также, разумеется, являющиеся минимальными поверхностями.

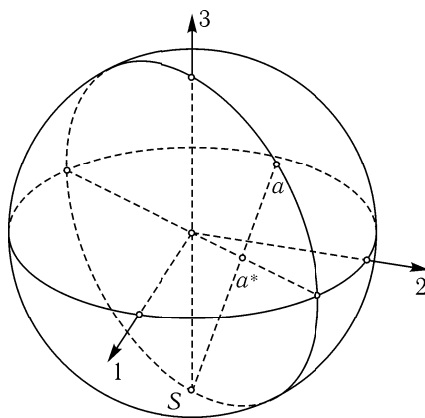


Рис. 53

Для построения стереографической проекции (изображенной на рис. 53) мы отобразим точки $a_3 = a = (a_1, a_2, a_3)$ единичной сферы $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ на точки $a^* = (a, b, 0)$ ее «экваториальной плоскости», требуя, чтобы две такие соответственные точки лежали на одной прямой с «южным полюсом» $S = (0, 0, -1)$.

Тогда мы получим формулы

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2a}{1+a^2+b^2}, & a_2 &= \frac{2b}{1+a^2+b^2}, & a_3 &= \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}, \\ s &= a+ib = \frac{a_1+ia_2}{1+a_3} = \frac{1-a_3}{a_1-ia_2}; & i^2 &= -1. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует

$$da_3 da_3 = 4 \frac{da^2 + db^2}{(1+a^2+b^2)^2}. \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), координаты A, B действительно являются изотермическими для сферического отображения; в силу (3) они будут изотермическими и для нашей минимальной поверхности f .

С другой стороны, построим дифференциальный параметр Б е л ь т р а м и Δ (§ 55) для радиус-вектора $\mathbf{x}$ одной из точек поверхности:

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{[d(\mathbf{x}_1 \sigma_2 - \mathbf{x}_2 \sigma_1)]}{[\sigma_1 \sigma_2]}; \quad (6)$$

здесь положено $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \sigma_1 + \mathbf{x}_2 \sigma_2$. Следовательно, согласно (41,13), мы имеем $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2$. Тем самым из (6), (41,13), (41,14) и (61,27) вытекает формула Б е л ь т р а м и, полученная им в 1868 г.:

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{[\sigma_1 \omega_1] + [\sigma_2 \omega_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]} \mathbf{a}_3 = 2H \mathbf{a}_3. \quad (7)$$

Итак, для минимальной поверхности $H = 0$ справедливо соотношение

$$\Delta \mathbf{x} = 0, \quad (8)$$

или, подробнее, $\Delta x_j = 0$; $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, на минимальной поверхности каждая из прямоугольных координат x_j является изотермической*. Другими словами: на минимальной поверхности линии уровня (для любого направления от веса) совместно с их ортогональными траекториями (линиями ската) всегда образуют в малом изотермическую сеть; обратно, это свойство характеризует минимальные поверхности (Р и м а н, Б е л ь т р а м и).

*То есть гармонической функцией.

В изотермических координатах a, b на нашей минимальной поверхности справедлива формула (8) или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) \mathbf{x} = 0. \quad (9)$$

Это означает: координаты x_j являются «гармоническими функциями», т. е. вещественными частями аналитических функций y_j от переменного $s = a + ib$

$$x_j = R y_j(s). \quad (10)$$

Отсюда и вытекает справедливость утверждения, что минимальные поверхности непременно являются аналитическими.

Этот результат влечет за собою возможность использования, наряду с вещественными, и комплексных значений криволинейных координат a, b , так что на нашей минимальной поверхности можно рассматривать и точки с комплексными координатами x_j [17].

Будем исходить из изотермического вида $ds^2 = \lambda(da^2 + db^2)$ элемента дуги минимальной поверхности и из соответствующего дифференциального уравнения (9), которому удовлетворяют прямоугольные координаты $x_j(a, b)$ точки поверхности. Если мы затем положим

$$a + ib = p, \quad a - ib = q, \quad (11)$$

то из (2) в пересчете на новые криволинейные координаты p, q получается выражение

$$ds^2 = \lambda dp dq, \quad (12)$$

а соотношение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial p \partial q} = 0. \quad (13)$$

Итак, согласно (13), мы можем представить минимальную поверхность как «поверхность переноса» (§ 65):

$$\mathbf{x}(p, q) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{y}(p) + \mathbf{z}(q) \}, \quad (14)$$

причем в соответствии с (12) координатные линии $p, q = \text{const}$ удовлетворяют условиям

$$\mathbf{y}' \mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{z}' \mathbf{z}' = 0. \quad (15)$$

Это означает, что линии $y(p)$, $z(q)$ имеют нулевую длину дуги. Такие мнимые линии называются *изотропными*. Название «минимальные линии», которое им дал С. Ли, менее естественно. Подведем итог:

Минимальные поверхности являются поверхностями переноса с изотропными линиями в качестве линий сети переноса.

Отметим, что этот же результат справедлив и для *комплексных* аналитических минимальных поверхностей, если их определить как поверхности, для которых $H = 0$. Именно, если мы будем исходить от поверхности $x(p, q)$ с сетью изотропных линий $p, q = \text{const}$, т. е. имеющей линейный элемент (12), то для нее справедливо уравнение (13), а тем самым имеет место и представление (14), (15). При этом мы раз и навсегда исключим из рассмотрения поверхности, несущие на себе лишь одно семейство изотропных линий, а именно торсы с изотропными прямыми в качестве образующих¹.

Полученный результат (14), (15) был найден еще в 1784 г. Мон-

¹Укажем вкратце, как можно получить деривационные уравнения для поверхностей f , несущих лишь одно семейство изотропных линий! Построим в точке x поверхности f новый триэдр a_1, a_2, a_3 со следующей таблицей скалярных произведений:

	a_1	a_2	a_3
a_1	0	0	1
a_2	0	1	0
a_3	1	0	0

(P)

Тогда деривационные уравнения примут вид:

$$dx = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2;$$

$$da_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \quad da_2 = +a_1\omega_3 - a_3\omega_2, \quad da_3 = -a_2\omega_3 - a_3\omega_1. \quad (A)$$

Отсюда вытекают следующие условия интегрируемости:

$$\begin{aligned} [d\sigma_1] &= [\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_3], & [d\sigma_2] &= [\sigma_1\omega_2], & 0 &= [\sigma_2\omega_2], \\ [d\omega_1] &= [\omega_1\omega_3], & [d\omega_2] &= [\omega_1\omega_2], & [d\omega_3] &= [\omega_3\omega_1]. \end{aligned} \quad (J)$$

В силу соотношения

$$dx \, dx = \sigma_2^2$$

наша поверхность несет на себе лишь одно семейство изотропных линий $\sigma_2 = 0$. Так как из $\sigma_2 = 0$ в силу (J₃) следует $\omega_2 = 0$, то, учитывая (A₂), мы видим, что касательный вектор a_1 каждой из таких линий удовлетворяет соотношению $da_1 = a_1\omega_1$ или $[a_1 da_1] = 0$. Поэтому эти изотропные линии являются прямыми. Но так как, кроме того, a_1 является и нормальным вектором касательной плоскости в точке x , то эта плоскость остается неизменной во всех точках каждой из линий $\sigma_2 = 0$. Это и доказывает справедливость нашего утверждения, что поверхность f является огибающей семейства изотропных плоскостей, зависящих от одного комплексного параметра.

жем, причем, разумеется, у него встречались неясности, так как в то время теория функций одного комплексного переменного была еще недостаточно развита. Формулировка этого результата была предложена в 1879 г. С. Ли.

Все сказанное выше показывает, что и для целей *вещественной* геометрии часто бывает ценно привлекать *комплексные* элементы (точки, прямые, плоскости), как это делали, например, во Франции Лагерр (E. Laguerre, 1834–1886) и Дарбу, в Германии — Ли и его ученики Шефферс и Штуди (E. Study, 1862–1930). При этом по сравнению с вещественной геометрией здесь появляются исключительные случаи. Так, например, изотропные линии перестают удовлетворять деривационным уравнениям (24,1). Точно так же требуют особого изучения и линии, лежащие в фиксированной «*изотропной плоскости*»

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0. \quad (16)$$

§ 72. Определение асимптотических линий и линий кривизны

На изотропной линии $\mathbf{y}(p)$ в силу $\mathbf{y}'\mathbf{y}' = 0$ длина дуги равна нулю. Следовательно, возникает необходимость выбрать какой-то другой «*натуральный параметр*», который был бы инвариантен при движении. Из $\mathbf{y}'\mathbf{y}' = 0$ следует $\mathbf{y}'\mathbf{y}'' = 0$, а значит,

$$[\mathbf{y}'\mathbf{y}''] = -g\mathbf{y}', \quad (1)$$

где g — скаляр, а знак « $-$ » несуществен. Этот скаляр $g(p)$ обращается в нуль тождественно лишь тогда, когда изотропная линия является прямой. Если мы исключим этот случай, то из вещественных минимальных поверхностей формулой (71,14) не будут охвачены только плоскости. Если на линии $\mathbf{y}(p)$ мы перейдем от p к новому параметру p_0 , то из (1) следует

$$\sqrt{g} dp = \sqrt{g_0} dp_0. \quad (2)$$

Таким образом, выражение

$$p_0 = \int \sqrt{g} dp \quad (3)$$

и является искомым натуральным параметром кривой изотропной линии. Комплексный интеграл (3), берущийся вдоль линии $\mathbf{y}(p)$, распространен на «двулистную риманову поверхность» функции $\sqrt{g}$, разветвляющуюся в «точках спрямления» ($g = 0$). Этот натуральный параметр был введен в 1905 г. Вессьо (E. Vessiot, род. 1865 г.) и более строго в 1909 г. Штуди.

Если мы используем соответствующий натуральный параметр q_0 также для изотропной линии $\mathbf{z}(q)$ и обозначим производные по p_0, q_0 точками, то из (71,14) вытекает следующее каноническое представление минимальных поверхностей:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(p_0, q_0) &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{y}(p_0) + \mathbf{z}(q_0) \}, \\ \dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}} &= 0, \quad [\dot{\mathbf{y}}\ddot{\mathbf{y}}] = -\dot{\mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}} = 0, \quad [\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}}] = -\dot{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя сокращенное обозначение для скалярного произведения

$$\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{z}} = 2\lambda, \quad (5)$$

мы получим после выбора знака следующее выражение для единичного вектора нормали к поверхности (мы будем его обозначать вместо $\mathbf{a}_3$ для краткости через $\mathbf{a}$):

$$\mathbf{a} = i \frac{[\dot{\mathbf{y}}'\dot{\mathbf{z}}']}{\dot{\mathbf{y}}'\dot{\mathbf{z}}'} = i \frac{[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{z}}]}{2\lambda}. \quad (6)$$

Пусть производные от $\mathbf{a}$ по p_0, q_0 обозначены временно так:

$$\mathbf{a}_p = A\dot{\mathbf{y}} + B\dot{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{a}_q = C\dot{\mathbf{y}} + D\dot{\mathbf{z}}. \quad (7)$$

Дифференцируя по p_0, q_0 соотношения

$$\mathbf{a}\dot{\mathbf{y}} = 0, \quad \mathbf{a}\dot{\mathbf{z}} = 0, \quad (8)$$

мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_p\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{a}\ddot{\mathbf{y}} &= 0, & \mathbf{a}_q\dot{\mathbf{y}} &= 0, \\ \mathbf{a}_p\dot{\mathbf{z}} &= 0, & \mathbf{a}_q\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{a}\ddot{\mathbf{z}} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда при сравнении с (7) прежде всего получается $A = D = 0$. Далее, из первого и последнего уравнений (9) и соотношений (7) и (5) следует

$$2\lambda B + i \frac{(\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{y}})}{2\lambda} = 0, \quad 2\lambda C + i \frac{(\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}})}{2\lambda} = 0.$$

Учитывая (4), находим

$$B = -\frac{i}{2\lambda}, \quad C = +\frac{i}{2\lambda}.$$

Поэтому мы имеем

$$2 d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{y}} dp_0 + \dot{\mathbf{z}} dq_0, \quad 2i\lambda d\mathbf{a} = \dot{\mathbf{z}} dp_0 - \dot{\mathbf{y}} dq_0. \quad (10)$$

Отсюда получаются выражения для трех основных квадратичных форм минимальной поверхности:

$$d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \lambda dp_0 dq_0, \quad d\mathbf{x} d\mathbf{a} = \frac{1}{2i}(dp_0^2 - dq_0^2), \quad d\mathbf{a} d\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda} dp_0 dq_0. \quad (11)$$

Наряду с канонической парой координат p_0, q_0 на f мы введем еще две другие пары, u, v и u', v' :

$$\begin{aligned} p_0 &= u + iv = \frac{u' + iv'}{1 + i} = \frac{(u' + v') + i(v' - u')}{2}, \\ q_0 &= u - iv = \frac{u' - iv'}{1 - i} = \frac{(u' + v') - i(v' - u')}{2}, \\ u &= \frac{p_0 + q_0}{2} = \frac{u' + v'}{2}, \quad u' = \frac{p_0 - iq_0}{1 - i} = u - v, \\ v &= \frac{p_0 - q_0}{2i} = \frac{v' - u'}{2}, \quad v' = \frac{p_0 + iq_0}{1 + i} = u + v. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда для основных квадратичных форм получаются еще следующие выражения:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} d\mathbf{x} &= \lambda(du^2 + dv^2) = \frac{\lambda}{2}(du'^2 + dv'^2), \\ d\mathbf{x} d\mathbf{a} &= 2 du dv = \frac{1}{2}(dv'^2 - du'^2), \\ d\mathbf{a} d\mathbf{a} &= \frac{1}{\lambda}(du^2 + dv^2) = \frac{1}{2\lambda}(du'^2 + dv'^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда видно, что линии $u, v = \text{const}$ являются асимптотическими линиями, а линии $u', v' = \text{const}$ — линиями кривизны нашей минимальной поверхности.

Если мы вернемся к произвольным параметрам p, q на изотропных линиях $y(p), z(q)$ и положим

$$[y'y''] = -gy', \quad [z'z''] = -hz', \quad (14)$$

то уравнение асимптотических линий примет вид

$$\int \sqrt{g} dp \pm \int \sqrt{h} dq = \text{const}, \quad (15)$$

а уравнение линий кривизны, будет

$$\int \sqrt{ig} dp \pm \int \sqrt{-ih} dq = \text{const}. \quad (16)$$

В частности, если мы будем с помощью символа R обозначать вещественную часть, то для вещественных поверхностей уравнение асимптотических линий будет

$$R \int \sqrt{g} dp = \text{const}, \quad R i \int \sqrt{-ig} dp = \text{const}, \quad (17)$$

а уравнение линий кривизны

$$R \int \sqrt{ig} dp = \text{const}, \quad R \int \sqrt{g} dp = \text{const}. \quad (18)$$

Следовательно, в вещественном случае для определения этих двух сетей линий достаточно вычислить комплексный интеграл. Отметим еще геометрический смысл величины λ , входящей в формулы (5), (11) и (13). Из (11) и (71,3) следует

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}. \quad (19)$$

Таким образом, в силу $H = 0$ или $r_1 + r_2 = 0$, оба главных радиуса кривизны нашей минимальной поверхности равны $\pm\lambda$.

Впервые линии кривизны на минимальной поверхности определил в 1846 г. Робертс (M. Roberts, 1817–1882).

Из формул (11) и (19) можно сделать следующий вывод: если ds^2 — линейный элемент минимальной поверхности, а K — ее мера кривизны, то квадратичная дифференциальная форма

$$\sqrt{-K} ds^2 \quad (20)$$

имеет кривизну, равную нулю. Тем самым получается необходимое условие того, что данный линейный элемент ds^2 принадлежит минимальной поверхности. Это условие и достаточно (Р и ч и), но мы здесь не будем доказывать этого.

§ 73. Присоединенные минимальные поверхности

Формулы Гаусса (68,15), (68,16) для первой вариации меры площади A в случае минимальной поверхности дают нам

$$\dot{A} = \int_{r(f)} (\dot{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \mathbf{a}_3). \quad (1)$$

Рассмотрим, в частности, семейство подобно расположенных минимальных поверхностей

$$w\mathbf{x}(u, v), \quad 0 < w \leq 1. \quad (2)$$

Тогда из (1) следует

$$A = \int_0^1 \left\{ w dw \int_{r(f)} (\mathbf{x} d\mathbf{x} \mathbf{a}_3) \right\}, \quad (3)$$

или

$$A = \frac{1}{2} \int_{r(f)} (\mathbf{x} d\mathbf{x} \mathbf{a}_3). \quad (4)$$

Это выражение и этот вывод для площади минимальной поверхности через интеграл по границе дал в 1874 г. Шварц (Werke, т. 1, стр. 178, 179) в связи с исследованиями Римана.

Если параллельно сдвинуть нашу поверхность на вектор $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{v},$$

то должно быть $A = A^*$, и потому

$$\int_{r(f)} [\mathbf{a}_3 d\mathbf{x}] = 0. \quad (5)$$

Итак, на минимальной поверхности выражение $[a_3 dx]$ является полным дифференциалом, т. е. равна нулю внешняя производная:

$$[d[a_3 dx]] = 0. \quad (6)$$

Как отметил уже в 1760 г. Лагранж (Ouvres, т. 1, стр. 356), это условие характеризует минимальные поверхности. Действительно, с помощью (61,1), (61,27) мы получаем

$$\begin{aligned} [d[a_3 dx]] &= [(a_1\omega_2 - a_2\omega_1)(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2)] = \\ &= -a_3([\sigma_1\omega_1] + [\sigma_2\omega_2]) = -2H[\sigma_1\sigma_2]a_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Если наша минимальная поверхность представлена формулами (72,4), то можно легко вычислить соответствующий интеграл

$$x^* = \int_{x_0}^x [a dx]. \quad (8)$$

Если мы положим на время

$$[a \dot{y}] = A\dot{y} + B\dot{z}, \quad [a \dot{z}] = C\dot{y} + D\dot{z}, \quad (9)$$

то, умножая скалярно на $\dot{y}$, $\dot{z}$ и принимая во внимание (72,4), (72,6), получим $A = -i$, $B = 0$, $C = 0$, $D = i$. Таким образом,

$$dx^* = \frac{1}{2i}(\dot{y} dp_0 - \dot{z} dq_0), \quad (10)$$

и после интегрирования получается с точностью до параллельного сдвига

$$x^*(p, q) = \frac{1}{2i}\{y(p) - z(q)\}. \quad (11)$$

Поэтому точка x^* также описывает минимальную поверхность; ее ввел в 1853 г. Бонне в качестве «присоединенной» (adjoint) к поверхности x .

Перейдем к выводу некоторых свойств этих поверхностей. Из соотношений

$$2 dx = y' dp + z' dq, \quad 2i dx^* = y' dp - z' dq \quad (12)$$

следует:

I. В соответственных точках x, x^* касательные плоскости к нашим минимальным поверхностям параллельны.

II. Из (12) следует

$$dx \, dx = dx^* \, dx^*, \quad (13)$$

т. е. обе минимальные поверхности находятся в изометрическом соответствии.

III. Из (12) следует

$$dx \, dx^* = 0, \quad (14)$$

т. е. соответствующие направления на обеих поверхностях ортогональны.

IV. Пусть a_1, a_2, a_3 — сопровождающий триэдр (§ 21) полосы на поверхности $x(p, q)$, а a_1^*, a_2^*, a_3^* — сопровождающий триэдр соответствующей полосы на $x^*(p, q)$. Тогда из I, II, III следует, что при надлежащем выборе знака

$$a_1^* = +a_2, \quad a_2^* = -a_1, \quad a_3^* = +a_3.$$

Мы знаем три дифференциальных инварианта полосы (22,6):

$$\begin{aligned} k_1 &= a_3 \frac{da_2}{ds} = -a_2 \frac{da_3}{ds} = \frac{\omega_1}{\sigma}, \\ k_2 &= a_1 \frac{da_3}{ds} = -a_3 \frac{da_1}{ds} = \frac{\omega_2}{\sigma}, \quad k_3 = a_2 \frac{da_1}{ds} = -a_1 \frac{da_2}{ds} = \frac{\omega_3}{\sigma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для соответствующей полосы на $x^*(p, q)$ мы находим

$$k_1^* = k_2, \quad k_2^* = -k_1, \quad k_3^* = k_3. \quad (16)$$

В частности, линии кривизны определяются условием $k_1 = 0$, а асимптотические линии — условием $k_2 = 0$. Таким образом, линиям кривизны и асимптотическим линиям поверхности $x(p, q)$ отвечают асимптотические линии и линии кривизны на поверхности $x^*(p, q)$.

Из I, III следует:

V. Для произвольного направления отвеса линиям уровня поверхности $x(p, q)$ отвечают линии ската на поверхности $x^*(p, q)$, и наоборот.

Согласно (12), (10) и (8), мы имели

$$x = \frac{1}{2}(y + z), \quad [a \, dx] = \frac{1}{2i}(dy - dz). \quad (17)$$

Отсюда следует

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + i \int [\mathbf{a} d\mathbf{x}], \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - i \int [\mathbf{a} d\mathbf{x}]. \quad (18)$$

Эти формулы, отмеченные в 1875 г. Шварцем, позволяют наиболее просто рассмотреть задачу, решенную уже в 1844 г. профессором Бьерлингом (E. O. Björling) из Upsala. Она заключается в том, чтобы *провести минимальную поверхность через аналитическую полосу* $\mathbf{x}(\tau)$, $\mathbf{a}(\tau)$, $\mathbf{a} d\mathbf{x} = 0$; τ вещественно. Для этой цели мы вычислим на основании (17) аналитические векторные функции $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{z}(\tau)$ вдоль полосы. Если бы одна из них была постоянной, то мы имели бы $d\mathbf{x} \pm i[\mathbf{a} d\mathbf{x}] = 0$, и отсюда $d\mathbf{x} d\mathbf{x} = 0$. Но если мы предполагаем несущую линию $\mathbf{x}(\tau)$ нашей полосы неизотропной, то это невозможно. С помощью аналитического продолжения в комплексную область мы можем теперь, исходя из $\mathbf{y}(\tau)$, $\mathbf{z}(\tau)$, найти функции $\mathbf{y}(p)$, $\mathbf{z}(q)$, а тем самым наша минимальная поверхность определится однозначно.

Отсюда, согласно Шварцу (1875 г.), следует:

Если минимальная поверхность содержит (неизотропную) прямую G , то она переходит сама в себя при отражении в G . Если минимальная поверхность пересекает под прямым углом (неизотропную) плоскость E , то она переходит сама в себя при отражении в E .

Точно так же, согласно Штуди (1909 г.):

Если минимальная поверхность содержит коническую двойную точку, то эта точка является ее центром.

§ 74. Изгибание минимальных поверхностей

Определим, согласно Шварцу (1875 г.), наиболее общую *пару минимальных поверхностей, допускающих изометрическое отображение друг на друга*.

Если $\mathbf{x}(p, q)$, $\mathbf{x}^*(p, q)$ — две такие минимальные поверхности (которые мы будем предполагать неплоскими), то их сферические отображения $\mathbf{a}(p, q)$, $\mathbf{a}^*(p, q)$ находятся в *конформном* соответствии с этими поверхностями (а значит, и друг с другом). Далее, согласно Гауссу, мы имеем $\sigma_j = \sigma_j^*$:

$$K = \frac{[\omega_1 \omega_2]}{[\sigma_1 \sigma_2]} = K^* = \frac{[\omega_1^* \omega_2^*]}{[\sigma_1^* \sigma_2^*]},$$

так что отображение $a(p, q)$ на $a^*(p, q)$ сохраняет площади (сферических отображений):

$$[\omega_1 \omega_2] = [\omega_1^* \omega_2^*].$$

Отображение $a \rightarrow a^*$, будучи конформным и сохраняющим площади, является изометрическим и непременно сводится к движению или отражению. Следовательно, если мы применим к $x(p, q)$ надлежащее движение или отражение, то получим новую поверхность, которую также обозначим через $x^*(p, q)$ и которая соответствует поверхности $x(p, q)$ параллелизмом нормалей: $a = a^*$. Но тогда соответствующие изотропные касательные направления на наших поверхностях совпадают:

$$dy^* = a dy, \quad dz^* = b dz.$$

Однако из условия изометричности

$$ds^2 = \frac{1}{2} dy dz = \frac{1}{2} dy^* dz^*$$

следует, что $ab = 1$. Для вещественной минимальной поверхности a и b комплексно сопряжены, так что $|a| = 1$, и потому a будет постоянным, как аналитическая функция с постоянным модулем. Поэтому, с точностью до параллельных смещений, $y^* = e^{i\alpha} y$, $z^* = e^{-i\alpha} z$. Это семейство минимальных поверхностей

$$z(p, q; \alpha) = \frac{1}{2} \{ e^{+i\alpha} y(p) + e^{-i\alpha} z(q) \}, \quad (1)$$

зависящих от вещественного параметра α , Бонне в 1853 г. назвал семейством *ассоциированных минимальных поверхностей*. В частности, поверхности $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ снова являются «присоединенными» друг к другу (§ 73).

Отметим основные свойства ассоциированных минимальных поверхностей, подобно тому, как мы это сделали в § 73 для присоединенных поверхностей.

I. Из соотношения

$$2dx = e^{+i\alpha} dy + e^{-i\alpha} dz \quad (2)$$

следует: в соответственных точках (т. е. определяемых одними и теми же p и q) поверхности семейства обладают *параллельными касательными плоскостями*.

II. Из формулы

$$ds^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \lambda dp dq \quad (3)$$

следует, что соответствие между поверхностями семейства, устанавливаемое равенством p и q , является *изометрическим*.

III. Мы имеем

$$\frac{d\mathbf{x}(p, q; \alpha_1)}{ds} \frac{d\mathbf{x}(p, q; \alpha_2)}{ds} = \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (4)$$

откуда ясно, что на поверхностях $\mathbf{x}(p, q; \alpha_1)$ и $\mathbf{x}(p, q; \alpha_2)$ соответственные касательные заключают между собой постоянный угол $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta$.

IV. Итак, для соответственных сопровождающих триэдров на этих поверхностях семейства справедливы соотношения

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_1 \cos \beta + \mathbf{a}_2 \sin \beta, \quad \mathbf{a}_2^* = -\mathbf{a}_1 \sin \beta + \mathbf{a}_2 \cos \beta, \quad \mathbf{a}_3^* = \mathbf{a}_3, \quad (5)$$

откуда вытекают соотношения для дифференциальных инвариантов (73,15):

$$k_1^* = k_1 \cos \beta + k_2 \sin \beta, \quad k_2^* = -k_1 \sin \beta + k_2 \cos \beta, \quad k_3^* = k_3. \quad (6)$$

V. Линиям уровня для произвольного направления отвеса на одной поверхности семейства отвечают изогональные траектории линий уровня на каждой другой поверхности.

VI. Из равенства (1) следует: траекториями точки $\mathbf{x}(p, q; \alpha)$ при фиксированных p, q и изменяющемся α являются эллипсы с центром в начале координат. Как показал, например, Бьянки, эти результаты можно также обратить различными способами.

§ 75. Формулы Римана и Вейерштрасса

Связь между минимальными поверхностями и функциями одного комплексного переменного всего яснее вырисовывается из формул, данных в 1861 и 1866 гг. Вейерштрассом. Будем исходить из уравнений Монжа:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\{\mathbf{y}(p) + \mathbf{z}(q)\}, \quad \mathbf{y}'\mathbf{y}' = \mathbf{z}'\mathbf{z}' = 0. \quad (1)$$

Если мы рассмотрим нормальный вектор

$$\mathbf{w} = [\mathbf{y}' \mathbf{y}''] \quad (2)$$

соприкасающейся плоскости изотропной линии $\mathbf{y}(p)$, то из тождества Лагранжа (14,8) в силу $\mathbf{y}' \mathbf{y}' = \mathbf{y}' \mathbf{y}'' = 0$ следует

$$\mathbf{w} \mathbf{w} = (\mathbf{y}' \mathbf{y}')(\mathbf{y}'' \mathbf{y}'') - (\mathbf{y}' \mathbf{y}'')^2 = 0, \quad (3)$$

т. е. вектор $\mathbf{w}$ тоже является изотропным. Поэтому мы можем записать уравнение «изотропной» соприкасающейся плоскости линии $\mathbf{y}(p)$ в форме

$$(1 - s^2)y_1 + i(1 + s^2)y_2 - 2sy_3 = 2iw(s), \quad (4)$$

и определенную тем самым комплексную переменную s возьмем вместо p за параметр нашей изотропной линии $\mathbf{y}(p)$. Если продифференцировать (4) два раза по s при фиксированных y , то из уравнений (4), (4)' и (4)'' получаются значения

$$\begin{aligned} y_1 &= i \left(w - sw' - \frac{1-s^2}{2} w'' \right), \\ y_2 &= w - sw' + \frac{1+s^2}{2} w'', \quad y_3 = -i(w' - sw''). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда следует

$$y'_1 = \frac{1-s^2}{2i} w''', \quad y'_2 = \frac{1+s^2}{2} w''', \quad y'_3 = i s w'''. \quad (6)$$

Итак, каждой изотропной линии отвечает аналитическая функция $s(w)$, так что плоскости (4) огибаются поверхностью касательных этой линии (5).

Обратно, каждой аналитической функции $w(s)$, третья производная которой не обращается тождественно в нуль и которая, следовательно, не является полиномом второй степени, в силу (6) отвечает изотропная линия (5). Учитывая (72,1), (72,3) и (6), вычислим соответствующий натуральный параметр p_0 .

Мы находим

$$[\mathbf{y}' \mathbf{y}'''] = -w''' \mathbf{y}', \quad (7)$$

т. е. согласно (72,1), (72,3),

$$g(s) = w'''(s), \quad p_0 = \int \sqrt{g(s)} ds. \quad (8)$$

Если соприкасающаяся плоскость другой изотропной линии $z(q)$ будет

$$(1 - t^2)z_1 - i(1 + t^2)z_2 - 2tz_3 = -2ik(t), \quad (9)$$

то мы получим

$$\begin{aligned} z_1 &= -i \left(k - tk' - \frac{1-t^2}{2}k'' \right), \\ z_2 &= k - tk' + \frac{1+t^2}{2}k'', \quad z_3 = i(k' - tk''), \end{aligned} \quad (10)$$

так что

$$z'_1 = +i \frac{1-t^2}{2}k''', \quad z'_2 = \frac{1+t^2}{2}k''', \quad z'_3 = -itk'''. \quad (11)$$

Теперь можно найти натуральный параметр q_0 этой линии:

$$h(t) = k'''(t), \quad q_0 = \int \sqrt{h(t)} dt. \quad (12)$$

Отсюда прежде всего получается следующее представление для нашей минимальной поверхности (1):

$$\begin{aligned} 2x_1 &= +i \left(w - sw' - \frac{1-s^2}{2}w'' \right) - i \left(k - tk' - \frac{1-t^2}{2}k'' \right), \\ 2x_2 &= \left(w - sw' + \frac{1+s^2}{2}w'' \right) + i \left(k - tk' + \frac{1+t^2}{2}k'' \right), \\ 2x_3 &= -i(w' - sw'') + i(k' - tk''), \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \int \frac{1-s^2}{2i} g ds + \int \left(-\frac{1-t^2}{2i} \right) h dt, \\ 2x_2 &= \int \frac{1+s^2}{2} g ds + \int \frac{1+t^2}{2} h dt, \\ 2x_3 &= \int i s g ds + \int (-it) h dt. \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, в вещественном случае, когда w и k комплексно сопряжены, мы получим, обозначая снова символом R вещественную часть,

$$\begin{aligned}x_1 &= R i \left(w - t w' - \frac{1-t^2}{2} w'' \right), & x_2 &= R \left(w - t w' + \frac{1+t^2}{2} w'' \right), \\x_3 &= R \{ -i(w' - t w'') \},\end{aligned}\tag{15}$$

а также

$$\begin{aligned}x_1 &= R \int \left(-i \frac{1-s^2}{2} \right) g ds, & x_2 &= R \int \frac{1+s^2}{2} g ds, \\x_3 &= R \int i s g ds.\end{aligned}\tag{16}$$

При этом

$$w'''(s) = g(s), \quad k'''(t) = h(t).\tag{17}$$

Это, по существу, и есть формулы, указанные в 1861 г. Вейерштрассом. Формулы, равносильные (16), нашел уже в 1860 г. Риман.¹

Итак, каждой аналитической функции $w(s)$, не являющейся полиномом второй степени, отвечает одна и только одна вещественная минимальная поверхность [18].

Вычислим теперь еще инвариант λ , определенный в (72,5) и связанный с мерой кривизны K , согласно (72,19), соотношением $K = -\frac{1}{\lambda^2}$. Из (6) и (11) прежде всего следует

$$y' z' = \frac{(1+st)^2}{2} gh.\tag{18}$$

Мы имеем

$$\dot{y} = y' \frac{ds}{dp_0} = \frac{y'}{\sqrt{g}}, \quad \dot{z} = z' \frac{ds}{dq_0} = \frac{z'}{\sqrt{h}}.\tag{19}$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{(1+st)^2}{4} \sqrt{gh}.\tag{20}$$

¹Формулы (15) можно легко получить из теории характеристик дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Зауер (R. Sauer), Z. angew. Math., 25-27 (1947 г.), стр. 151-153.

С другой стороны, из (72,6) мы находим следующие выражения для координат единичного вектора $\mathbf{a}$ нормали к поверхности:

$$a_1 = \frac{s+t}{1+st}, \quad a_2 = \frac{s-t}{i(1+st)}, \quad a_3 = \frac{1-st}{1+st}. \quad (21)$$

Для вещественной нормали к поверхности, когда $s = a + ib$, $t = a - ib$, мы получаем в точности формулы (71,4). Итак, *в вещественном случае s является комплексной переменной на сфере Римана, на которую произведено гауссово сферическое отображение нашей минимальной поверхности, и*

$$s = \frac{a_1 + ia_2}{1 + a_3} = \frac{1 - a_3}{a_1 - ia_2}. \quad (22)$$

Тем самым раскрыто значение s .

Из (13) и (21) мы получаем выражение для расстояния от начала координат до касательной плоскости к нашей минимальной поверхности:

$$\mathbf{ax} = i \left\{ \frac{wt - ks}{1 + st} - \frac{w' - k'}{2} \right\}. \quad (23)$$

Величины a , t и $\mathbf{ax}$ можно рассматривать как тангенциальные координаты касательной плоскости. Итак, уравнение (23) является уравнением минимальной поверхности в тангенциальных координатах.

Важнейшее следствие, выведенное Вейерштрассом из своих формул, относится к *алгебраическим минимальным поверхностям*. Если функция $w(s)$ алгебраическая, т. е. существует тождество $P(s, w) = 0$, где P означает полином, то из (15) легко видеть, что соответствующая минимальная поверхность также будет алгебраической, т. е. будет удовлетворять уравнению $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$, где Q — полином. Справедливо и обратное.

В самом деле, если f — алгебраическая минимальная поверхность, то алгебраическими будут и изотропные линии на ней, как линии прикосновения f с описанными изотропными цилиндрами*. При этом прямолинейные образующие такого цилиндра параллельны изотропному вектору. Но каждая алгебраическая изотропная линия, рассматриваемая как место ее соприкасающихся плоскостей, приводит к уравнению $P(s, w) = 0$, что мы и утверждали.

*Так как изотропные линии на минимальной поверхности образуют сеть переноса, то касательные к линии одного семейства вдоль линии другого семейства образуют цилиндр.

Две точки a, a' на сфере (21) будут симметричны друг другу относительно центра сферы, если координаты s, t, s', t' удовлетворяют соотношению

$$st' = ts' = 1. \quad (24)$$

Таким образом, *комплексное вращение* этой сферы представляется так:

$$s^* = \frac{As + B}{Cs + D}, \quad t^* = \frac{+Dt - C}{-Bt + A}; \quad AD - BC = 1. \quad (25)$$

В частности, оно будет *вещественным*, если

$$C = -\overline{B}, \quad D = \overline{A}, \quad (26)$$

где черта обозначает переход к комплексно-сопряженной величине. Координаты s, w изотропной плоскости (4) преобразуются при движении так:

$$s^* = \frac{As + B}{Cs + D}, \quad w^* = \frac{w + Es^2 + 2Fs + G}{(Cs + D)^2}; \quad AD - BC = 1. \quad (27)$$

Здесь $A, B, C, D; E, F, G$ — в остальном произвольные комплексные числа. Из (27) вытекает формула преобразования величины g , определенной в (8):

$$g^* = (Cs + D)^4 g, \quad (28)$$

и это в соответствии с (8) обеспечивает инвариантность выражения

$$g^* = ds^{*2} = g ds^2. \quad (29)$$

* Из формул (21) следует, что линии $s = \text{const}$ и $t = \text{const}$ являются прямолинейными образующими комплексной сферы. Поэтому общее комплексное проективное преобразование этой сферы в себя определяется уравнениями

$$s^* = \frac{as + b}{cs + d}, \quad t^* = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad ad - bc = 1, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

(см., например, *Клейн. «Неевклидова геометрия»*. ОНТИ, 1936. Стр. 130). Требуя, чтобы несобственные точки сферы переходили в несобственные, что равносильно тому, чтобы центр сферы оставался неизменным, т.е. чтобы диаметрально противоположные точки переходили в диаметрально противоположные, мы выделим комплексные вращения сферы, и формулы этих вращений будут иметь вид (25).

** Так как $g^* = \frac{d^3 w^*}{ds^{*3}}$, то по правилам дифференциального исчисления находим

В частности, движение (27) вещественно при

$$C = -\overline{B}, \quad D = \overline{A}, \quad G = \overline{E}, \quad F = -\overline{F}. \quad (30)$$

Между прочим, с помощью этих формул можно установить, например, следующее. Подвергнем вещественную минимальную поверхность, представленную уравнениями (16), деформации $f^* \rightarrow f$, которая возникает, когда изотропная линия $y(s)$ испытывает комплексное движение (27). Эти деформации нашей минимальной поверхности f зависят от 12 вещественных параметров (если только f не преобразуется никакой из этих деформаций сама в себя), охватывают 6-членную группу действительных движений этой поверхности и имеют следующие характерные свойства:

- I. Они конформны.
- II. Линии кривизны переходят в линии кривизны.
- III. Сферические отображения s, s^* поверхностей f, f^* связаны друг с другом круговым преобразованием, сохраняющим направление обхода:

$$s^* = \frac{As + B}{Cs + D}, \quad AD - BC = 1.$$

То, что эти преобразования обладают указанными свойствами, тотчас же вытекает из наших формул. Доказательство того, что эти свойства являются характеристическими, можно провести так, что сначала посредством преобразования из нашей совокупности добиться совпадения сферических отображений ($s^* = s$), а затем на основании I, II заключить, что $g^* = g$.*

из (27):

$$\begin{aligned} \frac{dw^*}{ds^*} &= w' + 2Es + 2F - 2C \frac{w + Es^2 + 2Fs + G}{Cs + D}, \\ \frac{d^2w^*}{ds^{*2}} &= (Cs + D)^2(w'' + 2E) - 2C(Cs + D)(w' + 2Es + 2F) + \\ &\quad + 2C^2(w + Es^2 + 2Fs + G), \\ g^* &= \frac{d^3w^*}{ds^{*3}} = (Cs + D)^4 w''' = (Cs + D)^4 g. \end{aligned}$$

Если f и f^ — минимальные поверхности, то первое требование является следствием третьего. Кроме того, соответствие между f и f^* рассматривается с точностью до подобия.

§ 76. Минимальные поверхности Шерка

Минимальные поверхности позволяют привести интересные приложения общей теории поверхностей. Рассмотрим некоторые из них.

Возьмем одночленную группу винтовых движений

$$\begin{aligned}x_1^* + ix_2^* &= e^{+i\theta}(x_1 + ix_2), \\x_1^* - ix_2^* &= e^{-i\theta}(x_1 - ix_2), \\x_3^* &= x_3 - c\theta,\end{aligned}\tag{1}$$

отвечающую вещественным значениям θ , и займемся сначала отысканием вещественной минимальной поверхности, переходящей в себя при этих винтовых движениях. Согласно (75,27), (75,28), в координатах s, g наши формулы (1) запишутся в виде*

$$s^* = e^{+i\theta}s, \quad g^* = e^{-2i\theta}g,\tag{2}$$

так как мы должны положить

$$A = e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

При отображении (2) изотропные линии на нашей минимальной поверхности могут испытывать лишь параллельное смещение. Но при этом s и g остаются неизменными. Таким образом, функция $g(s)$ должна удовлетворять условию**

$$g^*(s) = e^{-2i\theta}g(e^{-i\theta}s) = g(s).\tag{3}$$

Если мы введем в качестве новой неизвестной аналитическую функцию $G(s)$, положив

$$s^2 g(s) = G(s),\tag{4}$$

* Из (1) следует, что координаты единичного вектора нормали преобразуются при нашем винтовом движении так:

$$a_1^* + ia_2^* = e^{i\theta}(a_1 + ia_2), \quad a_3^* = a_3.$$

Отсюда из основания (75,22) следует $s^* = e^{i\theta}s$.

** Мы имеем $g^*(s^*) = e^{-2i\theta}g(e^{-i\theta}s^*)$. При $s^* = s$ должно быть $g^*(s) = g(s)$.

то из (3) для $G(s)$ вытекает условие

$$G(e^{-i\theta}s) = G(s), \quad (5)$$

а отсюда следует, что G постоянна.

Итак, мы имеем соотношение

$$g(s) = -\frac{ae^{i\alpha}}{s^2}, \quad a > 0 \quad (6)$$

с вещественным α . Интегрируя уравнение

$$w'''(s) = g(s), \quad (7)$$

мы получим

$$w'' = \frac{ae^{i\alpha}}{s}, \quad w' = ae^{i\alpha} \log s, \quad w = ae^{i\alpha}(s \log s - s), \quad (8)$$

причем иной выбор постоянных соответствует лишь параллельному смещению. Итак, с помощью формул Вейерштрасса (75,15) мы находим следующие минимальные поверхности:

$$\begin{aligned} x_1 &= aR \frac{e^{i\alpha}}{2i} \left(s + \frac{1}{s}\right), & x_2 &= -aR \frac{e^{i\alpha}}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right), \\ x_3 &= aR \frac{e^{i\alpha}}{i} (\log s - 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Отбрасывая в последнем члене 1, мы отвлекаемся лишь от несущественных параллельных смещений. Полагая теперь $\log s = \rho + i\tau$, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a} &= \sin \alpha \operatorname{ch} \rho \cos \tau + \cos \alpha \operatorname{sh} \rho \sin \tau, \\ \frac{x_2}{a} &= \sin \alpha \operatorname{ch} \rho \sin \tau - \cos \alpha \operatorname{sh} \rho \cos \tau, \\ \frac{x_3}{a} &= \sin \alpha \cdot \rho + \cos \alpha \cdot \tau, \\ \frac{x_1 + ix_2}{a} &= (\sin \alpha \operatorname{ch} \rho - i \cos \alpha \operatorname{sh} \rho) e^{i\tau}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{x_3}{a} = \sin \alpha \cdot \rho + \cos \alpha \cdot \tau. \quad (11)$$

Заменяя здесь τ значением $\tau + \theta$, мы видим, что эти поверхности допускают группу винтовых движений (1), где

$$c = a \cos \alpha. \quad (12)$$

В частности, для $\alpha = 0$ из (10) следует

$$x_1 = a \operatorname{sh} \rho \sin \tau, \quad x_2 = -a \operatorname{sh} \rho \cos \tau, \quad x_3 = a \tau, \quad (13)$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{x_3}{a} + \frac{x_1}{x_2} = 0. \quad (14)$$

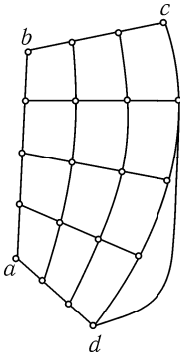


Рис. 54

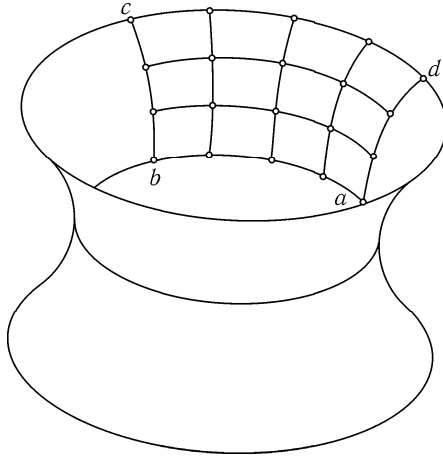


Рис. 55

Эта поверхность, несущая семейство прямых $\tau = \text{const}$, называется *прямым геликоидом* (рис. 54); приближенно такую поверхность напоминает винтовая лестница. К а т а л а н (Е. Catalan, 1814–1894) в 1848 г. показал, что прямые геликоиды являются единственными линейчатыми минимальными поверхностями; это легко следует из того, что по Шварцу (§ 73) такая поверхность симметрична относительно каждой из своих прямолинейных образующих.

Для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ мы получаем минимальную поверхность, присоединенную к прямому геликоиду:

$$x_1 = a \operatorname{ch} \rho \cos \tau, \quad x_2 = a \operatorname{ch} \rho \sin \tau, \quad x_3 = a \rho. \quad (15)$$

Она возникает при вращении цепной линии (рис. 20 и 55)

$$x_1 = a \operatorname{ch} \frac{x_3}{a} \quad (16)$$

вокруг x_3 -оси и потому называется *цепной поверхностью*. Наряду с этим применяются также названия *катеноид* и *алиссеид* (Alysseid). Нетрудно понять, что эти поверхности являются единственными вещественными минимальными поверхностями вращения, так как цепные линии являются единственными меридианами, для которых отрезки между точкой пересечения нормали с осью вращения и центром кривизны меридиана пересекаются меридианом пополам (рис. 20). Минимальные винтовые поверхности (10) нашел в 1854 г. бременский профессор Шерк (H. F. Scherk, 1798–1885). Линейный элемент этих поверхностей имеет вид

$$ds^2 = (a \operatorname{ch} \rho)^2 (d\rho^2 + d\tau^2). \quad (17)$$

Следовательно, все они налагаются на (покрывающую бесконечное число раз) цепную поверхность, причем так, что винтовые линии ($\rho = \text{const}$) винтовых поверхностей переходят в параллели поверхности вращения. На рис. 54, 55 представлены два изометричных четырехугольника $abcd$ на винтовой поверхности и на цепной поверхности. При этом у винтовой поверхности точки a и b лежат на оси винта, а у цепной поверхности — на ее горловой окружности¹ [19].

§ 77. Минимальные поверхности Эннепера

В тесной связи с темой предыдущего раздела находится следующая задача:

Определить вещественные минимальные поверхности, все линии кривизны, которых — плоские.

Если линия кривизны r поверхности f лежит в плоскости e (для этой плоскости r также, разумеется, служит линией кривизны), то на основании теоремы Бонне (§ 23) e и f пересекаются вдоль r под постоянным углом. Значит, сферическое отображение линии r является окружностью на единичной сфере k . Поэтому сферические образы линий кривизны нашей поверхности образуют на k ортогональную сеть окружностей. Плоскости двух окружностей на сфере k , пересекающихся под прямым углом, полярно сопряжены относительно k , т. е. каждая из них проходит через полюс другой. Следовательно, ортогональные сети окружностей на k получаются следующим образом: надо взять две

¹ Граф (H. Graf) и Томас (H. Thomas) изучали нитяные сети переноса с изотропным распределением напряжений на поверхностях Шерка. Math. z., 51 (1948), стр. 166–196. [Распределение напряжений в нитяной сети называется изотропным, если в каждом узле сети натяжения обеих нитей одинаковы. (Прим. перев.)]

взаимно полярные относительно k прямые G_1 и G_2 . Плоскости, проходящие через эти прямые, высекут на k ортогональную сеть окружностей; обратно, всякая такая сеть получается подобным способом.

Рассмотрим сначала вкратце «общий случай», когда G_1 и G_2 не пересекаются. Тогда одна из этих прямых, например G_1 , пересекает k в вещественных различных точках a, b , и соответствующее семейство окружностей состоит из всех окружностей, проходящих через a и b . С помощью одной из деформаций, рассмотренных в конце § 75, мы можем достичь того, чтобы новые a и b совпали с концами диаметра сферы. Тогда одно из семейств окружностей будет состоять из больших кругов сферы k , проходящих через a и b . Мы утверждаем: в этом случае соответствие между точками линий r на f , устанавливаемое линиями второго семейства r , есть соответствие конгруэнтности, а линии r являются цепными линиями. Действительно, если x_1, x_2 — две точки линии кривизны r , лежащей в плоскости e , а $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2$ — соответствующие смещения вдоль линий кривизны r'_1, r'_2 , проходящих через x_1 и x_2 , то $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$ перпендикулярны к e , т. е. справедливо соотношение $d\overline{x_1x_2} = 0$, где $\overline{x_1x_2}$ обозначает расстояние между этими точками. Отсюда и следует указанная выше конгруэнтность линий r . Две «соседние» плоскости $e, e + de$ пересекаются по прямой $\mathcal{U}$, на которой располагается одна из совокупностей центров главных кривизин поверхности f для точек линии r , в то время как другая совокупность образована центрами кривизны линии r в плоскости e . Следовательно, в соответствии с замечанием к рис. 20, r является цепной линией с прямой $\mathcal{U}$ в качестве «оси». Поэтому $\mathcal{U}$ жестко связана с r ; отсюда, в силу известного положения кинематики¹, прямая $\mathcal{U}$ неподвижна и в пространстве, т. е. f является поверхностью вращения с осью $\mathcal{U}$.

Таким образом показано: в «общем случае» минимальная поверх-

¹Если a_j — координаты точки по отношению к декартовой системе координат, зависящей от времени t , а x_j — координаты той же точки относительно покоящейся декартовой системы координат, то в матричных обозначениях мы имеем

$$\mathbf{x} = \mathbb{M}\mathbf{a} + \mathbf{x}_0,$$

причем собственная ортогональная матрица $\mathbb{M}$ зависит от t . Отсюда после дифференцирования по t следует

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbb{M}}\mathbf{a} + \dot{\mathbf{x}}_0) + \mathbb{M}\dot{\mathbf{a}},$$

что можно выразить таким образом: вектор $\mathbf{B}_a$ «абсолютной скорости» равен сумме вектора $\mathbf{B}_f$ «переносной скорости» и вектора $\mathbf{B}_b$ «относительной скорости». Итак, из $\mathbf{B}_f = \mathbf{B}_b = 0$ следует $\mathbf{B}_a = 0$.

ность, все линии кривизны которой плоские, получается из цепной поверхности посредством деформации, указанной в § 75. Такие поверхности рассматривали уже Бонне в 1855 г. и Дарбу (Surfaces, т. I, № 206).

Остается еще исследовать исключенный любопытный особый случай, когда полярно сопряженные относительно сферы k прямые G_1 и G_2 пересекаются. Тогда они являются двумя касательными к k , пересекающимися в точке касания под прямым углом. Посредством вращения нашей минимальной поверхности f мы можем добиться того, чтобы в обозначениях (71,4) линии кривизны определялись уравнениями $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Тогда в силу (75,8) функции $g(s)$, $h(t)$ должны быть равны $\pm ic$ с положительным постоянным c . Совершая надлежащее вещественное подобное преобразование, мы можем взять $c = 6$, после чего уравнения нашей минимальной поверхности станут

$$x_1 = R(3s + s^3), \quad x_2 = Ri(3s + s^3), \quad x_3 = R(-3s^2), \quad (1)$$

или, если мы положим $s = a + ib$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3a(1 + b^2) - a^3, & x_2 &= -3b(1 + a^2) + b^3, \\ x_3 &= -3a^2 + 3b^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Наша минимальная поверхность является однозначным (а здесь даже конформным) образом a, b -плоскости. Такая поверхность называется «рациональной». Плоскому сечению поверхности f в проективной a, b -плоскости отвечает линия третьего порядка C_3 . Так как эти C_3 не имеют никаких фиксированных «фундаментальных точек», не зависящих от выбора плоскости, то каждая прямая пересекает f в девяти точках (при правильном подсчете, с учетом мнимых точек пересечения). Итак, наша поверхность — девятого порядка¹.

Впервые эту поверхность изучил в 1864 г. геттингенский математик Эннепер (A. Enneper, 1830–1885). Ее линии кривизны $a, b = \text{const}$ — плоские и расположены в плоскостях, проходящих через

¹Если мы положим

$$x^j = \sum_{p+q+r=3} a_{pqr}^{(j)} t_1^p t_2^q t_3^r; \quad j = 1, 2, \dots, 10; \quad p, q, r = 0, 1, 2, 3,$$

где справа стоят линейно независимые кубичные формы, то наша минимальная поверхность является «проекцией» этой «поверхности Веронезе» (Veronese, 1854–1917) в проективном R_9 .

оси x_2 и x_3 , так как из (2) следует

$$x_1 - ax_3 = 3a + 2a^3, \quad x_2 - bx_3 = -3b - 2b^3. \quad (3)$$

Основные квадратичные формы на основании 2 и (71,4) имеют вид

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} d\mathbf{x} &= 9(1 + a^2 + b^2)^2 (da^2 + db^2), \\ d\mathbf{x} d\mathbf{a}_3 &= 6(da^2 - db^2), \quad d\mathbf{a}_3 d\mathbf{a}_3 = 4 \frac{da^2 + db^2}{(1 + a^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда мера кривизны равна

$$K = -\frac{4}{9(1 + a^2 + b^2)}. \quad (5)$$

Если в первом уравнении (4) зафиксировать одну из координат, например b , то мы видим, что длина дуги линии кривизны, вдоль которой изменяется a , рационально выражается через a :

$$\text{длина дуги} = 3a(1 + b^2) + a^3. \quad (6)$$

Асимптотические линии $a \pm b = \text{const}$ являются пространственными кривыми третьего порядка; их длина дуги также выражается рационально.

Из (71,4) и (2) можно получить уравнение касательных плоскостей к f :

$$2ax_1 + 2bx_2 + (1 - a^2 - b^2)x_3 = 3(a^2 - b^2) + (a^4 - b^4). \quad (7)$$

Если обозначить коэффициенты этого уравнения через u_j , то можно показать, что четыре однородные плоскостные координаты u_j , удовлетворяют однородному уравнению шестой степени. Итак, наша поверхность является поверхностью шестого класса, т. е. через каждую прямую проходит шесть касательных плоскостей к этой поверхности (конечно, при правильном их подсчете).

Как заметил Д а р б у, уравнение (7) может быть наглядно истолковано. Уравнение

$$2(p - q)x = pp - qq \quad (8)$$

представляет плоскость, относительно которой точки p, q расположены симметрично. Но уравнение (8) принимает вид (7), если только мы положим

$$\begin{aligned} p_1 &= +4a, & p_2 &= 0, & p_3 &= -2a^2 + 1; \\ q_1 &= 0, & q_2 &= -4b, & q_3 &= +2b^2 - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

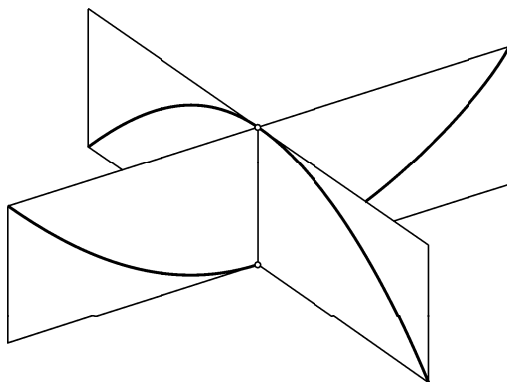


Рис. 56

Линии $p(a)$, $q(b)$ являются двумя параболой в перпендикулярных плоскостях $x_2 = 0$, $x_1 = 0$; они располагаются так, что вершина каждой из них является одновременно фокусом другой (рис. 56). Это — *фокальные параболы*.

Итак, мы находим способ образования нашей поверхности, указанной Д а р б у (Surfaces, т. I, № 207):

Если точки p и q пробегают независимо друг от друга две фокальные параболы, то плоскости, относительно которых эти точки симметричны, огибают минимальную поверхность Эннепера.

Поверхности Э н н е п е р а, дающие особый случай решения задачи, послужившей исходным пунктом этого параграфа, могут быть получены и с помощью предельного перехода из общего случая, если заставить сближаться базисные точки ортогональной сети окружностей на сфере.

§ 78. Взгляд на задачу Плато

Мы будем теперь понимать задачу Плато следующим образом: *через замкнутую линию r провести гладкую минимальную поверхность f , имеющую r своей границей*. Риман и Вейерштрасс прежде всего заметили, что эту задачу можно поставить сравнительно просто, если r является многоугольником, составленным из прямоугольных отрезков. Предположим, что сферическое отображение f^* поверхности f «однолистно» (т. е. не имеет кратных точек на поверхности единичной сферы k). Тогда f^* снова является многоугольником на k со

сторонами-дугами больших кругов, плоскости которых ортогональны прямолинейным сторонам r . С помощью аналитической функции

$$p_0 = \int \sqrt{g(t)} dt \quad (1)$$

область f^* на сфере k (играющей роль числовой сферы Р и м а н а для t) конформно отображается на область f^{**} комплексной p_0 -плоскости. Но эта область снова является прямолинейным многоугольником. Действительно, прямолинейные стороны r являются асимптотическими линиями поверхности f , а их образы в p_0 -плоскости, согласно § 72, изображаются прямыми линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (если $p_0 = u + iv$). Обратно, если известно конформное отображение $p_0 = p_0(t)$ многоугольника $f^{**}p_0$ -плоскости на многоугольник f^*t -сферы k , то из соотношения (1) определится функция $g(t)$, а затем посредством формул (75,16) будет построена и наша минимальная поверхность f . Итак, в этом случае задача П л а т о сводится по существу к задаче конформного отображения сферического многоугольника f^* на плоский многоугольник f^{**} .

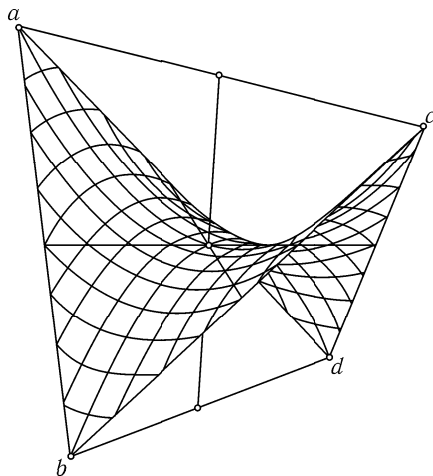


Рис. 57

Эта мысль была подробнейшим образом проведена для одного особого случая Ш в а р ц е м в сочинении на премию за 1867 г. Именно, если a, b, c, d — четыре вершины правильного многогранника, то четыре его ребра ab, bc, cd, da образуют «косой четырехугольник» r . Для это-

го четырехугольника задача Плато, согласно Шварцу, может быть полностью решена (рис. 57), а соответствующая минимальная поверхность — представлена с помощью «эллиптических функций». При отражении в четырех ребрах многоугольника r поверхность f , согласно § 73, переходит в «аналитическое продолжение» f . Четыре этих отражения порождают группу движений G , посредством которой из f возникает минимальная поверхность F , переводящаяся в себя преобразованиями группы G . Это исследование Шварца, связанное с работой Клейна (1884 г.) о правильном двадцатиграннике, особенно прозрачно изложено в учебнике Бьянки, 1922 г.

Вопрос о существовании решений задачи Плато при надлежащих предположениях о границе r в последнем десятилетии разработан главным образом Бернштейном (S. Bernstein), Хааром (A. Haar), Дугласом (J. Douglas), Радом (T. Rado), Курантом (R. Courant). Я укажу вкратце на основные идеи Дугласа [20].

Будем считать граничную линию r образом единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ в плоскости u, v :

$$x_j = x_j(\theta); \quad u = \cos \theta, \quad v = \sin \theta. \quad (2)$$

Тогда, если u, v — прямоугольные координаты на поверхности f , ограниченной контуром r , то ее элемент дуги имеет вид

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2; \quad E, G > 0, \quad (3)$$

а мера площади поверхности f равна

$$A = \iint_{u^2+v^2 < 1} \sqrt{EG} du dv \geq \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 < 1} (E + G) du dv = B. \quad (4)$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$B = \frac{1}{2}(D_1 + D_2 + D_3), \quad D_j = \iint_{u^2+v^2 < 1} \left\{ \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 \right\} du dv. \quad (5)$$

В этой формуле величины D_j являются интегралами Дирихле, рассматривавшимися в § 55. В частности, если f — минимальная поверхность, а u и v — изотермические координаты на ней, то будет справедливо равенство $E = G$, а тем самым и $A = B$. Поэтому требова-

нию минимальности можно придать такую форму, чтобы при заданной границе r наименьшее значение принимало не A , а B . Но величиной B , составленной из интегралов Дирихле, пользоваться проще. Если $x_j(u, v)$ — гармонические функции, то с помощью так называемого интеграла Пуассона (Poisson, 1781–1840) величину B можно представить в следующем виде:

$$B = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{j=1}^3 \{x_j(\theta) - x_j(\varphi)\}^2}{4 \sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}} d\theta d\varphi. \quad (6)$$

При этом из (5) следует, что B не зависит от распределения значений θ на линии r . Используя этот вид (6) для B , удастся доказать существование наименьшего значения при слабых предположениях о границе r . Тем самым одновременно получается и новое доказательство римановой теоремы об отображении, согласно которой каждая односвязная область может быть конформно отображена на внутренность круга.

§ 79. Задачи, теоремы

1. Минимальные поверхности Бура. Для вещественных минимальных поверхностей, изометричных поверхности вращения, в формуле (75,16) нужно положить

$$g = cs^m, \quad (1)$$

где c и m — постоянные. Этот результат нашел в 1862 г. профессор механики Парижской политехнической школы Бур (J. E. Bour, 1832–1866) в своем сочинении на премию. Ср. превосходный учебник V. и К. Коммерелл (1871 г.), Теория пространственных кривых и кривых поверхностей, 2 тома, 4 Auflage, Berlin и Leipzig, 1931, т. 2, § 13.

2. Вторая вариация площади поверхности. Рассмотрим подробнее, чем в § 68, семейство поверхностей

$$x(u, v; w) = x_0(u, v) + r(u, v; w)a_0(u, v), \quad (2)$$

где a_0 означает единичный вектор нормали к исходной поверхности f_0 , с радиусом-вектором $x_0(u, v)$, а $r(u, v; 0) = 0$. Если мы будем обозначать

точкой частную производную по w при $w = 0$, то можно получить следующее выражение для «второй вариации» меры площади:

$$\ddot{A} = \int_{f_0} (2\dot{r}^2 + \nabla \dot{r}) [\sigma_1 \sigma_2]. \quad (3)$$

В этой формуле $[\sigma_1 \sigma_2]$ обозначает элемент площади поверхности f_0 , а ∇ — первый дифференциальный параметр Б е л ь т р а м и поверхности f_0 по отношению к $\sigma_1 \sigma_2$. В частности, если f_0 — минимальная поверхность, то, как показал в 1872 г. Ш в а р ц,

$$\ddot{A} = \int_{f_0} (2\dot{r}^2 - \nabla' \dot{r}) [\omega_1 \omega_2]. \quad (4)$$

Здесь ∇' обозначает дифференциальный параметр сферического отображения поверхности f_0 , а $\omega_1 \omega_2$ — элемент площади этого сферического отображения. Таким образом, в этом случае (2) зависит лишь от сферического отображения. Отсюда, по Ш в а р ц у, получается новая форма условия Я к о б и: для осуществления минимума в задаче П л а т о необходимо, чтобы дифференциальное уравнение

$$2\lambda h + \nabla' h = 0 \quad (5)$$

с условием $h = 0$ на границе $r(f_0)$ имело лишь «собственные значения» $\lambda \geq 1$, и достаточно, чтобы в некоторой окрестности выполнялось неравенство $\lambda > 1$. Здесь ∇' — второй дифференциальный параметр Б е л ь т р а м и сферического отображения. Отсюда можно без труда дать примеры ограниченных минимальных поверхностей, не дающих при заданной границе минимума площади.

3. Теорема Штейнера. Если $x_3 = f_1(x_1, x_2)$, $x_3 = f_2(x_1, x_2)$ — две минимальные поверхности с общей границей r и равной площадью, то в этом случае третья поверхность $2x_3 = f_1 + f_2$ имеет меньшую площадь* (Ш т е й н е р, 1842 г.).

4. Неориентируемые минимальные поверхности Ли. Изменение направления нормали на противоположное сопровождается следующим преобразованием величин, введенных в § 75:

$$s' = -\frac{1}{t}, \quad t' = -\frac{1}{s}, \quad g' = -t^4 h, \quad h' = -s^4 g. \quad (6)$$

Отсюда можно получить условие того, что минимальная поверхность «неориентируема», т. е. что при обходе по некоторому пути направление нормали

* Отсюда следует, что через замкнутую кривую не могут проходить две поверхности наименьшей площади, могущие быть представленными уравнениями $x_3 = f_1(x_1, x_2)$, $x_3 = f_2(x_1, x_2)$.

изменяется на обратное; С. Ли, 1878 г. Согласно Ли, эти поверхности называются «двойными минимальными поверхностями».

5. Мнимые минимальные поверхности третьего порядка Ли. Поверхность середин хорд изотропной пространственной линии третьего порядка является алгебраической линейчатой минимальной поверхностью третьего порядка. Как обнаружил Штуди, все такие поверхности конгруэнтны друг другу и при надлежащем выборе декартовых координат x_j могут быть представлены следующим образом:

$$2(x_1 - ix_2)^3 - 6i(x_1 - ix_2)x_3 - 3(x_1 + ix_2) = 0. \quad (7)$$

Изучите группу подобных преобразований этой поверхности в себя (Ли, 1879 г.; Штуди, 1911 г.).

6. Мнимая минимальная поверхность четвертого порядка Гейзера. Минимальную поверхность

$$(x_1 - ix_2)^4 + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad (8)$$

можно рассматривать как поверхность вращения вокруг изотропной оси $x_1 - ix_2 = 0, x_3 = 0$ (Штуди, 1911 г.).

7. Деформация минимальных поверхностей. В обозначениях § 72 изотропная линия удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^4 y}{dp_0^4} = \frac{1}{2} \frac{dJ}{dp_0} \frac{dy}{dp_0} + J \frac{d^2 y}{dp_0^2}. \quad (9)$$

Величина I является дифференциальным инвариантом наинизшего порядка относительно (комплексных) движений. I можно выразить через функцию $w(s)$, введенную в (75,4):

$$I = \left(\frac{d^3 y}{dp_0^3} \right)^2 = \frac{4w_3 w_5 - 5w_4^2}{4w_3^3}, \quad (10)$$

где w_3 , например, означает третью производную от w по s (Штуди, 1909 г.). Исследуйте геометрическое значение I для вещественной минимальной поверхности, отвечающей линии $y(p)$. Здесь I является инвариантом по отношению к деформациям вещественных минимальных поверхностей, рассматривавшимся в § 75. Можно получить еще более широкую совокупность таких деформаций, подвергая изотропную линию $y(p)$ произвольному комплексному конформному преобразованию евклидова пространства.

Комментарии

[1] (стр. 32). К настоящему времени известны разнообразные обобщения теоремы о четырех вершинах овала. Интерес к предмету поддерживается как благодаря красоте и естественности получаемых результатов, так и благодаря их связям с другими разделами математики, например — с теорией особенностей дифференцируемых отображений (см. *В. И. Арнольд*. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова 209, 11–56 (1995)) или с симплектической геометрией (см. *В. И. Арнольд*. Успехи мат. наук 50, № 1, 3–68 (1995)). Укажем несколько характерных результатов.

Каждая гладкая связная замкнутая выпуклая кривая в трехмерном евклидовом пространстве, кривизна которой всюду отлична от нуля, имеет не менее четырех точек с нулевым кручением. *В. Д. Седых*. Функц. анализ прилож. 26, № 1, 35–41 (1992). Здесь, как обычно в данной проблематике, пространственная кривая называется выпуклой, если она лежит на границе своей выпуклой оболочки.

Замкнутая несамопересекающаяся выпуклая n -звенная ломаная в пространстве с $n > 3$ имеет не менее четырех опорных вершин. *В. Д. Седых*. Функц. анализ прилож. 30, № 3, 88–90 (1996). Здесь вершина пространственной ломаной называется опорной, если через нее и две соседние вершины проходит опорная плоскость, т. е. такая плоскость, что вся ломаная содержится в одном из двух замкнутых полупространств, определяемых этой плоскостью. О других дискретных аналогах теоремы о четырех вершинах овала можно прочесть, например, в обзоре *B. Wegner*. Math. Pannonica 6, № 1, 121–132 (1995).

Выпуклая кривая в четномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2k}$ имеет по крайней мере $2k + 2$ точки, в которых радиус кривизны соприкасающейся гиперболы достигает экстремальных значений. *R. Uribe Vargas*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 321, № 10, 1353–1358 (1995). То же утверждение справедливо для четномерного пространства Лобачевского. *R. Uribe Vargas*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I Math. 325, № 5, 505–510 (1997).

Некоторые аналоги теоремы о четырех вершинах овала известны для конформной плоскости (см. *G. Spoor*. J. Geom. 33, № 1/2, 147–154

(1988)), пространства Минковского (см. *B. Wegner. Elem. Math.* 46, № 6, 170–173 (1991)) и многогранников в евклидовом пространстве (см. *A. Schattenman. Geom. Dedicata* 34, № 3, 229–242 (1990)).

[2] (стр. 33). При наиболее слабых предположениях о гладкости функций k и w эта теорема доказана Ю. Ф. Борисовым в *Сиб. мат. журн.* 38, № 3, 485–503 (1997). Там исследован сразу случай кривых в многомерных псевдоевклидовых пространствах.

[3] (стр. 42). Несмотря на то, что выпуклые тела постоянной ширины были и остаются объектом многочисленных исследований, здесь все еще имеется много открытых проблем. Например, хорошо известная классическая теорема Блашке–Лебега утверждает, что среди выпуклых множеств постоянной ширины на евклидовой плоскости имеется только одно-единственное с минимальной площадью — упомянутый в тексте треугольник Рело. Аналогичный результат для плоскости Лобачевского был получен лишь недавно. *P. V. Araujo. Geom. Dedicata* 64, no.1, 41–53 (1997). А вот аналог теоремы Блашке–Лебега для евклидовых пространств размерностей ≥ 3 не известен до сих пор.

Более подробно о телах постоянной ширины см. *И. М. Яглом, И. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры.* М.-Л.: Гостехиздат (1951). Исключительно детально современное состояние исследований о телах постоянной ширины обсуждается в книге *V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan. Excursions into combinatorial geometry.* Berlin: Springer. 420 p. (1997). Там же дана обширная библиография.

[4] (стр. 101). История создания геометрии Лобачевского освещена во многих работах. См., например, книгу *Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций.* М.: Наука (1981). В ней детально излагается суть вопроса и приводится обширная библиография.

[5] (стр. 111). Поверхность называется поверхностью Лиувилля, если ее линейный элемент представим в виде $(56,17)$. В 1940 году В. Альт показал, что в трехмерном евклидовом пространстве всякая минимальная поверхность Лиувилля локально изометрична некоторой поверхности вращения. Элементарное доказательство этого факта см. в статье *J. Berndt, J. Bolton, L. Woodward*, опубликованной в книге *Geometry and topology of submanifolds*, V. Singapore: World Scientific (1993).

[6] (стр. 120). Изотермические координаты были, например, существенным образом использованы при изучении двумерных многообразий ограниченной кривизны, введенных А. Д. Александровым. Можно сказать, что многообразие ограниченной кривизны характеризуется наличием верхней границы для сумм избытков неперекрывающихся треугольников, составленных из кратчайших и расположенных в произвольной компактной подобласти. Ю. Г. Решетняк установил принципиально иной взгляд на этот объект, доказав, что двумерное многообразие обладает ограниченной кривизной, если и только если соответствующая метрика может быть задана элементом длины $ds^2 = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$, где функция $\ln f(x, y)$ представляет собой разность двух субгармонических функций. Ю. Г. Решетняк. Сиб. мат. журн. 1, № 1, 88–116 (1960) и Сиб. мат. журн. 1, № 2, 248–276 (1960).

[7] (стр. 146). К настоящему времени известны теоремы устойчивости, соответствующие упомянутым в тексте теоремам Лиувилля (о том, что конформное преобразование евклидова пространства переводит сферы в сферы) и Дарбу (о том, что если все точки поверхности являются омбилическими, то эта поверхность является куском сферы или плоскости). Ю. Г. Решетняк. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН (1996). Опишем эти теоремы устойчивости более детально.

Конформное преобразование пространства характеризуется тем, что его дифференциал переводит шар в шар (быть может даже нулевого радиуса). Гладкое отображение области D пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в пространство $\mathbb{R}^n$ называется K -квазиконформным, $K \geq 1$, если для каждой точки $x \in D$ его дифференциал переводит шар в эллипсоид, у которого отношение максимальной полуоси к минимальной не превосходит K . В общем случае применяется другое определение, при котором K -квазиконформное отображение необязательно является гладким. Отображение, переводящее сферы в сферы, называется мёбиусовым. В этих обозначениях теорема Лиувилля звучит так: 1-квазиконформное отображение является мёбиусовым. При этом утверждение о том, что в теореме Лиувилля имеет место устойчивость, означает, что при K , стремящемся к 1, любое K -квазиконформное отображение неограниченно стремится к мёбиусовым. Ясно, что последнему утверждению можно придавать несколько разный смысл в зависимости от того, что подразумевать под словом «стремится». Соответственно и теорем устойчивости известно несколько.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $n \geq 3$. $(n - 1)$ -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ называется ε -квазиомбилической, если главные кривизны $k_1, k_2, \dots, k_n$ этой поверхности, подсчитанные в произвольной точке, либо все равны нулю, либо все отличны от нуля и отношения k_i/k_j заключены между $1/(1+\varepsilon)$ и $1+\varepsilon$. В этих обозначениях теорема Дарбу означает, что всякая 0-квазиомбилическая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, является либо куском сферы, либо куском гиперплоскости. При этом соответствующая теорема устойчивости означает, что при малом $\varepsilon > 0$ всякая ε -квазиомбилическая поверхность мало отличается от сферы или от гиперплоскости.

[8] (стр. 153). На всякой вложенной в пространство поверхности можно задать внутреннюю метрику, приняв за расстояние между любыми двумя точками поверхности точную нижнюю грань длин кривых, лежащих на этой поверхности и соединяющих данные точки.

Две изометричные во внутренних метриках выпуклые гомеоморфные сфере поверхности в $\mathbb{R}^3$ совмещаются движением (возможно, не сохраняющим ориентацию). Это утверждение доказано А. В. Погореловым без каких-либо предположений о гладкости поверхностей. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука (1969). Там же аналогичные утверждения доказаны для трехмерного сферического пространства и трехмерного пространства Лобачевского (см. также А. Д. Милка. Укр. геом. сб. 23, 99–107 (1980)), а также найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две изометричные во внутренних метриках некомпактные полные выпуклые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве совмещались движением.

Независимое доказательство теоремы А. В. Погорелова вытекает из теоремы устойчивости Ю. А. Волкова, согласно которой, если выпуклые гомеоморфные сфере поверхности в $\mathbb{R}^3$ имеют близкие внутренние метрики, то их пространственные формы отличаются мало. Точнее, существуют постоянные $0 < C < \infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что если для некоторого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует гомеоморфное отображение таких поверхностей, изменяющее внутреннее расстояние между любыми двумя точками не более чем на ε , то каждая из этих поверхностей подходящим движением всего пространства может быть помещена в $C\varepsilon^{1/24}$ -раздутье второй поверхности. Ю. А. Волков. Укр. геометр. сб. 5/6, 44–69 (1968).

Многомерный вариант теоремы А. В. Погорелова доказан Е. П. Сенькиным в Укр. геометр. сб. 12, 131–152 (1972).

При отказе от выпуклости обсуждаемые теоремы, очевидно, перестают быть верными. Однако до сих пор нет примера непрерывного семейства компактных без края вложенных в $\mathbb{R}^3$ невыпуклых попарно изометричных во внутренних метриках поверхностей класса C^l , $l \geq 2$, попарно не совмещаемых движением всего пространства. Благодаря работам Дж. Нэша и Н. Кёйпера известно, что любая поверхность (даже сфера) может быть включена в подобного рода семейство поверхностей класса C^1 . *J. Nash. Ann. Math.* 60, 383–396 (1954). Пер. на рус. яз.: *Дж. Нэш. Математика. Сб. переводов.* 1:2, 3–16 (1957). *N. Kuiper. Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetensch. (Indag. Math.) Ser. A.* 58, № 4; 5, 545–556; 683–689 (1955). Пер. на рус. яз.: *Н. Кёйпер. Математика. Сб. переводов.* 1:2, 17–28 (1957). Р. Коннелли построил пример гомеоморфного сфере многогранника в $\mathbb{R}^3$ (не имеющего самопересечений), который может быть включен в непрерывное семейство изометричных ему (во внутренних метриках) многогранников, причем сужение этой изометрии во внутренних метриках на каждую грань многогранника сохраняет все евклидовы расстояния, а никакие два многогранника данного семейства не совмещаются евклидовым движением объемлющего пространства. Такие многогранники называются изгибаемыми. Более подробно о них можно узнать, например, из следующих работ И. Х. Сабитова: *Итоги науки и техники. Совр. пробл. математ. Фундамент. направл. ВИНТИ.* 48, 196–270 (1989) и *Мат. сб.* 189, № 10, 105–134 (1998).

[9] (стр. 157). К настоящему времени проблему существования и гладкости изометрических погружений метрик положительной кривизны можно считать полностью решенной. Например, известно, что гомеоморфное сфере $C^{l,\alpha}$ -гладкое, $l \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, двумерное риманово многообразие положительной кривизны допускает $C^{l,\alpha}$ -гладкое изометрическое погружение в $\mathbb{R}^3$ в виде выпуклой поверхности. *И. Х. Сабитов. Сиб. мат. журн.* 17, № 4, 907–915 (1976). При этом можно утверждать, что если риманова метрика аналитическая, то и поверхность аналитическая. Более подробно об истории исследований, достигнутых результатах и примененных при этом методах можно узнать, например, из обзора *Ю. Д. Бураго. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математ. Фундамент. направл. ВИНТИ.* 48, 5–97 (1989).

[10] (стр. 162). Пусть поверхность S задана своим радиус-вектором $r: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Векторное поле $\zeta: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется беско-

нечно малым изгибанием поверхности S , если метрика поверхности S_t , задаваемой радиус-вектором $r + t\zeta$ стационарна при $t = 0$ (эквивалентно — если для любой кривой в D длина ее образа на S_t стационарна; эквивалентно — если $dr d\zeta = 0$). Всякое движение поверхности S как твердого тела порождает на S поле скоростей. Это поле, конечно, является бесконечно малым изгибанием S , но называется тривиальным. Поверхность S называется жесткой, если она не допускает нетривиального бесконечно малого изгиба.

Известно, что гомеоморфная сфере выпуклая поверхность является жесткой вне плоских областей. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука (1969). Никаких условий регулярности поверхности при этом не требуется. Более того, из этой теоремы может быть выведена следующая теорема об однозначной определенности выпуклой поверхности, о которой речь шла выше в комментарии [6]: две изометричные во внутренних метриках выпуклые гомеоморфные сфере поверхности в $\mathbb{R}^3$ совмещаются движением.

В окрестности точки с ненулевой кривизной любая поверхность является локально нежесткой. Однако существуют аналитические поверхности, локально жесткие в сколь угодно малой окрестности точки уплощения. См., например, обзор И. Х. Сабитова: *Итоги науки и техники. Совр. пробл. математ. Фундамент. направл. ВИНТИ*. 48, 196–270 (1989).

[11] (стр. 167). Более свежие результаты о неравенстве Бруна–Минковского, изопериметрических неравенствах и смешанных объемах см. в книге Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. Геометрические неравенства. Л.: Наука (1980).

[12] (стр. 168). Благодаря, в первую очередь, работам А. Д. Александрова, А. В. Погорелова, Л. Ниренберга (L. Nirenberg), С. Ю. Чена (Shiu-Yuen Cheng) и С.-Т. Яу (Shing-Tung Yau), в отношении проблемы Минковского прогресс был достигнут по следующим направлениям: (а) выявлена связь проблемы Минковского с вещественными уравнениями Монжа–Ампера; (б) доказано существование обобщенного решения проблемы Минковского (или, что то же самое, уравнения Монжа–Ампера $\det(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j) = F(x, u)$); (в) прослежено, в какой мере гладкость функции, задающей произведение главных кривизн (соответственно, — гладкость F), определяет гладкость поверхности (соответственно, — гладкость u); (г) получены многомерные обобщения. Характерные результаты таковы:

Пусть заданная на единичной гиперсфере S^{n-1} положительная регулярная класса C^m , $m \geq 3$, функция $K(a)$ удовлетворяет условию

$$\int_{S^{n-1}} \frac{a \, dS}{K(a)} = 0,$$

где dS — стандартная мера на S^{n-1} . Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса регулярная класса $C^{m,\alpha}$ ($\alpha > 0$) выпуклая гиперповерхность с гауссовой кривизной $K(a)$. Если функция $K(a)$ — аналитическая, то гиперповерхность — также аналитическая. *А. В. Погорелов*. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука (1975).

Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная строго выпуклая область с границей класса C^2 , пусть $f \in C^2(\overline{D})$ и пусть $F \in C^k(D)$, $k \geq 3$, положительна и непрерывна в $\overline{D}$. Тогда в $\overline{D}$ существует непрерывная строго выпуклая функция u такая, что $u \in C^{k+1,\beta}$ для некоторого $\beta \in (0, 1)$, $\det(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j) = F(x)$ и $u|_{\partial D} = f|_{\partial D}$. *А. В. Погорелов*. Многомерное уравнение Монжа–Ампера. М.: Наука (1988); *Yau, Shing-Tung*. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki 1978, Vol. 1, 237–250 (1980).

Имеются также интересные результаты о существовании и единственности выпуклых поверхностей, главные кривизны которых связаны некоторым функциональным соотношением (иногда такие поверхности называют поверхностями Вейнгартена). Например, известно, что если $f(R_1, R_2, n)$ — функция положительных переменных R_1 и R_2 и единичного вектора n , строго монотонная по переменным R_1 и R_2 и если гомеоморфные сфере выпуклые поверхности S и S' в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию $f(R_1, R_2, n) = f(R'_1, R'_2, n)$ для всех точек поверхностей S и S' с параллельными и одинаково направленными внешними нормальными n , то S и S' конгруэнтны и параллельно расположены, т. е. могут быть совмещены параллельным переносом. Здесь $R_1 \leq R_2$ и $R'_1 \leq R'_2$ — главные радиусы кривизны поверхностей S и S' соответственно.

Относительно невыпуклых поверхностей Вейнгартена см., например *R. Sa Earp, E. Toubiana*. Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Ser. 26, № 2, 129–148 (1995). Классическими примерами поверхностей Вейнгартена являются минимальные поверхности и поверхности с постоянной средней кривизной. Более подробно о них см. комментарий [15] ниже.

[13] (стр. 169). Известен следующий многомерный вариант теоремы Бонне: Если гауссова кривизна K выпуклой поверхности $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$

удовлетворяет неравенствам $a^n \leq K \leq b^n$, то диаметр D и ширина Δ поверхности S удовлетворяют неравенствам

$$D \leq \frac{2}{b} + \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n b} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{(n+1)^2} - 1 \right]; \quad \Delta \geq \frac{2}{a} - \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{a\omega_n} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{(n+1)} \right].$$

(См. *В. И. Дискант*. Докл. АН СССР. 153, № 3, 516–517 (1963)). Здесь ω_n — объем n -мерного евклидова шара.

Имеются любопытные продвижения в близкой задаче об оценке радиуса шара, вписанного в (необязательно выпуклую) поверхность: если на плоскости мы имеем интуитивно предсказуемый результат, то в трехмерном пространстве радиус шара, с гарантией вписываемого в тело, ограничиваемое данной поверхностью, оказывается удивительно малым. Точнее: если радиус кривизны замкнутой простой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ всюду больше или равен R , то в ограниченной компоненте связности дополнения кривой γ найдется круг радиуса R . *Г. Г. Пестов, В. К. Ионин*. Докл. АН СССР. 127, № 5, 1170–1172 (1959). Однако, обозначив через F_R класс дважды дифференцируемых компактных поверхностей без края в $\mathbb{R}^3$, у которых в каждой точке главные радиусы кривизны не меньше R , можем утверждать, что (а) в ограниченной компоненте связности дополнения любой поверхности класса F_R найдется шар радиуса $R[(2/\sqrt{3}) - 1] \approx 0.15R$; (б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется поверхность класса F_R , в ограниченной компоненте связности дополнения которой не найдется шара радиуса $R[(2/\sqrt{3}) - 1] + \varepsilon$. *В. Н. Лагунов*. Сиб. мат. журн. 1, № 2, 205–232 (1960); Сиб. мат. журн. 2, № 6, 874–883 (1961).

По поводу других родственных задач см. *F. Labourie*. Math. Z. 197, № 4, 551–559 (1988) и *В. К. Ионин*. Сиб. мат. журн. 39, № 4, 700–715 (1998).

[14] (стр. 170). За последние 50 лет проблемам, связанным с существованием замкнутых геодезических, посвящено огромное количество журнальных статей и книг. Интерес к предмету поддерживается тем, что он служит отличным полигоном для применения, например, таких мощных средств современного глобального анализа как теория Морса и теорема Нэша–Мозера о неявной функции. В этом кратком комментарии мы можем коснуться лишь наиболее известных результатов.

Ставшая уже классической теорема Л. А. Люстерника–Б. А. Фета утверждает, что всякое компактное риманово многообразие содержит

нетривиальную замкнутую геодезическую. *Jürgen Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Berlin: Springer (1995).*

Явная оценка роста числа замкнутых геодезических длины $\leq \ell$ на многообразии, гомеоморфном двумерной сфере, получена в статье *N. Hingston. Intern. Math. Res. Notices 9, 253–262 (1993).*

Красивая теорема Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана утверждает, что на любой поверхности, диффеоморфной S^2 , существует по крайней мере три различных несамопересекающихся замкнутых геодезических. См., например, *M. Grayson. Ann. Math. 120, 71–112 (1989)* и *В. Клингенберг. Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир (1982).* Пример эллипсоида показывает, что таких геодезических может быть ровно три.

Геодезические являются экстремалими функционала длины (т. е. 1-мерного объема). Экстремали функционала k -мерного объема называются минимальными поверхностями. Поэтому задача о существовании замкнутых минимальных подмногообразий данного риманова многообразия является очевидным многомерным аналогом задачи о замкнутых геодезических. Здесь получено много замечательных результатов. Например, показано, что в компактном римановом многообразии всегда найдется минимальное подмногообразие, диффеоморфное S^2 . *J. Sacks; K. Uhlenbeck. Ann. Math., II. Ser. 113, 1–24 (1981).* Более подробно о минимальных поверхностях см. в комментариях [15]–[17] ниже.

Обширные исследования посвящены также изучению римановых многообразий, у которых все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину. Например, интуитивное представление о том, что такие многообразия достаточно симметричны, оказывается неверным: в 1976 году В. Гийемин (*V. Guillemin*) доказал, что существует массивное множество метрик на S^2 , у которых все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину, но которые (метрики) не имеют нетривиальных изометрий. Обзор результатов, обсуждение основных идей, наброски доказательств и обширный список литературы по этой проблематике см. в книге *А. Бессе. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир (1981).*

[15] (стр. 170). В настоящее время гипотезой Каратеодори принято называть утверждение о том, что на каждой гладкой гомеоморфной сфере поверхности в $\mathbb{R}^3$ существует по меньшей мере 2 омбилические точки. Для ее исследования используют «полулокальный» подход, описанный В. Блашке в § 69,18: с каждой омбилической точкой

связывается индекс (в обозначениях В. Блашке — $-D/(2\pi)$), где D — «вычет») одного из взаимно ортогональных полей главных направлений поверхности; при этом если бы на поверхности была всего одна омбилическая точка, то, в силу теоремы Пуанкаре об индексе поля направлений, она имела бы индекс 2. Примеры омбилических точек индекса j известны для всех $j \leq 1$. Локальная гипотеза, более сильная, чем гипотеза Каратеодори, утверждает, что не существует омбилических точек с индексом большим 1. Истинность последней гипотезы, называемой гипотезой Бола–Лёвнера, для аналитических поверхностей провозглашалась многими авторами во многих работах, например Н. Hamburger. *Ann. Math.* 41, 63–68 (1940); *Acta Math.* 73, 174–332 (1941), G. Bol. *Math. Z.* 49, 389–410 (1943/1944), T. Klotz. *Comm. Pure Appl. Math.* 12, 277–311 (1959), C. J. Titus. *Acta Math.* 131, 43–77 (1973), H. Scherbel. *Dissertation ETH* № 10281. Тем самым каждый из перечисленных авторов утверждал, что гипотеза Каратеодори справедлива для аналитических поверхностей. Однако в приведенных выше статьях Т. Клоц (T. Klotz) указывает на ошибки, вкравшиеся в доказательство Г. Бола (G. Bol), а Г. Шербель (H. Scherbel) сообщает о некоторых ошибках в работах Т. Клоц (T. Klotz) и К. Титуса (C. J. Titus). Критические замечания содержатся также в работе M. Lang. *Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt* (1990).

По-видимому, и гипотеза Каратеодори, и гипотеза Бола–Лёвнера верны для аналитических поверхностей, но прозрачные доказательства отсутствуют и поиски таких доказательств продолжаются. Одним из последних обзоров по данной проблеме является статья C. Gutierrez, J. Sotomayor. *Resenhas IME-USP* 3, № 3, 291–322 (1998).

По поводу многомерных аналогов гипотезы Каратеодори известно, пожалуй, лишь следующее: как угодно малой деформацией заданной гиперповерхности можно получить гиперповерхность с не менее чем двумя омбилическими точками E. A. Feldman. *Trans. Amer. Math. Soc.* 127, 1–28 (1967).

[16] (стр. 175). О применениях изотермических координат при изучении двумерных многообразий ограниченной кривизны, введенных А. Д. Александровым, мы упоминали выше в комментарии [4].

[17] (стр. 178). (Стр. 183) Х. Хопф установил еще одну взаимосвязь между теорией поверхностей и комплексным анализом (H. Hopf. *Differential Geometry in the Large. Lect. Notes Math.* 1000. Berlin:

Springer (1983)). Именно, он ввел в рассмотрение (не альтернированную) форму $A dp^2$, где $A = \mathbf{n} \partial^2 \mathbf{x} / \partial p^2$, являющуюся квадратичным дифференциалом на поверхности и называемую дифференциалом Хопфа. Оказалось, что дифференциал Хопфа позволяет удобно записывать основные уравнений теории поверхностей (см. уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци – Майнард из § 69,1) и выражать основные свойства поверхностей. Например, известно, что (а) дифференциал Хопфа зануляется в омбилических точках и только в них; (б) дифференциал Хопфа голоморфен (т. е. $\partial A / \partial p = 0$), если и только если поверхность минимальна; (в) поверхность однозначно (с точностью до движений в $\mathbb{R}^3$) определяется метрикой, средней кривизной и дифференциалом Хопфа.

Дифференциал Хопфа стал объектом самостоятельных исследований (см., например, *L.-F. Tam; T. Wan. J. Differ. Geom.* 42, № 2, 368–410 (1995)), особенно успешных в теории замкнутых поверхностей, для которых пространства голоморфных квадратичных потенциалов конечномерны. Например, тот факт, что для сферы пространство голоморфных квадратичных дифференциалов нульмерно, позволяет установить следующую теорему Х. Хопфа: если вложенное в $\mathbb{R}^3$ риманово многообразие, диффеоморфное S^2 , имеет постоянную среднюю кривизну, то оно является стандартной сферой.

В 1956 году А. Д. Александров доказал, что всякое вложение в $\mathbb{R}^{n+1}$ с постоянной средней кривизной компактного n -мерного риманова многообразия задает стандартную сферу. *А. Д. Александров. Вестник Ленингр. ун-та. Сер. Мат.* 19, вып. 4, 5–17 (1956). Там же им было, в частности, доказано, что если на гомеоморфной сфере выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$ главные радиусы кривизны связаны соотношением $f(R_1, R_2) = 0$, $\partial f / \partial R_1 \cdot \partial f / \partial R_2 > 0$, то эта поверхность есть сфера. Один из последних результатов в этом направлении утверждает, что если главные радиусы кривизны полной выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$ связаны соотношением $f(R_1, R_2) = 0$, причем $f(R, R) \neq 0$ и либо $\partial f / \partial R_1 \neq 0$, либо $\partial f / \partial R_2 \neq 0$, то эта поверхность есть прямой круговой цилиндр. *В. А. Топоногов. Сиб. мат. журн.* 37, № 5, 1176–1180 (1996).

Тематика, связанная с погружениями постоянной кривизны получила неожиданное развитие в 1982 году, когда для каждого $n \geq 3$ было построено бесконечно много неконгруэнтных погружений $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ с постоянной средней кривизной 1. *W.-Y. Hsiang. J. Differ. Geom.* 17, 337–356 (1982). Вскоре была обнаружена связь этого вопроса с существованием дважды периодических решений уравнения синус-Гордона,

которая привела сначала к построению погружения двумерных торов в $\mathbb{R}^3$ с постоянной средней кривизной (см. *H. H. Wente*. Pacific J. Math. 121, 193–243 (1986)), а затем и к полной классификации дважды периодических решений уравнения синус-Гордона, а следовательно, и к классификации погружений двумерных торов с постоянной средней кривизной *U. Pinkall, I. Sterling*. Ann. Math. (2) 130, 407–451 (1989). Последний результат может рассматриваться как аналог формул Эннепера–Вейерштрасса, задающих погружение минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ (см. стр. 197–198). Более детально об этом можно прочитать, например, в обзоре *N. Kapouleas*. Proc. Int. Congr. Math. 1994. Vol. 1, 481–490. Basel: Birkhäuser (1995). Таким образом, сопоставление классических теорем Х. Хопфа и А. Д. Александрова (касающихся вложенных поверхностей) с недавними результатами о погруженных поверхностях с постоянной средней кривизной опровергает метаматематическое утверждение, согласно которому всякий результат, справедливый для вложенных поверхностей, справедлив и для погруженных.

[18] (стр. 192). О недавних результатах, аналогичных формулам Эннепера–Вейерштрасса (75,15), см. последний абзац предыдущего комментария. Дополнительно укажем, что каждая полная минимальная поверхность конечной полной кривизны в $\mathbb{R}^3$ может быть представлена парой Вейерштрасса w, k , определенной на подходящей римановой поверхности *M. S.-S. Chern, R. Osserman*. J. Anal. Math. 19, 15–34 (1967). Верно и обратное: для каждой мероморфной функции w на компактной римановой поверхности M существует мероморфная функция k на M такая, что w, k является парой Вейерштрасса для некоторой полной минимальной поверхности конечной полной кривизны в $\mathbb{R}^3$. *K. Yang*. Proc. Am. Math. Soc. 105, № 3, 706–711 (1989).

[19] (стр. 199). В последние годы появилось большое число новых конструкций полных минимальных поверхностей. В определенном смысле они являются далеко идущими обобщениями классических примеров минимальных поверхностей Шерка и Эннепера. Новые методы позволяют строить минимальные поверхности как конечной, так и бесконечной полной кривизны, а также минимальные поверхности, имеющие разные топологические типы и разные симметрии. Приведем несколько характерных результатов.

В $\mathbb{R}^3$ существует семейство вложенных минимальных поверхностей S_y , $y \geq 1$, каждая из которых конформно эквивалентна тору с тремя

выколотыми точками, имеет три конца и конечную полную кривизну. *D. Hoffman, W. Meeks*. J. Differ. Geom. 21, 109–127 (1985). Не существует отличных от S_y , $y \geq 1$, полных минимальных вложенных в $\mathbb{R}^3$ поверхностей конечной полной кривизны, конформно эквивалентных тору с тремя выколотыми точками. *C. J. Costa*. Invent. Math. 105, 273–303 (1991).

Для каждого четного $k \geq 2$ существует полная ориентируемая минимальная поверхность, погруженная в $\mathbb{R}^3$ и имеющая один конец, род k , $4k$ симметрий и полную кривизну $-4\pi(2k-1)$. *F. J. López, F. Martín, D. Rodríguez*. Pacific J. Math. 184, № 2, 311–332 (1998).

Для первоначального знакомства с минимальными поверхностями можно рекомендовать книгу *А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко*. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука (1991). Прекрасный обзор по современному состоянию знаний о полных вложенных минимальных поверхностях конечной кривизны, написанный Д. Хоффманом (*D. Hoffman*) и Г. Карчером (*H. Karcher*), см. в книге *R. Osserman (ed.) et al.*, Geometry V: Minimal surfaces. Berlin: Springer. Encycl. Math. Sci. 90, 5–93 (1997).

[20] (стр. 205). Читатель, желающий познакомиться с современным состоянием исследований по проблеме Плато и ее многомерных обобщений, может обратиться, например, к книгам *А. Т. Фоменко*. Топологические вариационные задачи. М.: МГУ (1984) и *Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко*. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука (1987).

Литература

Мы дадим здесь некоторые сведения об учебниках, в которых излагается материал, связанный с вышеизложенным. Подробные сведения о старой литературе (до 1920 г.) находятся в Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, 3, Leipzig 1902/1927 в статьях Н. V. Mangoldt, R. V. Lilienthal, G. Scheffers, A. Voß, H. Liebmann, E. Salkowski, R. Weitzenböck, L. Berwald.

Bieberbach L., Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin, 1932, 140 S.

Blaschke W., Kreis und Kugel. Leipzig, 1916, 159 S.

Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie. I Elementare Differentialgeometrie. 1 Aufl. Berlin, 1921, 230 S.; 4 Aufl., 1945, 312 S. Имеется русский перевод этой книги: *Блашке*. «Дифференциальная геометрия», ОНТИ, 1935.

Blaschke W. und Reidemeister K., Vorlesungen über Differentialgeometrie. II Affine Differentialgeometrie. Berlin, 1923, 259 S.

Blaschke W. und Thomsen G., Vorlesungen über Differentialgeometrie, III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Berlin, 1929, 474 S.

Blaschke W. und Bol G., Geometrie der Gewebe, topologische Fragen der Differentialgeometrie. Berlin, 1938, 339 S.

Blaschke W., Vorlesungen über Integralgeometrie. I. Leipzig und Berlin, 1935, 48 S.; 2 Aufl., 1936, 59 S. Имеется русский перевод: Успехи математических наук, вып. 5, 1938.

Blaschke W., Vorlesungen über Integralgeometrie. II. Leipzig und Berlin, 1937, 127 S.

Blaschke W., Ebene Kinematik. Leipzig und Berlin, 1938, 56 S.

Blaschke W., Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III. Leipzig und Berlin, 1942, 82 S. Neudruck, 1949.

- Blaschke W.*, Projektive Geometrie. Wölfenbüttel, 1947, 2 Aufl., 1948, 160 S.
- Blaschke W.*, Analytische Geometrie, Wölfenbüttel, 1948, 152 S.
- Cartan E.*, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris, 1945, 214 S.
- Cartan E.*, Lecons sur la géométrie des espaces de *Riemann*. Paris, 1928, 270 S.; 2 Aufl., 1946, 378 S. Имеется русский перевод: *Картан*, «Геометрия римановых пространств», ОНТИ, 1936.
- Dyschek A. und Mayer W.*, Lehrbuch der Differentialgeometrie, I, II. Leipzig und Berlin, 1930.
- Eddington A. S.*, The mathematical theory of relativity. Cambridge, 1923, 247 S. Имеется русский перевод второго издания: *Эддингтон*, «Теория относительности», ГТТИ, 1934.
- Eisenhart L. P.*, An introduction to differential geometry with use of the tensor calculs. Princeton, 1947, 304 S.
- Haack W.*, Differentialgeometrie. I, 2 Aufl. Wolfenbüttel, 1949, 136 S.
- Haack W.*, Differentialgeometrie. II, Wolfenbüttel, 1948, 131 S.
- Hamilton W. R.*, Abhandlungen zur Strahlenoptik. Übersetz und mit Anmerkungen herausgegeben von G. Prange. Leipzig, 1933, 429 u. 117 S.
- Hlabatý V.*, Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. Übersetz von M. Pinl. Groningen, 1939, 569 S.
- Hlabatý V.*, Differentielle Liniengeometrie. Übersetz von M. Pinl. Groningen, 1945, 568 S.
- Kähler E.*, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Leipzig und Berlin, 1934, 79 S. Neudruck, 1949.
- Klein F.*, Vorlesungen über höhere Geometrie. 3 Aufl., Bearbeitet von W. Blaschke, Berlin, 1926. Имеется русский перевод: *Клейн*, «Высшая геометрия», Гостехиздат, 1939.

Levi-Civita T., Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Rom, 1925. Auch in Übersetzungen.

Sauer R., Projektive Liniengeometrie. Berlin, 1937, 194 S.

Schouten J. A. und *Struik D. J.*, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I, II. 2 Aufl., Groningen, 1938. Имеется русский перевод: *Схоутен и Стройк*, «Введение в новые методы дифференциальной геометрии», т. 1, ГОНТИ, 1939; т. 2, ИЛ 1948.

Schouten J. A. and *Kulk W. v. d.*, Pfaffs problem and its generalisations. Oxford, 1949, 542 S.

Veblen O. und *Whitehead J. H. C.*, The foundations of differential geometry. Cambridge, Tracts 29, 1932. Имеется русский перевод: *Веблен О.* и *Уайтхед Дж.*, «Основания дифференциальной геометрии», ИЛ, 1949.

Weyl H., Raum, Zeit, Materie. 3 Aufl., Berlin, 1920.

Алфавитный указатель

- Абелева группа 10
Абель (Abel, N. H.) 10
Александров А. Д. 168
Альтернированные произведения 13, 57
— формы 62
Аполлоний (Apollonius) 101
Артин (Artin, E.) 113, 120
Архимед (Archimedes) 8, 170
Асимптотическая линия 130, 147
— полоса 27
Ассоциативный закон 9
Ассоциированные минимальные поверхности 188
- Базис 11
— декартов 11
Бальцер (Baltzer, R.) 89
Бауле (Baule, B.) 123
Беллавитис (Bellavitis, G.) 23
Бельтрами (Beltrami, E.) 41, 66, 89, 90, 94, 101, 126, 149, 166, 173, 175, 177
Бернулли (Bernoulli, J. I.) 27, 50, 64
Бернштейн С. 205
Бертран (Bertrand, J.) 40
Биллиард 120
Бинормаль 30
Биркгофф (Birkhoff, G. D.) 120, 170
- Блашке (Blaschke, W.) 12, 43, 51, 52, 56, 126, 145, 157, 167, 169, 174
Боль (Bol, G.) 53, 167, 170
Больца (Bolza, O.) 66
Больяи (Boljai, J.) 101
Бонне (Bonnet, O.) 29, 65, 74–76, 90, 169, 185, 199, 201
Бриоши (Brioschi, F.) 90
Брунн (Brunn, H.) 167
Бур (Bour, E.) 128, 206
Бьерлинг (Björling, E. O.) 187
Бьянки (Bianchi, L.) 66, 87, 175, 189, 205
- Вариация вторая 207
— длины дуги 38
— площади поверхности 159
Вейерштрасс (Weierstraß, K.) 17, 66, 124, 175, 189, 193
Вейзе (Weise, K. H.) 88
Вейль (Weyl, H.) 79, 120, 157, 162
Вейнахт (Weinacht, J.) 111
Вейнгартен (Weingarten, J.) 66, 162
Вектор 8
— вращения 25
— спада — градиент 102
Векторное произведение 17

- Веронезе (Veronese, G.) 201
 Вессель (Wessel, C.) 23
 Вессю (Vessiot, E.) 181
 Винтовая линия 35
 Виртингер (Wirtinger, W.) 151
 Внешнее произведение — векторное произведение 17
 Внешний угол 80
 Внутренний угол 82
 Вычет 91
- Галилей (Galilei, G.) 49
 Гамбургер (Hamburger, H.) 92, 170
 Гамильтон (Hamilton, W. R.) 22, 103
 Гаусс (Gauß, K. F.) 23, 24, 59, 63, 65, 69–74, 76, 81, 89, 101, 113, 121, 123, 128, 129, 145, 153, 155, 162, 163, 187
 Гейзер (Geiser, G. F.) 208
 Геодезическая выпуклость 125
 — кривизна 70
 — окружность 123
 Геодезические линии 92
 — — на эллипсоиде 145
 — окружности 123
 — полосы 28
 — полярные координаты 122
 Геодезических интегральная геометрия 125
 Геометрический смысл внешнего дифференциала 61
 Герглотц (Herglotz, G.) 30, 113, 129, 153, 157, 169
- Герике (Gericke) 32
 Гессенберг (Hessenberg, G.) 79
 Гильберт (Hilbert, D.) 66, 94, 126, 168
 Гиперболическая геометрия 98
 Гишар (Guichard, C.) 65
 Главная нормаль 30
 Главные кривизны 133
 Гладкая поверхность 67
 Горловая линия семейства 90
 Грассман (Graßmann, H.) 13, 19, 23, 64
 Граф (Graf, H.) 199
 Грин (Green, G.) 59
 Гульштрэнд (Gullstrand, A.) 170
 Гурвиц (Hurwitz A.) 42, 54
 Гюйгенс (Huygens, Ch.) 42, 50, 173
- Дарбу (Darboux, G.) 23, 65, 66, 92, 111, 128, 145, 169, 175, 180, 201, 202
 Двойное отношение 152
 Декарт (Descartes, R.) 11, 48, 84
 Деривационные уравнения 68, 69
 Дефект 92
 Дини (Dini, U.) 66
 Дифференциальные формы, квадратичные 72
 Дюпен (Dupin, Ch.) 65
- Единичная матрица 22
 Единичный вектор-орт 11, 67
 Жесткость овальных поверхностей 153, 161

- Задача о кушаке 43
Закон параллелограмма 8
Замкнутые геодезические 119
— поверхности 81
Зауер (Sauer, R.) 192
Зейферт (Seifert, H.) 170
- Ивори (Ivory, J.) 145
Изгибание 39, 72
— минимальных поверхностей 187
Изометрическое отображение 72
Изопериметрия 51
Изотропная линия 179
Инвариантность при замене строк на столбцы 14
— при изгибании 72, 77
Индикатриса 139
Интеграл Дирихле 107
— независимости 94, 111, 126
— от средней кривизны 154
Интегральная кривизна 26, 80, 134
— нормальная кривизна 26
— формула Гаусса–Бонне 74
Интегральное кручение 26
Интегральные векторы 45
— винты 45
Исключительные точки сетей 90
- Кавальери (Cavalieri, B.) 81
Каратеодори (Carathéodory, C.) 170
Картан (Cartan, E.) 23, 64, 65, 79
Касательная 25, 30
Касательный вектор 67
Каталан (Catalan, E.) 198
- Каччиопполи (Caccioppoli, R.) 157
Квадратура 110
Клеверообразная петля 32
Клейн (Klein, F.) 66, 113, 205
Кнезер (Kneser, A.) 93
Кноте (Knothe, H.) 52
Ковалевский (Kowalewski, G.) 51
Ковариантная производная 164
Коммерель (Kommerell, K.) 206
Конические полосы 27
Конфокальные квадрики 141
Конформное отображение 99, 120, 145
Координаты вектора 11
— изотермические 120
— эллиптические 142
Косая симметрия 68
Коши (Cauchy) 41
Кривизна линии 29
— полосы 26
Криволинейные координаты 67
Кристоффель (Christoffel, E. B.) 66, 165, 168
Кроне (Crone, C.) 51
Круг кривизны 33
Кручение 29
Курант (R. Courant) 175
Кэлер (Kähler, E.) 64
Кэли (Cayley, A.) 23
- Лагерр (Laguerre, E.) 180
Лагранж (Lagrange, J. L.) 18, 64, 121, 175, 185
Ламберт (Lambert, J. H.) 10, 121

- Ламэ (Lamé, G.) 65
 Лаплас (Laplace, P.) 145
 Лебег (Lebesgue, H.) 71
 Леви-Чивита (Levi-Civita, T.) 79
 Левозакрученные линии 35
 Лейбниц (Leibniz, G. W.) 14, 50, 57, 84, 111, 173
 Ли (Lie, S.) 66, 149, 151, 175, 180, 208
 Лилиенталь (Lilienthal, R. V.) 86
 Линейная зависимость 11
 — комбинация векторов 11
 Линейчатые поверхности 151
 Линия кривизны 131
 — — квадрики 142
 — образованная качением 44
 — откоса 35, 45
 — погони 172
 — постоянной геодезической кривизны 123
 Лиувиль (Liouville, J.) 65, 89, 108, 110, 145, 146, 172
 Люстерник Л. А. 170
- Мёбиус (Möbius, A. F.) 23, 101
 Майнард (Mainardi, G.) 163
 Матрица 19
 Мебиус (Möbius, A. F.) 82
 Менье (Meusnier, M. Ch.) 137
 Мера кривизны 72, 133
 Меркатор (Mercator-Kremer, G.) 121
 Миндинг (Minding, F.) 66, 90, 123, 127
- Минимальные поверхности 174
 — — Буря 206
 — — Гейзера 208
 — — Шерка 196
 — — Эннепера 199
 Минковский (Minkowski, H.) 154, 167, 168
 Монж (Monge, G.) 65, 66, 129, 149, 151, 175, 180, 189
 Морс (Morse, M.) 120, 170
 Мюллер (Müller, H. (Regiomontanus)) 81
- Накрывающая поверхность 84
 Начало координат 11
 Неориентируемые (односторонние) поверхности 82
 Несущая линия полосы 27
 Нильсон (Nielsen, J.) 120
 Нормальная конгруэнция 135
 — кривизна 26
 Нормальный вектор полосы 25
 Нулевой вектор 9
 Ньютон (Newton, I.) 64
- Обозначение векторов 23
 Обращение 22
 Объем параллелепипеда 16
 Овалы 41–43
 Овальные поверхности 153, 166–169
 Однолистность 80, 203
 Омбилическая точка 131, 170
 Опорная функция 41
 Определитель 13

- Ориентируемость 82
Ортогональная проекция 32
Ортогональность 13
Ортогональные матрицы 22
— — несобственные 22
— — собственные 22
Основные формулы Гаусса 162
Ось кривизны 34
Отображение покоя 9
- Параболические линии 134
Параллелепипед 16
Параллелизм 76
Параллелограмм 8
Параллельное перенесение на поверхность 76
Параллельные линии 101
— поверхности 135, 166, 172
Параметрическое представление 23
Пифагор (Pythagoras) 11
Плато (Plateau, J.) 174, 203
Платон (Platon) 84
Площадь поверхности или мера площади поверхности 71
Поверхности встречи 125, 167
Поверхностные полосы 70
Поверхность вращения 128, 132, 171
— переноса 149
— середин хорд 149
Полосы 23, 25
— кривизны 28
- Полярное произведение или смешанное произведение 13
Поток 105
Правая тройка 16
Правозакрученные линии 35
Присоединенная минимальная поверхность 184
Произведение матриц 19
Прямой геликоид 198
Псевдосфера 172
Птоломей (Ptolomaïos) 121, 176
Пуанкаре (Poincaré, H.) 56, 63, 92, 98, 100, 120, 125, 170
Пуассон (Poisson, S. D.) 206
Пфафф (Pfaff, J. F.) 24, 64
Пфаффовы формы 24, 40, 57
- Радиус кривизны 33
Радо (Radó, T.) 175
Радон (Radon, H.) 57, 88
Развертывающиеся поверхности 97, 150
Рейдемейстер (Reidemeister, K.) 151
Рело (Reuleaux, Fr.) 41
Рибокур (Ribaucour, A.) 65, 175
Риккати (Riccati, J.) 152
Риман (Riemann, B.) 65, 84, 175, 184, 189, 203
Риманова теорема об отображении 206
Риччи (Ricci-Curbastro, G.) 66, 165, 184
Робертс (Roberts, M.) 183

- Род 83
 Роте (Rothe, R.) 86
 Ряд Фурье 42
- Савари (Savary, F.) 45
 Сальковский (Salkowski, E.) 40, 145
 Сантало (Santaló, L. A.) 55, 56, 167
 Сдвиг 9
 Сегре (Segre, B.) 126
 Седло 138
 Сети Лиувилля 108
 — линий косоугольные 85
 — ромбические 88
 Сеть параллельного переноса 87
 Система координат 11
 — поверхностей 140
 Скалярное произведение 12
 Скаляры 10
 Скорца (Scorza, Caetano) 67
 Соприкасающаяся касательная 147
 — плоскость 27
 Сопровождающий триэдр 23
 Сопряженные касательные 147
 — точки геодезической 124
 Стереографическая проекция 121, 176
 Стержневая конструкция 162
 Стефанос (Stephanos, K.) 20
 Стэвин (Stevin, S.) 8
 Сумма векторов 8
 Сферическое отображение 71
 Схоутен (Schouten, J. A.) 79
- Тензоры 163, 164, 166
- Теорема о четырех вершинах 30
 — об огибающих 124
 — об умножении 15
 Theorema egregium 74
 Теория Гамильтона–Якоби 103
 Tietze H. 101
 Тождественное отображение 9
 Тождество Лагранжа 18
 Томас (Thomas, H.) 199
 Томсон (Thomsen, G.) 174
 Торричелли (Torricelli, E.) 48
 Торсы 27, 150
 Трансляция–сдвиг 9
 Трельфалль (Threlfall, W.) 170
 Треугольник Рело 41
- Умножение вектора на скаляр 10
 Уравнение Коши–Римана 121
 Условие Якоби 95
 Условия интегрируемости 69
- Финстервальдер (Finsterwalder, S.) 78
 Фокальные конические сечения 143, 173
 — параболы 203
 Формула Гаусса–Бонне 74
 — Гаусса–Грина 59
 — Гаусса–Лиувилля 73
 Формулы Вейерштрасса для минимальных поверхностей 189
 — Грина 104
 Фосс (Voß, A.) 66, 88
 Френе (Frenet, F.) 30

- Фрике (Fricke, R.) 113
Фробениус (Frobenius, G.) 51, 89
Функ (Funk, P.) 168
Функциональный определитель 58
Фурье (Fourier, J. B.) 42

Хаар (A. Haar) 205

Цвирнер (Zwirner, K.) 111
Центр главной кривизны 132
Цепные дроби 116
— поверхность 199
Цепочка 117
Циклида 173
Циклоида 49
Циклоидальная кривая 46, 47

Чебышев П. Л. 78, 87
Чезари (Cesàri, L.) 71
Чезаро (Cesaro, E.) 51
Чирнхаузен (Tschirnhaus, E. W. Graf v.) 111

Шаль (Chasles, M.) 66
Шварц (Schwarz, H. A.) 43, 66, 167, 175, 184, 187, 204, 207
Шерк (Scherk, H. F.) 196, 199
Шефферс (Scheffers, G.) 86, 180
Шмидт (Schmidt, E.) 43, 57
Штамм (Stamm, O.) 170
Штейнер (Steiner, J.) 42, 52, 155, 167, 207
Штуди (Study, E.) 66, 180, 181, 208
Штурм (Sturm, J. F.) 124, 169
Шуберт (Schubert) 121

Эйлер (Euler, L.) 23, 45, 48, 64, 84, 121, 129, 136, 151
Экстремаль 93, 175
Эллиптические координаты 142
Эннепер (Enneper, A.) 149, 199, 201, 203
Якоби (Jacobi, C. G.) 41, 66, 95, 103, 124, 145, 207

Вильгельм Блашке

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Дизайнер М. В. Ботя

Научный редактор В. А. Александров

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная подготовка С. В. Высоцкий

А. А. Давыдов

Компьютерная графика В. Г. Бахтеев

Корректор Е. Ф. Осипова, М. А. Ложкина

Лицензия ЛР № 020411 от 16.02.97. Подписано к печати 21.05.00.

Формат $60 \times 84^{1/16}$. Усл. печ. л. 13,49. Уч. изд. л. 14,28.

Издательский дом «Удмуртский университет»,
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.