КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

АНРИ ПУАНКАРЕ

О КРИВЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

*

ПЕРЕВОД
С ФРАНЦУЗСКОГО
Е. Леонтович и А. Майер
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И
С ПРИМЕЧАНИЯМИ
А. А. Андронова
И С ДОПОЛНЕНИЯМИ
Е. Леонтович, А. Майер
В. Степанова, И. Петровского
и Ю. Рожанской

*

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД · 1947

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классический период развития математического анализа — XVIII век — оставил в наследство математике так называемые элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений; тогда же был в основном выделен тот класс уравнений, в котором нахождение общего решения сводится к квадратурам или алгебраическим операциям. Первая половина XIX в. проходит под знаком критики этого наследства в двух направлениях. С одной стороны, Коши ставит и для достаточно широкого класса уравнений разрешает задачу о существовании решения. С другой стороны, Лиувилль доказывает невозможность нахождения в квадратурах общего решения специального уравнения Риккати, за исключением известных случаев, когда это решение выражается в виде комбинации показательных и рациональных функций. Это открытие значительно обесценило отыскание новых случаев элементарной интегрируемости.

Теоремы существования открыли теоретическую дорогу для приближённых и численных методов, которые, впрочем, начали развиваться, независимо от всякой теории, ещё в предыдущий период, под влиянием настоятельных требований прикладной математики, в особенности небесной механики. Однако приближённые методы не могли удовлетворить теоретическую мысль математика, а также оказались недостаточными и для натуралиста, применяющего математические методы. Основное неудобство здесь состоит в том, что приближённое решение изображает с достаточной точностью только одно частное решение в заданном интервале изменения независимого переменного.

Чтобы остановиться на примере, укажем, что приближённое интегрирование уравнений небесной механики даёт прекрасные результаты при вычислении положений тел солнечной системы на любой, даже весьма большой, в смысле исторической хронологии, конечный промежуток будущего времени; но эти методы отказываются служить, когда дело идёт о проблемах космогонии, где надо знать характер решения в течение неопределённо большого, т. е. практически бесконечно большого промежутка времени.

Новые, так называемые «качественные методы исследования дифференциальных уравнений» появились в последней четверти XIX в. и связаны с именем Пуанкаре и Ляпунова. Ляпунов поставил и в очень широком классе случаев разрешил с полной строгостью одну частную задачу качественной теории — задачу устойчивости движения. Заслугой Пуанкаре является постановка общей задачи качественного исследования дифференциального уравнения. Эту задачу можно сформулировать так: не интегрируя заданного дифференциального уравнения, по свойствам правой части его дать возможно более полную картину расположения кривых, удовлетворяющих этому уравнению, во всей области их существования. Аналогичная постановка применима к системе дифференциальных уравнений. Например, если дело идёт о динамической системе, где независимое переменное интерпретируется как время, а зависимые переменные рассматриваются как координаты движущихся точек фазового пространства, то задача становится о поведении этих точек по крайней мере в течение того промежутка времени, пока движущиеся точки не оставляют данной области пространства, в частности и для бесконечного в обе стороны промежутка времени.

Первым большим исследованием Пуанкаре в осуществлении этой программы был ряд мемуаров «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», который даётся русскому читателю в настоящем переводе. В некоторых вопросах, сюда относящихся, результаты Пуанкаре являются фундаментальными и служат основанием для ряда последующих работ. Таково исследование интегральных кривых на плоскости; здесь следующий существенный вклад принадлежит Бендиксону (перевод его мемуара помещён в «Успехах математических наук», 1941, вып. IX); таково исследование траекторий на торе, впоследствии существенно дополненное Данжуа (об исследованиях последнего сообщается в дополнении к настоящему изданию). Общий вопрос об интегральных кривых в n-мерном пространстве только поставлен Пуанкаре, и полученный им ряд результатов носит предварительный характер; но сколько-нибудь полного развития эта теория не получила и до настоящего времени, указывая путь новым исследованиям.

В противоположность Ляпунову, Пуанкаре не всегда строг в доказательствах своих теорем; некоторые его утверждения являются ошибочными. С другой стороны, за 60 лет, протекших со времени появления в свет мемуаров Пуанкаре, прогресс других отделов математики (топологии, теории функций) позволяет по-новому осветить ряд результатов автора. Дополнения к переводу ставят своей целью исправить указанные недочёты и усилить некоторые результаты основного текста.

Мечта Пуанкаре — довести качественную теорию до того уровня, когда она позволит решать основные космогонические проблемы — осталась неосуществлённой и до сих пор; но качественные методы, связанные с именем Пуанкаре, всё глубже проникают в исследования не только в области математики и механики, но и в области физики и техники. Большая заслуга в применении этих методов в физике принадлежит московской школе физиков Л. И. Мандельштама.

В. Степанов.

АНРИ ПУАНКАРЕ

О КРИВЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

ПЕРВЫЙ МЕМУАР

Полная теория функций, определяемых дифференциальными уравнениями, была бы чрезвычайно полезна для большого числа вопросов математики и механики. К сожалению, сразу видно, что в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определённых или неопределённых интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешённым.

Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям, так же, как это было сделано по отношению к алгебраическим функциям, которые сначала пытались свести к радикалам, а теперь изучают непосредственно, так же, как это было сделано по отношению к интегралам от алгебраических дифференциалов после долгих попыток выразить их в конечном виде.

Таким образом, исследование свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями, — задача, представляющая величайший интерес. Первый шаг на этом пути уже был сделан, когда было изучено поведение функции, определяемой дифференциальным уравнением, *в окрестности какой-либо данной точки плоскости*. Задача, стоящая теперь перед нами, — это пойти дальше и изучить поведение этой функции *на всём протяжении плоскости*. В этом исследовании нашей отправной точкой, очевидно, будут служить уже известные результаты, относящиеся к поведению такой функции *в некоторой области плоскости*.

Полное исследование функций состоит из двух частей:

1) качественной (если можно так выразиться) части, или геометрического изучения той кривой, которая определяется этой функцией;

2) количественной части, или вычисления численных значений функции.

Так, например, для того чтобы исследовать алгебраическое уравнение, мы сначала определяем, с помощью теоремы Штурма, число действительных корней — это качественная часть; затем находим числовые значения этих корней — в этом заключается количественное изучение уравнения. Точно так же, для того чтобы изучить алгебраическую кривую, мы начинаем с построения этой кривой (как принято выражаться в соответствующих математических курсах), т. е. определяем наличие замкнутых ветвей, бесконечных ветвей и т. д.

После этого качественного изучения кривой можно точно определить некоторое число её точек.

Естественно, что именно с качественной части должно начинаться исследование всякой функции, и поэтому проблема, которая в первую очередь встаёт перед нами, — это *построение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями* [1].

Это качественное исследование, когда оно будет полностью выполнено, будет очень полезно для вычисления численных значений искомой функции и позволит более просто установить сходящийся ряд, изображающий искомую функцию в некоторой части плоскости, и главная трудность заключается именно в отыскании надёжного критерия для перехода от одной области, где функция определена одним сходящимся рядом, к другой области, где она выражается с помощью другого ряда.

С другой стороны, это качественное исследование и само по себе представляет первостепенный интерес. К нему могут быть сведены различные, исключительно важные вопросы анализа и механики. Возьмём в качестве примера задачу трёх тел. Разве нельзя поставить вопрос, будет ли одно из этих тел всегда оставаться в некотором участке неба или оно сможет удалиться в бесконечность? Или вопрос о том, будет ли расстояние между двумя из этих тел неограниченно убывать, или, напротив, это расстояние будет всегда заключено в определённых пределах? Разве нельзя поставить тысячу вопросов такого рода, и все эти вопросы будут разрешены, как только мы сумеем качественно построить траектории этих трёх тел. И если рассматривать большее число тел, то чем иным является вопрос о неизменности элементов планет, как не подлинным вопросом качественной геометрии? Так как показать, что большая ось не имеет вековых изменений, это значит обнаружить, что она постоянно колеблется между некоторыми определёнными границами.

Таково обширное поле открытий, простирающееся перед взорами математика. Я не имел претензии пройти его полностью, но я хотел по крайней мере переступить его границы; я ограничился одним весьма частным случаем, тем, который естественно представлялся первым, — именно, изучением дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени.

Таким образом, во всём последующем я рассматриваю кривые, определяемые дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

где X и Y — многочлены, целые относительно x и y. Я называю эти кривые *характеристиками* [2].

Рассматривая две части одной и той же характеристики, находящиеся по одну и по другую сторону от какой-нибудь из её точек, мы разделяем эту характеристику (если только она не является замкнутой кривой) на две различные *полухарактеристики*; эти две полухарактеристики будут в дальнейшем играть довольно существенную роль. Например, предположим, что характеристика есть логарифмическая спираль $\rho = e^{\omega}$; её можно разделить на две полухарактеристики, допустим, так, чтобы одна полухарактеристика состояла бы из точек, для которых

$$\rho < 1,$$

а другая из точек, для которых

$$\rho > 1.$$

Для того чтобы обойти те трудности, которые могут возникнуть при изучении бесконечных ветвей, мы будем предполагать, что кривые спроектированы при помощи гномонической проекции на сферу. Именно, пусть мы имеем плоскость P и точку (x, y) на ней; рассмотрим сферу, разделённую на две полусферы плоскостью, параллельной плоскости P, — мы будем называть эту плоскость *плоскостью экватора*. Если соединить прямой линией центр сферы с точкой (x, y), то эта прямая пересечёт сферу в двух точках, лежащих на разных концах одного и того же диаметра; мы будем обозначать через $(x, y, 1)$ ту из этих точек, которая лежит в одной полусфере, и через $(x, y, 2)$ ту, которая лежит в другой полусфере.

Всякая прямая плоскости P проектируется в большой круг этой сферы. Когда в дальнейшем мы будем говорить о касательной в какой-нибудь точке характеристики, то это будет означать, что речь идёт о большом круге, касающемся характеристики в этой точке.

Всякий большой круг пересекает экватор в двух точках: ω_1 и ω_2; угол, определяющий положение большого круга, проходящего через эти диаметрально противоположные точки ω_1 и ω_2 экватора, измеряется дугой экватора, заключённой между ω_1 и некоторой фиксированной точкой экватора. Угловой коэффициент прямой, соответствующей такому большому кругу, будет тангенсом этого угла.

Наконец, точки перегиба характеристики — это те точки, в которых она пересекает, переходя с одной стороны на другую, соприкасающиеся большие круги.

Очевидно, что при этих условиях через все точки сферы, за исключением некоторых особых точек, проходит одна и только одна характеристика, причём угловой коэффициент касательной к характеристике даётся уравнением

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}.$$

Кроме того, очевидно, что расположение характеристик симметрично по отношению к центру сферы.

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Прежде чем итти дальше, необходимо дать некоторые определения и привести некоторые общие теоремы, которые окажут нам большую пользу при качественном изучении кривых на сфере.

Рассмотрим сначала кривые на сфере, не имеющие ни двойных точек, ни точек остановки [3].

Мы будем называть кривую на сфере *сферическим циклом*, если, выйдя из некоторой её точки и пройдя конечную дугу этой кривой, мы снова вернёмся в исходную точку [4]. Сферическим циклом будут, например, малый или большой круги на сфере.

Мы будем называть *сферической спиралью* кривую, которая пересекает какой-нибудь сферический цикл только в одной точке. Примером сферической спирали может служить локсодрома, которая пересекает каждый параллельный круг в одной точке.

Сферический цикл разделяет поверхность сферы на две области — одну из них мы будем называть *внутренней*, другую *внешней*; невозможно перейти из одной такой области в другую, не пересекая цикла.

Если соединить две точки характеристики при помощи дуги какой-нибудь кривой, которая, кроме этих двух конечных точек, не имеет никаких других общих точек с характеристикой, то дуга кривой и дуга характеристики, заключённые между этими точками, составят в совокупности сферический цикл. Так, например, если мы соединим дугой большого круга два конца какой-нибудь дуги малого круга, то эти две дуги вместе образуют замкнутый цикл.

Однако здесь могут представиться две возможности.

Первый случай. Две ветви характеристики, являющиеся её продолжениями за те две точки, которые соединены дугой произвольной кривой, лежат либо обе внутри, либо обе вне сферического цикла, образованного двумя дугами — дугой кривой и дугой характеристики.

Мы будем говорить в этом случае, что дуга кривой *поддерживает* (*sous-tend*) дугу характеристики.

Этот случай как раз имеет место, например, когда концы дуги малого круга соединены дугой большого круга.

Второй случай. Из двух ветвей характеристики, являющихся её продолжениями за те две точки, которые соединены дугой произвольной кривой, одна лежит внутри, а другая вне цикла, образованного дугой кривой и дугой характеристики.

В этом случае мы будем говорить, что дуга кривой *перехватывает* (*sur-tend*) дугу характеристики.

Предположим, например, что рассматриваемая характеристика есть локсодрома; она пересекает какой-нибудь меридиан в бесчисленном множестве точек. Рассмотрим среди этих точек пересечения какие-нибудь две последовательные точки; они соединены с одной стороны дугой локсодромы и с другой стороны — дугой меридиана; очевидно, что дуга меридиана перехватывает дугу локсодромы.

Из самого определения цикла непосредственно вытекают следующие предложения:

1) Два цикла пересекаются либо в чётном, либо в бесконечном числе точек [5].

2) Всякая алгебраическая кривая состоит из одного или нескольких циклов [6].

3) Всякая алгебраическая кривая пересекает любой цикл либо в чётном, либо в бесконечном числе точек.

Теорема I. *Если мы разделим характеристику, не имеющую ни двойных точек, ни точек остановки,* *на две полухарактеристики и если одна из этих полухарактеристик пересекает всякий алгебраический цикл только в конечном числе точек, то характеристика сама является циклом.*

Действительно, построим плоскую кривую C, определённую следующим образом: абсцисса каждой точки β_i кривой будет равна длине дуги характеристики, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки α_0 до той точки α_i, которая соответствует β_i; ордината точки β_i будет равна углу между касательной к характеристике в точке α_i и осью x.

1) Каждой точке β_i кривой C соответствует одна и только одна точка α_i характеристики.

2) Так как характеристика не имеет точек остановки, то и кривая C также их не имеет.

3) Точке α_i характеристики соответствует или одна точка β_i кривой C, если характеристика не является циклом, или же бесчисленное множество точек β_i, если характеристика является циклом.

4) Кривая C пересекает всякую прямую, параллельную оси y только в одной точке.

5) Одной из двух полухарактеристик соответствует часть кривой C, расположенная справа от оси y, другой — часть кривой C, расположенная слева от этой оси. Предположим для определённости, что та полухарактеристика, которая по условию пересекает всякий алгебраический цикл, только в конечном числе точек соответствует полукривой C, которая расположена справа от оси y.

Первая гипотеза. На полукривой C существует бесчисленное множество точек β_i, соответствующих точкам α_i, лежащим на экваторе.

Так как по условию рассматриваемая полухарактеристика может пересекать экватор (который является алгебраическим циклом) только в конечном числе точек, то на экваторе может находиться только конечное число точек α_i. Но тогда хотя бы одной точке α_i должно соответствовать бесчисленное множество точек β_i, и, следовательно, характеристика является циклом.

Вторая гипотеза. На полукривой C существует бесчисленное множество точек β_i, в которых касательная к кривой C параллельна оси x.

Это значит, что существует бесчисленное множество точек β_i, соответствующих таким точкам α_i, которые являются точками перегиба характеристики. Но геометрическое место точек перегиба характеристик есть алгебраическая кривая, а следовательно, в силу сделанного предположения, у рассматриваемой характеристики может быть только конечное число точек перегиба. Отсюда опять следует, что хотя бы одной точке α_i должно соответствовать бесчисленное множество точек β_i, т. е. характеристика есть цикл.

Если предположить, что ни первая, ни вторая гипотезы не выполняются, то тогда всякой точке β_i, абсцисса которой больше некоторой определённой величины x_0, будет соответствовать точка α_i, остающаяся всегда в одной и той же полусфере, например, в первой полусфере; ордината же такой точки β_i будет, при возрастании абсциссы, либо всё время возрастать, либо всё время убывать — например, возрастать.

Мы приходим, таким образом, к третьему случаю, который в свою очередь содержит в себе две возможности.

Третья гипотеза. При изменении x от x_0 до бесконечности ордината точки β_i, т. е. угол наклона касательной к характеристике, всё время увеличивается, но всегда остаётся меньше некоторой определённой величины.

Пусть

β_1 — точка кривой C, абсцисса которой равна x_0;

α_1 — соответствующая точка характеристики;

$\alpha_1\omega_1$ — касательная к характеристике в точке α_1;

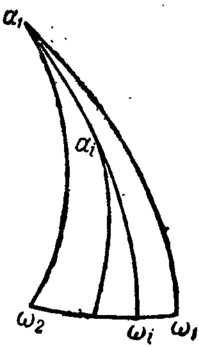
ω_1 — точка, в которой касательная $\alpha_1\omega_1$ пересекает экватор;

α_i — какая-нибудь точка характеристики, соответствующая точке β_i, лежащей справа от β_1;

$\alpha_i\omega_i$ — касательная в этой точке;

ω_i — точка, в которой эта касательная пересекает экватор.

Когда точка α_i будет продвигаться вдоль полухарактеристики, ω_i будет перемещаться вправо, всё время оставаясь на некоторой дуге экватора $\omega_1\omega_2$; полухарактеристика не может пересечь экватора, не имеет, по предположению, точек перегиба и заключена вся целиком внутри сферического треугольника $\alpha_1\omega_1\omega_2$ (черт. 1); следовательно, её сферическая длина меньше, чем $\alpha_1\omega_1+\omega_1\omega_2$, т. е. конечна; но это абсурдно [7]. Таким образом, третья гипотеза неприемлема.



Черт. 1.

Четвёртая гипотеза. При изменении x от x_0 до бесконечности ордината точки β_i, т. е. угол наклона касательной к характеристике, неограниченно возрастает.

Это значит, что угол наклона касательной к характеристике может принимать все значения

$$y_0+n\pi,$$

где y_0 — некоторая заданная постоянная и n — любое целое положительное число.

Следовательно, угловой коэффициент касательной к характеристике для бесчисленного множества различных точек β_i равен $\operatorname{tg} y_0$.

Но геометрическое место точек, в которых угловой коэффициент касательной к характеристике равен $\operatorname{tg} y_0$, есть алгебраическая кривая и значит, по предположению, может пересекать рассматриваемую полухарактеристику только в конечном числе точек α_i. Отсюда снова следует, что хотя бы одной точке α_i соответствует бесчисленное множество точек β_i, т. е. что рассматриваемая характеристика есть цикл.

Резюмируя, мы можем сказать, что из тех четырёх гипотез, которые вообще возможны, первая, вторая и чётвёртая приводят нас к выводу, что характеристика есть цикл; третья гипотеза приводит к противоречию.

Следовательно, теорема доказана.

Определение. Мы будем называть *полициклом* замкнутую кривую, имеющую двойные точки [8].

Пример. Кривая, получающаяся при пересечении сферы с круговым цилиндром, касающимся этой сферы в некоторой точке, есть полицикл [9].

Топографическая система. Проведём на сфере такую систему циклов и полициклов, чтобы через каждую точку сферы, за исключением некоторых особых точек (через которые не проходит ни один цикл) проходил бы один и только один цикл или полицикл. Мы будем называть такую систему циклов *топографической системой* вследствие её сходства с системой кривых уровня земной поверхности.

Двойные точки полициклов будут тогда соответствовать седловинам земной поверхности, а особые точки, через которые не проходит ни один цикл, будут соответствовать вершинам и котловинам земной поверхности; в связи с этим мы будем называть эти точки *сёдлами*, *вершинами* и *котловинами*.

Так, например, семейство кривых

$$f(x, y) = \text{const.},$$

где $f(x, y)$ многочлен, целый относительно x и y, будет представлять собой топографическую систему, если эти кривые не пересекают экватора. Сёдлами этой системы являются те точки, в которых мы имеем одновременно

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0;$$

вершины — это те точки, в которых

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,$$

и, наконец, котловины (впадины) это те точки, в которых

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0.$$

Точно так же, если x, y и z связаны алгебраическим соотношением

$$f(x, y, z) = 0,$$

причём $\frac{\partial f}{\partial z}$ никогда не обращается в нуль и z не может оставаться конечным и действительным, когда x и y бесконечно велики и действительны, то семейство кривых

$$z = \text{const.}$$

есть топографическая система.

Пусть, например,

$$f(x, y, z) = (z - x)^2 - 2(x^2 + y^2 + 1) = 0;$$

$\frac{\partial f}{\partial z}$ может обратиться в нуль только если

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

что невозможно.

Далее, если мы будем рассматривать z как постоянную, то члены наивысшей степени имеют вид

$$-(x^2 + 2y^2).$$

Иначе говоря, кривые $z = \text{const.}$ не пересекают экватора и, следовательно, образуют топографическую систему.

Мы будем называть *кривой контактов* геометрическое место точек, в которых характеристики касаются циклов топографической системы.

Если топографическая система — алгебраическая, то и кривая контактов будет алгебраической кривой.

Если мы имеем топографическую систему и рассмотрим один из полициклов, соответствующий какому-нибудь седлу этой системы, то одна часть вершин и котловин будет находиться вне этого полицикла, а другая часть внутри него; так что каждый полицикл *некоторым определённым образом* распределяет вершины и котловины системы.

Две топографические системы мы будем называть *подобными*, если они имеют одни и те же сёдла, одни и те же вершины и котловины и если вершины и котловины *одинаковым образом* распределяются при помощи полициклов, проходящих через сёдла.

ГЛАВА II

ИЗУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ ТОЧКИ СФЕРЫ

Прежде чем приступить к исследованию характеристик на всей сфере в целом, необходимо напомнить полученные ранее результаты, относящиеся к изучению этих кривых в некоторой ограниченной области сферы. Основные теоремы, относящиеся к этому изучению, сформулированы и доказаны в различных мемуарах Коши, озаглавленных «*Мемуары об исчислении пределов*» *) и напечатанных в томах XIV, XV и XVI «*Докладов Парижской Академии наук*» **), а также в знаменитом мемуаре Брио и Буке, напечатанном в XXXVI томе «*Журнала политехнической школы*» ***).

Я сам занимался этим вопросом в заметке, помещённой в XLV тетради «*Журнала политехнической школы*» и в докторской диссертации, которую я защищал перед Факультетом наук в Париже ****).

Пусть точка, вокруг которой мы хотим изучить поведение характеристик, есть

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

---

*) Memoires sur le calcul des limites.

**) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XIV, XV et XVI.

***) Journal de l'École Polytechnique, t. XXXVI.

****) Journal de l'École Polytechnique, t. XLV.

Мы можем рассматривать X и Y, которые являются многочленами по x и y, также и как многочлены по $x-\alpha$ и $y-\beta$, так что

$$X = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \ldots$$

Первый случай. a_0 и b_0 не равны одновременно нулю; предположим, например, что

$$a_0 \gtrless 0.$$

Дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} = f(x, y),$$

где f есть ряд, расположенный по возрастающим степеням $x-\alpha$ и $y-\beta$.

Тогда в силу теоремы, доказанной Коши (*Доклады*, т. XIV), y может быть выражено в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням $x-\alpha$ и обращающегося в β при $x=\alpha$.

Следовательно, через точку (α, β) проходит одна и только одна характеристика.

Второй случай. $a_0 = b_0 = 0$. Но a_1, a_2, b_1 и b_2 не равны нулю одновременно.

Тогда точка (α, β) есть обыкновенная особая точка. Напомним прежде всего одну теорему, касающуюся этих особых точек, теорему, которую я доказал в своей диссертации.

Если уравнение

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda) - b_1 a_2 = 0$$

имеет два различных корня λ_1 и λ_2 и если отношение этих корней положительно или мнимо, то общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

имеет вид

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

где Z_1 и Z_2—ряды, расположенные по возрастающим степеням разностей $x-\alpha$, $y-\beta$ и обращающиеся в нуль при

$$x=\alpha \text{ и } y=\beta.$$

Предположим, что точка (x, y) неограниченно приближается к точке (α, β) таким образом, что

$$\lim \frac{y-\beta}{x-\alpha}=\mu.$$

Угловой коэффициент касательной в точке (x, y) будет иметь своим пределом

$$\frac{b_1+b_2\mu}{a_1+a_2\mu}.$$

Следовательно, предельное положение прямой, соединяющей точки (x, y) и (α, β) и предельное положение касательной к характеристике, проходящей через точку (x, y), образуют гомографическую связку.

Двойные прямые этой связки даны уравнением

$$\mu(a_1+a_2\mu)=b_1+b_2\mu.$$

Пусть μ_1 и μ_2—два корня этого уравнения; легко выразить λ_1 и λ_2 в виде рациональных функций от a_1, a_2, b_1, b_2, μ_1 и μ_2.

Теперь можно разбить второй случай на четыре основных подслучая.

Первый подслучай. Двойные прямые гомографической связки действительны, и всякие две сопряжённые прямые связки или обе лежат в остром углу, образованном двумя двойными прямыми, или обе в тупом углу.

В этом случае λ_1 и λ_2 действительны и их отношение положительно; следовательно, теорема, которую мы напоминали вначале, применима, и общий интеграл может быть записан в виде

$$Z_1^{\lambda_1}Z_2^{-\lambda_2}=\text{const.},$$

где Z_1 и Z_2—действительные функции от x и y, обращающиеся в нуль при

$$x=\alpha \text{ и } y=\beta,$$

тогда как λ_1 и λ_2 — два действительных положительных числа.

Отсюда следует, что все характеристики проходят через особую точку (α, β), если только они попадают в столь близкую к этой точке область сферы, что ряды Z_1 и Z_2 сходятся. Такая особая точка будет называться *узлом*.

Пусть, например, требуется изучить характеристики, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

в окрестности точки $x = y = 0$.

Общее уравнение этих характеристик имеет вид

$$y = kx^2,$$

где k — постоянная. На плоскости это уравнение изображает семейство парабол, имеющих общую ось и общую вершину вначале; на сфере это же уравнение изображает линии пересечения сферы с конусами, имеющими центр сферы вершиной, а параболы направляющими. Все эти линии пересечения проходят, очевидно, через точку $x = y = 0$.

Второй подслучай. Двойные прямые пучка действительны, но две сопряжённые прямые пучка лежат по разные стороны от двойных прямых.

В этом случае $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ действительно и отрицательно; теорема, о которой мы говорили, не приложима.

Но Брио и Буке в мемуаре, напечатанном в «*Журнале политехнической школы*», XXXVI тетрадь, показали, что через точку (α, β) проходят две и только две характеристики [10].

Такая особая точка будет называться *седлом*.

Пусть, например, требуется изучить поведение характеристик, определяемых уравнением

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

в окрестности начала координат,

Общий интеграл будет

$$xy = \text{const.},$$

и единственными характеристиками, проходящими через начало координат, будут два больших круга

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Третий подслучай. Двойные прямые связки мнимы, и связка не сводится к системе прямых в инволюции.

В этом случае λ_1 и λ_2 — две комплексные сопряжённые величины и их отношение мнимо. Общая теорема может быть приложена, и общий интеграл имеет вид:

$$Z_1^{\lambda_1} Z_2^{-\lambda_2} = \text{const.},$$

где Z_1 и Z_2, λ_1 и λ_2 — комплексные сопряжённые величины.

Пусть

$$Z_1 = \xi + i\eta, \quad \lambda_1 = \gamma + i\delta,$$
$$Z_2 = \xi - i\eta, \quad \lambda_2 = -\gamma + i\delta.$$

Тогда общий интеграл можно записать в виде:

$$(\xi^2 + \eta^2)^\gamma \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right)^{i\delta} = \text{const.}$$

Кривые $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$ (где ξ и η — ряды, расположенные по возрастающим степеням разностей $x - \alpha$ и $y - \beta$ и обращающиеся в нуль при $x = \alpha$ и $y = \beta$), очевидно, являются циклами, нигде не пересекающими друг друга и образующими в окрестности точки (α, β) топографическую систему с вершиной в точке (α, β).

Если обратить внимание на то, что уравнения

$$\xi^2 + \eta^2 = A, \quad \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right)^{i\delta} = B$$

дают для ξ и η, а следовательно, и для x и y только одну систему действительных значений, то станет ясным, что характеристики пересекают циклы

$$\xi^2 + \eta^2 = A$$

лишь в одной точке; следовательно, характеристики являются спиралями; точка, пробегающая любую из этих спиралей в некотором определённом направлении, будет неограниченно приближаться к началу. Такая особая точка будет называться *фокусом*.

Пусть, например, нам дано уравнение

$$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y},$$

общим интегралом которого является

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^i=\text{const}.$$

При переходе к полярным координатам этот интеграл примет вид:

$$\rho^2e^{-2\omega}=\text{const}.$$

Это уравнение даёт нам на плоскости логарифмическую спираль и, следовательно, на сфере сферическую спираль.

Четвёртый подслучай. Двойные прямые гомографического пучка мнимы, и этот пучок сводится к системе прямых в инволюции.

В этом случае λ_1 и λ_2 — комплексные сопряжённые, но отношение их равно -1. Теорема, о которой мы говорили вначале, не приложима.

Этот четвёртый случай является более частным случаем, чем все предыдущие, и он, вообще говоря, не будет иметь места, когда X и Y — *многочлены самого общего вида данной степени*. Поэтому мы ограничимся только некоторыми замечаниями.

Прежде всего, очевидно, что в этом случае ни одна ветвь характеристики не может пройти через точку (α, β), так как тогда касательной к ней в этой точке должна была бы быть одна из двойных прямых в инволюции, а эти прямые мнимы.

Но в силу того, что мы увидим дальше *), все характеристики суть спирали, и тогда двигающаяся по ним

*) См. главу XI.

точка будет закручиваться вокруг точки (α, β), неограниченно приближаясь к ней: в этом случае точка (α, β) есть, как и раньше, *фокус*; или же все характеристики образуют топографическую систему, для которой точка (α, β) является вершиной; тогда точка (α, β) есть *центр*.

Последнее как раз имеет место в том случае, когда теорема, о которой мы говорили вначале, применима, несмотря на отрицательную величину отношения $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Действительно, общий интеграл запишется тогда в виде

$$Z_1 Z_2 = A,$$

где

$$Z_1 = \xi + i\eta, \quad Z_2 = \xi - i\eta;$$

или иначе

$$\xi^2 + \eta^2 = A.$$

Очевидно, что в этом случае характеристики образуют топографическую систему циклов.

Так, например, уравнение

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

имеет общий интеграл

$$x^2 + y^2 = A.$$

Частные случаи, оставленные в стороне. Во всём предыдущем мы оставили в стороне те частные случаи, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ или } \lambda_1 = 0.$$

Эти случаи, вообще говоря, не имеют места, если X и Y — *многочлены самого общего вида данной степени.*

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{a_1 + b_2}{2}\right)^2 - a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0.$$

Брио и Буке показали, что в этом случае через точку (α, β) проходит бесчисленное множество характеристик, т. е. что мы снова имеем *узел*.

Пять предыдущих случаев исчерпывают все те случаи особых точек (α, β), при которых точка (α, β) является простой, однократной точкой пересечения кривых

$$X=0, \quad Y=0,$$

а не слиянием нескольких простых точек. Мы будем называть такие особые точки *особыми точками первого рода*. Как мы видели, существует четыре типа таких особых точек: узлы, сёдла, фокусы и центры.

Остаётся рассмотреть те случаи, когда

$$\lambda_1=0$$

или когда

$$a_1=a_2=0,$$

или

$$b_1=b_2=0.$$

Это как раз те случаи, когда кривые $X=Y=0$ имеют в точке (α, β) несколько слившихся точек пересечения.

Действительно, если

$$a_1=a_2=0,$$

то кривая $X=0$ имеет в точке (α, β) кратную точку.

Если

$$b_1=b_2=0,$$

то кривая $Y=0$ имеет в точке (α, β) кратную точку.

Если

$$\lambda_1=0,$$

то это значит, что

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

и, следовательно, кривые $X=0$, $Y=0$ касаются друг друга в точке (α, β).

Мы будем называть такие особые точки *особыми точками второго рода*; на основании предыдущего их можно, очевидно, рассматривать как результат слияния нескольких особых точек первого рода.

Различные особенности, которые могут представить такие особые точки, слишком многочисленны и разнообразны, для того чтобы мы стали их здесь подробно изучать. Заметим только, что такие особые точки не могут существовать, когда X и Y многочлены самого общего вида данной степени [11].

Точки, расположенные на экваторе. Во всём предыдущем мы неявно предполагали, что α и β остаются конечными, т. е., что точка (α, β) не лежит на экваторе. Но случай, когда точка (α, β) лежит на экваторе, может быть очень легко приведён к уже изученным случаям.

Рассмотрим сначала точку на экваторе, не лежащую на большом круге,

$$x = 0.$$

Мы положим

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z}.$$

Если мы будем затем рассматривать z и t как координаты некоторой точки на плоскости, то эта точка будет не чем иным, как гномонической проекцией точки (x, y) сферы на плоскость, параллельную плоскости большого круга $x = 0$. Для рассматриваемой точки (α, β) сферы координаты z и t будут конечны, и, таким образом, мы приходим к тем случаям, которые были рассмотрены в начале этой главы.

Если бы мы хотели исследовать характеристики вблизи точки пересечения экватора и большого круга $x = 0$, то мы положили бы

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z}$$

и стали бы рассуждать совершенно так же.

ГЛАВА III

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Теорема II. *Всякая система характеристик имеет особые точки.*

Первая гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ пересекаются в точках, не лежащих на экваторе.

Тогда эти точки пересечения будут, очевидно, особыми точками.

Вторая гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ пересекаются в точке, лежащей на экваторе.

Предположим, что эта точка не лежит на большом круге

$$x=0;$$

мы положим

$$x=\frac{1}{z}, \quad y=\frac{t}{z} \quad [12]$$

и введём обозначение

$$z^m X = X_1, \; z^m Y = Y_1,$$

где m есть степень того из многочленов X и Y, который имеет наивысшую степень. Дифференциальное уравнение принимает тогда вид:

$$-\frac{dz}{zX_1}=\frac{dt}{Y_1 - tX_1} \quad [13].$$

По предположению, при $t=\alpha$ и $z=0$ мы имеем

$$Y_1 = X_1 = 0$$

и, следовательно,

$$zX_1 = 0, \quad Y_1 - tX_1 = 0,$$

т. е. точка

$$t = \alpha, \quad z = 0$$

есть особая точка данного уравнения.

Третья гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ нигде не пересекаются: Степень многочлена X выше степени многочлена Y.

В этом случае по крайней мере один из многочленов X и Y имеет чётную степень. Кроме того, Y_1 делится на z так, что

$$Y_1 = zY_2.$$

Ясно, что при

$$z = t = 0$$

мы будем иметь

$$zX_1 = zY_2 - tX_1 = 0,$$

и, следовательно, точка

$$z = t = 0$$

есть особая точка.

Четвёртая гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ нигде не пересекаются. Степень X ниже степени Y.

Положив в этом случае

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z}$$

и рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы покажем, что точка

$$z = t = 0$$

есть особая точка.

Пятая гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ нигде не пересекаются. Степень X и Y одна и та же. Кроме того, если X_2 и Y_2 суть члены наивысшей степени в X и в Y, то

$$xY_2 - yX_2$$

не равно тождественно нулю.

В этом случае, если m есть степень (необходимо чётная) X и Y, то функция xY_2-yX_2 однородна относительно x и y и степени $m+1$, т. е. нечётной степени. Следовательно, она обращается в нуль либо при $x=0$, либо при некотором конечном значении $\frac{y}{x}$.

Если она обращается в нуль при некотором значении α отношения $\frac{y}{x}$, то, полагая

$$x=\frac{1}{z}, \quad y=\frac{t}{z},$$

мы будем при $t=\alpha$ и $z=0$ одновременно иметь:

$$zX_1=Y_1-tX_1=0;$$

это значит, что точка

$$t=\alpha, \quad z=0$$

есть особая точка.

Если функция xY_2-yX_2 обращается в нуль при $x=0$, то мы положим

$$x=\frac{t}{z}, \quad y=\frac{1}{z}$$

и увидим, как и выше, что точка

$$t=z=0$$

есть особая точка.

Шестая гипотеза. Кривые $X=0$ и $Y=0$ [14] нигде не пересекаются. Степень X та же, что и степень Y. Кроме того, если X_2 и Y_2 суть члены наивысшей степени в X и в Y, то мы имеем тождественно:

$$xY_2-yX_2=0.$$

Эта гипотеза недопустима.

В самом деле, если мы имеем тождество

$$xY_2=yX_2,$$

то X_2 делится на x и равно xX_3, Y_2 делится на y и равно yY_3, так что мы имеем тождественно

$$xyY_3 = yxX_3$$

или

$$Y_3 = X_3.$$

Но $Y_3 = X_3$ есть однородная функция от x и y нечётной степени; следовательно, она обращается в нуль либо при $x = 0$, либо при некотором конечном значении α отношения $\frac{y}{x}$. Следовательно, либо при $x = 0$, либо при $\frac{y}{x} = \alpha$ мы необходимо имели бы

$$X_2 = Y_2 = 0,$$

т. е. кривые $X = 0$, $Y = 0$ пересекались бы в некоторой точке экватора, что противоречит предположению.

В общем, из шести гипотез, которые можно сделать, шестая гипотеза приводит к противоречию; если же осуществляется одна из остальных пяти гипотез, то дифференциальное уравнение имеет особые точки либо на экваторе, либо вне экватора [15].

Общий случай. Можно, не нарушая общности, предположить:

1) что многочлены X и Y одинаковой степени;

2) что если X_2 и Y_2 — члены наивысшей степени в X и Y, то

$$xY_2 - yX_2$$

не равно тождественно нулю;

3) что кривые $X = Y = 0$ не имеют слившихся точек пересечения и не пересекаются на экваторе;

4) что уравнение

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

не имеет кратных корней.

В этом случае *экватор всегда является характеристикой*, и все особые точки суть простые особые точки. Более того, можно, не ограничивая общности, предположить, что все особые точки суть *узлы*, *сёдла* и *фокусы*.

Число особых точек, очевидно, чётно, так как всё симметрично относительно центра сферы. Минимальное число особых точек равно, следовательно, двум, и этот случай может осуществиться двумя способами:

1) Кривые

$$X=0,\ \ Y=0$$

нигде не пересекаются, но однородное уравнение

$$xY_2-yX_2=0$$

имеет действительный корень и только один[16].

Тогда мы будем иметь на экваторе две особые точки, лежащие на концах одного и того же диаметра. Я утверждаю, что эти особые точки всегда будут узлами.

Чтобы доказать это, надо рассмотреть общие свойства особых точек, расположенных на экваторе.

Предположим, что при

$$t=\alpha \text{ и } z=0$$

мы имеем

$$zX_1=Y_1-tX_1=0$$

и

$$X_1\gtrless 0,\ \ Y_1\gtrless 0.$$

Положим

$$t=u+\alpha$$

и пусть

$$X_1=z\xi_1+\lambda_0+\lambda_1 u+\lambda_2 u^2+\ldots+\lambda_m u^m,$$
$$Y_1=z\eta_1+\mu_0+\mu_1 u+\mu_2 u^2+\ldots+\mu_m u^m,$$

где ξ_1 и η_1 — многочлены, целые относительно z и u[17] и λ и μ — постоянные. Полагая

$$\lambda_2 u^2+\ldots+\lambda_m u^m=\xi_2 u^2,$$
$$\mu_2 u^2+\ldots+\mu_m u^m=\eta_2 u^2,$$

получим

$$X_1=u^2\xi_2+z\xi_1+\lambda_0+\lambda_1 u,$$
$$Y_1=u^2\eta_2+z\eta_1+\mu_0+\mu_1 u;$$

отсюда находим

$$Y_1-tX_1=z\theta_1+u^2\theta_2+(\mu_0-\lambda_0\alpha)+(\mu_1-\lambda_1\alpha-\lambda_0)\,u,$$

где θ_1 и θ_2 — многочлены, целые относительно z и u. Замечая, что $\mu_0 = \lambda_0 \alpha$, мы можем написать дифференциальное уравнение в таком виде:

$$\frac{dz}{-z(\lambda_0 + \lambda_1 u + z\xi_1 + u^2\xi_2)} =$$

$$= \frac{du}{(\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0\alpha) u + z\theta_1 + u^2\theta_2} \text{ [18]}.$$

Тогда корни уравнения (5) будут:

$$-\lambda_0 \text{ и } \mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0.$$

Оба эти корня действительны.

Следовательно, *всякая особая точка, лежащая на экваторе, либо узел, либо седло* (это можно было предвидеть, так как экватор есть характеристика).

Для того чтобы такая особая точка была узлом, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\lambda_0^2 + \lambda_0\lambda_1\alpha - \lambda_0\mu_1 > 0.$$

Но левая часть этого неравенства есть в точности то значение, которое принимает выражение

$$-\frac{1}{x^{2m}} \frac{\partial}{\partial y} (xY_2X_2 - yX_2^2)$$

при

$$y = \alpha x \text{ [19]}.$$

Мы не изменим его знака, написав

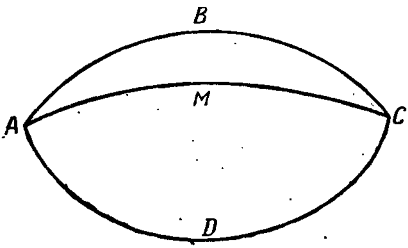
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}\right) \text{ [20]}.$$

Следовательно, особая точка

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

будет седлом, если при изменении $\frac{y}{x}$ от $\alpha - \varepsilon$ до $\alpha + \varepsilon$ выражение $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ переходит от отрицательных значений к положительным, и узлом, если при изменении $\frac{y}{x}$ от $\alpha - \varepsilon$ до $\alpha + \varepsilon$ выражение $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ переходит от положительных значений к отрицательным.

Установив это, мы введём новое понятие, которое окажет нам очень большие услуги. Пусть мы имеем цикл, целиком лежащий в одной из полусфер. Этот цикл делит сфе на две области, одна из которых, расположенная целиком в одной полусфере, называется *внутренностью цикла*.



Черт. 2.

Если цикл лежит целиком в первой полусфере, то мы скажем, что подвижная точка обходит цикл в положительном направлении, если внутренность цикла лежит всё время *налево* от неё; если же наоборот цикл лежал бы во второй полусфере, то точка описывала бы цикл в положительном направлении, если внутренность была бы всё время *направо* от неё.

Предположим, что подвижная точка описывает некоторый цикл в положительном направлении, и рассмотрим изменение выражения $\frac{Y}{X}$. Пусть h есть число скачков, совершённых этим выражением, от $-\infty$ до $+\infty$; пусть k есть число скачков этого выражения от $+\infty$ до $-\infty$. Пусть

$$i = \frac{h-k}{2};$$

число i мы назовём *индексом цикла*.

Если мы соединим две точки A и C цикла $ABCDA$ дугой AMC, лежащей целиком внутри цикла, то цикл $ABCDA$ будет разложен на два цикла $ABCMA$ и $AMCDA$; очевидно,

$$\text{инд. } ABCDA = \text{инд. } ABCMA + \text{инд. } AMCDA.$$

Так что подсчёт индекса какого-либо цикла можно привести к подсчёту индексов различных составляющих его бесконечно малых циклов [21].

Теорема III. *Индекс бесконечно малого цикла, не содержащего внутри никакой особой точки, равен нулю.*

В самом деле, если кривая $X=0$ не пересекает этот цикл, то

$$h=0, \quad k=0, \quad i=\frac{h-k}{2}=0.$$

Если кривая $X=0$ пересекает цикл, то кривая $Y=0$ его не пересекает; Y имеет один и тот же знак и X переходит один раз от положительных значений к отрицательным и один раз от отрицательных значений к положительным, откуда

$$h=1, \quad k=1, \quad i=\frac{h-k}{2}=0.$$

Таким же образом, если бы кривая $X=0$ имела внутри цикла кратную точку порядка m, то мы имели бы

$$h=m, \quad k=m, \quad i=\frac{h-k}{2}=0.$$

Теорема IV. *Если бесконечно малый цикл содержит внутри особую точку, то его индекс равен* ± 1.

Он равен $+1$, если особая точка есть седло; -1, если особая точка есть узел или фокус.

В самом деле, положим

$$y-\beta=\rho\sin\omega, \quad x-\alpha=\rho\cos\omega.$$

Предположим, что рассматривается цикл

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2,$$

где ρ есть *бесконечно малое*.

Для того чтобы обойти этот цикл в положительном направлении, надо менять ω от 0 до 2π.

Пренебрегая бесконечно малыми и возвращаясь к обозначениям предыдущей главы, мы имеем

$$\frac{Y}{X}=\frac{b_1+b_2\operatorname{tg}\omega}{a_1+a_2\operatorname{tg}\omega}.$$

При изменении ω от 0 до 2π X обращается в нуль дважды, так как

$$a_1+a_2\operatorname{tg}\omega$$

обращается в нуль дважды при двух значениях ω, которые мы обозначим ω_0 и $\omega_0+\pi$. При $\omega=\omega_0-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ бесконечно мало, имеем

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\omega_0-\zeta,$$

где ζ положительно и бесконечно мало. Следовательно,

$$\frac{Y}{X}=\frac{b_1+b_2\operatorname{tg}\omega_0-b_2\zeta}{a_1+a_2\operatorname{tg}\omega_0-a_2\zeta}.$$

Заметим, что $\operatorname{tg}\omega_0=-\frac{a_1}{a_2}$; пренебрегая по сравнению с $b_1+b_2\operatorname{tg}\omega_0$ величиной $b_2\zeta$, мы получим

$$\frac{Y}{X}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2}\,\frac{1}{\zeta}.$$

Следовательно, если $a_1b_2-a_2b_1<0$, то $\frac{Y}{X}$ при $\omega=$ $=\omega_0$ и при $\omega=\omega_0+\pi$ делает скачок от $-\infty$ до $+\infty$; тогда

$$h=2,\quad k=0,\quad i=\frac{h-k}{2}=1.$$

Если, напротив, $a_1b_2-a_2b_1>0$, то $\frac{Y}{X}$ при $\omega=\omega_0$ и при $\omega=\omega_0+\pi$ делает скачок от $+\infty$ до $-\infty$; тогда

$$h=0,\quad k=2,\quad i=\frac{h-k}{2}=-1.$$

При каком же условии

$$a_1b_2 - a_2b_1 > 0?$$

Возьмём опять уравнение (5), которое имеет вид:

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2b_1 = 0.$$

Очевидно, что мы будем иметь

$$a_1b_2 - a_2b_1 > 0,$$

если оба корня уравнения мнимы или имеют одинаковые знаки, т. е., если особая точка есть узел или фокус. Наоборот,

$$a_1b_2 - a_2b_1 < 0,$$

если оба корня действительны и имеют разные знаки, т. е., если особая точка есть седло.

Следовательно, теорема доказана.

Проблема I. *Вычислить индекс цикла, лежащего целиком в одной из полусфер.*

Пусть N есть число узлов, F — число фокусов, C — число сёдел, находящихся внутри цикла. Если разложить данный цикл на бесконечное множество бесконечно малых циклов y, то бесконечное множество циклов y будет иметь индекс 0;

$N+F$ циклов y будут иметь индекс -1;

C » » » » $+1$.

Следовательно, индекс данного цикла будет

$$-(N+F-C).$$

Проблема II. *Вычислить индекс экватора.*

Пусть $2N'$ есть число узлов, $2C'$ — число сёдел, лежащих на экваторе.

Пусть $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega$. Будем менять ω от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. $\operatorname{tg}\omega$ от $-\infty$ до $+\infty$. Так как всё симметрично по отношению к центру сферы, то $\frac{Y}{X}=\frac{Y_2}{X_2}$ принимает для $\omega+\pi$ то же значение, что и для ω; когда мы будем менять ω от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то $\frac{Y}{X}$ будет принимать те же значения, что и при ω, меняющемся от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Следовательно, при ω, меняющемся от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ сделает $\frac{h}{2}$ скачков от $-\infty$ до $+\infty$ и $\frac{k}{2}$ скачков от $+\infty$ до $-\infty$.

Установив это, рассмотрим выражение

$$H=\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}=\frac{Y}{X}-\operatorname{tg}\omega.$$

При $\omega=-\frac{\pi}{2}$ имеем $H=+\infty$; при $\omega=+\frac{\pi}{2}$ имеем $H=-\infty$.

Пусть λ есть число переходов H от отрицательных значений к положительным, μ — число переходов от положительных значений к отрицательным; мы будем, очевидно, иметь

$$\mu-\lambda=1.$$

Но H может перейти от отрицательных значений к положительным или через 0, что соответствует седлу, или через ∞, что соответствует одному из тех $\frac{h}{2}$ значений ω, при которых $\frac{Y}{X}$ делает скачок от $-\infty$ до $+\infty$.

Следовательно, мы имеем

$$\lambda=C'+\frac{h}{2}.$$

Точно так же

$$\mu=N'+\frac{k}{2}.$$

Отсюда

$$N'-C'=1+\frac{h-k}{2}=1+i$$

или

$$i = N' - C' - 1.$$

Примечание. Если число узлов, расположенных вне экватора, есть $2N$, число фокусов, расположенных вне экватора, $2F$, число сёдел, расположенных вне экватора, $2C$, число узлов, лежащих на экваторе, $2N'$, число сёдел, лежащих на экваторе, $2C'$, то имеет место соотношение

$$N + N' + F = C + C' + 1.$$

В самом деле, для того чтобы получить этот результат, достаточно приравнять два значения индекса экватора, полученные в двух предшествующих проблемах.

Следствие I. Полное число узлов и фокусов равно полному числу сёдел плюс 2.

Следствие II. Полное число особых точек есть кратное 4 плюс 2.

Следствие III. Если число особых точек сводится к 2, то эти точки — узлы или фокусы; они непременно являются узлами, если лежат на экваторе.

Кривая $X=0$ и кривая $Y=0$ слагаются из некоторого числа циклов. Рассмотрим какие-нибудь два из этих циклов: они пересекутся в чётном числе точек [22].

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ будут $2n$ точек пересечения этих двух циклов, расположенных в том порядке, в котором они встречаются, если обходить один из циклов, например цикл $X=0$, в положительном направлении.

Теорема V. *Предположим, что две последовательные точки α_k и α_{k+1} лежат в одной и той же полусфере; я утверждаю, что если α_k есть узел или фокус, то α_{k+1} есть седло и наоборот* [23].

Для этого достаточно показать, что всякий цикл, который охватывает α_k и α_{k+1}, имеет индекс 0.

В самом деле, пусть (черт. 3) AB есть дуга цикла, на которой находятся точки α_k и α_{k+1}; пусть CD и EF — дуги цикла $Y=0$, пересекающие AB в точках α_k и α_{k+1} соответственно.

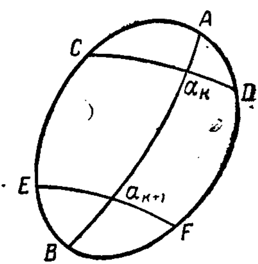
Ясно, что для цикла $ADFBECA$

$$h=1, \quad k=1, \quad i=\frac{h-k}{2}=0.$$

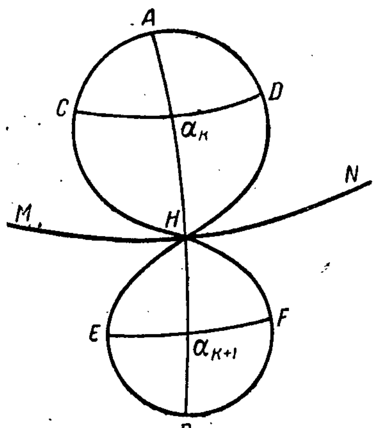
Предположим, наоборот, что точки α_k и α_{k+1} находятся в разных полусферах.

Я утверждаю, что если α_k есть седло, то и α_{k+1} седло, и что если α_k узел или фокус, то и α_{k+1} тоже узел или фокус.

В самом деле, предположим, что AB пересекает экватор MN в точке H (черт. 4). Рассмотрим полицикл $ACHFBEHDA$. Этот полицикл *в обеих полусферах* обходится в положительном направлении.



Черт. 3.



Черт. 4.

Предположим, что $\frac{Y}{X}$, проходя через точку A, делает скачок от $-\infty$ к $+\infty$; то же самое мы будем иметь, проходя через точку H или через точку B, т. е., если

$$\text{инд. } ACHD=1, \text{ то инд. } ACHFBEHDA=2.$$

Точно так же, если

$$\text{инд. } ACHD=-1, \text{ то инд. } ACHFBEHDA=-2,$$

т. е. во всех случаях

$$\text{инд. } ACHDA = \text{инд. } HFBEH.$$

Что и требовалось доказать.

Особый случай [24]. Во всём предшествующем мы предполагаем, что X_2 и Y_2 одной и той же степени, причём

$$xY_2 - yX_2$$

не равно тождественно нулю.

Мы не исследовали, что было бы, если бы мы имели тождественно

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

С некоторой точки зрения, изученный нами случай есть случай более общий, чем тот, который мы оставили в стороне.

С другой точки зрения, — наоборот: действительно, любые два многочлена X и Y можно рассматривать как частные случаи многочленов

$$X + \lambda xZ, \quad Y + \lambda yZ,$$

где λ постоянно и Z есть многочлен той же степени, что и X и Y.

Итак, предположим, что мы имеем тождественно

$$X_2 = xZ, \quad Y_2 = yZ,$$

где Z есть однородная функция от x и y.

В этом случае *экватор не является характеристикой* и, следовательно, особые точки на экваторе могут быть и узлами, и фокусами, и сёдлами.

Правило, позволявшее в предшествующем случае найти индекс экватора, не приложимо; с другой стороны, если экватор содержит особые точки, то кривые

$$X = 0, \quad Y = 0$$

пересекаются на этом большом круге (экваторе), и он, следовательно, уже не имеет индекса в точном смысле этого слова.

Итак, предположим, что на экваторе нет особых точек, и посмотрим, каков индекс этого большого круга.

Мы найдём, что вдоль экватора

$$\frac{Y}{X}=\frac{y}{x},$$

т. е., что индекс экватора будет равен -1; замечая, что, с другой стороны, индекс равен

$$-(N+F-C),$$

где $2N$, $2F$, $2C$ есть число узлов, фокусов и сёдел, мы получим

$$F+N=C+1,$$

т. е. теорема, доказанная нами в предыдущем случае, остаётся справедливой.

Предположим теперь, что на экваторе есть особые точки, именно: $2N'$ узлов, $2F'$ фокусов и $2C'$ сёдел, и посмотрим, как можно обойти возникающую здесь трудность.

Пусть $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ есть какой-нибудь большой круг, не проходящий ни через одну особую точку.

Положим

$$x'=\frac{x}{\alpha x+\beta y+\gamma}, \quad y'=\frac{y}{\alpha x+\beta y+\gamma};$$

дифференциальное уравнение обращается в

$$\frac{dx'}{X'}=\frac{dy'}{Y'},$$

где X' и Y' суть целые многочлены по x' и y'.

Можно выбрать круг $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ таким образом, чтобы

1) X' и Y' были бы одной и той же степени;

2) большой круг $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ не являлся бы характеристикой, т. е. члены наивысшей степени в $y'X'-x'Y'$ взаимно уничтожались бы.

Если (a, b) есть особая точка уравнения

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

то точка (a', b'), где

$$a'=\frac{a}{\alpha a+\beta b+\gamma}, \quad b'=\frac{b}{\alpha a+\beta b+\gamma},$$

есть особая точка уравнения

$$\frac{dx'}{X'}=\frac{dy'}{Y'}.$$

Если точка (a, b) была узлом, седлом или фокусом, то (a', b') тоже будет узлом, седлом или фокусом, так что число узлов, сёдел и фокусов будет $2(N+N')$, $2(C+C')$, $2(F+F')$, и так как мы пришли к случаю, когда экватор не содержит ни одной точки, то можно написать

$$N+N'+F+F'=C+C'+1 \text{ [25]}.$$

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ КОНТАКТОВ

Изучение особых точек, которое мы только что провели, позволяет нам, наконец, приступить к рассмотрению вопроса о том, каковы возможные геометрические формы характеристик на *всей поверхности сферы.*

Это рассмотрение должно начаться с фундаментального вопроса о числе точек, в которых данная дуга или данный цикл касаются характеристики, т. е. с вопроса о числе *контактов* данной дуги или цикла.

Число контактов *алгебраической дуги* или цикла всегда конечно.

Предварительные замечания. Мы видели, что алгебраическая кривая без двойных точек состоит из некоторого числа циклов; точно так же алгебраическая кривая с двойными точками состоит из некоторого числа циклов и полициклов. Но сами полициклы в свою очередь можно рассматривать как распадающиеся на некоторое число циклов, соприкасающихся в двойных точках и имеющих в них угловые точки.

Так, кривая

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

состоит из двух диаметрально-противоположных полициклов, каждый из этих полициклов состоит в свою очередь из двух циклов, соприкасающихся в точке

$$x = y = 0$$

и имеющих в ней угловую точку с углом между касательными в 90°.

Мы видели, что алгебраическая кривая C пересекает всякий алгебраический цикл в конечном и чётном числе точек. Это требует некоторых пояснений.

Если в какой-либо данной точке алгебраическая кривая C проходит из внутренней части цикла во внешнюю, или наоборот, то мы скажем, что кривая *пересекает* цикл, и эта точка будет считаться за одну точку пересечения или за *нечётное число* слившихся точек пересечения. Если, напротив, в окрестности данной точки, являющейся общей точкой кривой C и цикла, кривая C остаётся целиком вне или целиком внутри цикла, то мы скажем, что кривая *касается* цикла, и эта точка будет считаться за *чётное число* слившихся точек пересечения [26].

Предположим, например, что данный цикл имеет угловую точку в начале и что его уравнение имеет вид

$$0=(y-\lambda x)(y-\mu x)+\theta_3,$$

где θ_3 есть многочлен, содержащий только члены третьей или более высокой степени.

Предположим, что некоторая бесконечно близкая к началу точка находится внутри цикла всякий раз, как

$$x>0 \text{ и } (y-\lambda x)(y-\mu x)<0 \text{ [27]},$$

и вне цикла, если

$$x<0 \text{ или если } x>0,\ (y-\lambda x)(y-\mu x)>0.$$

Пусть

$$0=y-mx+\theta_2$$

есть уравнение кривой C, где θ_2 есть многочлен, содержащий только члены второй или более высокой степени.

Легко видеть, что кривая C пересекает цикл всякий раз, как

$$(m-\lambda)(m-\mu)<0,$$

и касается, в противном случае:

Теорема VI. *Число контактов алгебраического цикла, не имеющего угловых точек, не имеющего с характеристикой точек соприкосновений высшего порядка и не проходящего ни через одну особую точку, всегда конечно и чётно.*

В самом деле, пусть уравнение этого цикла будет

$$F(x, y) = 0;$$

мы найдём его контакты, отыскивая его точки пересечения с кривой

$$\varphi = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Так как эта кривая есть алгебраическая кривая, то число её точек пересечения с данным циклом всегда чётно, если считать за два пересечения те точки, в которых кривая касается цикла. Но в этих точках цикл имел бы с некоторой характеристикой контакт чётного порядка в противность предположению.

Следовательно, слившихся точек пересечения у кривых

$$\varphi = 0, \quad F = 0$$

вообще не существует. Следовательно, число контактов чётно.

Что и требовалось доказать.

Примечание I. Теорема остаётся верной и в том случае, когда данный цикл имеет контакт высшего порядка с какой-либо характеристикой, при условии, что мы будем считать контакт n-го порядка за n контактов.

Примечание II. Предположим теперь, что алгебраический цикл имеет угловую точку. Предположим для определённости, что эта угловая точка находится в начале координат, что уравнение цикла, как и выше, имеет вид

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3$$

и что внутренняя часть цикла определяется условиями

$$x > 0 \text{ и } (y - \lambda x)(y - \mu x) < 0.$$

Тогда многочлен φ запишется в виде

$$\varphi = X_0[2\lambda\mu x - (\lambda+\mu)y] + Y_0[2y - (\lambda+\mu)x] + \theta'_2,$$

где X_0 и Y_0 — значения X и Y при $x=y=0$, и θ'_2 — многочлен, содержащий лишь члены второй и более высокой степени.

Угловой коэффициент касательной к кривой $\varphi=0$ в начале координат будет тогда

$$\frac{Y_0(\lambda+\mu) - 2X_0\lambda\mu}{2Y_0 - X_0(\lambda+\mu)}.$$

Для того чтобы кривая $\varphi=0$ пересекала цикл, нужно, чтобы выражения

$$\alpha = [Y_0(\lambda+\mu) - 2X_0\lambda\mu] - \lambda[2Y_0 - X_0(\lambda+\mu)],$$

$$\beta = [Y_0(\lambda+\mu) - 2X_0\lambda\mu] - \mu[2Y_0 - X_0(\lambda+\mu)]$$

имели бы разные знаки.

Упрощая, можно написать

$$\alpha = (Y_0 - X_0\lambda)(\mu-\lambda),$$

$$\beta = (Y_0 - X_0\mu)(\lambda-\mu),$$

и, следовательно, для того чтобы α и β имели бы разные знаки, нужно, чтобы $Y_0 - \lambda X_0$ и $Y_0 - \mu X_0$ имели бы одинаковые знаки.

Другими словами, условием пересечения данного цикла кривой $\varphi=0$ является то, что характеристика, проходящая через начало, не пересекает его.

Следовательно, угловая точка должна быть сосчитана за один контакт, если характеристика, проходящая через эту точку, не пересекает цикла, и за два контакта в противном случае.

Примечание III. Предположим теперь, что начало, через которое попрежнему проходит цикл, есть особая точка. Пусть

$$X = \alpha x + \beta y + \theta_2,$$

$$Y = \alpha' x + \beta' y + \theta'_2,$$

где θ_2' и θ_2 — многочлены, члены которых второй или более высокой степени.

Мы будем иметь:

$$\varphi = (\alpha x + \beta y)\frac{\partial F}{\partial x} + (\alpha' x + \beta' y)\frac{\partial F}{\partial y} + \theta_2\frac{\partial F}{\partial x} + \theta_2'\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Кривая $\varphi = 0$ проходит через начало. Если она не касается кривой $F = 0$, то особая точка должна быть сосчитана за один контакт: но если она имеет с циклом $F = 0$ контакт n-го порядка, то особая точка должна быть сосчитана за $n + 1$ контакт.

Но, для того чтобы она касалась цикла $F = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda\frac{\partial E}{\partial y} = 0,$$

$$-\lambda(\alpha + \beta\lambda) + \alpha' + \beta'\lambda = 0,$$

т. е. необходимо и достаточно, чтобы цикл $F = 0$ касался бы характеристики, поскольку угловой коэффициент m касательной к одной из характеристик, проходящих через начало, даётся уравнением

$$-m(\alpha + \beta m) + \alpha' + \beta' m = 0.$$

Точно так же легко видеть, что цикл $F = 0$ будет иметь в начале контакт n-го порядка с кривой $\varphi = 0$, если он имеет контакт n-го порядка с одной из характеристик, проходящих через начало.

Следовательно, особая точка, через которую проходит данный цикл, но которая не является угловой точкой этого цикла, будет сосчитана за $n + 1$ контакт, если цикл имеет в этой точке контакт n-го порядка с характеристикой.

Примечание IV. Предположим, наконец, что начало есть особая точка и угловая точка данного цикла.

Пусть попрежнему

$$X = \alpha x + \beta y + \theta_2,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y + \theta_2',$$
$$F = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3$$

и внутри цикла

$$x > 0, \quad (y - \lambda x)(y - \mu x) < 0.$$

Мы будем иметь

$$\varphi = (\alpha x + \beta y)[2\lambda\mu x - (\lambda + \mu) y] + \\ + (\alpha' x + \beta' y)[2y - (\lambda + \mu) x] + \theta_3',$$

где θ_3' — многочлен, содержащий лишь члены третьей или более высокой степени.

Через начало проходят, следовательно, две ветви кривой $\varphi = 0$. Следовательно, начало будет сосчитано за чётное число контактов, если обе ветви касаются или обе ветви пересекают цикл, и за нечётное в противном случае; другими словами, для того чтобы начало должно было бы быть сосчитано за нечётное число контактов, необходимо и достаточно, чтобы две касательные в начале к кривой $\varphi = 0$ не содержались бы обе вместе в одном из углов, образованных касательными в начале к кривой $F = 0$, т. е. необходимо и достаточно, чтобы выражения

$$a = [(\alpha' + \beta'\lambda)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\lambda)] - \\ - \lambda[2(\alpha' + \beta'\lambda) - (\alpha + \beta\lambda)(\lambda + \mu)],$$
$$b = [(\alpha' + \beta'\mu)(\lambda + \mu) - 2\lambda\mu(\alpha + \beta\mu)] - \\ - \mu[2(\alpha' + \beta'\mu) - (\alpha + \beta\mu)(\lambda + \mu)]$$

имели бы разные знаки.

Упрощая, можно написать:

$$a = [(\alpha' + \beta'\lambda) - \lambda(\alpha + \beta\lambda)](\mu - \lambda),$$
$$b = [(\alpha' + \beta'\mu) - \mu(\alpha + \beta\mu)](\lambda - \mu).$$

Если особая точка есть фокус, уравнение

$$\alpha' + \beta' x - x(\alpha + \beta x) = 0 \text{ [29]}$$

имеет лишь мнимые корни. Левая его часть имеет, следовательно, всегда один и тот же знак, a и b имеют разные знаки и особая точка считается за нечётное число контактов.

Если особая точка есть седло или узел, то она считается иногда за чётное, иногда за нечётное число контактов, смотря по положению касательных в начале к циклу $F=0$.

Резюме. Число контактов алгебраического цикла всегда чётно при условиях:

1° соприкосновение n-го порядка считается за n контактов;

2° угловая точка данного цикла рассматривается как один или два контакта, смотря по тому, касается ли в ней цикла характеристика, проходящая через эту точку, или пересекает его;

3° особая точка считается за $n+1$ контакт, если цикл имеет в этой точке соприкосновение n-го порядка с характеристикой;

4° фокус, являющийся угловой точкой данного цикла, считается за один контакт;

5° седло или узел, являющиеся угловой точкой данного цикла, считаются за один или за два контакта, смотря по положению касательных к циклу в угловой точке.

Следствие. Если две алгебраические кривые имеют одни и те же концы, то число их контактов может быть одинаковой или различной чётности, если эти концы не являются фокусами; они всегда одинаковой чётности, если оба конца являются фокусами.

Теорема VII. *Если между двумя точками сферы можно провести какую-либо дугу без контакта, то между этими же точками можно провести алгебраическую дугу без контакта.*

В самом деле, пусть уравнения данной дуги будут:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

где t — подходяще выбранный параметр. Параметр всегда можно выбрать так, чтобы концы дуги соответствовали значениям $t=0$ и $t=\pi$.

Если данная дуга не пересекает экватора, то x и y остаются конечными и непрерывными функциями от t при изменении t от 0 до π; то же относится и к их производным.

Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — значения x и y для $t=0$ и для $t=\pi$; функции

$$x-x_1\cos\frac{t}{2}-x_2\sin\frac{t}{2},$$

$$y-y_1\cos\frac{t}{2}-y_2\sin\frac{t}{2}$$

обращаются в нуль при $t=0$ и при $t=\pi$.

Следовательно, функции x и y могут быть разложены в сходящиеся ряды по $\sin mt$ следующим образом:

$$x=\sum_{m=1}^{m=\infty}A_m\sin mt+x_1\cos\frac{t}{2}+x_2\sin\frac{t}{2},$$

$$y=\sum_{m=1}^{m=\infty}B_m\sin mt+y_1\cos\frac{t}{2}+y_2\sin\frac{t}{2}$$ [29].

Точно так же будут сходящимися и ряды

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{m=1}^{m=\infty}mA_m\cos mt-\frac{x_1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{x_2}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sum_{m=1}^{m=\infty}mB_m\cos mt-\frac{y_1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{y_2}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Если подставить эти величины вместо x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ в выражение

$$X\frac{dy}{dt}-Y\frac{dx}{dt},$$

то получится функция от t, которая при t, меняющемся от 0 до π, не обратится в нуль [30] и квадрат которой остаётся, следовательно, всё время бо́льшим некоторой данной величины ε^2.

Пусть

$$A_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} A_m \sin mt + x_1 \cos \frac{t}{2} + x_2 \sin \frac{t}{2},$$

$$B_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} B_m \sin mt + y_1 \cos \frac{t}{2} + y_2 \sin \frac{t}{2}.$$

Дуга

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

есть алгебраическая дуга и имеет те же концы, что и данная дуга.

Кроме того, всегда можно взять μ столь большим, чтобы A_μ, B_μ, $\frac{dA_\mu}{dt}$, $\frac{dB_\mu}{dt}$ сколь угодно мало отличались бы от $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ и чтобы $X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt}$, где x и y в X и Y заменены через A_μ и B_μ, сколько угодно мало отличались бы от $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$, где x и y в X и Y заменены через φ и ψ. В частности, можно взять μ столь большим, чтобы выражение $X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt}$ отличалось бы от $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$ меньше чем на ε и, следовательно, чтобы мы имели всё время

$$X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt} \lessgtr 0.$$

Но в этом случае дуга

$$x = A_\mu, \quad y = B_\mu$$

будет алгебраической и без контакта.

Что и требовалось доказать.

Если бы данная дуга пересекала экватор, но не пересекала большой круг

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

то мы сделали бы замену переменных, полагая

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

и теорема была бы доказана тем же способом.

Если бы данная дуга пересекала все большие круги сферы, то мы разложили бы её на некоторое число вспомогательных дуг, ни одна из которых не пересекала бы всех больших кругов сферы, и теорема, доказанная последовательно для всех этих вспомогательных дуг, была бы справедлива и для дуги в целом.

Теорема VIII. *Если AB есть алгебраическая дуга без контакта и AA_1, BB_1 — две дуги характеристик, то между точками A_1 и B_1 можно провести дугу без контакта.*

В самом деле, пусть

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t)$$

есть уравнение дуги AB, где φ и ψ — непрерывные функции от t, принимающие лишь одно значение для каждого значения t. Пусть α и β — значения t, соответствующие точкам A и B.

Каждому значению t соответствует одна и только одна характеристика, так что значениям α и β соответствуют характеристики AA_1 и BB_1. Пусть t_0, t_1, t_2, ... будут значения t, которым соответствуют характеристики, проходящие через сёдла.

Рассмотрим характеристику, соответствующую некоторому данному значению t. Пусть S есть длина дуги этой характеристики, отсчитываемая от той точки, в которой она пересекает дугу AB. Обе величины S и t определяют точку сферы и образуют, так сказать, новую систему координат. Пусть

$t = \alpha$, $s = \gamma$ — координаты точки A_1;
$t = \beta$, $s = \delta$ — координаты точки B_1;
$t = t_0$, $s = s_0$ — координаты сёдел;
$t = t_1$, $s = s_1$ — » »
. . . .

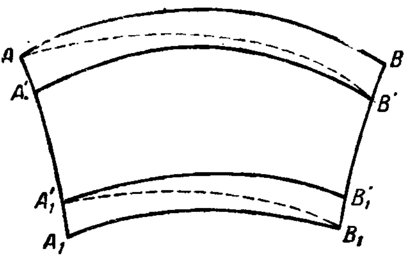
Уравнение

$$s = F(t),$$

где F есть непрерывная функция t, имеющая лишь одно значение при каждом значении t, изображает непрерывную кривую, не имеющую контактов при всех значениях t, не равных ни t_0, ни $t_1, \ldots$, а при $t = t_0$, например, непрерывную и без контактов, если при этом значении $s < s_0$.

Но всегда можно выбрать F таким образом, чтобы

$$\begin{array}{ll} \text{при } t = \alpha & F = \gamma; \\ \text{при } t = \beta & F = \delta; \\ \text{при } t = t_0 & F < s_0; \\ \text{при } t = t_1 & F < s_1; \\ \ldots & \ldots \end{array}$$



Черт. 5.

т. е. можно провести от A_1 до B_1 дугу без контактов и, следовательно, алгебраическую дугу без контакта [81]. Что и требовалось доказать.

Теорема IX. *Если AB и A_1B_1 (черт. 5) — две характеристики и если AA_1 и BB_1 — две алгебраические дуги, не пересекающие AB и A_1B_1 ни в одной точке, отличной от точек A, A_1 и B, B_1, то числа контактов дуг AA_1 и BB_1 одинаковой чётности.*

Пусть A' есть точка, столь близкая к A, что дуга AA' не имеет контакта и что характеристика $A'B'$ пересекает дугу BB_1 в такой точке B', что дуга BB' не имеет контакта.

Предположим также, что $A_1'B_1'$ есть дуга характеристики и что дуги A_1A_1' и B_1B_1' также без контакта.

По предыдущей теореме можно провести алгебраические дуги без контакта AB' и $A_1'B_1$.

Число контактов алгебраического цикла

$$AB'B_1A_1'A$$

должно быть чётно.

Но характеристики AB, A_1B_1 касаются этого цикла в A и в B, характеристики $A'B'$ и $A'_1B'_1$ пересекают его в B' и в A'_1. Следовательно, четыре угловые точки считаются за чётное число контактов. Следовательно: число контактов AB' + число контактов $B'B_1$ + число контактов $B_1A'_1$ + число контактов $A'_1A \equiv 0 \pmod 2$ или, что то же, число контактов AA_1 + число контактов $BB_1 \equiv 0 \pmod 2$.

Что и требовалось доказать.

Теорема X. *Если дуга некоторой кривой поддерживает характеристику, не проходящую ни через одну особую точку, то число контактов на этой дуге кривой нечётно* [32].

В самом деле, пусть $F=0$ есть уравнение поддерживающей дуги. Рассмотрим функцию F; эта функция переходит, например, от положительных значений к отрицательным, когда точка (x, y), описывающая характеристику, проходит через один из концов поддерживающей дуги, и от отрицательных к положительным, когда она проходит через другой конец этой дуги. Это значит, что функция F проходит через нечётное число максимумов и минимумов, когда точка (x, y) описывает данную дугу характеристики. Но эти максимумы и минимумы даются уравнением

$$\varphi = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

значит, дуга характеристики пересекает кривую $\varphi = 0$ в нечётном числе точек.

Но эта кривая, являясь алгебраической, пересекает в чётном числе точек цикл H, образованный дугой характеристики и поддерживающей дугой; следовательно, она пересекает поддерживающую дугу в нечётном числе точек.

Следовательно, число контактов этой дуги нечётно.

Что и требовалось доказать.

Примечание I. Как нужно изменить теорему, если дуга характеристики проходит через седло?

Седло принадлежит, очевидно, кривой $\varphi = 0$, но оно является максимумом или минимумом функции F лишь при условии, что дуга характеристики имеет в нём угловую точку.

В самом деле, предположим сперва, что там нет угловой точки. Кривые $F=F(x_0, y_0)$ и $\varphi=0$ обе пересекут, вообще говоря, цикл H, т. е. седло будет точкой простого пересечения цикла и $\varphi=0$, не соответствуя ни максимуму, ни минимуму функции F.

Если, наоборот, седло является угловой точкой, то одна из кривых: $\varphi=0$, $F=0$, пересечёт цикл H, а другая — коснётся его, так что седло окажется или же точкой простого пересечения H и $\varphi=0$ и в то же время точкой максимума функции F, или же оно будет двойной точкой пересечения H и $\varphi=0$, не являясь точкой максимума функции F.

Следовательно, если дуга характеристики проходит через седло и не имеет там угловой точки, то число контактов поддерживающей дуги чётно.

Если дуга характеристики проходит через седло и имеет в нём угловую точку, число этих контактов нечётно.

Примечание II. Точно так же можно показать, что если дуга характеристики не проходит ни через одну особую точку, то на дуге, которая её перехватывает, число контактов чётно.

Контакты топографической системы. Если мы рассмотрим какую-нибудь алгебраическую топографическую систему, то геометрическое место точек контакта такой системы есть алгебраическая кривая.

Будем различать внутренние и внешние контакты топографической системы, смотря по тому, остаётся ли характеристика в окрестности контакта внутри того цикла топографической системы, которого она касается, или, наоборот, остаётся вне этого цикла.

Кривую контактов можно таким образом разделить на определённое число дуг, которые будут соответственно дугами внутренних и дугами внешних контактов.

Эти дуги будут разделены:

1° особыми точками;

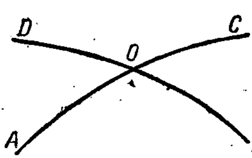
2° точками, в которых кривая контактов касается одного из циклов топографической системы.

ВТОРОЙ МЕМУАР

ГЛАВА V [1]

ТЕОРИЯ ПОСЛЕДУЮЩИХ

Основное соглашение. Рассмотрим какую-либо *полухарактеристику*; мы будем продолжать неограниченно, если это можно сделать, не встретив ни одной особой точки. Если, напротив, двигаясь по этой полухарактеристике, мы придём в узел, то мы остановим её в узле; если мы придём в седло, то нам представятся три возможных пути, по которым мы можем продолжить характеристику: первый — по прямому продолжению пути, которым мы шли до сих пор, и два других — направо и налево; мы условимся следовать одному из путей, ведущих направо или налево, *никогда* не выбирая того, который прямо перед нами.



Черт. 6.

Например (черт. 6), продолжением AO мы будем считать либо OB, либо OD, но не OC [2]. Таким образом, можно сказать, что в окрестности седла есть четыре характеристики, склеенные друг с другом и имеющие попарно общую ветвь; это характеристики AOB, BOC, COD, DOA.

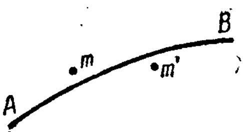
Определение последующих. Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

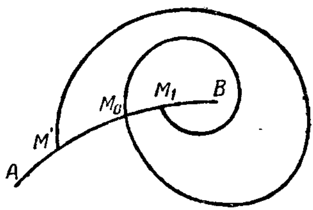
— алгебраическая дуга без контакта; φ и ψ — алгебраические функции от t, имеющие лишь по одному значению для каждого значения t. Пусть концы дуги соответствуют значениям t:

$$t = \alpha, \quad t = \beta.$$

Такая дуга без контакта будет иметь две стороны, которые мы назовём её правой и левой сторонами; действительно *бесконечно близкая* к дуге AB точка может лежать справа или слева от этой дуги. Например, точка m лежит



Черт. 7.



Черт. 8.

слева от дуги AB (черт. 7), точка m' — справа от дуги AB, потому что нельзя перейти от одной из этих точек к другой, не пересекая дугу AB или не удаляясь от этой дуги на конечное расстояние или не проходя через окружность бесконечно малого радиуса, начерченную вокруг A или B как центра [8].

Установив это, рассмотрим какую-либо точку M_0 дуги AB (черт. 8). Из этой точки выходят две *полухарактеристики* — одна налево, другая направо от дуги AB; рассмотрим ту, которая идёт налево. Может представнеиться сколько случаев.

1° Эту полухарактеристику можно неограниченно продолжать, не пересекая снова дугу AB.

2° Эта полухарактеристика, не пересекая более дугу AB, накручивается на фокус.

3° Не встретив снова дугу AB, она кончается в узле, где мы и должны её остановить согласно основному соглашению. В этих трёх первых случаях мы скажем, что точка M_0 *не имеет последующей.*

4° Полухарактеристика снова пересекает дугу AB в точке M_1, не пройдя ни через одну особую точку. Мы скажем тогда, что *точка* M_1 *есть последующая точки* M_0.

5° Полухарактеристика кончается в седле, не встретив снова дугу AB. В этом случае в силу основного соглашения надо свернуть направо или налево, и каждый из этих путей может нас привести или не привести к пересечению с дугой AB. Точка M_0 может иметь тогда 0, 1 или 2 последующих.

Может, наконец, случиться, что полухарактеристика встречает два седла или даже больше; в этом случае точка M_0 может иметь больше двух последующих.

Если, отправляясь от точки M_0, мы рассмотрели бы вместо левой полухарактеристики правую, то мы могли бы придти к некоторой точке M', лежащей на дуге AB. *Мы будем называть эту точку* M' *предшествующей точке* M_0.

Таким образом, точка M_0 будет предшествующей для своей последующей M_1.

Если значения t, соответствующие M_0 и M_1, суть t_0 и t_1, то соотношение, связывающее t_0 и t_1, есть *закон последования.*

Теорема XI. *Если* $t_0 = t_1$, *то характеристика есть цикл. Если же* $t_0 \lessgtr t_1$, *то характеристика есть спираль.*

В самом деле, первая половина утверждения есть просто тавтология. Вторую легко доказать следующим образом.

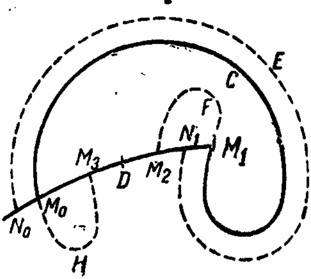
Заметим прежде всего, что дуга M_0DM_1 (черт. 9) *перехватывает* (sur-tend) дугу характеристики M_0CM_1, так как она *не имеет контактов* (теорема X).

Кроме того, эта дуга M_0DM_1 не пересекает характеристику ни в одной точке, отличной от M_0 и M_1. В противном случае дуги M_1M_2, M_0M_3 *поддерживали бы* (sous-tendus) дуги M_1FM_2, M_0HM_3, что невозможно, так как они, по предположению, *не имеют контактов.*

Установив это, проведём через точку N_0, бесконечно близкую к M_0 и находящуюся слева от неё дугу характеристики N_0EN_1; она пересечёт дугу M_0M_1 в точке N_1, бесконечно близкой к M_1 и находящейся слева от неё, так как перейти на правую сторону она могла бы лишь пересекши характеристику M_0CM_1, что невозможно. Цикл $N_1M_0N_0EN_1$ пересекается с характеристикой M_0CM_1 в одной лишь точке M_0. Следовательно, эта характеристика есть спираль.

Что и требовалось доказать.

Теорема XII. *Всякая характеристика, которая не кончается в узле, есть цикл или спираль* [4].



Черт. 9.

В самом деле, если эта характеристика не пересекает ни один алгебраический цикл в бесчисленном множестве точек, то она является циклом в силу теоремы I.

Если, напротив, она пересекает алгебраический цикл в бесконечном множестве точек, то, так как этот цикл состоит из конечного числа дуг без контакта, она пересечёт одну из этих дуг более чем в одной точке, т. е. одна из точек пересечения будет иметь последующую.

Если эта точка пересечения совпадает со своей последующей, — характеристика является циклом; если она не совпадает со своей последующей, — характеристика является спиралью в силу теоремы XI.

Следовательно, теорема доказана.

Теорема XIII. *Пусть точка M_0 определяет характеристику, не проходящую через седло, и пусть M_0 имеет последующую M_1; если $t_1 = \varphi_1(t_0)$ есть закон последования, то функция φ_1 голоморфна для значений t_0, близких к тому, которое соответствует точке M_0.*

В самом деле, мы предположили с самого начала, что в уравнении дуги без контакта:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

функции φ и ψ — голоморфные функции от t для значений t, близких к тому, которое соответствует M_0, а также для значений t, близких к тому, которое соответствует M_1.

Предположим, что мы имеем то решение уравнения в частных производных

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

которое обращается тождественно в t_0, если в нём положить

$$x=\varphi(t_0) \quad \text{и} \quad y=\psi(t_0).$$

Это решение даёт поверхность, проходящую через пространственную кривую

$$x=\varphi(z), \quad y=\psi(z).$$

В окрестности точки M_0 это решение будет голоморфной функцией от x и y, так как дуга

$$x=\varphi(t_0), \quad y=\psi(t_0)$$

не касается характеристики.

Но она будет голоморфна по x и по y также и вдоль всей характеристики, проходящей через точку M_0, если только эта характеристика не проходит ни через одну особую точку. Но мы предположили, что эта характеристика доходит до точки M_1, не встретив ни одной особой точки. Следовательно, в окрестности точки M_1 переменная z есть голоморфная функция от x и y; и если положить

$$x=\varphi(t_1) \quad \text{и} \quad y=\psi(t_1),$$

то z становится голоморфной функцией от t_1 в окрестности того значения t_1, которое соответствует M_1.

Но z есть не что иное, как t_0. Следовательно, t_0 есть голоморфная функция от t_1. Точно так же можно доказать, что t_1 есть голоморфная функция от t_0 в окрестности значения t_0, соответствующего M_0.

Следствие I. Функция $t_1=\vartheta_1(t_0)$, выражающая закон последования, может иметь разрывы только при тех значениях t_0, которые соответствуют характеристикам, проходящим через сёдла.

Следствие II. Если дугу AB без контактов разделить на части, так что точки каждой части или все имеют последующие, или все не имеют их, то граница каждой части будет иметь своей последующей конец дуги без контакта AB или будет соответствовать характеристике, проходящей через седло.

Следствие III. Пусть концы дуги без контакта соответствуют величинам

$$t = \alpha \text{ и } t = \beta;$$

пусть ни при каком t из промежутка

$$\alpha < t < \beta$$

отвечающая ему характеристика не проходит через седло; пусть при данных постоянных α_1 и β_1 для всех значений t из промежутка

$$\alpha < \alpha_1 < t < \beta_1 < \beta$$

соответствующая характеристика есть цикл.

Тогда характеристики, определяемые *любым* значением t, содержащимся между α и β, всегда являются циклами.

Теорема XIV. *Величина* $\frac{dt_1}{dt_0}$ *всегда положительна.*

В самом деле, пусть AB есть дуга без контакта (черт. 10), M_0M_1 — характеристика и N_0 — точка, бесконечно близкая к M_0 и лежащая справа от неё. Пусть N_0N_1 есть характеристика, проходящая через эту точку. Точка N_1 бесконечно близка к M_1; я утверждаю, что N_1 лежит справа от M_1. Действительно, если бы она лежала слева, то характеристика N_0N_1 при продолжении своём за точку N_1 выходила бы из цикла $M_0HM_1N_0M_0$, т. е. дуга характеристики N_0N_1 была бы поддержана дугою N_0N_1, что невозможно, так как эта дуга без контакта.

Изучение кривой последования [5]. Если рассматривать величины t_0 и t_1 как координаты точки, то закон последования

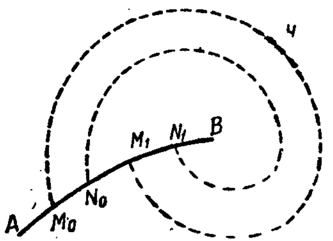
$$t_1 = \varphi(t_0)$$

даёт некоторую кривую. Эта кривая лежит целиком в квадрате

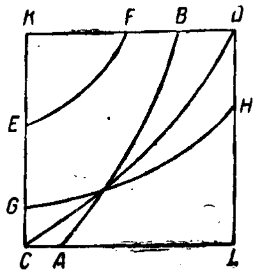
$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \quad t_1 = \beta.$$

Первый случай. Ни одному значению t из промежутка не соответствует характеристика, проходящая через седло.

В этом случае кривая последования непрерывна; прямые, параллельные осям, пересекают её лишь в одной точке; двигаясь по этой кривой в подходяще выбранном



Черт. 10.



Черт. 11.

направлении, мы будем всё время удаляться от осей координат. Это значит, что если $KLCD$ есть (черт. 11) квадрат

$$t_0 = \alpha, \ t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \ t_1 = \beta,$$

то кривая имеет вид, подобный кривым

$$AB, \ CD, \ EF, \ GH.$$

Она будет иметь вид CD, если значения t_0, равные α и β, соответствуют циклам, тогда как никакое другое значение t_0, содержащееся между α и β, не соответствует циклу.

Второй случай. Предположим, что некоторым значениям t

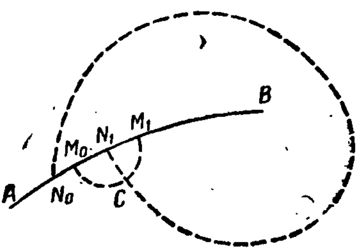
$$\gamma_0, \ \gamma_0', \ldots,$$

содержащимся между α и β, соответствуют характеристики, проходящие через седло; что, кроме того, значениям α и β соответствуют циклы и что никакому промежуточному значению не соответствует цикл.

Из каждого седла выходят четыре ветви характеристик; некоторые из этих ветвей пересекают дугу без контакта, другие не пересекают.

Предположим сначала, что все те ветви, которые пересекают дугу без контакта, выходят из одного и того же седла.

1° Невозможно, чтобы все четыре ветви, вышедшие из одного седла, пересекли дугу без контакта. Пусть, в самом деле, данная дуга без контакта есть AB (черт. 12). Пусть C есть данное седло; пусть CM_0, CM_1, CN_0, CN_1 — четыре ветви характеристик, выходящие из этого седла, такие, что M_1CM_0, N_1CN_0 не имеют угловых точек.



Черт. 12.

По теореме X, примечанию I, часть M_0M_1 дуги AB поддерживает характеристику M_0CM_1. Обе дуги AM_0, M_1B находятся, следовательно, по одну и ту же сторону цикла $M_0M_1CM_0$; назовём эту сторону *внешней частью цикла*. Из двух ветвей кривых CN_0, CN_1 одна находится вне, другая внутри цикла $M_0M_1CM_0$. Пусть CN_1 находится внутри; она не может пересечь дугу AB иначе, как между M_0 и M_1 и с той же стороны, что и ветви кривой CM_0, CM_1; таким образом, алгебраическая дуга M_1N_1 поддерживает дугу характеристики M_1CN_1, что невозможно по теореме X.

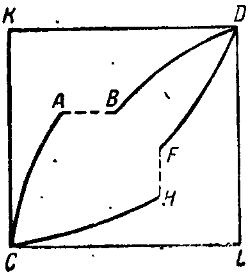
Таким образом, сделанное нами вначале предположение невозможно.

Что и требовалось доказать.

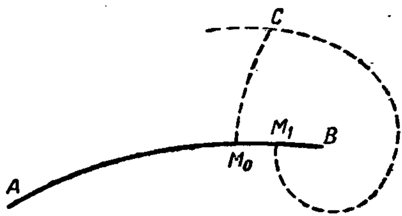
2° Может случиться, что три ветви, выходящие из одного и того же седла, пересекают дугу без контакта. В этом случае либо существует точка, имеющая две последующих, причём точки, лежащие между этими последующими, не имеют предшествующих; либо существует точка, имеющая две предшествующих, причём точки, лежащие между этими предшествующими, не имеют последующих.

Таким образом, кривая последования имеет вид или $CHFD$, или $CABD$ (черт. 13).

3° Не может случиться, чтобы только две или только одна ветвь, выходящая из седла, пересекли бы дугу без



Черт. 13.



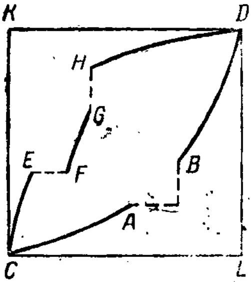
Черт. 14.

контакта. В самом деле, предположим сначала, что две ветви характеристик CM_0 и CM_1 пересекают AB и что M_0CM_1 имеет угловую точку в C (черт. 14). Бесконечно близкая к M_0 точка будет иметь последующую, если она лежит справа от M_0, и не будет иметь последующую, если она лежит слева от M_0. В силу следствия II теоремы XIII, точки дуги M_0A не имеют последующих. Точка, бесконечно близкая к A, не будет иметь последующей, что невозможно, так как A есть своя собственная последующая. Точно так же, предполагая, что M_1CM_0 не имеет угловой точки или что CM_1 не пересекает дугу AB, мы пришли бы к невозможному следствию, что бесконечно близкая к A точка не имеет последующей. Следовательно, предположения, сделанные вначале, невозможны.

Что и требовалось доказать.

Мы не будем детально исследовать те случаи, когда ветви характеристик, пересекающие дугу без контакта, выходят из нескольких различных сёдел. Рассмотрение основывается на тех же принципах и является только более длинным. Приведём только несколько примеров возможных комбинаций.

Кривая *CABD* (черт. 15). Дуга без контакта пересечена двумя ветвями характеристик, вышедшим из одного седла λ, и двумя ветвями, вышедшими из другого седла μ. Каждая из этих двух систем из двух ветвей характеристик имеет угловую точку — одна в λ, другая в μ.



Черт. 15.

Если менять t_0 от α до значения, соответствующего точке A и характеристике, проходящей через λ, то последующая существует; далее, при t_0, меняющемся от значения, соответствующего точке A, до значения, соответствующего точке B и характеристике, проходящей через μ, последующей нет; а когда t_0 меняется от значения, соответствующего точке B до β, последующая снова существует [6].

ГЛАВА VI
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

В силу того, что мы видели выше, характеристики могут быть разделены на четыре класса:

1° циклы;

2° спирали, которые можно неограниченно продолжать в обе стороны, не останавливаясь в узле, не приближаясь к фокусу и не возвращаясь в исходную точку;

3° характеристики, которые можно неограниченно продолжать в одну сторону, не встречая узла и не приближаясь к фокусу, но которые при продолжении в другую сторону кончаются в узле или неограниченно приближаются к фокусу;

4° характеристики, которые и в ту и в другую сторону кончаются в узле или в фокусе.

По тем же принципам *полухарактеристики* делятся на четыре класса:

1° циклы;

2° полуспирали, вдоль по которым можно пройти бесконечную дугу, не приходя в узел или фокус и не возвращаясь в исходную точку;

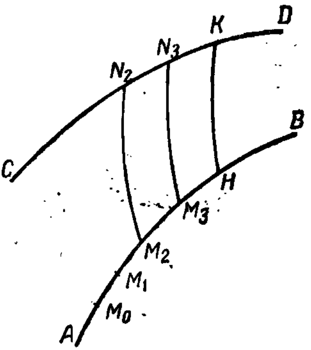
3° полухарактеристики, кончающиеся в узле;

4° полухарактеристики, неограниченно закручивающиеся вокруг фокуса.

В силу теоремы I полухарактеристики второго класса пересекают некоторые алгебраические циклы и, следовательно, некоторые алгебраические дуги без контакта в бесчисленном множестве точек.

Пусть AB — одна из этих дуг без контакта.

Пусть M_0 (черт. 16) — та точка, из которой выходит рассматриваемая полухарактеристика. Пусть M_1 — последующая точки M_0 и пусть M_1 лежит справа от M_0.



Черт. 16.

Пусть M_2 — последующая точки M_1, M_3 — последующая точки M_2 и т. д.; M_2 лежит справа от M_1, M_3 — справа от M_2 и т. д.

Вообще M_{n+1} лежит справа от M_n и так как при сколь угодно большом n точка M_n лежит на дуге AB, то M_n стремится к некоторому пределу, когда n неограниченно растёт. Пусть этот предел есть H.

Последующая точки M_n, когда n бесконечно велико, бесконечно близка к M_n. Следовательно, H есть своя собственная последующая [7].

Следовательно, характеристика, проходящая через H, есть цикл; мы назовём её *предельным циклом* данной полухарактеристики. Пройдя по характеристике, проходящей через M_0, достаточно большую дугу, можно как угодно близко подойти к точке H.

Пусть HK — дуга характеристики, проходящей через точку H. Пусть CD — алгебраическая дуга, проходящая через K.

Можно взять n столь большим, чтобы дуга характеристики, вышедшая из M_n, пересекла бы CD.

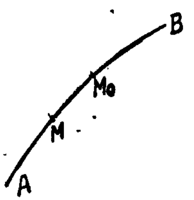
Предположим, например, что дуга, вышедшая из M_2, пересечёт CD в N_2; дуга, вышедшая из M_3, пересечёт CD в N_3; дуга, вышедшая из M_n, — в точке N_n. Точка N_3 будет лежать направо от $N_2, \ldots, N_{n+1}$ — направо от N_n. Таким образом, данная полухарактеристика пересечёт CD в бесконечном множестве точек $N_2, N_3, \ldots, N_n, \ldots$ и N_n будет стремиться к K при неограниченно возрастающем n.

Таким образом, всякая полухарактеристика второго класса имеет предельный цикл.

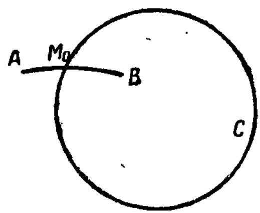
Каждая алгебраическая дуга, сколь бы мала она ни была, пересекающая этот цикл, пересечёт и полухарактеристику в бесконечном множестве точек.

На полухарактеристике можно найти точку, которая будет сколь угодно близка к какой-либо точке её предельного цикла.

Пусть AB (черт. 17) есть алгебраическая дуга без контакта. Предположим, что ни одной точке M, лежащей между A и B, не соответствует характеристика, проходящая через седло; что точке M_0 соответствует предельный цикл и что ни одной точке M, отличной от M_0 и лежащей между A и B, не соответствует предельный цикл. Каждая характеристика, пересекающая AB, будет иметь предельным циклом тот цикл, который проходит через M_0.



Черт. 17.

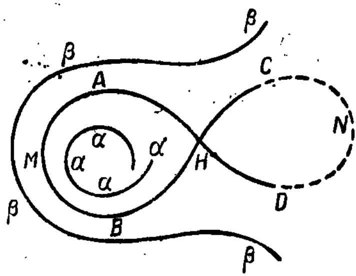


Черт. 18.

Рассмотрим предельный цикл C (черт. 18), не проходящий через седло и проходящий через точку M_0; через M_0 можно провести столь малую алгебраическую дугу AB, чтобы она была без контакта и чтобы между M_0 и A или между M_0 и B не было бы ни одной точки, которой соответствовал бы предельный цикл или характеристика, проходящая через седло. Тогда все характеристики, пересекающие AB, будут иметь C предельным циклом, так что C будет предельным циклом для двух систем характеристик, лежащих одна внутри цикла, другая вне него.

Посмотрим, что происходит, когда C проходит через седло. Пусть H — седло и HA, HB, HC, HD — четыре ветви характеристик, выходящие из этого седла. Предположим, что две из этих ветвей, например, HA и HB, кончаются в одной и той же точке M таким образом, что образуют цикл $HAMBH$; этот цикл будет предельным циклом для кривых вида $\alpha\alpha$, что доказывается исследованием чертежа (черт. 19) [8].

Рассмотрим, напротив, кривую $\beta\beta$; легко видеть, что если ветви кривых HC, HD не кончаются в одной и той же точке N, то цикл $HAMBH$ не является предельным циклом для $\beta\beta$. Если, напротив, HC и HB соединяются в N, то кривые $\beta\beta$ имеют предельным циклом полицикл



Черт. 19.

$$HAMHDNCH.$$

Теорема XV. *Внутри и вне любого предельного цикла находится по крайней мере один фокус или узел* [9].

При доказательстве этой теоремы мы будем называть *касаниями цикла* те точки, в которых он касается одного из больших кругов $x = \text{const}$.

Касания будут прямые, если в окрестности точки соприкосновения касающийся большой круг остаётся вне цикла. Они будут обратными в противном случае.

Мы докажем сначала две следующие леммы:

Лемма I. *Если точки пересечения экватора с большим кругом $x = 0$, которые мы обозначим через m, m', обе находятся вне некоторого цикла, то избыток числа прямых касаний этого цикла над числом его обратных касаний равен* 2.

Если точки m, m' лежат обе внутри цикла, то этот избыток равен -2.

Если одна из точек лежит вне, а другая внутри цикла, то этот избыток равен 0.

В самом деле, от любого цикла A к любому другому циклу B можно перейти путём непрерывных деформаций, т. е. переходя от цикла A к циклу A', бесконечно мало от него отличающемуся, и затем через серию циклов C, бесконечно мало отличающихся друг от друга, приходим к циклу B', бесконечно мало отличающемуся от B.

При этих последовательных деформациях прямое касание никогда не перейдёт в обратное касание и обратное касание не перейдёт в прямое, так как это могло бы наступить лишь тогда, когда одни из больших кругов имели бы касание высшего и притом нечётного порядка с одним из циклов; но в этом случае слились бы два касания, одно прямое и одно обратное, и они, вообще говоря, должны были бы исчезнуть для одного из циклов, бесконечно близких к C.

Избыток, который оценивается в этой лемме, может меняться при непрерывных изменениях цикла только тогда, когда сливаются и затем исчезают два касания. Но это может наступить в двух случаях:

1° Когда один из циклов C проходит через одну из точек m, m', но мы предположим: 1) что обе точки m и m' находятся внутри A и вне B; или 2) что обе точки m и m' находятся вне A и вне B; или 3) что m находится вне A и вне B, тогда как m' находится внутри обоих этих циклов. Следовательно, всегда можно найти серию циклов C, позволяющих перейти от цикла A к циклу B таким образом, чтобы ни один из циклов C не проходил бы ни через m ни через m'.

2° Изменение избытка может произойти ещё и тогда, когда один из циклов C соприкоснётся с одним из больших кругов $x = \text{const}$. Но в этом случае сливаются и исчезают одно прямое и одно обратное касания. Следовательно, оцениваемый избыток не изменяется.

Следовательно, этот избыток один и тот же для A и для B.

Предположим теперь, что A есть какой-либо выпуклый цикл, а B — данный цикл.

Избыток, о котором идёт речь, будет для A равен 2, если m и m' лежат вне A; он будет равен — 2, если обе точки m и m' лежат внутри A, и нулю, если одна лежит внутри, другая вне A.

Избыток, о котором идёт речь, будет для B равен $2, -2$ и 0 при тех же условиях.

Следовательно, лемма доказана.

Лемма II. *Если обходить цикл таким образом, чтобы внутренняя его часть была всё время слева, то при каждом прямом касании* $\frac{dy}{dx}$ *делает скачок от* $+\infty$ *до* $-\infty$, *если мы находимся в нижней полусфере, и от* $-\infty$ *до* $+\infty$, *если мы находимся в верхней полусфере; для обратных касаний наоборот.*

Доказательство теоремы. Предположим сначала, что предельный цикл таков, что обе точки m и m' находятся по одну и ту же сторону цикла, которую мы будем называть *внешней.*

Пусть:

ν есть число узлов и фокусов, находящихся внутри цикла;

ν' есть число узлов и фокусов, находящихся вне цикла;

γ и γ' — числа сёдел, расположенных внутри и вне цикла.

Имеем

$$\nu+\nu'-\gamma-\gamma'=2.$$

Цикл пересекает экватор в нескольких точках, так что его можно разложить на некоторое число вспомогательных циклов, одни из которых лежат целиком в нижней полусфере, другие — целиком в верхней полусфере; эти циклы образованы из дуг первоначального цикла и дуг экватора.

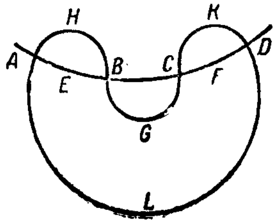
Пусть, для определённости, данный цикл есть $ALDKCGBHA$ и пусть он пересекает экватор в точках A, B, C, D (черт. 20). Цикл разлагается на три вспомогательных цикла

$$AEBHA,\ CFDKC,\ CGBEALFC.$$

По теореме IV имеем:

$$-(\nu-\gamma)=\text{инд. } AEBHA+\text{инд. } CFDKC+\\ +\text{инд. } CGBEALDFC.$$

Пусть теперь α, α', α'', α''' есть число прямых касаний дуг AHB, CKD, CGB, ALD; β, β', β'', β''' — число обратных их касаний; пусть λ и λ' — число скачков от $-\infty$ до $+\infty$, которые делает $\frac{Y}{X}$, когда мы проходим дуги AEB и CFD; пусть μ и μ' — число скачков от $+\infty$ до $-\infty$, которые делает $\frac{Y}{X}$, когда мы проходим дуги AEB и CFD.



Черт. 20.

Замечая, что вдоль всего данного цикла

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X},$$

в силу леммы II имеем:

$$2 \text{ инд. } AEBHA = -\alpha+\lambda-\mu+\beta,$$

$$2 \text{ инд. } CFDKC = -\alpha'+\lambda'-\mu'+\beta',$$

$$2 \text{ инд. } CGBEAL = -\alpha'-\alpha''+\beta'+\beta''-\lambda-\lambda'+\mu+\mu',$$

откуда

$$-(2\nu-2\gamma)=\beta+\beta'+\beta''+\beta'''-\alpha-\alpha'-\alpha''-\alpha'''$$

или по лемме I

$$-(2\nu-2\gamma)=-2,\ \nu-\gamma=1.$$

Следовательно, мы имеем также

$$\nu'-\gamma'=1,$$

откуда

$$\nu>0,\quad \nu'>0.$$

Что и требовалось доказать.

Если m и m' находятся по разные стороны цикла, то эту трудность легко преодолеть.

В самом деле, всегда можно найти на сфере две диаметрально-противоположные точки, находящиеся по одну и ту же сторону цикла, и достаточно сделать замену переменного, для того чтобы придти к только что рассмотренному случаю.

Если нельзя найти на сфере две диаметрально-противоположные точки, находящиеся по одну и ту же сторону цикла, то точки цикла попарно диаметрально-противоположны, т. е. цикл сам симметричен по отношению к центру сферы; но тогда теорема очевидна.

Теорема XVI. *Алгебраический цикл, проходящий через все узлы и все фокусы, пересекает все предельные циклы.*

В самом деле, пусть C — какой-либо предельный цикл; одни узлы и фокусы находятся внутри него, другие узлы и фокусы вне него.

Следовательно, одни точки алгебраического цикла лежат вне C, а другие внутри C, т. е. данный алгебраический цикл пересекает C.

Что и требовалось доказать.

Следствие. Всякий алгебраический цикл, проходящий через все узлы и все фокусы, пересекает все характеристики [10].

Теорема XVII. *Если ни один предельный цикл не проходит через седло, то предельных циклов конечное число.*

В самом деле, проведём алгебраический цикл C через все узлы и все фокусы. Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— уравнения этого цикла.

Если бы предельных циклов было бесконечное множество, то цикл C должен был бы иметь с ними бесконечное множество точек пересечения, так как он пересекает все предельные циклы. Тогда на цикле C должна была бы существовать точка, сколь угодно близко от которой находились бы такие точки пересечения C с предельными циклами, и, следовательно, если

$$t_1 = \varphi(t_0)$$

есть закон последования на некоторой дуге без контакта цикла C, то должно было бы существовать значение $t_0 = \tau$, такое, что при t_0, меняющемся в промежутке $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, переменное t_1 бесконечное множество раз становилось бы равным t_0.

Но если τ не соответствует характеристика, проходящая через седло, то $\varphi(t_0)$ голоморфно при $t_0 = \tau$, и мы не можем, следовательно, бесконечное множество раз иметь (при t_0, меняющемся от $\tau - \varepsilon$ до $\tau + \varepsilon$):

$$t_0 = \varphi(t_0).$$

Это невозможно также и в том случае, когда τ не соответствует предельный цикл.

Таким образом, бесконечное множество циклов может существовать лишь в том случае, когда один из циклов проходит через седло.

Теория предельных колец. Пусть попрежнему алгебраический цикл C проходит через все узлы и фокусы. Можно разделить этот цикл на некоторое число дуг без контакта, содержащих все точки, соответствующие предельным циклам, и не содержащих точек, соответствующих характеристикам, проходящим через сёдла.

Пусть $t_1 = \varphi(t_0)$ есть закон последования на одной из этих дуг и пусть t_0 меняется от α до β; пусть точки $t_0 = \alpha$, $t_0 = \beta$ имеют последующие $t_1 = \alpha'$, $t_1 = \beta'$. Пусть A_1 — точка дуги без контакта, соответствующая $t_0 = \tau$. Предположим, что мы рассматриваем на сфере точку, находящуюся на характеристике, проходящей через A_1, и отделённую от A_1 дугой характеристики длины s, и поставим в соответствие этой точке точку плоскости с координатами s и t (черт. 21).

Дуге без контакта будут соответствовать:

1° отрезок AB (черт. 21) прямой $s = 0$, заключённый между точками

$$\tau = \alpha, \quad \tau = \beta;$$

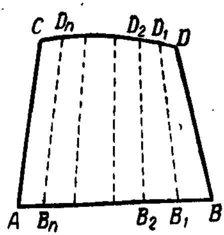
2° некоторая дуга кривой CD, определённая уравнением

$$s = \lambda(\tau),$$

где $\lambda(\tau)$ есть та длина дуги характеристики, проходящей через A_1, которую нужно пройти, чтобы снова попасть на дугу без контакта.

Каждая точка дуги без контакта будет изображаться некоторой точкой B_i отрезка AB и некоторой точкой D_i дуги CD. Всякая дуга кривой, идущая из D_i в B_i, изображает некоторый цикл; этот цикл будет без контакта, если дуга кривой D_iB_i не касается ни одной из прямых $\tau = \text{const}$.

Ясно, что можно соединить прямыми точки A и C, B и D, а затем покрыть криволинейный четырёхугольник $ABCD$ дугами кривых, не касающихся ни одной из прямых $\tau = \text{const}$. и нигде не пересекающихся.



Черт. 21.

Следствие. Вокруг каждого предельного цикла существует кольцевая область, ограниченная двумя циклами без контакта, которые мы будем называть *граничными циклами*, и которая сплошь заполнена нигде не пересекающимися циклами без контакта.

Эти кольцевые области существуют в конечном числе; мы назовём их *предельными кольцами*.

Вокруг узлов и фокусов также можно провести ряд циклов без контакта, охватывающих друг друга, так что узлы и фокусы также имеют свои предельные кольца.

Мы неявно предположим, что ни один из предельных циклов не проходит через седло, так как мы рассматривали на алгебраическом цикле C дуги, на которых находились все точки, соответствовавшие предельным циклам, и не было ни одной точки, которой соответствовала бы характеристика, идущая через седло.

Предположим теперь, что предельный цикл проходит через седло; мы знаем, что могут быть два случая:

1° Такого рода характеристика является предельным циклом лишь для характеристик, достаточно близких к ней и лежащих внутри цикла (см. черт. 19). В этом случае мы вырежем на C дугу без контакта, ограниченную точкой, соответствующей предельному циклу, проходящему через седло, и не содержащую никакой другой точки, соответствующей характеристике, проходящей через седло. Рассуждая, как в общем случае, нетрудно видеть, что цикл, проходящий через седло, также имеет предельное кольцо, но он сам является для него одним из граничных циклов.

2° Циклы $HAMBH$, $HCNDH$ (черт. 19) являются предельными циклами для характеристик, лежащих внутри этих циклов, тогда как полицикл $HAMBHDNCH$ является предельным циклом для внешних характеристик.

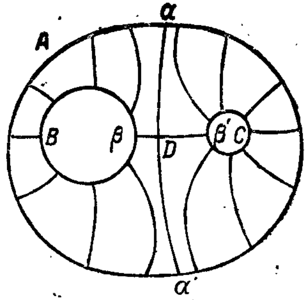
Рассуждая, как в предыдущем случае, нетрудно видеть, что каждый из этих трёх циклов имеет предельное кольцо, для которого он сам является граничным циклом; таким образом, эти три предельных кольца образуют в своём сочетании одно предельное кольцо.

Междукольцевые области. Граничные циклы разбивают сферу на два класса областей: 1) предельные кольца, которые мы только что изучили; 2) междукольцевые области.

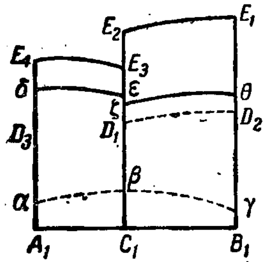
Подвижная точка, пробегающая характеристику с постоянной скоростью, выйдя из какой-нибудь точки междукольцевой области, через конечное время пересечёт один из граничных циклов и войдёт в предельное кольцо. Ибо междукольцевые области не содержат ни узла, ни фокуса, ни какой-либо точки предельного цикла.

Я утверждаю, что, подобно предельным кольцам, междукольцевые области сплошь можно покрыть циклами без контакта. В самом деле, предположим для определённости, что междукольцевая область ограничена тремя граничными циклами A, B и C и разделена на две части, покрытые: одна — характеристиками, идущими из A в B, другая — характеристиками, идущими из A в C. Обе части области должны быть разделены характеристикой, проходящей через седло D (черт. 22). Пусть αD, $\alpha' D$, βD, $\beta' D$ — четыре ветви характеристик, выходящие из D.

Пусть τ есть какой-нибудь параметр, определяющий точку λ_1 на цикле A. Пусть (x, y) — точка характеристики, вышедшей из λ_1, а s — длина дуги характеристики, отделяющая (x, y) от λ_1. Изобразим точку (x, y) сферы точкой плоскости с координатами s и t. Прямая $A_1C_1B_1$ $(s=0)$ (черт. 23) изобразит цикл A; A_1 и B_1 изобразят точку α; C_1 изобразит точку α'; дуги E_4E_3,



Черт. 22.



Черт. 23.

E_2E_1 изобразят соответственно циклы B и C; D_1, D_2, D_3 изобразят точку D; E_4 и E_3 изобразят β; E_2 и E_1 изобразят β'.

Кроме того, мы будем иметь:

$$E_4D_3 = E_3D_1, \quad E_2D_1 = E_1D_2, \quad A_1D_3 = B_1D_2.$$

Дуги кривых $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$, для которых

$$A_1\alpha < A_1D_3, \quad \beta C_1 < D_1C_1, \quad A_1\alpha = B_1\gamma,$$
$$\varepsilon C_1 > D_1C_1, \quad \varepsilon D_1 = \delta D_3,$$
$$\zeta C_1 > D_1C_1, \quad \theta D_2 = \zeta D_1,$$

изобразят циклы; эти циклы будут без контакта, если дуги $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$ не имеют касательных, параллельных оси s. Ясно, что можно покрыть многоугольник $A_1B_1E_1E_2E_3E_4$ дугами, удовлетворяющими этому условию. Таким образом, междукольцевую область можно покрыть циклами без контакта, что позволяет высказать следующую теорему:

Теорема XVIII. *Всегда существует топографическая система, образованная циклами без контакта, полициклами без контакта и предельными циклами.*

Эта топографическая система покрывает всю поверхность сферы. Вершины и впадины её являются узлами и фокусами данного уравнения. Седловины являются сёдлами данного уравнения [11].

Знание топографической системы позволяет полностью изучить [12] вид кривых, определённых данным дифференциальным уравнением. Впрочем, это будет ещё яснее из нижеприведённых примеров.

ГЛАВА VII

ПРИМЕРЫ ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ [13]

Первый пример. Рассмотрим уравнение (черт. 24):

$$\frac{dy}{xy-1}=\frac{dx}{1-x^2-y^2}.$$

Заметим прежде всего, что кривые $X=0$, $Y=0$, одна из которых есть $xy=1$, другая $x^2+y^2=1$, не пересекаются ни в одной точке, ни вне экватора, ни на экваторе.

Если, далее, X_2 и Y_2 суть члены второй степени в X и Y, то

$$X_2=-(x^2+y^2), \quad Y_2=xy,$$

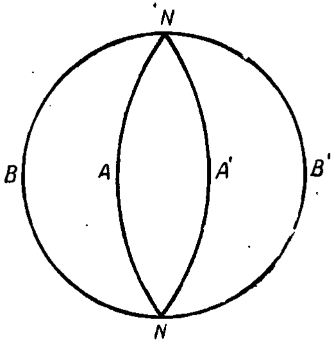
$$xY_2-yX_2=y(2x^2+y^2).$$

Выражение xY_2-yX_2 обращается в нуль лишь при $y=0$.

Следовательно, уравнение не имеет ни одной особой точки вне экватора, а на самом экваторе оно имеет две особые точки, которые представляют собой точки пересечения экватора с большим кругом $y=0$ и являются, очевидно, узлами.

Экватор, проходя через все особые точки, пересекает все предельные циклы; но так как он является характеристикой и не проходит ни через одно седло, то он может пересекать другие характеристики только в узлах N и N'. Значит он не пересекает предельных циклов; следовательно, предельных циклов не существует, и таким образом все характеристики выходят из N и кончаются в N'.

Черт. 24 изображает стереографическую проекцию нижней полусферы; $NBN'B'$ — экватор; N, N' — узлы, NAN', $NA'N'$ — характеристики.



Черт. 24.

Второй пример. Возьмём уравнение (черт. 25)

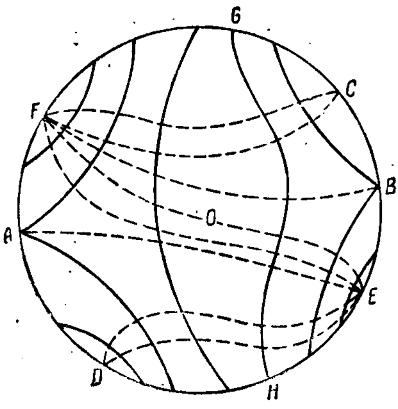
$$\frac{dy}{5xy-5}=\frac{dx}{x^2+y^2-1}.$$

Здесь кривые $X=0$, $Y=0$ также не пересекаются; но выражение xY_2-yX_2 представляет собой

$$y(4x^2-y^2),$$

так что оно обращается в нуль при

$$y=0,\ y=2x,$$
$$y=-2x.$$



Черт. 25.

Отсюда следует:

1° что вне экватора нет особых точек;

2° что на экваторе есть шесть особых точек; из них четыре являются узлами и две — сёдлами.

Полагая

$$x=\frac{1}{z},\ y=\frac{t}{z},$$

преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dz}{z(-1-t^2+z^2)}=\frac{dt}{t(4-t^2)-z^2(5-t)}$$

Положим последовательно $t=0$, $t=2$, $t=-2$; коэффициент при z в знаменателе под dz остаётся всё время отрицательным.

Рассмотрим производную по t от знаменателя дроби с числителем dt; она будет

отрицательна при $t=-2$;
положительна при $t=0$;
отрицательна при $t=2$.

Следовательно, точки $z=0$, $t=\pm 2$ являются узлами; точка $z=t=0$ является седлом.

Черт. 25 изображает, как и раньше, стереографическую проекцию нижней полусферы: A и B — два седла; C, D, E и F — четыре узла.

Топографическая система циклов без контакта имеет своими впадинами и вершинами точки C, D, E, F, а седловинами — точки A и B.

Рассмотрим теперь большой круг

$$x=2.$$

Этот большой круг проектируется в CH; ни в одной его точке мы не будем иметь

$$x^2+y^2=1$$

и, следовательно, не будем иметь $dx=0$. Следовательно, это есть цикл без контакта. Следовательно, если C — какая-нибудь впадина топографической системы циклов без контакта, то E тоже является впадиной, тогда как D и F — вершины.

Сплошные линии чертежа (черт. 25) изображают топографическую систему циклов без контакта. Можно показать, как и в предыдущем примере, что предельных циклов не существует.

Значит характеристики, выходящие из C, кончаются или в F или в D; область, заполненная характеристиками, идущими из C в F, отделена от области, заполненной характеристиками, идущими из C в D, характеристикой, идущей из C в A.

Следовательно, если есть характеристики, идущие из C в D, то есть и характеристика, идущая из C в A. В этом случае существует и характеристика, идущая из D в B.

Таким образом, возможны две гипотезы:

	Первая гипотеза	Вторая гипотеза
бесконечное множество характеристик идёт	из C в F,	из C в F,
	из C в D,	из E в F,
	из E в D,	из E в D,
одна характеристика идёт	из C в A,	из E в A,
	из D в B,	из F в B.

Для того чтобы решить, какая из этих гипотез правильна, отметим, что дуга большого круга $y=0$, идущая из A в B, есть дуга без контакта. Следовательно, характеристика, идущая из A, не может её пересечь и находится целиком в одной из двух четвертей сферы: в $AOBCGF$ или в $AOBDHE$.

В окрестности точки A дифференциальное уравнение имеет вид

$$z\frac{dt}{dz}=\frac{4t-t^3-5z^2+tz^2}{-1-t^2+z^2}=-4t+5z^2-5tz^2+5t^3+\varphi_4,$$

где φ_4 — ряд, начинающийся с членов четвёртой степени по z и t; отсюда получаем

$$t=\frac{5}{6}z^2+z^3\theta \text{ [14]},$$

где θ — голоморфная функция от z.

Значит характеристика, проходящая через точку A в окрестности этой точки, проходит через точки, соответствующие $t>0$, т. е. эта характеристика лежит в четверти сферы $AOBDHE$. Следовательно, она целиком лежит в этой четверти сферы и не может кончиться в узле C; следовательно, она кончается в узле E.

Таким образом, мы должны остановиться на второй гипотезе; характеристики будут иметь вид, изображённый пунктирными линиями на черт. 25.

Третий пример. Возьмём уравнение (черт. 26)

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)-y(x^2+y^2+1)}=$$
$$=\frac{dy}{y(x^2+y^2-1)+x(x^2+y^2+1)}.$$

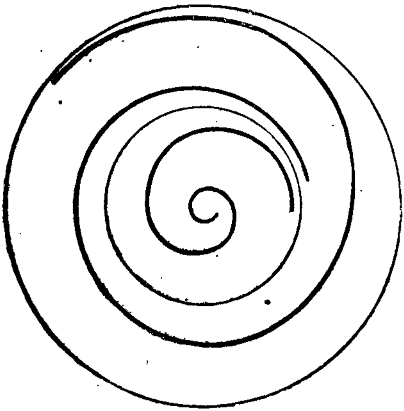
Существует только по одной особой точке в каждой полусфере; это — точка $x=0$, $y=0$, являющаяся фокусом. Нет ни одной особой точки на экваторе, который является характеристикой и, следовательно, предельным циклом.

Рассмотрим топографическую систему, состоящую из окружностей, имеющих центр в начале координат, т. е. из циклов

$$x^2+y^2=\text{const}.$$

Кривая контактов этой топографической системы есть

$$(x^2+y^2)(x^2+$$
$$+y^2-1)=0,$$



Черт. 26.

т. е. окружности не имеют контактов нигде, кроме окружности радиуса 1, являющейся предельным циклом.

Следовательно, система характеристик имеет вид, изображённый на черт. 26 [15].

Четвёртый пример [16]. Возьмём уравнение (черт. 27)

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8)}=$$
$$=\frac{dy}{y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)}.$$

Нетрудно видеть, что существуют три особые точки: 1° точка O

$$x=y=0;$$

2° точки A и B, в которых пересекаются окружности

$$x^2+y^2-9=0, \quad x^2+y^2-2x-8=0.$$

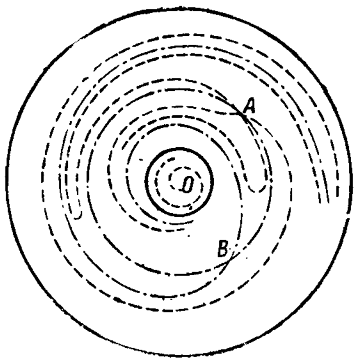
Точка O — фокус; точка A есть узел, а точка B—седло.

В настоящем примере экватор есть цикл без контакта; как и в предыдущем примере, окружности с центром в начале будут циклами без контакта, за исключением окружностей

$$x^2+y^2-1=0, \quad x^2+y^2-9=0,$$

являющихся характеристиками.

Первая окружность, не проходящая ни через одну особую точку, является предельным циклом; вторая проходит через узел и седло.



Черт. 27.

Таким образом, существуют 3 типа характеристик: одни закручиваются вокруг фокуса (черт. 27) и имеют предельным циклом

$$x^2+y^2-1=0;$$

другие кончаются в узле A и имеют предельным циклом

$$x^2+y^2-1=0;$$

третьи кончаются в A и в точке, симметричной с A; они пересекают экватор.

Следующие характеристики будут исключительными:

1° окружность $x^2+y^2=1$;

2° окружность $x^2+y^2=9$ [17];

3° характеристика, выходящая из седла B и пересекающая экватор;

4° характеристика, выходящая из седла B и имеющая предельным циклом

$$x^2+y^2=1.$$

Если t изображает время, то подвижная точка, двигающаяся по закону

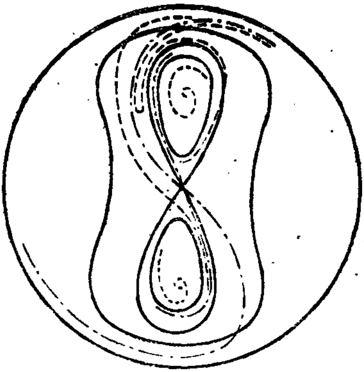
$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8),$$

не сможет выйти из окружности

$$x^2+y^2=1,$$

если она находилась внутри её.



Черт. 28.

Пятый пример [18]. Возьмём уравнение (черт. 28)

$$\frac{dx}{AC-B}=\frac{dy}{BC+A},$$

где

$$A=x(2x^2+2y^2+1),$$
$$B=y(2x^2+2y^2-1),$$
$$C=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2+0{,}1.$$

Особые точки даются уравнениями

$$AC-B=0,\quad BC+A=0,$$

откуда

$$A=B=0.$$

Следовательно, существует по три особые точки в каждой полусфере, а именно:

1° два фокуса

$$x=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

2° седло

$$x=y=0.$$

Если мы рассмотрим кривые

$$F=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2=\text{const.},$$

то кривая их контактов будет:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(AC-B)+\frac{\partial F}{\partial y}(BC+A)=0.$$

Но

$$A=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x},\quad B=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y},$$

и предыдущее уравнение обращается в

$$(A^2+B^2)\,C=0$$

или

$$C=0.$$

Но кривая $C=0$ сама является одной из кривых

$$F=\mathrm{const}.$$

Все кривые $F=\mathrm{const}.$ состоят из циклов без контакта за исключением $C=0$, которая состоит из предельных циклов.

Экватор также является циклом без контакта.

Остаётся построить алгебраические кривые

$$(x^2+y^2)^2+x^2-y^2=K.$$

При $K<-\frac{1}{4}$ кривая будет мнимой.

При $K=-\frac{1}{4}$ она сводится к двум особым точкам

$$x=0,\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При $0>K>-\frac{1}{4}$ она состоит из двух циклов. Это относится, в частности, к кривой $C=0$, состоящей из двух предельных циклов.

При $K=0$ она обращается в полицикл, имеющий двойную точку в начале.

При $K>0$ она состоит из одного цикла.

Система характеристик имеет, следовательно, вид, показанный на черт. 28.

ГЛАВА VIII

ОТЫСКАНИЕ ЦИКЛОВ БЕЗ КОНТАКТА

Лёгкость, с которой нам удалось полностью исследовать примеры предыдущей главы, имеет две причины: во-первых, предельные циклы были алгебраическими и поэтому топографическая система циклов без контакта и предельных циклов также была алгебраической; во-вторых, по самому виду дифференциального уравнения можно было сразу найти топографическую систему. В общем случае, очевидно, этого не будет.

Если предельные циклы не являются алгебраическими, то полное решение, очевидно, невозможно, так как мы никогда не сможем найти уравнение предельных циклов [19] в конечной форме. Но можно добиться разделения сферы на следующие области: 1) области без циклов, или ациклические, в которых заведомо нет ни одной точки предельного цикла; 2) моноциклические области, в которых находятся все точки одного из циклов и нет ни одной точки никакого другого предельного цикла.

Такое разделение предельных циклов всегда возможно, если предельных циклов конечное число [20].

В дальнейшем мы будем предполагать: 1) что существуют только две особые точки, лежащие вне экватора и соответственно являющиеся фокусами или узлами; 2) что эти точки имеют координаты: $x = y = 0$.

В тех случаях, когда существует более двух особых точек, рассмотрения будут более длинными и сложными.

В том случае, которым мы ограничиваемся, заведомо существует лишь конечное число предельных циклов; поэтому разделение циклов всегда возможно.

Мы будем рассматривать лишь то, что делается в первой полусфере. В самом деле, всё повторяется по другую сторону экватора, который, вообще говоря, является предельным циклом [21].

Мы разделим эту полусферу:

1° на области ациклические, не пересечённые ни одним предельным циклом;

2° на области моноциклические, содержащие целиком один из циклов и не пересечённые никаким другим;

3° на области циклические, *заведомо содержащие* один предельный цикл целиком и, *может быть*, пересечённые одним или несколькими другими предельными циклами;

4° на области сомнительные, которые, *может быть*, содержат один предельный цикл целиком, может быть, несколько, а *может быть*, не пересечены ни одним предельным циклом.

Рассмотрение можно продолжать, пытаясь расширить ациклические области с тем, чтобы теснее зажать предельные циклы во всё более и более узких моноциклических областях и заставить исчезнуть циклические и сомнительные области. Можно, если угодно, окончить рассуждение тогда, когда нет других областей кроме ациклических и моноциклических; можно также продолжить его с тем, чтобы ещё расширить ациклические области и провести ещё больше циклов без контакта.

Общий метод [22]. Рассмотрим алгебраическую функцию

$$F_1(x, y):$$

1° которая остаётся конечной и вполне определённой, так же как и её производные, когда x и y принимают конечные действительные значения, и обращается в бесконечность, когда x или y обращается в бесконечность;

2° которая равна нулю при $x=y=0$ и положительна при x или y, отличном от нуля;

3° у которой производные первого порядка обращаются одновременно в нуль лишь при $x=y=0$;

4° которая такова, что при $x=y=0$ имеет место неравенство [23]

$$\left[X'_y \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - \left(X'_x - Y'_y\right)\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} - Y'_x \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right]^2 + \\ + 4\left(X'_x Y'_y - X'_y Y'_x\right)\left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right] < 0;$$

5° которая такова, что кривая

$$X\frac{\partial F_1}{\partial x} + Y\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

не пересекает экватор.

Уравнение

$$F_1 = K_1,$$

где K_1 — произвольная постоянная, даёт топографическую систему, имеющую вершину в начале, для которой экватор является одним из циклов.

Уравнение кривой контактов будет:

$$XF'_{1x} + YF'_{1y} = 0;$$

она не пересекает экватор в силу пятого условия и имеет изолированную точку в начале в силу четвёртого условия.

Значит циклы $F_1 = K_1$ будут без контакта, если K_1 очень мало и если K_1 очень велико. Будем менять K_1 от 0 до ∞ и предположим, например, что при

$0 < K_1 < \alpha$	цикл	$F_1 = K_1$	не имеет контакта;
$\alpha < K_1 < \beta$	»	»	имеет контакт;
$\beta < K_1 < \gamma$	»	»	не имеет контакта;
$\gamma < K_1 < \delta$	»	»	имеет контакт;
$\delta < K_1 < +\infty$	»	»	не имеет контакта.

Тогда области сферы, определённые неравенствами

$$0 < F_1 < \alpha, \quad \beta < F_1 < \gamma, \quad \delta < F_1 < +\infty,$$

будут ациклическими; области, определённые неравенствами

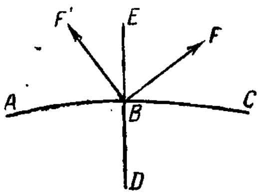
$$\alpha < F_1 < \beta, \quad \gamma < F_1 < \delta,$$

будут сомнительными.

Первая проблема. *Узнать, цикличина ли сомнительная область.*

Для этого мы дадим способ, которым можно определить, проходит ли в данной области чётное или нечётное число циклов. Ясно, что если мы установили, что число циклов, пересекающих сомнительную область, нечётно, то это будет означать, что эта область циклична. Чтобы решить проблему, которую мы перед собой поставили, необходимо ввести новое понятие.

Пусть ABC — дуга цикла без контакта, EBD — дуга большого круга $y=0$. Пусть (черт. 29) EB есть та часть этой дуги, которая лежит вне цикла ABC; BD — часть, лежащая внутри цикла; BC — та часть дуги ABC, которая лежит направо от наблюдателя, стоящего на сфере в точке B и смотрящего в сторону E; BA — та часть этой дуги, которая лежит налево от этого наблюдателя. Мы скажем, что цикл ABC положителен по отношению к дуге большого круга $y=0$, если характеристика, проходящая через точку B, лежит в угле EBC, как, например, FB, и отрицателен, если эта характеристика лежит в угле EBA, как, например, $F'B$.



Черт. 29.

Установив это, заметим, что если менять цикл ABC, то он меняет знак: 1) всякий раз, как он становится предельным циклом; 2) всякий раз, когда FB касается EB.

Теперь мы в состоянии решить предложенную проблему. Для этого рассмотрим сомнительную область, заключающуюся между циклами

$$F_1=\alpha, \quad F_1=\beta.$$

Пусть дуга большого круга $y=0$ пересекает эти циклы в точках A и B. Пусть λ есть число предельных циклов, лежащих в сомнительной области; пусть μ есть число контактов большого круга $y=0$, лежащих между A и B; пусть ν — число, которое чётно, если циклы $F_1=\alpha$, $F_1=\beta$ одного знака, и нечётно — в противном случае;

пусть θ — число перемен знака циклов без контакта топографической системы, определённой в теореме XVIII, при переходе от цикла $F_1 = \alpha$ к циклу $F_1 = \beta$. Мы будем иметь

$$\theta = \lambda + \mu, \quad \theta \equiv \nu (\text{mod. } 2),$$

откуда

$$\lambda \equiv \nu + \mu (\text{mod. } 2),$$

что и позволяет судить, чётно или нечётно число предельных циклов [24].

Вторая проблема. *Узнать, является ли данная область моноциклической.*

При решении этой проблемы мы будем опираться на следующую теорему:

Теорема XIX. *Положим*

$$x = \rho \cos \omega, \ y = \rho \sin \omega,$$

и пусть дифференциальное уравнение обращается в

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \varphi (\rho, \omega).$$

Если $\psi(\rho)$ есть какая-нибудь функция от ρ, имеющая лишь одно конечное значение для каждого конечного значения ρ, то между любыми двумя предельными циклами всегда существуют точки, в которых

$$\text{либо } \frac{d\psi}{d\rho} = \infty, \text{ либо } \varphi(\rho, \omega) = \infty,$$

$$\text{либо } \frac{d}{d\rho}\left(\varphi \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

В самом деле, пусть ω_0 — некоторое значение ω, ρ_0 и ρ_0' — значения ρ, соответствующие точкам пересечения рассматриваемых предельных циклов и дуги большого круга

$$\omega = \omega_0.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\rho_0') - \psi(\rho_0) = \theta(\omega_0)$$

и посмотрим, как она меняется, когда ω_0 меняется от 0 до 2π. Ясно, что эта функция меняется непрерывно, что она остаётся конечной и возвращается к прежнему значению.

Следовательно, она проходит через максимум и для некоторого значения ω_1 величины ω_0, соответствующего значениям ρ_1 и ρ_1' величин ρ_0 и ρ_0', мы будем иметь:

$$\frac{d\theta}{d\omega_0} = 0$$

или

$$\frac{d\psi}{d\rho_0'} \varphi(\rho_1', \omega_1) = \frac{d\psi}{d\rho_0} \varphi(\rho_1, \omega_1).$$

Следовательно, если рассматривать ω как постоянное, равное ω_1, и менять ρ от ρ_1 до ρ_1', то функция

$$\frac{d\psi}{d\rho} \varphi(\rho, \omega_1)$$

или обратится в бесконечность, или пройдёт через максимум, т. е. мы будем иметь либо

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty,$$

либо

$$\varphi = \infty,$$

либо

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\psi}{d\rho} \varphi(\rho, \omega)\right] = 0.$$

Обобщённая теорема XIX. *Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — две функции от x и y, такие, что каждой системе значений x и y соответствует одна, и только одна, система значений φ и ψ и каждой системе значений φ и ψ соответствует одна, и только одна, система значений x и y. Если положить*

$$\varphi(x, y) = \xi, \quad \psi(x, y) = \eta$$

и если после этого преобразования уравнение обращается в

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \theta(\xi, \eta),$$

то в области, заключённой между двумя предельными циклами, всегда будут точки, в которых либо

$$\theta = \infty,$$

либо

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

В самом деле, пусть C и C' — два данных предельных цикла. Предположим, что ни в одной точке области R, заключённой между этими двумя циклами, θ не обращается в бесконечность; я утверждаю, что в этой области есть точки, где

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

В самом деле, пусть m — точка цикла C и пусть η_0 — соответствующее значение функции $\psi(x, y)$; дуга кривой

$$\psi(x, y) = \eta_0,$$

проходящая через m, пересечёт цикл C' в точке m', так как, если бы она не пересекала цикл C', то она должна была бы выйти из области R, пересекши цикл C; следовательно, она в этой области касалась бы одной из характеристик (в силу теоремы X). Но это невозможно, так как мы предположим, что в R нет точек, где

$$\theta = \infty.$$

Пусть ξ_0 и ξ_0' — значения ξ, соответствующие точкам m и m'.

Когда точка m обходит цикл C, функция

$$\xi_0' - \xi_0$$

проходит через максимум, т. е. для некоторого значения η_1 величины η_0, которому соответствуют значения ξ_1 и ξ_1' величин ξ_0 и ξ_0', мы будем иметь:

$$\theta(\xi_1', \eta_1) = \theta(\xi_1, \eta_1).$$

Иными словами, при $\eta = \eta_1$ и при изменении ξ от ξ_1 до

ξ_1' функция θ проходит через максимум или минимум, т. е.

$$\frac{d\theta}{d\xi}=0.$$

Что и требовалось доказать.

Решение второй проблемы. Для того чтобы доказать, что какая-нибудь сомнительная область моноциклична (или ациклична), достаточно показать, что можно найти две функции ξ и η, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы, и такие, что ни в одной точке области мы не имели бы

$$\text{ни } \theta=\infty, \quad \text{ни } \frac{d\theta}{d\xi}=0.$$

Продолжение исследования. Если топографическая система

$$F_1=K_1$$

не достаточна для полного разделения предельных циклов, то можно рассмотреть сколь угодно большое число систем, удовлетворяющих тем же условиям

$$F_2=K_2, \quad F_3=K_3, \ldots *):$$

1° ясно, что некоторые части областей, оставшихся сомнительными при употреблении системы $F_1=K_1$, будут пересечены теми новыми циклами без контакта, которые даются системами $F_2=K_2$, ... и станут, следовательно, ациклическими;

2° среди областей, остающихся сомнительными при употреблении всех этих систем, будут такие, в которых нельзя провести цикл, окружающий начало, и которые, следовательно, также являются ациклическими (см. пример II следующей главы);

3° сомнительные области, сжимаясь всё более и более, вообще говоря, станут, наконец, все ациклическими или моноциклическими, чем и закончится разделение предельных циклов; это разделение всегда возможно, и если не

*) Ср. примечание [22].

существует слившихся предельных циклов, то всегда можно обнаружить, когда оно закончено;

4° так как циклические области всё более и более сжимаются, то предельные циклы можно будет определить с любой степенью точности.

Примечание. Теория разделения предельных циклов имеет некоторую аналогию с теми способами, которые служат для разделения корней алгебраического уравнения. С этой точки зрения способ, которым решается первая проблема, напоминает метод подстановок, позволяющий узнать, имеет ли алгебраическое уравнение чётное или нечётное число корней в данном промежутке.

Теорема XIX эквивалентна теореме Ролля.

Что же касается случая слившихся предельных циклов, который аналогичен случаю кратных корней, то он представляет некоторые специальные трудности, которые я ещё не разрешил [25].

ГЛАВА IX

ПРИМЕРЫ НЕПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Пример I. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-2x-3)-y}=\frac{dy}{y(x^2+y^2-2x-3)+x},$$

которое при

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega$$

обращается в

$$d\rho=\rho(\rho^2-2\rho\cos\omega-3)\,d\omega.$$

В качестве топографической системы возьмём систему кругов

$$\rho=K_1.$$

Кривая контактов для этих кругов обращается в сферический эллипс

$$\rho^2-2\rho\cos\omega-3=0,$$

охватывающий начало. Следовательно, области

$$\rho<1,\quad \rho>3$$

будут ацикличны, тогда как область

$$1<\rho<3$$

сомнительна; однако, обращая внимание на то, что циклы $\rho=1$ и $\rho=3$ имеют разные знаки, мы заключаем, что она циклична.

Воспользуемся теперь теоремой XIX, полагая

$$\psi(\rho)=\ln\rho, \quad \varphi(\rho, \omega)=\rho(\rho^2-2\rho\cos\omega-3),$$

откуда

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right)=2\rho-2\cos\omega.$$

Кривая $2\rho-2\cos\omega=0$ есть сферический эллипс, проходящий через начало и касающийся окружности $\rho=1$. Значит ни в одной точке области $1<\rho<3$ мы не имеем

$$\text{ни}\ \frac{d\psi}{d\rho}=\infty, \quad \text{ни}\ \varphi=\infty, \quad \text{ни}\ \frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right)=0.$$

Следовательно, эта область моноциклична.

Следствие. Кроме экватора, в каждой полусфере существует один и только один предельный цикл. Этот цикл лежит целиком в области

$$1<\rho<3.$$

Если подвижная точка двигается по закону (t — время)

$$dx=[x(x^2+y^2-2x-3)-y]\,dt,$$
$$dy=[y(x^2+y^2-2x-3)+x]\,dt$$

и если при $t=0$ мы имеем $\rho<1$, то подвижная точка заведомо выйдет из окружности $\rho=1$ и заведомо не выйдет из окружности $\rho=3$ [27].

Пример II. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{-y+2x(x^2+y^2-4x+3)}=\frac{dy}{x+2y(x^2+y^2-4x+3)},$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\omega}=2\rho(\rho^2-4\rho\cos\omega+3).$$

Рассматривая снова окружности $\rho=K_1$, мы увидим, что области $\rho<1$, $\rho>3$ ацикличны, тогда как область $1<\rho<3$ сомнительна. Но теперь циклы $\rho=1$ и $\rho=3$ — одного знака; поэтому нельзя утверждать, что эта область циклична.

Рассмотрим цикл

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho^2 - 3{,}5\rho\cos\omega - 2 = 0.$$

Для того чтобы он имел контакт, нужно, чтобы

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} = -2\frac{d\varphi}{d\rho}(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Но вдоль по циклу $\varphi = 0$ мы имеем:

$$\left|\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\rho}}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}\right| < 1{,}5$$

и

$$\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3 > 1{,}25.$$

Следовательно, соотношение (λ) не может быть выполнено, и цикл $\varphi = 0$ есть цикл без контакта. То же будет иметь место и для циклов $\varphi = K_2$, лишь бы $-\varepsilon < K_2 < +\varepsilon$, где ε достаточно мало.

Область $-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon$ ациклична. Остаются, следовательно, две сомнительные области:

1° область $1 < \rho < 3$, $\varphi > +\varepsilon$;

2° область $1 < \rho < 3$, $\varphi < -\varepsilon$.

Но ни в одной из этих областей нельзя провести цикл, окружающий начало. Значит они также ацикличны.

Следствие. Кроме экватора, других предельных циклов нет. Подвижная точка, двигающаяся по закону

$$dx = [-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt,$$
$$dy = [x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt,$$

может как угодно близко подойти к экватору.

Пример III. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8).$$

Рассмотрение циклов $\rho = \text{const.}$ показывает нам, что:

1° области $\rho < 1$ и $\rho > 4$ ацикличны;

2° область $1 < \rho < 4$ сомнительна.

Кроме того, так как циклы $\rho = 1$ и $\rho = 4$ одного знака, то в этой области должно быть чётное число предельных циклов.

Рассмотрим цикл:

$$\theta(\rho, \omega) = \rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5{,}5 = 0.$$

Этот цикл целиком лежит в сомнительной области; он не имеет контактов, так же как и циклы

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5{,}5 = K_2, \quad \text{где} \quad K_2 < +\varepsilon, \ K_2 > -\varepsilon,$$

причём ε очень мало. Кроме того, эти циклы имеют знак, противоположный знаку циклов $\rho = 1$ и $\rho = 4$.

Таким образом, мы имеем следующие области:

1-я область $\rho < 1$ ациклична;
2-я область $1 < \rho < 4$, $\theta < -\varepsilon$ циклична;
3-я область $1 < \rho < 4$, $-\varepsilon < \theta < +\varepsilon$ ациклична;
4-я область $1 < \rho < 4$, $\theta > +\varepsilon$ циклична;
5-я область $\rho > 4$ ациклична.

Воспользуемся теперь теоремой XIX, полагая

$$\psi(\rho) = \ln\rho,$$

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8),$$

откуда

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right) = 4(\rho - \cos\omega)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5{,}5).$$

Кривая $\frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0$ сводится, следовательно, к двум циклам

$$\rho = \cos\omega, \quad \rho^2 = 2\rho\cos\omega + 5{,}5,$$

которые лежат целиком в ациклических областях — один в первой, другой в третьей. Так как, с другой стороны, ни φ ни $\frac{d\psi}{d\rho}$ не обращаются в бесконечность, то вторая и четвёртая области моноцикличны.

Заключение. Вне экватора, в каждой полусфере, лежат два, и только два, предельных цикла.

Первые две части этой работы были напечатаны в этом же журнале; первая — в ноябре и декабре 1881 г. (3-я серия, т. VII), вторая — в августе 1882 г. (3-я серия, т. VIII). В последующем я сохраняю, несмотря на замечания, которые можно сделать против них, те же названия, что и в первых двух мемуарах, чтобы не вводить новых определений.

ТРЕТИЙ МЕМУАР

ГЛАВА X *)

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Всякий, читавший первые две части этого мемуара, не мог не поразиться сходством, существующим между рассмотренными в них вопросами и важнейшей астрономической проблемой об устойчивости солнечной системы. Конечно, эта проблема гораздо сложнее, чем те вопросы, которыми мы занимались, так как дифференциальные урав-

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4-e série, t. I (1885), p. 167—244.

нения движения небесных тел очень высокого порядка. Более того: в этой проблеме встретится новая трудность, существенно отличная от тех, которые мы преодолели, изучая уравнения первого порядка, и я намерен отчётливо её выявить, если не в этой, третьей части, то по крайней мере в следующих частях этой работы.

Но как бы там ни было, хотя решение этой проблемы и требует величайших усилий и новых методов, тем не менее аналогия между вопросами, подлежащими решению, очевидна. При изучении дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$$

можно положить:

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y.$$

Рассматривая затем x и y как координаты движущейся точки, t как время, мы должны найти движение точки, скорость которой задана в функции её координат. Именно это движение мы и изучали и искали решение вопросов такого типа: описывает ли подвижная точка замкнутую кривую? Остаётся ли она всегда внутри некоторой части плоскости? Другими словами, употребляя язык, принятый в астрономии, мы исследовали, устойчива или неустойчива орбита этой точки.

Мы могли бы поставить перед собой аналогичные вопросы также и в том случае, когда X и Y являются уже не многочленами по x и y, а алгебраическими функциями этих переменных или же когда дифференциальное уравнение порядка выше первого.

Но предварительно необходимо точно определить, что нужно понимать под устойчивостью и неустойчивостью. Для этого мы изучим пять следующих уравнений, которые дадут нам примеры всех могущих представиться случаев.

1° Пусть сперва

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x;$$

уравнения траекторий [1] будут:

$$x^2+y^2=\text{const}.$$

Так как все траектории замкнуты, то устойчивость является полной.

2° Пусть теперь, в полярных координатах,

$$\frac{d\omega}{dt}=h, \quad \frac{d\rho}{dt}=\sqrt{1-(\rho-2)^2},$$

где h — какая-либо постоянная. Нетрудно было бы перейти от этого уравнения в полярных координатах к соответствующему уравнению в прямоугольных координатах; тогда мы увидели бы, после приведения уравнения к виду

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y,$$

что X и Y являются уже не многочленами, целыми относительно x и y, а алгебраическими функциями от этих переменных. Дифференциальное уравнение будет первого порядка, но степени выше первой.

Решение находится непосредственно:

$$\rho=2+\sin\left(\frac{\omega}{h}+C\right),$$

где C — постоянная интеграции.

Если h соизмеримо с 2π, то траектория будет замкнутой кривой, и мы возвращаемся к предыдущему случаю. Предположим, что это не имеет места.

Тогда траектория не будет замкнутой кривой; но, тем не менее, она будет обладать известной устойчивостью; можно было бы даже сказать — некоторой особого рода периодичностью. В самом деле, пусть M есть точка траектории, в которой находится изображающая точка в момент времени t; опишем вокруг M окружность сколь угодно малого радиуса r. Изображающая точка, вышедшая из точки M, должна будет, очевидно, выйти из этой окружности; но она снова пересечёт эту малую окружность и притом *бесконечное множество раз*, сколь бы мало ни было r. Другими словами, подвижная точка, вышедшая из точки M, никогда не вернётся в M, но будет попадать в точки, бесконечно близкие к M.

С другой стороны, точка M всегда остаётся внутри кольца, ограниченного двумя окружностями

$$\rho = 1 \quad \text{и} \quad \rho = 3.$$

Её траектория полностью заполняет это кольцо, не оставляя никаких просветов. Я хочу сказать, что в каждой сколь угодно малой плоской области, лежащей внутри кольца, есть точка траектории [2]. Немцы сказали бы, что Punktmenge *), образованное различными точками траектории, является überall dicht **) внутри кольца.

Этот второй случай не может иметь места для дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени. Поэтому мы его до сих пор ни разу не встречали.

3° Пусть теперь, в полярных координатах:

$$\frac{d\rho}{dt} = 1 + \rho^2, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{h},$$

или, в прямоугольных координатах:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} x - \frac{y}{h}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} y + \frac{x}{h}.$$

Общий интеграл есть

$$\rho = \operatorname{tg}(h\omega + C),$$

где C — постоянная интеграции.

И в этом случае также, если h несоизмеримо с 2π, то подвижная точка не может вернуться к отправному положению, но может притти в бесконечно близкие к нему точки. Отличие от предыдущего случая заключается в том, что подвижная точка не должна теперь оставаться в некоторой определённой части плоскости, но траектория её заполняет всюду плотно (überall dicht) всю плоскость [3].

Этот третий случай, так же как и второй, не может иметь места для уравнений первого порядка и первой степени.

---

*) Точечное множество.

**) Всюду плотным.

4° В качестве четвёртого примера мы возьмём логарифмическую спираль, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\frac{d\rho}{d\omega} = m\rho,$$

или же

$$\frac{dx}{d\omega} = mx - y, \quad \frac{dy}{d\omega} = my + x.$$

Общий интеграл, как известно, есть

$$\rho = Ce^{m\omega}.$$

Пусть M есть начальное положение подвижной точки; если мы опишем вокруг точки M окружность достаточно малого радиуса, мы увидим, что подвижная точка, начав двигаться, выйдет из этой окружности и, выйдя, больше уже *никогда в неё не возвращается*. Это прямо противоположно тому, что имело место в трёх изученных выше случаях, когда подвижная точка, выйдя из очень маленького круга, возвращалась в него затем бесконечное множество раз. С этой точки зрения, можно сказать, что траектория неустойчива.

Известно, что окружности $\rho = \text{const.}$ являются для наших траекторий *циклами без контакта*. Вся плоскость покрыта этими циклами без контакта, так что на ней *нет предельных циклов*. Именно вследствие наличия этих циклов без контакта траектории неустойчивы.

5° Пусть, наконец, дано уравнение

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho - 1)(\rho - 2).$$

Окружности $\rho = \text{const.}$ являются попрежнему циклами без контакта, за исключением окружностей $\rho = 1$ и $\rho = 2$, которые являются предельными циклами. Так как общее решение есть

$$\rho = \frac{Ce^{\omega} - 2}{Ce^{\omega} - 1},$$

то легко видеть, что траектория неустойчива, т. е., что, выйдя из окружности достаточно малого радиуса с центром в начальной точке, она никогда более в неё не возвращается.

Отличие от предыдущего случая заключается в наличии предельных циклов. Отсюда следует, что если подвижная точка находилась в начальный момент в точке, лежащей внутри кольца, ограниченного двумя окружностями $\rho = 1$ и $\rho = 3$, то она всё время остаётся внутри этого кольца.

Мы можем теперь, отправляясь от этих примеров, дать точное определение устойчивости. Мы скажем, что траектория подвижной точки устойчива, если, сколь бы мал ни был радиус r окружности (или сферы), описанной вокруг начальной точки, подвижная точка, выйдя из этой окружности (или сферы), вновь войдёт в неё бесконечное множество раз. Это как раз то, что имеет место в первых трёх примерах [4].

Траектория будет неустойчива, если, выйдя из этой окружности или сферы, подвижная точка уже больше в неё не вернётся. Это то, что имеет место в последних двух примерах.

Определённая таким образом устойчивость имеет лишь теоретическую важность. Для приложений следовало бы определить ту часть пространства, из которой не выходит подвижная точка. Но как раз для случая устойчивости определение подобной области гораздо более трудно, чем для случая неустойчивости. Здесь существует трудность, на которой я не хочу сейчас останавливаться, но которая в дальнейшем развитии настоящей работы будет предметом достаточно долгих обсуждений.

В тех случаях, которые мы изучали до сих пор, т. е. в случаях уравнений первого порядка и первой степени, траектории являются циклами, т. е. замкнутыми кривыми, или спиралями (см. гл. V, теорему XII). В первом случае они устойчивы; во втором — неустойчивы. Таким образом, мы не могли встретить ничего, подобного тому, что мы имели во втором и третьем примерах.

Вообще говоря, плоскость могла быть покрыта бесконечным множеством циклов без контакта и предельных циклов (гл. VI, теорема XVIII). За исключением предельных циклов, все траектории являются спиралями [5].

Таким образом, неустойчивость является правилом, устойчивость — исключением.

В особо исключительных случаях может также случиться, что плоскость покрыта не бесконечным множеством циклов без контакта, но бесконечным множеством замкнутых кривых, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению и образующих одну из тех систем, которые мы назвали *топографическими* (см. гл. I). Тогда имеет место устойчивость. Этот случай наступает в окрестности тех исключительных особых точек, которые я назвал *центрами*. К более углублённому изучению их мы теперь и перейдём.

ГЛАВА XI
ТЕОРИЯ ЦЕНТРОВ

Напишем наше дифференциальное уравнение в таком виде, чтобы оно изображало движение некоторой подвижной точки:

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y.$$

Предположим, что X и Y являются многочленами степени n по x и y. Предположим, кроме того, что за начало координат мы взяли ту особую точку, которую мы хотим изучить, так что X и Y обращаются в нуль вместе с x и y. Мы можем тогда написать

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$
$$Y=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n,$$

где X_i и Y_i — однородные многочлены от x и y степени i. Посмотрим теперь, можно ли построить многочлен F относительно x и y, такой, чтобы в выражении

$$\Phi=\frac{\partial F}{\partial x}X+\frac{\partial F}{\partial y}Y,$$

которое также является многочленом от x и y, исчезли бы все члены, степени которых по x и y ниже p.

Предполагая, что F не содержит членов степени 0 и 1, что для нас необходимо, мы можем написать

$$F=F_2+F_3+F_4+\ldots$$

(F_i — однородный многочлен по x и y степени i.)

Положим затем

$$\Phi_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x} X_k + \frac{\partial F_i}{\partial y} Y_k;$$

Φ_{ik} будет однородный многочлен степени $i + k - 1$.

Если мы запишем, что в Φ обращаются в 0 все члены степени ниже p, то мы получим:

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi_{21} = 0, \\ \Phi_{31} = -\Phi_{22}, \\ \Phi_{41} = -\Phi_{32} - \Phi_{23}, \\ \Phi_{51} = -\Phi_{42} - \Phi_{33} - \Phi_{24}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{p-1,1} = -\Phi_{p-2,2} - \Phi_{p-3,3} - \dots - \Phi_{2,p-2}. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений даст нам F_2, второе $F_3, \dots$, и, наконец, $(p-2)$-е даст нам F_{p-1} *при условии, конечно, что все они могут быть удовлетворены.*

Рассмотрим сначала первое уравнение.

Пусть

$$F_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

$$X_1 = \alpha x + \beta y, \quad Y_1 = \gamma x + \delta y$$

так что

$$\frac{1}{2}\Phi_{21} = (ax + by)(\alpha x + \beta y) + (bx + cy)(\gamma x + \delta y);$$

тогда первое из уравнений (1) влечёт за собой следующие три:

$$(2) \quad \begin{cases} a\alpha + b\gamma = 0, \\ a\beta + b(\alpha + \delta) + c\gamma = 0, \\ b\beta + c\delta = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения совместны только тогда, когда

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha + \delta & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Мы предположим, кроме того, что величины a, b, c, получаемые из уравнений (2), таковы, что форма F_2 является положительно-дефинитной.

Если оба эти условия соблюдены, то мы приходим к четвёртому подслучаю, о котором мы сказали несколько слов в гл. II, но который мы пока ещё не исследовали до конца.

Если бы они не были выполнены, то особая точка была бы узлом, фокусом или седлом, и мы ничего не могли бы добавить к тому, что уже было сказано по поводу этих точек. Мы предположим, следовательно, что оба эти условия выполнены.

Так как форма F_2 является положительно-дефинитной, то мы всегда можем записать её в таком виде:

$$(\lambda x+\mu y)^2+(\lambda' x+\mu' y)^2.$$

Если мы сделаем затем замену переменных, полагая

$$x'=\lambda x+\mu y,$$
$$y'=\lambda' x+\mu' y,$$

то получим

$$F_2=x'^2+y'^2.$$

Следовательно, мы всегда можем предполагать, что

$$F_2=x^2+y^2,$$

так как, если бы это было не так, то линейной замены переменных было бы достаточно для того, чтобы привести F_2 к такому виду. В дальнейшем мы будем считать выполненной эту гипотезу.

Какие следствия вытекают для X_1 и Y_1?

Уравнения (2) обращаются в

$$\alpha=0, \quad \delta=0, \quad \beta+\gamma=0,$$

откуда

$$X_1=\beta y, \quad Y_1=-\beta x.$$

Остальные уравнения (1) напишутся в виде:

$$y\frac{\partial F_q}{\partial x}-x\frac{\partial F_q}{\partial y}=H_q, \tag{4}$$

где F_q — однородный многочлен степени q, который нужно определить, тогда как H_q — однородный многочлен степени q, который можно рассматривать как данный, так как он зависит лишь от многочленов X и Y и от однородных многочленов $F_2, F_3, \ldots, F_{q-1}$, которые должны были быть вычислены до нахождения F_q.

В каком случае возможно удовлетворить уравнению вида (4)?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы перейдём к полярным координатам, полагая

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

Мы получим

$$y \frac{\partial F}{\partial x} - x \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial \omega}$$

и

$$F_q = \rho^q \varphi(\omega), \quad H_q = \rho^q \psi(\omega).$$

Кроме того, мы будем иметь

$$\varphi(\omega) = \sum A_k \cos k\omega + \sum B_k \sin k\omega,$$
$$\psi(\omega) = \sum C_k \cos k\omega + \sum D_k \sin k\omega.$$

В этих выражениях k может принимать только значения меньшие или, в крайнем случае, равные q и одной чётности с q. В частности, если q нечётно, то в них не может быть постоянных членов (т. е. членов, где $k = 0$).

Уравнение (4) запишется тогда в виде:

$$-\frac{d\varphi}{d\omega} = \psi(\omega).$$

Для того чтобы ему можно было бы удовлетворить, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(\omega)$ не имела постоянных членов, т. е. чтобы

$$C_0 = 0.$$

Это условие, как мы только что видели, выполняется само собой, когда q нечётно. Наоборот, если q чётно, то оно, вообще говоря, не выполняется.

Таким образом, если q нечётно, то уравнению (4) можно удовлетворить одним и только одним способом; для этого достаточно положить

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}.$$

Если q чётно и если притом $C_0 = 0$, то нашему уравнению можно удовлетворить бесчисленным множеством способов; можно попрежнему положить

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

при k, не равном нулю, и можно взять A_0 произвольно.

Что же, в конце концов, мы получаем, когда q чётно и C_0 не равно нулю? В этом случае удовлетворить уравнению (4) невозможно, но можно выбрать F_q так, чтобы было

$$y\frac{\partial F_q}{\partial x} - x\frac{\partial F_q}{\partial y} < H_q$$

при всех значениях x и y, если C_0 положительно.

Наоборот, если C_0 отрицательно, то можно выбрать F_q таким образом, чтобы мы всегда имели

$$y\frac{\partial F_q}{\partial x} - x\frac{\partial F_q}{\partial y} > H_q.$$

Для этого достаточно положить

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \quad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

для всех значений k, отличных от нуля, причём A_0 остаётся произвольным. Тогда мы получим

$$\psi(\omega) + \frac{d\varphi}{d\omega} = C_0$$

или же

$$H_q - y\frac{\partial F_q}{\partial x} + x\frac{\partial F_q}{\partial y} = C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Пусть, например,

$$q = 4, \quad H_q = \beta x^4 - 2\alpha x^2 y^2 + \beta y^4.$$

Мы будем иметь

$$H_4 = \rho^4\left(\frac{3\beta-\alpha}{4} + \frac{\alpha+\beta}{4}\cos 4\omega\right).$$

Положим тогда

$$F_4 = {}^4\left(-\frac{\alpha+\beta}{16}\sin 4\omega\right) = -\frac{\alpha+\beta}{4}(x^2-y^2)\,xy.$$

Мы получим

$$H_4 - y\frac{\partial F_4}{\partial x} + x\frac{\partial F_4}{\partial y} = \frac{3\beta-\alpha}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Если $3\beta=\alpha$, то левая часть этого уравнения равна нулю и уравнение (4) удовлетворено. Если $3\beta>\alpha$, левая часть положительна, каковы бы ни были x и y. Если $3\beta<\alpha$, левая часть отрицательна, каковы бы ни были x и y.

После этого легко видеть, что можно сделать две гипотезы.

1° Предположим сначала, что можно определить F_2, $F_3, \ldots, F_{q-1}$ так, чтобы первые $q-2$ уравнения (1) были бы удовлетворены, но что невозможно затем определить F_q так, чтобы было удовлетворено $(q-1)$-е уравнение (1). В этом случае q необходимо чётно, и мы определим F_q, как только что было сказано, таким образом, чтобы

$$H_q - y\frac{\partial F_q}{\partial x} + x\frac{\partial F_q}{\partial y} = C_0(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Мы положим затем

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_{q-1} + F_q.$$

Я утверждаю, что если k есть положительная, достаточно малая постоянная, то уравнение

$$F = k$$

изобразит замкнутую кривую, которая будет циклом без контакта.

В самом деле, если ρ достаточно мало (меньше, например, ρ_0), то функция F при постоянном ω будет убывать, когда ρ убывает от ρ_0 до 0, так как при очень малом ρ знак $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ определяется членом $\frac{dF_2}{d\rho} = 2\rho$.

Пусть k_0 есть наименьшее положительное значение, которое может принимать F на окружности $\rho = \rho_0$, и пусть $k < k_0$.

Ясно, что $F = k$ есть замкнутая кривая, или, точнее, среди ветвей, из которых состоит эта алгебраическая кривая, есть замкнутая ветвь, окружающая начало и лежащая в круге $\rho = \rho_0$. Именно эту ветвь, исключая все остальные, мы и будем рассматривать.

Для того чтобы между этим циклом и одной из наших траекторий был контакт, нужно, чтобы

$$\Phi = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Но многочлен Φ, по предположению, не имеет членов степени ниже q, и его члены степени q приводятся к виду

$$-C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Когда ρ меньше некоторой определённой границы (а мы всегда можем считать, что ρ_0 меньше этой границы), знак Φ определяется как раз членами степени q, а так как они сохраняют постоянный знак, то Φ не может обратиться в нуль.

Следовательно, между двумя нашими кривыми контакта быть не может.

Таким образом, внутренность цикла $F = k_0$ покрыта бесчисленным множеством циклов без контакта, охватывающих друг друга и окружающих начало.

Предположим, для определённости, что C_0 отрицательно; мы будем иметь внутри круга $\rho = \rho_0$:

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} > 0.$$

Следовательно, когда t будет стремиться к $+\infty$, подвижная точка будет удаляться от начала до тех пор, пока не выйдет из кривой $F=k_0$; и, выйдя из этой кривой, она уже не сможет в неё вернуться. Когда t стремится к $-\infty$, подвижная точка будет неограниченно и асимптотически приближаться к началу координат, описывая бесконечное множество витков вокруг этой точки. Следовательно, траектория является спиралью [6]. Другими словами, *имеет место неустойчивость, и начало координат является фокусом.*

Если бы C_0 было положительно, то достаточно было бы переменить знак у t, и мы получили бы те же результаты.

Пусть, например,

$$\frac{dx}{dt}=y-\frac{\beta x^3}{2}, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\frac{2\alpha x^2y-\beta y^3}{2}.$$

Мы положим $F_2=x^2+y^2$, $F_3=0$; третье из уравнений (1) напишется в виде:

$$y\frac{\partial F_4}{\partial x}-x\frac{\partial F_4}{\partial y}=\beta x^4-2\alpha x^2y^2+\beta y^4=H_4.$$

Мы видели, что, вообще говоря, удовлетворить этому уравнению невозможно. Мы возьмём

$$F_4=\frac{\alpha+\beta}{4}(y^2-x^2)xy$$

и, как мы видели, мы будем иметь

$$H_4-y\frac{\partial F_4}{\partial x}+x\frac{\partial F_4}{\partial y}=\frac{3\beta-\alpha}{2}(x^2+y^2)^2.$$

Как мы видели, если $3\beta-\alpha$ не равно нулю, то кривые

$$F_2+F_4=k$$

являются циклами без контакта, если только k достаточно мало. Мы будем иметь неустойчивость, и начало будет фокусом.

Предположим теперь, что $3\beta=\alpha$. Третье из уравнений (1) будет тогда удовлетворено. Мы возьмём $F_5=0$, и пятое из уравнений (1) напишется

$$y\frac{\partial F_6}{\partial x}-x\frac{\partial F_6}{\partial x}=H_6.$$

Кроме того, полагая $\beta=1$, $\alpha=3$, мы найдём:

$$H_6=\frac{3}{2}x^5y-9x^3y^3+\frac{3}{2}y^5x,$$

и нетрудно видеть, что первому из уравнений (1) можно удовлетворить, полагая [7]

$$F_6=-\frac{1}{4}x^6+\frac{3}{2}x^4y^2+\frac{3}{4}x^2y^4.$$

Мы возьмём затем $F_7=0$, и седьмое из уравнений (1) напишется

$$y\frac{\partial F_8}{\partial x}-x\frac{\partial F_8}{\partial y}=H_8,$$

где

$$H_8=-\frac{3}{4}x^8+6x^6y^2-\frac{39}{4}x^4y^4+\frac{3}{2}x^2y^6,$$

или

$$\frac{4}{3}H_8=-x^8+8x^6y^2-13x^4y^4+2x^2y^6.$$

Положим $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$; разложим затем по синусам и косинусам дуг, кратных ω, и посмотрим, обращается ли в нуль постоянный член

$$\frac{4}{3}C_0\rho^8.$$

Мы находим

$$\frac{4}{3}\frac{H_8}{\rho^8}=-24\cos^8\omega+40\cos^6\omega-19\cos^4\omega+2\cos^2\omega,$$

откуда

$$C_0=-\frac{9}{64}.$$

Таким образом, седьмому из уравнений (1) удовлетворить невозможно; следовательно, начало опять является фокусом. Мы должны отсюда заключить, что если движение подвижной точки определено уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=y-\frac{\beta x^3}{2},\quad \frac{dy}{dt}=-x+\frac{2\alpha x^2y-\beta y^3}{2},$$

то траектория этого движения будет неустойчива, каковы бы ни были α и β.

Таким образом, мы должны попытаться решить последовательно все уравнения (1), и если мы будем вынуждены остановиться, то это будет означать, что траектория неустойчива.

2° Но может случиться, что мы никогда не будем вынуждены остановиться, что требует соблюдения бесконечного множества условий. Эти условия, очевидно, необходимы для того, чтобы траектория была устойчивой, т. е. для того, чтобы начало было центром. Являются ли они достаточными? Этим мы теперь и займёмся. Образуем последовательно, с помощью уравнений (1), многочлены $F_2, F_3, \ldots, F_q$ и рассмотрим бесконечный ряд

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q + \ldots$$

Если этот ряд сходится, то никаких трудностей не возникает, так как он удовлетворяет уравнению

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Кривые $F = k$ будут, следовательно, траекториями подвижной точки; они будут замкнутыми кривыми, если k достаточно мало.

Остаётся исследовать, сходится ли ряд F. Положим

$$x = R\cos\omega - \rho\Omega\sin\omega, \quad Y = R\sin\omega + \rho\Omega\cos\omega \text{ [8]}.$$

Предыдущее уравнение принимает вид:

$$R\frac{\partial F}{\partial \rho} + \Omega\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0.$$

Мы можем разложить функцию $-\frac{R}{\Omega}$ по возрастающим степеням ρ, причём это разложение начинается с члена, содержащего ρ^2; мы получим

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots,$$

где θ_2, $\theta_3, \ldots$ являются функциями от ω. Предыдущее уравнение обращается в

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = (\rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots)\frac{\partial F}{\partial \rho};$$

и если положить

$$F_q = \rho^2 z_q, \quad z'_q = \frac{dz_q}{d\omega},$$

где z_q являются функциями от ω, то можно последовательно найти z_q с помощью следующих уравнений, заменяющих теперь уравнения (1):

$$(1\text{ bis})\quad \left\{\begin{array}{l} z_2 = 1, \\ z'_3 = 2z_2\theta_2, \\ z'_4 = 3z_3\theta_2 + 2z_2\theta_3, \\ z'_5 = 4z_4\theta_2 + 3z_3\theta_3 + 2z_2\theta_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_q = (q-1)z_{q-1}\theta_2 + (q-2)z_{q-2}\theta_3 + \ldots + \\ \qquad\qquad + 3z_3\theta_{q-2} + 2z_2\theta_{q-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Если уравнениям (1) можно удовлетворить многочленами по x и y, то уравнениям (1 bis) можно удовлетворить чисто тригонометрическими функциями (т. е. многочленами по $\cos\omega$ и $\sin\omega$).

Но если, наоборот, уравнениям (1) удовлетворить невозможно (т. е. если величины C_0 не все равны нулю), то тем не менее можно решить уравнение (1 bis) и вычислить последовательно функции z'_q; но эти функции не будут уже содержать только тригонометрические члены; они будут содержать члены, где ω будет входить не под знаками синуса и косинуса, быть может, в первой, быть может, в более высокой степени.

Невозможно не поразиться аналогией между таким образом вводимыми членами и членами, которые астрономы называют вековыми. Однако между ними есть существенная разница, которую необходимо отметить. В обычных методах небесной механики, когда встречается вековой член, то это ещё не позволяет заключить, что орбита неустойчива; может случиться, что ряд расходится или же, что полученный таким образом член является лишь первым членом разложения, сумма которого всегда остаётся конечной. Так, $\alpha\omega$ может быть первым членом разложения

$$\sin \alpha\omega = \alpha\omega - \frac{\alpha^3\omega^3}{6} + \frac{\alpha^5\omega^5}{120} - \ldots$$

Совсем не то имеет место в занимающем нас случае с тем методом, который я только что изложил. Если в ходе вычислений встречается вековой член, то можно немедленно заключить, что налицо неустойчивость; для этого даже нет необходимости, чтобы ряд

$$F = \rho^2 z_2 + \rho^3 z_3 + \ldots$$

был сходящимся.

Мы можем поставить вопрос о сходимости также и в том случае, когда функции z_q содержат вековые члены, так как хотя этот вопрос представляет гораздо меньше интереса, тем не менее целесообразно освободиться от ненужных ограничений, для того чтобы легче притти к решению.

Скажем сначала несколько слов по поводу следующих трёх простых случаев [9]:

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2 \frac{d\varphi}{d\omega}, \quad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2 + \rho^3)\frac{d\varphi}{d\omega}, \quad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2 + \rho^4)\frac{d\varphi}{d\omega};$$

мы находим тогда в качестве общих интегралов уравнений движения:

$$\frac{1}{\rho} - \varphi = k, \quad \frac{1}{\rho} + \ln\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = k, \quad \frac{1}{\rho} + \operatorname{arctg}\rho - \varphi = k,$$

где k — постоянная интеграции. Попробуем построить F.

В первом случае легко находим

$$F = \frac{\rho^2}{(1-\rho\varphi)^2} \text{ [10]}.$$

В третьем случае положим

$$\frac{\rho}{1 + \rho \operatorname{arctg}\rho} = \eta;$$

левая часть этого равенства есть голоморфная функция от ρ при $\rho = 0$, которая обращается в нуль вместе с ρ, но производная от которой не обращается в нуль вместе с ρ. По известной теореме мы выводим отсюда

$$\rho = \psi(\eta),$$

где ψ — голоморфная функция от η. Тогда мы будем иметь

$$F = \left[\psi\left(\frac{\rho}{1 + \rho \operatorname{arctg} \rho - \rho\varphi}\right)\right]^2.$$

Эта функция, как и в первом случае, голоморфна по ρ и по φ, если только эти переменные достаточно малы.

Во втором случае этот способ уже нельзя приложить, так как функция

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho} + \ln \frac{\rho}{\rho + 1}}$$

неголоморфна. Разлагая F не по степеням ρ, но по степеням φ, положим тогда

$$F = H_0 + H_1\varphi + \frac{H_2\varphi^2}{2!} + \ldots + \frac{H_n\varphi^n}{n!} + \ldots$$

Функции H можно будет тогда определить последовательно с помощью следующих уравнений [11]:

$$(1\ \mathrm{ter})\qquad \begin{cases} H_0 = \rho^2, \\ H_1 = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_0}{d\rho}, \\ H_2 = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_1}{d\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_n = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_{n-1}}{d\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Определённые таким образом функции H будут многочленами по ρ, и нетрудно видеть, что все коэффициенты их положительны, что степень H_n есть $2(n+1)$ и что полином H_n не содержит членов степени ниже $n+2$.

Пусть S_n — сумма коэффициентов многочленов H_n, а S'_n — сумма коэффициентов производной $\frac{dH_n}{d\rho}$; так как H_n — степени $2(n+1)$, то

$$S'_n < 2S_n(n+1).$$

С другой стороны, формулы (1 ter) дают нам

$$S_{n+1} = 2S'_n;$$

Отсюда

$$S_{n+1} < 4S_n(n+1)$$

и

$$S_{n+1} < 4^{n+1}(n+1)!.$$

Предположим, что ρ положительно и меньше единицы и рассмотрим общий член ряда, определяющего F; мы будем иметь

$$\left|\frac{H_n\varphi^n}{n!}\right| < (4\rho\varphi)^n.$$

Следовательно, если $\rho\varphi$ положительно и меньше $\frac{1}{4}$, то ряд сходится и притом абсолютно.

Отсюда мы заключаем, что F есть голоморфная функция от ρ и φ, если только

$$|\rho| < 1, \; |\rho\varphi| < \frac{1}{4}.$$

Этот результат легко было предвидеть. Положим, в самом деле,

$$\frac{1}{\rho} + \ln\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = \frac{1}{\eta} + \ln\frac{\eta}{1+\eta}. \tag{5}$$

Я утверждаю, что η есть голоморфная функция от ρ и в окрестности точки $\rho = \varphi = 0$ [12]. Чтобы доказать это нужно доказать две вещи:

1° Что η стремится к нулю, когда ρ и φ одновременно стремятся к нулю.

В самом деле, если ρ и φ стремятся к 0, то обе части уравнения (5) неограниченно растут. Но, для того чтобы

$$\frac{1}{\eta}+\ln\frac{\eta}{1+\eta}$$

неограниченно росло, необходимо, чтобы η стремилось бы к 0 или к 1. Но если начальное значение η достаточно близко к нулю, то η будет стремиться к 0, а не к 1. Достаточно проверить, что нетрудно сделать, что когда φ и аргумент ρ постоянны, модуль ρ стремится к нулю. Этого будет достаточно, так как мы немного дальше покажем, что η есть *однозначная* функция от ρ и φ [13].

2° Нужно показать далее, что η возвращается к начальному значению, когда ρ и φ описывают каждое в своей плоскости достаточно малые контуры, окружающие точку нуль. Но при этом левая, а следовательно, и правая части уравнения возрастут на кратное $2i\pi$, откуда следует, что η описывает замкнутый контур, окружающий точку нуль [14]. Следовательно η, а значит и

$$F=\eta^2$$

являются голоморфными функциями от ρ и φ, если эти переменные достаточно малы.

Предположим теперь, что

$$-\frac{R}{\Omega}=P(\rho)=\rho^2+\beta\rho^3+\gamma\rho^4+\ldots$$

$P(\rho)$ есть ряд, расположенный по степеням ρ и сходящийся, когда ρ достаточно мало. Общий интеграл дифференциальных уравнений будет

$$\omega+\int\frac{d\rho}{P(\rho)}=\text{const.}$$

С другой стороны, мы получим

$$\int\frac{d\rho}{P(\rho)}=-\frac{1}{\rho}-\beta\ln\rho-Q(\rho),$$

где $Q(\rho)$ есть голоморфная при $\rho=0$ функция от ρ.

Положим теперь

$$\frac{1}{\rho}+\beta\ln\rho+Q(\rho)-\omega=\frac{1}{\eta}+\beta\ln\eta+Q(\eta). \tag{5 bis}$$

Рассмотрим ту из функций η, удовлетворяющих этому уравнению, которая обращается в ρ при $\omega=0$. Я утверждаю, что это будет функция от ρ и ω, голоморфная при достаточно малых значениях этих переменных.

Для этого нужно показать, что η, при достаточно малых ρ и ω, есть однозначная функция от ρ и ω, стремящаяся к нулю, когда эти переменные одновременно стремятся к нулю. Рассуждение остаётся абсолютно тем же, что и в предыдущем случае. Из него следует, что

$$F=\eta^2$$

есть голоморфная функция от ρ и от ω.

С другой стороны, легко найти коэффициенты разложения F по степеням ρ и ω. В самом деле, напишем:

$$F=H_0+H_1\omega+\frac{H_2\omega^2}{2}+\ldots+\frac{H_n\omega^n}{n!}+\ldots,$$

$$P(\rho)=\sum a_p\rho^p, \qquad H_n=\sum h_{np}\rho^p.$$

Мы предположим (это нам будет полезно для дальнейшего), что все a_p положительны, и, кроме того, можно найти два числа μ и a, такие, что

$$a_p<\mu a^p.$$

Функции H будут даны уравнениями:

$$H_0=\rho^2,$$

$$H_1=P(\rho)\frac{dH_0}{d\rho},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{n+1}=P(\rho)\frac{dH_n}{d\rho}.$$

Введём следующее обозначение: неравенство

$$f(\rho)\ll\varphi(\rho)$$

с двойным знаком неравенства, которое будет означать (в том случае, если коэффициенты разложений функций f и φ по степеням ρ положительны, что мы и предполагаем), что каждый коэффициент разложения функции f меньше соответствующего коэффициента разложения функции φ. Тогда мы можем написать:

$$P(\rho) \ll \frac{\mu}{1 - a\rho}.$$

Я утверждаю, что всегда можно найти число M_n, такое, что

$$H_n(\rho) \ll \frac{M_n n!}{(1 - a\rho)^{2n+1}}.$$

В самом деле, предположим, что это верно для H_n; я утверждаю, что то же будет верно и для H_{n+1}. При сделанном предположении мы получим

$$\frac{dH_n}{d\rho} \ll \frac{M_n a n! (2n+1)}{(1 - a\rho)^{2n+2}} \ll \frac{2aM_n (n+1)!}{(1 - a\rho)^{2n+2}};$$ [15]

отсюда

$$H_{n+1} = P\frac{dH_n}{d\rho} \ll \frac{2aM_n (n+1)!\,\mu}{(1 - a\rho)^{2n+3}};$$

следовательно,

$$M_{n+1} = 2a\mu M_n \quad \text{и} \quad M_n = M_0 (2a\mu)^n.$$

Тогда

$$F = \sum \frac{H_n \omega^n}{n!} \ll \sum \frac{M_0 (2a\mu\omega)^n}{(1 - a\rho)^{2n+1}} = \frac{M_0}{1 - a\rho} \frac{1}{1 - \dfrac{2a\mu\omega}{(1 - a\rho)^2}}.$$

Из этого неравенства мы заключаем, что ряд F сходится, когда, например,

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \quad |\omega| < \frac{1}{8a\mu}.$$

Но легко видеть, что разложение H_0 начинается с члена содержащего ρ^2, H_1 — с члена, содержащего $\rho^3, \ldots, H_n$ — с члена, содержащего ρ^{n+2}. Значит, функция F есть голоморфная функция не только от ρ и ω, но и от ρ и $\rho\omega$. Разложение функции F сходится, таким образом, при

$$|\rho|<\frac{1}{2a}, \quad |\rho\omega|<\frac{1}{16a^2\mu}.$$

Следовательно, этот ряд сходится для всех значений ω, содержащихся между 0 и 2π, если только

$$|\rho|<\frac{1}{2a}, \quad |\rho|<\frac{1}{32a^2\mu\pi}.$$

Вот каким образом всё предшествующее связано с принципами, изложенными Брио и Буке в XXXVI тетради *Журнала политехнической школы.*

Предположим, что ω постоянно; для переменных ζ и ρ мы будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{P(\zeta)}=\frac{d\rho}{P(\rho)}$$

или

$$\frac{d\zeta}{d\rho}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\,\frac{1+\beta\zeta+\ldots}{1+\beta\rho+\ldots}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\,[1+\beta(\zeta-\rho)+\psi],$$

где ψ есть совокупность членов, степень которых по ζ и ρ по меньшей мере равна двум. Положим

$$\zeta=\rho\,(1+\upsilon).$$

Мы получим

$$\rho\,\frac{d\upsilon}{d\rho}=\upsilon+\upsilon^2+\beta\,(1+\upsilon)^2\rho\upsilon+(1+\upsilon)^2\psi,$$

причём функция ψ содержит множителем ρ^2.

Это и есть тот тип уравнений, который, по теореме Брио и Буке, имеет бесчисленное множество голоморфных интегралов, обращающихся в нуль вместе с ρ. Следовательно, ζ есть голоморфная функция от ρ.

Что и требовалось доказать.

Перейдём теперь к общему случаю.

Необходимо прежде всего напомнить уже употреблявшееся выше обозначение $\ll$ и уточнить его смысл. Когда я буду писать в дальнейшем

$$f(\rho, \omega) \ll \varphi(\rho, \omega),$$

то я буду предполагать, что функции f и φ разложены по возрастающим степеням ρ. Коэффициенты обоих разложений будут функциями от ω, которое я в данное время считаю постоянным и предполагаю действительным и заключённым между 0 и 2π. Написанное выше неравенство означает тогда, что при всех действительных значениях ω, содержащихся между 0 и 2π, все коэффициенты разложения функции φ положительны и превышают абсолютные величины соответствующих коэффициентов разложения функции f.

Пусть

$$R = \rho^2 + R_3\rho^3 + \ldots + R_p\rho^p,$$
$$\Omega = 1 + \Omega_1\rho + \Omega_2\rho^2 + \ldots + \Omega_q\rho^q.$$

Коэффициенты R_i и Ω_i полиномов R и Ω будут тригонометрическими функциями от ω. Предположим, что все эти тригонометрические функции остаются всё время по абсолютной величине меньше некоторой положительной величины L. Мы будем иметь

$$(6) \qquad -\frac{R}{\Omega} \ll \frac{(\rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^p) L}{1 - (\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^q) L} \ll \frac{\rho^2 L}{1 - \rho\,(L+1)}.$$

Функция $\frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}$, зависящая лишь от ρ, разлагается в ряд по степеням ρ, если только ρ достаточно мало. Отсюда вытекает, что существует ряд F_1, расположенный по возрастающим степеням ρ и ω, сходящийся, если только ρ достаточно мало, для всех действительных значений ω, содержащихся между 0 и 2π, и удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega} = \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}.$$

Кроме того, F_1 обращается в ρ^2 при $\omega = 0$. Положим, как и выше,

$$F = z_2\rho^2 + z_3\rho^3 + \ldots + z_q\rho^q + \ldots,$$
$$F_1 = u_2\rho^2 + u_3\rho^3 + \ldots + u_q\rho^q + \ldots$$

Функции z_q определены уравнениями (1 bis), а функции u_q — аналогичными уравнениями

$$u_2 = 1,$$

$$(7)\quad u'_q = (q-1)\, u_{q-1}\theta'_2 + \\ + (q-2)\, u_{q-2}\theta'_3 + \ldots + 2u_2\theta'_{q-1},$$

где

$$\theta'_{q+2} = (L+1)^q L.$$

Теперь я утверждаю, что, когда ω действительно и меньше чем 2π, мы всегда будем иметь:

$$(8)\qquad |z_q| < u_q.$$

Для того чтобы показать это, я предположу, что неравенства (8) имеют место для $z_2, z_3, \ldots, z_{q-1}$, и докажу, что они имеют место и для z_q.

В самом деле, в силу сделанного предположения, сравнивая соотношения (1 bis), (6) и (7), мы будем иметь:

$$(9)\qquad |z'_q| < u'_q.$$

Функция z_q не полностью определена уравнениями (1 bis); действительно, эти уравнения дают нам только производную от z_q как функцию $z_2, z_3, \ldots, z_{q-1}$; отсюда следует, что z_q известно лишь с точностью до постоянной интеграции. Мы выберем эту постоянную так, чтобы z_q обращалось в нуль вместе с ω.

А тогда из неравенства (9) следует неравенство

$$(8)\qquad |z_q| < u_q.$$

Что и требовалось доказать.

Следовательно, мы имеем

$$F \ll F_1,$$

и так как для малых значений ρ ряд F_1 сходится при любом значении ω, содержащемся между 0 и 2π, то то же имеет место и для F.

Но по самому способу определения z_q все z_q являются тригонометрическими функциями от ω (в случае, когда C_0

9*

все равны нулю). Значит, если F сходится для всех значений ω, содержащихся между нулём и 2π, то этот ряд будет сходиться и для всех действительных значений ω.

Следует заметить, что если бы, отправляясь от ряда F, который мы только что определили, мы перешли бы от полярных координат ρ и ω к прямоугольным координатам x и y, то F не было бы уже рядом, расположенным по возрастающим степеням x и y. Это связано с тем, что мы выбирали постоянные интеграции таким образом, чтобы z_q обращалось бы в нуль вместе с ω.

Тогда могло бы, например, случиться, что мы получили бы

$$F = \rho^2 + \rho^3 (1 - \cos\omega) + \ldots,$$

что даёт

$$F = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - x(x^2 + y^2) + \ldots$$

В самом деле, если требовать, чтобы F была голоморфной функцией от x и y, то постоянной интеграции (которую мы выше назвали A_0) можно располагать, когда q чётно, но ею уже нельзя располагать, когда q нечётно. Следовательно, вообще говоря, невозможно добиться того, чтобы z_q обращалось в нуль вместе с ω.

Хотя это и не имеет особой важности с точки зрения интересующих нас вопросов, но, тем не менее, эту трудность легко обойти. Мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{\partial F}{\partial \rho}.$$

Пусть F при замене ρ на $-\rho$ и ω на $\omega + \pi$ обращается в F_2. Тогда, как легко проверить, мы будем иметь

$$\frac{\partial F_2}{\partial \omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{\partial F_2}{\partial \rho},$$

так как $-\frac{R}{\Omega}$ меняет знак, если заменить в нём ρ на $-\rho$ и ω на $\omega + \pi$. Следовательно, будем иметь ещё

$$\frac{\partial (F + F_2)}{\partial \omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{\partial (F + F_2)}{\partial \rho},$$

причём ряд $F+F_2$ будет сходиться для всех действительных значений ω, лишь бы ρ было достаточно мало. Если вернуться к прямоугольным координатам x и y, то $F+F_2$ будет голоморфной функцией от x и y. Мы видим, таким образом, что когда все C_0 равны нулю, то всегда существует сходящийся ряд F, расположенный по степеням x и y и удовлетворяющий уравнению:

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Итак, *для того чтобы начало координат было центром, т. е. для того чтобы все траектории подвижной точки были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы все величины, которые мы обозначили через C_0, были бы одновременно равны нулю* [16].

Однако часто бывает трудно узнать, выполнено ли одновременно всё это бесчисленное множество условий или нет. Поэтому представляет интерес указание некоторых случаев, в которых заранее можно быть уверенными, что все C_0 равны нулю.

Я укажу только два простейших.

Предположим, что когда мы меняем y на $-y$, не меняя x, то X обращается в $-X$, а Y не меняется. Я утверждаю, что траектории подвижной точки будут замкнутыми кривыми, симметричными относительно оси x.

В самом деле, выйдем в момент $t=0$ из некоторой начальной точки, лежащей на оси x. В силу сделанных гипотез начальная скорость подвижной точки будет перпендикулярна к этой оси. Если заменить t на $-t$, y на $-y$, то уравнения движения и начальные положения не изменятся. Значит, подвижная точка в моменты t и $-t$ будет находиться в точках, симметричных относительно оси x. По самому виду уравнений можно заключить, что если начальное положение подвижной точки достаточно близко к началу, то наступит такой момент t_0, в который её траектория снова пересечёт ось x [17]. Таким образом, в моменты t_0 и $-t_0$ подвижная точка будет находиться в одной и той же точке на оси x. Следовательно, её траектория есть замкнутая кривая и из предыдущего ясно, что она симметрична по отношению к оси x. Следовательно, заранее можно быть уверенным в том, что все C_0 равны нулю.

Тиссеран (Tisserand) обратил моё внимание на одну астрономическую проблему, дающую пример только что указанного нами случая. Делоне (Delaunay) встретил в своей теории луны уравнения:

$$\frac{de}{dt} = M(1 + M_1e^2 + M_2e^4)\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = N(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) + \\ + \frac{M}{e}(1 + P_1e^2 + P_2e^4)\cos\theta.$$

Предполагается, что e очень мало при $t = 0$ и что коэффициент M имеет порядок квадрата этой малой величины, тогда как другие коэффициенты конечны (*Мемуары Академии наук,* т. XXVIII, стр. 107) *).

Делоне даёт следующие выражения:

$$e\cos\theta = \sum A_i \cos i(\alpha t + c),$$

$$e\sin\theta = \sum B_i \sin i(\alpha t + c),$$

но он не рассматривает вопросы сходимости и возможности разложения.

Эти уравнения имеют тот вид, который мы рассматривали. Положим, в самом деле

$$e\cos\theta = x, \quad e\sin\theta = y;$$

мы получим

$$\frac{dx}{dt} = Mxy(M_1 - P_1 + M_2e^2 - P_2e^2) - \\ - Ny(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) = X,$$

$$\frac{y}{dt} = M + My^2(M_1 + M_2e^2) + Mx^2(P_1 + P_2e^2) + \\ + Nx(1 + N_1e^2 + N_2e^4 + N_3e^6) = Y,$$

*) Mémoires de l'Académie de Sciences, t. XXVIII, p. 107.

где

$$e^2 = x^2 + y^2;$$

X и Y обращаются в нуль при $y = 0$, если

$$(10)\quad M(1 + P_1x^2 + P_2x^4) + \\ + Nx\,(1 + N_1x^2 + N_2x^4 + N_3x^6) = 0.$$

В силу предположений, сделанных относительно коэффициентов, уравнение (10) удовлетворяется при $x = x_1$, где x_1 есть весьма малая величина того же порядка, что и M. Точка $x = x_1$, $y = 0$ является центром, так как X меняет знак, а Y не меняется, если вместо y поставить $-y$. Заранее можно быть уверенным в том, что все величины, которые мы обозначили через C_0, равны нулю.

Отсюда следует, что x и y являются периодическими функциями времени t, которые могут быть представлены рядами того вида, которым пользуется Делоне.

Если мы тем или иным способом узнали, что все величины C_0 равны нулю, то мы можем быть уверены в том, что вокруг центра есть некоторая плоская область R, покрытая замкнутыми кривыми или циклами, окружающими центр и являющимися траекториями подвижной точки в рассматриваемой области. Вне области R траектории будут, вообще говоря, спиралями. Эта область будет ограничена некоторым граничным циклом, который явится последней замкнутой траекторией. Я утверждаю, что этот граничный цикл должен проходить через особую точку.

В самом деле, мы всегда можем провести дугу без контакта, пересекающую граничный цикл, а также и те замкнутые кривые, которые достаточно близки к нему, и продолжающуюся по другую сторону граничного цикла, вне области R. Мы определим положение точки на этой дуге с помощью некоторого параметра t, который будет, например, равен нулю на граничном цикле, отрицателен в области R и положителен вне этой области.

Вернёмся теперь к главе V (второй мемуар) и к тому, что мы назвали законом последования:

$$t_1 = \varphi_1(t_0).$$

При отрицательных значениях t_0 мы находимся внутри R; траектории замкнуты, и мы имеем

$$\varphi_1(t_0) = t_0.$$

Наоборот, при положительных значениях t_0 мы находимся вне R; траектории уже не замкнуты, и мы имеем

$$\varphi_1(t_0) \gtrless t_0.$$

Таким образом, невозможно, чтобы функция φ_1 была голоморфна при $t_0 = 0$. Следовательно, в силу теоремы XIII, граничный цикл должен проходить через особую точку.

ГЛАВА XII

УРАВНЕНИЯ СТЕПЕНИ ВЫШЕ ПЕРВОЙ

Мы перейдём теперь к изучению дифференциальных уравнений первого порядка и степени выше первой, т. е. уравнений вида

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

где F — многочлен, целый по x, y и $\frac{dy}{dx}$.

Воспользуемся следующей геометрической интерпретацией: рассмотрим поверхность

$$F(x, y, z)=0 \tag{2}$$

и запишем уравнения движения изображающей точки на этой поверхности следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt}=-z\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}+z\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{2 bis}$$

так что $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ равны многочленам, целым по x, y и z.

Этот способ представления является наиболее простым во всех тех случаях, когда поверхность $F(x, y, z)$ не имеет бесконечных полостей или каких-либо особенностей. Но в некоторых случаях бывает удобнее пользоваться более общим способом изображения. Положим

(3) $\xi = \varphi_1(x, y, z), \quad \eta = \varphi_2(x, y, z), \quad \zeta = \varphi_3(x, y, z),$

где φ_1, φ_2, φ_3 — рациональные функции переменных x, y и z.

За исключением особых случаев, которые мы оставим в стороне, из уравнений (2) и (3) можно вывести уравнения:

(4) $$F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

и

(5) $x = \theta_1(\xi, \eta, \zeta), \; y = \theta_2(\xi, \eta, \zeta), \; z = \theta_3(\xi, \eta, \zeta),$

где F_1 — полином и функции θ_1, θ_2, θ_3 рациональны. Тогда точки поверхностей (2) и (4) будут поставлены во взаимно-однозначное соответствие при помощи бирационального преобразования, и мы будем иметь

$$\frac{d\xi}{\psi_1(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\eta}{\psi_2(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\zeta}{\psi_3(\xi, \eta, \zeta)},$$

где функции ψ_1, ψ_2 и ψ_3 рациональны.

Можно использовать произвол в бирациональном преобразовании (3) так, чтобы поверхность (4) не имела бы бесконечных полостей, а также для того, чтобы достигнуть разных других целей, например, для того, чтобы заставить исчезнуть какие-либо мешающие особенности.

Итак, вот каким образом мы поставим проблему дифференциальных уравнений высших степеней. Дана поверхность S, не имеющая бесконечных полостей, уравнение которой есть

$$F(x, y, z) = 0;$$

требуется изучить движение изображающей точки на этой поверхности, если уравнения движения суть

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z,$$

где X, Y и Z — многочлены, целые относительно x, y и z, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y + \frac{\partial F}{\partial z} Z = MF.$$

Изучим сначала траектории изображающей точки в окрестности какой-либо точки M поверхности. Мы будем отличать случай, когда точка M есть обыкновенная точка поверхности S (хотя и могущая быть особой точкой дифференциальных уравнений), от случая, когда точка M есть особая точка поверхности S.

В первом случае мы можем в окрестности точки M представить x, y и z как голоморфные функции двух параметров u и v таким образом, чтобы три функциональных детерминанта

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

не обращались бы одновременно в нуль. Тогда можно написать

$$\frac{du}{dt} = U, \quad \frac{dv}{dt} = V,$$

где U и V — голоморфные функции от u и v. Мы приходим, таким образом, к исследованию плоских кривых, определённых дифференциальным уравнением первого порядка и первой степени, так как в окрестности рассматриваемой точки функции U и V имеют все свойства полиномов.

Если рассматриваемая точка есть обыкновенная точка дифференциального уравнения, то через неё проходит одна и только одна траектория. Если же эта точка есть особая точка дифференциального уравнения, т. е. если в ней $U = V = 0$, то она может быть *седлом*, *фокусом*, *узлом* или *центром* и будет иметь те же свойства, что и точка того же наименования, определённая в первой части *).

Особые точки дифференциального уравнения типа (2) и (2 bis) даются уравнениями

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

*) Т. е. в первом мемуаре.

Предположим теперь, что рассматриваемая точка есть особая точка самой поверхности, т. е. что мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Этот случай приводится к предыдущему. Так, например, предположим сначала, что поверхность S имеет двойную линию, что рассматриваемая точка есть точка этой двойной линии и что две касательные плоскости в этой точке различны. Тогда можно представить x, y и z в окрестности рассматриваемой точки как голоморфные функции двух параметров и притом двумя способами, одним — относящимся к одной из полостей поверхности, проходящей через двойную кривую, и другим — ко второй полости. Мы приходим, таким образом, к предыдущему случаю.

Точно так же, предположим, что рассматриваемая точка, которую мы можем взять за начало координат, есть коническая точка второго порядка. Пусть, например,

$$F=F_2+F_3+\ldots+F_n,$$

где F_i — однородный многочлен степени i по x, y и z. Рассмотрим часть этой поверхности вблизи начала, т. е. вблизи конической точки. Я утверждаю, что мы можем, при помощи бирационального преобразования, преобразовать эту часть поверхности в часть другой поверхности, которая уже не будет иметь особой точки. Для этого достаточно положить

$$\xi=\frac{x}{z}(1-z),\qquad \eta=\frac{y}{z}(1-z),\qquad \zeta=1-z;$$

откуда

$$x=\frac{\xi}{\zeta}(1-\zeta),\qquad y=\frac{\eta}{\zeta}(1-\zeta),\qquad z=1-\zeta.$$

Таким образом, это бирациональное преобразование обратимо, в результате чего поверхность F переходит в следующую:

$$z^{n-2}F_2+z^{n-3}(1-z)F_3+z^{n-4}(1-z)^2F_4+\ldots$$
$$\ldots+(1-z)^{n-2}F_n=0.$$

Эта преобразованная поверхность пересекается с плоскостью $z = 1$ по кривой 2-го порядка

$$F_2(x, y, 1) = 0$$

и не имеет особых точек вдоль этого сечения.

Кроме того, та часть поверхности S, которая была близка к конической точке, после преобразования перейдёт в ту часть преобразованной поверхности, которая близка к этой кривой второго порядка, т. е. в часть поверхности, лишённую особых точек [18].

Таким образом, мы опять пришли к предыдущему случаю. Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что поверхность S не имеет особых точек.

В силу сделанных предположений алгебраическая поверхность S не имеет бесконечных полостей; следовательно, она состоит из некоторого числа замкнутых полостей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, лежащих отдельно друг от друга. С той точки зрения, которая нас интересует, нам достаточно изучить вид траекторий на одной из этих полостей в отдельности, например, на полости S_1.

Во всём дальнейшем основную роль будет играть понятие *рода* полости S_1, рассматриваемое с точки зрения геометрии положения [19].

Вот определение рода. Если на замкнутой поверхности S_1 можно провести p замкнутых циклов, не имеющих общих точек, не разбивая при этом поверхность на две отдельные области, и если больше циклов с теми же свойствами провести нельзя, то мы скажем, что поверхность S_1 есть поверхность рода p (или, что то же, что она $2p+1$-связна). Так, сфера имеет род 0, так как на сфере нельзя провести ни одного замкнутого цикла, не разбивая её поверхность на две области. Тор имеет род 1, так как меридиан или параллель не разделяют его на две области, и если на поверхности мы провели, например, меридиональную окружность, то уже нельзя провести никакой другой замкнутый цикл, *не пересекающий* первый, не разбивая тор на две области.

В заключение этой главы распространим на интересующий нас случай одну важную теорему первого мемуара*).

Мы сохраним соглашение, сделанное в начале второго мемуара**), т. е. мы будем считать, что каждая траектория, проходящая через узел, кончается в узле и что каждая траектория, проходящая через седло, продолжается либо направо, либо налево по одной из ветвей кривой, проходящей через это седло.

Тогда ясно, что траектории могут быть разбиты на четыре класса:

1° циклы, или замкнутые кривые;

2° траектории, кончающиеся в узле;

3° траектории, асимптотически стремящиеся к фокусу, неограниченно закручиваясь вокруг него;

4° траектории, которые можно неограниченно продолжать, никогда не возвращаясь в начальную точку, никогда не встречая узла, но не приближаясь асимптотически к фокусу.

Ясно, что последние траектории имеют бесконечную длину, будем ли мы отсчитывать дуги на самой поверхности S_1 или на проекции этой кривой на какую-нибудь плоскость [20].

Рассмотрим теперь траекторию, которая пересекает всякий алгебраический цикл лишь в конечном числе точек. Очевидно, что она не может принадлежать к третьему классу, так как всякая алгебраическая кривая, проходящая через фокус, пересечёт в бесчисленном множестве точек всякую траекторию, закручивающуюся вокруг этого фокуса. Я утверждаю, что она не может принадлежать и к четвёртому классу. Для этого я покажу, что если мы предположим, что траектория четвёртого класса пересекает всякий алгебраический цикл в конечном числе точек, то отсюда будет следовать, что проекция траектории на некоторую плоскость имеет конечную длину, а это противоречит тому, что мы только что видели. В самом деле, рассмотрим часть траектории, описываемую подвиж-

*) См. главу I, теорема 1.

**) См. главу V, основное соглашение.

ной точкой, начиная с некоторого момента $t = t_0$, который мы в дальнейшем определим точнее, до $t = +\infty$.

Мы разобьём поверхность S_1 с помощью некоторого числа алгебраических циклов на некоторое число таких областей, чтобы прямая, параллельная оси z, могла пересечь каждую из них только в одной точке. Рассматриваемая траектория пересекает эти алгебраические циклы лишь в конечном числе точек. Значит, мы можем взять t_0 достаточно большим для того, чтобы, начиная с момента t_0, подвижная точка не пересекала бы ни одного из этих циклов и, следовательно, оставалась внутри одной из тех областей, которые мы только что определили.

Отсюда следует, что, начиная с момента t_0, проекция подвижной точки на плоскость (x, y) остаётся всё время внутри некоторой конечной области R этой плоскости.

Рассмотрим на поверхности S геометрическое место таких точек, что проекция на плоскость (x, y) траектории, проходящей через какую-нибудь из этих точек, имеет в ней точку перегиба. Это геометрическое место будет алгебраической кривой и, следовательно, может быть пересечено рассматриваемой траекторией лишь в конечном числе точек. Мы можем взять t_0 столь большим, чтобы, начиная с этого момента t_0, проекция нашей траектории на плоскость (x, y) не имела точек перегиба и была, следовательно, выпуклой кривой.

Геометрическое место точек поверхности S_1, в которых $\frac{dx}{dt} = 0$ или в которых $\frac{dy}{dt} = 0$, также является алгебраической кривой. Отсюда можно заключить, рассуждая так же, как и выше, что можно взять t_0 достаточно большим, для того чтобы, начиная с этого момента, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ оставались одного и того же знака, например, положительными.

Пусть теперь M_0 есть проекция подвижной точки в момент t_0, M_1 — проекция этой точки в момент t_1 $(t_1 > t_0)$. Через точку M_0 я провожу прямую, параллельную оси x; через точку M_1 — прямую, параллельную оси y, пересекающую первую прямую в некоторой точке P.

Пусть R' есть прямоугольник, стороны которого параллельны обеим осям и который выбран так, что область, определённая выше, лежит внутри него. Криволинейный треугольник M_0M_1P, образованный дугой траектории M_0M_1 и двумя прямыми M_0P и M_1P, будет выпуклым и лежащим целиком внутри R'. Его периметр будет, следовательно, меньше, чем периметр R'. Значит, дуга M_0M_1 всегда меньше периметра R', какова бы ни была точка M_1. Следовательно, длина проекции нашей траектории будет конечной, что невозможно и что заставляет нас отбросить предположение, будто траектория относится к четвёртому классу.

Отсюда следующий вывод: всякая траектория, пересекающая каждый алгебраический цикл лишь в конечном числе точек, есть или замкнутый цикл или оканчивается в узле, где она должна быть остановлена.

ГЛАВА XIII

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Возьмём снова полость S_1 рода p и предположим, что эта полость не имеет ни конических точек, ни кратных линий.

Пусть C есть число сёдел, лежащих на этой полости N — число узлов, F — фокусов; я утверждаю, что мы будем иметь соотношение [21]

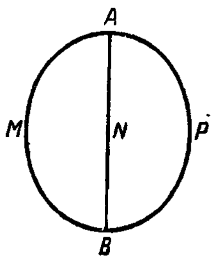
$$N + F - C = 2 - 2p.$$

Проведём на поверхности S_1 какой-нибудь цикл. Этого цикла будут касаться в некоторых точках различные траектории; одни будут касаться его извне, другие изнутри. Пусть E есть число внешних контактов, I — число внутренних контактов; число

$$J = \frac{E - I - 2}{2}$$

будет называться *индексом* цикла. Если цикл имеет угловую точку, то может случиться, что траектория, проходящая через эту точку, пересекает цикл, проходя из внешней части во внутреннюю; в этом случае эта точка не должна считаться точкой контакта. Но может случиться также, что эта траектория не переходит из внешней части цикла во внутреннюю, а остаётся или во внешней части, если угловая точка есть вершина выступающего угла, или во внутренней, если угловая точка есть вершина входящего угла. Тогда угловая точка должна считаться или внешним, или внутренним контактом (см. первый мемуар, глава IV). Мы будем предполагать, что цикл выбран таким образом, что он разбивает полость S_1 на две области, из которых по крайней мере одна односвязна.

Если полость S_1 рода 0, то обе области будут односвязными, и нужно сделать специальное соглашение, для того чтобы определить, какую из двух областей надо считать внутренностью цикла.



Черт. 30.

Если полость S_1 рода >0, то одна из областей будет односвязна, а другая многосвязна, и внутренностью цикла нужно считать именно первую область.

Соединим теперь две точки A и B тремя дугами кривых AMB, ANB, APB (черт. 30). Мы получим таким образом три цикла:

$$C_1 = ANBMA,$$
$$C_2 = APBNA,$$
$$C_3 = APBMA.$$

Из них третий можно рассматривать как сумму двух других:

$$C_3 = C_1 + C_2.$$

Я утверждаю, что

$$\operatorname{ind} C_3 = \operatorname{ind} C_1 + \operatorname{ind} C_2$$

или, что то же,

$$E_3 - I_3 - E_1 + I_1 - E_2 + I_2 = -2, \tag{1}$$

где E_1, E_2, E_3 — число внешних контактов, I_1, I_2, I_3 — число внутренних контактов траекторий с рассматриваемыми тремя циклами.

Эти контакты разбиваются на 5 классов:

1° Те, которые расположены на AMB.

2° Те, которые расположены на APB.

Первые принадлежат только циклам C_1 и C_3, вторые — только циклам C_2 и C_3. Контакт, принадлежащий к одному из этих двух классов, дважды войдёт в левую часть равенства (1): один раз со знаком $+$, другой раз со знаком $-$; соответствующие члены взаимно уничтожаются.

3° Те, которые расположены на ANB. Контакт этого класса будет внешним для C_1 и внутренним для C_2 или наоборот. Значит он дважды войдёт в левую часть равенства (1): один раз со знаком $+$, другой раз со знаком $-$. Соответствующие члены взаимно уничтожаются.

4° Те, которые могут быть в точке A. В зависимости от положения траектории, проходящей через точку A, мы можем иметь: или внешний контакт для всех трёх циклов, или же внешний контакт только для цикла C_1, или только для цикла C_2, или же (но только в том случае, когда точка A есть вершина входящего угла для C_3) — внутренний контакт для цикла C_3, или же, наконец (но только в том случае, когда точка A есть вершина входящего угла для циклов C_1 и C_3) — внутренний контакт для циклов C_1 и C_3 и внешний для цикла C_2.

Во всех случаях сумма соответствующих членов левой части (1) обращается в -1.

5° Контакты, расположенные на B.

В силу тех же соображений сумма соответствующих членов обращается в -1.

Левая часть (1) обращается, следовательно, в -2, так что это равенство справедливо. Следовательно, индекс составного цикла равен сумме индексов отдельных составляющих его циклов.

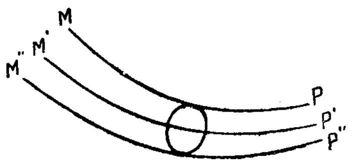
Найдём теперь индекс бесконечно малого цикла.

Если бесконечно малый цикл не окружает ни одной особой точки, то мы всегда можем считать его выпуклым, так как в противном случае его всегда можно было бы разложить на несколько ещё меньших выпуклых циклов. Но тогда черт. 31 показывает, что цикл имеет всего два контакта, и притом внешних, с траекториями MP и $M''P''$.

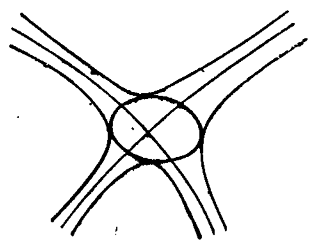
Следовательно, индекс равен нулю.

Если цикл охватывает седло, мы попрежнему будем предполагать его выпуклым, и черт. 32 показывает, что он будет иметь четыре внешних контакта и что его индекс равен 1.

Если цикл окружает узел и фокус, то я утверждаю, что индекс его равняется —1. В самом деле, в окрестности узла или фокуса всегда можно провести цикл без контакта, лежащий внутри рассматриваемого цикла. Тогда рассматриваемый нами цикл может быть разложен на несколько циклов, а именно: на цикл без контакта, о котором мы только что говорили, и на другие выпуклые циклы, не охватывающие особые точки. Индекс цикла без контакта будет равен —1; индекс остальных есть 0. Индекс исходного цикла есть, следовательно, —1.



Черт. 31.



Черт. 32.

Из предыдущего следует, что индекс какого-либо цикла равен числу сёдел, лежащих внутри него, минус число узлов и фокусов.

Центры, являющиеся исключительными особыми точками, с этой точки зрения эквивалентны фокусам; в самом деле, вокруг центра можно провести замкнутый цикл с двумя внутренними и двумя внешними контактами; этот цикл будет тогда иметь индекс —1.

Мы разобьём теперь поверхность полости S_1 на некоторое число односвязных областей, проведя некоторое определённое число циклов.

Сумма индексов этих циклов будет, очевидно,

$$C - F - N.$$

Для того чтобы оценить эту сумму индексов другим способом, будем рассматривать фигуру, образованную полостью S_1, разбитой на односвязные области, как многогранник. Всем известна теорема Эйлера, по которой, если α, β, γ — число граней, рёбер и вершин *выпуклого* многогранника, то мы должны иметь

$$\alpha - \beta + \gamma = 2.$$

Эта теорема легко обобщается на тот случай, когда многогранник, не будучи уже выпуклым, образует поверхность рода p; тогда мы находим

$$\alpha - \beta + \gamma = 2 - 2p.$$

Но в геометрии положения можно не беспокоиться о форме граней и рёбер; следовательно, нам нет нужды предполагать, что грани плоски, а рёбра прямолинейны. Отсюда вытекает, что фигура, образованная полостью S_1, разбитой на односвязные области, есть настоящий криволинейный многогранник, к которому приложима теорема Эйлера. Гранями будут тогда сами односвязные области; ребром будет часть границы одной из этих областей, являющейся одновременно общей границей с одной из соседних областей; вершиной будет конец ребра, т. е. точка, общая границам трёх или более областей.

Предположим, что вершина является общей для границ ν областей; она будет тогда эквивалентна вершине многогранного угла с ν-гранями прямолинейного многогранника. При этом мы будем иметь

$$\sum \nu = 2\beta.$$

Кроме того, мы можем предполагать, что все углы, образуемые различными рёбрами, сходящимися в одной и той же вершине, являются выступающими.

Нам нужно оценить для совокупности наших циклов избыток числа ΣE внешних контактов над числом ΣI внутренних контактов.

Мы можем не заботиться о контактах, имеющих место в какой-либо точке ребра; действительно, если такой контакт является внешним по отношению к циклу, образующему границу одной из тех двух областей, для которых ребро служит общей границей, то он же будет внутренним контактом для цикла, образующего границу второй из этих областей, и наоборот.

Следовательно, нам нужно рассмотреть лишь контакты, имеющие место в вершинах. Пусть мы имеем вершину, общую ν-циклам. Траектория, проходящая через эту точку, пересечёт два из этих циклов и будет иметь внешний контакт с $(\nu-2)$-мя остальными. Следовательно, мы будем иметь:

$$\sum E - \sum I = \sum (\nu - 2) = \sum \nu - 2\gamma = 2\beta - 2\gamma.$$

С другой стороны, искомая сумма индексов равна

$$\sum \frac{E - I - 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum E - \sum I\right) - \alpha,$$

т. е. равна

$$\beta - \alpha - \gamma = 2p - 2.$$

Отсюда

$$C - F - N = 2p - 2.$$

Что и требовалось доказать.

Из этой формулы непосредственно вытекает, что только поверхности рода 1 могут не иметь ни одной особой точки.

ГЛАВА XIV

ОБОБЩЕНИЕ ПЕРВЫХ ДВУХ ЧАСТЕЙ *)

Мы рассмотрим теперь снова каждую из изложенных теорем в главах IV—VI, для того чтобы выяснить, приложимы ли они к интересующему нас случаю и в какой мере они должны быть изменены.

Теорема VI, согласно которой каждый алгебраический цикл имеет чётное число контактов, остаётся верной, но только по отношению к циклам, разбивающим полость S_1 на две области, из которых, по крайней мере, одна является односвязной.

В самом деле, индекс подобного цикла, зависящий от числа особых точек, содержащихся в нём, есть число непременно целое. Следовательно, $\Sigma E - \Sigma I$, а значит и $\Sigma E + \Sigma I$ есть число чётное, т. е. число контактов будет всегда чётным [22].

Теорема VII, согласно которой между двумя точками можно провести *алгебраическую дугу* без контакта, если только между этими точками можно провести *какую-нибудь дугу* без контакта, остаётся справедливой и для уравнений более высокой степени. Чтобы убедиться в этом, достаточно только сослаться на доказательство, приведённое в мемуаре первом. Нам нужно ввести одно только видоизменение; дугу без контакта мы изобразим

*) Подразумевается: результатов двух первых мемуаров

уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad F(x, \quad y, \quad z)=0,$$

причём концы этой дуги соответствуют $t=0$, $t=\pi$. Доказательство проводится так же, как и в первом мемуаре.

Важно отметить, что ряды

$$\frac{dx}{dt}=\sum mA_m\cos mt-\frac{x_1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{x_2}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sum mB_m\cos mt-\frac{y_1}{2}\sin\frac{t}{2}+\frac{y_2}{2}\cos\frac{t}{2}$$

не только сходятся, но сходятся равномерно, что необходимо для дальнейшего хода рассуждения; в самом деле, сумма ряда

$$\sum mA_m\cos mt,$$

принимая одинаковые значения при t и $2\pi-t$, будет непрерывной функцией от t, когда t возрастает от $-\infty$ до $+\infty$[23].

Теорема VIII и её доказательство также остаются в силе без всяких изменений.

Таким образом, если A и B можно соединить дугой без контакта и если A_1 и B_1 являются двумя точками траекторий, проходящих через A и B, то A_1 и B_1 также можно соединить дугой без контакта[24].

Теорема IX формулируется так:

Если AB и A_1B_1 — две дуги траекторий и если AA_1, BB_1 — две алгебраические дуги, не пересекающие AB и A_1B_1 ни в одной точке, отличной от точек A, B, A_1 и B_1, то числа контактов дуг AA_1 и BB_1 одинаковой чётности.

Эта теорема остаётся справедливой и в интересующем нас случае, если только цикл ABA_1B_1 разбивает полость на две области, одна из которых односвязна.

Теорема X. *Если дуга некоторой кривой поддерживает* (sous-tendu) *дугу траектории, не проходящую ни через одну особую точку, то число контактов на этой дуге нечётно.*

Эта теорема также остаётся в силе, если цикл, образуемый этими двумя дугами, разбивает полость S_1 на две области, одна из которых односвязна [25].

Таким образом, теоремы главы IV, образующие то, что я назвал теорией контактов, распространяются, с некоторыми изменениями, на интересующий нас случай. Я перейду теперь к теории последующих.

Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

есть алгебраическая дуга без контакта и пусть M_0, M_1 — две последовательные точки пересечения этой дуги с одной и той же траекторией. Тогда M_1 есть последующая для M_0, M_0 — предшествующая для M_1; если t_0 и t_1 — значения t, соответствующие этим двум точкам M_0 и M_1, то соотношение, связывающее t_0 и t_1, есть закон последования.

Теоремы XI и XII справедливы лишь после существенных изменений, к которым мы вернёмся в дальнейшем.

Теорема XIII, наоборот, остаётся справедливой и для уравнений высших степеней.

Если $t_1 = \varphi_1(t_0)$ есть закон последования, то функция φ_1 голоморфна. Исключение может представиться лишь для тех значений t, которые соответствуют траекториям, кончающимся в особой точке до нового пересечения с дугой без контакта, а также для значений t_0 или t_1, соответствующих концам дуги без контакта.

Теорема XIV также остаётся справедливой, но доказательство должно быть изменено, так как цикл $M_0HM_1N_0M_0$, о котором идёт речь в доказательстве, приведённом в главе V, может не разбивать полость S_1 на две области. Но пусть P_0 будет точка, лежащая на дуге без контакта между N_0 и M_1 (см. мемуар второй, черт. 10), на конечном расстоянии от N_0. Пусть P_1 — точка, лежащая на дуге без контакта, направо от M_1 и на конечном расстоянии от этой точки. Соединим P_0P_1 такой дугой кривой, чтобы замкнутый цикл $M_0M_1P_1P_0M_0$ ограничивал бы односвязную область. Траектория N_0N_1 не может выйти из этой области, не удаляясь от траектории M_0M_1 на конечное расстояние или же не пересекая её, что невозможно. Значит точка N_1 должна быть справа от точки M_1.

Что и требовалось доказать.

Я утверждаю, что всегда можно провести на полости S_1 циклы без контакта. В самом деле:

1° В окрестностях узлов и фокусов можно провести циклы без контакта, охватывающие эти особые точки.

2° Если M_0 и M_1 — две последовательные точки пересечения некоторой траектории M_0PM_1 с дугой без контакта M_0QM_1, то цикл $M_0QM_1PM_0$ можно считать циклом без контакта. В самом деле, пусть N_0 — точка, бесконечно-близкая к M_0 и лежащая справа от неё, как на черт. 10, на который мы только что ссылались, а N_1 — последующая N_0. В бесконечно-узкой области, содержащейся между траекториями M_0M_1 и N_0N_1, мы можем провести дугу N_0RM_1, пересекающую каждую траекторию только один раз. Цикл $N_0RM_1QN_0$, отличающийся бесконечно мало от цикла $M_0PM_1QM_0$, будет тогда без контакта.

Таким образом, если полость S_1 содержит узел или фокус, то заведомо можно провести цикл без контакта; если же она их не содержит, то каждая траектория должна пересечь, по крайней мере, один алгебраический цикл в бесчисленном множестве точек (если только она не сводится к замкнутому циклу, как мы видели в главе XII). Этот алгебраический цикл можно разделить на конечное число дуг без контакта. Следовательно, по крайней мере, одна из этих дуг будет пересекаться с траекторией в бесчисленном множестве точек. Из этих точек мы выберем две последовательные M_0 и M_1, и они дадут нам, как мы только что видели, цикл без контакта. *Следовательно, всегда существуют циклы без контакта, если только не все траектории обращаются в замкнутые циклы.*

Если цикл без контакта делит полость S_1 на две области, одна из которых односвязна, то эта последняя содержит по крайней мере один узел или фокус.

В самом деле, индекс цикла без контакта равен —1. Следовательно, если N, F и C обозначают число узлов, фокусов и сёдел, лежащих внутри нашей односвязной области, то

$$N+F-C=1,$$

что и доказывает высказанную нами теорему.

Предположим теперь, что цикл без контакта делит полость S_1 на две области, обе могущие быть многосвязными. Я утверждаю, что в каждой из этих областей есть особые точки.

Пусть R есть одна из этих областей, которую я буду предполагать q-связной. Требуется найти индекс цикла без контакта C, рассматривая область R как внутренность цикла. Мы можем построить односвязную поверхность R_1, имеющую границей цикл C. Совокупность обеих областей R и R_1 образует тогда замкнутую поверхность рода $\frac{q-1}{2}$, что попутно доказывает, что q должно быть нечётно (ср. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 1re éd., p. 12; Leipzig, Teubner, 1876). Положим

$$q=2h+1.$$

Если мы разложим область R на некоторое число односвязных областей, то мы можем рассматривать замкнутую поверхность $R+R_1$ как многогранник. Прилагая к этому многограннику теорему Эйлера и рассуждая, как в предыдущей главе, мы найдём

$$\text{индекс } C=\sum i-2h,$$

где $\sum i$ обозначает сумму индексов циклов, при помощи которых область R была разбита на односвязные области. Но если N, F и C — число узлов, фокусов и сёдел области R, то

$$\sum i=C-N-F.$$

Кроме того, так как цикл C не имеет контактов, то индекс $C=-1$; отсюда

$$C-N-F=2h-1$$

или

$$N+F+C\equiv 1 \pmod{2},$$

что и доказывает, что N, F и C не могут одновременно обращаться в нуль.

С интересующей нас в данный момент точки зрения, всякую замкнутую траекторию, не проходящую через особую точку, можно рассматривать как цикл без контакта; я хочу этим сказать, что её индекс будет равен -1. Замкнутая траектория не имеет, собственно говоря, индекса [26], но бесконечно-близкие к ней циклы имеют индекс, и я утверждаю, что он равен -1.

В самом деле, могут представиться два случая:

Пусть M_0PM_0 есть замкнутая траектория; пусть AM_0B — дуга без контакта; пусть t — параметр, определяющий положение точки на этой дуге; пусть значение t, соответствующее M_0, есть 0. Пусть

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

есть закон последования на нашей дуге. Мы будем иметь

$$\varphi_1(0) = 0.$$

Может случиться, что функция $\varphi_1 - t_0$ не обращается тождественно в нуль. Пусть в этом случае t_0 — бесконечно малое значение переменной t, N_0 — соответствующая ему точка, N_1 — её последующая и t_1 — соответствующее точке N_1 бесконечно малое значение переменной t. Пусть N_0QN_1 — дуга траектории, соединяющая N_0 и N_1; цикл $N_0QN_1N_0$, бесконечно мало отличающийся от M_0PM_0, может быть, согласно тому, что мы видели выше, уподоблен циклу без контакта. В этом случае замкнутая траектория M_0PM_0 является предельным циклом и имеет свойства, доказанные для таких циклов во втором мемуаре.

Может также случиться, что функция $\varphi_1 - t_0$ тождественно обращается в нуль. В этом случае траектории, близкие к M_0PM_0, будут замкнутыми, охватывающими друг друга циклами.

Если провести цикл, бесконечно мало отличающийся от M_0PM_0, то число его внешних контактов будет то же, что и число его внутренних контактов, и его индекс будет попрежнему равен -1.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, если замкнутая траектория разбивает полость S_1 на две области, то в каждой из них есть особые точки.

Следовательно, *всякий алгебраический цикл, проходящий через все особые точки, пересекает все те циклы без контакта и все те замкнутые траектории, которые делят полость* S_1 *на две области.*

Это и есть обобщение теоремы XVI из второго мемуара.

Перейдём теперь к обобщению теоремы XVIII, что и является главной задачей настоящей главы.

Эта теорема в обобщённом виде формулируется так: *полость* S_1 *можно покрыть семейством циклов и полициклов (замкнутые кривые с двойной точкой) таким образом, чтобы через каждую точку этой полости проходил бы один и только один цикл; исключение составляют фокусы и узлы, которые считаются бесконечно малыми циклами. Среди этих циклов одни являются циклами без контакта, другие — замкнутыми траекториями.*

Если род p полости S_1 равен 0, то обобщение совершается непосредственно. В самом деле, при доказательстве теорем от X до XVIII первых двух мемуаров мы опирались только на одно свойство сферы — на её односвязность, или, что то же самое, на то, что она имеет род 0.

Есть ещё один случай, когда это обобщение может быть сразу же сделано. Предположим, что на полости S_1 вырезана двусвязная область R, ограниченная двумя циклами без контакта C и C'. Предположим далее, что эта область R не содержит никаких особых точек. Я утверждаю, что теорема XVIII прилагается к этой области, т. е., что эту область можно покрыть бесконечным множеством циклов K, являющихся или циклами без контакта, или замкнутыми траекториями.

Кроме того, ясно, что циклы K должны быть расположены таким образом, что каждый из них разделяет область R на две: одну — ограниченную циклами K и C, и другую — циклами K и C'. Другими словами, невозможно, чтобы цикл K сам по себе был границей области R', целиком содержащейся в R. В самом деле, индекс такого цикла был бы равен —1, тогда как R, а следовательно, и R' не содержат никаких особых точек.

Разобьём теперь с помощью какой-либо точки M каждую траекторию на полутраектории, аналогичные полухарактеристикам первых двух мемуаров. Одна из этих полутраекторий содержит те точки, которые подвижная точка пробегает, пройдя точку M, а другая — те точки, которые были пройдены подвижной точкой до её прибытия в точку M. Полутраектории разделяются тогда на три типа:

1° замкнутые траектории, остающиеся целиком внутри R;

2° полутраектории, которые продолжаются неограниченно, не замыкаясь и не выходя из области R;

3° полутраектории, которые выходят из R, пересекая цикл C или C'.

Мы начнём с построения *предельных колец* вокруг замкнутых траекторий, так же, как мы это сделали во втором мемуаре. Для этого соединим точку цикла C с точкой цикла C' какой-либо алгебраической дугой. Эта алгебраическая дуга может быть разложена на конечное число дуг без контакта. Через каждый конец этих дуг я проведу маленькую дугу без контакта. Таким образом, я провёл внутри R некоторое число дуг без контакта, и я могу быть уверенным, что каждая полутраектория первого типа пересечёт, по крайней мере, одну из них.

Возьмём одну из этих дуг без контакта и рассмотрим, какие из точек взятой дуги имеют последующую. Для этого мы условимся считать, что точка M_0 дуги без контакта не имеет последующей, если траектория, проходящая через точку M_0, выходит из области R или если она не пересекает снова дугу без контакта. Наоборот, если траектория, проходящая через M_0, не выходя из R, снова пересечёт дугу без контакта в точке M_1, то точка M_1 будет последующей для M_0.

Среди тех дуг без контакта, которые я в конечном числе провёл в области R, одни не будут пересекаться ни с одной замкнутой траекторией первого типа и должны быть отброшены, другие же будут пересекаться, по крайней мере, с одной замкнутой траекторией; я назову их *вспомогательными дугами*.

Рассмотрим какую-либо вспомогательную дугу; на этой дуге всегда можно найти точки, допускающие последующую, так как точка, в которой её пересекает замкнутая траектория, есть своя собственная последующая. Кроме того, никакая траектория, проходящая через точку вспомогательной дуги, не проходит через седло, так как в области R сёдел нет. Кривая последования будет, следовательно, иметь один из видов, которые изображены на черт. 11 (второй мемуар, глава V).

Мы видели, что если мы соединим дугой траектории M_0PM_1 точку M_0 дуги без контакта с её последующей M_1, то цикл $M_0PM_1M_0$ можно рассматривать как цикл без контакта. Само собой разумеется, нужно сделать исключение для того случая, когда обе точки M_0 и M_1 совпадают; в этом случае цикл без контакта обращается в замкнутую траекторию. Мы проведём получающиеся таким образом циклы без контакта для всех тех точек вспомогательной дуги, которые имеют последующую. Совокупность всех этих циклов образует тогда предельное кольцо, подобное тем, которые мы рассматривали во втором мемуаре.

Это предельное кольцо будет покрыто семейством циклов без контакта, из которых некоторые вырождаются в замкнутые траектории; кроме того, это предельное кольцо разбивает область R на две другие, аналогичные ей по свойствам, области R' и R'', заключающие меньшее число вспомогательных дуг.

Продолжая те же рассмотрения с областями R' и R'', мы разобьём, наконец, область R на некоторое число предельных колец и на некоторое число межкольцевых областей, внутри которых нельзя провести ни одной замкнутой траектории.

Рассмотрим одну из этих межкольцевых областей; она будет вполне подобна области R с той лишь разницей, что в ней нельзя будет провести полутраектории первого типа. Я утверждаю, что нельзя также провести полутраекторию второго типа.

В самом деле, для каждой полутраектории второго типа существует предельный цикл, который должен быть полутраекторией первого типа, так как внутри области R теоремы главы V верны без ограничений; следовательно, полутраектория не может всё время оставаться внутри такой межкольцевой области, которую не пересекает ни одна полутраектория первого типа.

Таким образом, любая межкольцевая область может содержать лишь полутраектории третьего типа; отсюда следует, что каждая траектория, пересекающая такую область, должна в обе стороны окончиться в точках, лежащих на циклах γ и γ', ограничивающих область. Невозможно, чтобы оба конца были на одном и том же цикле γ, так как дуга без контакта не может поддерживать (sous-tendre) дугу траектории.

Следовательно, всякая траектория, проведённая в межкольцевой области, идёт от некоторой точки цикла γ к некоторой точке цикла γ'; это и доказывает возможность покрытия этой области циклами без контакта.

Теорема XVIII таким образом доказана для области R.

Заслуживающим внимания частным случаем является тот, когда закон последования на какой-нибудь вспомогательной дуге имеет вид $t_1 = t_0$. Тогда можно, принимая во внимание, что в области R нет особых точек, провести рассуждение, аналогичное употреблённому в конце главы XI, и показать, что все траектории, пересекающие эту область, замкнуты.

Если оставить в стороне этот особенный случай, то все замкнутые траектории являются предельными циклами; теорема XVII, согласно которой предельных циклов конечное число, легко распространяется на этот случай (до сих пор, само собой разумеется, речь идёт только о предельных циклах и замкнутых траекториях, лежащих целиком внутри R).

Теоремы XVII и XVIII остаются в силе и тогда, когда циклы C и C', ограничивающие область R, являются замкнутыми траекториями, а не циклами без контакта. Исключение для теоремы XVII может быть в том случае, когда цикл C сводится к замкнутой траектории, проходящей через седло.

Для того чтобы доказать теоремы XVII и XVIII во всей их общности, мне остаётся показать, что полость S_1 можно разбить на конечное число областей, подобных R.

Для этого мы сделаем сперва несколько предварительных замечаний.

Мы видели, что если соединить дугой траектории M_0PM_1 две точки M_0 и M_1 дуги без контакта, то цикл $M_0M_1PM_0$ можно считать циклом без контакта, т. е. через каждую из его точек можно провести цикл без контакта, бесконечно мало отличающийся от цикла $M_0M_1PM_0$.

Предположим далее, что дуга траектории M_0QM_1 пересекает цикл без контакта M_1PM_1 в точке M_1. Я утверждаю, что цикл $M_1PM_1QM_0QM_1$ можно считать циклом без контакта.

В самом деле, пусть $M_0'Q'M_1'$, $M_0''Q''M_1''$, ..., $M_0^{(k)}Q^{(k)}M_1^{(k)}$ — дуги траекторий, бесконечно мало отличающиеся от M_0QM_1 [27]. Мы всегда можем провести дугу кривой, встречающую цикл без контакта M_1PM_1 в точке M_1', пересекающую каждую из указанных выше дуг траекторий в одной только точке, проходящую через точку M_0 и снова достигающую цикл без контакта в точке $M_1^{(k)}$. Замкнутый цикл $M_1^{(k)}PM_1'Q''M_0M_1^{(k)}$, бесконечно мало отличающийся от $M_1PM_1QM_0QM_1$, будет без контакта.

Представим себе теперь, что на полости S_1 проведено некоторое число циклов без контакта (или замкнутых траекторий) и что таким образом на этой полости определена некоторая область P, ограниченная этими циклами без контакта. (Может случиться, что область P совпадает со всей полостью S_1; так, например, предположим, что S_1 есть тор и что на торе проведён меридиональный круг C, являющийся циклом без контакта. Вся полость целиком образует тогда одну область P, ограниченную *двумя* циклами, так как надо будет различать два края разреза, сделанного на торе.)

Теперь я утверждаю, что через каждую точку M_0 области P можно провести цикл без контакта, лежащий *внутри этой области*. Рассмотрим в самом деле полутраекторию, проходящую через M_0. Вот какие случаи могут иметь место:

1° Может случиться, что полутраектория замыкается, не выходя из области P. Это — единственный исключительный случай; через точку M_0 нельзя провести цикл без контакта, а только замкнутую траекторию.

2° Может случиться, что полутраектория M_0QM_1 выходит из области P в точке M_1 через один из ограничивающих эту область циклов, например, через цикл M_1HM_1. В этом случае цикл $M_1HM_1QM_0QM_1$, как мы только что видели, можно рассматривать как цикл без контакта.

3° Или же полутраектория кончается в узле или в фокусе. Этот случай приводится к предыдущему, так как узел или фокус можно окружить малым циклом без контакта, который траектория должна будет пересечь, для того чтобы окончиться в узле или в фокусе.

4° Или же полутраектория неограниченно продолжается, не замыкаясь, не кончаясь в узле или в фокусе и не выходя из области P. Тогда можно найти в области P дугу без контакта, пересекающую полутраекторию в двух точках N_0 и N_1. Отсюда следует, по теореме VIII, что можно соединить точку M_0 с другой точкой полутраектории M_1 дугой без контакта. В этом случае цикл, образованный дугой без контакта M_0M_1 и дугой траектории M_0M_1, можно рассматривать как цикл без контакта.

Таким образом, всегда можно провести через точку M_0 в области P цикл без контакта, который в некоторых случаях может обращаться в замкнутую траекторию.

Если точка M_0 является седлом, то в ней кончаются не две, а четыре полутраектории. Тогда можно провести через точку M_0 *два* цикла без контакта, вместе образующих замкнутую кривую с двойной точкой.

Вот теперь каким образом мы будем поступать, для того чтобы разбить полость S_1 на области, аналогичные R. Мы начнём с того, что окружим все узлы и фокусы бесконечно-малыми циклами без контакта. Пусть в так определённой области P есть какое-нибудь седло; через это седло я проведу два цикла без контакта [28]; таким образом, я разделил полость S_1 на меньшие области P. Я поступлю таким же образом с остальными сёдлами; в конце концов, полость S_1 окажется разделённой на некоторое число областей R, ограниченных циклами без контакта и не содержащих никаких особых точек.

Я утверждаю, что каждая из этих областей двусвязна и ограничена лишь двумя циклами.

Предположим в самом деле, что область R q-связна и ограничена n-циклами.

Мы имеем, во-первых (см. *Riemann*, loc. cit., стр. 12),

$$q \geqslant n > 0, \quad q \equiv n \pmod{2}.$$

Кроме того, каждый из этих циклов имеет индекс — 1, и в области нет особых точек. Если мы замкнём область R, строя на каждом из ограничивающих её циклов C односвязную поверхность, и если мы затем разделим саму область R на односвязные области циклами C', то мы получим подобие криволинейного многогранника рода $\frac{q-n}{2}$. Теорема Эйлера даст нам тогда

$$\sum i + \sum i' = q - n - 2,$$

где $\sum i$ обозначает сумму индексов циклов C, а $\sum i'$ — сумму индексов циклов C'. Но мы имеем

$$\sum i = -n, \quad \sum i' = 0,$$

откуда

$$q = 2, \quad n = 2.$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, все наши области являются двусвязными и ограничены двумя циклами; следовательно, мы можем покрыть каждую из них циклами без контакта, что и доказывает теорему XVIII во всей её общности.

После того как на полости S_1 построено семейство циклов без контакта и предельных циклов, охватывающих друг друга, то это семейство можно использовать для построения самих траекторий.

Если цикл без контакта разбивает S_1 на две области, то каждая траектория может пересечь его только в одной точке.

Напротив, это уже неверно, если цикл без контакта не разделяет S_1 на две области; но даже и в этом случае рассмотрение циклов без контакта остаётся не менее важным, чем раньше. Это станет понятнее после тех примеров, которые я дам в следующей главе.

ГЛАВА XV

ДЕТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ТОРА

Как мы видели, поверхности рода 1 являются единственными, на которых может не быть особых точек. После случая поверхностей рода 0, по существу изученного в первых двух частях, поверхности рода 1 без особых точек являются простейшим случаем. Его мы и рассмотрим теперь подробно.

Для большей определённости я предположу, что поверхность S_1 является тором

$$z^2+(R-\sqrt{x^2+y^2})^2=r^2.$$

Однако всё то, что будет сказано о торе, относится также к любой поверхности рода 1, ибо, с точки зрения геометрии положения, она не отличается от тора.

Мы положим:

$$x=(R+r\cos\omega)\cos\varphi,$$

$$y=(R+r\cos\omega)\sin\varphi,$$

$$z=r\sin\omega.$$

Дифференциальные уравнения мы запишем в таком виде:

$$\frac{d\omega}{dt}=\Omega,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\Phi,$$

где Ω и Φ являются многочленами, целыми относительно $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

С другой стороны, находим:

$$\cos\varphi = \frac{x(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)}{2R(x^2+y^2)}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{x}\cos\varphi,$$

$$\sin\omega = \frac{z}{r}, \quad \cos\omega = \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi - R}{r}.$$

Отсюда следует, что если Ω и Φ являются полиномами, целыми по $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, то $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ будут рациональными функциями от x, y и z.

Для лучшего понимания дальнейших рассуждений надо припомнить главы VIII и IX (второй мемуар). В самом деле, мы приложим те же методы и разделим тор на ациклические области (покрытые циклами без контакта, среди которых нет предельных циклов), на области циклические (покрытые циклами без контакта, среди которых заведомо есть предельные циклы), на области моноциклические (где есть один и только один предельный цикл) и на области сомнительные (относительно которых нельзя утверждать ни того, что в них отсутствует предельный цикл, ни того, что в них имеется предельный цикл). Исследование будет закончено, если останутся только ациклические и моноциклические области.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы узнать, является ли область циклической и является ли она моноциклической. Правила, которые мы применим здесь для ориентации, будут те же, что и изложенные в VIII главе.

1° Пусть дана двусвязная область R, ограниченная двумя циклами без контакта C и C', и пусть AMB есть какая-либо алгебраическая дуга, пересекающая эти два цикла в точках A и B. Рассмотрим наблюдателя, двигающегося по этой дуге и попадающего в область R через точку A. Если полутраектория, идущая в область R из точки A, находится направо от наблюдателя, то мы скажем, что цикл C положителен; в противном случае он будет отрицателен. Предположим, что наблюдатель, двигаясь по нашей дуге, выходит из области R через точку B. Через эту точку проходят две полутраектории: одна, идущая внутри R, и другая, идущая вне этой области. Эту последнюю мы и рассмотрим. Если она находится направо от наблюдателя, то цикл C' будет положителен (см. мемуар второй, гл. VIII).

Если оба цикла одного и того же знака, то число предельных циклов, лежащих в области R, будет той же чётности, что и число контактов дуги AMB; оно будет иной чётности в противном случае.

В частности, предположим, что оба цикла C и C' являются двумя меридиональными окружностями $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$. Предположим, что в области R и на её границе функция Ω имеет один и тот же знак; предположим, что вдоль цикла C мы имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

и что вдоль цикла C' мы имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} < 0.$$

Возьмём за дугу AMB дугу параллели $\omega = 0$, которая будет дугой без контакта. Оба цикла будут иметь противоположные знаки. Число предельных циклов, содержащихся в R, будет, следовательно, нечётно. Следовательно, эта область заведомо циклична.

2° Пусть ρ и θ — полярные координаты точки в некоторой плоскости. Предположим, что устанавливается соотношение между ω и φ, с одной стороны, ρ и θ, с другой, такое, что область R на торе и некоторая двусвязная плоская область R_1 точечно соответствуют друг другу и притом это соответствие взаимно однозначное. Предположим, что по выполнении всех преобразований данное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d\rho}{d\theta} = F(\rho, \theta)\ *).$$

*) Для ясности изменено обозначение автора «$\varphi(\rho, \theta)$» для правой части уравнения. — *Прим. ред.*

Если в области R находится более двух предельных циклов, то в этой области непременно будут точки, в которых либо

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}=0, \quad \text{либо} \quad F=\infty$$

(см. гл. XIII, теорему XIX).

Пусть, в частности,

$$\theta=\omega, \quad \rho=\varphi+K,$$

где K — какая-либо постоянная.

Если в области R ни функция Ω, ни функция $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ не **обращается в нуль, то область R заведомо ациклична или моноциклична.**

Мы рассмотрим сначала следующий пример:

$$\frac{d\varphi}{dt}=a+b\cos\omega-\cos\varphi, \quad \frac{d\omega}{dt}=c,$$

где a, b, c — такие постоянные, что

$$a>b>0, \quad a+b<1, \quad c>0.$$

Положим

$$a+b=\cos\varphi_0, \quad a-b=\cos\varphi_1,$$

где углы φ_0 и φ_1 заключены между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Так как $\frac{d\omega}{dt}$ никогда не обращается в нуль, то все параллели $\omega=\text{const}$. являются циклами без контакта. Вот, следовательно, первая система циклов без контакта, среди которых нет ни одного предельного цикла.

Но легко видеть, что когда φ заключено между φ_1 и $2\pi-\varphi_1$, то $\frac{d\varphi}{dt}$ положительно, и что когда φ заключено между $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$, то $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательно. Таким образом, тор разбивается на четыре части: области $\varphi_1<\varphi<2\pi-\varphi_1$, $-\varphi_0<\varphi<\varphi_0$, где все меридианы являются циклами без контакта (это будут ациклические области), и области $R(\varphi_0<\varphi<\varphi_1)$ и $R'(-\varphi_1<\varphi<-\varphi_0)$, являющиеся сомнительными.

Рассмотрим, в частности, область R. Прежде всего я утверждаю, что она является циклической, так как мы имеем

$$\frac{d\varphi}{dt}>0 \text{ для цикла } \varphi=\varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}<0 \text{ для цикла } \varphi=\varphi_0$$

и, кроме того,

$$\frac{d\omega}{dt}>0.$$

Следовательно, оба цикла без контакта $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi==\varphi_0$, ограничивающие область R, имеют противоположные знаки, если за дугу AMB, о которой мы говорили выше, взять дугу без контакта $\omega=0$. Следовательно, область R содержит, по крайней мере, один предельный цикл.

Но она не может содержать больше одного цикла, так как если бы она содержала два, то внутри R мы должны были бы иметь или $\Omega=0$, или $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0$. Но Ω никогда не обращается в нуль, а $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\sin\varphi$ может обращаться в нуль только при $\varphi=m\pi$, т. е. вне R.

Следовательно, в области R можно провести один и только один предельный цикл, который я назову C.

По той же причине в области R' можно провести один и только один предельный цикл, который я назову C'.

Мы пришли таким образом ко второй системе циклов без контакта, среди которых есть два предельных цикла C и C' и бесчисленное множество меридианов.

Два цикла C и C' разбивают тор на две области P и P'; обе покрыты циклами без контакта. Рассмотрим подвижную точку, движение которой определено нашими дифференциальными уравнениями. Если в начальный момент эта подвижная точка находится в одной из областей P

или P', то она никогда не может выйти из неё. Следовательно, если её координата φ в начальный момент заключена между φ_1 и $2\pi-\varphi_1$, то она всегда останется между φ_0 и $2\pi-\varphi_0$.

Кроме того, если подвижная точка однажды пересечёт один из циклов без контакта второй системы, то она больше уже не сможет снова его пересечь. При неограниченном возрастании времени подвижная точка будет асимптотически приближаться к одному из двух циклов C и C'. Другими словами, возвращаясь к языку главы X, мы скажем, что орбита подвижной точки неустойчива.

Второй пример, который мы рассмотрим, ещё проще первого. Я напишу просто

$$\frac{d\omega}{dt}=a, \quad \frac{d\varphi}{dt}=b,$$

где a и b — две положительные постоянные. Непосредственно видно, что все параллели и все меридианы являются циклами без контакта и что общий интеграл имеет вид

$$\frac{\omega}{a}-\frac{\varphi}{b}=\text{const}.$$

Если отношение $\frac{a}{b}$ рационально, то все траектории замкнуты; следовательно, мы имеем устойчивость.

Предположим теперь, что отношение $\frac{a}{b}$ иррационально; устойчивость всё же будет иметь место в том смысле, что если взять какую-нибудь сколь угодно малую часть p тора, то любая траектория будет пересекать эту часть бесконечное множество раз.

Если подвижная точка в начальный момент находится в некоторой точке A, то она не попадает вновь в эту точку, но она будет бесконечное множество раз проходить через бесконечно-близкие точки.

Рассмотрим кривую

$$\omega=c\varphi+d,$$

где c — рациональная постоянная, а d — какая-либо постоянная величина. Эта кривая будет замкнутым циклом и легко видеть, что это непременно цикл без контакта. Следовательно, на торе можно построить бесконечное множество систем циклов без контакта, среди которых не будет ни одного предельного цикла.

Двух вышеприведённых примеров достаточно, чтобы показать, что наличие предельного цикла является признаком неустойчивости, а отсутствие подобного цикла — признаком устойчивости. Но, для того чтобы лучше дать себе отчёт в этом важном факте, необходимо глубже проникнуть в сущность вопроса.

Мы предположим для дальнейшего, что ω и φ монотонно растут вместе со временем, т. е. Ω и Φ всегда положительны, и что, кроме того, на торе нет особых точек.

Рассмотрим меридиан $\varphi = 0$, являющийся циклом без контакта. Пусть $M(0)$ есть некоторая точка на этом меридиане, в которой подвижная точка находится в начальный момент. Эта точка будет иметь координаты

$$(\varphi = 0, \quad \omega = \omega_0).$$

При возрастании времени величины ω и φ также будут расти, так что φ, наконец, станет равным 2π; тогда подвижная точка придёт в точку $M(1)$, которая будет лежать на цикле без контакта $\varphi = 0$, от которого мы отправлялись; эта точка будет последующей для точки $M(0)$ и будет иметь координаты

$$(\varphi = 2\pi, \quad \omega = \omega_1).$$

Две величины ω_0 и ω_1 будут связаны некоторым соотношением, которое является ничем иным, как законом последования главы V. Я напишу этот закон в двойной записи:

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_0 = \theta(\omega_1).$$

Сделанные предположения позволяют высказать по поводу этого закона последования следующие принципы:

Первый принцип. Функция ψ непрерывна.

Второй принцип. Функция ψ возрастает вместе с ω_0, так что

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} > 0$$

и, кроме того,

$$\psi(\omega_0 + 2\pi) = \psi(\omega_0) + 2\pi.$$

Третий принцип. Функция ψ голоморфна при всех действительных значениях ω_0.

Кроме того, ясно, что функция θ имеет те же свойства, что и функция ψ.

Пусть теперь $M(1), M(2), \ldots, M(i)$ — последовательно взятые последующие точки $M(0)$ и $M(-1)$, $M(-2), \ldots, M(-i)$ — последовательно взятые предшествующие точки $M(0)$. Их координаты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{-1}$, $\omega_{-2}, \ldots$ будут нам даны уравнениями:

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_2 = \psi(\psi(\omega_0)), \quad \omega_3 = \psi(\psi(\psi(\omega_0))), \ldots$$

$$\omega_{-1} = \theta(\omega_0), \quad \omega_{-2} = \theta(\theta(\omega_0)), \quad \omega_{-3} = \theta(\theta(\theta(\omega_0))), \ldots$$

Точки M образуют множество точек, которые я назову P согласно обозначениям, принятым Кантором [29]. Через P' буду обозначать производное множество от P, т. е. множество точек, в окрестностях которых находится бесконечное множество точек, принадлежащих P. Наконец, через

$$D(P, Q)$$

я обозначу множество точек, общих двум множествам P и Q. По различным вопросам теории множеств и употреблению предшествующих обозначений я отсылаю интересующихся к ряду мемуаров Кантора, появившихся на немецком языке в Mathematische Annalen (т. 15, 17, 20, 21), а на французском — в Acta Mathematica (т. 2, стр. 340—408 [30]).

Я могу поставить перед собой следующие вопросы:

1° Каковы свойства множества P точек M и его производных?

2° В каком круговом порядке распределены точки M на меридиональной окружности $\varphi = 0$?

Я докажу, что либо

$$D(P, P') = 0,$$

либо

$$D(P, P') = P.$$

Другими словами, если множество P имеет общую точку со своим производным P', то все его точки будут точками этого производного множества.

В самом деле, пусть $M(i)$ есть точка множества P, принадлежащая P'; по определению множества P' в окрестности точки $M(i)$ находится бесконечное множество точек, принадлежащих P. Следовательно, мы можем найти множество точек

$$M(k_1),\quad M(k_2),\quad \ldots,\quad M(k_p), \ldots,$$

принадлежащих P, таких, что

$$\lim M(k_p) = M(i) \text{ при } p = \infty.$$

Пусть теперь $M(\nu)$ есть какая-нибудь точка P. Рассмотрим точки

$$M(k_1 - i + \nu),\quad M(k_2 - i + \nu),\quad \ldots,\quad M(k_p - i + \nu),\quad \ldots$$

В силу непрерывности функции ψ мы будем иметь:

$$\lim M(k_p - i + \nu) = M(\nu) \text{ при } p = \infty.$$

Следовательно, $M(\nu)$, а, значит, и всякая точка множества P принадлежит P'.

Что и требовалось доказать.

Условие $D(P, P') = 0$, переведённое на язык главы X, означает, что траектория неустойчива. В самом деле, если точка $M(0)$ не принадлежит P', то подвижная точка никогда не придёт в окрестность своего начального положения. Исключением, однако, является тот случай, когда все траектории замкнуты.

Теорема XX. *Если для всех траекторий $D(P, P') = 0$, то заведомо существует предельный цикл, или же все траектории замкнуты.*

Пусть, в самом деле, $N(0)$ есть точка множества P', в окрестности которой находится, по определению, бесконечное множество точек из P. Пусть Q есть множество точек $N(i)$, т. е. множество всех предшествующих и последующих точки $N(0)$.

Невозможно, чтобы в каждом интервале, содержащемся между двумя какими-нибудь точками из P, находилась бы точка из Q. В самом деле, в окрестности точки $N(0)$ есть бесконечное множество таких интервалов; следовательно, в этой окрестности находилось бы бесконечное множество точек из Q, что невозможно в силу предположения

$$D(Q, Q') = 0.$$

Итак, пусть $M(0)$ и $M(i)$ — две точки из P, между которыми нет ни одной точки из Q. Тогда их нет и между $M(i)$ и $M(2i)$, так как, если бы точка $N(k)$ была между $M(0)$ и $M(i)$, то точка $N(k-i)$ была бы между $M(0)$ и $M(i)$, потому что функция ψ монотонно растёт. Точно так же их не будет в интервале, содержащемся между $M(pi)$ и $M(pi+i)$. Кроме того, если точка $M(i)$ лежит, например, справа от $M(0)$, то точка $M(pi+i)$ лежит справа от $M(pi)$. При возрастании p вторая координата ω точки $M(pi)$ будет меняться всё время в одном направлении; она будет, например, всё время расти, но она не может возрастать неограниченно, иначе точка $N(0)$ попала бы в один из вышеуказанных интервалов. Эта координата ω будет, следовательно, стремиться к пределу, который будет соответствовать некоторой точке $P(0)$ меридиональной окружности. Следовательно, мы будем иметь

$$\lim M(pi) = P(0) \text{ при } p = \infty.$$

Отсюда выводим

$$\lim M(pi+k) = P(k),$$

$$\lim M(pi+i) = P(i),$$

$$P(0) = P(i).$$

Итак, i-я последующая точка $P(0)$ есть эта же точка. Следовательно, траектория, проходящая через эту точку, замкнута, и легко видеть, что она является предельным циклом.

Условие $D(P, P')=P$ означает, что траектория устойчива. В самом деле, сказать, что исходная точка $M(0)$ принадлежит к P' — это значит сказать, что подвижная точка бесконечное множество раз возвращается в окрестность этой точки. Следовательно, если мы для всех траекторий имеем $D(P, P')=P$, то устойчивость несомненна. Именно это имеет место, например, во втором из приведённых выше примеров.

Но следует поставить вопрос, не может ли случиться, что мы имеем для одних траекторий $D(P, P')=0$, а для других — $D(P, P')=P$; это и будет началом всех тех трудностей, которые мы в дальнейшем встретим.

Прежде чем итти дальше, я установлю следующую лемму: *пусть* $M(0)$ *и* $N(0)$ — *две какие-нибудь точки*; $M(i)$ *и* $N(i)$ — *их* i*-е последующие. Я утверждаю, что если обе эти последние точки находятся в интервале* $(M(0), N(0))$, *то существует предельный цикл.*

В самом деле, если это так, то две точки $M(2i)$ и $N(2i)$ обе содержатся в интервале $(M(i), N(i))$, две точки $M(3i)$ и $N(3i)$ в интервале $(M(2i), N(2i))$, ... Следовательно, при возрастании p вторая координата ω точки $M(pi)$ будет меняться всё время в одном направлении и никогда не сможет превзойти некоторую границу*). Отсюда, как и выше, следует существование такой точки $P(0)$, что

$$\lim M(pi)=P(0) \text{ при } p=\infty,$$

и, следовательно, существование предельного цикла.

Займёмся теперь изучением того кругового порядка, в котором расположены точки $M(i)$, оставляя в стороне тот случай, когда существует предельный цикл и когда этот порядок легко определяется.

Пусть α_0 есть длина дуги $M(0)M(1)$, α_1 — длина дуги $M(1)M(2)$, ... и вообще α_i — длина дуги $M(i)M(i+1)$.

*) Точнее, этим свойством будет обладать вычет координаты ω по модулю 2π. — *Прим. ред.*

Я утверждаю, что отношение

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots \alpha_{i+n}}{n}$$

при неограниченном возрастании n будет стремиться к определённому конечному пределу, не зависящему от i и несоизмеримому с $2\pi r$.

Возьмём, начиная от точки $M(0)$, дугу L меридиональной окружности, равную k целым окружностям, т. е. равную $2k\pi r$, и предположим, что

$$(1) \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu < 2k\pi r < \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\nu+1}.$$

В силу этого неравенства на дуге L есть $\nu + 2$ точки из P, а именно: $M(0)$, $M(1), \ldots, M(\nu + 1)$ и не больше.

Чтобы правильно понять это предложение и избежать всяких недоразумений, существенно сделать следующее замечание: вторая координата ω точки M меридиональной окружности $\varphi = 0$ определена не однозначно, так как мы получаем ту же точку, увеличивая ω на кратное 2π. Но если, однако, мы задались значением ω_0, то координата ω_i последовательных последующих $M(i)$ уже определена *однозначно* уравнениями

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_i = \psi(\omega_{i-1}).$$

Мы предположим, следовательно, что мы задали ω_0 и тогда мы можем рассматривать ω_i как вполне определённые величины.

В некоторых случаях бывает удобно рассматривать не сами координаты ω_i, но величины, сравнимые с ω_i по модулю 2π и содержащиеся между α и $\alpha + 2\pi$ (где α есть вторая координата некоторой точки N на меридиональной окружности). Мы будем обозначать эту величину через (ω_i, α) и будем называть её координатой точки $M(i)$, *приведённой по отношению к точке N*.

Так, например, при доказательстве теоремы XX мы говорили, что при возрастании p вторая координата ω_{pi} точки $M(pi)$ изменялась всегда в одном и том же направлении, никогда не превосходя при этом некоторой определённой границы. Речь шла не о самой величине ω_i, которую мы выше определили, но об этой координате, приведённой по отношению к точке $N(0)$.

Напротив, во всём дальнейшем речь будет итти, при отсутствии прямых указаний на обратное, о самих координатах ω_i.

Так, когда я говорю, что дуга L содержит $\nu+2$ последовательные последующие $M(0), M(1), \ldots, M(\nu+1)$, то я хочу сказать, что координаты $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\nu+1}$ содержатся между ω_0 и $\omega_0+2k\pi$.

Неравенства (1) написаны в предположении, что все дуги $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$ положительны. Это на самом деле имеет место. Я всегда могу предположить, что

$$\omega_1 > \omega_0.$$

Действительно, мы не можем иметь $\omega_1 = \omega_0$, так как это равенство влечёт существование замкнутой траектории, чего нет по предположению, а если бы мы имели $\omega_1 < \omega_0$, то мы стали бы отсчитывать дуги ω в другую сторону.

После этого второй принцип даёт

$$\omega_{i+1} > \omega_i$$

или

$$\alpha_i > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть теперь $N(0)$ — какая-нибудь точка, содержащаяся между $M(0)$ и $M(1)$, ω_0' — её координата, так что

$$\omega_0 < \omega_0' < \omega_1.$$

Пусть ω_i' — координата i-й последующей $N(i)$. Я утверждаю, что

$$\omega_i < \omega_i' < \omega_{i+1};$$

действительно, если бы мы имели

$$\omega_i' < \omega_i,$$

то обе точки $N(0)$ и $N(i)$ содержались бы между точками $M(0)$ и $M(i)$, а если бы мы имели

$$\omega_i' > \omega_{i+1},$$

то обе точки $M(1)$ и $M(i+1)$ содержались бы между точками $N(0)$ и $N(i)$. В обоих случаях в силу доказанной выше леммы существовал бы предельный цикл, чего нет по предположению.

Точно так же, если бы мы имели

$$\omega_k < \omega_0' < \omega_{k+1},$$

то мы отсюда вывели бы

$$\omega_{k+i} < \omega_i' < \omega_{k+i+1}.$$

Далее из неравенства (1) мы получаем

$$\omega_{\nu+1} < \omega_0 + 2k\pi < \omega_{\nu+2}$$

и, так как

$$\omega_1 + 2k\pi = \psi(\omega_0 + 2k\pi),$$

то

$$\omega_{\nu+2} < \omega_1 + 2k\pi < \omega_{\nu+3}.$$

Если, следовательно, мы возьмём, начиная от точки $M(1)$, дугу длины $2k\pi r$, т. е. L, то на этой дуге будет лежать $\nu+2$ точки из P, а именно $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(\nu+2)$.

Теми же рассуждениями можно было бы показать, что если взять дугу, равную L, начиная от некоторой точки из P, то на этой дуге будет лежать $\nu+2$ точки из P.

Если теперь взять на дуге α_0 некоторую точку N и, начиная с этой точки N, дугу, равную L, то эта дуга будет заведомо содержать точки $M(1), M(2), \ldots, M(\nu+1)$; может содержать или не содержать точку $M(\nu+2)$ и заведомо не будет содержать точку $M(\nu+3)$.

То же рассуждение можно было бы провести, если бы точка N лежала на какой-нибудь дуге α_i, откуда следует вывод: число точек из P, лежащих на какой-либо дуге, равной $2k\pi r$, равно или $\nu+1$, или $\nu+2$.

Если дать k другое значение k', то для ν получится другое значение ν'. Я рассмотрю два интервала, содержащихся один между $\frac{\nu+1}{k}$ и $\frac{\nu+2}{k}$, другой между $\frac{\nu'+1}{k'}$ и $\frac{\nu'+2}{k'}$. Я утверждаю, что эти интервалы имеют общую часть. Рассмотрим в самом деле дугу, равную $2kk'\pi r$, на которой лежит M точек множества P. Получаем:

$$(\nu+1)k'<M<(\nu+2)k',$$
$$(\nu'+1)k<M<(\nu'+2)k,$$

что и доказывает высказанное предположение. То же будет иметь место, если мы рассмотрим вместо двух значений k и двух интервалов три или больше.

Так, если давать k все целые положительные значения, то все интервалы $\left(\frac{\nu+1}{k}, \frac{\nu+2}{k}\right)$ будут иметь общую часть и, кроме того, длина интервала будет стремиться к нулю. Следовательно, $\frac{\nu+1}{k}$ и $\frac{\nu+2}{k}$ стремятся к общему пределу, который я обозначу через $\frac{1}{\mu}$ [81].

Число $\frac{1}{\mu}$ не является рациональным.

В самом деле, если бы оно было, например, равно 2, то мы имели бы

$$\nu+1=2k, \text{ или } \nu+2=2k.$$

Пусть, при $k=1$

$$\nu+1=2, \quad \nu+2=3.$$

Тогда, при $k>1$ мы имели бы

$$\nu+2\geqslant 2k+1;$$

отсюда

$$\nu+2=2k+1.$$

Отсюда легко было бы вывести, что круговой порядок точек $M(i)$, где индекс i положителен, обратен следующему:

$$[M(0),\ M(2),\ M(4),\ \ldots \text{ ad inf.};\ M(1),\ M(3),\ \ldots \text{ ad inf.}],$$

откуда следовало бы существование предельного цикла.

Если бы было, наоборот, $\nu+2=2$ при $k=1$, то при $k>1$ мы получили бы

$$\nu+2\leqslant 2k,$$

откуда

$$\nu+2=2k.$$

Круговой порядок был бы обратен предшествующему и опять существовал бы предельный цикл.

Следовательно, $\frac{1}{\mu}$ — иррационально.

Очевидно, мы будем иметь

$$\lim\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_{i+n}}{n}=2\pi r\mu \text{ при } n=\infty,$$

что мы и утверждали.

Мы можем теперь сказать, что круговой порядок точек P характеризуется некоторым иррациональным числом $\frac{1}{\mu}$; этот результат мы попробуем теперь выразить более точным образом.

Чтобы сделать очевидным, что ν зависит от k, я буду писать $\nu(k)$ вместо ν. Я рассмотрю затем $\nu(k)+2$ точки

$$M(0),\ M(1),\ M(2),\ \ldots,\ M[\nu(k)+1]. \tag{2}$$

Посмотрим, в каком круговом порядке они расположены. Нужно будет сперва поместить точки $M(0)$, $M(1)$, ..., $M[\nu(1)+1]$ на меридиональном круге в порядке их индексов. Затем $M[\nu(1)+2]$ поместится между $M(0)$ и $M(1)$ и так далее до $M[\nu(2)+1]$, которая поместится между $M[\nu(1)+1]$ и $M(0)$. Следующая точка $M[\nu(2)+2]$ будет помещаться между $M(0)$ и $M(1)$; остаётся установить, будет ли она до $M[\nu(1)+2]$ или после этой точки. Она будет раньше, если

$$\nu(2)+2=2\nu(1)+3,$$

и после, если

$$\nu(2)+2=2\nu(1)+4.$$

Это и есть единственные возможные случаи.

Можно таким образом продолжать, и никогда не будет затруднения в помещении новой точки, если известны k чисел:

$$\nu(1),\ \nu(2),\ \ldots,\ \nu(k).$$

Таким образом, круговой порядок точек (2) зависит только от этих k чисел, иначе говоря, от μ, и он будет такой же, как порядок чисел $\mu i - E(\mu i)$ [32]. Но k можно взять сколь угодно большим.

Следовательно, *круговой порядок точек $M(i)$ зависит только от иррационального числа μ и совпадает с круговым порядком чисел $\mu i - E(\mu i)$* [$E(x)$ обозначает, как обыкновенно, наибольшее целое число, содержащееся в x].

Из этой теоремы непосредственно следует, что между каждыми двумя точками множества P находится бесконечное множество других точек; следовательно, между каждыми двумя точками множества P всегда есть точка множества P'.

Пусть N есть какая-нибудь точка множества P'. По определению в окрестности этой точки находится бесконечное множество точек из P; между каждыми двумя из них всегда есть точка из P'. Следовательно, в окрестности N лежит бесконечное множество точек из P', т. е. N принадлежит к P'' — производному множеству от P'.

Следовательно, можно написать

$$D(P',\ P'')=P'.$$

С другой стороны, одна из теорем общей теории множеств даёт

$$D(P',\ P'')=P'' \text{ [33]},$$

откуда

$$P'=P''.$$

Итак, P' совпадает со своим производным; значит, это есть одно из тех множеств, которые Кантор называет совершенными.

Но известно, что Кантор различает два класса совершенных множеств: одни — множества неплотные ни в каком интервале и другие — плотные в некотором интервале.

Мы можем, следовательно, сделать три гипотезы, в формулировке которых мы снова употребляем обычный язык:

1° Мы можем предположить, что все точки меридиональной окружности $\varphi = 0$ принадлежат P'.

2° Мы можем затем предположить, что на этой окружности есть некоторые дуги, все точки которых принадлежат P', причём, однако, это имеет место не для всех точек нашей окружности.

3° Мы можем, наконец, предположить, что на нашей окружности нет ни одной дуги, все точки которой принадлежали бы P'.

Я хочу сначала показать, что вторая гипотеза должна быть отброшена. В самом деле, приняв её, мы могли бы найти на окружности дугу AB, все точки которой принадлежат P', но притом такую, что если продолжать её за A или за B, то не все точки продолжения принадлежали бы P'.

Пусть A_i и B_i суть i-е последующие точек A и B; i-ми последующими различных точек дуги AB будут различные точки дуги A_iB_i, и все они должны, очевидно, составлять часть множества P'.

Я утверждаю, что две дуги AB и A_iB_i не могут иметь общей части; в самом деле, если бы A и B были расположены на дуге A_iB_i или если бы A_i и B_i были расположены на дуге AB, то существовал бы предельный цикл, в противность предположению. Если бы точка A_i лежала на дуге AB и B_i вне этой дуги (или если бы B_i лежала на дуге AB, а A_i вне этой дуги), то все точки дуги BB_i (или дуги AA_i), которые образуют продолжение дуги AB за точку B (или за точку A), принадлежали бы P', что противоречит сделанному предположению.

Пусть $M(0)$ — точка из P, лежащая на дуге AB; точка $M(i)$ будет лежать на дуге A_iB_i и, следовательно, вне

AB. Так как число i произвольно, то, значит, на дуге AB нет ни одной последующей или предшествующей для $M(0)$, т. е. нет ни одной точки из P, кроме $M(0)$. Но, для того чтобы все точки дуги AB принадлежали P', необходимо, чтобы на этой дуге было бесконечное множество точек из P.

Следовательно, вторая гипотеза должна быть отброшена и нам остаётся изучить первую и третью.

Первая гипотеза, несомненно, может осуществиться; именно, мы видели, что она действительно имеет место для уравнений

$$\frac{d\omega}{dt}=a, \quad \frac{d\varphi}{dt}=b,$$

если отношение $\frac{a}{b}$ иррационально.

Я утверждаю прежде всего, что если все точки окружности принадлежат P', то это имеет место, какова бы ни была та траектория, с помощью которой построены множества P и P'. В самом деле, рассмотрим другую траекторию, пересекающую меридиональную окружность в некотором числе точек, образующих множество Q.

Я утверждаю, что производное множество Q' от Q состоит, как и P', из всех точек окружности. В самом деле, пусть $N(0)$ — какая-либо точка этой окружности, $N(i)$ — её i-я последующая, Q — множество точек $N(i)$. В окрестности точки $N(0)$ есть, по предположению, бесконечное множество точек из P:

$$M(k_1), \quad M(k_2), \quad \ldots, \quad M(k_n), \quad \ldots$$

Если n неограниченно возрастает, то выражение $\mu k_n - E(\mu k_n)$ стремится к некоторому пределу h. Этот предел характеризует положение точки $N(0)$ на окружности.

Я хочу сказать, что три точки $M(j)$, $M(k)$ и $N(0)$ будут при любых j и k иметь тот же круговой порядок, что и три числа $\mu j - E(\mu j)$, $\mu k - E(\mu k)$ и h.

Легко убедиться, что положение точки $N(i)$ таким же образом определяется числом $h+\mu i - E(h+\mu i)$, а отсюда вытекает, что на каждой дуге окружности находится бесконечное множество точек из Q, что равносильно тому, что все точки окружности принадлежат Q'.

Как мы только что видели, любая точка окружности характеризуется числом h. Это число h равно $\mu i - E(\mu i)$ для точки $M(i)$, принадлежащей P и имеющей координату ω_i. Оно равно нулю для точки $M(0)$, имеющей координату ω_0. Кроме того, если ω_i изменяется от ω_0 до $\omega_0 + 2\pi$, то h монотонно растёт от 0 до 1. Это следует из того, что точки окружности следуют друг за другом в том же круговом порядке, что и характеристические числа.

Следовательно, h есть возрастающая функция от ω для значений ω между пределами ω_0 и $\omega_0 + 2\pi$; значит, её можно представить в виде сходящегося тригонометрического ряда

$$2\pi h = \sum A_m \cos m\omega + \sum B_m \sin m\omega$$

или же

$$2\pi h - \omega = \sum A'_m \cos m\omega + \sum B'_m \sin m\omega = \theta(\omega). \tag{3}$$

Функция $\theta(\omega)$, изображаемая рядом (3), будет непрерывной и периодической функцией ω. Закон последования может тогда быть написан в виде

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu.$$

Пусть $N(0)$ — точка меридиональной окружности, имеющая характеристическое число h; построим траекторию, проходящую через $N(0)$, и будем продолжать её до тех пор, пока она снова в точке $N(1)$ пересечёт меридиональную окружность. Если мы припишем всем точкам этой дуги траектории $N(0)$, $N(1)$ (кроме точки $N(1)$) характеристическое число h, то все точки тора будут иметь одно и только одно характеристическое число. Выражение

$$2\pi h - \omega + \mu\varphi$$

будет непрерывной и периодической функцией от ω и φ, допускающей разложение в тригонометрический ряд такого вида:

$$H(\omega, \varphi) = \sum A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \lambda_{mn}). \tag{4}$$

Общий интеграл данных уравнений напишется тогда так:

$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \mathrm{const}.$$

Следовательно, мы заранее уверены в том, что общий интеграл может быть выражен с помощью тригонометрического ряда, но у нас нет никаких методов вычисления коэффициентов этого ряда.

В рассматриваемом случае

$$D(P, P') = P$$

для всех траекторий, и на торе нельзя найти сколь угодно малую область, которую бы не пересекали бесконечное множество раз все траектории.

Перейдём теперь к третьей гипотезе, которая, как мы увидим, равносильна предположению, что $D(P, P') = P$ для одних траекторий и что $D(P, P') = 0$ для других.

Итак, представим себе, что P' образует совершенное, нигде не плотное множество, или, говоря на обычном языке, представим себе, что на окружности нельзя найти ни одной дуги, все точки которой принадлежали бы P'. Так как P' есть совершенное множество, то на окружности заведомо можно найти дугу $A(0)B(0)$, концы которой принадлежат P', но никакая другая точка которой не принадлежит P' (см. Кантор, *Acta Mathematica*, т. IV, вып. 4).

Тогда все дуги $A(l)B(l)$ будут иметь то же свойство; отсюда следует, что две дуги $A(i)B(l)$ и $A(k)B(k)$ при $l \neq k$ не имеют ни одной общей точки.

Кантор доказал, что если на окружности, например, мы имеем совершенное, нигде не плотное множество, то точки окружности разделятся на три класса:

1° точки некоторых дуг [34], у которых ни одна точка не принадлежит множеству;

2° концы этих дуг, которые, очевидно, принадлежат множеству;

3° наконец, точки множества, не являющиеся концами такого рода дуг.

В интересующем нас случае дугами, точки которых не принадлежат множеству, являются дуги $A(l)B(l)$ [35];

концами этих дуг служат сами точки $A(i)$ и $B(i)$; наконец, другие точки множества получатся, если искать точки, в окрестности которых есть бесконечное множество точек $A(i)$ и $B(i)$.

Следовательно, существует и три рода траекторий:

1° Прежде всего, я укажу на те две траектории, одна из которых проходит через точку $A(0)$, другая — через точку $B(0)$ и которые я буду называть траекториями A и B. Для этих двух траекторий имеем, очевидно:

$$D(P, P') = P.$$

2° Затем следуют траектории, которые пересекают одну из дуг $A(i)\,B(i)$ и, следовательно, пересекают их все. Если точка $C(0)$ одной из этих траекторий находится на дуге $A(0)\,B(0)$, то её i-я последующая $C(i)$ будет на дуге $A(i)\,B(i)$. В окрестности какой-либо точки из P' находится бесконечное множество точек $A(i)$ и $B(i)$, следовательно, и бесконечное множество точек $C(i)$. Значит, если Q обозначает множество точек $C(i)$ и Q' — его производное множество, то

$$Q' = P'.$$

Отсюда ясно, что

$$D(Q, Q') = 0.$$

3° Наконец, существуют траектории, проходящие через точки третьего рода и, следовательно, не пересекающие ни одной дуги $A(i)\,B(i)$. Для этих траекторий множество P' также остаётся прежним, и ясно, что

$$D(P, P') = P.$$

Следовательно, множество P' одно и то же для всех траекторий, и мы имеем

$$D(P, P') = P \text{ или } 0,$$

смотря по тому, какую траекторию мы взяли.

Дуги $A(i)\,B(i)$ следуют одна за другой в том же круговом порядке, что и числа $\mu i - E(\mu i)$.

Формулы

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu,$$

$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \text{const.},$$

где $\theta(\omega)$ и $H(\omega, \varphi)$ означают тригонометрические ряды, изображающие непрерывные и периодические функции, остаются в силе и здесь, но не сохраняют полностью своё значение. В самом деле, функция $\omega + \theta(\omega)$ является постоянной вдоль всей дуги $A(i)\,B(i)$, и можно было бы также найти на торе области, где функция $H(\omega, \varphi) + \mu\varphi - \omega$ сохраняет постоянное значение.

Остаётся посмотреть, совместима ли эта третья гипотеза, некоторые следствия которой мы только что развили с тремя принципами, сформулированными нами по поводу закона последования

$$\omega_1 = \psi(\omega_0),$$

и с тем частным видом дифференциальных уравнений, который мы рассматриваем.

Я могу утверждать, что она совместима с первыми двумя принципами, в силу которых функция ψ есть непрерывная и возрастающая функция.

Совместима ли она с третьим принципом, по которому функция ψ голоморфна? Это неясно. Нужно было бы или найти пример, в котором осуществлялась бы третья гипотеза, чего я до сих пор не смог сделать, или же доказать невозможность её во всех случаях, — и этого я не смог получить. Я думаю, что третья гипотеза действительно может осуществиться; однако есть частные случаи, относительно которых можно доказать, что она не имеет места и что, следовательно, нужно принимать первую гипотезу.

Пусть $C(0)$ есть какая-либо точка меридиональной окружности, $C(1), C(2), \ldots, C(i)$ — её i первых последующих; мы остановимся, когда $(i+1)$-я последующая будет лежать на дуге $A(0)\,A(1)$. Пусть теперь M_0 и m_0, M_1 и $m_1, \ldots, M_{i-1}$ и m_{i-1}, M_i и m_i — наибольшее и наименьшее значения, которые производная $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$ может принимать соответственно на дуге $C(0)\,C(1)$, на дуге

$C(1)\,C(2),\ldots$, на дуге $C(i-1)\,C(i)$ и, наконец, на дуге $C(i)\,C(0)$. Если

$$M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}M_i<1 \text{ и } M_0M_1M_2\ldots M_{i-1}<1$$

или же если

$$m_0m_1m_2\ldots m_{i-1}m_i>1 \text{ и } m_0m_1m_2\ldots m_{i-1}>1,$$

то можно быть уверенным, что третья гипотеза должна быть отброшена.

Тем же процессом можно найти и верхний предел для любой из определённых выше дуг $A(i)\,B(i)$. Если M есть максимум, m — минимум производной $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$, то все дуги $A(i)\,B(i)$ меньше, чем

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{1-\frac{1}{M}}+\frac{1}{1-m}}.$$

Можно сделать ещё одно замечание; возьмём точку $A(0)$ и траекторию A, проходящую через эту точку. Пусть $C(0)$ и $D(0)$ — две точки, очень близкие к $A(0)$ и лежащие одна направо, другая налево от этой точки. Пусть C и D — траектории, проходящие через эти точки. Мы можем представить себе подвижные точки a, c и d, одновременно описывающие эти три траектории таким образом, что всегда все они находятся на одной и той же меридиональной окружности. Тогда при возрастании времени окажется, что расстояние ac будет стремиться к нулю и что расстояние ad не будет стремиться к нулю, сколь бы близки ни были точки $C(0)$ и $D(0)$ к точке $A(0)$.

Напротив, в случае первой гипотезы невозможно, чтобы расстояние между двумя подвижными точками a и c, описывающими две различные траектории, стремились к нулю. Я не сомневаюсь в том, что можно с пользой применить это замечание, хотя я сам ничего не смог из него извлечь.

Все эти рассмотрения не дали мне возможности решить основной вопрос и не позволили мне строго доказать, что третья гипотеза действительно может иметь место.

Возникает много других вопросов, тесно связанных с предыдущим. Так, можно спросить себя, как меняется характеристическое число μ, определённое выше при изменении коэффициентов дифференциальных уравнений. Можно доказать, что это изменение числа μ непрерывно. Но мы можем предположить, что при некоторых значениях коэффициентов существует предельный цикл; число μ можно тогда рассматривать как рациональное. Если при других значениях коэффициентов число μ иррационально (или μ рационально, но предельного цикла не существует) и если менять коэффициенты непрерывным образом так, чтобы пройти через значение, дающее предельный цикл, то число μ для этих значений будет иметь или максимум, или минимум. В этом—отправная точка для целого ряда работ, которые бесспорно будут плодотворными и на которые я, мне кажется, должен указать исследователям.

Я надеюсь, что буду иметь возможность в одной из последующих глав этого мемуара дать более полные результаты по этим вопросам. А именно, я вернусь к ним после того, как в следующих частях этой работы поставлю ряд проблем, аналогичных предыдущим, но ещё более тонких, которые тесно связаны с важным вопросом сходимости тригонометрических рядов и, в частности, с рядами, употребляемыми в небесной механике.

Прежде чем кончить, я хочу в нескольких словах показать, в чём состоит только что указанная связь между интересующей нас проблемой и методами небесной механики.

Мы видели, что общий интеграл данных нам уравнений может быть записан в виде:

$$\omega - \mu\varphi - H(\omega, \varphi) = \text{const.},$$

где H—тригонометрический ряд. Предположим, что наше дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \mu_0 + \alpha F,$$

где μ_0—постоянная, α—очень малый коэффициент, а F—

многочлен от $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, или же тригонометрический ряд

$$F=\sum A_{mn}\cos(m\omega+n\varphi+\lambda_{mn}).$$

Мы получим

$$(\mu_0+\alpha F)\left(1-\frac{\partial H}{\partial\omega}\right)=\mu+\frac{\partial H}{\partial\varphi}.$$

Предположим, что μ и H могут быть разложены по степеням α, так что

$$\mu=\mu_0+\mu_1\alpha+\mu_2\alpha^2+\ldots,$$
$$H=H_1\alpha+H_2\alpha^2+H_3\alpha^3+\ldots$$

Тогда мы будем иметь:

$$\mu_0\frac{\partial H_1}{\partial\omega}+\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}=F-\mu,$$
$$\mu_0\frac{\partial H_2}{\partial\omega}+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}=\frac{\partial H_1}{\partial\omega}F-\mu_2,$$
$$\mu_0\frac{\partial H_3}{\partial\omega}+\frac{\partial H_3}{\partial\varphi}=\frac{\partial H_2}{\partial\omega}F-\mu_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Постоянные μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$ надо выбрать так, чтобы правые части предыдущих равенств были тригонометрическими рядами без свободных членов. Тогда (если μ_0 иррационально) возможно найти тригонометрические ряды H_1, $H_2, \ldots$, *формально* удовлетворяющие предыдущим уравнениям.

Нельзя не заметить аналогии между этим методом приближений и методом Линдштедта в небесной механике. Нельзя не понять, что вопрос о сходимости только что изложенного мною процесса тесно связан со сходимостью рядов, употребляемых этим учёным астрономом из Дерпта. Но рассматриваемый здесь вопрос, очевидно, много проще, чем аналогичные вопросы небесной механики; хотя трудности имеют ту же природу, но они менее многочисленны и их, несомненно, легче преодолеть. В силу этого соображения я и занимался вопросом, составляющим предмет изучения настоящей главы, и в силу него же я, несомненно, вернусь к этому вопросу, как только найду новые результаты.

В 4-й части настоящей работы я приступаю к изучению дифференциальных уравнений 2-го порядка. Я оставлю на короткое время уравнения 1-го порядка, намереваясь, однако, в дальнейшем вернуться к проблемам, связанным с этими уравнениями и пока ещё не разрешённым; я объединю их с аналогичными проблемами, которые возникают для уравнений высшего порядка.

Париж, 15 января 1885 г.

ЧЕТВЁРТЫЙ МЕМУАР

ГЛАВА XVI

УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА; ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Мы займёмся теперь изучением дифференциальных уравнений высшего порядка.

Пусть x, y и z — координаты движущейся точки в пространстве и t — вспомогательное переменное, которое мы будем считать представляющим время. Запишем уравнения в таком виде:

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y, \quad \frac{dz}{dt}=Z, \tag{1}$$

где X, Y и Z — многочлены, целые относительно переменных x, y и z. Ясно, что всякое уравнение второго порядка и первой степени легко может быть приведено к такому виду [1].

Точно так же всякое уравнение n — 1-го порядка и первой степени можно представить в следующей форме:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=X_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}=X_n, \tag{2}$$

где X_1, $X_2, \ldots$, X_n — многочлены, целые относительно переменных x_1, $x_2, \ldots$, x_n. Если мы имеем уравнение

$n-1$-го порядка по степени выше первой, то можно записать его в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=X_2,\quad \ldots,\quad \frac{dx_n}{dt}=X_n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — многочлены, целые относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ и z — функция от $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, связанная с этими переменным соотношением

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0,$$

левая часть которого есть полином.

Вводя новое переменное τ, мы можем написать:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=X_1\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{dx_2}{d\tau}=X_2\frac{\partial}{\partial z},\quad \ldots,\quad \frac{dx_n}{d\tau}=X_n\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\frac{dz}{d\tau}=-X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial F}{\partial x_2}-\ldots-X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Правые части этих новых уравнений — многочлены, целые относительно x_i и z; таким образом, наши уравнения приведены к форме (2); только порядок системы увеличился на единицу.

Если мы хотим для случая уравнений (2) пользоваться геометрическим изображением, аналогичным тому, которым мы пользовались до сих пор, то мы должны рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты точки в пространстве n измерений. Но это геометрическое изображение будет теперь, вообще говоря, лишь языком иногда более, иногда менее удобным, но уже ничего не будет давать для непосредственного, наглядного представления. Тем не менее, нам придётся иногда пользоваться этим языком.

Напротив, для случая уравнений второго порядка в форме (1) — как раз этот случай будет нами исследован более подробно — геометрическое изображение сохраняет все свои преимущества, и мы всё время будем им пользоваться.

В дальнейшем, мы будем иногда рассматривать траекторию движущейся точки (x, y, z), не всю целиком, а только те её части, которые расположены в некоторой определённой области пространства. Тогда уже не нужно будет предполагать, что X, Y, Z — целые многочлены, а достаточно только потребовать, чтобы они вели себя как целые многочлены внутри рассматриваемой области.

Нетрудно видеть, что в случае системы (1) через каждую точку пространства проходит одна и только одна траектория. Исключением являются лишь те точки, в которых три функции X, Y и Z одновременно обращаются в нуль, т. е. *особые точки* [2].

Три уравнения

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0$$

геометрически изображают три алгебраические поверхности. Может случиться, что эти три поверхности проходят через одну и ту же кривую. Все точки этой кривой будут тогда особыми точками, а сама эта кривая будет *особой линией*. Мы вернёмся ниже к этому важному случаю.

Рассмотрим сначала только изолированные особые точки. Здесь возможны два случая:

1) не все производные: $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial z}$; $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial z}$; $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ обращаются в особой точке в нуль — этот случай мы рассмотрим подробно;

2) все эти девять производных одновременно обращаются в нуль — этот случай приводится к предыдущему при помощи приёма, указанного Брио и Буке (*Журнал политехнической школы*, XXXVI тетрадь) [3].

Итак, предположим, что эти девять частных производных не обращаются в нуль одновременно, и составим уравнение относительно S

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}-S & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}-S & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z}-S \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Если X, Y, Z — многочлены самого общего вида данной степени, то это уравнение, вообще говоря, не будет иметь ни корней, равных нулю, ни кратных корней. Я ничего не буду говорить здесь о том частном случае, когда уравнение относительно S имеет корни, равные нулю, или кратные корни; я ограничусь только тем, что отошлю читателя к сказанному мною по поводу аналогичных случаев в первой части этой работы.

Оставляя в стороне этот исключительный случай, мы должны рассмотреть следующие пять гипотез:

Первая гипотеза. Три корня уравнения относительно S действительны и одинаковых знаков (мы всегда можем предполагать их положительными).

В этом случае общие интегралы уравнений (1) могут быть представлены (вблизи особой точки) в следующей форме:

$$\frac{H_1^{S_1}}{A_1}=\frac{H_2^{S_2}}{A_2}=\frac{H_3^{S_3}}{A_3}. \tag{4}$$

Здесь H_1, H_2 и H_3 — функции от x, y и z, голоморфные в окрестности особой точки и обращающиеся в нуль в этой особой точке; S_1, S_2, S_3 — корни уравнения (3); A_1, A_2, A_3 — постоянные интеграции. Эта теорема была доказана в моей диссертации (Paris, Gautier-Villars (1875), стр. 70) [4].

Нетрудно видеть, что все кривые семейства, представляемые уравнениями (4), проходят через особую точку. Таким образом в рассматриваемом случае все траектории, проходящие достаточно близко от особой точки, будут стремиться к этой точке.

Такая особая точка называется *узлом*.

Вторая гипотеза. Три корня уравнения относительно S действительны, но неодинаковых знаков. Предположим, например, что корни S_1 и S_2 положительны, а S_3 отрицателен.

В этом случае, вообще говоря, невозможно представить интегралы уравнений (1) в форме (4). Но, на основании теоремы Брио и Буке, доказанной в мемуаре, упомянутом выше, для уравнений (1) существуют три частных интеграла, которые имеют следующий вид:

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — голоморфные функции от одной и той же переменной u, обращающиеся в нуль, если особая точка выбрана за начало координат при $u=0$. У Брио и Буке эта теорема высказана в несколько иной форме; но переход от формулировки этих двух геометров к той, которая приведена выше, не представляет никакого труда.

В рассматриваемом нами случае эти три интеграла действительны; таким образом, нам уже заведомо известно, что три траектории, которые я назову T_1, T_2 и T_3, проходят через особую точку.

Для того чтобы продолжить дальше наше исследование, сделаем линейную замену переменных, или, другими словами, сделаем преобразование координат, выбирая за начало координат особую точку, а за оси координат — касательные к трём траекториям T_1, T_2 и T_3. После этого преобразования уравнения (1) сохранят ту же форму, и корни уравнения относительно S не изменятся. Только члены первой степени в многочленах X, Y и Z соответственно примут вид:

$$S_1x, \quad S_2y, \quad S_3z.$$

Я утверждаю теперь, что уравнение в частных производных

$$X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$$

имеет голоморфный интеграл, обращающийся в нуль при $x=0$ и $y=0$.

Действительно, всегда существует ряд, расположенный по возрастающим степеням x и y, который формально удовлетворяет этому уравнению. Для того чтобы найти коэффициенты этого ряда, положим

$$X = S_1x - X', \quad Y = S_2y - Y', \quad Z = S_3z + Z'$$

и посмотрим, существует ли ряд

$$z = \sum \alpha_{mn} x^m y^n,$$

удовлетворяющий рассматриваемому уравнению, которое мы запишем в виде:

$$S_1 x \frac{\partial z}{\partial x} + S_2 y \frac{\partial z}{\partial y} - S_3 z = X' \frac{\partial z}{\partial x} + Y' \frac{\partial z}{\partial y} + Z'. \tag{5}$$

Коэффициент α_{mn} при $x^m y^n$ в искомом ряде мы получим из уравнения

$$(m S_1 + n S_2 - S_3) \alpha_{mn} = \beta,$$

где β — совокупность членов, зависящих от коэффициентов многочленов X', Y', Z' и от коэффициентов α_{pq}, где p и q меньше m и n (один из индексов p или q может быть соответственно равен m или n; но не может быть одновременно: $p = m$, $q = n$).

Остаётся показать, что полученный таким образом ряд сходится. Это не представляло бы никаких затруднений, если бы S_3 так же, как S_1 и S_2, было бы положительно. Действительно, в этом случае нужно было бы только отослать читателя к теореме, доказанной в моей диссертации, о которой я уже говорил выше. Но в нашем случае S_3 отрицательно, и нам приходится пользоваться вспомогательным уравнением:

$$S_1 x \frac{\partial z}{\partial x} + S_2 y \frac{\partial z}{\partial y} - \Sigma_3 z = X'' \frac{\partial z}{\partial x} + Y'' \frac{\partial z}{\partial y} + Z''. \tag{5 bis}$$

В этом уравнении Σ_3 — положительная величина меньшая, чем S_1 и S_2; X'', Y'', Z'' — многочлены, которые мы получим, заменяя в X', Y' и Z' коэффициент при каждом члене его абсолютной величиной.

Мы будем иметь ряд

$$\sum \alpha'_{mn} x^m y^n,$$

формально удовлетворяющий уравнению (5 bis), и этот ряд будет сходиться, так как Σ_3 положительно.

Коэффициент α'_{mn} получается из уравнения

$$(mS_1+nS_2-\Sigma_3)\,\alpha'_{mn}=\beta',$$

где β' составлено из коэффициентов X'', Y'', Z'', и из α'_{pq} так же, как β составлено из коэффициентов X', Y' и Z' и из α_{pq}. Все α'_{mn} положительны. Действительно, если это верно для всех α'_{pq}, то β' будет положительно, так как все коэффициенты X'', Y'' и Z'' положительны. Кроме того,

$$mS_1+nS_2-\Sigma_3$$

тоже всегда положительно.

Я утверждаю теперь, что

$$|\alpha_{mn}|<\alpha'_{mn}.$$

В самом деле, если это верно для индексов, меньших m и меньших n, то

$$|\beta|<\beta'.$$

Кроме того, мы имеем

$$mS_1+nS_2-S_3>mS_1+nS_2-\Sigma_3,$$

так как Σ_3 положительно, а S_3 отрицательно. Следовательно, мы получаем

$$|\alpha_{mn}|<\alpha'_{mn}.$$

Это доказывает, что ряд

$$\sum\alpha_{mn}x^my^n$$

сходится.

Таким образом, уравнение (5) действительно имеет голоморфный интеграл.

Геометрически это означает, что через особую точку проходит поверхность U, на которой расположено бесконечное множество траекторий. На этой поверхности лежат траектории T_1 и T_2, но траектория T_3 не лежит на ней.

Если в уравнениях (1) мы заменим z рядом $\sum\alpha_{mn}x^my^n$, то эти уравнения примут вид:

$$\frac{dx}{dt}=X,\quad\frac{dy}{dt}=Y, \tag{6}$$

где X и Y — голоморфные функции от x и y, обращающиеся в нуль вместе с этими переменными. Члены первой степени в X и Y, соответственно, будут $S_1 x$ и $S_2 y$.

Таким образом, мы приходим к случаю уравнений первого порядка, когда мы имеем только две переменные, координаты изображающей точки на плоскости. Кривые, определяемые уравнениями (6), будут проекциями траекторий, расположенных на поверхности U. Легко убедиться, что для этих плоских кривых особая точка $x=0$, $y=0$ является узлом; отсюда вытекает следующее заключение: *все траектории, расположенные на поверхности U, пересекаются в особой точке.*

Кроме того, нетрудно [6] показать, что никакие другие траектории не проходят через особую точку; подойдя более или менее близко к этой точке, они затем снова удаляются от неё и выходят из её окрестности.

Итак, бесконечное множество траекторий, образующих поверхность, а также одна отдельная, изолированная траектория проходят через особую точку; все другие траектории остаются на конечном расстоянии от этой точки. Такая особая точка называется *седлом.*

Третья гипотеза. Уравнение (3) имеет один действительный корень и два комплексных сопряжённых корня, сумма которых имеет тот же знак, что и действительный корень.

Пусть

$$S_1 = \alpha + \beta i, \quad S_2 = \alpha - \beta i \text{ и } S_3$$

— это три корня. Общий интеграл уравнений (1) так же, как и в случае первой гипотезы, может быть записан в виде:

$$\frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Кроме того, мы можем положить

$$H_1 = K + iK', \quad H_2 = K - iK',$$

где K и K' — голоморфные и *действительные* функции от x, y и z.

Рассмотрим общее уравнение

$$H_3^2 + K^2 + K'^2 = \text{const}. \tag{7}$$

Это уравнение изображает бесконечное множество замкнутых поверхностей, вложенных друг в друга и содержащих внутри себя особую точку.

Нетрудно показать, что ни одна траектория не может пересечь ни одну из этих поверхностей более, чем в одной точке, если постоянная в правой части достаточно мала. Действительно, уравнения всякой траектории могут быть записаны в такой форме:

$$K + iK' = (C + iD) H_3^{\gamma+i\delta},$$

$$K - iK' = (C - iD) H_3^{\gamma-i\delta},$$

где C, D, γ и δ — четыре действительные постоянные (заметим, что для одной и той же траектории H_3 должно всё время сохранять один и тот же знак). Таким образом, поверхности (7) — это поверхности *без контакта*, аналогичные циклам без контакта, рассмотренным в предыдущих частях.

Всякая траектория, раз попав внутрь одной из поверхностей (7), будет итти, всё время приближаясь к особой точке; но она может приближаться к ней только асимптотически (как в случае *фокуса* в первой части этой работы); действительно, нетрудно видеть, что она не может пройти через особую точку с определённой касательной.

Однако есть одно исключение. Мы видели, на основании теоремы Брио и Буке, что существуют три траектории T_1, T_2 и T_3, уравнения которых имеют вид:

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — голоморфные функции одной и той же переменной u. В нашем случае две из этих траекторий — мнимые, но третья действительна, и её уравнения имеют вид:

$$K = K' = 0.$$

Эта траектория проходит через особую точку с определённой касательной.

Кроме того, бесконечное множество траекторий расположено на поверхности:

$$H_3 = 0.$$

Эти траектории — спирали, аналогичные тем, с которыми мы встречались в первой части. Все другие траектории тоже имеют вид спиралей и лежат на поверхностях, общее уравнение которых

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3^{\frac{S_1+S_2}{S_3}}} = \text{const}.$$

В зависимости от величины S_3 эти поверхности будут или обычными поверхностями с единственной касательной плоскостью, или же они будут похожи на ту поверхность, которая получается при вращении параболы вокруг касательной в её вершине.

Во втором случае траектории можно было бы скорее сравнить со штопором, а не со спиралью.

Особая точка этого типа может быть названа *фокусом*.

Четвёртая гипотеза. Уравнение (3) имеет один действительный корень и два комплексных сопряжённых, сумма которых имеет знак, противоположный знаку действительного корня.

В этом случае интегралы уравнений (1) не могут быть представлены в форме (4). Три траектории T_1, T_2 и T_3, которые были определены выше, всё ещё существуют, но только одна из них T_1 — действительна.

Мы всегда можем сделать такое преобразование координат, чтобы начало было перенесено в особую точку, а члены первой степени X, Y и Z были бы приведены к виду:

$$\alpha x + \beta y, \quad \gamma x + \delta y \text{ и } S_3 z.$$

Тогда уравнение

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z$$

будет иметь голоморфный относительно x и y интеграл обращающийся в нуль вместе с этими переменными (это можно показать совершенно так же, как во втором случае).

Следовательно, существует поверхность, проходящая через начало координат, на которой расположено бесконечное множество траекторий. Пусть

$$z=\varphi(x, y)$$

— уравнение этой поверхности. Если мы заменим z в X и Y через $\varphi(x, y)$, то уравнения (1) приведутся к уравнению первого порядка и будут изображать плоские кривые, являющиеся проекциями на плоскость (x, y) траекторий, расположенных на поверхности $z=\varphi(x, y)$. Нетрудно видеть, что для этих плоских кривых начало координат является фокусом.

Таким образом, в рассматриваемом случае существует поверхность, проходящая через начало координат, и на этой поверхности расположено бесконечное множество траекторий, которые, как спирали, закручиваются вокруг особой точки, асимптотически приближаясь к ней. Кроме того, существует траектория T_1, проходящая через особую точку. Все другие траектории остаются на конечном расстоянии от особой точки.

Такая особая точка может быть названа *седло-фокус*.

П я т а я г и п о т е з а. Уравнение (3) имеет один действительный корень и два комплексных сопряжённых, сумма которых равна нулю.

Этот пятый случай можно считать предельным и исключительным случаем потому, что он, вообще говоря, не имеет места, когда X, Y и Z — многочлены самого общего вида данной степени.

В этом, пятом, случае интегралы уравнений (1), вообще говоря, не могут быть представлены в форме (4). Но если бы всё-таки случилось так, что интегралы могли бы быть представлены в этой форме, если бы мы положили

$$H_1=K+iK', \quad H_2=K-iK',$$

$$S_1=i\alpha, \qquad S_2=-i\alpha,$$

то нетрудно было бы видеть, что все траектории лежат на поверхностях

$$K^2 + K'^2 = \text{const}.$$

Мы имели бы тогда одну действительную траекторию T_1, проходящую через начало координат, уравнение которой было бы

$$K = K' = 0.$$

Мы имели бы также проходящую через особую точку поверхность $H_3 = 0$, на которой расположено бесконечное множество траекторий. Эти траектории — замкнутые кривые, охватывающие особую точку. Поверхности $K^2 + K'^2 = \text{const}$. являются как бы своего рода футлярами, внутрь которых вложена траектория T_1, так что их можно было бы сравнить с цилиндрами, имевшими общую ось, которые были согнуты и деформированы одновременно с этой осью; деформированная ось и есть траектория. Траектории, расположенные на этих поверхностях, похожи на винтовые линии, шаг которых всё время уменьшается, так что они не простираются в бесконечность, а асимптотически приближаются к поверхности $H_3 = 0$.

Такая особая точка называется *центром*.

Если же, напротив, интегралы не могут быть представлены в форме (4), то особая точка будет иметь или такой же характер, как фокус, или такой же характер, как седло-фокус.

Я не буду здесь останавливаться дольше на этом исключительном случае, рассчитывая вернуться к нему позже, если мне встретится в этом необходимость для каких-нибудь приложений. Сейчас я ограничусь только тем, что отошлю читателя к главе XI, где подробно были рассмотрены аналогичные особые точки уравнений первого порядка.

Таким образом, если оставить в стороне тот предельный случай, который мы только что рассматривали, то уравнения второго порядка могут иметь четыре типа особых точек: сёдла, узлы, фокусы, сёдла-фокусы.

Легко распространить эту теорию на уравнения порядка n. Заметим только, что при возрастании n число типов особых точек растёт очень быстро. Действительно, мы видели, что для $n=1$ число типов равно 3; для $n=2$ число типов равно 4; нетрудно было бы видеть, что для $n=3$ число типов равно 8, а для $n=4$ равно 10.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда все три поверхности $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ пересекаются вдоль некоторой кривой; эта кривая является тогда особой линией.

Сделаем замену переменных

$$x=\varphi_1(x', y', z'),\quad y=\varphi_2(x', y', z'),\quad z=\varphi_3(x', y', z'),$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — функции, голоморфные внутри рассматриваемой нами области.

Мы всегда можем выбрать эти голоморфные функции таким образом, чтобы уравнения особой линии в новых переменных были бы:

$$x'=y'=0.$$

Действительно, пусть

$$f(x, y, z)=0,\quad f_1(x, y, z)=0$$

— уравнения особой линии и пусть

$$x=\alpha,\quad y=\beta,\quad z=\gamma$$

— координаты какой-нибудь точки M особой линии; пусть $f_2(x,y,z)$ — какая-нибудь голоморфная функция, обращающаяся в нуль в точке M. Положим:

$$\left\{\begin{aligned} x'&=f(x, y, z),\\ y'&=f_1(x, y, z),\\ z'&=f_2(x, y, z). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Мы можем выбрать функцию f_2 таким образом, чтобы функциональный детерминант функций f, f_1 и f_2 не обращался бы нуль в точке M и, следовательно, чтобы уравнения (8) могли бы быть разрешены относительно x, y и z. Это возможно всегда, за исключением того случая, когда особая линия в точке M имеет двойную точку или ещё какую-нибудь особенность; мы предположим, что этого нет.

Отсюда следует, что мы всегда можем считать, что особая линия есть ось z и что такая точка особой линии, которую мы рассматриваем, есть начало координат.

Тогда X, Y и Z должны обращаться в нуль при x и y, равных нулю одновременно.

Теперь сделаем ещё одну замену переменных, которая на этот раз будет линейной и будет, следовательно, простым преобразованием координат.

В силу предыдущего ясно, что члены первой степени в X, Y и Z должны иметь вид

$$\alpha x+\alpha' y, \quad \beta x+\beta' y, \quad \gamma x+\gamma' y.$$

Я оставлю в качестве оси особую линию, но изменю плоскость xy и выберу новую плоскость xy так, чтобы γ и γ' обратились бы в нуль.

Составим теперь уравнение, аналогичное уравнению (3), но уже только второй степени

$$\begin{vmatrix} \alpha - S & \alpha' \\ \beta & \beta' - S \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

В том случае, когда это уравнение имеет два действительных корня одинаковых знаков или два комплексных сопряжённых корня, сумма которых не равна нулю, уравнение в частных производных

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z$$

имеет голоморфный интеграл, обращающийся в нуль при $x=y=0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить то рассуждение, которое мы проводили в случае второй гипотезы.

Существует, следовательно, поверхность, проходящая через особую точку, на которой расположено бесконечное множество траекторий. При изучении траекторий, лежащих на этой поверхности, мы приходим к случаю уравнений первого порядка; для этого достаточно в уравнениях (1) заменить z его выражением, найденным из уравнения поверхности.

Нетрудно показать, что для траекторий, лежащих на этой поверхности, особая точка является *узлом*, если корни уравнения (9) действительны и одинаковых знаков, и *фокусом*, если корни комплексные и сопряжённые. В узле так же, как и во всех достаточно близких к нему точках особой линии, пересекается бесконечное множество траекторий. Вокруг фокуса, так же, как и вокруг всех достаточно близких к нему точек особой линии, закручивается бесконечное множество траекторий, асимптотически приближающихся к нему.

Остаётся рассмотреть случай, когда уравнение (9) имеет действительные корни разных знаков. В этом случае, на основании теоремы Брио и Буке, о которой говорилось выше, можно показать, что всё ещё существуют две траектории, проходящие через особую точку с определённой касательной. Это те траектории, которые мы обозначали T_1 и T_2; что же касается траектории T_3, то она вырождается в саму особую линию. Все другие траектории остаются на конечном расстоянии от особой точки. Такая особая точка называется *седлом*.

Итак, через седло и через все достаточно близкие к нему точки особой линии будут проходить две траектории; все другие траектории остаются на конечном расстоянии от особой линии.

Таким образом, на особой линии будут: дуги, все точки которых — узлы, дуги, все точки которых — фокусы, и, наконец, дуги, все точки которых — сёдла.

Точки, которые отделяют эти дуги друг от друга, а также кратные точки особой линии, будут иметь более сложную структуру, о которой я здесь говорить не буду.

Я закончу эту главу, приведя очень простые примеры на каждый из случаев, разобранных выше.

Изолированные особые точки[6].

1) *Узел*. Пусть

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=dt.$$

Траектории — прямые, проходящие через начало.

2) *Седло.* Пусть

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-z}=dt.$$

На поверхности $z=0$, проходящей, очевидно, через начало, лежит бесконечное множество траекторий, которые являются прямыми, проходящими через начало.

Кроме того, сама ось z тоже является траекторией, проходящей через начало.

Все другие траектории, уравнения которых

$$xz=\text{const.},\quad yz=\text{const.}$$

— гиперболы, остающиеся на конечном расстоянии от начала.

3) *Фокус*

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{-x+y}=\frac{dz}{z}=dt.$$

Траекторией T_1 является здесь ось z, а поверхностью $H_3=0$ плоскость xy. Все другие траектории расположены на конусах вращения; их проекции на плоскость xy — логарифмические спирали; таким образом, все эти траектории асимптотически приближаются к началу координат.

Заметим, что поверхности, общее уравнение которых мы писали в виде

$$\frac{K^2+K'^2}{H_3^{\frac{S_1+S_2}{S_2}}}=\text{const.},$$

здесь являются круглыми конусами. Они не имеют, следовательно, ни одной из тех двух форм, о которых я говорил выше как о характерных для этих поверхностей; но это исключительный случай.

Если бы мы рассматривали дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{-x+y}=\frac{dz}{\alpha z},$$

то при $\alpha < 1$ эти поверхности имели бы единственную касательную плоскость, а при $\alpha > 1$ имели бы форму поверхности, которая получается от вращения параболы вокруг касательной в её вершине. Следовательно, исключительным случаем является случай $\alpha = 1$.

4) *Седло-фокус.* Пусть

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Одна траектория — именно ось z — проходит через начало. Бесконечное множество траекторий лежит в плоскости xy; эти траектории — логарифмические спирали, асимптотически приближающиеся к началу. Остальные траектории лежат на поверхности $(x^2+y^2)z^2 = \text{const.}$ и остаются, следовательно, на конечном расстоянии от начала.

5) *Центр.* Пусть

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Общее уравнение траекторий

$$x^2+y^2=r^2, \quad \operatorname{arctang}\frac{y}{x} = \ln z + A,$$

где A и r^2 — две постоянные интегрирования.

Траектории лежат на круглых цилиндрах. Единственная среди них — именно ось z — проходит через начало. Бесконечное множество траекторий лежит в плоскости xy; эти траектории — окружности с центром в начале.

Все остальные траектории, делая на цилиндрах бесконечное множество витков, асимптотически приближаются к плоскости xy.

Точки особой линии.

6) *Узлы.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Траектории — прямые, параллельные плоскости xy, пересекающие ось z; ось z и есть особая линия.

7) *Сёдла.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Прямые $z = \text{const.}$, $x = 0$ и прямые $z = \text{const.}$, $y = 0$ — это траектории, пересекающие ось z, т. е. особую линию. Все другие траектории лежат на гиперболических цилиндрах $xy = \text{const.}$ и остаются на конечном расстоянии от оси z.

8) *Фокусы.*

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{0}.$$

Траектории — логарифмические спирали, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости xy; они закручиваются вокруг особой линии, асимптотически приближаясь к ней.

ГЛАВА XVII

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДАМИ

Мы видели, что всякое дифференциальное уравнение, [при известных условиях], может быть представлено в форме

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt}=X_1, \quad \frac{dx_2}{t}=X_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}=X_n,$$

где все X_i — целые многочлены. Если рассматривать параметр t как время, то эти уравнения будут определять движение точки в пространстве n измерений.

При неограниченном возрастании времени движущаяся точка может:

1) или оставаться всё время в конечной части пространства и в то же время не приближаться неограниченно ни к одной особой точке;

2) или удаляться в бесконечность;

3) или по истечении конечного промежутка времени пройти через особую точку [7];

4) или неограниченно приближаться к особой точке типа фокус;

5) или же движущаяся точка через конечные промежутки времени, бесконечное множество раз возвращается в окрестность особой точки так, что её расстояние до особой точки становится меньше любой наперёд заданной величины, оставаясь конечным в промежутках времени между двумя последовательными возвращениями в эту окрестность.

Другими словами, расстояние от движущейся точки до особой точки может или оставаться бо́льшим конечной [положительной] величины (1-й и 2-й случаи), или стремиться к нулю (3-й и 4-й случаи), или же, наконец, это расстояние может колебаться, становясь меньше любой наперёд заданной величины, но не оставаясь всё время меньше этой величины и, следовательно, не стремясь к нулю (5-й случай).

Таким образом, существует пять типов траекторий; нетрудно построить примеры всех этих пяти типов.

Представляло бы большой интерес нахождение выражений для $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде рядов, разложенных по разным функциям времени и сходящихся для всех *действительных* значений t, от $-\infty$ до $+\infty$. Эта задача всегда может быть решена, и я дам здесь одно из её решений. Но по самой природе этой задачи она может быть решена бесконечным множеством способов. Ничто не доказывает, что решение, данное мною, — самое удачное; как раз наоборот, весьма мало вероятно, что одно и то же решение этой задачи одинаково целесообразно во всех частных случаях. Поэтому для всякого уравнения, которое нужно будет интегрировать, следует искать решение, аналогичное тому, которое дано мною, но вообще не совпадающее с ним, стремясь всегда выбрать это решение, учитывая специальные особенности данной задачи.

Введём новое переменное S, полагая

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{ds}=Y_1,\quad \frac{dx_2}{ds}=Y_2,\quad \ldots,\quad \frac{dx_n}{ds}=Y_n,$$

так что

$$\frac{ds}{dt}=\frac{X_1}{Y_1}=\frac{X_2}{Y_2}=\ldots=\frac{X_n}{Y_n}.$$

При этом Y_i — функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующим условиям: при всех действительных значениях переменных x, а также при всех значениях x, при которых их мнимые части заключены между $-\beta$ и $+\beta$, функции Y голоморфны и их модуль меньше M.

Таким образом, если одновременно

$$
\begin{aligned}
&|\operatorname{Im} x_1| < \beta\ ^*), \\
&|\operatorname{Im} x_2| < \beta, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&|\operatorname{Im} x_n| < \beta,
\end{aligned}
$$

то мы будем иметь также одновременно:

$$|Y_1| < M, \quad |Y_2| < M, \quad \ldots, \quad |Y_n| < M.$$

Пусть теперь

$$x_1^{(0)}, \quad x_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(0)}$$

— система действительных значений переменных

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

При всех значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < \beta, \quad |x_2 - x_2^{(0)}| < \beta, \quad \ldots, \quad |x_n - x_n^{(0)}| < \beta,$$

функции Y голоморфны и модули их меньше M.

Следовательно, если мы разложим функции Y в ряды, расположенные по степеням

$$x_1 - x_1^{(0)}, \quad x_2 - x_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_n - x_n^{(0)},$$

то коэффициенты этих рядов будут по абсолютной величине соответственно меньше коэффициентов разложения функции

$$\frac{M\beta}{\beta - x_1 - x_2 - \ldots - x_n + x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + \ldots + x_n^{(0)}} = Z.$$

Мы запишем, пользуясь обозначениями главы XI,

$$Y \ll Z,$$

предполагая при этом, что функции Y и Z разложены по степеням $x_i - x_i^{(0)}$.

---

*) $\operatorname{Im} x$ обозначает — мнимая часть числа x.

Пусть s_0 — действительное значение s, соответствующее значениям $x_i^{(0)}$ переменных x_i. Отправляясь от уравнений (2), мы можем разложить переменные

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad x_2 = \varphi_2(s), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(s)$$

по степеням разности $s - s_0$.

Предположим теперь, что мы имеем другую движущуюся точку, координаты x которой удовлетворяют уравнениям

$$\text{(2 bis)} \qquad \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \ldots = \frac{dx_n}{ds} = Z.$$

Мы можем написать разложения для координат этой новой движущейся точки

$$x_1 = \psi_1(s), \quad x_2 = \psi_2(s), \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n(s)$$

по степеням $s - s_0$. Все коэффициенты рядов ψ положительны и по абсолютной величине больше соответственных коэффициентов рядов φ.

Найдём функции ψ, т. е. проинтегрируем уравнения (2 bis). Прежде всего мы получим

$$x_1 - x_1^{(0)} = x_2 - x_2^{(0)} = \ldots = x_n - x_n^{(0)}.$$

Обозначим общую величину $x_i - x_i^{(0)}$ через u. Тогда уравнения (2 bis) сведутся к уравнению

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{1 - \frac{nu}{\beta}},$$

отсюда

$$u - \frac{nu^2}{2\beta} = M(s - s_0),$$

и, наконец,

$$nu = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta nM(s - s_0)}.$$

Подкоренное выражение обращается в нуль, когда

$$s - s_0 = \frac{\beta}{2Mn}.$$

Следовательно, ряды для функций ψ будут сходиться при всех значениях s, удовлетворяющих неравенству

$$|s - s_0| < \frac{\beta}{2Mn}.$$

То же справедливо и для разложений функций φ.

Таким образом, функции $\varphi(s)$ голоморфны внутри круга радиуса $\frac{\beta}{2Mn}$ с центром в любой точке s_0 действительной оси.

Если мы проведём с обеих сторон действительной оси, на расстоянии $\frac{\beta}{2Mn}$ от этой оси, две параллельные прямые, уравнения которых

$$\operatorname{Im} s = \pm \frac{\beta}{2Mn},$$

то эти прямые будут ограничивать полосу B плоскости, внутри которой функции φ голоморфны.

Будем искать конформное отображение этой полосы на круг. Пусть

$$v = \frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}, \quad \text{причём} \quad s = s_1 + is_2.$$

Посмотрим, при каком условии

$$\operatorname{mod} v < 1.$$

Мы имеем

$$v = \frac{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) - 1}{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) + 1},$$

$$\operatorname{mod}^2 v = \frac{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 - 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 + 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}$$

или

$$\operatorname{mod}^2 v = \frac{e^{2\alpha s_1} + 1 - 2e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}{e^{2\alpha s_1} + 1 + 2e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}.$$

Для того чтобы эта величина была меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы $\cos \alpha s_2$ был положителен, т. е. чтобы

$$|\alpha s_2| < \frac{\pi}{2}.$$

Другими словами, точка s должна находиться внутри полосы, ограниченной двумя прямыми

$$s_2 = \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Если мы возьмём

$$\alpha=\frac{nM\pi}{\beta},$$

то эта полоса будет как раз полосой B и зависимость между v и s будет давать конформное отображение полосы B на круг радиуса 1 с центром в начале.

Если мы будем рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже не как функции от s, а как функции от v, то они будут голоморфны внутри этого круга; следовательно, эти переменные могут быть разложены в ряды, расположенные по возрастающим степеням v, и сходящиеся при всех значениях, модуль которых меньше 1. Коэффициенты этих рядов могут быть вычислены последовательно.

Действительно, существует одна и только одна система рядов, расположенных по возрастающим степеням величины

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$$

и формально удовлетворяющих уравнениям (2). Эти ряды сходятся при всех действительных значениях s, так как при действительных значениях s модуль v меньше единицы.

Я покажу теперь, что всегда можно выбрать переменное s так, чтобы оно удовлетворяло всем требуемым условиям. Для этого достаточно положить

$$\frac{ds}{dt}=\frac{X_i}{Y_i}=1+X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2.$$

Во-первых, я утверждаю, что функция

$$Y_i=\frac{X_i}{1+\Sigma X_i^2}$$

будет голоморфна при всех действительных значениях переменных x. В самом деле, эта функция может перестать быть голоморфной только в том случае, когда

$$1+\sum X_i^2=0,$$

а это невозможно при действительных значениях переменных x.

Во вторых, Y_i всегда будет меньше $\frac{1}{2}$ по абсолютной величине, когда X_i — действитель ы.

Пусть теперь $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ — какая-нибудь система действительных значений переменных x, и пусть Δ — область, определённая неравенствами

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < \rho, \quad |x_2 - x_2^{(0)}| < \rho, \quad \ldots, \quad |x_n - x_n^{(0)}| < \rho.$$

Величина ρ может быть названа *радиусом*, а система значений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ — *центром области* Δ.

Всегда можно взять радиус Δ столь малым, чтобы внутри этой области функции Y были бы голоморфны и по абсолютной величине меньше 1; мы всегда будем выбирать в качестве ρ *наибольшую* из величин, удовлетворяющих этим условиям.

Я утверждаю теперь, что каков бы то ни был центр области Δ, число ρ всегда будет больше некоторой постоянной величины ρ_0. Действительно, когда центр области Δ непрерывно смещается, ρ тоже изменяется непрерывно; при этом ρ не может обратиться в нуль ни для какой конечной системы значений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, так как в противном случае, функции Y не были бы голоморфны в этой точке.

Остаётся показать, что ρ не стремится к нулю, когда центр области удаляется в бесконечность. Предположим, например, что $x_1^{(0)}$ — неограниченно возрастает, в то время как другие величины $x_i^{(0)}$ могут либо оставаться конечными, либо тоже неограниченно возрастать. Сделаем замену переменных, полагая:

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_1};$$

тогда

$$x_1^{(0)} = \frac{1}{y_1^{(0)}}, \quad x_2^{(0)} = \frac{y_2^{(0)}}{y_1^{(0)}}, \quad \ldots, \quad x_n^{(0)} = \frac{y_n^{(0)}}{y_1^{(0)}}.$$

Мы можем предположить, что в то время как $x_1^{(0)}$ неограниченно возрастает, величины $y_2^{(0)}, \; y_3^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ стремятся к конечным пределам; действительно, в противном случае мы могли бы достигнуть этого путём линейной замены переменных.

Мы всегда можем предположить: 1) что все многочлены $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одинаковой степени m; 2) что члены m-ой степени этих n многочленов могут обратиться в нуль одновременно только в том случае, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращаются в нуль. Действительно, в противном случае нам достаточно было бы сделать линейную замену переменных (я подразумеваю здесь дробно-линейную подстановку).

Сделав все эти предположения, положим

$$X_i = \frac{1}{y_1{}^m} X_i';$$

мы получим

$$Y_i = \frac{y_1{}^m X_i'}{y_1^{2m} + X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2}.$$

Эта функция, как функция переменных y, может перестать быть голоморфной (при действительных значениях переменных y), только в том случае, когда одновременно

$$y_1 = X_1' = X_2' = \ldots = X_n' = 0.$$

А это невозможно в силу сделанных нами предположений.

Таким образом, если $y_1^{(0)} = 0$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ — система действительных значений переменных y, то всегда можно найти такую величину ρ', чтобы при всех значениях переменных y, удовлетворяющих неравенствам

$$|y_1| < \rho', \quad |y_2 - y_2^{(0)}| < \rho', \quad \ldots, \quad |y_n - y_n^{(0)}| < \rho',$$

функции Y были бы голоморфны и по модулю меньше 1.

Этого достаточно для того, чтобы показать, что ρ не стремится к нулю.

Отсюда следует, что ρ всегда больше некоторой величины ρ_0 и, следовательно, при всех значениях x, модуль мнимой части которых меньше ρ_0, функции Y будут голоморфны и по модулю меньше 1.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, определяя s так, как мы это делали выше, мы можем разложить переменные x по степеням

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

и эти разложения будут годиться для всех действительных значений s или t.

Мы видели, однако, что некоторые затруднения возникают в том случае, когда члены наивысшей степени в многочленах X могут одновременно обращаться в нуль; как мы уже говорили, в этом случае достаточно сделать замену переменных. Однако проще поступать следующим образом: мы всегда можем найти такой многочлен Z степени m, чтобы члены m-ой степени всех $n+1$ многочленов $X_1, \ldots, X_n$ и Z могли бы одновременно обращаться в нуль только в том случае, когда все переменные x одновременно обращаются в нуль. Мы можем тогда положить

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 + Z^2}$$

и можно показать так же, как и раньше, что при всех значениях x, модуль мнимой части которых меньше некоторой заданной величины ρ_0, функции Y голоморфны и по модулю меньше 1.

Найденные нами ряды, расположенные по степеням

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1},$$

будут в совокупности изображать всю траекторию. При этом нужно заметить, что если эта траектория проходит через особую точку, то мы должны рассматривать её как кончающуюся в этой особой точке, которая будет, таким образом, точкой остановки траектории. В самом деле, движущаяся точка (по самой форме уравнений) может достигнуть особой точки только при бесконечно больших значениях s и t.

Среди уравнений, к которым можно попытаться приложить этот метод, можно назвать уравнения задачи трёх тел, к которым этот метод действительно приложим. В этом случае разложения по возрастающим степеням

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$$

будут годиться для всех значений времени.

Исключение возможно только тогда, когда начальные условия взяты так, что два из рассматриваемых трёх тел должны столкнуться по истечении конечного промежутка времени; действительно, в момент столкновения s делается бесконечно большим [8]. Все формулы будут, следовательно, справедливы только до момента столкновения. Но, с другой стороны, очевидно, что для значений времени, следующих за моментом столкновения, проблема становится иллюзорной.

Пусть теперь t есть время (речь идёт здесь о подлинном времени, а не о том, которое я несколько произвольно ввёл в уравнения (1)).

Если бы мы были заранее уверены, что расстояние между любыми двумя из рассматриваемых трёх тел всё время остаётся бо́льшим некоторой определённой величины (при этом это расстояние может неограниченно увеличиваться), то мы могли бы утверждать, что координаты этих трёх тел могут быть разложены в ряды по степеням

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1},$$

сходящиеся при всех значениях времени.

Я не думаю, однако, что применение этого метода к небесной механике может принести много пользы. Я хотел, я это повторяю, привести только некоторый пример, а не давать метод, который нужно применять во всех случаях. Переменное s можно выбрать бесчисленным множеством способов; выбор, сделанный мной, был совершенно произволен и ничто не мешает умножить до бесконечности число методов, аналогичных только что изложенному.

ГЛАВА XVIII
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Эта глава вся целиком является приложением одной теоремы Кронекера, изложенной в двух его мемуарах, озаглавленных: *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln*, которые напечатаны в *Monatsberichte* Академии Берлина (март 1869, август 1869) [9].

Пусть

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

— некоторая поверхность, которую я буду предполагать замкнутой.

Пусть dw — элемент этой поверхности. Положим

$$S=+\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\quad \Sigma=+\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

$$R=\frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ X & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ Y & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ Z & \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Интеграл

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{R\,dw}{S^3},$$

распространённый на всю рассматриваемую поверхность, или на какую-нибудь замкнутую полость этой поверхности, называется *индексом* этой поверхности или этой замкнутой полости.

Пусть, например,

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

В этом случае наша поверхность есть сфера, которая содержит внутри себя начало координат, являющееся узлом.

Мы имеем

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a, \quad \Sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a,$$

$$R = \frac{1}{2a} \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = -a.$$

Тогда индекс равен

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{-a\,dw}{a^3} = \frac{1}{4\pi a^2} \int dw,$$

но $\int dw$ есть площадь поверхности нашей сферы и, значит равен $4\pi a^2$. Следовательно, индекс равен 1.

Если $X = x$, $Y = y$, $Z = -z$, то начало есть седло и индекс равен -1.

Если $X = x$, $Y = -y$, $Z = -z$, то начало опять седло, но индекс равен $+1$.

Если $X = -x$, $Y = -y$, $Z = -z$, то начало—узел и индекс равен -1.

Изложим теперь общую теорему, которую нетрудно вывести из теоремы Кронекера.

Мы будем различать два типа особых точек: положительные особые точки, для которых детерминант

$$
(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}
$$

положителен, и отрицательные особые точки, для которых этот детерминант отрицателен.

Нетрудно видеть, что существуют положительные узлы, фокусы, сёдла и сёдла-фокусы, и, с другой стороны, — отрицательные узлы, фокусы и сёдла и сёдла-фокусы.

Здесь мы имеем положение, как раз обратное тому, которое наблюдалось в случае уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Действительно, в этом случае все узлы и фокусы были положительны, а все сёдла — отрицательны.

В силу теоремы Кронекера, индекс замкнутой поверхности равен разности между числом положительных особых точек и числом отрицательных особых точек, расположенных внутри этой поверхности.

Предположим теперь, что рассматриваемая нами поверхность есть *поверхность без контакта*, т. е. что ни в одной действительной точке этой поверхности не имеет места равенство

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Я буду различать два типа поверхностей без контакта: поверхности положительного типа, для которых

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} > 0,$$

и поверхности отрицательного типа, для которых

$$\frac{dF}{dt}=X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}<0.$$

Чтобы иметь возможность отличать эти два типа, мы должны условиться выбирать функцию F таким образом, чтобы вне рассматриваемой нами замкнутой поверхности значения функции F были бы больше, чем внутри неё.

Я покажу теперь, что индекс поверхности без контакта зависит только от её типа и от её рода (рода с точки зрения *Analysis Situs*, ср. мемуар III, гл. XII).

Я покажу, что индекс поверхности положительного типа не меняется от замены X, Y, Z на $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, а индекс поверхности отрицательного типа не меняется от замены X, Y, Z на $-\frac{\partial F}{\partial x}$, $-\frac{\partial F}{\partial y}$, $-\frac{\partial F}{\partial z}$.

Действительно, будем изображать скорость движущейся точки вектором, проекции которого на три оси координат равны соответственно X, Y, Z. Через каждую точку нашей поверхности будет, следовательно, проходить один такой вектор; все эти векторы будут направлены во внешнюю область поверхности, если поверхность положительна, и внутрь поверхности, если она отрицательна.

Будем теперь непрерывно менять X, Y, Z и F так, чтобы поверхность деформировалась, а векторы изменялись. Индекс не будет меняться, если только ни в какой момент деформации скорость не обращается в нуль ни в одной из точек поверхности. Как раз это и имеет место, если поверхность всё время остаётся поверхностью без контакта и сохраняет свой род и свой тип [10].

Таким образом, индекс поверхности без контакта зависит только [11] от её рода и типа, а потому, в частности, можно заменить X, Y, Z через $\pm\frac{\partial F}{\partial x}$, $\pm\frac{\partial F}{\partial y}$, $\pm\frac{\partial F}{\partial z}$, выбирая знак $+$ или $-$, смотря по тому, положительна или отрицательна данная поверхность.

Рассмотрим, в частности, сферу без контакта в примере, разобранном выше:

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z; \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Мы видели, что индекс такой сферы равен $+1$, если сфера положительна; но та же сфера будет иметь индекс, равный -1, если она отрицательна, как нетрудно видеть, полагая

$$X = -x, \quad Y = -y, \quad Z = -z; \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Таким образом, индекс поверхности без контакта рода 0 будет равен ± 1, в зависимости от того, положительна она или отрицательна. В случае уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y$$

индекс цикла без контакта всегда был равен $+1$, независимо от того, был ли этот цикл положителен или отрицателен.

Отсюда вытекают такие следствия:

Внутри поверхности без контакта рода 0 число положительных особых точек на единицу больше числа отрицательных, если поверхность положительна и число положительных особых точек на единицу меньше числа отрицательных, если поверхность отрицательна.

Внутри поверхности без контакта рода 0 всегда находится по крайней мере одна особая точка.

Совершенно аналогичные рассмотрения привели нас, в случае уравнений первого порядка, к соотношению между числом сёдел, фокусов и узлов. Здесь мы не можем ожидать ничего подобного. Действительно, в случае уравнений первого порядка, мы имеем соотношения между числом положительных особых точек (именно — узлов и фокусов) и числом отрицательных особых точек (именно — сёдел). Но в рассматриваемом нами теперь случае узел, седло, фокус или седло-фокус могут быть как положительными, так и отрицательными. Это и мешает обобщать соотношение, о котором я только что говорил.

Пусть теперь мы имеем положительную поверхность без контакта рода 0 и другую, отрицательную поверхность без контакта рода 0, лежащую внутри первой поверхности. Пусть E — часть пространства, заключённая между этими двумя поверхностями. Разность индексов *) равна 2. Следовательно, число положительных особых точек, находящихся в пространстве E, на две единицы больше числа отрицательных особых точек (число положительных особых точек было бы на две единицы меньше числа отрицательных, если бы положительная поверхность лежала внутри отрицательной).

Итак, между двумя поверхностями без контакта рода 0 и различных типов всегда находится по меньшей мере две особые точки.

Найдём теперь индекс поверхности без контакта рода 1. Пусть

$$F=(x^2+y^2+z^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=c^4,$$

где c — произвольный параметр, уравнение семейства поверхностей (эти поверхности получаются от вращения семейства овалов Кассини).

Поверхности $F=c^4$ будут: рода 0, если $c>a$, и рода 1, если $c<a$. При $c=a$ поверхность $F=a^4$ имеет коническую точку.

Дифференциальные уравнения траекторий, ортогональных к этим поверхностям, будут

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial F}{\partial z}:$$

У этих траекторий есть только одна [12] особая точка, именно — начало координат, и эта особая точка положительна, в чём нетрудно убедиться. Кроме того, для этих траекторий поверхности $F=c^4$ будут положительными поверхностями без контакта.

Пусть мы имеем две поверхности

$$F=b^4, \quad F=d^4 \quad (b^4<a^4<d^4).$$

*) Этих двух поверхностей.

Первая из этих поверхностей будет рода 1, а вторая рода 0; индекс второй равен $+1$ [13]; пусть J — индекс первой поверхности. Разность между индексами должна равняться разности между числом положительных и отрицательных особых точек, заключённых между этими двумя поверхностями. Но между ними находится только одна положительная, особая точка и нет отрицательных. Мы будем, следовательно, иметь

$$1 - J = 1, \quad \text{откуда} \quad J = 0.$$

Таким образом индекс положительной поверхности без контакта рода 1 равен нулю; то же самое справедливо и для отрицательной поверхности без контакта рода 1.

Таким же рассуждением можно было бы показать, что индекс поверхности без контакта рода p равен $-(p-1)$, если она положительна и $+(p-1)$, если она отрицательна.

Отсюда непосредственно следует, что внутри всякой поверхности без контакта всегда есть особые точки, если только эта поверхность не первого рода; в последнем же случае ничего сказать нельзя.

Пусть даны две поверхности без контакта, лежащие одна вне другой, и пусть E — часть пространства, заключённая между этими двумя поверхностями.

Если эти поверхности обе положительны, или обе отрицательны, то в пространстве E всегда будут находиться особые точки, за исключением того случая, когда поверхности одинакового рода.

Если одна из двух поверхностей положительна, а другая отрицательна, то в пространстве E всегда будут находиться особые точки, за исключением того случая, когда одна из этих поверхностей рода 0, а другая — рода 2, или когда обе поверхности рода 1.

Нетрудно распространить все предыдущие результаты на общий случай уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Действительно, пусть

$$F\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

— уравнение многообразия $n-1$ измерения (*Mannigfaltigkeit*), которое в пространстве n измерений играет ту же роль, что и поверхность в обычном пространстве.

Пусть dw — элемент этого многообразия. Положим

$$S = +\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2},$$

$$\Sigma = +\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}.$$

Пусть Δ — детерминант, у которого первый элемент первого столбца равен 0; $(i+1)$-й элемент первого столбца равен X_i; $(i+1)$-й элемент первой строки есть $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ и наконец $(k+1)$-й элемент $(i+1)$-го столбца есть $\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$.

Пусть $\overline{\omega}$ есть интеграл

$$\int dw,$$

взятый по всему многообразию

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Интеграл

$$-\frac{1}{\overline{\omega}} \int \frac{\Delta\, dw}{\Sigma S^n},$$

взятый по всему многообразию $F = 0$, будет *индекс* этого многообразия.

Так же, как и в уже рассмотренном частном случае, мы будем различать положительные и отрицательные особые точки; можно было бы показать, что индекс многообразия равен разности между числом положительных и числом отрицательных особых точек, лежащих внутри этого многообразия.

Но здесь необходимо сделать одно важное замечание. Для того, чтобы классифицировать особые точки, мы составляем уравнение относительно S:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1}-S_1 & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2}-S & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n}-S \end{vmatrix}=0.$$

Предположим, что это уравнение n-й степени имеет p действительных положительных корней, q действительных отрицательных корней, $2r$ комплексных корней с положительной действительной частью, $2s$ комплексных корней с отрицательной действительной частью. Имеем

$$p+q+2r+2s=n.$$

Четыре числа p, q, r, s характеризуют особую точку и позволяют судить о форме траекторий вблизи этой особой точки. Но при этом точки (p, q, r, s) и (q, p, r, s) должны рассматриваться как точки одинакового типа; иными словами — форма траекторий одна и та же в обоих случаях.

Так, например, если мы положим $n=3$, то нетрудно видеть, что для уравнений

$$\frac{dx}{dt}=x, \quad \frac{dy}{dt}=y, \quad \frac{dz}{dt}=z$$

начало координат, являющееся особой точкой, характеризуется четырьмя числами (3, 0, 0, 0) и есть узел так же, как и для уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-x, \quad \frac{dy}{dt}=-y, \quad \frac{dz}{dt}=-z,$$

у которых эта особая точка характеризуется четырьмя числами (0, 3, 0, 0).

Далее, особая точка положительна, если q чётно, и отрицательна, если q нечётно. Нетрудно видеть, что когда n чётно, то

$$p \equiv q \pmod{2},$$

и когда n нечётно, то

$$p \equiv q + 1 \pmod{2}.$$

Следовательно, когда n чётно, особые точки (p, q, r, s) и (q, p, r, s) или обе положительны, или обе отрицательны. Наоборот, если n нечётно, то эти особые точки разных знаков.

Отсюда следует, что при чётном n две точки одинакового типа имеют также и одинаковые знаки и что это не имеет места при нечётном n. Так, например, при $n = 2$ фокусы и узлы всегда положительны, а сёдла всегда отрицательны, а при $n = 3$ узлы (так же, как и фокусы, сёдла и сёдла-фокусы) могут быть и положительными и отрицательными.

Мы определим подобно тому, как мы это сделали выше для поверхностей, многообразия $(n - 1)$-го измерения без контакта, которые могут быть разделены на два типа: тип положительный и тип отрицательный.

Многообразие $(n - 1)$-го измерения характеризуется с точки зрения геометрии положения своими $(n - 2)$ порядками связности, которые определены Риманом (Riemann, Gesammelte Werke. Leipzig. Teubner. 1876, p. 448) и Бриоши (Annali di Matematica, t. V).

Индекс многообразия без контакта будет зависеть только от порядка связности этого многообразия и от его типа.

Рассмотрим теперь два многообразия без контакта с одинаковыми порядками связности и пусть одно из них будет положительным, а другое — отрицательным; их индексы будут одинаковы по величине и по знаку, если n чётно, и одинаковы по величине, но противоположны по знаку, если n нечётно.

Индекс положительного односвязного многообразия без контакта равен $+1$. Число положительных особых точек, лежащих внутри такого многообразия, на единицу больше числа отрицательных особых точек.

Если n чётно, то особые точки одинакового типа всегда будут одинакового знака и мы получим таким образом соотношение между числом особых точек различных типов. Мы не получим подобного соотношения, когда n нечётно. Так, например: мы получим такое соотношение при $n=2$ и не получим при $n=3$.

Пусть M и M' будут два многообразия без контакта одинакового порядка связности, из которых одно положительно, а другое отрицательно, и пусть второе лежит внутри первого. Пусть E — часть пространства между M и M'.

При нечётном n в пространстве E всегда будут находиться особые точки, если индекс M не равен 0, в частности, когда M односвязно. Но мы ничего не можем сказать, когда n чётно.

ГЛАВА XIX

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

Среди траекторий подвижной точки, определённых уравнениями

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=dt,$$

могут встретиться замкнутые кривые. Мы увидим, что для траекторий, подходящих достаточно близко к замкнутой траектории, можно дать теорию, совершенно аналогичную той, которую мы развили в XVI главе для траекторий, проходящих достаточно близко от особой точки; таким образом замкнутые траектории в известной мере играют ту же роль, что и особые точки.

Прежде всего нужно было бы уметь устанавливать — существуют ли замкнутые траектории. Однако в настоящее время я очень мало могу сказать по этому поводу. Рассчитывая вернуться к этому вопросу позднее, я ограничусь сейчас только тем, что приведу один простой пример.

Пусть мы имеем тор без контакта, внутри которого нет ни одной особой точки. Разрежем его меридиональными плоскостями и предположим, что эти плоскости тоже не имеют контактов с траекториями внутри тора.

Введём специальную систему координат. Прежде всего предположим, что ось z есть ось вращения тора, а плоскость (x, y) есть плоскость симметрии тора, так что уравнение тора имеет вид

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2).$$

Положим затем

$$z=\eta, \qquad x=(R+\xi)\cos\omega, \qquad y=(R+\xi)\sin\omega,$$

так что уравнение тора примет вид

$$\xi^2+\eta^2=r^2.$$

Так как плоскости меридиана $\omega=\text{const.}$ являются плоскостями без контакта, то $\frac{d\omega}{dt}$ сохраняет всё время один и тот же знак, например, всё время положительно. Что же касается тора, то я буду предполагать для определённости, что он является отрицательной поверхностью без контакта, так что движущаяся точка, войдя внутрь тора, уже не сможет выйти из него.

Через точку M_0 с координатами

$$\xi=\xi_0, \qquad \eta=\eta_0, \qquad \omega=0,$$

лежащую внутри тора, я проведу траекторию; подвижная точка, вышедшая в начальный момент из точки M_0, по истечении некоторого времени t будет находиться в точке M_1 с координатами

$$\xi=\xi_1, \qquad \eta=\eta_1, \qquad \omega=2\pi,$$

лежащей внутри тора.

Положим

$$\Xi=\xi_1-\xi_0, \qquad \mathrm{H}=\eta_1-\eta_0;$$

Ξ и H будут голоморфными функциями от ξ_0 и η_0. Если мы имеем

$$\Xi=\mathrm{H}=0,$$

то траектория, проходящая через точку M_0, будет замкнута.

В плоскости меридиана $\omega=0$ назовём *индексом* какой-нибудь кривой

$$F(\xi_0, \eta_0)=0$$

интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int\frac{R\,ds}{S^2},$$

распространённый на все элементы ds этой кривой. В этом выражении, так же как и в интеграле Кронекера,

$$S=\sqrt{\Xi^2+\mathrm{H}^2},\quad \Sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial\xi_0}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\eta_0}\right)^2}$$

и

$$R=\frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial F}{\partial\xi_0} & \frac{\partial F}{\partial\eta_0}\\ \Xi & \frac{\partial\Xi}{\partial\xi_0} & \frac{\partial\Xi}{\partial\eta_0}\\ \mathrm{H} & \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\xi_0} & \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\eta_0}\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим в частности кривую

$$\xi_0^2+\eta_0^2=r^2,$$

т. е. меридиональную окружность тора. Принимая во внимание, что вдоль этой кривой мы имеем всегда

$$\xi_0\Xi+\eta_0\mathrm{H}<0,$$

и следовательно

$$\Xi\frac{\partial F}{\partial\xi_0}+\mathrm{H}\frac{\partial F}{\partial\eta_0}<0,$$

мы легко покажем, что индекс нашей меридиональной окружности равен $+1$. Следовательно, внутри этой окружности существует по крайней мере одна точка (ξ_0, η_0), в которой Ξ и H обращаются в 0; отсюда следует, что внутри тора существует по крайней мере одна замкнутая траектория.

Что и требовалось доказать.

Я напомню, кроме того, что в ноте, напечатанной в 1-ом томе «*Bulletin astronomique*» и озаглавленной

«Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps» («О некоторых частных решениях задачи трёх тел»), я показал, что уравнения небесной механики могут иметь частные интегралы, которые с некоторой точки зрения можно считать представляющими замкнутые траектории.

Итак, предположим, что тем или иным способом мы установили существование замкнутой траектории.

Обозначим через s дугу этой траектории, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки, и через l — длину всей кривой. Мы будем пользоваться специальной системой координат.

Пусть O — начало отсчёта дуг и M — какая-нибудь точка замкнутой траектории. Пусть s — дуга OM. Я проведу в точке M нормальную плоскость к траектории и в этой плоскости проведу через точку M две прямоугольные оси. Пусть x и y координаты относительно этих осей какой-нибудь точки нормальной плоскости. Положение любой точки пространства будет определяться этими тремя координатами x, y и s. Такая система координат удобна для изображения точек, очень близких к замкнутой траектории.

Пусть P_0 — точка с координатами x_0, y_0 и 0, лежащая в нормальной плоскости $s=0$. Если x_0 и y_0 достаточно малы, то траектория, проходящая через точку P_0, пересечёт последовательно все нормальные плоскости, соответствующие постоянно возрастающему значению s. В конце концов она пересечёт в точке P_1 с координатами x_1, y_1, l нормальную плоскость $s=l$, которая совпадает с плоскостью $s=0$. Если x_0, y_0 достаточно малы, то x_1, y_1 есть голоморфные функции от переменных x_0 и y_0, обращающиеся в 0 вместе с этими переменными. Пусть

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + R,$$

$$y_1 = \gamma x_0 + \delta y_0 + R',$$

где R и R' обозначают совокупности членов порядка выше первого относительно x_0 и y_0.

Положим

$$s = \frac{lt}{2\pi};$$

дифференциальные уравнения тогда могут быть записаны в виде

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Функции X и Y являются здесь рядами, расположенными по возрастающим степеням x и y и сходящимися при достаточно малых значениях x и y. Коэффициенты этих рядов — тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам дуг, кратных t. Кроме того, X и Y обращаются в нули при x и y, равных 0. Пусть

$$hx + ky, \quad h'x + k'y$$

— члены 1-й степени в X и Y. Как мы уже говорили, h, k, h', k' — тригонометрические ряды. Рассмотрим уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \quad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y.$$

Интегралы этих уравнений имеют следующую форму [14]:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t}\varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\varphi_2(t), \\ y = A_1 e^{\lambda_1 t}\psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t}\psi_2(t). \end{cases}$$

В этих выражениях A_1 и A_2 — постоянные интеграции, φ_1, φ_2, ψ_1 и ψ_2 — тригонометрические ряды. Что же касается постоянных λ_1 и λ_2, то они определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - e^{2\pi\lambda} & \beta \\ \gamma & \delta - e^{2\pi\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(2) \qquad S^2 - (\alpha + \delta) S + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \quad S = e^{2\pi\lambda}.$$

Рассмотрим теперь те различные случаи, которые могут здесь представиться.

Первый случай. Может случиться, что корни уравнения, определяющего S, — комплексные, сопряжённые, и модуль их не равен единице. Мы получим тогда

$$\lambda_1 = \lambda + i\lambda', \quad \lambda_2 = \lambda - i\lambda', \quad A_1 = Ae^{i\theta}, \quad A_2 = Ae^{-i\theta},$$

$$\varphi_1 = \varphi + i\varphi', \quad \varphi_2 = \varphi - i\varphi', \quad \psi_1 = \psi + i\psi', \quad \psi_2 = \psi - i\psi',$$

где λ, λ', A, θ, φ, φ', ψ и ψ' — действительны. Кроме того λ не равно 0. Предположим для определённости, что $\lambda > 0$.

Уравнения (1) принимают вид

$$\text{(1 bis)} \quad \begin{aligned} x &= Ae^{\lambda t}[\varphi(t)\cos(\lambda' t + \theta) - \varphi'(t)\sin(\lambda' t + \theta)], \\ y &= Ae^{\lambda t}[\psi(t)\cos(\lambda' t + \theta) - \psi'(t)\sin(\lambda' t + \theta)]. \end{aligned}$$

Положим

$$F(x, y, t) = \frac{(x\psi' - y\varphi')^2 + (x\psi - y\varphi)^2}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}.$$

Поверхности

$$F(x, y, t) = C$$

при достаточно малых x и y, а следовательно, и C, будут поверхностями рода 1, содержащими внутри замкнутую траекторию.

Если в выражении для F мы заменим x и y их значениями (1 bis), то получим

$$F = A^2 e^{2\lambda t};$$

откуда

$$\frac{dF}{dt} = 2\lambda A^2 e^{2\lambda t} > 0.$$

Принимая во внимание, что уравнения (1 bis) суть интегралы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \quad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y,$$

мы получим

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(hx + ky) + \frac{\partial F}{\partial y}(h'x + k'y).$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}(hx+ky)+\frac{\partial F}{\partial y}(h'x+k'y)>0.$$

Но если x и y достаточно малы, то $hx+ky$ и $h'x+k'y$ будут очень мало отличаться от X и Y, так что мы будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial t}+X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}>0.$$

Следовательно, при достаточно малых значениях C поверхности $F=C$ будут поверхностями без контакта.

Если $\lambda>0$, то эти поверхности положительны и подвижная точка всё время удаляется от замкнутой траектории.

Если же, наоборот, $\lambda<0$, то наши поверхности отрицательны и подвижная точка асимптотически приближается к замкнутой траектории.

Второй случай. Может случиться, что уравнение относительно S имеет корни, действительные и положительные, причём оба корня больше 1. Тогда λ_1 и λ_2 действительны и положительны.

Положим

$$\xi=\frac{x\psi_2-y\varphi_2}{\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1},\quad \eta=\frac{x\psi_1-y\varphi_1}{\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1},$$

$$F=\xi^2+\eta^2.$$

Можно было бы показать, как в предыдущем случае, что при достаточно малых значениях C поверхности $F=C$ суть поверхности рода 1, содержащие внутри замкнутую траекторию, и что, кроме того,

$$\frac{\partial F}{\partial t}+X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}>0,$$

т. е. что поверхности $F=C$ являются положительными поверхностями без контакта.

Отсюда следует, что подвижная точка, бесконечно близкая к замкнутой траектории при $t=-\infty$, при возрастании t будет удаляться от неё.

Если, наоборот, оба корня уравнения относительно S были бы действительны, положительны и оба меньше 1, то совершенно такое же исследование показало бы нам, что поверхности $F=C$ — отрицательные поверхности без контакта. И, следовательно, подвижная точка асимптотически приближалась бы к замкнутой траектории.

Третий случай. Оба корня уравнения относительно S действительны и положительны, но один больше, а другой меньше 1.

Тогда оба значения λ действительны, но разных знаков.

Я утверждаю, что в этом случае в нормальной плоскости $s=0$ можно провести такие две кривые K и K', которые пересекали бы замкнутую траекторию в точке $x=0$, $y=0$, $s=0$ и, кроме того, обладали бы следующими двумя свойствами:

1. Уравнения этих кривых могут быть представлены в форме

$$x=\varphi(u),\quad y=\psi(u),$$

где φ и ψ — голоморфные функции одной и той же переменной u, обращающиеся в 0 при $u=0$.

2. Если точка (x_0, y_0) лежит на одной из кривых K или K', то и точка (x_1, y_1), соответственно, тоже лежит на одной из них.

Действительно, мы всегда можем путём линейной замены переменных привести соотношение, связывающее x_1, y_1 с x_0, y_0 к следующему виду:

$$\begin{aligned} y_1&=s_1y_0+\Phi_1(x_0, y_0),\\ x_1&=s_2x_0+\Phi_2(x_0, y_0), \end{aligned} \tag{3}$$

где Φ_1 и Φ_2 — ряды, расположенные по возрастающим степеням x_0, y_0 и начинающиеся с членов второй степени.

Пусть

$$y=\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_nx^n+\ldots=\psi(x)$$

— уравнение кривой K. Мы будем иметь тождество:

$$s_1\psi(x_0)+\Phi_1[x_0, \psi(x_0)]\equiv\psi\{s_2x_0+\Phi_2[x_0, \psi(x_0)]\}.$$

Сравнивая обе части этого равенства, мы найдём ряд соотношений, которые дадут последовательно

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Предположим, что $s_1 > 1 > s_2$. Всегда можно найти две такие положительные величины M и β, чтобы, пользуясь обозначениями главы XI, мы имели бы

$$-\Phi_1(x_0, y_0) \leqslant \frac{M\beta^2 (x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)};$$

$$\Phi_2(x_0, y_0) \leqslant \frac{M\beta^2 (x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}.$$

Рассмотрим теперь наряду с уравнениями (3) уравнения

$$\text{(3 bis)}\qquad \begin{aligned} y_1 &= s_1 y_0 - \frac{M\beta^2 (x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}, \\ x_1 &= s_2 x_0 + \frac{M\beta^2 (x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}. \end{aligned}$$

Проводя для уравнений (3 bis) те же рассуждения, что и для уравнений (3), мы увидим, что существует ряд

$$y = \alpha_2' x^2 + \alpha_3' x^3 + \ldots + \alpha_n' x^n + \ldots = \psi'(x),$$

удовлетворяющий условию

$$s_1 \psi'(x_0) - \frac{M\beta^2 [x_0 + \psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]} =$$
$$= \psi'\left\{s_2 x_0 + \frac{M\beta^2 [x_0+\psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]}\right\}.$$

При этом мы имеем

$$\psi(x) \leqslant \psi'(x).$$

Но ряд $\psi'(x)$ сходится; действительно, решая полученное уравнение, найдем [15]

$$\psi' = \frac{M\beta^2}{s_1 - s_2^2}(x+\psi')^2 + \frac{M\beta^3}{s_1 - s_2^3}(x+\psi')^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{M\beta^n}{s_1 - s_2^n}(x+\psi')^n + \ldots$$

Следовательно, ряд ψ тоже сходится.

Что и требовалось доказать.

Совершенно так же можно доказать существование кривой K', уравнение которой будет

$$x = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \ldots + \beta_n y^n + \ldots .$$

Установив существование кривых K и K', нетрудно видеть, что все траектории разбиваются на три типа:

1. Траектории, пересекающие кривую K, — подвижные точки, описывающие такие траектории, будут бесконечно-близки к замкнутой траектории при $t = -\infty$ и будут удаляться от неё при растущем времени.

2. Траектории, пересекающие K'; они асимптотически приближаются к замкнутой траектории.

3. И, наконец, все остальные траектории, остающиеся на конечном расстоянии от замкнутой траектории.

Нам остаётся рассмотреть случай, когда один или два корня уравнения, определяющего S, — отрицательны; но случай, когда только один из корней отрицателен, невозможен [16]; если же отрицательны оба корня, то мы возвращаемся к формулам первого случая, полагая в них [17]

$$\lambda' = \frac{1}{2}.$$

Нельзя не поразиться той аналогии, которая существует между только что проведённым исследованием и теорией особых точек. Первый случай (когда оба значения λ комплексны) соответствует случаю фокуса; второй случай (когда оба значения λ действительны и одинаковых знаков) соответствует случаю узла и третий случай (когда оба значения λ действительны и разных знаков) соответствует случаю седла.

Нам остаётся ещё исследовать тот исключительный случай, когда оба корня λ — комплексные, сопряжённые и модули их равны 1. Этот случай соответствует тому, который мы подробно рассмотрели в главе XI. Мы увидим, что аналогия сохраняется до некоторой поры, и мы получим результаты, совершенно сходные с теми, которые мы имели в этой главе. Но, углубляя наше исследование, мы найдём существенные отличия и встретим совершенно новые трудности.

Запишем дифференциальные уравнения в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt}=X_1+X_2+\ldots+X_n+\ldots=X,$$

$$\frac{dy}{dt}=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n+\ldots=Y,$$

где X_i и Y_i — однородные многочлены степени i относительно x и y, коэффициенты которых тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам дуг, кратных t.

Положим теперь

$$F=F_2+F_3+\ldots+F_i+\ldots+F_n,$$

где F есть многочлен, целый относительно x и y, коэффициенты которого тригонометрические ряды по t, а F_i — совокупность членов степени i относительно x и y. Многочлен F не содержит, следовательно, ни членов нулевой, ни членов первой степени.

Мы будем стараться определить F_2, F_3, ..., F_{p-1} таким образом, чтобы в выражении

$$\Phi=\frac{\partial F}{\partial t}+X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y},$$

все члены степени, меньшей p относительно x и y, обращались бы в 0. Полагая

$$\Phi_{ik}=X_k\frac{\partial F_i}{\partial x}+Y_k\frac{\partial F_i}{\partial y},$$

мы получим

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\Phi_{21}\qquad=0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial F_3}{\partial t}+\Phi_{31}\qquad=-\Phi_{22},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial F_{p-1}}{\partial t}+\Phi_{p-1,1}=-\Phi_{p-2,2}-\Phi_{p-3,3}-\ldots-\Phi_{2,p-2}.$$

Первое из этих уравнений даст нам F_2, второе — F_3 и $(p-1)$-ое даст нам F_{p-1} при условии, конечно, что эти уравнения могут быть удовлетворены.

В силу сделанных нами предположений по поводу корней уравнения, определяющего S, первое из уравнений (4) всегда может быть удовлетворено.

Действительно, интегралы линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X_1,\quad \frac{dy}{dt}=Y_1, \tag{5}$$

так же, как и в первом случае, могут быть представлены в форме (1 bis) с той только разницей, что здесь λ равно 0. Таким образом интегралы уравнений (5) будут

$$x=A\left[\varphi(t)\cos(\lambda' t+\theta)-\varphi'(t)\sin(\lambda' t+\theta)\right],$$

$$y=A\left[\psi(t)\cos(\lambda' t+\theta)-\psi'(t)\sin(\lambda' t+\theta)\right].$$

Если вместо x и y за новые переменные взять

$$\xi=\frac{x\psi'-y\varphi'}{\varphi\psi'-\psi\varphi'},\quad \eta=\frac{x\psi-y\varphi}{\varphi\psi'-\psi\varphi'}$$

(что является линейной заменой переменных по отношению к x и y, но нелинейной по отношению к t), то уравнения (5) примут вид:

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda'\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=-\lambda'\xi.$$

Мы всегда можем предполагать, что эта замена переменных уже произведена и что, следовательно,

$$X_1=\lambda' y,\quad Y_1=-\lambda' x.$$

Итак мы возьмём

$$F_2=x^2+y^2;$$

тогда остальные уравнения (4) запишутся в виде:

$$\frac{\partial F_q}{\partial t}+\lambda'\left(y\frac{\partial F_q}{\partial x}-x\frac{\partial F_q}{\partial y}\right)=H_q, \tag{6}$$

где F_q — искомый однородный многочлен степени q, а H_q — многочлен той же степени, который мы можем считать известным, потому что он зависит только от F_2, F_3, ..., F_{q-1}, которые должны быть определены раньше, чем F_q. Коэффициенты полинома H_q так же, как и коэффициенты полинома F_q — тригонометрические ряды по t. Если мы положим

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

то мы будем иметь

$$F_q = \rho^q\varphi(\omega, t), \quad H_q = \rho^q\psi(\omega, t),$$

где $\varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ — тригонометрические ряды, зависящие от двух аргументов ω и t.

Уравнения (6) принимают тогда вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \psi(\omega, t). \tag{6 bis}$$

Если тригонометрический ряд $\psi(\omega, t)$ не содержит члена C_0, не зависящего от t и ω, и если, кроме того, λ' — иррациональное число (что мы будем предполагать выполненным), то мы всегда можем найти тригонометрический ряд, зависящий от ω и t, удовлетворяющий этому уравнению [18]. Если C_0 не равно 0, то удовлетворить уравнению (6) невозможно; но можно выбрать F_q таким образом, что при положительном C_0 мы будем иметь

$$\frac{\partial F_q}{\partial t} + \lambda'\left(y\frac{\partial F_q}{\partial x} - x\frac{\partial F_q}{\partial y}\right) < H_q$$

(знак неравенства меняется на обратный, когда C_0 отрицательно).

Для этого достаточно положить

$$F_q = \rho^q\varphi, \text{ где } \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \psi - C_0.$$

Если мы рассмотрим теперь многочлен

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q,$$

то выражение

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial t} + X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y}$$

будет рядом, расположенным по степеням x и y, коэффициенты которого — тригонометрические ряды по t. Члены наинизшей степени в Φ обращаются в

$$-C_0(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Рассмотрим теперь поверхности $F=K$, где K — постоянная. При достаточно малых значениях K эти поверхности будут поверхностями рода 1, содержащими внутри замкнутую траекторию; они будут положительными поверхностями без контакта при отрицательном C_0 и отрицательными поверхностями без контакта при положительном C_0.

Таким образом, когда не все C_0 для $q=2, 3, \ldots$ обращаются в 0, мы приходим к первому случаю, и имеет место *неустойчивость* [19].

Случай, когда все C_0 обращаются в 0, может с первого взгляда показаться совершенно исключительным, так как для того, чтобы он имел место, нужно, чтобы выполнялось бесконечное множество условий; тем не менее этот случай чрезвычайно важен не только вследствие тех специфических трудностей, которые представляет его исследование, но также и потому, что это как раз тот случай, который встречается при исследовании общих уравнений динамики.

Так как мы не можем удовлетвориться непосредственной проверкой того, что все C_0 обращаются в 0 — что потребовало бы проверки бесконечного множества условий, — то мы должны в первую очередь решить следующую задачу: как можно узнать a priori, что все C_0 обращаются в 0? Вот для этой цели одно простое правило: *если существует функция M, голоморфная относительно x, y и t, действительная, положительная и определённая во всех точках замкнутой траектории, и если, кроме того, мы имеем*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(MX\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(MY\right)+\frac{\partial M}{\partial t}=0, \tag{7}$$

то мы можем быть заранее уверены, что все C_0 равны 0.

Действительно, я покажу, что при этом условии не может существовать поверхность без контакта

$$F=K$$

рода 1, содержащая внутри замкнутую траекторию.

В самом деле, будем временно рассматривать x, y и t как прямоугольные координаты точки в пространстве.

Точки, для которых выполняются условия

$$F<K, \quad 0<t<2\pi,$$

заполняют некоторый объём V, ограниченный, во-первых, поверхностью $F=K$, представляющей собой своего рода цилиндрическую поверхность, и, во-вторых, двумя плоскостями: $t=0$ и $t=2\pi$. Пусть $d\omega$ — элемент поверхности $F=K$. Положим

$$\Sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2}.$$

Теорема Грина даёт нам:

$$\int\int\frac{M}{\Sigma}\left(X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}\right)d\omega+$$
$$+\int\int M\,dx\,dy-\int\int M\,dx\,dy=$$
$$=\int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}(MX)+\frac{\partial}{\partial y}(MY)+\frac{\partial M}{\partial t}\right]dx\,dy\,dt.$$

Первый интеграл в левой части этого равенства берётся по поверхности $F=K$, второй по плоскости $t=0$ и третий по плоскости $t=2\pi$; интеграл в правой части распространён на весь объём V.

Интеграл в правой части равен 0 в силу соотношения (7). Второй и третий интегралы в левой части взаимно уничтожаются, так как функция M возвращается к прежнему значению, когда t увеличивается на 2π. Следовательно, первый интеграл должен был бы быть равен 0. Но это невозможно, так как $\frac{M}{\Sigma}$ всегда положительно и

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}$$

всегда сохраняет один и тот же знак.

Таким образом, поверхности без контакта не может существовать, следовательно, все C_0 равны нулю.

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим в частности уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots,$$

где φ_i — тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам дуг кратных t (мы ограничиваемся сейчас случаем одного аргумента). Такое уравнение было изучено Гильденом (Gyldén), Линдштедтом (Lindstedt), Калландро (Callandreau). Мы можем записать это уравнение в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = y = X; \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots = Y,$$

т. е. как раз в том виде, который мы сейчас рассматриваем. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

и, следовательно, все C_0 равны 0.

Отсюда следует, что если мы будем интегрировать уравнение

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

пользуясь методом последовательных приближений, пренебрегая сначала третьими степенями x и y, потом четвёртыми степенями и т. д., то у нас никогда не появятся вековые члены. Линдштедт смог доказать это предложение только при определённых ограничениях, от которых мы теперь можем освободиться.

Если все C_0 равны 0, то существует ряд

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \ldots,$$

расположенный по возрастающим степеням x и y и по синусам и косинусам дуг кратных t, формально удовлетворяющий уравнению

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Если этот ряд сходится, то будет существовать семейство $F=K$ замкнутых поверхностей рода 1, на которых и будут расположены траектории.

До сих пор мы имели полную аналогию между нашим исследованием и исследованием главы XI, но теперь она прекращается. В главе XI ряд F всегда был сходящимся; здесь этого может и не быть. Это связано с тем, что интеграл уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}=\psi=\sum A\cos(mt+n\omega+\theta) \tag{6 bis}$$

имеет вид

$$\varphi=\sum\frac{A\sin(mt+n\omega+\theta)}{m-n\lambda'},$$

и делитель $m-n\lambda'$ может быть очень малым.

Отсюда следует, что траектории не всегда будут лежать на поверхностях семейства $F=K$. Для того чтобы лучше дать себе в этом отчёт, рассмотрим частный пример.

Мы будем пользоваться особой системой координат. Именно, пусть

$$x=r\cos\omega,\qquad y=r\sin\omega;$$

далее положим

$$\rho=\ln\frac{(r-1)^2+z^2}{r},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{z}{r-1}-\operatorname{arctg}\frac{z}{r+1}.$$

Каждой системе значений ρ, ω и φ соответствует одна и только одна точка M пространства; точки, для которых ω или φ различаются на кратное 2π, совпадают.

Поверхности $\rho=\text{const.}$ представляют собой семейство вложенных друг в друга торов. Поверхность $\rho=-\infty$ вырождается в окружность $r=1$, $z=0$; при этом положение точки M не зависит от φ. Поверхность $\rho=+\infty$ вырождается в ось z; и при этом положение точки M не зависит от ω. Поверхности $\omega=\text{const.}$ являются плоскостями, проходящими через ось z. Поверхности $\varphi=\text{const.}$ сферы, центры которых лежат на оси z.

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\beta,\quad \frac{d\rho}{dt}=\sum A_{mn}\cos(m\omega+n\varphi+\theta_{mn})=\theta.$$

Я буду предполагать, что ряд θ сходится абсолютно и равномерно для всех значений ω и φ. При этом m и n могут принимать всевозможные целочисленные значения как положительные, так и отрицательные.

Общий интеграл этих уравнений есть:

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \qquad \varphi = \beta t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} [\sin (m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) - \\ - \sin (m\omega_0 + n\varphi_0 + \theta_{mn})],$$

где ω_0, φ_0 и ρ_0 — постоянные интеграции. Мы подразумеваем, что в последней формуле неявно содержится член $A_{00} t$.

Мы всегда можем предположить, что начало отсчёта времени, начало отсчёта переменного ω и единица длины выбраны так, что $\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0$. Кроме того, для упрощения формул я буду предполагать, что все θ_{mn} равны 0, рассчитывая вернуться к общему случаю позднее.

Тогда мы получим

$$\omega = \alpha t, \ \varphi = \beta t,$$

$$\rho = A_{00} t + \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} \sin (m\omega + n\varphi).$$

Может представиться несколько случаев:

Первый случай. Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ — иррациональное число и A_{00} не равно 0.

Я утверждаю, что в этом случае можно найти функцию $F(\omega, \varphi)$, допускающую разложение в тригонометрический ряд, и такую, что поверхность

$$\rho = F(\omega, \varphi)$$

будет поверхностью без контакта; другими словами, для всех значений ω и φ мы будем иметь или неравенство

$$\theta > \alpha \frac{\partial F}{\partial \omega} + \beta \frac{\partial F}{\partial \varphi} \tag{8}$$

или обратное неравенство.

Я могу написать

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + A_{00},$$

где θ_1 содержит только конечное число членов θ, а θ_2 сколь угодно мало (это всегда возможно ввиду того, что ряд θ сходится абсолютно и равномерно).

Я возьму

$$|\theta_2| < |A_{00}|.$$

Пусть теперь

$$\theta_1 = \sum A_{pq} \cos (p\omega + q\varphi)\ [20]$$

и

$$F = \sum \frac{A_{pq}}{p\alpha + q\beta} \sin (p\omega + q\varphi),$$

так что будем иметь

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial \omega} + \beta \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \theta_1.$$

Неравенство (8) обращается в

$$A_{00} + \theta_2 + \theta_1 > \theta_1$$

или в

$$A_{00} > -\theta_2$$

или же в противоположное неравенство; одно из этих неравенств очевидно, так как абсолютная величина первого члена больше, чем абсолютная величина второго.

Мы приходим, таким образом, к уже рассмотренному нами случаю, когда вокруг замкнутой траектории существуют поверхности без контакта, т. е. к тому случаю, в котором имеет место неустойчивость.

Второй случай. Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ рационально и A_{00} равно нулю.

Предположим для определённости, что $\beta = 1$, а α — целое положительное число.

Здесь уже нецелесообразно считать начальные значения ω_0, φ_0 и ρ_0 переменных ω, φ и ρ равными нулю.

Положим для сокращения

$$\mu = m\alpha + n\beta = m\alpha + n;$$

μ — будет целым числом, и мы получим одно и то же значение μ для бесконечного множества систем значений m и n. При $n = -\alpha m$ мы будем иметь: $\mu = 0$.

Мы тогда получим

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \quad \varphi = t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + t \sum A_m{}' \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0) +$$
$$+ \sum \frac{A_{mn}}{\mu} [\sin(\mu t + m\omega_0 + n\varphi_0) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0)],$$

где $A_m{}' = A_{mn}$, при $n = -\alpha m$, или при $\mu = 0$.

Так как μ всегда является целым числом, то тригонометрический ряд, дающий ρ, будет равномерно сходящимся. Что же касается коэффициента при t

$$\sum A_m' \cos(\omega_0 - \alpha\varphi_0),$$

то он может быть положительным, или отрицательным, в зависимости от значений ω_0 и φ_0. Отсюда следует, что в зависимости от выбранной траектории ρ будет стремиться к $+\infty$ или к $-\infty$ при неограниченном возрастании t.

Следовательно, мы опять имеем случай неустойчивости, так как ρ не остаётся конечным, но характер этой неустойчивости совсем иной, чем в первом случае; действительно, здесь мы уже не можем построить поверхность без контакта.

Движущаяся точка приближается асимптотически либо к оси z, либо к окружности $z = 0$, $r = 1$, в зависимости от своего начального положения. Существуют также и замкнутые траектории, которые соответствуют тому случаю, когда

$$\sum A_m{}' \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0) = 0.$$

Третий случай. Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ — иррациональное число и A_{00} равно нулю.

Мы снова предположим, что

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0,$$

так что мы будем иметь

$$\omega = \alpha t, \quad \varphi = \beta t, \quad \rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t.$$

Может случиться, что ряд, дающий ρ, сходится равномерно для всех значений t, т. е. что ряд с положительными членами

$$\sum\left|\frac{A_{mn}}{\mu}\right| \tag{9}$$

сходится; тогда траектория вся целиком будет лежать на поверхности

$$\rho=\sum\frac{A_{mn}}{\mu}\sin(m\omega+n\varphi).$$

Эта поверхность рода 1 и аналогична тору. Форма траекторий на этой поверхности совершенно сходна с той, которую мы рассматривали в главе XV.

Четвёртый случай. Мы сделаем те же предположения, что и в предыдущем случае, с той только разницей, что ряд

$$\sum\frac{A_{mn}}{\mu}\sin\mu t \tag{10}$$

хотя и будет сходиться, но уже неравномерно, так что ряд (9) будет теперь расходящимся.

Этот случай может осуществиться. Предположим, например, что

$$\beta=1,\quad \alpha>1,\quad A_{mn}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|+|n|};$$

тогда ряд

$$\sum A_{mn}\cos(m\omega+n\varphi)$$

заведомо сходится абсолютно и равномерно.

Далее, превратим α в непрерывную дробь:

$$\alpha=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}$$

Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ — n-ая подходящая дробь; мы предположим, что

$$\frac{P_n}{Q_n}>\alpha>\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum\frac{A_{mn}}{\mu}\sin\mu t \tag{10}$$

такой, что коэффициент при $\sin(P_n - Q_n\alpha)t$ в этом ряду есть

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{P_n+Q_n}\frac{1}{P_n-Q_n\alpha}.$$

Мы будем иметь

$$P_n - Q_n\alpha < \frac{1}{Q_{n+1}}$$

и

$$Q_{n+1} = Q_{n-1} + a_{n+1}Q_n > a_{n+1}.$$

Но числа a_n я могу взять какими угодно, я положу например,

$$a_{n+1} = H^{Q_n},$$

где H — целое число. Коэффициент при $\sin(P_n - Q_n\alpha)t$ будет тогда больше, чем:

$$\frac{H^{Q_n}}{2^{P_n+Q_n}} = \left(\frac{H}{2^\alpha+1}\right)^{Q_n}\frac{1}{2^{P_n-Q_n\alpha}}.$$

Нетрудно видеть, что при H больше, чем $2^{\alpha+1}$, это выражение неограниченно возрастает при возрастании n. Следовательно, коэффициенты ряда (10) возрастают неограниченно и ряд не может быть равномерно сходящимся.

Итак будем предполагать, что этот ряд сходится неравномерно.

Я буду называть *регулярной поверхностью рода один* непрерывную поверхность, удовлетворяющую условиям, аналогичным условиям Дирихле (в теории рядов Фурье); уравнение такой поверхности может быть, следовательно, записано в виде

$$\rho = \sum B_{mn}\cos(m\omega + n\varphi) + \sum C_{mn}\sin(m\omega + n\varphi).$$

Невозможно, чтобы регулярная поверхность была бы в нашем случае поверхностью без контакта.

Действительно, если бы она была положительной поверхностью без контакта, то во всех её точках мы должны были бы иметь

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\frac{d}{dt}>0$$

или

$$\begin{aligned}K=\sum A_{mn}\cos(m\omega+n\varphi)-\\-\sum B_{mn}(\alpha m+\beta n)\sin(m\omega+n\varphi)+\\+\sum C_{mn}(\alpha m+\beta n)\cos(m\omega+n\varphi)>0\end{aligned}$$

и следовательно

$$\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^{2\pi}K\,d\varphi>0.$$

Но этот интеграл равен нулю, так как мы предположили, что A_{00} равно нулю.

Точно так же не может случиться, чтобы какая-нибудь траектория вся целиком лежала бы на какой-нибудь регулярной поверхности.

Действительно, на такой поверхности мы должны были бы иметь:

$$K=0$$

и следовательно

$$B_{mn}=0,\quad C_{mn}=-\frac{A_{mn}}{\alpha m+\beta n},$$

но тогда ряд

$$\sum C_{mn}\sin(m\omega+n\varphi)$$

не был бы сходящимся [21].

Более того, мы имеем

$$\rho=\sum\frac{A_{mn}}{m\alpha+n\beta}\sin(m\alpha+n\beta)\,t.$$

Если ряд, стоящий в правой части, не является равномерно сходящимся, то (как я показал, в одной заметке, напечатанной в Bulletin Astronomique, t. 1, p. 319 [22]) сумма его может стать больше любого наперёд заданного числа. Таким образом, ρ может неограниченно возрастать, хотя и не существует поверхностей без контакта [23].

Но мы можем спросить себя, стремится ли ρ к бесконечности, при $t \to \infty$; другими словами, можем ли мы взять такое достаточно большое значение t, чтобы, начиная с этого значения, ρ оставалось бы больше любой, наперёд заданной величины? Или же ρ всё время колеблется, причём амплитуда этих колебаний неограниченно возрастает, а наибольшее и наименьшее значения, достигаемые при этих колебаниях, стремятся соответственно к $+\infty$ и $-\infty$? В последнем случае ρ будет принимать всякое заданное значение бесчисленное множество раз.

Нетрудно видеть, что оба эти случая возможны. Действительно, пусть D — какое-нибудь целое число, не являющееся полным квадратом; пусть u и v — два целых положительных числа таких, что

$$u^2 - v^2 = 1.$$

Пусть

$$(u - v\sqrt{D})^n = u_n - v_n\sqrt{D} = \lambda^n,$$

где u_n и v_n также целые числа. Мы возьмём тогда

$$\frac{d\rho}{dt} = \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (A\lambda)^n \cos(u_n\omega - v_n\varphi)$$

и

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta = \sqrt{D},$$

так что

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \sin \lambda^n t.$$

Если $|A| > 1$, $|A\lambda| < 1$, то этот ряд будет сходиться, но сходиться неравномерно.

Если A положительно и достаточно велико, но всё же меньше, чем $\frac{1}{\lambda}$, то ρ будет стремиться к бесконечности; если же, напротив, A отрицательно и заключено между -1 и $-\frac{1}{\lambda}$, то ρ будет совершать колебания, размахи которых будут неограниченно возрастать.

По поводу доказательства я отошлю читателя к моей заметке, которую я представил Парижской Академии Наук (*Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 7 decembre* (1885)).

Итак, возможны два случая: или ρ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, и тогда всё происходит совершенно так же, как если бы A_{00} не равнялось нулю; или же ρ принимает бесчисленное множество раз любое наперёд заданное значение.

Очевидно мы будем иметь

$$|\theta| < M,$$

где M соответственным образом выбранная положительная величина. Мы будем иметь, следовательно,

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| < M, \quad |\rho| < |Mt|.$$

Положим теперь $\alpha = 1$; тогда через одинаковые промежутки времени, равные 2π, координата ω будет принимать значения $0, 2\pi, \ldots, 2n\pi, \ldots$, а движущаяся точка будет возвращаться к плоскости $\omega = 0$; кроме того, в эти моменты мы будем иметь $\varphi = 2\beta n\pi$.

Положим

$$R(\varphi) = \varphi - 2m\pi,$$

где m — целое число, выбранное таким образом, чтобы $R(\varphi)$ было заключено между 0 и 2π.

Если мы рассмотрим окружность C, уравнение которой

$$\rho = 0, \quad \omega = 0,$$

то положение точки на этой окружности будет определяться величиной $R(\varphi)$, так как

$$R(\varphi + 2\pi) = R(\varphi).$$

Уравнения нашей траектории дают нам

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t = \Phi(t).$$

Для $t = 2n\pi$, $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\varphi = 2\beta n\pi$ имеем

$$\rho = \Phi(2\pi n).$$

Каждой точке окружности C, для которой

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi \quad (n \text{ и } m \text{ — целое})$$

будет, следовательно, соответствовать величина ρ, равная $\Phi(2n\pi)$. Будем рассматривать эту величину ρ, как функцию взятой нами точки на окружности, т. е. как функцию $R(\varphi)$, и обозначим её через

$$F[R(\varphi)].$$

Эта функция разрывна и определена только в точках

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi.$$

Прежде всего я покажу, что на всякой дуге окружности C, *сколь бы мала она ни была*, всегда найдутся точки, в которых наша функция F определена и принимает сколь угодно большие значения.

Действительно, рассмотрим точку, которую я обозначу через P:

$$\rho = 0, \quad \omega = t, \quad \varphi = \beta t.$$

Для нашей движущейся точки и для точки P значения ω и φ одинаковы. Но точка P всё время остаётся на торе $\rho = 0$.

Пусть AB — рассматриваемая дуга окружности C. Нетрудно видеть, что, сколь бы мала ни была эта дуга, всегда можно указать такое достаточно большое h, что имеет место следующее свойство: пусть t_0 — какое-нибудь произвольно выбранное значение t; при некотором значении t, содержащемся между t_0 и $t_0 + h$, точка P попадёт на дугу AB. Другими словами, промежуток времени между двумя последовательными моментами пересечения дуги AB точкой P не превосходит h.

Пусть теперь мы имеем некоторое значение t, для которого

$$\rho = \Phi(t)$$

положительно и очень велико; обозначим это значение t через t_0. Мы видели выше, что такое значение всегда существует.

Именно существует такое k, меньшее, чем h, что точка P

$$\rho = 0, \quad \omega = t_0 + k, \quad \varphi = \beta(t_0 + k)$$

лежит на дуге AB. Тогда мы будем иметь

$$\Phi(t_0 + k) > \Phi(t_0) - Mk > \Phi(t_0) - Mh.$$

Так как $\Phi(t_0)$ положительно и очень велико, а M и h конечны, то $\Phi(t_0 + k)$ тоже будет положительно и очень велико. Следовательно, в точке окружности C

$$R(\varphi) = R(\beta t_0 + \beta k),$$

лежащей на дуге AB, величина $F[R(\varphi)]$ будет положительна и очень велика.

Что и требовалось доказать.

Совершенно так же можно было бы показать, что $F[R(\varphi)]$ на дуге AB может стать отрицательным и очень большим по абсолютной величине; действительно, $\Phi(t)$ может становиться отрицательным и очень большим по абсолютной величине либо для положительных, либо для отрицательных значений t.

Пусть теперь

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

бесконечная последовательность значений φ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} R(\varphi_n) = A,$$

$$\lim_{n \to \infty} F[R(\varphi_n)] = F_1.$$

Мы скажем, что F_1 есть одно из *предельных значений* функции F для точки

$$R(\varphi) = A.$$

Предположим теперь, что функция F определена в двух точках:

$$R(\varphi) = A_0, \quad R(\varphi) = A'_0$$

и имеет соответственно значения F_0 и F'_0. Кроме того, я буду предполагать, что в точке $R(\varphi) = A_0$ функция F имеет предельное значение F_1. Я утверждаю, что в точке $R(\varphi) = A'_0$ она будет иметь предельное значение F'_1 и что это значение есть

$$F_1 - F_0 + F'_0.$$

Действительно, в силу сделанных предположений существует два целых числа λ и λ', таких, что

$$R(2\beta\lambda\pi) = A_0, \qquad R(2\beta\lambda'\pi) = A'_0;$$
$$\Phi(2\lambda\pi) = F_0, \qquad \Phi(2\lambda'\pi) = F'_0.$$

Кроме того, существует последовательность целых чисел

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} R(2\beta\mu_n\pi) = A_0; \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi(2\mu_n\pi) = F_1.$$

Рассмотрим бесконечную последовательность целых чисел

$$\mu_1 + \lambda' - \lambda, \ \mu_2 + \lambda' - \lambda, \ldots, \ \mu_n + \lambda' - \lambda, \ldots$$

Очевидно, мы будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} R[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)\beta] = A'_0.$$

Я утверждаю, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] = F'_1 = F + F'_0 - F_0.$$

Действительно, мы имеем

$$(11) \quad \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] - \Phi(2\pi\mu_n) = \int\limits_{2\pi\mu_n}^{2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)} \frac{d\Phi}{dt}\, dt.$$

Или, принимая во внимание два условия:

$$\lim_{n\to\infty} R(2\beta\mu_n\pi) = R(2\beta\lambda\pi),$$
$$\lim_{n\to\infty} R[2\beta(\mu_n + \lambda' - \lambda)\pi] = R(2\beta\lambda'\pi),$$

мы получим как предел правой части равенства (11) —

$$\int\limits_{2\pi\lambda}^{2\pi\lambda'} \frac{d\Phi}{dt}\,dt = F_0' - F_0$$

и как предел левой части его —

$$F_1' - F_1.$$

Отсюда

$$F_1' = F_1 + F_0' - F_0.$$

Что и требовалось доказать.

Функция $F[R(\varphi)]$ была однозначна, но была определена не для всех точек окружности C. Наоборот, функция $F_1[R(\varphi)]$, которая отныне будет обозначать какое-нибудь предельное значение функции F вблизи точки $R(\varphi)$, будет определена во всех точках окружности C, но уже не будет однозначной.

Пусть теперь

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

— бесконечная последовательность точек окружности C, стремящаяся к точке B.

Пусть

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$$

— некоторая последовательность предельных значений функции F, соответствующих точкам $A_1, A_2, \ldots$ Положим

$$\lim_{n \to \infty} F_n = G.$$

Я утверждаю, что G будет одним из предельных значений функции F в точке B.

Действительно, в силу сделанных нами предположений, всегда можно указать бесконечное множество точек A_n, таких, чтобы расстояние их до точки B и разность $G - F_n$ были бы сколь угодно малы и чтобы в окрестности каждой из этих точек A_n можно было бы найти бесконечное множество точек M, расстояние которых до точки A_n и разность $F_n - F(M)$ были бы сколь угодно малы. Отсюда следует, что точка B является пределом точек M и что G есть предел $F(M)$, так что G есть одно из значений функции $F_1(B)$, определённой выше. Что и требовалось доказать.

Я утверждаю теперь, что если в некоторой точке M функция $F[B(\varphi)]$ принимает значение F_0, и если в то же время F_1 есть одно из предельных значений функции F в той же точке M, то $2F_1-F_0$ тоже будет предельным значением.

Действительно, мы имеем бесконечную последовательность точек

$$A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n, \ldots,$$

в которых функция F принимает соответственно значения

$$F(A_1),\ F(A_2), \ldots,\ F(A_n), \ldots,$$

и, в силу сделанных предположений, расстояние A_nM стремится к нулю, а $F(A_n)$ стремится к F_1, когда n неограниченно возрастает. В силу предположения, доказанного выше, одно из предельных значений функции F в точке A_n будет

$$F_1+F(A_n)-F(M)=F_1-F_0+F(A_n).$$

В пределе, при неограниченном возрастании n, точка A_n совпадает с точкой M, а $F(A_n)$ обратится в F_1; следовательно, $2F_1-F_0$ также будет предельным значением функции F в точке M.

Таким образом, если мы рассмотрим определённую выше функцию $F_1[R(\varphi)]$, то может представиться один из следующих случаев:

1) функция F_1 может принимать только значения $\pm\infty$;

2) функция F_1 принимает только в точке M значения $\pm\infty$ и $F(M)$;

3) функция F_1 в каждой точке M будет принимать всевозможные значения и будет не только неоднозначна, но и полностью не определена;

4) функция F_1 будет принимать в точке M бесконечное множество различных значений, отличающихся одно от другого на постоянный период. Другими словами, это будет многозначная функция, аналогичная арксинусу.

Первая из этих гипотез заведомо может осуществляться (действительно, как мы видели выше, может случиться, что функция $\Phi(t)$, стремясь к бесконечности, принимает всякое данное значение только конечное число раз).

Я имею все основания думать, что третья гипотеза тоже может осуществляться, но что, напротив, четвёртая гипотеза никогда не может быть осуществлена.

Однако всего предшествующего достаточно для того, чтобы понять, как велико разнообразие могущих представиться случаев:

1) Может случиться, что ρ принимает всякое данное значение только конечное число раз, и стремится к $\pm\infty$, когда время неограниченно возрастает (это имеет место, когда A_{00} не равно нулю, или $A_{00}=0$, но $\frac{\alpha}{\beta}$ рационально; или же когда при A_{00}, равном нулю, и $\frac{\alpha}{\beta}$ иррациональном ряд $\Phi(t)$ сходится неравномерно или стремится к бесконечности).

2) Но может также случиться, что ρ всё время колеблется между некоторыми определёнными границами, принимая бесконечное множество раз всякое значение, заключающееся между этими границами (это имеет место, когда A_{00} равно нулю, $\frac{\alpha}{\beta}$ иррационально и ряд $\Phi(t)$ сходится равномерно).

3) Наконец, может случиться, что ρ принимает любое значение бесконечное множество раз (это имеет место, когда A_{00} равно нулю, $\frac{\alpha}{\beta}$ иррационально и ряд $\Phi(t)$ не сходится равномерно и не стремится к бесконечности).

В первом случае движущаяся точка или всё время удаляется от замкнутой траектории $\rho=-\infty$ (если ρ стремится к $+\infty$) или асимптотически приближается к ней (если ρ стремится к $-\infty$). Может даже случиться, что, двигаясь по одним траекториям, точка всё время удаляется от замкнутой траектории, в то время как двигаясь по другим траекториям, она асимптотически приближается к ней (если A_{00} равно нулю и $\frac{\alpha}{\beta}$ рационально).

Во всех этих случаях имеет место неустойчивость, т. е., другими словами, если в момент $t=0$ движущаяся точка находилась очень близко от замкнутой траектории, то либо для очень больших положительных значений t, либо для очень больших по абсолютной величине отрицательных значений t она не будет более близка к замкнутой траектории.

Наоборот, во втором случае имеет место устойчивость, т. е., другими словами, если движущаяся точка была очень близка к замкнутой траектории в момент $t=0$, то она всё время будет оставаться очень близкой к ней как при положительных, так и при отрицательных значениях t.

Наконец, в третьем случае мы имеем неустойчивость в том смысле, что движущаяся точка, очень близкая к замкнутой траектории в начальный момент, может сильно удаляться от неё в некоторые другие моменты времени. Но мы имеем, наоборот, устойчивость в том смысле, что движущаяся точка, удалившись от замкнутой траектории на большое расстояние, будет вновь приближаться к ней, подходя в некоторые моменты времени сколь угодно близко к замкнутой траектории [24].

Тот простой пример, который мы так долго рассматривали, позволяет нам теперь вернуться к общему случаю и сказать: из того, что все C_0 равны нулю, ещё нельзя заключить, что определённый выше ряд

$$F=F_2+F_3+\dots$$

сходится и что точка, очень близкая к замкнутой траектории, всё время будет очень близка к ней, и даже нельзя заключить, что точка, удалившись от замкнутой траектории, вновь приблизится к ней.

Может случиться, что точка, очень близкая к замкнутой траектории, так и останется очень близкой к ней или будет бесконечное множество раз удаляться от неё, но затем каждый раз снова подходить сколь угодно близко к ней; или же, наконец, может случиться, что точка, удалившись от замкнутой траектории, так и останется на большом расстоянии от неё. Эти три логически возможных случая могут действительно осуществляться.

В силу предыдущего, легко понять, в какой мере трудности, встречающиеся в небесной механике вследствие существования малых делителей и приблизительных соизмеримостей средних движений, связаны с самой природой вещей и не могут быть обойдены. Чрезвычайно вероятно, что каким бы методом мы ни пользовались, мы всегда будем встречать те же трудности.

Париж, 13 декабря 1885.

ДОПОЛНЕНИЯ.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВАМ V и VI

ОБЩАЯ КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ

Е. Леонтович и А. Майер

Результаты, полученные Пуанкаре о возможном поведении и формах характеристик уравнения первого порядка и их соотношении между собой, изложенные в первых двух его мемуарах, были обобщены в работе норвежского математика Бендиксона *), применившего методы теории множеств.

При этом выяснилось, что основные результаты Пуанкаре о ходе характеристик на плоскости являются в сущности следствиями двух теорем: теоремы о существовании и единственности решения и теоремы о непрерывности зависимости решения от начальных условий.

В настоящем дополнении излагаются важнейшие результаты работы Бендиксона

Мы будем рассматривать систему

$$(A) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)^{**)},$$

---

*) *Sur les courbes de finies par des équations différentielles*, *Acta Mathem.* т. 24 (1901), стр. 1—30.

**) Напомним, что, начиная с 3-го мемуара, Пуанкаре также придерживается этого способа записи, но при этом он вообще сохраняет предположение, что X и Y являются многочленами, целыми по x и y.

где функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ предполагаются однозначными и непрерывными функциями от x и y в некоторой конечной односвязной области G значений x и y и удовлетворяющими в окрестности любой точки этой области условиям Липшица.

В силу этих условий, *какие бы значения* x_0, y_0 *из области* G *мы ни задавали, и какое бы значение* t_0 *мы ни взяли, существует одно и только одно решение системы* (A):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

удовлетворяющее условиям

$$x_0 = \varphi(t_0), \qquad y_0 = \psi(t_0)$$

и определённое в некотором промежутке $t_0 - \xi < t < t_0 + \xi$ (*теорема Коши*).

Повторным применением теоремы Коши можно, вообще говоря, расширить промежуток $(t_0 - \xi, t_0 + \xi)$, в котором определено решение. Нижеследующая теорема, которую мы приведём без доказательства*), устанавливает, в каких границах это расширение возможно:

Теорема о продолжении решения. *Пусть* G' — *какая-нибудь область, лежащая целиком вместе с границей внутри области* G. *Пусть решение* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *может быть продолжено лишь для значений* t, *меньших* T (*или больших* τ). *Тогда существует такое значение* $\varepsilon > 0$, *что все точки* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *для которых* $T - \varepsilon < t < T$ (*или соответственно* $\tau < t < \tau + \varepsilon$), *лежат вне* G'.

В дальнейшем, говоря о решении системы (A), мы будем подразумевать какое-либо решение:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{a}$$

продолженное на максимальный возможный промежуток значений переменной t.

---

*) См. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, ГОНТИ (1939), стр. 63.

Так как t не входит в правые части системы (А), то наряду с решением

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{a}$$

существует бесконечное множество других решений

$$x = \varphi(t + C), \quad y = \psi(t + C), \tag{a'}$$

где C — любая постоянная.

Решение системы (А) можно геометрически интерпретировать в пространстве (x, y, t) кривыми, лежащими в цилиндрической области, образованной прямыми, параллельными оси t, пересекающими плоскость (x, y) в точках области G. Через каждую точку этой цилиндрической области проходит одна и только одна кривая; причём кривые (а) и (а') получаются друг из друга сдвигом по оси t на расстояние C.

В дальнейшем нас будут особенно интересовать два частных типа решений:

a) периодические решения; они изображаются в пространстве (x, y, t) винтовой линией, с шагом, равным периоду; b) стационарные решения

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

где x_0 и y_0 — константы. Последние решения, очевидно, будут получаться при задании таких начальных значений x_0, y_0, которые являются решением системы уравнений

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0.$$

Геометрически таким решениям соответствуют прямые, параллельные оси t.

Для нас будет более интересна другая интерпретация системы (А). Именно, мы будем рассматривать t как время, а систему (А) как систему дифференциальных уравнений, определяющих закон движения точки, помещённой в начальный момент времени t_0 в одну из точек (x_0, y_0) области G плоскости (x, y).

Каждому решению системы (А) на плоскости (x, y) соответствует кривая — траектория движения.

Двум решениям

(a) $$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

и

(a′) $$x=\varphi(t+C),\quad y=\psi(t+C)$$

соответствует одна и та же траектория; изображающие их в пространстве (x, y, t) кривые имеют одну и ту же проекцию на плоскость (x, y). Механически, решения (a) и (a′) определяют движения, отличающиеся друг от друга началом отсчёта времени. Нетрудно видеть поэтому, что решения системы (A) могут быть записаны в виде:

(1) $$\begin{cases} x=\varphi(t-t_0, x_0, y_0), \\ y=\psi(t-t_0, x_0, y_0). \end{cases}$$

Здесь x_0, y_0, t_0 — начальные значения и x, y — координаты движущейся точки.

При этой интерпретации периодическим решениям соответствуют замкнутые траектории. Стационарным решениям

$$x=x_0,\quad y=y_0,$$

соответствуют траектории, выродившиеся в точку; такие точки мы будем называть *состояниями равновесия*.

Определим некоторые термины, которыми нам в дальнейшем придётся пользоваться, и уточним те, которыми мы уже пользовались выше.

Траекторией мы будем называть кривую

$$x=\varphi(t-t_0, x_0, y_0)=x(t),$$

$$y=\psi(t-t_0, x_0, y_0)=y(t),$$

где пара функций $x(t)$, $y(t)$ является решением системы (A), продолженным на максимальный возможный промежуток значений переменной t.

Положительной полутраекторией мы будем называть ту часть траектории, для которой, при определённом движении, соответствующие значения t больше некоторого выбранного значения t_0. *Отрицательной полутраек-*

торией мы будем называть ту часть траектории, для которой, при определённом движении, соответствующие значения t меньше некоторого выбранного значения t_0.

Для единообразия мы будем обозначать траекторию буквой L, а положительную и отрицательную полутраектории, соответственно, буквами L_+ и L_-.

В дальнейшем мы для краткости будем пользоваться выражениями «траектория (или полутраектория) при $t = \tau$ проходит через заданную точку»; «траектория (полутраектория) при $t > t_0$ остаётся в данной области» и т. д.; подразумевая под этим, что движущаяся точка $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = \tau$ совпадает с заданной точкой; что движущаяся точка при $t > t_0$ остаётся в данной области и т. д.

Введённые, таким образом, понятия траектории, полутраектории, состояния равновесия для системы:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

находятся, очевидно, в тесной связи с понятиями характеристики, полухарактеристики, особой точки, введёнными Пуанкаре для уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}.$$

В частности, особые точки уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

определяются как точки, в которых имеют место равенства

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0,$$

т. е. так же, как состояния равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y).$$

Вообще же соотношение между характеристиками (полухарактеристиками) и траекториями (полутраекториями) не вполне определено, так как Пуанкаре, как уже было отмечено (ср. примечание 2 и 10 к «первому мемуару»), не даёт точного определения понятия характеристики. Во всяком случае, из самого определения траектории следует, что состояние равновесия («особая точка» по Пуанкаре) само является траекторией и что никакая другая траектория через состояние равновесия проходить не может (в силу единственности решения!), тогда как Пуанкаре не причисляет особые точки к характеристикам, и характеристика может проходить через особую точку (ср., в частности, «основное соглашение», гл. V). Траектория же, отличная от состояния равновесия, может стремиться к состоянию равновесия в том смысле, что сколь бы мала ни была окрестность состояния равновесия все точки траектории, начиная с некоторого значения t, лежат в этой окрестности. При этом, как вытекает из теоремы Коши, значения t должны неограниченно возрастать (или неограниченно убывать).

Наряду с теоремой Коши, основную роль в дальнейшем играет также следующая известная теорема *).

Т е о р е м а о н е п р е р ы в н о й з а в и с и м о с т и р е ш е н и я о т н а ч а л ь н ы х у с л о в и й. *Пусть мы имеем решение системы* (A)

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0), \quad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0),$$

и пусть оно существует при всех значениях t, *удовлетворяющих неравенству* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *(или* $t_0 \geqslant t \geqslant T$*), где* T *— некоторая определённая величина* **). *Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что если*

$$|x - \bar{x}_0| < \delta, \quad |y - \bar{y}_0| < \delta,$$

то решение

$$\bar{x} = \varphi(t - t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0), \quad \bar{y} = \psi(t - t_0, \bar{x}_0 \bar{y}_0)$$

*) Доказательство этой теоремы см., например, Г у р с а. Курс математического анализа, т. III, ч. I, ГТТИ, 1933, стр. 19—22.

**) Если решение определено при всех значениях $t \geqslant t_0$ ($t \leqslant t_0$), то за T можно взять любое число.

также определено для всех значений t из промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (или $t_0 \geqslant t \geqslant T$), и при этих значениях t имеют место неравенства

$$|x-\bar{x}|<\varepsilon, \ |y-\bar{y}|<\varepsilon.$$

Этой теоремой нам придётся часто пользоваться в такой геометрической форме:

Пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) — две точки одной и той же траектории, соответствующие значениям t_0 и t_1. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно указать такое $\delta>0$, что всякая траектория, проходящая при $t=t_0$ через δ-окрестность точки (x_0, y_0), проходит при $t=t_1$ через некоторую точку ε-окрестности точки (x_1, y_1).

Мы будем в дальнейшем рассматривать только такие положительные (отрицательные) полутраектории

$$x=\varphi(t-t_0, x_0, y_0),$$
$$y=\psi(t-t_0, x_0, y_0),$$

которые постоянно остаются внутри некоторой ограниченной области G', целиком (вместе с границей) лежащей в области G. Такого рода полутраектории мы будем соответственно называть *положительно* (*отрицательно*) *устойчивыми в смысле Лагранжа.* Из теоремы о продолжении следует, что такие полутраектории определены для в с е х значений $t>t_0$ $(t<t_0)$.

Одним из важнейших понятий для дальнейшего является понятие «*предельной точки полутраектории*».

Точка M называется предельной для положительной полутраектории L_+ (отрицательной полутраектории L_-), если сколь бы мало ни было $\varepsilon>0$ и сколь бы велико ни было $T>0$, в круге радиуса ε с центром в точке M всегда будут лежать точки полутраектории L_+ (L_-), соответствующие значениям $t>T$ $(t<-T)$.

Таким образом, на положительной (отрицательной) полутраектории, имеющей предельную точку M, можно указать бесконечную последовательность точек, соответствующих неограниченно возрастающим (убывающим) значениям t, которая стремится к точке M. Наоборот, предельная точка M такой последовательности точек есть предельная точка полутраектории.

Очевидно, что если точка M есть предельная точка данной полутраектории при определённом, выбранном на ней движении, то она будет предельной точкой этой полутраектории и при всяком другом выборе движения. Кроме того, если мы имеем две положительные (отрицательные) полутраектории, выделенные из одной и той же траектории, то они имеют, очевидно, одни и те же предельные точки.

Из принципа Больцано-Вейерштрасса следует, что всякая положительно (отрицательно) устойчивая в смысле Лагранжа полутраектория имеет хотя бы одну предельную точку.

Мы будем говорить, что точка M *есть предельная точка траектории* L, если M есть предельная точка либо для полутраектории L_+, либо для полутраектории L_-, произвольно выделенных из траектории L. В первом случае мы будем говорить также, что M *есть предельная точка траектории* L *при* $t \to +\infty$, *во втором — при* $t \to -\infty$.

Все дальнейшие теоремы и рассуждения, относящиеся к полутраекториям, мы будем для краткости формулировать только для положительных траекторий; с очевидными изменениями они будут справедливы, конечно, и для отрицательных полутраекторий.

Теорема I. *Множество всех предельных точек положительной полутраектории замкнуто.*

Теорема является очевидным следствием определения предельной точки полутраектории.

Теорема II. *Множество всех предельных точек положительно устойчивой в смысле Лагранжа полутраектории состоит из целых траекторий, целиком лежащих внутри или на границе той области, внутри которой лежит данная полутраектория.*

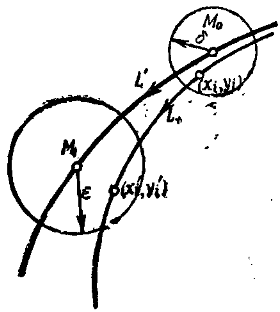
Для доказательства этой теоремы, очевидно, достаточно показать, что:

1) если точка $M_0(\xi_0, \eta_0)$ является предельной для рассматриваемой полутраектории L_+, то и любая точка $M(\xi, \eta)$, лежащая на траектории L', проходящей через точку M_0, — также является предельной для полутраектории L_+;

2) все точки траектории L' содержатся внутри или на границе области G', внутри которой лежит полутраектория L_+.

Докажем сначала первое утверждение.

Пусть $M_1(\xi_1, \eta_1)$ — какая-нибудь точка траектории L', отличная от M_0. Отметим, прежде всего, что какое бы движение на L' мы ни выбрали, разность значений t, соответствующих данным точкам M_0 и M_1, всегда одна и та же; обозначим эту разность через T.



Черт. 1.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и построим круг радиуса ε с центром в точке M_1 (черт. 1). В силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, для всякого $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta > 0$, чтобы всякая траектория, при $t = \tau$, проходящая через какую-либо точку в круге радиуса δ с центром в точке M_0, проходила бы при значении $t = \tau + T$ через некоторую точку в круге радиуса ε с центром в точке M_1. Так как точка M_0 — предельная для полутраектории L_+, то на L_+ существует бесконечное множество точек (x_i, y_i), соответствующих неограниченно возрастающим значениям t_i и находящихся в круге радиуса δ с центром в M_0. Следовательно, на L_+ существует также и бесконечное множество точек (x_i', y_i'), соответствующих тоже неограниченно возрастающим значениям $t_i' = t_i + T$ и лежащих в круге радиуса ε с центром в M_1. Следовательно, M_1 есть предельная точка для L_+.

Для доказательства второго утверждения предположим, что существует хоть одна точка M_1 траектории L', не принадлежащая ни области G', ни её границе. Выбирая в предыдущем рассуждении ε меньше расстояния точки M_1 до границы области G', мы придём к заключению, что полутраектория L_+ имеет точки вне G', что противоречит предположению.

Теорема III. *Множество всех предельных точек положительно устойчивой в смысле Лагранжа полутраектории связно* *).

Для доказательства предположим противное, т. е. допустим, что это множество несвязно. Так как оно замкнуто, то его можно разбить на два замкнутых непустых множества A и B, не имеющих общих точек, и, следовательно, лежащих на положительном расстоянии друг от друга. Обозначим это расстояние через α.

Если мы возьмём $\delta = \frac{\alpha}{4}$ и построим δ-окрестности множеств A и B, то эти δ-окрестности также не будут иметь общих точек.

В силу определения предельной точки полутраектории мы можем, при выбранном движении на данной полутраектории, указать две неограниченно возрастающие последовательности значений t:

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\ \ldots\quad (t_n \to +\infty),$$
$$t'_1,\ t'_2,\ \ldots,\ t'_n,\ \ldots\quad (t'_n \to +\infty)$$

такие, что $t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \ldots < t_n < t'_n < \ldots$ и, кроме того, такие, что точки полутраектории L_+, соответствующие значениям t_n, лежат в δ-окрестности множества A, а точки, соответствующие значениям t'_n — в δ-окрестности множества B. Но тогда, очевидно, существуют значения $t = \tau_n$, удовлетворяющие неравенствам $t_n < \tau_n < t'_n$, для которых соответствующие точки полутраектории L_+ лежат вне δ-окрестностей множеств A и B.

В силу принципа Больцано-Вейерштрасса, множество этих точек будет иметь хотя бы одну точку сгущения M,

*) Понятие связности множества — см. Хаусдорф, «Теория множеств», ОНТИ (1937), стр. 118—120.

которая будет, очевидно, предельной точкой для полутраектории L_+. Так как точка M не лежит внутри δ-окрестности множеств A и B, и, следовательно, не принадлежит ни A, ни B, то мы получаем противоречие с предположением, что множество $A+B$ содержит все предельные точки рассматриваемой полутраектории. Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что свойства множеств предельных точек, описанные в теоремах I, II и III, сохраняются и в том случае, если рассматриваются траектории на замкнутой поверхности любого жанра или в многомерном эвклидовском пространстве. Следующие же теоремы о характере множества предельных точек полутраектории, вообще говоря, уже неверны для поверхностей любого жанра или в многомерных пространствах.

Для дальнейших рассмотрений, уточняющих характер множества предельных точек полутраектории, нам понадобится ряд лемм, связанных с так называемым *«отрезком без контакта»* *).

Мы скажем, что отрезок AB, лежащий целиком в области G, есть *отрезок без контакта*, если:

a) на нём не лежит ни одно состояние равновесия;

b) ни в одной своей точке он не касается никакой траектории.

Если мы возьмём ту прямую D, на которой лежит данный отрезок без контакта AB, то плоскость (x, y) будет разбита этой прямой на две части; мы скажем, что точки этих частей лежат по разные стороны отрезка AB.

Некоторые из формулируемых ниже лемм мы оставим без доказательства ввиду их геометрической очевидности (хотя строгое доказательство некоторых из них весьма кропотливо).

Лемма I. *Пусть траектория L_0 при $t=t_0$ проходит через какую-нибудь точку M отрезка без контакта AB. Тогда всегда можно указать значения t_1 и t_2 $(t_1<t_0<t_2)$ такие, что все точки траектории L_0,*

---

*) Дуга без контакта у Пуанкаре.

соответствующие значениям t, удовлетворяющим неравенству $t_1 < t < t_0$, лежат по одну сторону отрезка AB, а все точки, соответствующие значениям t, удовлетворяющим неравенству $t_0 < t < t_2$, — по другую сторону отрезка AB.

Лемма вытекает из непрерывности правых частей системы (A).

Лемма II. *Если траектория L_0 пересекает отрезок без контакта AB, переходя при возрастании t с одной стороны AB («левой») на другую сторону («правую»), то и все другие траектории, пересекающие отрезок AB, переходят при возрастании t с той же стороны отрезка AB («левой») на другую («правую») его сторону.*

Мы будем говорить короче:

«Все траектории пересекают отрезок без контакта в одном и том же направлении».

Лемма III. *Пусть AB — отрезок без контакта, и M — точка на нём, отличная от его концов A и B. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$, всегда можно указать такое $\delta > 0$, чтобы всякая траектория, проходящая при $t = \tau$ через какую-нибудь точку δ-окрестности точки M пересекла бы, не выходя из ε-окрестности точки M, отрезок AB при значении t, удовлетворяющем неравенству:*

$$|t - \tau| < \Delta \text{ *)}.$$

Лемма IV. *Пусть траектория L_0, проходящая при $t = t_0$ через точку M_0, при $t = t_1$ пересекает отрезок без контакта AB в точке, отличной от его концов A и B. Тогда, сколь бы малы ни были $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$, всегда можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta) > 0$, что всякая траектория L, проходящая при $t = t_0$ через какую-нибудь точку δ-окрестности точки M_0, пересечёт, при $t = T$, отрезок AB, причём:*

a) $|T - t_1| < \Delta$;

*) Доказательство см. Камке, Differentialgleichungen reeller Funktionen, стр. 205—210.

b) *точки траектории L, соответствующие значениям t из промежутка $[t_0, T]$, находятся на расстоянии, меньшем ε, от точек траектории L_0, соответствующих тем же значениям t.*

Эта лемма является следствием теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и леммы III.

Лемма V. *Всякая часть траектории, соответствующая значениям t, лежащим в некотором конечном промежутке $[\alpha, \beta]$, может иметь лишь конечное число точек пересечения с любым отрезком без контакта.*

Доказательство поведём от противного. Предположим, что траектория L_0 имеет бесконечное множество точек пересечения с некоторым отрезком без контакта l, и все эти точки соответствуют значениям t между α и β. Из бесконечного множества значений t, соответствующих этим точкам пересечения, мы можем выбрать последовательность

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots,$$

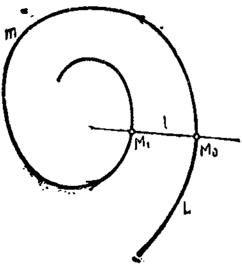
сходящуюся к некоторому значению τ $(\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta)$.

Точка траектории L_0, соответствующая $t = \tau$, является точкой сгущения для множества точек пересечения L_0 с отрезком без контакта l и поэтому должна лежать на l. Но в силу леммы I, при значениях t, достаточно близких к τ, в частности, при значениях t_n с достаточно большим номером n на L_0 не может быть точек, которые лежали бы на отрезке без контакта l.

Таким образом, мы приходим к противоречию, и лемма доказана.

Лемма VI. *Если траектория L пересекает какой-нибудь отрезок без контакта l в двух точках M_0 и M_1, соответствующих значениям t, равным t_0 и t_1 $(t_0 < t_1)$, и если при значениях t, заключённых между t_0 и t_1, нет точек траектории L, лежащих на отрезке l, то на части $M_0 M_1$ отрезка l не может лежать вообще ни одной точки траектории L.*

Действительно, если бы на части $M_0 M_1$ отрезка l лежала бы точка траектории L, то она могла бы соответствовать либо значению $t>t_1$, либо значению $t<t_0$ (так как, по условию, между t_0 и t_1 нет уже больше значений t, соответствующих точкам пересечения траектории L с отрезком l). Но при $t=t_1$ траектория L входит внутрь (или выходит из) области, ограниченной замкнутой кривой $M_0mM_1M_0$ (черт. 2), составленной из дуги M_0mM_1 траектории L и отрезка M_0M_1. Для того чтобы она могла бы ещё раз пересечь отрезок M_0M_1, она должна выйти из (или войти внутрь) этой области. Это невозможно, так как траектория L не может при $t>t_1$ пересечь ни кусок траектории M_0mM_1, ни отрезок M_0M_1, так как тогда она должна была бы пересечь последний в направлении, противоположном первоначальному вопреки лемме II. Отсюда следует, что на отрезке M_0M_1 не может лежать точек траектории L, соответствующих $t>t_1$. Совершенно так же можно показать, что на отрезке M_0M_1 не может быть точек пересечения с траекторией L, соответствующих $t<t_0$.



Черт 2.

Доказанное предложение можно сформулировать и так: *последовательные точки пересечения траектории L с отрезком без контакта l, располагаются на отрезке l в порядке возрастания t.*

Аналогичным рассуждением доказывается и следующая лемма:

Лемма VII. *Замкнутая траектория может иметь с любым отрезком без контакта только одну точку пересечения.*

Лемма VIII. *Если через точку M (отличную от состояния равновесия), предельную для полутраектории L_+, проведён отрезок без контакта l, содержащий M внутри себя, то на l будет находиться бесконечная последовательность точек траектории L, расположенных в порядке возрастания t, стремящаяся к M.*

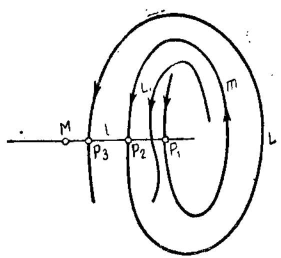
Эта лемма непосредственно следует из лемм III и VI и самого определения предельной точки.

Нижеследующая теорема описывает одно из важнейших свойств траекторий на плоскости. В других случаях этого свойства уже, вообще говоря, нет (например — для траекторий на торе, или в трёхмерном пространстве), благодаря чему взаимное расположение траекторий в этих случаях может быть гораздо более сложным, чем на плоскости.

Теорема IV. *Если траектория L не замкнута и имеет хотя бы одну предельную точку, отличную от состояния равновесия, то траектория L сама не может быть предельной ни для какой траектории.*

Предположим противное: пусть траектория L сама является предельной для некоторой полутраектории L'_+. Пусть M — предельная точка траектории L, отличная от состояния равновесия — такая по условию существует. Проведём через M отрезок без контакта l, содержащий M внутри себя. Тогда на отрезке l будет лежать бесконечное множество точек траектории L, расположенных в порядке возрастания (убывания) t (лемма VIII).

Пусть P_1, P_2, P_3 — три последовательные точки пересечения траектории L с отрезком l (черт. 3). Так как мы предположили, что L сама является предельной для полутраектории L'_+, то в частности предельной для L'_+ будет точка P_2. Тогда на основании



Черт. 3.

леммы VIII либо на отрезке $P_1 P_2$, либо на отрезке $P_2 P_3$ должна находиться последовательность точек полутраектории L'_+, стремящаяся к точке P_2. Но нетрудно видеть, что это невозможно, так как полутраектория L'_+ может пересечь каждый из отрезков P_1P_2 и P_2P_3 только по одному разу. Действительно, пусть L'_+ пересекает $P_1 P_2$ при значении $t = T$; тогда при значениях $t > T$ она либо выйдет из конечной области, ограниченной замкнутой кривой $P_1mP_2P_1$ — образованной дугой P_1mP_2 траектории L и отрезком без контакта $P_1 P_2$, либо войдёт внутрь этой области. Пусть для определённости L'_+ выходит из области $P_1 m P_2 P_1$; тогда L'_+ уже не может войти в неё, так как она не может войти ни через дугу $P_1 m P_2$ (траектории не пересекаются), ни через отрезок $P_1 P_2$ (в силу леммы II), и, следовательно, L'_+ больше уже вообще не может пересечь отрезок $P_1 P_2$. Совершенно так же можно провести рассуждение для того случая, когда L'_+ входит в область $P_1 m P_2 P_1$. Ясно, что такое же рассуждение справедливо для отрезка $P_2 P_3$. Таким образом, предположение, что траектория L есть предельная для полутраектории L'_+, приводит к противоречию, и теорема доказана.

Следствие. Ни одна точка незамкнутой траектории L не может быть предельной для самой L.

Теорема V. *Если полутраектория L_+ не имеет среди своих предельных точек состояния равновесия, то либо полутраектория L_+ замкнута, либо она имеет замкнутую предельную траекторию.*

Действительно, если хоть одна предельная точка L_+ принадлежит L, то, в силу теоремы IV, траектория L замкнута. Если же траектория L не замкнута, то предельные точки L_+ не принадлежат L. Траектория L_0, проходящая через какую-нибудь из этих предельных точек, не может иметь среди своих предельных точек состояний равновесия — так как тогда и L_+ имела бы среди своих предельных точек состояния равновесия. В силу теоремы IV траектория L_0 замкнута, так как в противном случае она не могла бы быть предельной для полутраектории L_+.

Теорема VI. *Если полутраектория L_+ имеет замкнутую предельную траекторию L_0, то L_0 является единственной предельной траекторией для L_+.*

Если сама полутраектория L_+ замкнута, то все её точки являются предельными для неё самой, и ясно, что никаких других предельных точек у неё быть не может.

Предположим теперь, что L_+ не замкнута. Покажем сначала, что сколь бы малое $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, все точки полутраектории L_+, начиная с некоторого значения $t = t_0$ (зависящего от ε), будут находиться внутри ε-окрестности траектории L_0.

В самом деле, так как траектория L_0 замкнута, то в соответствующем ей движении

$$x=\bar{x}(t), \quad y=\bar{y}(t)$$

функции $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ будут периодическими функциями от t, т. е. существует $h\,(h>0)$ такое, что:

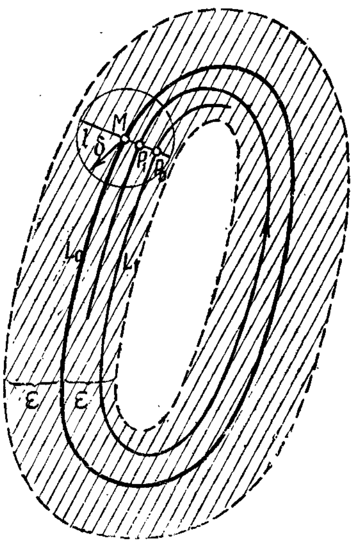
$$\bar{x}(t+h)=\bar{x}(t), \quad \bar{y}(t+h)=\bar{y}(t).$$

Возьмём теперь какую-нибудь точку $M(\xi,\eta)$ траектории L_0, соответствующую $t=\tau$; эта же точка будет соответствовать значениям $\tau+h$, $\tau+2h, \ldots$ Напомним, кроме того, что мы всегда можем выбрать движение по траектории L_0 так, чтобы число τ, которому соответствует точка $M(\xi,\eta)$, имело бы любое выбранное значение.

Проведём в точке $M(\xi,\eta)$ отрезок без контакта l, целиком лежащий внутри рассматриваемой ε-окрестности траектории L_0. В силу леммы IV, для всякого $\varepsilon>0$ и $\Delta>0$ $\left(\Delta<\frac{1}{3}h\right)$ мы можем указать такое $\delta=\delta(\varepsilon,\Delta)>0$, чтобы всякая траектория при $t=\tau$, проходящая через какую-либо точку δ-окрестности точки $M(\varepsilon,\eta)$ за время от $t=\tau$ до $t=T$, не выходила бы из ε-окрестности траектории L_0 и в момент $t=T$, где $|T-(\tau+h)|<\Delta$, пересекла бы отрезок без контакта l.

Так как точка $M(\xi,\eta)$ — предельная для полутраектории L_+, то на отрезке l — сколь угодно близко к $M(\xi,\eta)$ и, следовательно, внутри δ-окрестности точки $M(\xi,\eta)$ находится бесконечное множество точек полутраектории L_+. Пусть точка P_0, соответствующая $t=t_0$, — одна из таких точек. Тогда, на основании сказанного выше, полутраектория L_+ пересечёт отрезок l ещё раз в точке P_1, отличной от P_0, соответствующей значению $t=t_1$, где $|t_1-(t_0+h)|<\Delta$; причём, в силу выбора числа полутраектория L_+ при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ будет содержаться в ε-окрестности траектории L_0 (черт. 4). Так как $t_1>t_0$, то, очевидно, точка P_1 лежит на отрезке l ближе к точке $M(\xi,\eta)$, чем P_0 (это следует из того, что точка $M(\xi,\eta)$ есть предельная точка для L_+, и точки пересечения L_+

с отрезком l должны быть расположены на l в порядке возрастания t (см. лемму VIII). Следовательно, точка P_1 лежит в δ-окрестности точки $M(\xi,\eta)$. Применяя к точке P_1 то же рассуждение, что и к точке P_0, мы придём к заключению, что полутраектория L_+ пересекает отрезок l в точке P_2, при значении t_2, где $|t_2-(t_1+h)|<\Delta$; причём L_+ за время от t_1 до t_2 не выходит из ε-окрестности траектории L_0. Продолжая такое же рассуждение дальше и замечая, что последовательно получаемые значения $t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$ неограниченно возрастают, мы видим, что вся часть полутраектории L_+, соответствующая значениям $t>t_0$, целиком лежит в ε-окрестности траектории L_0.



Черт. 4.

Покажем теперь, что замкнутая траектория L_0 содержит все предельные точки полутраектории L_+. Предположим противное, т. е. предположим, что у полутраектории L_+ существует предельная точка Q, не лежащая на замкнутой траектории L_0, и, следовательно, находящаяся на некотором расстоянии $d>0$ от L_0. В любой близости точки Q должны находиться точки полутраектории L_+, соответствующие сколь угодно большим значениям t. Но в силу доказанного выше, для любого $\varepsilon>0$, в частности для $\varepsilon<\frac{d}{2}$, существует такое t_0, что все точки полутраектории L_+, соответствующие $t>t_0$, будут лежать в ε-окрестности траектории L_0. Но если $\varepsilon<\frac{d}{2}$, то точка Q будет лежать вне ε-окрестности траектории L_0; и следовательно, сколь угодно близко от точки Q не могут находиться точки полутраектории L_+, соответствующие сколь угодно большим значениям t.

Таким образом, мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

Мы сделаем теперь дополнительное предположение, что *в области G находится лишь конечное число состояний равновесия.*

Всюду в дальнейшем мы это предположение сохраняем.

Теорема VII. *Если среди предельных точек полутраектории L_+ могут быть только состояния равновесия в конечном числе, то всё множество предельных точек полутраектории L_+ состоит из одного и только одного состояния равновесия.*

Мы будем говорить в этом случае, что *полутраектория L_+ стремится к состоянию равновесия* или что *траектория L стремится к состоянию равновесия при $t \to +\infty$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из сделанного нами предположения о конечном числе состояний равновесия и теоремы III о связности множества предельных точек полутраектории.

Результаты произведённого исследования множества предельных точек полутраектории могут быть резюмированы следующим образом. Положительная полутраектория при наших ограничениях может иметь множество предельных точек одного из следующих типов:

I. Одно состояние равновесия.

II. Одна замкнутая траектория.

III. Некоторое множество, состоящее из целых траекторий, одни из которых являются состояниями равновесия, а другие — траекториями, отличными от состояния равновесия и стремящимися к состояниям равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$*).

---

*) Заметим, что каждая из этих траекторий может стремиться как к разным состояниям равновесия при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, так и к одному и тому же.

Последний тип возможного множества предельных точек полутраектории мы разберём подробнее и выясним, каковы отличительные свойства тех траекторий, отличных от состояний равновесия, которые могут входить в состав предельного множества.

Ответ на этот вопрос вытекает из нижеследующих теорем о взаимном расположении траекторий.

Лемма IX. *Незамкнутая траектория L не может иметь одну и ту же, отличную от состояния равновесия, предельную точку, одновременно как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.*

Предположим противное: пусть M есть предельная точка траектории L и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, причём M не является состоянием равновесия. Проведём через точку M отрезок без контакта l, содержащий точку M внутри. Тогда (лемма VIII) на l должна находиться как стремящаяся к точке M последовательность точек L, соответствующих неограниченно возрастающим значениям t, так и стремящаяся к точке M последовательность точек L, соответствующих неограниченно убывающим значениям t. Нетрудно видеть, что эти точки не могут быть расположены на отрезке l в порядке возрастания t, что противоречит лемме VI.

Лемма X. *Пусть L — незамкнутая траектория, имеющая среди своих предельных точек не только состояния равновесия, и пусть P — какая-нибудь точка на L. Всегда можно взять столь малую окрестность точки P, чтобы все пересекающие эту окрестность траектории также не были бы замкнуты.*

Пусть P_0 — какая-нибудь, отличная от состояния равновесия, предельная точка траектории L. Проведём через P_0 отрезок без контакта l, и пусть P_1 и P_2 — две последовательные точки пересечения траектории L с отрезком l (в силу леммы VIII такие точки существуют).

Возьмём $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ столь малыми, чтобы ε_1-окрестность точки P_1 и ε_2-окрестность точки P_2 не имели бы общих точек.

Выберем затем $\delta_1 > 0$ так, чтобы:

а) всякая траектория, проходящая через точку из

δ_1-окрестности точки P_1, пересекала бы отрезок l, не выходя из ε_1-окрестности точки P_1 (лемма III);

b) всякая траектория, проходящая через точку из δ_1-окрестности точки P_1, пересекала бы отрезок l в точке, принадлежащей ε_2-окрестности точки P_2 (лемма IV).

Но тогда всякая траектория, проходящая через точку, принадлежащую δ_1-окрестности P_1, будет пересекать отрезок без контакта l по крайней мере в двух различных точках, одной — лежащей в ε_1-окрестности P_1, и другой — лежащей в ε_2-окрестности P_2. В силу леммы VII такая траектория не может быть замкнутой.

Таким образом, лемма доказана для точки P_1 траектории L; из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий сразу следует справедливость леммы и по отношению ко всякой другой точке этой траектории.

Лемма XI. Пусть L — *замкнутая траектория*, M — *точка на ней*, A — *точка внутри* L. *Если сколь угодно малую окрестность точки* M *пересекают замкнутые траектории, отличные от* L, *то всегда можно указать столь малое* $\delta > 0$, *чтобы все замкнутые траектории, пересекающие* δ-*окрестность точки* M, *содержали бы точку* A *внутри.*

Эта лемма, в силу непрерывной зависимости от начальных условий, геометрически совершенно очевидна; поэтому мы её доказательства приводить не будем.

Теорема VIII. *Внутри всякой замкнутой траектории есть по крайней мере одно состояние равновесия.*

Предположим противное; именно, что внутри некоторой замкнутой траектории L_0 нет ни одного состояния равновесия. Обозначим через g область, лежащую внутри L_0. Пусть L — траектория, проходящая через какую-либо точку области g. Если L не замкнута, то, в силу теоремы V, она и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ имеет замкнутые предельные траектории, которые в силу леммы IX различны. Следовательно, внутри g непременно есть ещё хотя бы одна замкнутая траектория. То же рассуждение показывает, что и вообще внутри каждой замкнутой траектории, лежащей внутри g, непременно будет находиться ещё хотя бы одна замкнутая траектория.

Определим теперь внутри g и на L_0 функцию $F(x, y)$ следующим образом: если через точку (x, y) проходит замкнутая траектория, то значение $F(x, y)$ равно площади, заключённой внутри этой замкнутой траектории; если через точку (x, y) проходит незамкнутая траектория, то функция $F(x, y)$ равна площади I_0, заключённой внутри L_0.

Значения, принимаемые определённой таким образом однозначной функцией $F(x, y)$, будут иметь точную нижнюю грань C, причём C неизменно должно быть меньше I_0, так как внутри L_0, как было указано выше, непременно должна находиться ещё хотя бы одна замкнутая траектория.

При этом возможны следующие два случая: 1) либо $F(x, y)$ принимает значение C в некоторой точке (a, b) области g или на L_0; 2) либо существует последовательность точек (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой значения $F(x, y)$ стремятся к C при $n \to +\infty$. Во втором случае последовательность точек (x_n, y_n) будет иметь хотя бы одну предельную точку в области g или на L_0, которую мы также обозначим через (a, b). В обоих случаях точка (a, b) будет обладать тем свойством, что в любой, сколь угодно малой её окрестности нижняя грань значений $F(x, y)$ будет равна C.

Рассмотрим траекторию L, проходящую через точку и содержит L_2 внутри. Но тогда значения функции $F(x, y)$ в этой окрестности будут больше I_2, и, следовательно, $C \geqslant I_2$. Но внутри L_2 непременно будет находиться ещё хоть одна замкнутая траектория — L_3. Пусть I_3 — площадь, ограниченная L_3. Тогда значения функции $F(x, y)$ в точках L_3 равны $I_3 < I_2 \leqslant C$, в противовес определению C. Таким образом, предположение, что внутри L_0 нет состояния равновесия, приводит к противоречию, и теорема доказана.

Следствие. Если траектория L пересекает отрезок без контакта l более чем в одной точке, и если M_1 и M_2 — две последовательные точки пересечения траектории L с отрезком l (так что на части M_1M_2 отрезка l больше уже нет точек траектории L), то внутри замкнутой кривой K, образованной частью M_1M_2 отрезка l и дугой M_1mM_2 траектории L, непременно находится хотя бы одно состояние равновесия.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь траекторию L, пересекающую, при $t = t_0$, отрезок M_1M_2. Нетрудно видеть, что либо полутраектория L_+, соответствующая $t > t_0$, либо полутраектория L_-, соответствующая $t < t_0$, должна целиком лежать внутри K. Пусть для определённости это есть полутраектория L_+. Если среди предельных точек L_+ (которые, очевидно, все лежат внутри K) нет состояний равновесия, то множество предельных точек состоит из замкнутой траектории, целиком лежащей внутри K. Но в силу только что доказанной теоремы внутри этой замкнутой траектории непременно должно находиться хотя бы одно состояние равновесия. Таким образом, наше утверждение доказано.

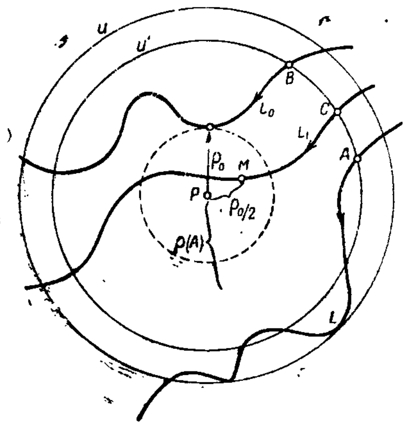
Теорема IX. *Пусть P — состояние равновесия. Тогда либо в каждой сколь угодно малой окрестности точки P лежит замкнутая траектория, содержащая P внутри, либо существует траектория, стремящаяся к P.*

Предположим, что вокруг состояния равновесия P существует окрестность, не содержащая целиком ни одной замкнутой траектории, заключающей P внутри себя. Так как состояний равновесия, по предположению, конечное число, то в этом случае можно построить такую окружность U с центром в точке P, внутри которой не было бы ни одного состояния равновесия, кроме P, и не лежала бы целиком ни одна замкнутая траектория.

Покажем, что в этом случае обязательно существует хоть одна траектория, стремящаяся к P.

Для доказательства этого утверждения покажем сначала, что существует положительная или отрицательная полутраектория, целиком лежащая внутри окружности U.

Допустим, что такой полутраектории нет. Пусть U' — окружность с центром в P, расположенная внутри U, и пусть A — какая-либо точка на этой окружности (черт. 5). Траектория L, проходящая через точку A, должна, по предположению, выйти из внутренности окружности U как при возрастании, так и при убывании t. Возьмём дугу этой траектории L, заключающуюся между первыми точками её выхода из U (заметим, что до точки выхода траектория L может касаться окружности U один или несколько раз). Пусть наименьшее расстояние взятой



Черт. 5.

дуги траектории L до точки P есть $\rho(A)$. Функция $\rho(A)$ определена, таким образом, во всех точках A окружности U' и принимает только положительные значения, нигде не обращаясь в нуль.

Обозначим точную нижнюю грань функции $\rho(A)$ через ρ_0. В силу нашего предположения $\rho_0 > 0$. Легко видеть, что на U' должна быть точка B, обладающая тем свойством, что сколь бы мала ни была дуга окружкости U', содержащая точку B внутри себя, точная нижняя грань значений ρ (A) на этой дуге есть ρ_0 *).

Нетрудно видеть, что $\rho(B) = \rho_0$.

Действительно, пусть $\rho(B) \neq \rho_0$; тогда $\rho(B) = \rho_0 + \alpha > \rho_0$. Пусть траектория L_0, проходящая через точку B при $t = t_0$, выходит из внутренности окружности U при $t = t_1 < t_0$ (впервые, при убывании t, начиная от t_0) и при $t = t_2 > t_0$ (впервые, при возрастании t, начиная от t_0). Возьмём столь малое $\tau > 0$, чтобы точки L_0, соответствующие значениям t между t_1 и $t_1 - \tau$, а также между t_2 и $t_2 + \tau$ лежали бы вне U. Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий следует, что всегда можно указать столь малую окрестность точки B, чтобы:

a) точки всех траекторий, пересекающих при $t = t_0$ эту окрестность, соответствующие $t = t_1 - \tau$ и $t = t_2 + \tau$, лежали бы вне U;

b) точки этих траекторий, соответствующие значениям t, заключённым между $t_1 - \tau$ и $t_2 + \tau$, лежали бы в $\frac{\alpha}{2}$-окрестности отрезка траектории L_0, соответствующего тем же значениям t.

Но тогда нетрудно видеть, что для выходящих из так построенной окрестности точки B траекторий имеем: $\rho(A) \geqslant \rho_0 + \alpha - \frac{\alpha}{2} = \rho_0 + \frac{\alpha}{2}$, что противоречит предположению, что точная нижняя грань функции $\rho(A)$ в любой окрестности точки B есть ρ_0.

Следовательно, $\rho(B) = \rho_0$, и так как функция $\rho(A)$ не обращается в нуль, то $\rho_0 > 0$.

Но тогда можно взять точку M, лежащую внутри U' на расстоянии $\frac{\rho_0}{2}$ от точки P; траектория L_1, проходящая через точку M, должна, по предположению, выйти из внутренности окружности U и, следовательно, обязана пересечь U' в некоторой точке C. Значение функции $\rho(A)$

*) Заметим, что в вышецитированной книге Kamke «Differentialgleichungen reeller Funktionen» — в доказательстве этой теоремы имеется неточность.

в точке C не превосходит $\frac{\rho_0}{2} < \rho_0$, что противоречит определению ρ_0 как точной нижней грани значений функции $\rho(A)$.

Полученное противоречие доказывает, что непременно существует положительная или отрицательная полутраектория, остающаяся целиком внутри U. Пусть для определённости это есть положительная полутраектория L_+. Все предельные точки полутраектории L_+ должны, следовательно, также лежать внутри U. Так как, по предположению, во внутренности окружности U нет ни одной замкнутой траектории, то множество предельных точек траектории L_+ либо состоит из одной только точки P, либо из точки P и траекторий, стремящихся к P (см. теорема VII, случай III). В обоих случаях теорема доказана.

Пусть P — состояние равновесия, и пусть полутраектория L_+ стремится к P. Окружим P столь малой окружностью C, чтобы на L_+ заведомо была бы точка R вне C, и, сверх того, окружность C не содержала бы внутри ни одного состояния равновесия, отличного от P. Обозначим через E последнюю (в сторону возрастания t) точку пересечения полутраектории L_+ с C, и пусть Q — точка, лежащая на L_+ после E, и следовательно, внутри C. Проведём в точке Q отрезок без контакта QA, не пересекающий L_+ ни в одной точке, отличной от Q. В таком случае имеет место следующая теорема.

Теорема X. *Либо все траектории, пересекающие отрезок QA (в точках, отличных от точки Q), покидают при возрастании t внутренность окружности C, либо на QA существует часть QQ', такая, что все пересекающие QQ' траектории стремятся к P, оставаясь внутри C.*

Для доказательства допустим, что на отрезке QA нашлась точка B такая, что траектория L', проходящая через точку B при $t = t_0$, при $t > t_0$ остаётся внутри C; покажем, что траектория L' стремится к P при $t \to +\infty$.

Для этого достаточно показать, что L_+' при $t \to +\infty$ не имеет предельных точек, отличных от состояния равновесия.

Допустим противное; пусть N есть предельная точка полутраектории L'_+ и пусть N не является состоянием равновесия. Точка N не может быть предельной для L_+, так как L_+ имеет единственной своей предельной точкой точку P. Также точка N не может лежать на L_+, так как тогда все точки полутраектории L_+, в том числе и точка R, лежащая вне C, были бы предельными для L' при $t \to +\infty$, и полутраектория L'_+ должна была бы покидать внутренность окружности C вопреки предположению. Следовательно, через точку N можно провести отрезок без контакта l, не пересекающий L_+. Полутраектория L'_+, оставаясь внутри C, должна пересечь этот отрезок в бесконечном множестве точек; пусть P_1 и P_2 — какие-нибудь два последовательных из этих точек пересечения. Мы получили замкнутую кривую D, образованную дугой P_1P_2 траектории L' и частью P_1P_2 отрезка l, лежащую целиком внутри C. Внутри этой замкнутой кривой D, в силу следствия из теоремы VIII, непременно должно лежать хоть одно состояние равновесия. Полутраектория L_+, имеющая точки вне C, не может лежать целиком внутри D; она не пересекает D (так как по самому построению отрезка l она не пересекает этот отрезок) и поэтому не может стремиться к тому состоянию равновесия, которое лежит внутри D. Следовательно, это состояние равновесия отлично от P, что противоречит предположению, что внутри C нет состояний равновесия, отличных от P.

Следовательно, траектория L' при $t \to +\infty$ стремится к P. Но тогда и всякая другая траектория, пересекающая отрезок без контакта QB, будет, при $t \to +\infty$, оставаться в области, ограниченной простыми дугами QP, BP и отрезком QB, лежащей целиком внутри C. К каждой из этих траекторий приложимо то рассуждение, которое было только что проведено для L', т. е. каждая из этих траекторий будет при $t \to +\infty$ стремиться к точке P.

Таким образом теорема доказана.

Пусть P, L_+, E, C и QA имеют те же значения, что и в теореме X.

Теорема XI. *Пусть все траектории, пересекающие некоторую часть QQ' отрезка QA при возрастании t, покидают внутренность окружности C. Тогда на C существует такая точка S, что траектория L', проходящая при $t=\tau$ через точку S, обладает следующими свойствами:*

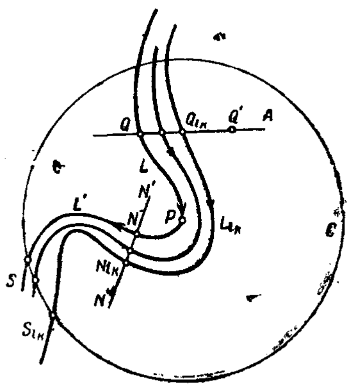
1) *при $t \to -\infty$ траектория L' стремится к P, причём все точки траектории L', соответствующие $t<\tau$, лежат внутри C;*

2) *какую бы точку N траектории L' соответствующую $t<\tau$ (и следовательно, лежащую внутри C), мы ни взяли, всегда можно через эту точку провести отрезок без контакта NN' такой, что всякая траектория, при $t=t_0$, пересекающая отрезок QA, достаточно близко к Q (но в точке, отличной от точки Q), пересечёт при $t=t_1>t_0$ отрезок NN' сколь угодно близко к точке N, не выходя за время от t_0 до t_1 из внутренности окружности C.*

Для доказательства возьмём на отрезке QQ' последовательность точек Q_i $(i=1,2,\ldots)$, стремящуюся к точке Q. По предположению, траектория, проходящая при $t=t_0$, через любую из точек Q_i, при некоторых значениях $t>t_0$ должна лежать вне окружности C; пусть S_i — первая точка её выхода из внутренности окружности C, соответствующая $t>t_0$. Точки S_i различны; следовательно, на окружности C лежит бесконечное множество точек S_i, которое должно иметь на C хоть одну точку сгущения. Пусть S — одна из этих точек сгущения. Выберем из последовательности точек Q_i такую подпоследовательность Q_{i_k} $(k=1,2,\ldots)$, чтобы соответствующая последовательность точек S_{i_k} $(k=1,2,\ldots)$ стремилась бы к точке S (черт. 6).

Рассмотрим траекторию L', проходящую при $t=\tau$ через точку S, и докажем, что L' при $t<\tau$ остаётся внутри C.

Действительно, пусть на L' есть точка, соответствующая $t=t_1<\tau$, лежащая вне C. Тогда и все траектории, проходящие при значениях $t=\tau$ через достаточно близкие к точке S точки S_{i_k} окружности C, при некоторых значениях $t<\tau$ также будут находиться вне окружности C. Траектория L' при некотором значении $\bar{t}$, лежащем между t_1 и τ, должна пересечь отрезок без контакта QQ', так как в противном случае траектории, проходящие при $t=\tau$ через достаточно близкие к S точки S_{t_k}, выходили бы при некотором значении $t<\tau$ из внутренности окружности C, не пересекая отрезок QQ', что противоречит определению точек S_{t_k}. Пусть M есть точка пересечения траектории L с отрезком QQ'. Нетрудно видеть, что точка M, в силу непрерывной зависимости от начальных условий, должна быть предельной для точек Q_{t_k}, т. е. должна совпадать с точкой Q. Но это невозможно, так как, по условию, траектория L, проходящая при $t=\bar{t}$ через точку Q, не имеет при $t>\bar{t}$ уже никаких точек на C, и, следовательно, не может при $t=\tau>\bar{t}$, пройти через точку S, лежащую на C.



Черт. 6.

Следовательно, при значениях $t<\tau$ траектория L' целиком лежит внутри C. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые были проведены при доказательстве теоремы X, нетрудно показать, что L_-' имеет P своей единственной предельной точкой. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы возьмём на части траектории L', соответствующей $t<\tau$ и, следовательно, лежащей внутри C, какую-нибудь точку N и проведём отрезок без контакта $N'N''$, содержащий точку N внутри себя. Нетрудно видеть, что траектория L_{t_k}, проходящая при $t=\tau$ через какую-либо точку S_{t_k}, достаточно близкую к точке S, при $t<\tau$, не встретив отрезка QQ'

пересечёт отрезок $N'N''$ в некоторой точке N_{i_k}. При дальнейшем убывании t, траектория L_{i_k} пересечёт отрезок QQ' в точке Q_{i_k}. Рассмотрим область D, лежащую целиком внутри C, ограниченную дугами QP и NP траекторий L и L', самой точкой P, отрезками QQ_{i_k} и NN_{i_k} и дугой $N_{i_k} Q_{i_k}$ траектории L_{i_k}. Всякая траектория, пересекающая при возрастании t отрезок без контакта QQ_{i_k} (в точке, отличной от Q'), входит в область D. Так как по условию теоремы она должна в дальнейшем выйти из окружности C, а следовательно, и из области D, то всякая траектория, пересекающая отрезок QQ_{i_k}, пересечёт также и отрезок NN_{i_k} (так как траектория может выйти из области D только через этот отрезок).

Кроме того, точка N_{i_m} $(i_m > i_k)$ будет лежать на отрезке NN' сколь угодно близко к точке N, если соответствующую точку S_{i_m} взять достаточно близко к точке S. Отсюда нетрудно видеть, что все траектории, пересекающие отрезок QQ_{i_k} достаточно близко к Q, пересекут отрезок NN_{i_k} при возрастании t сколь угодно близко к точке N*). Таким образом теорема доказана.

Заметим, что, обратно, все траектории, проходящие при $t = t_0'$ через точки отрезка NN_{i_k} (отличные от точки N), при убывании t пересекут отрезок QQ_{i_k} (и затем, при дальнейшем убывании t, выйдут из C). Действительно, если бы на NN_{i_k} существовала такая точка M, через которую при $t = t_0'$ проходила бы траектория, не пересекающая при $t < t_0'$ отрезок QQ_{i_k}, и, следовательно, при всех $t < t_0'$ остающаяся внутри D (а значит и внутри окружности C), то, в силу теоремы X, эта траектория, а также все траектории, пересекающие отрезок NM, не выходя из D, при $t \to -\infty$ стремились бы к точке P.

*) Отсюда нетрудно также вывести, что все точки N_{i_m} $(i_m > i_k)$ лежат на отрезке $N_{i_k}N$ по одну и ту же сторону точки N и образуют последовательность, расположенную в порядке возрастания номеров i_m и стремящуюся к точке N.

Но это противоречит тому, что на отрезке NN_{t_k} сколь угодно близко к точке N есть точки N_{t_m}, через которые проходят траектории, пересекающие отрезок QQ_{t_k} в точках Q_{t_m} и таким образом выходящие из области D.

Относительно траектории L', обладающей указанными в теореме XI свойствами, мы будем говорить, что *траектория L' есть продолжение траектории L относительно окружности C*; саму траекторию L мы назовём *продолжаемой* относительно окружности C. И, наоборот, траектория L есть *продолжение* траектории L' относительно окружности C*).

Пусть, попрежнему, внутри окружности C лежит только одно состояние равновесия P.

Теорема XII. *Существует только конечное число траекторий, стремящихся к P и продолжаемых относительно окружности C.*

Предположим противное; пусть существует бесконечное множество

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

траекторий, продолжаемых относительно C.

Без ограничения общности можно считать, что все эти траектории стремятся к P при $t \to +\infty$. Пусть A_1, $A_2, \ldots$ их последние (при возрастающем t) точки пересечения с окружностью C**). Возьмём одну из предельных точек множества $\{A_n\}$ и обозначим её через A. Нетрудно видеть, что траектория L, при $t=\tau$, проходящая через точку A, при всех значениях $t > \tau$ остаётся внутри C; действительно, в противном случае все траектории, проходящие при $t=\tau$ через достаточно близкие к точке A точки A_n окружности C, тоже покидали бы внутренность

*) Если ни через одну точку одной из областей, на которые простая дуга, образованная дугами траекторий L и L' и точкой P, делит внутренность окружности C, не проходит траектория, стремящаяся к P, то Бендиксон говорит, что кривая, составленная из L, P и L', есть «характеристика, пересекающая точку P».

**) При этом так же, как и в теоремах X и XI, предполагается, что на всех траекториях L_n есть точки, лежащие вне C.

окружности C, при $t > \tau$, что противоречит выбору этих точек.

Покажем, что траектория L при $t \to +\infty$ не может иметь предельных точек, отличных от точки P, и, следовательно, стремится к P.

В самом деле, пусть L_+ — полутраектория, выделенная из L, соответствующая значениям $t \geqslant \tau$, и, следовательно, кроме точки A, целиком лежащая внутри C.

Предположим что L_+ имеет предельную точку Q, отличную от P (и следовательно, не являющуюся состоянием равновесия). Пусть L_{n_1} — одна из траекторий L_n. Через точку Q можно провести отрезок без контакта l, не пересекающий траекторию L_{n_1}. Полутраектория L_+ должна пересечь отрезок l в бесконечном множестве точек; пусть P_1 и P_2 — две последовательные точки пересечения полутраектории L_+ с отрезком l. Рассмотрим целиком лежащую внутри C простую замкнутую кривую K, образованную дугой P_1P_2 полутраектории L_+ и отрезком P_1P_2. В силу следствия из теоремы VIII, внутри этой замкнутой кривой непременно должно содержаться хотя бы одно состояние равновесия, и, следовательно, там должна находиться точка P, так как, по предположению, внутри C нет других состояний равновесия. Траектория L_{n_1}, очевидно, не пересекает кривую K и так как она имеет точки вне кривой K, то траектория L_{n_1} лежит вне области, ограниченной кривой K. Следовательно, L_{n_1} не может стремиться к P, что противоречит нашему предположению.

Таким образом L_+ стремится к P.

Возьмём теперь на L_+ какую-нибудь точку B и проведём через неё отрезок без контакта $B'B''$, содержащий точку B внутри себя. Тогда бесконечное множество траекторий L_n пересечёт либо отрезок $B'B$, либо отрезок BB''. Пусть, например, траектории L_{n_1} и L_{n_2} пересекают отрезок $B'B$, соответственно в точках B_1 и B_2, и пусть B_2 лежит ближе к B, чем B_1.

В силу теоремы X, все траектории, пересекающие отрезок B_1B, будут при возрастании t, не выходя изнутри C, стремиться к точке P. Но это противоречит предположению, что траектория L_{n_2} продолжаема относительно окружности C.

Таким образом, теорема доказана.

Отметим, что при уменьшении радиуса окружности C число продолжаемых относительно C траекторий может неограниченно возрастать *).

Теоремы X и XI в известной мере освещают вопросы взаимного расположения траекторий; с помощью них мы можем уточнить строение множества предельных точек данной полутраектории, в том более сложном случае, когда оно не сводится к одному состоянию равновесия, или к замкнутой траектории.

Теорема XIII. *Множество всех предельных точек полутраектории L_+ состоит либо:* а) *из одного состояния равновесия; либо* б) *из одной замкнутой траектории; либо в) из состояний равновесия и траекторий, стремящихся к ним и продолжаемых по отношению к некоторым окружностям.*

Случаи а) и б) содержатся в теоремах VI и VII.

Если же не имеет место ни случай а), ни случай б), то в силу теоремы IV множество предельных точек L_+ состоит из состояний равновесия и траекторий, стремящихся к состояниям равновесия.

В самом деле, возьмём одну из этих предельных траекторий L_1, и пусть при $t \to +\infty$ она стремится к состоянию равновесия P_1. Построим окружность C с центром в P_1, не содержащую внутри ни одного состояния равновесия, кроме P_1, и пересекающую L_1. Возьмём на L_1 точку Q, лежащую после последней (при возрастающем t) точки пересечения траектории L_1 с C и проведём в Q отрезок без контакта $Q'Q''$, содержащий точку Q внутри себя. Так как точка Q — предельная для полутраектории L_+, то либо на $Q'Q$, либо на QQ'' (пусть, например, на QQ')

---

*) Бендиксон показал (Acta Mathem., 1900), что в том случае, когда правые части рассматриваемой системы — аналитические функции от x и y, число траекторий, продолжаемых относительно любой окружности, всегда конечно.

лежит бесконечное множество точек полутраектории L_+. Ни через одну точку отрезка QQ', достаточно близкую к Q, не может проходить траектория при $t \to +\infty$, стремящаяся к P_1, не выходя из C. Действительно, в противном случае, в силу теоремы X и полутраектория L_+, которая пересекает QQ' в точках, сколь угодно близких к Q, должна была бы при $t \to +\infty$, не выходя из C, стремиться к P_1 и, следовательно, имела бы в качестве своей предельной точки единственную точку P_1, что противоречит предположению. Но тогда из теоремы XI вытекает, что L_1 продолжаема по отношению к C.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XI

ЦЕНТР

А. Майер

Мы даём здесь теорию центра в том виде, как она была разработана Ляпуновым в 1892 г. в работе «Общая задача об устойчивости движения» *). Рассуждения Ляпунова далеко перекрывают не только теорию центра, данную Пуанкаре в 3-ем мемуаре, но частично и более поздние работы Бендиксона (Acta Mathematica, т. 24 (1901), стр. 1—30) и Фроммера (Mathem. Annalen, т. 99 (1928).

1. Необходимые и достаточные условия центра.

Следуя Пуанкаре, мы скажем, что состояние равновесия P является центром для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

если существует окрестность точки P, не содержащая других состояний равновесия, такая, что все траектории, пересекающие её в какой-либо точке (кроме точки P), — замкнуты.

---

*) Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, изд. 2-е, ОНТИ (1935), стр. 128—170.

Мы предположим, что X и Y — голоморфные функции от x и y в некоторой окрестности состояния равновесия; перенося в него начало координат, мы будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y),$$

где $X_k(x, y)$ и $Y_k(x, y)$ — однородные многочлены степени k.

В настоящем дополнении мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как показано Пуанкаре (гл. XI настоящего издания), необходимым условием центра в этом случае является следующее условие: уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = 0$$

должно иметь чисто мнимые корни: $\mu_1 = \lambda i$, $\mu_2 = -\lambda i$, где $\lambda > 0$. Мы предположим это условие выполненным.

Линейной заменой всегда можно привести в этом случае систему к виду:

$$\text{(A)} \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda y + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y),$$

где $X_k(x, y)$ и $Y_k(x, y)$, как и прежде, — однородные многочлены степени k по x и y, и ряды сходятся в некоторой окрестности начала, так что правые части суть голоморфные функции от x и y при $|x| < x_0$ и $|y| < y_0$.

Перейдём к полярным координатам ρ и φ, положив: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Тогда, после несложных вычислений, получим систему

$$\frac{d\rho}{dt}=\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\{X_k(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\cos\varphi+Y_k(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\sin\varphi\},$$

(A₁)

$$\frac{d\varphi}{dt}=\lambda+\sum_{k=2}^{\infty}\rho^{k-1}\{Y_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-$$
$$-X_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\},$$

где ряды, стоящие в правых частях, сходятся в области: $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$.

Так как $\lambda>0$, то из второго уравнения без труда видим, что существует такое $\rho_1>0$, что при $0\leqslant\rho\leqslant\rho_1$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ будем иметь:

(1) $$\frac{d\varphi}{dt}>0.$$

Поэтому, ограничиваясь этой областью значений ρ и φ, мы будем иметь ρ однозначной функцией от φ.

Исключая t, получим уравнение:

(A₁′) $$\frac{d\rho}{d\varphi}=$$
$$=\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\rho^k\{X_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi+Y_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\}}{\lambda+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\rho^{k-1}\{Y_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-X_k(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\}},$$

где знаменатель правой части в рассматриваемой области не обращается в нуль. Следовательно, правая часть этого уравнения есть голоморфная функция от ρ в области: $0\leqslant\rho\leqslant\rho_1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, и её можно представить в виде ряда по степеням ρ, сходящегося в указанной области. Таким образом, будем иметь

(Б) $$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2\sum_{k=2}^{\infty}a_k(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\rho^k,$$

где коэффициенты $a_k(\cos\varphi, \sin\varphi)$ суть многочлены по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и притом степени чётной — при нечётном k и нечётной — при чётном k.

В самом деле, уравнение (A_1') имеет вид:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho^k\alpha_k(\varphi)}{1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k\beta_k(\varphi)},$$

где $\alpha_k(\varphi)$ — многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, все члены которого имеют степень, чётную при нечётном k, и нечётную — при чётном k, а $\beta_k(\varphi)$ — многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, степени членов которого одной чётности с k. Следовательно, если мы напишем

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k\beta_k(\varphi)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\beta_k(\varphi)\right]^m=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\gamma_n(\varphi),$$

то $\gamma_n(\varphi)$ будет многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, степени членов которого одной чётности с n.

Наконец, перемножая ряды $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\rho^m\frac{\alpha_m(\varphi)}{\lambda}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^n\gamma_n(\varphi)$, получим многочлен $a_k(\varphi)=a_k(\cos\varphi, \sin\varphi)=\sum\limits_{m+n=k}\frac{1}{\lambda}\alpha_m(\varphi)\times$ $\times\gamma_n(\varphi)$, каждое слагаемое которого есть многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, степени членов которого обратной чётности с k.

Таким образом, пользуясь тождеством $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, мы можем считать коэффициенты $a_k(\varphi)$ однородными многочленами по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, степени которых обратной чётности с k.

Будем искать решение, определённое начальными значениями: $\rho=c$ $(c>0)$ при $\varphi=0$.

Мы утверждаем, что это решение может быть при достаточно малых значениях параметра c и всех φ из промежутка $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ представлено в виде ряда

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\varphi) c^k, \tag{2}$$

причём $u_1(\varphi) \equiv 1$.

Доказательство распадается на 2 части: а) формальное нахождение ряда и б) доказательство сходимости ряда в области: $0 \leqslant c \leqslant c_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где c_0 — достаточно малое положительное число.

Обращаясь сперва к формальному нахождению ряда (2), заметим, что в силу начальных условий: при $\varphi = 0$, $\rho = c$, будем иметь:

$$u_1(0) = 1, \quad u_k(0) = 0 \quad \text{при } k > 1. \tag{3}$$

Внеся выражение (2) в уравнение (B) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины c, получим систему уравнений для последовательного нахождения коэффициентов $u_k(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
&u_1'(\varphi) = 0,\\
&u_2'(\varphi) = a_0 u_1^2,\\
&u_3'(\varphi) = a_0 \cdot 2u_1 u_2 + a_1 u_1^3,\\
&u_4'(\varphi) = a_0(2u_1 u_3 + u_2^2) + a_1 \cdot 3u_1 u_2^2 + a_2 u_1^4,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Вообще:

$$u_k'(\varphi) = R_k(\varphi), \tag{4}$$

где $R_k(\varphi)$ есть многочлен с целыми положительными коэффициентами от величин $a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}$ и $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$.

Существенно для дальнейшего отметить, что если все a_n и u_n заменить в этом выражении $R_k(\varphi)$ положительными числами $\overline{a}_n$, $\overline{u}_n$ такими, что $|a_n| \leqslant \overline{a}_n$, $|u_n| \leqslant \overline{u}_n$, то новое $\overline{R}_k$ будет также положительным числом, причём $|R_k(\varphi)| \leqslant \overline{R}_k$.

В силу условий (3) из выражений для u_k' получаем

$$u_1(\varphi) \equiv 1,$$

$$u_2(\varphi) = \int_0^\varphi a_0(\varphi) d\varphi,$$

$$u_3(\varphi) = \int_0^\varphi [2a_0(\varphi) u_2(\varphi) + a_1(\varphi)] d\varphi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и вообще, в силу (4):

$$u_k(\varphi) = \int_0^\varphi R_k(\varphi) d\varphi. \tag{5}$$

Таким образом, ряд (2) формально построен. Остаётся рассмотреть вопрос о его сходимости.

Хотя сходимость этого ряда вытекает из общих теорем о зависимости решения дифференциального уравнения от параметра *), но мы изложим здесь доказательство сходимости ряда (2), так как эти теоремы не входят в обычный курс дифференциальных уравнений.

Для доказательства сходимости ряда (2) отметим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) \rho^k$, стоящий в правой части уравнения (B), изображает функцию от ρ, голоморфную при всех значениях ρ и φ из замкнутой области: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$. Следовательно, эта функция ограничена при всех значениях ρ и φ из указанной области, т. е. $\left| \sum\limits_0^\infty a_k \rho^k \right| < M$. В силу известной теоремы теории аналитических функций отсюда получаем

$$|a_k(\cos\varphi, \sin\varphi)| < \frac{M}{\rho_1^k}.$$

---

*) Ср., напр., Гурса, Курс математического анализа т. 3, § 463, стр. 24, ГТТИ (1933).

Обозначим $\frac{M}{\rho_1^k}$ через $\bar{a}_k$ и положим:

$$\bar{u}_1 = 1, \quad \bar{u}_2 = 2\pi\bar{a}_0, \quad \bar{u}_3 = 2\pi[2\bar{a}_0\bar{u}_2 + \bar{a}_1], \ldots$$

Вообще, найдя $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{k-1}$, мы определяем $\bar{R}_k$, заменяя в R_k все a_m и u_m через $\bar{a}_m$ и $\bar{u}_m$, а затем полагаем

$$\bar{u}_k = 2\pi\bar{R}_k.$$

В силу соотношения (5) и ранее сделанного замечания о функции $R_k(\varphi)$, мы при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ будем иметь

$$|u_k(\varphi)| \leqslant \bar{u}_k.$$

Отсюда следует, что для доказательства сходимости ряда (2) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k c^k. \tag{6}$$

Чтобы доказать сходимость последнего ряда, заметим, что мы получим $\bar{R}_k$, как коэффициент при c^k, если мы в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k\bar{\rho}^{k+2}$ подставим ряд $\bar{\rho} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k c^k$ и соберём вместе члены с одной и той же степенью переменной c.

Таким образом, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho_1^k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n c^n\right)^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{R}_k c^k.$$

Так как $\bar{u}_1 = 1$ и $\bar{u}_k = 2\pi\bar{R}_k$ при $k \geqslant 2$, то отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k c^k = c + 2\pi M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_1^k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n c^n\right)^{k+2}.$$

Обозначив $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k c^k$ через $\bar{v}$, получаем для $\bar{v}$ квадратное уравнение:

$$\bar{v} = c + 2\pi M \frac{\bar{v}^2}{1 - \frac{\bar{v}}{\rho_1}}. \tag{7}$$

Таким образом, остаётся доказать, что квадратное уравнение (7) имеет корень $\bar{v}$, обращающийся в нуль вместе с c и голоморфный при малых значениях c.

Решая уравнение (7), находим для искомого корня выражение:

$$\bar{v} = \frac{c + \rho_1 - \sqrt{(c+\rho_1)^2 - 4c\rho_1(1 + 2\pi M\rho_1)}}{2(1 + 2\pi M\rho_1)}.$$

Отсюда следует, что $\bar{v}$ есть голоморфная функция параметра c при достаточно малых значениях его. Следовательно, всегда существует столь малое c_0, что при $0 \leqslant c \leqslant c_0$ ряд (6), а следовательно, и ряд (2) сходятся.

Таким образом, доказано, что решение уравнения (B), удовлетворяющее начальным условиям: $\varphi = 0$, $\rho = c$, где $0 \leqslant c \leqslant c_0$, можно представить в виде ряда

$$\rho(\varphi) = c + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(\varphi) c^k,$$

причём этот ряд сходится при всех значениях φ из области $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а коэффициенты его определятся по формулам (5).

На основании этого результата легко решить вопрос об условиях существования центра.

Рассмотрим функции $u_k(\varphi)$. Так как $a_0(\varphi)$ есть однородный многочлен от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, все члены которого нечётной степени, то его можно записать как линейную функцию от $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, причём n будет принимать только нечётные значения; следовательно, при такой записи в $a_0(\varphi)$ свободного члена не будет. Отсюда вытекает, что

$$u_2(\varphi) = \int_0^{\varphi} a_0(\varphi)\, d\varphi$$

будет также линейной функцией от $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$.

Но тогда подинтегральное выражение для $u_3(\varphi)$ можно представить также в виде линейной функции от $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, причём теперь уже n будет принимать только чётные значения. Таким образом, для $u_3(\varphi)$ есть две возможности:

а) подинтегральная функция не имеет свободного члена — тогда $u_3(\varphi)$ есть линейная функция от $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$;

б) подинтегральная функция имеет свободный член g — тогда $u_3(\varphi) = g\varphi + v_3(\varphi)$, где $v_3(\varphi)$ — периодическая функция от φ.

Если имеет место случай а), то мы рассмотрим дальнейшие коэффициенты: $u_4(\varphi)$, $u_5(\varphi)$, ... Допустим, что по отношению к каждому $u_k(\varphi)$ при $k < m$ имеет место случай а), так что все $u_k(\varphi)$ при $k < m$ являются периодическими функциями от φ, тогда как для $u_m(\varphi)$ наступает случай б), так что $u_m(\varphi) = g\varphi + v_m(\varphi)$, где $v_m(\varphi)$ — периодическая функция от φ*).

При этом предположении мы будем иметь

$$\rho(0) = c, \quad \rho(2\pi) = c + 2\pi g c^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k(2\pi) c^k.$$

Отсюда, при $0 < c \leqslant c_1$, где c_1 — достаточно мало, получим

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} u_k(2\pi) c^k \right| \leqslant \pi |g| c^m,$$

так что при этих значениях будем иметь:

$$|\rho(2\pi) - c| \geqslant \pi |g| c^m > 0.$$

Отсюда следует, что все траектории, соответствующие достаточно малым значениям параметра c, не замкнуты. Следовательно, в достаточно малой окрестности начала координат нет ни одной замкнутой траектории.

---

*) Можно было бы показать, что «m» есть необходимо нечётное число; однако мы на этом не будем останавливаться, так как это нам для дальнейшего не нужно.

Допустим теперь, что случай б) никогда не наступает, так что все $R_k(\varphi)$ не имеют свободного члена. Тогда все $u_k(\varphi)$ суть периодические функции от φ и при всех c, из промежутка $0 \leqslant c \leqslant c_0$, имеем

$$\rho(0) = c, \quad \rho(2\pi) = c.$$

Следовательно, все траектории, пересекающие отрезок оси абсцисс между точками $(0, 0)$ и $(c_0, 0)$, замкнуты и притом лежат целиком в сколь угодно малой окрестности начала координат при достаточно малом значении параметра c, т. е. имеет место случай центра.

Таким образом, случай центра имеет место лишь тогда, когда выполнено бесконечное множество условий — именно, условий равенства нулю свободных членов во всех $R_k(\varphi)$. Так как составление функций $R_k(\varphi)$ требует вычисления всех $u_m(\varphi)$ при $m < k$, то в большинстве случаев практически невозможно непосредственно по этим условиям исследовать те случаи, когда в действительности имеет место центр.

2. Теорема Ляпунова.

Ляпуновым была впервые доказана нижеследующая теорема:

Необходимое и достаточное условие существования центра для системы

$$(A^*) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y), \end{aligned}$$

где коэффициенты a, b, c, d таковы, что уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\mu & b \\ c & d-\mu \end{vmatrix} = 0$$

имеет чисто мнимые корни, заключается в том, что система (A^*) должна иметь не зависящий от t

действительный голоморфный интеграл $F(x, y) = C$ *).

Докажем предварительно 3 леммы, которые будут нам нужны в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $F_m(x, y) \not\equiv 0$ — *однородный многочлен от* x *и* y *степени* m:

$$F_m(x, y) = \sum_{n=0}^{m} a_{n,\, m-n} x^n y^{m-n},$$

и пусть $xF'_{my} - yF'_{mx} \equiv 0$. *Тогда:* 1) m *есть число чётное, т. е.* $m = 2p$, *где* p — *целое положительное число;* 2) $F_m(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)^p$, *где* α — *постоянное число.*

Доказательство. Составим выражение:

$$xF'_{my} - yF'_{mx} =$$

$$= -a_{1,\, m-1} y^m + \sum_{n=1}^{m-1} [(m-n+1) a_{n-1,\, m-n+1} -$$

$$-(n+1) a_{n+1,\, m-n-1}] x^n y^{m-n} + a_{m-1,\, 1} x^m.$$

Условие тождественного равенства нулю даёт:

$$a_{1,\, m-1} = 0, \quad a_{m-1,\, 1} = 0,$$

$$(m-n+1) a_{n-1, m-n+1} - (n+1) a_{n+1, m-n-1} = 0$$

при

$$1 \leqslant n \leqslant m-1.$$

Из последних соотношений видно, что равенство нулю $a_{1,m-1}$ влечёт за собой равенство нулю всех коэффициентов с нечётным первым индексом, и что при нечётном m из $a_{m-1,1} = 0$ следует равенство нулю всех коэффициентов с чётным первым индексом, т. е. тождественное равенство нулю многочлена $F_m(x, y)$, вопреки предположению.

---

*) Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения. Отметим, что эта теорема осталась неизвестна Фроммеру (см. цит. работу), который говорит, что вопрос о существовании голоморфного интеграла в рассматриваемом случае не решён.

При m чётном, равном $2p$, коэффициенты $a_{n, m-n}$ с нечётным индексом n попрежнему равны нулю. Коэффициенты же $a_{n, m-n}$ с чётным индексом n выражаются через $a_{0,m}$ следующим образом:

$$a_{2k, m-2k} = \frac{m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{2\cdot 4\ldots(2k)} a_{0, m}.$$

Полагая $m = 2p$ и обозначая $a_{0,m}$ через α и внося эти выражения в $F_m(x, y)$, получаем

$$a_{2k, 2p-2k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k} a_{0, m}$$

и, следовательно,

$$F_m(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)^p,$$

где $\alpha = a_{0,m}$.

Лемма II. *Пусть* $F_m(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{m} a_{n, m-n} x^n y^{m-n} \neq 0$, *причём коэффициенты* $a_{n, m-n}$ *действительные числа, и пусть* $F_m(x, y)$ *не делится на* $x^2 + y^2$. *Тогда и* $xF'_{my} - yF'_{mx}$ *также не делится на* $x^2 + y^2$.

Доказательство этой леммы столь же элементарно, как и предыдущей леммы. Достаточно заметить, что необходимое и достаточное условие делимости многочлена на $x^2 + y^2$ заключается в том, что этот многочлен обращается в нуль при $x = iy$. Тогда без труда убеждаемся, что условие обращения в нуль при $x = iy$ многочлена $xF'_{my} - yF'_{mx}$ совпадает с условием обращения в нуль при $x = iy$ многочлена $F_m(x, y)$.

Лемма III. *Пусть* $U(x, y) = \frac{F_m(x, y)}{(x^2 + y^2)^p}$, *где* $F_m(x, y)$ — *однородный многочлен с действительными коэффициентами, не делящийся на* $x^2 + y^2$. *Тогда, при* $p \neq 0$, *выражение* $xU'_y - yU'_x$ *не может быть многочленом.*

Лемма эта вытекает непосредственно из леммы II.

Перейдём теперь к доказательству теоремы.

Предположим, что система

$$
\text{(A)} \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y),
\end{aligned}
$$

эквивалентная системе (A*), имеет центр, и докажем, что существует действительный голоморфный интеграл: $F(x, y) = C$ этой системы, не зависящий от t.

Для доказательства рассмотрим ряд

$$
(2) \qquad \rho = c + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(\varphi) c^k,
$$

изображающий решение системы (A) в полярных координатах. Так как, по предположению, система (A) имеет центр, то, по доказанному выше, каждый из коэффициентов $u_k(\varphi)$ есть многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Из известных теорем о неявных функциях следует, что из соотношения (2) можно выразить c как функцию от ρ, в виде ряда, сходящегося при достаточно малых значениях ρ. Обращение ряда (2), производимое обычным путём, позволяет увидеть, что ряд для c имеет вид:

$$
(8) \qquad c = \rho + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\varphi) \rho^k,
$$

где $v_k(\varphi)$ есть многочлен по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, и ряд (8) сходится в области: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$ *).

*) Ср. Гурса, Курс математического анализа, т. I, стр. 80—82.

Формальное нахождение коэффициентов ряда (8) не представляет затруднений. Для этого внесём выражения (8) для c в правую часть равенства (2) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ρ. Получатся формулы, позволяющие последовательно определить $v_k(\varphi)$, как многочлены по $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$
\begin{aligned}
v_2(\varphi) &= -u_2(\varphi), \\
v_3(\varphi) &= -u_3(\varphi) - u_2(\varphi) \cdot 2v_2(\varphi), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Если мы обе части равенства (8) возведём в квадрат, то будем иметь:

$$c^2 = \rho^2 + \sum_{k=3}^{\infty} d_k(\varphi)\,\rho^k. \tag{9}$$

Нетрудно усмотреть, что в общем выражении $v_k(\varphi) = R_k(\varphi)$ в правую часть будут входить только $u_2, \ldots, u_k, v_2, \ldots, v_{k-1}$ и что подобно тому, как это было в предыдущем случае (см. выше), мы получим вместо $R_k(\varphi)$ положительную величину $\overline{R}_k$, причём $|R_k(\varphi)| \leqslant \overline{R}_k$, если вместо $-u_2, -u_3, \ldots, -u_k, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ подставим положительные числа $\overline{u}_n, \overline{v}_n$ такие, что

$$|u_n(\varphi)| \leqslant \overline{u}_n, \quad |v_n(\varphi)| \leqslant \overline{v}_n.$$

Это обстоятельство позволяет доказать сходимость ряда (8) тем же методом, каким была доказана сходимость ряда (2).

В самом деле в силу того, что ряд (2) сходится при всех значениях φ и c из области: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant c < c_0$ и изображает ограниченную при этих значениях φ и c функцию, то для коэффициентов $u_k(\varphi)$ будем иметь неравенства:

$$|u_k(\varphi)| < \frac{M}{c_0^k}.$$

Положив затем, $\overline{u}_k = \dfrac{M}{c_0^k}$, $\overline{v}_2 = \overline{u}_2$, $\overline{v}_3 = \overline{u}_3 + \overline{u}_2 \cdot 2\overline{v}_2$, $\ldots$ и вообще $\overline{v}_k = \overline{R}_k$, мы без труда заметим, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \overline{R}_k \rho^k = \sum_{k=2}^{\infty} \overline{u}_k \Big(\rho + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{v}_n \rho^n\Big)^k.$$

Отсюда для $z = \rho + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{v}_n \rho^n$ получаем уравнение

$$z = \rho + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M}{c_0^k} z^k$$

или

$$z = \rho + M\left[\frac{1}{1 - \dfrac{x}{c_0}} - 1 - \frac{z}{c_0}\right].$$

Переходя затем от полярных координат обратно к декартовым, полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим, что соотношение (9) изображает интеграл системы (A), причём ряд, стоящий в правой части этого равенства, будет сходиться при всех значениях x и y из некоторой области, окружающей начало координат.

Однако ещё нельзя утверждать, что мы получим, таким образом, искомый **голоморфный** интеграл системы (A). В самом деле, при переходе к декартовым координатам член $d_k(\varphi)\rho^k$ хотя и даст однородную функцию от x и y степени k, но эта функция может не быть голоморфной в окрестности начала координат, так как она, вообще говоря, имеет вид

$$U_k(x, y) + \sqrt{x^2+y^2}\, V_k(x, y),$$

где $U_k(x, y) = \dfrac{F_m(x, y)}{(x^2+y^2)^p}$, причём F_m есть однородный многочлен степени $m = 2p + k$ и, следовательно, $U_k(x, y)$ есть однородная функция степени k, а $V_k(x, y)$ имеет аналогичное выражение, но степень однородной функции $V_k(x, y)$ есть $k-1$.

Таким образом, мы получим интеграл

$$\Phi(x, y) \equiv$$

$$\equiv x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} [U_k(x, y) + \sqrt{x^2+y^2}\, V_k(x, y)] = C,$$

где ряд, стоящий в правой части, сходится в круге $x^2 + y^2 \leqslant \bar{\rho}^2$.

Чтобы получить голоморфный интеграл, заметим, что если бы мы перешли в системе (A) к полярным координатам

Легко видеть, что это уравнение имеет решение, обращающееся в нуль при $\rho = 0$ и голоморфное при $0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$.

Следовательно, ряд $\rho = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \bar{v}_n \rho^n$ сходится при $0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$, а так как при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ имеем: $|v_n(\varphi)| \leqslant \bar{v}_n$, то и ряд (8) будет сходиться при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$.

натам, полагая $x = -\rho\cos(\varphi+\pi)$, $y = -\rho\sin(\varphi+\pi)$, то все предыдущие формулы останутся в силе, если в них заменить всюду ρ на $-\rho$ и φ на $\varphi+\pi$. При обратном переходе по тем же формулам к декартовым координатам мы получим те же функции $U_k(x, y)$ и $V_k(x, y)$, но вместо $\sqrt{x^2+y^2}$ будет стоять $-\sqrt{x^2+y^2}$.

Поэтому функция

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} U_k(x, y), \tag{10}$$

приравненная постоянной, есть также интеграл системы (A), причём ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} U_k(x, y)$ сходится попрежнему в круге $x^2+y^2 \leqslant \bar{\rho}^2$.

Чтобы доказать, что $F(x, y) = C$ есть голоморфный интеграл, достаточно показать, что $U_k(x, y)$ есть целый многочлен, т. е. что показатель p равен 0.

Для этого напишем тождество:

$$\frac{dF}{dt} = F_x'\left[-\lambda y + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y)\right] + F_y'\left[\lambda x + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y)\right] \equiv 0 \tag{11}$$

или

$$\lambda \sum_{k=3}^{\infty} (xU'_{ky} - yU'_{kx}) + 2\sum_{k=2}^{\infty}(xX_k + yY_k) + \sum_{k=2}^{\infty} X_k \sum_{k=3}^{\infty} U'_{kx} + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k \sum_{k=3}^{\infty} U'_{ky} \equiv 0. \tag{11'}$$

Легко убедиться, что $xU'_{ky} - yU'_{kx}$ есть однородная функция той же степени k, как само U_k. Поэтому тождество (11′) распадается на систему тождеств:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda(xU'_{3y} - yU'_{3x}) \equiv -2xX_2 - 2yY_2, \\ \lambda(xU'_{4y} - yU'_{4x}) \equiv -2xX_3 - 2yY_3 - U'_{3x}X_2 - U'_{3y}Y_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{12}$$

Вообще $\lambda(xU'_{ny}-yU'_{nx})$ выразится многочленом, составленным из X_k, Y_k и частных производных по x и по y от U_k при $k<n$.

В силу леммы III, $U_3(x, y)$ есть целый многочлен, ибо в правой части соответствующего тождества стоит многочлен $2xX_2+2yY_2$. Если доказано, что все U_k при $k<n$ — многочлены, то из выражения для $xU'_{ny}-yU'_{nx}$ и леммы III вытекает, что U_n есть также многочлен *).

Следовательно, каждая из функций $U_k(x, y)$ есть многочлен. В силу сходимости ряда (10) отсюда следует, что соотношение $F(x, y)=C$ есть действительно голоморфный интеграл системы (A), что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что из существования голоморфного интеграла, не зависящего от t, следует, что для системы (A) имеет место центр.

В самом деле, пусть система (A) имеет голоморфный интеграл:

$$F(x, y)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}F_k(x, y)=C, \tag{13}$$

где каждая функция $F_k(x, y)$ есть однородный многочлен степени k и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}F_k(x, y)$ сходится в круге $x^2+y^2\leqslant r^2$.

Без ограничения общности можно считать, что $F_0=0$. Далее из тождества (11) и леммы I следует, что если $F_m(x, y)$ есть первый член ряда (13), не равный тождественно нулю, то $m=2p$ и $F_m(x, y)=a(x^2+y^2)^p$, причём без ограничения общности можно считать, что $a=1$.

Итак, вдоль каждой траектории мы имеем тождество:

$$(x^2+y^2)^p+\sum_{k=m+1}^{\infty}F_k(x, y)\equiv C. \tag{14}$$

*) Заметим, что мы не ставим перед собой вопроса о возможности удовлетворить всем равенствам (12). Из предыдущего следует, что эти равенства удовлетворяются теми функциями $U_k(x, y)$, которые получаются из $d_k(\varphi)\rho^k$ — в случае, когда имеет место центр.

Из последнего равенства очевидно, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь малое $\eta > 0$, что если мы рассматриваем траектории, пересекающие η-окрестность начала координат, то C будет положительно и меньше ε.

Перейдём к полярным координатам, полагая

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Тождество (14) при этом перейдёт в тождество

$$(15) \qquad \rho^{2p} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \rho^k F_k(\cos \varphi, \sin \varphi) \equiv C.$$

Заметим, что ряд, стоящий в левой части равенства (15), сходится при $\rho \leqslant r$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и притом равномерно относительно φ. Поэтому изображаемая им функция ограничена в указанной области.

Чтобы показать, что из равенства (15) вытекает, что система (A) имеет в достаточно малой окрестности начала координат только периодические решения, извлечём из обеих частей равенства (15) арифметический корень степени $2p$. Обозначая для краткости $c_1 = \sqrt[2p]{C}$, будем иметь

$$(16) \qquad \rho \sqrt[2p]{1 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \rho^{k-m} F_k(\cos \varphi, \sin \varphi)} = c_1.$$

Очевидно, что существует столь малое $\rho_1 > 0$, что при $\rho \leqslant \rho_1$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ стоящий слева корень есть голоморфная функция от ρ. Поэтому равенство (16) можно записать так:

$$(16') \qquad \rho \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \rho^{n-1} d_n(\varphi)\right] = c_1.$$

Коэффициенты $d_n(\varphi)$ легко находятся по методу неопределённых коэффициентов, причём, подобно тому, как это было и раньше, $d_n(\varphi)$ есть многочлен от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Повторяя рассуждения, проведённые в разборе предыдущего случая, мы без труда убедимся, что ряд (16') можно обратить, т. е. существует такое $c_0 > 0$, что при $0 \leqslant c \leqslant c_0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, имеем

$$\rho = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\varphi)\, c_1^n, \tag{17}$$

причём $f_n(\varphi)$ — многочлены от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ *).

Отсюда следует, что ρ есть периодическая функция от φ, т. е. что траектории в достаточно малой окрестности начала координат замкнуты. Таким образом, система (A) имеет центр.

Теорема Ляпунова доказана полностью.

В заключение сделаем два замечания.

1. Изложенный в 3-м мемуаре Пуанкаре метод есть по существу попытка решить вопрос о центре отысканием голоморфного интеграла путём непосредственного подбора функций $U_k(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям (12). Этот путь был также исследован Ляпуновым.

Ляпунов доказал, что если коэффициенты $u_k(\varphi)$ ряда (2) получатся из уравнений (4) как периодические функции φ при $k < m$, тогда как $u_m(\varphi)$ уже не будет периодической функцией:

$$u_m(\varphi) = g\varphi + v_m(\varphi),$$

то и $U_k(x, y)$ при $k < m+1$ можно найти из равенств (12), тогда как подобрать $U_{m+1}(x, y)$, удовлетворяющее соответствующему уравнению, уже невозможно. Но возможно в этом случае выбрать $U_{m+1}(x, y)$ так, чтобы левая часть этого уравнения отличалась от правой на величину

$$G(x^2+y^2)^{\frac{m+1}{2}}$$

(напомним, что можно доказать, что m есть число нечётное). Величина G связана с величиной g простым соотношением

$$G = \frac{2g}{\lambda},$$

*) Отметим, что в отличие от ряда (2), в ряд (17) входит постоянное c_1, не являющееся, вообще говоря, начальным значением ρ.

где λ — коэффициент, входящий в члены первой степени системы (A)*).

2. Из общей качественной теории (см. доп. 1) следует, что состояния равновесия разбиваются на 2 класса. Именно, пусть P — состояние равновесия. Тогда есть две и только две возможности: или вокруг P можно построить окрестность, не содержащую целиком никакой замкнутой траектории, окружающей P, или такой окрестности вокруг P построить нельзя.

В последнем случае, очевидно, любая окрестность P будет содержать целиком бесконечное множество траекторий, окружающих P.

Можно дать два определения понятия центра. Согласно Пуанкаре, состояние равновесия P называется центром в том и только в том случае, если все траектории, пересекающие некоторую окрестность U точки P, замкнуты и лежат целиком в U, причём U можно взять сколь угодно малой.

Согласно Бендиксону, центром называется такое состояние равновесия P, в любой окрестности которого лежат замкнутые траектории, окружающие P (хотя может быть и не существует окрестности точки P, сплошь заполненной замкнутыми траекториями, окружающими P).

Возникает, естественно, вопрос: в каких случаях оба определения центра эквивалентны. Иначе: каковы должны быть условия, наложенные на правые части системы, чтобы каждое состояние равновесия, являющееся центром в смысле Бендиксона, было необходимо и центром в смысле Пуанкаре.

Для исследованной здесь системы (A) имеет место эквивалентность обоих определений. В самом деле, если не выполнены условия центра (т. е. не все коэффициенты $u_k(\varphi)$ ряда (2) являются периодическими функциями от φ), то, как мы видели, в некоторой окрестности начала координат нет ни одной замкнутой траектории.

Если же условия центра выполнены (все $u_k(\varphi)$ периодичны), то, как мы видели, все траектории, пересекающие

*) Ср. Ляпунов, цит. сочинение, стр. 165—169.

достаточно малый отрезок полярной оси: $\varphi=0$, $0\leqslant\rho\leqslant c_0$ — замкнуты. Так как из уравнения (В) следует, что каждую прямую $\varphi=\varphi_0$ можно путём замены переменных $\bar\rho=\rho$, $\bar\varphi=\varphi-\varphi_0$ взять за полярную ось, не нарушая предпосылок, лежащих в основе рассуждений, то в некоторой окрестности начала нет ни одной точки, через которую проходила бы незамкнутая траектория, т. е. имеет место центр в смысле Пуанкаре.

Дюлак доказал, что если только правые части системы

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y),\quad \frac{dy}{dt}=Y(x, y)$$

голоморфны в некоторой окрестности исследуемого состояния равновесия P (хотя бы младшие члены разложений X и Y в окрестности состояния равновесия были степени выше первой), то оба определения центра эквивалентны, т. е. из существования бесконечного множества замкнутых траекторий, стягивающихся к P, следует, что некоторая окрестность U точки P сплошь заполнена замкнутыми траекториями, стягивающимися к P.

В случае же, если правые части X и Y не голоморфны, то можно построить примеры, когда имеет место центр в смысле Бендиксона, но не в смысле Пуанкаре. Например, это имеет место для системы

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2)^3\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)^3\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

где замкнутыми являются траектории $x^2+y^2=\frac{1}{k\pi}$ (k — целое) и только они.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

В. В. Степанов

Исследования Пуанкаре о расположении интегральных кривых на поверхности тора были впоследствии приведены в систему и в одном пункте существенно дополнены французским математиком Данжуа *).

Рассматривая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega}{dt} = \Omega(\varphi, \omega), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\varphi, \omega), \tag{1}$$

Данжуа не предполагает, что функции Ω и Φ — тригонометрические полиномы или даже аналитические функции. Кроме того, при наличии условия $\Phi \neq 0$ допускается обращение в нуль функции Ω. Таким образом, система (1) может быть сведена к уравнению

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = A(\varphi, \omega), \tag{2}$$

где функция A предполагается непрерывной и однозначной на поверхности тора, т. е. непрерывной периодической функцией от двух аргументов φ и ω, с периодом 2π по каждому из них. Кроме того, требуется, чтобы через любую точку тора (φ_0, ω_0) проходила единственная интегральная кривая уравнения (2); для этого достаточно

*) Denjoy, Journal de Mathematiques, IXC, t. 11, 1932.

предположить, что функция A удовлетворяет по аргументу ω условию Липшица

$$|A(\varphi, \omega') - A(\varphi, \omega'')| \leqslant L |\omega' - \omega''|$$

(L — положительное постоянное). В частности, это последнее условие выполняется, если существует непрерывная производная $\frac{\partial A}{\partial \omega}$.

Так как функция A не обращается в бесконечность, то меридиан $\varphi = 0$ является, как и у Пуанкаре, циклом без контакта, и каждое решение дифференциального уравнения может быть продолжено для $-\infty < \varphi < +\infty$, причём интегральная кривая бесконечное множество раз пересечёт меридиан $\varphi = 0$. Решение, определённое начальными значениями: $\varphi = 0$, $\omega = \omega_0$, может быть записано в виде

$$\omega = u(\varphi, \omega_0). \tag{3}$$

При увеличении аргумента φ на 2π функция u, вообще, возвращается к прежнему значению; если при возрастании φ на $2q\pi$ функция u возрастает на $2p\pi$ (p — целое число, q — натуральное), то уравнения представляют цикл, т. е. замкнутую кривую, делающую q оборотов в направлении меридиана и p оборотов вдоль оси тора.

Рассмотрим далее u как функцию от ω_0. Начальным условиям $\varphi = 0$, $\omega = \omega_0 + 2\pi$ удовлетворяет кривая $\omega = u(\varphi, \omega_0 + 2\pi)$; но геометрически, в силу однозначности решения уравнения (2), это та же кривая (3) на торе, только начальной точке и всем следующим приписаны увеличенные на 2π координаты ω.

Итак, мы получаем:

$$u(\varphi, \omega_0 + 2\pi) = u(\varphi, \omega_0) + 2\pi.$$

Вводя функцию

$$v(\varphi, \omega_0) = u(\varphi, \omega_0) - \omega_0,$$

мы заключаем, что v, как функция от ω_0, допускает период 2π, и при $\varphi = 0$ она обращается в нуль при любом ω_0.

Если мы рассмотрим два решения уравнения (1)

$$(3') \qquad \omega = u(\varphi, \omega_0), \quad \omega' = u(\varphi, \omega_0'),$$

причём $\omega_0' - \omega_0$ не является кратным 2π, то $\omega' - \omega$ тоже не может стать кратным 2π, иначе две характеристики (3') имели бы общую точку; следовательно, разность $u(\varphi, \omega_0') - u(\varphi, \omega_0)$ заключена всегда между теми же последовательными кратными 2π, что и разность $\omega_0' - \omega_0$. В частности, если $\omega_0 - \omega_0' < 0$, то

$$u(\varphi, \omega_0) < u(\varphi, \omega_0')$$

для любого φ; таким образом, u является при постоянном φ возрастающей функцией от ω_0.

Обозначим через $\beta(\varphi)$ минимум функции $v(\varphi, \omega_0)$ при изменении ω_0 в интервале $(0,2\pi)$, а через $\gamma(\varphi)$ её максимум на том же интервале, и пусть

$$\Delta(\varphi) = \gamma(\varphi) - \beta(\varphi).$$

Очевидно, $\Delta(0) = 0$. Докажем, что $\Delta(\varphi) < 2\pi$.

В самом деле, в противном случае нашлись бы три числа φ', ω_0', ω_0'' (причём в силу периодичности v можно считать $\omega_0' < \omega_0'' < \omega_0' + 2\pi$) такие, что

$$v(\varphi', \omega_0'') - v(\varphi', \omega_0') = \pm 2\pi.$$

Но тогда функция

$$u(\varphi, \omega_0'') - u(\varphi, \omega_0') = \omega'' - \omega'$$

принимала бы при $\varphi = 0$ значение $\omega_0'' - \omega_0'$, а при $\varphi = \varphi'$ значение $\omega_0'' - \omega_0' \pm 2\pi$; следовательно, для некоторого значения φ'', среднего между 0 и φ', разность $\omega'' - \omega'$ была бы равна 0 или 2π, что противоречит единственности.

При помощи функции (3) легко написать закон последования:

$$\omega_1 = u(2\pi, \omega_0) = \omega_1(\omega_0)$$

и вообще

$$\omega_n = u(2n\pi, \omega_0) = \omega_n(\omega_0).$$

В наших теперешних предположениях легко видеть, что ω_1 является непрерывной возрастающей функцией от ω_0 (см. Гурса, т. III, гл. XXIII); но мы уже не вправе утверждать, что ω_1 есть голоморфная функция от ω_0. Более того, лишь при существовании непрерывной производной $\frac{\partial A}{\partial \omega}$ функция ω_1 допускает непрерывную производную по ω_0.

Однако, условие голоморфности функции $\omega_1 = \omega_1(\omega_0)$ не входит в рассуждения Пуанкаре, и его выводы остаются справедливыми и в наших предположениях.

Можно вместе с Данжуа доказать в общем случае, как при наличии, так и при отсутствии предельных циклов, существование *числа вращения* μ (рационального или иррационального).

В самом деле, для ω_n мы получаем, в силу доказанного: 1) ω_n есть возрастающая функция от ω_0; 2) если $\omega_0 < \omega_0' < \omega_0 + 2\pi$, то $\omega_n < \omega_n' < \omega_n + 2\pi$; 3) $\omega_n - \omega_0 = u(2n\pi, \omega_0) - \omega_0 = v(2n\pi, \omega_0)$ имеет период 2π по ω_0. Обозначая минимум и максимум функции $v(2n\pi, \omega_0)$, соответственно, через $n\beta_n$ и $n\gamma_n$, имеем

$$n(\gamma_n - \beta_n) < 2\pi.$$

Возьмём теперь целое число $p \geqslant 1$, и пусть $n = pr + s$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant p-1$. Мы имеем:

$$p\beta_p \leqslant \omega_{mp} - \omega_{(m-1)p} \leqslant p\gamma_p, \quad m = 1, 2, \ldots, r;$$

$$\beta_1 \leqslant \omega_k - \omega_{k-1} \leqslant \gamma_1, \quad k - rp = 1, 2, \ldots, s; \ s \leqslant p-1.$$

Отсюда получаем:

$$rp\beta_p + s\beta_1 \leqslant n\beta_n \leqslant n\gamma_n \leqslant rp\gamma_p + s\gamma_1.$$

Оставляя p постоянным и неограниченно увеличивая n, находим:

$$\beta_p \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \beta_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \gamma_n \leqslant \gamma_p.$$

Но по предыдущему $\gamma_p - \beta_p < \frac{2\pi}{p}$, следовательно, γ_n и β_n при $n \to \infty$ имеют общий предел $2\pi\mu$, причём $\beta_n \leqslant 2\pi\mu \leqslant \gamma_n$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n-\omega_0}{n}=2\pi\mu.$$

Заметим, что эта же формула легко доказывается и для $n<0$.

Очевидно, число μ есть то самое, которое определено Пуанкаре в случае отсутствия предельных циклов.

Допустим теперь, что на торе существует замкнутая траектория, проходящая через точку $(0, \omega_0)$, причём она приходит снова в эту точку при $\varphi=2q\pi$ и $\omega_q=\omega_0+2p\pi$; очевидно, что при $\varphi=2rq\pi$ приращение ω_0 будет $2rp\pi$ (r — любое целое). Таким образом, для этой частной последовательности точек имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\omega_{rq}-\omega_0}{rq}=\frac{p}{q}.$$

В силу доказанного существования предела μ получаем

$$\mu=\frac{p}{q}.$$

Итак, *при наличии замкнутой траектории число* μ — *рациональное.*

Обратно, пусть $\mu=\frac{p}{q}$ рационально (дробь дана в несократимом виде), тогда по определению чисел β_q и γ_q мы имеем

$$\beta_q\leqslant\frac{v(2q\pi,\ \omega_0)}{q}\leqslant\gamma_q.$$

Вычитая из этих неравенств величину $2\pi\frac{p}{q}=2\pi\mu$ и замечая, что $\beta_q\leqslant 2\pi\mu\leqslant\gamma_q$, получаем

$$-\beta_q'\leqslant v(2q\pi,\ \omega_0)-2p\pi\leqslant\gamma_q',$$

где $0\leqslant\beta_q'=2p\pi-q\beta_q$, $0\leqslant\gamma_q'=q\gamma_q-2p\pi$. Но $-\beta_q'$ и γ_q' являются минимумом и максимумом непрерывной функции $v(2q\pi,\ \omega_0)-2p\pi$, следовательно, они достигаются в интервале $0\leqslant\omega_0\leqslant 2\pi$ и, значит, найдётся такое значение ω_0', что $2p\pi=v(2q\pi,\ \omega_0')=\omega_q'-\omega_0'$. Соответствующая характеристика $\omega = u(\varphi, \omega_0')$ является замкнутой траекторией.

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее отображение меридиана C тора, соответствующего $\varphi = 0$ на круг Γ радиуса 1. Пусть закон последования на меридиане C будет $\omega_1 = \omega_1(\omega_0)$ и вообще $\omega_n = \omega_n(\omega_0)$. Точке M_0 с координатой ω_0 на C поставим в соответствие произвольную точку M_0 с угловой координатой t_0 на Γ; после этого точке $M_n[\omega_n(\omega_0)]$ ставим в соответствие точку $\mathrm{M}_n(t_0 + 2n\pi\mu)$. Точки M_n всюду плотны на Γ; геометрический порядок точек M_n на C совпадает с геометрическим порядком точек M_n на Γ; если точка M_r лежит на наименьшей дуге $\mathrm{M}_p\mathrm{M}_q$, то точка M_r лежит на дуге M_pM_q (см. Пуанкаре, гл. XV).

Мы можем далее дополнить уже установленное соответствие. Выбросим точку M_0 из C и точку M_0 из Γ и назовём оставшиеся круговые интервалы соответственно C' и Γ'. Любая точка $\mathrm{M} \in \Gamma'$, не совпадающая с M_n, делит точки всюду плотного множества $\{\mathrm{M}_n\} - \mathrm{M}_0$ на два класса: I — точки M_p, п р е д ш е с т в у ю щ и е M, и II — точки M_q, с л е д у ю щ и е з а M. В силу установленного соответствия все точки M_n на C' тоже разобьются на два класса: $\{M_p\}$ и $\{M_q\}$, причём каждая точка M_p предшествует любой точке M_q. Заметим, что верхняя грань M' точек M_p не следует ни за какой точкой M_q; нижняя грань M'' точек M_q не предшествует никакой точке M_p. Если $M' = M''$, то этой точке M' и ставим в соответствие точку M; если же $M' \neq M''$, то точку M ставим в соответствие целому сегменту $i_0 = [M', M'']$. Наконец, точке M_0 или же сегменту $i = [M_0', M_0'']$, где M_0' есть верхняя грань, а M_0'' — нижняя грань всех M_n на C', если $M_0' \neq M_0''$, ставим в соответствие точку M_0.

Таким образом, каждой точке с угловой координатой t на Γ поставлено в соответствие: или точка M, или сегмент $i = [M', M'']$ на C. Предельные точки для множества $\{M_n\}$ суть либо точки M, не принадлежащие сегментам i, либо концы M', M'' сегментов i; ни одна внутренняя точка этих сегментов не является предельной для точек M_n.

Таким образом, множество P', рассмотренное Пуанкаре, является меридианом C, из которого выброшены смежные интервалы (M', M''), если таковые существуют. Отображению $\omega_1 = \omega_1(\omega_0)$ меридиана C на себя соответствует отображение окружности Γ на себя, осуществляемое поворотом всех точек этой окружности на угол $2\pi\mu$.

Пуанкаре показал, что логически возможны два случая: либо множество P' совпадает с C, либо P' нигде не плотно на C. Данжуа установил, что при требовании одной только непрерывности функции $\omega_1(\omega_0)$ множество P' может совпадать с любым совершенным неплотным множеством E на C, причём смежные интервалы к E или составляют один ряд из предшествующих и последующих интервалов, или же распределяются на конечное или счётное количество таких рядов.

Если мы введём ограничение: $\frac{\partial A}{\partial \omega}$ существует и непрерывна, то функция $\omega_1 = \omega_1(\omega_0) = u(2\pi, \omega_0)$ также допускает непрерывную производную $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$ (см. Гурса, т. III, гл. XXIII). Данжуа показывает, что при этих условиях может быть осуществлён случай нигде не плотного множества P', опять с любым числом рядов, на которые распадаются смежные интервалы; при этом структура совершенного множества E, с которым совпадает множество P', подчинена определённым ограничениям.

Наибольший интерес представляет, однако, следующий результат Данжуа. *Если $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$ есть функция ограниченной вариации, то случай всюду разрывного P' не может иметь места.*

Приведём доказательство этой теоремы.

В предположении, что $\frac{\partial A}{\partial \omega}$ существует, производная от решения по параметру, $\frac{\partial u}{\partial \omega_0}$, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \omega_0}\right) = A_\omega'(\varphi, u(\varphi, \omega_0))\frac{\partial u}{\partial \omega_0}.$$

Отсюда, считая решение $u(\varphi, \omega_0)$ известным, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \omega_0} = e^{\int\limits_0^{\varphi} A_{\omega}'(\varphi,\, u(\varphi,\, \omega_0))\, d\varphi} \quad {}^{*)}.$$

В частности,

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} = e^{\int\limits_0^{2\pi} A'_{\omega}(\varphi,\, u(\varphi,\, \omega_0))\, d\varphi}.$$

Отсюда, в силу наших предположений о непрерывности функции A_ω', получаем

$$K \geqslant \frac{d\omega_1}{d\omega_0} \geqslant k > 0.$$

Рассмотрим функцию

$$h(\omega_0) = \ln \frac{d\omega_1}{d\omega_0}.$$

Эта функция ограничена: $\ln k \leqslant h(\omega_0) \leqslant \ln K$, и, сверх того, в силу монотонности логарифмической функции, имеет ограниченную вариацию одновременно с $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$. Пусть полная вариация функции $h(\omega_0)$ (по сказанному конечная) есть V; по определению полной вариации имеем

$$V = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| h\left(\omega_0^{(k+1)}\right) - h\left(\omega_0^{(k)}\right) \right|$$

$$\left(\omega_0^{(0)} < \omega_0^{(1)} < \ldots < \omega_0^{(k)} < \omega_0^{(k+1)} < \ldots < \omega_0^{(n)} = \omega_0^{(0)} + 2\pi\right).$$

Допустим, что осуществлён случай всюду разрывного множества P'; пусть его смежным интервалам соответствует на Γ счётное множество: $\{\eta\}$. Пусть $\lambda \in \{\eta\}$, и пусть её последующие будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Рассмотрим дугу $\widehat{\lambda\lambda_n}$, причём n выбрано равным Q_m, где $\frac{P_m}{Q_m}$ — одна

---

*) Постоянный множитель при показательной функции равен 1, так как $\left(\frac{\partial u}{\partial \omega_0}\right)_{\varphi=0} = \frac{d\omega_0}{d\omega_0} = 1$.

из подходящих дробей разложения иррационального числа μ в непрерывную дробь. Дуга $\widehat{\lambda\lambda_n}$ в тригонометрическом смысле имеет длину $2\pi Q_m\mu$; наименьшая геометрическая длина дуги $\widehat{\lambda\lambda_n}$ есть $2\pi|Q_m\mu-P_m|$.

Докажем, что ни одна из точек λ_q, если $-n<q<2n$, $q\neq 0$, $q\neq n$, не попадает в отрезок $\widehat{\lambda\lambda_n}$.

В самом деле, для $-n<q<n$, $q\neq 0$ и при любом целом p' имеем $\widehat{\lambda\lambda_q}=2\pi|\mu|q|-p'|>2\pi|\mu Q_m-P_m|=d_m$, так как $|q|<Q_m=n$. Аналогично для $n<q<2n$, при любом целом p'', имеем

$$\widehat{\lambda\lambda_q}=2\pi|\mu(q-n)-p''|>2\pi|\mu Q_m-P_m|,$$

так как $q-n<n=Q_m$ *).

---

*) Мы ссылаемся на следующее свойство подходящих дробей непрерывной дроби (см. Хинчин, Цепные дроби, стр. 29—34). Назовём наилучшим приближением второго рода числа μ такую дробь $\frac{p}{q}$ $(q>0)$, что для всякой другой дроби $\frac{a}{b}$ с положительным знаменателем $b<q$ мы имеем: $|b\mu-a|>|q\mu-p|$. Теорема, о которой идёт речь, такова: *всякая подходящая дробь к иррациональному числу μ есть наилучшее приближение второго рода.*

Вот краткое доказательство этой теоремы. Рассмотрим две последовательные подходящие дроби $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ и $\frac{P_m}{Q_m}$ к бесконечной непрерывной дроби, представляющей число μ. Допустим, что дробь $\frac{a}{b}$ $(b<Q_m)$ даёт для числа μ лучшее приближение 2-го рода, чем дробь $\frac{P_m}{Q_m}$. В таком случае мы докажем прежде всего, что $\frac{a}{b}$ не может лежать между $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$ и $\frac{P_m}{Q_m}$. В самом деле $\left|\frac{a}{b}-\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\right|=\left|\frac{aQ_{m-1}-bP_{m-1}}{bQ_{m-1}}\right|\geqslant\frac{1}{bQ_{m-1}}$, так как в числителе стоит целое число $\neq 0$; с другой стороны,

$$\left|\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}-\frac{P_m}{Q_m}\right|=\frac{1}{Q_{m-1}Q_m},$$

Отметим, что наше утверждение справедливо для любой начальной точки λ.

Рассмотрим теперь два ряда точек:

$$\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_{n-1};$$

$$\lambda_{-n}, \lambda_{-n+1}, \ldots, \lambda_{-n+p}, \ldots, \lambda_{-1}.$$

Каждая из геометрических дуг $\widehat{\lambda_p \lambda_{-n+p}}$ имеет длину, равную $2\pi d_m$, где $d_m = |Q_m\mu - P_m|$, причём направления этих дуг одинаковы и они не содержат внутри себя никакой точки обоих рядов. Следовательно, точки верхнего ряда чередуются с точками нижнего ряда; также, как и интервалы i_k, соответствующие на C точкам λ_k.

Заметим, что если интервал i_1 есть последующий для интервала i_0, то, обозначая длины интервалов теми же символами, что самые интервалы, будем иметь

$$i_1 = \int\limits_{(i_0)} \frac{d\omega_1}{d\omega_0} d\omega_0 = i_0 e^{h(\tau^{(0)})},$$

так как, в силу предположения, $b < Q_m$, то

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right| > \left| \frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \right|,$$

чем наше утверждение доказано. Отсюда следует, что числа $bP_m - aQ_m$ и в $bP_{m-1} - aQ_{m-1}$ имеют одинаковые знаки.

Покажем теперь, что допущение $|b\mu - a| < |Q_m\mu - P_m|$ приводит к противоречию. Подставим в предполагаемое неравенство выражение μ через остаточное частное r_{m+1}:

$$\mu = \frac{P_m r_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m r_{m+1} + Q_{m-1}},$$

где $r_{m+1} > 1$. Получаем

$$\left| \frac{(bP_m - aQ_m) r_{m+1} + (bP_{m-1} - aQ_{m-1})}{Q_m r_{m+1} + Q_{m-1}} \right| < \frac{1}{Q_m r_{m+1} + Q_{m-1}}.$$

Но последнее неравенство абсурдно, так как в левой части его оба члена числителя одного знака, а, следовательно, весь числитель по абсолютной величине >2. Теорема доказана.

где $\tau^{(0)}$ есть некоторая средняя точка интервала i_0. Иначе, для этой точки $\tau^{(0)}$ имеем: $h(\tau^{(0)}) = \ln \frac{i_1}{i_0}$. Вообще, беря аналогичные точки $\tau^{(q)}$ в интервалах i_q, мы получим $i_{q+1} = i_q e^{h(\tau^{(q)})}$, откуда $h(\tau^{(q)}) = \ln \frac{i_{q+1}}{i_q}$.

Составляя абсолютную величину суммы колебаний функции h между n точками $\tau^{(q)}$ в построенных нами чередующихся интервалах, имеем:

$$\left|\sum_{p=0}^{n-1} h(\tau^{(p)}) - \sum_{p=0}^{n-1} h(\tau^{(-n+p)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \left| h(\tau^{(p)}) - h(\tau^{(-n+p)}) \right| \leqslant V,$$

или

$$\left| \ln \frac{i_n}{i_0} - \ln \frac{i_0}{i_{-n}} \right| \leqslant V.$$

Отсюда, для данного i_0 и для $n = Q_m$, получим:

$$e^{-V} \leqslant \frac{i_n i_{-n}}{i_0^2} \leqslant e^V.$$

Но это неравенство приводит к противоречию, так как $i_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Теорема доказана.

Функция $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$ имеет ограниченную вариацию, если $\frac{\partial A}{\partial \omega}$ имеет равномерно относительно φ ограниченную вариацию.

В самом деле, имеем

$$h(\omega_0^{(k+1)}) - h(\omega_0^{(k)}) = \int_0^{2\pi} [A'_\omega(\varphi, \omega_0^{(k+1)}) - A'_\omega(\varphi, \omega_0^{(k)})]\, d\varphi.$$

Поэтому, если полная вариация функции $A'_\omega(\varphi, \omega)$ по переменному ω меньше или равна W для любого φ, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| h(\omega_0^{(k+1)}) - h(\omega_0^{(k)}) \right| \leqslant 2\pi W,$$

т. е. вариация функции $h(\omega_0)$, а следовательно, и функции $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$ конечна.

В частности, это имеет место, если существует непрерывная производная A'_ω, и подавно, если A — аналитическая функция от ω и φ. Таким образом, вопрос, поставленный Пуанкаре, разрешён; исключительный случай не может представиться, если A есть аналитическая функция.

Остаётся добавить об исследовании более общей системы уравнений (1) на торе, предполагая только, что функции Ω и Φ не обращаются одновременно в нуль и что начальные значения переменных ω, φ, при $t=0$, определяют единственную интегральную кривую (это будет иметь место, в частности, если Ω и Φ удовлетворяют условиям Липшица по переменным ω и φ).

Кнезер *) поставил себе ещё более широкую задачу, содержащую исследование кривых, удовлетворяющих на торе дифференциальному уравнению (1), как частный случай, а именно — исследовать регулярное распределение кривых на поверхностях двухстороннего и одностороннего тора. Если в работе Кнезера ограничиться тем, что относится к кривым на двухстороннем (обычном) торе, то задача ставится так: исследовать регулярные семейства кривых на торе. Под *регулярным*, на поверхности F, семейством кривых понимают семейство кривых, обладающих следующим свойством: через каждую точку P поверхности F проходит единственная кривая, при этом для любой точки P существует окрестность, которую можно так отобразить на квадрат, что кривые семейства перейдут в семейство прямых, параллельных стороне квадрата.

Основной результат Кнезера заключается в следующем. В случае отсутствия замкнутых кривых самое общее регулярное семейство является топологическим образом одного из двух видов семейств, изученных Пуанкаре, т. е. путём

---

*) H. Kneser, *Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen*, *Math. Ann.*, 91 (1923).

взаимно однозначного и непрерывного преобразования поверхности тора общее семейство может быть приведено в уже изученные нами; таким образом, этот случай топологически не даёт ничего нового.

При наличии замкнутых кривых поверхность тора разделяется этими кривыми на полосы в конечном или счётном множестве. Не больше как на конечном числе из этих полос распределение кривых может быть топологическим образом семейства интегральных кривых дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{a^2-x^2},$$

в прямоугольнике $|x|\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant 1$, в котором отождествлены точки $(x, 0)$ и $(x, 1)$; следовательно, образами прямых $x=-a$ и $x=a$ являются замкнутые кривые на торе. Далее, может быть конечное или счётное множество полос, в которых заполняющие их кривые являются топологическими образами семейства кривых

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-x^2}\ (|x|\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant 1),$$

при условии $(x, 0)\equiv(x, 1)$. Или, наконец, топологическими образами семейства параллельных прямых $x=\mathrm{const}$.

В первом случае каждая кривая асимптотически приближается к ограничивающим линиям $x=-a$ и $x=a$, причём оба конца кривой приближаются к этим линиям (напомним, что их образами на торе являются предельные циклы) в одинаковом направлении, например, в направлении $y\to+\infty$. Во втором случае один конец кривой асимптотически приближается к одной ограничивающей кривой в направлении $y\to+\infty$, а другой приближается ко второй прямой в направлении $y\to-\infty$. Наконец, в третьем случае вся поверхность тора между циклами, соответствующими граничным прямым, заполнена замкнутыми кривыми.

Только первый случай даёт картину, не предусмотренную в условиях Пуанкаре и Данжуа (у них в уравнениях (1) Φ не обращается в нуль). Этот случай на поверхности тора $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ осуществляется, например, при помощи интегральных кривых системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega}{dt}=\sin\omega,\quad \frac{d\varphi}{dt}=-\cos\omega.$$

На торе мы имеем предельные циклы $\omega=0$ и $\omega=\pi$. Остальные траектории имеют уравнения

$$\omega=2\operatorname{arctg}\left(e^t \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2}\right),$$

$$\varphi=\ln\left(e^t \operatorname{tg}\frac{\omega_0}{2}+e^{-t}\operatorname{ctg}\frac{\omega_0}{2}\right)+\ln\frac{\sin\omega_0}{2}+\varphi_0.$$

Из формул видно, что точка на поверхности тора удаляется при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$ в направлении $\varphi\to+\infty$, если $0<\omega_0<\pi$, и в направлении $\varphi\to-\infty$, если $\pi<\omega_0<2\pi$.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XVI

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Обзор современного состояния вопроса)

И. Г. Петровский

Пусть

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_{ik} — постоянные, а φ_i — функции, имеющие в некоторой окрестности U начала координат O, ограниченные частные производные первого порядка; в точке O, как сами функции, так и все их эти производные должны быть непрерывны и обращаться в 0. Совокупность такого рода условий мы будем для краткости называть «условиями A».

Кроме того, мы будем иногда предполагать существование таких положительных чисел M и α, что в U имеют место неравенства:

$$\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

В последнем случае мы будем говорить, что система (1), или функции φ_i, удовлетворяют «условиям B».

Система (1), очевидно, эквивалентна системе

$$\frac{dx_1}{\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k + \varphi_1} = \frac{dx_2}{\sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k + \varphi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k + \varphi_n},$$

для которой начало координат O является особой точкой. Мы будем всюду в дальнейшем говорить о поведении интегральных кривых этой системы при $t \to +\infty$. Случай, когда $t \to -\infty$ сводится к этому заменой t на $-t$ в системе (1).

Условимся *характеристической матрицей* для системы (1) называть λ-матрицу

$$\lambda E - \| a_{ik} \|, \tag{2}$$

где E — единичная матрица, а λ — некоторый параметр.

Из теории λ-матриц *) известно, что при помощи линейного, с постоянными коэффициентами, неособенного преобразования

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

систему (1) всегда можно привести к такому каноническому виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k + \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

что характеристическая матрица для системы (3)

$$\lambda E - \| b_{ik} \|$$

*) См., например, Бохер, Введение в высшую алгебру, главы XX и XXI.

будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_q \end{Vmatrix},$$

где M_k — некоторые матрицы нормальной формы, структура которых выяснится ниже, а вне квадратов M_k стоят только нули.

Нелинейные члены в новых уравнениях, которые мы обозначили через $\psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, обладают по отношению к переменным y_j такими же свойствами, какими обладали функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по отношению к переменным x_j. В частности, если функции φ_i удовлетворяли «условиям A» (соответственно «условиям B»), то и функции ψ_i будут удовлетворять «условиям A» (соответственно «условиям B»).

Заметим, что если оси $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ считать взаимно ортогональными, то оси $Oy_1, Oy_2, \ldots, Oy_n$ будут образовывать, вообще говоря, некоторую косоугольную систему.

Пусть λ_k — корень характеристического уравнения

$$|\lambda E - \|a_{ik}\|| = 0.$$

Каждая матрица M_k соответствует одному какому-нибудь элементарному делителю $(\lambda - \lambda_k)^{p_k}$ матрицы (2), если λ_k — действительно, и одной паре сопряжённых элементарных делителей $(\lambda - \lambda_k)^{p_k}$ и $(\lambda - \bar{\lambda}_k)^{p_k}$, если λ_k — комплексно.

В первом случае будем иметь

$$M_k = \left\| \begin{matrix} \lambda-\lambda_k & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_k & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_k & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda-\lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \lambda-\lambda_k \end{matrix} \right\|,$$

причём порядок матрицы равен p_k; в частности, если $p_k = 1$, то матрица M_k состоит из одного элемента $\lambda - \lambda_k$.

Во втором случае паре сопряжённых элементарных делителей $[\lambda - (\alpha_k + i\beta_k)]^{p_k}$ и $[\lambda - (\alpha_k - i\beta_k)]^{p_k}$ соответствует матрица

$$M_k = \left\| \begin{matrix} \lambda-\alpha_k & -\beta_k & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \beta_k & \lambda-\alpha_k & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha_k & -\beta_k & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \beta_k & \lambda-\alpha_k & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha_k & -\beta_k & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_k & \lambda-\alpha_k & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

порядок которой равен $2p_k$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрицы M_k расположены так, что действительные части корней λ_k при увеличении k не убывают; а из тех матриц, которые соответствуют элементарным делителям $(\lambda - \lambda_k)^{p'_k}$ и $(\lambda - \lambda_k)^{p''_k}$, сначала идёт та, которой соответствует меньшее из чисел p'_k и p''_k.

При дальнейшем изложении мы будем предполагать, что действительные части всех λ_k отличны от 0, если не сказано явно обратное.

Через (1*), соответственно через (3*), мы будем обозначать линейные системы, полученные из (1), соответственно из (3), зачёркиванием функций φ_i (соответственно зачёркиванием функций ψ_i), т. е.

$$(1^*)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и

$$(3^*)\qquad \frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}y_k \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Каноническая система (3*) легко интегрируется. В самом деле, предположим сначала, что все корни λ_k действительны и различны и ни один из них не равен 0. Последнее условие будет выполнено, если определитель $|a_{ik}|\neq 0$. Корни λ_i будем считать расположенными в порядке возрастания их.

Тогда система (3*) имеет вид

$$\frac{dy_i}{dt}=\lambda_i y_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Её решениями будут

$$(4)\qquad y_i=C_i e^{\lambda_i t} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Нас будут интересовать те интегральные кривые (4), которые при $t\to+\infty$ приближаются к началу координат O. Такие кривые мы будем называть *O-кривыми*. Ясно, что для таких кривых в уравнениях (4) могут быть отличными от 0 только те C_i, которым соответствуют отрицательные корни λ_i; пусть число таких корней будет n_1. Тогда все O-кривые системы (3*) распадутся на следующие n_1+1 классов.

В n_1-й класс мы относим все те O-кривые, у которых при $t \to +\infty$ медленнее всех *) стремится к 0 координата y_{n_1}, которые, следовательно, касаются оси Oy_{n_1} в начале координат. Этот класс кривых мы получим, если в уравнениях (4) будем считать

$$C_n = C_{n-1} = \ldots = C_{n_1+2} = C_{n_1+1} = 0,$$

C_{n_1} равным любому действительному числу, отличному от 0, а все остальные C_i будем выбирать совершенно произвольно. В этот класс входят все O-кривые, за исключением только тех, для которых $C_{n_1} = 0$ и которые образуют $(n_1 - 1)$-мерное многообразие в пространстве $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

В $(n_1 - 1)$-й класс входят все те O-кривые, у которых медленнее всех стремится к 0 при $t \to +\infty$ координата y_{n_1-1} и которые, следовательно, касаются в начале координат оси Oy_{n_1-1}. Для таких кривых

$$C_n = C_{n-1} = \ldots = C_{n_1+2} = C_{n_1+1} = C_{n_1} = 0,$$

C_{n_1-1} равно любому отличному от 0 числу, а все остальные C_i произвольны. К этому классу относятся все те исключительные O-кривые, о которых говорилось в конце предыдущего пункта, за исключением только тех, у которых $C_{n_1-1} = 0$ и которые образуют $(n_1 - 2)$-мерное многообразие.

Вообще в s-й класс мы относим все те O-кривые, у которых при $t \to +\infty$ медленнее всех стремится к 0 координата y_s и которые, следовательно, в начале координат касаются оси Oy_s. Эти кривые целиком покрывают в окрестности U некоторое s-мерное многообразие, за исключением находящегося на нём некоторого $(s - 1)$-мерного многообразия.

Первый класс состоит только из двух O-кривых: правой и левой полуосей Oy_1.

---

*) Мы говорим, что величина a медленнее стремится к 0, чем величина b, если

$$\frac{b}{a} \to 0.$$

Наконец, 0-й класс состоит только из тривиального решения системы (3*), когда все

$$y_i \equiv 0.$$

Основным результатом в изучении поведения интегральных кривых вблизи особой точки является то, что факты, отмеченные выше для системы (3*), а, следовательно, и (1), у которой все $\varphi_i \equiv 0$, имеют место и для общей системы (1), у которой функции φ_i удовлетворяют «условиям A». Это можно сформулировать так:

Пусть система (1) *удовлетворяет «условиям A», а её характеристическая матрица $\lambda E - \|a_{ik}\|$ имеет только действительные и различные элементарные делители 1-й степени; пусть сверх того $|a_{ik}| \neq 0$. Тогда:* 1) *каждая О-кривая такой системы имеет в точке О определённую касательную;* 2) *все О-кривые распадаются на $n_1 + 1$ классов, где n_1 есть число отрицательных корней детерминанта характеристической матрицы* (2), *причём О-кривые, входящие в s-й класс, имеют общую касательную и покрывают целиком некоторую s-мерную поверхность за исключением только лежащей в ней некоторой $(s-1)$-мерной поверхности* *).

Допустим теперь, что среди элементарных делителей матрицы (2) имеются комплексные, сверх того мы будем сначала предполагать, что действительные части всех корней детерминанта этой матрицы различны и отличны от 0. Паре комплексных элементарных делителей $[\lambda - (\alpha + i\beta)]$ и $[\lambda - (\alpha - i\beta)]$ соответствуют в системе (3*) уравнения:

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha y_i - \beta y_{i+1},$$
$$\frac{dy_{i+1}}{dt} = \beta y_i + \alpha y_{i+1}.$$

Умножая первое из этих уравнений на y_i, а второе на y_{i+1}, и складывая их, мы получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha\rho, \text{ где } \rho = \sqrt{y_i^2 + y_{i+1}^2}$$

*) *O. Perron, Math. Zeitschrift*, 1930.

и, следовательно,

$$\rho = Ce^{\varkappa t}.$$

Поэтому и теперь все O-кривые системы (3*) можно разбить на классы совершенно так же, как и в предыдущем случае. Те из величин y_i, которым соответствуют действительные элементарные делители, а также те из величин $\sqrt{y_i^2 + y_{i+1}^2}$, которым соответствуют пары сопряжённых комплексных элементарных делителей, обозначим соответственно через

$$r_1, r_2, \ldots, r_m \, (m \leqslant n).$$

При этом нумерацию величин r_j произведём так, чтобы соответствующие им диагональные члены системы (3*) возрастали при увеличении номера j. Тогда, как легко видеть, все O-кривые системы (3*), а следовательно и системы (1*) распадаются на $m_1 + 1$ классов, где m_1 есть число тех r_j, которым соответствуют корни детерминанта характеристической матрицы с отрицательными действительными частями. В s-й класс входят все те O-кривые, у которых при $t \to +\infty$ из величин r_j медленнее всех стремится к 0 величина r_s. Если r_s равно некоторому y_k, то эти кривые касаются в начале координат оси Oy_k. Если же $r_s = \sqrt{y_k^2 + y_{k+1}^2}$, то эти интегральные кривые касаются в O двумерной плоскости (y_k, y_{k+1}). Соответственно этим двум возможностям интегральные кривые s-го класса покрывают некоторую поверхность k-го или $(k+1)$-го измерений с выпуском каждый раз некоторой поверхности $(k-1)$-го измерения.

То же самое имеет место и для систем (1) *общего вида, если только предположить, что функции* φ_i *удовлетворяют «условиям А».*

Далее оказывается, что при этих предположениях *у кривых s-го класса поведение выражения*

$$\operatorname{arctg} \frac{y_{k+1}}{y_k} \left(r_s = \sqrt{y_k^2 + y_{k+1}^2} \right)$$

при $t \to +\infty$ также не зависит от функций φ_i. Именно при $\beta > 0$ и при $t \to +\infty$ имеем

$$\operatorname{arctg} \frac{y_{k+1}}{y_k} \to +\infty \text{ *)}.$$

Что касается других $\operatorname{arctg} \frac{y_{i+1}}{y_i}$, то на их поведение функции φ_i могут влиять очень сильно, какой бы быстроты приближения к 0 у последних мы ни потребовали, когда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приближается к началу координат.

Допустим теперь, что **среди элементарных делителей матрицы $\lambda E - \|a_{ik}\|$ есть несколько элементарных делителей 1-й степени, соответствующих корням детерминанта матрицы (2) с одинаковыми действительными частями.** Для упрощения изложения мы будем предполагать, что все элементарные делители матрицы (2) действительны.

Если все $\varphi_i \equiv 0$, то из уравнений (4) легко видеть, что при $\lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+m}$ все кривые, которые при неравных корнях λ_k образовывали $(i+1)^{й}, \ldots, (i+m)^{й}$ классы, теперь сливаются в один класс. Он состоит из O-кривых, у которых касательные в начале координат лежат в гиперплоскости $(y_{i+1}, \ldots, y_{i+m})$. В этом классе есть кривые, приближающиеся к O по любому направлению, лежащему в этой гиперплоскости. Все они целиком покрывают некоторую $(i+m)$-мерную поверхность, за исключением только некоторой лежащей на ней i-мерной поверхности.

Чтобы всё это сохранило силу и для общих систем (1) *достаточно потребовать, чтобы функции φ_i удовлетворяли «условиям B»* **). Что «условий A» для этого недостаточно, показывают следующие примеры ***):

*) O. Perron, loc. cit.

**) Для $n = 2$ см. O. Perron, Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singularen Punktes, Math. Zeitschrift, Bd. 15 (1922), pp. 121—146. В дальнейшем мы будем коротко обозначать эту работу O. Perron II. Для любого n см. I. Petrowsky, Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singularen Punktes. Математ. Сборник, т. 41 (1934), стр. 108—156.

***) O. Perron II, p. 131.

Пример 1. Все интегральные кривые (за исключением оси Ox_2) системы

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - \frac{x_1}{\ln|x_1|},$$

около начала координат даются уравнением

$$x_2 = x_1\left(C + \ln\ln\frac{1}{|x_1|}\right).$$

Отсюда видно, что все они касаются в O оси Ox_2. Между тем у системы

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2$$

по каждому направлению к O подходит одна и только одна интегральная кривая.

Пример 2. У системы

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - \frac{x_1 \cos\ln\ln\frac{1}{|x_1|}}{\ln|x_1|},$$

интегральные кривые (за исключением оси Ox_2) даются уравнением

$$x_2 = x_1\left(C + \sin\ln\ln\frac{1}{|x_1|}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{x_1\to 0}\frac{x_2}{x_1} = C + 1 \text{ и } \liminf_{x_1\to 0}\frac{x_2}{x_1} = C - 1.$$

Значит, теперь у этих интегральных кривых в начале координат вообще нет касательных.

Аналогично обстоит дело и в том случае, когда матрица $\lambda E - \|a_{ik}\|$ имеет несколько комплексных элементарных делителей 1-й системы с одинаковыми действительными частями.

Перейдём, наконец, к тому случаю, когда матрица $\lambda E - \|a_{ik}\|$ имеет элементарные делители выше 1-й степени. При этом мы ограничимся случаем, когда одному и тому же корню детерминанта этой матрицы соответствует не больше одного такого элементарного делителя, и этот элементарный делитель действителен, так как в общем случае дело обстоит подобным же образом.

Элементарному делителю $(\lambda - \lambda_k)^p$ соответствуют в системе (3*) уравнения

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dy_{i+1}}{dt} = \lambda_k y_{i+1} + y_{i+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_{i+p-1}}{dt} = \lambda_k y_{i+p-1} + y_{i+p},\\
&\frac{dy_{i+p}}{dt} = \lambda_k y_{i+p}.
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$
\begin{gathered}
y_{i+p} = e^{\lambda_k t} C_{i+p},\\
y_{i+p-1} = e^{\lambda_k t}(C_{i+p-1} + C_{i+p} t),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_{i+1} = e^{\lambda_k t}\left(C_{i+1} + C_{i+2} t + \frac{C_{i+3}}{2!} t^2 + \dots + \frac{C_{i+p}}{(p-1)!} t^{p-1}\right).
\end{gathered}
$$

Отсюда видно, что при $t \to +\infty$ и $\lambda_k < 0$ величина y_{i+1} стремится к 0 медленнее всех других y_j, где $j = i+1, \dots, i+p$, если только не все $C_j = 0$ $(j = i+1, \dots, i+p)$. Поэтому все O-кривые, которые при неравных $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+p}$ образовывали бы различные классы, соответствующие уравнениям (5), теперь сольются в один класс O-кривых, касающихся в O оси Oy_{i+p}. Они будут покрывать целиком некоторую $(i+p)$-мерную поверхность, за исключением только некоторой, находящейся на ней i-мерной поверхности.

Подобным же образом можно разобрать случай, когда имеется несколько действительных или комплексных элементарных делителей, соответствующих одному и тому же корню матрицы (2).

Чтобы сохранился неизменным характер поведения интегральных кривых вблизи точки O и для общих систем (1), *опять достаточно потребовать, чтобы функции φ_i удовлетворяли «условиям B»*).*

До сих пор мы предполагали, что ни у одного корня детерминанта характеристической матрицы (2) действительная часть не обращается в нуль. В противном случае легко построить примеры, показывающие, что функции φ_i весьма сильно влияют на поведение интегральных кривых системы (1) вблизи точки O. Но даже в этом случае можно показать **), что вблизи O всегда существует n_1-мерная поверхность, целиком заполненная O-кривыми; здесь n_1 есть число тех уравнений канонической системы (1), у которых на главной диагонали стоят отрицательные коэффициенты. Эти O-кривые при $t \to +\infty$ ведут себя совершенно так же, как если бы ни у одного λ_k действительная часть не обращалась в 0: они распадаются на такие же классы; функции $\operatorname{arctg} \frac{y_{k+1}}{y_k}$ в случае комплексных корней ведут себя опять попрежнему и т. д.

---

*) *Для* $n=2$ см. O. Perron II. *Для* любого n см. *I.* Petrowsky, loc. cit.

**) *I.* Petrowsky, loc. cit.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ XVIII

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Ю. Рожанская

ВВЕДЕНИЕ

Исследования этой главы основаны на понятии индекса особой точки, введённого впервые Кронекером *). Аналитическое определение индекса заменено после исследований Броуэра **) и Гопфа ***) чисто топологическим понятием индекса особой точки векторного поля.

Освобождённая от аналитического аппарата теория векторных полей играет в настоящее время большую роль как в топологии, так и в качественной теории дифференциальных уравнений. Мы не имеем возможности дать здесь полное изложение этой теории, но излагаем в современных, чисто топологических, терминах лишь материал, относящийся к XVIII главе мемуара Пуанкаре, а также теоремы Кронекера и Гопфа, на которых он основан. Теория векторных полей опирается на теорию непрерывных отображений. Из этой последней мы приводим необходимые определения и формулировки теорем.

---

*) Kronecker, Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln, Monatsberichte de l'Académie de Berlin (1869).

**) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. Bd. 71 (1912).

***) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 96 (1926), p. 225—250.

В конце мы указываем на связь современного определения индекса с аналитическим определением Кронекера.

§ 1. Вводные замечания. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство R^n. Пусть в каждой точке $p \in R^n$ задан вектор $v(p)$, длина и направление которого являются непрерывными функциями точки. Такое векторное распределение называется *непрерывным векторным полем*.

Если в некоторой точке векторного поля вектор по длине обращается в нуль, то направление его в этой точке становится неопределённым, и следовательно непрерывность направлений в окрестности этой точки нарушается.

Определение 1. Точка с исчезающим вектором называется *особой* точкой векторного поля.

Во всём дальнейшем мы будем рассматривать векторные поля с конечным числом особых точек.

§ 2. Степень отображения. Пусть S^{n-1} есть поверхность достаточно малого n-мерного шара с центром в данной особой точке, не содержащего ни внутри, ни на границе других особых точек, кроме центра. На S^{n-1}, как на части R^n, определено частичное векторное поле и притом непрерывное. Рассмотрим другую сферу $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, так называемую *сферу направлений*. Перенесём векторы, определённые на S^{n-1}, параллельно самим себе в центр сферы направлений и продолжим их, если это необходимо, до пересечения с этой сферой. Каждой точке $p \in S^{n-1}$ будет соответствовать единственная точка пересечения направления параллельного вектору $v(p)$ со сферой направлений. Так как сверх того векторное поле на S^{n-1} непрерывно, то полученное таким образом соответствие между точками сферы S^{n-1} и точками сферы направлений $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ будет однозначным в одну сторону и непрерывным отображением:

$$f(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1},$$

S^{n-1} на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, или на её часть *).

*) Отображение $f(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ называется *непрерывным в точке* $p \in S^{n-1}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что коль скоро расстояние от переменной точки x до точки p

Полученное нами отображение $f(S^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$ есть непрерывное отображение самого общего вида. Из теории непрерывных отображений известно, что всякое непрерывное отображение $f(S^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$ может быть с любой точностью аппроксимировано *симплициальным* (кусочно-аффинным) отображением $f_m(S^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$.

При этом, отображение $f_m(S^{n-1})$ есть *приближение* отображения $f(S^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$ с точностью до $\frac{1}{m}$, если $\rho(f_m(p), f(p))<\frac{1}{m}$ для любого $p\in S^{n-1}$. Отображение $f_m(S^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$ — *симплициальное*, если каждый симплекс T некоторого симплициального подразделения поверхности S^{n-1} отображается целиком на симплекс τ симплициального подразделения сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$. Совокупность всех симплексов, отображающихся при помощи f_m на τ, называется полным *прообразом* $f_m^{-1}(\tau)$ симплекса τ.

Среди симплексов $f_m^{-1}(\tau)$ есть, вообще говоря, такие, которые отображаются на симплекс τ с той же *индикатрисой* (порядком обхода вершин, или ориентацией). Эти симплексы мы называем *положительными*. И возможно есть такие, которые отображаются с обратной индикатрисой. Последние мы называем *отрицательными*.

Пусть p есть внутренняя точка симплекса τ.

Определение 2. Разность между числом положительных и числом отрицательных симплексов из S^{n-1}, отображающихся на содержащий точку p симплекс τ, называется *степенью* отображения f_m в точке p.

Степень отображения одна и та же для всякой точки $p\in\overset{*}{S}{}^{n-1}$. Это — число, зависящее от отображения в целом. Поэтому имеет смысл говорить просто о степени отображения.

удовлетворяет неравенству $\rho(p, x)<\delta$, то расстояние между их образами удовлетворяет неравенству $\rho(f(p), f(x))<\varepsilon$. Отображение, непрерывное в каждой точке из S^{n-1}, называется *непрерывным* на S^{n-1}.

Пусть

$f_1(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}, f_2(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}, \ldots, f_m(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}, \ldots$ есть последовательность симплициальных отображений, приближающих заданное непрерывное отображение $f(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ с точностью до $\frac{1}{m}$ $(m=1, 2, \ldots)$. Для каждого из приближающих отображений мы можем вычислить его степень. Полученные числа $g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots$ обладают тем свойством, что они совпадают между собою, начиная с некоторого достаточно большого числа N.

Определение 3. *Степенью отображения f* называется число $g = g_N = g_{N+1} = \ldots$

Определение 4. *Индексом особой точки векторного поля* называется степень отображения $f(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ сферы, окружающей эту точку, на сферу направлений.

Отметим без доказательства некоторые установленные Броуэром факты, относящиеся к степени отображения.

1. Степень отображения $f(S^{n-1})$ в одну точку поверхности $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ равна нулю. Такое отображение получается, если векторы параллельны между собой.

2. Степень отображения является инвариантом непрерывной деформации отображения, т. е. отображения, которые можно непрерывно перевести друг в друга, имеют одну и ту же степень.

3. При умножении (т. е. последовательном применении) двух отображений их степени перемножаются.

§ 3. **Теорема Кронекера.** В дальнейшем мы будем изучать индексы n-мерных областей $M^n \subset R^n$ ограниченных $(n-1)$-мерными многообразиями M^{n-1}.

Определение 5. *Индексом многообразия M^n* называется степень отображения его границы M^{n-1} на сферу направлений $\overset{*}{S}{}^{n-1}$; в частности, индексом симплекса T^n называется степень отображения его границы S^{n-1} на сферу направлений.

Теорема 1. *Если внутри симплекса нет особых точек, то его индекс равен нулю.*

Доказательство. Действительно, такой симплекс можно стянуть непрерывным преобразованием в одну точку, не задевая при этом особых точек. В этой точке задан вектор, отличный от нуля. В силу непрерывности векторного поля, векторные распределения на каждой из промежуточных поверхностей дают нам непрерывную деформацию первоначального отображения в отображение в одну точку сферы направлений. Степень первоначального отображения равна степени окончательного отображения, т. е. равна нулю.

Теорема 2 (Кронекера). *Индекс многообразия $M^n \subset R^n$, ограниченного $(n-1)$-мерным многообразием M^{n-1}, равен сумме индексов, входящих в M^n особых точек.*

Доказательство. Подразделяем многообразие M^n на столь малые симплексы T_i $(i=1,2,\ldots,k)$:

$$M^n = T_1 + T_2 + \ldots + T_k,$$

чтобы внутри каждого из них было не более одной особой точки. Кроме того, совокупность границ этих симплексов — граничный комплекс — выбираем так, чтобы на них также не было особых точек. Заметим, что $(n-1)$-мерные грани симплексов T_i, не лежащие на граничном многообразии M^{n-1}, входят каждая в два и только два симплекса T_i и T_j, причём, если в T_i эта грань входит с положительной индикатрисой, то в T_j — с отрицательной.

Пусть $S_1^{n-1}, S_2^{n-1}, \ldots, S_k^{n-1}$ — границы симплексов T_i и $f_1(S_1^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}, f_2(S_2^{n-1}) = S_2^{*n-1} \ldots, f_k(S_k^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ — симплициальные отображения границ симплекса T_i на сферу направлений. Степени отображения S_1^{n-1}, $S_2^{n-1}, \ldots, S_k^{n-1}$ и M^{n-1} на S^{n-1} соответственно будут:

$g_1 = p_1 - n_1, g_2 = p_2 - n_2, \ldots, g_k = p_k - n_k, \ldots, g = P - N$, где p_i, P, n_i, N $(i=1,2,\ldots,k)$ — числа положительных и отрицательных симплексов этих многообразий. Пусть далее $\overset{*}{p}_i$, $\overset{*}{n}_i$ — числа тех положительных и отрицательных симплексов из S_i^{n-1}, которые являются общими гранями двух симплексов: T_i и T_j $(j=1,2,\ldots,k;\ j\neq i)$.

Заметим, прежде всего, что

$$(1)\qquad \overset{*}{p}_1+\overset{*}{p}_2+\ldots+\overset{*}{p}_k=\overset{*}{n}_1+\overset{*}{n}_2+\ldots+\overset{*}{n}_k.$$

Действительно, если некоторый симплекс из S_i^{n-1}, не входящий в M^{n-1}, входит в границу симплекса T_i со знаком плюс, то он же в границу некоторого симплекса T_j, и только одного, войдёт со знаком минус и, следовательно, каждая единица, составляющая p_i^*, войдёт непременно в одно и только в одно из слагаемых правой части. Отсюда следует, что левая часть равна правой.

Далее легко видеть, что

$$P=p_1+p_2+\ldots+p_k-(p_1^*+p_2^*+\ldots+p_k^*),$$
$$N=n_1+n_2+\ldots+n_k-(n_1^*+n_2^*+\ldots+n_k^*).$$

Следовательно, на основании (1)

$$P-N=(p_1-n_1)+(p_2-n_2)+\ldots+(p_k-n_k)$$

или

$$g=g_1+g_2+\ldots+g_k.$$

Итак, степень отображения многообразия M^n равна сумме степеней отображений отдельных симплексов, на которые оно подразделено. Но для тех симплексов, в которых нет особых точек, степени отображений равны нулю, а для симплексов, содержащих особые точки — равны индексам этих точек. Следовательно, для случая симплициальных отображений теорема доказана.

Если отображения f_i не симплициальные, мы приближаем их симплициальными и получаем, в силу упомянутых определений, тот же результат.

Следствие. Если все особые точки, расположенные внутри M^n, простые, т. е. их индексы равны ± 1, то индекс M^n равен числу положительных особых точек без числа отрицательных.

В этой форме теорема формулирована у Пуанкаре.

Замечание. При доказательстве теоремы Кронекера мы не пользовались нигде тем, что M^{n-1} — связное многообразие. Теорема справедлива и для области, ограниченной конечным числом связных многообразий.

§ 4. **Многообразия без контакта.** В дальнейшем будем предполагать, что граничное многообразие M^{n-1} дифференцируемо, т. е. имеет непрерывно изменяющуюся касательную гиперплоскость.

Определение 6. Многообразие M^{n-1} называется *многообразием без контакта*, если среди векторов непрерывного поля, определённого на нём, нет ни одного касательного вектора.

Теорема 3. *Для многообразия без контакта все векторы либо направлены внутрь этого многообразия, либо наружу.*

Доказательство. Действительно, в противном случае при переходе от внутреннего вектора к наружному, в силу непрерывности направления векторов, был бы по крайней мере один касательный вектор.

Определение 7. Многообразие без контакта, все векторы которого направлены наружу многообразия, называется *положительным* (*d'espèce positive*), а все векторы которого направлены внутрь — *отрицательным* (*d'espèce négative*).

Теорема 4. *Индекс многообразия без контакта зависит только от топологической структуры многообразия и от его знака* (для $n=2$, в частности, — от рода поверхности и от её знака).

Доказательство этой теоремы у Пуанкаре только намечено и не может быть признано достаточным. Она является частным случаем более общей теоремы Гопфа, которую мы приводим далее.

Определение 8. Отображение $\bar{f}(M^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ называется диаметральным к отображению $f(M^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$, если для любой точки $x \in M^{n-1}$ её образ $\bar{f}(x)$ есть точка сферы, диаметрально противоположная точке $f(x)$.

Теорема 5. *Диаметральное к отображение многообразия M^{n-1} на сферу направлений $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ есть произведение данного отображения f на диаметральное отображение d сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ самой на себя.*

Доказательство. Действительно, положим $x \in M^{n-1}$ и $f(x) = y \in \overset{*}{S}{}^{n-1}$, и пусть $\bar{y}$ есть точка сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, диаметрально противоположная точке y. Тогда $\bar{f}(x) = \bar{y}$ и с другой стороны $df(x) = d(y) = \bar{y}$. Следовательно,

$$\bar{f}(M^{n-1}) = d \cdot f(M^{n-1}).$$

Теорема 6. *Степень диаметрального отображения сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ на самоё себя равна* $(-1)^n$.

Доказательство. Для $n = 2$ имеем диаметральное отображение окружности самой на себя. Оно имеет степень, равную $1 = (-1)^2$, так как любая дуга $\widehat{ab}$ переходит при этом в дугу $\widehat{\bar{a}\bar{b}}$, имеющую ту же индикатрису. Таким образом, для $n - 1 = 1$ теорема верна.

Предположим теперь, что теорема доказана для $(n-2)$-мерной сферы, т. е. что интересующая нас степень в этом случае равна $(-1)^{n-1}$. Докажем утверждение теоремы для $(n-1)$-мерной сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$.

Рассмотрим на сфере $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ экватор S^{n-2}. Построим симплекс T^{n-1}, одна из $(n-2)$-мерных граней которого T^{n-2} лежит на экваторе и одна вершина a вне экватора. Далее, пусть $T'^{\,n-1}$ — симплекс, составленный из симплекса $T'^{\,n-2}$, диаметрального к T^{n-2} и лежащего, следовательно, на том же экваторе, и точки a', диаметральной к точке a. Индикатрисы симплексов T^{n-2} и $T'^{\,n-2}$ будут одинаковы, если $n-1$ — чётное число, и противоположны, если $n-1$ — нечётное. Рассмотрим симплекс $T''^{\,n-1}$, получающийся из $T'^{\,n-1}$ зеркальным отражением в экваторе S^{n-2}. Пусть a'' — зеркальное отображение точки a'. Тогда, так как точки a и a'' лежат в одном и том же полушарии, то можно перейти от T^{n-1} к $T''^{\,n-1}$ с той же индикатрисой, с которой $(n-2)$-мерные грани, лежащие в плоскости экватора, переходят друг в друга, т. е. с индикатрисой равной, согласно предположению, $(-1)^{n-1}$; переходя затем от $T''^{\,n-1}$ к $T'^{\,n-1}$, мы изменим индикатрису. Степень отображения окончательно будет равна $(-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Если векторное поле на многообразии M^n заменить диаметральным* *), *то его индекс изменится на* $(-1)^n$, *т. е. не изменится для n чётного и переменит знак для n нечётного.*

Доказательство. Диаметральное векторное поле на M^n влечёт за собой и диаметральное отображение границы многообразия M^n, т. е. M^{n-1} на сферу направлений $\overset{*}{S}{}^{n-1}$. Пусть $f(M^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ — первоначальное отображение, а $\bar{f}(M^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ — диаметральное к нему отображение. Тогда, на основании теоремы 5, $\bar{f} = df$. Отсюда, в силу упомянутого в § 2 результата, из общей теории непрерывных отображений имеем: $g(\bar{f}) = g(d) \cdot g(f)$. Но на основании предыдущей теоремы: $g(d) = (-1)^n$. Следовательно, $g(\bar{f}) = (-1)^n \cdot g(f)$, что и требовалось доказать.

Пусть мы имеем непрерывное отображение $f_1(M^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ многообразия M^{n-1} на сферу $\overset{*}{S}{}^{n-1}$. На $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ задано касательное векторное распределение, многозначное для точек сферы $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, но являющееся однозначной непрерывной функцией от точек M^{n-1}.

Определение 9. Полученное векторное распределение называем векторным полем, *отнесённым* к многообразию M^{n-1}.

Предполагаем, как и прежде, что интересующее нас, отнесённое к M^{n-1} векторное поле допускает на M^{n-1} конечное число особых точек, т. е. имеется конечное число прообразов точек из $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, в которых по крайней мере один из приложенных к ней векторов обращается в нуль. Если в некоторой точке из $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ более одного вектора обращается в нуль, то соответствующую точку из M^{n-1} мы считаем за кратную.

*) Под *диаметральным* по отношению к данному векторному полю понимается векторное поле, где каждой точке p отнесён вектор, заданный в точке, диаметральной относительно точки p.

Теорема 8. *Сумма индексов особых точек касательного к $\overset{*}{S}{}^{n-1}$, отнесённого к M^{n-1} векторного поля равна $g_1[1+(-1)^n]$, где g_1 — степень отображения $f_1(M^{n-1})=\overset{*}{S}{}^{n-1}$ многообразия M^{n-1} на сферу $\overset{*}{S}{}^{n-1}$.*

Доказательство. Сумма индексов особенностей нашего векторного поля равна, по определению, сумме степеней отображений на соответствующие сферы направлений границ симплексов некоторого подразделения многообразия M^{n-1}. Рассмотрим, для её подсчёта, на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ две диаметрально-противоположные точки q и $\bar{q}$. В этих точках проведём $(n-1)$-мерные касательные гиперплоскости и в них построим сферы направлений S_q^{n-2} и $S_{\bar{q}}^{n-2}$. Пусть точка q покрыта, при нашем отображении, P положительными и N отрицательными $(n-1)$-мерными симплексами, где $P-N=g_1$. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_P, T_1', T_2', \ldots, T_N'$ — эти симплексы. Заметим, что, беря достаточно мелкое симплициальное подразделение на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ и выбрав точку q не на границе его, можем предположить все эти симплексы без общих точек в прообразе.

Для симплексов T_i $(i=1, 2, \ldots, P)$ и T_j' $(j=1, 2, \ldots, N)$ производим стереографическую проекцию из точки $\bar{q}$ на касательную плоскость в точке q. Для остальных покрывающих сферу симплексов произведём стереографическую проекцию из точки q на касательную плоскость в точке $\bar{q}$. В обоих случаях мы пользуемся стереографической проекцией из внешней точки, которая не меняет индикатрису. Степень отображения границы какого-нибудь из симплексов T или T' на S_q^{n-2} равна соответственно 1 или -1 (так как поле, полученное на касательной плоскости, есть весьма малая деформация первоначального). Степень отображения той же границы (как вошедшей в один из симплексов, отличных от T_i или T_j') на $S_{\bar{q}}^{n-2}$, в силу теоремы 6, равна соответственно $(-1)^n$ или $-(-1)^n$. Таким образом, для симплекса T сумма степеней отображений на обе сферы равна $1+(-1)^n$, для симплекса T' равна $-[1+(-1)^n]$. Отсюда для совокупности всех симплексов T_i и T_j' сумма степеней отображения границ есть $g_1[1+(-1)^n]$. Для всех границ симплексов подразделения, которые не принадлежат симплексам T_i и T_j', все отображения будут производиться по два раза, оба раза в касательную плоскость в $\overline{q}$, и следовательно, так как каждый $(n-2)$-мерный симплекс этой границы входит один раз с плюсом, а другой раз с минусом (в соседний симплекс), то соответствующие степени взаимно уничтожаются. Итак, теорема доказана.

Определение 10. *Эйлеровой характеристикой n-мерного комплекса* называется альтернированная сумма $c=\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+(-1)^n\alpha^n$, где α^0 — число вершин, α^1 — число ребёр, ..., α^n — число n-мерных симплексов комплекса. Эйлерова характеристика — один из основных топологических инвариантов комплекса.

Теорема 9 (Гопфа). a) *Индекс многообразия $M^n\subset R^n$, ограниченного отрицательным многообразием без контакта, равен $(-1)^n\cdot c$ *), где c есть эйлерова характеристика многообразия M^n;* b) *индекс многообразия M^n, ограниченного положительным многообразием без контакта, равен $(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot c=c$ *).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно доказать лишь первую часть теоремы (случай a). Действительно, если векторное поле на M^{n-1} таково, что M^{n-1} есть положительное многообразие без контакта, то, рассмотрев диаметральное векторное поле, мы получим отрицательное многообразие $\overline{M}^{n-1}$. Тогда случай b) нашей теоремы следует из случая a) и теоремы 7.

Итак, пусть векторное поле в M^n задано таким образом, что на граничном многообразии M^{n-1} все векторы направлены внутрь M^{n-1}. Устраиваем из M^n комплекс, разбивая M^n на конечное число симплексов таким образом, чтобы на граничном комплексе, составленном из граней подразделения, не было ни одной особой точки нашего векторного поля. Для граничного комплекса опре-

*) Последний индекс есть так называемая «Curvatura integra» многообразия M^n.

делено непрерывное векторное поле $\{v(p)\}$. На границе каждого из симплексов отбираем те точки, векторы из которых направлены внутрь симплекса, или в крайнем случае лежат на границе (для тех граней, которые лежат на M^{n-1}, все векторы направлены внутрь единственного прилегающего к ним симплекса, в силу условий теоремы). Для всех этих точек строим вспомогательное непрерывное векторное распределение $\{u(p)\}$, которое будет играть роль поля «внутренних нормалей», удовлетворяющее следующим условиям:

1) все векторы $u(p)$ направлены внутрь своего симплекса;

2) на всех гранях $\leqslant n-2$ измерений векторы $u(p)$ и $v(p)$ не совпадают по направлению;

3) на гранях $n-1$ измерения совпадение векторов $u(p)$ и $v(p)$ возможно не более, чем в конечном числе точек.

Рассмотрим полуплоскость, определённую диаметральным к $u(p)$ вектором $\bar{u}(p)$ и вектором $v(p)$. Она пересекает $(n-1)$-мерную грань нашего симплекса, в которой лежит точка p, по некоторому вектору $w(p)$; причём, если $v(p)$ лежал сам в этой $(n-1)$-мерной грани, то $w(p)$ совпадает с $v(p)$. Если мы рассмотрим теперь два симплекса из нашего комплекса, примыкающих к одной и той же $(n-1)$-мерной грани, то мы видим, что совокупность всех точек p этой грани разбивается на 3 категории: I — точки, векторы которых $v(p)$ направлены внутрь первого симплекса, II — точки, векторы которых $v(p)$ направлены внутрь второго, и III — точки, для которых векторы $v(p)$ лежат на общей границе. Образуя векторы $w(p)$ для обоих симплексов, мы получим векторное распределение на всей $(n-1)$-мерной их общей грани, причём, в силу непрерывности векторов $u(p)$ и $v(p)$, будет непрерывным и вектор $w(p)$ всюду, за исключением того конечного числа точек, в которых направления векторов $u(p)$ и $v(p)$ совпадают между собой. В этих последних построенная полуплоскость имеет неопределённое направление, и следовательно для поля $\{w(p)\}$ получится особая точка.

Поле $\{w(p)\}$, определённое на всём граничном комплексе, называется «*проекцией*» поля $\{v(p)\}$ при помощи $u(p)$ на граничный комплекс.

Установим связь между суммами индексов особенностей поля $\{v(p)\}$ и его проекции $\{w(p)\}$.

Пусть T_k^n $(k=1, 2, \ldots, \alpha^n)$ — симплексы многообразия M^n; s_k^n — сумма индексов особенностей поля $\{v(p)\}$, лежащих внутри T_k^n; $s^n = \sum\limits_{k=1}^{\alpha^n} s_k^n$ — сумма индексов всех особенностей поля $\{v(p)\}$ и s^{n-1} — сумма индексов особенностей поля $\{w(p)\}$. Особые точки поля $\{w(p)\}$ распределяем по разным симплексам, относя особую точку границы к тому из n-мерных симплексов, внутри которого произошло совпадение направлений $u(p)$ и $v(p)$.

Определим теперь касательное к $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ (сфере направлений) поле $w^*(p)$, отнесённое к границе S^{n-1} симплекса T_k^n следующим образом. Векторные поля $u(p)$ и $v(p)$ на S^{n-1} дают отображения $f_1(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ и $f_2(S^{n-1}) = \overset{*}{S}{}^{n-1}$ на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$. Соединяем на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ точки $f_1(p)$ и $f_2(p)$ дугами больших кругов и направляем вектор $\overrightarrow{f_1(p), f_2(p)}$ по касательной к такой дуге. Каждой точке p отнесён однозначно некоторый вектор $w^*(p)$. Это векторное распределение на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ многозначно. Совокупность векторов $w^*(p)$ и называется векторным полем $\{w^*(p)\}$, отнесённым к S^{n-1}. Особыми точками этого последнего поля будут те точки p, где совпадают направления векторов $u(p)$ и $v(p)$, т. е. как раз особые точки нашей проекции $w(p)$.

Деформируем границу S^{n-1} симплекса T_k^n вместе с полем $\{w(p)\}$ в метрическую $(n-1)$-мерную сферу, а поле $\{u(p)\}$ в поле внутренних нормалей в этой сфере. Тогда за сферу направлений может быть взята сама сфера S^{n-1}, причём из построения параллельного переноса $u(p)$ и $v(p)$ в центр S^{n-1} и пересечения с S^{n-1} видно, что векторное поле $\{w^*(p)\}$ будет зеркальным отражением в экваторе деформированного поля $\{w(p)\}$. Так как при деформации индекс сохраняется, а при зеркальном отражении меняет знак, то, если обозначим сумму индексов поля $w^*(p)$ на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ через a_k^n, получим, что сумма индексов $w(p)$ на S^{n-1} будет также равна a_k^n и, следовательно,

$$s^{n-1}=\sum_{k=1}^{\alpha^n} a_k^n.$$

Для вычисления $a_k{}^n$ вводим ещё одно касательное к $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ поле $\{w^{**}(p)\}$. Выберем на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ некоторую фиксированную точку O^* и проведём через точки O^*, $f_1(p)$, $f_2(p)$ малый круг на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$. Строим вектор $\overrightarrow{f_1(p)f_2(p)}$ по касательным к этому кругу. Наши круги становятся неопределёнными, когда вместо трёх определяющих их точек мы имеем только две точки, т. е. когда или $f_1(p)=0$, или $f_2(p)=0$ или $f_1(p)=f_2(p)$. Таким образом, мы получаем для нового поля три типа особенностей:

1) точки совпадения направлений $u(p)$ и $v(p)$, где $f_1(p)=f_2(p)$;

2) точки, где $f_1(p)=0$;

3) точки, где $f_2(p)=0$.

Прежде всего, легко видеть, что в окрестности точек первого типа поле $\{w^{**}(p)\}$ является сколь угодно малой деформацией поля $\{w^*(p)\}$, так как соответствующие дуги малых кругов сколь угодно мало отличаются от дуг больших кругов. Поэтому сумма индексов этих особых точек поля $\{w^{**}(p)\}$ равна сумме индексов особых точек поля $\{w^*(p)\}$, т. е. интересующему нас числу a_k^n.

Для вычисления этой суммы индексов, а также суммы индексов всех особенностей поля $\{w^{**}(p)\}$ каждой особой точке $p\subset S^{n-1}$ ставим в соответствие касательную плоскость в $f_1(p)$. В этой касательной плоскости рассматриваем $(n-2)$-мерную сферу направлений $\overset{*}{S}{}^{n-2}$, с центром в $f_1(p)$. Берём столь мелкое симплициальное подразделение S^{n-1}, чтобы в каждый симплекс попало не более одной особой точки и на границе не было бы особых точек. Рассматриваем векторы $\overrightarrow{f_1(x) f_2(x)}$ на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ для всех точек $x \subset S^{n-2}$ границы симплекса подразделения, содержащего в себе особую точку p, и переносим их в центр $\overset{*}{S}{}^{n-2}$, т. е. в $f_1(p)$, стереографически проектируем на касательную плоскость и рассматриваем полученное отображение S^{n-2} на $\overset{*}{S}{}^{n-2}$. Степень его и есть индекс точки p.

Вычислим $\sum\limits_{p \in w^{**}} I(p)$, т. е. сумму индексов всех особых точек поля $\{w^{**}(p)\}$. Обозначим особые точки 1-го типа через q, 2-го — через r, 3-го — через s.

Тогда

1) $\sum I(q) = a_k^n$, как мы уже указывали.

2) Индекс одной точки r равен ± 1, смотря по тому, будет ли симплекс, содержащий эту точку, отображаться при помощи f_1 на $\overset{*}{S}{}^{n-1}$ с положительной или с отрицательной индикатрисой.

Всего мы получим число положительных симплексов, покрывающих точку O, без числа отрицательных симплексов, покрывающих ту же точку, при отображении f_1. Обозначая степень отображения $f_1(p)$ через g_1, имеем

$$\sum I(r) = g_1.$$

3) Если бы подсчёт индекса для точек 3-го типа производился при помощи отображения в касательную плоскость в точке $f_2(s)$, то мы получили бы для суммы индексов число g_2 — степень отображения f_2. Но так как сфера направлений $\overset{*}{S}{}^{n-2}$ лежит в касательной плоскости к $f_1(s)$, для которой $f_2(s)$ — внешняя точка, то ориентация меняется на обратную, и мы имеем

$$\sum I(s) = -g_2.$$

Итак, объединяя полученные результаты, имеем:

$$\sum_p I(p) = a_k^n + g_1 - g_2.$$

С другой стороны, мы видели, что по теореме 8

$$\sum_p I(p) = [-1 + (-1)^{n-1}]\, g_1 = g_1 + (-1)^{n-1} g_1.$$

Следовательно,

$$a_k^n = (-1)^{n-1} g_1 + g_2.$$

Так как отображение f_1 соответствует полю $\{u(p)\}$, которое можно перевести непрерывно в поле векторов, смотрящих в одну точку, т. е. в поле «внутренних нормалей», то его степень, по теореме 6, равна $(-1)^n$. Отсюда

$$a_k^n = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n + g_2 = -1 + g_2 = -1 + s^n,$$

так как, по определению: $g_2 = s_k^n$.

Суммируя по всем симплексам T_k^n $(k = 1, 2, \ldots, \alpha^n)$, получаем

$$-s^{n-1} = -\alpha^n + s^n,$$

или

$$s^n = \alpha^n - s^{n-1}.$$

Предположим теперь, что теорема Гопфа верна для $(n-1)$-мерного граничного комплекса, т. е. допустим, что

$$s^{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \alpha^i.$$

Тогда

$$s^n = \alpha^n - (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \alpha^i = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha^i =$$
$$= (-1)^n \cdot c.$$

Остаётся проверить справедливость нашей теоремы для $n = 1$. Мы имеем в этом случае конечное число отрезков, разбитых на конечное число α^1 подотрезков, с помощью α^0 вершин. Если в окрестности особой точки (которая по условию не совпадает с вершинами) все векторы направлены к ней, то её индекс равен -1, если от неё, то он равен $+1$.

Пусть s_k^1 — сумма индексов особых точек комплекса T_k^1, — a_k^1 — число векторов в вершинах, смотрящих внутрь своего симплекса. Тогда:

$$\text{если } -a_k^1 = 2, \quad \text{то} \quad s_k^1 = -1;$$
$$\text{если } -a_k^1 = 0, \quad \text{то} \quad s_k^1 = +1;$$
$$\text{если } -a_k^1 = 1, \quad \text{то} \quad s_k^1 = 0.$$

Отсюда во всех трёх случаях

$$a_k^1 = -1 + s_k^1.$$

Но, с другой стороны, $\sum(-a_k^1)$ есть число векторов в вершинах, направленных внутрь своего симплекса, а каждый вектор в вершине направлен внутрь только одного из симплексов, которые к этой вершине примыкают, т. е. число таких векторов равно числу вершин:

$$\sum a_k^1 = -\alpha^0.$$

Отсюда, суммируя (1), получим: $s^1 = \alpha^1 - \alpha^0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как эйлерова характеристика есть топологический инвариант многообразия M^n, то то же самое справедливо для суммы индексов особенностей многообразия M^n.

Следствие 2. Для поверхности M^2 рода p, в частности, имеем, что сумма индексов особенностей в многообразии M^3, ограниченном M^2, равна $p-1$, если M^2 — отрицательная поверхность без контакта, и равна $1-p$, если M^2 — положительная поверхность без контакта.

Примечание. Так как в доказательстве мы нигде не пользовались связностью многообразия M^{n-1}, ограничивающего M^n, то та же формула справедлива и для случая M^n, ограниченного конечным числом замкнутых M^{n-1}.

§ 5. Аналитическое определение индекса многообразия. Индекс многообразия M^{n-1}, или степень отображения M^{n-1} на сферу направлений, можно определить аналитически, предполагая существование непрерывно изменяющейся касательной гиперплоскости к этому многообразию. Мы покажем, как это можно сделать для многообразия M^2; для общего случая рассуждения аналогичные.

Пусть уравнение многообразия M^2 есть

$$(1)\qquad F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема. Функции

$$(2)\qquad X(x, y, z),\quad Y(x, y, z),\quad Z(x, y, z),$$

которыми заданы компоненты векторного поля по прямоугольным декартовым осям координат x, y, z, мы тоже будем предполагать непрерывно дифференцируемыми.

Когда точка (x, y, z) описывает поверхность (1), концы векторов (2), перенесённые в начало координат пространства (ξ, η, ζ), описывают поверхность

$$(3)\qquad \xi = X(x, y, z),\quad \eta = Y(x, y, z),\quad \zeta = Z(x, y, z).$$

Определение индекса, как степени отображения, в существенном сводилось к подсчёту того числа, которое показывает, сколько раз (в алгебраическом смысле, т. е. учитывая ориентацию) поверхность сферы направлений покрыта образами точек поверхности.

Вычислим, какую элементарную площадку $d\omega$ на сфере направлений $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ описывают векторы (2), концы которых образуют элементарную площадку $d\Omega$ на поверхности (3). Очевидно,

$$d\omega = \frac{d\Omega \cos(\nu, \rho)}{S^2},$$

где (ν, ρ) есть угол нормали к поверхности с радиусом-вектором, а $S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$. Вычисляем далее

$$\cos(\nu, \rho) = \cos(\nu, \xi)\cos(\rho, \xi) + \cos(\nu, \eta)\cos(\rho, \eta) + \cos(\nu, \zeta)\cos(\rho, \zeta) = \frac{X\cos(\nu, \xi) + Y\cos(\nu, \eta) + Z\cos(\nu, \zeta)}{S}.$$

Таким образом, имеем

$$(4)\qquad d\omega = \frac{1}{S^3}\Big[X\,d\Omega\cos(\nu, \xi) + Y\,d\Omega\cos(\nu, \eta) + Z\,d\Omega\cos(\nu, \zeta)\Big].$$

Мы выразили алгебраическую площадь элемента единичной сферы через элементарные площадки поверхности (3). Остаётся отнести $d\omega$ к элементарной площадке dw поверхности (1). Эта связь выражается формулой *):

$$(5)\quad \cos(\nu, \xi)\, d\Omega = \left[\frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(z, x)} \cos(n, y) + \frac{D(\eta, \zeta)}{D(x, y)} \cos(n, z)\right] dw$$

и двумя аналогичными формулами, получаемыми круговой заменой ξ, η, ζ. Здесь (n, x) есть угол внешней нормали к поверхности (1) с осью x, и аналогичное значение имеют (n, y) и (n, z). Мы предполагаем, что внутренности поверхности (1) соответствует область, где $F < 0$; тогда косинусы углов внешней нормали к поверхности (1) с осями координат будут соответственно:

$$(6)\qquad \frac{1}{\Sigma}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{1}{\Sigma}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{1}{\Sigma}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где

$$\Sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Подставляя значение (6) в (5), а эти последние в (4), и используя формулы преобразования (3), находим

$$d\omega = \frac{1}{S^3\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ X & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ Y & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ Z & \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} dw = -\frac{1}{\Sigma} R\, dw.$$

*) Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. 2, гл. I, § 5, 33, или Гурса, Курс математического анализа, т. 1, § 137.

Покрытая площадь сферы выразится интегралом от $d\omega$ по всей поверхности (1), а индекс, т. е. число раз, какое сфера покрыта, получится делением на 4π, т. е. индекс равен

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{R}{\Sigma}\,dw.$$

ПРИМЕЧАНИЯ

24 Зак. 474. А. Пуанкаре.

К МЕМУАРУ ПЕРВОМУ

[1] Более точное определение того, что такое качественное исследование дифференциального уравнения содержится в дополнении «Общая качественная теория».

[2] Понятие отдельной характеристики, таким образом, не вполне определено, поскольку не вполне выяснено понятие кривой, определяемой дифференциальным уравнением. По смыслу дальнейшего, автор под характеристикой понимает кривую, изображающую решение уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ (существующее по теореме Коши, при условии, что начальная точка (x_0, y_0) не является «особой», т. е., что $X(x_0, y_0)$ и $Y(x_0, y_0)$ не обращаются одновременно в нуль), и продолжения этого решения (существование которых доказывается с помощью теоремы Коши) как для этого уравнения, так и для уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{X}{Y}$. В случае, если такое продолжение приводит нас к особой точке, то специальным соглашением устанавливается, когда характеристика останавливается в этой точке и когда она должна быть продолжена через особую точку (сравните начало V главы). В настоящее время более принято пользоваться понятием «траектории», определение которой дано в дополнении «Общая качественная теория».

[3] Здесь и всюду в дальнейшем под «кривой» подразумевается кривая, имеющая, за исключением, быть может, конечного числа точек, непрерывно вращающуюся касательную. —

[4] Приводимое определение сферического цикла не вполне точно. Из дальнейшего ясно, что под словами «сферический цикл» автор подразумевает простую замкнутую кривую, имеющую, за исключением конечного числа точек, непрерывно вращающуюся касательную. Аналогично под термином «дуга» подразумевается простая дуга, имеющая непрерывно вращающуюся касательную, и лишь в редких случаях допускается существование одной или нескольких угловых точек.

[5] Ввиду того, что рассматриваемые циклы могут иметь угловые точки, вопрос о числе точек пересечения нуждается в уточнении. Это уточнение автор делает в гл. V.

[6] Утверждение автора, что всякую алгебраическую кривую на сфере Пуанкаре можно рассматривать как состоящую из циклов, — нуждается в доказательстве. Это доказательство, хотя и совершенно элементарное, весьма громоздко, и потому мы его здесь не приводим. Отметим, что вопрос о числе этих циклов становится вполне определённым лишь в предположении, что алгебраическая кривая не имеет особых точек. В этом случае из теоремы Харнака (Mathematische Annalen, Bd. 10 (1876)) следует, что число таких циклов на сфере Пуанкаре не превышает $(n-1)(n-2)+2$, если n — степень алгебраической кривой.

[7] В силу третьей гипотезы, дуги больших кругов, касательных к рассматриваемой части характеристики, пересекают экватор в точках некоторой дуги, одним из концов которой является точка ω_1, другой конец этой дуги в тексте обозначен через ω_2, так что все точки ω_i лежат между ω_1 и ω_2. Конец рассуждений, которыми устанавливается невозможность третьей гипотезы, заключается по существу просто в ссылке на геометрически очевидные факты.

[8] Уточним это определение. Заметим, прежде всего, что под двойными точками автор понимает двойные точки с различными действительными касательными. Как явствует из дальнейшего, полициклом Пуанкаре называет замкнутую самопересекающуюся аналитическую кривую, не имеющую других особых точек, кроме точек самопересечения, которые являются двойными точками. Более сложные особые точки кривых исключаются из рассмотрения, потому что в дальнейшем полициклы используются исключительно для построения так называемой топографической системы (см. ниже) в предположении, что дифференциальное уравнение имеет лишь простые особые точки — узлы, фокусы и сёдла.

[9] Предполагается, конечно, что ось цилиндра пересекает поверхность шара и что радиус поперечного сечения цилиндра меньше радиуса шара.

[10] Здесь автор, в отличие от остальных частей мемуара, пользуется аналитическим продолжением через особую точку, в которой дифференциальное уравнение не определено, и через которую, следовательно, продолжение по теореме Коши невозможно. Поэтому сделанные здесь высказывания о ходе характеристики находятся в некотором противоречии с дальнейшими соглашениями о продолжении характеристики через особую точку (см. начало главы V).

[11] По поводу таких особых точек «второго рода» см. работу Фроммера, Интегральные кривые дифференциального уравнения I-го порядка..., Успехи Математических наук, вып. IX (1941), стр. 212—253.

[12] Если бы точка лежала на большом круге $x=0$, то мы сделали бы подстановку: $x=\frac{t}{z}$, $y=\frac{1}{z}$, и провели бы совершенно такое же рассуждение.

[13] В тексте знак — отсутствует.

[14] В тексте: «Кривые X и Y»

[15] Заметим, что теорема II непосредственно вытекает из следствия II на стр. 41, которое выводится независимо от предыдущих рассмотрений.

[16] Начатую здесь классификацию тех случев, когда на сфере существуют только две особые точки, Пуанкаре не доводит до конца. Поставленный здесь вопрос о том, каковы должны быть эти особые точки, Пуанкаре решает на стр. 41 (следствие III).

[17] Степени которых не превышают $m-1$.

[18] Формула и предшествующий текст помещаются с исправлениями. внесёнными редактором трудов Пуанкаре *J. Drach.*

[19] Так как

$$X=x^mX_1=x^{m-1}\xi_1+\lambda_0x^m+\lambda_1x^{m-1}(y-ax)+ \\ +\lambda_2x^{m-2}(y-ax)^2+\ldots+\lambda_m(y-ax)^m,$$

$$Y=x^mY_1=x^{m-1}\eta_1+\mu_0x^m+\mu_1x^{m-1}(y-ax)+ \\ +\mu_2x^{m-2}(y-ax)^2+\ldots+\mu_m(y-ax)^m,$$

то

$$X_2=\lambda_0x^m+\lambda_1x^{m-1}(y-ax)+\lambda_2x^{m-2}(y-ax)^2+\ldots+ \\ +\lambda_m(y-ax)^m,$$

$$Y_2=\mu_0x^m+\mu_1x^{m-1}(y-ax)+\mu_2x^{m-2}(y-ax)^2+ \\ +\ldots+\lambda_m(y-ax)^m$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y}(xX_2Y_2-yX_2^2)=(xY_2-2yX_2)\frac{\partial X_2}{\partial y}+X_2\left(x\frac{\partial Y_2}{\partial y}-X_2\right).$$

Отсюда, при $y=ax$, учитывая, что $\mu_0=a\lambda_0$, имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(xX_2Y_2-yX_2^2)\right]_{y=ax}=$$

$$=(\mu_0x^{m+1}-2a\lambda_0x^{m+1})\lambda_1x^{m-1}+\lambda_0x^m(\mu_1x^m-\lambda_0x^m)=$$

$$=-x^{2m}(\lambda_0^2+2a\lambda_0\lambda_1-\mu_0\lambda_1-\mu_1\lambda_0)=-x^{2m}(\lambda_0^2+a\lambda_0\lambda_1-\mu_1\lambda_0),$$

что и доказывает утверждение текста.

[20] Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(xX_2Y_2-yX_2^2)=x\,\frac{\partial}{\partial y}\left[X_2^2\left(\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}\right)\right]=$$

$$=x\left[2X_2\frac{\partial X_2}{\partial y}\left(\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}\right)+X_2^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}\right)\right]$$

и

$$\left[\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}\right]_{y=\alpha x}=\frac{\mu_0}{\lambda_0}-\alpha=0,$$

то будем иметь

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(xX_2Y_2-yX_2^2\right)\right]_{y=\alpha x}=\left[xX_2^2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y_2}{X_2}-\frac{y}{x}\right)\right]_{y=\alpha x}.$$

Таким образом, утверждение текста справедливо, если предполагать, что $x>0$.

[21] Ввиду того что при изложении теории индекса автор допускает некоторые неточности (в частности, например, пользуется не вполне определённым понятием бесконечно малого цикла), в дополнении «Особые точки векторных полей» даётся строгая теория индекса.

[22] Предполагается, что учитывается кратность точек пересечения.

[23] Необходимо иметь в виду, что речь идёт об особых точках, лежащих на одном из *циклов* $X=0$. На кривой $X=0$ могут быть 2 узла или 2 седла, разделённых кратной точкой, например:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{xy}.$$

[24] Рассматривается в противопоставление «общему случаю» (см. стр. 33).

[25] Эта формула может быть получена иным путём, сравните главу XIII.

[26] Это соглашение о подсчёте точек пересечения алгебраической кривой с алгебраическим циклом не охватывает целого ряда случаев (лежащей на цикле изолированной особой точки алгебраической кривой, точки заострения цикла и т. д.). Поэтому и доказательство теоремы VI, основанное на этом соглашении и резюме, которое Пуанкаре делает ниже, верно

лишь при известных оговорках. Мы не даём здесь нужных уточнений (которые не трудно сделать), потому что в дальнейшем теория контактов применяется преимущественно лишь при простейших предположениях.

[27] Здесь и в дальнейшем, согласно I. Drach. изменены знаки некоторых неравенств.

[28] Здесь I. Drach исправлена ошибка, имеющаяся в первоначальном тексте.

[29] Для справедливости дальнейших рассуждений нужно сделать предположение, что эти ряды, так же как и ряды для x, y, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, сходятся равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$.

[30] В силу отсутствия контакта.

[31] Отметим, что тут Пуанкаре фактически строит не дугу без контакта, а дугу, пересекающую каждую характеристику лишь в одной точке. Такие дуги могут быть названы «дугами однократного пересечения» и в некоторых случаях могут играть ту же роль, что и дуги без контакта.

[32] Настоящая теорема сформулирована Пуанкаре в весьма общем виде; относительно дуги подхватывающей кривой не делается никаких предположений, не считая того очевидного допущения, что она имеет непрерывно вращающуюся касательную. Доказательство же, даваемое Пуанкаре этой теореме, содержит ряд предположений, сильно суживающих общность теоремы (подхватывающая дуга предполагается алгебраической, функция F меняет знак при переходе через неё и т. д.). Поэтому мы изложим здесь вкратце идею другого доказательства, без труда распространяющегося на случаи, рассмотренные в примечаниях I и II.

Пусть точки пересечения дуги траектории (см. дополнение к гл. V) и поддерживающей дуги будут точки A и B. На поддерживающей дуге установим определённое направление движения, например, от A к B. Тогда в каждой точке поддерживающей дуги существует вектор касательной. Так как эта дуга не проходит через особые точки дифференциального уравнения, то в каждой её точке получается определённый, с точностью до целократного 2π, угол между векторами—вектором, касательным к траектории, проходящей через эту точку, и вектором, касательным к поддерживающей дуге. Будем мерить этот угол против часовой стрелки. Тогда, опираясь на определение поддерживающей дуги, нетрудно показать, что если в точке A этот угол меньше π, то в точке B он больше π (или наоборот). Следовательно, при движении от A к B по поддерживающей дуге, угол этот нечётное число раз будет делаться кратным числу π,—а каждая точка, в которой этот угол кратен π, будет, очевидно, точкой касания поддерживающей дуги и траектории.

К МЕМУАРУ ВТОРОМУ

[1] Этой главой начинается второй мемуар *«О кривых, определяемых дифференциальным уравнением»* (Journal de Mathématique, pure et appliquée (3-e ser. t. VIII (1882)).

[2] Ср. по этому поводу дополнение «Общая качественная теория».

[3] Для уточнения понятия правой и левой сторон дуги AB можно поступить следующим образом: соединим точки A и B простой дугой ACB, не имеющей с данной дугой AB, кроме A и B, никаких других общих точек. Тогда мы получим простую замкнутую кривую, разбивающую плоскость на две части (по теореме Жордана). Точки одной из этих частей будем считать лежащими справа от данной дуги AB, а точки другой—слева от неё.

[4] Повидимому, название «спираль» автор применяет лишь к кривым, не имеющим точек остановки. Поэтому полухарактеристику, кончающуюся в узле, Пуанкаре не называет спиралью, хотя она и будет пересекать некоторый цикл в одной только точке.

[5] Последующие, до конца главы, рассуждения Пуанкаре представляют собою просто разбор нескольких частных примеров, иллюстрирующих предыдущую теорию.

[6] Из текста следует, что автор имел в виду ещё второй пример, соответствующий кривой $CHFGHD$. В этом случае дуга без контакта пересечена тремя ветвями характеристик, выходящими из одного седла, и тремя ветвями, выходящими из другого седла. *Собрания трудов Пуанкаре Драша* (*I. Drach*).

[7] Все последующие рассуждения Пуанкаре (до теоремы XV) хотя и совершенно ясны по идее, но нуждаются в некоторых уточнениях. Мы не будем приводить их здесь, так как по существу эти уточнения даны в соответствующих частях дополнения «Общая качественная теория».

[8] Нетрудно уточнить, на основании высказываний, делаемых автором, что здесь понимается под «предельным циклом»: именно, пользуясь понятием траектории, можно сказать, что Пуанкаре называет предельным циклом множество всех предельных точек незамкнутой полутраектории, если среди этих предельных точек есть отличные от состояний равновесия.

[9] Приводимые здесь рассуждения можно рассматривать лишь как намётку того пути, которым могла бы быть доказана эта теорема. Смотрите по этому вопросу дополнение «Общая качественная теория».

[10] Как уже отмечалось, понятие характеристики у Пуанкаре не вполне определённо.

Если особая точка, в которой кончается характеристика, причисляется к этой характеристике, то данное утверждение очевидно.

Если же эту особую точку не причислять к характеристике (что соответствует и более употребительному теперь понятию траектории), то это утверждение, очевидно, неверно; характеристики могут итти из узла в узел, не пересекая алгебраического цикла, проходящего через эти узлы.

[11] Предыдущие рассмотрения не могут, очевидно, считаться доказательством теоремы XVIII. Можно считать доказанным существование «предельного кольца»; легко доказать также, что вблизи узла или фокуса существует семейство циклов без контакта, но совершенно нельзя считать очевидным, что междукольцевые области можно заполнить циклами и полициклами без контакта. Приведённое автором рассуждение является лишь примером такого заполнения для одного частного случая между кольцевых областей. Следует также отметить, что, вообще говоря, для одного и того же дифференциального уравнения может существовать несколько различных, не подобных между собой топографических систем, удовлетворяющих условиям теоремы XVIII.

Таким образом, теорема XVIII до настоящего времени остаётся недоказанной.

[12] Эти слова ни в коем случае нельзя понимать в том смысле, что топографическая система, удовлетворяющая условиям теоремы XVIII, всегда однозначно определяет качественную картину характеристик; наоборот, можно построить примеры качественно различных картин характеристик, допускающих одну и ту же топографическую систему кривых без контакта. Однако знание такой топографической системы всё же весьма существенно помогает при качественном исследовании дифференциального уравнения.

[13] См. примечание 19.

[14] В этом месте автор допустил ошибку в вычислениях, заставившую его (ошибочно) остановиться на первой гипотезе. Ошибка эта здесь исправлена, согласно вычислениям редактора. — *Собрания трудов Пуанкаре Драша (J. Drach).*

[15] В этом чертеже была допущена неточность — неверно дано закручивание спиралей; мы помещаем чертёж в исправленном виде.

[16] При рассмотрении этого примера Пуанкаре ошибочно считал экватор предельным циклом. В тексте сделаны необходимые поправки.

[17] Такое перечисление противоречит основному соглашению; если считать, что характеристика кончается в седле, то окружность $x^2+y^2=9$ состоит из двух характеристик; иначе она состоит из двух ветвей характеристик.

[18] При рассмотрении этого примера Пуанкаре ошибочно считал экватор предельным циклом. В тексте сделаны необходимые поправки.

[19] Пуанкаре точно не определяет, что он понимает под «полным исследованием», а также не вполне ясно, какой смысл и содержание он вкладывает в слова: «нахождение уравнения в конечном виде». Можно думать, судя по примерам предыдущей главы, что под «уравнением в конечном виде» понимается алгебраическое уравнение, а под «полным исследованием» — знание уравнений предельных циклов в «конечном виде» (т. е. в виде алгебраических функций, если, конечно, это возможно) и знание качественного хода остальных характеристик.

Очевидно, что в рассматриваемом вопросе нет никакой принципиальной разницы между алгебраическим и неалгебраическим уравнением. Это понимание «полного исследования» имеет смысл и без нужного ограничения вида функций, дающих уравнения предельных циклов.

Кроме того, очевидно, что «полное исследование» в смысле Пуанкаре не является только качественным исследованием в современном понимании (см. доп. к гл. V), так как включает в себе отыскание точного уравнения некоторых траекторий, или, по терминологии Пуанкаре, характеристик.

В главе IX Пуанкаре фактически (за исключением сравнительно мелких деталей, которые нетрудно дополнить) проводит исчерпывающее качественное исследование; с его точки зрения, однако, оно является «неполным».

[20] До сих пор не известен регулярный метод для качественного исследования заданного дифференциального уравнения и, в частности, неизвестен регулярный метод решения той задачи разделения предельных циклов, о которой говорит Пуанкаре. Слова Пуанкаре, что такое разделение предельных циклов всегда возможно, можно понимать лишь в том смысле, что это разделение теоретически возможно путём конечного числа шагов.

[21] В силу сделанных предположений, на экваторе нет особых точек.

[22] Поскольку не указан способ построения функции $F_1(x, y)$ (а также и других функций, вводимых Пуанкаре в этой главе, например, функций $F_2, F_3, \ldots$, или функций, о которых он говорит при решении «второй проблемы», см. ниже) для заданного дифференциального уравнения, — этот метод нельзя считать регулярным методом, позволяющим решить вопросы о существовании и числе предельных циклов. Поэтому «общий метод» Пуанкаре, равно как и дополняющие его в дальнейшем рассуждения, нужно рассматривать лишь как некоторые приёмы, которые иногда удаётся использовать, и границы приложимости которых не установлены. Практически, отыскание функции $F_1(x, y)$, удовлетворяющей поставленным требованиям (как и отыска-

ние остальных функций, вводимых здесь), столь затруднительно, что его обычно не удаётся выполнить даже в том простейшем случае, которым ограничивается автор. Вопросы, связанные, с установлением числа и расположения предельных циклов, вообще остаются и до настоящего времени одними из труднейших вопросов качественной теории дифференциальных уравнений.

[23] Смысл этого неравенства — кривая контактов имеет в начале изолированную особую точку; левая часть его была неправильно вычислена у Пуанкаре. Здесь она приведена в исправленном виде, данном редактором «Собрания трудов Пуанкаре», Драшем (J. Drach).

[24] Всё это рассуждение (касающееся решения первой проблемы) может быть уточнено, и в то же время становится нагляднее, если использовать понятие траектории (см. дополнение к гл. V) и ввести параметр t. Тогда, если $F_1(x, y) = \alpha$ и $F_1(x, y) = \beta$ — уравнения циклов без контакта, ограничивающих «сомнительную» область, то, как легко видеть, в точках этих циклов мы будем иметь

$$\frac{dF_1}{dt} = XF'_{1x} + YF'_{1y} \neq 0.$$

Если $\frac{dF_1}{dt}$ имеет разные знаки на циклах $F_1 = \alpha$ и $F_1 = \beta$, то, как легко видеть, траектории, пересекающие эти циклы, или входят в область, ограниченную ими, или все выходят из неё. Отсюда можно заключить (опираясь на теоремы дополнения «Общая качественная теория»), что внутри этой области существует хотя бы один предельный цикл.

Если же $\frac{dF_1}{dt}$ имеет один и тот же знак на циклах $F_1 = \alpha$ и $F_1 = \beta$, то все траектории, пересекающие один из этих циклов, входят в ограниченную этими циклами область, а пересекающие другой — выходят из неё.

Предполагая, как это неявно делает Пуанкаре, что нет предельных циклов чётной кратности (см. примечание в конце главы), отсюда уже нетрудно получить, что число предельных циклов нечётно в первом случае и чётно во втором.

[25] Повидимому, под «простыми, не слившимися» и «слившимися» предельными циклами, Пуанкаре понимает следующее: Пусть C — предельный цикл и AB — отрезок без контакта, пересекающий его в некоторой точке P. Пусть $s_1 = \varphi(s_0)$ — функция последования на отрезке AB. Будем рассматривать s_0 и s_1, как прямоугольные декартовы координаты. Тогда кривая $s_1 = \varphi(s_0)$ при значении $\bar{s}_0$, соответствующем предельному циклу C, имеет общую точку p с прямой $s_1 = s_0$. Если $\varphi'(\bar{s}_0) \neq 1$, то кривая последования пересекает прямую $s_1 = s_0$ в точке p,

Мы скажем, по определению, что в этом случае цикл C — простой (однократный) предельный цикл.

Если же $\varphi'(\bar{s}_0)=1$, то кривая $s_1=\varphi(s_0)$ касается прямой $s_1=s_0$ в точке p, и мы скажем, что цикл C есть кратный предельный цикл (кратности k, если точки p есть k-кратная точка пересечения кривой последования и прямой $s_1=s_0$) или же, пользуясь терминологией Пуанкаре, мы скажем, что имеем несколько слившихся циклов. Очевидно, C будет чётно-кратным, если вблизи точки p кривая $s_1=\varphi(s_0)$ лежит по одну и ту же сторону прямой $s_1=s_0$, и нечётно-кратным, если эта кривая лежит по разные стороны этой прямой.

Введём параметр t, перейдя от одного уравнения к системе, и будем говорить о траекториях (см. дополнение 1). Условимся, для определённости, при построении функции последования двигаться по траектории в сторону возрастающего t, так что точке M_1, последующей для M_0, будет соответствовать большее значение t, чем точке M_0. Тогда, как легко видеть, при $\varphi'(\bar{s}_0)<1$ подвижная точка, находящаяся при $t=0$ на отрезке без контакта AB (и не совпадающая с точкой P), будет при $t\to+\infty$ приближаться к предельному циклу. Иначе можно сказать, что все траектории, как лежащие вне C, так и лежащие внутри C, и достаточно близкие к предельному циклу C, неограниченно приближаются к нему при $t\to+\infty$. Точно так же при $\varphi'(\bar{s}_0)>1$ все траектории, достаточно близкие к циклу C, удаляются от него при $t\to+\infty$ (или приближаются при $t\to-\infty$).

Нетрудно видеть, что один из этих двух случаев будет иметь место по отношению и к нечётно-кратному циклу. В случае же чётно-кратного цикла положение иное: если траектории, лежащие внутри предельного цикла C, приближаются к нему при $t\to+\infty$, то траектории, лежащие вне C, должны удаляться от него при $t\to+\infty$ и наоборот.

Построения Пуанкаре теряют силу в случае чётно-кратного цикла, подобно тому, как аналогичное алгебраическое построение теряет силу для чётно-кратных корней.

[26] См. примечание [19].

[27] При $t\to-\infty$; при $t\to+\infty$ она будет стремиться к началу координат.

К МЕМУАРУ ТРЕТЬЕМУ

[1] Термин «траектория» Пуанкаре употребляет в смысле, отличном от того, в котором он употребляется в примечаниях и в дополнениях. Именно: а) в согласии с «основным соглашением» Пуанкаре продолжает траекторию через седло (см. гл. V); б) хотя у Пуанкаре и не сформулировано отчётливо, причисляет

ли он или нет узел к той траектории, которая кончается в этом узле (т. е. к бесконечному множеству траекторий), но некоторые места заставляют думать, что он неявно это причисление делает.

[2] Очевидно, что в точках окружностей $\rho=1$ и $\rho=3$ теорема единственности решения неверна. Поэтому естественно было бы считать эти окружности особыми линиями и не продолжать траекторию, идущую от точки одной из этих окружностей к точке другой из них. Пуанкаре же опирается на аналитическую форму общего решения, и поэтому называет «траекторией» целое множество траекторий в нашем смысле. Кроме того, не определён знак перед корнем, и, как ясно из дальнейшего, он считается то положительным, то отрицательным. Только поэтому и получается всюду плотное заполнение кольца одной «траекторией».

[3] Здесь, как и в предыдущем примере, Пуанкаре опирается на аналитическую форму общего решения и под «траекторией» подразумевает кривую, изображающую функцию, полученную из данной записи общего решения при определённом значении произвольного постоянного интеграции. Только поэтому в данном примере «траектории», являясь совокупностью разомкнутых кривых, и заполняют всюду плотно всю плоскость.

Вопрос о геометрическом изображении отрицательных значений радиуса-вектора ρ остаётся открытым.

[4] Словом «устойчивость» пользуются для обозначения весьма различных понятий. Мы перечислим здесь вкратце некоторые наиболее важные определения устойчивости траекторий (употребляя термин «траектория» в смысле дополнения к главе V). Существуют определения устойчивости, характеризующие поведение данной отдельной траектории. Таково определение Пуассона (изложенное в тексте Пуанкаре) и гораздо более широкое определение Лагранжа, уточнённое Биркгофом, который называет траекторию *устойчивой*, если она не уходит в бесконечность и не стремится к точкам пространства, где правые части дифференциальных уравнений имеют особенности.

Наряду с этим существуют определения устойчивости траектории, связанные с тем, как ведут себя соседние траектории по отношению к исследуемой. Таково определение Ляпунова. Траектория $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ называется *устойчивой по Ляпунову* в данной точке $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, если при любом $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что для всякой траектории $x=\overline{\varphi}(t)$, $y=\overline{\psi}(t)$ из неравенств

$$|\varphi(t_0)-\overline{\varphi}(t_0)|<\delta, \quad |\psi(t_0)-\overline{\psi}(t_0)|<\delta,$$

следуют неравенства

$$|\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)|<\varepsilon, \quad |\psi(t)-\overline{\psi}(t)|<\varepsilon$$

для всех значений t.

[5] Таким образом, здесь Пуанкаре причисляет к спиралям также и траектории, кончающиеся в узле, — которые он, повидимому, раньше к спиралям не причислял.

[6] Тот факт, что траектория делает бесконечное множество витков, не вытекает непосредственно из этих рассмотрений. Это утверждение является непосредственным следствием известной теоремы Бендиксона (см. дополнение «Общая качественная теория»).

[7] Здесь была допущена ошибка в вычислении; в тексте даны исправленные вычисления по Драшу (J. Drach).

[8] Легко видеть, что если в системе

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y$$

перейти к полярным координатам ρ, ω, то мы получим:

$$\frac{d\rho}{dt}=R, \quad \frac{d\omega}{dt}=\Omega,$$

где R и Ω те самые, которые вводит Пуанкаре.

[9] Принимая во внимание (см. предыдущее примечание), что

$$\frac{d\rho}{d\omega}=\frac{R}{\Omega},$$

эти три примера запишутся так:

$$\frac{d\rho}{d\omega}=-\rho^2\frac{d\varphi}{d\omega}; \quad \frac{d\rho}{d\omega}=-(\rho^2+\rho^3)\frac{d\varphi}{d\omega}; \quad \frac{d\rho}{d\omega}=-(\rho^2+\rho^4)\frac{d\varphi}{d\omega};$$

или, что то же:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\rho^2; \quad \frac{d\rho}{d\varphi}=-(\rho^2+\rho^3); \quad \frac{d\rho}{d\varphi}=-(\rho^2+\rho^4).$$

Таким образом, здесь Пуанкаре по неясным причинам фактически просто изменил обозначение полярного угла.

[10] Выбор F совершается на основании следующих трёх условий:

1) $F=\mathrm{const.}$ есть общий интеграл;

2) $F(\rho, \varphi)$ есть голоморфная функция от ρ и φ в окрестности $\rho=0$ при ограниченном φ;

3) разложение $F(\rho, \varphi)$ по степеням ρ должно начинаться с члена ρ^2 (с коэффициентом 1).

Именно поэтому Пуанкаре в третьем примере и делает такой выбор F, со введением вспомогательной функции ψ.

[11] Уравнения (*ter*), кроме первого из них, получаются, очевидно, из тождества

$$\frac{R}{\Omega}\cdot\frac{\partial F}{\partial \rho}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}=0.$$

Функция H_0 остаётся при этом неопределённой и находится из общего требования, чтобы разложение F начиналось бы с членов $x^2+y^2=\rho^2$ (ср. предыдущее примечание).

[12] Правильнее было сказать: многозначная функция $\zeta(\rho, \varphi)$, определяемая уравнением (5), имеет ветвь, голоморфную в точке $\rho=0$, $\varphi=0$ и обращающуюся в этой точке в нуль. Эта ветвь и удовлетворяет условиям 1° и 2°.

Даже в такой формулировке дальнейшие рассуждения текста не доказывают этого утверждения.

[13] Это утверждение также не доказано (ср. примечание [12]).

[14] Это утверждение было бы справедливо, если бы было доказано, что уравнение

$$\frac{1}{\xi}+\ln\frac{\xi}{\xi+1}=u$$

определяет ξ как однозначную функцию от u. Между тем, это неверно; обозначая $\frac{1}{\xi}=x-1$, можно без труда убедиться, что уравнение

$$x-\ln x=u,$$

эквивалентное предыдущему, определяет x как многозначную функцию от u.

[15] В силу очевидного свойства: что если $f(\rho)\ll\varphi(\rho)$, то $\frac{df}{d\rho}\leqslant\frac{d\varphi}{d\rho}$.

[16] Резюмируем положение.

Достаточность условий «все $C_0=0$» Пуанкаре доказывает, устанавливая существование голоморфного, при малых значениях x и y интеграла системы $F(x, y)=k$, дающего при малых k замкнутые кривые. Само доказательство существования голоморфного интеграла совершается по методу мажорантных функций через доказательство существования голоморфного интеграла уравнения

$$\frac{d\rho}{d\omega}=P(\rho)=\rho^2+\beta\rho^3+\gamma\rho^4+\ldots,$$

где $P(\rho)$ голоморфно при малых ρ. Это последнее рассуждение, однако, не вполне убедительно (ср. примечания [12], [14]).

Адамар (Rice Institute Pamphlet, XX, №1, 1933 г.) показал, видоизменяя рассуждения Пуанкаре, что вспомогательное уравнение действительно имеет голоморфный интеграл, и что, следовательно, утверждения Пуанкаре правильны. Мы не будем здесь останавливаться на этом подробнее, так как случай центра разобран в дополнении.

[17] Следует иметь в виду, что Пуанкаре говорит об уравнениях вида $\frac{dx}{dt}=y+\ldots$, $\frac{dy}{dt}=-x+\ldots$, для которых достаточно близкие к началу траектории являются либо замкнутыми кривыми, либо спиралями, закручивающимися вокруг начала.

[18] В последних двух равенствах под x, y и z подразумеваются новые координаты ξ, η и ζ. Производимый Пуанкаре разбор того случая, когда на поверхности S есть особые точки, ввиду своей неполноты является лишь указанием на то, как в некоторых случаях задача построения траектории на поверхности, имеющей особую точку, может быть сведена к задаче преобразования поверхности без особой точки (и траектории на ней) на поверхность с особой точкой. Мы не останавливаемся на этом вопросе подробнее ввиду того, что Пуанкаре всюду в дальнейшем предполагает поверхность не имеющей ни особых точек, ни уходящих в бесконечность полостей.

[19] Топологии, по принятому ныне наименованию.

[20] Это утверждение нетрудно доказать, если заметить, что траектория конечной длины, лежащая на замкнутой поверхности, может иметь лишь одну предельную точку при $t\to+\infty$ и одну предельную точку при $t\to-\infty$.

[21] Современная теория индекса изложена в дополнении «Особые точки векторных полей». Рассуждения же Пуанкаре страдают целым рядом неточностей.

[22] Поскольку определение индекса и все рассмотрения с внешними и внутренними контактами были у Пуанкаре проведены не строго, это утверждение нельзя считать строго доказанным.

[23] Равномерная сходимость рядов для $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ необходима не только в настоящем случае, но и в прежде рассмотренном (см. примечание [29] к мемуару 1).

Заметим, кроме того, что непрерывность суммы ряда есть лишь необходимое условие для равномерной сходимости ряда.

[24] Как уже было отмечено (см. примечание [31] к мемуару 1), рассуждение Пуанкаре доказывает существование «дуги однократного пересечения», а не дуги без контакта.

[25] Условие односвязности одной из областей неявно входит в самое понятие «поддерживает».

[26] Принятое теперь определение индекса (см. дополнение «Особые точки векторных полей») прилагается и к замкнутым траекториям. Таким образом, рассмотрение траекторий, близких к замкнутым, является излишним.

[27] Чтобы яснее представить себе построение Пуанкаре, следует провести в точке M_0 отрезок AB дуги цикла без контакта M_1PM_1 так, чтобы внутренней точкой отрезка AB являлась бы точка M_0. Точку M_0' следует взять на части AM_0 этого отрезка и точку $M_0^{(k)}$ — на M_0B (см. чертёж, где M_0M_1, $M_0'M_2'$, $M_0^{(k)}$ $M_1^{(k)}$ — дуги траекторий, а $M_0M_1'PM_1^{(k)}M_0$ — построенный цикл без контакта).

[28] Из последующего видно, что Пуанкаре не проводит фактически полициклов через сёдла, ограничиваясь ссылкой на совсем не очевидную возможность такого построения. Поэтому здесь остаются в силе замечания, сделанные по поводу теоремы XVIII во втором мемуаре.

[29] Георг Кантор, знаменитый немецкий математик, создатель теории множеств.

[30] На русском языке основы теории множеств изложены в книге: Александров и Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного.

[31] Здесь мы в целях единства обозначений пишем $\frac{1}{\mu}$, вместо того, чтобы писать μ, как это было у Пуанкаре.

[32] Здесь $E(x)$ обозначает *целую часть* числа x, т. е. $E(x)$ есть целое число, удовлетворяющее неравенствам $x \leqslant E(x) < x+1$.

[33] P', как производное множество, является замкнутым.

[34] Эти дуги носят название «смежных дуг».

[35] Все смежные дуги могут не исчерпываться одной последовательностью $A(i)$ $B(i)$; может существовать конечное или даже счётное множество таких последовательностей.

К МЕМУАРУ ЧЕТВЁРТОМУ

[1] Очевидно, конечно, что не для всякого уравнения второго порядка после приведения его к системе трёх уравнений X, Y, Z будут *многочленами*.

[2] Заметим, что точки, координаты которых x_0, y_0, z_0, одновременно обращают в нуль X, Y и Z, для системы (1) не представляют никаких особенностей; в них условия теоремы Коши выполняются, и единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \quad \text{при } t = t_0,$$

очевидно, будет

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0.$$

Таким образом, если под траекторией понимать (как это теперь принято) кривую, изображающую решение системы (1), то каждая такая точка сама по себе есть траектория (состояние равновесия).

[3] Брио и Буке рассматривали случай одного уравнения первого порядка; поэтому при ссылках, делаемых Пуанкаре, следует иметь в виду, что положения, указываемые Пуанкаре, не содержатся в мемуарах Брио и Буке. Пикар (Mathematische Annalen, том 46) уточнил доказательства теории Брио и Буке, но опять-таки только для системы

$$\frac{dx}{ax+by+\ldots}=\frac{dy}{a'x+b'y+\ldots}.$$

Наконец Дюляк (Dulac, Bulletin de la Société mathématique de France, t.XL, № 4, 1912 г.) доказал следующую теорему:

Пусть λ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — *корни векового уравнения для системы* (2).

Пусть далее прямая D проходит через начало, не встречает ни одной точки λ_i *и оставляет p точек* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, *по одну сторону, а* $n-p$ *точек* $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ *по другую сторону. Мы всегда можем предположить, что числа* $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ *имеют положительные действительные части, а* $\lambda_{p+1} \ldots, \lambda_n$ — *отрицательные действительные части. Тогда можно выразить переменные* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *через переменные* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *таким образом, что если* z_1 *удовлетворяют системе p уравнений*

$$\frac{dz_j}{dt}=\lambda_j z_j+\varphi_j(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}) \qquad (j=1, 2, \ldots, p),$$

то соответствующие значения x_i *удовлетворяют системе* (2). *Многочлены* φ_j *содержат лишь члены вида*:

$$z_1^{q_1}\ z_2^{q_2} \ldots\ z_{i-1}^{q_{i-1}},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}$ — *целые положительные или равные нулю числа, удовлетворяющие равенству*

$$\lambda_i=q_1\lambda_1+\ldots+q_{i-1}\lambda_{i-1}.$$

[4] Приводим точную формулировку теоремы Пуанкаре.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни векового уравнения.

Предположим, что выполнены следующие гипотезы:

Гипотеза 1. Если действительные и мнимые части корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рассматривать как координаты точек плоскости, то эти n точек должны лежать по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало, или, что то же самое, выпуклый полигон, внутри которого находятся эти точки, не должен содержать начала координат.

Гипотеза 2. Величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не должны удовлетворять ни одному соотношению вида:

$$m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1,$$

где $m_2, m_3, \ldots, m_n$ — целые положительные числа.

Гипотеза 3. Вековое уравнение не имеет кратных корней.

Теорема. *Если гипотезы 1, 2 и 3 выполняются, то уравнения*

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

имеют интегралы вида

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{k_1} = \frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_2}}}{k_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{k_n},$$

где T_i — голоморфные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и k_i — постоянные интеграции.

Если сравнить эту формулировку с формулировкой текста, то мы видим, что

$$H_i = (T_i)^{\frac{1}{|\lambda_i|^2}}.$$

[5] Изложение расположения кривых около особых точек для уравнений высших порядков представляется нам во многих местах недоказательным, опирающимся только на анализ уравнений, у которых X, Y и Z линейны.

Полное изложение этого вопроса читатель сможет найти в работе И. Г. Петровского «О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки», Математический сборник, том 41, № 1.

[6] Полный анализ случая трёх линейных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными читатель найдёт в статье Кочиной «Критические точки линий тока колинеарного движения в пространстве», Известия Главной Геофизической Обсерватории, 1929 г., № 1.

[7] При выполнении условий единственности движущаяся точка не может войти в особую точку за конечный промежуток времени. Случай 3) нужно понимать в том смысле, что движущаяся точка достигает особой точки по прохождении конечного пути.

[8] Вопрос о реальном значении этих рядов после столкновения анализирован в работах Леви-Чивита (см. Levi-Civita

«Fraiettorie singolari ed utri nel problema ristretto dei tre corpi» *Annali di Mathematica*, ser. 3, vol. 9, 1903).

[9] Современные основания этой теории изложены в дополнении «Особые точки векторных полей».

[10] Если поверхность во всё время деформации остаётся без контакта, то угол между нормалью и вектором скорости не может перейти через значение $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, тип поверхности не меняется.

Нарушение рода поверхности может произойти только при нарушении взаимной однозначности соответствия точек первоначальной поверхности и деформированной поверхности. При этом должны были бы слиться точки противоположной ориентации, что невозможно, если не допускать контактов в *промежуточные* моменты.

[11] Нам кажется не доказанным это утверждение.

[12] Вычисление показывает, что, кроме отмеченной особой точки, таковыми являются все точки окружности: $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

[13] Можно, например, с помощью геометрических соображений проверить, что этот индекс равен 1, однако это не следует из положительного характера начала координат ввиду наличия внутри поверхности других особых точек (см. предыдущее примечание).

[14] По поводу формы решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами см., например, Гурса, Курс математического анализа, т. 2, §§ 416, 417, 423, 424.

[15] В формулах (3 bis) так же, как и формулах до конца страницы, нужно всюду заменить s_2 большей величиной s_1, что так же, как и употребление усиливающих функций для $-\Phi_1$ и Φ_2, увеличивает модуль коэффициентов $\psi(x)$.

Тогда функция $\psi'(x)$ выбрана таким образом, что кривая

$$y=\psi'(x)$$

остаётся инвариантной по отношению к преобразованию:

$$y_1=s_1y_0-\frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}; \quad x_1+y_1=s_1(x_0+y_0).$$

Положим:

$$x_0+y_0=z, \quad x_1+y_1=z_1$$

и будем сначала искать кривую

$$x=\Phi(z)=\gamma_1z+\gamma_2z^2+\ldots+\gamma_nz^n+\ldots,$$

инвариантную по отношению к преобразованию

$$z_1 = s_1 z_0; \quad x_1 = s_1 x_0 + \frac{M\beta^2 z_0^2}{1-\beta z_0}.$$

Отсюда получаем

$$\Phi(s_1 z_0) = s_1 \Phi(z_0) + \frac{M\beta^2 z_0^2}{1-\beta z_0}.$$

Полагая, что $|z_0| < \frac{1}{\beta}$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z_0 в обеих частях равенства, мы непосредственно получаем

$$\gamma_1 = 1 \text{ и } \gamma_n (s_1 - s_1^n) = -M\beta^n.$$

Тогда, вводя переменные x_0, y_0, уравнение $x_0 = \Phi(z_0)$ можно записать так:

$$y_0 = \frac{M\beta^2}{s_1 - s_1^2}(x_0 + y_0)^2 + \ldots + \frac{M\beta^n}{s_1 - s_1^n}(x_0 + y_0)^n + \ldots,$$

где ряд в правой части сходится, потому что $s_1 > 1$.

Так как $y_0 = \psi'(x_0)$, то это и есть уравнение текста; следовательно, неявная функция y_0 также может быть разложена в сходящийся ряд по степеням x_0.

Изучение кривых, инвариантных по отношению к точечному преобразованию от двух переменных в окрестности двойной точки, было продолжено в следующих работах:

T. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità (Annali di Matematica, 3^e serie, t. V, 1901).

I. Hadamard, Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXVI, 1901).

S. Lattès, Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation (Annali di Matematica. 3^e seir, t. XIII, 1906). *Собрания трудов Пуанкаре Драша (J. Drach).*

[16] В исследуемом уравнении свободный член $\alpha\beta - \delta\gamma > 0$, так как он является значением детерминанта преобразования, который при $t = t_0$ равен $+1$, а при дальнейшем изменении не обращается в 0.

[17] См. Гурса, Курс математического анализа, том II, § 416, примеч. 2.

[18] Ряд может получиться расходящимся. Решение, найденное квадратурами, не будет периодическим по ω и t.

[19] Неустойчивость в одну сторону. В другую кривые асимптотически приближаются к периодическому решению.

[20] В тексте было: «$\cos(m\omega + n\varphi)$, $\sin(m\omega + n\varphi)$»

[21] Можно только утверждать, что ряд

$$\sum \left| \frac{A_{mn}}{\alpha m + \beta n} \right| = \sum |C_{mn}|$$

расходится. Это противоречит лишь абсолютной сходимости ряда для ρ.

[22] В этой заметке допущена ошибка в доказательстве. —

[23] Это утверждение соответствует тому факту, что интеграл от почти периодической функции без постоянного члена не ограничен, если он не почти периодичен.

[24] Этот вид устойчивости Пуанкаре назвал *устойчивостью по Пуассону*.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *Б. П. Демидович.* Техн. редактор *М. С. Бондарев.*

Подписано к печати 18/IX 1947 г. $24^1/_2$ печ. л. 19,7 уч.-изд. л.
32100 тип. зн. в печ. л. А 06691 Тираж 8000 экз.
Цена книги 12 руб. Переплет 2 руб. Заказ № 474.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.