Н. П. ЕРУГИН

ПРОБЛЕМА РИМАНА

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1982

УДК 517.91/93

Еругин Н. П. **Проблема Римана.**— Мн.: Наука и техника, 1982.— 336 с.

Проблемой Римана интересовались крупнейшие математики XIX и XX вв. В монографии впервые эта проблема решается для случая двух линейных дифференциальных уравнений с тремя особыми точками на конечном расстоянии на основе новых (развитых для этой цели) направлений теории нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Рассчитана на специалистов по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ил. 2. Библиогр.: 53 назв.

Редактор

Т. К. Шемякина, канд. физ.-мат. наук

$$\text{Е}\frac{20203-021}{\text{М}316\text{-}82}43\text{-}81 \quad 1702050000$$

ВВЕДЕНИЕ

В монографии рассматривается проблема Римана о построении двух однородных линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых имеют три особые точки (полюсы первого порядка) на конечном расстоянии и четвертую регулярную особую точку в бесконечности, по заданным линейным подстановкам V в окрестности этих полюсов. Эту знаменитую проблему (для n линейных уравнений и с m особыми точками) Риман поставил в середине XIX в., и занимала она лучших математиков второй половины XIX и первой трети XX в. (Пуанкаре, Гильберта, Шлезингера, Племели, Биркгофа и других). Но только в 1929 г. Лаппо-Данилевский благодаря своему новому аппарату теории функций от матриц правильно сформулировал и решил эту задачу (в случае n уравнений), когда матрицы линейных подстановок V близки к единичным матрицам. Но задача оставалась нерешенной для произвольных V. В предлагаемой монографии она решена для произвольных V_1, V_2 и V_3.

В книге 12 глав, из которых 9 глав подготовительных по общей аналитической теории дифференциальных уравнений, линейных и нелинейных, и 3 главы посвящены собственно решению проблемы Римана. В последних 3 главах рассматриваются новые задачи аналитической и качественной теорий нелинейных дифференциальных уравнений с помощью новых методов исследования, имеющих и самостоятельное значение, и позволяющих решить окончательно проблему Римана.

Глава I. В § 1 указывается вид решений линейного дифференциального уравнения $y^{(n)}+p_1(z)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)y=0$ с рациональными коэффициентами $p_1(z)$, ..., $p_n(z)$ в окрестности регулярной и иррегулярной особых точек. В § 2 рассматривается система линейных однородных уравнений

$$\frac{dX}{dz}=X\sum_{k=-1}^{\infty}U_k(z-a)^k, \tag{2.1}$$

где U_k — постоянные матрицы, a — число и X — фундаментальная интегральная матрица. Матрица X строится в окрестности регулярной особой точки $z=a$ и изучается ее поведение в окрестности этой точки.

§ 3. Рассматривается иррегулярная в окрестности $z=0$ система линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{p=-s}^{\infty}T_p z^p,$$

где T_p — постоянные матрицы и ряд $\sum\limits_{p=-s}^{\infty}|T_p|$ сходится.

§ 4. Рассматривается иррегулярная в окрестности точек a_j система

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{U_j^{(r)}}{(z-a_j)^r}, \tag{4.1}$$

где Y и $U_j^{(r)}$ — матрицы. Матрица Y строится в виде двух множителей — многозначного и однозначного.

§ 5. Здесь матрица системы (4.1) строится в виде трех множителей, один из которых характеризует многозначность Y в окрестности $z=a_j$, второй — существенную особенность и третий является регулярным в окрестности $z=a_j$.

Глава II. В этой главе излагаются сведения о виде и построении решений системы двух дифференциальных уравнений типа Брио и Буке в окрестности особых точек. Теоремы этой главы потребуются при решении проблемы Римана.

Глава III. Для первого уравнения Пенлеве $w''=6w^2+z$ строится решение в окрестности подвижного полюса и доказывается отсутствие других подвижных особых точек.

Глава IV. Формулируются некоторые теоремы существования и в том числе теорема Пуанкаре—Ляпунова.

Доказывается некоторая вспомогательная теорема существования.

Глава V. Рассматривается система

$$\frac{dx}{dz}=P(x,\ y,\ z),\ \frac{dy}{dz}=Q(x,\ y,\ z) \tag{1.1}$$

при некоторых предположениях относительно $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$. Изучается возможное поведение решений в окрестности подвижной особой точки. Указываются системы, не имеющие подвижных особых точек типа существенных.

Глава VI. Рассматриваются системы (1.1) с алгебраическими подвижными особыми точками. Такими будут системы

(1.1), в которых $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — полиномы относительно x, y с целыми относительно z коэффициентами, удовлетворяющие условиям $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 = 0$; $n_2 \geqslant 0$, $n_2 - m_2 + 2 = 0$ (см. главу V, § 1).

Глава VII. Дается способ построения решения в окрестности особой точки z_0 типа $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $z \to z_0$. Указываются нерешенные задачи. В § 4 приводится краткая сводка результатов V главы. Показывается, что в главах V—VII можно, не меняя метода рассуждения, рассматривать более общие системы. Отмечается, что если систему

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y)$$

преобразовать к полярным координатам, то к преобразованной системе можно применить общие результаты глав V—VII и тем самым получить новые результаты.

Глава VIII. Здесь рассказана история развития аналитической теории дифференциальных уравнений в XIX в. и затем Лаппо-Данилевским во второй половине 20-х годов XX в., когда появилась возможность определенно и строго формулировать и решать проблему Римана через решение проблемы Пуанкаре для малых параметров. Но с 1933 г. для решения проблемы Римана вне окрестности малых параметров появилась необходимость развития аналитической теории нелинейных уравнений. Рассказано, какие при этом возникли задачи, что породила проблема Римана.

Глава IX. Рассматриваются уравнения вида $w'' = f(w', w, z)$ с иррациональной $f(w', w, z)$. Такие уравнения имеют свою сложную специфику и появляются при решении проблемы Римана. В этой главе читатель будет подготовлен к рассуждениям в главах X—XII.

Глава X. Аналитическая и качественная теории, а также асимптотика решений системы уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z}\sqrt{xy(x+y)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{1-z}\sqrt{xy(x+y)}.$$

Глава XI. Аналитическая и качественная теории, а также асимптотика и параметрическое представление решений системы уравнений

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z}\sqrt{P(x, y)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{1-z}\sqrt{P(x, y)}.$$

В главах X и XI речь идет об изучении поведений решений в окрестности неподвижных особых точек $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ и подвижных особых точек. Рассматриваются новые методы исследования этих вопросов и представления решений в окрестности этих особых точек.

Рассматриваются всё возможное множество особых подвижных точек, параметрические способы представления этих решений и приближенное представление решений в окрестности подвижных особых точек с помощью эллиптических функций. Эти задачи возникают в проблеме Римана.

Глава XII. Рассматриваются формулировки проблем Риманом и результаты, полученные самим Риманом, краевая задача Римана—Гильберта. Формулируется проблема Римана по Лаппо-Данилевскому для систем двух уравнений с тремя особыми точками на конечном расстоянии.

Дана система

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{k=1}^{3}\frac{U_k}{z-a_k},$$

где матрицы второго порядка U_k — постоянные и a_k — числа. В окрестности точек a_j Y имеет вид:

$$Y=(z-a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(z),\ j=1,\ 2,\ 3,$$

где постоянные матрицы W_j являются функциями от U_1, U_2 и U_3 и найдены Лаппо-Данилевским (проблема Пуанкаре), а матрицы $\overline{Y}_j(z)$ — голоморфные в окрестности точки a_j. Проблема Римана: по заданным W_1, W_2 и W_3 надо найти U_1, U_2 и U_3. Эта задача и решается у Лаппо-Данилевского при малых $|W_k|$. В XII главе эта задача вне нулевых значений $|W_k|$ сводится к рассмотрению системы нелинейных уравнений в частных производных, откуда получаются 5 обыкновенных уравнений, для которых находятся 3 стационарных интеграла, поэтому приходим к рассмотрению двух обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{z}\sqrt{P(x,\ y)},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{1-z}\sqrt{P(x,\ y)}, \tag{4.3}$$

которые имеют и стационарные и нестационарные решения.

Рассматривается вопрос о построении решений этих уравнений, стационарных и нестационарных, имеющих отношение к проблеме Римана. Здесь помещен некролог Ж. Адамара на Лаппо-Данилевского. Указываются многие новые задачи, возникающие в связи с проблемой Римана. Рассматривается поведение решений системы (4.3) при $z\to 0$ и $z\to 1$. Указываются различные представления решений уравнений (4.3), имеющих отношение к проблеме Римана. Показывается, что эти решения имеют бесконечное число подвижных особых точек, а неподвижные особые точки $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ являются для этого множества точками сгущения. Показывается, что при значениях W_1, W_2 и W_3, близких к таким, которые порождают стационарные решения, подвижные особые точки z в конечной области z исчезают и скапливаются в окрестности точек $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$. Этим объясняется свойство рядов Лаппо-Данилевского, которые сходятся при любом расположении точек a_1, a_2 и a_3, но при достаточно малых $|W_k|$, $k=1, 2, 3$.

Показывается, как можно строить другое представление этих решений при произвольных W_1, W_2 и W_3, но при малых $|z-z_0|<\delta$. Этим характеризуются функции, доставляющие решения проблемы Римана вне нулевой окрестности $|W_k|$, $k=$ $=1, 2, 3$.

О последних трех главах, посвященных соответственно проблеме Римана, см. обзорную статью И. З. Штокало [1].

В основании настоящей монографии лежат работы Лаппо-Данилевского, жизнь которого, его становление как ученого представляют очевидный интерес не только для историков математики, но и для широкого круга читателей.

И. А. Лаппо-Данилевский родился в Петербурге 16 (28) ноября 1895 г. Интерес к математике пробудился у него в раннем детстве под влиянием отца, известного историка, академика Александра Сергеевича Лаппо-Данилевского.

Сохранился набросок письма А. Н. Крылова, в котором он предлагает Лаппо-Данилевскому должность директора математического отделения в руководимом им институте с октября 1931 г. 15 марта 1931 г. Лаппо-Данилевский скончался и был похоронен в Гисене. Некрологи Лаппо-Данилевского напечатаны в Советском Союзе и за рубежом [2].

Глава I

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ КЛАССА ФУКСА

Рассмотрим уравнение в комплексной области

$$y^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)\, y = 0, \qquad (1.1)$$

где $p_1(z)$, ..., $p_n(z)$ — рациональные функции. Известно, что особыми точками решений линейных уравнений (1.1) могут быть только особые точки коэффициентов $p_1(z)$, ..., $p_n(z)$. Если $p_1(z)$, ..., $p_n(z)$ — полиномы (или целые функции), то решение $y=y(z)$ этого уравнения с любыми конечными начальными значениями

$$y^{(k)}(z_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

будет целой функцией, т. е. без особых точек на конечном расстоянии. Пусть теперь $z=a$ для некоторых коэффициентов $p_k(z)$ является полюсом и

$$p_k(z) = \frac{\varphi_k(z-a)}{(z-a)^k},$$

где $\varphi_k(z-a)$ — ряд Тейлора, т. е. для $p_k(z)$ точка a — полюс не выше k-го порядка, а для некоторых $p_k(z)$ вообще не будет особой точкой. Но мы предполагаем, что хотя бы для одного из коэффициентов $p_k(z)$ $z=a$ — полюс. В этом случае среди любой системы линейно независимых решений $y_1(z)$, ..., $y_n(z)$, вообще говоря, найдется решение, для которого $z=a$ будет особой точкой — однозначной или многозначной. Все решения $y_1(z)$, ..., $y_n(z)$ в этом случае представляют собой сумму произведений вида

$$(z-a)^{\lambda} \ln^{l}(z-a) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k,$$

где целые $l \geqslant 0$ и λ — постоянные просто находятся. Таким образом, поведение решений в окрестности точки a нам ясно и $z=a$ называется регулярной особой точкой. Если $z=a$ будет полюсом порядка $>k$ хотя бы для какого-нибудь из коэффициентов $p_k(z)$, то вместо рядов Тейлора здесь появляются ряды Лорана

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k$$

и найти их очень трудно. Точка $z=a$ называется в этом случае иррегулярной особой точкой и поведение решений в окрестности точки $z=a$ становится непонятным. Чтобы увидеть, какого типа особой точкой будет $z=\infty$, надо выполнить преобразование $z=x^{-1}$ и рассмотреть точку $x=0$. Если все особые точки $z=a$ являются регулярными (в том числе и $z=\infty$), то уравнение называется уравнением типа Фукса.

Так, например, уравнение

$$w'' + p(z) w' + q(z) w = 0$$

будет класса Фукса, если

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z-a_k}, \quad q(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{(z-a_k)^2} + \frac{C_k}{z-a_k},$$

где B_k, C_k, A_k, a_k — постоянные и $C_1+\ldots+C_n=0$. Эти условия являются необходимыми и достаточными [3], чтобы уравнение было класса Фукса.

§ 2. РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему линейных уравнений [1)]

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=-1}^{\infty} U_k (z-a)^k, \tag{2.1}$$

где U_k — постоянные матрицы n-порядка, a — число и X — фундаментальная интегральная матрица (т. е. с $D(X) \neq 0$), в каждой строке которой стоит решение рассматриваемой линейной системы уравнений. Ряд справа сходится в окрестности точки $z=a$. Для коэффициентов этой системы $z=a$ является полюсом первого порядка. Обозначим через $X(\bar{z})$ зна-

---

[1)] Условимся на формулы из книги Лаппо-Данилевского (Л.-Д.) [4] ссылаться так: [ст. III, ф. (45)] — статья III, формула (45).

чение $X(z)$ после обхода переменной z точки a. Очевидно, имеем

$$X(\bar{z}) = VX(z), \tag{2.2}$$

где V — постоянная матрица с определителем $D(V) \neq 0$, не зависящая от z. Если $X(z)$ — нормированная в точке $z=b$: $X(b)=I$, то, полагая в (2.2) $z=b$, получим $X(\bar{b})=V$, т. е. V есть значение $X(z)$ при $z=b$ после обхода переменной z вокруг точки a. Обозначим $2\pi i W = \ln V$. Имеем

$$(z-a)^{-W} = e^{-W \ln(z-a)},$$

$$(\bar{z}-a)^{-W} = e^{-W[\ln(z-a)+2\pi i]} = (z-a)^{-W} e^{-2\pi i W} =$$

$$= (z-a)^{-W} V^{-1}.$$

Отсюда следует, что функция $\bar{X}(z) = (z-a)^{-W} X(z)$ в окрестности $z=a$ однозначная, так как после обхода точкой z $z=a$ имеем $(z-a)^{-W} V^{-1} VX(z) = (z-a)^{-W} X(z)$. Следовательно, в окрестности точки $z=a$ имеем

$$X(z) = (z-a)^{W} \bar{X}(z), \tag{2.3}$$

где $\bar{X}(z)$ — однозначная матрица в окрестности точки $z=a$.

Легко видеть, что если систему (2.1) преобразуем к одному уравнению n-порядка, то получим уравнение, для которого точка $z=a$ будет регулярной особой точкой. Отсюда следует, что $\bar{X}(z)$ не будет вида [1] $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-a)^k$, а будет вида

$$\bar{X} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-a)^k. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), найдем

$$W(z-a)^{W-1} \bar{X}(z) + (z-a)^{W} \frac{d\bar{X}(z)}{dz} =$$

$$= (z-a)^{W} \bar{X}(z) \sum_{k=-1}^{\infty} U_k (z-a)^k.$$

Умножая это слева на $(z-a)^{-W+1}$, получим

$$(z-a) \frac{d\bar{X}(z)}{dz} = (z-a) \bar{X} \sum_{k=-1}^{\infty} U_k (z-a)^k - W\bar{X}(z). \tag{2.5}$$

---

[1] Но для системы (3.1) $\bar{X}(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-a)^k$.

Легко видеть, что этому уравнению формально удовлетворяет ряд вида (2.4), где A_k— матрицы. Сравнивая в (2.5) свободные относительно $z—a$ члены, получим

$$A_0U_{-1} - WA_0 = 0, \tag{2.6}$$

откуда при $D(A_0) \neq 0$ получим

$$W = A_0U_{-1}A_0^{-1}. \tag{2.7}$$

Следовательно, вообще говоря, W подобна матрице U_{-1}. Можно взять $A_0=I$, $W=U_{-1}$. В этом случае Л.-Д. матрицу $X(z)$ называет метаканонической.

Как мы видели,

$$W = \frac{1}{2\pi i}\ln V, \quad D(V) \neq 0. \tag{2.8}$$

Но как найти V? Запишем уравнение (2.1)

$$\frac{dX}{dz} = XP(z),$$

где $P(z)$ — матрица коэффициентов уравнения (2.1), и пусть в окрестности точки $z=b$ $P(z)$ — голоморфная. Тогда $X(z)$ можно представить так:

$$X = I + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(z), \quad X_n = \int_b^z X_{n-1}(z)P(z)\,dz$$

и этот ряд сходится при любом неособом z для $P(z)$. И, как видим, $X(b)=I$, поэтому имеем $V=X(\bar{b})$. Таким образом, V и W найдены:

$$W = \frac{1}{2\pi i}\ln X(\bar{b}). \tag{2.9}$$

Подставляя ряд (2.4) в (2.5) и сравнивая коэффициенты при $(z—a)^k$ справа и слева, получим

$$WA_k - A_kU_{-1} + kA_k = T(U, A), \tag{2.10}$$

где $T(U, A)$ — полином от A_l и U_l при $l<k$. Если W определено согласно (2.9), имеет место (2.7), и если все A_k из (2.10) определяются однозначно, то система (2.1) имеет решение в виде (2.3), где $\bar{X}(z)$ имеет вид (2.4). Л.-Д. доказал, что это имеем, если $\sigma_m—\sigma_l$ не равно целому числу, где $\sigma_1, ..., \sigma_n$— характеристические числа матрицы[1] U_{-1}.

[1] Представление $X(z)$ в виде (2.3) и (2.4) в случае, когда имеются σ_m—$—\sigma_l$, равные целому числу, рассматривали Л. И. Донская [5] и Ф. Р. Гантмахер [6].

И, следовательно, в этом случае $\bar{X}(z)|_{z=a}=A_0$ с $D(A_0)\neq 0$, поэтому и $\bar{X}(z)$ и $\bar{X}^{-1}(z)$ в окрестности точки $z=a$ голоморфные.

Замечание 2.1. Как мы отметили, если систему (2.1) преобразуем к одному уравнению (1.1), то получим уравнение класса Фукса. Но если уравнение (1.1) класса Фукса приведем к системе

$$\frac{dX}{dz}=XP(z),$$

то некоторые элементы матрицы $P(z)$ могут иметь в $z=a$ полюс порядка больше единицы. Это означает, что уравнение (1.1) класса Фукса более общее, чем система (2.1).

§ 3. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ

Теперь, следуя Л.-Д., рассмотрим систему [1]

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{p=-s}^{\infty}T_p x^p. \tag{3.1}$$

Л.-Д. предполагает, что ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p| \tag{3.2}$$

сходится (что легко получить преобразованием $\tau=\alpha x$, если сходится ряд (3.1) при $|x|<\rho<1$). Л.-Д. нашел интегральную нормированную в точке $x=b$ матрицу $Y(b|x)$ системы (3.1) в виде [ст. III, ф. (14)]

$$Y(b|x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}L_{p_1\ldots p_\nu}(b|x), \tag{3.3}$$

где коэффициенты $L_{p_1\ldots p_\nu}(b|x)$ найдены рекуррентно явно и этот ряд сходится, если сходится ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p|.$$

[1] В случае $s=2$ в [7—9] решение этой системы получено в виде ряда, равномерно сходящегося в области $|x|<r$, из которого можно получить и асимптотическое представление с оценкой остаточного члена для промежутка $0\leqslant x\leqslant r$.

Отсюда Л.-Д. находит в виде сходящегося ряда и

$$V(b) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} L_{p_1 \ldots p_\nu}(b|\overline{b}), \tag{3.4}$$

где T_{-s}, T_{-s+1}, ... удовлетворяют условию (3.2). Л.-Д. нашел и $W(b) = \frac{1}{2\pi i} \ln V(b)$ в виде

$$W(b) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} Q_{p_1 \ldots p_\nu}(b). \tag{3.5}$$

Но этот ряд сходится при условии

$$\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p| \leqslant \|\rho\| \tag{3.6}$$

и достаточно малом ρ.

Таким образом,

$$Y = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Y}(b|x), \ \overline{Y}(b|b) = I, \text{ если } Y|_{x=b} = I, \tag{3.7}$$

где $\overline{Y}(b|x)$ — однозначная в окрестности $x = 0$ матрица и, как показал Л.-Д. [ст. III, ф. (47)],

$$\overline{Y}(b|x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \overline{L}_{p_1 \ldots p_\nu}(b|x) =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p x^p, \tag{3.8}$$

где $T_{p_1} \ldots T_{p_\nu}$ удовлетворяют условию (3.6), а

$$\overline{Y}(b|x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b|x). \tag{3.9}$$

Имеет место и разложение [ст. III, ф. (42)]

$$\overline{Y}(b|x) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} B_{pq} x^p b^q,$$

где [ст. III, ф. (43)]

$$B_{pq} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\int \frac{\overline{Y}(b|x)\, db dx}{x^{p+1} b^{q+1}}$$

и пути интегрирования суть замкнутые контуры, окружающие начало координат. Отсюда A_p получим в виде

$$A_p = \sum_{q=-\infty}^{\infty} b^q \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{\overline{Y}(b|x)\,dx\,db}{b^{q+1}\,x^{p+1}}\,. \tag{3.10}$$

Впрочем, мы имеем для $\overline{Y}(b|x)$ и явное разложение [ст. III, ф. (44, 45)]

$$\overline{Y}(b|x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\, x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\, \alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{3.11}$$

$$B_{pq} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \delta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\, \delta^{(q)}_{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\, \alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{3.12}$$

где $\delta^{(q)}_p = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$. Для сумм (3.11) и (3.12) следует иметь в виду замечание, сделанное о сумме [ст. III, ф. (8)].

Например, в сумме (3.12) мы имеем при $\mu = 0$ член $\delta^{(q)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu} \alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$, т. е. $\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu} = 1$ при $\mu = 0$ и $\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu} = 1$ при $\mu = \nu$. Но все эти разложения имеем при условии (3.6). Далее мы получим W без условий (3.6), поэтому и (3.8) будем иметь без этого условия. Подставляя (3.7) в (3.1), найдем

$$\frac{1}{b} W \left(\frac{x}{b}\right)^{W-1} \overline{Y} + \left(\frac{x}{b}\right)^{W} \frac{d\overline{Y}}{dx} =$$

$$= \left(\frac{x}{b}\right)^{W} \overline{Y} \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p,$$

откуда

$$x \frac{d\overline{Y}}{dx} = x \overline{Y} \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p - W\overline{Y}. \tag{3.13}$$

Формально это уравнение относительно $\overline{Y}(b|x)$ совпадает с уравнением (2.5) относительно $\overline{X}$. Но здесь должно быть разложение (3.8), а не (2.4), так как если бы имели (2.4), то получили бы в системе дифференциальных уравнений (3.1) $s=1$. Это легко показать. Подставим в (3.13)

$$\overline{Y}(b|x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p x^p, \tag{3.14}$$

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} pA_p x^p=\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p x^p \sum_{\nu=-s}^{\infty} T_p x^{\nu+1}-W\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p x^p. \tag{3.15}$$

При $s=1$, как мы видели, легко находим формально удовлетворяющий этому уравнению ряд (2.4). При $s\geqslant 2$ получим ряд (3.14), удовлетворяющий уравнению (3.15), где имеем A_{-1}, A_{-2}, ... в виде (3.10). Или эти значения видим из (3.11)

$$A_p=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1\ldots p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\alpha^{*(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu},$$

$$p=p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu.$$

Если мы подставим ряд (3.14) в (3.13) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x^p, то получим бесконечную, очень сложную линейную систему алгебраических уравнений для определения A_0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, ..., которые, таким образом, Л.-Д. и нашел иным путем. Но, как и в случае $s=1$, в (3.1) здесь W найдено при условии (3.6). Далее мы покажем, как можно найти $W(b)$, не предполагая (3.6). Тогда и A_p в ряду (3.14) найдем по формуле (3.10) без условия (3.6), так как тогда и $\overline{Y}(b|x)$ получим по формуле (3.9) без условия (3.6).

Можно указать общее представление матрицы W [ст. II, § 3] для системы

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{k=1}^{m}\frac{U_k}{x-a_k}. \tag{3.16}$$

Пусть $Y(b|x)|_{x=b}=I$ — интегральная матрица уравнений (3.16); $Y(b|x)$ — целая функция дифференциальных подстановок U_1, U_2, ..., U_m:

$$Y(b|x)=\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=I+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|x). \tag{3.17}$$

Этот ряд равномерно сходится относительно x в каждой конечной области $\sigma(a_1, ..., a_m, \infty)$, не содержащей внутри и на границе точек $a_1, \ldots, a_m$. Интегральная подстановка V_j в точке a_j, соответствующая нормированной матрице (3.17), есть целая функция от $U_1, \ldots, U_m$ и представляется рядом

$$V_j = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b), \tag{3.18}$$

где $P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}|b)$ — есть значение $L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}|x)$ после обхода точки a_j точкой x. Показательная подстановка W_j в точке a_j представима в виде

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \ln V_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}|b),$$

и этот ряд сходится, если $U_1, \ldots, U_m$ находятся в окрестности нулевых матриц. Но Л.-Д. показал, что W_j является мероморфной функцией от элементов матриц $U_1, \ldots, U_m$, представимой в виде

$$W_j = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \sum\limits_{\varkappa=1}^{\nu} \sum\limits_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\varkappa} \delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\, Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa}|b)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(U_j)}, \tag{3.19}$$

где в числителе стоит ряд от $U_1, \ldots, U_m$ с численными коэффициентами — функциями от элементов матрицы U_j, а в знаменателе — ряд от элементов матрицы U_j, и эти ряды сходятся при любых конечных значениях $U_1, \ldots, U_m$. Особенностями этих функций являются те значения U_j, характеристические числа которых различаются на целые числа, не равные нулю.

Такое представление для W_j Л.-Д. получает из [ст. II, § 6]:

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \frac{(V_j-\eta_1)\ldots(V_j-\eta_{k-1})(V_j-\eta_{k+1})\ldots(V_j-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_1)\ldots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\ldots(\eta_k-\eta_n)} \ln \eta_k,$$

где η_k — характеристические числа матрицы V_j. Обозначая характеристические числа матрицы U_j через $\xi_1, \ldots, \xi_n$, получим $\eta_k = e^{2\pi i \xi_k}$ и, следовательно,

$$W_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{(V_j - e^{2\pi i \xi_1}) \ldots (V_j - e^{2\pi i \xi_{k-1}})}{(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_1}) \ldots (e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k-1}})} \times$$

$$\times \frac{(V_j - e^{2\pi i \xi_{k+1}}) \ldots (V_j - e^{2\pi i \xi_n})}{(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k+1}}) \ldots (e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_n})} \xi_k.$$

Замечание 3.1. Если сюда подставим х. ч. матрицы U_{-1} (равные $\xi_1, \ldots, \xi_n$) и значение $V=Y(\bar{b})$ для системы (2.1), то и получим W для системы (2.1) при любом сходящемся ряде (2.1). Здесь W будет, следовательно, также мероморфной функцией от $U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$

§ 4. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим теперь систему (3.1) и систему

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{YU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим сначала систему (3.1). Как мы видели, интегральная нормированная матрица этой системы представима в виде (3.3), интегральная подстановка, согласно (3.4), и эти ряды сходятся при условии (3.2), а W получена в виде (3.5) при условии (3.6). В работе Н. П. Еругина [10] W получена без условий (3.6). Именно в этой работе получено

$$\ln X=\frac{\Delta_{n-1}X^{n-1}+\Delta_{n-2}X^{n-2}+\ldots+\Delta_0}{\Delta(X)}, \tag{4.2}$$

где X — матрица и $\Delta(X)$ — полином от элементов матрицы X, который не равен нулю, если характеристические числа матрицы X различны. Величины

$$\Delta_k=\int_0^1\frac{Q_{n-1,k}(t, X)}{P_n(t, X)}dt,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

где $P_n(t, X)$ и $Q_{n-1,k}(t, X)$ — полиномы от t соответственно n-й и n—1-й степени, коэффициенты которых являются полиномами[1)] от элементов матрицы X. Отсюда следует, что если $X=Y(\bar{b})$, то, так как $V(b)$ представима в виде рядов (3.4) лишь при условии (3.2), $Q_{n-1,k}(t, X)$ и $P_n(t, X)$ представимы лишь при условии (3.2). Поэтому и

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}\ln V_j(b)$$

получаем лишь при условии (3.2), т. е. без условия (3.6).

Теперь рассмотрим систему (4.1). Здесь $Y(b|x)$ и $V_j(b)$ Л.-Д. получил в виде рядов, сходящихся при всех конечных

---

1) Полиномами от инвариантов матрицы X, а тем самым и полиномами от элементов.

значениях $U_j^{(r)}$ [ст. V, ф. (6) и (7)]. Запишем эти формулы:

$$Y(b|x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1\ldots m} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{1\ldots s} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} L_b (a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}|x), \quad (4.3)$$

$$V_j = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1\ldots m} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{1\ldots s} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} P_j (a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}|b). \quad (4.4)$$

Для W Л.-Д. получил выражение [ст. V, ф. (53)]

$$W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1\ldots m} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{1\ldots s} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} Q_j (a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}|b), \quad (4.5)$$

и этот ряд сходится, когда $U_j^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых матриц. Но инварианты матрицы V_j — целые функции от элементов матриц $U_j^{(r)}$, поэтому и W_j, согласно формуле (4.2), можно получить для всех конечных значений $U_j^{(r)}$, за исключением тех, когда характеристические числа матрицы $U_j^{(1)}$ отличаются на целые числа, так как в этом случае $\Delta(V_j) = \Delta(X) = 0$ в (4.2). Заметим еще, что инварианты матрицы V_j Л.-Д. построил в шестой статье. Как мы отметили, Л.-Д. доказал, что матрица W_j для системы (3.16) является мероморфной функцией от элементов матриц U_k.

В работе [10] показано, что в случае системы (3.1) или (4.1) W_j, полученное на основе формулы (4.2), является бесконечнозначной функцией от $U_j^{(r)}$.

В [ст. VII, § 1] Л.-Д. указал, что матрица $W_j(b)$ есть целая функция матриц $U_j^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, но здесь сами параметры $\lambda_j^{(k)}$ являются бесконечнозначными функциями матриц $U_j^{(r)}$.

З а м е ч а н и е 4. 1. Систему (4.1) легко записать и в виде (3.1) в окрестности исследуемой точки и воспользоваться построением W для системы (3.1). Мы показали, как можно во всех случаях получить W_j (т. е. только при условиях (3.2), а не при условиях (3.6)). Тем самым мы получили возможность всегда получить и (3.14) на основании (3.9) и (3.10).

§ 5. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ. ВЫДЕЛЕНИЕ ИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ МНОГОЗНАЧНОЙ, СУЩЕСТВЕННОЙ И ГОЛОМОРФНОЙ КОМПОНЕНТ

Рассмотрим снова иррегулярную систему

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}. \quad (5.1)$$

Как мы видели, нормированную интегральную матрицу $Y(b|x)|_{x=b}=I$ в окрестности точки $x=a_j$ можно представить в виде

$$Y(b|x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(b|x), \tag{5.2}$$

где $\overline{Y}_j(b|x)$ — однозначная матрица в окрестности точки $x=a_j$, т. е.

$$\overline{Y}_j(b|x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(x-a_j)^k \tag{5.3}$$

и матрицы W_j, A_k мы получили при любых конечных значениях $U_j^{(r)}$. Здесь $(x-a_j)^{W_j}$ характеризует многозначность $Y(b|x)$ в окрестности точки $x=a_j$ и является решением уравнения

$$\frac{dX}{dx}=X\frac{W_j}{x-a_j}. \tag{5.4}$$

Л.-Д. однозначную компоненту (5.3) получил в виде двух множителей, один из которых представлен в виде ряда по отрицательным степеням $(x-a_j)$, а другой — по положительным, т. е. представляет собой голоморфную функцию в окрестности точки $x=a_j$. Первый множитель характеризует существенную особенность интегральной матрицы $Y(b|x)$ в окрестности точки $x=a_j$. Чтобы решить эту задачу, Л.-Д. вводит в рассмотрение интегральную матрицу системы

$$\frac{dX}{dx}=X\sum_{r=1}^{s}\frac{U^{(r)}}{(x-a)^r}, \quad s\geqslant 2. \tag{5.5}$$

Введем здесь новую независимую переменную $x-a=z^{-1}$. Получим

$$\frac{dX}{dz}=X\left[-\frac{U^{(1)}}{z}-U^{(2)}-U^{(3)}z-\ldots-U^{(s)}z^{s-2}\right].$$

Как видим, эта система вида[1] (2.1) с $U_{-1}=-U^{(1)}$. Следовательно, имеем

$$X=z^{-U^{(1)}}\overline{X}(z), \quad \overline{X}(z)=I+A_1z+\ldots$$

и

$$X=(x-a)^{U^{(1)}}\left[I+A_1\frac{1}{x-a}+A_2\frac{1}{(x-a)^2}+\ldots\right] \tag{5.6}$$

[1] И с конечным числом членов с положительными степенями z.

— метаканоническая элементарная матрица по терминологии Л.-Д. Так как система (5.5) имеет только две особые точки $x=a$ и $x=\infty$, то этот ряд (5.6) сходится при всех конечных значениях $x \neq a$. Л.-Д. A_k нашел в явном виде и показал, что матрица (5.6) — мероморфная функция[1] от $U^{(1)}, \ldots, U^{(r)}$ и особенности имеет только для такой матрицы $U^{(1)}$, когда разности характеристических чисел, равные целым числам, не равны нулю. Следуя Л.-Д., обозначим метаканоническую матрицу (5.6) через

$$Q\left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array}\right).$$

Л.-Д. здесь решил очень важную задачу, он построил для системы (5.1) матрицы

$$W_j^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{1 \ldots s} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} Q_j^{(r)} (a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} | b), \tag{5.7}$$

где ряды сходятся, когда матрицы $U_j^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых матриц. Эти матрицы обладают тем свойством, что интегральная матрица системы (5.1)

$$Y(b|x) = \Phi_b \left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & x \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & \\ a_1 \ldots a_m & \end{array}\right)$$

в окрестности точки a_j представима в виде

$$Y(b|x) = Q\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(s)} & \\ \vdots & x \\ W_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right) \overline{\Phi}_b^{(j)} \left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & x \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & \\ a_1 \ldots a_m & \end{array}\right),$$

а $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}^{-1}$ — голоморфные матрицы относительно x в окрестности точки a_j, если разность характеристических чисел матрицы $U_j^{(1)}$ не равна целому числу. Этим он и представил интегральную матрицу системы (5.1) в виде трех множителей:

---

[1] Мы это показали иным путем, так как A_k получили как полиномы от $U^{(k)}$ по формуле (2.10).

$$Y(b|x) = (x-a)^W \left(I + A_1 \frac{1}{x-a} + \right.$$

$$\left. + A_2 \frac{1}{(x-a)^2} + \dots \right) \sum_{k=0}^{\infty} B_k (x-a)^k$$

с $D(B_0) \neq 0$. Но здесь матрицы $W_j^{(1)}$ $(j = 1, \dots, m)$ (характеризующие соответственно многозначность $Y(b|x)$ в окрестности точек $x = a_j$) совпадают с построенными ранее в представлении (4.5), для которых мы нашли и общее представление на основе формулы (4.2) при всех конечных значениях $U_s^{(r)}$, а не только для $U_s^{(r)}$ в окрестности нулевых матриц. Остальные $W_j^{(2)}, \dots, W_j^{(s)}$ определены, согласно формуле (5.7) [ст. V, ф. (1)], в окрестности нулевых значений матриц $U_j^{(r)}$, $j = 1, \dots, m$; $r = 1, \dots, s$, но аналитическое продолжение этих функций на другие значения $U_j^{(r)}$ остается неизвестным.

Глава II

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БРИО И БУКЕ

§ 1. ОБЩИЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$t\frac{dy_s}{dt} = p_{1s}y_1 + p_{2s}y_2 + p_{3s}t + F_s(y_1, y_2, t), \quad s = 1, 2, \qquad (1.1)$$

где F_s — голоморфные функции в окрестности точки $t=y_1=$ $=y_2=0$ без свободных и линейных членов, а p_{kl} — постоянные. В параметрическом виде эти уравнения можно записать так:

$$\frac{dt}{d\tau} = -t, \quad \frac{dy_s}{d\tau} = -[p_{1s}y_1 + p_{2s}y_2 + p_{3s}t + F(y_1, y_2, t)], \quad s=1, 2, \qquad (1.2)$$

Предположим, что среди характеристических чисел λ_k $(k=1, 2)$ матрицы $\|p_{km}\|$, $k, m \leqslant 2$, нет $\lambda_k = 1$. Тогда найдутся p_1, p_2 такие, что если введем новые неизвестные функции Y_1, Y_2 равенствами $Y_s = y_s - p_s t$, $s = 1, 2$, то для Y_1, Y_2 получим уравнения вида (1.1), но с $p_{3s} = 0$:

$$t\frac{dy_s}{dt} = p_{1s}y_1 + p_{2s}y_2 + F_s(y_1, y_2, t), \quad s = 1, 2, \qquad (1.1_1)$$

и уравнения (1.2) перейдут в уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = -t, \quad \frac{dy_s}{d\tau} = -[p_{1s}y_1 + p_{2s}y_2 + F_s(y_1, y_2, t)]. \qquad (1.2_1)$$

Если есть $\lambda_k=1$, то члены $p_{s1}t$ мы будем включать в F_s как в (1.1), так и в (1.1_1). Нас будет интересовать решение

$$y_s(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \quad s = 1, 2. \qquad (1.3)$$

Очевидно, уравнения (1.1) являются обобщением уравнения Брио и Буке, так как здесь в начальной точке $t^0=y_1^0=y_2^0=0$ правые части остаются неопределенными.

Запишем еще уравнения (1.1_1) в векторном виде

$$t\dot{Y} = YP + F(y_1, y_2, t), \quad Y = (y_1, y_2), \quad F = (F_1, F_2). \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1_1) можно преобразовать к каноническому виду. Как и для уравнений (1.5) главы IX [11], будем различать следующие случаи:

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} S, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ — вещественные;} \quad (1.5)$$

$$P = S^{-1} \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} S, \quad (1.6)$$

$$P = S^{-1} \begin{Vmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{Vmatrix} S, \quad (1.7)$$

т. е. $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ — комплексные;

$$P = S^{-1} \begin{Vmatrix} ib & 0 \\ 0 & -ib \end{Vmatrix} S. \quad (1.8)$$

Здесь

$$\lambda = -\frac{p_{11}+p_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_{11}-p_{22}}{2}\right)^2 + p_{21}p_{12}}\,.$$

В случаях (1.5) и (1.6) S — вещественная, а в случаях (1.7), (1.8) — комплексная.

Введем в (1.4) новый неизвестный вектор $u=(u_1, u_2)$ равенством

$$Y = uS. \quad (1.9)$$

Тогда (случай (1.5)) для u получим

$$t\dot{u} = uSPS^{-1} + F(y_1, y_2, t)S^{-1} = u\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} + \bar{F}(u_1, u_2, t).$$

Здесь $\bar{F}(u_1, u_2, t) = F(y_1, y_2, t)S^{-1}$ — функция такого же типа относительно u_1, u_2 и t, как $F(y_1, y_2, t)$ относительно y_1, y_2 и t. Таким образом, в этом случае уравнения (1.1) преобразуются к уравнениям вида

$$t\dot{u}_1 = u_1\lambda_1 + F_1(u_1, u_2, t), \quad t\dot{u}_2 = u_2\lambda_2 + F_2(u_1, u_2, t). \quad (1.10)$$

В случае (1.6) мы также получим уравнения

$$t\dot{u}_1 = u_1\lambda + u_2 + F_1(u_1, u_2, t), \quad t\dot{u}_2 = u_2\lambda + F_2(u_1, u_2, t). \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) запишутся в параметрическом виде

$$\frac{du_s}{d\tau} = -[u_s\lambda_s + F_s(u_1, u_2, t)], \quad s = 1, 2; \quad \frac{dt}{d\tau} = -t, \quad (1.10_1)$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = -[u_1\lambda + u_2 + F_1(u_1, u_2, t)],$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = -[u_2\lambda + F_2(u_1, u_2, t)], \quad \frac{dt}{d\tau} = -t. \quad (1.11_1)$$

Предположим теперь, что имеем (1.7). Полагая в (1.2_1) $\tau = -\xi$, получаем уравнения

$$\frac{dY}{d\xi} = YP + F(y_1, y_2, t), \quad Y = (y_1, y_2), \quad \frac{dt}{d\xi} = t. \quad (1.12)$$

В соответствии с теоремой 7.1 и формулами (7.14), (7.17) и (7.20) главы V [11] выберем матрицу

$$Z(\xi, \alpha) = \begin{Vmatrix} z_{11}(\xi) & z_{12}(\xi) \\ z_{21}(\xi) & z_{22}(\xi) \end{Vmatrix}, \quad J(\alpha) = \alpha I,$$

$$z_{11} = p_{21}(\cos b\xi + \alpha \sin b\xi),$$

$$z_{12} = (a - p_{11})(\cos b\xi + \alpha \sin b\xi) + b(\alpha \cos b\xi - \sin b\xi),$$

$$z_{21} = p_{21}(\cos b\xi - \alpha \sin b\xi),$$

$$z_{22} = (a - p_{11})(\cos b\xi - \alpha \sin b\xi) - b(\sin b\xi + \alpha \cos b\xi),$$

$$2bp_{21}\alpha = -1.$$

Тогда будет $D(Z(\xi, \alpha)) = 1$. Заменяя теперь в (1.12), согласно (7.22) главы V [11],

$$Y = uZ(\xi, \alpha), \quad (1.13)$$

получаем

$$\frac{du}{d\xi} = u(ZPZ^{-1} - \dot{Z}Z^{-1}) + F(y_1, y_2, t)Z^{-1}(\xi, \alpha),$$

или, согласно формуле (7.23) главы V [11],

$$\frac{du}{d\xi} = ua + F(y_1, y_2, t)Z^{-1}(\xi, \alpha). \quad (1.14)$$

Заменяя здесь $\xi = -\tau$, находим

$$\frac{du}{d\tau} = -ua - F(y_1, y_2, t)Z^{-1}(-\tau, \alpha)$$

или

$$\frac{du}{d\tau}=-ua-F(u_1z_{11}(-\tau,\ \alpha)+u_2z_{21}(-\tau,\ \alpha),\ u_1z_{12}(-\tau,\ \alpha)+$$
$$+u_2z_{22}(-\tau,\ \alpha),\ t)Z^{-1}(-\tau,\ \alpha),\quad \frac{dt}{d\tau}=-t. \qquad (1.15_1)$$

Таким образом, для определения t, u_1 и u_2 имеем вещественные уравнения

$$\frac{du}{d\tau}=-ua-\Phi(u_1,\ u_2,\ t),\quad \frac{dt}{d\tau}=-t, \qquad (1.15)$$

где $\Phi(u_1,\ u_2,\ t)$ — вещественная функция, голоморфная в окрестности точки $u_1=u_2=t=0$, не имеющая свободных и линейных членов относительно u_1, u_2 и t.

Если, в частности, $a=0$, т. е. характеристические числа матрицы P чисто мнимые, то матрица $Z(\xi,\ a)$ определяется равенствами:

$$z_{11}=p_{21}(\cos b\xi+\alpha\sin b\xi),$$
$$z_{12}=-p_{11}(\cos b\xi+\alpha\sin b\xi)+b(\alpha\cos b\xi-\sin b\xi),$$
$$z_{21}=p_{21}(\cos b\xi-\alpha\sin b\xi),$$
$$z_{22}=-p_{11}(\cos b\xi-\alpha\sin b\xi)-b(\sin b\xi+\alpha\cos b\xi),$$

где $2bp_{21}\alpha=-1,\ p_{11}+p_{22}=0,\ -b^2=\frac{(p_{11}-p_{22})^2}{4}+p_{12}p_{21}$,

а уравнения (1.15) принимают вид

$$\frac{du}{d\tau}=-\Phi(u_1,\ u_2,\ t),\quad \frac{dt}{d\tau}=-t. \qquad (1.16)$$

Теперь приступаем к рассмотрению вопроса существования и построения решения системы (1.1), обладающего свойством (1.3). Заметим, что вопрос о существовании и построении такого решения эквивалентен такому же вопросу для преобразованных уравнений (1.10), (1.11), (1.15) или (1.16).

Сначала рассмотрим случай (1.5), которому соответствует система (1.10). Покажем, что здесь существует единственное голоморфное решение уравнений (1.10):

$$u_k=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{(k)}t^\nu,\quad k=1,\ 2, \qquad (1.17_1)$$

если λ_1 и λ_2 не являются целыми положительными числами. Подставляя (1.17_1) в (1.10), получаем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu^{(k)} t^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(k)} t^\nu \lambda_k + F_k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(1)} t^\nu, \ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(2)} t^\nu, \ t \right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu - \lambda_k) a_\nu^{(k)} t^\nu = F_k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(1)} t^\nu, \ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(2)} t^\nu, \ t \right), \quad k = 1, \ 2.$$

Отсюда видим, что если $\lambda_k \neq \nu$ — целое, то формальное решение (1.17_1) существует и $a_\nu^{(k)}$ определяются единственным образом по формулам

$$a_\nu^{(k)} = \frac{1}{\nu - \lambda_k} \bar{P}_\nu^{(k)} (a_1^{(1)}, \ \ldots, \ a_{\nu-1}^{(1)}, \ a_1^{(2)}, \ \ldots, \ a_{\nu-1}^{(2)}) =$$

$$= \frac{1}{\nu - \lambda_k} P_\nu^{(k)} (A_{klm}^{(1)}, \ A_{klm}^{(2)}), \tag{1.17}$$

где $P_\nu^{(k)}$ — полином от коэффициентов $A_{klm}^{(1)}$, $A_{klm}^{(2)}$ рядов F_1, F_2 с положительными коэффициентами. Имеем $0 < A < |\nu - \lambda_k|$, $k = 1, \ 2$.

Рассмотрим теперь уравнения

$$Ay_k = \bar{F}_k (y_1, \ y_2, \ t), \quad k = 1, \ 2, \tag{1.18}$$

где $\bar{F}_k$ — мажорантные ряды для F_k. Здесь $\bar{F}_k (y_1, y_2, t)$ — ряды без свободных и линейных членов относительно y_1, y_2 и t, поэтому равенства (1.18) определяют [12, 13] единственные голоморфные функции y_1, y_2 вида [1])

$$y_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^{(k)} t^\nu, \quad k = 1, \ 2. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в (1.18) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, получим для определения $b_\nu^{(k)}$ равенства, подобные (1.17):

$$b_\nu^{(k)} = \frac{1}{A} P_\nu^{(k)} (\bar{A}_{klm}^{(1)}, \ \bar{A}_{klm}^{(2)}). \tag{1.20}$$

---

[1]) Записывая (1.18) в виде $\Phi_k (y_1, \ y_2, \ t) = Ay_k - \bar{F}_k (y_1, \ y_2, \ t) = 0$, находим, что $\Phi_k (0, \ 0, \ 0) = 0$ и

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \end{matrix} \right|_{y_1 = y_2 = t = 0} = \left| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & A \end{matrix} \right| = A^2 \neq 0,$$

откуда и следует (1.19) согласно теореме о неявных функциях.

Здесь $P_\nu^{(k)}$ — те же полиномы, что и в (1.17), от положительных коэффициентов $\overline{A}_{klm}^{(1)}$, $\overline{A}_{klm}^{(2)}$ рядов $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ и вместо $\nu-\lambda_k$ стоит A. Следовательно, $b_\nu^{(k)}$ выйдут положительными и по модулю превосходящими $a_\nu^{(k)}$, откуда и следует сходимость рядов (1.17_1). Мажорантный ряд для (1.17_1) можно построить и так. Заменим в (1.18) мажорантные ряды $\overline{F}_k$ общим мажорантным рядом в виде элементарной функции (см. главу III [11])

$$Ay_k = \frac{M}{\left(1-\frac{y_1}{r}\right)\left(1-\frac{y_2}{r}\right)\left(1-\frac{t}{R}\right)} - M - \frac{M}{r}y_1 - \frac{M}{r}y_2 - \frac{M}{R}t,$$

$$k = 1,\ 2.$$

Так как здесь правые части совпадают, то $y_1=y_2=y$ и имеем уравнение

$$\left(A+\frac{2M}{r}\right)y = \frac{M}{\left(1-\frac{y}{r}\right)^2\left(1-\frac{t}{R}\right)} - M - \frac{M}{R}t. \quad (1.20_1)$$

Отсюда легко найдем

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu y^\nu, \quad (1.20_2)$$

и этот ряд будет мажорантным [1] для (1.17_1).

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. *В случае (1.5) система (1.1) имеет и притом единственное голоморфное решение, обладающее свойством (1.3), представимое через ряды (1.17_1) согласно (1.9), если λ_1 и λ_2 не являются целыми положительными числами.*

Теорема 1.2. *Если λ_2 — нецелое положительное, а λ_1 — целое положительное, то в случае* [2]

$$\overline{P}_{\lambda_1}^{(1)}\left(a_1^{(1)},\ \ldots,\ a_{\lambda_1-1}^{(1)},\ a_1^{(2)},\ \ldots,\ a_{\lambda_1-1}^{(2)}\right) = 0 \quad (1.20_3)$$

будет $a_{\lambda_1}^{(1)}$ произвольное постоянное и ряд (1.17_1), содержащий эту произвольную постоянную $a_{\lambda_1}^{(1)}$, снова сходится; если же условие (1.20_3) не выполнено, то голоморфного решения нет.

---

[1] Заметим, что для определения y имеем полином (1.20_1), поэтому легко определить область сходимости ряда (1.20_2) (см. в [12] алгебраические функции или [13]).

[2] Если $\lambda_1=1$, то (1.20_3) означает, что член pt в F_1 должен отсутствовать.

Здесь при доказательстве сходимости ряда (1.17_1) нужно только взять в (1.18) $0<A<|\nu-\lambda_k|$ при $\nu\neq\lambda_1$.

Таким образом, в теореме 1.2 указан случай, когда система (1.1) имеет однопараметрическое семейство голоморфных решений. И еще так же докажется

Теорема 1.3. *Если λ_1, λ_2— целые положительные числа и*

$$\overline{P}_{\lambda_k}^{(k)}(a_1^{(1)}, \ldots, a_{\lambda_k-1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_{\lambda_k-1}^{(2)})=0, \quad k=1,\ 2, \tag{1.20$_4$}$$

то ряды (1.17_1) сходятся при произвольных значениях $a_{\lambda_1}^{(1)}$ и $a_{\lambda_2}^{(2)}$.

Таким образом, здесь указан случай, когда система (1.1) имеет двухпараметрическое семейство голоморфных решений. Если условие (1.20_4) не выполнено, то голоморфных решений, обладающих свойством (1.3), нет. Будем далее вместо независимой переменной t писать x.

Теорема 1.4. *Если $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_j\neq 1$ и*

$$m+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2\neq\lambda_j, \quad j=1,\ 2, \tag{1.21}$$

где m, m_1 и m_2 — целые неотрицательные и

$$m+m_1+m_2\geqslant 2, \tag{1.22}$$

то система уравнений (1.10) имеет решение

$$u_s=\sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} a_s^{(mm_1m_2)}\,x^m\,x^{\lambda_1m_1}\,x^{\lambda_2m_2}, \quad s=1,\ 2, \tag{1.23}$$

где $a_1^{(010)}=a_1$, $a_2^{(001)}=a_2$ — произвольные постоянные, и ряды (1.23) сходятся при $0\leqslant x<r$.

Доказательство. Учитывая то, что, согласно (1.23), $u_s=\varphi_s(x, x_1, x_2)$, $s=1,\ 2$, где $x_1=x^{\lambda_1}$, $x_2=x^{\lambda_2}$, из (1.10) получаем уравнения для u_1 и u_2

$$x\frac{\partial u_s}{\partial x}+\lambda_1x_1\frac{\partial u_s}{\partial x_1}+\lambda_2x_2\frac{\partial u_s}{\partial x_2}=u_s\lambda_s+F_s(u_1,\ u_2,\ x),\ s=1,\ 2, \tag{1.24}$$

которым формально удовлетворим рядами (1.23). При этом коэффициенты $a_s^{(mm_1m_2)}$ найдутся сравнением коэффициентов в левой и правой частях из уравнений

$$\sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} a_s^{(mm_1m_2)}(m+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2)\,x^m x_1^{m_1}x_2^{m_2}=$$

$$=\lambda_s\sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} a_s^{(mm_1m_2)}x^m x_1^{m_1}x_2^{m_2}+F_s(u_1,\ u_2,\ x), \tag{1.25}$$

$$(m + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2)\, a_s^{(mm_1m_2)} = P_s\left(a_1^{(\overline{m}\overline{m}_1\overline{m}_2)},\ a_2^{(\overline{m}\overline{m}_1\overline{m}_2)}\right) =$$

$$= P_s\left(A_{klm}^{(1)},\ A_{klm}^{(2)}\right),$$

где $\overline{m} \leqslant m$, $\overline{m}_1 \leqslant m_1$, $\overline{m}_2 \leqslant m_2$ и $\overline{m} + \overline{m}_1 + \overline{m}_2 < m + m_1 + m_2$. Отсюда, в частности, имеем $(1 - \lambda_s)\, a_s^{(100)} = 0$, $s = 1, 2$, $(\lambda_1 - \lambda_1)\, a_1^{(010)} = 0$, $(\lambda_2 - \lambda_1)\, a_1^{(001)} = 0$, $(\lambda_1 - \lambda_2)\, a_2^{(010)} = 0$, $(\lambda_2 - \lambda_2)\, a_2^{(001)} = 0$. Здесь всегда можно положить $a_s^{(100)} = 0$, $s = 1, 2$, $a_1^{(001)} = 0$, $a_2^{(010)} = 0$ и $a_1^{(010)} = a_1$, $a_2^{(001)} = a_2$ — произвольные. Остальные коэффициенты $a_s^{(mm_1m_2)}$ в силу (1.21) найдутся единственным образом. Для доказательства сходимости рядов (1.23) рассмотрим уравнения[1)]

$$Au_s = A\, |a_s|\, x_s + \overline{F}_s(u_1,\ u_2,\ x), \quad s = 1,\ 2, \tag{1.26}$$

решение которых ищем в виде сходящихся рядов

$$u_s = \sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} b_s^{(mm_1m_2)}\, x^m x_1^{m_1} x_2^{m_2}. \tag{1.27}$$

Здесь $\overline{F}_s$ — мажоранты F_s, например, коэффициенты мажоранты $B_{klm}^{(s)} = |A_{klm}^{(s)}|$, a_1, a_2 — произвольные постоянные и $0 < A < |m + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 - \lambda_s|$.

Из теории неявных функций известно, что такое решение уравнений (1.26) существует[2)] [12, 13]. Подставляя (1.27) в (1.26) и сравнивая коэффициенты, получаем

$$b_s^{(100)} = 0, \quad b_1^{(010)} = |a_1|, \quad b_2^{(001)} = |a_2|, \quad b_1^{(001)} = b_2^{(010)} = 0,$$
$$b_s^{(mm_1m_2)} = \frac{1}{A} P_s\left(B_{klm}^{(1)},\ B_{klm}^{(2)}\right), \quad m + m_1 + m_2 \geqslant 2, \tag{1.28}$$

где $P_s(B_{klm}^{(1)},\ B_{klm}^{(2)})$, очевидно, такой же полином, как и в (1.20). Следовательно, имеем $|a_s^{(mm_1m_2)}| \leqslant b_s^{(mm_1m_2)}$, откуда и получаем

[1)] Напоминаем, что F_s и $\overline{F}_s$ не содержат свободного члена и линейных относительно u_1, u_2 и x, так как $\lambda_j \neq 1$.

[2)] Если $\Phi_s = Au_s - A\, |a_s|\, x_s - \overline{F}_s$, то при $u_s = x_s = x = 0$ имеем

$$\Phi_s = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = A^2 > 0,$$

откуда и следует утверждение.

сходимость рядов[1] (1.23) при малых $|x|$ и произвольных постоянных a_1, a_2. Как и в случае (1.18), возьмем в (1.26) вместо $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ общую мажоранту и вместо $|a_1|$ и $|a_2|$ наибольшую из них a. Тогда вместо (1.26) получим

$$Au_s = Aax_s + \frac{M}{\left(1-\frac{u_1}{r}\right)\left(1-\frac{u_2}{r}\right)\left(1-\frac{x}{R}\right)} - M - \frac{2M}{r} - \frac{M}{R}.$$

Пусть еще $|x_1| \leqslant X$, $|x_2| \leqslant X \leqslant z$, $|x| \leqslant z$. Тогда можно положить $u_1 = u_2 = u$ и мажоранта примет вид

$$Au = Aaz + \frac{M}{\left(1-\frac{u}{r}\right)\left(1-\frac{z}{R}\right)}.$$

Отсюда легко найдем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k,$$

точный радиус сходимости $|z| < D$, и тогда ряды (1.27) и, следовательно, (1.23) будут сходиться при $|x^{\lambda_1}|$, $|x^{\lambda_2}|$, $|x| < D$.

Таким образом, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то система (1.1) имеет двухпараметрическое семейство решений, обладающих свойством (1.3), если выполнено условие (1.21).

Замечание 1.1. Если $\lambda > 0$, но не является числом вида $\frac{m}{2n+1}$, где n и m—целые, то x^λ будет вещественным только при $x > 0$, если же $\lambda = \frac{m}{2n+1}$, то $x^\lambda = x^{\frac{m}{2n+1}}$ будет вещественным как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Этим определяется, будет ли решение (1.23) существовать только при $x > 0$ или также и при $x < 0$.

Теорема 1.5. *Если*

$$\lambda_2 \leqslant 0 < \lambda_1 \text{ не равно целому числу,} \tag{1.29}$$

то система (1.10) имеет однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (1.3), в виде сходящегося ряда при малых $|x|$

---

[1] Сходимость рядов (1.23) следует и из сходимости рядов (12.15) ([11], с. 216), так как условие (1.21) совпадает с условием (12.10) ([11], с. 216) и (1.10) эквивалентно (1.10_1).

$$u_s = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} a_s^{(mm_1)} x^m x^{\lambda_1 m_1} = \varphi_s(x, x_1), \quad x_1 = x^{\lambda_1}, \quad s=1, 2, \tag{1.30}$$

где $a_1^{(01)}=a$—произвольная постоянная. При $a=0$ это решение будет голоморфным.

Доказательство. Очевидно, функции u_s должны удовлетворять уравнениям

$$x\frac{du_s}{dx} = x\frac{\partial u_s}{\partial x} + \lambda_1 x_1 \frac{\partial u_s}{\partial x_1} = \lambda_s u_s + F_s(u_1, u_2, x), \; s=1, 2. \tag{1.31}$$

Подставляя сюда (1.30) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и x_1, находим $a_s^{(10)}=a_s^{(10)}\lambda_s$, $a_s^{(01)}\lambda_1=\lambda_s a_s^{(01)}$, $s=1, 2$, откуда получаем $a_s^{(10)}=0$, $s=1, 2$; $a_2^{(01)}=0$, $a_1^{(01)}=a$, где a — произвольная постоянная. Далее получим

$$(m+m_1\lambda_1-\lambda_s)\, a_s^{(mm_1)} = P_{mm_1}(A_{klm}^{(1)}, A_{klm}^{(2)}, a), \tag{1.32}$$

где P_{mm_1}—полином с положительными коэффициентами. Заметим, что здесь всегда $m+m_1\lambda_1-\lambda_s > A > 0$ в силу (1.29) и коэффициенты $a_s^{(mm_1)}$ определяются однозначно через $A_{klm}^{(1)}$, $A_{klm}^{(2)}$ и a. Чтобы доказать сходимость рядов (1.30), рассмотрим уравнения

$$Au_1 = A|a|x_1 + \overline{F}_1(u_1, u_2, x), \quad Au_2 = \overline{F}_2(u_1, u_2, x), \tag{1.33}$$

где $0 < A < m+m_1\lambda_1-\lambda_s$. Из теории неявных функций следует, что эта система имеет решение в виде сходящихся рядов

$$u_s = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} b_s^{(mm_1)} x^m x_1^{m_1}, \quad s=1, 2. \tag{1.34}$$

Подставляя эти ряды в (1.33) и сравнивая коэффициенты, получаем

$$b_s^{(10)}=0, \quad s=1, 2; \quad b_2^{(01)}=0, \quad b_1^{(01)}=|a|,$$

$$b_s^{(mm_1)} = \frac{1}{A} P_{mm_1}(B_{klv}^{(1)}, B_{klv}^{(2)}, |a|),$$

где P_{mm_1} — такой же полином, как и (1.32), но от положительных чисел $B_{klv}^{(1)}$, $B_{klv}^{(2)}$, $|a|$ и вместо величины $1/(m+m_1\lambda_1-\lambda_s)$ стоит бóльшая величина $1/A$. Следовательно, имеем $|a_s^{(mm_1)}| < b_s^{(mm_1)}$ и из сходимости рядов (1.34) следует сходимость рядов[1] (1.30).

[1] Ряд (1.30) получим из (1.23), полагая $a_2^{(001)}=a_2=0$.

Теорема 1.6. *Пусть $\lambda_2 \leqslant 0 < \lambda_1$ — целое. Тогда система (1.10) имеет однопараметрическое семейство решений, обладающих свойством (1.3):*

$$u_s = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} C_s^{(mm_1)} x^m (x^{\lambda_1} \ln x)^{m_1}, \quad s = 1,\ 2, \tag{1.35}$$

где $C_1^{(\lambda_1 0)} = C$ *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon_1 x_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_1 u_1 + \overline{F}_1 (u_1,\ u_2,\ x), \\ \varepsilon_1 > 0 \text{ — малое}, \\ x \frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon_1 x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \overline{F}_2 (u_1,\ u_2,\ x). \end{gathered} \tag{1.36}$$

Эта система типа (1.31) (с $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \varepsilon_1$), поэтому имеет решение в виде (1.30) $u_s = \sum\limits_{m+m_1=1} a_1^{(mm_1)} x^m x_1^{m_1}$ с произвольной $a_1^{(01)} = a$. Система

$$\begin{gathered} x \frac{\partial v_1}{\partial x} + (\varepsilon_1 z_1 - x^{\lambda_1}) \frac{\partial v_1}{\partial z_1} = \varepsilon_1 v_1 + \overline{F}_1 (v_1,\ v_2,\ x), \\ 0 < \varepsilon_1 < 1, \\ x \frac{\partial v_2}{\partial x} + (\varepsilon_1 z_1 - x^{\lambda_1}) \frac{\partial v_2}{\partial z_1} = \overline{F}_2 (v_1,\ v_2,\ x) \end{gathered} \tag{1.37}$$

имеет решение в виде

$$v_s = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} C_s^{(mm_1)} x^m z_1^{m_1}, \quad s = 1,\ 2. \tag{1.38}$$

Покажем это. Подставляя (1.38) в (1.37), мы найдем коэффициенты этого ряда по формулам

$$\begin{gathered} (m - \varepsilon_1) C_1^{(m0)} = \overline{P}_1^{(m0)} (A_{klv}^{(1)},\ A_{klv}^{(2)}), \quad m C_2^{(m0)} = \overline{P}_2^{(m0)} (A_{klv}^{(1)},\ A_{klv}^{(2)}), \\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda_1 - 1; \\ \varepsilon_1 C_1^{(01)} = \varepsilon_1 C_1^{(01)}, \quad C_1^{(01)} \text{ — произвольная постоянная}, \\ \varepsilon_1 C_2^{(01)} = 0, \quad C_2^{(01)} = 0; \\ (m_1 \varepsilon_1 - \varepsilon_1) C_1^{(0m_1)} = \overline{P}_1^{(0m_1)} (A_{klv}^{(1)},\ A_{klv}^{(2)}), \\ m_1 \varepsilon_1 C_2^{(0m_1)} = \overline{P}_2^{(0m_1)} (A_{klv}^{(1)},\ A_{klv}^{(2)}), \quad m_1 = 2,\ 3,\ \ldots; \end{gathered} \tag{1.39}$$

$$(m+m_1\varepsilon_1-\varepsilon_1)\,C_1^{(mm_1)}-(m_1+1)\,C_1^{(m-\lambda_1,m_1+1)}=$$

$$=\overline{P}_1^{(mm_1)}(A_{klv}^{(1)},\ A_{klv}^{(2)}),\quad m=\lambda_1,\ \lambda_1+1,\ \ldots,\ m_1=0,\ 1,\ \ldots;$$

$$(m+m_1\varepsilon_1)\,C_2^{(mm_1)}-(m_1+1)\,C_2^{(m-\lambda_1,m_1+1)}=\overline{P}_2^{(mm_1)}(A^{(1)},\ A^{(2)}).$$

Таким образом, здесь $C_1^{(01)}=C$ — произвольное, а все остальные коэффициенты ряда (1.38) определяются однозначно, при этом если $C>0$, то и все коэффициенты ряда выйдут положительными [1]. Легко видеть, что функции $v_k(x,\ z_1)=u_k(x,\ x^{\lambda_1}+ +(\lambda_1-\varepsilon_1)z_1)$, подставленные в (1.37), дадут уравнения (1.36). Отсюда следует сходимость рядов (1.38) при малых $|x|$ и $|x_1|$.

Рассмотрим теперь систему ($\lambda_1\neq 1$)

$$x\frac{\partial w_s}{\partial x}+(\lambda_1 z_1-x^{\lambda_1})\frac{\partial w_s}{\partial z_1}=\lambda_s w_s+F_s(w_1,\ w_2,\ x),\ s=1,\ 2. \tag{1.40}$$

Этим уравнениям формально удовлетворяют ряды

$$w_s=\sum_{m+m_1=1}^{\infty} b_{s}^{(mm_1)}x^m z_1^{m_1},\quad s=1,\ 2. \tag{1.41$_1$}$$

Для определения коэффициентов получим [2] уравнения: $(\lambda_1-\lambda_1)\,b_1^{(01)}=0$,

$$b_1^{(10)}(1-\lambda_1)=0,\ \ b_2^{(01)}(\lambda_1-\lambda_2)=0,\quad b_2^{(10)}(1-\lambda_2)=0,$$

откуда $b_1^{(01)}$ неопределенно, $b_1^{(10)}=0$, $b_2^{(01)}=0$, $b_2^{(10)}=0$. Общие же формулы аналогичны (1.39):

$$(m+m_1\lambda_1-\lambda_s)\,b^{(mm_1)}-(m_1+1)\,b_s^{(m-\lambda_1,m_1+1)}=$$

$$=P_s^{(mm_1)}(A^{(1)},\ A^{(2)}),\quad s=1,\ 2. \tag{1.41}$$

Здесь надо считать $b_s^{(m-\lambda_1,m_1+1)}=0$ при $m<\lambda_1$, так как при $m<\lambda_1$ второе слагаемое слева не появляется ввиду присутствия в (1.40) слева члена x^{λ_1} (как это было и при определении коэффициентов ряда (1.38)). Положим в (1.41) $m=\lambda_1$, $m_1=0$. Тогда будем иметь при $s=1$

$$(\lambda_1-\lambda_1)\,b_1^{(\lambda_1 0)}-b_1^{(01)}=P_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)},\ A^{(2)}). \tag{1.42}$$

---

[1] Если $\lambda_1=1$, то в $\overline{F_s}$ может быть член $|p_s|\,x$ и тогда $C_1^{(01)}$ — произвольное (берем положительное), $C_1^{(10)}=\dfrac{|p_1|+C_1^{(01)}}{1-\varepsilon_1}$, $C_2^{(01)}=0$, $C_2^{(10)}=|p_2|$.

[2] Если $\lambda_1=1$, то в F_s может быть член $p_s x$ и тогда $b_1^{(01)}=-p_1$, $b_2^{(01)}=0$, $b_1^{(10)}$ неопределенно, $b_2^{(10)}=\dfrac{p_2}{1-\lambda_2}$, $\lambda_2<0$.

Мы уже нашли $b_s^{(10)}=0$, $s=1, 2$; $b_2^{(01)}=0$, но $b_1^{(01)}$ осталось неопределенным и в правую часть формулы (1.42) оно не входит. Следовательно, из (1.42) имеем

$$b_1^{(01)} = -P_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)}, A^{(2)}). \tag{1.43}$$

После этого, согласно (1.42), $b_1^{(\lambda_1 0)} = C$ остается произвольным. Все остальные коэффициенты $b_1^{(mm_1)}$ из (1.41) определяются однозначно. Выбирая произвольно положительным $C_1^{(01)} = C$ в (1.38), мы получили все коэффициенты в (1.38) положительными и тем самым

$$C_1^{(\lambda_1 0)} = \frac{1}{\lambda_1 - \varepsilon_1}[\overline{P}_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)}, A^{(2)}) + C_1^{(01)}] > 0 \tag{1.44}$$

получили как угодно большим положительным.

Итак, согласно формулам (1.39), имеем

$$C_1^{(01)} = C > b_1^{(01)}, \quad C_1^{(10)} > b_1^{(10)} = 0,$$

$$C_2^{(01)} = b_2^{(01)} = 0, \quad C_2^{(10)} = b_1^{(01)} = 0.$$

В силу (1.44), где $C_1^{(01)}$—произвольная, будет $C_1^{(\lambda_1 0)} > |b^{(\lambda_1 0)}|$—произвольная. Во всех остальных случаях, как легко видеть, определяя $C_s^{(mm_1)}$ и $b_s^{(mm_1)}$, будем иметь $C_s^{(mm_1)} > 0$ и $C_s^{(mm_1)} \geqslant \geqslant |b_s^{(mm_1)}|$, так как коэффициенты рядов $\overline{F}_s$ положительные и по модулю равные или превосходящие соответствующие коэффициенты рядов F_s; сравнивая коэффициенты $m + m_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1$ при $C_1^{(mm_1)}$ и коэффициенты $m + m_1\lambda_1 - \lambda_1$ при $b_1^{(mm_1)}$, а также коэффициенты $m + m_1\varepsilon_1$ при $C_2^{(mm_1)}$ и коэффициенты $m + m_1\lambda_1 - \lambda_2$ при $b_2^{(mm_1)}$, видим, что все эти коэффициенты положительные и вторые коэффициенты больше первых (за исключением $m + m_1\varepsilon_1 - \varepsilon_1$ и $m + m_1\lambda_1 - \lambda_1$ при $m_1 = 1$, когда оба они равны m). Так как ряды (1.38) сходятся, то сходятся и ряды (1.41_1). Если теперь положить в (1.41_1) $z_1 = -x^{\lambda_1}\ln x$, то функции $u_s(x) = w_s(x, -x^{\lambda_1}\ln x)$ будут удовлетворять системе (1.10). Теорема 1.6 доказана.

З а м е ч а н и е к т е о р е м е 1.6. Может случиться, что решение (1.35) не содержит членов с $x^{\lambda_1}\ln x$ и это решение будет голоморфным с произвольной постоянной $C_1^{(\lambda_1 0)} = C$. Необходимым и достаточным условием этого является равенство

$$P_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)}, A^{(2)}) = 0. \tag{1.45}$$

Действительно, согласно (1.43), при этом будет $b_1^{(01)} = 0$. Так как и $b_2^{(01)} = 0$, то, как легко увидеть из (1.41), тогда будет и

$b_s^{(mm_1)} = 0$ при $m_1 \geqslant 1$. Условие (1.45), наверное, будет выполнено, если разложения $F_s(0, 0, x)$ по степеням x начинаются членами не ниже $\lambda_1 + 1$-го порядка. Действительно, через $P_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)}, A^{(2)})$ обозначен коэффициент при x^{λ_1} в разложении $F_s(w_1, w_2, x)$ с учетом того, что w_s имеет вид (1.41_1) и $F_s(w_1, w_2, x)$ не содержит линейных членов относительно w_1, w_2 и x. Следовательно, этот коэффициент $P_1^{(\lambda_1 0)}(A^{(1)}, A^{(2)})$ и совпадает с членом $A_{00\lambda_1}x^{\lambda_1}$ в разложении $F_s(w_1, w_2, x) = \Sigma A_{klm} w_1^k w_2^l x^m$, так как если в F_s не было $A_{00m}x^m$ при $m < \lambda_1$, то и в w_s нет члена $b_s^{(m0)}$ при $m < \lambda$.

Приведем теперь без доказательства теоремы, относящиеся к другим случаям корней λ_1 и λ_2. Пусть снова имеем (1.10) при

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \tag{1.46}$$

и при некоторых $m \geqslant 0$, $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, $m + m_1 + m_2 \geqslant 2$ будет

$$m + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = \lambda_j. \tag{1.47}$$

Здесь возможны четыре разных случая:

1. Условие (1.47) выполняется при $j = 1$ и не выполняется при $j = 2$.

2. Выполняется как при $j = 1$, так и при $j = 2$.

3. При $j = 1$ не существует, а при $j = 2$ выполняется несколько раз.

4. При $j = 1$ не существует, а при $j = 2$ выполняется один раз.

Замечание 1.2. Легко видеть, что для $j = 1$ при условии (1.46) равенство (1.47) возможно лишь при условии $m_1 = m_2 = 0$, т. е.

$$m = \lambda_1 \text{ — целое,} \tag{1.48}$$

а для $j = 2$ лишь при $m_2 = 0$, т. е.

$$m + m_1\lambda_1 = \lambda_2. \tag{1.49}$$

Таким образом, первый случай будет, когда $0 < \lambda_1$ — целое, а λ_2 — нецелое.

Теорема 1.7. *При условиях (1.46) и (1.47) в случае 1 система (1.10) имеет решение, обладающее свойством (1.3) в виде*

$$u_s = \sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_1m_2)} x^m (x^{\lambda_1} \ln x)^{m_1} (x^{\lambda_2})^{m_2}, \tag{1.50}$$

где $C_1^{(\lambda_1 00)} = C_1$ *и* $C_2^{(001)} = C_2$ *— произвольные.*

Чтобы найти это решение, надо уравнению

$$x\frac{\partial w_s}{\partial x}+(\lambda_1 x_1+x^{\lambda_1})\frac{\partial w_s}{\partial x_1}+\lambda_2 x_2\frac{\partial w_s}{\partial x_2}=\lambda_s w_s+F_s(w_1,\ w_2,\ x) \tag{1.51}$$

удовлетворить формально рядом

$$w_s=\sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_1m_2)}\,x^m x_1^{m_1}x_2^{m_2} \tag{1.52}$$

и затем положить $x_1=x^{\lambda_1}\ln x$, $x_2=x^{\lambda_2}$. Для определения коэффициентов получим[1] уравнения

$$(m+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2-\lambda_s)C_s^{(mm_1m_2)}+(m_1+1)C_s^{(m-\lambda_1,m_1+1,m_2)}=$$
$$=P_s^{(mm_1m_2)}(A^{(1)},\ A^{(2)}),$$

откуда найдем $C_1^{(\lambda_1 00)}=C_1$, $C_2^{(001)}=C_2$—произвольные, а $C_1^{(011)}$ нужно положить равным $P^{(\lambda_1 00)}(A^{(1)},\ A^{(2)})$ (в частности, если[2] $\lambda_1=1$, то будем иметь $(1-\lambda_1)C_1^{(100)}=-C_1^{(010)}$, т. е. $C_1^{(010)}=0$, и $C_1^{(100)}$ — произвольное),

$$(1-\lambda_2)C_2^{(100)}=-C_2^{(010)}\ \text{и полагаем}\ C_2^{(100)}=C_2^{(010)}=0,$$
$$\lambda_2 C_1^{(001)}=\lambda_1 C_1^{(001)},\ \text{полагаем}\ C_1^{(001)}=0,$$
$$\lambda_2 C_2^{(001)}=\lambda_2 C_2^{(001)},\ \text{полагаем}\ C_2^{(001)}\ \text{— произвольное.}$$

Остальные коэффициенты определяются однозначно.

Может случиться, что системе

$$x\frac{\partial u_s}{\partial x}+\lambda_2 x_2\frac{\partial u_s}{\partial x_2}=\lambda_s u_s+F_s(u_1,\ u_2,\ x) \tag{1.53}$$

можно удовлетворить формально рядами

$$u_s=\sum_{m+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_2)}x^m x_2^{m_2}.$$

Тогда уравнения (1.10) имеют решения в виде (в случае 1)

$$u_s=\sum_{m+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_2)}x^m x^{\lambda_2 m} \tag{1.54}$$

с произвольными постоянными $C_1^{(01)}$ и $C_2^{(01)}$. Чтобы имел место случай 2, согласно (1.48) и (1.49), λ_1 должно быть целым, а λ_2 определяться равенством (1.49).

---

[1] Снова $C_s^{(m-\lambda_1,m_1+1,m_2)}=0$ при $m<\lambda_1$.

[2] Но в этом случае (1.47) нет при $j=1$ и при $m+m_1+m_2\geqslant 2$. Ряд (1.52) будет сходиться.

Теорема 1.8. *В случае 2 система (1.10) имеет решение в виде*

$$u_s = \sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_1m_2)} x^m (x^{\lambda_1} \ln x)^{m_1} [x^{\lambda_2} (\ln x)^{\mu_1+1}]^{m_2},$$

где $C_1^{(\lambda_1 00)} = C_1$, $C_2^{(\lambda_2 00)} = C_2$ — *произвольные, а* μ_1 — *целая часть* λ_2/λ_1.

Случай 3 возможен только при условии, что λ_1 и λ_2 — рациональные и λ_1 — нецелое (так как иначе равенство (1.47) возможно при $j=1$). Этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме 1.8, так как, вводя новую независимую переменную $\xi : x=\xi^q$, где q — общий знаменатель λ_1, λ_2, вместо (1.10) получим систему

$$\xi \frac{du_s}{d\xi} = \lambda_s q u_s + \overline{F}_s(u_1, u_2, \xi), \quad s = 1, 2. \tag{1.55}$$

Теорема 1.9. *В случае 4 система (1.10) имеет решение в виде*

$$u_s = \sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_1m_2)} x^m (x^{\lambda_1})^{m_1} (x^{\lambda_2} \ln x)^{m_2}, \tag{1.56}$$

где $C_1^{(010)} = C_1$ *и* $C_2^{(\lambda_2 00)} = C_2$ — *произвольные постоянные.*

Доказательства этих теорем читатель найдет в работе [14]. Случаи (1.5) при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ и (1.7) при $a\neq 0$ сводятся соответственно к системам (1.10) (при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$) и (1.14), которые не отличаются. Здесь при любом нецелом λ (соответственно a) система имеет единственное голоморфное решение (согласно теореме 1.1). При нецелом $\lambda>0$ ($a>0$) система (1.10) ((1.14)) имеет решение

$$u_s = \sum_{m+n=1}^{\infty} C_s^{(mn)} x^m (x^\lambda)^n, \quad s = 1, 2, \tag{1.57}$$

с произвольными постоянными $C_1^{(01)}$, $C_2^{(01)}$. Это решение получаем, удовлетворяя формально уравнению

$$x \frac{\partial v_s}{\partial x} + \lambda z \frac{\partial v_s}{\partial z} = \lambda v_s + F_s(v_1, v_2, x), \quad s = 1, 2,$$

рядами

$$v_s = \sum_{m+n=1}^{\infty} C_s^{(mn)} x^m z^n, \quad z = x^\lambda. \tag{1.58}$$

Если же λ — целое положительное, то имеем решение

$$u_s = \sum_{m+n=1}^{\infty} C_s^{(mn)} x^m (x^\lambda \ln x)^n, \quad s = 1, 2,$$

с произвольными постоянными $C_1^{(\lambda 0)}$ и $C_2^{(\lambda 0)}$, которое получаем, удовлетворяя формально уравнениям

$$x \frac{\partial v_s}{\partial x} + (\lambda z + x^\lambda) \frac{\partial v_s}{\partial z} = \lambda v_s + F_s(v_1, v_2, x), \quad s = 1, 2,$$

рядами (1.58) и полагая затем $z = x^\lambda \ln x$. В случае (1.6), т. е. в случае уравнений (1.11), когда λ не равно целому, имеем [1] единственное голоморфное решение. Если же $\lambda > 0$, то существует решение вида

$$u_s = \sum_{m+m_1+m_2=1}^{\infty} C_s^{(mm_1m_2)} x^m z_1^{m_1} z_2^{m_2}, \quad s = 1, 2. \qquad (1.57_1)$$

При этом если λ — нецелое, то $\bar{C}_1^{(001)} = 0$ и $C_1^{(010)} = C_2^{(001)} = C_1$, $C_2^{(010)} = C_2$ — произвольные постоянные, а $z_1 = x^\lambda$, $z_2 = -x^\lambda \ln x$.

Если λ — целое, то произвольными постоянными будут $C_1^{(\lambda 00)}$ и $C_2^{(\lambda 00)}$, а $z_1 = -x^\lambda \ln x$, $z_2 = \dfrac{1}{2} x^\lambda (\ln x)^2$. Во всех этих случаях иногда решение не содержит $\ln x$ или даже решение будет голоморфным с двумя произвольными постоянными (при некоторых соотношениях между коэффициентами рядов $F_s(u_1, u_2, x)$).

§ 2. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ СИСТЕМЫ (1.1)

Что можно сказать о существовании решений, обладающих свойством (1.3), когда в (1.10) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ или в (1.11) $\lambda = 0$, или в (1.14) $a = 0$? Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$t\dot{u}_1 = u_2, \quad t\dot{u}_2 = t^2. \qquad (2.1)$$

Это система (1.11) с $\lambda = 0$.

Искомое решение есть единственное и голоморфное. Впрочем, это частный случай предположения (1.6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, когда существует решение единственное, голоморфное, обладающее свойством (1.3).

---

[1] Если в (1.11) F_1 и F_2 не содержат член at, то все коэффициенты рядов $u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} t^k$, $u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2)} t^k$ будут равны 0, т. е. $\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(2)} = 0$, и голоморфных решений нет.

Пример 2.

$$t\dot{u}_1 = -au_1^2, \quad t\dot{u}_2 = -bu_2^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \tag{2.2}$$

Отсюда получим

$$u_1 = \frac{1}{a\ln t + C_1}, \quad u_2 = \frac{1}{b\ln t + C_2}.$$

Здесь $a\ln t + C_1 \to \infty$ и $b\ln t + C_2 \to \infty$ при $t \to 0$, если рассматриваем область $0 < t < \alpha$ при достаточно малом α.

Очевидно, при $a > 0$, $b > 0$ и будет $u_1 \to 0 - 0$, $u_2 \to 0 - 0$; при $a < 0$, $b < 0$ имеем $u_1 \to 0 + 0$, $u_2 \to 0 + 0$; при $a < 0$, $b > 0$ будет $u_1 \to 0 + 0$, $u_2 \to 0 - 0$ и при $a > 0$, $b < 0$ будет $u_1 \to 0 - 0$, $u_2 \to 0 + 0$.

Пример 3.

$$t\dot{u}_1 = u_2^2, \quad t\dot{u}_2 = u_1^2. \tag{2.3}$$

Отсюда имеем однопараметрическое семейство решений $u_1 = u_2 = -\dfrac{1}{\ln t + C}$, обладающих свойством (1.3), причем в плоскости u_1, u_2 точка движется к началу координат в первой четверти вдоль биссектрисы.

Пример 4.

$$t\dot{u}_1 = u_1^2 + u_2^2 + at^2, \quad t\dot{u}_2 = u_1^2 + u_2^2 + bt^2, \tag{2.4}$$

отсюда

$$t(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = (b-a)t^2, \quad u_2 = u_1 + \frac{b-a}{2}t^2,$$

$$t\dot{u}_1 = u_1^2 + \left(u_1 + \frac{b-a}{2}t^2\right)^2 + at^2 =$$

$$= 2u_1^2 + (b-a)u_1t^2 + \frac{(b-a)^2}{4}t^4 + at^2.$$

Это уравнение Брио и Буке (глава IX, § 2 [11]), имеющее единственное голоморфное решение (других решений $u_1 \to 0$ при $t \to 0$ нет):

$$u_1 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k, \quad u_2 = u_1 + \frac{b-a}{2}t^2.$$

Пример 5.

$$t\dot{u}_1 = u_2, \quad t\dot{u}_2 = Au_1^2, \quad A > 0. \tag{2.5}$$

Это система типа (1.11) с $\lambda=0$ и

$$\frac{du_2}{du_1}=A\frac{u_1^2}{u_2},\ u_2^2=\frac{2A}{3}u_1^3,\ t\dot{u}_1=\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/2}u_1^{3/2},$$

$u_1=4\left[C-\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/2}\ln t\right]^{-2}\to 0$ при $t\to 0$, если $C-\left(\frac{2A}{3}\right)^{1/2}\ln t$ не обращается в нуль (например, если $C>0$). Поэтому и $u_2(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Можно рассмотреть и общий случай уравнений (1.11) с $\lambda=0$, которые мы запишем в параметрической форме (1.11_1):

$$\frac{du_1}{d\tau}=-u_2-F_1(u_1,\ u_2,\ t),\quad \frac{du_2}{d\tau}=-F_2(u_1,u_2,\ t),\quad \frac{dt}{d\tau}=-t. \tag{2.6}$$

Обозначая $x=-u_1$, $y=u_2$ и $x_1=t$, запишем эту систему в виде

$$\frac{dx}{d\tau}=y+F_1(-x,\ y,\ x_1),\quad \frac{dy}{d\tau}=-F_2(-x,\ y,\ x_1),\quad \frac{dx_1}{d\tau}=-x_1.$$

Здесь надо искать решения, обладающие свойствами $x\to 0$, $y\to 0$ и $x_1\to 0$ при $\tau\to\infty$. Но это частный случай системы, подробно рассмотренный А. М. Ляпуновым [15], к которой мы и отсылаем читателей.

Теперь мы рассмотрим систему (1.1) с параметрической точки зрения в записи (1.2_1) или (1.10), (1.11) и (1.15). Сначала рассмотрим случай (1.10), когда в параметрической форме эти уравнения имеют вид (1.10_1). Предположим, что числа -1, $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ отрицательные и

$$m+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2\neq\lambda_s,\quad s=1,2. \tag{2.7}$$

Это частный случай системы (12.13) ([11], глава III), для которой мы построили решение (12.15) [11]:

$$y_s=C_se^{-\lambda_s\tau}+\sum_{m+m_1+m_2\geqslant 2}K_s^{(mm_1m_2)}e^{-\tau m}(C_1e^{-\tau\lambda_1})^{m_1}(C_2e^{-\tau\lambda_2})^{m_2},$$

$$s=1,\ 2,$$

которое, очевидно, можно записать так:

$$y_s=C_st^{\lambda_s}+\sum_{m+m_1+m_2\geqslant 2}K_s^{(mm_1m_2)}t^mC_1^{m_1}t^{\lambda_1m_1}C_2^{m_2}t^{\lambda_2m_2},\quad s=1,2. \tag{2.8}$$

Здесь $K^{(mm_1m_2)}$ — постоянные и это совпадает с (1.23). В случае, когда условие (2.7) нарушено (но $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) или когда имеем случай (1.10) с $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, или (1.11) или (1.15) с $a > 0$, согласно разложению (12.9) в [11], § 12 главы III, $K^{(mm_1m_2)}$, вообще говоря, будут полиномами от τ, тем самым полиномами от $(-\ln t)$. Именно это мы и получили здесь детально в разных случаях другим способом.

Глава III

ТЕОРИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. О МЕТОДЕ ПЕНЛЕВЕ

Пенлеве [16] среди уравнений [1])

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(x,\ y,\ y'), \tag{1.1}$$

где R — рациональная функция, искал такие, подвижные особые точки решений которых являются однозначными особыми точками и, в частности, полюсами.

Сначала он искал необходимые условия, которым должна удовлетворять функция $R(x,\ y,\ y')$, чтобы можно было ожидать только однозначные подвижные особые точки. Эту задачу он решил с помощью теоремы Пуанкаре о разложении решений по положительным степеням малого параметра, требуя однозначности коэффициентов при всех степенях параметра. Этот метод позволил ему выделить 6 основных уравнений вида (1.1), подозрительных на такие, решения которых не имеют подвижных особых многозначных точек. Стояла задача доказать, что решения этих уравнений действительно имеют только подвижные полюсы. Это и удалось сделать Пенлеве и его последователям.

Первым из этих уравнений является уравнение

$$y'' = 6y^2 + x. \tag{1.2}$$

На этом примере мы и покажем метод Пенлеве, изменяя в нем лишь детали рассуждений.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1.2) с конечными начальными значениями $\bar{x}_0$, y_0, y'_0, по теореме Коши голоморф-

---

[1]) Здесь и далее все переменные являются комплексными.

ное в окрестности точки $\bar{x}_0$. Так как это решение при любых конечных значениях $\bar{x}_0$, y_0, y'_0 голоморфное в окрестности точки $\bar{x}_0$ и правая часть уравнения (1.2) не имеет особых точек x_0, y_0, то неподвижных особых точек уравнение (1.1) не имеет. Нас интересуют подвижные особые точки $x=x_0=a$, координаты которых определяются начальными значениями $\bar{x}_0$, y_0, y'_0.

Пусть Г — наибольший круг с центром в точке $\bar{x}_0$, в котором $y(x)$ голоморфное, и на окружности Г есть особая точка $x=a$. Наша цель показать, что a не может быть точкой, отличной от полюса второго порядка. Проведем в плоскости x прямую l от $\bar{x}_0$ к a.

Лемма 2.1. *На прямой l нет такой последовательности*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots \to a, \tag{2.1}$$

что

$$|y(x_k)| < A, \quad |y'(x_k)| < A, \tag{2.2}$$

где A — положительное число.

Действительно, если такое A существует, то существует такая последовательность $x_\nu \to a$ при $\nu \to \infty$, что $y(x_\nu) \to \bar{y}_0$, $y'(x_\nu) \to \bar{y}'_0$ при $\nu \to \infty$. Рассматриваемое решение с начальными условиями

$$y(x) \to y(x_\nu), \quad y'(x) \to y'(x_\nu) \text{ при } x \to x_\nu$$

голоморфно по крайней мере в области

$$|x - x_\nu| < R_\nu, \qquad R_\nu > R > 0,$$

где R не зависит от значка ν, если ν достаточно большое. Но тогда при достаточно большом ν (когда x_ν будет вблизи a) точка a попадет в область голоморфности рассматриваемого решения и, следовательно, не будет особой вопреки предположению. Лемма 2.1 доказана.

Следствие из леммы 2.1. Если $x=a$ — особая точка решения на круге сходимости, то для всякой последовательности на l x_1, x_2, ...$\to a$ имеем

$$|y(x_k)| + |y'(x_k)| \to \infty, \tag{2.3}$$

имеем и

$$|y(x)| + |y'(x)| \to \infty \text{ при } x \to a. \tag{2.4}$$

Отсюда следует

Лемма 2.2. *Если $x=a$ — особая точка решения $y(x)$, то*

$$y(x) \text{ не ограничена при } x \to a \text{ на } l \tag{2.5}$$

или существует последовательность на l x_1, x_2, ...$\to a$ такая, что $y(x_1)$, $y(x_2)$, ...$\to \infty$.

Действительно, если этого нет, т. е. $|y(x)|<A$, то из (1.2) получим, что

$$y'(x) = y'(x_1) + \int_{x_1}^{x} (6y^2 + x)\, dx$$

ограничена. Это противоречит (2.4), поэтому имеем (2.5).

Следствие из леммы 2.2. Если $x=a$ — особая точка $y(x)$, то не может $y(x)\to 0$ при $x\to a$ на l.

Замечание 2.1. Если y' не ограничена, то и y'' не ограничена, ибо $y'(x) - y'(x_1) = \int_{x_1}^{x} y''dx$, а тогда и $y(x)$ не ограничена, так как $y'' = 6y^2 + x$.

§ 3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.2) ИМЕЮТ ПОДВИЖНЫЕ ПОЛЮСЫ

Легко видеть, что уравнение (1.2) имеет формальное решение вида

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x-x_0)^2 - \frac{1}{6}(x-x_0)^3 + \\ + h(x-x_0)^4 + \frac{x_0^2}{300}(x-x_0)^6 + \ldots, \tag{3.1}$$

где x_0 и h — произвольные постоянные, а коэффициенты при всех остальных положительных степенях $(x-x_0)$ определяются единственным образом через x_0 и h.

Таким образом, можно подозревать, что решения уравнения (1.2) имеют подвижные особые точки-полюсы x_0 с произвольным параметром h.

Мы докажем, что этот ряд сходится в окрестности точки x_0, т. е. в области $0<|x-x_0|<R$. Здесь x_0 характеризует решение в том смысле, что в произвольной точке x_0 будет полюс. Но что, какое качество решения характеризует h? Об этом мы скажем позднее — это очень важный и интересный вопрос.

Заменим в коэффициентах ряда (3.1) $x_0 = (x_0 - x) + x$. Получим

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x}{10}(x-x_0)^2 - \frac{(x-x_0)^3}{15} + \\ + h(x-x_0)^4 + \frac{x^2}{300}(x-x_0)^6 + \ldots \tag{3.2}$$

Откуда имеем

$$y' = -\frac{2}{(x-x_0)^3} - \frac{x}{5}(x-x_0) - \frac{3}{10}(x-x_0)^2 +$$
$$+ 4h(x-x_0)^3 + \frac{x^2}{50}(x-x_0)^5 + \ldots \qquad (3.3)$$

Полагая $y=z^{-2}$, исключаем величину $(x-x_0)$ из (3.2) и (3.3). С этой целью из (3.2) найдем

$$x - x_0 = z - \frac{x}{20}z^5 - \frac{1}{30}z^6 + \frac{h}{2}z^7 + \ldots \qquad (3.4)$$

следующим образом. Из (3.2) имеем

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x-x_0}\left[1 - \frac{x}{10}(x-x_0)^4 - \frac{(x-x_0)^5}{15} +\right.$$
$$\left. + h(x-x_0)^6 + \frac{x^2}{300}(x-x_0)^8 + \ldots\right]^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{x-x_0}\left[1 - \frac{x}{20}(x-x_0)^4 - \frac{1}{30}(x-x_0)^5 +\right.$$
$$\left. + \frac{h}{2}(x-x_0)^6 + \frac{x^2}{2400}(x-x_0)^8 + \ldots\right],$$

откуда

$$z = (x-x_0)\left[1 - \frac{x}{20}(x-x_0)^4 - \frac{1}{30}(x-x_0)^5 +\right.$$
$$\left. + \frac{h}{2}(x-x_0)^6 + \frac{x^2}{2400}(x-x_0)^8 + \ldots\right]^{-1} =$$
$$= (x-x_0)\left[1 + \frac{x}{20}(x-x_0)^4 + \frac{1}{30}(x-x_0)^5 -\right.$$
$$\left. - \frac{h}{2}(x-x_0)^6 + \frac{x^2}{480}(x-x_0)^8 + \ldots\right].$$

Удовлетворяя этому равенству тождественно рядом $x - x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$, найдем (3.4). Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$y' = -\frac{2}{\varepsilon z^3} - x\varepsilon\frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} + 7\varepsilon h z^3 + \ldots, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (3.5)$$

Теперь преобразуем уравнение (1.2) в систему двух уравнений относительно z и u, заменяя [1]

$$y = z^{-2}, \quad y' = -\frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3. \tag{3.6}$$

Дифференцируя эти равенства, получим (в силу (1.2))

$$y' = -\frac{2}{z^3}z', \; y'' = 6\frac{1}{z^4} + x = \frac{6}{z^4}z' -$$
$$-\frac{z}{2} - \frac{xz'}{2} - zz' + 3z^2z'u + z^3u'.$$

Отсюда на основании (3.6) получим

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{xz^4}{4} + \frac{z^5}{4} - u\frac{z^6}{2},$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2z}{8} + \frac{3xz^2}{8} + z^3\left(\frac{1}{4} - ux\right) - \frac{5}{4}uz^4 + \frac{3}{2}u^2z^5. \tag{3.7}$$

Эта система имеет решение $z(x)$, $u(x)$ с начальными условиями

$$z(x_0) = 0, \quad u(x_0) = u_0 \quad \text{(произвольное постоянное)}, \tag{3.8}$$

которое будет голоморфным в окрестности точки $x = x_0$:

$$z(x) = x - x_0 + \sum_{k=5}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k,$$
$$u(x) = u_0 + \frac{x_0}{16}(x - x_0)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \beta_k (x - x_0)^k, \tag{3.9}$$

т. е. эти ряды сходятся в области $|x - x_0| < r$, где r определяется произвольно выбранным значением u_0. Следовательно, сходится и ряд (3.1) при произвольном значении постоянной h, величина которой определяет и область сходимости ряда (3.1):

$$0 < |x - x_0| < R. \tag{3.10}$$

Таким образом, доказано, что особыми подвижными точками решений уравнения (1.2) будут полюсы второго порядка $x = x_0$, произвольно выбранные.

[1] Таким образом, это преобразование Пенлеве извлекает из формального разложения (3.1). Если же особых подвижных точек типа полюса нет, то нет и преобразования (3.6). Для дальнейшего это важное замечание.

Далее мы докажем, что другого типа особых точек эти решения не имеют. Так как неподвижных особых точек решения (1.2) не имеют, то отсюда следует, что все решения уравнения (1.2) являются мероморфными функциями, т. е. представимы в виде отношения двух целых функций.

Наряду с x_0 у одного и того же решения $y(x)$ могут быть и другие полюсы, положение которых на плоскости x определяется значением h. Но сколько их и где они расположены? И, например, если x_0 и h вещественные, то полученное решение вещественное, так как все действия, с помощью которых находим коэффициенты ряда (3.1), алгебраические — сложение и умножение. Но при этих условиях, если есть другие полюсы у решения (3.1), то будут ли они только вещественные или и комплексные? И можно ли выбрать x_0 и h такими (например, комплексными), чтобы решение (3.1) не имело вещественных полюсов? В этом случае решение (3.1) будет существовать, будет продолжимо на всю вещественную ось. И еще вопрос: других полюсов, кроме x_0, конечное число или бесконечное? И какой точкой для решения (3.1) будет точка $x=\infty$? Если регулярной или полюсом, то в окрестности этой точки решение уравнения (1.2) будет представимо в виде

$$y=\sum_{k=-m}^{\infty} a_k x^{-k}. \qquad (3.1_1)$$

Но, как легко видеть, таким рядом даже формально удовлетворить уравнению (1.2) нельзя, поэтому регулярной или полюсом точка $x=\infty$ быть не может. Но в таком случае какой точкой она является для решений уравнения (1.2)?

Заметим еще, что в предыдущем рассуждении ничего бы не изменилось, если бы (когда z меняет знак в (3.7)) вместо преобразования (3.6) взяли преобразование

$$y=z^{-2}, \quad y'=\frac{2}{z^3}+\frac{xz}{2}-\frac{z^2}{2}-uz^3, \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}. \qquad (3.11)$$

Легко убедиться, что уравнение (1.2) не имеет формального решения по степеням величины $(x-x_0)^{1/m}$ с целым положительным m. Отсюда следует, что уравнение (1.2) не имеет алгебраических подвижных особых точек. Но, может быть, наряду с полюсом одновременно или нет оно имеет подвижные многозначные трансцендентные особые точки[1]) или типа существенных особых точек, когда при $x \to x_0$ $y'(x)$ или $y(x)$ не имеет предела.

---

[1]) Когда $y\to\infty$, $y'\to\infty$ при $x\to a$.

Мы, как уже сказано, докажем, что подвижными особыми точками решений уравнения (1.2) могут быть только полюсы второго порядка.

§ 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Легко показать, что для решения (3.1) одно из значений [1]

$$
\begin{aligned}
u &= y^{3/2}\left(y' + \frac{1}{2y}\right) + 2y^3 + \frac{xy}{2}, \\
u &= -y^{3/2}\left(y' + \frac{1}{2y}\right) + 2y^3 + \frac{xy}{2}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

при $x \to x_0 = a$ стремится к произвольному конечному значению $7h$, т. е.

$$u(x) \to 7h \text{ при } x \to a. \tag{4.2}$$

Л е м м а 4.1. *Предположим, что решение $y(x)$ уравнения (1.2) обладает свойством*

$$y(x_k) \to \infty \text{ при } x_k \to a \tag{4.3}$$

и для одного из u, определенных (4.1), имеем

$$|u(x_k)| \leqslant A \text{ — конечное число.} \tag{4.4}$$

Тогда в точке $x=a$ это решение мероморфно (имеет полюс или регулярное).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть таким свойством обладает, например, первое u. Тогда

$$u = \frac{1}{z^3}\left(y' + \frac{2}{z^3} + \frac{xz}{2} + \frac{z^2}{2}\right) \quad \text{при } y = \frac{1}{z^2} \tag{4.5}$$

обладает свойством (4.4). Равенство (4.5) запишем в виде

$$y = \frac{1}{z^2}, \quad y' = -\frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3. \tag{4.6}$$

Это преобразование уравнения (1.2) приводит к системе (3.7), для которой имеем решение, обладающее (в силу (4.3) и (4.4)) свойством

$$z(x_k) \to 0, \quad u(x_k) \to A_0, \quad |A_0| \leqslant A \tag{4.6$_1$}$$

при [2] $x_k \to a$. Следовательно, рассматриваемое решение $z(x)$, $u(x)$ будет в точке $x=a$ голоморфным с начальными усло-

---

[1] Принимая во внимание (3.1), легко видеть, какое из этих u в точке $x = x_0 = a$ будет конечным.

[2] Здесь $x_1, x_2, \ldots$ берется на прямой l, соединяющей точки x_0, a.

виями $z(x) \to 0$ и $u(x) \to A_0$ при $x \to a$, а соответствующее решение уравнения (1.2) $y(x)$ — мероморфным, имеющим в окрестности точки $x=x_0=a$ вид (3.1).

Заметим, что если вместо условия (4.3) имеем $|y(x_k)|<A$, то вместо (4.6₁) будет $z(x_k) \to z_0 \neq 0$, $u(x_k) \to A_0$, а тогда в точке $x=a$ решение $y(x)$ будет регулярным.

Мы уже рассмотрели случаи, когда решение $y(x)$ уравнения (1.2) обладает свойством:

$$1)\ y(x_k) \to y_0, \quad y'(x_k) \to y_0' \text{ при } x_k \to a,$$

где y_0, y_0' конечны или

$$|y(x_k)| < A, \quad |y'(x_k)| < A, \tag{4.7}$$

$$2)\ y(x_k) \to \infty, \quad |u(x_k)| < A \text{ при } x_k \to a, \tag{4.8}$$

$$3)\ |y(x_k)| < A, \quad |u(x_k)| < A \text{ при } x_k \to a. \tag{4.9}$$

Во всех этих случаях в окрестности точки $x=a$ решение $y(x)$ оказалось мероморфным (в частности, в случаях 1 и 3 голоморфным). Далее мы рассмотрим другие гипотезы относительно поведения функций $u(x)$ и $v(x)$, которую введем в следующем параграфе.

§ 5. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $u(x)$ И $v(x)$

Как мы видели, одно из двух u, определенных равенствами

$$\left.\begin{aligned} y' + \frac{1}{2y} - y^{3/2}\left(2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{u}{y^3}\right) = 0, \\ y' + \frac{1}{2y} + y^{3/2}\left(2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{u}{y^3}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

будет конечным в точке $x_0=a$, если y дано полярным разложением (3.1). Перемножая эти равенства, получим

$$y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y} + 4u + \frac{1}{y}(\ldots) = 0, \tag{5.2}$$

$$(\ldots) = \frac{1}{4y} - \frac{x^2}{4} - \frac{u^2}{y^2} + x\,\frac{u}{y}. \tag{5.3}$$

Обозначим

$$v = y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y} + x. \tag{5.4}$$

Тогда (5.2) запишем в виде

$$v - x + 4u + \frac{1}{y}(\ldots) = 0. \tag{5.5}$$

Легко видеть, что и v, данное (5.4), в точке $x_0=a$ полярного разложения $y(x)$ (3.1) имеет конечное значение

$$v(x) = -28h + x_0 + (x-x_0) + (x-x_0)^2\ [\cdot], \tag{5.6}$$

где $[\cdot]$ конечно при $x = x_0$.

Таким образом,

$$v(x_0) = -28h + x_0, \quad \frac{dv(x_0)}{dx} = 1. \tag{5.7}$$

Следовательно, $u(x)$ и $v(x)$ конечны в точке полюса $x=x_0=a$ решений $y(x)$. Учитывая определение v согласно (5.4) и одно из u согласно (5.2), видим, что вообще $v(x)$ и $u(x)$ одновременно или ограничены, или не ограничены в окрестности точки $x=a$ для всякого[1] решения $y(x)$, обладающего свойством

$$0<\rho\leqslant|y(x)| \text{ на } l. \tag{5.8}$$

В самом деле, при ограниченном $|u(x)|$ будет ограничено и $|v(x)|$, если $0<\rho\leqslant|y(x)|$. Это видно непосредственно из (5.5). Если же, согласно (5.4), в точке $x=a$ $v(x)$ конечно, то, согласно (5.3) и (5.5), конечным будет и $u(x)$ даже без условия (5.8). Покажем это.

Из квадратного уравнения (5.5) относительно u найдем[2]

$$u = \frac{y^{1/2}\,[x^2y - 1 - 4y^2(v-x)]}{2\,[4y^{5/2} + xy^{1/2} + \sqrt{16y^5 + 8y^3x + 1 + 4y^2(v-x)}]},$$

откуда и следует ограниченность $|u(x)|$ при ограниченности $|v(x)|$.

Отметим, что здесь при $y\to 0$ имеем $u\to 0$ и $u\to -(v-x)/4$ при $|y|\to\infty$. Если знаменатель нуль, то, подставляя в него v из (5.4), получим при конечном $y\,(\neq 0)$ конечное y', т. е. имеем (4.7) и, согласно (4.1), u ограничено.

§ 6. СЛУЧАЙ $0<\rho\leqslant|y(x)|$

Если $|v(x)|$ ограничено при $x\to a$ или при $x_k\to a$ будет $|v(x_k)|<A$, то будет и $|u(x_k)|<A$, а тогда имеем (4.8) или (4.9) и точка $x=a$ для решения $y(x)$ не будет трансцендентной особой, а будет полюсом в случае (4.8) и голоморфной в случае (4.9). Отсюда следует, что если точка $x=a$ трансцендентная особая, то нет $|v(x_k)|<A$, а есть

$$v(x)\to\infty \text{ при } x\to a. \tag{6.1}$$

[1] Не обязательно имеющего вид (3.1).

[2] Это u и дано соответствующей формулой (5.1).

Мы сейчас покажем, что из (6.1) следует существование и такой последовательности $x_k \to a$, для которой имеем

$$|v(x_k)| \to a_1, \tag{6.2}$$

откуда будет следовать, что особой трансцендентной точки $x=a$ нет, если выполнено условие $0<\rho\leqslant|y(x)|$.

Итак, пусть имеем (6.1). Рассмотрим (из (5.4) и (1.2))

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{2y'y'' - 12y^2y' - 2xy' - 2y + \dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2} + 1}{y'^2 - 4y^3 - 2xy + \dfrac{y'}{y} + x} =$$

$$= \frac{4y^3 - y'^2 + y^2 + xy}{y(yy'^2 - 4y^4 - 2xy^2 + y' + xy)} = \omega(x). \tag{6.3}$$

Из (6.1) следует, что должно быть $|\omega(x_k)| \to \infty$ при $x_k \to a$ по l, так как иначе (при $|\omega(x)| < A$) величина $v = v_0 e^{\int_{x_0}^{x} \omega dx}$ будет ограничена при $x \to a$ по l. Но при этом (если $|\omega(x_k)| \to \infty$) величина $|y(x)|$ будет не ограничена, т. е. будет $|y(x_k)| \to \infty$ при $x_k \to a$, так как в противном случае (т. е. при $0 < \rho \leqslant |y(x_k)| < A$) будет $y'(x_k) \to \infty$ (см. (2.3)), а тогда $\omega(x_k) \to -\dfrac{1}{y^2(x_k)}$, т. е. $\omega(x_k)$ будет ограничена (так как $0<\rho\leqslant|y(x_k)|$). Следовательно, если $|v(x)| \to \infty$ при $x \to a$, то $\omega(x_k) \to \infty$ при $x_k \to a$ и при этом $y(x_k) \to \infty$. Но, исключая из равенств, $v = v(x, y, y')$, $\omega = \omega(x, y, y')$ (т. е. из (5.4) и (6.3)) величину y', получим

$$\begin{gathered}\omega = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{v} + \frac{x}{y^2v} - \frac{x}{yv} - \frac{1}{2y^4v} \pm \\ \pm \frac{1}{2v^{1/2}y^{3/2}} \sqrt{\frac{16}{v} + \frac{4}{y^3} + \frac{1}{vy^5} - \frac{4x}{vy^3} + \frac{8x}{vy^2}}.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Действительно, запишем равенства (5.4) и (6.3)

$$y'^2 + \frac{y'}{y} = v + 4y^3 + 2xy - x,$$

$$4y^3 - y'^2 + y^2 + xy = y^2v\omega.$$

Складывая эти равенства, найдем

$$y' = [v(1 + \omega y^2) + (xy - x - y^2)]\, y.$$

Подставляя это в (6.3), получим

$$4y^3+y^2+xy-y^2v\omega=y^2[v(1+\omega y^2)+$$
$$+(xy-x-y^2)]^2.$$

Это можно записать и так:

$$y^2[v(1+\omega y^2)+(xy-x-y^2)]^2+$$
$$+[v(1+\omega y^2)+xy-x-y^2]+(x-2xy-4y^3-v)=0,$$

откуда и найдем (6.4).

Мы получили, что одновременно при $x\to a$ будут $\omega(x)$, $v(x)$ и $y(x)$ не ограничены, что невозможно, так как если $\omega(x_k)\to\to\infty$ и $y(x_k)\to\infty$, то должно быть $v(x_k)\to 0$. А если $v(x_k)\to 0$, то, как мы видели, точка $x=a$ — полюс (если $y(x_k)\to\infty$ и $|v(x_k)|<A$) согласно рассуждению в начале § 6.

§ 7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПОВЕДЕНИЯ $y(x)$ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ $x=a$

Нам осталось рассмотреть самый общий случай поведения $y(x)$ на прямой l в окрестности точки $x=a$, когда как угодно близко от точки a имеются промежутки $(x_\nu, x_{\nu+1})$, в которых

$$|y(x)|\leqslant\rho, \tag{7.1}$$

а в соседних промежутках[1] (x_m, x_{m+1})

$$0<\rho\leqslant|y(x)|. \tag{7.2}$$

Мы покажем теперь, что промежутки $(x_\nu, x_{\nu+1})$, в которых $|y(x)|<\rho$ можно заменить на криволинейные пути, на которых будет $|y(x)|\geqslant\rho>0$ и сумма длин этих криволинейных[2] путей равна pL, где p — конечное число, а L — сумма длин отрезков $(x_\nu, x_{\nu+1})$ на l. Таким образом, этот последний случай приводится к случаю $0<\rho\leqslant|y(x)|$ и мы окончательно имеем

---

[1] Случай $y(x)\to 0$ невозможен, если $x=a$ — особая точка (см. следствие из леммы 2.2).

[2] Новый путь, по которому $x\to a$, должен быть конечной длины, так как иначе $v=v_0e^{\int_{x_0}^{x}\omega dx}$ может быть неограниченным при $x\to a$ и при ограниченном ω, т. е. ограниченность ω не будет противоречить неограниченности v.

Теорему 7.1. *Решения уравнения (1.2), кроме полюсов второго порядка, не имеют других подвижных особых точек.*

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1

Итак, пусть имеется бесконечное число сегментов $\overline{x_1x_2}$, $\overline{x_3x_4}$, ..., сгущающихся к точке $x = a$ и имеющих соответственно длины c_{12}, c_{34}, ..., на которых

$$|y(x)| \leqslant \rho. \tag{8.1}$$

Покажем, что каждый сегмент $\overline{x_1x_2}$ можно заменить путем, длина которого будет порядка c_{12} и на котором будет

$$\rho \leqslant |y(x)|. \tag{8.2}$$

Кроме того, между сегментом $\overline{x_1x_2}$ и этим путем $y(x)$ будет голоморфной, поэтому при переходе от x_1 к x_2 по сегменту или по этому пути мы придем к одному и тому же значению $y(x_2)$.

Будем считать x функцией от y, так что уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 (6y^2 + x) \tag{8.3}$$

или в виде системы

$$x' = u, \quad u' = -u^3(6y^2 + x).$$

Полагая $x = x_0 + \zeta$, $u = x_0' + \eta$, получим

$$\frac{d\zeta}{dy} = x_0' + \eta, \qquad \frac{d\eta}{dy} = -(x_0' + \eta)^3(6y^2 + x_0 + \zeta).$$

Найдем решение $\zeta(y_0) = 0$, $\eta(y_0) = 0$. При $x_0' = 0$ это будет $\zeta \equiv 0$, $\eta \equiv 0$, а при $x_0' \neq 0$ —

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(y) x_0'^k, \qquad \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(y) x_0'^k,$$

$$\alpha_k(y_0) = \beta_k(y_0) = 0.$$

Согласно теореме Пуанкаре—Ляпунова (глава IV), эти ряды сходятся в области $-b \leqslant y \leqslant b$ при любом $b > 0$, но достаточно малом $|x_0'|$.

Так как $(x_0' + \eta)^3 = x_0'^3 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(y) x_0'^{k-1}\right)^3$, то $\frac{d\eta}{dy} =$ $= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k'(y) x_0'^k = -(x_0' + \eta)^3 (6y^2 + x_0 + \zeta) = -x_0'^3 \varphi(y, x_0')$, откуда $\beta_1'(y) = 0$, $\beta_1(y) = C$ — постоянная. Но $\beta_1(y_0) = 0$, поэтому $C = 0$ и

$$\eta = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k(y) x_0'^k.$$

Отсюда имеем

$$x' = x_0' + \eta = x_0'[1 + \varepsilon(y, x_0, y_0, x_0')], \tag{8.4}$$

где $|\varepsilon| < \Delta < 1/2$ и Δ — как угодно малое при достаточно малом $|x_0'|$.

Построим теперь в плоскости y окружность γ с центром в точке $y = 0$ и радиусом ρ, а в плоскости x сегмент $\overline{x_1 x_2}$ на l вблизи $x = a$.

Пусть сегменту $\overline{x_1 x_2}$ соответствует кривая C в плоскости y, которая расположена внутри γ, начинается в y_1 и кончается в y_2.

Обозначим через s длину дуги C, отсчитанную от точки y_1 до точки y, а через S — длину всей дуги (y_1, y_2); c_{12} — длина сегмента $\overline{x_1 x_2}$. Обозначим через α угол, который образует l с вещественной осью плоскости x, и положим

$$x = a + r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = a + re^{i\alpha}.$$

При $r=0$ имеем $x=a$, при $r=r_1$, $r=r_2$ — соответственно точки x_1, x_2 (рис. 1).

Имеем

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{ds} = e^{i\alpha}\frac{dr}{ds}, \quad \left|\frac{dy}{ds}\right| = 1.$$

Так как точки $x_1, x_3, \ldots \to a$, $|y(x_k)| = \rho$, то (в силу (2.3)) $y'(x_1), y'(x_3), \ldots \to \infty$, т. е. будет $|y'(x_k)| > \frac{1}{\tau}$, где τ малая, а k большое, т. е. $\left|\frac{dx}{dy}\right| < \tau$. Из равенства $x_2 - x_1 =$ $= (c)\int_{y_1}^{y_2} x'(y)\,dy = \int_0^s x'(y)\frac{dy}{ds}ds = \int_0^s \frac{dx}{ds}ds = e^{i\alpha}\int_0^s \frac{dr}{ds}ds$ видим, что

$$c_{12}=\int_0^s |x'[(y)|\,ds = x_1'\int_0^s |1+\varepsilon_1(s)|ds, \quad |\varepsilon_1|<\eta<\frac{1}{2},$$

откуда

$$c_{12}\geqslant x_1'\,\frac{s}{2}, \quad \frac{1}{2}<1+\varepsilon_1(s). \tag{8.5}$$

Но если y пробегает путь от y_1 до y_2 по дуге окружности γ, длина которой пусть σ, то этому пути y в плоскости x соответствует путь L, который идет от x_1 до x_2. При этом имеем

$$\operatorname{arc} L\leqslant|x_1'|\int_0^\sigma [1+\varepsilon_2(\sigma)]\,d\sigma\leqslant|x_1'|\,\frac{3\sigma}{2}, \quad |\varepsilon_2|<\eta<\frac{1}{2}. \tag{8.6}$$

Пусть φ — угол y_1Oy_2. Тогда, обозначая через $\overline{y_1y_2}$ длину хорды y_1y_2, получим

$$\frac{\overline{y_1y_2}}{\sigma}=\frac{2\rho\sin\frac{\varphi}{2}}{2\rho\,\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\geqslant\frac{2}{\pi} \quad (\varphi \text{ малое}),$$

откуда $\sigma<\frac{\pi}{2}$, $\overline{y_1y_2}\leqslant\frac{\pi}{2}S$, так как $\overline{y_1y_2}$ не превосходит S. На основании этого из (8.6) получим $\operatorname{arc} L\leqslant\frac{3}{4}\pi|x_1'|S$ и в силу

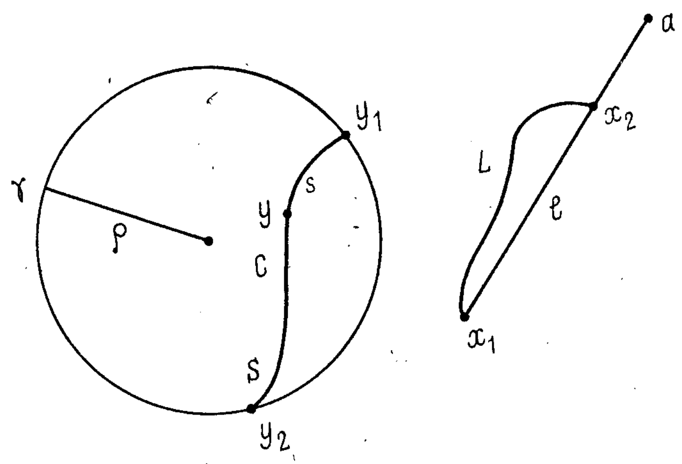

Рис. 1

(8.5) $\arg L \leqslant \frac{3}{2}\pi c_{12}$. Это означает, что, заменяя сегменты $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{x_3 x_4}$, ... соответствующими кривыми L_{12}, L_{34}, ... в плоскости x, получим путь конечной длины, меньший или равный $\frac{3}{2}\pi$ (длина $\overline{x_1\ a}$), на котором будет $\rho \leqslant |y(x)|$, причем сегментам $\overline{x_k x_{k+1}}$, на которых было $|y(x)| < \rho$, теперь соответствуют кривые $L_{k,\ k+1}$, на которых $\rho = |y(x)|$. И, очевидно, внутри области, ограниченной сегментом $\overline{x_k x_{k+1}}$ и кривой $L_{k,k+1}$, нет особых точек функции $y(x)$, так как $x'(y)$ в области, окружающей и включающей y_{k+1}, при достаточно малом x_k' не равна нулю, ибо

$$x'(y) = x_k'[1 + \varepsilon_k(y,\ y_k,\ x_k,\ x_k')],$$

где

$$|\varepsilon_k(y,\ y_k,\ x_k,\ x_k')| < 1/2.$$

Таким образом, общий случай поведения $y(x)$, $y'(x)$ при $x \to a$ сводится без нарушения цели доказательства к случаю $0 < \rho \leqslant |y(x)|$, для которого показано, что $x=a$ может быть только полюсом второго порядка. Доказательство теоремы 7.1 полностью закончено. Но напомним, что доказательство основано на существовании формального полярного разложения решения уравнения (1.2). А по существу основано на существовании действительного разложения (3.1).

В главе V мы дадим совсем другое доказательство теоремы Пенлеве.

§ 9. ДОБАВЛЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ПЕНЛЕВЕ

Теорема Виттиха. *Уравнение*

$$P(w^{(n)},\ w^{(n-1)},\ \ldots,\ w',\ w,\ z) = 0,$$

где P — полином от аргументов с каким-нибудь доминирующим из $w^{(n)}$, $w^{(n-1)}$, ..., w (т. е. степенью выше степеней остальных), не имеет целых трансцендентных (неполиномиальных) решений.

Отсюда следует, что все решения (1.2) имеют бесконечное число полюсов, сгущающихся к $z = \infty$.

Действительно, по теореме Виттиха уравнение (1.2) не имеет целых трансцендентных решений. Нет и рациональных, т. е. нет формальных решений вида (3.1_1).

Если w имеет конечное число полюсов, то $q(z)=Q(z)w(z)$ — целая трансцендентная функция при некотором полиноме $Q(z)$ и удовлетворяет уравнению

$$Q^2q'' - 2q'Q'Q - qQQ'' + 2qQ'^2 = 6q^2Q + zQ^3$$

с доминирующим членом $6q^2Q$, поэтому $q(z)$ целой трансцендентной быть не может по теореме Виттиха [17, с. 118].

В работе Н. П. Еругина [18] решение уравнения (1.2) строится в виде $w = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — целые функции.

Глава IV

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА КОШИ

Теорема 1.1 (Коши). *Дана система*

$$\frac{dy_k}{dz} = f_k(z,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) = \tag{1.1}$$

$$= \sum_{m_0, m_1, \ldots, m_n} a^{(k)}_{m_0 m_1 \ldots m_n} (z - z_0)^{m_0} (y_1 - y_1^0)^{m_1} \ldots (y_n - y_n^0)^{m_n},$$

где ряды сходятся в области

$$|z - z_0| < \rho, \quad |y_k - y_k^0| < r, \quad k = 1,\ \ldots,\ n. \tag{1.2}$$

Существует и притом единственное непрерывное решение такой системы с начальными условиями

$$y_k(z_0) = y_k^0, \quad k = 1,\ \ldots,\ n. \tag{1.3}$$

Это решение будет голоморфным в окрестности точки z_0, *т. е. представимо рядами*

$$y_k = y_k^0 + \sum_{s=1}^{\infty} C_s^{(k)}(z_0,\ y^0)(z - z_0)^s, \quad k = 1,\ \ldots,\ n, \tag{1.4}$$

$$y^0 = (y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0),$$

сходящимися в области

$$|z - z_0| \leqslant \rho_1 < \rho, \quad \rho_1 = \rho'\left(1 - e^{\frac{-r'}{(n+1)\rho' M}}\right), \tag{1.5}$$

где $0 < r' < r$, $0 < \rho' < \rho$, *а* M *определено условиями*

$$\sum_{m_0, m_1, \ldots, m_n} |a^{(k)}_{m_0 m_1 \ldots m_n}| \rho'^{m_0} r'^{m_1 + \ldots + m_n} \leqslant M, \quad k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Замечание 1.1. Рассмотрим область

$$|z-z_0|<\frac{\rho}{2}, \quad |y_k-y_k^0|<\frac{r}{2}$$

и точку $(\bar{z}_0, \bar{y}_k^0)$ из этой области. Тогда решение с начальными условиями $y_k(\bar{z}_0)=\bar{y}_k^0$ представимо в виде рядов (1.4), сходящихся по крайней мере в области $|z-\bar{z}_0|\leqslant \rho_1/2$, не зависящей от выбора точки $(\bar{z}_0, \bar{y}_k^0)$.

Непрерывная зависимость решений от параметров. Пусть дана система

$$\begin{gathered}
\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $f_1, \ldots, f_n$ определены относительно $x, y_1, \ldots, y_n$ в области

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y_k-y_k^0|\leqslant b, \quad k=1, \ldots, n \tag{1.7}$$

и относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области

$$0\leqslant \lambda_k\leqslant \lambda_k^{(1)}, \quad k=1, \ldots, m$$

или

$$|\lambda_k|\leqslant \lambda_k^{(1)}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Предположим, что $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ непрерывны относительно $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в области (1.7) и (1.8) и, следовательно, ограничены:*

$$|f_k(x, y, \lambda)|\leqslant M, \tag{1.9}$$

где (x, y) — точка из области (1.7) и λ из области (1.8), а M — постоянная, не зависящая от x, y и λ, f_k, $k=1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям Липшица в области (1.7) относительно $y_1, \ldots, y_n$:

$$|f_k(x, \bar{y}, \lambda)-f_k(x, \bar{\bar{y}}, \lambda)|\leqslant L\sum_{k=1}^{n}|\bar{y}_k-\bar{\bar{y}}_k| \tag{1.10}$$

и L — постоянная, не зависящая от x, y и λ. Тогда система (1.6) имеет единственное решение

$$y_k=y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \quad k=1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и это решение определено и непрерывно дифференцируемо как функция от x в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \quad h = \min(a,\ b/M). \tag{1.12}$$

Относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ решение (1.11) равномерно непрерывно в интервале (1.8), т. е. имеем

$$|y_k(x,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m) - y_k(x,\ \bar\lambda_1,\ \ldots,\ \bar\lambda_m)| \leqslant \varepsilon,\ k = 1,\ \ldots,\ n$$

при $|\lambda_k - \bar\lambda_k| < \delta$, где по ε найдется δ.

Замечание 1.2. Если правые части уравнений (1.6) голоморфны в области (1.7), (1.8), т. е. представимы в виде [1])

$$f = \Sigma f_{klm}(x - x_0)^k (y - y_0)^l \lambda^m, \tag{1.13}$$

то и решение голоморфно в окрестности x_0 в области $|x - x_0| < h < a$ и в области $|\lambda_k| < \rho_k < \lambda_k^{(1)}$ относительно λ, т. е.

$$y_\nu = \sum_{k \geqslant 1, \mu \geqslant 0} a_{k\mu}^{(\nu)} (x - x_0)^k \lambda^\mu + y_\nu^0, \tag{1.14}$$

$$a_{k\mu} = a_{k\mu}(x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0).$$

Это следует из равномерной сходимости рядов Пикара для y.

Пусть дана система

$$\frac{dw_\nu}{dz} = F_\nu(z,\ w_1,\ w_2,\ \lambda) = \sum_{k, l, m=0} F_{klm}^{(\nu)}(z)\, w_1^k w_2^l \lambda^m,\quad \nu = 1,\ 2, \tag{1.15}$$

где ряды сходятся абсолютно и равномерно в области

$$a \leqslant z \leqslant b, \quad |w_k| \leqslant A_k, \quad |\lambda| \leqslant R \tag{1.16}$$

и $F_{klm}(z)$ — непрерывные функции в промежутке $a \leqslant z \leqslant b$. Например, это будет, если F_ν голоморфны в области

$$|z| \leqslant b, \quad |w_k| \leqslant A_k, \quad |\lambda| \leqslant R. \tag{1.17}$$

В этом случае все величины можно считать комплексными.

Теорема 1.3 (Пуанкаре — Ляпунова). *Предположим, что система*

$$\frac{du_0^{(\nu)}}{dz} = F_\nu(z,\ u_0^{(1)},\ u_0^{(2)},\ 0), \quad \nu = 1,\ 2, \tag{1.18}$$

---

[1]) $(y - y_0)^l = (y_1 - y_1^0)^{l_1} \ldots (y_n - y_n^0)^{l_n}$, $\lambda^\mu = \lambda_1^{\mu_1} \ldots \lambda_m^{\mu_m}$.

имеет решение

$$u_0^{(\nu)} = u_0^{(\nu)}(z), \tag{1.19}$$

определенное в промежутке

$$z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \subset (a, b), \tag{1.20}$$

и при таких z

$$|u_0^{(\nu)}(z)| < A_\nu. \tag{1.21}$$

Тогда система (1.15) при достаточно малых $|\lambda|$ *имеет решение*

$$w_1 = w_1(z, \lambda), \quad w_2 = w_2(z, \lambda), \tag{1.22}$$

определенное в промежутке (1.20), удовлетворяющее начальным условиям

$$w_\nu(z_0) = u_0^{(\nu)}(z_0), \quad \nu = 1, 2, \tag{1.23}$$

и представимое в виде рядов

$$w_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(\nu)}(z)\lambda^k, \quad u_k^{(\nu)}(z_0) = 0, \ k \geqslant 1, \ \nu = 1, 2, \tag{1.24}$$

сходящихся в области

$$z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad |\lambda| \leqslant r < R$$

при достаточно малом r*, именно в области, определенной неравенством*

$$4\rho\lambda e^{\frac{2M(z-z_0)}{\rho}} < (\rho + \lambda)^2. \tag{1.25}$$

Здесь M *— постоянная, зависящая от выбора промежутка* $(z_0, z_1) \subset (a, b)$*, а* ρ *такое положительное постоянное, что ряды (1.15) сходятся не только при* $|w_k| \leqslant A_k$*, но и при* $|w_k| \leqslant A_k + \rho$*, когда* $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$*. При фиксированном* ρ *и достаточно малом* $|\lambda|$ *(1.25) выполнено.*

Замечание 1.3. Если $u_0^{(\nu)}(z) \equiv 0$ и $F_{klm}^{(\nu)}(z)$ непрерывны в области $|z| < \infty$, а ряды (1.15) равномерно сходятся в области $|z| \leqslant b$ при любом $b > 0$, то M можно взять из условия

$$\sum_{m,n \geqslant 0,\ p \geqslant 1} |F_{mnp}^{(\nu)}(z)|\, \rho^{m+n+p} \leqslant M \tag{1.26}$$

при $|z - z_0| \leqslant b$, $|\rho| < A_k$, $|\rho| < R$ и ряды (1.24), следовательно, сходятся в любой области $|z| \leqslant b$ при условии (1.25) относительно λ. Если правые части уравнений (1.15) голоморфны в области $|z - z_0| \leqslant N$, то и решения (1.24) будут голоморфными в области $|z - z_0| < r < N$. Решение (1.24) в этих случаях принимает вид

$$w_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(\nu)}(z)\lambda^k, \quad \nu = 1,\ 2, \quad u_k^{(\nu)}(z_0) = 0 \tag{1.27}$$

или

$$w_\nu = \sum_{m,n\geqslant 1} w_{mn}^{(\nu)}(z - z_0)^m \lambda^n, \quad w_{mn}^{(\nu)} = w_{mn}^{(\nu)}(z_0), \tag{1.28}$$

а $|\lambda|$ удовлетворяет условию (1.25).

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{dx} = M(x,\ \zeta,\ z)\zeta^m, \quad \frac{d\zeta}{dx} = N(x,\ \zeta,\ z)\zeta^n, \tag{2.1}$$

где m, n — целые положительные числа и $M(x,\ \zeta,\ z)$, $N(x,\ \zeta,\ z)$ — функции, голоморфные в области

$$|x - x_0| < 2r, \quad |z - z_0| < 2r, \quad |\zeta| < 2\delta, \tag{2.2}$$

причем как угодно большому r соответствует достаточное малое δ. Отсюда следует, что в этой области при любом r и достаточно малом δ имеем

$$|M(x,\ \zeta,\ z)| \leqslant A, \quad |N(x,\ \zeta,\ z)| \leqslant A, \tag{2.3}$$

где A — постоянное положительное число.

Теорема 2.1. *Пусть при всяком r найдется такое δ, что будем иметь (2.3) для фиксированного A в области (2.2). Решение системы (2.1), обладающее свойством*

$$z_1,\ z_2,\ \ldots \to z_0, \quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots \to 0, \tag{2.4}$$

когда $x_1,\ x_2, \ldots \to x_0$, для всех достаточно больших значений ν представимо в виде рядов

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_\nu + \sum_{k\geqslant 1} A_k(\zeta_\nu,\ z_\nu,\ x_\nu)(x - x_\nu)^k, \\ z &= z_\nu + \sum_{k\geqslant 1} B_k(\zeta_\nu,\ z_\nu,\ x_\nu)(x - x_\nu)^k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

сходящихся в области

$$|x - x_0| \leqslant R_\nu,$$

где R_ν — как угодно большое число при достаточно малом ζ_ν или большом ν.

Введем новые переменные:

$$x - x_\nu = t, \quad z - z_\nu = \xi, \quad \zeta - \zeta_\nu = \eta. \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.1) получим

$$\frac{d\xi}{dt} = M(t + x_\nu,\ \eta + \zeta_\nu,\ \xi + z_\nu)(\eta + \zeta_\nu)^m,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = N(t + x_\nu,\ \eta + \zeta_\nu,\ \xi + z_\nu)(\eta + \zeta_\nu)^n. \tag{2.7}$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(x_\nu,\ z_\nu,\ \xi,\ \eta,\ t)\,\zeta_\nu^k = \overline{M},$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(x_\nu,\ z_\nu,\ \xi,\ \eta,\ t)\,\zeta_\nu^k = \overline{N}. \tag{2.8}$$

Здесь, очевидно, $M_0(x_\nu,\ z_\nu,\ \xi,\ 0,\ t) = N_0(x_\nu,\ z_\nu,\ \xi,\ 0,\ t) = 0$. Система (2.8) при $\zeta_\nu = 0$ имеет решение

$$\xi \equiv 0, \quad \eta \equiv 0. \tag{2.9}$$

Согласно предположению (2.3), правые части (2.8) (или (2.7)) не превосходят величины $A(2\delta)^p$, $p \leqslant m$, $p \leqslant n$, когда [1]

$$|x_0 - x_\nu| < r, \quad |z_0 - z_\nu| < r_1, \quad |\zeta_\nu| < \delta, \tag{2.10}$$
$$|t| < r, \quad |\xi| < r_1, \quad |\eta| < \delta$$

и δ достаточно мало.

По теореме Пуанкаре — Ляпунова система (2.8) при достаточно малых $|\zeta_\nu|$ имеет решение

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x_\nu,\ z_\nu,\ t)\,\zeta_\nu^k,$$
$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(x_\nu,\ z_\nu,\ t)\,\zeta_\nu^k, \tag{2.11}$$

где $\xi_k(x_\nu,\ z_\nu,\ t)$, $\eta_k(x_\nu,\ z_\nu,\ t)$ — функции, голоморфные в области $|t| \leqslant r$ и обращаются в нуль при $t = 0$, а ряды (2.11) сходятся абсолютно и равномерно в области $|t| \leqslant r$ при как угодно большом r и достаточно малом $|\zeta_\nu|$ именно при условии

$$4\delta|\zeta_\nu|\, e^{\frac{2A(2\delta)^p}{\delta}(x - x_\nu)} < (\delta + \zeta_\nu)^2,$$

---

[1] Так как при (2.10) $|t + x_\nu - x_0| < |t| + |x_\nu - x_0| < r + r = 2r$, $|\zeta| \leqslant \leqslant |\zeta_\nu| + |\eta| < 2\delta$, $|z_\nu + \xi - z_0| < |\xi| + |z_\nu - z_0| < 2r_1$, т. е. имеем (2.2)

которое выполняется при достаточно малом $|\zeta_\nu|$. Здесь δ — такая постоянная, что правые части уравнений (2.8) $\overline{M}$, $\overline{N}$ представимы абсолютно сходящимися рядами

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \Sigma \overline{M}_{klm}(x_\nu, z_\nu, t)\,\xi^k\eta^l\zeta_\nu^m, \\ \overline{N} &= \Sigma \overline{N}_{klm}(x_\nu, z_\nu, t)\,\xi^k\eta^l\zeta_\nu^m \end{aligned} \tag{2.12}$$

в области

$$|x_0 - x_\nu| \leqslant r, \quad |\xi| \leqslant \delta, \quad |\eta| \leqslant \delta, \quad |\zeta_\nu| \leqslant \delta. \tag{2.13}$$

Из (2.11) и следует, что система (2.1) имеет решение вида (2.5).

Теорема 2.2. *Пусть дана система*

$$\dot{x} = P(x, y, t), \qquad \dot{y} = Q(x, y, t),$$

где $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$ — функции, голоморфные в любой точке области $|x| + |y| < \infty$, $|t_0 - t| < r$.

Если t_0 — особая точка решения $x(t)$, $y(t)$, то при $t \to t_0$ имеем $|x| + |y| \to \infty$ и $|x(t_k)| + |y(t_k)| \to \infty$ при $t_1, t_2, \ldots \to t_0$.

Доказательство следует из леммы 2.1 главы III.

Глава V

ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ СИСТЕМЫ

§ 1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z), \tag{1.1}$$

где P и Q — аналитические однозначные функции, обладающие свойствами:

$$\begin{gathered} P_1(x, \zeta, z) = \zeta^{m_1} P(x, \zeta^{-1}, z), \quad P_1(x, 0, z) = \text{const} \neq 0, \\ Q_1(x, \zeta, z) = \zeta^{n_1} Q(x, \zeta^{-1}, z); \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} P_2(\eta, y, z) = \eta^{m_2} P(\eta^{-1}, y, z), \\ Q_2(\eta, y, z) = \eta^{n_2} Q(\eta^{-1}, y, z), \quad Q_2(0, y, z) = \text{const} \neq 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если $y = \zeta^{-1}$, то имеем

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P_1(x, \zeta, z)}{\zeta^{m_1}}, \quad \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{Q_1(x, \zeta, z)}{\zeta^{n_1 - 2}}, \tag{1.4}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\zeta^{m_1}}{P_1(x, \zeta, z)}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{Q_1(x, \zeta, z)}{P_1(x, \zeta, z)} \zeta^{m_1 - n_1 + 2}.$$

Здесь m_i и n_i—целые или нули. Пусть еще

$$m_1 > 0, \quad m_1 - n_1 + 2 > 0, \quad Q_1(x, 0, z) \text{ ограничена при конечных } x \text{ и } z, \tag{1.5}$$

или

$$\begin{gathered} m_1 > 0, \ Q_1(x, \zeta, z)\zeta^{m_1 - n_1 + 2}|_{\zeta=0} = 0 \text{ при конечных } x \text{ и } z, \\ n_2 > 0, \ n_2 - m_2 + 2 > 0, \ P_2(0, y, z) \text{ ограничена при конечных } y \text{ и } z, \end{gathered} \tag{1.6}$$

или

$n_2>0,\ P_2(\eta,\ y,\ z)\,\eta^{n_2-m_2+2}|_{\eta=0}=0$ при конечных $y,\ z$.

Замечание 1.1. Пусть[1] точка $(\zeta=0,\ x=x_0,\ z=z_0)\in D$ области аналитичности функций $P_1,\ Q_1$. Тогда система (1.4) не имеет решения $\zeta\to 0,\ z\to z_0$ при $x\to x_0$, а имеет решение $\zeta\equiv 0$, $z\equiv z_0$. Нет и такого решения $x(z),\ y(z)$, что на пути $z\to z_0$ имеется последовательность $z_1,\ z_2,\ldots\to z_0$, которой соответствует последовательность $x_1,\ x_2,\ldots\to x_0$ на пути $x\to x_0$ и $y_1,\ y_2,\ldots\to\infty$, т. е. нет пути $z\to z_0$, которому соответствует путь $x\to x_0$, а $y(z)$ не ограничено. Если $m_1=0,\ m_1-n_1+2>0$, то нет[2] решения $\zeta\to 0,\ z\to z_0$ при $x\to x_0$, а есть $\zeta\equiv 0,\ z\to z_0$ при $x\to x_0$.

Замечание 1.2. Согласно (1.14) (глава IV), система (1.4) имеет в окрестности точки $(z_0,\ 0,\ x_0)$ общее решение[3]

$$\zeta=\overset{*}{\zeta}+\sum_{k\geqslant 1,\ n\geqslant 1}\overset{*}{\zeta}{}^k(\overset{*}{z}-z_0)^l(\overset{*}{x}-x_0)^m(x-\overset{*}{x})^n A_{klmn}=\zeta(\overset{*}{\zeta},\ \overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ x),$$

$$z=\overset{*}{z}+\sum_{k\geqslant 1,\ n\geqslant 1}\overset{*}{\zeta}{}^k(\overset{*}{z}-z_0)^l(\overset{*}{x}-x_0)^m(x-\overset{*}{x})^n B_{klmn}=z(\overset{*}{\zeta},\ \overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ x),\tag{1.7}$$

которое можно записать и так (полагая $x-\overset{*}{x}=(x-x_0)-(\overset{*}{x}-x_0)$):

$$\zeta=\overset{*}{\zeta}+\sum_{k\geqslant 1,\ n\geqslant 0}\overset{*}{\zeta}{}^k(\overset{*}{z}-z_0)^l(\overset{*}{x}-x_0)^m(x-x_0)^n\bar{A}_{klmn}=\zeta(\overset{*}{\zeta},\ \overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ x),$$

$$z=\overset{*}{z}+\sum_{k\geqslant 1,\ n\geqslant 0}\overset{*}{\zeta}{}^k(\overset{*}{z}-z_0)^l(\overset{*}{x}-x_0)^m(x-x_0)^n\bar{B}_{klmn}=z(\overset{*}{\zeta},\ \overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ x).\tag{1.8}$$

Здесь, очевидно, $\zeta(\overset{*}{x})=\overset{*}{\zeta},\ z(\overset{*}{x})=\overset{*}{z}$, A и B — постоянные, зависящие только от z_0 и x_0. Ряды (1.7) сходятся относительно переменных $\overset{*}{\zeta},\ \overset{*}{z},\ \overset{*}{x},\ x$ в области

$$|\overset{*}{\zeta}|\leqslant r,\quad |\overset{*}{z}-z_0|\leqslant r,\quad |\overset{*}{x}-x_0|\leqslant r,\quad |x-\overset{*}{x}|\leqslant r.\tag{1.9}$$

Замечание 1.3. Система (1.4) обладает свойствами системы (2.1) (глава IV), поэтому, согласно (2.5) (глава IV), ряды (1.7) сходятся в области

$$|x-\overset{*}{x}|<R,\quad |\overset{*}{\zeta}|<r,\tag{1.10}$$

---

[1] Всюду можно предполагать вместо $P_1(x,\ 0,\ z)=C\neq 0$ просто $P_1(x_0,\ 0,\ z_0)\neq 0$ и соответственно $Q_2(0,\ y_0,\ z_0)\neq 0$.

[2] Так как решение $\zeta\to 0,\ z\to z_0$ при $x\to x_0$ единственное.

[3] Правые части (1.4) представимы по степеням $x-x_0=(x-\overset{*}{x})+(\overset{*}{x}-x_0)$, $z-z_0=(z-\overset{*}{z})+(\overset{*}{z}-z_0)$, $\zeta=(\zeta-\overset{*}{\zeta})+(\overset{*}{\zeta})$, поэтому представимы и по степеням скобок, где вторые скобки—параметры, как λ в (1.14).

где R — как угодно большое, если соответственно r — достаточно малое. Через любую точку (x, ζ, z) области

$$|x-x_0|<R, \quad |\zeta|<r, \quad |z-z_0|<r, \tag{1.11}$$

где r — достаточно малое, проходит одно решение, представимое рядами (1.7), при соответствующих значениях $\overset{*}{x}, \overset{*}{\zeta}, \overset{*}{z}$.

Если в (1.5) $m_1=0$, $m_1-n_1+2>0$, то вместо (1.7) будет

$$\zeta = \overset{*}{\zeta} + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 1} \overset{*}{\zeta}{}^k (\overset{*}{z}-z_0)^l (\overset{*}{x}-x_0)^m (x-\overset{*}{x})^n A_{klmn},$$

$$z = \overset{*}{z} + \sum_{k\geqslant 0,\, n\geqslant 1} \overset{*}{\zeta}{}^k (\overset{*}{z}-z_0)^l (\overset{*}{x}-x_0)^m (x-\overset{*}{x})^n B_{klmn}, \tag{1.12}$$

т. е. в ряде для z имеется свободный член относительно $\overset{*}{\zeta}$ под знаком суммы.

Лемма 1.1. *Предположим, что система (1.1) при условии (1.5) имеет решение $x(z)$, $y(z)$ такое, что на пути $z\to z_0$ имеется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой соответственно имеем последовательности $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to \infty$. Тогда*[1] *и для всякого $\overset{*}{x}$ существует последовательность $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots \to z_0$ (лежащая на некотором пути $z\to z_0$), для которой соответственно имеем $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots \to \overset{*}{x}$ и $\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots \to \infty$* Таким образом, точка z_0 в этом случае будет особой типа существенной (для $x(z)$).

Доказательство. Заменяя $y=\zeta^{-1}$, получим $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, и функции $z(x)$, $\zeta(x)$ удовлетворяют системе (1.4). Для всех достаточно больших ν рассматриваемое решение вблизи точек $(z_\nu, \zeta_\nu, x_\nu)$ можно представить, согласно (1.8), в виде

$$\zeta = \zeta_\nu + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_\nu^k (z_\nu - z_0)^l (x_\nu - x_0)^m (x-x_0)^n \times$$
$$\times \overline{A}_{klmn}(z_0, x_0) = \zeta(\zeta_\nu, z_\nu, x_\nu, x),$$
$$z = z_\nu + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_\nu^k (z_\nu - z_0)^l (x_\nu - x_0)^m (x-x_0)^n \times \tag{1.13}$$
$$\times \overline{B}_{klmn}(z_0, x_0) = z(\zeta_\nu, z_\nu, x_\nu, x).$$

Эти ряды сходятся в области $|x-x_0|<r$ при всех $\nu\geqslant N$. Взяв из этой области $x=\overset{*}{x}$, получим

[1] Если вместо $P_1(x, 0, z)=C\neq 0$ предположено $P_1(x_0, 0, z_0)\neq 0$, то здесь $\overset{*}{x}$ — произвольное, но такое, что $P_1(\overset{*}{x}, 0, z_0)\neq 0$.

$$\overset{*}{\zeta}_\nu=\zeta_\nu+\sum_{k\geqslant 1}\zeta_\nu^k(z_\nu-z_0)^l(x_\nu-x_0)^m(\overset{*}{x}-x_0)^n\overline{A}_{klmn},$$

$$\overset{*}{z}_\nu=z_\nu+\sum_{k\geqslant 1}\zeta_\nu^k(z_\nu-z_0)^l(x_\nu-x_0)^m(\overset{*}{x}-x_0)^n\overline{B}_{klmn}.$$

При $z_\nu\to z_0$, $x_\nu\to x_0$ и $\zeta_\nu\to 0$, очевидно, имеем и $\overset{*}{\zeta}_\nu\to 0$, $\overset{*}{z}_\nu\to z_0$. Отсюда видим, что для рассматриваемого решения имеем последовательность $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots\to z_0$ такую, что соответственно $\overset{*}{\zeta}_1, \overset{*}{\zeta}_2, \ldots\to 0$ и $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots\to \overset{*}{x}$ (здесь $\overset{*}{x}_1=\overset{*}{x}_2=\ldots=\overset{*}{x}$, но можно, конечно, выбрать и разные $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots\to\overset{*}{x}$, где $\overset{*}{x}$— любая точка из некоторой окрестности $|x-x_0|<r$). Если принять во внимание, что предельные точки $\overset{*}{x}$ (решения $z(x)$, $\zeta(x)$) составляют замкнутое множество, то лемма будет доказана, так как показано, что множество точек $\overset{*}{x}$ и открытое (т. е. точки $\overset{*}{x}$ заполняют всю плоскость).

Заметим, что здесь $|\overset{*}{\zeta}_\nu-\zeta_\nu|=\left|\sum\limits_{k\geqslant 1}\zeta_\nu^k(z_\nu-z_0)^l(x_\nu-x_0)^m(\overset{*}{x}-x_0)^n\overline{A}_{klmn}\right|\to 0$ и также $|\overset{*}{z}_\nu-z_\nu|\to 0$ при $\zeta_\nu\to 0$. И так как $\zeta_\nu\to 0$, $z_\nu\to z_0$, то $\overset{*}{z}_\nu\to z_0$, причем $\overset{*}{z}_\nu\to z_0$ по некоторому пути $z\to z_0$, так как $z_\nu\to z_0$ по пути $z\to z_0$, а $\overset{*}{z}_\nu$—варьированные z_ν за счет непрерывно варьированных $x_\nu=\overset{*}{x}_\nu$ и $\zeta_\nu=\overset{*}{\zeta}_\nu$ в области сходимости рядов (1.8) и (1.13). Заметим еще, что утверждение леммы следует также и из того, что, как мы отметили, ряды (1.7) сходятся в области $|x-x_0|<R$, где R любое при соответственно достаточно малой $\overset{*}{\zeta}=\zeta_\nu$, стремящейся к нулю при $\nu\to\infty$, т. е. можно при достаточно малой ζ_ν взять любое $x=\overset{*}{x}_\nu\to\overset{*}{x}$ при $\nu\to\infty$, где $\overset{*}{x}$ любое. Соответственно получим $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots\to z_0$, так как при $\overset{*}{\zeta}\to 0$ будет и $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots\to z_0$.

Примечание. Если $m_1=0$ и $m_1-n_1+2>0$, то[1] можно для всякого $\overset{*}{x}$ указать последовательность $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots\to z$ такую, что соответственно $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots\to x$ и $\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots\to\infty$. Это следует из рядов (1.12); $\overset{*}{z}$ есть непрерывная функция от $\overset{*}{x}$ и при $\overset{*}{x}\to x_0$ будет $\overset{*}{z}\to z_0$.

Именно в (1.12) полагаем $\overset{*}{z}=z_\nu$, $\overset{*}{x}=x_\nu$, $\overset{*}{\zeta}=\zeta_\nu$. Тогда при $x=\overset{*}{x}$ и при $x_\nu\to x_0$, $\zeta_\nu\to 0$, $z_\nu\to z_0$ будет $\zeta\to 0$, $z\to\overset{*}{z}$. Здесь снова $\overset{*}{x}_\nu=\overset{*}{x}$, но можно, конечно, брать и $\overset{*}{x}_\nu\to\overset{*}{x}$; точка $\overset{*}{x}$—лю-

[1] Для решения, обладающего свойством $x_1, x_2,\ldots\to x_0$. $y_1, y_2,\ldots\to\infty$ при $z_1, z_2,\ldots\to z_0$.

бая из достаточно малой окрестности x_0, а значит, и вообще любая, ибо множество таких предельных точек есть одновременно замкнутое и открытое множество.

Следствие из лемы 1.1. Если особая точка z_0 решения системы (1.1) при условии (1.5) обладает свойством $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, то при $z \to z_0$ по разным путям $x(z)$ принимает все значения из плоскости x. Но нет пути $z \to z_0$, которому соответствует $x \to \overset{*}{x}$, $y \to \infty$, так как система (1.4) не имеет решения $z \to z_0$, $\zeta \to 0$ при $x \to \overset{*}{x}$.

Теорема 1.1. *Предположим, что для системы* (1.1) *выполнены условия (1.5) (где можно предполагать и $m_1=0$) и функции $z(x)$, $y(x)$ этого решения (т. е. решения уравнений (1.4)) не имеют многозначных особых точек. Тогда для особой точки z_0 решения $x(z)$, $y(z)$ нет такой последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, лежащей на кривой $z \to z_0$, что соответственно будет $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.*

Доказательство. Согласно разложениям (2.5) главы IV, при больших ν точка x_0 окружена областью без особых точек рассматриваемого решения $z(x)$, $\zeta(x)$. Предположим, теорема не верна. Тогда система (1.4) имеет решение, обладающее свойством $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$. Так как решение $z(x)$, $\zeta(x)$ не имеет многозначных особых точек на плоскости x, то при больших ν можно продолжать решение $z(x)$, $\zeta(x)$ через точки $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ по пути $x \to x_0$, и мы получим те же самые $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$.

При больших ν точка x_0 попадает в область сходимости рядов (2.5) главы IV. Согласно замечанию 1.1, нет решения системы (1.1), обладающего свойством $z \to z_0$, $\zeta \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно, пользуясь рядами (2.5) главы IV, мы получим $\zeta(x_0) = \overset{*}{\zeta} \neq 0$ при $k \geqslant N$. Но это противоречит предположению, что есть решение $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *При условии (1.5), если z_0—особая точка решения $x(z)$, $y(z)$, то при $z \to z_0$ $|x(z)|$ не ограничено.*

Доказательство. Согласно вспомогательной теореме 2.2, имеем $|x| + |y| \to \infty$ при $z \to z_0$. Предположим, $|x(z)|$ ограничено. Тогда $|y| \to \infty$ при $z \to z_0$. Следовательно, имеем решение $|y| \to \infty$, $|x(z)| < r$ при $z \to z_0$.

Рассмотрим последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, которой соответствует $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ и $x_1, x_2, \ldots \to x_0$. В этом случае система (1.4) имеет решение $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$, $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$.

Согласно (2.5), это решение в окрестности точек x_k представимо в виде

$$\zeta = \zeta_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^{(k)} (x - x_k)^\nu,$$

$$z = z_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu^{(k)} (x - x_k)^\nu$$

с радиусом сходимости $|x - x_k| \leqslant R_k$, где R_k — как угодно большое при достаточно малом $|\zeta_k|$. Следовательно, при больших k (или малых $|\zeta_k|$) в область сходимости этих рядов попадает вся область значений x и x_0. В окрестности x_0 это решение представимо в виде

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k, \quad z = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (x - x_0)^k$$

и здесь должно быть:

$$\zeta \to 0, \quad z \to z_0 \text{ при } x \to x_0.$$

Но такого решения у системы (1.1) или, вернее, у системы (1.4) нет, а есть $\zeta \equiv 0$, $z \equiv z_0$ при $x \to x_0$, откуда решение $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ получить нельзя.

Отсюда и следует, что $|x(z)| < r$ невозможно. Теорема 1.2 доказана.

Заметим, однако, что решение, обладающее свойством (при условии (1.5)) $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, возможно, если при $z \to z_0$ $|x(z)|$ не ограничено. Но такого решения нет, если функции $z(x)$, $y(x)$ не имеют многозначных особых точек (теорема 1.1). А тогда если z_0 — особая точка решения, то $x \to \infty$ при $z \to z_0$.

Так же доказывается

Теорема 1.3. *При условии (1.6), если z_0 — особая точка решения $x(z)$, $y(z)$, то при $z \to z_0$ $|y(z)|$ не ограничено. Но решение, обладающее свойством $x_1, x_2, \ldots \to \infty$, $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, возможно, если при $z \to z_0$ $|y(z)|$ не ограничено.*

И такого решения нет, если $z(y)$ и $x(y)$ не имеют многозначных особых точек. Но в таком случае если здесь z_0 — особая точка, то $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Отсюда же имеем следующую теорему:

Теорема 1.4. *Если условия (1.5) и (1.6) выполнены и z_0 — особая точка, то при $z \to z_0$ и $|x(z)|$ и $|y(z)|$ не ограничены и при всякой последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ имеем $|x(z_k)| + |y(z_k)| \to \infty$ при $k \to \infty$.*

Но $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и $y_1, y_2, \ldots \to y_0$, $x_1, x_2, \ldots \to \infty$ возможно. Если же соответственно функции $z(x)$, $y(x)$ и $z(y)$, $x(y)$ — однозначные функции, то таких решений нет. И если при условиях (1.5), (1.6) $z(x)$, $\zeta(x)$ и $z(y)$, $\eta(y)$ однозначные функции и z_0 — особая точка, то $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $z \to z_0$ согласно теореме 1.1.

Замечание к теореме 1.2. Система (1.1) не имеет такого решения, что при $z \to z_0$ имеем $\zeta \to 0$, а $x(z)$ — неопределенное и неограниченное[1]), если при малом $|\zeta|$, $z \doteq z_0$, $x \doteq x_0$ — большое (по модулю) из (1.4) имеем $P_1(x, \zeta, z) \doteq C$ — постоянное, не равное нулю, и $Q_1(x, \zeta, z) \doteq x^p A$, A — постоянное, отличное от нуля.

В этом случае из (1.4) имеем

$$\frac{dz}{dx} \doteq \frac{1}{C}\zeta^{m_1}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} \doteq -x^p \zeta^{m_1-n_1+2}\frac{A}{C}, \tag{1.14}$$

$$m_1 > 0, \quad m_1 - n_1 + 2 > 0.$$

Здесь $\zeta(x) \neq 0$, так как решением $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$ является только $\zeta \equiv 0$, $z \equiv z_0$, откуда не получается решение $z = z(x)$, $\zeta = \zeta(x)$. Следовательно, из (1.14) имеем [2]) $C(p+1)\zeta^{n_1-m_1-1} \doteq x^{p+1}A(m_1 - n_1 - 1) + D$, D—постоянное, поэтому при $\zeta \to 0$ x не колеблется. Так же можно рассматривать случай, когда система (1.1) не имеет решения: $x(z) \to \infty$, $y(z)$ неопределенное при $z \to z_0$.

Это имеем, когда выполнены условия (1.3), (1.6) и при $z \doteq z_0$ $\eta = x^{-1}$—малое, $y(z) \doteq y_0$— большое (по модулю), $Q_2(\eta, y, z) \doteq C$—постоянное, отличное от 0, и $P_2(\eta, y, z) = Ay^p$. При $\eta = x^{-1}$ получим

$$\frac{dz}{dy} \doteq \frac{1}{C}\eta^{n_2}, \qquad \frac{d\eta}{dy} \doteq -\frac{A}{C}y^p\eta^{n_2-m_2+2}.$$

Отсюда имеем

$$\eta^{m_2-n_2-1} + By^{p+1} \doteq D\text{—постоянное},$$

$$x^{1+n_2-m_2} + By^{p+1} \doteq D \tag{1.15}$$

и видим, что вблизи $z = z_0$ η и y изменяются монотонно, поэтому указанное решение $\eta \to 0$ и y неопределенное при $z \to z_0$ не существует.

Вообще, система $\dfrac{dx}{dz} = P(x, y, z)$, $\dfrac{dy}{dz} = Q(x, y, z)$ не имеет решения при $z \to z_0$ $y \to \infty$, x неопределенное, если, полагая $y = \zeta^{-1}$, получим при больших (по модулю) x

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\zeta^2\frac{Q(x, \zeta^{-1}, z)}{P(x, \zeta^{-1}, z)} \doteq x^p\zeta^m A, \quad A\text{—постоянное}, \ p>0, \ m>1,$$

[1]) Если x неопределенное и $A_1 \leqslant x \leqslant A_2$, то это невозможно, согласно теореме 1.2, при условии (1.5).

[2]) Или $C(p+1)\ln\zeta = x^{p+1}A + D$, если $m_1 - n_1 + 2 = 1$.

т. е. [1] $\zeta^{1-m}(p+1) \doteq x^{p+1}A(1-m)+B$, так как здесь при $\zeta \to 0$ x не может изменить направление изменения, т. е. при $|\zeta| \to 0$ $|x|$ все время возрастает.

И также если, полагая $x=\eta^{-1}$, получим

$$\frac{d\eta}{dy} = -\eta^2 \frac{P(\eta^{-1},\ y,\ z)}{Q(\eta^{-1},\ y,\ z)} \doteq y^m \eta^p A,$$

то покажем, что нет такого решения, в котором при $z \to z_0$ $x \to \to \infty$, а y не имеет предельного значения.

Рассмотрим для системы

$$\dot{x} = x + y(x^2+y^2), \quad \dot{y} = y - x(x^2+y^2) \tag{1.16}$$

вопрос о существовании решения $y \to \infty$, x — неопределенное в промежутке $-\infty < x < \infty$ при $t \to t_0$ или $t \to \infty$. Полагая $y = \zeta^{-1}$, получим

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\zeta^3[\zeta - x(x^2\zeta^2+1)]}{\zeta^3 x + x^2\zeta^2 + 1}.$$

При сделанных предположениях отсюда имеем при малых $|\zeta|$ и некоторых произвольных x

$$\frac{d\zeta}{dx} \doteq \frac{\zeta^3 x(x^2\zeta^2+1)}{x^2\zeta^2+1} = \zeta^3 x, \quad -\zeta^{-2} \doteq x^2 - A, \quad A\text{—постоянное.}$$

Следовательно, $x^2+y^2 \doteq A$. Отсюда видим, что случай $y \to \infty$ и x — неопределенное, колеблющееся быть не может. Полагая $u = x^2+y^2$, из (1.16) получим $\dot{u} = 2u$ и интеграл уравнений (1.16):

$$u = x^2 + y^2 = Ce^{2t}. \tag{1.17}$$

Мы могли бы рассуждать и так. Из (1.16) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x(x^2+y^2)}{x + y(x^2+y^2)} \tag{1.18}$$

и при y, намного превосходящем x: $\dfrac{dy}{dx} \doteq \dfrac{y - xy^2}{y^3} = \dfrac{1-xy}{y^2} \doteq -\dfrac{x}{y}$,

откуда $y^2+x^2=A$, что совпадает с прежним результатом, из которого видим, что решение $y \to \infty$ с колеблющимся x не су-

[1] Если $m=1$, то $\ln|\zeta|(p+1) \doteq x^{p+1}A+B$.

ществует. Но, рассматривая уравнение (1.18), мы исключили динамическую картину, т. е. исключили t, которая доставляется интегралом (1.17) или (1.20) в примере (1.16).

Пример [19]:

$$\dot{x} = [y(x^2 + y^2) + x](x^2 + y^2),$$
$$\dot{y} = [-x(x^2 + y^2) + y](x^2 + y^2). \tag{1.19}$$

Здесь общее решение

$$x = (C - 2t)^{-1/2} \cos\left[C_1 - \frac{1}{2(C - 2t)}\right],$$

$$y = (C - 2t)^{-1/2} \sin\left[C_1 - \frac{1}{2(C - 2t)}\right],$$

$t = C/2$—особая подвижная точка типа существенной и утверждения теорем 1.2,1.3 и 1.4 выполнены.

Здесь, как видим, нет $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $t \to t_0$, но есть x_1, x_2, $\ldots \to \infty$, y_1, y_2, $\ldots \to \infty$ при t_1, t_2, $\ldots \to t_0$. Есть и x_1, x_2, $\ldots \to \infty$, y_1, y_2, $\ldots \to y_0$, а также y_1, y_2, $\ldots \to \infty$ и x_1, x_2, $\ldots \to x_0$ при t_1, t_2, $\ldots \to t_0$.

Если в уравнениях (1.19) введем новую независимую переменную:

$$d\tau = (x^2 + y^2)\,dt = \frac{dt}{C - 2t}, \quad \tau = -\frac{1}{2}\ln(C - 2t),$$

$$C - 2t = e^{-2\tau}, \quad x^2 + y^2 = e^{2\tau},$$

то получим уравнения (1.16), для которых условия (1.6), (1.5) выполнены. Общее решение этих уравнений получим в виде

$$x = e^{\tau + C} \cos\left[C_1 - \frac{1}{2} e^{2(\tau + C)}\right],$$
$$y = e^{\tau + C} \sin\left[C_1 - \frac{1}{2} e^{2(\tau + C)}\right], \tag{1.20}$$

откуда видим, что на конечном расстоянии решения этой системы не имеют особых точек, в том числе, следовательно, и подвижных.

По-видимому, для широкого класса уравнений можно ввести новую переменную $d\tau = \psi(t)\,dt$, так что подвижным особым точкам будет соответствовать $\tau = \infty$ и на конечном расстоянии особых точек не будет. Но это невозможно, например, для систем, которые встречаются в проблеме Римана, где имеем три класса подвижных особых точек с точками сгущения $t=0$, $t=1$ и $t=\infty$.

Нерешенные задачи. Мы отметили те случаи, когда система

$$\frac{dx}{dz}=P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz}=Q(x, y, z)$$

не имеет таких решений, что при $z \to z_0$ имеем $y \to \infty$, а $x=x(z)$ неопределенное.

Но когда же имеются такие решения и как их строить? Мы не указали таких уравнений, когда существует решение, обладающее свойством, указанным в лемме 1.1: существует последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ на пути $z \to z_0$, для которой будет $x_n \to x_0$, $y_n \to \infty$. Как отмечено в лемме 1.1, в этом случае z_0 будет существенно особой точкой для $x=x(z)$. И если есть такое решение, то как его можно построить? Когда существует решение $x=x(z)$, $y=y(z)$ с существенно особой подвижной точкой для $x=x(z)$ и $y=y(z)$? И как такое решение можно построить? Примером такой системы является система (1.19) (см. [20, 21]).

§ 2. РЕШЕНИЕ $y(z) \to \infty$, $x(z) \to \infty$ ПРИ $z \to z_0$

Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет условию (А), если при всяком конечном [1] z

$$P(x, y, z) \text{ становится неопределенным,} \tag{2.1}$$

или

$$Q(x, y, z) \text{ становится неопределенным,} \tag{2.2}$$

или

$$P(x, y, z)=\infty \tag{2.3}$$

и

$$Q(x, y, z)=\infty \tag{2.4}$$

только в изолированных конечных точках (x, y).

Заметим, что нерегулярность P и Q типа (2.1) — (2.4) за счет (x, y) возможна независимо от z или в зависимости от z. Например, если

$$P(x, y, z)=\frac{x+y^2}{1-y}, \quad Q(x, y, z)=\frac{z+x^2}{y-x},$$

[1] Исключая особые точки z функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, которые мы предполагаем, как и в (1.1), аналитическими однозначными.

то $P=Q=\infty$ при $x=y=1$. Здесь

$$P_1(x,\ \zeta,\ z)=\frac{x\zeta^2+1}{\zeta-1}\zeta^{-1}\zeta^{m_1},\ \ m_1=1,$$

$$Q_1(x,\ \zeta,\ z)=\frac{z+x^2}{1-x\zeta}\zeta\zeta^{n_1},\ \ n_1=-1,\ \ m_1-n_1+2=4,$$

$$P_1|_{\zeta=0}=-1,\ \ Q_1|_{\zeta=0}=z+x^2.$$

Если $P(x,\ y,\ z)=\dfrac{x+y^2}{z-y}$, $Q=\dfrac{z+x^2}{y-x}$, то $P=Q=\infty$ при $y=z$, $x=z$.

Предположим, что в точке $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ функции $P(x,\ y,\ z)$ и $Q(x,\ y,\ z)$ регулярные. Тогда решение

$$x=x(z,\ x_1,\ y_1,\ z_1),\quad y=y(z,\ x_1,\ y_1,\ z_1) \tag{2.5}$$

с начальными условиями $x\to x_1$, $y\to y_1$ при $z\to z_1$ будет голоморфным в окрестности точки z_1. Пусть $z=z_0$ такая точка, что существует последовательность $z_1,\ z_2,\ \ldots\to z_0$, для которой соответственно решение (2.5) принимает значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\to x_0,\quad y_1,\ y_2,\ \ldots\to y_0 \tag{2.6}$$

и в окрестности точек $(x_k,\ y_k,\ z_k)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, и $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ функции $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ голоморфны.

Построим для окрестностей точек $z_k\,(k\geqslant N)$ ряды

$$x=x(z-z_k),\quad y=y(z-z_k) \tag{2.7}$$

с радиусами сходимости $r_k\geqslant r>0$, представляющими решение (2.5). При z_k, достаточно близких к z_0, точка z_0 попадает в область сходимости рядов (2.7) и, следовательно, на всех листах Римана, на которых z_k лежит достаточно близко к z_0, точка z_0 не будет особой. Предположим, что последовательность $z_1,\ z_2,\ \ldots\to z_0$ не лежит на кривой, окружающей особую многозначную точку (т. е. последовательность $z_1,\ z_2,\ \ldots\to z_0$ расположена на одном листе [1] Римана). Тогда при условии (2.6) z_0 не является особой точкой. Если известно, что рассматриваемое решение (2.7) не имеет многозначных особых точек, то при условии (2.6) точка z_0 вообще не может быть особой.

Будем теперь предполагать, что z_0 расположена на замкнутом контуре L, окружающем z_1 и не содержащем внутри себя особых точек решения (2.7). Например, z_0 лежит на круге сходимости L рядов (2.7).

[1] Т. е., грубо говоря, (2.7) при всех k одна и та же функция, именно (2.5).

Пусть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ лежит на кривой, расположенной внутри контура L и соединяющей точки z_1 и z_0. Тогда при условиях (2.6) z_0 не является особой точкой решения (2.7). Следовательно, справедлива

Теорема 2.1. *Если имеем последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ внутри контура L, для которой $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ и в точке (x_0, y_0, z_0) $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ регулярные, то z_0 не является особой точкой решения (2.7) на том листе Римана, на котором расположена область, ограниченная контуром L (на котором находится точка z_0) и содержащая точку z_1.*

Пример. Для уравнения $dy/dz = -z^{-1}y^2$ решением будет

$$y = \frac{1}{\ln z/z_0 - 2\pi i}, \quad y\Big|_{z=z_0} = -\frac{1}{2\pi i}, \quad y\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{\ln z_1/z_0 - 2\pi i},$$

где z_1 расположена на том же листе Римана, что и z_0. Для этого решения z_0 не будет особой точкой на исходном листе Римана, на котором расположено и z_1. Но на первом верхнем листе Римана, т. е. после положительного обхода точки $z = 0$, точка z_0 уже будет особой, именно полюсом, так как на этом листе Римана $\ln z_0/z_0 = 2\pi i$ и нет $y(z_1), y(z_2), \ldots \to y_0$ при $z_1, z_2, \ldots \ldots \to z_0$, а есть $y(z_1), y(z_2), \ldots \to \infty$.

Предположим теперь, что в точке (x_0, y_0, z_0) имеем одно из нарушений регулярности функций P и Q типа (2.1)—(2.4), точка z_0 лежит на контуре L и при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ имеем $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to y_0$. Будет ли z_0 особой точкой решения и возможно ли $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to z_0$? По-видимому, z_0 может быть особой, а может и не быть. Возможно $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to z_0$, а может этого и не быть[1]: согласно теореме 1.1, при условии (1.5) и если $z(x)$, $y(x)$ — однозначные функции, нет $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.

Следовательно, если $z(x)$, $y(x)$ — однозначные функции и есть $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которых $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, то обязательно $x \to \infty$ при $z \to z_0$. Но в таком случае, каким еще свойством обладает $y(z)$ при $z \to z_0$? Или $y(z) \to \infty$, или наряду с $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ будет $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ такая, что $y_1, y_2, \ldots \to y_0$, т. е. для $y(z)$ точка z_0 будет типа существенной. По-видимому, возможно и то, и другое. Но если, кроме того, $z(y)$, $x(y)$ — однозначные функции и выполнено условие (1.6), то нет $x \to \infty$, $y \to y_0$ или $y_1, y_2, \ldots \to y_0$, есть только $y \to \infty$ и $x \to \infty$ при $z \to z_0$ (при условии (1.5)). Доказаны

Теорема 2.2. *Предположим, что для системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (А) и функции $z(x)$, $y(x)$, а также $z(y)$, $x(y)$ решения (2.5) однозначные. Тогда*

[1] Если в точке (x_0, y_0, z_0) имеем или только (2.3) (без (2.4)), или только (2.4) (без (2.3)), то имеем ли $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to z_0$, легко выяснить, принимая за независимую переменную соответственно x или y.

если z_0 — особая точка решения (2.5) на контуре L, то при $z \to z_0$ имеем либо $x(z) \to \infty$, $y(z) \to \infty$, либо $x(z) \to x_0$, $y(z) \to y_0$, где x_0, y_0 такие, что в точке (x_0, y_0, z_0) нарушена регулярность P или Q, т. е. имеем одно из условий (2.1)—(2.4).

Теорема 2.3. *Если выполнены условия теоремы 2.2 и нет нарушения регулярности функций P и Q типа (2.1)—(2.4), то $x(z) \to \infty$, $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, если z_0 — особая точка на контуре L.*

Замечание к теоремам 2.2 и 2.3. Теоремы 2.2 и 2.3 высказаны при условии однозначности функций $z(x)$, $y(x)$, $z(y)$ и $x(y)$. Далее мы укажем системы, для которых однозначности этих функций требовать не будем, теорема 2.3 будет справедлива лишь при условии (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6).

§ 3. ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ $x \to \infty$, $y \to y_0$ И $x \to x_0$, $y \to \infty$ ПРИ $z \to z_0$

Будем теперь рассматривать решение (2.5), для которого точка z_0, лежащая на круге сходимости L, является особой типа существенной, т. е. такая, что при $z \to z_0$ или $x(z)$, или $y(z)$ не имеет предела. Пусть $z \to z_0$ по кривой l, расположенной внутри области G с границей L. Если при $z \to z_0$ по кривой l или $x(z)$, или $y(z)$ не имеет предела, то либо существует на кривой l последовательность

$$z_1, \; z_2, \; \ldots \to z_0, \tag{3.1}$$

которой соответствуют последовательности $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$, содержащиеся в области

$$|x| \leqslant R, \quad |y| \leqslant R, \tag{3.2}$$

где R — положительное число, либо такого R нет. Если имеем (3.2), то существует и такая последовательность (3.1), которой соответствуют последовательности

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \to x_0, \quad y_1, \; y_2, \; \ldots \to y_0, \tag{3.3}$$

где x_0, y_0 конечные. Если нет (3.2), то существует последовательность (3.1) такая, что либо

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \to x_0, \quad y_1, \; y_2, \; \ldots \to \infty, \tag{3.4}$$

либо

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \to \infty, \quad y_1, \; y_2, \; \ldots \to y_0, \tag{3.5}$$

либо

$$x_1, \; x_2, \; \ldots \to \infty, \quad y_1, \; y_2, \; \ldots \to \infty. \tag{3.6}$$

Если имеем (3.3) и в точке (x_0, y_0, z_0) функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ не имеют особенности, например, если P и Q — полиномы[1]), то z_0 не будет вообще особой точкой на исходном листе Римана согласно теореме 2.1.

Когда обе функции $x(z)$, $y(z)$ не ограничены на пути l и нет (3.3), то всегда возможно указать такую последовательность (3.1), которой соответствует (3.6). Действительно, если нет такой окрестности точки z_0, в которой при всех $z \to z_0$ по кривой l имели бы (3.2), то найдется такое z_1, как угодно близкое к z_0, что соответственно будет $|x_1| \geqslant R$ и $|y_1| \geqslant R$. Это доказывается так.

Возьмем на плоскостях x, y круги радиуса R с центром в начале координат и на кривой l, по которой $z \to z_0$, последовательность дуг l_1, l_2, ..., которым соответствуют значения $|x| \leqslant R$. Если каждому из отрезков l_1, l_2, ... соответствует хотя бы одно значение $|y| < R$, то имеем (3.3). Если же отрезкам l_k, l_{k+1}, ... соответствует только $|y| > R$, то найдется z_1, как угодно близкое к z_0, которому соответствуют $|x_1| = R$, $|y_1| > R$. Это z_1, например, лежит на концах дуг l_k, l_{k+1}, ... Взяв последовательность неограниченно возрастающих значений R, мы и получим (3.6), если нет — (3.3).

Если $x(z)$ ограничено при $z \to z_0$, то либо найдется такая последовательность (3.1), что имеем (3.3) и z_0 не будет особой точкой, либо $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$. Аналогичное рассуждение можно провести, предполагая ограниченность $y(z)$ на пути $z \to z_0$. Если для всякой последовательности (3.1) с фиксированным y_0 имеем только (3.5), то z_0 будет особой точкой такого рода, что при $z \to z_0$ функция $y(z)$ остается в ограниченной части плоскости, а $x(z) \to \infty$ [22]. Если для всякой последовательности (3.1) имеем только (3.4), то при $z \to z_0$ функция $x(z)$ остается в ограниченной части плоскости, а $y(z) \to \infty$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению. Если z_0 — особая точка типа существенной для решения $x(z)$, $y(z)$, то мы имеем один из трех случаев.

a) Для всякой последовательности (3.1) на кривой l имеем либо (3.4), либо (3.5), либо (3.6), и все эти три или два случая для некоторых последовательностей (3.1) осуществляются. И всегда есть (3.6).

b) Для всякой последовательности (3.1) на кривой l имеем только (3.4), тогда при $z \to z_0$ функция $x(z)$ ограничена, а $y(z) \to \infty$.

c) Для всякой последовательности (3.1) на кривой l имеем только (3.5), тогда при $z \to z_0$ функция $y(z)$ ограничена, а $x(z) \to \infty$.

Если покажем, что все эти три случая для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений невозможны, то тем самым покажем, что для всякой особой точки z_0 решения

[1]) Или вообще такие, что P и Q регулярны во всякой конечной точке.

этой системы имеем

$$x \to \infty, \quad y \to \infty \text{ при } z \to z_0. \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что для всякой последовательности (3.1) с фиксированным x_0 имеем (3.4) и, следовательно, вообще $x(z)$ ограничено при $z \to z_0$ по кривой l. При таком предположении для уравнений (1.4) имеем решение, обладающее свойством

$$z_1, z_2, \ldots \to z_0, \quad \zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0, \tag{3.8}$$

когда $x_1, x_2, \ldots \to x_0$.

Так как в рассматриваемом решении функция $x(z)$ ограничена, то при достаточно большом R_ν ряды (2.5) (глава IV) будут сходиться во всей рассматриваемой области изменения x. Отсюда следует, что в рассматриваемой области изменения x функции $z(x)$ и $\zeta(x)$ являются регулярными и тем самым однозначными. А тогда мы получим последовательность (3.8) и в том случае, когда возьмем последовательность x_1, x_2, $\ldots \to x_0$ на кривой $x \to x_0$.

На основании теоремы 1.1 при условиях (1.5) (где можно предполагать и $m_1 = 0$) это невозможно. Этим доказана

Теорема 3.1. *Система (1.1) не имеет такого решения, что для всякой последовательности (3.1) имеем только (3.4), если выполнено условие (1.5), где может быть и $m_1 = 0$.*

Так же докажется

Теорема 3.2. *Система (1.1) не имеет такого решения, что для всякой последовательности (3.1) имеем только (3.4), если выполнено условие (1.6), где может быть и $n_2 = 0$.*

Таким образом, мы доказали невозможность осуществления случаев b) и c), если выполнены условия (1.5) и (1.6).

§ 4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ $x \to \infty$, $y \to \infty$ ПРИ $z \to z_0$

Рассмотрим теперь систему вида

$$\frac{dx}{dz} = y^m, \qquad \frac{dy}{dz} = Q(x, z), \tag{4.1}$$

где m — целое положительное число, а Q — полином с постоянным коэффициентом b при старшей степени x^n. Остальные коэффициенты — целые функции [1] от z. В соответствии с формулами (1.2), (1.3) имеем:

$$P_1(x, \zeta, z) = \zeta^m \zeta^{-m} = 1, \quad Q_1 = \zeta^0 Q(x, z),$$

$$m_1 = m > 0, \quad n_1 = 0, \quad m_1 - n_1 + 2 = m - 0 + 2 = m + 2 > 0;$$

[1] Можно эти коэффициенты считать и нецелыми функциями, но в окрестности рассматриваемой точки z_0 аналитическими.

$$Q_2(\eta,\ z)=\eta^n Q(\eta^{-1},\ x)|_{\eta=0}=b,\ P_2=\eta^0 y^m=y^m,$$
$$n_2=n>0,\quad m_2=0,\quad n_2-m_2+2=n+2>0.$$

Таким образом, условия (1.5) и (1.6) выполнены, поэтому случаи b) и c) невозможны.

Покажем, что и случай a) здесь невозможен. Тогда если z_0 — особая точка решения этой системы, то имеем только (3.7).

В с п о м о г а т е л ь н ы е ф о р м у л ы. Рассматривая $y(z)$ на пути $(z_1,\ z)$ как функцию дуги l, отсчитываемой от точки z_1, можно записать $y=y_1(l)+iy_2(l)$, где $y_1(l)$ и $y_2(l)$ — соответственно вещественная и мнимая части y. Отсюда

$$|y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2}\ \text{и}\ \left|\frac{dy}{dl}\right|=\sqrt{y_1'^2+y_2'^2}. \tag{4.2}$$

Далее

$$\frac{d|y|}{dl}=\frac{y_1y_1'+y_2y_2'}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}=\frac{y_1y_1'+y_2y_2'}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\,\frac{\sqrt{y_1'^2+y_2'^2}}{\sqrt{y_1'^2+y_2'^2}}.$$

Откуда видим, что можно написать

$$\frac{d|y|}{dl}=\cos(y,\ y')\left|\frac{dy}{dl}\right|\ \text{и}\ \frac{d|x|}{dl}=\cos(x,\ x')\left|\frac{dx}{dl}\right|,$$

где $(y,\ y')$ — угол между радиусом-вектором, соответствующим комплексному числу y, и касательной кривой, соответствующей пути $(z_1,\ z)$ в точке y. Соответственно то же значение имеет $(x,\ x')$.

В силу конформности отображения $y=y(z)$ можно так выбрать путь l от z_1 до z, что на всем пути будет $0<\delta_1\leqslant \leqslant|\cos\ (y,\ y')|$. Есть путь $(z_1,\ z_0)$ лежит на вещественной оси, то это выполнено, так как тогда $|\cos\ (y,\ y')|=1$. Это позволяет написать на основании (4.1) и (4.2)

$$\frac{d|y|}{dl}=\delta_1(l)\,|Q(x,\ z)|, \tag{4.3}$$

$$\frac{d|x|}{dl}=\delta_2(l)\,|y^m|, \tag{4.4}$$

где l—длина дуги кривой, по которой $z\to z_0$ до точки z_0, и $0< <\delta<|\delta_1(l)|\leqslant M,\ 0<\delta<|\delta_2(l)|\leqslant M.$

Теперь докажем, что случай a) для системы (4.1) невозможен. Рассмотрим какой-нибудь участок пути $z\to z_0$, на котором $|x|$ большое и возрастает вместе с увеличением l; тогда будем иметь $0<\delta\leqslant\delta_2(l)$. В случае а) это возможно. Если теперь и $\delta_1(l)>0$, то, согласно (4.3), (4.4), и $|y|$ возрастает, а тогда и $|x|$, и $|y|$ возрастают на всем пути $z\to z_0$, так как $|Q(x, z)|$ и $|y|$ не могут обратиться в нуль, после чего и могли бы только изменить знак $\delta_1(l)$ и $\delta_2(l)$. Если же $\delta_2(l)>0$, а $\delta_1(l)<0$, то $|x|$ возрастает, а $|y|$ убывает.

Но так как $|x|$ возрастает, то при $z\to z_0$ величина $|Q(x, z)|$ не обращается в нуль (превалирует первый член в $Q(x, z)$) и, следовательно, $|y|$ не может возрастать и не может обратиться в нуль, ибо не может достигать минимума $|y|=0$ ($\frac{d|y|}{dl}$ не обращается в нуль, ибо $|\delta_1(l)|>\delta>0$). Все это видно из (4.3) и (4.4). Но в таком случае $|y|$ при $z\to z_0$ постоянно убывает и тем самым остается ограниченным. А тогда не может и $|x|\to\infty$, как показано выше при рассмотрении случая с). Если же и $|x|$ ограничен (при возрастании его на пути $z\to z_0$), то мы имели бы случай (3.3) и точка z_0 не была бы особенной. Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Если решение $x(z)$, $y(z)$ системы (4.1) имеет особую точку z_0, то*

$$x(z)\to\infty,\quad y(z)\to\infty \text{ при } z\to z_0. \tag{4.5}$$

Здесь надо бы написать «при $z\to z_0$ вдоль пути l», но решение (4.5) мы всегда получим в окрестности z_0, а не вдоль пути l.

Теперь рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dz}=P(y),\quad \frac{dy}{dz}=Q(x, z), \tag{4.6}$$

где $Q(x, z)$ такое же, как в системе (4.1), а $P(y)$ — полином степени m. Условия (1.5) и (1.6) здесь снова выполнены и случаи b) и с) невозможны.

Покажем, что и случай а) невозможен. Для системы (4.6) соответственно имеем

$$\frac{d|y|}{dl}=\delta_1(l)|Q(x, z)|,\quad \frac{d|x|}{dl}=\delta_2(l)|P(y)|. \tag{4.7}$$

Предположим, что для системы (4.6) возможен случай а). Тогда рассмотрим участок пути $z\to z_0$, на котором $|x|$, $|y|$ достаточно велики. Если теперь и $|x|$, и $|y|$ возрастают, т. е. и $\delta_1(l)>0$, и $\delta_2(l)>0$, то и далее $|x|$, $|y|$ могут только возрастать при $z\to z_0$, так как в $Q(x, z)$ и $P(y)$ будут превалировать старшие члены, т. е. будем иметь $|x|\to\infty$, $|y|\to\infty$ при $z\to z_0$. Пусть теперь $\delta_2(l)>0$, т. е. $|x|$ возрастает, а $\delta_1(l)<0$, т. е. $|y|$ убывает. Если при этом $P(y)$ не обращается в нуль, то $|y|$ будет постоянно убывать, а $|x|$ постоянно возрастать. Но это возвращает нас к случаю с), который невозможен.

Предположим, что

$$P(y) = y^q P_1(y) \tag{4.8}$$

и полином $P_1(0) \neq 0$.

Рассмотрим тот случай, когда при убывании $|y|$ переменная y принимает сначала значение 0 и не принимает до этого значение какого-нибудь корня полинома $P_1(y)$. Такой случай рассматривается в точности так же, как и соответствующий случай системы (4.1). Он невозможен. Если же при убывании $|y|$ переменная y принимает значение какого-нибудь корня $y=y_1$ полинома $P(y)$, то замена переменной $u=y-y_1$ возвращает нас к случаю (4.8). Тем самым мы доказали невозможность осуществления случая а) и для системы (4.6). Следовательно, доказана

Теорема 4.2. *Если z_0 — особая точка решения системы (4.6), то при $z \to z_0$ имеем $x(z) \to \infty$ и $y(z) \to \infty$.*

§ 5. СИСТЕМА (5.1)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dz} = P(y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, z), \tag{5.1}$$

где $P(y, z)$ и $Q(x, z)$ — полиномы соответственно степени m и n относительно y и x с постоянными коэффициентами при старших степенях. Остальные коэффициенты суть целые функции от z. Легко видеть, что и для этой системы условия (1.5) и (1.6) выполнены. Вместо системы (4.7) теперь имеем

$$\frac{d|y|}{dl} = \delta_1(l)\,|Q(x, z)|, \qquad \frac{d|x|}{dl} = \delta_2(l)\,|P(y, z)|. \tag{5.2}$$

Пусть $y_1(z), \ldots, y_m(z)$ суть корни уравнения

$$P(y, z) = 0. \tag{5.3}$$

Все предыдущие рассуждения, проведенные относительно системы (4.6), без изменений переносятся и на систему (5.1). Несколько иное рассуждение надо провести лишь в тот момент, когда мы предполагаем, что $|x|$ и $|y|$ достаточно велики и $|x|$ возрастает, а $|y|$ убывает. Это рассуждение мы и проведем. Заметим прежде всего, что так как z_0 — подвижная особая точка, то мы можем ее считать отличной от известного и конечного или счетного [1] числа тех значений $z=z_k$ ($k=1, 2, \ldots$), при которых среди $y_1(z), \ldots, y_m(z)$ есть совпадающие. А тогда все

[1] Эти точки не могут иметь точку сгущения на конечном расстоянии.

корни $y_1(z), \ldots, y_m(z)$ имеют ограниченную производную [1] в окрестности точки $z=z_0$, т. е.

$$\left|\frac{dy_k(z)}{dz}\right| < M \tag{5.4}$$

при $|z-z_0|<\Delta$, где Δ — достаточно малое положительное число. Заметив это, предположим, что $|y|$, убывая при $z \to z_0$, принимает в какой-нибудь точке $z=\overset{*}{z}$ из области $|z-z_0|<\Delta$ значение корня $y=y_1(\overset{*}{z})$. Тогда в этой точке $P(y(\overset{*}{z}), \overset{*}{z})=0$. Сделаем в системе (5.1) замену переменной, полагая $u=y-$ $-y_1(z)$. Получим

$$\frac{dx}{dz}=u(z)P_{m-1}(u, z), \quad \frac{du}{dz}=Q(x, z)-y_1'(z). \tag{5.5}$$

Вместо системы (5.2) получим

$$\frac{d|u|}{dl}=\delta_1(l)|Q(x, z)-y_1'(z)|,$$

$$\frac{d|x|}{dl}=\delta_2(l)|u(z)||P_{m-1}(u, z)|, \tag{5.6}$$

где $P_{m-1}(u, z)$ — полином степени $m-1$ относительно u и притом такой, что при $z=\overset{*}{z}$ имеем $P_{m-1}(u(\overset{*}{z}), \overset{*}{z}) \neq 0$ (так как корень $u(\overset{*}{z})$ некратный). Согласно сделанному предположению, имеем теперь такой случай, когда значения $|u|$ и $|x|$ велики и $|x|$ возрастает, а $|u|$ убывает при $z \to z_0$. При этом в точке $z=\overset{*}{z}$ имеем $u(\overset{*}{z})=0$ и до этого функция $u(z)$ не обращает в нуль полином $P_{m-1}(u, z)$. Это невозможно.

Действительно, так как $|x|$ возрастает, то в силу (5.4) правая часть первого из уравнений (5.6) не обращается в нуль. А тогда $u(z)$ не достигает минимума, равного нулю. Но в таком случае $|x|$ постоянно возрастает, а $|u|$ постоянно убывает при $z \to z_0$. Это возвращает нас к случаю с), который также невозможен.

Мы также можем рассматривать и систему вида

$$\frac{dx}{dz}=P(y, z), \quad \frac{dy}{dz}=Q(x, z), \tag{5.6$_1$}$$

где $P(y, z)$ и $Q(x, z)$ суть полиномы соответственно от y и x, коэффициенты которых являются целыми функциями от z.

[1] Если $y_1(z), \ldots, y_m(z)$ различные, то они и голоморфные в окрестности точки z_0.

Другими словами, отбрасываем предположение о том, что коэффициенты при старших степенях x и y постоянные. Пусть этими коэффициентами при старших степенях x и y будут соответственно целые функции $q=q(z)$ и $p=p(z)$. Мы можем особую точку $z=z_0$ считать отличной от корней этих функций и от тех точек, в которых имеются кратные корни полинома $P(y, z)$, так как нас интересуют подвижные особые точки. А тогда все проведенные прежде рассуждения остаются в силе. Таким образом, имеет место

Теорема 5.1. *Если для решения $x(z)$, $y(z)$ системы (5.6$_1$) точка $z=z_0$ есть подвижная особая точка (отличная от корней коэффициентов $q(z)$ и $p(z)$ при старших степенях y и x и от тех z, при которых $P(y, z)$ и $Q(x, z)$ имеют кратные корни), то имеем $x(z)\to\infty$, $y(z)\to\infty$ при $z\to z_0$.*

Можно предполагать коэффициенты полиномов $P(y, z)$, $Q(x, z)$ и мероморфными функциями от z, при этом все прежние рассуждения будут справедливы, если точку $z=z_0$ будем считать отличной от полюсов коэффициентов и от точек, упомянутых в теореме 5.1. В частности, можно эти коэффициенты предполагать дробно рациональными функциями от z. Эта последняя система может представить следующий интерес.

Пусть дана система (5.6$_1$), где коэффициенты полиномов $Q(x, z)$ и $P(y, z)$ суть дробно рациональные функции от z. Будем предполагать особой точкой $z=z_0=\infty$. Введем новую независимую переменную $\tau=z^{-1}$. Тогда из системы (5.6$_1$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{1}{\tau^2}P(y, \tau^{-1}) = P_1(y, \tau), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{1}{\tau^2}Q(x, \tau^{-1}) = Q_1(x, \tau). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Предположим теперь, что здесь $\tau=0$ отлично от тех значений, которые мы исключили из прежних рассуждений. Другими словами, $\tau=0$ не есть особая точка коэффициентов полиномов $P_1(y, \tau)$ и $Q_1(x, \tau)$; в этой точке не обращаются в нуль коэффициенты при старших степенях y и x и, наконец, при $\tau=0$ не совпадают корни полинома $P_1(y, \tau)$. Тогда все прежние рассуждения, относящиеся к особой точке $z=z_0$, справедливы. Отсюда следует, что если точка $\tau=0$ есть особая точка решения $x(\tau)$, $y(\tau)$ системы (5.7), то имеем

$$x(\tau)\to\infty,\quad y(\tau)\to\infty \text{ при } \tau\to 0. \tag{5.8}$$

Такое решение можно построить по особому методу, который будет показан ниже. Но, построив такое решение, мы построим решение системы (5.6_1) $x=x(z)$, $y=y(z)$, обладающее свойством

$$x\to\infty,\ y\to\infty \text{ при } z\to\infty. \tag{5.9}$$

Теперь рассмотрим систему вида

$$\frac{dx}{dz}=P(x,\ y),\ \frac{dy}{dz}=Q(x,\ y), \tag{5.10}$$

где P и Q — полиномы с вещественными коэффициентами.

Будем рассматривать вещественное решение $x=x(z)$, $y=y(z)$, для которого z_0 есть особая точка. Предположим еще, что условия (1.5) и (1.6) здесь выполнены. Пусть $(x_0,\ y_0)$ — решение системы уравнений

$$P(x,\ y)=0,\ Q(x,\ y)=0. \tag{5.11}$$

Наряду с системой (5.10) рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)}. \tag{5.12}$$

Известно, что решения уравнения (5.12), определенные при больших $x\geqslant x_0$, строго монотонны [23] и не имеют существенно особых точек [24]. Покажем, что $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $z\to z_0$, если z_0 — особая точка.

Из предыдущих рассуждений следует, что для системы (5.10) при сделанных предположениях невозможны случаи b) и c). Докажем, что и случай a) также невозможен. По формулам, аналогичным (5 .2), имеем

$$\frac{d|y|}{dl}=\delta_1(l)\,|P(x,\ y)|,\ \frac{d|x|}{dl}=\delta_2(l)\,|Q(x,\ y)|, \tag{5.13}$$

Рассмотрим, как и прежде, такой участок пути $z\to z_0$, на котором $|x|$, $|y|$ достаточно велики. Если на этом участке и $|x|$ и $|y|$ возрастают, то и далее они будут возрастать в силу высказанного свойства решений уравнения (5.12). Действительно, в силу высказанного свойства решений уравнения (5.12) только при одном и том же значении z величины $|x|$ и $|y|$ могут изменить возрастание на убывание. Это возможно только при таком z, при котором одновременно обращаются в нуль правые части уравнений (5.10). Но одновременно

$$P(x,\ y)=0,\ Q(x,\ y)=0 \tag{5.14}$$

быть не может, так как тогда рассматриваемое решение $x=x(z)$, $y=y(z)$ было бы точкой равновесия $x=x_0$, $y=y_0$ и точка $z=z_0$ не была бы особенной.

Предположим теперь, что на этом участке пути $|x|$ возрастает, т. е. $\delta_2(l)>0$, а $|y|$ убывает [1], т. е. $\delta_1(l)<0$. Далее, при $z\to z_0$ это свойство решений не может сохраниться, так как тогда мы имели бы случай с), что невозможно. Не существует и такой точки z, после которой $|x|$ будет убывать, а $|y|$ возрастать (так как это может быть в силу монотонности изменения x и y только после одновременного обращения в нуль $|x|$ и $|y|$). Доказана

Теорема 5.2. *Если решение уравнения (5.12) имеет высказанное свойство и z_0— особая точка решения $x=x(z)$, $y=y(z)$ системы (5.10), то мы имеем $x\to\infty$, $y\to\infty$ при $z\to z_0$.*

Такое решение можно строить по способу, который будет указан ниже, в следующем разделе.

Относительно системы (5.10) можно утверждать и следующее. Для всякого решения системы [2] (5.10) $x(t)$ и $y(t)$ одновременно или имеют пределы, или не имеют при $t\to t_0$.

Пусть $x=x(t)\to x_0$ при $t\to t_0$. Если при этом $y(t)$ будет неопределенным, то имеем такую последовательность t_1, t_2, $\ldots\to t_0$, что $x(t_1)$, $x(t_2)$, $\ldots\to x_0$, $y(t_1)$, $y(t_2)$, $\ldots\to y_0$. Это случай (3.1), (3.3), когда t_0 будет регулярной точкой, поэтому и $y(t)\to y_0$ при $t\to t_0$. При этом мы не имеем $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$, так как в точку равновесия решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ войти не может в конечный промежуток времени, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ полиномы. Неопределенным $y(t)$ не может быть еще и потому, что решение $y(x)$ уравнения (5.12), согласно теореме Пенлеве [24], не имеет подвижных особых точек типа существенных, т. е. $y(x)$ имеет предел при $x\to x_0$. А если $y=y(x)$ определено при $x\geqslant x_0$, то $y(x)$ — монотонная функция [23], поэтому имеет предел и при $x\to\infty$. Пусть $x=x(t)\to\infty$ при $t\to t_0$. Если при этом существует и $y=y(t)$ в промежутке $t\to t_0$, то так как решение уравнения (5.12) $y=y(x)$ при $x\to x_0$ монотонное, то и $y(x)$ имеет предел при $x\to\infty$ или при $t\to t_0$. Может ли при этом $y(t)$ существовать лишь при $t\to t_1$, $t_1<t_0$, т. е. $y\to y_1<\infty$ при $t\to t_0$? Нет, так как при этом $x(t)\to x_1<\infty$, $y(t)\to y_1$ и решение продолжимо для $t>t_1$. Может ли $y(t)$ существовать лишь при $t\to t_1$, так что $y(t)\to\infty$ при $t\to t_1$? Тогда $x=x(y)$ при больших $|y|$ изменяется вместе с y монотонно и $x(y)$ имеет предел. Следовательно, будет $y(t)\to\infty$ при $t\to t_1$ и $x(t)\to x_1<\infty$. Таким образом, если $x=x(t)$ при $t\to t_0$ имеет предел, конечный или бесконечный, то имеет предел и $y=y(t)$.

Рассмотрим частный случай системы (5.10):

---

[1] Если $|y|$ все время убывает, то $|y|$ ограничено. Если же будет $|y|=0$, а потом $|y|$ возрастает, то и $|x|$ должно убывать, что возможно только после (5.14), чего быть не может.

[2] Без условий (1.5), (1.6). Далее вместо z будем писать t.

$$\dot{x} = x^\rho + \sum_{i=0}^{\rho-1} M_i(y)\, x^i = \sum_{i=0}^{\nu} N_i(x)\, y^i = A(x,\ y) \qquad \text{a)}$$

или второй вариант

$$\dot{x} = x^\rho y^\nu + \sum_{i=0}^{\rho-1} M_i(y)\, x^i = \sum_{i=0}^{\gamma} N_i(x)\, y^i = A_1(x,\ y) \qquad \text{a}_1)$$

и

$$\dot{y} = y^n + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(x)\, y^i = \sum_{i=0}^{m} S_i(y)\, x^i = B(x,\ y), \qquad \text{b)}$$

где M, N, Q и S — полиномы.

Согласно предыдущему, здесь $x(t)$, $y(t)$ одновременно или имеют пределы, или не имеют [1] при $t \to t_0$. Мы рассмотрим эти уравнения подробнее.

Проверим условия (1.5) и (1.6) системы a), b). Полагая $y = \zeta^{-1}$, получим

$$P_1(x,\ \zeta) = \zeta^{m_1} \sum_{j=0}^{\nu} N_j(x)\, \zeta^{-j},\ m_1 = \nu,\ P_1(x,\ 0) = N_\nu(x),$$

$$Q_1(x,\ \zeta) = \zeta^{n_1}\left[\zeta^{-n} + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\, \zeta^{-j}\right],\ n_1 = n,\ Q_1(x,\ 0) = 1,$$

$$m_1 - n_1 + 2 = \nu - n + 2;$$

$$P_2(\eta,\ y) = \eta^{m_2}\left[\eta^{-\rho} + \sum_{j=0}^{\rho-1} M_j(x)\, \eta^{-j}\right],\ P_2(0,\ y) = 1,\ m_2 = \rho,$$

$$Q_2(\eta,\ y) = \eta^{n_2} \sum_{j=0}^{m} S_j(y)\, \eta^{-j},\ Q_2(0,\ y) = S_m(y),\ n_2 = m,$$

$$n_2 - m_2 + 2 = m - \rho + 2.$$

Следовательно, если $\nu > 0$ и $\nu - n + 2 > 0$, а также $m > 0$ и $m - \rho + 2 > 0$, то условия (1.5) и (1.6) выполнены. Правда, здесь нет $P_1(x,\ 0) = \text{const} \neq 0$, $Q_2(0,\ y) = \text{const} \neq 0$, но если

$$N_\nu(x_0) \neq 0 \text{ и } Q_2(0,\ y_0) = S_m(y_0) \neq 0,$$

то это заменяет условия(1.5) и (1.6).

[1] Но, как мы видели в примере (1.19), одновременно $x(t)$ и $y(t)$ могут и не иметь пределов при $t \to t_0$.

Согласно теореме 5.2, $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $t \to t_0$, если t_0 — особая точка.

При $\nu - n + 2 \leqslant 0$ или $m - \rho + 2 \leqslant 0$ условия (1.5) или соответственно (1.6) не выполнены. Что же будет при этих нарушениях условий (1.5) и (1.6)? Согласно предыдущему, $x(t)$ и $y(t)$ одновременно или имеют пределы при $t \to t_0$, или не имеют. Пусть $x(t) \to x_0$, x_0 конечное при $t \to t_0$. При этом $y(t) \to y_0$, y_0 конечное при $t \to t_0$ невозможно, если t_0 — особая точка, так как t_0 в этом случае — регулярная точка. Но возможно ли $x(t) \to x_0$ и $y(t) \to \infty$ при $t \to t_0$? Полагая $y = \zeta^{-1}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^{\nu} N_j(x)\zeta^{-j}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\zeta^2\left[\zeta^{-n} + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{-j}\right],$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\zeta^{2-n+\nu}\left[1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{n-j}\right]}{\sum\limits_{j=0}^{\nu} N_j(x)\zeta^{\nu-j}}.$$

Здесь

$$1 + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{n-j}\Big|_{\zeta=0} = 1, \quad \sum_{j=0}^{\nu} N_j(x)\zeta^{\nu-j}\Big|_{\zeta=0} = N_\nu(x).$$

Пусть $N_\nu(x_0) \neq 0$ и $2 - n + \nu > 0$ (т. е. выполнено условие (1.5)). Тогда нет решения $\zeta \to 0$ при $x \to x_0$, а есть только $\zeta \equiv 0$, поэтому нет $y \to \infty$ при $x \to x_0$. Но, может быть, есть $y \to \infty$ при $x \to \infty$, например, согласно предыдущему.

Если $2 - n + \nu \leqslant 0$, то из

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{\zeta^{n-2-\nu}\sum\limits_{j=0}^{\nu} N_j(x)\zeta^{\nu-j}}{1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{n-j}}$$

получим решение $x \to x_0$ при $\zeta \to 0$ в виде

$$x = x_0 + \sum_{k=p}^{\infty} \alpha_k \zeta^k,$$

после чего найдем и $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t) \to x_0$, $y(t) \to \infty$ при $t \to t_0$.

Пусть теперь $x \to \infty$ при $t \to t_0$. Возможно ли при этом $y(t) \to y_0$ или $y \to \infty$? Полагая $x = \eta^{-1}$, получим

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2\left[\eta^{-\rho} + \sum_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,\eta^{-j}\right],$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{j=0}^{m} S_j(y)\,\eta^{-j},$$

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{\eta^{2-\rho+m}\left[1 + \sum\limits_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,\eta^{\rho-j}\right]}{\sum\limits_{j=0}^{m} S_j(y)\,\eta^{m-j}}.$$

Возможно ли здесь $y \to y_0$ при $\eta \to 0$?

Пусть $S_m(y_0) \neq 0$ и $2-\rho+m > 0$ (условие (1.6)). Тогда $\eta \to 0$ при $y \to y_0$ невозможно, а есть только $\eta \equiv 0$ при $y \to y_0$, поэтому $x \to \infty$, $y \to y_0$ невозможно. Но, может быть, имеем $x \to \infty$ при $y \to \infty$?

Пусть $2-\rho+m \leqslant 0$ (т. е. условие (1.6) нарушено). Тогда, как видно из

$$\frac{dy}{d\eta} = -\frac{\eta^{\rho-2-m} \sum\limits_{j=0}^{m} S_j(y)\,\eta^{m-j}}{1 + \sum\limits_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,\eta^{\rho-j}},$$

решение $y \to y_0$, $\eta \to 0$ при $t \to t_0$ существует и его легко получить: сначала $y = y_0 + \sum\limits_{k=\gamma}^{\infty} \alpha_k \eta^k$, а затем $t = \varphi(\eta)$ и $\eta = \psi(t)$.

Рассмотрим второй вариант, т. е. систему:

$$\dot{x} = x^\rho y^\gamma + \sum_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,x^j = \sum_{j=0}^{\gamma} N_j(x)\,y^j, \qquad \text{a}_1)$$

$$\dot{y} = y^n + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\,y^j = \sum_{j=0}^{m} S_j(y)\,x^j. \qquad \text{b})$$

Легко видеть, что здесь при $\gamma - n + 2 > 0$ выполнено условие (1.5) и при $m - \rho + 2 > 0$ — условие (1.6). Положим $x = \eta^{-1}$. Тогда получим

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{\eta^{2-\rho+m}\left[y^{\nu} + \sum_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,\eta^{\rho-j}\right]}{\sum_{j=0}^{m} S_j(y)\,\eta^{m-j}}.$$

Возможно ли здесь $\eta\to 0$ и $y\to\infty$? Очевидно,

$$y^{\nu} + \sum_{j=0}^{\rho-1} M_j(y)\,\eta^{\rho-j} = y^{\nu}\left(\frac{1}{y},\ \eta\right),$$

$$\sum_{j=0}^{m} S_j(y)\,\eta^{m-j} = y^{n}\left(\frac{1}{y},\ \eta\right),$$

где $(0,\ 0) = 1$, поэтому

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{\eta^{2-\rho+m} y^{\nu}\left(\frac{1}{y},\ \eta\right)}{y^{n}\left(\frac{1}{y},\ \eta\right)} = -\,\eta^{2-\rho+m} y^{\nu-n}\left(\frac{1}{y},\ \eta\right),$$

откуда

$$\eta^{\rho-m-1} \doteq y^{\nu-n+1} A\left(\frac{1}{y},\ \eta\right),\ A(0,\ 0)\neq 0.$$

Отсюда видим, что если $\rho-m-1<0$ и $\gamma-n+1>0$, то возможно $\eta\to 0$, $y\to\infty$, т. е. $x\to\infty$, $y\to\infty$. Этот результат соответствует теореме 5.2 и даже несколько сильнее, так как прежде было предположено $m+2-\rho>0$ и $\gamma-n+2>0$, т. е. здесь нет случаев a), b) и c) из § 4.

Если $\rho-m-1>0$, $\gamma-n+1>0$, то $x\to\infty$, $y\to\infty$ невозможно и здесь нарушены условия (1.5) и (1.6). Если $\rho-m-1>0$ и $\gamma-n+1<0$, то $x\to\infty$, $y\to\infty$ снова возможно, хотя условия (1.5) и (1.6) нарушены.

Рассмотрим еще систему [25]

$$\dot{x} = -y,\ \dot{y} = y^{n} + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\,y^{j}.$$

Полагая здесь $y = \zeta^{-1}$, получим

$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta^{3-n}\left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\,\zeta^{n-j}\right],$$

откуда

$$\zeta^{-1} = \int^{x} [1 + Q_0(x)\zeta] dx,\ n = 1,$$

$$\ln \zeta = \int^{x} [1 + Q_0(x)\zeta^2 + Q_1(x)\zeta] dx,\ n = 2,$$

$$\zeta^{n-2} = (n-2)\int^{x} \left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{n-j}\right] dx,\ n-3 \geqslant 0.$$

Отсюда видим, что при $n = 1$ и $n = 2$ $\zeta \to 0$, $x \to \infty$ возможно, а при $n - 3 \geqslant 0$ этого нет. Но в этом последнем случае из

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{\zeta^{n-3}}{1 + \sum\limits_{j=0}^{n-1} Q_j(x)\zeta^{n-j}}$$

получаем, что есть решение $x \to x_0$ при $\zeta \to 0$

$$x = x_0 + \sum_{k=n-2}^{\infty} \alpha_k \zeta^k,\ |\zeta| < \delta,$$

т. е. имеем $x \to x_0$ при $y \to \infty$. Например, если $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = y^4 + x^2$, то имеем $\zeta^2 = 2\int^{x} (1 + x^2\zeta^2) dx > 2x \to \infty$ при $x \to \infty$, поэтому нет $\zeta \to 0$ при $x \to \infty$, но есть

$$x = x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \zeta^k,\ |\zeta| < \delta,\ \text{т. е. } x \to x_0 \text{ при } y \to \infty.$$

§ 6. КРАТКАЯ СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ V ГЛАВЫ

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z),\ \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z), \tag{1.1}$$

которая при $y = \zeta^{-1}$ переходит в систему

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\zeta^{m_1}}{P_1(x, \zeta, z)},\ \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{Q_1(x, \zeta, z)}{P_1(x, \zeta, z)}\zeta^{m_1 - n_1 + 2}, \tag{1.4}$$

где $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$ и m_1, n_1 — целые числа или нули,

$$P_1(x, \zeta, z) = \zeta^{m_1} P(x, \zeta^{-1}, z),\ Q_1(x, \zeta, z) = \zeta^{n_1} Q(x, \zeta^{-1}, z),$$

$$P_1(x, 0, z) = 1,\ Q_1(x, 0, z)\ \text{ограниченное.} \tag{1.5}$$

Относительно системы (1.4) можно сказать следующее.

Система (1.4) не имеет решения: $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$, а имеет $\zeta \equiv 0$, $z \equiv z_0$. Нет $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ на пути $z \to z_0$, которым соответствует $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ на пути $x \to x_0$ и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$. Следовательно, нет $x \to x_0$, $y(z)$ не ограничено при $z \to z_0$.

Теорема 1.2. *При условии (1.5) если z_0 — особая точка, то при $z \to z_0$ $|x(z)|$ не ограничен.*

Система (1.1) не имеет такого решения, что при $z \to z_0$ имеем $\zeta \to 0$, а $x(z)$ неопределенна и неограниченна, если при малом $|\zeta|$, $\dot{z} = z_0$, $\dot{x} = x_0$ — большое (по модулю) имеем из (1.4) $P_1(x, \zeta, z) \dot{=} C$ — постоянное, не равное 0, и $Q_1(x, \zeta, z) \dot{=} \dot{=} x^p A$, A — постоянное. Например, нет $\zeta \to 0$, $x(z)$ — неопределенное, неограниченное при $z \to z_0$ для уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = x + y(x^2 + y^2) = A, \quad \frac{dy}{d\tau} = y - x(x^2 + y^2) = B,$$

так как здесь общее решение имеем в виде

$$x = e^{\tau + C} \cos\left[C_1 - \frac{1}{2} e^{2(\tau + C)}\right],$$

$$y = e^{\tau + C} \sin\left[C_1 - \frac{1}{2} e^{2(\tau + C)}\right],$$

или для уравнений $\dot{x} = A(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = B(x^2 + y^2)$, так как здесь

$$x = (C - 2t)^{-1/2} \cos\left[C_1 - \frac{1}{2(C - 2t)}\right],$$

$$y = (C - 2t)^{-1/2} \sin\left[C_1 - \frac{1}{2(C - 2t)}\right].$$

Здесь имеем случаи (3.4), (3.5) и (3.6), указанные в § 3.

Теорема 1.1. *Если при условии (1.5) (и $m_1 = 0$) $z(x)$, $y(x)$ не имеют многозначных особых точек, то для особой точки z_0 нет последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ на пути $z \to z_0$ такой, что соответственно будет $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.*

Лемма 1.1. *Если уравнения (1.1) при условиях (1.5) имеют решение, обладающее свойством $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ на пути $z \to z_0$, то для всякого $\overset{*}{x}$ существует такая последовательность $\overset{*}{z}_1, \overset{*}{z}_2, \ldots \to z_0$ на пути $z \to z_0$, что соответственно будет $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots \to \overset{*}{x}$ и $\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \ldots \ldots \to \infty$, т. е. z_0 будет существенно особой точкой функции $x(z)$*

Примечание. Если $m_1=0$ и $m_1-n_1+2>0$, то для $\overset{*}{x}$ существует $\overset{*}{z}_n\to\overset{*}{z}$ (не z_0), что $\overset{*}{x}_n\to\overset{*}{x}$ и $\overset{*}{y}_n\to\infty$.

Следствие из леммы 1.1. Если при условии (1.5) z_0 — особая точка решения, обладающего свойством $x_1, x_2, \ldots\to x_0$, $y_1, y_2, \ldots\to\infty$ при $z_1, z_2, \ldots\to z_0$, то при $z\to z_0$ по разным путям $x(z)$ принимает все значения из плоскости x, но нет $z\to z_0$, чтобы $x\to\overset{*}{x}$, $y\to\infty$. Если для решения системы (1.1) z_0 — существенно особая точка, то имеем один из трех случаев: при $z_1, z_2, \ldots\to z_0$ будет или

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\to x_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\to\infty, \tag{3.4}$$

или

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\to\infty,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\to y_0, \tag{3.5}$$

или

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\to\infty,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\to\infty \tag{3.6}$$

и все эти случаи или два из них имеем и обязательно будет (3.6).

Пусть в (1.4) $m_1\geqslant 0$, $m_1-n_1+2=0$. Тогда существует $z\to z_0$ и $\zeta\to 0$ при $x\to x_0$.

Для системы

$$\frac{dx}{dz}=P(y,\ z),\quad \frac{dy}{dz}=Q(x,\ z),$$

где P и Q — полиномы относительно y и x с целыми коэффициентами относительно z, имеем $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $z\to z_0$, если z_0 — особая точка решения.

Если для системы (5.10) условия (1.5) и (1.6) выполнены и для решения $x=x(t)$, $y=y(t)$ точка $t=t_0$ особая, то $x\to\infty$, $y\to\infty$ при $t\to t_0$.

Глава VI

СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Лемма 1.1. *Пусть дана аналитическая функция $x=x(z)$, обладающая свойствами:*

1) последовательность $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, где последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ расположена на кривой L;

2) обратная функция $z=z(x)$ голоморфная в окрестности точек x_k при $k \geqslant N$;

3) радиусы сходимости r_k разложений

$$z - z_k = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(x_k)(x - x_k)^m$$

ограничены снизу, т. е. $r_k > r$;

4) коэффициенты $\alpha_1(x_k), \ldots, \alpha_{l-1}(x_k)$ стремятся к нулю при $x_k \to x_0$;

5) производная $\dfrac{d^l z}{dx^l} \to al! \neq 0$ при $x_k - x_0 \to 0$ и $x - x_k \to 0$.

Тогда имеем $x(z) \to x_0$ при $z \to z_0$ по кривой L.

Доказательство. Лемма не верна в том случае, если при $z \to z_0$ функция $x(z)$ описывает в плоскости x кривую, обходящую бесконечное число раз какую-нибудь фиксированную точку x_1, которая будет точкой ветвления функции $z = z(x)$, т. е. переменная $x(z)$ при $z \to z_0$ удаляется на фиксированное расстояние $\Delta > 0$ от точки x_0 при соответствующих значениях $z = \overset{*}{z}_k$, как угодно близких от z_0. Пусть $x = \overset{*}{x}_k$ соответствуют значениям $z = \overset{*}{z}_k$, так что[1] $|\overset{*}{x}_k - x_0| = \Delta$ и $|\overset{*}{x}_k - x_k| \to \Delta$ при $x_k \to x_0$.

Рассмотрим ряд

$$\overset{*}{z}_k - z_k = \sum_{m=1}^{l-1} \alpha_m(x_k)(\overset{*}{x}_k - x_k)^m + (\overset{*}{x}_k - x_k)^l [\alpha_l(x_k) +$$

[1] Δ можно взять произвольное меньше r.

$$+\sum_{m=l+1}^{\infty}\alpha_m(x_k)(\overset{*}{x}_k-x_k)^{m-l}].$$

Будем предполагать, что значение $\overset{*}{z}_k$ есть значение z, следующее за значением z_k на кривой $z\to z_0$. Тогда $|\overset{*}{z}_k-z_k|\to 0$ при $z_k\to z_0$.

При z_k, достаточно близких к z_0, на основании условий 4 и 5 леммы

$$\left|\sum_{m=1}^{l-1}\alpha_m(x_k)(\overset{*}{x}_k-x_k)^m\right|<|\overset{*}{x}_k-x_k|^l\left(\frac{1}{2}a-\varepsilon\right),$$

$$\left|\alpha_l(x_k)+\sum_{m=l+1}^{\infty}\alpha_m(x_k)(\overset{*}{x}_k-x_k)^{m-l}\right|>a-\varepsilon,$$

когда $|\overset{*}{x}_k-x_k|\leqslant\Delta$ и $k\geqslant N$. Здесь $\varepsilon>0$ — как угодно малое при достаточно малом Δ. Следовательно, при всех z_k, достаточно близких к z_0, имеем

$$|\overset{*}{z}_k-z_k|>|\overset{*}{x}_k-x_k|^l\frac{1}{2}a.$$

Но при $k\to\infty$ имеем $|\overset{*}{z}_k-z_k|\to 0$, а $|\overset{*}{x}_k-x_k|\to\Delta>0$, что противоречиво. Следовательно, нет таких $\overset{*}{x}_k$, что $|\overset{*}{x}_k-x_0|=\Delta$ и лемма верна.

§ 2. СЛУЧАЙ ПОЛИНОМОВ $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ПРИ $m_1\geqslant 0$, $m_1-n_1+2=0$, $n_2\geqslant 0$, $n_2-m_2+2=0$

Будем предполагать, что в системе (1.1) [1] $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ суть полиномы относительно x, y и целые функции относительно z и что условия (1.2), (1.3) выполнены, но вместо условий (1.5) и (1.6) имеем

$$m_1\geqslant 0,\ m_1-n_1+2=0. \tag{2.1}$$

Изучим характер подвижных особых точек z_0 решений в этом случае.

Пусть z_0 — особая точка решения $x(z)$, $y(z)$ на контуре l, окружающем точку z_1. Если $x(z)$ не имеет предела при $z\to z_0$ по кривой l внутри L, то имеем последовательность z_1, z_2, $\ldots\to z_0$ такую, что x_1, x_2, $\ldots\to x_0$ и y_1, y_2, $\ldots\to y_0$ или y_1, y_2, $\ldots\to\infty$.

[1] Здесь и далее формулы, у которых первая цифра 1, из § 1 главы V.

Если имеем

$$x_1,\ x_2,\ \ldots \to x_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots \to y_0,$$

то z_0 не будет особой точкой, так как в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ регулярные.

Предположим теперь, что

$$x_1,\ x_2,\ \ldots \to x_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots \to \infty \text{ при } z_1,\ z_2,\ \ldots \to z_0. \tag{2.2}$$

Тогда рассмотрим систему (1.4), где, как и ранее, $P_1(x, 0, z) = \mathrm{const} \neq 0$ и $Q_1(x, 0, z)$ — ограниченная при всех конечных x, z.

Будем еще считать и

$$Q_1(x_0, 0, z_0) \neq 0, \tag{2.3}$$

поскольку рассматриваем подвижную особую точку z_0. А кроме этого, так как x_0— точка сгущения значений функции $x(z)$, не имеющей предела, то $x(z)$ бесконечное число раз возвращается в как угодно малую окрестность точки x_0. А тогда и x_0 в (2.3) можно взять произвольным из некоторого множества значений x. Таким образом, система (1.4) имеет решение $z(x)$, $\zeta(x)$, обладающее свойством

$$z_1,\ z_2,\ \ldots \to z_0,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \ldots \to 0 \text{ при } x_1,\ x_2,\ \ldots \to x_0, \tag{2.4}$$

и при этом выполнено условие (2.3).

Покажем, что это решение обладает свойством [1)]

$$z \to z_0 \text{ и } \zeta \to 0 \text{ при } x \to x_0. \tag{2.5}$$

Так как $m_1 - n_1 + 2 = 0$, то для рассматриваемого решения системы (1.4) $z(x)$, $\zeta(x)$ функция $z(x)$ удовлетворяет условиям 1—5 леммы 1.1. Покажем это. Заметим, что в силу (2.3)

$$\left.\frac{d\zeta}{dx}\right|_{x=x_0,\,\zeta=0,\,z=z_0} = -\frac{Q_1(x_0,\ 0,\ z_0)}{P_1(x_0,\ 0,\ z_0)} \neq 0.$$

В окрестности точек (x_k, y_k, z_k) при $k \geqslant N$ и $(x_0, 0, z_0)$ правые части уравнений голоморфны, поэтому радиусы сходимости рядов

$$z - z_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_k)(x - x_k)^m,\ \zeta - \zeta_k =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(x_k)(x - x_k)^m \tag{2.6}$$

ограничены снизу (глава IV, замечание 1.1).

[1)] Сравните с замечанием к теореме 1.2 главы V.

Из первого уравнения (1.4) видим, что

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\zeta^{m_1}}{P_1(x, \zeta, z)}\right)\Bigg|_{x=x_0, \zeta=0, z=z_0} = 0, \ k=1, 2, \ldots, m_1-1,$$

$$\frac{d^{m_1}}{dx^{m_1}}\left(\frac{\zeta^{m_1}}{P_1(x, \zeta, z)}\right)\Bigg|_{x=x_0, \zeta=0, z=z_0} \neq 0.$$

Следовательно, условия 1—5 леммы 1.1 выполнены. Отсюда следует, что $x(z)\to x_0$ при $z\to z_0$ или $z(x)\to z_0$ при $x\to x_0$. И так как радиусы сходимости рядов (2.6) ограничены снизу, то при $k\geqslant N$ x_0 попадает в область сходимости этих рядов, поэтому имеем

$$\overset{*}{\zeta} = \zeta_k + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_k(x_k)(x_0 - x_k)^m,$$

где $\overset{*}{\zeta}$ — значение $\zeta(x_0)$, не зависящее от значка k, так как это значение функции $\zeta(x)$ на тех листах Римана, на которых x_0 попадает в область регулярности $\zeta(x)$ (и так как $x(z)\to x_0$ при $z\to z_0$, то x остается в ограниченной части плоскости, где $z(x)$ и $\zeta(x)$ — регулярные функции). При $k\to\infty$ имеем $x_0 - x_k\to 0$ и $\zeta_k\to 0$, откуда следует, что $\overset{*}{\zeta}=0$, что и должно быть. В окрестности точки x_0 функции $z(x)$ и $\zeta(x)$ голоморфные.

Таким образом, при условии (2.1) имеем решение системы (1.4)

$$z(x) = z_0 + \sum_{k=m_1+1}^{\infty} \alpha_k(z_0, x_0)(x - x_0)^k,$$

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(z_0, x_0)(x - x_0)^k.$$

Отсюда видим, что при $m_1\geqslant 1$ функция $x=x(z)$ в окрестности точки z_0 алгебраическая m_1+1-значная, а $y(x)$ имеет алгебраический m_1+1-значный полюс.

Следовательно, в случае (2.1) система (1.1) не имеет такой подвижной существенно особой точки z_0, что $x(z)$ остается ограниченной или неопределенной при $z\to z_0$. Другими словами, если z_0 существенно особая точка, то обязательно $x(z)\to\infty$ при $z\to z_0$, а $y(x)$ неопределенная.

Если в системе (1.1)

$$n_2\geqslant 0, \ n_2 - m_2 + 2 = 0, \tag{2.7}$$

$P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — полиномы относительно x и y и целые функции от z,

$$Q_2(0,\ y,\ z) = \mathrm{const} \neq 0 \tag{2.8}$$

и

$$P_2(0,\ y_0,\ z_0) \neq 0, \tag{2.9}$$

то имеем и другое семейство решений с подвижной особой точкой z_0, определенной свойством

$$x(z) \to \infty,\ y(z) \to y_0 \text{ при } z \to z_0. \tag{2.10}$$

В этом случае нет решения с подвижной существенной особой точкой z_0 такого рода, что функция $y(z)$ остается ограниченной или неопределенной при $z \to z_0$, т. е. если z_0 существенно особая точка, то $y(z) \to \infty$, а $x(z)$ остается неопределенной при $z \to z_0$. Но мы не доказали существование такого решения. Доказана

Теорема 2.1. *Предположим в системе (1.1) $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — полиномы относительно x и y, коэффициенты которых суть целые функции от z, и при этом выполнены условия*

$$m_1 \geqslant 0,\ m_1 - n_1 + 2 = 0,\ P_1(x,\ 0,\ z) = \mathrm{const} \neq 0, \tag{2.11}$$

$$n_2 \geqslant 0,\ n_2 - m_2 + 2 = 0,\ Q_2(0,\ y,\ z) = \mathrm{const} \neq 0. \tag{2.12}$$

Тогда решение такой системы $x(z)$, $y(z)$ не имеет существенно особой подвижной точки. Но эта система имеет два семейства решений с подвижной особой точкой z_0.

Первое семейство определено свойством

$$x(z) \to x_0,\ y(z) \to \infty \text{ при } z \to z_0, \tag{2.13}$$

и это решение легко строится как голоморфное решение системы (1.4), обладающее свойством

$$z(x) \to z_0,\ \zeta(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \tag{2.14}$$

с произвольными постоянными z_0 и x_0, подчиненными условию

$$Q_1(x_0,\ 0,\ z_0) \neq 0.$$

Второе семейство определяется свойством $x(z) \to \infty$, $y(z) \to$ $\to y_0$ при $z \to z_0$ и строится как решение

$$z(y) \to z_0,\ \eta(y) \to 0 \text{ при } y \to y_0 \tag{2.15}$$

системы

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{P_2(\eta,\ y,\ z)}{Q_2(\eta,\ y,\ z)}\eta^{n_2 - m_2 + 2},\quad \frac{dz}{dy} = \frac{\eta^{n_2}}{Q_2(\eta,\ y,\ z)}, \tag{2.16}$$

где $n_2 - m_2 + 2 = 0$ с произвольными постоянными z_0 и y_0, для которых

$$P_2(0,\ y_0,\ z_0) \neq 0. \tag{2.17}$$

Проверим это все еще раз.

Пусть z_0 — особая точка решения $x(z)$, $y(z)$. Тогда либо

$$\text{a) } x \to \infty \text{ при } z \to z_0,$$

либо есть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, которой соответствует

$$\text{b) } x_1, x_2, \ldots \to x_0 \text{ при } z_1, z_2, \ldots \to z_0.$$

Пусть имеем b). Предположим, что этой же последовательности $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ соответствует последовательность $y_1, y_2, \ldots \to y_0$. Тогда z_0— регулярная точка. Следовательно, если z_0— особая точка, то наряду с $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ должно быть также и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$. Но в этом случае, как мы видели, z_0 также не будет существенно особой точкой, и мы имеем решение, обладающее свойством $y(z) \to \infty$ и $x(z) \to x_0$ при $z \to z_0$. Это решение, как мы видели, легко строится.

Если имеем a), то имеем либо решение, обладающее свойством

$$\text{c) } x(z) \to \infty, \ y(z) \to y_0 \text{ при } z \to z_0,$$

либо решение, обладающее свойством

$$\text{d) } x(z) \to \infty, \ y(z) \to \infty \text{ при } z \to z_0.$$

Решение, обладающее свойством c), как мы видели, легко строится. Вопрос о существовании решения, обладающего свойством d), требует особого исследования.

§ 3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y - y^3. \tag{3.1}$$

Здесь $P_1(x, \zeta) = 1 - x\zeta + x^3\zeta$, $Q_1(x, \zeta) = -1 - \zeta^2 - x\zeta^3$, $m_1 = 1$, $n_1 = 3$, $m_1 - n_1 + 2 = 0$, $P_1(x, 0) = 1$, $Q_1(x, 0) = -1$, $P_2(\eta, y) = 1 - \eta^2 + y\eta^3$, $Q_2(\eta, y) = -1 - y\eta - y^3\eta$, $m_2 = 3$, $n_2 = 1$, $n_2 - m_2 + 2 = 0$, $P_2(0, y) = 1$, $Q_2(0, y) = -1$. Таким образом, здесь все условия теоремы 2.1 выполнены.

Следовательно, решения системы (3.1) не имеют существенно особой подвижной точки. Но для этой системы мы имеем и решение, обладающее свойством $x \to x_0$, $y \to \infty$ при $t \to t_0$, и решение, обладающее свойством $x \to \infty$, $y \to y_0$ при $t \to t_0$, где x_0, y_0 и t_0— произвольные конечные числа. Эти решения могут быть как вещественные (при вещественных x_0, t_0 или y_0, t_0), так и комплексные.

Выясним теперь, существуют или нет вещественные решения системы (3.1), обладающие свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при

$t \to t_0$. С этой целью введем новые переменные $u = yx^{-1}$, $v = x^{-1}$. Тогда система (3.1) перейдет в систему

$$\frac{du}{dt} = -\frac{(1+u^2)(u+v^2)}{v^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v^2 - uv^2 - 1}{v}. \tag{3.2}$$

Нас интересует решение, обладающее свойством

$$v \to 0 \text{ при } t \to t_0. \tag{3.3}$$

При этом u может удовлетворять одному из условий:

а) $u \to 0$ при $t \to t_0$; б) $u \to u_0$ при $t \to t_0$;

в) u не имеет предела при $t \to t_0$; г) $u \to \infty$ при $t \to t_0$. Систему (3.2) можно записать в виде

$$\frac{dt}{du} = -\frac{v^2}{(1+u^2)(u+v^2)}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{1+uv^2-v^2}{(1+u^2)(u+v^2)}\, v. \tag{3.3'}$$

Очевидно, здесь не существует вещественное решение, обладающее свойством $v \to 0$ и $t \to t_0$ при $u \to u_0 \neq \pm i$, $i = \sqrt{-1}$, $u_0 \neq 0$, а существует лишь решение $v \equiv 0$, $t \equiv t_0$. Следовательно, случай б) невозможен.

Покажем, что в вещественной области невозможен и случай а), т. е. невозможно вещественное решение (когда начальные значения t_0, x_0 и y_0 вещественные), обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to t_0$ (конечное или нет), так что $yx^{-1} = u \to 0$.

Запишем второе из уравнений (3.3') в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}\,\frac{1+uv^2-v^2}{(1+u^2)(1+v^2/u)}. \tag{3.4}$$

Так как по условию $u \to 0$, $v \to 0$, $\dfrac{v}{u} = \dfrac{1}{y} \to 0$, то можно записать

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}\,[1 + \alpha(u)],$$

где $\alpha(u)$ при $u \to 0$ для рассматриваемого решения — бесконечно малая (б. м.) порядка, не меньшего, чем б. м. uv^2, v^2, u^2, $\dfrac{v^2}{u} = \dfrac{v}{y}$, так как

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + \ldots, \quad \frac{1}{1+v^2/u} = 1 - \frac{v^2}{u} + \ \ldots,$$

где не выписаны б. м. более высокого порядка.

Следовательно,

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u} + p(u)\,du,$$

где $p(u) \to 0$ при $u \to 0$. Отсюда для предполагаемого решения должно было бы быть

$$\ln\frac{v}{u} = \ln\frac{1}{y} = \int\limits_{u_1}^{u} p(u)\,du + C, \ C = \text{const}.$$

Так как должно быть $y \to \infty$ и $u \to 0$, то мы видим, что слева переменная не ограничена, а справа ограничена для предполагаемого решения. Полученное противоречие показывает, что случай а) в вещественной области невозможен. Для вещественного решения невозможен и случай г). Действительно, заменяя $u = \zeta^{-1}$, из (3.4) получим

$$-\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta + v^2 - v^2\zeta}{(1+\zeta^2)(1+v^2)}\,d\zeta + C. \tag{3.5}$$

Здесь должно быть $v \to 0$, $\zeta \to 0$ и $\zeta v^2 = \dfrac{1}{xy} \to 0$. Но тогда в равенстве (3.5) слева величина неограниченная, а справа—ограниченная, что невозможно, поэтому случай г) невозможен. Заметим теперь, что так как $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то u и v в конечном счете принимают определенный знак. И так как $v^2/u = \dfrac{1}{xy} \to 0$, то функция $u = u(v)$, определенная уравнением (3.4), может изменить возрастание на убывание или наоборот, только в точках кривой $1 + uv^2 - v^2 = 0$. В плоскости (u, v) имеем восемь зон, ограниченных осями u, v и кривой $1 + uv^2 - v^2 = 0$, в которых $\dfrac{du}{dv}$ сохраняет знак. Кривая $u = u(v)$ при $v \to 0$ пересекает кривую $1 + uv^2 - v^2 = 0$, как легко видеть, в одном направлении. Отсюда следует, что функция $u = u(v)$ при $v \to 0$ не может быть неопределенной. Следовательно, случай в) также не имеет места.

Случаи б), в) и г) невозможны и при $t_0 = \infty$, т. е. невозможно решение системы (3.1), обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to \infty$, так что $u = y/x$ не имеет предела или $u \to u_0$ (конечное) при $t \to \infty$. К такому выводу мы приходим немедленно после замены в уравнениях (3.1) $t = \tau^{-1}$, рассматривая решение, обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $\tau \to 0$, так как только что проведенные рассуждения нигде не меняются. Заметим еще, что система (3.1) не имеет и такого решения, что $x \to x_0$ и $y \to \infty$ при $t \to \infty$. Это мы получим непосредственно из системы (1.4) главы V после замены независимой переменной $t = \tau^{-1}$. К такому же выводу мы придем и всякий раз, когда вообще в системе (1.1) $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 \geqslant 0$, а функции $\frac{\tau^2}{P_1(x, \zeta, \tau^{-1})}$, $\frac{Q_1(x, \zeta, \tau^{-1})}{P_1(x, \zeta, \tau^{-1})}$ ограничены при $\tau \to 0$ и при $\zeta \to 0$ для конечных значений x и либо первая стремится к нулю в силу $\tau \to 0$, либо вторая стремится к нулю в силу $\tau \to 0$. Мы также видим, что система (3.1) не имеет решения, обладающего свойством $x \to \infty$ и $y \to y_0$ при $t \to \infty$. Все эти рассуждения приводят нас к следующим выводам относительно вещественных решений системы (3.1).

Существуют движения, определяемые системой (3.1), которые обладают свойством $x \to x_0$ и $y \to \infty$ при $t \to t_0$ или $x \to \infty$, $y \to y_0$ при $t \to t_0$. Не существует движений, обладающих этими свойствами при $t \to \infty$; не существует движений, обладающих свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$.

Не существует движений, для которых или $x(t)$, или $y(t)$ оставалось бы неопределенным при $t \to t_0$. Не существует движения, точка которого $M(t) \to \infty$ по спирали. Движение $M(t)$ ограничено при $t \to \infty$, если полярный угол не ограничен.

Всякое движение, определяемое системой (3.1), обладает одним из свойств: либо оно ограничено (и тогда оно существует при всех t), либо оно непродолжимо при $t > t_0$ (и тогда асимптотически приближается к прямой $x = x_0$ при $y \to \infty$ или к прямой $y = y_0$ при $x \to \infty$, когда $t \to t_0$, t_0 и будет подвижной особой точкой). Во многих случаях методы и результаты аналитической теории дифференциальных уравнений позволяют решать вопросы качественной теории дифференциальных уравнений в целом.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3. \tag{3.6}$$

Здесь снова $m_1 = 1$, $n_1 = 3$, $m_1 - n_1 + 2 = 0$ и $m_2 = 3$, $n_2 = 1$, $n_2 - m_2 + 2 = 0$, поэтому существуют решения

$$\begin{gathered} x \to x_0, \ y \to \infty \ \text{при} \ t \to t_0, \\ x \to \infty, \ y \to y_0 \ \text{при} \ t \to t_0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Нет таких решений при $t_0 = \infty$.

Рассмотрим вопрос о существовании решений

$$x \to \infty \ \text{и} \ y \to \infty \ \text{при} \ t \to t_0. \tag{3.8}$$

Полагая $v=x^{-1}$, $u=yx^{-1}$, получим уравнения

$$v\dot{v}=v^2(1-u)-1,\ v^2\dot{u}=u^2(u-v^2)-u-v^2. \tag{3.9}$$

Отсюда имеем уравнение Брио и Буке

$$\frac{du}{dv}=\frac{u^2(u-v^2)-(u+v^2)}{v[v^2(1-u)-1]}.$$

Полагая в квадратных скобках $v=0$, получим в числителе $u(u^2-1)$ и в знаменателе -1. Отсюда следует, что можно ожидать решения $u\to\pm1$ при $v\to0$. Пусть $u-1=w$. Тогда получим

$$\frac{dw}{dv}=\Big(-2w-3w^2+2v^2+\sum_{k+l=3}^{\infty}a_{kl}w^kv^l\Big)/v,$$

где a_{kl} постоянные. Согласно теореме 2.1 [11, глава IX], здесь имеем единственное решение $w\to0$ при $v\to0$, которое имеет вид

$$w=\frac{1}{2}v^2+\sum_{k=3}^{\infty}\alpha_kv^k=u-1.$$

Подставляя это в первое уравнение (3.9), найдем, что $v\to0$ при $t\to t_0$ конечное.

Мы доказали, что уравнения (3.6) имеют решения (3.8) такие, что $yx^{-1}\to1$, т. е. интегральные кривые уходят в бесконечность вдоль прямой $y=x$.

Так же докажем существование решений (3.8), для которых будет $yx^{-1}\to-1$ при $t\to t_0$. Решения, обладающие свойством $yx^{-1}\to+1$ или $yx^{-1}\to-1$ существуют в каждой четверти.

В работе [26] показано, что система (3.6) в кольце $1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$, $r^2=x^2+y^2$ имеет один предельный цикл и решение $x=y=0$ асимптотически устойчиво. Учитывая еще решение (3.7), мы легко укажем качественную картину расположения интегральных кривых на плоскости x, y в целом.

Примеры Кондратени:

$$\dot{x}=-x^2,\ \dot{y}=-x^2(1+y^2),$$
$$x=\frac{1}{t-t_0},\ y=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{t-t_0}+C\right); \tag{I}$$

$$\dot{x}=-x^2,\ \dot{y}=x(1+y^2),$$
$$x=\frac{1}{t-t_0},\ y=\operatorname{tg}[\ln(t-t_0)+C]. \tag{II}$$

В первом случае особыми точками t_n буду $t_n = t_0 + \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} - C} \to t_0$ при $n \to \infty$ (n — целое) и во втором $t_n = t_0 + e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2} - C}$, т. е. t_0 является точкой сгущения особых точек t_n, обладающих свойством $x(t) \to \frac{1}{t_n - t_0}$ и $y(t) \to \infty$ при $t \to t_n$. Согласно (2.1) данной главы и (1.6) главы V, в примере 1 имеем соответственно

$$m_1 = 0,\ n_1 = 2,\ m_1 - n_1 + 2 = 0,$$
$$n_2 = 2,\ m_2 = 2,\ n_2 - m_2 + 2 > 0.$$

Здесь из леммы 1.1 и следствия из нее главы V, а также на основании § 2 этой главы (перед (2.7)) видим, что при $t \to t_0$ $y(t)$ может быть неопределенным, что и имеем согласно полученному решению. Но в лемме 1.1 и следствии из нее надо поменять ролями x и y, так как выполнено не условие (1.5), а условие (1.6). Так как выполнено условие (2.1), то в рассуждении перед (2.7) роли x и y менять не надо.

Является ли t_0 точкой сгущения особых точек t_n — это можно узнать построением решения в окрестности t_0. Если мы знаем предельные значения x и y при $t \to t_0$ и на основании этого построим это решение в окрестности t_0, то тем самым узнаем, существуют ли в окрестности t_0 особые точки $t_n \to t_0$. Во всех рассмотренных нами случаях мы построили решение в окрестности особых точек t_0 или доказали, что $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to t_0$ по какому-нибудь пути, на основании чего строили в окрестности t_0 решение, откуда было видно, что t_0 — изолированная особая точка. Мы рассмотрели и те случаи, когда при $t \to t_0$ одна из компонент решения имеет конечный предел (глава VI). Но вопрос о том, существуют ли точки сгущения особых точек даже для систем

$$\dot{x} = P(x,\ y),\quad \dot{y} = Q(x,\ y),$$

где P и Q — полиномы, все-таки всегда стоит.

В примере 1 мы могли бы рассматривать этот вопрос так: построим решение этой системы с начальными условиями $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = \infty$. Это, как мы видели, возможно. В соответствии с формулой (2.1) и $m = 0$ получим

$$t(x) = t_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu (t_k,\ x_k)(x - x_k)^\nu,$$

$$\zeta(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu(t_k,\ x_k)(x-x_k)^\nu,$$

откуда

$$x-x_k=\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu(t_k,\ x_k)(t-t_k)^\nu,$$

$$y^{-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu(t_k,\ x_k)(t-t_k)^\nu.$$

Следовательно, при $t\to t_k$ будет $x(t)\to x_k$ и $y(t)\to\infty$. Но возможно ли при этом решение, обладающее свойствами: при $t_k\to t_0$ будет $x_k\to\infty$ или $x\to\infty$ при $t\to t_0$, где на пути $t\to t_0$ расположены указанные $t_k\to t_0$, а $y(t)\to\infty$ при $t\to t_k$. Тогда t_0 является точкой сгущения точек t_k, для которых $y(t_k)=\infty$. И t_0 может быть комплексным. Тогда особые (полярные) точки определяются из равенства

$$\frac{1}{t-t_0}+C=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ t_n=t_0+$$
$$+\frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}-C}\to t_0$$

при $n\to\infty$, но последовательность $t_n\to t_0$ будет комплексной, порождающей вещественные значения $T_k=\dfrac{1}{t_k-t_0}+C=$ $=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$. Значения $x_k=\dfrac{1}{t_k-t_0}$ также будут комплексные, и t пробегает путь, проходящий через t_k, порождая значения $\dfrac{1}{t_n-t_0}+C=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

Можно рассмотреть так и систему

$$\dot{x}=P_2(x)Q_1(y),\quad \dot{y}=P_1(y)Q_2(x), \qquad (3.10)$$

где Q_1, P_2, P_1, Q_2 — полиномы соответственно степени m_1, m_2, n_1 и n_2. В соответствии с главой V здесь $m_1=m_1$, $n_1=n_1$, $m_2=m_2$ и $n_2=n_2$. Таким образом, здесь возможны соответственно случаи (1.5), (1.6) главы V:

$$m_1>0,\ m_1-n_1+2>0,$$

$$n_2>0,\ n_2-m_2+2>0$$

и (2.11), (2.12) данной главы

$$m_1 \geqslant 0, \ m_1 - n_1 + 2 = 0,$$
$$n_2 \geqslant 0, \ n_2 - m_2 + 2 = 0.$$

Здесь можно строить и решения в окрестности подвижных особых точек, откуда можно выяснить, будет ли последовательность подвижных особых точек у одной компоненты решения и предельная особая точка на конечном или бесконечном расстоянии у другой компоненты. Или, может быть, имеем последовательность подвижных особых точек у обеих компонент. Например, это будет в системе

$$\dot{x} = 1 + x^2, \ \dot{y} = Q_2(x)(1 + y^2),$$

где $Q_2(x)$ — полином.

В общем случае систему (3.10) можно рассмотреть так. Из (3.10) имеем

$$\varphi(y) = \int^{y} \frac{Q_1(y)}{P_1(y)} dy = \int^{x} \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx.$$

Пусть $\varphi(y)$ — многозначная функция [1] и $\varphi(y) \underset{y \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_k$, φ_k — конечное для разных ветвей, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\int^{x} \frac{Q_2(x)}{P_2(x)} dx \to \varphi_k \text{ при } x \to x_k, \ k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, имеем $y = \psi(x)$ и $y \to \infty$ при $x \to x_k$. Если $\int^{x} \frac{dx}{P_2(x) Q_1(y)} \underset{x \to x_k}{\longrightarrow} t_k$, то имеем $x \to x_k$ и $y \to \infty$ при $t \to t_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Может быть $t_k \to \infty$ или $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$. В общем случае это возможно и для системы

$$\dot{x} = P(x, y), \ \dot{y} = Q(x, y),$$

которой соответствует $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. Сначала нужно выяснить, есть ли решение $y = \psi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Это можно сделать и на основе общих теорем данной главы. Но существует ли решение $y = \psi(x) \to \infty$ при $x \to x_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и возможно ли при этом $x \to x_k$ при $t \to t_k$, $k = 1, 2, \ldots$? И будет ли при этом $t_1, t_2, \ldots \to t_0$ или $t_1, t_2, \ldots \to \infty$?

---

[1] В примере 1 $\varphi(y) = \operatorname{azctg} y = x + C$.

§ 4. ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛАВАМ V, VI

Методы исследования, использованные в главах V, VI, можно применять и в более общих случаях. Например, можно рассмотреть систему

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z), \tag{*}$$

где P и Q — полиномы от y, а относительно x — целые ряды или какие-нибудь аналитические функции. Тогда, как и для системы (1.1) главы V, возникают равенства (1.2), (1.4) и условия (1.5), после чего появляются замечания 1.1, 1.2, равенства (1.7), (1.8), замечание 1.3, лемма 1.1, следствие из леммы 1.1, теорема 1.1, теорема 1.2, теорема 3.1 главы V. Если в (*) $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 = 0$, то, как показано в главе VI, если z_0 — существенно особая точка решения, то $x(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, а $y(z)$ — неопределенное, и, кроме этого, существует решение вида

$$z(x) = z_0 + \sum_{k=m_1+1}^{\infty} \alpha_k (z_0, x_0)(x - x_0)^k,$$

$$\frac{1}{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z_0, x_0)(x - x_0)^k,$$

где ряды сходятся в области $|x - x_0| < r$, т. е. при $m_1 \geqslant 1$ функция $x = x(z)$ в окрестности точки z_0 алгебраическая m_1+1-значная, а $y(z)$ имеет алгебраический m_1+1-значный полюс. Отметим теперь следующее. Рассматривая систему

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y),$$

можно перейти к полярным координатам[1] $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{1}{r}\left[\cos\varphi\, Q(x, y) - \sin\varphi P(x, y)\right], \\ \frac{dr}{dz} &= \cos\varphi P(x, y) + \sin\varphi\, Q(x, y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\varphi Q(x, y) - \sin\varphi P(x, y)}{\cos\varphi P(x, y) + \sin\varphi Q(x, y)}. \tag{4.2}$$

[1] Так поступает, например, А. Артыков [21].

Предположим теперь, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы:

$$Q(x, y) = \sum_{k+l=1}^{m} a_{kl} x^k y^l, \quad P(x, y) = \sum_{k+l=1}^{n} b_{kl} x^k y^l.$$

Тогда

$$Q(x, y) = r \sum_{\nu=k+l=1}^{m} a_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi,$$

$$P(x, y) = r \sum_{\nu=k+l=1}^{n} b_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi$$

и уравнения (4.1), (4.2) получим в виде

$$\frac{d\varphi}{dz} = \cos\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{m} a_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi - \\ - \sin\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{n} b_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi,$$

$$\frac{dr}{dz} = \cos\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{n} b_{kl} r^{\nu} \cos^k \varphi \sin^l \varphi + \\ + \sin\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{m} a_{kl} r^{\nu} \cos^k \varphi \sin^l \varphi, \tag{4.3}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \left\{ \cos\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{m} a_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi - \right. \\ \left. - \sin\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{n} b_{kl} r^{\nu-1} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \right\} \times \\ \times \left\{ \cos\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{n} b_{kl} r^{\nu} \cos^k \varphi \sin^l \varphi + \right. \\ \left. + \sin\varphi \sum_{\nu=k+l=1}^{m} a_{kl} r^{\nu} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \right\}^{-1}. \tag{4.4}$$

Теперь, изучая на основании общей теории уравнения (4.3) и (4.4), мы получим сведения о свойствах решений исходных уравнений. Если из (4.4) получим решение $\varphi(r)\to\varphi_0$ при $r\to\infty$, то в вещественной области получим решение исходной системы, обладающее свойством $x\to\infty$ и $y\to\infty$ вдоль луча $\varphi=\varphi_0$. Если же $\varphi\to\infty$ при $r\to\infty$, то точка (x, y) уходит в бесконечность по спирали. Подставляя во второе уравнение системы (4.3) $\varphi=\varphi(r)$, получим уравнение, из которого увидим, будет ли это при $z\to z_0$, z_0 конечное или при $z\to\infty$.

Пусть, например, $\cos\varphi_0 \sum\limits_{k+l=n} b_{kl}\cos^k\varphi_0\sin^l\varphi_0 \neq 0$ и $n > m$. Тогда при больших r вблизи $\varphi=\varphi_0$ имеем

$$\frac{dr}{dz} \doteq \cos\varphi_0 \sum_{k+l=n} b_{kl}\cos^k\varphi_0\sin^l\varphi_0 r^n ,$$

откуда видим, что $r\to\infty$ при $z\to z_0$ конечное $(n>1)$.

Рассмотрим уравнение (4.4) и пусть $m=n$. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\varphi}{dr} \doteq \Big(\sum_{\nu=1}^{m} r^{\nu-1} \sum_{k+l=\nu} \cos\varphi a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi - \sin\varphi b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi\Big) \times$$
$$\times\Big(\sum_{\nu=1}^{m} r^{\nu} \sum_{k+l=\nu} \cos\varphi b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi + \sin\varphi a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi\Big)^{-1}, \tag{4.5}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \Big\{ r^{m-1}\Big[\cos\varphi \sum_{k+l=m} a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi - \sin\varphi \times$$
$$\times \sum_{k+l=m} b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi\Big] + \sum_{\nu=1}^{m-1} r^{\nu-1}\Delta_\nu(\varphi)\Big\}\times$$
$$\times\Big\{ r^m\Big[\cos\varphi \sum_{k+l=m} b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi + \sin\varphi\times \tag{4.6}$$
$$\times\sum_{k+l=m} a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi\Big] + \sum_{\nu=1}^{m-1} r^\nu\overline{\Delta}_\nu(\varphi)\Big\}^{-1},$$

где

$$\Delta_\nu(\varphi) = \cos\varphi \sum_{k+l=\nu} a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi - \sin\varphi \sum_{k+l=\nu} b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi,$$

$$\overline{\Delta}_\nu(\varphi) = \cos\varphi \sum_{k+l=\nu} b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi + \sin\varphi \sum_{k+l=\nu} a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi.$$

Обозначим

$$M(\varphi) = \sum_{k+l=m} a_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi, \qquad N(\varphi) = \sum_{k+l=m} b_{kl}\cos^k\varphi\sin^l\varphi.$$

Предположим, что m нечетное и

$$M(\varphi) = \sin\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad N(\varphi) = \cos\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

где $P(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — определенно положительная форма, и так как $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, то $P(\cos\varphi, \sin\varphi) \geqslant \delta > 0$. Но тогда

$$\cos\varphi M(\varphi) - \sin\varphi N(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi) -$$
$$- \cos\varphi\sin\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi) \equiv 0,$$

а $\cos\varphi N(\varphi) + \sin\varphi M(\varphi) = P(\cos\varphi, \sin\varphi) \geqslant \delta > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^{m-2}P(\varphi, r)}{r^m[P(\cos\varphi, \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi, r)]} =$$
$$= \frac{1}{r^2}\,\frac{P(\varphi, r)}{P(\cos\varphi, \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi, r)},$$

где $|P(\varphi, r)|$ ограничено и $\overline{P}(\varphi, r) \to 0$ при $r \to \infty$. Следовательно,

$$\varphi = \int_{r_1}^{r} \frac{1}{r^2}\,\frac{P(\varphi, r)\,dr}{P(\cos\varphi, \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi, r)} +$$
$$+ \varphi_1 \to \varphi_0 \text{ конечное при } r \to \infty.$$

Пусть теперь

$$M(\varphi) = \cos\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad N(\varphi) = -\sin\varphi P(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Тогда $\cos\varphi N(\varphi) + \sin\varphi M(\varphi) \equiv 0$, а $\cos\varphi M(\varphi) - \sin\varphi N(\varphi) = P(\cos\varphi, \sin\varphi) \geqslant \delta > 0$. В этом случае

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^{m-1}[P(\cos\varphi, \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi, r)]}{r^{m-1}[q(\cos\varphi, \sin\varphi) + P_1(\varphi, r)]},$$

где $\overline{P}(\varphi, r) \to 0$ и $P_1(\varphi, r) \to 0$ при $r \to \infty$, а $q(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ограничено. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{d\varphi}{dr}\right| = \frac{|P(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi,\ r)|}{|q(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + P_1(\varphi,\ r)|} >$$

$$> \frac{|P(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + \overline{P}(\varphi,\ r)|}{K},$$

где $|q(\cos\varphi,\ \sin\varphi) + P_1(\varphi,\ r)| \leqslant K$ и $\varphi \to \infty$ при $r \to \infty$. Таким образом, иногда из (4.4) непосредственно видим, будет ли $\varphi \to \varphi_0$ или $\varphi \to \infty$ при $r \to \infty$.

Рассмотрим уравнения (4.3). Здесь правые части являются полиномами относительно r, поэтому эти уравнения можно изучать на основании результатов, полученных для уравнений (1.4) главы V. Пусть в (4.3) $m = n$. Полагая в (4.3)

$$\frac{d\varphi}{dz} = P(\varphi,\ r), \qquad \frac{dr}{dz} = Q(\varphi,\ r),$$

при $r = \zeta^{-1}$ получим

$$P_1(\varphi,\ r) = \zeta^{m_1} P(\varphi,\ \zeta^{-1}), \qquad m_1 = m - 1,$$

$$P_1(\varphi,\ 0) = \cos\varphi \sum_{k+l=m} a_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi -$$

$$- \sin\varphi \sum_{k+l=m} b_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi.$$

Как мы видели, здесь возможен случай $P_1(\varphi,\ 0) = P(\cos\varphi,\ \sin\varphi) \geqslant \delta > 0$, где $P(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ — определенно положительная форма. Это заменяет прежнее предположение относительно уравнений (1.1) в V главе, где предполагалось $P_1(\varphi,\ 0) = C \neq 0$. Но здесь возможен и этот случай, так как возможно $P(\cos\varphi,\ \sin\varphi) = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^m = 1$. Легко видеть, что здесь будет

$$Q_1(\varphi,\ 0) = \cos\varphi \sum_{k+l=m} b_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi +$$

$$+ \sin\varphi \sum_{k+l=m} a_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi, \qquad n_1 = m,$$

поэтому $m_1 - n_1 + 2 = 1$. Но здесь возможно и $Q_1(\varphi,\ 0) \equiv 0$, тогда будет $Q_1(\varphi,\ 0) = \cos\varphi \sum\limits_{k+l=m-1} b_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi + \sin\varphi \times \times \sum\limits_{k+l=m-1} a_{kl} \cos^k\varphi \sin^l\varphi$ ограничено и $n_1 = m - 1$, $m_1 - n_1 + + 2 = 2$.

Таким образом, здесь будут выполнены условия (1.2) и (1.5) главы V. Но тогда мы имеем для системы (4.3) результаты, полученные относительно системы (1.1) главы V при условиях (1.2) и (1.5). Например, система (4.3) не имеет решения $\varphi \to \varphi_0$, $r \to \infty$ при $z \to z_0$. Нет решения с $\varphi \to \varphi_0$, r — неограниченное при $z \to z_0$. Из предыдущего следует

Теорема 1.2. *Если z_0 — особая точка решения уравнений (4.3), то при $z \to z_0$ $|\varphi(r)|$ не ограничено.*

Глава VII

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ТИПА $x \to \infty$ И $y \to \infty$ ПРИ $z \to z_0$

§ 1. О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ

В теоремах главы V указаны условия, при выполнении которых особой подвижной точкой z_0 решения системы (1.1) может быть только такая, что

$$x \to \infty \text{ и } y \to \infty \text{ при } z \to z_0.$$

Но не доказано существование таких подвижных особых точек. Как мы видели, в работах Пенлеве для некоторых уравнений (уравнений Пенлеве) доказано существование таких точек z_0 (они оказались полюсами) и тем самым был дан способ построения решений в окрестности этих точек. Доказательство существования этих особых точек — полюсов z_0 осуществлено по такому плану. Сначала искалось формальное полярное разложение. И когда оно находилось, то из него извлекалась замена переменных, приводящая к системе, для которой искомое решение вырождалось в такое, что были выполнены условия теоремы Коши. И отсюда же находились вспомогательные функции, с помощью которых доказывалось отсутствие особых точек всякого другого типа, кроме найденных полюсов.

Таким образом, если нет формального полярного разложения, то метод Пенлеве сразу разрушается. Мы предложим сейчас другой метод построения решений, указанных в главе V. Этот метод, в частности, применим и к тем уравнениям, которые рассмотрел Пенлеве своим методом. Но наш метод применим к уравнениям более широкого класса.

Вместе с построением решения мы доказываем и его существование, но это не всегда удается. Если же существование такого решения как-то доказано, то этот метод во всяком случае позволяет построить асимптотику этого решения.

Начнем с уравнения Пенлеве, т. е. докажем существование этого решения, указанного в главе V, и построим его методом, отличным от метода Пенлеве, исходя из другой позиции.

§ 2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ $x\to\infty$, $y\to\infty$ ПРИ $z\to z_0$

Итак, рассмотрим уравнение $\frac{d^2x}{dz^2}=6x^2+z$, которому соответствует система

$$\frac{dy}{dz}=6x^2+z=Q,\qquad \frac{dx}{dz}=y=P. \tag{2.1}$$

Согласно теореме 4.1 главы V, если z_0 — особая точка решения системы (2.1), то имеем

$$x(z)\to\infty \text{ и } y(z)\to\infty \text{ при } z\to z_0. \tag{2.2}$$

Здесь, как и в главе V (4.3), (4.4), получим

$$\frac{d|y|}{dl}=\delta_1(l)\,|6x^2+z|, \tag{2.3}$$

где $0<\delta\leqslant|\delta_1(l)|\leqslant M$ и

$$\frac{d|x|}{dl}=\delta_2(l)\,|y|, \tag{2.4}$$

$$0<\delta<|\delta_2(l)|\leqslant M,$$

откуда и следует (2.2), если z_0 — особая точка.

Докажем существование решения (2.2) и построим его. Из (2.1) имеем

$$ydy=6x^2dx+zdx \tag{2.5}$$

или в силу второго уравнения (2.1)

$$ydy=6x^2dx+zydz. \tag{2.6}$$

Отсюда

$$y^2=4x^3+\int_{z_1}^{z}2zydz+C \text{ или } 4x^3=y^2-\int_{z_1}^{z}2zydz-C. \tag{2.7}$$

Рассмотрим интеграл, стоящий справа в (2.7).

Обозначим

$$\alpha(z)=y^{-2}\int_{z_1}^{z}zydz. \tag{2.8}$$

Покажем, что при $z\to z_0$ величина $\alpha(z)$ есть малая порядка zx^{-2}. Действительно,

$$|\alpha(z)|\leqslant|y|^{-2}\int_{0}^{l}|z|\,|y|\,dl,$$

$$\lim |y|^{-2} \int\limits_0^l |z|\,|y|\,dl = \lim \frac{|y|\,|z|}{2\,|y|\,\dfrac{d\,|y|}{dl}} =$$

$$= \lim \frac{|z|}{2\,\delta_1(l)|\,6\,x^2 + z|} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|z|}{2\,|x|^2\,\delta_1(l)\,|6 + zx^{-2}|} = 0. \qquad (2.9)$$

Отсюда и следует, что

$$\alpha(z) = O(zx^{-2}), \qquad (2.10)$$

где $O(\gamma)$ — малая такого же порядка, как и γ.

Рассмотрим теперь величину

$$\beta_n(x) = \int\limits_\infty^x O(x^{-n})\,dx, \qquad n > 1.$$

В силу второго уравнения системы (2.1)

$$\beta_n(x) = \int\limits_{z_0}^z O(x^{-n})\,y dz.$$

Пользуясь формулой (2.7), получаем

$$\lim \left\{ \frac{1}{|x|^{1-n}} \int\limits_0^l |O(x^{-n})|\,|y|\,dl \right\} =$$

$$= \lim \frac{|O(x^{-n})|\,|y|}{(1-n)\,|x|^{-n}\,|y|\,\delta(l)} = O(1),$$

где $O(1)$ — величина ограниченная. Следовательно, можно написать

$$\beta_n(x) = O(x^{1-n}), \qquad n > 1, \qquad (2.11)$$

т. е. при $x \to \infty$ (или $z \to z_0$) величина $\beta_n(x)$ будет малой порядка x^{1-n}.

На основании (2.9) и (2.10) из (2.5) получаем

$$4\,x^3 = y^2\,[1 + O(x^{-2}) - Cy^{-2}]$$

или

$$Cy^{-2} = \frac{C}{4}\,x^{-3}\,[1 + O(x^{-2}) - Cy^{-2}]. \qquad (2.12)$$

Так как $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to z_0$, то при больших $|x|$ имеем $|Cy^{-2}| < Cx^{-2}$. Это позволяет переписать (2.12) в виде

$$4x^3 = y^2 [1 + O(x^{-2})]. \tag{2.13}$$

Из равенства (2.13) легко выводим

$$y^2 = 4x^3 [1 + O(x^{-2})]. \tag{2.14}$$

Здесь, конечно, $O(x^{-2})$ не то, которое в равенстве (2.13), но снова малая порядка x^{-2} при больших $|x|$, так как мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{1 + O(x^{-2})} = 1 + O_1(x^{-2})$$

и опустили индекс 1. Из равенства (2.14) получаем[1])

$$y = 2x^{3/2} [1 + O(x^{-2})]. \tag{2.15}$$

Теперь из уравнений (2.1) на основании (2.15) имеем

$$dz = \frac{dx}{y} = \frac{1 + O(x^{-2})}{2x^{3/2}} dx.$$

Интегрируя слева от z_0 до z и справа от ∞ до x, в соответствии с (2.2) найдем

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + \int\limits_{\infty}^{x} \frac{1}{2} x^{-3/2} O(x^{-2})\, dx =$$

$$= -x^{-1/2} + \int\limits_{\infty}^{x} O(x^{-7/2})\, dx. \tag{2.16}$$

На основании (2.11) это перепишем в виде

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + O(x^{-5/2}). \tag{2.17}$$

Подставляя отсюда z в (2.5), получим

$$ydy = 6x^2 dx + [z_0 - x^{-1/2} + O(x^{-5/2})]\, dx.$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0 x - 4x^{1/2} + \int\limits_{\infty}^{x} O(x^{-5/2})\, dx + C. \tag{2.18}$$

[1]) Таким образом, все решения уравнений (2.1), обладающие свойством (2.2), на плоскости (x, y) асимптотически приближаются к кривой $y = 2x^{3/2}$.

На основании (2.11) это запишется в виде

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0x - 4x^{1/2} + O(x^{-3/2}) + C, \tag{2.19}$$

где C — произвольная постоянная. Из (2.19) получаем

$$y^2 = 4x^3\left[1 + \frac{1}{2}z_0x^{-2} - x^{-5/2} + \frac{1}{4}Cx^{-3} + O(x^{-9/2})\right]. \tag{2.20}$$

Отсюда

$$y = 2x^{3/2}\left[1 + \frac{z_0}{4}x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-5/2} + \frac{1}{8}Cx^{-3} + O(x^{-4})\right]. \tag{2.21}$$

Пользуясь этой формулой, из (2.1) найдем

$$dz = \frac{dx}{y} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}z_0x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-5/2} - \frac{1}{8}Cx^{-3} + O(x^{-4})}{2x^{3/2}}\,dx. \tag{2.22}$$

Интегрируя это равенство, получим

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + \frac{1}{20}z_0x^{-5/2} - \frac{1}{12}x^{-3} +$$

$$+ \frac{1}{56}Cx^{-7/2} + O(x^{-9/2}). \tag{2.23}$$

Если существование решения (2.2) доказано, то (2.15) и (2.17), а также (2.21) и (2.23) доставляют асимптотическое разложение этого решения. И этот процесс разворачивания асимптотических рядов можно продолжить как угодно далеко. Сходимость этих рядов пока не доказана. Но позднее мы докажем и сходимость этих рядов и тем самым докажем существование решений, обладающих свойством (2.2).

Заметим теперь следующее. Формула (2.18) возникает из (2.5) после замены z на основании (2.17) и интегрирования. Следовательно, величина $O(x^{-5/2})$ в формуле (2.18) есть величина с таким же обозначением, стоящая в правой части формулы (2.17), т. е. слагаемое в z. Подставляя в (2.18) все более точные разложения $O(x^{-5/2})$, получаемые в виде разложения по степеням $x^{-1/2}$, мы будем получать все более точные разложения в виде, аналогичном формулам (2.15) и (2.21), т. е. в виде ряда Лорана по степеням величины $x^{-1/2}$. При этом очевидно, что произвольная постоянная в формуле (2.18) порождает в разложении y член $\frac{1}{4} Cx^{-3/2}$; так как еще формула (2.21) есть не приближенное значение y, а точное, в котором не определено лишь слагаемое $O(x^{-4})$, то ясно, что, подставляя все более точные разложения $O(x^{-5/4})$ в (2.18), мы должны оставлять неизменным значение произвольной постоянной C. Как видно из (2.18), C есть также предельное значение функции $\psi = y^2 - 4x^3 - 2z_0x + 4x^{1/2}$, составленной для рассматриваемого решения, при $z \to z_0$. По самому этому способу получения решения системы (2.1) (в виде разложения z и y по степеням величины $x^{-1/2}$) видно, что мы получаем все решения этой системы, обладающие свойством (2.2). Это семейство решений зависит от произвольной постоянной C (кроме z_0).

Переходим к доказательству сходимости получаемых разложений $y(x)$ и $z(x)$ в ряд по степеням величины $x^{-1/2}$. Но сначала заметим следующее.

Пенлеве извлек замену переменной из формального полярного разложения решений, которая позволила решить проблему. Мы построили формальное асимптотическое разложение для решения, обладающего свойством (2.2). Из этого разложения мы и найдем замену переменных, приводящую к новой системе, для решения которой можно указать сходящиеся разложения. Очевидно, этот метод охватывает более широкий класс уравнений.

Из (2.15) видим, что, полагая

$$u = yx^{-3/2}, \qquad y = ux^{3/2}, \tag{2.24}$$

получим для рассматриваемого решения $u \to 2$ при $z \to z_0$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}\, x^{-3/2} - \frac{3}{2}\, yx^{-5/2}, \tag{2.25}$$

или в силу (2.1) и (2.24)

$$\frac{du}{dx} = \frac{6x^2 + z}{u}\, x^{-3} - \frac{3}{2}\, ux^{-1}. \tag{2.26}$$

Запишем еще и второе из уравнений (2.1) на основании (2.24) в виде

$$\frac{dz}{dx} = u^{-1}x^{-3/2}. \tag{2.27}$$

Полагая $v = x^{-1/2}$, запишем уравнения (2.26) и (2.27) в форме

$$v\frac{du}{dv} = \frac{3u^2 - 12}{u} - \frac{2zv^4}{u}, \qquad \frac{dz}{dv} = -\frac{2}{u}. \tag{2.28}$$

Пусть

$$u - 2 = \tau, \qquad z - z_0 = \theta. \tag{2.29}$$

Тогда из уравнений (2.28) получаем

$$v\frac{d\tau}{dv} = \frac{3(\tau^2 + 4\tau) - 2(z_0 + \theta)v^4}{2 + \tau}, \qquad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{2}{2 + \tau} \tag{2.30}$$

и

$$\tau \to 0, \qquad \theta \to 0 \text{ при } v \to 0. \tag{2.31}$$

Так как $\tau = O(v^4)$ на основании (2.15) (т. е. τ есть малая порядка v^4 при $v \to 0$), то положим $\tau = v^3 w$. Тогда уравнения (2.30) переходят в уравнения

$$v\frac{dw}{dv} = \frac{6w - 2(z_0 + \theta)v}{2 + v^3 w}, \qquad \frac{d\theta}{dv} = -\frac{2}{2 + v^3 w}. \tag{2.32}$$

Полагая

$$\zeta = \theta + v, \qquad \eta = w - \frac{1}{2} z_0 v, \tag{2.33}$$

из уравнений (2.32) найдем

$$\begin{gathered} v\frac{d\eta}{dv} = \frac{6\eta + 2v^2 - 2v\zeta - \frac{1}{2} v_0 v^4 \left(\frac{1}{2} z_0 v + \eta\right)}{2 + v^3\left(\frac{1}{2} z_0 v + \eta\right)}, \\ v\frac{d\zeta}{dv} = \frac{v^4\left(\frac{1}{2} z_0 v + \eta\right)}{2 + v^3\left(\frac{1}{2} z_0 v + \eta\right)}. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Преобразование (2.33) имело целью уничтожить справа первые степени v и привести линейные члены относительно неизвестных к каноническому виду.

Перепишем уравнения (2.34) в виде

$$\begin{gathered} v\frac{d\eta}{dv} = 3\eta + v^2 - \zeta v + \omega_5(v, \eta, \zeta), \\ v\frac{d\zeta}{dv} = \psi_5(v, \eta, \zeta). \end{gathered} \tag{2.35}$$

Здесь ω_5 и ψ_5 — сходящиеся в окрестности точки $v=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$, степенные ряды, начинающиеся с пятых степеней. Нас интересует решение уравнений (2.35), определенное начальными условиями

$$\eta \to 0 \text{ и } \zeta \to 0 \text{ при } v \to 0. \tag{2.36}$$

Решение уравнений (2.35), обладающее свойством (2.36), находится в виде

$$\eta = -v^2 + Cv^3 + \sum_{k\geqslant 4} \eta_k v^k, \qquad \zeta = \sum_{k\geqslant 5} \zeta_k v^k, \tag{2.37}$$

где C — произвольная постоянная. Эти ряды сходятся (см. главу II, замечание к теореме 1.6) в окрестности $v=0$. Возвращаясь к переменным x, y и z, получим

$$\begin{gathered} y = 2\, v^{-3} + \frac{1}{2} z_0 v - v^2 + \frac{1}{4} Cv^3 + \ldots, \\ z = z_0 - v + \frac{1}{20} z_0 v^5 - \frac{1}{12} v^6 + \frac{1}{56} Cv^7 + \ldots, \\ v = x^{-1/2}. \end{gathered} \tag{2.38}$$

Мы здесь заменили коэффициент C при v^3 на $\frac{1}{4} C$ и продолженное разложение для z взяли из равенства (2.23).

Ранее мы получали разложения типа (2.21) и (2.23), которые доставляли во всяком случае асимптотическое представление решений, определенных свойством (2.2), и содержали все такие решения. Теперь, рассуждая иным образом, мы получили некоторое семейство таких решений в виде сходящихся рядов по степеням величины $v=x^{-1/2}$ и также зависящее от произвольного постоянного C (в обоих случаях коэффициенты при v^3).

Таким образом, оба эти семейства совпадают, содержат все решения, определенные свойством (2.2), и представлены сходящимися рядами.

Обращая (2.38), получим

$$\begin{gathered} x = \frac{1}{(z-z_0)^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k (z-z_0)^k\right], \\ y = \frac{1}{(z-z_0)^3}\left[-2 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k (z-z_0)^k\right], \end{gathered} \tag{2.39}$$

где x_k, y_k — постоянные, и ряды, стоящие в числителях, сходятся в области $|z-z_0|<r$, $r>0$. Следовательно, в точке z_0 решение, определенное свойством (2.2), имеет полюс, и такие решения образуют семейство, содержащее одну произвольную постоянную. Теперь решение системы (2.1), определенное свойством (2.2), можно искать и непосредственно в виде (2.39).

Мы восстановили результат Пенлеве, но наш метод применим к системам более широкого класса (которые Пенлеве отбросил как уравнения, имеющие решения с подвижными многозначными особыми точками).

§ 3. УРАВНЕНИЕ (3.3)

Для уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 6x^2 + z \tag{3.1}$$

мы доказали сходимость разложений (2.21), (2.23), которые получили по методу асимптотических разложений, и тем самым доказали существование решений системы (2.1), соответствующей уравнению (3.1), обладающих свойством

$$x \to \infty, \quad y \to \infty \text{ при } z \to z_0. \tag{3.2}$$

Иногда, однако, можно иначе доказать существование такого решения, а тогда и полученные асимптотические разложения приобретают действительный смысл.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 6x^2 + z^2, \tag{3.3}$$

которому соответствует система

$$\frac{dx}{dz} = y, \quad \frac{dy}{dz} = 6x^2 + z^2. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) не является таким, подвижные особые точки которого являются однозначными. Поэтому метод Пенлеве исследования особых подвижных точек здесь разрушается. Если для решения системы (3.4) возьмем начальные значения $x(0)>0$, $y(0)>0$, то, очевидно, решение системы (3.4) на вещественной оси z будет вещественным и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2+z^2}{y} > \frac{6x^2}{y}, \quad y^2 > 4x^3 + C. \tag{3.5}$$

Поэтому на вещественной оси будет

$$\frac{dx}{dz} = y > \sqrt{4x^3 + C},$$

$$z < \int\limits_{x(0)}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 + C}} \xrightarrow[x\to\infty]{} A, \qquad A \text{ конечное.}$$

Следовательно, существует решение, для которого $x(z) \to \infty$ при $z \to z_0$. А тогда в силу (3.5) и $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Таким образом, система (3.4) имеет вещественное решение, обладающее свойством

$$x(z) \to \infty, \qquad y(z) \to \infty \text{ при } z \to z_0, \tag{3.6}$$

для которого можно строить асимптотическое разложение по вышеуказанному способу.

Заметим, что для системы (3.4) выполнены условия теоремы 4.1 главы V. В [11, глава XIII, § 7] для системы (3.4) построено решение по такому методу в виде сходящихся рядов

$$\begin{aligned} y &= 2v^{-3} + \frac{t_0^2}{2} v + \sum_{m+m_1=1} C_1^{(mm_1)} (v^3 \ln v)^{m_1} v^m, \\ z &= z_0 - v + \sum_{m+m_1=1} C_2^{(mm_1)} v^m (v^3 \ln v)^{m_1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

при достаточно малом v.

За последние 20 лет в Белоруссии выполнен большой цикл работ, посвященный исследованию уравнений с позиций аналитической теории дифференциальных уравнений.

Глава VIII

О ПРОБЛЕМЕ РИМАНА

В дни, когда Риман формулировал свою проблему определения системы функций по заданной группе монодромии, о которой идет речь в настоящей монографии, аналитическая теория дифференциальных уравнений находилась лишь в начальной стадии (1857 г.). И только гениальность Римана, его огромная интуиция позволили ему в общем правильно сформулировать проблему, которая захватила лучших математиков второй половины XIX и первой трети XX в. (Гильберта, Шлезингера, Биркгофа, Племели, Гарнье и других). Думали об этой задаче Пуанкаре, Адамар.

Некоторая неопределенность в формулировке Римана была неизбежной, так как в аналитической теории дифференциальных уравнений недоставало еще очень многих глубоких фактов, без которых невозможно было понять точно содержание проблемы Римана. Но уже то, что сделал Риман, вызывает удивление. Исходя из внутренних свойств, предписанных семейству функций, он доказал, что эти функции являются решениями линейного дифференциального уравнения и притом с рациональными коэффициентами. И он требовал, чтобы рассматриваемая система функций удовлетворяла линейному уравнению простейшего класса. Но Риман не формулировал, каким это простейшее уравнение должно быть.

После того как Фукс выделил из линейных уравнений так называемые уравнения класса Фукса с регулярными особыми точками, стали склоняться к тому, что эти уравнения и являются простейшими для проблемы Римана, т. е. семейство функций с заданной группой монодромии [1] и должно определять эти уравнения. Если не брать в проблеме Римана простейшие дифференциальные уравнения, то задача будет неоп-

[1] Которые исчерпывают особенности этих функций.

ределенной, так как мы попадем в более широкий класс функций с неопределенными свойствами.

В конце прошлого века и в начале этого Шлезингер уже догадывался, что решение проблемы Римана надо искать в классе решений регулярной системы

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^{m} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$

где X — интегральная матрица, U_k — постоянные матрицы и z, a_k — комплексные или вещественные числа.

Большие исследования в начале XX века по линейным дифференциальным уравнениям и по вопросам, связанным с проблемой Римана и ее обобщениями [1], провел Биркгоф.

Но проблема Римана до конца 20-х годов оставалась в сущности нетронутой, несмотря на попытки выдающихся математиков сдвинуть ее с места. И только в конце 20-х годов Л.-Д. разрешил эту и более общие задачи для малых параметров. Он понял, что здесь нужна теория функций от многих матриц и построил ее. И на основе этого разрешил проблему Римана для малых параметров. Но сначала он разрешил проблему Пуанкаре. По-видимому, уже Пуанкаре понял, что прежде нужно решить обратную проблему (проблему Пуанкаре), изучая группу монодромии линейного уравнения. По-видимому, он имел в виду и проблему Римана, но сначала считал необходимым изучить группу монодромии. Однако он изучал группу монодромии одного линейного уравнения [2] и тем самым не приближался к решению проблемы, а уходил от него. Но общая мысль о том, что до проблемы Римана надо изучать группу монодромии, была правильной. Это обнаружилось в блестящих по своей простоте и глубоких по замыслу работах Лаппо-Данилевского. Заметим, что Лаппо-Данилевский, создавая эти работы, не имел высшего образования, что является поразительным.

Лаппо-Данилевский стал изучать систему (1) и сначала решил проблему, которую назвал проблемой Пуанкаре,— это естественно, так как в сущности Пуанкаре этому кругу работ посвятил много сил (но, как мы отметили, рассматривая одно линейное уравнение n-го порядка). Следуя общим идеям Фукса, Лаппо-Данилевский в окрестности особых точек a_k уравнений (1) $X(z)$ представил в виде

$$X(z) = (z - a_k)^{W_k} X_k(z - a_k), \tag{2}$$

[1] Мы не касаемся здесь так называемой граничной задачи, которая также была сформулирована Риманом, но потом стала называться проблемой Гильберта.

[2] Что в те дни было естественным, так как тогда склонялись к тому, что проблема Римана связана с одним уравнением типа Фукса.

где матрица W_k — функция матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$, а

$$X_k(z-a_k)=\sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-a_k)^k \tag{3}$$

и матрицы B_k суть функции матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$ с $B_0 \neq 0$.

Здесь множитель $(z-a_k)^{W_k}$ включает в себя всю особенность функций, введенных в рассмотрение Риманом. В частности, этот множитель (или матрица $W_k(U)$) характеризует многозначность этих функций в окрестности особой точки $z=a_k$. При обходе переменной z точки a_k $X(z)$ умножается слева на матрицу $V_k=e^{2\pi i W_k}$, $k=1, \ldots, m$. Здесь $V_1, \ldots, V_m$ и есть группа монодромии, введенная в рассмотрение Риманом.

Лаппо-Данилевский в окрестности нулевых значений матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$ нашел W_k в виде сходящихся рядов

$$W_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu} Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b). \tag{4}$$

Кроме этого, он показал, что W_j — мероморфные функции от $U_1, \ldots, U_m$, и нашел эти общие представления уже при всех возможных значениях $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Этим он и решил проблему Пуанкаре для системы (1).

Из (4) Лапо-Данилевский находит и U_j в виде сходящихся рядов в окрестности нулевых W_j:

$$U_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\ldots m} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu} R_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b). \tag{5}$$

Таким образом, здесь в алгорифмическом виде решена и проблема Римана в окрестности нулевых $|W|$ или для $V_1, \ldots, V_m$, близких к I. С этого момента проблема Римана получила точную формулировку: даны $W_1, W_2, \ldots, W_m$, характеризующие многозначность и вообще всю особенность X в окрестности точек $z=a_k$ $(k=1, \ldots, m)$. Найти $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в системе (1) как функции $W_1, W_2, \ldots, W_m$. В окрестности нулевых $|W|$ матрицы $U_1, \ldots, U_m$ даны в виде (5), таким образом, надо найти эти $U_1, \ldots, U_m$ вне окрестности нулевых значений W и изучить эти функции.

Заметим, что система (1) сводится к уравнению класса Фукса

$$u^{(n)}+p_1(z)\,u^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,u=0, \tag{6}$$

но не наоборот, так как при сведении уравнения (6) к системе (1) в коэффициентах уравнений (1) могут появиться полюсы второго порядка, т. е. решения уравнений (1) составляют только часть функций, определенных уравнениями класса

Фукса вида (6). Другими словами, (1) и есть наипростейшие дифференциальные уравнения, определяющие свойство функций, введенных в рассмотрение Риманом. Класс функций, определенных Риманом, исчерпывает множество функций, определенных уравнением (1). Таким образом, исчезла вся неопределенность формулировки проблемы Римана.

Пусть задано уравнение (1), т. е. заданы $U_1, \ldots, U_m$, появляются $W_1, \ldots, W_m$, и наоборот, если заданы $W_1, \ldots, W_m$, определяются аналитические функции $U_1, \ldots, U_m$ от $W_1, \ldots, W_m$.

В настоящей монографии решается проблема Римана в целом для системы

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^{3} \frac{U_k}{z - a_k},$$

где и X, и U_k — матрицы 2-го порядка, т. е. для системы двух уравнений с тремя особыми точками a_1, a_2, a_3 на конечном расстоянии.

Прибавление здесь только одного[1] слагаемого $\dfrac{U_3}{z-a_3}$ принципиально меняет проблему, порождает много новых направлений аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Каков был путь решения проблемы Римана у меня? В 1937 г. я решил проблему Пуанкаре в иррегулярном случае (см. главу I). В эти дни я хорошо уже знал всего Лаппо-Данилевского и классиков, поэтому сразу взялся за проблему Римана. Сначала дело свелось к 12 уравнениям в частных производных первого порядка[2] — это уравнения (2.12), (2.13) и (2.14) главы XII, затем — к 5 обыкновенным уравнениям — это уравнения (2.29) — (2.33) главы XII.

Удалось построить метод нахождения стационарных интегралов и найти 3 интеграла: (3.1*), (3.2_1) и (3.13) (глава XII), после чего надо было рассмотреть два уравнения (3.22_1) или в общем виде (4.3):

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sqrt{P(x, y)}}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{P(x, y)}}{1 - z}.$$

В связи с этим сначала я решил рассмотреть систему общего вида

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z) \tag{7}$$

[1] Как увидим, в случае двух особых точек a_1, a_2 задача просто решается.

[2] При этом оказалось, что если так же рассматриваем систему Гаусса, то правые части уравнений (2.14) главы XII равны нулю и все неизвестные являются постоянными, поэтому задача в случае Гаусса становится элементарной, все новые направления исчезают.

и обратился к работам Пенлеве, который рассмотрел уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = P(w', w, z), \tag{8}$$

где P — рациональная функция от w', w.

Пенлеве указал такие P, при которых уравнения (8) не содержат многозначных подвижных особых точек. Таких P нашлось, грубо говоря, всего 6 — довольно простых. Как оказалось, решения этих уравнений не содержат многозначных и существенно особых подвижных точек.

Но ни одно из этих исследований и методов Пенлеве не оказалось полезным и вот почему.

1. Система (7) не сводится к уравнению (8) с рациональной функцией P, а это существенно меняет дело.

2. Пенлеве упрощал уравнение (8), отбрасывая такие уравнения, решения которых явно имеют подвижные многозначные особые точки. Я не мог ничего отбрасывать, а должен был у заданной системы изучить все особые точки, как подвижные, так и неподвижные.

Это сразу заставило отказаться от всех приемов исследования Пенлеве, поэтому пришлось заново изучать систему (7) (см. главы V—VII). Но все это снова оказалось бесполезным для проблемы Римана. Здесь сказывается абсолютная негрубость задач аналитической теории дифференциальных уравнений. Что это означает?

Пенлеве, рассматривая уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z, \tag{9}$$

доказал, что подвижными особыми точками решений здесь могут быть только полюсы второго порядка. Как он это доказывает? Сначала он нашел формальное решение типа

$$w = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k (z - z_0)^k, \tag{10}$$

пользуясь которым доказал и сходимость этого разложения и отсутствие других подвижных особых точек. Если в уравнении (9) справа хоть что-нибудь изменить, полярное разложение (10) исчезнет и неизвестно, какую форму решения можно ожидать, поэтому метод доказательства разрушается. Как угодно малые изменения дифференциального уравнения (9) резко меняют аналитическую природу решения.

Итак, пришлось вернуться к системе

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{z}\sqrt{P(x, y)}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{2}{1 - z}\sqrt{P(x, y)} \tag{11}$$

и заново начать исследования свойств решений этой системы. Здесь при частных значениях коэффициентов система вырождается в систему

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{xy(x+y)},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{xy(x+y)}. \tag{12}$$

Даже эта предельная система, которую надо было рассмотреть отдельно (глава X), потребовала многих новых методов исследования. Заметим еще, что и иррациональность в правой части этих уравнений сильно меняет привычные методы исследования (глава IX).

Какие же задачи надо было решить для систем (11), (12)?

I. Какие подвижные особые точки z решений здесь возможны?

II. Как построить решения в окрестности подвижных особых точек?

III. Какие предельные значения у решений возможны при $z\to 0$, $z\to 1$ и $z\to\infty$?

IV. Как построить эти решения?

Здесь встретилось много неожиданного. Система (11) имеет стационарные решения $x\equiv x_0$, $y\equiv y_0$, роль которых оказалась очень большой и интересной в проблеме Римана. Выяснилось, что вообще не все решения системы (11) имеют отношение к проблеме Римана и надо было указать, какие из решений системы (11) связаны с проблемой Римана.

Некоторые решения системы (11) можно получить из разложений Лаппо-Данилевского. Принципиально важным и очень трудным был вопрос о том, какие подвижные особые точки это решение имеет. Дело в том, что эти решения, полученные из рядов Лаппо-Данилевского, представлены параметрически и обладают свойством: они сходятся при любом z и достаточно малых параметрах. Что это означает?

Оказалось, что неподвижные особые точки $z=0$, 1 и ∞ являются точками сгущения подвижных особых точек этих решений и при уменьшении параметров эти подвижные особые точки попадают все в меньшие и меньшие окрестности точек $z=0$, 1 и ∞, тем самым из конечной области они уходят, а точки z в конечной области перестают быть особыми.

Удалось показать, что это происходит не только при уменьшении параметров, но и в том случае, когда параметры приближаются к значениям, при которых решение приближается к одному из стационарных решений, относящихся к проблеме Римана.

Не будем останавливаться на многих других вопросах, которые необходимо было решить при рассмотрении уравнений (11), например таких, как изучение различных форм представления решений, необходимых для решения проблемы Римана.

И, как увидит читатель, на многие вопросы, возникшие при рассмотрении системы (11), пока нет ответа. Но на все главные вопросы, связанные с проблемой Римана, ответы найдены.

Глава IX

УРАВНЕНИЯ $w''=f(w', w, z)$ С ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ $f(w', w, z)$

Рассмотрим уравнение

$$w''=f(w', w, z). \tag{*}$$

Пусть $D=D(w', w, z)$ — область голоморфности $f(w', w, z)$ относительно w', w и z. Таким образом, если $(w_0', w_0, z_0)\in\in D$, то имеем решение задачи Коши с начальными значениями w_0', w_0, z_0, которое будет единственным и голоморфным в окрестности z_0:

$$w=w_0+w_0'(z-z_0)+\alpha_2(z-z_0)^2+\ \dots \tag{1}$$

Будем называть границей области D множество таких значений $\bar{D}(w', w, z)$, связанных равенством $\Phi_1(w', w, z)=0$, что в окрестности этих точек $f(w', w, z)$ не будет голоморфной. Эта граница может иметь вид $\Phi_1(w', w)=0$, когда при этих значениях w_0', w_0 и произвольном конечном z_0 в окрестности этой точки $f(w', w, z)$ перестает быть голоморфной.

Эта граница может состоять из точек: $w=w_k$, $k=1, 2, \dots$, или $w'=w_k'$, $k=1, 2, \dots$

Будем называть решение уравнения $(*)$

$$w=\Phi(z, C_1, C_2) \tag{2}$$

с произвольными постоянными C_1, C_2 в области D общим, если при всяких $(w_0', w_0, z_0)\in D$ получим решение с такими начальными условиями в окрестности z_0 при соответствующих постоянных C_1 и C_2.

Таким образом, C_1, C_2 находим из уравнений

$$w_0=\Phi(z_0, C_1, C_2), \qquad w_0'=\Phi_z'(z_0, C_1, C_2).$$

Это решение будет единственным и получается в виде (1). Если наряду с общим решением имеем решение

$$w=\varphi(z, C) \tag{3}$$

с произвольным постоянным C (или вообще без C), которое не получается из общего, то это решение будем называть особым.

Если $\overline{w}_0 = \varphi(z_0, C)$ и $\overline{w}'_0 = \varphi'_z(z_0, C)$, то, очевидно, $(\overline{w}'_0, \overline{w}_0, z_0) \notin D(w', w, z)$ и в окрестности точки $(\overline{w}'_0, \overline{w}_0, z_0)$ $f(w', w, z)$ не будет голоморфной, так как в противном случае мы получили бы это решение из $w = \Phi(z, C_1, C_2)$ и оно было бы единственным. Но это решение $w = \varphi(z, C)$ также может быть голоморфным в окрестности $z = z_0$ и может быть даже $\overline{w}_0 = \Phi(z_0, C_1, C_2)$, $\overline{w}'_0 = \Phi'_z(z_0, C_1, C_2)$, т. е., возможно, начальные значения $\overline{w}'_0$, $\overline{w}_0$, z_0 порождают два решения и притом голоморфные, но $[w = \varphi(z, C), w'] \notin D(w', w, z)$ и $\Phi(z, C_1, C_2) \neq \varphi(z, C)$, за исключением нескольких точек.

Может случиться и так, что

$$[w' = \Phi'(z, C_1, C_2), \ w = \Phi(z, C_1, C_2)] \underset{z \to z_0}{\not\to}$$

$$\underset{z \to z_0}{\not\to} (\overline{w}'_0, \overline{w}_0, z_0) \in \overline{D}(\overline{w}'_0, \overline{w}_0, z_0),$$

т. е. решение $\Phi(z, C_1, C_2)$ не имеет общих точек с множеством граничных точек $\overline{D}(\overline{w}', \overline{w}, z_0)$, но может и иметь, т. е. граничные точки могут быть предельными для решений, полученных из общего.

Уравнение

$$w'' = f(w', w, z), \tag{4}$$

где $f(w', w, z)$ — рациональная относительно w' и w, равносильно системе двух уравнений

$$w' = u, \qquad u' = f(u, w, z)$$

с рациональными правыми частями. Если же $f(w', w, z)$ — иррациональная функция, то такое уравнение равносильно системе $n > 2$ уравнений с рациональными правыми частями. А это принципиально другой случай по сравнению с тем, когда $f(w', w, z)$ — рациональная функция, так как система двух дифференциальных уравнений при исследовании существенно отлична от случаев трех и более дифференциальных уравнений. Поэтому Пенлеве не случайно начал исследования с того случая, когда $f(w', w, z)$ — рациональная функция. Мы рассмотрим примеры, из которых увидим всю сложность этих и других явлений.

§ 1. УРАВНЕНИЕ $w'' = \sqrt{w' - 1}$

Рассмотрим уравнение

$$w'' = \sqrt{w' - 1}. \qquad (*)$$

Здесь начальные значения $z = z_0$, $w = w_0$, $w_0' = 1$ особые, так как в точке $w' = 1$ функция $\sqrt{w' - 1}$ не голоморфная; $w = z + C$ — особое решение; $w = z + \frac{1}{12}(z + C_1)^3 + C_2$ — общее решение, из которого особое не получается. Через любую точку (z_0, w_0, w_0') любого особого решения (т. е. при разных C) $w_0 = z_0 + C$, $w' = 1$ проходит решение из общего решения, так как $z_0 + C = z_0 + \frac{1}{12}(z_0 + C_1)^3 + C_2$ и $w' = 1 = 1 + \frac{1}{4}(z_0 + C_1)^2$ при $C_1 = -z_0$ и $C_2 = C$. Можно заданному уравнению привести в соответствие систему дифференциальных уравнений, обозначая $w' = u$, $v = \sqrt{w' - 1} = \sqrt{u - 1}$. Тогда получим

$$w' = u, \quad u' = v, \quad v' = \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

т. е. три уравнения.

Здесь нет иррациональности и нет особых конечных начальных условий — система линейная.

Из (1) найдем общее решение

$$v = \frac{1}{2} z + C_1, \quad u = \frac{1}{4} z^2 + C_1 z + C_2,$$

$$w = \frac{1}{12} z^3 + C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3. \qquad (2)$$

Но должно быть $v = \sqrt{u - 1}$, т. е. $\frac{1}{2} z + C_1 = \sqrt{\frac{1}{4} z^2 + C_1 z + C_2 - 1}$, откуда $C_2 = C_1^2 + 1$.

Следовательно, имеем

$$v = \frac{1}{2} z + C, \quad u = \frac{1}{2} z^2 + C_1 z + C_1^2 + 1,$$

$$w = \frac{1}{12} z^3 + C_1 \frac{z^2}{2} + z + C_1^2 z + C_3.$$

Надо рассмотреть и случай

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = z + C,$$

когда не возникает уравнение $v'=1/2$. Этим восстанавливаем особое решение уравнения (*), которое не является решением уравнений (1). Допустим, однако, что с самого начала мы рассматриваем уравнения (1). Тогда получаем решение (2) общее, а особое решение не появляется.

Но предположим, что, рассматривая уравнения (1), мы нашли интеграл $v^2-(u-1)=C$, так как $2vv'-u'=2v\dfrac{1}{2}-v=0$ в силу уравнений (1).

Пусть начальным условиям задачи соответствует $C=0$. Тогда $v=\sqrt{u-1}$ и мы из (1) имеем два уравнения:

$$w'=u, \qquad u'=\sqrt{u-1}. \tag{3}$$

Отсюда $u=1+\dfrac{(z+C_1)^2}{4}$ и $w=z+\dfrac{(z+C_1)^3}{12}+C_2$ — общее решение, $u=z+\dfrac{(z+C_1)^3}{12}+C_2$ — особое решение уравнений (3), которое не доставляет решение системы (1) даже вместе с интегралом $v=\sqrt{u-1}$, так как $v'\neq 1/2$.

Таким образом, особое решение может появиться при переходе от системы (1) к уравнению (*) через интеграл уравнений (1). Уравнения (3) эквивалентны уравнению (*), так как $w''=u'=\sqrt{u-1}=\sqrt{w'-1}$. Что же собой представляет особое решение? Или это недостаток аппарата решения уравнений (1), когда мы сначала находим интеграл $v^2-(u-1)=C$, а затем переходим к уравнениям (3), или... что? Какова роль особых решений?

Очень хорошую теорию особых решений построил В. А. Стеклов [27]. Он показал, как их все найти, но в заключение сказал: «Ни в одном случае механики при рассмотрении дифференциальных уравнений не появилось особое решение, поэтому не ясно, что такое особое решение, какова их сущность и роль». Но, как только что мы показали, особое решение появляется естественным образом. К этому можно добавить следующее. В проблеме Римана мы встречаемся с особыми решениями и там их роль огромна. Это мы увидим.

В [11] показано, что особые решения располагаются на границе области D существования и единственности решений и их присутствие или отсутствие характеризует качественную картину поведения интегральных кривых в окрестности границы области D.

При рассмотрении вопроса о преобразовании дифференциального уравнения к другому виду, удобному для исследования, показано, что, вообще говоря, функцию преобразования нужно найти из некоторого дифференциального уравнения. Но иногда это можно сделать с помощью особого решения, которое можно искать, не интегрируя дифференциальное уравнение [11, глава VIII].

Соответствуют ли особые решения каким-нибудь явлениям механики или физики? По-видимому, да, так как в математике, и в особенности в дифференциальных уравнениях, да еще возникших в физике, все имеет и физическое значение. И нет ли проблемы в механике, когда мы с помощью интегралов переходим к меньшему числу дифференциальных уравнений, как это мы видели в примере, и при этом что-то упускаем из виду.

В аналитической теории особые решения и особые начальные условия тесно связаны с подвижными особыми точками, которые создают качество рассматриваемых решений. Может быть, особые решения — это еще не опознанные предметы.

§ 2. УРАВНЕНИЕ $w'' = a + \sqrt{w' - 1}$

Для уравнения

$$w'' = a + \sqrt{w' - 1} \tag{1}$$

особое начальное значение $w' = 1$, но $w = z + C$ не является решением. Рассмотрим $a + \sqrt{w' - 1} = 0$, $w' = 1 + a^2$, $w = (1 + a^2) z + C$. Это решение, если в (1) $a < 0$.

Полагаем

$$u = \sqrt{w' - 1}, \quad w' = u^2 + 1, \tag{1_1}$$

откуда $dw' = 2u du$. Из (1)

$$\frac{dw'}{a + \sqrt{w' - 1}} = dz = \frac{2u du}{a + u}, \quad z = \int \frac{2u du}{a + u} - C_1.$$

Из (1_1)

$$dw = (u^2 + 1)\, dz = (u^2 + 1) \frac{2u du}{a + u},$$

$$w = \int \frac{2u (u^2 + 1)}{u + a} du = \frac{2}{3} (u + a)^3 - 3a (u + a)^2 +$$

$$+ 2 (3a^2 + 1)(u + a) - 2a (a^2 + 1) \ln (u + a) + C_2, \tag{2}$$

$$z = 2u - 2a \ln (u + a) - C_1. \tag{3}$$

Формулы (2), (3) доставляют общее решение в параметрическом виде;

$$w = (1 + a^2) z + C \text{ — решение особое при } a < 0. \tag{4}$$

Но уравнение (1) равносильно трем уравнениям с рациональной правой частью:

$$w' = v, \quad v' = a + u, \quad u' = \frac{a+u}{2u}, \tag{5}$$

$$u^2 - (v - 1) = C \text{ — интеграл.} \tag{6}$$

При $C = 0$ имеем $u = \sqrt{v-1}$, $u = \sqrt{w'-1}$.

Имеют ли решения (2), (3) подвижные особые точки и если имеют, то какие?

Как видим, при $u + a \doteq 0$

$$w \doteq -(a^2+1)\, 2a \ln(u+a) + C_2, \quad z \doteq -2a - 2a\ln(u+a) - C_1$$

$$-2a\ln(u+a) \doteq z + 2a + C_1.$$

Отсюда получим

$$w \doteq (z + 2a + C_1)(a^2+1) + C_2 \tag{7}$$

при больших $|z|$, так как, очевидно, при малом $|u+a|$ модули $|w|$ и $|z|$ будут большими. При всех остальных значениях u величины w и z будут конечными и так как, согласно (1_1), $\frac{dw}{dz} = 1 + u^2$, то при $u \neq 0$ $\frac{dw}{dz}$ не будет и особенным, т. е. $\frac{dw}{dz} \neq 1$.

При $u \neq 0$ не будет, следовательно, особым и z. Но можно ожидать, что при $u = 0$ из (3) получим $z = z_0 = -2a\ln a - C_1$, которое будет особенным значением для $w(z)$. Покажем, что для функции $w = w(z)$ $z = z_0$ будет алгебраической двузначной особой точкой.

Из (3) при малых $|u|$ получим

$$z = -2a\ln a - C_1 + \frac{1}{a}u^2 + \ldots$$

или

$$a(z + 2a\ln a + C_1) = u^2 + \ldots$$

Извлекая квадратный корень, найдем

$$v = a^{1/2}(z + 2a\ln a + C_1)^{1/2} = u + \ldots,$$

откуда, обращая ряд, получим

$$u = v + \alpha_2 v^2 + \ldots \tag{8}$$

и

$$u + a = v + a + \alpha_2 u^2 + \ldots$$

Отсюда при малых $|v|$ найдем

$$\ln(u+a)=\ln(a+v+\alpha_2 v^2+\ldots)=\ln a+$$
$$+\frac{1}{a}v+\beta_2 v^2+\ldots \tag{9}$$

Запишем $v=a^{1/2}(z-z_0)^{1/2}$, где $z_0=-2a\ln a-C_1$ — произвольная постоянная, так как произвольная C_1. Это позволяет получить из (2)

$$\begin{gathered} w=A+\gamma_1 v+\gamma_2 v^2+\gamma_3 v^3+\gamma_4 v^4+\ldots, \\ A=\frac{11}{3}a^3+2a-2a(1+a^2)\ln a+C_2. \end{gathered} \tag{10}$$

Как мы видели, $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{u=0}=1$, т. е. $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=1$. Следовательно, из (10) имеем

$$\frac{dw}{dz}=(\gamma_1+2\gamma_2 v+\ldots)\frac{dv}{dz}=$$
$$=(\gamma_1+2\gamma_2 v+\ldots)\frac{1}{2}a^{1/2}(z-z_0)^{-1/2}\underset{z=z_0}{=}1, \tag{10_1}$$

а это означает, что $\gamma_1=0$ и $2\gamma_2 v\frac{1}{2}a^{1/2}(z-z_0)^{-1/2}\underset{z=z_0}{=}a\gamma_2=$ $=1$, $\gamma_2=\frac{1}{a}$. Таким образом, из (10)

$$w=A+\frac{1}{a}v^2+\gamma_3 v^3+\gamma_4 v^4+\ldots \tag{11}$$

Из (1) имеем $w''=u+a$, поэтому при $u=0$ получаем $w''=a$, т. е. $w''=a$ при $z=z_0$. Из (10_1) найдем

$$\left.\frac{d^2w}{dz^2}\right|_{z=z_0}=(2\gamma_2+6\gamma_3 v+12\gamma_4 v^2+\ldots)\left(\frac{dv}{dz}\right)^2+$$
$$+(2\gamma_2 v+3\gamma_3 v^2+4\gamma_4 v^3+\ldots)\frac{d^2v}{dz^2}=a.$$

Здесь $\left(\frac{dv}{dz}\right)^2=\frac{1}{4}a(z-z_0)^{-1}$; $\frac{d^2v}{dz^2}=-\frac{1}{4}a^{1/2}(z-z_0)^{-3/2}$, поэтому

$$\frac{d^2w}{dz^2} = (2\gamma_2 + 6\gamma_3 v + 12\gamma_4 v^2)\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + (2\gamma_2 v + 3\gamma_3 v^2 + $$
$$+ 4\gamma_4 v^3)\,\frac{d^2v}{dz^2}\bigg|_{z=z_0},$$

так как остальные слагаемые равны нулю при $z = z_0$. Здесь

$$2\gamma_2\left[\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + v\,\frac{d^2v}{dz^2}\right] \equiv 0,$$

$$6\gamma_3 v\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + 3\gamma_3 v^2\,\frac{d^2v}{dz^2} = 3\gamma_3 v\left[2\cdot\frac{1}{4}\,a(z-z_0)^{-1} - \right.$$
$$\left. - a^{1/2}(z-z_0)^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,a^{1/2}(z-z_0)^{-3/2}\right] =$$
$$= 3\gamma_3 v\left[\frac{1}{4}\,a(z-z_0)^{-1}\right] = \frac{3}{4}\,a^{3/2}\gamma_3(z-z_0)^{-1/2} = 0$$

при $\gamma_3 = 0$. И наконец, последние слагаемые

$$12\gamma_4 v^2\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + 4\gamma_4 v^3\,\frac{d^2v}{dz^2} = 2\gamma_4 a^2 = a.$$

Следовательно, $\gamma_4 = \dfrac{1}{2a}$.

Таким образом, из (11) имеем

$$w = A + \frac{1}{a}\,v^2 + \frac{1}{2a}\,v^4 + \gamma v^5 + \ldots \tag{12}$$

Можно показать, что здесь будет присутствовать v^5, поэтому z_0 будет подвижной алгебраической особой точкой. Действительно, как видно из (1),

$$\frac{d^3w}{dz^3} = w''' = \frac{w''}{2\sqrt{w'-1}} = \frac{a+u}{2u} = \infty \quad \text{при } u = 0,$$

откуда и следует, что v^5 в (12) есть.

Все следующие производные $w^{(m)} = \infty$ при $m \geqslant 4$ и $z = z_0$.

Мы изучили подвижную особую точку $z = z_0$, а других особых точек решения (2), (3) не имеют. Не имеют их и особые решения (4), если $a < 0$. А при $a > 0$ особых решений нет.

Если будем искать решения уравнений (5), то надо рассмотреть [1)] случай $u = -a$ при $a < 0$. Тогда

$$v = C_1, \quad w = C_1 z + C_2.$$

[1)] Для уравнений (5) задан интеграл $u^2 - v = -1$, из которого получили особое решение. Но интегралом будет и $u^2 - v = A$. Тогда и особое решение получим другое: $w = (a^2 - A)z + A_j$, так как $w' = v = u^2 - A$, $u + a = 0$, $w' = a^2 - A$, $w = (a^2 - A)z + A_1$.

Так как должно быть $u=\sqrt{w'-1}$, то $-a=\sqrt{C_1-1}$, $C_1=1+a^2$ и $w=(1+a^2)z+C_2$ — особое решение. Определяя решение уравнений (5) в предположении $u+a\neq 0$, будем иметь особую точку z_0, если рассмотрим решение $u\to 0$ при $z\to z_0$, так как при этом правая часть последнего уравнения в этой точке не будет голоморфной.

Теперь зададимся вопросом: имеет ли общее решение (2), (3) с особым решением $w=(1+a^2)z+C$, $a<0$ общие точки, т. е. имеют ли они совпадающие значения w и $\frac{dw}{dz}$? Совпадение значений w возможно при любом значении u в (2) и z в (3) за счет C и C_2. Но возможно ли при этом совпадение значений $\frac{dw}{dz}$?

Для решений (2), (3) имеем $u=\sqrt{w'-1}$ и, следовательно, $\frac{dw}{dz}=u^2+1$, а для особого решения $\frac{dw}{dz}=a^2+1$. Отсюда следует, что для совпадения этих значений необходимо $u=a$ или $u=-a$.

И так как $w''=a+u=0$, то $u=-a$. Но при $u+a=0$ из (2), (3) получаем $w=\infty$ и $z=\infty$. Следовательно, нет конечных, одновременно совпадающих w и w'.

§ 3. УРАВНЕНИЕ $w''=\sqrt{w'-1}+\sqrt{w'-2}$

Граница области существования и единственности решений уравнения

$$w''=\sqrt{w'-1}+\sqrt{w'-2} \tag{1}$$

состоит из значений $w'=1$ и $w'=2$. Но $w=z+C$ и $w=2z+C$ не являются решениями.

Обозначим

$$w'=p,\quad w''=\frac{dw'}{dz}=\frac{dp}{dw}\,p=\sqrt{p-1}+\sqrt{p-2}.$$

Отсюда

$$dw=\frac{p\,dp}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p-2}},\quad dz=\frac{dp}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p-2}}$$

и

$$w=\int^{p}\frac{p\,dp}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p-2}}+w_0, \tag{2}$$

$$z=\int^{p}\frac{dp}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p-2}}+z_0. \tag{3}$$

Мы получили общее решение в параметрическом виде. Как видно из (2) и (3), при $p\to\infty$ будет $w\to\infty$ и $z\to\infty$. Очевидно, при больших $|p|$

$$w=\int\frac{pdp}{p^{1/2}\left[\sqrt{1-\frac{1}{p}}+\sqrt{1-\frac{2}{p}}\right]}\doteq\frac{1}{3}p^{3/2},$$

$$z\doteq p^{1/2},$$

т. е. $w\doteq\frac{1}{3}z^3$. Но так как

$$w'''=\frac{w''}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{w'-1}}+\frac{1}{\sqrt{w'-2}}\right]=\frac{1}{2}[\sqrt{w'-1}+$$

$$+\sqrt{w'-2}]\left[\frac{1}{\sqrt{w'-1}}+\frac{1}{\sqrt{w'-2}}\right],$$

т. е. $w'''\to\infty$ при $w'\to 1$ и при $w'\to 2$, то надо ожидать, что будут алгебраические особые точки $z=z_0$. Покажем, что они есть.

Полагаем

$$u=\sqrt{p-2},\quad u^2+2=p,\quad dp=2udu,\quad \sqrt{p-1}=\sqrt{u^2+1}.$$

Из (2) и (3) имеем

$$w=\int^u\frac{(u^2+2)\,2udu}{\sqrt{1+u^2}+u}+w_0,\quad z=\int^u\frac{2udu}{\sqrt{1+u^2}+u}+z_0.$$

При малых $|u|$ получим

$$\sqrt{1+u^2}+u=1+u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{8}u^4+\ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}+u}=1-u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{8}u^4+\ldots,$$

$$\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}+u}=2u-2u^2+u^3+0\,u^4+\ldots,$$

$$\frac{4u+2u^3}{\sqrt{1+u^2}+u}=4u-4u^2+4u^3-2u^4+\ldots$$

Отсюда

$$z=u^2-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{4}u^4+\ldots+z_0,\tag{4}$$

$$w = 2u^2 - \frac{4}{3} u^3 + u^4 + \ldots + w_0. \tag{5}$$

Из (4) найдем

$$v = (z - z_0)^{1/2} = u \left[1 + \left(\frac{u^2}{4} - \frac{2}{3} u \right) + \ldots \right]^{1/2},$$

$$v = u - \frac{1}{3} u^2 + \frac{5}{8 \cdot 9} u^3 + \frac{5}{8 \cdot 27} u^4 + \ldots,$$

откуда

$$u = v + \frac{1}{3} v^2 + \frac{11}{8 \cdot 9} v^3 + \gamma_4 v^4 + \ldots$$

Подставляя это в (5), получим

$$w - w_0 = 2v^2 + \frac{1}{2} v^4 + \alpha v^5 + \ldots = 2(z - z_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} (z - z_0)^2 + \alpha (z - z_0)^{5/2} + \ldots,$$

откуда видим, что z_0 — алгебраическая двузначная подвижная особая точка.

Здесь $w'|_{z=z_0} = 2$, $w''|_{z=z_0} = 1$, как и должно быть в соответствии с уравнением (1). Но $w'''|_{z=z_0} = \infty$.

Полагая $u = \sqrt{p-1}$, мы так же изучим поведение решения в окрестности $w' = 1$, но здесь в окрестности $w' = 1$, или в соответствующей особой точке $z = z_0$, $w''(z_0) = \sqrt{-1}$ согласно уравнению (1).

Покажем, что для уравнения (1) имеем алгебраический интеграл

$$\Phi(w, z, C_1, C_2) = 0. \tag{6}$$

Полагая $\xi = \sqrt{w' - 1} + \sqrt{w' - 2}$, получим

$$2w' - 3 + 2\sqrt{(w' - 1)(w' - 2)} = \xi^2,$$

$$4(w' - 1)(w' - 2) = (\xi^2 + 3 - 2w')^2,$$

$$\xi^4 + 2\xi^2 (3 - 2w') + 1 = 0.$$

Отсюда видим, что $\xi \neq 0$.

Имеем еще

$$w' = \frac{\xi^4 + 6\xi^2 + 1}{4\xi^2} = p = \frac{\xi^2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \xi^{-2},$$

$$\frac{dp}{\xi} = \frac{dw'}{\xi} = \frac{1}{2\xi} (\xi - \xi^{-3})\, d\xi = dz,$$

$$z=\frac{1}{2}\int(1-\xi^{-4})\,d\xi=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{3}\xi^{-3}\right)+C_1,$$

$$w=\frac{1}{2}\int\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\xi^{-2}+\frac{1}{4}\xi^{2}\right)(1-\xi^{-4})\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\xi+\frac{1}{12}\xi^{3}+\frac{1}{2}\xi^{-3}+\frac{1}{20}\xi^{-5}\right)+C_2.$$

Исключая отсюда ξ, и получим алгебраический интеграл (6).

§ 4. УРАВНЕНИЕ $w''=\sqrt{2w'+1}-\sqrt{w'+2}$

В уравнении

$$w''=\sqrt{2w'+1}-\sqrt{w'+2} \tag{1}$$

сделаем замену $w'=p$, тогда

$$\frac{dw'}{dz}=\frac{dp}{dw}\,\frac{dw}{dz}=\frac{dp}{dw}\,p=\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}.$$

Отсюда

$$w=\int\frac{p\,dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}}+C_1, \tag{2}$$

$$z=\int\frac{dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}}+C_2. \tag{3}$$

Таким образом, (2) и (3) — общее решение. Из $\sqrt{2w'+1}-\sqrt{w'+2}=0$ $w'=1$, т. е.

$$w=z+C \text{ — решение.} \tag{4}$$

Какое оно — особое или нет?

Равенства (2) и (3) можно записать и так:

$$w=\int\frac{p\left(\sqrt{2p+1}+\sqrt{p+2}\right)dp}{p-1}+C_1, \tag{2_1}$$

$$z=\int\frac{\sqrt{2p+1}+\sqrt{p+2}}{p-1}\,dp+C_2, \tag{3_1}$$

откуда видим, что

$$z\to\infty \quad \text{и} \quad w\to\infty \quad \text{при} \quad p\to 1. \tag{5}$$

Из (2) и (3) имеем

$$w=\int\frac{p\,dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}}=\int\frac{dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}}+$$

$$+\int \frac{(p-1)\,dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}} = z + \int \frac{(p-1)\,dp}{\sqrt{2p+1}-\sqrt{p+2}} =$$

$$= z + \int (\sqrt{2p+1}+\sqrt{p+2})\,dp = z + \int \Big[2\sqrt{3} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}(p-1) + \ldots\Big]\,dp = z + 2\sqrt{3}(p-1) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{4}(p-1)^2 + \ldots + C. \tag{6}$$

А тогда при $p \to 1$ $w \to z + C$ или при $p \approx 1$ имеем

$$w \approx z + C. \tag{7}$$

Все решения при $p \to 1$ или при $w' \to 1$ приближаются к решению (4).

Покажем, что решение (4) не является особым. Запишем уравнение (1) в виде

$$w'' = \sqrt{2w'+1} - \sqrt{w'+2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(w'-1) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k (w'-1)^k,$$

так как правая часть уравнения (1) в окрестности $w' = 1$ голоморфна. Отсюда видим, что в окрестности начальных значений $w|_{z=0} = C$, $w'|_{z=0} = 1$ правая часть уравнения (1) голоморфна. Следовательно, решение с такими начальными значениями будет в окрестности точки $z = 0$ единственным и голоморфным.

Таким решением будет

$$w = z + C, \quad w' = 1. \tag{4$_1$}$$

Отсюда видим, что решение (4) не является особым — оно входит в состав общего решения (2), (3) и получается из (6) при $w' = p = 1$. Граница области существования и единственности решений (1) состоит из $2w'+1=0$ и $w'+2=0$, так как в окрестности этих значений w' нарушена голоморфность правой части уравнения (1) и

$$w''' = \left(\frac{1}{\sqrt{2w'+1}} - \frac{1}{2\sqrt{w'+2}}\right) w'' =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2w'+1}} - \frac{1}{2\sqrt{w'+2}}\right)(\sqrt{2w'+1} - \sqrt{w'+2}) \to \infty$$

при $w' \to -\frac{1}{2}$ и при $w' \to -2$.

Как и ранее, можно показать, что эти особые значения w' порождают особые подвижные алгебраические двузначные точки. Пользуясь равенствами (2) и (3) и полагая, например, $u=\sqrt{2p+1}$, при малых $|u|$ получим

$$w=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,u^3+\ldots\right),$$

где

$$u=[\sqrt{6}(z_0-z)]^{1/2}+\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k\{[\sqrt{6}(z_0-z)]^{1/2}\}^k,$$

откуда и следует, что решение $w=w(z)$ в окрестности произвольной точки $z=z_0$ — двузначная алгебраическая функция.

§ 5. УРАВНЕНИЕ $w''=-w^3w'+ww'\sqrt{4w'+w^4}$

Рассмотрим уравнение [24]

$$w''=-w^3w'+ww'\sqrt{4w'+w^4}. \qquad (1)$$

Здесь в точке (w_0, w_0'): $4w_0'+w_0^4=0$, т. е. нарушена голоморфность правой части. Если положим

$$w'=w_0'+(w'-w_0'),\quad w^4=w_0^4+4w_0^3(w-w_0)+$$
$$+6w_0^2(w-w_0)^2+\ldots,$$

то получим

$$\sqrt{4w'+w^4}=\sqrt{4(w'-w_0')+4w_0^3(w-w_0)+\ldots}.$$

Границей области D существования и единственности по Коши будет

$$4w'+w^4=0. \qquad (2)$$

В области D имеем решение

$$w=A\,\mathrm{tg}\,(A^3z+B), \qquad (3)$$

где A и B — произвольные постоянные. И есть решение на границе (2):

$$w=\left(\frac{3}{4}(z-C)\right)^{-\frac{1}{3}}, \qquad (4)$$

т. е. это w удовлетворяет уравнению (2) и является решением уравнения

$$w''=-w^3w', \qquad (5)$$

а тем самым и уравнения (1) ((5) получаем из (2) дифференцированием).

Но w, данное равенством (3), не удовлетворяет равенству (2). Действительно, для (3) имеем

$$w' = A^4 \frac{1}{\cos^2(A^3z+B)},$$

поэтому

$$4w' + w^4 = \frac{4A^4}{\cos^2(A^3z+B)} + \frac{A^4 \sin^4(A^3z+B)}{\cos^4(A^3z+B)} =$$

$$= \frac{A^4}{\cos^4(A^3z+B)} [4\cos^2(A^3z+B) + \sin^4(A^3z+B)] =$$

$$= \frac{A^4}{\cos^4(A^3z+B)} [\sin^4(A^3z+B) + 4(1-\sin^2(A^3z+B))] =$$

$$= \frac{A^4}{\cos^4(A^3z+B)} [\sin^2(A^3z+B)-2]^2 \neq 0.$$

Но здесь равенство возможно для комплексного A^3z+B, т. е. возможно

$$\sin^2(A^3z+B)-2=0$$

при комплексном значении A^3z+B. Таким образом, функция (3) и ее производная могут принять значения функции (4) и ее производной. Но при этом w'' могут быть и разными, т. е. решения будут разными. Следовательно, на вещественную часть границы $4w'+w^4=0$ решение (3) не попадает, а на комплексную часть может попасть — в какую-то точку.

Таким образом, если w_0 и w_0' вещественные, удовлетворяющие равенству $4w'+w^4=0$, то возникает только решение типа (4) уравнения (2), имеющее одну подвижную особую точку z_0— трехзначный алгебраический полюс. Если же w_0, w_0' комплексные, удовлетворяющие равенству $4w'+w^4=0$, то могут возникать два решения—одно типа (4), а другое типа (3), имеющее бесконечное число подвижных полюсов. Эти особые начальные значения z_0, w_0 и w_0' отличны от тех, которые имеем, например, в уравнениях Брио и Буке (где в точке начальных значений правые части становятся неопределенными). Здесь в окрестности начальной точки правая часть уравнения многозначна и тем самым неголоморфна. И здесь нет случая, когда w или w' не имеют предела при $z \to z_0$.

Здесь в окрестности точки z_0 возникают два решения с заданными w_0, w_0' и оба голоморфные, т. е. нарушена единственность решения. При $z \to z_0$ мы попадаем в точку w_0, w'_0 по одному решению, а далее, после пересечения z_0, можно продолжать движение как по одному решению, так и по другому.

Если имеем два уравнения с рациональными правыми частями, то, по-видимому, такой z_0 нет, она возникает, когда имеем иррациональную правую часть или систему 3 уравнений с рациональными правыми частями и появляется алгебраический интеграл, который создает иррациональность в системе двух уравнений, к которым мы приходим.

Именно так появляется иррациональность в правых частях уравнений в проблеме Римана. И благодаря этой иррациональности в окрестности некоторых точек возникает два голоморфных решения и оба имеют значение для проблемы Римана.

Решение (3) имеет только подвижные полюсы z_k, определенные равенствами

$$A^3 z_k + B = (2k+1)\,\pi/2.$$

А функция (4) имеет только алгебраические полюсы — каждое решение (т. е. при каждом C) имеет один алгебраический полюс z_0, определенный равенством $z_0 - C = 0$. Границу $4w' + w^4 = 0$ заполняют интегральные кривые (4). Решение (4) удовлетворяет и уравнению (2), и уравнению (5). Поэтому (4) будет решением и такого уравнения:

$$w'' = -w^3 w' + \varphi(w',\ w,\ z,\ w'' + w^3 w') + \psi(w',\ w,\ z,\ 4w' + w^4),$$

если

$$\varphi(w',\ w,\ z,\ 0) = \psi(w',\ w,\ z,\ 0) = 0.$$

Уравнению (1) соответствует система

$$w' = u, \quad u' = -w^3 u + wu\sqrt{4u + w^4}. \tag{6}$$

А если обозначим

$$v = \sqrt{4u + w^4}, \tag{6_1}$$

то получим

$$v' = \frac{2u' + 2w^3 w'}{v} = \frac{2\left[-w^3 u + wu\sqrt{4u + w^4}\right] + 2w^3 u}{v} = \frac{2wuv}{v} = 2wu.$$

Таким образом, системе (6) соответствует система

$$u' = -w^3 u + wuv, \quad v' = 2uw, \quad w' = u, \tag{7}$$

имеющая интеграл

$$v^2-4u-w^4=C. \tag{8}$$

Спрашивается, у системы (7) есть или нет множество (u, v, w) в конечной области, на котором нарушены условия единственности. Мы не видим такого множества. Но через интеграл (8) и (6_1) мы приходим к уравнениям (6), для которых существует множество $4u+w^4=0$, на котором нарушена единственность решений, так как на этом множестве имеем решения (3) и (4).

Существует ли решение уравнений (7): $z\to z_0$, $u\to\infty$, $w\to\infty$, $v=0$? Не существует, так как если $v=0$, то, как видим из (7), $u=0$, а $w=C$ или $w=0$, где C — произвольная постоянная.

Следовательно, исходная система (7) не имеет решений с подвижной особой точкой z_0 типа $u\to\infty$, $w\to\infty$, $v=0$ при $z\to\to z_0$, а система (6), полученная из (7) через интеграл (8) при $C=0$, имеет такие решения.

А если по характеру задачи для системы (7) имеем интеграл (8), где $C\neq0$, то получим вместо уравнений (6) уравнения

$$u'=-w^3u+wu\sqrt{4u+w^4+C}, \quad w'=u \tag{9}$$

или уравнение

$$w''=-w^3w'+ww'\sqrt{4w'+w^4+C}. \tag{10}$$

Если возьмем w, удовлетворяющее уравнению

$$4w'+w^4+C=0, \tag{11}$$

то это решение $w=w(z)$ удовлетворяет и уравнению

$$w''=-w^3w',$$

тем самым решение $w=w(z)$ уравнения (11) удовлетворяет и уравнению (10).

Но определяя w из (11), т. е. из

$$\int^{w}\frac{dw}{w^4+C}=-\frac{1}{4}z+C_1,$$

получаем решение уравнения (10) с постоянной C_1, которое не доставляет решение уравнений (7). Чтобы найти решение трех уравнений (7), надо искать решение уравнений (9), так как $v=\sqrt{4u+w^4+C}$ удовлетворяет второму уравнению $v'=2uw$.

Теперь можно рассматривать и случай

$$v=\sqrt{4u+w^4+C}=0.$$

В исходной системе (7) случай $v=0$ приводит к уравнениям $u'=-w^3u$, $uw=0$, $w'=u$, для которых имеем лишь $u=0$, $w=C$. Случай же $\sqrt{4u+w^4+C}=0$, $u'=-w^3u$ исчезает.

Таким образом, интеграл $v^2-4u-w^4=C$ порождает решение уравнения (10), которое мы не видим в исходной системе (7), вернее, которого нет в системе (7).

§ 6. СИСТЕМА ИЗ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{P(x, y)}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{P(x, y)}, \tag{1}$$

где $P(x, y)$ — полином.

Если введем функцию $u=\sqrt{P(x, y)}$ и обозначим $\frac{\partial P}{\partial x}=$ $=P_1(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}=P_2(x, y)$, то получим систему, соответствующую системе (1):

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2u}{z}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{2u}{1-z}, \quad \frac{du}{dz}=\frac{P_1(x, y)}{z}+\frac{P_2(x, y)}{1-z}. \tag{2}$$

Относительно системы (1) получены следующие результаты.

Теорема 6.1. *Решение системы (2), начальные значения которого удовлетворяют соотношению*

$$u_0=\sqrt{P(x_0, y_0)}, \tag{3}$$

удовлетворяет равенству

$$u=\sqrt{P(x, y)}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что всякое решение системы (2) с начальными условиями, удовлетворяющими условию (3) при $z=z_0\neq$ $\neq 0$, 1, доставляет функции $x(z)$, $y(z)$, удовлетворяющие уравнению (1). Отсюда также следует, что решение системы (1) с произвольными начальными значениями $x(z_0)=x_0$, $y(z_0)=$ $=y_0$ при $z_0\neq 0$, 1 будет регулярным в окрестности z_0. Если x_0, y_0 такие, что $P(x_0, y_0)=0$, то имеем решение системы (1):

$$x\equiv x_0, \quad y\equiv y_0. \tag{5}$$

Если еще имеем

$$P_1(x_0, y_0)=P_2(x_0, y_0)=0, \tag{6}$$

то, кроме (5), других решений с такими начальными значениями нет. Если же условие (6) не выполнено, т. е. или P_1 $(x_0,$

$y_0) \neq 0$ или $P_2(x_0, y_0) \neq 0$, то, кроме (5), имеется еще одно решение с такими начальными значениями, которое будет регулярным в точке z_0. Это решение содержится в общем решении, построенном в окрестности точки (z_0, x_0, y_0), а решение (5) будет особым — оно не содержится в общем решении.

Действительно, если $P_2(x_0, y_0) \neq 0$, то и в окрестности точки (x_0, y_0) в точках $(\bar{x}, \bar{y})$ $P_2(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.

Если построим решение в точке $(z_0, \bar{x}, \bar{y})$ с произвольными постоянными $\bar{x}$, $\bar{y}$, то при $\bar{x} \to x_0$, $\bar{y} \to y_0$ решение не будет стремиться к решению (5), а будет стремиться к решению с $P_2(x_0, y_0) \neq 0$ (и $P_1(x_0, y_0) = 0$), голоморфному в точке z_0.

Общая теория системы (1) очень сложная. Еще более сложной будет теория системы

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2\sqrt{P(x, y)}}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{2\sqrt{Q(x, y)}}{1-z},$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы. Здесь начальные значения x_0, y_0, $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ или $z=0$, $z=1$ отличаются от случая уравнений Брио и Буке, так как в окрестности точки (x_0, y_0) числители неголоморфны.

Глава X

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИИ, А ТАКЖЕ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{z}\sqrt{xy(x+y)}\,,\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{1-z}\sqrt{xy(x+y)}$$

В этой главе [1] рассматривается система двух уравнений

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{z}\sqrt{xy(x+y)}\,,\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{1-z}\sqrt{xy(x+y)}\,,\qquad (*)$$

которая является предельной для системы, встречающейся в проблеме Римана. Хотя система (*) имеет простой вид, для исследования множества ее решений потребовались некоторые новые методы исследования, в особенности при изучении поведения решений в окрестности подвижных и неподвижных особых точек, а также в окрестности границы области D, в которой обеспечены существование и единственность решений. Здесь мы будем рассматривать поведение решений в окрестности границы области D, как это было сформулировано в [11, глава I].

Исследование будет вестись в смешанной форме и в комплексной области (аналитическая теория) и в вещественной.

По многим причинам эту предельную систему целесообразно рассматривать отдельно и ранее общей системы. В целом даже эта простая система является новой хотя бы потому, что правые части ее не являются однозначными, т. е. они меняются при аналитическом продолжении решений.

§ 1. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ D

Если мы рассматриваем систему (*) только в вещественной области, то граница области D существования и единственности решений состоит из прямых

$$x=0,\quad y=0\quad \text{и}\ x+y=0.$$

[1] В следующей главе будет рассматриваться система более полная, чем та, которая возникает в проблеме Римана.

На рис. 2 в заштрихованных областях эта система не задана, так как здесь $xy(x+y)<0$, т. е. $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$ будут мнимыми. Через точки $x=0$, $y=C$ проходят решения $x\equiv 0$, $y\equiv C$, а через точки $x=C$, $y=0$ — решения $x\equiv C$, $y\equiv 0$. Через точки $x=a$, $y=-a$ прямой $x+y=0$ проходят решения $x\equiv a$, $y\equiv -a$.

Таким образом, граничные точки являются точками равновесия. Ниже мы увидим, что через эти точки проходят и другие решения. Обозначая $u=\sqrt{xy(x+y)}$, на основании (*) получим

$$\frac{du}{dz}=\frac{1}{2u}\left(\frac{2xy+y^2}{z}+\frac{2xy+x^2}{1-z}\right)u=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2xy+y^2}{z}+\frac{2xy+x^2}{1-z}\right),$$

поэтому для системы (*) имеем эквивалентную систему

$$\frac{dx}{dz}=\frac{u}{z},\quad \frac{du}{dz}=\frac{u}{1-z},\quad \frac{du}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{2xy+y^2}{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{2xy+x^2}{1-z}\right). \tag{1.1}$$

Если уравнения (*) рассматриваем в комплексной области, то в окрестности начальной точки (x_0, y_0) за начальное значение берем одну из ветвей функции $\sqrt{x_0y_0(x_0+y_0)}$, например $\sqrt{x_0y_0(x_0+y_0)}>0$, если $x_0y_0(x_0+y_0)>0$, что и будем делать. Но при аналитическом продолжении $x(z)$ и $y(z)$ функция $\sqrt{xy(x+y)}$ может перейти на другую ветвь.

Теорема 1.1. *Решение системы (1.1), начальные значения которого удовлетворяют соотношению* $u_0=\sqrt{x_0y_0(x_0+y_0)}$, *удовлетворяет и соотношению* $u=\sqrt{xy(x+y)}$.

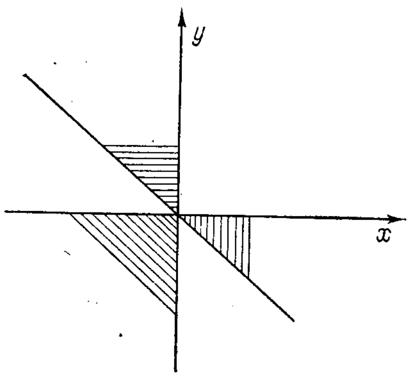

Рис. 2

Это следует из того, что $u^2-xy(x+y)=C$ есть интеграл системы (1.1) и при $u=u_0$, $x=x_0$, $y=y_0$ будет $C=0$. Следовательно, всякое решение системы (1.1) с начальными значениями, удовлетворяющими соотношению $u_0=\sqrt{x_0y_0(x_0+y_0)}$, доставляет функции x и y, удовлетворяющие уравнениям (*).

Согласно теореме существования, решение системы (1.1) с произвольными конечными начальными значениями x_0, y_0, u_0 и $z_0 \neq \neq 0, 1$ будет регулярным в окрестности z_0 и единственным.

Возьмем теперь такие начальные значения x_0, y_0, u_0, $z_0 \neq \neq 0, 1$, что

$$u_0 = 0, \quad 2x_0 y_0 + y_0^2 = 0, \quad 2x_0 y_0 + x_0^2 = 0. \tag{1.2}$$

Имеем единственное решение уравнений (1.1) с начальными значениями (1.2), которым будет

$$u \equiv 0, \quad x \equiv x_0, \quad y \equiv y_0. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что если при каком-нибудь $z \neq 0, 1$ не выполнено одно из равенств

$$u = 0, \quad 2xy + y^2 = 0, \quad 2xy + x^2 = 0, \tag{1.4}$$

то ни при каком $z_0 \neq 0, 1$ не будет (1.4). Из предыдущего вытекает

Теорема 1.2. *Всякое решение системы* (*) *с произвольными начальными значениями* x_0, y_0 *и* $z_0 \neq 0, 1$ *будет регулярным в окрестности* z_0.

Если x_0, y_0 такие, что $x_0 y_0 (x_0 + y_0) = 0$, то имеем решение

$$x \equiv x_0, \quad y \equiv y_0. \tag{1.5}$$

Если еще

$$2x_0 y_0 + y_0^2 = 0, \quad 2x_0 y_0 + x_0^2 = 0, \tag{1.6}$$

то, кроме (1.5), решений с такими начальными значениями нет. Если же или $2x_0 y_0 + y_0^2 \neq 0$, или $2x_0 y_0 + x_0^2 \neq 0$, то, кроме тождественно постоянного решения (1.5), имеем еще одно и только одно решение системы (*), которое будет регулярным в точке z_0. Другими словами, решение уравнений (*) с начальными значениями $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ при $z = z_0 \neq 0, 1$ единственно и имеет вид

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0. \tag{1.7}$$

Если же $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0, 1$, то, кроме $x \equiv 0$, $y \equiv y_0$, имеем еще одно решение с такими начальными значениями, которое будет регулярным в точке z_0.

Если $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$, $z_0 \neq 0, 1$, то, кроме $x \equiv x_0$, $y \equiv 0$, имеем еще одно решение с такими начальными значениями, которое будет регулярным в точке z_0. И наконец, если $x_0 = a \neq 0$, $y_0 = -a$, $z_0 \neq 0, 1$, то, кроме $x \equiv a$, $y \equiv -a$, имеем еще одно решение с такими начальными значениями, которое будет регулярным в точке z_0. Мы сейчас построим все эти решения в окрестности z_0, отличные от стационарных.

Построим решение

$$x \to x_0 = 0, \quad y \to y_0 \neq 0 \quad \text{при } z \to z_0 \neq 0, 1, \quad z_0 > 0. \tag{1.8}$$

Очевидно $u_0=0$, поэтому из (1.1) имеем

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=z_0}=0,\quad \left.\frac{dy}{dz}\right|_{z=z_0}=0,\quad \left.\frac{du}{dz}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0},\quad \left.\frac{d^2x}{dz^2}\right|_{z=z_0}=$$

$$=\frac{1}{z_0}\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0^2},\quad \left.\frac{d^2y}{dz^2}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{z-z_0}\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=z_0}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0(1-z_0)}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0^2}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,$$

$$y=y_0+\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0(1-z_0)}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,\tag{1.9}$$

$$u=\frac{1}{2}\frac{y_0^2}{z_0}(z-z_0)+\ldots$$

Будем рассматривать вещественные решения. Тогда при $z\to z_0$ $x\to x_0$ уменьшаясь, а $y\to y_0$ уменьшаясь, если $z_0(1-z_0)>0$, и увеличиваясь, если $z_0(1-z_0)<0$. Но, как видим, $u<0$ при $z-z_0<0$ и $u>0$ при $z-z_0>0$. Отсюда следует, что решение (1.8) для уравнений (*), где, как было условлено, $u>0$, не существует при $z-z_0\to 0-0$, т. е. при возрастающем $z\to z_0$. Но такое решение существует при $z-z_0\to 0+0$. Другими словами, решение с начальными условиями $y=y_0$, $x=x_0=0$ при $z=z_0$ существует только при $z>z_0$, и при возрастающем z функция $x(z)$ возрастает, а $y(z)$ возрастает при $z_0(1-z_0)>0$ и убывает при $z_0(1-z_0)<0$.

Этим мы выяснили качественную картину в окрестности границы области D: $x=0$.

Мы также построим решение

$$x\to x_0\neq 0,\quad y\to y_0=0\quad \text{при } z\to z_0\neq 0,\ 1:\tag{1.10}$$

$$x=x_0+\frac{x_0^2}{2z_0(1-z_0)}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,$$

$$y=\frac{1}{2}\frac{x_0^2}{(1-z_0)^2}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,\tag{1.11}$$

$$u=\frac{1}{2}\frac{x_0^2}{1-z_0}(z-z_0)+\ldots\tag{1.11$_1$}$$

Отсюда видим, что если $1-z_0>0$, то решение (1.10) для уравнений (*) существует только при $z-z_0>0$. А если $1-z_0<0$, то это решение существует только при $z-z_0<0$. Мы также видим, как себя ведут x и y вблизи границы области $y=0$: если $0<z_0<1$, то при увеличении $z>z_0$ x возрастает, а при $z_0<0$ убывает. Функция $y(z)$ в обоих случаях возрастает при увеличении $z>z_0$. Если же $1-z_0<0$, то решение (1.10) существует только при $z-z_0<0$ и при увеличении $(z-z_0)^2$ функция $x(z)$ убывает, а $y(z)$ возрастает.

Построим теперь решение

$$x\to a,\quad y\to -a\quad \text{при } z\to z_0\neq 0,\ 1,\quad u_0=0. \tag{1.12}$$

Из (1.1) имеем

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=z_0}=0,\quad \left.\frac{dy}{dz}\right|_{z=z_0}=0,\quad \left.\frac{du}{dz}\right|_{z=z_0}=-\frac{a^2}{2z_0(1-z_0)},$$

$$\left.\frac{d^2x}{dz^2}\right|_{z=z_0}=-\frac{a^2}{2z_0^2(1-z_0)},\quad \left.\frac{d^2y}{dz^2}\right|_{z=z_0}=-\frac{a^2}{2z_0(1-z_0)^2}.$$

Следовательно, в окрестности z_0 имеем

$$x=a-\frac{a^2}{2z_0^2(1-z_0)}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,$$

$$y=-a-\frac{a^2}{2z_0(1-z_0)^2}\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\ldots,$$

$$u=-\frac{a^2}{2z_0(1-z_0)}(z-z_0)+\ldots \tag{1.13}$$

Отсюда видим, что если $z_0(1-z_0)<0$, то решение (1.12) существует только[1] при

$$z-z_0>0. \tag{1.14}$$

Если же $z_0(1-z_0)>0$, то решение (1.12) существует только при

$$z-z_0<0. \tag{1.15}$$

Если рассматриваем $u>0$ и $u<0$, то при $z\to z_0-0$ и $x(z)$, и $y(z)$ достигают максимума: $x\to a>0$, $y\to -a$, а после z_0 и $x(z)$, и $y(z)$ при возрастающем z убывают и $u<0$. Отметим еще, что в силу (1.13) в окрестности точки z_0 будет

$$xy(x+y)=\frac{a^4}{4z_0^2(1-z_0)^2}(z-z_0)^2+A(z-z_0)^4+\ldots,$$

[1] Если рассматриваем $u>0$. И, следовательно, при $z>1$ нет решения типа (1.12), когда $z-z_0\to 0-0$, т. е. при увеличении z.

т. е. в окрестности точки z_0 будет $xy(x+y)>0$. Следовательно, в окрестности точки z_0 $\sqrt{xy(x+y)}$ будет вещественным, но при переходе точки z_0 меняет знак.

Мы изучили качественную картину в окрестности границы области D. Эта граница, как видим, состоит из точек покоя, в которые входят интегральные кривые из области D. Все это было получено в предположении, что $\sqrt{xy(x+y)}>0$ при $xy(x+y)>0$ — такую систему (*) мы рассматривали. Но можно рассматривать уравнения (*), считая $u=\sqrt{xy(x+y)}$ неизвестной[1] в системе (1.1). Тем самым мы допускаем для u разные знаки и даже комплексные значения, рассматривая уравнения (*) в комплексной области, так что и точки $x=0$, $y=y_0$, $x=x_0$, $y=0$ и $x+y=0$ могут быть комплексными. При такой точке зрения и в вещественной области x, y и z, а также u решения (1.8), (1.10) и (1.12) в окрестности z_0 всегда существуют как при $z-z_0<0$, так и при $z-z_0>0$. Существуют решения и при вещественных начальных значениях x_0, y_0 (но комплексной $u=\sqrt{xy(x+y)}$), взятых из заштрихованной области на рис. 2, но эти решения будут комплексными.

§ 2. О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ УРАВНЕНИЙ (*)

Будем сейчас рассматривать уравнения (*) в комплексной области. Предположим, что $y\to\infty$ при $z\to z_0\neq 0$, 1, причем z приближается к z_0 по пути конечной длины. Тогда и $\dfrac{dy}{dz}$ не ограничено. Это следует из равенства

$$y-y_1=\int_{z_1}^{z}\frac{dy}{dz}\,dz,$$

так как если $\left|\dfrac{dy}{dz}\right|$ ограничено, то и y будет ограничено. Отсюда следует, что и $P=xy(x+y)$ не ограничено при $z\to z_0$ (это видно из (*)). И так как

$$y-y_1=\int_{x_1}^{x}\frac{z}{1-z}\,dx,\quad x-x_1=\int_{y_1}^{y}\frac{1-z}{z}\,dy, \tag{2.1}$$

то и $x\to\infty$ при $z\to z_0$. Так же докажем, что если $x\to\infty$ при $z\to z_0\neq 0$, 1, то и $y\to\infty$ при $z\to z_0$. Доказана

[1] В некоторых задачах необходимо рассматривать решения, склеенные из решений системы (*) с разными ветвями u. Именно это и происходит, как увидим позднее, в проблеме Римана.

Теорема 2.1. *При $z \to z_0 \neq 0$, 1 по пути конечной длины x и y могут стремиться к ∞ только одновременно.*

Теорема 2.2. *Решения системы (*) не могут иметь особых подвижных точек $\bar{z}$ типа существенно особых, т. е. таких, что при $z \to \bar{z} \neq 0$, 1 или x, или y не имеет предельного значения.*

Мы предполагаем еще, что $z \to \bar{z}$ по пути конечной длины.

Доказательство. Из (2.1) видим, что если при $z \to \bar{z}$ есть такая последовательность[1] $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, при которой $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, то для этой последовательности z и $x_1, x_2, \ldots \to \infty$. Если есть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, при которой x_1, $x_2, \ldots$ остается в ограниченной части плоскости, то при такой последовательности z и $y_1, y_2, \ldots$ остается в ограниченной части плоскости. Будем теперь аналитически продолжать некоторое решение системы (*) и пусть при этом встречается особая точка $\bar{z}$. Если при $z \to \bar{z}$ $x \to \infty$, то, как было показано, имеем также $y \to \infty$ и, следовательно, $\bar{z}$ не будет типа существенно особенной. Если при $z \to \bar{z}$ x не стремится к ∞, то найдется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, для которой соответствующие значения y также будут внутри некоторого круга радиуса R_1. Мы будем аналитически продолжать соответственно и решение системы (1.1). Тогда соответствующие значения $u_1, u_2, \ldots$ также будут находиться внутри некоторого круга радиуса R_2. В точках $z_1, z_2, \ldots$ это решение голоморфное и соответствующие радиусы сходимости $r_1, r_2, \ldots$ будут иметь нижнюю точную границу $r \neq 0$. Но тогда при достаточно большом k точка $\bar{z}$ попадает в область сходимости ряда, построенного в окрестности точки z_k, и не будет особенной, что противоречит предположению. Теорема 2.2 доказана.

Ранее было показано, что если x и y стремятся к конечным значениям при $z \to \bar{z} \neq 0, 1, \infty$, то в окрестности точки $\bar{z}$ x и y — регулярные функции.

Если $x(z)$ — функция, регулярная в точке $\bar{z} \neq 0, 1, \infty$, то и $\frac{dx}{dz}$ регулярная, а тогда и $\sqrt{xy(x+y)} = z\frac{dx}{dz}$ регулярная, поэтому регулярной будет и $y(z) = \int \frac{z}{1-z}\frac{dx}{dz}\,dz$.

Из всего предыдущего следует

Теорема 2.3. *Если $\bar{z} \neq 0$, 1, ∞ — особая точка решения системы (*), то $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to \bar{z}$.*

Возможно ли вещественное решение

$$x \to \infty, \quad y \to -\infty \quad \text{при } z \to z_0, \quad 0 < z_0 < 1? \tag{2.2}$$

---

[1] Из (2.1) $|y_k - y_1| \leqslant \max\left|\frac{z}{1-z}\right| |x_k - x_1|$. Если $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, то x_1, $x_2, \ldots \to \infty$; при $|x_k - x_1| < M$ будет $|y_k - y_1| < N$.

Рассмотрим решение с начальными условиями

$$x\to x_0>0,\quad y\to y_0<0 \quad \text{при } z-z_0\to 0-0,$$

т. е. при возрастании z, при этом $z_0<1$, $x_0y_0(x_0+y_0)>0$ и $\sqrt{x_0y_0(x_0+y_0)}>0$.

Здесь при увеличении z y возрастает (в силу (*)), поэтому не может $y\to-\infty$. Как мы видели, возможен случай, когда $xy(x+y)\to 0$ при $z-\bar{z}\to 0-0$, но при этом мы попадаем на границу области D: $x=a$, $y=-a$, и решение заканчивается в точке $\bar{z}$ (см. 1.13)).

Но, может быть, возможно решение

$$x\to\infty,\quad y\to\infty \quad \text{при } z\to z_0,\quad 0<z_0<1? \tag{2.3}$$

Так как здесь имеем неопределенность $\frac{y}{x}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$, то, согласно Лопиталю,

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{y'}{x'}=\lim\frac{z}{1-z}=a>0. \tag{2.4}$$

Поэтому $y=x[a+\delta(z)]$, где[1] $\delta(z)\to 0$ при $z\to z_0$. Подставляя это в первое уравнение (*), получим

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x^{3/2}}{z}\sqrt{a(1+a)+\delta(z)}=\frac{x^{3/2}}{z}\sqrt{a(1+a)}\sqrt{1+\delta(z)}.$$

$$-2x^{-1/2}=\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\sqrt{a(1+a)}}{z}\sqrt{1+\delta(z)}\,dz=$$

$$=\sqrt{a(1+a)}\sqrt{1+\delta(z)}\,(\ln z-\ln z_0)\to 0 \quad \text{при } z\to z_0.$$

Отсюда следует, что решение (2.3) ожидать можно. И если оно есть, то мы получили его асимптотическое выражение. Теперь покажем, что оно существует и найдем его точное представление. С этой целью введем новую переменную u равенством $y=ux$, где очевидно, что $u\to\frac{z_0}{1-z_0}=a>0$ при $z\to z_0$ (согласно (2.4)). Тогда из (*)

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x^{3/2}}{z}\sqrt{u(1+u)},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{x^{3/2}}{1-z}\sqrt{u(1+u)}, \tag{2.5}$$

---

[1] Вообще через $\delta(z)$ будем обозначать величины, стремящиеся к 0 при $z\to z_0$.

$$\frac{dy}{dz} = u\frac{dx}{dz} + x\frac{du}{dz} = \frac{x^{3/2}}{1-z}\sqrt{u(1+u)},$$

$$x\frac{du}{dz} = x^{3/2}\sqrt{u(1+u)}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{u}{z}\right),$$

$$\frac{du}{dz} = x^{1/2}\sqrt{u(1+u)}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{u}{z}\right). \tag{2.5$_1$}$$

Если обозначим $v = -2x^{-1/2}$, то первое уравнение из (2.5) и (2.5$_1$) перепишутся в виде

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\sqrt{u(1+u)}}{z}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2}{v}\sqrt{u(1+u)}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{u}{z}\right),$$

где должно быть $v \to 0$ при $z \to z_0$. Отсюда имеем

$$\frac{dz}{dv} = \frac{z}{\sqrt{u(1+u)}}, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{2z}{v}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{u}{z}\right). \tag{2.6}$$

Обозначая еще $u - a = w \to 0$, $z - z_0 = t \to 0$ при $v \to 0$, из (2.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{z_0 + t}{\sqrt{(a+w)(1+a+w)}}, \\ \frac{dw}{dv} &= -2\frac{z_0+t}{v}\left(\frac{1}{1-z_0-t} - \frac{a+w}{z_0+t}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Записывая здесь правые части в виде рядов по степеням t и w, получим

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{v}{v}\left[\frac{z_0}{\sqrt{a(1+a)}} + \frac{t}{\sqrt{a(1+a)}} - \frac{z_0(1+2a)w}{2[a(1+a)]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(8a^2+8a+3)z_0}{[a(1+a)]^{5/2}}\frac{w^2}{8} - \frac{(1+2a)wt}{2[a(1+a)]^{3/2}} + \ldots\right], \\ \frac{dw}{dv} &= \frac{1}{v}\left[-\frac{2t}{(1-z_0)^2} + 2w - \frac{2t^2}{(1-z_0)^3} + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь не вписаны члены выше второй степени и свободный член. В скобках в (2.7) при $t = w = 0$ имеем

$$\frac{1}{1-z_0} - \frac{a}{z_0} = 0, \quad \text{так как } a = \frac{z_0}{1-z_0}.$$

Уравнения (2.8) имеют вид уравнений Брио и Буке, рассмотренных во II главе. Сравнивая (2.8) с уравнениями (1.1) II главы, видим, что матрица

$$\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{(1-z_0)^2} & 2 \end{Vmatrix}$$

Очевидно, здесь $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$.

Введем в (2.8) две новые неизвестные y_1 и y_2:

$$y_1 = w - \frac{2\sqrt{z_0}}{1-z_0}\, v, \quad y_2 = t - \sqrt{z_0}\,(1-z_0)\, v. \tag{2.9}$$

Тогда получим уравнения

$$\frac{dy_1}{dv} = \frac{1}{v}\left[2y_1 - \frac{2y_2}{(1-z_0)^2} - \frac{2y_2^2}{(1-z_0)^3} - \frac{4\sqrt{z_0}}{(1-z_0)^2}\, vy_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{2z_0}{1-z_0}\, v^2 + \ldots\right], \tag{2.10}$$
$$\frac{dy_2}{dv} = \frac{1}{v}\left[-\frac{(1+z_0)(1-z_0)^2}{2\sqrt{z_0}}\, y_1 v + \frac{1-z_0}{\sqrt{z_0}}\, y_2 v - \right.$$
$$\left. - 2(1-z_0)\, z_0 v^2 + \ldots\right].$$

Эти уравнения имеют вид уравнений (1.1) II главы и подстановкой

$$y_1 = s_{11}u_1 + s_{12}u_2, \quad y_2 = s_{21}u_1 + s_{22}u_2$$

с постоянными s_{kl} преобразуются к уравнениям (1.10) II главы:

$$v\frac{du_1}{dv} = 2u_1 + F_1(u_1, u_2, v), \quad v\frac{du_2}{dv} = F_2(u_1, u_2, v), \tag{2.11}$$

так как $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$.

Согласно теореме 1.6 II главы, эта система имеет однопараметрическое семейство решений

$$u_s = \sum_{m+m_1=1} C_s^{(mm_1)}\, v^m (v^2 \ln v)^{m_1}, \quad s = 1, 2, \tag{2.12}$$

с произвольной постоянной $C_1^{(20)} = C$. Но, согласно замечанию к теореме 1.6, здесь возможен такой случай, когда члены с $v^2 \ln v$ отсутствуют и это решение будет голоморфным с произвольной постоянной $C_1^{(20)}=C$. Именно этот случай здесь имеем. Это легко увидеть, удовлетворяя формально уравнениям (2.10) рядами вида

$$y_1=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k v^k,\quad y_2=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k v^k. \tag{2.13}$$

При этом найдем $\alpha_1=\beta_1=0$, $\beta_2=(z_0-1)z_0$ и $\alpha_2=C$ — произвольное постоянное, т. е.

$$y_1=Cv^2+\sum_{k=3}^{\infty}\alpha_k v^k \quad \text{и} \quad y_2=z_0(z_0-1)v^2+\sum_{k=3}^{\infty}\beta_k v^k,$$

откуда получим

$$u=w+a=a+\frac{2\sqrt{z_0}}{1-z_0}v+Cv^2+\sum_{k=3}^{\infty}\alpha_k v^k,$$

$$z-z_0=t=\sqrt{z_0}\,(1-z_0)\,v+z_0(1-z_0)\,v^2+\sum_{k=3}^{\infty}\beta_k v^k,$$

$$v=-2x^{-1/2}.$$

При малых $|v|$ эти ряды сходятся. Из второго ряда получим

$$v=\frac{1}{\sqrt{z_0}\,(1-z_0)}(z-z_0)+\bar{\gamma}_2(z-z_0)^2+\ldots$$

и, наконец,

$$x=\frac{1}{(z-z_0)^2}\left[4z_0(1-z_0)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(z-z_0)^k\right] \tag{2.14}$$

с постоянными γ_k. Из $y=xu$, учитывая, что $a=\dfrac{z_0}{1-z_0}$, найдем

$$y=\frac{1}{(z-z_0)^2}\left[4z_0^2(1-z_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k(z-z_k)^k\right], \tag{2.15}$$

где δ_k — постоянные.

Мы доказали, что решение (2.3) существует, z_0 будет для x и y полюсом второго порядка, и построили это решение в виде (2.14), (2.15) с одним произвольным параметром $C_1^{(20)}=C$.

§ 3. О РЕШЕНИИ $x \to x_0$ (КОНЕЧНОЕ), $y \to y_0$ (КОНЕЧНОЕ) ПРИ $z \to 0$ ИЛИ $z \to 1$

Рассмотрим теперь решение системы (*) с начальными значениями

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 0. \tag{3.1}$$

Если такое решение есть, то должно быть

$$x_0 y_0 (x_0 + y_0) = 0. \tag{3.2}$$

Действительно, иначе из

$$x - x_1 = \int_{z_1}^{z} \frac{\sqrt{xy(x+y)}}{z}\, dz \tag{3.2$_1$}$$

получим, что $x \to \infty$ при $z \to 0$. Так же докажем, что если

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 1, \tag{3.3}$$

то имеем (3.2).

Возвращаемся к решению (3.1). Мы показали, что при этом будет (3.2). Но в таком случае решением будет

$$x \equiv x_0, \quad y \equiv y_0. \tag{3.4}$$

И здесь возникает вопрос: существует ли решение типа (3.1), отличное от (3.4)? Чтобы решить вопрос, рассмотрим равенство (из (1.1))

$$u - u_1 = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z} \frac{2xy + y^2}{z}\, dz + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z} \frac{2xy + x^2}{1 - z}\, dz.$$

Отсюда видим, что если

$$2x_0 y_0 + y_0^2 \neq 0, \tag{3.4$_1$}$$

то другого решения с начальными условиями (3.2) при $z=0$, отличного от (3.4), нет, так как если $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 0$ и имеем (3.4$_1$), то u остается ограниченным, второй интеграл в u также ограничен, а первый интеграл стремится к ∞, что невозможно. Так же докажем, что если

$$2x_0 y_0 + x_0^2 \neq 0, \tag{3.4$_2$}$$

то, кроме решения (3.4), другого решения с начальными условиями (3.3) и (3.2) нет.

Уравнению (3.2) удовлетворяют значения

I. $x_0 = 0, \quad y = C$; II. $y_0 = 0, \ x = C$; III. $y_0 = -x_0$.

В случае I будет (3.4_1), поэтому, кроме решения

$$x \equiv 0, \quad y \equiv C, \tag{3.5}$$

других решений типа

$$x \to 0, \quad y \to C \quad \text{при } z \to 0 \tag{3.6}$$

нет. Но возможно решение

$$x \to 0, \quad y \to C \quad \text{при } z \to 1, \tag{3.7}$$

отличное от (3.5). В случае II имеем (3.4_2), поэтому, кроме решения

$$x \equiv C, \quad y \equiv 0, \tag{3.8}$$

других решений типа

$$x \to C, \quad y \to 0 \quad \text{при } z \to 1 \tag{3.9}$$

нет. Но возможно решение

$$x \to C, \quad y \to 0 \quad \text{при } z \to 0, \tag{3.10}$$

отличное от (3.8).

Предположим теперь, что

$$x \to x_0 \text{ (конечное)}, \; y \to y_0 \text{ (конечное) при } z \to \infty. \tag{3.11}$$

Тогда снова из (3.2_1) следует, что необходимо выполнение условия (3.2), так как иначе не может x быть ограниченным при $z \to \infty$. Записывая далее равенство из (1.1) в виде

$$u - u_1 = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z} \frac{2xy + y^2}{z(1-z)}\, dz + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z} \frac{x^2 - y^2}{1 - z}\, dz, \tag{3.12}$$

видим, что должно быть еще

$$x_0^2 - y_0^2 = 0, \tag{3.13}$$

так как первый интеграл сходится при $z \to \infty$, а второй будет расходиться, если нет (3.13).

Мы доказали, что решение (3.11) возможно только при условиях

$$x_0 = y_0 = 0 \quad \text{или } x_0 + y_0 = 0. \tag{3.14}$$

Но мы доказали только необходимость этих условий.

Поставим вопрос: существует ли решение (3.1), голоморфное в окрестности точки $z=0$? Необходимым условием этого, как мы видели, будет выполнение равенства (3.2) и

$$2x_0 y_0 + y_0^2 = 0. \tag{3.15}$$

Если такое решение существует, то, согласно (*), голоморфным в точке $z=0$ является и $u=\sqrt{xy(x+y)}=z\frac{dx}{dz}$. Поэтому будем рассматривать вопрос о существовании голоморфного в точке $z=0$ решения уравнений (1.1):

$$x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}x_kz^k,\quad y=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}y_kz^k,\quad u=\sum_{k=1}^{\infty}u_kz^k. \tag{3.16}$$

Здесь x_k, y_k и u_k постоянные.

Из (3.15) видим, что либо $y_0=0$, либо $2x_0+y_0=0$. Если $2x_0+y_0=0$ и $y_0\neq0$, то нет (3.2), поэтому остается только случай $y_0=0$, а x_0 произвольное, тогда и (3.2), и (3.15) выполнены. Таким образом, в (3.16) должно быть $y_0=0$. Введем новую переменную τ равенством

$$x=x_0+\tau. \tag{3.17}$$

Перепишем уравнения (1.1) в виде

$$\frac{d\tau}{dz}=\frac{u}{z},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{uz(1+z+z^2+\ldots)}{z},$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{2xy+y^2}{2z}+\frac{2xy+x^2}{2z}z(1+z+z^2+\ldots)=$$

$$=\frac{2(x_0+\tau)y+y^2}{2z}+\frac{2(x_0+\tau)y+(x_0+\tau)^2}{2z}z(1+z+$$
$$+z^2+\ldots). \tag{3.18}$$

Здесь τ, y и u — голоморфные в точке $z=0$ функции. Уравнения (3.18) являются уравнениями типа Брио и Буке, такие уравнения мы рассматривали в главе II в случае двух уравнений. Здесь же мы имеем три уравнения. Соответствующая линейная система имеет вид

$$z\frac{d\tau}{dz}=u,\quad z\frac{dy}{dz}=0,\quad z\frac{du}{dz}=x_0y+\frac{x_0^2}{2}z.$$

Таким образом, для решения вопроса о существовании голоморфного решения (3.16) можно было бы изучить вопрос о наличии голоморфного в точке $z=0$ решения системы (3.18). Мы поступим иначе. Нас интересует голоморфное решение в точке $z=0$ уравнений (1.1). Мы уже видели, что в (3.16) должно быть $y_0=0$, так что будем искать решение вида

$$x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}x_kz^k,\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}y_kz^k,\quad u=\sum_{k=1}^{\infty}u_kz^k. \tag{3.19}$$

Подставим эти ряды в уравнения (1.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^{k-1}, \tag{3.20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ky_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k (1 + z + z^2 + \ldots), \tag{3.21}$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} ku_k z^k = 2\left(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k\right) \sum_{k=1}^{\infty} y_k z^k + \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k z^k\right)^2 +$$
$$+ \left[2\left(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k\right) \sum_{k=1}^{\infty} y_k z^k + \left(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k\right)^2\right](z + z^2 + \ldots). \tag{3.22}$$

Сравнивая в (3.20) и (3.21) коэффициенты при нулевой и первой степенях z справа и слева, а в (3.22) при первой степени, получим $x_1 = u_1$, $2x_2 = u_2$, $y_1 = 0$, $2y_2 = u_1$, $2u_1 = 2x_0y_0 + x_0^2 = x_0^2$. Отсюда $y_2 = x_0^2/4$.

Введем теперь новые переменные

$$x = x_0 + \tau, \quad y = z^2\left(\frac{x_0^2}{4} + \zeta\right), \tag{3.23}$$

где должно быть $\tau=0$ и $\zeta=0$ при $z=0$. Подставим эти значения x и y в уравнения (*). Но сначала найдем $\sqrt{xy(x+y)}$ в новых переменных τ и ζ:

$$xy(x+y) = z^2\left(\frac{x_0^2}{4} + \zeta\right)(x_0 + \tau)\left[x_0 + \tau + z^2\left(\frac{x_0^2}{4} + \zeta\right)\right] =$$
$$= z^2\left(\frac{x_0^3}{4} + \frac{x_0^2}{4}\tau + x_0\zeta + \zeta\tau\right)\left(x_0 + \tau + \frac{x_0^2}{4}z^2 + z^2\zeta\right) =$$
$$= z^2\left(\frac{x_0^4}{4} + \frac{x_0^3}{4}\tau + x_0^2\zeta + \frac{x_0^3}{4}\tau + \ldots\right) =$$
$$= \frac{x_0^4 z^2}{4}\left(1 + \frac{2\tau}{x_0} + \frac{4}{x_0^2}\zeta + \ldots\right),$$

$$\sqrt{xy(x+y)} = \frac{x_0^2}{2} z\left(1 + \frac{\tau}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}\zeta + \ldots\right). \tag{3.24}$$

Здесь в скобках опущены члены степени выше первой относительно τ, ζ и z. Из (3.23) получим

$$\frac{dy}{dz} = 2z\left(\frac{x_0^2}{4} + \zeta\right) + z^2\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\sqrt{xy(x+y)}}{1-z},$$

поэтому на основании (3.24) имеем

$$z\frac{d\zeta}{dz}=\frac{\sqrt{xy(x+y)}}{z(1-z)}-\frac{x_0^2}{2}-2\zeta=\frac{x_0^2}{2}\left(1+\frac{\tau}{x_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{x_0^2}\zeta+\ldots\right)(1+z+z^2+\ldots)-\frac{x_0^2}{2}-2\zeta=$$
$$=\frac{x_0}{2}\tau-\zeta+\frac{x_0^2}{2}z+\ldots$$

Имеем еще $\frac{dx}{dz}=\frac{d\tau}{dz}=\frac{\sqrt{xy(x+y)}}{z}$ или в силу (3.24)

$$\begin{aligned} z\frac{d\tau}{dz}&=\frac{x_0^2}{2}z+z\left(\zeta+\frac{x_0}{2}\tau+\ldots\right),\\ z\frac{d\zeta}{dz}&=\frac{x_0}{2}\tau-\zeta+\frac{x_0^2}{2}z+\ldots \end{aligned}\tag{3.25}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (1.1) главы II, видим, что здесь имеем случай (1.5) главы II

$$P=S^{-1}\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix}S,\quad \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1.$$

Поэтому, согласно теореме 1.1 главы II, уравнения (3.25) имеют и притом единственное голоморфное решение

$$\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k z^k,\quad \zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k z^k,\tag{3.26}$$

где τ_k и ζ_k постоянные. Легко видеть, что здесь

$$\tau_1=\frac{x_0^2}{2}\quad\text{и}\quad \zeta_1=\frac{x_0^3}{8}+\frac{x_0^2}{4}.$$

Таким образом, мы доказали, что уравнения (*) имеют голоморфное в точке $z=0$ решение

$$\begin{aligned} x&=x_0+\frac{x_0^2}{2}z+\tau_2 z^2+\ldots,\\ y&=\frac{x_0^2}{4}z^2+\left(\frac{x_0^3}{8}+\frac{x_0^2}{4}\right)z^3+\ldots, \end{aligned}\tag{3.27}$$

где x_0 произвольное, не равное нулю.

Заметим еще, что если здесь $x_0<0$, то при малых z $xy(x+y)>0$. Но появляется вопрос: существует ли другое решение типа

$$x \to x_0, \quad y \to 0 \quad \text{при } z \to 0, \tag{3.27$_1$}$$

отличное от (3.27), неголоморфное? Если такое решение есть, то u и v, определенные равенствами

$$\tau = \tau_1 + u, \quad \zeta = \zeta_1 + v, \tag{3.28}$$

где τ_1 и ζ_1 — ряды (3.27), обладают свойствами

$$u \to 0, \quad v \to 0 \quad \text{при } z \to 0. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.28) в (3.25), получим

$$\frac{du}{dz} = \frac{x_0}{2} u + v + P(u, v, z),$$

$$z\frac{dv}{dz} = \frac{x_0}{2} u - v + Q(u, v, z) \tag{3.30}$$

и здесь $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ — решение. Функции $P(u, v, z)$ и $Q(u, v, z)$ — ряды относительно u и v без свободных членов, а коэффициенты либо постоянные, либо ряды от τ_1 и ζ_1. Здесь могут быть и линейные члены относительно u и v, но с коэффициентами в виде рядов от τ_1 и ζ_1 без свободных членов, т. е. эти коэффициенты стремятся к нулю при $z \to 0$.

Существует [1] ли решение (3.29) уравнений (3.30), отличное от $u \equiv 0$, $v \equiv 0$?

Пусть теперь

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 1. \tag{3.31}$$

Как мы видели, при этом имеем (3.2) и, кроме этого,

$$2x_0y_0 + x_0^2 = 0, \tag{3.32}$$

---

[1] Заметим, что линейная система, соответствующая системе (3.30), $u' = \frac{x_0}{2} u + v$, $v' = \frac{x_0}{2z} - \frac{1}{z} v$ не имеет решения $u \to 0$, $v \to 0$ при $z \to 0$. Действительно, для u имеем уравнение $u'' + \left(\frac{1}{z} - \frac{x_0}{2}\right) u' - \frac{x_0}{z} u = 0$, для которого $z = 0$ — регулярная особая точка. Имеем два линейно независимых решения $u_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, $\alpha_0 \neq 0$, $u_2 = \beta u_1 \ln z + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$, $\beta_0 \neq 0$, откуда и следует утверждение (см. [53]).

так как иначе будет только (3.4). Из (3.32) имеем или $x_0=0$, или $2y_0+x_0=0$. Но если $2y_0+x_0=0$ и $x_0\neq0$, то нет (3.2). Поэтому если имеем (3.31), то

$$x_0 = 0, \tag{3.33}$$

при этом и (3.2) выполнено, а y_0 — произвольное конечное. Итак, решение (3.31) обязано иметь вид

$$x \to 0, \quad y \to y_0 \neq 0 \quad \text{при } z \to 1. \tag{3.34}$$

Голоморфное решение вида (3.34) во всяком случае существует при произвольном $y_0\neq0$. Докажем это так. Заменим в (*) $z-1=t$. Тогда (*) перейдет в

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{xy(x+y)}}{1+t}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{xy(x+y)}}{t}. \tag{3.35}$$

Решение (3.34) принимает вид

$$x \to 0, \quad y \to y_0 \neq 0 \quad \text{при } t \to 0. \tag{3.36}$$

И так же, как (3.27), найдем

$$x = \frac{y_0^2}{4} t^2 + x_3 t^3 + \ldots, \quad y = y_0 - \frac{y_0^2}{2} t + y_2 t^2 + \ldots,$$

или

$$x = \frac{y_0^2}{4} (z-1)^2 + x_3 (z-1)^3 + \ldots,$$

$$y = y_0 - \frac{y_0^2}{2} (z-1) + y_2 (z-1)^2 + \ldots \tag{3.37}$$

§ 4. О РЕШЕНИИ $y\to\infty$, $x\to x_0$ ПРИ $z\to1$

Сначала рассмотрим, существует ли решение

$$x \to \infty, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 1-0. \tag{4.1}$$

При этих условиях $\sqrt{xy(x+y)} = x\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{y}{x}} \approx x\sqrt{y}$ вблизи $z \doteq 1$, поэтому из первого уравнения (*) имеем (z вблизи 1)

$$\frac{dx}{dz} \approx x\sqrt{y}, \quad \ln x \approx \int^{z} \sqrt{y}\, dz + C,$$

откуда видим, что (4.1) невозможно.

Но, может быть, существует решение

$$y \to \infty, \quad x \to x_0 \quad \text{при } z \to 1? \tag{4.2}$$

При этом условии имеем $\sqrt{xy(x+y)} = y\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{x}{y}} \approx$ $\approx y\sqrt{x}$ вблизи $z=1$, поэтому из второго уравнения системы (*) имеем

$$\frac{dy}{dz} \doteq \frac{y\sqrt{x}}{1-z}, \quad \ln y \doteq \int^{z} \frac{\sqrt{x}}{1-z}\,dz + \ln C.$$

Согласно Лопиталю,

$$\lim \frac{\int^{z} \frac{\sqrt{x}}{1-z}\,dz}{\int^{z} \frac{\sqrt{x_0}}{1-z}\,dz} = \lim_{z\to 1-0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x_0}} = 1,$$

поэтому

$$\int^{z} \frac{\sqrt{x}}{1-z}\,dz \approx -\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)\,[1+\delta(z)],$$

$\delta(z) \to 0$ при $z \to 1$. Следовательно, имеем

$$y \approx e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)[1+\delta(z)]}, \tag{4.3}$$

откуда видим, что $y \to \infty$ при $z \to 1$, если[1] $x_0 > 0$, и берем $\sqrt{x_0} > 0$, т. е. рассматриваем $\sqrt{xy(x+y)} > 0$. Но возможно ли при этом $x \to x_0$? Из первого уравнения системы (*) в силу (4.3) в окрестности $z=1$ получим

$$\frac{dx}{dz} \approx y\sqrt{x} \approx Ce^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)[1+\delta(z)]}\sqrt{x},$$

откуда

$$2\sqrt{x} \approx C\int^{z} e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)[1+\delta(z)]}\,dz + 2\sqrt{x_0} =$$

$$= C\int^{z} (1-z)^{-\sqrt{x_0}\,[1+\delta(z)]}\,dz + 2\sqrt{x_0}. \tag{4.4}$$

---

[1] Или если $R(\sqrt{x_0}) > 0$.

Так как $\delta(z) \to 0$ при $z \to 0$, то вблизи $z = 1$ имеем

$$\int^z (1-z)^{-\sqrt{x_0}\,[1+\delta(z)]}\,dz < \int^z (1-z)^{-\sqrt{x_0}\,(1+\delta_1)}\,dz =$$

$$= \frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}\,(1+\delta_1)}}{1-\sqrt{x_0}\,(1+\delta_1)},$$

где $\delta_1 > 0$ — постоянная как угодно малая, откуда и следует, что $2\sqrt{x} \to 2\sqrt{x_0}$ при $z \to 1$, если

$$0 < \sqrt{x_0} < 1. \tag{4.5}$$

Этим мы показали, что решение (4.2) можно ожидать и если оно есть, то мы получим некоторое его асимптотическое выражение. Но мы не доказали его существования. Теперь получим лучшее приближение для y и x, чем (4.3) и (4.4).

В предположении (4.2) имеем

$$\sqrt{x^2y + xy^2} = y\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{x}{y}} = y\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{y} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{8}\frac{x^2}{y^2} + O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right],$$

где $O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)$ — малая порядка $\frac{x^3}{y^3}$. Следовательно, имеем

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y\sqrt{x}}{1-z}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{y^2} + O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right],$$

$$\ln y = \int \frac{\sqrt{x}}{1-z}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{y^2} + O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right] dz.$$

Так как $\ln y$ и $\int \frac{\sqrt{x_0}}{1-z}\,dz = -\sqrt{x_0}\,\ln(1-z) \to \infty$ при $1 - z \to 0+0$, то, согласно Лопиталю,

$$\lim \frac{\int \frac{\sqrt{x}}{1-z}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{y^2} + O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right] dz}{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x_0}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{y} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{y^2} + O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right] = 1,$$

поэтому имеем

$$\ln y \approx -\sqrt{x}\,\ln(1-z)\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{y}-\frac{1}{8}\,\frac{x^2}{y^2}+O\left(\frac{x^3}{y^3}\right)\right],$$

или

$$y \approx e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)\left[1+\frac{1}{2}\frac{x_0}{y}-\frac{1}{8}\frac{x_0^2}{y^2}+O\left(\frac{x_0^3}{y^3}\right)\right]}. \qquad (4.6_1)$$

Отсюда

$$y \approx e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)} = (1-z)^{-\sqrt{x_0}}. \qquad (4.6)$$

Согласно Лопиталю, имеем также

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)}{y} = \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)}{(1-z)^{-\sqrt{x_0}}} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(1-z)(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}} = \lim_{z\to 1}\left[-(1-z)^{\sqrt{x_0}}\right] = 0.$$

Следовательно, $\dfrac{\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)}{y} \approx -(1-z)^{\sqrt{x_0}}$ и $\dfrac{\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)}{y^2} \approx -(1-z)^{2\sqrt{x_0}}$. Это позволяет написать[1] (из (4.6_1))

$$y = e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)}\, e^{-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)\left[\frac{1}{2}\frac{x_0}{y}-\frac{1}{8}\frac{x_0^2}{y^2}+O\left(\frac{x_0^3}{y^3}\right)\right]} =$$

$$= (1-z)^{-\sqrt{x_0}}\left[1+\frac{x_0}{2}(1-z)^{\sqrt{x_0}}+O\left((1-z)^{2\sqrt{x_0}}\right)\right], \qquad (4.7)$$

где $O(\delta)$ — малая порядка δ при малых δ.

Введем новые переменные u и v:

$$y = (1-z)^{-\sqrt{x_0}} - \frac{x_0}{2} + v, \quad u = x - x_0 \qquad (4.8)$$

и докажем, что[2]

$$v \to 0, \quad u \to 0 \quad \text{при } z \to 1. \qquad (4.9)$$

---

1) $-\sqrt{x_0}\,\ln(1-z)\left[\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_0}{y}-\dfrac{1}{8}\,\dfrac{x_0^2}{y^2}+O\left(\dfrac{x_0^3}{y^3}\right)\right] = \dfrac{x_0}{2}(1-z)^{\sqrt{x_0}} + O\left((1-z)^{2\sqrt{x_0}}\right)$, откуда и следует (4.7).

2) Мы докажем, что в (4.8) $u\to 0$ и $v \to 0$ при $z \to 1$ как угодно, т. е. не обязательно по вещественной оси, если $0 < R(\sqrt{x_0}) < 1$.

Пользуясь (4.8), найдем

$$xy(x+y)=(x_0+u)\left[(1-z)^{-\sqrt{x_0}}-\frac{x_0}{2}+v\right]\times$$

$$\times\left[\frac{x_0}{2}+u+(1-z)^{-\sqrt{x_0}}+v\right]=x_0\left(1+\frac{u}{x_0}\right)(1-z)^{-2\sqrt{x_0}}\times$$

$$\times\left[1+\left(v-\frac{x_0}{2}\right)(1-z)^{\sqrt{x_0}}\right]\left[1+\left(u+v+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x_0}{2}\right)(1-z)^{\sqrt{x_0}}\right]=x_0\left(1+\frac{u}{x_0}\right)(1-z)^{-2\sqrt{x_0}}\times$$

$$\times\left[1+(2v+u)(1-z)^{\sqrt{x_0}}+\left(v-\frac{x_0}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(u+v+\frac{x_0}{2}\right)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}\right], \tag{4.10}$$

$$\sqrt{xy(x+y)}=\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-\sqrt{x_0}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{u}{x_0}\right)^{1/2}\left[1+(2v+u)(1-z)^{\sqrt{x_0}}+\left(v-\frac{x_0}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(v+\frac{x_0}{2}+u\right)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}\right]^{1/2}=\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-\sqrt{x_0}}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{u}{x_0}+(2v+u)(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{x_0^2}{4}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+A}\,,$$

$$A=\frac{u(2v+u)(1-z)^{\sqrt{x_0}}}{x_0}-\frac{3x_0}{4}u(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+$$

$$+(v^2+uv)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}-\frac{u^2}{2}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+$$

$$+\frac{(v^2+uv)u}{x_0}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}=P_2(u,v)(1-z)^{\sqrt{x_0}}+$$

$$+P_1(u)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+Q_2(u,v)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+P_3(u,v)(1-z)^{2\sqrt{x_0}}.$$

Здесь $P_1(u)$, $P_2(u, v)$, $P_3(u, v)$ и $Q_2(u, v)$ — однородные полиномы от своих аргументов степени, равной индексу. Считая u, v и $(1-z)^{\sqrt{x_0}}$ малыми одного порядка вблизи $z=1$ и оставляя только малые не выше второго порядка, можем написать

$$\sqrt{1+\frac{u}{x_0}+(2v+u)(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{x_0^2}{4}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}+A}\approx$$

$$\approx 1+\frac{u}{2x_0}+\frac{2v+u}{2}(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{x_0^2}{8}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}-\frac{u^2}{8x_0^2}, \tag{4.11}$$

а (4.10) можно записать в виде

$$\sqrt{xy(x+y)}=\sqrt{x_0}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}\left[1+\frac{u}{2x_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{2v+u}{2}(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{x_0^2}{8}(1-z)^{2\sqrt{x_0}}-\frac{u^2}{8x_0^2}+\ldots\right]. \tag{4.10$_1$}$$

Из уравнений (*) и (4.8) можно получить

$$\frac{du}{dz}=\frac{\sqrt{xy(x+y)}}{z},\quad \frac{dv}{dz}=\frac{\sqrt{xy(x+y)}}{1-z}-$$

$$-\sqrt{x_0}(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}, \tag{4.12}$$

где значение $\sqrt{xy(x+y)}$ дано формулой (4.10) или (4.10$_1$). Если мы покажем, что уравнения (4.12) имеют решение $u\to 0$, $v\to 0$ при $z\to 1$, то тем самым покажем, что уравнения (*) имеют решение (4.2).

Вблизи $z=1$ имеем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=1+(1-z)+(1-z)^2+\ldots\approx 1.$$

Подставляя в (4.10) приближенное значение (4.11) или учитывая (4.10$_1$), уравнения (4.12) приближенно запишем в виде[1)]

$$\frac{dv}{dz}=\frac{u(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}}{2\sqrt{x_0}}+\frac{2v+u}{2}\sqrt{x_0}(1-z)^{-1}-$$

$$-\frac{x_0^{5/2}}{8}(1-z)^{\sqrt{x_0}-1}-\frac{u^2}{8x_0^{3/2}}(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}, \tag{4.13}$$

$$\frac{du}{dz}=\sqrt{x_0}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}+\frac{u}{2\sqrt{x_0}}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}+\frac{2v+u}{2}\sqrt{x_0}-$$

---

1) Здесь, например, в $\frac{dv}{dz}$ отброшены члены $(1-z)^{2\sqrt{x_0}-1}$, может быть, бесконечно большие (если $\sqrt{x_0}$ малое) вблизи $z=1$, но это малые по сравнению с $(1-z)^{\sqrt{x_0}-1}$, которые оставлены.

$$-\frac{x_0^{5/2}}{8}(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{u^2}{8x_0^{3/2}}(1-z)^{-\sqrt{x_0}},$$

или

$$\frac{dv}{dz}=\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-1}v+\left[\frac{(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}}{2\sqrt{x_0}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{x_0}}{2}(1-z)^{-1}\right]u-\frac{x_0^{5/2}}{8}(1-z)^{\sqrt{x_0}-1}-$$
$$-\frac{u^2}{8x_0^{3/2}}(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}, \qquad (4.14)$$

$$\frac{du}{dz}=\left[\frac{(1-z)^{-\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}\right]u+v\cdot\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-\sqrt{x_0}}-$$
$$-\frac{x_0^{5/2}}{8}(1-z)^{\sqrt{x_0}}-\frac{u^2}{8x_0^{3/2}}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}.$$

Теперь наряду с (4.14) мы получим мажорантные уравнения. Легко видеть, что при малых u, v и $(1-z)^{\sqrt{x_0}}$ сумма модулей членов подкоренного многочлена от этих величин в (4.10) не превосходит величины

$$1+p(z)=1+a_1u+a_2u(1-z)^{\sqrt{x_0}}+a_3v(1-z)^{\sqrt{x_0}}+$$
$$+a_4(1-z)^{2\sqrt{x_0}},$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — некоторые положительные постоянные. Величина $p(z)$ малая. Очевидно, $\sqrt{1+p(z)}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k p^k(z)$ и мажорируется выражением $1+bp(z)$, где $b>0$ постоянная. Это позволяет написать, учитывая (4.10), для (4.12) или для (4.14) мажорантные уравнения

$$\frac{du}{dz}=\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-\sqrt{x_0}}\,[1+a_1u+a_2u(1-z)^{\sqrt{x_0}}+$$
$$+a_3v(1-z)^{\sqrt{x_0}}+a_4(1-z)^{2\sqrt{x_0}}],$$
$$(4.14_1)$$
$$\frac{dv}{dz}=\sqrt{x_0}\,(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}\,[a_1u+a_2u(1-z)^{\sqrt{x_0}}+a_3v(1-z)^{\sqrt{x_0}}+$$
$$+a_4(1-z)^{2\sqrt{x_0}}].$$

Здесь b включили в $a_1, \ldots, a_4$. Здесь и множитель $\sqrt{x_0}$ можно опустить, включая его в a_k. В первом уравнении, усиливая правую часть, можно $\sqrt{x_0}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}+a_4(1-z)^{\sqrt{x_0}}$ заменить на $b(1-z)^{-\sqrt{x_0}}$, а $a_1(1-z)^{-\sqrt{x_0}}+a_2$ на $c(1-z)^{-\sqrt{x_0}}$ (так как $c=a_1+a_2(1-z)^{\sqrt{x_0}}$ ограничено). Во втором уравнении, усиливая правую часть, $a_1(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}u+a_2(1-z)^{-1}u$ заменим на $au(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}$. Тогда получим уравнения

$$\frac{dv}{dz}=a_3v(1-z)^{-1}+au(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}+a_4(1-z)^{\sqrt{x_0}-1},$$

$$\frac{du}{dz}=c(1-z)^{-\sqrt{x_0}}u+a_3v+b(1-z)^{-\sqrt{x_0}},$$

или, заменяя все постоянные одной наибольшей, получим

$$\frac{dv}{dz}=a(1-z)^{-1}v+a(1-z)^{-\sqrt{x_0}-1}u+a(1-z)^{\sqrt{x_0}-1},$$

$$\frac{du}{dz}=a(1-z)^{-\sqrt{x_0}}u+av+a(1-z)^{-\sqrt{x_0}}. \tag{4.15}$$

Отсюда получим интегральные уравнения, рассматривая первое уравнение как линейное с неизвестным v, а второе с неизвестным u и полагая $u(1)=v(1)=0$,

$$-v=(1-z)^{-a}a\int_z^1(1-z)^{a-\sqrt{x_0}-1}u\,dz+\frac{(1-z)^{\sqrt{x_0}}a}{a+\sqrt{x_0}},$$

$$-u=e^{\frac{a(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}}a\int_z^1[v+(1-z)^{-\sqrt{x_0}}]\,e^{\frac{-a(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}}dz. \tag{4.16}$$

Теперь обратим внимание на следующее обстоятельство. Применим метод последовательных приближений, принимая за нулевые приближения $v_0(z)>0$ и $u_0(z)>0$. Тогда $u_1(z)$ и $v_1(z)$ получим, очевидно, отрицательными, так как под знаком интеграла функции положительные и $0<z<1$. Приближения $u_2(z)$ и $v_2(z)$ получим, складывая справа положительные и отрицательные величины. Поэтому если слева в (4.16) изменим знаки, то получим уравнения, в которых этот же процесс последовательных приближений даст превосходящие функции[1]. После замены $-v$, $-u$ на v и u слева можно еще во втором уравнении вместо ограниченных функций

$$e^{\frac{-a(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}}, \quad e^{\frac{a(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}}$$

поставить положительную постоянную b, большую этих функций. После этого получим уравнения, превосходящие относительно (4.16):

$$\begin{gathered} v=(1-z)^{-a}\, a\int_z^1 (1-z)^{a-\sqrt{x_0}-1}\, u dz+\frac{(1-z)^{\sqrt{x_0}}a}{a+\sqrt{x_0}}, \\ u=ab^2\int_z^1 v dz+ab^2\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Подставим значение v из первого уравнения во второе

$$u=a^2b^2\int_z^1 (1-z)^{-a}\int_z^1 (1-z)^{a-\sqrt{x_0}-1}\, u dz dz+$$

$$+a^2b^2\int_z^1 \frac{(1-z)^{\sqrt{x_0}}}{a+\sqrt{x_0}}\,dz+ab^2\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}$$

или

$$u=a^2b^2\int_z^1 (1-z)^{-a}\int_z^1 (1-z)^{a-\sqrt{x_0}-1}\, u dz dz+$$

$$+a^2b^2\,\frac{(1-z)^{1+\sqrt{x_0}}}{(1+\sqrt{x_0})(a+\sqrt{x_0})}+a^2b^2\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}.$$

Мы увеличим правую часть, заменяя

$$a^2b^2\,\frac{(1-z)^{1+\sqrt{x_0}}}{(1+\sqrt{x_0})(a+\sqrt{x_0})}+ab^2\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}$$

$$\text{на } K\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}.$$

[1] Такое же рассуждение можно провести относительно тех уравнений, которые получим, интегрируя равенства (4.15) в промежутке $(z, 1)$, откуда видно, что из (4.15) получим уравнения, превосходящие (4.12) при малых u, v и $(1-z)^{\sqrt{x_0}}$.

Вообще напишем

$$u = A \int_z^1 (1-z)^{-a} \int_z^1 (1-z)^{a-\sqrt{x_0}-1}\, udzdz +$$

$$+ \frac{A}{1-\sqrt{x_0}} (1-z)^{1-\sqrt{x_0}}, \tag{4.18}$$

где $a^2b^2 < A$ и $K < A$.

Решение уравнения (4.18) будем искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1-z)^{k(1-\sqrt{x_0})}. \tag{4.19}$$

Подставим (4.19) в (4.18):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1-z)^{k(1-\sqrt{x_0})} =$$

$$= A \int_z^1 (1-z)^{-a} \int_z^1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1-z)^{k(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}-1}\, dzdz +$$

$$+ \frac{A}{1-\sqrt{x_0}} (1-z)^{1-\sqrt{x_0}} = A \int_z^1 (1-z)^{-a} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(1-z)^{k(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}}}{k(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}}\, dz +$$

$$+ \frac{A}{1-\sqrt{x_0}} (1-z)^{1-\sqrt{x_0}} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(1-z)^{k(1-\sqrt{x_0})-\sqrt{x_0}+1}}{[k(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}](k+1)(1-\sqrt{x_0})} +$$

$$+ \frac{A}{1-\sqrt{x_0}} (1-z)^{1-\sqrt{x_0}} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(1-z)^{(k+1)(1-\sqrt{x_0})}}{[k(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}](k+1)(1-\sqrt{x_0})} +$$

$$+ \frac{A}{1-\sqrt{x_0}} (1-z)^{1-\sqrt{x_0}}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(1-z)$ слева и справа, найдем

$$\alpha_1 = \frac{A}{1-\sqrt{x_0}}, \quad \alpha_2 = A\alpha_1 \frac{1}{[(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}]\,2(1-\sqrt{x_0})},$$

$$\alpha_k = A\alpha_{k-1} \frac{1}{[(k-1)(1-\sqrt{x_0})+a-\sqrt{x_0}]\,k(1-\sqrt{x_0})}, \tag{4.20}$$

откуда видим, что ряд (4.19) сходится при всех $(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}$. Ряд (4.19) можно, конечно, получить и методом последовательных приближений, принимая

$$u_0(z) = \frac{A}{1-\sqrt{x_0}}(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}.$$

Подставляя (4.19) в первое уравнение (4.17), получим и превосходящее v:

$$v = \frac{(1-z)^{\sqrt{x_0}}\,a}{a+\sqrt{x_0}} + a(1-z)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-z)^{(k+1)(1-\sqrt{x_0})}. \tag{4.21}$$

Мы доказали существование решений уравнений (4.12), обладающих свойством $u\to 0$ и $v\to 0$ при $z\to 1-0$, и тем самым доказали существование решений уравнений (*), обладающих свойством (4.2), где x_0 — произвольное, но малое.

Приближенное значение u и v можно получить из уравнений (4.14). Сначала получим приближенное значение u из второго уравнения (4.14). Здесь справа главный член — это $\sqrt{x_0}(1-z)^{-\sqrt{x_0}}$, так как вблизи $z=1$ u и v малые. Поэтому

$$u \approx -\sqrt{x_0}\,\frac{(1-z)^{1-\sqrt{x_0}}}{1-\sqrt{x_0}}. \tag{4.22}$$

Если подставим это в первое уравнение (4.14), то, оставляя главные члены, получим линейное уравнение

$$\frac{dv}{dz} = \sqrt{x_0}\,(1-z)^{-1}v - \frac{(1-z)^{-2\sqrt{x_0}}}{2(1-\sqrt{x_0})} - \frac{x_0^{5/2}}{8}(1-z)^{\sqrt{x_0}-1},$$

откуда

$$v \approx \frac{(1-z)^{1-2\sqrt{x_0}}}{2(1-\sqrt{x_0})^2} + \frac{x_0^2}{16}(1-z)^{\sqrt{x_0}}. \tag{4.23}$$

Подставляя эти значения u и v в правые части (4.14), получим следующее приближение. Так же, конечно, докажем существование решения $x\to-\infty$, $y\to y_0$ при $z\to 0$, если $0<\sqrt{y_0}<1$.

§ 5. О ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ В ПРОМЕЖУТКЕ $0<z<1$ И ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (*) ПРИ $z\to\infty$

Рассмотрим решение уравнений (*) с начальными значениями

$$x(\bar{z}_0)=\bar{x}_0,\quad y(\bar{z}_0)=\bar{y}_0,\quad 0<\bar{z}_0<1. \tag{5.1}$$

Будем аналитически продолжать это решение для $z>\bar{z}_0$. Какая особая точка при $z\to 1$ может встретиться? Согласно теореме 2.2, нет особых точек неопределенности $\bar{z}$, когда при $z\to\bar{z}$ или x или y не имеют предела.

Будем рассматривать вещественное решение и случай $u=\sqrt{xy(x+y)}>0$. Следовательно, не может быть $\bar{x}_0<0$, $\bar{y}_0<0$, так как в этом случае в окрестности точки $\bar{z}_0$ $xy(x+y)<0$.

Пусть

$$\bar{x}_0>0,\quad \bar{y}_0>0. \tag{5.2}$$

Так как x и y при увеличении z возрастают, то можно ожидать:

$$x\to\bar{x},\quad y\to\bar{y}\quad \text{при } z\to\bar{z}<1, \tag{5.3}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ конечные, или

$$x\to\bar{x},\quad y\to\infty\quad \text{при } z\to\bar{z}, \tag{5.4}$$

или

$$x\to\infty,\quad y\to\bar{y}\quad \text{при } z\to\bar{z}, \tag{5.5}$$

или

$$x\to\infty,\quad y\to\infty\quad \text{при } z\to\bar{z}, \tag{5.6}$$

или, наконец, решение x, y продолжимо при $z\to 1$. В этом последнем случае возникает вопрос о предельных значениях x и y. Рассмотрим случай (5.3). Так как здесь нет $\bar{x}\bar{y}(\bar{x}+\bar{y})=0$, то, согласно предыдущему, в точке $\bar{z}$ решение не заканчивается и при всех конечных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ точка $\bar{z}$ будет регулярной, т. е. не будет особой. Случаи (5.4) и (5.5) невозможны по теореме 2.3. Решение (5.6) (это решение (2.3)) возможно, и мы его построили в виде (2.14) и (2.15), при этом $\bar{z}$ оказалось полюсом второго порядка.

Возможен ли последний случай при $\bar{z}=1$, т. е. решение продолжимо до 1 после $\bar{z}$? Позднее мы покажем, что это невозможно ($x\to\infty$, $y\to\infty$ при $z\to 1$) (глава XII). Здесь невозможно решение (3.31), так как при этом должно быть (3.2), чего здесь нет.

Как мы видели, нет и решения (4.1). Но может быть[1] решение (4.2). Другое дело, что при выбранных значениях (5.1) оно, может быть, не получится, как и решение (5.6), но вообще, как мы показали, решение (4.2) существует.

Пусть теперь в (5.1)

$$\bar{x}_0 < 0, \quad \bar{y}_0 > 0, \quad \bar{x}_0 + \bar{y}_0 < 0, \tag{5.7}$$

при этом будет $\bar{x}_0 \bar{y}_0 (\bar{x}_0 + \bar{y}_0) > 0$.

Так как при увеличении $z > \bar{z}_0$ x и y возрастают, то можно ожидать

$$x \to -a < 0, \quad y \to a > 0, \quad z \to \bar{z} < 1. \tag{5.8}$$

И, согласно формулам (1.13), это возможно, но при этом в точке $\bar{z}$ решение заканчивается[2], так как при $z > \bar{z}$ будет $u < 0$. Решение $x \to 0-0$, $y \to \bar{y} > 0$ невозможно, так как тогда будет $xy(x+y) < 0$, т. е. этому предшествует случай (5.8). Поэтому же невозможно решение

$$x \to 0-0, \; y \to \bar{y} > 0 \text{ при } z \to 1.$$

На основании результатов, полученных в § 3, видим, что нет и решений

$$x \to -a < 0, \quad y \to a > 0 \quad \text{при } z \to 1. \tag{5.9}$$

Все это позволяет утверждать, что решение

$$x(\bar{z}_0) = \bar{x}_0 < 0, \quad y(\bar{z}_0) = \bar{y}_0 > 0, \quad 0 < \bar{z}_0 < 1 \tag{5.10}$$

обязательно заканчивается в некоторой точке $\bar{z}$, $0 < \bar{z}_0 < \bar{z} < 1$, в которой будем иметь (5.8).

Пусть теперь в (5.1)

$$\bar{x}_0 > 0, \quad \bar{y}_0 < 0, \quad \bar{x}_0 + \bar{y}_0 < 0. \tag{5.10$_1$}$$

Этот случай не отличается от (5.7), т. е. такое решение обязательно заканчивается в точке $\bar{z}$, $0 < \bar{z}_0 < \bar{z} < 1$.

Будем теперь решение (5.1) продолжать влево от $\bar{z}_0$, т. е. при $z \to 0+0$. Какие особые точки $\bar{z}$ могут встретиться?

При $z \to 0$, очевидно, x и y убывают. Пусть $\bar{x}_0 > 0$, $\bar{y}_0 > 0$. Решение $x \to 0$, $y \to 0$ при $z \to \bar{z}+0 > 0$, как мы видели, невозможно, так как оно обязательно совпадает с (1.7). Возможно решение $x \to 0$, $y \to y_0 > 0$ при $z \to \bar{z}+0 > 0$ $(\bar{z} < 1)$, но оно закан-

---

[1] При этом должно $u = x - x_0 \to 0-0$, что и есть согласно (4.22). Но при этом $x_0 > 0$ должно быть малым или во всяком случае $x_0 < 1$ согласно нашему результату, но не вообще, т. е., может быть, требование $x_0 < 1$ продиктовано методом.

[2] Если рассматриваем решение вещественное и $u > 0$.

чивается в точке $\bar{z}$ согласно формулам (1.9). Возможно и решение

$$x \to \bar{x} + 0 > 0, \quad y \to 0 + 0 \quad \text{при } z \to \bar{z} + 0,$$

которое также заканчивается в точке $\bar{z}$ согласно формулам (1.11). Но возможно и решение

$$x \to C > 0, \quad y \to 0 \quad \text{при } z \to 0 + 0,$$

и мы нашли его в виде (3.27), где, как и должно быть, $x \to C + 0$, $y \to 0 + 0$ при $z \to 0 + 0$.

Пусть теперь в (5.1)

$$\bar{x}_0 > 0, \quad \bar{y}_0 < 0, \quad \bar{x}_0 + \bar{y}_0 < 0, \tag{5.11}$$

т. е. $\bar{x}_0 \bar{y}_0 (\bar{x}_0 + \bar{y}_0) > 0$.

Здесь снова при $z \to 0 + 0$ x и y убывают. Возможен ли случай

$$x \to a > 0, \quad y \to -a < 0 \quad \text{при } z \to \bar{z} + 0?$$

Очевидно, нет, так как при этом неравенство $x + y < 0$ усиливается и нет $x + y \to 0 - 0$. Но, возможно,

$$x \to 0, \quad y \to \bar{y} < 0 \quad \text{при } z \to \bar{z} + 0 > 0, \quad \bar{z} < 1, \tag{5.12}$$

и в этом случае решение в точке $\bar{z}$ заканчивается согласно (1.9). Не может случиться так, что

$$x \to \bar{x} > 0, \quad y \to -\infty \quad \text{при } z \to \bar{z} + 0 > 0,$$

так как это противоречит теореме 2.3. Невозможно

$$x \to \bar{x} > 0, \quad y \to -\infty \quad \text{при } z \to 0 + 0,$$

так как тогда из (*) получим

$$\frac{dy}{dz} = \frac{|y| \sqrt{x} \sqrt{1 + \dfrac{x}{y}}}{1 - z}, \quad \frac{d|y|}{|y|} \approx -\sqrt{\bar{x}}\, dz.$$

$$\ln|y| \approx -\sqrt{\bar{x}}\, z + C \to C, \quad z \to 0,$$

что невозможно. Невозможно и решение

$$x \to 0, \quad y \to C < 0 \quad \text{при } z \to 0 + 0,$$

так как нет решений (3.6).

Таким образом, решение (5.1) при условии (5.11) при $z \to 0 + 0$ обязательно обладает свойством (5.12) и в точке $\bar{z}$ заканчивается.

Предположим, что в (5.1)

$$\bar{x}_0 < 0, \quad \bar{y}_0 > 0, \quad \bar{x}_0 + \bar{y}_0 < 0 \tag{5.13}$$

и $z \to 0$, т. е. x и y убывают. Здесь невозможен случай (см. (1.15))

$$x \to a < 0, \quad y \to -a > 0 \quad \text{при } z \to \bar{z} > 0.$$

Но возможен случай

$$x \to \bar{x} < 0, \quad y \to 0+0 \quad \text{при } z \to \bar{z} > 0, \tag{5.14}$$

и мы построили такое решение в виде (1.11), при этом решение в точке $\bar{z}$ заканчивается.

Возможно и решение (это решение (3.10))

$$x \to \bar{x} < 0, \quad y \to 0 \quad \text{при } z \to 0+0, \tag{5.15}$$

и такое решение мы построили в виде (3.27). Может ли быть

$$x \to -\infty, \quad y \to \bar{y} > 0 \quad \text{при } z \to 0+0? \tag{5.16}$$

Это решение при замене $1 - z = t$ перейдет в решение

$$x \to -\infty, \quad y \to \bar{y} > 0 \quad \text{при } t \to 1-0$$

уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}\sqrt{xy(x+y)}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t}\sqrt{xy(x+y)}, \tag{5.17}$$

которое получим так же, как (4.2).

Теперь изучим *поведение решений системы (*) в окрестности точки $z=\infty$*. Возможны ли решения, определенные на промежутке $1 < z_0 < z < \infty$? И возможны ли вещественные решения: 1) $x \to x_0$, $y \to y_0$; 2) $x \to x_0$, $y \to \infty$; 3) $x \to \infty$, $y \to y_0$; 4) $x \to \infty$, $y \to \infty$; 5) $x \to \infty$, $y \to -\infty$; 6) $x \to -\infty$, $y \to \infty$ при $z \to \infty$? Очевидно, что при $z \to \infty$ y убывает (так как $\frac{dy}{dz} < 0$), поэтому решения 2), 4), 6) невозможны.

Таким образом, остаются под вопросом только решения 1), 3) и 5), причем они принимают вид:

$$\begin{array}{lll}
1.\ x \to x_0 - 0, & y \to y_0 + 0 & \text{при } z \to \infty; \\
3.\ x \to \infty, & y \to y_0 + 0 & \text{при } z \to \infty; \\
5.\ x \to \infty, & y \to -\infty & \text{при } z \to \infty
\end{array}$$

и в этом последнем случае все время должно быть $x+y<0$, так как все время должно быть $xy(x+y)>0$, если желаем рассматривать вещественные решения.

Согласно (3.14), решение 1 возможно, если только $x_0 = y_0 = 0$ или $x_0 + y_0 = 0$, это мы рассмотрим позднее.

Рассмотрим решение 3. Для него имеем $\sqrt{xy(x+y)} = x\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{y}{x}} \approx x\sqrt{y}$ вблизи $z=\infty$. Вблизи $z=\infty$ система (*) имеет вид

$$\frac{dx}{dz} \approx \frac{x\sqrt{y}}{z}, \quad \frac{dy}{dz} \approx -\frac{x\sqrt{y}}{z}.$$

Отсюда $\ln x \approx \sqrt{y_0} \ln z = \ln z^{\sqrt{y_0}}$, $x \approx z^{\sqrt{y_0}} \to \infty$, если $R(\sqrt{y_0}) > 0$ и $2\sqrt{y} \approx -\int z^{\sqrt{y_0}-1}\,dz = -\frac{z^{\sqrt{y_0}}}{\sqrt{y_0}} \not\to \sqrt{y_0}$ при $z \to \infty$.

Если же $R(\sqrt{y_0}) < 0$, то нет $x \to \infty$ при $z \to \infty$. Таким образом, решение 3 невозможно. Переходим к рассмотрению решения

$$x \to \infty, \quad y \to -\infty \quad \text{при } z \to \infty \tag{5.18}$$

или, полагая $z = t^{-1}$, будем рассматривать решение

$$x \to \infty, \quad y \to -\infty \quad \text{при } t \to 0+0 \tag{5.19}$$

системы

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}\sqrt{xy(x+y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t(1-t)}\sqrt{xy(x+y)}. \tag{5.20}$$

Из (5.20), согласно Лопиталю,

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{1}{t-1} = -1 \quad \text{при } t \to 0. \tag{5.21}$$

Вместо уравнений (5.20) можно рассматривать и уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}\sqrt{xv(v-x)}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1-t}\sqrt{xv(v-x)},$$
$$v = x + y. \tag{5.22}$$

Для этих уравнений решение (5.19) может породить решения

$$x \to \infty, \quad v \to v_0 < 0 \quad \text{при } t \to 0, \tag{5.23}$$

$$x \to \infty, \quad v \to -\infty \quad \text{при } t \to 0. \tag{5.24}$$

Как и (5.21), из (5.22) получаем

$$\lim \frac{v}{x} = \lim \frac{-t}{1-t} = 0. \tag{5.25$_1$}$$

Заметим еще, что при $v_0>0$ вещественного решения (5.23) быть не может, так как вблизи $t=0$ будет $xv(v-x)<0$. Для решения (5.23) вблизи $t=0$ имеем

$$\sqrt{xv(v-x)} = \sqrt{-x^2v\left(1-\frac{v}{x}\right)} = x\sqrt{|v|}\sqrt{1-\frac{v}{x}} \approx$$

$$\approx x\sqrt{|v|}\left(1-\frac{v}{2x}-\frac{v^2}{8x^2}\right)$$

или еще

$$\sqrt{xv(v-x)} \approx x\sqrt{|v|} + \frac{1}{2}|v|^{3/2},$$

так как $|v| = -v$, ибо $v_0 < 0$.

Теперь из первого уравнения (5.22) найдем линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{x}{t}\sqrt{|v|} - \frac{1}{2t}|v|^{3/2} \approx -\frac{x}{t}\sqrt{|v_0|} - \frac{1}{2t}|v_0|^{3/2},$$

откуда

$$x \approx t^{-\sqrt{|v_0|}}\left(C - \frac{|v_0|}{2}t^{\sqrt{|v_0|}}\right) = Ct^{-\sqrt{|v_0|}} + \frac{v_0}{2}, \tag{5.25}$$

где C произвольная.

Если возьмем

$$\sqrt{xv(v-x)} \approx x\sqrt{|v|}\left(1-\frac{v}{2x}-\frac{1}{8}\frac{v^2}{x^2}\right),$$

то, учитывая (5.25), получим

$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{x\sqrt{|v_0|}}{t} - \frac{|v_0|^{3/2}}{2t} + \frac{|v_0|^{5/2}}{8}C_1 t^{\sqrt{|v_0|}-1},$$

откуда найдем

$$x = Ct^{-\sqrt{|v_0|}} + \frac{v_0}{2} + u, \tag{5.26}$$

где $u \to 0$ при $t \to 0$.

Пусть еще

$$v = w + v_0, \quad w \to 0 \text{ при } t \to 0. \tag{5.27}$$

На основании (5.26) и (5.27) найдем

$$xv(v-x) = \left(Ct^{-\sqrt{|v_0|}} + \frac{v_0}{2} + u\right)(v_0 + w)\left(w + \frac{v_0}{2} - \right.$$

$$-Ct^{-\sqrt{|v_0|}}-u\Big)=t^{-2\sqrt{|v_0|}}\,v_0\left(1+\frac{w}{v_0}\right)\times$$

$$\times\left[C+\left(\frac{v_0}{2}+u\right)t^{\sqrt{|v_0|}}\right]\left[\left(w-u+\frac{v_0}{2}\,t^{\sqrt{|v_0|}}-C\right]\right.$$

или, так как $v_0<0$, т. е. $|v_0|=-v_0$, то

$$vx(v-x)=t^{-2\sqrt{|v_0|}}\,|v_0|\left(1+\frac{w}{v_0}\right)\left[C+\left(\frac{v_0}{2}+u\right)t^{\sqrt{|v_0|}}\right]\times$$

$$\times\left[C-\left(w-u+\frac{v_0}{2}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}\right]=t^{-2\sqrt{|v_0|}}\,C^2|v_0|\left(1+\frac{w}{v_0}\right)\times$$

$$\times\left[1+\left(\frac{v_0}{2C}+\frac{u}{C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}\right]\left[1-\left(\frac{w}{C}-\frac{u}{C}+\frac{v_0}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}\right]=$$

$$=t^{-2\sqrt{|v_0|}}\,C^2|v_0|\left(1+\frac{w}{v_0}\right)\left[1+\left(\frac{v_0}{C}+\frac{u}{C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}-\right.$$

$$-\left(\frac{w}{C}-\frac{u}{C}+\frac{v_0}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}-\frac{w}{C}\left(\frac{v_0}{2C}+\frac{u}{C}\right)t^{2\sqrt{|v_0|}}-$$

$$\left.-\left(\frac{v_0^2}{4C^2}-\frac{u^2}{C^2}\right)t^{2\sqrt{|v_0|}}\right]=t^{-2\sqrt{|v_0|}}\,C^2|v_0|\left[1+\frac{w}{v_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{v_0^2}{4C^2}\,t^{2\sqrt{|v_0|}}+\left(\frac{2u}{C}-\frac{w}{C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\right].$$

Здесь в квадратных скобках не вписаны члены 3, 4 и 5-й степени относительно u, v и $t^{\sqrt{|v_0|}}$. Отсюда

$$\sqrt{xv(v-x)}=t^{-\sqrt{|v_0|}}\,C\sqrt{|v_0|}\left[1+\frac{w}{2v_0}-\frac{v_0^2}{8C^2}\,t^{2\sqrt{|v_0|}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u}{C}-\frac{w}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}-\frac{1}{8}\,\frac{w^2}{v_0^2}+\ldots\right]\qquad(5.28)$$

и не вписаны малые члены более высокого порядка. Вблизи $t=0$ будем считать $\frac{1}{1-t}\approx 1$. На основании (5.28) уравнения (5.20) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt}=-C\sqrt{|v_0|}\,t^{-\sqrt{|v_0|}-1}\left[1+\frac{w}{2v_0}-\frac{v_0^2}{8C^2}\,t^{2\sqrt{|v_0|}}+\right.$$

$$+\left(\frac{u}{C}-\frac{w}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\Bigg],$$

$$\frac{dy}{dt}=C\sqrt{|v_0|}\ t^{-\sqrt{|v_0|}}\left[1+\frac{w}{2v_0}-\frac{v_0^2}{8C^2}t^{2\sqrt{|v_0|}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u}{C}-\frac{w}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\right]. \qquad (5.29)$$

Из (5.26), (5.27) имеем

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{|v_0|}\ Ct^{-\sqrt{|v_0|}-1}+\frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{dw}{dt}, \qquad (5.30_1)$$

поэтому, учитывая (5.29) и (5.22), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-C\sqrt{|v_0|}\ t^{-\sqrt{|v_0|}-1}\left[\frac{w}{2v_0}-\frac{v_0^2}{8C^2}t^{2\sqrt{|v_0|}}+\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{u}{C}-\frac{w}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\right],\\ \frac{dw}{dt}&=C\sqrt{|v_0|}\ t^{-\sqrt{|v_0|}}\left[1+\frac{w}{2v_0}-\frac{v_0^2}{8C^2}t^{2\sqrt{|v_0|}}+\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{u}{C}-\frac{w}{2C}\right)t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\right]\end{aligned}\right\} \qquad (5.30)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\sqrt{|v_0|}\ t^{-1}u+\left(\frac{\sqrt{|v_0|}}{2}t^{-1}-\frac{C}{2\sqrt{|v_0|}}t^{-\sqrt{|v_0|}-1}\right)w+\\&\qquad+\frac{|v_0|^{5/2}}{8C}t^{\sqrt{|v_0|}-1}+\ldots,\\ \frac{dw}{dt}&=\sqrt{|v_0|}\ u+\left(\frac{C}{2\sqrt{|v_0|}}t^{-\sqrt{|v_0|}}-\frac{\sqrt{|v_0|}}{2}\right)w+\\&\qquad+C\sqrt{|v_0|}\ t^{-\sqrt{|v_0|}}-\frac{|v_0|^{5/2}}{8C}t^{\sqrt{|v_0|}}+\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

Будем считать $\sqrt{|v_0|}$ малой. Теперь обратим внимание на следующие обстоятельства. Всматриваясь в (4.10_1) и (5.28), видим, что они аналогичны (только в (5.28) стоит t вместо $1-z$ в (4.10_1)). Аналогичны и формулы (5.26), (5.27) и (4.8), а также уравнения (5.22), (5.30_1) и (4.12). Отсюда следует, что уравнения (5.30) имеют решение

$$u\to 0,\quad w\to 0\quad \text{при } t\to 0,$$

а потому на основании (5.26), (5.27) имеем и (5.23), а также (5.18). Мы получим приближенно u и w из (5.31) следующим образом. Как видно из второго уравнения (5.31), здесь вблизи $t=0$ главным членом справа является $C\sqrt{|v_0|}\,t^{-\sqrt{|v_0|}}$, так как остальные члены малые, а $t^{-\sqrt{|v_0|}}w$ явно меньше $t^{-\sqrt{|v_0|}}$, так как w малое. Поэтому имеем

$$w \approx \frac{C\sqrt{|v_0|}\,t^{1-\sqrt{|v_0|}}}{1-\sqrt{|v_0|}} \to 0 \quad \text{при } t\to 0. \tag{5.32}$$

Из первого уравнения (5.31) на основании этого имеем

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{|v_0|}\,t^{-1}u - \frac{C}{2\sqrt{|v_0|}}\,\frac{C\sqrt{|v_0|}}{1-\sqrt{|v_0|}}\,t^{-2\sqrt{|v_0|}} + \\ + \frac{|v_0|^{5/2}\,t^{\sqrt{|v_0|}-1}}{8C}.$$

Так как $\sqrt{|v_0|}$ малая, то $\sqrt{|v_0|}-1$ отрицательная и по модулю больше $2\sqrt{|v_0|}$, поэтому второй член справа можно отбросить:

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{|v_0|}\,t^{-1}u + \frac{|v_0|^{5/2}}{8C}\,t^{\sqrt{|v_0|}-1}.$$

Отсюда

$$u \approx \frac{|v_0|^2\,t^{\sqrt{|v_0|}}}{16C} \to 0 \quad \text{при } t\to 0. \tag{5.33}$$

На основании (5.32), (5.33) и (5.26), (5.27), а также (5.22) получим

$$\begin{aligned} x &\approx Ct^{-\sqrt{|v_0|}} + \frac{v_0}{2} + \frac{|v_0|^2}{16C}\,t^{\sqrt{|v_0|}}, \\ y &\approx -Ct^{-\sqrt{|v_0|}} + \frac{C\sqrt{|v_0|}}{1-\sqrt{|v_0|}}\,t^{1-\sqrt{|v_0|}} + \frac{v_0}{2} - \frac{|v_0|^2}{16C}\,t^{\sqrt{|v_0|}}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Решение (5.23) при $v_0=0$ невозможно, т. е. невозможно решение $x\to\infty$, $v\to 0-0$ при $t\to 0+0$, так как здесь v возрастает при убывании t, что противоречит (5.22), если $\sqrt{xv(v-x)}>0$.

Возможно ли вещественное решение (случай 1)

$$x\to a>0,\ y\to -a \text{ при } z\to\infty? \tag{5.35}$$

Здесь случай $x+y=v\to 0+0$, $x\to a$ при $t\to 0$ невозможен, так как вблизи $t=0$ будет $xy(x+y)<0$. Если же $v\to 0-0$, $x\to a$ при $t\to 0+0$, то v возрастает при убывании t, что противоречит (5.22). Отсюда следует, что решения (5.35) нет. Но, может быть, есть решение

$$x \to 0-0, \; y \to 0+0 \text{ при } z \to \infty? \tag{5.36}$$

Тогда для уравнений (5.22) имеем или решение

$$x \to 0-0, \; v \to 0+0 \text{ при } t \to 0+0, \tag{5.37}$$

или

$$x \to 0-0, \; v \to 0-0 \text{ при } t \to 0+0, \tag{5.38}$$

при этом $v-x=y\to 0+0$. Но в таком случае (5.37) будет $xv(v-x)<0$, что для вещественного решения невозможно. Случай же (5.38) противоречит уравнениям (5.22), так как $v\to 0-0$, т. е. v возрастает при $t\to 0+0$, что и противоречит

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{1-t}\sqrt{xv(v-x)} > 0.$$

Таким образом, решение

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to \infty \text{ не существует[1]}.$$

В заключение рассмотрим, возможно ли решение

$$x \to \infty, \quad y \to -\infty \quad \text{при } z \to z_0 > 1. \tag{5.39}$$

В этом случае в (2.4) будет $a < 0$, но в (2.8)

$$a(a+1) = \frac{z_0}{(1-z_0)^2} > 0.$$

Дальнейшие рассуждения, проведенные относительно решения (2.3), не меняются, и мы получим решение (5.39) в виде (2.14) и (2.15). Следовательно, как и для решения (2.3), точка z_0 здесь будет для решения (5.39) полюсом второго порядка.

В следующих главах мы коснемся других проблем, возникающих при изучении системы (*).

---

[1] Если нет такого решения — вещественного, то нет его и при произвольном $z\to\infty$, но нет такого решения с вещественными начальными значениями. А если не вещественные начальные значения, т. е. нет ли решения $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $|z|\to\infty$ при некоторых комплексных x_0, y_0?

Глава XI

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИИ, А ТАКЖЕ АСИМПТОТИКА И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ $\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{P(x, y)},\ \frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{P(x, y)}$

§ 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМЫ (*)

В этой главе рассматривается система (так же, как в главе X)

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{P(x, y)},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{P(x, y)},\qquad (*)$$

где $P(x, y)$ — полином. В частности, будем рассматривать случай (из проблемы Римана)

$$P(x, y)=xy(x+y)+a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_1x+a_2y+a_0 \qquad (1.1)$$

и

$$P(x, y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_1x+a_2y+a_0, \qquad (1.2)$$

где a_{kl} постоянные.

Но сначала пусть $P(x, y)$ — полином общего вида. Здесь x, y, z, а также коэффициенты полинома $P(x, y)$ — комплексные числа и $\sqrt{P(x, y)}$ — одна из ветвей этой двузначной функции, которая может измениться вместе с изменением $P(x, y)$ при аналитическом продолжении x, y.

Введем функцию

$$u=\sqrt{P(x, y)}, \qquad (1.3)$$

где x и y — решение системы (*).

Тогда имеем

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{z}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{1-z}. \qquad (1.4)$$

Обозначим

$$\frac{\partial P}{\partial x}=P_1(x, y),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=P_2(x, y).$$

Таким образом, x, y, удовлетворяющие системе (*), удовлетворяют также системе

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2u}{z},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{2u}{1-z},\quad \frac{du}{dz}=\frac{P_1(x,\ y)}{z}+\frac{P_2(x,\ y)}{1-z}. \tag{1.5}$$

Нас интересует частное решение системы (1.5), удовлетворяющее соотношению (1.3).

Теорема 1.1. *Решение системы (1.5), начальные значения которого удовлетворяют соотношению*

$$u_0=\sqrt{P(x_0,\ y_0)}, \tag{1.6}$$

удовлетворяет равенству (1.3).

Это следует из того, что

$$u^2-P(x,\ y)=C \tag{1.7}$$

есть интеграл системы (1.5) и при $u=u_0$, $x=x_0$, $y=y_0$ будет $C=0$. Таким образом, всякое решение системы (1.5) с начальными условиями, удовлетворяющими условию (1.6), доставляет функции $x(z)$ и $y(z)$, удовлетворяющие уравнениям (*). Согласно теореме существования, решение системы (1.5) с произвольными начальными значениями x_0, y_0, u_0 и $z_0\neq 0$, 1 будет регулярным в окрестности z_0 и единственным.

Возьмем теперь такие начальные значения x_0, y_0, u_0, $z_0\neq$ $\neq 0$, 1, что

$$u_0=\sqrt{P(x_0,\ y_0)}=0,\quad P_1(x_0,\ y_0)=0,\quad P_2(x_0,\ y_0)=0. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Единственным решением системы (1.5) с начальными значениями, удовлетворяющими условиям (1.8), будет*

$$u\equiv 0,\quad x\equiv x_0,\quad y\equiv y_0. \tag{1.9}$$

Отсюда следует, что если при каком-нибудь $z\neq 0$, 1 не выполнено одно из равенств

$$u=0,\quad P_1(x,\ y)=0,\quad P_2(x,\ y)=0, \tag{1.10}$$

то ни при каком $z\neq 0$, 1 не имеем (1.10).

Относительно системы (*) имеем, следовательно, следующее. Всякое решение системы (*) с произвольными начальными значениями x_0, y_0 (конечными) и $z_0\neq 0$, 1 будет регулярным в окрестности z_0. Если x_0, y_0 такие, что $P(x_0,\ y_0)=0$, то имеем решение системы (*)

$$x\equiv x_0,\quad y\equiv y_0. \tag{1.11}$$

Если еще имеем

$$P_1(x_0,\ y_0)=0,\quad P_2(x_0,\ y_0)=0, \tag{1.12}$$

то система (*) имеет единственное решение с такими начальными значениями (1.11). Если же не выполнено (1.12), т. е.

$$\text{или } P_1(x_0, y_0) \neq 0, \text{ или } P_2(x_0, y_0) \neq 0, \tag{1.13}$$

то, кроме тождественно постоянного решения (1.11), имеем еще одно и только одно решение системы (*), которое будет регулярным в точке z_0.

Рассмотрим тот частный случай, когда $P(x, y)$ имеет вид (1.2). Тогда в системе (1.5)

$$P_1(x, y) = 2a_{20}x + a_{11}y + a_1, \quad P_2(x, y) = 2a_{02}y + a_{11}x + a_2,$$

т. е. система (1.5) будет линейной и подвижных особых точек решения системы (1.5), а следовательно, и решения системы (*) не имеют. Особыми точками могут быть только $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ и притом регулярными. В этом случае решения системы (1.5), а следовательно, и (*) легко строятся во всей области существования. Если же $P(x, y) = a_1x + a_2y + a_0$, т. е. $P(x, y)$ — полином первой степени, то $P_1 = a_1$, $P_2 = a_2$ и система (1.5) легко интегрируется, так как

$$u = a_1 \ln z - a_2 \ln(1 - z) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно,

$$x = \int \frac{2u}{z}\, dz,$$

а y найдем из равенства $u^2 = P(x, y)$.

Возвращаемся к общему случаю $P(x, y)$. Уравнения (*) можно рассматривать как в вещественной области, так и в комплексной. Если рассматриваем в вещественной области, то предполагаем, что коэффициенты полинома $P(x, y)$ вещественные. Если рассматриваем уравнения (*) в вещественной области и если есть вещественные точки (x_1, y_1), в которых выполнены равенства (1.8), то, кроме решения (1.11), нет других вещественных решений, обладающих свойством

$$x \to x_1, \quad y \to y_1 \text{ при } z \to z_0 \neq 0, 1. \tag{1.14}$$

Если же $P(x_1, y_1) = 0$ и имеем (1.13), то, кроме (1.11), есть еще одно вещественное решение, обладающее свойством (1.14), которое будет голоморфным в точке z_0.

Такие точки (x_1, y_1) будут граничными для области $D(x, y)$, в которой обеспечено существование и единственность[1] вещественных решений.

[1] Впрочем, если рассматриваем уравнения (*) в комплексной области K, то и в этой области точки $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$, в которых $P(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$, будут граничными для области K, если имеем (1.13), так как в этих точках будет нарушена единственность решений (это мы сейчас увидим).

Граница области $D(x, y)$ и состоит из точек (x_1, y_1). Множество этих точек (x_1, y_1), вообще говоря, состоит из нескольких кривых $Q(x, y)$, где $Q(x, y)$ — полином меньшего порядка, чем $P(x, y)$. В области $D_1(x, y)$, в которой $P(x, y)$ принимает комплексные или отрицательные значения, не проходят вещественные решения уравнений (*). Вещественные уравнения (*) мы рассматриваем в такой области $D(x, y)$, где

$$P(x, y) > 0, \tag{1.15}$$

и считаем $\sqrt{P(x, y)} > 0$, хотя можно рассматривать и такую систему, где $\sqrt{P(x, y)} < 0$. Если уравнения (*) рассматриваем в комплексной области, то в исходной точке x_0, y_0 $z_0 \neq 0, 1$, где $P(x_0, y_0) \neq 0$, берем одну из ветвей функции $\sqrt{P(x, y)}$. Но при аналитическом продолжении решений $x(z)$, $y(z)$ значения $\sqrt{P(x, y)}$ могут перейти на другую ветвь, если решения могут проходить через точки покоя [1], где $P(x, y) = 0$. Таким образом, для вещественной системы (*) мы сразу имеем и границу области $D(x, y)$, в которой обеспечено существование и единственность решений. Среди этих граничных точек могут быть такие, через которые проходит единственное решение типа (1.11), а могут быть и такие, через которые проходят, кроме (1.11), другие решения. Это второе решение будет голоморфным в точке $z_1 \neq 0, 1$, в которой $x = x_1$, $y = y_1$. Эти решения легко строятся на основе системы (1.5). В самом деле, так как здесь $P(x_1, y_1) = 0$, то имеем $x(z_1) = x_1$, $y(z_1) = y_1$ и $u(x_1, y_1) = u_1 = 0$,

$$x = x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z - z_1)^k, \quad y = y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_1)^k, \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (z - z_1)^k. \tag{1.16}$$

Здесь $\alpha_1 = \dfrac{2u_1}{z_1} = 0$, $\beta_1 = \dfrac{2u_1}{1 - z_1} = 0$, $\gamma_1 = \dfrac{P_1(x_1, y_1)}{z_1} +$

$+ \dfrac{P_2(x_1, y_1)}{1 - z_1} \neq 0$ (если $(1 - z_1) P_1(x_1, y_1) + z_1 P_2(x_1, y_1) \neq 0$).

Теперь имеем

$$\alpha_2 = \left. \frac{2u'}{z} - \frac{2u}{z^2} \right|_{z=z_1} = \frac{2u'}{z_1} = \frac{2\gamma_1}{z_1}, \quad \beta_2 = \frac{2u'}{1 - z} +$$

[1] Например, для системы $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{y - x}{z}$, $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{y - x}{1 - z}$, $u = \sqrt{(y - x)^2}$ этого не будет, так как решения не проходят через границу $y - x = 0$. Здесь мы имеем (1.8).

$$+\frac{2u}{(1-z)^2}\bigg|_{z=z_1}=\frac{2u'}{1-z_1}=\frac{2\gamma_1}{1-z_1}.$$

Так шаг за шагом найдем коэффициенты сходящихся рядов (1.16). Следовательно, для u имеем

$$u=\gamma_1(z-z_1)+\gamma_2(z-z_1)^2+\cdots \tag{1.17}$$

Если $\gamma_1>0$, то $u>0$ при $z-z_1>0$, а при $z-z_1<0$ будет $u<0$.

Отсюда следует, что если мы рассматриваем систему (*) с $\sqrt{P(x, y)}>0$, то решение (1.16) существует только при $z-z_1>0$, когда $\gamma_1>0$, и, наоборот, только при $z-z_1<0$, если $\gamma_1<0$. Другими словами, решение (1.16) заканчивается в точке $z=z_1\neq 0, 1$.

Может случиться, что при выбранном z_1 будет $\gamma_1=0$. Тогда при всяком другом z_1 будем иметь $\gamma_1\neq 0$. Но если при выбранном z_1 имеем $\gamma_1=0$, то легко найдем $\gamma_2\neq 0$. Если окажется, что $\gamma_2>0$, то в окрестности z_1 будет $u>0$ и через точку (x_1, y_1, z_1) будет проходить интегральная кривая так, что она существует и при $z>z_1$, и при $z<z_1$, если считаем $u>0$. Но если окажется $\gamma_2<0$, то при $z=z_1$ интегральная кривая системы (*), где принято $u=\sqrt{P(x, y)}>0$, не входит в точку (x_1, y_1) ни при $z\to z_1-0$, ни при $z\to z_1+0$.

Отметим еще, что в силу (1.17) в окрестности точки $z=z_1$ (но не в самой точке z_1) $u^2=P(x, y)>0$. Если $P(x, y)>0$ при всех конечных вещественных x, y, то через все точки (x, y) проходит и притом единственное решение системы (*) (при $z=z_0\neq 0, 1$).

Решения этой системы могут иметь подвижные особые точки и особые точки $z=0$, 1 или $z=\infty$. Если уравнения (*) рассматриваем в комплексной области, то при переходе через точку z_1 переменной z знак u изменяется и тем самым мы перейдем к рассмотрению системы (*), где $\sqrt{P(x, y)}$ переходит на другую ветвь [1]).

Мы изучили качественную картину в окрестности границы области $D(x, y)$. Эта граница, как видим, состоит из точек покоя, в которые входят интегральные кривые из области $D(x, y)$. (А могут эти точки быть такими, через которые не проходят решения изнутри, как в подстрочном примере после формулы (1.15).)

Если мы рассматриваем уравнения (*) в комплексной области, то наряду с вещественными точками покоя могут появляться еще и комплексные; и они будут точками единствен-

---

[1]) Впрочем, можно и вещественную систему (*) рассматривать так, что там $u=\sqrt{P(x, y)}$—неизвестная в (1.5). Тогда изменение знака допускается само собой.

ности решений, если в них выполнено условие (1.8) (это, конечно, изолированные точки), а могут быть и такими, что, кроме решений (1.11), через них проходят решения типа (1.16), если имеем (1.13). И если ряд для u начинается с нечетной степени, то при переходе точки z_1 u переходит на другую ветвь.

Будем сейчас рассматривать уравнения (*) в комплексной области. Предположим, что $y \to \infty$ при $z \to z_0 \neq 0$, 1, причем z приближается к z_0 по пути конечной длины. Тогда и $\frac{dy}{dz}$ не ограничено. Это следует из равенства

$$y - y_1 = \int_{z_1}^{z} \frac{dy}{dz}\, dz,$$

так как если $\left|\frac{dy}{dz}\right|$ ограничено, то y будет ограничено. Отсюда следует, что и $P(x, y)$ не ограничено при $z \to z_0$ (это видно из (*)).

И так как

$$y - y_1 = \int_{x_1}^{x} \frac{z}{1-z}\, dx, \quad x - x_1 = \int_{y_1}^{y} \frac{1-z}{z}\, dz, \tag{1.18}$$

то и $x \to \infty$ при $z \to z_0$.

Так же докажем, что если $x \to \infty$ при $z \to z_0 \neq 0$, 1, ∞, то и $y \to \infty$ при $z \to z_0$. Доказана

Теорема 1.3. *При $z \to z_0 \neq 0$, 1 по пути конечной длины x и y могут стремиться к ∞ только одновременно.*

Теорема 1.4. *Решения системы (*) не могут иметь особых подвижных точек $\bar{z}$ типа существенных, т. е. таких, что при $z \to \bar{z} \neq 0$, 1 или x, или y не имеют предельного значения.*

Мы предполагаем, что $z \to \bar{z}$ по пути конечной длины.

Доказательство. Из (1.18) видим, что если при $z \to \bar{z}$ есть такая последовательность $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, при которой $y_1, y_2, \ldots \to \infty$, то для этой последовательности z и $x_1, x_2, \ldots \to \infty$. Если есть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, при которой $x_1, x_2, \ldots$ остается в ограниченной части плоскости, то при такой последовательности z и $y_1, y_2, \ldots$ остается в ограниченной части плоскости.

Будем теперь аналитически продолжать некоторое решение системы (*) и пусть при этом встречается особая точка $\bar{z}$. Если при $z \to \bar{z}$ $x \to \infty$, то, как было показано, имеем также $y \to \infty$ и, следовательно, $\bar{z}$ не будет типа существенно особой. Если при $z \to \bar{z}$ x не стремится к ∞, то найдется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to \bar{z}$, для которой соответствующие значения y также будут внутри некоторого круга радиуса R. Мы будем аналитически продолжать соответственно и решение системы (1.5). Тогда соответствующие значения $u_1, u_2, \ldots$ также будут находиться внутри некоторого круга R_2. В точках $z_1, z_2, \ldots$ это решение голоморфное и соответствующие радиусы сходимости $r_1, r_2, \ldots$ будут иметь нижнюю точную границу $r \neq 0$. Но тогда при достаточно большом k точка $\bar{z}$ попадает в область сходимости ряда, построенного в окрестности точки z_k, и не будет особенной, что противоречит предположению. Теорема 1.4 доказана.

Ранее было показано, что если x и y стремятся к конечным значениям при $z \to \bar{z} \neq 0, 1, \infty$, то в окрестности точки $\bar{z}$ x и y — регулярные функции.

Если $x = x(z)$ — функция, регулярная в точке $\bar{z} \neq 0, 1, \infty$, то и $\frac{dx}{dz}$ регулярная, а тогда и $\sqrt{P(x, y)} = z \frac{dx}{dz}$ регулярная, поэтому регулярной будет и $y = y(z) = \int \frac{z}{1-z} \frac{dx}{dz} dz$.

Из всего предыдущего следует

Теорема 1.5. *Если $\bar{z} \neq 0, 1, \infty$ — особая точка решения системы (*), то $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to \bar{z}$.*

Рассмотрим теперь решение уравнений (*) с начальными значениями

$$x(z_0) = x_0 > 0, \quad y(z_0) = y_0 < 0, \quad 0 < z_0 < 1. \tag{1.19}$$

Будем продолжать аналитически это вещественное решение для $z > z_0$. Какая особая точка может здесь встретиться в промежутке $z_0 < z < 1$? Мы считаем в уравнениях (*) $P(x_0, y_0) > 0$ и $u_0 = \sqrt{P(x_0, y_0)} > 0$. Как видно из уравнений (*), при увеличении z x и y монотонно возрастают. Пусть z_1 — особая точка, которую мы встретили в промежутке $(z_0, 1)$, т. е. $z_0 < z_1 < 1$. Как себя ведут $x(z)$ и $y(z)$ рассматриваемого решения при $z \to z_1$?

Согласно теореме 1.4 и в силу монотонного изменения $x(z)$, $y(z)$, точка z_1 не является точкой типа существенной. Невозможен случай, когда

$$x(z) \to \infty, \quad y(z) \to -\infty \quad \text{при } z \to z_1,$$

так как $y(z)$ должно возрастать, а здесь убывает. Может ли случиться так, что имеем решение (1.16), т. е.

$$x \to x_1, \quad y \to y_1 \quad \text{при } z \to z_1 \tag{1.20}$$

и

$$P(x_1, y_1) = 0. \tag{1.21}$$

Если в (1.17) $\gamma_1>0$, то этого быть не может, так как $z-z_1\to\to 0-0$, а в этой области $u<0$. И в этом случае, следовательно, или решение существует в промежутке $z_0<z<1$, или при некоторых $z>z_0$ будет $x>0$, $y>0$. Случай $x\to\infty$, $y\to y_1>0$ при $z\to z_1<1$ невозможен в силу теоремы 1.3.

Если же окажется, что $\gamma_1<0$, то решение (1.20) возможно (если, конечно, существуют вещественные $x_1>x_0$, $y_1>y_0$, при которых будет (1.21)). Но в этом случае рассматриваемое решение в точке z_1 и заканчивается, так как при $z-z_1>0$ будет $u=\sqrt{P(x, y)}<0$, т. е. мы перейдем на другую ветвь $\sqrt{P(x, y)}$.

Если же рассматриваем уравнения (*) в комплексной области (или считаем в (*) u неизвестной в (1.5)), то можно рассматривать это решение и при $z>z_1$. Но будем стоять на вещественной позиции, считать в (*) $u\geqslant 0$ и рассмотрим решение с начальными условиями

$$x(z_0)=x_0>0, \quad y(z_0)=y_0>0, \quad 0<z_0<1. \qquad (1.22)$$

Будем это решение аналитически продолжать для $z>z_0$. При увеличении z x и y возрастают. Какая особая точка z_1, $z_0<<z_1<1$ может встретиться?

Если имеем (1.20) и (1.21), то нужно повторить предыдущее рассуждение: либо такого решения быть не может для $u>0$, либо решение заканчивается в точке z_1. Если же $\gamma_1=0$ и, например, $\gamma_2>0$, то, как мы видели, решение (1.20) для $u>0$ будет существовать и при $z<z_1$, и при $z>z_1$. При $\gamma_2<0$, наоборот, решение (1.20) невозможно ни при $z<z_1$, ни при $z>z_1$, если рассматриваем систему (*) при $u>0$. Но для решения (1.22), согласно теореме 1.5, может быть случай $x\to\infty$, $y\to\infty$ при $z\to z_1<1$, который рассмотрим в следующем параграфе.

§ 2. О РЕШЕНИИ $x\to\infty$, $y\to\infty$ ПРИ $z\to z_1<1$

Итак, возможно ли решение

$$x\to\infty, \quad y\to\infty \text{ при } z\to z_1<1, \quad z_1>0? \qquad (2.1)$$

Так как здесь имеем неопределенность $\dfrac{y}{x}$ типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, то, согласно Лопиталю,

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{y'}{x'}=\lim\frac{z}{1-z}=\frac{z_1}{1-z_1}=a>0. \qquad (2.2)$$

Поэтому

$$y=x\,[a+\delta(z)], \qquad (2.3)$$

где $\delta(z) \to 0$ при $z \to z_1$. Вообще через $\delta(z)$ будем обозначать величины, обладающие указанным свойством. Пусть

$$P(x, y) = P_m(x, y) + P_{m-1}(x, y) + \cdots + P_1(x, y) + b, \quad (2.4)$$

где $P_k(x, y)$ — однородный полином степени k и b—постоянная, так что $P(x, y)$ — полином степени m. Имеем

$$P(x, x[a+\delta(z)]) = x^m P_m(1, a+\delta(z)) +$$
$$+ x^{m-1} P_{m-1}(1, a+\delta(z)) + \cdots + x P_1(1, a+\delta(z)) + b =$$
$$= x^m [P_m(1, a+\delta(z)) + x^{-1} P_{m-1}(1, a+\delta(z)) + \cdots$$
$$\cdots + x^{1-m} P_1(1, a+\delta(z)) + x^{-m} b]. \quad (2.5)$$

Здесь $m \geqslant 3$. Пусть

$$P_m(1, a) > 0. \quad (2.6)$$

Можно, очевидно, написать и так:

$$P(x, y) = x^m P_m(1, a)[1+\delta(z)], \quad (2.7)$$

откуда

$$\sqrt{P(x, y)} = x^{m/2} \sqrt{P_m(1, a)}\,[1+\delta(z)]. \quad (2.8)$$

На основании этого из первого уравнения (*) получим

$$x^{-m/2} dx = 2[1+\delta(z)] \sqrt{P_m(1, a)}\, dz/z,$$

откуда

$$\frac{x^{1-m/2}}{1-m/2} = \int_{z_0}^{z} [1+\delta(z)] \frac{\sqrt{P_m(1, a)}}{z} dz + \frac{x_0^{1-m/2}}{1-m/2} \to 0 \quad (2.9)$$

при $z \to z_1$, если $x \to \infty$ при $z \to z_1$.

Отсюда следует, что можно ожидать решения (2.1) [1]. Но существует ли оно на самом деле? Чтобы решить этот вопрос, введем новую переменную u равенством

$$y = ux, \quad (2.10)$$

где, очевидно,

$$u \to a > 0 \text{ при } z \to z_1. \quad (2.11)$$

Имеем

$$P(x, y) = x^m P_m(1, u) + x^{m-1} P_{m-1}(1, u) + \cdots + x P_1(1, u) + b =$$
$$= x^m [P_m(1, u) + x^{-1} P_{m-1}(1, u) + \cdots + x^{1-m} P_1(1, u) + x^{-m} b]. \quad (2.12)$$

Так как (производные берем по второму аргументу)

---

[1] Так как при $z \to z_1$ величина $\int_{z_0}^{z} [\quad] \frac{\sqrt{\ }}{z} dz + \frac{x_0^{1-m/2}}{1-m/2}$ стремится к конечному значению, т. е., возможно, к нулю.

$$P_m(1,\ u)=P_m(1,\ a)+P_m'(1,\ a)(u-a)+\cdots+P_m^{(m)}(1,\ a)\ \frac{(u-a)^m}{m!},$$

$$P_{m-1}(1,\ u)=P_{m-1}(1,\ a)+P_{m-1}'(1,\ a)(u-a)+\cdots+$$
$$+P_{m-1}^{(m-1)}(1,\ a)\ \frac{(u-a)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$P_1(1,\ u)=P_1(1,\ a)+P_1'(1,\ a)(u-a),$$

то (2.12) можно переписать так:

$$P(x,\ y)=x^m\Big[P_m(1,\ a)+P_m'(1,\ a)(u-a)+x^{-1}P_{m-1}(1,\ a)+$$
$$+P_m''(1,\ a)\ \frac{(u-a)^2}{2!}+x^{-1}(u-a)P_{m-1}'(1,\ a)+x^{-2}P_{m-2}(1,\ a)+\cdots\Big].\tag{2.13}$$

Здесь опущены члены измерения $l\geqslant 3$ относительно $(u-a)$ и x^{-1}. Так как $P_m(1,\ a)>a$, то имеем (обозначим $P_k(1,\ a)=P_k$)

$$\sqrt{P(x,\ y)}=x^{\frac{m}{2}}\sqrt{P_m}\Big[1+\frac{P_m'(u-a)}{2P_m}+\frac{x^{-1}P_{m-1}}{2P_m}+$$
$$+\frac{P_m''(u-a)^2}{2P_m2!}+\frac{x^{-1}(u-a)P_{m-1}'}{2P_m}+\frac{x^{-2}P_{m-2}}{2P_m}-$$
$$-\frac{1}{8}\ \frac{P_m'^2}{P_m^2}(u-a)^2-\frac{1}{8}\ \frac{x^{-2}P_{m-1}^2}{P_m^2}-$$
$$-\frac{1}{4}\ \frac{P_m'P_{m-1}}{P_m^2}(u-a)x^{-1}+\cdots\Big]=x^{\frac{m}{2}}\sqrt{P_m}\Big[1+\frac{P_m'}{2P_m}(u-a)+$$
$$+\frac{x^{-1}P_{m-1}}{2P_m}+\frac{2P_mP_m''-P_m'^2}{8P_m^2}(u-a)^2+$$
$$+\frac{2P_mP_{m-1}'-P_m'P_{m-1}}{4P_m^2}(u-a)x^{-1}+\frac{4P_mP_{m-2}-P_{m-1}^2}{8P_m^2}x^{-2}+\cdots\Big].\tag{2.14}$$

Здесь в квадратной скобке не выписаны члены измерения $l\geqslant 3$ относительно $(u-a)$ и x^{-1}.

Рассмотрим случай $m=3$. Найдем уравнения, которым удовлетворяют x и u. Из (2.10) имеем

$$\frac{dy}{dz}=u\frac{dx}{dz}+x\frac{du}{dz}=2\frac{\sqrt{P(x,\ y)}}{1-z},$$
$$2\frac{du}{dz}=2\sqrt{P(x,\ y)}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{u}{z}\right), \tag{2.15}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2\sqrt{P(x,\ y)}}{z}=\frac{x^{3/2}}{z}2\sqrt{P_3}\left[1+\frac{P_3'}{2P_3}(u-a)+\right.$$
$$\left.+\frac{P_2}{2P_3}x^{-1}+\alpha_{20}(u-a)^2+\alpha_{11}(u-a)x^{-1}+\alpha_{02}x^{-2}+\cdots\right], \tag{2.16}$$

где, согласно (2.14), $\alpha_{20}=\frac{2P_mP_m''-P_m'^2}{8P_m^2}$, $\alpha_{11}=\frac{2P_mP_{m-1}'-P_m'P_{m-1}}{4P_m^2}$, $\alpha_{02}=\frac{4P_mP_{m-2}-P_{m-1}^2}{8P_m^2}$ и $m=3$. Разделим второе уравнение (2.15) на (2.16):

$$\frac{du}{dx}=\left(\frac{1}{1-z}-\frac{u}{z}\right)\frac{z}{x}. \tag{2.17}$$

Введем новые переменные

$$v=-2x^{-1/2},\quad x^{-1}=\frac{v^2}{4},\quad u-a=w,\quad z-z_1=t. \tag{2.18}$$

Тогда (2.16) перепишется так:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2\sqrt{P_3}}{z_1+t}\left(1+\frac{P_3'}{2P_3}w+\frac{P_2}{2P_3}\frac{v^2}{4}+\alpha_{20}w^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{11}}{4}wv^2+\frac{\alpha_{02}}{16}v^4+\cdots\right). \tag{2.19}$$

Уравнение (2.17) примет вид

$$\frac{dw}{dv}=-2\frac{z_1+t}{v}\left(\frac{1}{1-z_1-t}-\frac{a+w}{z_1+t}\right)=$$
$$=\frac{1}{v}\left[\frac{-2t}{(1-z_1)^2}+2w-\frac{2t^2}{(1-z_1)^3}+\cdots\right]. \tag{2.20}$$

Здесь не выписаны члены измерения $l\geqslant 3$ относительно t и w.

Из (2.19) найдем

$$\frac{dt}{dv}=\frac{z_1+t}{2\sqrt{P_3}}\left(1-\frac{P_3'}{2P_3}w-\frac{P_2}{2P_3}\frac{v^2}{4}-\alpha_{20}w^2+\right.$$

$$\left.+\frac{P_3'^2}{4P_3^2}w^2+\cdots\right)=\frac{z_1+t}{2\sqrt{P_3}}\left(1-\frac{P_3'}{2P_3}w-\frac{P_2}{2P_3}\frac{v^2}{4}+\alpha w^2+\cdots\right),$$

где, учитывая значение α_{20}, получим

$$\alpha=\frac{3P_3'^2-2P_3P_3''}{8P_3^2}.$$

Окончательно напишем (раскрывая скобки)

$$\frac{dt}{dv}=\frac{v}{v}\left(\frac{z_1}{2\sqrt{P_3}}+\frac{t}{2\sqrt{P_3}}-\frac{z_1P_3'}{4P_3^{3/2}}w-\frac{z_1P_2}{16P_3^{3/2}}v^2+\right.$$

$$\left.+\frac{z_1\alpha}{2\sqrt{P_3}}w^2-\frac{P_3'}{4P_3^{3/2}}tw+\cdots\right). \qquad (2.21)$$

Уравнения (2.21) и (2.20) имеют вид уравнений Брио и Буке, рассмотренных во II главе, поэтому можно искать решение

$$t\to 0,\quad w\to 0 \text{ при } v\to 0. \qquad (2.22)$$

Введем в (2.21), (2.20) новые неизвестные y_1 и y_2

$$y_1=w-\frac{z_1v}{(1-z_1)^2\sqrt{P_3}},\quad y_2=t-\frac{z_1v}{2\sqrt{P_3}}. \qquad (2.23)$$

Тогда получим уравнения

$$\frac{dy_1}{dv}=\frac{1}{v}\left[2y_1-\frac{2y_2}{(1-z_1)^2}-\frac{2y_2^2}{(1-z_1)^2}-\frac{2z_1vy_2}{(1-z_1)^3\sqrt{P_3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{z_1^2v^2}{2(1-z_1)^3P_3}+\cdots\right], \qquad (2.24)$$

$$\frac{dy_2}{dv}=\frac{v}{v}\left(-\frac{z_1P_3y_1}{4P_3^{3/2}}+\frac{y_2}{2\sqrt{P_3}}+\beta v+\cdots\right), \qquad (2.24_1)$$

$$\beta=\frac{z_1}{4P_3}-\frac{z_1^2P_3'}{4(1-z_1)^2P_3^2}.$$

Эти уравнения имеют вид уравнений (1.1) главы II и подстановкой $y_1=s_{11}u_1+s_{12}u_2$, $y_2=s_{21}u_1+s_{22}u_2$ с постоянными s_{kl} преобразуются к уравнениям (1.10) главы II

$$v\frac{du_1}{dv}=2u_1+F_1(u_1,\ u_2,\ v),\quad v\frac{du_2}{dv}=F_2(u_1,\ u_2,\ v), \qquad (2.25)$$

так как $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$. Согласно теореме 1.6 из главы II, эта система имеет однопараметрическое семейство решений

$$u_s = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} C_s^{(mm_1)} v^m (v^2 \ln v)^{m_1}, \quad s = 1, 2, \tag{2.26}$$

с произвольной постоянной $C_1^{(20)} = C$. Здесь возможен такой случай, когда члены с $v^2 \ln v$ отсутствуют и это решение будет голоморфным с произвольной постоянной $C_1^{(20)} = C$. Если этот случай здесь имеем, то это легко увидеть, удовлетворяя формально непосредственно уравнениям (2.24) рядами вида

$$y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v^k, \quad y_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k. \tag{2.27}$$

Подставим эти ряды в уравнения (2.24)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k v^k = 2\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v^k - \frac{2}{(1-z_1)^2}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k -$$

$$- \frac{2}{(1-z_1)^3}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k\right)^2 - \frac{2z_1 v}{\sqrt{P_3}(1-z_1)^3}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k -$$

$$- \frac{z_1^2 v^2}{2(1-z_1)^3 P_3} + \cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k v^{k-1} = -\frac{z_1 P_3'}{4P_3^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v^k + \frac{1}{2\sqrt{P_3}}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k + \beta v + \cdots$$

Сравнивая коэффициенты при v в первом уравнении и свободные члены во втором, получим $\alpha_1 = 2\alpha_1 - \frac{2}{(1-z_1)^2}\beta_1$, $\beta_1=0$, $\alpha_1 = 0$. Приравниваем теперь коэффициенты при v^2 в первом равенстве и при v во втором: $2\alpha_2 = 2\alpha_2 - \frac{2\beta_2}{(1-z_1)^2} - \frac{z_1^2}{2(1-z_1)^3 P_3}$, $2\beta_2 = \beta$. Отсюда $2\beta_2 + \frac{z_1^2}{2(1-z_1) P_3} = 0$ и $\beta = -\frac{z_1^2}{2(1-z_1) P_3}$. Подставляя сюда значение β из (2.24) и производя сокращения, окончательно получим необходимое и достаточное условие наличия решения вида (2.27):

$$(1-z_1^2)P_3 = z_1 P_3'. \tag{2.28}$$

Напоминаем, что здесь $a = \dfrac{z_1}{1 - z_1}$ и производная берется по второму аргументу a, который стоит в $P_3(x, y)$ вместо y. Если равенство (2.28) выполнено, то α_2 остается произвольным, β_2 определяется согласно полученным формулам

$$\beta_2 = -\frac{z_1^2}{4(1 - z_1) P_3}, \tag{2.29}$$

а остальные коэффициенты рядов (2.27) найдем однозначно. Пусть, например, имеем $P(x, y)$ в виде (1.1). Тогда $P_3 = a(1+a)$, $P_3' = 2a + 1$, $P_3 = \dfrac{z_1}{(1 - z_1)^2}$, $P_3' = \dfrac{1 + z_1}{1 - z_1}$ и равенство (2.28) выполнено и притом тождественно относительно z_1, т. е. z_1 произвольная. Следовательно, в этом случае система (*) имеет решение, для которого произвольная точка $z_1 \neq 0$, 1 будет особенной типа (2.1), причем z_1, как легко видеть, будет полюсом[1] второго порядка для $x(z)$ и $y(z)$ и это решение будет содержать еще один произвольный параметр α_2. Если имеем общий случай

$$P_3(x, y) = \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3,$$

т. е.

$$P_3 = P_3(1, a) = \alpha_{30} + \alpha_{21}a + \alpha_{12}a^2 + \alpha_{03}a^3,$$

$$P_3' = P_3'(1, a) = \alpha_{21} + 2\,\alpha_{12}a + 3\alpha_{03}a^2,$$

то, заменяя в (2.28) $z_1 = \dfrac{a}{1 + a}$, получим

$$\alpha_{03}a^4 + 2\alpha_{03}a^3 + (\alpha_{12} - \alpha_{21})\,a^2 - 2\alpha_{30}a - \alpha_{30} = 0. \tag{2.30}$$

Отсюда видим, что для произвольного полинома $P_3(x, y)$ имеем не более четырех значений a, а тем самым и z_1, в которых будет особенность типа (2.1), где z_1 — полюс. Или может случиться, что вообще таких вещественных z_1 нет[2].

Рассмотрим еще частный случай, когда $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ и $\alpha_{03} = \alpha_{30}$. Тогда, как легко видеть, из (2.30) получим

$$(a-1)(a+1)^3 = 0,\ a = 1,\ a = -1.$$

Если возьмем $a = 1$, то получим $z_1 = 1/2$. При $a = -1$ будет $z_1 = \infty$. Таким образом, в этом случае имеем только одну подвижную особую точку типа (2.1) — полюс $z_1 = 1/2$. Но

[1] Это увидим, возвращаясь к переменным x, y, z, как это сделано в главе IX.

[2] Т. е. нет решений вида (2.27), а будет (2.26) и z_1 не будет полюсом, а будет сложной многозначной подвижной особой точкой.

предположим, что равенство (2.28) не выполнено. Тогда система (2.25) имеет решение вида (2.26) с произвольным параметром $C_1^{(20)}=C$. Такого же вида будут функции $y_1(v)$, и $y_2(v)$, а тем самым, согласно формулам (2.23) и w, t или в соответствии с (2.18) и z, $u=y/x$. Мы получим, следовательно, z и y как функции $v=-2x^{-1/2}$. Особая точка z_1 типа (2.1) в общем случае будет весьма сложного типа многозначной, но произвольно выбранной. В частных случаях она может быть и полюсом.

Мы рассмотрели тот случай уравнений (*), когда в (2.14) $m=3$. Пусть теперь $m=4$. Предположим, что и в этом случае в (2.13)

$$P_4 = P_4(1,\ a) > 0. \tag{2.31}$$

Из (2.14) получим

$$\sqrt{P(x,\ y)} = x^2\sqrt{P_4}\left[1+\frac{P_4'}{2P_4}(u-a)+\frac{x^{-1}P_3}{2P_4}+\right.$$

$$+\frac{2P_4P_4''-P_4'^2}{8P_4^2}(u-a)^2+\frac{2P_4P_3'-P_4'P_3}{4P_4^2}(u-a)x^{-1}+$$

$$\left.+\frac{4P_4P_2-P_3^2}{8P_4^2}x^{-2}+\cdots\right]. \tag{2.32}$$

Уравнения (2.15) не изменяются, а (2.16) имеют вид

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x^2}{z}2\sqrt{P_4}\left[1+\frac{P_4'}{2P_4}(u-a)+\right.$$

$$\left.+\frac{P_3}{2P_4}x^{-1}+\alpha_{20}(u-a)^2+\alpha_{11}(u-a)x^{-1}+\alpha_{02}x^{-2}+\cdots\right], \tag{2.33}$$

где

$$\alpha_{20}=\frac{2P_4P_4''-P_4'^2}{8P_4^2},\quad \alpha_{11}=\frac{2P_4P_3'-P_4'P_3}{4P_4^2},\quad \alpha_{02}=\frac{4P_4P_2-P_3^2}{8P_4^2}.$$

Уравнение (2.17) не изменится, а вместо (2.18) возьмем

$$v=-x^{-1},\quad u-a=w,\quad z-z_1=t, \tag{2.34}$$

поэтому вместо (2.19) получим

$$\frac{dv}{dt}=\frac{2\sqrt{P_4}}{z_1+t}\left(1+\frac{P_4'}{2P_4}w-\frac{P_3}{2P_4}v+\alpha_{20}w^2-\alpha_{11}wv+\alpha_{02}v^2+\cdots\right). \tag{2.35}$$

Уравнение (2.20) принимает вид

$$\frac{dw}{dv} = -\left(\frac{1}{1-z_1-t} - \frac{a+w}{z_1+t}\right)\frac{z_1+t}{v} =$$

$$= \frac{1}{v}\left[\frac{-t}{(1-z_1)^2} + w - \frac{t^2}{(1-z_1)^3} + \cdots\right]. \quad (2.36)$$

Ранее мы из (2.19) получили (2.21), теперь из (2.35) также получим

$$\frac{dt}{dv} = \frac{v}{v}\left(\frac{z_1}{2\sqrt{P_4}} + \frac{t}{2\sqrt{P_4}} - \frac{z_1P_4'}{4P_4^{3/2}}w + \frac{z_1P_3}{4P_4^{3/2}}v + \right.$$

$$\left. + \beta_{20}w^2 + \beta_{02}v^2 + \beta_{11}wv + \gamma_1 wt + \gamma_2 tv + \cdots\right], \quad (2.37)$$

где β_{kl} и γ_k постоянные.

Уравнения (2.36) и (2.37) имеют вид уравнений (1.1) главы II. Здесь имеем $\lambda_2=0$ и $\lambda_1=1$. Согласно теореме 1.6 главы II, эта система имеет однопараметрическое семейство решений

$$w \to 0, \quad t \to 0 \text{ при } v \to 0 \quad (2.38)$$

вида

$$z - z_1 = t = \sum_{m+m_1=1} \alpha^{(mm_1)} v^m (v \ln v)^{m_1},$$

$$(2.39)$$

$$w = u - a = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} \beta^{(mm_1)} v^m (v \ln v)^{m_1}, \quad v = x^{-1}.$$

Легко видеть, подставляя (2.39) в (2.36) и (2.37) и сравнивая коэффициенты при соответствующих членах $v^m (v \ln v)^{m_1}$, что здесь $\alpha^{(10)} = z_1/2\sqrt{P_4}$, $\alpha^{(01)} = 0$, $\beta^{(10)} = C$ — произвольное и $\beta^{(01)} = -z_1/2(1-z_1)^2\sqrt{P_4}$. Остальные коэффициенты определяются согласно теореме 1.6 из главы II.

Мы рассмотрели вопрос о существовании решения системы (*), обладающего свойством (2.1) для $m=3$ и $m=4$. Теперь будем рассматривать общий случай m. Запишем (2.14) в виде

$$\sqrt{P(x, y)} = x^{\frac{m}{2}}\sqrt{P_m}\left[1 + \frac{P_m'}{2P_m}(u-a) + \right.$$

$$\left. + \frac{P_{m-1}}{2P_m}x^{-1} + \alpha_{20}(u-a)^2 + \alpha_{11}(u-a)x^{-1} + \alpha_{02}x^{-2} + \cdots\right], \quad (2.40)$$

где значения α_{20}, α_{11} и α_{02} даны в формуле (2.14). В первом уравнении (*), где $\sqrt{P(x, y)}$ дано формулой (2.40), заменим

$$z = z_1 + t, \quad u - a = w \text{ и } x = v^{-2}, \quad x^{-1} = v^2. \quad (2.41)$$

Получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2(z_1+t)} v^{3-m} \sqrt{P_m} \left(1 + \frac{P_m'}{2P_m} w + \frac{P_{m-1}}{2P_m} v^2 + \cdots\right). \tag{2.42}$$

Так же, как и ранее, имеем уравнение (2.17), в котором заменим переменные, согласно (2.41),

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{2(z_1+t)}{v}\left(\frac{1}{1-z_1-t} - \frac{w+a}{z_1+t}\right).$$

Отсюда имеем (2.20)

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{v}\left[\frac{-2t}{(1-z_1)^2} + 2w - \frac{2t^2}{(1-z_1)^3} + \cdots\right], \tag{2.43}$$

а (2.42) запишем в виде

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{2(z_1+t)}{\sqrt{P_m}} \frac{v^{m-2}}{v}\left(1 - \frac{P_m'}{2P_m} w - \frac{P_{m-1}}{2P_m} v^2 + \cdots\right). \tag{2.44}$$

Здесь $m \geqslant 5$, поэтому $m-2 \geqslant 3$, т. е. низшая степень v после внесения в квадратную скобку v^{m-2} будет во всех случаях $\geqslant 3$. Линейных членов относительно v, w и t не будет. Уравнения (2.43) и (2.44) имеют вид уравнений (1.1) главы II с $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$. Согласно теореме 1.6 главы II, всегда имеем решение вида

$$w = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} \beta^{(mm_1)} v^m (v^2 \ln v)^{m_1},$$

$$t = \sum_{m+m_1=1}^{\infty} \alpha^{(mm_1)} v^m (v^2 \ln v)^{m_1}.$$

Но, согласно замечанию к теореме 1.6 главы II, здесь не будет членов с $v^2 \ln v$, т. е. решение будет голоморфным

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k v^k, \quad t = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v^k. \tag{2.45}$$

Это следует из того, что в квадратной скобке равенства (2.43) нет членов v^l ($l \geqslant 1$), а в (2.44) такой член с наименьшей степенью будет v^{m-2}, т. е. со степенью $m-2 \geqslant 3$, что, согласно замечанию, и достаточно, чтобы решение не содержало членов с $v^2 \ln v$ (наинизшая степень v должна быть большей или равной $\lambda_1 + 1 = 3$).

Из (2.45) видим, что если $\alpha_1 \neq 0$, то x и y в точке z_1 имеют полюс 2-го порядка. Таким образом, во всех случаях доказано существование решения (2.1) в предположении лишь $P_m(1, a) > 0$, а это условие легко проверяется, если старший полином $P_m(x, y)$ в $P(x, y)$ задан и точка z_1 выбрана.

Итак, если $P(x, y)$ имеет вид (1.1), то решение (2.1) в произвольной вещественной точке $z_1 < 1$ существует и z_1 будет полюсом второго порядка.

§ 3. О РЕШЕНИИ $x \to x_0$ (КОНЕЧНОЕ), $y \to y_0$ (КОНЕЧНОЕ) ПРИ $z \to 0$ ИЛИ $z \to 1$, ИЛИ $z \to \infty$

Возможно ли решение

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 0? \tag{3.1}$$

Покажем, что если такое решение существует, то

$$P(x_0, y_0) = 0. \tag{3.2}$$

Действительно, иначе из

$$x - x_1 = \int_{z_1}^{z} \frac{2\sqrt{P(x, y)}}{z}\, dz \tag{3.3}$$

получим, что $x \to \infty$ при $z \to 0$. Отсюда следует, что если мы рассматриваем вещественное решение и нет вещественных x_0, y_0, удовлетворяющих равенству (3.2), то решения (3.1) быть не может. Так же докажем, что если

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 1, \tag{3.4}$$

то имеем (3.2).

Возвратимся к решению (3.1). Мы показали, что при этом будет (3.2). Но в таком случае решением будет (1.11). И здесь возникает вопрос: существует ли решение типа (3.1), отличное от (1.11)? Чтобы решить этот вопрос, рассмотрим равенство (из (1.5))

$$u - u_1 = \int_{z_1}^{z} \frac{P_1(x, y)}{z}\, dz + \int_{z_1}^{z} \frac{P_2(x, y)}{1 - z}\, dz. \tag{3.5}$$

Отсюда видим, что если

$$P_1(x_0, y_0) \neq 0, \tag{3.6}$$

то другого решения с начальными условиями (3.1), отличного от (1.11), нет, так как если $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 0$ и $P_1(x_0, y_0) \neq 0$, то u остается ограниченным при $z \to 0$, второй интеграл в (3.5) также ограничен, а первый интеграл стремится к ∞, что невозможно.

Так же докажем, что если

$$P_2(x_0,\ y_0) \neq 0, \tag{3.7}$$

то, кроме решения (1.11), другого решения с начальными условиями (3.4) нет.

Предположим теперь, что

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to \infty. \tag{3.8}$$

Тогда снова из равенства (3.3) видим, что необходимо выполнение условия (3.2), так как иначе не может x быть ограниченным при $z \to \infty$.

Записывая далее равенство (3.5) в виде

$$u - u_1 = \int\limits_{z_1}^{z} \frac{P_1(x,\ y)}{z(1-z)}\,dz + \int\limits_{z_1}^{z} \frac{P_2(x,\ y) - P_1(x,\ y)}{1-z}\,dz,$$

получаем, что должно быть еще

$$P_1(x_0,\ y_0) = P_2(x_0,\ y_0), \tag{3.9}$$

так как первый интеграл сходится при $z \to \infty$, а второй будет расходиться, если нет (3.9).

Теорема 3.1. *Решение (3.1) возможно только при условии (3.2) и (3.9).*

Возвратимся к решению (3.1), где x_0 и y_0 удовлетворяют условиям (3.2) и

$$P_1(x_0,\ y_0) = 0. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. *Существует голоморфное в точке $z_0 = 0$ решение типа (3.1), если x_0 и y_0 удовлетворяют равенствам (3.2) и (3.10) и неравенству (3.7).*

Таким образом, необходимым условием наличия решения (3.1) (не обязательно голоморфного в точке $z=0$) является выполнение равенств (3.2) и (3.10). Если ищем вещественное решение типа (3.1) и нет вещественных x_0, y_0, удовлетворяющих равенствам (3.2) и (3.10), то такого решения нет.

Мы предположим, что есть такие вещественные x_0, y_0 и будем искать голоморфное вещественное решение типа (3.1). Следовательно, ищем решение вида [1]

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k!}, \quad y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{z^k}{k!}, \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \frac{z^k}{k!}, \tag{3.11}$$

где x_k, y_k и u_k — постоянные.

---

[1] Если $x(z)$ голоморфная в точке $z=0$, то из $\frac{dx}{dz} = \frac{\sqrt{P(x,\ y)}}{z}$ следует, что голоморфной будет и $\sqrt{P(x,\ y)}$.

Пользуясь (3.11), найдем $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ в виде рядов по степеням z:

$$P_1(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} x_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} y_1\right]_0 \frac{z}{1!} +$$
$$+ \left[\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} x_1^2 + \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y} x_1 y_1 + \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial y} x_1 y_1 +\right.$$
$$\left.+ \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y^2} y_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} x_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} y_2\right]_0 \frac{z^2}{2!} + \cdots, \tag{3.12}$$
$$P_2(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]_0 + \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} x_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} y_1\right]_0 \frac{z}{1!} +$$
$$+ \left[\frac{\partial^3 P}{\partial y \partial x^2} x_1^2 + \frac{\partial^3 P}{\partial y^2 \partial x} y_1 x_1 + \frac{\partial^3 P}{\partial y^3} y_1^2 +\right.$$
$$\left.+ \frac{\partial^3 P}{\partial y^2 \partial x} y_1 x_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} x_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} y_2\right]_0 \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Здесь $[\quad]_0$ означает, что все частные производные вычислены в точке x_0, y_0 и в первом равенстве нет свободного члена ввиду того, что выполнено равенство (3.10).

Подставим (3.11), (3.12) в уравнения (1.5) и приравняем свободные члены и коэффициенты при первой степени z справа и слева:

$$x_1 = 2u_1, \quad y_1 = 0, \quad u_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} x_1 + \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$2x_2 = 2u_2, \quad 2y_2 = 2u_1,$$
$$2u_2 = \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} x_1^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} x_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} y_2\right)\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} x_1 + \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{3.12$_1$}$$

Отсюда[1])

---

[1]) Если не только $\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, но и $\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$, то голоморфного в точке $z = 0$ решения (3.1) может не быть. Это мы увидим позднее на примере, а подробнее этот случай рассматривать не будем. В случае (1.1) и $y = \xi_1\xi_3$: $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 8y + 2(\xi_3 - \xi_1)^2 = 8\xi_1\xi_3 + 2(\xi_3 - \xi_1)^2 = (2\xi_3 + \xi_1)^2$, $1 - 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 1 - 4(\xi_3 + \xi_1)^2$. Это нуль в исключительном случае. Поэтому $u_1 = 0$, если $\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$, $x_1 = 0$.

$$u_1\left(1-2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial y},\quad u_2\left(2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\frac{x_1^2}{2}+$$

$$+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\frac{u_1}{2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}2u_1+\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{3.13}$$

Предположим, что $\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0}\neq\frac{1}{2}$. Здесь все производные от P найдены в точке x_0, y_0. Введем новые переменные μ и ν: $y-y_0=z^2(y_2+\mu)$, $x-x_0=z(x_1+\nu)$ или в силу (3.12_1)

$$y-y_0=z^2(u_1+\mu),\quad x-x_0=z(2u_1+\nu). \tag{3.14}$$

Представим $P(x, y)$ в виде

$$P(x,\ y)=P(x_0,\ y_0)+\frac{\partial P}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial P}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\frac{(y-y_0)^2}{2!}+\cdots$$

Подставим сюда (3.14) и примем во внимание, что

$$P(x_0,\ y_0)=\frac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0,$$

$$P(x,\ y)=\frac{\partial P}{\partial y}z^2(u_1+\mu)+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}z^2\frac{(2u_1+\nu)^2}{2!}+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}z^3(2u_1+$$

$$+\nu)(u_1+\mu)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}z^4\frac{(u_1+\mu)^2}{2!}+\cdots=z^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}u_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}2u_1^2\right)+z^2\left[\frac{\partial P}{\partial y}\mu+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}2u_1\nu+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\nu^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}z(2u_1^2+u_1\nu+2u_1\mu+\nu\mu)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}z^2\frac{u_1^2+2u_1\mu+\mu^2}{2!}+\cdots\right].$$

Найдем (пользуясь (3.13))

$$\frac{\partial P}{\partial y}u_1+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}2u_1^2=u_1\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}2u_1\right)=$$

$$=u_1\left(\frac{\partial P}{\partial y}+2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1-2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}\right)=$$

$$= u_1 \frac{\partial P}{\partial y}\left(1 - 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)\frac{1}{1 - 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}} = u_1^2.$$

Теперь можно написать

$$P(x,\ y) = z^2 u_1^2 \left(1 + \frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-2}\mu + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} u_1^{-1}\nu + 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\frac{\nu^2}{2!} u_1^{-2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} z\nu u_1^{-1} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} 2z\mu u_1^{-1} +$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} z\nu\mu u_1^{-2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} z^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} z^2\mu u_1^{-1} +$$

$$\left. + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} z^2\mu^2 \frac{u_1^{-2}}{2} + \cdots \right]. \tag{3.15}$$

Из (3.14) ммеем

$$\frac{dy}{dz} = 2zu_1 + z^2\frac{d\mu}{dz} + 2z\mu, \quad \frac{dx}{dz} = 2u_1 + z\frac{d\nu}{dz} + \nu,$$

$$z^2\frac{d\mu}{dz} = 2\frac{\sqrt{P(x,\ y)}}{1 - z} - 2zu_1 - 2z\mu, \tag{3.16}$$

$$z\frac{d\nu}{dz} = \frac{2\sqrt{P(x,\ y)}}{z} - 2u_1 - \nu.$$

В силу (3.15) имеем

$$2\sqrt{P(x,\ y)} = 2zu_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-2}\mu + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} u_1^{-1}\nu + \right.$$

$$\left. + z\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \cdots\right) = 2zu_1 + z\frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-1}\mu +$$

$$+ 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\nu + 2z^2 u_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \cdots,$$

поэтому из (3.16) найдем

$$\begin{aligned} z\frac{d\mu}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-1}\mu + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\nu + 2zu_1\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \cdots - 2\mu, \\ z\frac{d\nu}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-1}\mu + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\nu + 2u_1 z\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \cdots - \nu. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Это уравнения Брио и Буке. Матрица коэффициентов при первых степенях μ и ν после замены u_1 его значением из (3.13) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-1} - 2, & 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} u_1^{-1}, & 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\left(2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 1\right), & 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ 1 - 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, & 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 1 \end{matrix} \right\|$$

Характеристические числа этой матрицы найдем в виде

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}. \tag{3.18}$$

Здесь возможны случаи, указанные в теоремах 1.1, 1.2, 1.5, 1.6 главы II, а также случай (1.6), когда $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$.

Во всех этих случаях имеем голоморфное решение[1], обладающее свойством

$$\mu \to 0, \quad \nu \to 0 \text{ при } z \to 0. \tag{3.19}$$

А если $\lambda_2 > 0$ не целое, то имеем и однопараметрическое семейство[2] неголоморфных решений (3.19), представимое в виде сходящегося ряда по степеням z и $z^{\lambda_2} \ln z$, или это семейство решений будет без членов с $z^{\lambda_2} \ln z$, т. е. будет голоморфным. Как видим, метод, использованный здесь, позволяет найти решения вида (3.1), как голоморфные, так и неголоморфные, но может быть, не всегда все. Например, пусть $P(x, y) = x^2 y + xy^2$. Тогда, как мы показали, если существует решение вида (3.1), то должны выполняться равенства $x_0 y_0 (x_0 + y_0) = 0$ и $2x_0 y_0 + y_0^2 = 0$, откуда следует, что $y_0 = 0$, а тогда $\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_{x=x_0, y=y_0} = 0$. Следовательно, в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и мы имеем случай (1.6) главы II. Тогда уравнения (3.17) имеют единственное голоморфное решение типа (3.19) (а тем самым и типа (3.1)), которое легко и найдем. Но мы не знаем, существуют ли другие (неголоморфные) решения (3.19) (по-видимому, их нет).

Так же решается вопрос о существовании решения вида

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 1. \tag{3.20}$$

---

[1] В случае (1.6), когда $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, голоморфное нетривиальное решение (3.19) имеется потому, что в правых частях уравнений (3.17) есть члены вида az^l, где a постоянная и $l > 0$ целое.

[2] Неголоморфные решения (3.1) существуют при специальных соотношениях между коэффициентами (1.1), которые не имеют значения для проблемы Римана.

Для этого можно, например, в (*) сделать замену переменной $z-1=t\to 0$ при $z\to 1$. Как видим, во всяком случае голоморфное в окрестности точки $z=1$ решение (3.20) существует, если $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0$, $\dfrac{\partial^2 P(x_0, y_0)}{\partial y^2}\neq \dfrac{1}{2}$.

§ 4. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ $x\to\infty$, $y\to y_0\neq 0$ ПРИ $z\to 1-0$

Рассмотрим решения

$$x\to\infty,\ y\to y_0\neq 0 \text{ при } z\to 1-0 \tag{4.1}$$

и

$$y\to\infty,\ x\to x_0 \text{ при } z\to 1-0. \tag{4.2}$$

Предположим, что высшая степень x в полиноме m-й степени $P(x, y)$ есть x^l, где $l\leqslant m$. Тогда имеем

$$P(x, y)=x^l P_l(y)+x^{l-1}P_{l-1}(y)+\cdots+P_0(y)=$$

$$=x^l P_l(y)\left[1+\frac{P_{l-1}(y)}{P_l(y)}x^{-1}+\frac{P_{l-2}(y)}{P_l(y)}x^{-2}+\cdots+\frac{P_0(y)}{P_l(y)}x^{-l}\right], \tag{4.3}$$

где $P_k(y)$ — полином от y и пусть $P_l(y_0)>0$. Отсюда

$$\sqrt{P(x, y)}=x^{l/2}\sqrt{P_l(y)}\sqrt{1+\delta(z)},\quad \delta(z)\to 0 \text{ при } z\to 1. \tag{4.4}$$

Из первого уравнения (*)

$$\frac{dx}{dz}=\frac{2x^{l/2}\sqrt{P_l(y)}\sqrt{1+\delta(z)}}{z},$$

$$\frac{x^{1-l/2}}{1-l/2}=2\int\frac{\sqrt{P_l(y)}\sqrt{1+\delta(z)}}{z}\,dz,\quad l\geqslant 3, \tag{4.5}$$

$$\ln x=2\int\frac{\sqrt{P_l(y)}\sqrt{1+\delta(z)}}{z}\,dz,\quad l=2. \tag{4.6}$$

Из (4.6) видим, что решения (4.1) быть не может, так как при $z\to 1$ $\ln x\to\infty$, а правая часть ограничена.

Пусть теперь $l\geqslant 3$. Тогда при $z\to 1$ $x^{1-l/2}\to 0$, поэтому $x\to\infty$ при $z\to 1$ возможно. Но возможно ли при этом $y\to y_0$? При $z\to 1$ будет

$$\frac{2\sqrt{P_l(y)}\sqrt{1+\delta(z)}}{z}\to\frac{A}{1-l/2}\neq 0,$$

поэтому из (4.5) имеем $x^{1-l/2} \approx A(1-z)$ вблизи $z=1$, откуда

$$x \approx A^{2/(2-l)}(1-z)^{2/(2-l)}.$$

Теперь из второго уравнения (*) получим

$$\frac{dy}{dz} = (1-z)^{\frac{l}{2-l}-1} A^{\frac{l}{2-l}} 2 \sqrt{P_l(y)} \sqrt{1+\delta(z)},$$

$$y = 2A^{l/(2-l)} \int^{z} \sqrt{P_l(y)} \sqrt{1+\delta(z)} (1-z)^{\frac{l}{2-l}-1} dz.$$

Если $y \to y_0$, $\delta(z) \to 0$ и $P_l(y) \to P_l(y_0) \neq 0$ при $z \to 1$, то правая часть не будет ограничена при $z \to 1$, поэтому решения (4.1) нет. Переходим к рассмотрению решения (4.2). В этом случае имеем

$$P(x, y) = y^l P_l(x) + y^{l-1} P_{l-1}(x) + \cdots + P_0(x) =$$

$$= y^l P_l(x) \left[1 + \frac{P_{l-1}(x)}{P_l(x)} y^{-1} + \frac{P_{l-2}(x)}{P_l(x)} y^{-2} + \cdots + \frac{P_0(x)}{P_l(x)} y^{-l} \right],$$

откуда

$$\sqrt{P(x, y)} = y^{l/2} \sqrt{P_l(x)} \left[1 + \frac{P_{l-1}(x)}{2P_l(x)} y^{-1} + \left(\frac{P_{l-2}(x)}{2P_l(x)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{8} \frac{P_{l-1}^2(x)}{P_l^2(x)} \right) y^{-2} + \cdots \right] = y^{l/2} \sqrt{P_l(x)} \, [1+\delta(z)],$$

$$\delta(z) \to 0 \text{ при } z \to 1. \tag{4.7}$$

Пусть $P_l(x_0) \neq 0$, из второго уравнения (*) получим

$$\frac{y^{1-l/2}}{1-l/2} = \int^{z} 2 \frac{\sqrt{P_l(x)} [1+\delta(z)]}{1-z} dz, \quad l \geqslant 3, \tag{4.8}$$

$$\ln y = \int^{z} 2 \frac{\sqrt{P_2(x)} [1+\delta(z)]}{1-z} dz, \quad l = 2. \tag{4.9}$$

Так как $P_l(x) \to P_l(x_0) \neq 0$ при $z \to 1$, то правая часть (4.8) не ограничена, а левая часть стремится к 0, поэтому решения (4.2) нет при $l \geqslant 3$. Согласно Лопиталю,

$$\lim_{z\to 1} \frac{\displaystyle\int^{z} \frac{\sqrt{P_2(x)} \, [1+\delta(z)]}{1-z} dz}{-\sqrt{P_2(x_0)} \ln(1-z)} = \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt{P_2(x)} [1+\delta(z)]}{\sqrt{P_2(x_0)}} = 1,$$

поэтому

$$\int^{z} \frac{\sqrt{P_2(x)}\,[1+\delta(z)]}{1-z}\,dz \approx -\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)[1+\delta(z)]. \quad (4.10)$$

Следовательно, из (4.9) получим

$$y = \exp\{-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)[1+\delta(z)]\} = (1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}[1+\delta(z)]}, \quad (4.11)$$

откуда видим, что $y \to \infty$ при $z \to 1-0$. Но будет ли при этом $x \to x_0$?

Из первого уравнения (*) найдем, что $x = \int^{z} 2(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}[1+\delta(z)]}P_2(x)[1+\delta(z)]\,dz$ ограничено при $z \to 1$, если $1-2\sqrt{P_2(x_0)}>0$, так как $\int^{z}(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\,dz$ сходится при $z \to 1$, если $1-2\sqrt{P_2(x_0)}>0$. Таким образом, решение (4.2) можно ожидать при $l=2$, если

$$0<2\sqrt{P_2(x_0)}<1. \quad (4.12)$$

Но существует ли оно на самом деле? Напоминаем, что здесь $P(x, y)$ — полином m-й степени, но относительно y это полином второй степени, т. е.

$$P(x, y) = y^2P_2(x) + yP_1(x) + P_0(x). \quad (4.13)$$

Рассмотрим подробнее второе из уравнений (*) на основании (4.7)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2}{1-z}\,y\sqrt{P_2(x)}\left[1+\frac{P_1(x)}{2P_2(x)}y^{-1}+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x)}{P_2(x)} - \frac{1}{8}\frac{P_1^2(x)}{P_2^2(x)}\right)y^{-2}+\cdots\right],$$

$$\ln y = \int \frac{2\sqrt{P_2(x)}}{1-z}\left[1+\frac{P_1(x)}{2P_2(x)}y^{-1}+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x)}{P_2(x)} - \frac{1}{8}\frac{P_1^2(x)}{P_2^2(x)}\right)y^{-2}+\cdots\right]dx.$$

Так как, согласно Лопиталю,

$$\lim_{z\to 1}\int^{z} \frac{2\sqrt{P_2(x)}}{1-z}\left[1+\frac{P_1(x)}{2P_2(x)}y^{-1}+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x)}{P_2(x)} - \right.\right.$$

$$-\frac{1}{8}\frac{P_1^2(x)}{P_2^2(x)}\Big)y^{-2}+\dots\Big]dz\,[-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)]^{-1}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{P_2(x)}}{\sqrt{P_2(x_0)}}\Big[1+\frac{P_1(x)}{2P_2(x)}y^{-1}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x)}{P_2(x)}-\frac{1}{8}\frac{P_1^2(x)}{P_2^2(x)}\right)y^{-2}+\dots\Big]=1,$$

то вблизи $z=1$ имеем

$$\ln y\approx-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)\Big[1+\frac{P_1(x_0)}{2P_2(x_0)}y^{-1}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{1}{8}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}\right)y^{-2}+\dots\Big],\qquad(4.14)$$

$$y\approx\exp\Big\{-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)\Big[1+\frac{P_1(x_0)}{2P_2(x_0)}y^{-1}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{1}{8}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}\right)y^{-2}+\dots\Big]\Big\},\qquad(4.15)$$

$$y\approx\exp[-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)]=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}.\qquad(4.16)$$

Согласно Лопиталю,

$$\lim_{z\to 1}\frac{2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)}{y}=\lim_{z\to 1}\frac{2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)}{(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{-1}{(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}(1-z)}=-\lim_{z\to 1}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)}{y}\approx-(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$$

и

$$\frac{2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)}{y^2}\approx-(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}.$$

Это позволяет записать (4.15) в виде

$$y\approx\exp\{-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)\}\exp\Big\{-2\sqrt{P_2(x_0)}\ln(1-z)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2y}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+\frac{A}{y^2}+\cdots\right]\Bigg\},$$

$$y\approx(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\Bigg\{\exp\left[\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right]+$$

$$+O\left((1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right)\Bigg\}=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\Bigg[1+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+O\left((1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right)\Bigg].$$

Здесь $O(\delta)$—малая такого же порядка, как и δ. Отсюда имеем

$$y\approx(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+O\left((1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right).\quad(4.17)$$

Это позволяет ввести новые переменные

$$y=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+v,\quad u=x-x_0.\quad(4.18)$$

Найдем дифференциальные уравнения для v и u. И если мы покажем, что эти уравнения имеют решения

$$v\to 0,\quad u\to 0 \text{ при } z\to 1,\qquad(4.19)$$

то тем самым покажем, что решение (4.2) существует.

Здесь $u\to 0$, $v\to 0$ при $z\to 1$ как угодно, поэтому (4.18) — представление в круге $|z-1|<\rho$, следовательно, точка $z=1$ особая многозначная, если $\sqrt{P_2(x_0)}\neq 1/2$, что соответствует (4.12).

Найдем выражение $P(x, y)$ через u и v на основании (4.18):

$$P(x,\ y)=y^2P_2(x)+yP_1(x)+P_0(x)=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}\times$$

$$\times\left\{1+\left[v-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}\right](1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right\}^2P_2(u+x_0)+$$

$$+(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{1+\left[v-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}\right](1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right\}P_1(u+x_0)+$$

$$+P_0(u+x_0)=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{\left[1+2\left[v-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}\right]\times\right.\right.$$

$$\times(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+\left[v-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}\right]^2(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\Bigg]P_2(u+x_0)+$$

$$+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{1+\left[v-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}\right](1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right\}P_1(u+x_0)+$$

$$+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}P_0(u+x_0)\Big\}. \qquad (4.20)$$

Заметим, что здесь $P_2(u+x_0)$, $P_1(u+x_0)$ и $P_0(u+x_0)$—полиномы относительно u соответственно степени не выше $m-2$, $m-1$ и m:

$$P_2(u+x_0)=P_2(x_0)+P_2'(x_0)u+\cdots+P_2^{(m-2)}(x_0)\frac{u^{m-2}}{(m-2)!},$$

$$P_1(u+x_0)=P_1(x_0)+P_1'(x_0)u+\cdots+P_1^{(m-1)}(x_0)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$P_0(u+x_0)=P_0(x_0)+P_0'(x_0)u+\cdots+P_0^{(m)}(x_0)\frac{u^m}{m!}.$$

Будем считать в окрестности $z=1$ величины u, v и $(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$ малыми и выделим в фигурных скобках (4.20) их первые и вторые степени. Получим

$$P(x,\ y)=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{\left[1-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+2v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-$$

$$\left.-v\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+v^2(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_2(u+x_0)+$$

$$+\left[(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+\right.$$

$$\left.\left.+v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_1(u+x_0)+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}P_0(u+x_0)\right\}=$$

$$=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{\left[1-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+2v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_2(x_0)+$$

$$+\left[-v\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+v^2(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_2(x_0)+$$

$$+\left[1-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_2'(x_0)u+$$

$$+\left[\frac{1}{4}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+2v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+v^2(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_2'(x_0)u+$$

$$+\left[1-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+\frac{1}{4}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+\right.$$

$$+2v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$\left.+v^2(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]\left[P_2''(x_0)\frac{u^2}{2}+\cdots+P_2^{(m-2)}(x_0)\frac{u^{m-2}}{(m-2)!}\right]+$$

$$+\left[(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{P_1(x_0)}{2P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_1(x_0)+$$

$$+v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}P_1(x_0)+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}P_1'(x_0)u+$$

$$+\left[-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]P_1'(x_0)u+$$

$$+\left[(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+\right.$$

$$\left.+v(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\right]\left[P_1''(x_0)\frac{u^2}{2!}+\cdots+P_1^{(m-1)}(x_0)\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\right]+$$

$$+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}P_0(x_0)+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}\times$$

$$\left.\times\left[P_0'(x_0)u+\cdots+P_0^{(m)}(x_0)\frac{u^m}{m!}\right]\right\},$$

$$P(x,\ y)=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}\left\{P_2(x_0)+P_2'(x_0)u+\right.$$

$$+\left[P_0(x_0)-\frac{1}{4}\frac{P_1^2(x_0)}{P_2(x_0)}\right](1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+2P_2(x_0)v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+\left[P_1'(x_0)-\right.$$

$$-\frac{P_1(x_0)P_2'(x_0)}{P_2(x_0)}\Bigg]u(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+Q_2(u)+$$

$$+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}Q_2(u,\ v)+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}Q_1(u,\ v)\Bigg\}.$$

Здесь Q_k обозначают полиномы с наименьшей степенью k. Запишем еще так:

$$P(x,\ y)=(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}P_2(x_0)\Bigg\{1+\frac{P_2'(x_0)}{P_2(x_0)}u+$$

$$+\left[\frac{P_0(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{P_1^2(x_0)}{4P_2^2(x_0)}\right](1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+2v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+\left[\frac{P_1'(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{P_1(x_0)P_2'(x_0)}{P_2^2(x_0)}\right]u(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+Q_2(u)+$$

$$+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}Q_2(u,\ v)+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}Q_1(u,\ v). \qquad (4.21)$$

Заметим теперь, что при малых u, v и $(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$ для $P(x,\ y)$ можно построить мажоранту вида $\overline{P}(x,\ y)>0$:

$$\overline{P}_1(x,\ y)=|(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}P_2(x_0)[1+au+a(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+av(1-v)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+au(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}], \qquad (4.22)$$

где a — некоторая положительная константа. Здесь au объединяет члены $\frac{P_2'(x_0)}{P_2(x_0)}u+Q_2(u)$, $av(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$—члены $2v(1-$ $-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$ и соответствующие слагаемые в $(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}Q_2(u,\ v)$ и в $(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}Q_1(u,\ v)$ и так же строится $au(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$.

На основании (4.21) можно написать

$$\sqrt{P(x,\ y)}\approx(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\sqrt{P_2(x_0)}\Bigg\{1+\frac{P_2'(x_0)}{2P_2(x_0)}u+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{P_0(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{P_1^2(x_0)}{4P_2^2(x_0)}\right](1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{P_1'(x_0)}{P_2(x_0)}-\frac{P_1(x_0)P_2'(x_0)}{P_2^2(x_0)}\right]u(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}\Bigg\}. \qquad (4.23)$$

Пользуясь (4.23), из (4.18) получим

$$\frac{dv}{dz}\approx\frac{P_2'(x_0)}{\sqrt{P_2(x_0)}}u(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{4P_2(x_0)P_0(x_0)-P_1^2(x_0)}{P_2^{3/2}(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+$$

$$+2\sqrt{P_2(x_0)}\,v(1-z)^{-1}+\frac{P_2(x_0)P_1'(x_0)-P_1(x_0)P_2'(x_0)}{P_2^{3/2}(x_0)}u(1-z)^{-1}. \tag{4.24}$$

Считая вблизи $z=1$, что $\frac{1}{z}\approx 1$, мы так же получим

$$\frac{du}{dz}\approx 2\sqrt{P_2(x_0)}(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+\frac{P_2'(x_0)}{\sqrt{P_2(x_0)}}u(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{4P_0(x_0)P_2(x_0)-P_1^2(x_0)}{P_2^{3/2}(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+2\sqrt{P_2(x_0)}\,v+$$

$$+\frac{P_1(x_0)P_2(x_0)-P_1(x_0)P_2'(x_0)}{P_2^{3/2}(x_0)}u. \tag{4.25}$$

Найдем мажоранту для $D=\sqrt{P}(x,\ y)$. На основании (4.22), принимая во внимание, что при малой $p(z)$ мажорантой $\sqrt{1+p(z)}$ будет $1+\Delta|p(z)|$, где постоянная $\Delta>0$, получим мажоранту $\overline{D}$ для D в виде

$$\overline{D}=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}\sqrt{P_2(x_0)}\,\{1+b\,[u+(1-z)^{4\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+v(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+u(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}]\}.$$

На основании этого найдем для полных (а не приближенных) уравнений (4.24) и (4.25) мажорантные[1] уравнения

$$\frac{dv}{dz}=b\,[u(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+$$

$$+v(1-z)^{-1}+u(1-z)^{-1}], \tag{4.26}$$

$$\frac{du}{dz}=2\sqrt{P_2(x_0)}\,(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+b\,[u(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+$$

$$+(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}+v+u]. \tag{4.27}$$

Здесь b измененное за счет множителя $\sqrt{P_2(x_0)}$. Мы еще усилим правые части. Именно в первом уравнении заменим

[1] Это построение мажорантных уравнений (4.26), (4.27) — замена нелинейных уравнений линейными. И нелинейные уравнения здесь с неограниченными коэффициентами.

$u(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+u(1-z)^{-1}$ на $au(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}$, а во втором $2\sqrt{P_2(x_0)}(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+b(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}$ на $a(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}$ и $bu(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+u$ на $au(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}$, что вблизи $z=1$ возможно. После этого получим

$$\frac{dv}{dz}=a(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+au(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}-1}+av(1-z)^{-1}, \quad (4.28)$$

$$\frac{du}{dz}=a(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+au(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}+av. \quad (4.29)$$

Такую систему мы рассматривали в главе X и показали, что эта система имеет решение $v(z)\to 0$, $u(z)\to 0$ при $z\to 1$, т. е. что превосходящими положительными функциями для $v(z)$ и $u(z)$ будут ряды

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-z)^{k[1-2\sqrt{P_2(x_0)}]}, \quad \alpha_1=\frac{A}{1-2\sqrt{P_2(x_0)}},$$
$$\alpha_k=A\alpha_{k-1}\{[(k-1)(1-2\sqrt{P_2(x_0)})+$$
$$+a-2\sqrt{P_2(x_0)}]\,k(1-2\sqrt{P_2(x_0)})\}^{-1}, \quad (4.30)$$

где a и A — положительные постоянные,

$$v=\frac{(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}}a}{a+2\sqrt{P_2(x_0)}}+a(1-z)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-z)^{(k+1)[1-2\sqrt{P_2(x_0)}]}. \quad (4.31)$$

Приближенные значения $u(z)$ и $v(z)$ можно получить из приближенных уравнений (4.24) и (4.25). Справа в (4.25) главным членом вблизи $z=1$ будет $2\sqrt{P_2(x_0)}(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}$, так как вблизи $z=1$ u и v малые. Поэтому из (4.25) имеем

$$u\approx-\frac{2\sqrt{P_2(x_0)}}{1-2\sqrt{P_2(x_0)}}(1-z)^{1-2\sqrt{P_2(x_0)}}\underset{z\to 1}{\to}0. \quad (4.32)$$

Подставляя это в (4.24), увидим, что главный член в уравнении (4.24) будет

$$-\frac{2P_2'(x_0)(1-z)^{-4\sqrt{P_2(x_0)}}}{1-2\sqrt{P_2(x_0)}}+$$
$$+\frac{1}{4}\,\frac{4P_2(x_0)P_0(x_0)-P_1^2(x_0)}{P_2^{3/2}(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}-1},$$

поэтому

$$v \approx \frac{2P_2'(x_0)(1-z)^{1-4\sqrt{P_2(x_0)}}}{[1-4\sqrt{P_2(x_0)}][1-2\sqrt{P_2(x_0)}]} -$$

$$-\frac{1}{8}\frac{4P_2(x_0)P_0(x_0)-P_1^2(x_0)}{P_2^2(x_0)}(1-z)^{2\sqrt{P_2(x_0)}} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 0, \qquad (4.33)$$

если $1-4\sqrt{P_2(x_0)}>0$. Подставляя эти значения u и v в (4.24) и (4.25), получим следующие приближения. Приближенные значения x и y получим из формул (4.18) и, как видим, при $z\to 1$. $x\to x_0$ и $y\to\infty$ увеличиваясь, что и должно быть. Доказана

Теорема 4.1. *Решение (4.2) существует*[1] *и имеет вид (4.18), (4.19) при произвольном x_0, подчиненном неравенству* $0<4\sqrt{P_2(x_0)}<1$, *если* $P(x, y) = y^2P_2(x)+yP_1(x)+P_0(x)$.

Рассмотрим теперь поведение решений уравнений (*) в окрестности точки $z=0$, именно при $z\to 0+0$. При этом $x(z)$ и $y(z)$ убывают. Возможно ли решение

$$x\to -\infty, \quad y\to y_0 \text{ при } z\to 0+0? \qquad (4.34)$$

Предположим, что

$$P(x, y) = x^2P_2(y)+xP_1(y)+P_0(y) \qquad (4.35)$$

и $P_2(y_0)>0$.

Положим в уравнениях (*) $1-z=t$. Получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\sqrt{P(x, y)}}{1-t}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2\sqrt{P(x, y)}}{t}.$$

Пусть $\bar{x}=-x, \quad \bar{y}=-y$

$$P(x, y) = P(-\bar{x}, -\bar{y}) = \bar{x}^2P_2(-\bar{y})-\bar{x}P_1(-\bar{y})+P_0(-\bar{y}),$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{2\sqrt{P(-\bar{x}, -\bar{y})}}{1-t}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{2\sqrt{P(-\bar{x}, -\bar{y})}}{t}.$$

Согласно теореме 4.1, при $0<4\sqrt{P_2(-\bar{y}_0)}<1$ имеем решение $\bar{x}\to\infty$, $\bar{y}\to\bar{y}_0$ при $t\to 1-0$ в виде

---

[1] Но это решение перестает существовать при $\sqrt{P_2(x_0)}=0$, так как, согласно (4.11) или (4.18), уже не будет $y\to\infty$ при $z\to 1$. Если в (4.18) возьмем $y=C(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+v$, $u=x-x_0$, то так же докажем, что $v\to 0$ и $u\to 0$ при $z\to 1$ если $0<4\sqrt{P_2(x_0)}<1$, $C>0$.

$$\bar{x} = C(1-t)^{-2\sqrt{P_2(-\bar{y}_0)}} - \frac{1}{2}\frac{P_1(-\bar{y}_0)}{P_2(-\bar{y}_0)} + v, \quad y = u - \bar{y}_0,$$

где $u \to 0$ и $v \to 0$ при $t \to 1-0$. Следовательно, уравнения (*) имеют решение $x \to -\infty$, $y \to -\bar{y}_0$ при $z \to 0+0$, если $0 < 4\sqrt{P_2(-\bar{y}_0)} < 1$, которое имеет вид

$$x = -Cz^{-2\sqrt{P_2(-\bar{y}_0)}} - \frac{1}{2}\frac{P_1(-\bar{y}_0)}{P_2(-\bar{y}_0)} + v, \quad y = u - \bar{y}_0,$$

где $u \to 0$ и $v \to 0$ при $z \to 0+0$. Можно $-\bar{y}_0$ заменить через y_0, если $P_2(y_0) > 0$.

Здесь $z=0$ — многозначная особая точка. Это решение построено в области $|z| < \delta$, но как найти δ и всю область существования построенного решения?

Имеются и решения типа (2.1):

$$x \to -\infty, \quad y \to -\infty \text{ при } z \to z_1 + 0 < 1, \quad 0 < z_1.$$

Докажется это так же, как доказано существование решения (2.1).

§ 5. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (*) ПРИ $z \to \infty$

Возможны ли решения

1) $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to \infty$;
2) $x \to \infty$, $y \to y_0$ при $z \to \infty$;
3) $x \to \infty$, $y \to -\infty$ при $z \to \infty$;
4) $x \to x_0$, $y \to \infty$ при $z \to \infty$;
5) $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $z \to \infty$;
6) $x \to -\infty$, $y \to \infty$ при $z \to \infty$?

Очевидно, что при $z \to \infty$ y убывает $\left(\text{так как } \frac{dy}{dz} < 0\right)$, поэтому решения 4), 5) и 6) невозможны. Таким образом, остаются под вопросом только решения 1), 2) и 3), причем они принимают соответственно вид

$$x \to x_0 - 0, \ y \to y_0 + 0 \text{ при } z \to \infty; \tag{5.1}$$

$$x \to \infty, \ y \to y_0 + 0 \text{ при } z \to \infty; \tag{5.2}$$

$$x \to \infty, \ y \to -\infty \text{ при } z \to \infty. \tag{5.3}$$

В § 3 мы показали, что необходимым условием наличия решения (5.1) является выполнение условий (3.2) и (3.9). Запишем их вместе:

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad P_1(x_0, y_0) = P_2(x_0, y_0). \tag{5.4}$$

Для решения (5.2) в окрестности $z=\infty$ имеем

$$\sqrt{P(x, y)}=x^{l/2}\sqrt{P_l(y)}[1+\delta(z)], \quad \delta(z)\to 0 \text{ при } z\to\infty.$$

Из первого уравнения (*) при $l\geqslant 3$ получим

$$\frac{x^{1-l/2}}{1-l/2}=\int^{z}\frac{2\sqrt{P_l(y)}[1+\delta(z)]}{z}dz\approx 2P_l(y_0)\cdot\ln z[1+\delta(z)], \quad (5.5)$$

где предполагаем $\sqrt{P_l(y)}>0$. Здесь при $z\to\infty$ правая часть не ограничена, а левая ограничена, так как $l\geqslant 3$ и $x\to\infty$, чего быть не может, поэтому решения (5.2) при $l\geqslant 3$ нет.

Пусть $l=2$. Тогда вместо (5.5) имеем $\ln x=2\sqrt{P_2(y_0)}\times\times\ln z[1+\delta(z)]$ и $x\approx z^{2\sqrt{P_2(y_0)}}$. Здесь при $z\to\infty$ правая и левая части стремятся к ∞. Но будет ли при этом $y\to y_0$?

Из второго уравнения (*) имеем

$$\frac{dy}{dz}\approx\frac{2z^{2\sqrt{P_2(y_0)}}\sqrt{P_2(y_0)}}{1-z}\approx -2z^{2\sqrt{P_2(y_0)}-1}\sqrt{P_2(y_0)},$$

$y\approx -z^{2\sqrt{P_2(y_0)}}+C$ не ограничено при $z\to\infty$, поэтому решения (5.2) нет.

Переходим к рассмотрению решения (5.3). Введем новую переменную $t=z^{-1}$. Тогда система (*) перейдет в систему

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2\sqrt{P(x, y)}}{t}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{2\sqrt{P(x, y)}}{t(1-t)}, \quad (5.6)$$

а решение (5.3) в решение

$$x\to\infty, \quad y\to-\infty \text{ при } t\to 0+0. \quad (5.7)$$

Из (5.6), согласно Лопиталю, имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t-1}=-1. \quad (5.8)$$

Это позволяет подозревать, что решение (5.7) обладает свойством

$$v=x+y\to v_0 \text{ при } t\to 0. \quad (5.9)$$

Поэтому рассмотрим вопрос о наличии решения уравнений (полученных из (5.6))

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t}\sqrt{P(x, v-x)}, \quad \frac{dv}{dt}=\frac{2}{1-t}\sqrt{P(x, v-x)}, \quad (5.10)$$

обладающего свойством

$$x \to \infty, \quad v \to v_0 \text{ при } t \to 0 \tag{5.11}$$

или

$$x \to \infty, \quad v \to -\infty \text{ при } t \to 0. \tag{5.12}$$

Если имеем (5.12), то, согласно Лопиталю,

$$\lim \frac{v}{x} = \lim \frac{-t}{1-t} = 0. \tag{5.13}$$

Возвращаемся к записи (2.4). Заменим там $y = v - x$:

$$P(x, y) = \overline{P}_m(x, v) + \overline{P}_{m-1}(x, v) + \dots + \overline{P}_1(x, v) + b, \tag{5.14}$$

где $\overline{P}_k(x, v)$—однородный полином от x и v степени k. Может случиться, что

$$\overline{P}_k(x, v) \equiv b_k v^k, \quad k = m, m-1, \dots, 1, \tag{5.15}$$

где b_k постоянные. Тогда система (5.10) будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t}\sqrt{b_m v^m + b_{m-1}v^{m-1} + \dots + b_1 v + b}, \tag{5.16}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{1-t}\sqrt{b_m v^m + b_{m-1}v^{m-1} + \dots + b_1 v + b}. \tag{5.17}$$

Из (5.17) получим

$$\int^{v} \frac{dv}{\sqrt{b_m v^m + b_{m-1}v^{m-1} + \dots + b_1 v + b}} = -2\ln(1-t) + C, \tag{5.18}$$

где $-2\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \to 0$ при $t \to 0$. Если $b_m v_0^m + b_{m-1}v_0^{m-1} + \dots + b_1 v_0 + b \neq 0$, то $b_m v^m + b_{m-1}v^{m-1} + \dots + b_1 v + b = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (v - v_0)^k$, где $\alpha_0 \neq 0$. Отсюда следует, что и

$$(b_m v^m + b_{m-1}v^{m-1} + \dots + b_1 v + b)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (v - v_0)^k, \quad \beta_0 \neq 0,$$

где ряд справа сходится при $|v - v_0| \leqslant r$, $r > 0$. Следовательно, из (5.18) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{(v - v_0)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k,$$

откуда

$$v - v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t^k . \tag{5.19}$$

Если v_0 — простой корень уравнения

$$b_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \dots + b_1 v + b = 0. \tag{5.20}$$

то левая часть (5.18) снова ограничена при $v \to v_0$, и мы имеем $v \to v_0$ при $t \to 0$. Не трудно получить опять и (5.19). Но если v_0 — кратный вещественный корень уравнения (5.20), то левая часть (5.18) при $v \to v_0$ не будет ограничена, поэтому нет $v = v(t) \to v_0$ при $t \to 0$.

Переходим к общему случаю представления (5.14). Пусть в (5.14) $\bar{P}_l(x, v)$ содержит высшую степень x^ν (и по сравнению с другими $\bar{P}_k(x, v)$), где $\nu \leqslant l$. Тогда имеем

$$P(x, v) = x^\nu D(v) \left[1 + Q\left(\frac{1}{x}, v\right) \right], \tag{5.21}$$

где $D(v)$ — полином, и пусть $D(v_0) > 0$, а $Q\left(\frac{1}{x}, v\right)$ — полином от $\frac{1}{x}$ без свободного члена, так что $Q\left(\frac{1}{x}, v\right) \to 0$ при $x \to \infty$.

Из первого уравнения (5.10) получим

$$\frac{dx}{dt} = -2 \frac{x^{\frac{\nu}{2}}}{t} D^{\frac{1}{2}}(v) \left[1 + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{x}, v\right) + \cdots \right]. \tag{5.22}$$

При $\nu \geqslant 3$ найдем

$$\frac{x^{1-\nu/2}}{1-\nu/2} = -\int^{t} \frac{2\sqrt{D(v)}}{t} \left[1 + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{x}, v\right) + \cdots \right] dt, \tag{5.23}$$

а при $\nu = 2$

$$\ln x = -\int^{t} \frac{2\sqrt{D(v)}}{t} \left[1 + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{x}, v\right) + \dots \right] dt. \tag{5.24}$$

Очевидно, вблизи $t = 0$ имеем

$$-\int^{t} \frac{2\sqrt{D(v)}}{t} \left[1 + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{x}, v\right) + \dots \right] dt \approx$$

$$\approx -2\sqrt{D(v_0)} \ln t + C. \tag{5.25}$$

Отсюда видим, что в случае (5.23) нет $x \to \infty$ при $t \to 0$. Но в случае (5.24) имеем $x \approx t^{-2\sqrt{D(v_0)}} \to \infty$ при $t \to 0$, если $-2\sqrt{D(v_0)} < 0$.

Вообще если имеем общий случай (5.14), то уравнения (5.10) не отличаются от уравнений (*), когда мы ищем решение (4.2). В соответствии с теоремой 4.1 докажем, что решение (5.11) существует, если

$$0 < 4\sqrt{D(v_0)} < 1. \tag{5.26}$$

А тогда существует и (5.7), так что имеем (5.9): $x+y \to v_0 > 0$ при $t \to 0+0$ или $z \to \infty$.

Возможно ли решение (5.11) с $v_0=0$? Здесь могут быть разные случаи. Пусть, например, $P(x, y) = xy(x+y)$. Тогда система (5.10) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t}\sqrt{xv(v-x)}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2}{1-t}\sqrt{xv(v-x)}.$$

Отсюда видим, что вещественное решение $x \to \infty$, $v \to 0+0$ при $t \to 0+0$ невозможно, так как вблизи $t=0$ будет $xv(v-x) < 0$.

Предположим теперь, что

$$P(x, y) = xy(x+y) + ax^2 + cxy + dy^2 + Ax + By + K, \tag{5.27}$$

$$P(x, v) = xv^2 - x^2v + (a-c+d)x^2 + (c-2d)xv +$$

$$+ dv^2 + (A-B)x + Bv + K.$$

Предположим, что $l^2 = a-c+d > 0$. Тогда, очевидно, вблизи $t=0$ для решения $x \to \infty$, $v \to 0$, $t \to 0$ будет $P(x, v-x) > 0$ и $P(x, v-x) = x^2l^2\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, где $O\left(\frac{1}{x}\right)$ — малая порядка $\frac{1}{x}$ вблизи $t=0$.

Из первого уравнения (5.10) получим $\frac{dx}{dt} \approx -\frac{2xl}{t}$, $\ln x \approx -2l \ln t$, $x \approx t^{-2l} \to \infty$ при $t \to 0$. Из второго уравнения (5.10) вблизи $t=0$ найдем $\frac{dv}{dt} \approx 2xl \approx 2t^{-2l}l$, $v = \frac{2lt^{1-2l}}{1-2l} \to 0$ при $t \to 0$, если $1-2l > 0$.

Таким образом, в случае (5.27) и $l^2 = a-c+d > 0$ решение $x \to \infty$, $v \to 0$ при $t \to 0$ возможно. Мы не будем это рассматривать подробнее.

Случай (5.12) также может быть, а может и не быть в зависимости от вида $P(x, y)$.

Возможно ли решение (5.1)? Для системы (5.6) оно имеет вид

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } t \to 0, \tag{5.28}$$

при этом, как мы показали, должны выполняться равенства (5.4). Мы не будем рассматривать вопрос о существовании этого решения.

Возможно ли решение

$$x \to \infty, \quad y \to -\infty \text{ при } z \to z_0 > 1? \tag{5.29}$$

В этом случае в (2.2) будет

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{z_0}{1-z_0} = a < 0. \tag{5.30}$$

Дальнейшие рассуждения, проведенные относительно решения (2.1), не меняются, и мы получим решение (5.29) в виде (2.26) или (2.27).

§ 6. ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ $z=0$, $z=1$ И $z=\infty$

Введение. Двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса $w=\wp(z)$ определяется равенством[1] [3]

$$z = \int\limits_{\infty}^{w} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

где g_2 и g_3 — такие постоянные, что уравнение $4x^3-g_2x-g_3=0$ не имеет кратных корней.

В точках 0, ω_1, $2\omega_1$, $\ldots \to \infty$, $\omega_2 i$, $2\omega_2 i$, $\ldots \to \infty$, а также $m\omega_1 + in\omega_2$ (m и n целые) функция $\wp(z)$ имеет полюсы второго порядка с вычетами, равными нулю, а ω_1 и $\omega_2 i$ являются соответственно вещественным и мнимым периодами, где $i=\sqrt{-1}$.

Если имеем

$$z = \int\limits_{\infty}^{v} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}},$$

то

$$v = -\frac{a_2}{12} + \wp(z) \quad \text{с} \quad g_2 = \frac{a_2^2}{12} - a_1 \quad \text{и} \quad g_3 = \frac{a_1 a_2}{12} - \frac{a_2^3}{216} - a_0.$$

Рассмотрим теперь систему (*), где[2] пусть

$$P(x, y) = (\alpha x + \beta y)^3 + A(\alpha x + \beta y)^2 + B(\alpha x + \beta y) + a \tag{6.1}$$

с постоянными α, β, A, B и a.

---

[1] Иначе w представляется в виде $w=\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum\limits_{m_1,m_2}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$, $\omega = m_1\omega_1 + m_2 i\omega_2$, где m_1, m_2 целые и $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$.

[2] Это $P(x, y)$ является мажорантой для $P(x, y)$ в (1.1) и даже для полного полинома $P(x, y)$ третьего порядка.

Заметим, что в этом случае при заданных α и β равенство (2.28) (глава XI), гарантирующее наличие решения (2.27), выполнено лишь при одном или двух значениях z_1, т. е., вообще говоря, подвижные особые точки решений этой системы не будут полюсами. Этой системе соответствует система (1.5), где $u=\sqrt{P(x, y)}$ и

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3\alpha(\alpha x+\beta y)^2+2\alpha A(\alpha x+\beta y)+\alpha B,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3\beta(\alpha x+\beta y)^2+2\beta A(\alpha x+\beta y)+\beta B. \tag{6.2}$$

Следовательно,

$$\frac{du}{dz} = [3(\alpha x+\beta y)^2+2A(\alpha x+\beta y)+B]\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{1-z}\right). \tag{6.3}$$

Полагая $w=\alpha x+\beta y$, получим

$$\frac{dw}{dz} = \alpha\frac{dx}{dz}+\beta\frac{dy}{dz} = 2u\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{1-z}\right), \tag{6.4}$$

а (6.3) запишется в виде

$$\frac{du}{dz} = (3w^2+2Aw+B)\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{1-z}\right). \tag{6.5}$$

Отсюда получим

$$\frac{du}{dw} = \frac{3w^2+2Aw+B}{2u}, \tag{6.6}$$

$$u=\sqrt{w^3+Aw^2+Bw+C} \tag{6.7}$$

с произвольной постоянной C.

Подставляя это в (6.4), найдем [1]

$$\alpha\ln z-\beta\ln(1-z) = \int\limits_{\infty}^{w}\frac{dw}{2\sqrt{w^3+Aw^2+Bw+C}}, \tag{6.8}$$

откуда

$$w=\wp(\alpha\ln z-\beta\ln(1-z))-4A/12 \tag{6.9}$$

с соответствующими g_2 и g_3. Здесь $\wp(\zeta)$ — указанная выше эллиптическая двоякопериодическая функция, имеющая полюсы второго порядка в вещественных точках $\zeta=0$, ω_1, $2\omega_1$, ...

[1] Т. е. $w=\alpha x+\beta y$ исследуем вблизи точек z_k, где или x, или y вблизи ∞. Но, как видим из (6.12), и $x\to\infty$, и $y\to\infty$ при $z\to z_0$.

$\ldots \to \infty$, и мнимых $\zeta = \omega_2 i,\ 2\omega_2 i,\ \ldots \to i\infty$, а также $\zeta = m\omega_1 + in\omega_2$, где $i = \sqrt{-1}$, ω_1 — вещественный период, а $\omega_2 i$ — мнимый. Теперь из (1.5) на основании (6.7) получим

$$x(z) = 2\int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}}{z}\,dz + x_0,$$
$$y(z) = 2\int_{z_0}^{z} \frac{\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}}{1 - z}\,dz + y_0. \tag{6.10}$$

Согласно теореме 1.1, решение (6.10) будет решением уравнений (*) только в том случае, когда выполнено равенство (1.6) или здесь в соответствии с (6.7)

$$P(x_0,\ y_0) = (\alpha x_0 + \beta y_0)^3 + A(\alpha x_0 + \beta y_0)^2 + B(\alpha x_0 + \beta y_0) + a =$$
$$= (\alpha x_0 + \beta y_0)^3 + A(\alpha x_0 + \beta y_0)^2 + B(\alpha x_0 + \beta y_0) + C,$$

т. е. в (6.7), (6.8) и в (6.10) должно быть[1]

$$C = a. \tag{6.11}$$

Особые точки $\zeta_{k,m} = k\omega_1 + im\omega_2$ функции $w = w(\zeta)$: $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\ldots \to \infty$ порождают особые точки функций (6.10): $z_1, z_2, \ldots \to \infty$, $z_1, z_2, \ldots \to 0$ и $z_1, z_2, \ldots \to 1$, так как $\zeta = \alpha \ln z - \beta \ln(1 - z) \to$ $\to \infty$ при $z \to \infty$, $z \to 0$ и при $z \to 1$.

Но какого типа особыми точками будут z_k для функций (6.10)?

В окрестности точки ζ_k $\wp(\zeta)$ имеет вид

$$\wp(\zeta) = \frac{\varphi_k(\zeta - \zeta_k)}{(\zeta - \zeta_k)^2},$$

где $\varphi_k(\zeta - \zeta_k)$ — голоморфная в окрестности ζ_k, $\varphi_k(0) \neq 0$, а $\varphi_k'(0) = 0$. Так как $\alpha \ln z - \beta \ln(1 - z) - \alpha \ln z_k + \beta \ln(1 - z_k) =$ $= A_1(z - z_k) + A_2(z - z_k)^2 + \ldots$, где или $A_1 \neq 0$, или[2] $A_2 \neq 0$, то имеем или

$$w = \frac{\varphi_k[\alpha \ln z - \beta \ln(1 - z) - \alpha \ln z_k + \beta \ln(1 - z_k)]}{[\alpha \ln z - \beta \ln(1 - z) - \alpha \ln z_k + \beta \ln(1 - z_k)]^2} -$$
$$- \frac{A}{3} = \frac{\bar{\varphi}(z - z_k)}{(z - z_k)^2} - \frac{A}{3},$$

[1] Это, конечно, и сразу имеем из обозначения $u = \sqrt{P(x, y)}$ после (6.1).
[2] Так как если $A_1 = A_2 = 0$, то $\alpha = \beta = 0$.

или

$$w = \frac{\bar{\varphi}_k(z-z_k)}{(z-z_k)^4} - \frac{A}{3}.$$

Отсюда следует, что или

$$L = \sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C} = \frac{K_1(z-z_k)}{(z-z_k)^3},$$

или

$$L = \frac{K_1(z-z_k)}{(z-z_k)^6},$$

где $\bar{\varphi}_k(z-z_k)$ и $K_1(z-z_k)$ — голоморфные функции в окрестности точки z_k и $\bar{\varphi}_k(0) \neq 0$, $K_1(0) \neq 0$. Пользуясь этим, из (6.10) получим или

$$x(z) = \frac{K_2(z-z_k)}{(z-z_k)^2} + \bar{K}_2 \ln(z-z_k),$$

$$y(z) = \frac{K_3(z-z_k)}{(z-z_k)^2} + \bar{K}_3 \ln(z-z_k),$$

или

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{K_2(z-z_k)}{(z-z_k)^5} + \bar{K}_2 \ln(z-z_k), \\ y(z) &= \frac{K_3(z-z_k)}{(z-z_k)^5} + \bar{K}_3 \ln(z-z_k), \end{aligned} \tag{6.12}$$

где K_2, K_3 — функции такого же характера, как и K_1, а $\bar{K}_3$, $\bar{K}_2$ постоянные. Если $\bar{K}_2 = \bar{K}_3 = 0$, то z_k — полюс. Но легко видеть, что $\bar{K}_2$ и $\bar{K}_3$ рационально зависят от z_k, поэтому равенства $\bar{K}_2 = 0$, $\bar{K}_3 = 0$ выполнены лишь для конечного числа значений z_k. Отсюда следует, что подвижных полюсов будет только конечное число, остальные же z_k будут полярно-логарифмическими особыми точками. Это согласуется с тем результатом, который получен в § 2 после (2.29). Доказана

Теорема 6.1. *Существует такое решение уравнений* (*) *в случае (6.1), определенное равенствами (6.10), где $a=C$, которое имеет три системы подвижных особых точек z_k типа*

$$x(z) \to \infty, \quad y(z) \to \infty \quad \text{при } z \to z_k,$$

являющихся или полюсами, или полярно-логарифмическими особыми точками, для которых точки $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ бу-

дут точками сгущения: $z_1, z_2, \ldots \to 0$; $z_1, z_2, \ldots \to 1$; $z_1, z_2, \ldots \to \infty$. При этом полюсов будет конечное число.

Замечание к теореме 6.1. Если w_0 — корень уравнений

$$w_0^3 + Aw_0^2 + Bw_0 + a = 0,\ 3w_0^2 + 2Aw_0 + B = 0, \qquad (6.13)$$

т. е. если w_0 — кратный корень первого уравнения, то, во-первых, $w = w_0$, $u \equiv 0$ — решение уравнений (6.4), (6.5), а, во-вторых, равенство (6.8) будет иметь вид

$$C + \alpha \ln z - \beta \ln (1 - z) = \int\limits_{\infty}^{w} \frac{dw}{2\sqrt{(w - w_0)^2 (w - w_1)}}, \qquad (6.13_1)$$

где w_1 — третий корень уравнения

$$w^3 + Aw^2 + Bw + a = 0,$$

а C — произвольная постоянная (мы опустили ее в (6.8)). Теперь функция $w = \varphi[C + \alpha \ln z - \beta \ln (1 - z)]$ не будет эллиптической и примет вид

$$\sqrt{w - w_1} = \sqrt{w_0 - w_1}\,\frac{(1-z)^{2\beta\sqrt{w_0 - w_1}} + Cz^{2\alpha\sqrt{w_0 - w_1}}}{(1-z)^{2\beta\sqrt{w_0 - w_1}} - Cz^{2\alpha\sqrt{w_0 - w_1}}}. \qquad (6.14)$$

Если $P(x, y)$ задана равенством (6.1) и равенства (6.13) выполнены, то имеем множество (x_0, y_0), определенное равенством $w_0 = \alpha x_0 + \beta y_0$, такое, что

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = (3w_0^2 + 2Aw_0 + B)\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = (3w_0^2 + 2Aw_0 + B)\beta = 0.$$

Как видно из (6.14), здесь нет особых точек, сгущающихся к $z = 0$, или к $z = 1$, или к $z = \infty$.

Пусть $w_0 = w_1$, т. е. w_0 — трехкратный корень уравнения (6.13):

$$w^3 + Aw^2 + Bw + a = (w - w_0)^3.$$

Тогда вместо (6.13_1) будет

$$C + \alpha \ln z - \beta \ln (1 - z) = -(w - w_0)^{-1/2}$$

и

$$w - w_0 = \frac{1}{[C + \alpha \ln z - \beta \ln (1 - z)]^2}. \qquad (6.13_2)$$

Отсюда видим, что при $w \to w_0$ будет или $z \to \infty$, или $z \to 1$, или $z \to 0$.

Из (6.10) получим

$$x = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{[C+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)]^3 z},$$

$$y = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{[C+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)]^3(1-z)}. \tag{6.13$_3$}$$

В частности, $w_0=\alpha x+\beta y=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, если в (6.1) $P(x, y)=w^3$. Интегралы (6.13$_3$) существуют и при $z\to 0$, и при $z\to 1$, и при $z\to\infty$, поэтому при $z\to 0$ или $z\to 1$, или $z\to\infty$ имеем $x\to x_0$, $y\to y_0$ и, согласно теоремам § 3, $P(x_0, y_0)=(\alpha x_0+\beta y_0)^3=0$, что видим и из (6.13$_2$).

Решение (6.13$_3$) не будет голоморфным в окрестности точек $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$, и предельные значения x_0, y_0, определяемые равенством $\alpha x+\beta y=w_0$, будут для $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ различными. Очевидно, решение (6.13$_3$) имеет подвижный полюс z_1, определяемый при заданном C равенством $C+\alpha\ln z_1-\beta\ln(1-z_1)=0$, так как в окрестности z_1 имеем или

$$C+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)=A_1(z-z_1)+\ldots,$$

или

$$C+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)=A_2(z-z_1)^2+\ldots$$

Если w_0 является корнем уравнения

$$P(x_0, y_0)=w_0^3+Aw_0^2+Bw_0+a=0,$$

но $3w_0^2+2Aw_0+B\neq 0$, т. е.

$$\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0, \qquad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0,$$

то, согласно § 3, нет решений (3.1) и (3.4), но, как видим, здесь в примере (6.1) появляются особые точки $z_1, z_2, \ldots\to 0$, $z_1, z_2, \ldots\to 1$ и $z_1, z_2, \ldots\to\infty$. Всегда ли будет так для уравнений (*), когда $P(x, y)$ — полином 3-й степени?

Рассмотрим еще в случае (6.14) возможное поведение $x(z)$ и $y(z)$ при $z\to 0$, $z\to 1$ и $z\to\infty$.

Пусть I: $R(2\alpha\sqrt{w_0-w_1})>0$ (R—реальная часть). Из (6.14) видим, что в этом случае[1]) при $z\to 0$ будет $\sqrt{w-w_1}\to$

[1]) Если $R(2\alpha\sqrt{w_0-w_1})<0$, то при $z\to\bar z>0$ будет $\sqrt{w-w_1}\to\infty$, если $C>0$, или $\sqrt{w-w_1}\to 0$, если $C<0$, и в точке $\bar z$ решение заканчивается, так как при $z>\bar z$ будет $\sqrt{w-w_1}<0$.

$\to \sqrt{w_0 - w_1}$, т. е. $w \to w_0$. Это означает, что существует решение $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 0$, хотя здесь

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

(см. подстрочное примечание к формуле (3.13)). Это решение будет и голоморфным в окрестности точки $z = 0$, если $2\alpha \sqrt{w_0 - w_1} > 0$ целое.

Пусть II: $R(2\beta\sqrt{w_0 - w_1}) < 0$. Тогда $\sqrt{w - w_1} = \sqrt{w_0 - w_1} \times$ $\times \dfrac{1 + Cz^{2\alpha\sqrt{w_0-w_1}}(1-z)^{-2\beta\sqrt{w_0-w_1}}}{1 - Cz^{2\alpha\sqrt{w_0-w_1}}(1-z)^{-2\beta\sqrt{w_0-w_1}}} \to \sqrt{w_0 - w_1}$ при $z \to 1$, откуда следует, что $w \to w_0$, т. е. $x \to x_0$ и $y \to y_0$ при $z \to 1$.

Это решение будет голоморфным в окрестности точки $z = 1$, если $2\beta\sqrt{w_0 - w_1} < 0$ целое.

Пусть III: $R(2(\alpha - \beta)\sqrt{w_0 - w_1}) < 0$. Тогда $\sqrt{w - w_1} =$

$$= \sqrt{w_0 - w_1} \frac{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^{2\beta\sqrt{w_0-w_1}} + Cz^{2(\alpha-\beta)\sqrt{w_0-w_1}}}{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^{2\beta\sqrt{w_0-w_1}} - Cz^{2(\alpha-\beta)\sqrt{w_0-w_1}}} \to \sqrt{w_0 - w_1}$$

при $|z| \to \infty$, откуда следует, что $w \to w_0$ при $|z| \to \infty$. Это решение в окрестности $z = \infty$ голоморфное, если $2(\alpha-\beta)\sqrt{w_0 - w_1} < 0$ и целое число. Таким образом, возможны случаи, когда $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 0$ и при $z \to 1$, и при $z \to \infty$ и эти решения (или решение) голоморфны в окрестности этих точек $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$.

Следовательно, в общем случае если в системе (*) $P(x, y)$ задано в виде (6.1), то эта система имеет решение с бесконечным числом подвижных особых точек, сгущающихся к $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$, и поведение этого решения в окрестности этих особых точек связано с эллиптической функцией.

Мы рассмотрим теперь это несколько иным способом. Пусть

$$u^2 = (\alpha x + \beta y)^3 + A(\alpha x + \beta y)^2 + B(\alpha x + \beta y) + b =$$

$$= x^3\left(\alpha + \beta\frac{y}{x}\right)^3 + Ax^2\left(\alpha + \beta\frac{y}{x}\right)^2 + Bx\left(\alpha + \beta\frac{y}{x}\right) + b.$$

Если z_0 — подвижная особая точка решения, то, как мы видели, $\dfrac{y}{x} \to a = \dfrac{z_0}{1 - z_0}$ при $z \to z_0$, поэтому при z, близких к z_0, будет (из (*))

$$u^2 = x^3(\alpha + \beta a)^3 + Ax^2(\alpha + \beta a)^2 + Bx(\alpha + \beta a) + b$$

и

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z}=$$

$$=\int\limits_{\infty}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{x^3\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)^3+Ax^2\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)^2+Bx\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)+b}}. \tag{6.15}$$

Поведение $x(z)$ вблизи точки z_0 можно изучить так. Напишем

$$\ln\frac{z}{z_0}=\int\limits_{\infty}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{x^3(\alpha+\beta a)^3+Ax^2(\alpha+\beta a)^2+Bx(\alpha+\beta a)+b}}+$$

$$+\int\limits_{\infty}^{x}\left[\frac{1}{2\sqrt{x^3\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)^3+Ax^2\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)^2+Bx\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)+b}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{x^3(\alpha+\beta a)^3+Ax^2(\alpha+\beta a)^2+Bx(\alpha+\beta a)+b}}\right]dx.$$

Оценим здесь второй интеграл, под знаком которого стоит величина

$$L=\left\{x^3\left[\left(\alpha+\beta\frac{y}{x}\right)^3-(\alpha+\beta a)^3\right]+\right.$$

$$+Ax^2\left[\left(\alpha+\beta\frac{y}{x}\right)^2-(\alpha+\beta a)^2\right]+Bx\left[\left(\alpha+\beta\frac{y}{x}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-(\alpha+\beta a)\right]\right\}\left\{\sqrt{x^3\left(\alpha+\beta\frac{y}{x}\right)^3+\ldots+b}\times\right.$$

$$\times\sqrt{x^3(\alpha+\beta a)^3+\ldots+b}\left[\sqrt{x^3\left(\alpha+\beta\frac{y}{x}\right)+\ldots+b}+\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{x^3(\alpha+\beta a)^3+\ldots+b}\right]\right\}^{-1}.$$

Имеем [1] $\left(\alpha+\beta\dfrac{y}{x}\right)-(\alpha+\beta a)=\beta\left(\dfrac{y}{x}-a\right)=\beta\left(\dfrac{y}{x}-\right.$ $\left.-\dfrac{z_0}{1-z_0}\right)\approx px^{-1/2}$, где p постоянная, поэтому вблизи z_0

[1] В силу формул (2.26), (2.23) и (2.18): $\dfrac{y}{x}-a=w=px^{-1/2}$.

$$L \approx px^{-2} \text{ и } \int_{\infty}^{x} L dx = -px^{-1}.$$

Можно написать

$$O(x^{-1}) + \ln \frac{z}{z_0} =$$

$$= \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{x^3(\alpha+\beta a)^3 + Ax^2(\alpha+\beta a)^2 + Bx(\alpha+\beta a) + b}}, \quad (6.16)$$

где $O(\Delta)$ — малая порядка Δ при малом Δ.

Будем предполагать $\alpha + \beta a \neq 0$. Из (6.16) имеем (см. введение)

$$x = \wp\left[\left(\ln\frac{z}{z_0} + O(x^{-1})\right)(\alpha+\beta a)^{3/2}\right] - \frac{A}{3}(\alpha+\beta a)^{-1}. \quad (6.17)$$

Отметим еще, что, согласно (2.18), (2.23) и (2.27), вблизи z_0

$$\ln\frac{z}{z_0} = \ln\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right) \approx \frac{z-z_0}{z_0} = \frac{t}{z_0} \approx lx^{-1/2},$$

где l — постоянная. Отсюда следует, что при больших $|x|$ (т. е. вблизи z_0) величина $O(x^{-1})$ — малая более высокого порядка, чем $\ln(z/z_0)$. Из (6.17) видим, что $x(z)$ вблизи z_0 в некотором смысле близка к функции

$$x = \wp\left[\ln\frac{z}{z_0}(\alpha+\beta a)^{3/2}\right] - \frac{A}{3}(\alpha+\beta a)^{-1}, \quad (6.18)$$

где $\wp(\xi)$ — эллиптическая функция.

Впрочем, как мы показали, если выполнены равенства (6.13), то из равенства (6.16) не получим (6.17) с эллиптической функцией $\wp(\xi)$, и в этом случае функция (6.17) не будет иметь бесконечное множество особых точек, сгущающихся к точкам $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$.

Изучим теперь этим методом такую систему (*), в которой

$$P(x, y) = P_3(x, y) + P_2(x, y) + P_1(x, y) + b,$$

где $P_k(x, y)$ — однородный полином степени k.

Можно написать

$$P(x, y) = x^3 P_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^2 P_2\left(1, \frac{y}{x}\right) +$$
$$+ P_1\left(1, \frac{y}{x}\right) x + b \quad (6.19)$$

и на основании первого уравнения (*)

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z} =$$

$$= \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{x^3P_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^2P_2\left(1, \frac{y}{x}\right) + xP_1\left(1, \frac{y}{x}\right) + b}}, \tag{6.20}$$

предполагая $P_3(1, a) \neq 0$, где $a = \frac{z_0}{1-z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{y}{x}$. Так же, как и ранее, получим

$$\ln \frac{z}{z_0} = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{x^3P_3(1, a) + x^2P_2(1, a) + xP_1(1, a) + b}} +$$

$$+ \int_{\infty}^{x} \frac{L}{2} dx,$$

где

$$L = \left\{x^3\left[P_3\left(1, \frac{y}{x}\right) - P_3(1, a)\right] + \cdots +\right.$$

$$\left. + x\left[P_1\left(1, \frac{y}{x}\right) - P_1(1, a)\right]\right\}\left\{\sqrt{x^3P_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + \cdots + b} \times\right.$$

$$\times \sqrt{x^3P_3(1, a) + \cdots + b}\left[\sqrt{x^3P_3\left(1, \frac{y}{x}\right) + \cdots + b} +\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{x^3P_3(1, a) + \cdots + b}\right]\right\}^{-1}.$$

Так как $\frac{y}{x} - a = \frac{y}{x} - \frac{z_0}{1-z_0} \approx px^{-1/2}$, то снова

$$L \approx px^{-2} \text{ и } O(x^{-1}) + \ln \frac{z}{z_0} =$$

$$= \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{x^3P_3(1, a) + x^2P_2(1, a) + xP_1(1, a) + b}}$$

или

$$x = \wp\left[\left(\ln\frac{z}{z_0} + O(x^{-1})\right)\sqrt{P_3(1,\ a)}\right] - \frac{1}{3}P_2(1, a)P_3^{-1}(1,\ a), \tag{6.21}$$

если полином

$$x^3P_3(1,\ a) + x^2P_2(1,\ a) + xP_1(1,\ a) + b$$

не имеет кратного корня.

В случае (1.1) равенство (6.21) имеем, если уравнения

$$Q = x^3a(1 + a) + x^2(a_{20} + 2a_{11}a + a_{02}a^2) +$$
$$+ x(a_1 + a_2a) + a_0 = 0,$$
$$Q' = 2x^2a(a + 1) + 2x(a_{20} + 2a_{11}a + a_{02}a^2) + (a_1 + a_2a) = 0$$

не имеют общего корня, что легко выяснить.

Этим мы нашли в случае (6.19) некоторое асимптотическое представление $x(z)$ в окрестности подвижной особой точки z_0 при помощи эллиптической функции $\wp$ (ξ), но мы не знаем, имеет ли $x(z)$ бесконечное число подвижных особых точек, сгущающихся к $z=0$, к $z=1$ и к $z=\infty$.

Если возьмем $P(x, y)$ в виде (1.1), то, как мы видели, после формулы (2.29) подвижными особыми точками решений системы (*) будут только полюсы, но мы не знаем, существует ли решение с бесконечным числом полюсов, сгущающихся к $z=0$ или к $z=1$, или к $z=\infty$, хотя в окрестности особых точек z_0 решение и представимо при помощи эллиптической функции в виде (6.21). На этот вопрос мы ответим позднее.

§ 7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ (*)

Рассмотрим теперь систему (*) в том случае, когда $P(x, y)$ дано формулой (1.1), а a_{kl}, a_l — ряды от параметров $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)$. Таким образом, система (1.5) имеет вид

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2u}{z},\quad \frac{dy}{dz} = \frac{2u}{1-z},\quad u = \sqrt{P(x,\ y)}, \tag{7.1}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{2xy + y^2 + 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_1}{z} +$$
$$+ \frac{2xy + x^2 + 2a_{02}y + 2a_{11}x + a_2}{1-z}, \tag{7.2}$$

$$P(x,\ y) = xy(x + y) + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy +$$
$$+ a_{02}y^2 + a_1x + a_2y + a_0.$$

Предположим, что

$$2a_{\nu l} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{\nu l}^{(k)}(\xi), \quad a_l = \sum_{k=4}^{\infty} a_l^{(k)}(\xi),$$

$$a_0 = \sum_{k=6}^{\infty} a_0^k(\xi), \tag{7.3}$$

где $a_{\nu l}^{(k)}(\xi)$, $a_l^k(\xi)$ — однородные полиномы от параметров ξ k-й степени, и ряды (7.3) сходятся в окрестности нулевых значений параметров ξ.

Будем искать решение уравнений (7.1), (7.2) в виде

$$x = x_2(\xi) + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z), \quad y = y_2(\xi) + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z),$$
$$u = u_3(\xi) + \sum_{k=4}^{\infty} u_k(\xi, z), \tag{7.4}$$

где $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$ и $u_3(\xi)$ — произвольно выбранные однородные полиномы соответственно 2-й и 3-й степени от элементов ξ, а $x_k(\xi, z)$, $y_k(\xi, z)$, $u_k(\xi, z)$ — однородные полиномы k-й степени относительно элементов ξ с коэффициентами, зависящими от z.

Если $\xi_1, \ldots, \xi_l = 0$, то уравнения (7.1), (7.2) переходят в

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2u}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{2u}{1-z}, \quad u = \sqrt{xy(x+y)}, \tag{7.1$_1$}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{2xy + y^2}{z} + \frac{2xy + x^2}{1-z}, \tag{7.2$_1$}$$

а (7.4) в

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0, \quad u \equiv 0. \tag{7.4$_1$}$$

На основании (7.3) и (7.4) числители правой части (7.2) можно записать так:

$$2xy + y^2 + 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_1 = 2x_2y_2 +$$
$$+ 2\sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} x_k y_{m-k} + y_2^2 + \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} y_k y_{m-k} +$$
$$+ a_{20}^{(2)}(\xi)x_2 + \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} a_{20}^{(k)}(\xi)x_{m-k} + a_{11}^{(2)}(\xi)y_2 +$$
$$+ \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} a_{11}^{(k)}(\xi)y_{m-k} + \sum_{k=4}^{\infty} a_1^{(k)}(\xi), \tag{7.5}$$

$$2xy + x^2 + 2a_{02}y + 2a_{11}x + a_2 = 2x_2y_2 +$$

$$+ 2\sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} x_k y_{m-k} + x_2^2 + \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} x_k x_{m-k} +$$

$$+ a_{02}^{(2)}(\xi)\, y_2 + \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} a_{02}^{(k)}(\xi)\, y_{m-k} + a_{11}^{(2)}(\xi)\, x_2 +$$

$$+ \sum_{m=5}^{\infty}\sum_{k=2}^{m-2} a_{11}^{(k)}(\xi)\, x_{m-k} + \sum_{k=4}^{\infty} a_2^{(k)}(\xi).$$

Подставляя (7.4) в (7.1) и (7.2) и сравнивая полиномы одной степени относительно ξ справа и слева, получим

$$\frac{dx_3}{dz} = \frac{2u_3}{z}, \quad \frac{dy_3}{dz} = \frac{2u_3}{1-z}, \tag{7.6}$$

$$\frac{du_k}{dz} = \frac{\bar{u}_k(\xi, z)}{z} + \frac{\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)}{1-z}, \quad k = 4, 5, \ldots, \tag{7.7}$$

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{2u_k}{z}, \quad \frac{dy_k}{dz} = \frac{2u_k}{1-z}. \tag{7.8}$$

Здесь $\bar{u}_k(\xi, z)$, $\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)$ — однородные полиномы от ξ, составленные на основании формул (7.5), и являются полиномами от x_l, y_l, u_l, $l<k$. Из этих формул по-разному можно искать x_k, y_k, u_k.

Рассмотрим решение уравнений (7.1), (7.2) с начальными значениями

$$x(z_0) = 0, \quad y(z_0) = 0, \quad u(z_0) = 0, \quad z_0 \neq 0,\ 1. \tag{7.4$_2$}$$

Согласно теореме Пуанкаре, ввиду решения (7.4$_1$) предельной системы (7.1$_1$), (7.2$_1$) это решение будет аналитическим в любой односвязной области $D(z, z_0)$, содержащей точку z_0 и не содержащей точек $z=0$, $z=1$ при достаточно малых $|\xi|$. Это решение получим в виде (7.4), полагая $x_2(\xi) = y_2(\xi) = u_2(\xi) = 0$ и $x_k(\xi, z_0) = y_k(\xi, z_0) = u_k(\xi, z_0) = 0$.

Но это еще не решение системы (*) в том случае, когда $P(x, y)$ дано (1.1), так как нет равенства $u = \sqrt{P(x, y)}$, если $a_0 \neq 0$. Найдем коэффициенты рядов (7.4) в общем случае (не предполагая (7.4$_2$)). Например, их можно искать по формулам (из (7.6), (7.7), (7.8))

$$u_k = \int_{z_0}^{z} \frac{\bar{u}_k(\xi, z)}{z}\, dz + \int_{z_0}^{z} \frac{\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)}{1-z}\, dz, \tag{7.9}$$

$$x_k = 2\int_{z_0}^{z} \frac{u_k}{z}\, dz, \quad y_k = 2\int_{z_0}^{z} \frac{u_k}{1-z}\, dz, \tag{7.10}$$

$$k = 3,\ 4,\ \ldots,\quad z \neq 0,\ 1.$$

В этом случае будем иметь

$$x(z_0) = x_2(\xi), \quad y(z_0) = y_2(\xi), \quad u(z_0) = u_3(\xi). \tag{7.11}$$

Но при этом должно быть (теорема (1.1))

$$u(z_0) = u_3(\xi) = \sqrt{P(x_2,\ y_2)}, \tag{7.12}$$

если желаем, чтобы x и y, данные формулами (7.4), доставляли решение уравнений (7.1). Отсюда

$$u_3^2(\xi) = x_2(\xi)\, y_2(\xi)\, [x_2(\xi) + y_2(\xi)] + a_{20}(\xi)\, x_2^2(\xi) +$$
$$+ 2a_{11}(\xi)\, x_2(\xi)\, y_2(\xi) + a_{02}(\xi)\, y_2^2(\xi) + a_1(\xi)\, x_2(\xi) +$$
$$+ a_2(\xi)\, y_2(\xi) + a_0(\xi).$$

Не всегда можно указать такие однородные полиномы $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$ и $u_3(\xi)$, что это равенство будет выполнено, если $a_{kl}(\xi)$, $a_l(\xi)$ и $a_0(\xi)$ заданы, поэтому не всегда можно найти решение вида (7.4) уравнений (7.1), определяя x_k, y_k по формулам (7.10). Если же такие $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$ и $u_3(\xi)$ существуют, то формальное решение вида (7.4) найти можно, определяя u_k, x_k и y_k по формулам (7.9) и (7.10).

Такое формальное решение будет с начальными условиями $x(z_0) = x_2(\xi)$, $y(z_0) = y_2(\xi)$ и $u(z_0) = u_3(\xi)$. Однако эти ряды (7.4) не будут рядами Пикара или Коши, или Пуанкаре (так как $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$, $u_3(\xi)$ не являются решением уравнений (7.1_1), (7.2_1)).

Можно, конечно, решение с указанными начальными значениями и при указанном условии (7.12) при любых ξ, при которых ряды (7.3) сходятся, получить в виде сходящихся рядов Пикара в некоторой области $|z - z_0| < a$, так как при любых указанных ξ $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$ и $u_3(\xi)$, а также все приближения Пикара не выйдут из области определения правых частей уравнений (7.1), (7.2), которые являются полиномами. Но эти ряды не будут вида (7.4) (по однородным полиномам $u_k(\xi,\ z)$ k-й степени).

Можно было бы построить формальное решение уравнений (7.1), (7.2) с начальными условиями $x(z_0) = x_2(\xi)$, $y(z_0) = y_2(\xi)$, $u(z_0) = u_3(\xi)$, полагая

$$x = x_2(\xi, z) + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z), \quad y = y_2(\xi, z) + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z),$$
$$u = u_3(\xi, z) + \sum_{k=4}^{\infty} u_k(\xi, z), \tag{7.12$_1$}$$

где $x_2(\xi, z)$, $y_2(\xi, z)$ и $u_3(\xi, z)$ — решение предельной системы (7.1$_1$), (7.2$_1$) в области $|z - z_0| \leqslant R$ с начальными условиями $x_2(\xi, z_0) = x_2(\xi)$, $y_2(\xi, z_0) = y_2(\xi)$, $u_3(\xi, z_0) = u_3(\xi)$, а $x_k(\xi, z)$, $y_k(\xi, z)$ при $k > 2$ и $u_k(\xi, z)$ при $k > 3$ обладают свойствами $x_k(\xi, z_0) = y_k(\xi, z_0) = 0$, $u_k(\xi, z_0) = 0$.

Такие ряды сходятся в области $|z - z_0| \leqslant R$ при достаточно малых $|\xi|$. Но это не ряды Пикара[1] и не ряды Пуанкаре[2], хотя могут быть получены так же, как ряды Пуанкаре (введением новых переменных y_k (§ 9, 7)), и могут быть преобразованы в ряды Пуанкаре, в которых решением предельной сисмы будет $x_2(0, z)$, $y_2(0, z)$, $u_3(0, z)$. Можно взять в (7.12$_1$) $x_2(\xi, z) = x_2(0, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_2^{(k)}(z)\xi^k$, $\overline{x}_2^{(k)}(z_0) = 0$ и соединить $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_2^{(k)}(z)\xi^k$ с $\sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)$. Тогда $x_2(0, z_0)$ будет начальным условием решения полной системы, представленного в форме Пуанкаре.

Таким образом, пусть (7.12) выполнено. Тогда из (7.7) будем иметь

$$u_4 = \dot{\bar{u}}_4(\xi) \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z} + \bar{\bar{u}}_4(\xi) \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{1 - z},$$

а из (7.8)

$$x_4 = 2 \int_{z_0}^{z} \frac{u_4}{z}\, dz, \quad y_4 = 2 \int_{z_0}^{z} \frac{u_4}{1 - z}\, dz.$$

Определяя далее из (7.7) и (7.8) u_k, x_k, y_k по формулам (7.9), (7.10):

---

[1] Так как не получены по формулам Пикара $y = y_0 + \int_{z_0}^{z} f(y, z)\, dz$.

[2] Так как $x_2(\xi, z)$, $y_2(\xi, z)$ и $u_3(\xi, z)$ — решение предельной системы (т. е. при $\xi = 0$), но содержат ξ.

$$u_k = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\bar{u}_k(\xi, z)}{z} dz + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)}{1-z} dz,$$
$$x_k = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{u_k}{z} dz, \quad y_k = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{u_k}{1-z} dz, \tag{7.13}$$

получим формальное решение. Пусть $a_0 = 0$ и полагаем

$$x_2(\xi) = y_2(\xi) = u_3(\xi) = 0. \tag{7.14}$$

Тогда, согласно теореме Пуанкаре, получаем решение (7.4_2) в виде сходящихся рядов (7.4) при достаточно малом $|\xi|$. Здесь нулевая окрестность $|\xi|$, в которой сходятся ряды (7.4), определяется выбранной односвязной областью $D(z, z_0)$, где изменяется z в формулах (7.13). Но можно (в общем случае) x_k, y_k, u_k находить и так:

$$x_3 = 2u_3 \ln z, \quad y_3 = -2u_3 \ln(1-z), \tag{7.15}$$

$$u_k = \int\limits_{1}^{z} \frac{\bar{u}_k(\xi, z)}{z} dz + \int\limits_{0}^{z} \frac{\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)}{1-z} dz, \tag{7.16}$$

$$x_k = 2\int\limits_{1}^{z} \frac{u_k(\xi, z)}{z} dz, \quad y_k = 2\int\limits_{0}^{z} \frac{u_k(\xi, z)}{1-z} dz, \quad k \geqslant 4. \tag{7.17}$$

Это доставляет формальное решение $x(1) = x_2(\xi)$ (так как $x_k(1) = 0$), $y(0) = y_2(\xi)$ (в силу $y_k(0) = 0$).

Возникает вопрос[1] о сходимости рядов (7.4) при таком определении x_k, y_k. Но допустим, что сходимость этих рядов доказана. Тогда не ясно все-таки, получено ли этим решение системы (*), так как не всякое решение системы (1.5) доставляет решение уравнений (*).

Чтобы сходящиеся ряды (7.4) доставляли решение уравнений (*), необходимо (и достаточно) выполнение равенства (7.12)

$$u^2(\xi, z) = P(x(\xi, z), y(\xi, z))$$

хотя бы при одном[2] значении z.

И вообще если ряды (7.4) сходятся и доставляют решение системы (*), то что является характерным для такого представления решения? К этому мы вернемся позднее.

---

[1] Этот вопрос остается без ответа.

[2] См. теорему 1.1.

В обоих случаях, т. е. в (7.10) и (7.16), $x_k(\xi, z)$ и $y_k(\xi, z)$ будут однородными полиномами от элементов ξ.

Рассмотрим общий метод определения рядов (7.4) на основе (7.9) и (7.10), не предполагая $a_0=0$ и (7.14), но при условии (7.12). Из (7.6) получим

$$x_3 = 2u_3(\ln z - \ln z_0), \quad y_3 = 2u_3[\ln(1-z_0) - \ln(1-z)]. \tag{7.18}$$

На основании (7.5)

$$\bar{u}_4 = 2x_2(\xi)\, y_2(\xi) + y_2^2(\xi) + a_{20}^{(2)}(\xi)\, x_2(\xi) + a_{11}^{(2)}(\xi)\, y_2(\xi) + a_1^{(4)}(\xi),$$

$$\bar{\bar{u}}_4 = 2x_2(\xi)\, y_2(\xi) + x_2^2(\xi) + a_{02}^{(2)}(\xi)\, y_2(\xi) + a_{11}^{(2)}(\xi)\, x_2(\xi) + a_2^{(4)}(\xi),$$

а из (7.7) при $0 < z_0 < z < 1$

$$u_4(\xi, z) = \bar{u}_4(\xi)(\ln z - \ln z_0) + \bar{\bar{u}}_4(\xi)[\ln(1-z_0) - \ln(1-z)], \tag{7.19}$$

$$x_4 = 2\bar{u}_4(\xi)\int_{z_0}^{z} \frac{\ln z - \ln z_0}{z}\, dz + 2\bar{\bar{u}}_4(\xi)\int_{z_0}^{z} \frac{\ln(1-z_0) - \ln(1-z)}{z}\, dz,$$

$$y_4 = 2\bar{u}_4(\xi)\int_{z_0}^{z} \frac{\ln z - \ln z_0}{1-z}\, dz +$$

$$+ 2\bar{\bar{u}}_4(\xi)\int_{z_0}^{z} \frac{\ln(1-z_0) - \ln(1-z)}{1-z}\, dz. \tag{7.20}$$

Если в рядах (7.3) все слагаемые положительные, то и в x_3, y_3, x_4, y_4, x_k, y_k, u_k, $k \geqslant 5$, все слагаемые будут положительные.

Будут ли ряды (7.4) сходящимися?

Чтобы решить этот вопрос, рассмотрим наряду с системой (7.1), (7.2) мажорантную систему.

Для рядов $2a_{\nu l}$ в (7.3) возьмем общую мажоранту[1])

$$A(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} a^{(k)}(\xi), \text{ а для } a_l$$

$$B(\xi) = \sum_{k=4}^{\infty} a^{(k)}(\xi), \tag{7.21}$$

---

[1]) Можно положить $A(\xi) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a^k (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^k$, $B(\xi) = \sum\limits_{k=4}^{\infty} a^k (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^k$ или $A(\xi) = a(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2$, $B(\xi) = a(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^4$.

где $a^{(k)}(\xi)$ — однородные полиномы k-й степени от элементов ξ с положительными коэффициентами. Общую мажоранту для числителей в (7.2) возьмем в виде

$$(x+y)^2 + A(\xi)(x+y) + B(\xi), \tag{7.22}$$

так что мажорантное уравнение для уравнения (7.2) запишем в виде

$$\frac{du}{dz} = [(x+y)^2 + A(\xi)(x+y) + B(\xi)]\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right). \tag{7.23}$$

Для уравнений (7.1) мажоранту возьмем в виде $\left(\text{для } \frac{dx}{dz}\right.$ и для $\left.\frac{dy}{dz}\right)$

$$\frac{d(x+y)}{dz} = 2u\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right). \tag{7.24}$$

Теперь уравнения (7.23) и (7.24) запишем в виде

$$\frac{du}{dz} = [v^2 + A(\xi)v + B(\xi)]\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right), \tag{7.25}$$

$$\frac{dv}{dz} = 2u\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right), \quad v = x + y. \tag{7.26}$$

Здесь будем и параметры ξ считать положительными. Из (7.25) и (7.26) получим

$$\frac{du}{dv} = \frac{v^2 + A(\xi)v + B(\xi)}{2u},$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2v^3 + 3A(\xi)v^2 + 6B(\xi)v + C}, \tag{7.27}$$

где C — произвольная постоянная (относительно u и v). В соответствии с (7.12) выберем $C(\xi)$ так, чтобы мажорантное $u_3(\xi)$ (т. е. с положительными коэффициентами) удовлетворяло равенству (7.27):

$$u_3(\xi) = \frac{1}{\sqrt{6}}\{2[x_2(\xi) + y_2(\xi)]^3 + 3A(\xi)[x_2(\xi) + y_2(\xi)]^2 + B(\xi)[x_2(\xi) + y_2(\xi)] + C(\xi)\}^{1/2}. \tag{7.27$_1$}$$

По заданным $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$, $u_3(\xi)$, $A(\xi)$, $B(\xi)$ такое $C(\xi)$ легко находится.

Из (7.26) и (7.27)

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{2v^3 + 3A(\xi)\,v^2 + 6B(\xi)\,v + C(\xi)}}, \tag{7.28}$$

$$v_0 = x_2(\xi) + y_2(\xi).$$

Согласно (7.27_1),

$$\sqrt{6}\,u_3(\xi) = \sqrt{2v_0^3 + 3A(\xi)\,v_0^2 + 6B(\xi)\,v_0 + C(\xi)} \neq 0.$$

Запишем

$$2v^3 + 3A(\xi)\,v^2 + 6B(\xi)\,v + C(\xi) = 6u_3^2(\xi) + v_1(\xi)(v - v_0) + \\ + v_2(\xi)(v - v_0)^2 + v_3(\xi)(v - v_0)^3, \tag{7.29}$$

где

$$v_1(\xi) = 6v_0^2 + 6A(\xi)\,v_0 + 6B(\xi) = (\xi^4),$$

$$v_2(\xi) = \frac{1}{2}\,[12v_0 + 6A(\xi)] = (\xi^2), \quad v_3(\xi) = 2.$$

Здесь (ξ^k) означает, что при малом ξ это величина порядка ξ^k.

Можно еще написать и так:

$$2v^3 + 3A(\xi)\,v^2 + 6B(\xi)\,v + C(\xi) =$$

$$= 6u_3^2(\xi)\left[1 + \frac{v_0 v_1(\xi)}{6u_3^2(\xi)}\left(\frac{v - v_0}{v_0}\right) + \frac{v_0^2\,v_2(\xi)}{6u_3^2(\xi)}\left(\frac{v - v_0}{v_0}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{v_0^3 v_3(\xi)}{6u_3^2(\xi)}\left(\frac{v - v_0}{v_0}\right)^3\right].$$

Так как $v_0 = (\xi^2)$, то, очевидно, коэффициенты при всех степенях $\dfrac{v - v_0}{v_0}$ будут при малых ξ и, например, пропорциональных какому-нибудь одному ξ ограничены и представимы в виде рядов [1] по степеням ξ.

При малых $|v - v_0|$ имеем

$$\sqrt{2v^3 + 3A(\xi)\,v^2 + 6B(\xi)\,v + C(\xi)} =$$

$$= \sqrt{6}\,u_3(\xi)\left[1 + \frac{v_0 v_1(\xi)}{6u_3^2(\xi)}\left(\frac{v - v_0}{v_0}\right) + \ldots\right.$$

---

[1] Далее мы увидим, что это будет и в общем случае.

$$\dots + \frac{v_0^3 v_3(\xi)}{6u_3^2(\xi)}\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^3\Bigg]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{6}\,u_3(\xi)\left[1 + \alpha_1(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + \alpha_2(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 + \dots\right],$$

и этот ряд сходится при малых $|v-v_0|$, а коэффициенты $\alpha_1(\xi)$, $\alpha_2(\xi)$, ... ограничены при малых $|\xi|$.

Очевидно, при малых $|v-v_0|$ имеем еще [1]

$$\left[1 + \alpha_1(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + \alpha_2(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 + \dots\right]^{-1} =$$

$$= 1 + \beta_1(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + \beta_2(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 + \dots,$$

где $\beta_k(\xi)$ при малых $|\xi|$ ограничены.

Это позволяет записать (7.28) в виде

$$2u_3(\xi)\,[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} =$$

$$= \int_{v_0}^{v}\left[1 + \beta_1(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + \beta_2(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 + \dots\right]dv =$$

$$= v_0\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + v_0\frac{\beta_1(\xi)}{2}\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 +$$

$$+ v_0\frac{\beta_2(\xi)}{3}\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^3 + \dots \qquad (7.29_1)$$

При z, близких к z_0, $|v-v_0|$ — малое и мы имеем

$$\frac{v-v_0}{v_0} = \frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} +$$

$$+ \gamma_2(\xi)\left\{\frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}^2 +$$

$$+ \gamma_3(\xi)\left\{\frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}^3 + \dots$$

---

[1] Так как $1 + \alpha_1(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right) + \alpha_2(\xi)\left(\frac{v-v_0}{v_0}\right)^2 + \dots = 1 + \alpha(\xi)\,\frac{v-v_0}{v_0}$, где $\alpha(\xi)$ ограничено при малых $|\xi|$, то $|\beta_k(\xi)| \leqslant |\alpha(\xi)|^k$.

При малых $|\xi|$ $\dfrac{u_3(\xi)}{v_0} = (\xi)$, и мы получаем

$$v - v_0 = 2u_3(\xi)[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} + \\ + \gamma_2(\xi) v_0 \left\{\frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}^2 + \\ + \gamma_3(\xi) v_0 \left\{\frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}^3 + \cdots \qquad (7.29_2)$$

или [1])

$$v = v_0 + 2u_3(\xi)[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} + \\ + \gamma_2(\xi) v_0 \left\{\frac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}^2 + \cdots, \qquad (7.30)$$

и этот ряд сходится при $|[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}| < \delta$.

Это можно представить и в виде

$$v = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\xi, z), \qquad (7.30_1)$$

где $v_k(\xi, z)$ — однородные полиномы относительно ξ степени k.

Если $z_0 = 1/2$, то

$$v = v_0 + 2u_3(\xi)[\ln z - \ln(1-z)] + \gamma_2(\xi)[\ln z - \ln(1-z)]^2 + \cdots \qquad (7.31)$$

Очевидно,

$$[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right)dz > 0$$

при $0 < z_0 < z < 1$, и ряды (7.30), (7.31) сходятся при достаточно малом $[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z} > 0$.

---

[1]) Здесь коэффициенты ряда функции от ξ. Сходимость ряда (7.30) обеспечена при малом $|[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}|$, так как при этом малой будет и скобка $\left\{\dfrac{2u_3(\xi)}{v_0}[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}\right\}$. Эта скобка будет малой и при любом z при малом $|\xi|$, так как $u_3(\xi)/v_0 = (\xi)$, ибо $v_0 = (\xi^2)$. Но, уменьшая ξ, мы как-то изменяем и коэффициенты ряда (7.30), поэтому сходимость ряда (7.30) при любом z, но при достаточно малом $|\xi|$ требует дополнительных несложных рассуждений. Но позднее мы это рассмотрим иначе.

Заметим теперь следующее. Если решение мажорантной системы

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2u}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{2u}{1-z},$$

$$\frac{du}{dz} = [v^2 + A(\xi)v + B(\xi)]\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right)$$

будем определять по формулам (7.9), (7.10), то получим [1] $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$, $u_3(\xi)$ произвольные, $x_3 = 2u_3(\xi)(\ln z - \ln z_0)$, $y_3 = 2u_3(\xi)[\ln(1-z) - \ln(1-z_0)]$, $\frac{du_k}{dz} = \bar{u}_k(\xi, z)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right)$, $k = 4, 5, \ldots$, из (7.13) $x_k = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{u_k(\xi, z)}{z}\,dz$, $y_k = 2\int\limits_{z_0}^{z} \frac{u_k(\xi, z)}{1-z}\,dz$.

Все эти $u_k(\xi, z)$, $x_k(\xi, z)$, $y_k(\xi, z)$ положительные при $z_0 < z < 1$, и $|x_k(\xi, z)|$, $|y_k(\xi, z)|$ превосходят те, которые получаем для исходной системы (7.1) и (7.2) и, кроме того, очевидно, $|x_k(\xi, z)|$, $|y_k(\xi, z)| < v_k(\xi, z)$. Что касается ряда для v (по однородным полиномам $v_k(\xi, z)$), то он получается единственным и решает задачу Коши (как (7.30), так и тот, который получаем последовательными приближениями из (7.25), (7.26)): $v \to v_2(\xi)$ при $z \to z_0$.

Таким образом, по формулам (7.19), (7.20), т. е.

$$\frac{du_k}{dz} = \bar{u}_k(\xi, z)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) \text{ из } (7.25),$$

$$\frac{dv_k}{dz} = 2u_k(\xi, z)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) \text{ из } (7.26),$$

так и в виде (7.30) получаем одну и ту же функцию. Здесь последовательными приближениями получаем v в виде ряда по однородным полиномам от ξ, коэффициенты которых будут полиномами от $[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}$, а (7.30) — ряд по $[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}$.

Но предыдущий ряд из положительных элементов легко перестроить в (7.30) и, следовательно, наоборот, (7.30) можно перестроить в ряд по однородным полиномам от ξ. Но ряд (7.30) сходится, следовательно, ряды, полученные по формулам

[1] Где $\bar{u}_k(\xi, z)$ — однородный полином k-й степени относительно ξ.

(7.19), (7.20) для системы (7.1), (7.2), сходятся по крайней мере для малых $|[\ln z - \ln(1-z)]_{z_0}^{z}|$ и представляют v по однородным полиномам $v_k(\xi, z)$.

Отметим теперь, что систему (7.25), (7.26) можно записать в виде

$$\frac{du}{d\tau} = v^2 + A(\xi)v + B(\xi), \quad \frac{dv}{d\tau} = 2u, \tag{7.25$_1$}$$

$$\tau = \ln z - \ln(1-z) - \ln z_0 + \ln(1-z_0),$$

откуда [1)]

$$\sqrt{6}u = \sqrt{2v^3 + 3A(\xi)v^2 + 6B(\xi)v + C(\xi)},$$

$$\sqrt{6}u_3(\xi) = \sqrt{2v_0^3 + 3A(\xi)v_0^2 + 6B(\xi)v_0 + C(\xi)},$$

$$v_0 = v_2(\xi)$$

и

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2v^3 + 3A(\xi)v^2 + 6B(\xi)v + C(\xi)}. \tag{7.26$_1$}$$

Из (7.25$_1$) или (7.26$_1$) можно получить (это (7.30)) $v = v_2 + v_3\tau + v_4\tau^2 + \cdots$ Из (7.25$_1$) получим

$$u = u_3(\xi) + u_4(\xi)\tau + \ldots, \quad v = v_2(\xi) + v_3(\xi)\tau + \ldots \tag{7.26$_2$}$$

или

$$u = u_3(\xi) + u_4(\xi, z) + u_5(\xi, z) + \ldots, \tag{7.26$_3$}$$

$$v = v_2(\xi) + v_3(\xi, z) + v_4(\xi, z) + \ldots,$$

где $u_k(\xi)$ и $v_k(\xi)$ — ряды по положительным степеням ξ, так как $A(\xi)$ и $B(\xi)$ взяты в виде (7.21), причем индексы функций $u_k(\xi)$ и $v_k(\xi)$ обозначают низшие степени ξ.

Таким образом, ряды (7.26$_2$) имеют вид

$$u = u_3(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{k+3}(\xi)\tau^k, \quad v = v_2(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} v_{k+2}(\xi)\tau^k, \tag{7.26$_4$}$$

где $u_m(\xi)$, $v_m(\xi)$ — малые порядка ξ^m при малых ξ. Отсюда следует, что эти ряды можно записать так:

$$u = u_3(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(\xi)(\xi\tau)^k,$$

$$v = v_3(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k(\xi)(\xi\tau)^k,$$

---

1) И стационарные решения $u = 0$, $v = v_0$, $v_0^2 + A(\xi)v_0 + B(\xi) = 0$.

где $\overline{u_k}(\xi) = \xi^{-k} u_{k+3}(\xi)$, $\overline{v_k}(\xi) = \xi^{-k} v_{k+2}(\xi)$, поэтому $\overline{u_k}(\xi)$ — при малых ξ малая порядка ξ^3, а $\overline{v_k}(\xi)$ — малая порядка ξ^2.

Если, как мы положили после (9.19$_1$), $\xi_k = l_k \xi$, $k = 1, 2, 3$, где l_k постоянные, то

$$\overline{u_k}(\xi) = \overline{u_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)\,\xi^3, \quad \overline{v_k}(\xi) = \overline{v_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)\,\xi^2,$$

и тогда

$$u = u_3(l_1, l_2, l_3)\,\xi^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)\,\xi^3 (\xi\tau)^k,$$

$$v = v_2(l_1, l_2, l_3)\,\xi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{v_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)\,\xi^2 (\xi\tau)^k.$$

Здесь $\overline{u_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)$ и $\overline{v_k}(l_1, l_2, l_3, \xi)$ — ряды от ξ со свободными членами.

А если $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $B(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — однородные полиномы соответственно 2-й и 4-й степени, то $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$ — постоянные однородные многочлены от l_1, l_2, l_3.

И тогда ряды (7.26$_2$) или (7.26$_3$) сходятся или при произвольном ξ, но при малом $|\tau|$, или при произвольном τ, т. е. произвольном z, но малых $|\xi|$.

Проведем это рассуждение чуть подробнее. Пусть $A = \bar{A}\xi^2$, $B = \bar{B}\xi^4$, где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ постоянные, не зависящие от ξ, т. е. (7.25$_1$) имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = v^2 + \bar{A}\xi^2 v + \bar{B}\xi^4, \quad \frac{dv}{d\tau} = 2u.$$

Полагая $\bar{\tau} = \xi\tau$, $u = \xi^3 \bar{u}$, $v = \xi^2 \bar{v}$, получим

$$\xi^4 \frac{d\bar{u}}{d\bar{\tau}} = \xi^4 \bar{v}^2 + \bar{A}\xi^4 \bar{v} + \bar{B}\xi^4, \quad \xi^3 \frac{d\bar{v}}{d\bar{\tau}} = 2\xi^3 \bar{u},$$

т. е.

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\tau}} = \bar{v}^2 + \bar{A}v + \bar{B}, \quad \frac{d\bar{u}}{d\bar{\tau}} = 2\bar{u},$$

откуда

$$\bar{v} = \bar{v}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k \bar{\tau}^k, \quad \bar{u} = \bar{u}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k \bar{\tau}^k.$$

Эти ряды сходятся при малых $|\bar{\tau}| < \delta$, т. е. или при малых $|\xi|$, или при малых $|\tau|$. Так как $u = \xi^3 \bar{u}(\bar{\tau})$, $v = \xi^2 \bar{v}(\bar{\tau})$, то такой же вывод о сходимости рядов имеем для u и v, т. е. для

(7.26$_4$). Эти ряды можно получить и по теореме Коши и по теореме Пикара. Ряды (7.26$_3$) по однородным полиномам $u_k(\xi, \tau)$ и $v_k(\xi, \tau)$, обладающим свойством $u_k(\xi, z_0)=0$, $k>3$, $v_k(\xi, z_0)=0$, $k>2$, доставляют решение $u(\xi, z_0)=u_3$, $v(\xi, z_0)=v_2$. Для мажорантной системы (7.25$_1$) и ряда (7.26$_2$), и ряда (7.26$_3$) с положительными членами каждый член представляет собой ряд из положительных слагаемых, поэтому эти ряды можно перестраивать. Отсюда также следует сходимость предыдущих рядов и то, что (7.30$_1$) является рядом по однородным полиномам от ξ. Если нет $\xi_k=l_k\xi$, то можно из $u_{k+3}(\xi)$ выносить ξ — наибольшее из $\xi_1, \ldots, \xi_l$, так что $\xi_k/\xi\leqslant 1$. И далее рассуждения о сходимости рядов чуть только изменятся.

§ 8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Можно поставить вопрос о существовании решения системы (*), обладающего свойствами

$$x(z)\underset{z\to 1}{\longrightarrow} x_0 \text{ — конечное}, \quad y(z)\underset{z\to 0}{\longrightarrow} y_0 \text{ — конечное}. \tag{8.1}$$

Если такое решение есть, то как себя ведут $x(z)$ при $z\to 0$ и $y(z)$ при $z\to 1$?

Решение (8.1), наверное, есть, если $P(x_0, y_0)=0$, именно таким решением будет

$$x\equiv x_0, \quad y\equiv y_0. \tag{8.2}$$

Но если это решение есть, то существует ли другое решение (8.1)? Не будет ли решение, обладающее свойством (8.1), голоморфным и в точке $z=0$, и в точке $z=1$ (и отличное от (8.2))? Или голоморфное в точке $z=0$ решение не будет ли голоморфным и в точке $z=1$ и с теми же начальными значениями?

Мы покажем, что это, вообще говоря, возможно. Действительно, если

$$x\to x_0, \quad y\to y_0 \text{ при } z\to 0, \tag{8.3}$$

то, как мы видели в § 3, должно быть

$$P(x_0, y_0)=0 \text{ и } \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}=0. \tag{8.4}$$

И если $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to 1$, то должно быть

$$P(x_0, y_0)=0 \text{ и } \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}=0. \tag{8.5}$$

Таким образом, если решение обладает свойством

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 0 \text{ и } z \to 1, \tag{8.6}$$

то должно быть

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \tag{8.7}$$

При этом условии, как мы видели в §6 (замечание к теореме 6.1), голоморфное в точках $z=0$, $z=1$ решение с условием (8.7) (отличное от стационарного) возможно. Но может и не быть такого решения. Условия (8.4) гарантируют существование голоморфного решения (8.3) (при дополнительном условии $\frac{d^2P}{dx^2}|_{x_0, y_0} \neq \frac{1}{2}$, как это мы видели после (3.13) в § 6). А при условиях (8.5) существует голоморфное решение $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 1$. Второе из условий (8.5) может нарушить существование голоморфного решения (8.3), но возможно и неголоморфное решение вида (8.6).

И еще вопрос: может ли решение, обладающее свойством (8.1), обладать и таким свойством:

$$y(z) \to \infty \text{ при } z \to 1 \text{ и } x(z) \to \infty \text{ при } z \to 0? \tag{8.8}$$

Как мы показали, есть решение

$$x \to x_0, \quad y \to \infty \text{ при } z \to 1 \tag{8.9}$$

и есть решение

$$x \to \infty, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 0. \tag{8.10}$$

Это решение (4.2), которое во всяком случае существует при условии $0 < 4\sqrt{P_2(x_0)} < 1$, согласно теореме 4.1, и решение (4.35), которое существует при условии (4.10), согласно теореме 4.2.

Но может ли решение (8.1) обладать сразу и свойством (8.8)?

§ 9. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ (7.1) И (7.2)

Рассмотрим пример системы (*) в случае (7.3), где

$$P(x, y) = xy(x+y) + \frac{1}{2} P_2(\xi) x^2 + \frac{1}{2} Q_2(\xi) y^2 +$$
$$+ L_2(\xi) xy + P_4(\xi) x + Q_4(\xi) y + P_6(\xi) \tag{9.1}$$

и $L_k(\xi)$, $P_k(\xi)$, $Q_k(\xi)$ — однородные многочлены k-й степени от параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy + y^2 + P_2(\xi)\,x + L_2(\xi)\,y + P_4(\xi),$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy + x^2 + Q_2(\xi)\,y + L_2(\xi)\,x + Q_4(\xi). \tag{9.2}$$

Нас будут интересовать решения

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \text{ при } z \to 0,\ 1,\ \infty$$

и вообще возможное поведение решений при $z \to 0$, $z \to 1$ и $z \to \infty$.

Будем искать решение такой системы (*) и (1.5) в виде (7.4):

$$x = x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi,\ z), \qquad y = y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi,\ z),$$
$$u = u_3 + \sum_{k=4}^{\infty} u_k(\xi,\ z), \tag{9.3}$$

где $x_2 = x_2(\xi)$, $y_2 = y_2(\xi)$ — однородные полиномы относительно ξ_1, ξ_2 и ξ_3 второй степени, $u_3(\xi)$ — однородный полином третьей степени, а $x_k(\xi,\ z)$, $y_k(\xi,\ z)$, $u_k(\xi,\ z)$ — однородные полиномы k-й степени относительно ξ_1, ξ_2 и ξ_3 с коэффициентами, зависящими от z.

Здесь нет значений $x_k(\xi,\ z_0)$, $y_k(\xi,\ z_0)$ и нет z_0, что и характерно для решений, соответствующих проблеме Римана (ряды (9.3)).

Запишем систему (1.5)

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2u}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{2u}{1-z}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{z} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{1-z}. \tag{9.3$_1$}$$

Здесь возможны случаи:

I. $P(x_0,\ y_0) = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x} \neq 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial y} \neq 0,$

II. $P(x_0,\ y_0) = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial y} \neq 0,$

III. $P(x_0,\ y_0) = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x} \neq 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial y} = 0,$

IV. $P(x_0,\ y_0) = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial y} = 0.$

Решение (9.3) при условии $P(x_0, y_0)\neq 0$ нас не будет интересовать[1]), хотя мы будем рассматривать и такие решения, для которых не имеет значения $P(x_0, y_0)=0$ или $P(x_0, y_0)\neq 0$, так как конечным будет только одно предельное значение x или y.

Случай I. Здесь существует решение

$$x\to x_0 \text{ — конечное}, \quad y\to\infty \text{ при } z\to 1, \tag{9.4}$$

если $0<4\sqrt{P_2(x_0)}<1$.

Это решение имеет вид (4.18):

$$y=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+v, \quad u=x-x_0, \tag{9.5}$$

где $v\to 0$, $u\to 0$ при $z\to 1$.

Это имеем в общем случае (1.1), т. е. когда в (9.1) нет параметров, нет и $P(x_0, y_0)=0$, так как в решении нет y_0. Согласно примечанию к теореме 4.1, имеем и

$$y=C(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+v, \quad u=x-x_0 \tag{9.6}$$

с произвольной постоянной C.

В рассматриваемом сейчас случае

$$P_2(x_0)=x_0+\frac{1}{2}Q_2(\xi), \quad P_1(x_0)=x_0^2+L_2(\xi)x_0+Q_4(\xi),$$

поэтому

$$\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}=\frac{x_0^2+L_2(\xi)x_0+Q_4(\xi)}{x_0+\dfrac{1}{2}Q_2(\xi)}. \tag{9.7}$$

Здесь и числитель и знаменатель — однородные полиномы соответственно 4-й и 2-й степени относительно ξ. Существует и решение $x\to-\infty$, $y\to y_0$ при $z\to 0+0$.

Таким образом, решения не связаны с условиями I, хотя мы и отмечаем эти решения при условиях I.

Случай II. Как мы видели в § 3, при этих условиях существует голоморфное в окрестности $z=0$ решение

$$x\to x_0, \quad y\to y_0 \text{ при } z\to 0. \tag{9.8}$$

В соответствии с (3.18) имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=2y_0+P_2(\xi),$$

$$\lambda_1=-1-\sqrt{4y_0+2P_2(\xi)}, \quad \lambda_2=-1+\sqrt{4y_0+2P_2(\xi)}. \tag{9.9}$$

[1]) Решение $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to 0$, $z\to 1$ или $z\to\infty$ и $P(x_0, y_0)\neq 0$ не существует (§ 3).

Здесь возможно $4y_0+2P_2(\xi)=0$. Тогда $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Но возможен и случай $\lambda_2>0$. Тогда, кроме голоморфного решения (9.8), будет и неголоморфное решение типа (9.8), о чем было сказано после (3.19). Но в случае II существует и решение $x\to-\infty$, $y\to y_0$ при $z\to 0$ в виде

$$x=-z^{-2\sqrt{P_2(y_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(y_0)}{P_2(y_0)}+v,\quad u=y-y_0,$$

где $u\to 0$ и $v\to 0$ при $z\to 0$, если $0<4\sqrt{P_2(y_0)}<1$, а также решение (9.4). Здесь

$$P_2(y_0)=y_0+\frac{1}{2}P_2(\xi),\quad P_1(y_0)=y_0^2+L_2(\xi)y_0+P_4(\xi).$$

Случай III. При этих условиях существует голоморфное в окрестности $z=1$ решение $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to 1$, решение вида (4.18): $y\to\infty$, $x\to x_0$ при $z\to 1$, а также решение $y\to y_0$, $x\to-\infty$ при $z\to 0$.

Случай IV. При этих условиях существуют решения $x\to-\infty$, $y\to y_0$ при $z\to 0$ и $y\to\infty$, $x\to x_0$ при $z\to 1$. Но остается под вопросом существование решений $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to 0+$ $+0$ и $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to 1$ или $x\to x_0$, $y\to y_0$ при $z\to\infty$.

И во всех случаях остается под вопросом существование решения, имеющего полюсы [1] в точках $z_1, z_2, \ldots\to 0$, $z_1, z_2, \ldots\to$ $\to 1$ и $z_1, z_2, \ldots\to\infty$.

И еще вопрос. Каким свойством обладает решение, представимое в виде (9.3)?

Если будем определять x_k, y_k, u_k согласно формулам (7.9) и (7.10), то, как мы видели в § 7, ряды (9.3) будут в окрестности точки $z_0(\neq 0, 1)$ сходиться и $x_k(\xi, z_0)=y_k(\xi, z_0)=$ $=u_k(\xi, z_0)=0$, поэтому решение (9.3) будет обладать свойством [2]

$$x(z_0)=x_0,\quad y(z_0)=y_0.$$

Мы покажем еще, что эти ряды сходятся (как и в предыдущих случаях) и при любом z $(\neq 0, 1)$, но при достаточно малых $|\xi|$. При этом если имеем случай IV, то в виде (9.3), согласно § 1, решение $x(z_0)=x_0$, $y(z_0)=y_0$, $z_0\neq 0$, 1 имеем только вида [3] $x(z_0)\equiv x_0$, $y(z_0)\equiv y_0$, $z_0\neq 0$, 1.

---

[1] Если $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $z\to z_0\neq 0$, 1, то в случае (9.1) z_0 — полюс (§ 2).

[2] Но, как увидим позднее, это еще не решение, связанное с проблемой Римана. Чтобы это решение соответствовало проблеме Римана, надо, чтобы x_0, y_0 удовлетворяли трем интегралам: (3.1*), (3.2$_1$), (3.13), полученным в главе XII, § 3, и, согласно (7.12), должно быть $u_3(\xi)=$ $=\sqrt{P(x_0(\xi), y_0(\xi))}$.

[3] И это в общем случае, а не только для системы, где $P(x, y)$ дано (9.1), если имеем случай IV.

Во всех остальных 3 случаях решение (9.3) не будет стационарным [1]. Что же будет, если коэффициенты рядов (9.3) будем находить по формулам (7.15), (7.17)?

Пусть снова x_0, y_0 удовлетворяют равенствам IV и, следовательно, $u_3 = \sqrt{P(x_0, y_0)} = 0$.

Подставим значения (9.3) в (9.2)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2\left[x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)\right]\left[y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z)\right] +$$

$$+ \left[y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z)\right]^2 + P_2(\xi)\left[x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)\right] +$$

$$+ L_2(\xi)\left[y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z)\right] + P_4(\xi), \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\left[x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)\right]\left[y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z)\right] +$$

$$+ \left[x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)\right]^2 + Q_2(\xi)\left[y_2 + \sum_{k=3}^{\infty} y_k(\xi, z)\right] +$$

$$+ L_2(\xi)\left[x_2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_k(\xi, z)\right] + Q_4(\xi).$$

Сравнивая однородные многочлены слева и справа в (9.3_1), получим

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{2u_k}{z}, \quad \frac{dy_k}{dz} = \frac{2u_k}{1-z},$$

$$\frac{du_k}{dz} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_k \frac{1}{z} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_k \frac{1}{1-z}, \tag{9.11}$$

где $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_k$ и $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_k$ — однородные многочлены k-й степени относительно ξ, составленные согласно (9.10).

Из (7.15) и (7.17) имеем

$$x_k = 2\int_1^z \frac{u_k}{z}\,dz, \quad y_k = 2\int_0^z \frac{u_k}{1-z}\,dz. \tag{9.12}$$

[1] В чем сейчас убедимся, хотя это следует и из общей теории § 1.

Так как $u_3 = 0$, то и

$$x_3 = y_3 = 0. \tag{9.13}$$

Найдем теперь из (9.10) $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_4$ и $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_4$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_4 = 2x_2y_2 + y_2^2 + P_2(\xi)\,x_2 + L_2(\xi)\,y_2 + P_4(\xi),$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_4 = 2x_2y_2 + x_2^2 + Q_2(\xi)\,y_2 + L_2(\xi)\,x_2 + Q_4(\xi).$$

Мы рассматриваем случай IV, а это значит, что $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_4 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_4 = 0$, поэтому и

$$x_4(\xi, z) = y_4(\xi, z) = 0. \tag{9.14}$$

В силу (9.13) мы также получим $x_5(\xi, z) = y_5(\xi, z) = 0$ и вообще $x_k(\xi, z) = y_k(\xi, z) = 0$ при $k \geqslant 6$.

Таким образом, справедлива

Теорема 9.1. *В случае IV решение (9.3) при $u_3 = 0$ имеет вид* [1]

$$x = x_2(\xi) = x_0, \quad y = y_2(\xi) = y_0, \quad u = 0$$

при любом формальном способе определения однородных [2] *полиномов $x_k(\xi, z)$, $y_k(\xi, z)$.*

Рассмотрим теперь общий случай системы (9.1) и решение (9.3), где $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$ — однородные многочлены второй степени, а $u_3(\xi)$ — третьей степени. Коэффициенты x_k, y_k будем определять по формулам (7.17), (7.15). Имеем

$$\frac{dx_3}{dz} = \frac{2u_3}{z}, \quad \frac{dy_3}{dz} = \frac{2u_3}{1-z},$$

$$x_3 = 2u_3(\xi)\int_1^z \frac{dz}{z}, \quad y_3 = 2u_3(\xi)\int_0^z \frac{dz}{1-z}, \tag{9.15}$$

---

[1] Это согласуется с тем, что должно быть: $u(\xi, z) = \sqrt{P(x(\xi, z),\, y(\xi, z))}$. И, следовательно, если $x_0 = \tau_{12}$, $y_0 = \tau_{13}$ и $u_3 = \tau_{123} - \tau_{132}$, то при $\tau_{123} - \tau_{132} = 0$ решение уравнений (4.3) (глава XII) переходит в $x \equiv \tau_{12}$, $y \equiv \tau_{13}$, но это при $0 = u_3 = \sqrt{P(\tau_{12}, \tau_{13})}$. Но именно это мы и имеем согласно (3.22) (глава XII), так как $\sigma_4 = \tau_{123} - \tau_{132} = \rho_{123} - \rho_{132}$, если $\rho_{kl} = \tau_{kl}$.

[2] При некоторых дополнительных условиях (удовлетворение значений x_2, y_2 трем интегралам, которые будут найдены в главе XII) это решение доставит и одно из решений проблемы Римана.

$$x_3 = 2u_3(\xi)\ln z, \quad y_3 = -2u_3(\xi)\ln(1-z),$$

$$\frac{du_4}{dz} = \frac{2x_2(\xi)\,y_2(\xi) + y_2^2 + P_2(\xi)\,x_2 + L_2(\xi)\,y_2 + P_4(\xi)}{z} +$$

$$+ \frac{2x_2(\xi)\,y_2(\xi) + x_2^2 + Q_2(\xi)\,y_2 + L_2(\xi)\,x_2 + Q_4(\xi)}{1-z} =$$

$$= \frac{\bar{u}_4(\xi)}{z} + \frac{\bar{\bar{u}}_4(\xi)}{1-z},$$

$$u_4 = \bar{u}_4(\xi)\ln z - \bar{\bar{u}}_4(\xi)\ln(1-z),$$

$$x_4 = \bar{u}_4(\xi)\int\limits_1^z \frac{\ln z}{z}\,dz - \bar{\bar{u}}_4(\xi)\int\limits_1^z \frac{\ln(1-z)}{z}\,dz =$$

$$= \bar{u}_4(\xi)\,\frac{\ln^2 z}{2} - \bar{\bar{u}}_4(\xi)\int\limits_1^z \frac{\ln(1-z)}{z}\,dz, \tag{9.16}$$

$$y_4 = \bar{u}_4(\xi)\int\limits_0^z \frac{\ln z}{1-z}\,dz + \bar{\bar{u}}_4(\xi)\,\frac{\ln^2(1-z)}{2}.$$

Легко видеть, что здесь функции

$$\int\limits_1^z \frac{\ln(1-z)}{z}\,dz \quad \text{и} \quad \int\limits_0^z \frac{\ln z}{1-z}\,dz$$

ограниченные при $0 < z < 1$.

Продолжая этот процесс, найдем

$$u_k = \int\limits_1^z \frac{\bar{u}_k(\xi, z)}{z}\,dz + \int\limits_0^z \frac{\bar{\bar{u}}_k(\xi, z)}{1-z}\,dz,$$

$$x_k = 2\int\limits_1^z \frac{u_k(\xi, z)}{z}\,dz, \quad x_k(1) = 0, \tag{9.17}$$

$$y_k = 2\int\limits_0^z \frac{u_k(\xi, z)}{1-z}\,dz, \quad y_k(0) = 0, \tag{9.18}$$

где $\bar{u}_k(\xi, z)$, $\bar{\bar{u}}_k(z, \xi)$ — однородные полиномы k-й степени относительно ξ.

Сходимость этих рядов рассматривать не будем. Может быть это решение обладает свойствами (8.9), (8.10)?

Заметим, что x_3, y_3 обращаются в нуль вследствие первого равенства IV, а x_4, y_4 — вследствие двух других условий равенств IV. Если же одно из этих трех условий IV не выполнено, то нет $x_3=y_3=0$ и $x_4=y_4=0$, а тогда ряды (7.4) не вырождаются в $x\equiv x_2(\xi)$, $y\equiv y_2(\xi)$.

Мы рассмотрим, однако, вопрос о сходимости рядов иного типа для мажорантной системы[1], где $P(x, y)$ дано формулой (6.1). Следовательно, будем рассматривать уравнения (6.4) и (6.5). При этом имеем (6.6) и вместо (6.8) запишем (согласно (6.11), должно быть $C=a$)

$$\frac{dw}{\sqrt{w^3+Aw^2+Bw+C}} = 2\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{1-z}\right)dz. \tag{9.19}$$

Имеем

$$w^3+Aw^2+Bw+C = O_6+O_4(w-w_0)+O_2(w-w_0)^2+(w-w_0)^3, \tag{9.19$_1$}$$

где

$$O_6 = w_0^3+Aw_0^2+Bw_0+C,$$

$$O_4 = 3w_0^2+2Aw_0+B, \quad O_2 = 3w_0+A.$$

Предположим теперь, что A, B и C — функции параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3, пропорциональных малому параметру ξ, так что $\xi_k = l_k\xi$, $k=1, 2, 3$, и $A=a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots$, $B=b_4\xi^4+b_5\xi^5+\cdots$, $C=c_6\xi^6+c_7\xi^7+\cdots$ (как, например, (7.21))—сходящиеся ряды с постоянными (относительно ξ) коэффициентами.

Предположим, что $a\xi^2=w_0$. Тогда $O_6=\delta_1\xi^6$, $O_4=\delta_2\xi^4$, $O_2=\delta_3\xi^2$. Здесь δ_1, δ_2 и δ_3 являются степенными рядами от ξ и пусть δ_1, δ_2 и $\delta_3\neq 0$ при $\xi=0$.

Следовательно, можно написать

$$w^3+Aw^2+Bw+C = \xi^6\delta_1\left[1+\bar{\delta}_2\frac{w-w_0}{\xi^2}+\right.$$

$$\left.+\bar{\delta}_3\frac{(w-w_0)^2}{\xi^4}+\delta_1^{-1}\frac{(w-w_0)^3}{\xi^6}\right], \quad \bar{\delta}_k=\delta_k\delta_1^{-1}, \quad k=2, 3. \tag{9.19$_2$}$$

Предположим еще, что $w-w_0=\delta(z, \xi)\xi^\nu$, где $\nu\geqslant 3$ — целое, и $\delta(z, \xi)|_{\xi=0}\neq 0$.

[1] В § 7, начиная с (7.21), мы рассмотрели этот же вопрос для системы (1.1).

Здесь[1] $w = w(z, \xi)$ и $w_0 = w(z_0, \xi) = \alpha x_2(\xi) + \beta y_2(\xi)$. Тогда величина $\dfrac{w - w_0}{\xi^2}$ при малом ξ малая. Величины же δ_1, δ_1^{-1} и $\overline{\delta}_k$ представимы в виде рядов по степеням ξ со свободными членами и ограничены в окрестности $\xi = 0$.

Если здесь A, B и C — однородные полиномы, как указано в (9.1), соответственно второй, четвертой и шестой степени, то δ_1, δ_2 и δ_3 — постоянные, не равные 0. Тогда постоянными будут и $\overline{\delta}_2$, $\overline{\delta}_3$, δ_1^{-1} (при условии $\xi_k = l_k \xi$, $k = 1, 2, 3$). Постоянными будут и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ в (9.20), а также коэффициенты ряда (9.20₁) и (9.21).

Теперь имеем

$$\frac{1}{\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}} = \frac{1}{\xi^3 \delta_1^{1/2}} \left[1 + \Delta_1 \frac{w - w_0}{\xi^2} + \right.$$
$$\left. + \Delta_2 \left(\frac{w - w_0}{\xi^2} \right)^2 + \cdots \right] \qquad (9.19_3)$$

и ряд справа сходится при малых $\left| \dfrac{w - w_0}{\xi^2} \right|$, т. е. при малых $|\xi|$ или при малых $|w - w_0|$. Из (9.19) в силу (9.19₃), интегрируя, найдем

$$\frac{1}{\xi \delta_1^{1/2}} \left[\frac{w - w_0}{\xi^2} + \frac{\Delta_1}{2} \left(\frac{w - w_0}{\xi^2} \right)^2 + \frac{\Delta_2}{3} \left(\frac{w - w_0}{\xi^2} \right)^3 + \cdots \right] =$$
$$= 2 [\alpha \ln z - \beta \ln (1 - z)], \qquad (9.20)$$

откуда

$$\frac{w - w_0}{\xi^2} = F \{ 2 \delta_1^{1/2} \xi [\alpha \ln z - \beta \ln (1 - z)] \}, \qquad (9.20_1)$$

где ряд $F(t) = t + \theta_2 t^2 + \theta_3 t^3 + \cdots$ сходится при малых t[2].

Следовательно,

$$w - w_0 = \xi^2 F(t), \quad t = 2 \delta_1^{1/2} \xi [\alpha \ln z - \beta \ln (1 - z)]. \qquad (9.21$$

Отсюда получим x, y, как (6.10).

Так как этот ряд сходится при малых t, то это значит, что он сходится при любом z, но при достаточно малом $|\xi|$. Мы

---

[1] В рассмотренных случаях это и выполнено для $x(z, \xi)$, $y(z, \xi)$, записанных в виде (7.4), так как $w_0 = \alpha x_2(\xi) + \beta y_2(\xi)$. Но мы можем брать $|w - w_0|$ малым, интегрируя (9.19) от z_0 до z независимо от ξ. Когда же получим (9.20₁), то $w - w_0$ окажется величиной (ξ^{ν}) само собой.

[2] Как и в (6.9), увидим, что w — эллиптическая функция и, следовательно, имеет бесконечную последовательность подвижных особых точек, сгущающихся к $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$.

получили решение с начальными условиями $w=w_0$ при $\alpha \ln z_0 - \beta \ln(1-z_0) = 0$ или при $z_0^\alpha = (1-z_0)^\beta$. Но справа в (9.20) можно поставить и $2[\alpha \ln z - \beta \ln(1-z) - \ln C]$, тогда будет $w = w_0$ при $z_0^\alpha = (1-z_0)^\beta C$, что позволяет считать z_0, при котором $w = w_0$, произвольным. Ряд (9.21) можно представить по степеням ξ с коэффициентами, зависящими от z, и в указанной области этот ряд снова будет сходиться. Этот ряд сходится и при произвольном ξ (при котором сходятся ряды для A, B и C и ряд (9.19_3)), но при достаточно малом $[\alpha \ln z - \beta \ln(1-z) - \ln C]$, где C определено равенством $\alpha \ln z_0 - \beta \ln(1-z_0) = \ln C_0$, т. е. сходится при малом $|z-z_0|$ и произвольном ξ из указанной области сходимости ряда (9.19_3). Этот ряд можно расположить [1] и по однородным полиномам относительно ξ_1, ξ_2 и ξ_3, который можно получить и так. Запишем уравнения (6.4) и (6.5) в виде $\frac{dw}{d\tau} = 2u$, $\frac{du}{d\tau} = 3w^2 + 2A(\xi)w + B(\xi)$, $\tau = \alpha \ln z - \beta \ln(1-z)$. Отсюда легко найдем u и w в виде

$$u = u_3(\xi) + \sum_{k=4}^{\infty} u_k(\xi, \tau), \quad w = w_2(\xi) + \sum_{k=3}^{\infty} w_k(\xi, \tau), \tag{Δ}$$

где $u_k(\xi, \tau)$ и $w_k(\xi, \tau)$ — однородные полиномы k-й степени относительно ξ_1, ξ_2 и ξ_3. Сходимость этих рядов мы только что доказали, но можно это доказать и так, как мы доказывали теорему Пуанкаре—Ляпунова [11]. Предельной системой при $\xi = 0$ здесь будет $\frac{dw}{d\tau} = 2u$, $\frac{du}{d\tau} = 3w^2$, которая имеет решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, определенное в области $-\infty < \tau < \infty$, поэтому ряды (Δ) будут сходиться в области $-A < \tau < A$ при достаточно малых $|\xi|$ или при произвольных ξ, при которых ряды (9.19) сходятся и при $|\tau - \tau_0| < \delta$. Или можно получить ряды вида (7.26_3), откуда получим (Δ). В этом лишь несколько новом рассуждении[2] мы не касаемся формул (7.9), (7.10), по которым находим коэффициенты рядов (7.4), хотя получаем мажоранту и для (7.4).

С такими разложениями мы столкнемся в проблеме Римана.

Таким образом, ряды (7.4), в которых x_k определяется согласно формулам (7.9), (7.10), сходятся при любом $z (\neq 0, 1)$,

---

[1] Относительно уравнений (6.4) и (6.5) можно повторить рассуждения, проведенные относительно уравнений (7.25), (7.26) в § 7 и привести (7.25), (7.26) к системе $\frac{dw}{d\tau} = 2u$, $\frac{du}{d\tau} = 3w^2 + 2Aw + B$, $\tau = \alpha \ln z - \beta \ln(1-z) - \alpha \ln z_0 + \beta \ln(1-z_0)$.

[2] По сравнению с рассуждениями в § 7, начиная с (7.21).

но при соответственно достаточно малых $|\xi_1|, \ldots, |\xi_l|$. Эти ряды сходятся и при произвольном ξ, но при достаточно малых $|[\ln z - \ln (1-z)]_{z_0}^{z}|$.

Напоминаем, что при доказательстве сходимости этих рядов представления (7.3) были именно такими, какими здесь были A, B и C.

Мы построили решения, мажорирующие решения вида (7.4) для исходной системы (7.1) и (7.2) с коэффициентами (7.3), когда x_k, y_k определяются согласно формулам (7.9), (7.10).

Так как эти ряды сходятся при любом $z (\neq 0, 1)$, но при соответственно достаточно малых параметрах ξ, то они не позволяют изучить поведение $x(z)$ и $y(z)$ при $z \to 0$ или $z \to 1$ и при фиксированных параметрах ξ, причем как бы близко ни была взята начальная точка z_0 от 0 или 1. Этого недостатка нет у тех представлений, которые доставляют решение $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to 0$ или $z \to 1$, а также у решения $x \to \infty$, $y \to y_0$ при $z \to 0$ или $x \to x_0$, $y \to \infty$ при $z \to 1$. Здесь параметры фиксированы как угодно. Но зато в параметрическом представлении мы получаем решение в окрестности любой точки $z \neq 0, 1, \infty$, правда, при соответствующих достаточно малых параметрах ξ (а не в окрестности точек 0, 1 или ∞, как в предыдущих случаях). Параметрическая форма решения свидетельствует о том, что существуют решения, для которых никакая точка $z \neq 0, 1, \infty$ не будет особой при соответственно достаточно малых параметрах.

И, как мы видели на примере мажорантной системы (6.1), система может иметь решение, представимое параметрически[1] ((7.30), (7.31) или (9.21)), которое имеет бесконечное число подвижных полюсов, сгущающихся к 0, 1 и ∞ ((6.10)). Но при некоторых соотношениях между параметрами-коэффициентами A, B и C это параметрическое решение вырождается в стационарное. При этих соотношениях между параметрами-коэффициентами у рассматриваемых решений (с начальными значениями $x_2(\xi)$, $y_2(\xi)$) исчезают все особые точки — подвижные и неподвижные, так как оно переходит в стационарное.

При уменьшающихся параметрах область регулярности нашего параметрического решения относительно z расширяется. Впрочем, в примере, где $P(x, y)$ дано формулой (6.1), все особые точки решения (6.8), за исключением одной, также исчезают, как только наступает условие IV

---

[1] Гарантирующее существование такого решения и для исходной системы (7.1), (7.2), но без гарантии наличия бесконечного числа подвижных особых точек.

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

т. е.

$$w_0^3 + Aw_0^2 + Bw_0 + a = 0, \quad 3w_0^2 + 2Aw_0 + B = 0,$$

не зависящее от малости ξ. Но при $\xi = 0$ мы и получим частный случай этого в силу $w_0^3 = 0$, $3w_0^2 = 0$. Остается в этом случае, как видно из (6.8), и одна подвижная особая точка $\overset{*}{z}$, определенная равенством $\alpha \ln \overset{*}{z} - \beta \ln (1 - \overset{*}{z}) = 0$.

Поэтому, может быть, в параметрическом представлении расширение области регулярности решения происходит не только при уменьшении ξ, но и при приближении ξ к таким значениям, при которых будет выполнено условие IV и решение $(x(z), y(z)) \to (x_0, y_0)$, где x_0, y_0 удовлетворяют равенствам IV.

Можно заметить еще следующее. Возьмем тот случай, когда $P(x, y)$ имеет вид (1.1) и пусть a_{kl} и a_l — ряды от ξ обращаются в нуль при $\xi = 0$. Здесь можно построить решение в параметрической форме, например, определяя x_k, y_k по формулам (7.9), (7.10), как это мы и делали, определяя x_k, y_k согласно (7.19), (7.20). Эти ряды будут сходящимися, а при $\xi = 0$ это решение переходит в решение (7.4_1) предельной системы (7.1_1), (7.2_1) без особых точек. Но для предельной системы и рассматриваемого решения имеем условия IV.

Как мы показали, предельная система (7.1_1), (7.2_1) имеет решение[1] с полюсом в произвольной (но фиксированной) точке z_0. Это решение в главе X имеет вид (2.14), (2.15) с произвольным параметром $C_1^{(20)} = C$. Такой полюс будет и в случае (6.1), когда имеем (6.13) и тем самым условие IV. Это имеем в (6.14), где C определяет z_0. Наше решение в параметрической форме (7.4), где x_k, y_k определяем по (7.9) и (7.10) (и (7.19), (7.20)), при достаточно малых ξ не имеет особенности в фиксированной точке z_0 (так как при $\xi = 0$ нет особых точек у решения $x = y = u = 0$). Отсюда следует, что рассматриваемое нами решение в параметрической форме качественно отличается от тех, которые содержат особую подвижную фиксированную точку, которая остается и при $\xi = 0$ у решения предельной системы.

Могут ли вообще иметь подвижные особые точки решения, полученные в параметрической форме? И если имеют, то что происходит с этими подвижными особыми точками при из-

[1] Но мы не знаем, сколько этих особых точек z_0 имеет решение предельной системы.

менении параметров? Покажем, что подвижные особые точки здесь могут быть.

Из (9.19) имеем

$$\alpha \ln z - \beta \ln (1-z) = \int\limits_{w_0}^{w} \frac{dw}{2\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}}, \quad (9.22)$$

откуда и получено (9.20). Но запишем функцию $w(z)$ иначе, прибавляя к правой и левой частям величину

$$\int\limits_{\infty}^{w_0} \frac{dw}{2\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}} = L(w_0).$$

Получим

$$L(w_0) + \alpha \ln z - \beta \ln (1-z) = \int\limits_{\infty}^{w} \frac{dw}{2\sqrt{w^3 + Aw^2 + Bw + C}}. \quad (9.23)$$

Отсюда

$$w = \wp [\alpha \ln z - \beta \ln (1-z) + L(w_0)] - A/3. \quad (9.24)$$

В общем случае, когда ξ такие, что уравнение $w^3 + A(\xi) w^2 + B(\xi) w + C(\xi) = 0$ не имеет кратного корня, функция $\wp(\zeta)$ является эллиптической и, следовательно, $w(z)$ имеет бесконечное число таких подвижных особых точек z_k, что $w \to \infty$ при $z \to z_k$.

Если же есть кратный корень $w_1(\xi)$, то при $w \to w_1$ будет $\int\limits_{\infty}^{w} \to \infty$, а это значит, что или $z \to 0$, или $z \to 1$, или $z \to \infty$.

При этом особые точки z_k исчезают (остается лишь одна, определенная значением C в (6.14)).

То же самое будет, если w_1 — трехкратный корень, т. е. если

$$w^3 + Aw^2 + Bw + C = (w - w_1)^3.$$

Действительно, равенство (9.23) в этом случае имеет вид

$$L(w_0) + \alpha \ln z - \beta \ln (1-z) = -2 (w - w_1)^{-1/2} \xrightarrow[w \to w_1]{} \infty, \quad (9.25)$$

т. е. $w \to w_1$ при $z \to 0$ или $z \to 1$, или $z \to \infty$. Из (6.10) получим

$$x = 4 \int\limits_{z_0}^{z} [L(w_0) + \alpha \ln z - \beta \ln (1-z)]^{-3} \frac{dz}{z} + \bar{x}_0,$$

$$y = 4\int_{z_0}^{z}[L(w_0)+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)]^{-3}\,\frac{dz}{1-z}+\bar{y}_0\,, \quad (9.26)$$

$$x(z_0)=\bar{x}_0\,,\qquad y(z_0)=\bar{y}_0\,.$$

Здесь интегралы существуют и при $z\to 0$, и при $z\to 1$, поэтому при $z\to 0$ будет $x\to x_0$, $y\to y_0$. Но, согласно § 3, в этом случае должно быть $P(x_0, y_0)=0$, т. е.

$$P(x_0, y_0)=w_1^3+Aw_1^2+Bw_1+C=0,\qquad w_1=\alpha x_0+\beta y_0\,,$$

что и имеем.

Также имеем $x\to x_1$, $y\to y_1$ при $z\to 1$ и $w_1=\alpha x_1+\beta y_1$, т. е. снова $P(x_1, y_1)=0$.

Здесь в обоих случаях и

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=0.$$

Решение (9.26) неголоморфное в точках $z=0$ и $z=1$. Решение (9.26) имеет подвижную особую точку $\overset{*}{z}$. Действительно, существует $z=\overset{*}{z}$ такая, что

$$L(w_0)+\alpha\ln\overset{*}{z}-\beta\ln(1-\overset{*}{z})=0$$

и, следовательно,

$$L(w_0)+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)=\left(\frac{\alpha}{\overset{*}{z}}+\frac{\beta}{1-\overset{*}{z}}\right)\times$$

$$\times(z-\overset{*}{z})+\ldots,$$

откуда видим, что $\overset{*}{z}$ — полюс второго порядка — только одна подвижная особая точка (как и у решения (6.14)).

Но решение (9.26) непараметрическое.

Возьмем теперь в (9.22) и в (9.23) $w_0=w_0(\xi)$. Получим (9.25)

$$L(w_0(\xi))+\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)\doteq-2(w-w_1)^{-1/2}.$$

Это параметрическое решение, так как в (9.22) при $w=w_0(\xi)$ будет $\alpha\ln\bar{z}-\beta\ln(1-\bar{z})=0$, т. е. начальное значение $w=w_0(\xi)$ при $z=\bar{z}$ зависит от ξ, как и в (7.4), согласно (7.9), (7.10) (и $w(z, \xi)$ при всех z зависит от ξ).

Предположим теперь, что при некотором $\xi=\xi_1$ $w_0(\xi_1)=$ $=w_1$— трехкратный корень. Тогда

$$L(w_0(\xi_1)) = L(w_1) = \int\limits_{\infty}^{w_0(\xi_1)} \frac{dw}{2\sqrt{w^3+Aw^2+Bw+C}} = \infty$$

и, следовательно [1], из (9.23) $w=w_1\equiv\alpha x_1+\beta y_1$, а $x\equiv x_1$, $y\equiv y_1$ будет стационарным решением. В частности, при $\xi=0$ имеем [2] $w^3+Ax^2+Bw+C=w^3$ и $w_1=0$.

Равенство (9.23) принимает вид $\alpha\ln z-\beta\ln(1-z)+L(w_0)=-w^{1/2}$. Но после (9.19) начальное значение w_0 было взято в виде $w_0=a\xi^2$, поэтому при $\xi=0$ будет $w_0=0$, а тогда $L(w_0)=\infty$ и $w\equiv0$.

Следовательно, равенство $w_0=\alpha x_0+\beta y_0\equiv0$ определяет стационарное решение $x\equiv x_0$, $y\equiv y_0$.

В (9.26) при $w_0(\xi)$, близком к кратному корню w_1, $L(w_0(\xi))$ будет большим. А тогда особая точка $\overset{*}{z}$ определяется равенством $L(w_0(\xi))+\alpha\ln\overset{*}{z}-\beta\ln(1-\overset{*}{z})=0$ и, следовательно, подвижная особая точка $\overset{*}{z}$ близка к $z=0$ или $z=1$, или $z=\infty$.

И вообще если в (9.22) $w_0(\xi)$ близко к кратному корню полинома $w^3+A(\xi)w^2+B(\xi)w+C(\xi)$, то $L(w_0)$ большое и в (9.33) w близко к кратному корню $w=\dot{w}_1=\dot{w}_0(\xi)$.

Как мы показали, параметрическое представление действительно при произвольном z, но при малом $|\xi|$ или, по-видимому, таком ξ, которое близко к ξ_1, при котором имеем кратный корень w_1. Если в (9.22) $w_0(\xi)$ близко к w_1, то снова интеграл $\int\limits_{w_0}^{w}$ большой. А чтобы он был небольшим, чтобы левая часть была небольшой при конечном (любом) z, то w должна быть вблизи $w_0(\xi)$, так как если w близко от $w_0(\xi)$, то путь интегрирования от w_0 до w небольшой и этот интеграл будет небольшим (хотя подынтегральное выражение будет большим между w_0 и w).

Таким образом, при $w_0(\xi)\to w_1$ будет и $w(z)\to w_1$, когда z принадлежит области $D(z)$, не содержащей $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$. Отсюда следует, что когда при $\xi\to\xi_1$ $w_0(\xi)$ приближается к кратному корню $w_1(\xi_1)$ уравнения

$$w^3+A(\xi_1)w^2+B(\xi_1)w+C(\xi_1)=0,$$

решение (9.22) $w=w(z,\xi)$ или (9.23) приближается к стационарному $w(z,\xi_1)\equiv w_1(\xi_1)$ и подвижные особые точки $\overset{*}{z}$ решения (9.22) или (9.23) исчезают на плоскости z и попадают все в меньшие и меньшие круги вокруг $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$.

---

[1] Только при $w=w_1(\xi_1)$ равенство (9.23) сохраняется при всех z, если $L(w_0(\xi_1))=\infty$.

[2] Так как при $\xi=0$ $A=B=C=0$.

Глава XII

ПРОБЛЕМА РИМАНА

§ 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА [28, 29]

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)\, y = 0 \tag{1.1}$$

с рациональными [1]) коэффициентами $p_1(z), \ldots, p_n(z)$. Оно имеет n линейно независимых решений $y_1(z), \ldots, y_n(z)$, вообще говоря, многозначных в окрестности полюсов $a_1, \ldots, a_m$ коэффициентов $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ (z — комплексная переменная). Всякое другое решение y представимо в виде

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \tag{1.2}$$

с постоянными $C_1, \ldots, C_n$. Каждое из решений $y_1, \ldots, y_n$ на любой поверхности (на любом листе) Римана, порождаемой особыми точками $a_1, \ldots, a_m$ после обхода каких-нибудь из этих особых точек, также представимо в виде (1.2). Исходя из этого, Риман вообще вводит в рассмотрение систему функций $y_1, \ldots, y_n$, обладающих свойствами:

1) они регулярны во всех точках плоскости z (и в точке $z=\infty$), за исключением точек

$$a_1, a_2, \ldots, a_m; \tag{1.3}$$

2) при обходе независимой переменной z каких-нибудь точек (1.3) каждая из этих функций переходит в функцию, представимую в виде (1.2) через исходные ветви $y_1, \ldots, y_n$.

Таким образом, система функций $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ после обхода точки a_k испытывает линейное преобразование с помощью матрицы

$$A_k = \|a_{\nu l}^{(k)}\|,$$

---

[1]) Мы опускаем случай, когда $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ — алгебраические функции.

ν — номер строки, l — номер столбца, т. е. Y переходит в систему функций

$$Y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) = A_k Y. \tag{1.4}$$

Здесь ν-строка матрицы A_k умножается скалярно на $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и тем самым получается ν-элемент $y_\nu^{(k)}$ системы $Y^{(k)}$.

Так как $z = \infty$ не особая точка, то

$$A_1 A_2 \ldots A_m = I \text{ — единичная матрица}, \tag{1.5}$$

т. е. Y после обхода точек $a_1, \ldots, a_m$ (после обхода точки $z = \infty$) возвращается к первоначальному значению.

Будем считать разные системы $y_1, \ldots, y_n$ одного класса, для которых точки $a_1, \ldots, a_m$ и $A_1, \ldots, A_m$ одни и те же и выполнено условие (1.5). Предполагается, что

$$A_k = \alpha_k \begin{Vmatrix} \lambda_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(k)} \end{Vmatrix} \alpha_k^{-1},$$

где α_k — матрица с $D(\alpha_k) \neq 0$ и $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ различны (с одним значком k).

Заметим еще, что эта система функций $y_1, \ldots, y_n$ в окрестности точки a_k обладает свойством: система функций $\alpha_k^{-1} Y = (u_1, \ldots, u_n)$ после обхода точки a_k переходит в систему $\lambda_1^{(k)} u_1, \ldots, \lambda_n^{(k)} u_n$.

Действительно, после обхода a_k $\alpha_k^{-1} Y$ переходит в

$$\alpha_k^{-1} Y^{(k)} = \alpha_k^{-1} A_k Y = \begin{Vmatrix} \lambda_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(k)} \end{Vmatrix} \alpha_k^{-1} Y =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{(k)} \end{Vmatrix} (u_1, \ldots, u_n) = (\lambda_1^{(k)} u_1, \ldots, \lambda_n^{(k)} u_n).$$

Класс функций $y_1, \ldots, y_n$, определенный свойствами 1 и 2, достаточно широк, поэтому Риман наделяет его еще одним свойством.

Обозначим $\mu_k = \dfrac{\ln \lambda_\nu^{(k)}}{2\pi i} + m$, где m — целое > 0.

Риман предполагает, что

3) $v_\nu = u_\nu(z-a_\nu)^{-\mu_k}$ — регулярные функции в окрестности точки a_ν и $v_\nu(a_\nu) \neq 0$.

После определения этого класса функций $y_1, \ldots, y_n$ указанными тремя свойствами возникают вопросы относительно 1) существования этого класса функций; 2) определения всего множества этих систем $y_1, \ldots, y_n$; 3) построения этого класса или представления; 4) выявления свойств этих систем или класса.

Что же в этом направлении сделал сам Риман?

Пусть дана $n+1$ система $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$, $k = 1, \ldots, n$, одного класса. Риман показал, что тогда

$$\text{а) } a_0 y_1 + a_1 y_1^{(1)} + \ldots + a_n y_1^{(n)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 y_n + a_1 y_n^{(1)} + \ldots + a_n y_n^{(n)} = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые функции от z.

б) система $\left(\frac{dy_1}{dz}, \ldots, \frac{dy_n}{dz}\right)$ принадлежит тому же классу. Отсюда он получил два следствия:

1. Функции y, образующие систему, удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению n-го порядка, коэффициенты которого — рациональные функции от z.

2. Каждая система, принадлежащая одному с Y классу, выражается линейно с рациональными коэффициентами через эти функции и их производные до n—1-го порядка.

На основании второго из этих свойств Риман получает некоторый общий вид системы заданного класса, выраженный через одну систему $y_1, \ldots, y_n$ этого класса.

Все эти результаты Риман получает на основании заданных свойств систем класса и при помощи общих функциональных свойств.

Для случая $n=2$ и $m=3$ Риман находит y_1, y_2 построением линейного однородного дифференциального уравнения, решениями которого являются y_1, y_2. При этом как в общем случае, так и в этом частном случае Риман предполагает λ_1, λ_2 различными (не вводит в рассмотрение A_1, A_2, изменяя тем самым содержание проблемы) и получает уравнение типа Фукса, коэффициенты которого выражаются через $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ или, вернее, через $\ln \lambda_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)}$, $\ln \lambda_2^{(k)} = \alpha_2^{(k)}$. В общем случае n Риман не строит линейного дифференциального уравнения n-го порядка, но, как отмечено выше, доказывает существование этого уравнения.

Таким образом, вопрос о существовании систем $y_1, \ldots, y_n$ указанного класса при $n=2$ и $m>3$ остался у Римана открытым.

Заметим еще, что Риман ставит вопрос и об изучении y_1, y_2, ..., y_n как функций особых точек a_1, ..., a_m и о возможности такого случая, когда A_1, ..., A_m не зависят от какой-нибудь из особых точек a_k.

Какова же судьба проблемы Римана, которую Клейн формулирует так: «Доказать, что для получения класса функций y_1, ..., y_n, удовлетворяющих линейному [1] дифференциальному уравнению, достаточно присоединить к элементарным условиям, характеризующим поведение функций в особых точках, группу монодромии [2], поскольку эта последняя еще остается неопределенной».

Здесь, как видим, также нет отчетливой формулировки проблемы Римана относительно построения соответствующего линейного дифференциального уравнения. Например, нет указания на тип дифференциального уравнения, которое ожидается.

Отметим теперь следующее. Доказательство существования системы функций y_1, ..., y_n с указанными свойствами можно не связывать с построением дифференциального уравнения. Тогда задача формулируется так. Пусть система функций y_1, ..., y_n будет регулярной во всей плоскости переменной z (и в том числе в $z=\infty$), за исключением точек a_1, ..., a_m. Пусть L — замкнутая кривая, проходящая поочередно через точки a_1, ..., a_m, так что имеем две области: L_+ — конечную, ограниченную кривой L, и L_-, содержащую точку $z=\infty$. Пусть z_0 — начальная точка в L_+, в которой определены y_1, ..., y_n.

Аналитическим продолжением, например через кривую L между точками a_1 и a_2, эти функции определены в области L_-. Теперь эта система функций y_1, ..., y_n, вообще говоря, будет иметь разные предельные значения в точках L при подходе к этим точкам из областей L_+ и L_-.

Но благодаря свойствам, предписанным Риманом системе $Y=(y_1, ..., y_n)$, во всех точках L в промежутке между a_k и a_{k+1} эти предельные значения $\overset{+}{Y}$ (из L_+) и $\overset{-}{Y}$ (из L_-) связаны равенством

$$\overset{-}{Y}=A_k\overset{+}{Y}, \tag{1.6}$$

где A_k — постоянная матрица с $D(A_k)\neq 0$.

Можно сразу ставить такую задачу. Найти две системы регулярных функций $\overset{+}{Y}$, определенных в L_+, и $\overset{-}{Y}$, определен-

[1] Подразумевается однородное. И, кроме того, у Римана явно речь идет о дифференциальном уравнении с рациональными коэффициентами (что еще не делает задачу вполне определенной).

[2] Т. е. $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$.

ных в L_-, предельные значения которых связаны в точках L равенством

$$\overset{-}{Y} = A(t)\overset{+}{Y}, \tag{1.7}$$

где t — точка кривой L и $A(t)$ — матрица, определенная в точках L. Начиная с Гильберта, и решали эту задачу построения $\overline{Y}$ и $\overset{+}{Y}$, подчиненных условию (1.7), где $A(t)$ — непрерывная функция или разрывная, при помощи интегральных уравнений.

В сущности и у Римана уже была формулировка задачи при помощи контура L и равенства (1.7), но у него $A(t)$ между точками a_k, a_{k+1} была постоянной, имеющей разные значения в промежутках a_k, a_{k+1}, а построение системы y_1, y_2, ..., y_n он сводил к построению соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения. Другими словами, решение вопроса существования и построения системы y_1, ..., y_n он искал в классе решений простейших дифференциальных уравнений[1)] и благодаря третьему условию относительно свойств y_1, y_2, ..., y_n рассматривал y_1, ..., y_n как класс функций, следующий за алгебраическими функциями.

В Советском Союзе исследования по решению проблемы (1.7) (краевые задачи теории функций комплексной переменной) благодаря работам Н. И. Мусхелишвили, Н. П. Векуа, И. Н. Векуа и Д. А. Квеселава получили большое развитие [30].

Но краевые задачи благодаря иным условиям относительно $A_k(t)$ и выбора классов решений y_1, ..., y_n, а также другим методам решения отличаются от первоначальной цели Римана.

Если даже $n=1$, то и тогда задача построения функции, удовлетворяющей условию

$$\overset{+}{Y} = C(t)\overset{-}{Y}, \tag{1.8}$$

заняла большое место среди краевых задач благодаря различным предположениям относительно $C(t)$. Если рассматривать задачу построения функции $Y(z)$, согласно Риману, удовлетворяющей условию (1.8), среди решений простейших дифференциальных уравнений, то в случае особых точек a_1, a_2, ..., a_m, ∞ и постоянных $C(t)=\mu_1$, μ_2, ..., μ_m между точками a_1, ..., a_m получим y как решение дифференциального уравнения

[1)] После работ Фукса было видно, что простейшими уравнениями здесь будут уравнения типа Фукса, но этим еще не оканчивается решение проблемы Римана. Вполне строгая формулировка проблемы появилась только в работах Лаппо-Данилевского.

$$y' = y\left(\frac{\mu_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{\mu_m}{z-a_m}\right)$$

в виде

$$y = C(z-a_1)^{\mu_1}\cdots(z-a_m)^{\mu_m}.$$

После обхода точки $z=a_k$ $y(z)$ умножается на $e^{2\pi i\mu_k}=\lambda_k$, т. е. здесь μ_k следует взять в виде

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\lambda_k, \quad k=1, \ldots, m.$$

Если потребуем, чтобы в точке $z=\infty$ $y(z)$ была регулярной, то, очевидно, должна быть целой величина $\mu_1+\ldots+\mu_m\leqslant 0$.

Мы здесь искали $y(t)$, принимая во внимание и третье условие Римана относительно поведения $y(t)$ при $t\to a_k$. Таким образом, собственно проблема Римана в ее первоначальной постановке для случая $n=1$ решается просто. Она становится намного труднее в случае $n>1$, и, вероятно, решение ее невозможно получить на основе решения краевой задачи при помощи интегральных уравнений (уточним далее, в каком смысле).

Мы уже отметили решение этой задачи (правда измененной) для $n=2$ и $m=3$ самим Риманом (см. также [31], здесь формулировка проблемы иная).

Решение краевой задачи после Гильберта значительно упростил Йосип Племель. Но и это не позволило решить проблему Римана в ее первоначальной и конструктивной постановке. Существование решения некоторой проблемы Римана в 1957 г. доказал новым методом Röhrе [32]. Рекомендуем обзорную статью японского математика Т. Сайто о проблеме Римана в ее первоначальной формулировке [33].

Цель настоящей главы состоит в том, чтобы показать, что сделано по проблеме Римана в первоначальном ее значении в Советском Союзе. Будет рассказано и о работе по этой проблеме в случае $n=2$ и $m=4$, которая является новой, хотя и была выполнена еще в 1941 г., но не была напечатана по обстоятельствам второй мировой войны и ее последствиям. Будет рассказано и о тех направлениях в теории дифференциальных уравнений, которые возникли [1] в проблеме Римана и затем развивались в нашей стране.

Мы видели, что Риман свою проблему связывал с построением линейного однородного дифференциального уравнения, решениями которого являются элементы системы $y_1, \ldots, y_n$.

[1] Эти направления развивались при рассмотрении случая $n=2$, $m=4$, который резко отличается от случая $n=2$, $m=3$ и в котором эти направления возникают.

Шлезингер связывал эту проблему с построением однородной системы линейных дифференциальных уравнений с 1901 г. [13]. Так же поступал Биркгоф. Но наиболее глубоко с этой позиции после Шлезингера рассматривал проблему Римана Лаппо-Данилевский [4].

Лаппо-Данилевский сразу оценил важность построения теории функций от многих матриц для решения проблемы Римана и выполнил это на высоком уровне. Это и позволило ему по-новому и формулировать и решать как проблему Римана в ее первоначальной постановке, так и другие более общие проблемы. Эти методы Лаппо-Данилевского, как известно, повлияли на исследования и по многим другим направлениям теории линейных дифференциальных уравнений (например, [7]).

Рассмотрим систему n линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dz} = XP, \qquad P = \sum_{k=1}^{m} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1.9}$$

где U_k— постоянные (относительно z) матрицы n-го порядка, а a_k— комплексные или вещественные числа. X — матрица n-го порядка, составленная из n линейно независимых решений заданной системы, так что в каждой строчке стоит решение. Следуя Лаппо-Данилевскому, будем X называть интегральной матрицей.

Пусть X — решение уравнений (1.9), нормированное в точке $b \neq a_k$, т. е. $X(b) = I$. Из работ Фукса известно, что в окрестности особой точки a_k имеем представление

$$X(z) = (z - a_k)^{W_k} \overline{X}_k (z - a_k), \qquad \overline{X}_k(0) \neq 0,$$

где W_k — постоянная (относительно z) матрица порядка n и $\overline{X}_k(z - a_k)$ — матрица n-го порядка, регулярная в окрестности точки $z = a_k$, т. е. $\overline{X}_k(z - a_k)$ — ряд Тейлора.

Здесь множитель $(z - a_k)^{W_k}$ или просто матрица W_k характеризует многозначность матрицы $X(z)$ в окрестности точки a_k.

Замечание 1.1. Если нет характеристических чисел матрицы U_k, которые отличаются на целое число, отличное от нуля, то можно требовать, чтобы не только $\overline{X}_k(z - a_k)$ была голоморфной в точке $z = a_k$, но и $\overline{X}^{-1}(z - a_k)$, при этом W_k определяется единственным образом и матрицы W_k и U_k подобны. Но всегда характеристические числа матриц U_k и W_k совпадают [4, ст. II]. Случаи, когда матрица U_k имеет характеристические числа, разность которых равна целому числу, отличному от нуля, изучены Л. Донской [5] и Ф. Р. Гантмахером [6].

Легко видеть, что после обхода переменной z вокруг точки a_k матрица $X(z)$ умножается слева на матрицу

$$V_k = e^{2\pi i W_k}. \tag{1.10}$$

Матрица $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} L(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|z), \tag{1.11}$$

где

$$L(a_{j_1}|z) = \int_b^z \frac{dz}{z - a_{j_1}}, \quad L(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|z) =$$

$$= \int_b^z \frac{L(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}|z)}{z - a_{j_\nu}} dz$$

и ряд (1.11) абсолютно сходится при всех конечных значениях $U_1, \dots, U_m$ и $z \neq a_k$.

По известному свойству интегральной матрицы $X(z)$ после обхода переменной z точки $z = a_k$ матрица $X(z)$ умножается слева на матрицу V_k так, что

$$X(\overline{z}) = V_k X(z). \tag{1.12}$$

Здесь $\bar{z}$ — значение z после обхода точки $z = a_k$. Полагая в (1.12) $z = b$, $\bar{z} = \bar{b}$, получим, согласно $X(b) = I$,

$$\overline{X}(\overline{b}) = V_k. \tag{1.13}$$

Это V_k совпадает с (1.10):

$$V_k = e^{2\pi i W_k} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} L(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|\bar{b}). \tag{1.14}$$

Очевидно[1],

$$V_1, \dots, V_m \tag{1.15}$$

и есть группа монодромии, о которой шла речь в проблеме Римана. Чтобы сделать эту группу определенной, будем считать, что $V_1, \dots, V_m$ получены после обхода точек $a_1, \dots, a_m$ на исходном листе Римана. Именно в этом случае имеем равенства (1.5). Следуя [4], будем называть U_k дифференциальными подстановками, W_k — показательными подстановками и V_k — интегральными подстановками.

---

[1] Для системы (1.9) $z = \infty$ также особая точка, поэтому имеем еще $V_\infty = (V_1 \dots V_m)^{-1}$, что равносильно (1.5).

Из (1.14) видим, что

$$W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k. \tag{1.16}$$

Проблемой Пуанкаре Лаппо-Данилевский назвал задачу определения W_k через $U_1, \ldots, U_m$ и изучения W_k как функций матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Для малых значений $U_1, \ldots, U_m$ он нашел W_k в виде сходящихся рядов:

$$\frac{e^{2\pi i \xi_k} - 1}{\xi_k} W_k = \overline{W}_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \ldots m} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} Q_k (a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b) \tag{1.17}$$

(см. далее (2.6)), где Q находятся рекуррентно. Он доказал также, что W_j— мероморфные функции от $U_1, \ldots, U_m$, и нашел эти мероморфные представления при всех возможных значениях $U_1, \ldots, U_m$ в явном виде. Например, в случае матриц $U_1, \ldots, U_m$ второго порядка будет [4, ст. II]

$$W_j = \frac{e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}}{2 i \sin \pi (\xi_1 - \xi_2)} [(e^{2\pi i \xi_1} \xi_2 - e^{2\pi i \xi_2} \xi_1) + (\xi_1 - \xi_2) V_j], \tag{1.17$_1$}$$

где V_k— целый ряд от $U_1, U_2, \ldots, U_m$, данный в виде (1.14).

Для матриц второго порядка и когда характеристические числа (х. ч.) матриц W_j (всегда подобных соответственно матрицам U_j) суть 0 и ξ_i эта формула имеет вид (2.6) [1]. W_k, согласно (1.16), многозначная [2] функция от V_k, но мероморфная от $U_1, \ldots, U_m$. Это значит, что мы не можем попасть на другую ветвь W_k аналитическим продолжением в пространстве элементов $U_1, \ldots, U_m$.

Как показано в [4, ст. II, теорема VIII], особенностями функций (1.17) являются те значения подстановок U_j, х. ч. которых разнятся на целое число, отличное от нуля.

Первоначальная проблема Римана на языке системы линейных дифференциальных уравнений состоит в том, что мы должны найти $X(z)$, удовлетворяющую указанным трем условиям Римана, в классе решений [3] систем (1.9) (которая, очевидно, является простейшей), т. е. в соответствии с формулой Лаппо-Данилевского (1.11) нужно найти $U_1, \ldots, U_m$ как функции $V_1, \ldots, V_m$. Впрочем, если известны $V_1, \ldots, V_m$, то, согласно (1.16), известны и $W_1, \ldots, W_m$, через которые следу-

---

[1] Далее ξ_i не равна целому числу.

[2] См. о множестве значений этой функции Н. П. Еругина [34].

[3] Если ищем решение проблемы Римана в классе решений системы (1.9). то условие 3 относительно y_k автоматически выполняется.

ет найти $U_1, ..., U_m$. Согласно теории функций от многих матриц, развитой в [4], из (1.17) легко находятся [1])

$$U_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} W_{j_1} \dots W_{j_\nu} R_j (a_{j_1} \dots a_{j_\nu} | b), \qquad (1.18)$$

и эти ряды сходятся в окрестности нулевых W_k или при малых $|W_k|$.

Замечание 1.2. Это следует понимать так. Для любых конечных различных фиксированных $a_1, ..., a_m$ найдется окрестность нулевых $W_1, ..., W_m$, в которой ряды (1.18) сходятся, но для всей области изменения $a_1, ..., a_m$ нет общей окрестности нулевых $W_1, ..., W_m$, в которой ряды (1.18) сходятся. Это нужно иметь в виду.

Из (1.14), обращая ряды, можно получить $U_1, ..., U_m$ и через $V_1, ..., V_m$ в виде

$$U_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \dots m} (V_{j_1} - I) \dots (V_{j_\nu} - I)\, Q_b^{(j)} (a_{j_1} \dots a_{j_\nu}), \qquad (1.19)$$

и эти ряды сходятся при малых $|V_k - I|$, т. е. при V_k, близких к I. Коэффициенты в рядах (1.18) и (1.19) находятся в явном виде рекуррентно.

Таким образом, проблема Римана в наиболее точной и строгой первоначальной формулировке решена [2]) Лаппо-Данилевским в явном алгорифмическом виде с помощью аналитических операций в окрестности нулевых $W_1, ..., W_m$ или в окрестности единичных матриц $V_1, ..., V_m$.

При всех других значениях W_k и V_k решение получим аналитическим продолжением рядов (1.18) и (1.19). Но, конечно, аналитическое продолжение здесь выполнить не просто. Вопрос о многозначности функций (1.18) или (1.19) — это вопрос о множестве решений проблемы Римана в классе решений системы (1.9).

Отдельно система Гаусса рассмотрена в [4]:

$$\frac{dX}{dz} = X \left(\frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2} \right). \qquad (1.20)$$

---

[1]) Если $W_1, ..., W_m$ коммутируют, то $U_j = W_j$, так как $X = (z - a_1)^{W_1} \dots (z - a_m)^{W_m} A$, $A = (b - a_1)^{-W_1} \dots (b - a_m)^{-W_m}$.

[2]) Этим, конечно, и доказано существование решения проблемы Римана в общем случае, но осталось изучить природу функций, например (1.18). Система (1.9) приводится к уравнению (1.1) класса Фукса, но уравнение (1.1) не всегда сводится к системе (1.9) (в p могут появиться полюсы выше первого порядка), т. е. (1.9) составляют часть уравнений класса Фукса и являются простейшими, которые доставляют решение проблемы Римана.

В этом случае Лаппо-Данилевский дал полное решение проблемы Римана, т. е. построил функцию (1.18)

$$U_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1 \cdot 2} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b), \quad j = 1, 2, \quad (1.21)$$

не только для малых $|W_1|$ и $|W_2|$, но и для всех возможных значений. Он изучил особенности этих функций и многозначность. Но казалось, что это решение проблемы Римана для системы (1.20) дано через некоторые трансцендентные функции. Б. Л. Крылов [35] нашел функции (1.21) для системы (1.20) в конечном виде, выявив всю многозначность решения проблемы Римана, и показал, что решение этой проблемы выражается только через гипергеометрические ряды. Этим он дал простое, полное и отчетливое решение проблемы Римана для системы Гаусса. Исследование Б. Л. Крылова основано на прежних его пяти работах, посвященных определению группы системы Гаусса и одного частного вида системы двух уравнений с коммутирующими U_1, U_2. Н. Е. Кочин [36] разрешил проблему Римана в конечном виде, когда имеется только две особые точки a_1 и a_2 на конечном расстоянии и когда матрицы W_1, W_2 удовлетворяют условиям $[W_1[W_1W_2]]=0$, $[W_2[W_1W_2]]=0$, где $[UV]=[UV-VU]$. К этой группе работ можно отнести работы Г. Ф. Федорова [37], В. И. Смирнова [38], Еругина Н. П. [39].

Как видим, в постановке Лаппо-Данилевского проблемы Римана требуется не только доказать вообще существование класса функций, определенных Риманом вышеуказанными тремя[1]) свойствами, но доказать существование и дать алгоритм их построения в классе решений линейных регулярных систем, т. е. найти U_k как функции W_l; требуется также изучить аналитические свойства этих функций. Это уже гораздо более определенная и трудная задача.

Существование этих функций (и притом аналитических):

$$U_k = U_k(W_1, \ldots, W_m), \quad k = 1, \ldots, m,$$

Лаппо-Данилевский в сущности доказал построением рядов (1.18), но характеристика этих функций дана лишь в случае $n=2$ и $m=3$, т. е. в случае двух уравнений и трех особых точек.

---

[1]) Если третье из условий Римана относительно $y_1, \ldots, y_n$ опустить при фиксированной группе монодромии $V_1, \ldots, V_m$, то проблема Римана становится весьма неопределенной даже в классе линейных систем (иррегулярных) и вместо третьего условия появляется другая дополнительная характеристика функций $y_1, \ldots, y_n$. Это отчетливо сделал Лаппо-Данилевский [4, ст. V, VI] и затронул Биркгоф.

Вот как талантливо и глубоко оценил подвиг Лаппо-Данилевского член Парижской Академии наук Ж. Адамар [2]: «Наука понесла в лице Лаппо-Данилевского потерю, которую мы все глубоко чувствуем.

Его труд произвел переворот в одной из самых важных и таинственных глав теории дифференциальных алгебраических уравнений и теории аналитических функций. Двойная проблема, над которой он главным образом работал,— проблема Римана и особенно проблема Пуанкаре — была, конечно, освещена трудами самого нашего великого Пуанкаре и Гильберта. Но, как это часто случается с проблемами особой трудности, которые ставит себе современный анализ, оставалось довольствоваться доказательствами существования решения без возможности действительно найти его. Что же касается полного и точного выражения этого решения, то не только оно еще было очень далеко от нас, но и казалось невозможным, чтобы оно существовало в доступной нам форме. Лаппо-Данилевский дал, однако, это решение новыми аналитическими методами, создание и применение которых могло быть делом только совершенного математика. Такой результат позволяет рассматривать в совершенно новом свете не только упомянутую двойную проблему, но и весь грандиозный отдел науки, к которому она принадлежит. С такой точки зрения этот результат не только вскрывает изумительный талант автора, но, конечно, плодотворен и для будущего. Нужно бесконечно сожалеть, что преждевременная смерть помешала Лаппо-Данилевскому самому получить первые и важные следствия».

Мы эту задачу будем рассматривать в случае $n=2$ и $m=4$ и увидим, что здесь возникает необходимость в построении новых методов исследования для решения новых задач аналитической теории дифференциальных уравнений.

Какие же новые задачи здесь появляются?

1. Дана система

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1, \ldots, y_n, t), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Требуется указать число интегралов этой системы $\omega_k(y_1, \ldots, y_n) = C_k$, $k=1, \ldots, m$, не зависящих от t, и найти их [11, 18].

2. Пенлеве искал среди уравнений

$$\frac{d^2w}{dz^2} = f\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right)$$

с рациональной относительно $\frac{dw}{dz}$ и w функцией f такие, решения которых не имеют подвижных многозначных особых точек. И, грубо говоря, показал, что только 6 конкретных уравнений будут такими. Он, а за ним и другие показали, что подвижными особыми точками этих уравнений будут только полюсы.

Замечательный метод, созданный Пенлеве (на основе теорем Пуанкаре об уравнениях, содержащих малый параметр), не позволяет, однако, решать несколько иные задачи, возникающие в проблеме Римана для $n=2$, $m=4$.

Именно пусть дана система

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1, \ldots, y_n, t), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Указать такие из них, решения которых не имеют подвижных особых точек типа существенно[1] особых (и независимо от того, однозначные они или нет). Найти способы построения решений в окрестности подвижных особых точек этих уравнений.

Во-первых, эта задача отличается от той, которую рассматривал Пенлеве, и, во-вторых, уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = f\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right)$$

легко записывается в виде указанной системы, но не наоборот. Важно было (для решения проблемы Римана) изучить и нелокальные свойства решений этих систем (да и уравнений Пенлеве), чем и занимались Пенлеве и его продолжатели.

Новые методы исследования этих новых задач и были разработаны для случая $n=2$ и, как обычно, когда $f_k(y_1, y_2, t)$ являются однозначными относительно y_1, y_2. Это было сделано в работах Н. П. Еругина [40], которые породили большое число других работ в этом направлении и с несколько более широким кругом задач. Это прежде всего работы А. И. Яблонского, Н. А. Лукашевича и многих других (их учеников) (см. [41]).

Оказалось, что решение этих задач и других, связанных с ними, в вещественной области потребовало создания новой теории, что и было сделано в [11, глава XIII].

В новых статьях Н. П. Еругина [42—49, 19] с позиций таких же задач (и снова возникающих при рассмотрении проблемы Римана для $n=2$ и $m=4$) рассмотрены системы другого типа и с неоднозначными $f_k(y_1, y_2, t)$. Это также вызвало к жизни новые методы исследования.

[1] То есть таких t_0, что при $t \to t_0$ хотя бы одна из функций $y_k(t)$ не имела предельного значения.

Таково влияние[1] проблемы Римана для случая $n=2$ и $m=4$ на развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений (не говоря уже о методе Лаппо-Данилевского, который в сущности и появился под влиянием проблем Пуанкаре и Римана и значение которого в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений трудно переоценить).

§ 2. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА В СЛУЧАЕ $n=2$ И $m=4$

Переходим к решению проблемы Римана для системы второго порядка с тремя особыми точками на конечном расстоянии a_1, a_2, a_3 и $a_4=\infty$:

$$\frac{dY}{dx}=Y\left(\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}+\frac{U_3}{x-a_3}\right). \qquad (2.1)$$

Здесь Y и U_k— матрицы второго порядка.

Формулируем проблему. Даны матрицы второго порядка W_j ($j=1, 2, 3$). Требуется найти систему двух линейных дифференциальных уравнений (2.1), интегральная матрица Y которой ($Y(b)=I$) в окрестности особых точек a_j имеет вид

$$Y=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{Y}_j(x) \qquad (j=1,\ 2,\ 3), \qquad (2.2)$$

где $\overline{Y}_j(x)$ — матрица второго порядка, голоморфная в окрестности особой точки $x=a_j$. Здесь матрицы U_j и надо найти как функции W_k ($k=1, 2, 3$) и выявить природу этих функций.

Мы уже отметили, что Лаппо-Данилевский нашел W_j как функции U_k и показал, что это мероморфные функции [4, ст. II, § 6]. Эти функции, таким образом, надо обратить. Лаппо-Данилевский дал решение и проблемы Римана в случае, когда матрицы W_j заданы в окрестности нулевой матрицы, именно он получил в виде сходящихся рядов матрицы U_j (см. [4, ст. IV, § 2]) — это ряды (1.18):

$$U_i=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\cdot 2\cdot 3} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}R_i(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b). \qquad (2.3)$$

Следовательно, нужно дать аналитическое продолжение этих рядов на все возможные значения W_1, W_2 и W_3.

Будем предполагать, что х. ч. W_j равны 0, ξ_j, так как к

[1] Ранее мы упомянули работы Шлезингера и Биркгофа.

этому случаю задачу [1]) легко свести. Согласно замечанию 1.1, х. ч. U_j также будут 0 и ξ_j. Обозначим

$$\rho_{ik} = \sigma(U_i U_k), \qquad \tau_{ik} = \sigma(W_i W_k),$$

где $\sigma(T)$ — сумма х. ч. матрицы T или сумма диагональных элементов матрицы T. Так как U_i и W_i— матрицы второго порядка, то, очевидно, имеем

$$U_i = \alpha_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \alpha_3 W_3, \tag{2.4}$$

где α_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ — пока неопределенные скалярные величины. Надо бы в (2.4) писать $\alpha_0^{(i)}$, $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$, но мы здесь индекс i опускаем.

Чтобы найти α_k, составим систему уравнений (взяв $\sigma(T)$ от левой и правой частей (2.4) после умножения на I, W_1, W_2 и W_3)

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i &= \alpha_0 2 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3,\\
\sigma(U_i W_1) &= \alpha_0\xi_1 + \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\tau_{12} + \alpha_3\tau_{13},\\
\sigma(U_i W_2) &= \alpha_0\xi_2 + \alpha_1\tau_{12} + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_3\tau_{23},\\
\sigma(U_i W_3) &= \alpha_0\xi_3 + \alpha_1\tau_{13} + \alpha_2\tau_{23} + \alpha_3\xi_3^2.
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Запишем определитель этих уравнений (не зависящий от значка i)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_1^2 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \xi_2 & \tau_{12} & \xi_2^2 & \tau_{23} \\ \xi_3 & \tau_{13} & \tau_{23} & \xi_3^2 \end{vmatrix} = 4\,\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} - (\xi_1\tau_{23} + \xi_2\tau_{13} + \\ + \xi_3\tau_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3)^2$$

или в силу (3.1_1) и (3.2_1) данной главы

$$\Delta = -(\tau_{123} - \tau_{132})^2, \qquad \tau_{klm} = \sigma(W_k W_l W_m). \tag{2.5$_1$}$$

---

[1]) Полагая $Y = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{\xi_1^{(1)}} \left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{\xi_1^{(2)}} \left(\frac{x-a_3}{b-a_3}\right)^{\xi_1^{(3)}} \tilde{Y}$, где $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, — х. ч. U_k, получим $\frac{d\tilde{Y}}{dx} = \tilde{Y}\left(\frac{\tilde{U}_1}{x-a_1} + \frac{\tilde{U}_2}{x-a_2} + \frac{\tilde{U}_3}{x-a_3}\right)$, $\tilde{U}_k = U_k - \xi_1^{(k)}$, так что х. ч. $\tilde{U}_k$ будут 0, $\xi_k = \xi_2^{(k)} - \xi_1^{(k)}$. Соответственно W_k перейдут в $\tilde{W}_k$ с х. ч. 0, ξ_k.

Этот определитель тождественно не обращается в нуль, так как, например, для $W_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $W_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $W_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ имеем $\Delta = -1$. Если $\Delta \neq 0$, то, полагая в (2.5) $U_i = W_i$, из (2.5) легко найдем $\alpha_i = 1$ и $\alpha_k = 0$ при $k \neq i$, т. е. (2.4) будет иметь вид $U_i = W_i$. Но тогда это будет и при $\Delta = 0$, что получим предельным переходом.

Если $\Delta = 0$ и все определители, полученные из Δ заменой любого столбца свободными членами уравнений (2.5), равны нулю, то некоторые из коэффициентов α_0, α_1, α_2, α_3 будут произвольными, остальные же определяются через эти произвольные.

Например, это будет, если $\Delta = 0$, $U_1 = W_1$ и W_1, W_2, W_3 коммутируют. В этом случае три из коэффициентов α_0, α_1, α_2, α_3 произвольные, а четвертый найдется через них из первого уравнения (2.5).

Таким образом, α_i будут найдены, если найдем выражения $\sigma(U_i W_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ через W_1, W_2 и W_3. Тем самым будут найдены U_i $(i = 1, 2, 3)$ по заданным W_1, W_2 и W_3. Так как х. ч. W_k являются 0 и ξ_k и $V_k = e^{2\pi i W_k}$, то х. ч. V_k будут 1 и $e^{2\pi i \xi_k}$, поэтому на основании формулы Лагранжа — Сильвестра имеем (глава 1, § 3)

$$W_k = \frac{\xi_k}{e^{2\pi i \xi_k} - 1}(V_k - I) = \frac{U_k + \dots}{1 + 2\pi i \xi_k + \dots}, \tag{2.6}$$

где

$$V_k = I + 2\pi i U_k + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \cdot 2 \cdot 3} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} P_k(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} | b), \tag{2.7}$$

причем этот ряд целый относительно U_1, U_2 и U_3. Эти формулы позволяют написать равенства

$$\sigma(U_i W_k) = \frac{\xi_k}{e^{2\pi i \xi_k} - 1}[\sigma(U_i V_k) - \xi_i], \tag{2.8}$$

$$\sigma(U_i V_k) = \xi_i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{1 \cdot 2 \cdot 3} \sigma(U_i U_{j_1} \dots U_{j_\nu}) \times$$

$$\times P_k(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} | b), \tag{2.9}$$

и этот ряд, как и (2.7), сходится при всех конечных значениях U_1, U_2 и U_3.

Далее мы воспользуемся формулами (326), (344) (см. [4, ст. I]):

$$
\begin{gathered}
U_i^n = \xi_i^{n-1} U_i, \qquad U_j U_k U_j = U_j \sigma(U_j U_k), \\
U_i U_k = \rho_{ik} - \xi_i \xi_k + \xi_k U_i + \xi_i U_k - U_k U_i.
\end{gathered} \tag{2.10}
$$

На основании этих тождеств $\sigma(U_i V_k)$ получим в виде целого ряда от ξ_1, ξ_2, ξ_3, ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, ρ_{132} и ρ_{123}, где $\sigma(U_k U_l U_m) = \rho_{klm}$.

Таким образом, имеем[1])

$$
\begin{gathered}
\sigma(U_i V_k) = \sigma_{ik}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{13}, \rho_{123}, \\
\rho_{132}, a_1, a_2, a_3),
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

и этот ряд сходится при всех конечных значениях аргументов (но не равномерно относительно расположения точек a_1, a_2 a_3). Чтобы окончательно найти a_i, надо ρ_{ik} и ρ_{123} выразить через τ_{ik}. Как видно из (2.3), U_i являются функциями от W_1, W_2, W_3 и от a_1, a_2, a_3 (и, конечно, от b). Рассматривая U_1, U_2, ..., U_m как функции от a_1, a_2, ..., a_m, Лаппо-Данилевский получил уравнения в частных производных для определения U_1, U_2, ..., U_m (см. [4, ст. XI, ф. (100)], а также [13]):

$$
\frac{\partial U_j}{\partial a_j} = \sum_{h \neq j} \frac{U_h U_j - U_j U_h}{a_h - a_j}, \tag{2.12}
$$

$$
\frac{\partial U_j}{\partial a_h} = \left(\frac{1}{a_j - a_h} - \frac{1}{b - a_h} \right) (U_h U_j - U_j U_h). \tag{2.13}
$$

Отсюда

$$
\begin{gathered}
U_k \frac{\partial U_j}{\partial a_j} = \sum_{h \neq j} \frac{U_k U_h U_j - U_k U_j U_h}{a_h - a_j}, \\
\frac{\partial U_k}{\partial a_j} U_j = \left(\frac{1}{a_k - a_j} - \frac{1}{b - a_j} \right) (U_j U_k U_j - U_k U_j^2), \\
\frac{\partial (U_k U_j)}{\partial a_j} = \sum_{h \neq j} \frac{U_k U_h U_j - U_k U_j U_h}{a_h - a_j} + \\
+ \left(\frac{1}{a_k - a_j} - \frac{1}{b - a_j} \right) (U_j U_k U_j - U_k U_j^2), \\
\frac{\partial \sigma(U_k U_j)}{\partial a_j} = \frac{\sigma(U_k U_h U_j) - \sigma(U_k U_j U_h)}{a_h - a_j}.
\end{gathered} \tag{2.14}
$$

---

1) Далее ρ_{132} и ρ_{123} мы найдем через ρ_{kl} из (3.1*) и (3.2$_1$).

Здесь k, j, h различны, так как $\sigma(U_jU_kU_j) - \sigma(U_kU_j^2) = 0$. Это равенство дает[1])

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma(U_1U_2)}{\partial a_2} = \frac{\sigma(U_1U_3U_2) - \sigma(U_1U_2U_3)}{a_3 - a_2},\\
&\frac{\partial\sigma(U_1U_3)}{\partial a_1} = \frac{\sigma(U_1U_3U_2) - \sigma(U_1U_2U_3)}{a_2 - a_1},\\
&\frac{\partial\sigma(U_1U_2)}{\partial a_1} = \frac{\sigma(U_1U_2U_3) - \sigma(U_1U_3U_2)}{a_3 - a_1},\\
&\frac{\partial\sigma(U_2U_3)}{\partial a_3} = \frac{\sigma(U_1U_3U_2) - \sigma(U_1U_2U_3)}{a_1 - a_3},\\
&\frac{\partial\sigma(U_1U_3)}{\partial a_3} = \frac{\sigma(U_1U_2U_3) - \sigma(U_1U_3U_2)}{a_2 - a_3},\\
&\frac{\partial\sigma(U_2U_3)}{\partial a_2} = \frac{\sigma(U_1U_2U_3) - \sigma(U_1U_3U_2)}{a_1 - a_2}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Так же, как равенство (2.14), получим

$$
\frac{\partial\sigma(U_kU_j)}{\partial a_h} = [\sigma(U_kU_hU_j) - \sigma(U_kU_jU_h)] \times \times\left(\frac{1}{a_j - a_h} - \frac{1}{a_k - a_h}\right). \tag{2.16}
$$

Отсюда имеем

$$
\frac{\partial\sigma(U_1U_2)}{\partial a_3} = [\sigma(U_1U_3U_2) - \sigma(U_1U_2U_3)] \times \times\left(\frac{1}{a_2 - a_3} - \frac{1}{a_1 - a_3}\right),
$$

---

[1]) Заметим следующее. Если рассматриваем проблему Римана для системы (1.20), то из (2.12), (2.13) получим (2.14), где имеем только две матрицы U_1 и U_2, поэтому $\dfrac{\partial\sigma\ (U_1U_2)}{\partial a_1} = 0$. В (2.11) имеем только аргументы ξ_1, ξ_2 и ρ_{12} не зависит от a_1, a_2. Поэтому исчезают уравнения (2.29)—(2.33) и новые направления, которые порождены необходимостью исследования этих уравнений, о которых говорилось выше, а проблема Римана для системы Гаусса вырождается в тривиальную по сравнению с системой (2.1).

$$\frac{\partial\sigma(U_1U_3)}{\partial a_2}=[\sigma(U_1U_2U_3)-\sigma(U_1U_3U_2)]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{a_3-a_2}-\frac{1}{a_1-a_2}\right), \tag{2.17}$$
$$\frac{\partial\sigma(U_2U_3)}{\partial a_1}=[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]\times$$
$$\times\left(\frac{1}{a_3-a_1}-\frac{1}{a_2-a_1}\right).$$

Аналогично получим еще следующие равенства:

$$\frac{\partial\sigma(U_1U_2U_3)}{\partial a_1}=$$
$$=\frac{\sigma[U_2U_1U_2U_3-U_1U_2U_2U_3-U_1U_1U_2U_3-U_1U_2U_1U_3]}{a_2-a_1}+$$
$$+\frac{\sigma(U_3U_1U_2U_3-U_1U_3U_2U_3-U_1U_2U_1U_3-U_1U_2U_3U_1)}{a_3-a_1}, \tag{2.18}$$
$$\frac{\partial\sigma(U_1U_3U_2)}{\partial a_1}=$$
$$=\frac{\sigma(U_2U_1U_3U_2-U_1U_2U_3U_2-U_1U_3U_1U_2-U_1U_3U_2U_1)}{a_2-a_1}+$$
$$+\frac{\sigma(U_3U_1U_3U_2-U_1U_3U_3U_2-U_1U_1U_3U_2-U_1U_3U_1U_2)}{a_3-a_1}. \tag{2.19}$$

Известно, что $\sigma(T_1\ldots T_k)=\sigma(T_kT_1\ldots T_{k-1})$, где $T_1\ldots T_k$ — любые матрицы, поэтому $\sigma(U_iU_lU_iU_k)=\sigma(U_lU_iU_kU_i)$. На основании (2.10) имеем еще $\sigma(U_iU_lU_iU_k)=\sigma(U_iU_l)\,\sigma(U_iU_k)$. Принимая это во внимание и складывая (2.18) и (2.19), получим

$$\frac{\partial[\sigma(U_1U_2U_3)+\sigma(U_1U_3U_2)]}{\partial a_1}=$$
$$=\frac{\xi_2[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]-\xi_1[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]}{a_2-a_1}+$$
$$+\frac{\xi_1[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]-\xi_3[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]}{a_3-a_1}. \tag{2.20}$$

Вычитая (2.18) из (2.19), найдем

$$\frac{\partial[\sigma(U_1U_3U_2)-\sigma(U_1U_2U_3)]}{\partial a_1}=$$

$$=\Big\{(\xi_2-\xi_1)[\sigma(U_1U_3U_2)+\sigma(U_1U_2U_3)]+2\,\sigma(U_1U_3)\times$$

$$\times\,\sigma(U_1U_2)-2\,\sigma(U_1U_2)\,\sigma(U_2U_3)\Big\}\frac{1}{a_2-a_1}+$$

$$+\Big\{(\xi_1-\xi_3)[\sigma(U_1U_3U_2)+\sigma(U_1U_2U_3)]+2\,\sigma(U_1U_3)\times$$

$$\times\,\sigma(U_2U_3)-2\,\sigma(U_1U_3)\,\sigma(U_1U_2)\Big\}\frac{1}{a_3-a_1}. \tag{2.21}$$

Обозначая $\rho_{ik}=\sigma(U_iU_k)$, $\rho_{ikl}=\sigma(U_iU_kU_l)$, $\sigma_4=\rho_{132}-\rho_{123}$, $\sigma_5=\rho_{123}+\rho_{132}$, равенства (2.15) можем записать в виде

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_2}=\frac{\sigma_4}{a_3-a_2},\qquad \frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_1}=\frac{\sigma_4}{a_1-a_3},\qquad \frac{\partial\rho_{13}}{\partial a_3}=\frac{\sigma_4}{a_3-a_2},$$

$$\frac{\partial\rho_{13}}{\partial a_1}=\frac{\sigma_4}{a_2-a_1},\qquad \frac{\partial\rho_{23}}{\partial a_3}=\frac{\sigma_4}{a_1-a_3},\qquad \frac{\partial\rho_{23}}{\partial a_2}=\frac{\sigma_4}{a_2-a_1}. \tag{2.22}$$

Равенства (2.17) перейдут в

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_3}=\sigma_4\left(\frac{1}{a_2-a_3}-\frac{1}{a_1-a_3}\right),$$

$$\frac{\partial\rho_{13}}{\partial a_2}=\sigma_4\left(\frac{1}{a_1-a_2}-\frac{1}{a_3-a_2}\right), \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial\rho_{23}}{\partial a_1}=\sigma_4\left(\frac{1}{a_3-a_1}-\frac{1}{a_2-a_1}\right).$$

Вместо (2.20) получим

$$\frac{\partial\sigma_5}{\partial a_1}=\sigma_4\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{a_2-a_1}+\frac{\xi_1-\xi_3}{a_3-a_1}\right). \tag{2.24}$$

И наконец, (2.21) дает

$$\frac{\partial\sigma_4}{\partial a_1}=\frac{(\xi_2-\xi_1)\,\sigma_5+2\,\rho_{13}\rho_{12}-2\,\rho_{12}\rho_{23}}{a_2-a_1}+$$

$$+\frac{(\xi_1-\xi_3)\,\sigma_5+2\,\rho_{13}\rho_{23}-2\,\rho_{13}\rho_{12}}{a_3-a_1}. \tag{2.25}$$

Пользуясь (2.22) и (2.23), получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_1}+\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_2}+\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_3}=0,\\
\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_2}\,(a_3-a_2)+\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_1}\,(a_3-a_1)=0,\\
\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_3}\,(a_2-a_3)+\frac{\partial\rho_{12}}{\partial a_1}\,(a_2-a_1)=0.
\end{gathered} \tag{2.26}$$

Первому из этих уравнений соответствует система обыкновенных уравнений $\frac{da_1}{1}=\frac{da_2}{1}=\frac{da_3}{1}$, интегралами которой будут $a_3-a_1=C_1$, $a_3-a_2=C_2$. Следовательно, решение первого уравнения имеем в виде $\rho_{12}=\varphi(a_3-a_1,\ a_3-a_2)$. Подставляя это во второе или третье из уравнений (2.26) и обозначая $a_3-a_1=u$, $a_3-a_2=v$, получим $\frac{\partial\rho_{12}}{\partial v}\,v+\frac{\partial\rho_{12}}{\partial u}\,u=0$, откуда видим, что $\rho_{12}=\varphi\left(\frac{v}{u}\right)$, или

$$\rho_{12}=\varphi_{12}\left(\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\right)=\varphi_{12}(z),\qquad z=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}. \tag{2.27}$$

Так же получим

$$\rho_{13}=\varphi_{13}(z),\qquad \rho_{23}=\varphi_{23}(z). \tag{2.28}$$

Теперь вместо уравнений (2.23) напишем

$$\frac{d\rho_{12}}{dz}=\frac{\sigma_4}{z}, \tag{2.29}$$

$$\frac{d\rho_{13}}{dz}=\frac{\sigma_4}{1-z}, \tag{2.30}$$

$$\frac{d\rho_{23}}{dz}=\frac{\sigma_4}{z(z-1)}. \tag{2.31}$$

Эти равенства показывают, что и σ_4 можно[1] записать в виде $\sigma_4=\varphi_4(z)$. Поэтому (2.25) переходит в

---

[1] Например, $\sigma_4=z\frac{\rho_{12}}{dz}$, где $\rho_{12}=\varphi_{12}(z)$.

$$\frac{d\sigma_4}{dz} = \frac{(\xi_2-\xi_1)\,\sigma_5 + 2\,\rho_{13}\rho_{12} - 2\,\rho_{12}\rho_{23}}{1-z} - $$
$$- \frac{(\xi_1-\xi_3)\,\sigma_5 + 2\,\rho_{13}\rho_{23} - 2\,\rho_{13}\rho_{12}}{z}. \qquad (2.32)$$

Отсюда ясно, что и σ_5 есть функция z, $\sigma_5=\varphi_5(z)$. Следовательно, уравнение (2.24) перейдет в

$$\frac{d\sigma_5}{dz} = \sigma_4\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{1-z} + \frac{\xi_3-\xi_2}{z}\right). \qquad (2.33)$$

Таким образом, для определения ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, σ_4 и σ_5 имеем 5 уравнений. Оказывается, для этой системы можно указать 3 интеграла, не зависящих от z. Построением этих интегралов мы займемся позднее. А сейчас рассмотрим, какие стационарные решения (точки покоя) имеет система (2.29) — (2.33). Очевидно, стационарным решением будет

$$\sigma_4 = \rho_{123} - \rho_{132} = 0 \qquad (2.34_1)$$

и

$$\sigma_5 = 2\,\rho_{123} = 2\,\frac{\rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{\xi_2-\xi_1} = 2\,\frac{\rho_{13}\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\xi_1-\xi_3}, \qquad (2.34)$$

т. е. имеем три равенства. Здесь последние равенства получаем, приравнивая числители в (2.32) к нулю.

Таким образом постоянные ρ_{123}, ρ_{132} и ρ_{kl} должны быть связаны равенствами (2.34) и (2.34_1).

Решение с такими начальными значениями ρ_{kl}, σ_5 и $\sigma_4=0$ при $z=z_0\neq 0$, 1 в силу теоремы единственности будет стационарным и множество этих решений содержит два произвольных параметра (например, какие-нибудь два из ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23}). Но все ли эти решения имеют отношение к проблеме Римана, которая определяется рядами Лаппо-Данилевского (1.18)? Другими словами, может ли так случиться, что при некотором $z=z_0\neq 0$, 1 и некоторых значениях W_1, W_2 и W_3 матрицы U_1, U_2, U_3, заданные рядами (1.18), примут такие значения, что получим

$$\sigma_4 = \sigma(U_1U_3U_2) - \sigma(U_1U_2U_3) = 0$$

и

$$\rho_{12} = \sigma(U_1U_2), \qquad \rho_{13} = \sigma(U_1U_2), \qquad \rho_{23} = \sigma(U_2U_3),$$
$$\sigma_5 = \sigma(U_1U_3U_2) + \sigma(U_1U_2U_3),$$

связанные равенствами (2.34). На этот вопрос мы ответим позднее, а сейчас будем искать интегралы уравнений (2.29) — (2.33).

Из формул (2.10) имеем

$$U_1U_2 + U_2U_1 = \rho_{12} + \xi_1U_2 + \xi_2U_1 - \xi_1\xi_2.$$

Умножая это равенство справа на U_3 и пользуясь равенством

$$\sigma(U_2U_1U_3) = \sigma(U_1U_3U_2),$$

найдем

$$\rho_{123} + \rho_{132} = \xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3 \tag{3.1*}$$

или

$$\sigma_5 = \xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3. \tag{3.1$_1$}$$

Это тождество есть интеграл системы уравнений (2.29)—(2.33) или интегральная поверхность, соответствующая решению[1] (2.3) уравнений (2.12), (2.13). Но и непосредственно это можно проверить, дифференцируя равенство (3.1$_1$) и подставляя значения производных из уравнений (2.29)—(2.33). Заметим, что для любых матриц U_k ($k=1, 2, 3$) с х. ч. 0, ξ_k имеем тождество (3.1$_1$), поэтому тождеству (3.1$_1$) удовлетворяют и матрицы (2.3). Но для некоторых решений[2] уравнений (2.29)—(2.33) имеем $\sigma_5=\xi_3\rho_{12}+\xi_2\rho_{13}+\xi_1\rho_{23}+C$, где постоянная $C\neq-\xi_1\xi_2\xi_3$. И в случае (2.34) должно быть также еще и

$$\sigma_5 = 2\rho_{123} = \xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3. \tag{3.1}$$

Переходим к нахождению второго интеграла. Пользуясь равенством (2.10), находим $U_1U_2U_3U_1 = U_1\sigma(U_1U_2U_3)$

и, следовательно, $U_1U_2U_3U_1U_3U_2 = U_1U_3U_2\sigma(U_1U_2U_3)$. Это дает

$$\sigma(U_1U_2U_3U_1U_3U_2) = \sigma(U_1U_2U_3)\,\sigma(U_1U_3U_2). \tag{3.2}$$

Так как

$$U_3U_1U_3 = U_3\sigma(U_1U_3), \qquad U_2U_3U_2 = U_2\sigma(U_2U_3),$$

то

$$U_1U_2U_3U_1U_3U_2 = \sigma(U_1U_3)\,U_1U_2U_3U_2 = \sigma(U_1U_3)\times$$
$$\times\,\sigma(U_2U_3)\,U_1U_2,$$

откуда

$$\sigma(U_1U_2U_3U_1U_3U_2) = \sigma(U_1U_2)\,\sigma(U_1U_3)\,\sigma(U_2U_3).$$

Сравнивая это равенство с равенством (3.2), получаем тождественное равенство

$$\rho_{123}\rho_{132} = \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}. \tag{3.2$_1$}$$

[1] U_k, данные равенствами (2.3), удовлетворяют уравнениям (2.12), (2.13), и интеграл (3.1$_1$) не содержит произвольной постоянной, которая, следовательно, определена для рассматриваемых U_k (вернее для ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, σ_4, σ_5, определенных этими U_k).

[2] Не для решений, связанных с проблемой Римана.

И так как, очевидно, $4\rho_{132}\rho_{123}=\sigma_5^2-\sigma_4^2$, то окончательно имеем

$$\sigma_5^2-\sigma_4^2=4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}. \tag{3.3}$$

Опять имеем тождество, которое будет интегралом системы уравнений (2.29)—(2.33), но в этом можно убедиться и непосредственно, дифференцируя равенство (3.3) и подставляя значения производных из уравнений (2.29)—(2.33).

Замечание к формулам (3.1*) и (3.2$_1$). Формулы (3.1*) и (3.2$_1$) являются тождествами для матриц второго порядка с определителями, равными нулю. Поэтому имеем и

$$\tau_{123}+\tau_{132}=\xi_3\tau_{12}+\xi_2\tau_{13}+\xi_1\tau_{23}-\xi_1\xi_2\xi_3, \tag{3.3}$$

$$\tau_{123}\tau_{132}=\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23}.$$

Замечание 3.1. Если $\sigma_4=\rho_{132}-\rho_{123}=0$, то из (3.1) имеем

$$2\rho_{123}=\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3, \tag{3.4}$$

а из (3.3)

$$(\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3)^2-4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}\equiv 0, \tag{3.5}$$

например, это будет в случае двух (каких-нибудь) коммутирующих из U_1, U_2, U_3.

Из (2.10) для коммутирующих U_1, U_2, U_3 имеем

$$U_lU_jU_mU_j=\xi_jU_lU_jU_m=U_lU_j\sigma(U_jU_m)$$

и

$$2\xi_j\sigma(U_lU_jU_m)=2\sigma(U_lU_j)\sigma(U_jU_m),$$

откуда в силу (3.4) найдем

$$2\rho_{lj}\rho_{jm}=\xi_j(\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3), \tag{3.6}$$

где $l\neq m\neq j\neq l$. Отсюда для коммутирующих U_1, U_2 и U_3 получим[1)] тождества

$$2(\rho_{12}\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23})+(\xi_2-\xi_1)(\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3)=0, \tag{3.7}$$

$$2(\rho_{13}\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})+(\xi_3-\xi_1)(\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3)=0.$$

Отметим еще, что если $D(U_k)=0$, $k=1, 2$, и $U_1U_2=U_2U_1$, то

$$\sigma(U_1U_2)=\sigma(U_1)\sigma(U_2). \tag{3.8}$$

---

1) Эти равенства совпадают с (2.34), (3.1$_1$) и могут выполняться не только для коммутирующих W_1, W_2 и W_3, например, они выполняются для $W_1=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$, $W_2=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{Vmatrix}$, $W_3=\begin{Vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{Vmatrix}$.

Действительно, из (2.10) имеем $(U_1U_2)^2=\sigma(U_1U_2)\,U_1U_2$ и $U_1U_2\times U_1U_2=U_1^2U_2^2=\sigma(U_1)\,\sigma(U_2)\,U_1U_2$, поэтому $\sigma^2(U_1U_2)=\sigma(U_1)\times\sigma(U_2)\,\sigma(U_1U_2)$, откуда и следует (3.8). Следовательно, для коммутирующих U_1, U_2, U_3 имеем $\sigma(U_kU_l)=\xi_k\xi_l$, а также $\sigma(W_kW_l)=\xi_k\xi_l$. Это позволяет непосредственно проверить (3.7). Будем теперь искать третий интеграл. Легко убедиться, что для матриц A и B второго порядка справедливо тождество

$$D(A+B)=D(A)+D(B)+\sigma(A)\,\sigma(B)-\sigma(AB), \qquad (3.9_1)$$

на основании которого получим

$$D(A+B+C)=D(A)+D(B)+D(C)+\sigma(A)\,\sigma(B)+$$
$$+\sigma(A)\,\sigma(C)+\sigma(B)\,\sigma(C)-\sigma(AC)-\sigma(BC)-\sigma(AB), \qquad (3.9_2)$$

где и C — матрица второго порядка.

Принимая во внимание, что $D(U_i)=0$, $\sigma(U_i)=\xi_i$ и $\sigma(U_iU_k)=\rho_{ik}$, получим тождество

$$D(U_1+U_2+U_3)=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\rho_{12}-\rho_{13}-\rho_{23}, \qquad (3.9)$$

справедливое для всех матриц второго порядка с определителем, равным нулю. Интегральную подстановку V_∞, которую испытывает Y вокруг точки $z=\infty$, определяем равенством

$$V_\infty=(e^{2\pi iW_1}e^{2\pi iW_2}e^{2\pi iW_3})^{-1}=e^{2\pi iW_\infty}. \qquad (3.10)$$

Этим же мы фиксируем W_∞, так как

$$W_\infty=\frac{1}{2\pi i}\ln V_\infty=-\frac{1}{2\pi i}\ln(e^{2\pi iW_1}e^{2\pi iW_2}e^{2\pi iW_3}) \qquad (3.11)$$

с главным значением ln [4, ст. II, § 7] ввиду того, что $\bar\Phi_b^{(\infty)}$ и $\bar\Phi_b^{(\infty)^{-1}}$ голоморфные в окрестности $z=\infty$. Матрица W_∞ подобна матрице [4, ст. II, § 7]

$$U_\infty=-(U_1+U_2+U_3), \qquad (3.12)$$

поэтому имеем

$$D(W_\infty)=D(U_1+U_2+U_3)=\frac{1}{(2\pi i)^2}D(\ln V_\infty)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}D[\ln(e^{2\pi iW_1}e^{2\pi iW_2}e^{2\pi iW_3})] \qquad (3.12_1)$$

или в силу (3.9)

$$\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\rho_{12}-\rho_{13}-\rho_{23}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}D[\ln(e^{2\pi iW_1}e^{2\pi iW_2}e^{2\pi iW_3})]=K. \qquad (3.13)$$

Так как правая часть этой формулы не зависит от z, то имеем

$$\frac{d\rho_{12}}{dz} + \frac{d\rho_{13}}{dz} + \frac{d\rho_{23}}{dz} = 0.$$

Подставляя сюда значения производных из (2.29)—(2.33), получим тождественное равенство, поэтому (3.13) также есть интеграл уравнений (2.29)—(2.33), не зависящий от z. Очевидно, (3.13) есть тождество для функций $W=\Phi(U)$, определенных равенствами (1.18), или для функций $U=\varphi(W)$, определенных равенствами (2.3).

Замечание 3.2. Если W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то

$$\begin{gathered} V_\infty = e^{-2\pi i\,(W_1+W_2+W_3)}, \\ \ln V_\infty = -2\,\pi i\,(W_1+W_2+W_3). \end{gathered} \tag{3.13$_1$}$$

Согласно (3.9) и (3.12$_1$),

$$K = \frac{1}{(2\,\pi i)^2}\,D(\ln V_\infty) = D(W_1+W_2+W_3) =$$
$$= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\tau_{12}-\tau_{13}-\tau_{23} = 0$$

в силу (3.8), поэтому будем иметь

$$\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23} = \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3, \tag{3.14}$$

т. е. мы нашли значение $\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}$ в (3.13) через ξ_1, ξ_2, ξ_3 (для коммутирующих W_1, W_2, W_3). Но (3.14) справедливо вообще в том случае, когда правая часть (3.13) равна нулю, что возможно[1] и не для коммутирующих W_1, W_2 и W_3. Найдем теперь в общем случае выражение для правой части (3.13) через τ_{12}, τ_{13}, τ_{23}.

Очевидно,

$$V_\infty^{-1} = e^{2\pi i W_1}\,e^{2\pi i W_2}\,e^{2\pi i W_3}. \tag{3.15}$$

Учитывая, что х. ч. W_k суть 0 и ξ_k, по формуле Лагранжа имеем

$$e^{2\pi i W_k} = I + \frac{e^{2\pi i\xi_k}-1}{\xi_k}\,W_k, \qquad k = 1,\ 2,\ 3.$$

На основании этого получим

$$V_\infty^{-1} = I + \sum_{k=1}^{3}\frac{e^{2\pi i\xi_k}-1}{\xi_k}\,W_k + \frac{e^{2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1}\times$$

[1] Как видно из (3.18) и (3.19), необходимым и достаточным условием этого будет равенство $1+e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2+\xi_3)} = \sigma\,(V_\infty^{-1})$, где $\sigma\,(V_\infty^{-1})$ дано (3.16).

$$\times \frac{e^{2\pi i\xi_2}-1}{\xi_2} W_1W_2 + \frac{e^{2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1} \frac{e^{2\pi i\xi_3}-1}{\xi_3} W_1W_3 +$$

$$+ \frac{e^{2\pi i\xi_2}-1}{\xi_2} \frac{e^{2\pi i\xi_3}-1}{\xi_3} W_2W_3 + \frac{e^{2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1} \times$$

$$\times \frac{e^{2\pi i\xi_2}-1}{\xi_2} \frac{e^{2\pi i\xi_3}-1}{\xi_3} W_1W_2W_3, \qquad (3.16_1)$$

$$\sigma(V_\infty^{-1}) = -1 + \sum_{k=1}^{3} e^{2\pi i\xi_k} + \sum_{k\neq l}^{3} \frac{e^{2\pi i\xi_k}-1}{\xi_k} \times$$

$$\times \frac{e^{2\pi i\xi_l}-1}{\xi_l} \tau_{kl} + \frac{e^{2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1} \frac{e^{2\pi i\xi_2}-1}{\xi_2} \times$$

$$\times \frac{e^{2\pi i\xi_3}-1}{\xi_3} \tau_{123}, \quad k > l. \qquad (3.16)$$

Как видно из (3.15),

$$D(V_\infty^{-1}) = e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}. \qquad (3.17)$$

Х. ч. матрицы V_∞^{-1} t_1 и t_2 суть корни уравнения

$$t^2 - \sigma(V_\infty^{-1})\,t + D(V_\infty^{-1}) = 0,$$

т. е.

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma(V_\infty^{-1}) + \sqrt{\sigma^2(V_\infty^{-1}) - 4D(V_\infty^{-1})}\right],$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma(V_\infty^{-1}) - \sqrt{\sigma^2(V_\infty^{-1}) - 4D(V_\infty^{-1})}\right], \qquad (3.18)$$

где $\sigma(V_\infty^{-1})$ дано (3.16) и $D(V_\infty^{-1})$ — (3.17). Следовательно, правую часть формулы (3.13) K можно записать так:

$$K = \frac{1}{(2\pi i)^2} D\left[\ln\left(e^{2\pi iW_1} e^{2\pi iW_2} e^{2\pi iW_3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} D(\xi, \tau_{kl}, \tau_{123}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \ln t_1 \cdot \ln t_2. \qquad (3.19)$$

Если здесь $\tau_{kl} = \xi_k\xi_l$ и $\tau_{klm} = \xi_k\xi_l\xi_m$, то $K = 0$, так как $t_1 = 1$, $t_2 = e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}$. Покажем еще, что величину K в окрестности нулевых значений W_1, W_2 и W_3 можно представить в виде степенного ряда от элементов W_1, W_2, W_3. Запишем (3.16_1) в виде

$$V_\infty^{-1} = I + Y,$$

где, очевидно, при малых W_1, W_2 и W_3 и Y — матрица с малыми элементами.

Для малой матрицы Y имеем

$$\ln V_\infty^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} Y^k \doteq Y - \frac{Y^2}{2},$$

откуда и видим, что ряд

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2} D(\ln V_\infty^{-1}) = \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(W)$$

сходится [1)], где $P_{2l}(W)$ — однородные многочлены $2l$-й степени от элементов матриц W_1, W_2 и W_3.

Найдем приближенное значение $D(\ln V_\infty^{-1})$ в виде полинома второй степени.

Оставляя в Y, данной через (3.16_1), элементы ниже третьей степени, получим

$$Y \doteq 2\pi i(W_1 + W_2 + W_3) - 2\pi^2(\xi_1 W_1 + \xi_2 W_2 + \xi_3 W_3) - \\ - 4\pi^2 W_1 W_2 - 4\pi^2 W_1 W_3 - 4\pi^2 W_2 W_3.$$

Теперь имеем, согласно (3.9_1),

$$D(\ln V_\infty^{-1}) \doteq D\left(Y - \frac{Y^2}{2}\right) = D(Y) + \frac{1}{4} D(Y^2) - \\ - \sigma(Y)\,\sigma\left(\frac{Y^2}{2}\right) + \sigma\left(\frac{Y^3}{2}\right).$$

Так как мы желаем оставить здесь только члены второго порядка, то

$$D(\ln V_\infty^{-1}) \doteq D(Y) \doteq -4\pi^2 D(W_1 + W_2 + W_3),$$

а в силу (3.9_2) и $D(W_k) = 0$, $\sigma(W_k) = \xi_k$ имеем

$$D(\ln V_\infty^{-1}) \doteq -4\pi^2(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 - \tau_{12} - \tau_{13} - \tau_{23}),$$

поэтому

$$K \doteq \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 - \tau_{12} - \tau_{13} - \tau_{23}. \qquad (3.19_1)$$

Но представление (3.19) величины K общее, а (3.19_1) справедливо лишь при малых $|W_1|$, $|W_2|$ и $|W_3|$. Впрочем, для ком-

---

1) Согласно теореме 2.2 [34], этот ряд сходится в области $|W_k| < r$, $k = 1, 2, 3$, где, кроме $W = 0$, нет точек ветвления функции $t_k = t_k(W)$ (в точках ветвления $\sigma^2(V_\infty^{-1}) - 4D(V_\infty^{-1}) = 0$). Здесь $W = \|W_{hl}\|$, $|W| = |\,\|W_{hl}\|\,|$.

мутирующих оно и точное согласно замечанию 3.2 и (3.8).

Но общее значение K можно построить в виде, отличном от (3.19). Обращаемся к работе [10]. Здесь $\ln X$, где X — матрица второго порядка, получен в виде[1)]

$$Y = \ln X = \frac{\sigma(X)\ln D(X) - 2\sigma(XY)}{4D(X) - \sigma^2(X)} X +$$

$$+ \frac{\sigma(X)\sigma(XY) - [\sigma^2(X) - 2D(X)]\ln D(X)}{4D(X) - \sigma^2(X)},$$

$$\sigma(XY) =$$

$$= \int_0^1 \frac{t[\sigma(X)(D(X) - \sigma(X) + 1)] + \sigma^2(X) - \sigma(X) - 2D(X)}{t^2[D(X) - \sigma(X) + 1] + t[\sigma(X) - 2] + 1} dt.$$

Отсюда можно получить

$$D(\ln X) = \frac{\sigma^2(XY) - \sigma(X)\ln D(X)\sigma(XY) + D(X)\ln^2[D(X)]}{4D(X) - \sigma^2(X)}. \qquad (3.19_2)$$

В нашем случае здесь $X = V_\infty^{-1}$ и, согласно (3.17),

$$\ln D(X) = 2\pi i(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \qquad D(X) = e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2+\xi_3)},$$

а $\sigma(X) = \sigma(V_\infty^{-1})$ дано (3.16).

Таким образом, интеграл (3.13) можно записать в виде

$$\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23} = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 - K = b, \qquad (3.20)$$

где K выражено через $D(V_\infty^{-1})$ и $\sigma(V_\infty^{-1})$ и тем самым через τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} и τ_{123}.

В силу (3.19_1) при малых $|W_1|$, $|W_2|$ и $|W_3|$ имеем $b \doteq \tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23}$. А если, как мы видели, W_1, W_2 и W_3 коммутируют или вообще $K=0$, то (3.20) переходит в (3.14). Но к этому можно добавить следующее. Как было отмечено, тождества (3.1^*) и (3.2_1) вообще справедливы для матриц второго порядка U_1, U_2 и U_3 с определителями, равными нулю. Соответственно при дополнительном условии справедливы и тождества (3.5) и (3.7) для W_1, W_2 и W_3. Поэтому в (3.16) $\tau_{321} = \tau_{132} = \tau_{213}$ можно выразить через τ_{12}, τ_{13} и τ_{23}. Если, таким образом, в частности,

$$\tau_{132} = \tau_{123}, \qquad (3.20_1)$$

[1)] В работе [10] опечатка — во втором слагаемом множитель $\ln D(x)$ квадратной скобки опущен.

то, согласно (3.4),

$$2\,\tau_{321} = \xi_3\tau_{12} + \xi_2\tau_{13} + \xi_1\tau_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3$$

и, согласно (3.5),

$$(\xi_1\tau_{23} + \xi_2\tau_{13} + \xi_3\tau_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3)^2 - 4\,\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} = 0. \quad (3.21)$$

Равенства (3.20_1) и (3.21) справедливы [1], если, например, какие-нибудь две из матриц W_1, W_2 и W_3 коммутируют.

Заметим еще, что матрица W_∞, данная (3.11), подобна матрице (3.12), поэтому

$$\ln t_1 + \ln t_2 = 2\,\pi i\sigma(W_\infty) = 2\,\pi i\sigma(U_\infty) =$$
$$= -2\,\pi i(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3).$$

Следовательно, в K величину $\ln t_2$ можно выразить через $\ln t_1$.

Теперь мы можем сказать, что для существования стационарного решения ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, $\sigma_4=0$ и σ_5 уравнений (2.29)—(2.33), связанного с проблемой Римана, должны выполняться равенства (2.34_1), (2.34) (в знак того, что ρ_{kl}, $\sigma_4=0$ и σ_5 точка равновесия уравнений (2.29)—(2.33)), (3.1_1), (3.2_1) (интегралы уравнений (2.29)—(2.33), соответствующие проблеме Римана, и в то же время тождества) и интеграл (3.20), где K есть функция (3.19) от ξ, τ_{kl}, так как τ_{123}, согласно равенствам (3.3_1), можно выразить через τ_{kl}.

Значение σ_5 в (2.34) можно заменить правой частью (3.1_1), а левую часть в (3.2_1) в соответствии с (3.1_1) и тем, что $\sigma_4=0$, через $\rho_{123}\rho_{132} = \frac{1}{2}(\xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3)$. Запишем эти равенства вместе:

$$\begin{gathered}
\xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3 = 2\,\frac{\rho_{12}(\rho_{23} - \rho_{13})}{\xi_2 - \xi_1}, \\
\xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3 = 2\,\frac{\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{23})}{\xi_1 - \xi_3}, \\
(\xi_3\rho_{12} + \xi_2\rho_{13} + \xi_1\rho_{23} - \xi_1\xi_2\xi_3)^2 = 4\,\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}, \\
\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23} = b.
\end{gathered} \quad (3.21_1)$$

Таким образом, ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23} должны удовлетворять 4 равенствам. Здесь последнее равенство возникло в связи с тем,

---

[1] Заметим, что из (3.21) следует равенство $\Delta=0$ (т. е. при условии (3.20_1)), где Δ — определитель уравнений (2.5).

что кроме точек a_1, a_2, a_3 и ∞ других особых точек построенная система функций не имеет. Если исключим из этих 4 уравнений ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23}, то получим соотношение (может быть, не одно)

$$b = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{3.21$_2$}$$

которое связывает величины τ_{12}, τ_{13} и τ_{23}. Эта связь между τ_{12}, τ_{13} и τ_{23} обеспечивает существование стационарного решения уравнений (2.29)—(2.33) проблемы Римана и является необходимым и достаточным условием наличия такого решения. Покажем это. Величины ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, ρ_{123}, ρ_{132}, порождаемые рядами Лаппо-Данилевского (1.18), удовлетворяют уравнениям (2.29)—(2.33). Они должны также удовлетворять условиям (3.1$_1$), (3.3) и (3.20) (интегралы и тождества). Если ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, ρ_{123} и ρ_{132} стационарны, то должны выполняться еще условия (3.21$_1$) (первые три равенства), которые приводят к условиям (3.22). Если условие (3.22) выполнено и если при этом постоянные ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} вполне определяются, то они и решают проблему Римана через равенства (2.11), (2.5) и (2.4). Покажем, как можно получить (3.22). Из последнего равенства (3.21$_1$) имеем $\rho_{23}=b-\rho_{12}-$ $-\rho_{13}$. Подставим это значение ρ_{23} в предыдущее равенство:

$$[\xi_1 b + \rho_{13}(\xi_2 - \xi_1) + \rho_{12}(\xi_3 - \xi_1) - \xi_1\xi_2\xi_3]^2 =$$
$$= 4\,\rho_{12}\rho_{13}(b - \rho_{12} - \rho_{13}).$$

По степеням ρ_{13} это запишется так:

$$\rho_{13}^2[(\xi_2 - \xi_1)^2 + 4\,\rho_{12}] + 2\,\rho_{13}\{2\,\rho_{12}^2 + \rho_{12}[(\xi_2 - \xi_1) \times$$
$$\times (\xi_3 - \xi_1) - 2\,b] + \xi_1(\xi_2 - \xi_1)(b - \xi_2\xi_3)\} + \rho_{12}^2(\xi_3 - \xi_1)^2 +$$
$$+ 2\,\rho_{12}(\xi_3 - \xi_1)(b - \xi_2\xi_3)\,\xi_1 + \xi_1^2(b - \xi_2\xi_3)^2 = 0. \tag{I}$$

Первое из уравнений (3.21$_1$) после замены ρ_{23} имеет вид

$$2\,(b - \rho_{12} - 2\,\rho_{13})\,\rho_{12} = (\xi_2 - \xi_1)\,[\xi_1(b - \rho_{12} - \rho_{13}) +$$
$$+ \xi_2\rho_{13} + \xi_3\rho_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3]$$

или

$$\rho_{13}[(\xi_2 - \xi_1)^2 + 4\,\rho_{12}] + 2\,\rho_{12}^2 + [(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1) - 2\,b]\,\rho_{12} +$$
$$+ (\xi_2 - \xi_1)\,\xi_1(b - \xi_2\xi_3) = 0,$$

откуда

$$\rho_{13} = -\frac{2\,\rho_{12}^2 + [(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1) - 2\,b]\,\rho_{12} + (\xi_2 - \xi_1)\,\xi_1(b - \xi_2\xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)^2 + 4\,\rho_{12}}. \tag{II}$$

Второе из уравнений (3.21_1) после замены ρ_{23} имеет вид

$$2\rho_{13}(2\rho_{12}+\rho_{13}-b)=(\xi_1-\xi_3)[\xi_1(b-\rho_{12}-\rho_{13})+ \\ +\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3]$$

или

$$2\rho_{13}^2+\rho_{13}[4\rho_{12}-2b-(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_1)]+ \\ +(\xi_1-\xi_3)^2\rho_{12}-\xi_1 b(\xi_1-\xi_3)+(\xi_1-\xi_3)\xi_1\xi_2\xi_3=0. \qquad \text{(III)}$$

Если подставим значение ρ_{13} из (II) в (I), то получим

$$\{2\rho_{12}^2+[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]\rho_{12}+(\xi_2-\xi_1)\xi_1(b-\xi_2\xi_3)\}^2- \\ -[\rho_{12}^2(\xi_3-\xi_1)^2+2\rho_{12}(b-\xi_2\xi_3)\xi_1(\xi_3-\xi_1)+ \\ +\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2][(\xi_2-\xi_1)^2+4\rho_{12}]=0,$$

т. е. уравнение 4-й степени относительно ρ_{12}.

Если подставим значение ρ_{13} в (III), то получим

$$2\{2\rho_{12}^2+[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]\rho_{12}+(\xi_2-\xi_1)\times \\ \times\xi_1(b-\xi_2\xi_3)\}^2-\{2\rho_{12}^2+[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]\rho_{12}+ \\ +(\xi_2-\xi_1)\xi_1(b-\xi_2\xi_3)\}[4\rho_{12}-2b-(\xi_1-\xi_3)(\xi_2-\xi_1)]\times \\ \times[(\xi_2-\xi_1)^2+4\rho_{12}]+[(\xi_1-\xi_3)^2\rho_{12}-\xi_1 b(\xi_1-\xi_2)+ \\ +(\xi_1-\xi_3)\xi_1\xi_2\xi_3][(\xi_2-\xi_1)^2+4\rho_{12}]^2=0,$$

т. е. также уравнение 4-й степени относительно ρ_{12}.

Как известно, необходимое и достаточное условие совместности корня двух уравнений 4-й степени записывается в виде равенства нулю определителя 8-го порядка. В нашем случае этот определитель является функцией от ξ_1, ξ_2, ξ_3 и b, содержащей величину K из (3.13). Величина K содержит ξ_1, ξ_2, ξ_3, τ_{12}, τ_{13} и τ_{23} (поскольку τ_{123} выражается через τ_{12}, τ_{13} и τ_{23}).

Таким образом, приравнивания указанный определитель 8-го порядка нулю, мы получим соотношения (не одно значение K)

$$K=\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}),$$

т. е. (3.22), связывающее τ_{12}, τ_{13} и τ_{23}. Мы не будем выписывать этот определитель, но покажем, что существуют такие W_1, W_2 и W_3, для которых это соотношение выполняется.

Чтобы это показать, достаточно показать, что исходные равенства (3.2_1) при некоторых W_1, W_2 и W_3 выполняются.

Мы покажем, что равенства (3.21_1) выполняются для коммутирующих W_1, W_2 и W_3.

В самом деле, для коммутирующих W_1, W_2 и W_3 имеем (3.14), что выполнено при $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$.

Мы видели также, что при $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$ выполнены равенства (3.5) и (3.7), которые и являются остальными равенствами (3.21_1). Утверждение доказано.

Остальные стационарные значения ρ_{kl}, решающие проблему Римана, находим при таких W_1, W_2 и W_3, для которых τ_h удовлетворяет соотношениям $K=\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, так как при этом мы находим ρ_{12}, затем ρ_{13} и, наконец, ρ_{23} из последнего равенства (3.21_1).

Таким образом, для каждого значения K находим соответствующее соотношение между τ_{12}, τ_{13} и τ_{23}. Для этого фиксированного соотношения однозначно определяется и стационарное решение ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23}, соответствующее проблеме Римана.

Замечание 3.3. Но нужно помнить, что стационарные значения ρ_{kl}, ρ_{klm} не обеспечивают стационарного значения $\sigma(U_iV)$, данного формулой (2.11), так как здесь еще входят a_1, a_2, a_3, от которых, следовательно, зависят коэффициенты α_0, α_1, α_2 и α_3 правой части (2.4).

Таким образом, мы нашли три интеграла системы (2.29)—(2.33), данные формулами (3.1_1), (3.3) и (3.20). Теперь можно рассматривать только два уравнения, например (2.29) и (2.30):

$$\frac{d\rho_{12}}{dz}=\frac{\sigma_4}{z}, \qquad \frac{d\rho_{13}}{dz}=\frac{\sigma_4}{1-z}, \tag{3.22_1}$$

где[1], согласно (3.3) и (3.1_1),

$$\sigma_4=\sqrt{(\xi_1\rho_{23}+\xi_2\rho_{13}+\xi_3\rho_{12}-\xi_1\xi_2\xi_3)^2-4\,\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}= \\ =\rho_{132}-\rho_{123} \tag{3.22}$$

или, учитывая (3.20),

$$\sigma_4=\sqrt{P(\rho_{12},\ \rho_{13})}, \tag{3.23}$$

$$P(\rho_{12},\ \rho_{13})=4\,\rho_{12}\rho_{13}(\rho_{12}+\rho_{13})+(\xi_3-\xi_1)^2\rho_{12}^2+ \\ +(\xi_2-\xi_1)^2\rho_{13}^2+2\,[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2\,b]\,\rho_{12}\rho_{13}+$$

---

[1] Если ρ_{123} и ρ_{132} найдем, как нашли ρ_{12} и ρ_{13} в § 7, то получим в (3.22) $\rho_{132}-\rho_{123}$ в виде ряда по параметрам и низший член будет однородным полиномом 3-й степени от параметров, что и совпадает с (7.4) XI главы. И, как видим из (3.21_1), b, грубо говоря, полином 2-й степени от ξ_1, ξ_2 и ξ_3.

$$+ 2(\xi_3 - \xi_1)(b - \xi_2\xi_3)\xi_1\rho_{12} + 2(\xi_2 - \xi_1) \times$$
$$\times (b - \xi_2\xi_3)\xi_1\rho_{13} + \xi_1^2 (b - \xi_2\xi_3)^2.$$

Если имеем (3.20_1), то [1], согласно (3.21) и (3.22), $\sigma_4=0$ при $\rho_{ik}=\tau_{ik}$ (так как тождества (3.1*) и (3.3) справедливы и для τ_{kl}, τ_{klm}). Это означает, что решением уравнений (2.29), (2.30) и (2.31) будет

$$\rho_{12} \equiv \tau_{12}, \qquad \rho_{13} \equiv \tau_{13}, \qquad \rho_{23} \equiv \tau_{23}. \tag{3.23$_1$}$$

Если имеем (3.14), т. е. или W_1, W_2, W_3 коммутируют, или вообще $K=0$ (что возможно, когда нет (3.20_1)) (см. пример после (5.38)), то $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$. Тогда (3.23) принимает вид

$$\begin{gathered}\sigma_4 = \sqrt{[(\xi_2 - \xi_1)\rho_{13} + (\xi_3 - \xi_1)\rho_{12} + \xi_1^2\xi_2 + \xi_1^2\xi_3]^2 - A},\\ A = 4\rho_{12}\rho_{13}(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 - \rho_{12} - \rho_{13}).\end{gathered} \tag{3.23$_2$}$$

Здесь при $\rho_{12}=\xi_1\xi_2$, $\rho_{13}=\xi_1\xi_3$ получим $\sigma_4=0$. Это означает, что решением уравнений (2.29), (2.30) будет

$$\rho_{12} = \xi_1\xi_2, \qquad \rho_{13} = \xi_1\xi_3 \qquad (\text{и } \rho_{23} = \xi_2\xi_3). \tag{3.24}$$

Согласно результатам, полученным в § 1 X главы, в случае (3.20_1), кроме (3.23_1), будут и другие решения, обладающие свойством

$$\rho_{kl} \to \tau_{kl} \quad \text{при } z \to z_0 \neq 0,\ 1, \tag{3.25}$$

если нет

$$\frac{\partial P(\tau_{12},\ \tau_{13})}{\partial \tau_{12}} = 0, \qquad \frac{\partial P(\tau_{12},\ \tau_{13})}{\partial \tau_{13}} = 0.$$

Мы имеем и следующее. При условии (3.20_1) $\rho_{12}\equiv\tau_{12}$, $\rho_{13}\equiv\equiv\tau_{13}$ (при этом $\rho_{23}\equiv\tau_{23}$) будет решением уравнений (2.29)—(2.33), обладающим свойством

$$\rho_{12} \to \tau_{12}, \qquad \rho_{13} \to \tau_{13} \text{ при } z \to 0. \tag{3.25$_1$}$$

Если вместе с (3.20_1) и $\dfrac{\partial P(\tau_{12},\ \tau_{13})}{\partial \tau_{12}} = 0$, то имеем и нестационарное решение, обладающее свойством (3.25_1), если при этом $\dfrac{\partial P(\tau_{12},\ \tau_{13})}{\partial \tau_{13}} \neq 0$ (теорема 3.2 главы XI). Но, вообще го-

[1] И тогда, приравнивая подкоренное выражение в (3.23) нулю и заменяя $\rho_{kl}=\tau_{kl}$, найдем b через ξ и τ_{kl}. Заметим, что в (3.22) $\sigma_4=\rho_{132}-\rho_{123}$— однородный полином 3-й степени относительно элементов матриц W_1, W_2, W_3, т. е. равенство (7.12) XI главы выполнено, где $u_3(\xi)$ должно быть однородным полиномом 3-й степени.

воря, решение (3.25_1) возможно и при $\frac{\partial P(\tau_{12}, \tau_{13})}{\partial \tau_{13}} = 0$ (§ 6, XI глава).

Если же $\frac{\partial P(\tau_{12}, \tau_{13})}{\partial \tau_{12}} \neq 0$, то такого нестационарного решения нет (теорема 3.2 главы XI).

Если $P(\tau_{12}, \tau_{23}) = 0$, $\frac{\partial P(\tau_{12}, \tau_{13})}{\partial \tau_{13}} = 0$, то, кроме стационарного решения[1] $\rho_{12} \equiv \tau_{12}$, $\rho_{13} \equiv \tau_{13}$, имеем также нестационарное, обладающее свойством

$$\rho_{12} \to \tau_{12}, \quad \rho_{13} \to \tau_{13} \text{ при } z \to 1. \tag{3.25$_2$}$$

Но позднее мы увидим, что решения (3.25_1) и (3.25_2) не могут соответствовать проблеме Римана.

Замечание 3.4. Следует иметь в виду, что так как σ_4 мы находим в виде (3.23_2) из (3.3), то в (2.29), (2.30) надо рассматривать обе ветви σ_4: $\sigma_4 = \sqrt{P(\rho_{12}, \rho_{13})}$ и $\sigma_4 = -\sqrt{P(\rho_{12}, \rho_{13})}$.

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ § 3

Покажем теперь, что других интегралов, не зависимых от найденных, не содержащих z, не существует [11, 18]. Для удобства вычислений обозначим $x_1 = \rho_{12}$, $x_2 = \rho_{13}$, $x_3 = \rho_{23}$, $x_4 = \sigma_4$, $x_5 = \sigma_5$.

Будем искать интеграл системы уравнений (2.29)—(2.33) $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_5)$, не зависящий от z. Тогда по определению интеграла имеем тождественное относительно x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и z равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{x_4}{z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{x_4}{1-z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{x_4}{z(z-1)} +$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\left[\frac{(\xi_2 - \xi_1)x_5 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3}{1-z} - \right.$$

[1] И эти стационарные решения, как мы видели, еще не доставляют решения, соответствующего проблеме Римана, если существует нестационарное решение $\rho_{12} \to \tau_{12}$, $\rho_{13} \to \tau_{13}$ при $z \to z_0 \neq 0, 1$, так как при этом нет

$$\frac{\partial P(\tau_{12}, \tau_{13})}{\partial \tau_{12}} = 0, \quad \frac{\partial P(\tau_{12}, \tau_{13})}{\partial \tau_{13}} = 0, \tag{Δ}$$

что отражает условие существования стационарного решения, соответствующего проблеме Римана: равенство нулю числителей уравнения (2.32), что равносильно (Δ) или (4.8). И, как мы увидим далее, это нестационарное решение и будет доставлять решение, соответствующее решению проблемы Римана.

$$
-\frac{(\xi_1-\xi_3)\,x_5+2\,x_5x_2-2\,x_1x_2}{z}\Bigg]+
$$

$$
+\frac{\partial\Phi}{\partial x_5}\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{1-z}+\frac{\xi_3-\xi_1}{z}\right)x_5=0.
$$

Умножая это равенство на $z(z-1)$ и приравнивая нулю коэффициенты при z и $z-1$, получим два уравнения для определения Φ (можно было бы приравнять нулю коэффициент при z и свободный член)

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\,x_4-\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,x_4-\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\,[(\xi_1-\xi_3)\,x_5+2\,x_2x_3-2\,x_1x_2]+
$$

$$
+\frac{\partial\Phi}{\partial x_5}\,(\xi_3-\xi_1)\,x_4=0, \tag{4.1}
$$

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\,x_4-\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\,x_4+\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\,[(\xi_2-\xi_1)\,x_5+2\,x_1x_2-2\,x_1x_3]+
$$

$$
+\frac{\partial\Phi}{\partial x_5}\,(\xi_2-\xi_1)\,x_4=0. \tag{4.2}
$$

Составим систему обыкновенных уравнений, соответствующих уравнению (4.1):

$$
\frac{dx_1}{x_4}=-\frac{dx_2}{0}=-\frac{dx_3}{x_4}=
$$

$$
=-\frac{dx_4}{(\xi_1-\xi_3)\,x_5+2\,x_2x_3-2\,x_1x_2}=\frac{dx_5}{(\xi_3-\xi_1)\,x_4}.
$$

Отсюда найдем четыре независимых решения уравнения (4.1)

$$
x_2=C_1,\qquad x_1+x_3=C_2,\qquad (\xi_3-\xi_1)\,x_1-x_5=C_3,
$$

$$
2\,x_1x_2x_3+\frac{(\xi_3-\xi_1)^2\,x_1^2}{2}-(\xi_3-\xi_1)\,x_1x_5+\frac{x_4^2}{2}=C_4.
$$

Общее решение уравнения (4.1) получаем, следовательно, в виде

$$
\Phi=\Phi\Bigg(x_2,\ x_1+x_3,\ (\xi_3-\xi_1)\,x_1-x_5,\ 2\,x_1x_2x_3+
$$

$$
+\frac{(\xi_3-\xi_1)^2}{2}\,x_1^2-(\xi_3-\xi_1)\,x_1x_5+\frac{x_4^2}{2}\Bigg),
$$

где Φ — произвольная функция.

Обозначая в Φ аргументы последовательно через u_1, u_2, u_3 и u_4 и подставляя эту функцию в уравнение (4.2), получим после сокращения на x_4

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}-\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}(\xi_2-\xi_1)-\frac{\partial\Phi}{\partial u_4}(\xi_2-\xi_1)u_3=0.$$

Составляя здесь соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, легко найти три независимых интеграла $u_1+u_2=C_1$, $(\xi_1-\xi_2)u_1-u_3=C_2$, $\frac{u_3^2}{2}-u_4=C_3$. Подставляя сюда значения u_1, u_2, u_3 и u_4 через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, получим $x_1+x_2+x_3=C_1$, $x_5+(\xi_1-\xi_2)x_2+(\xi_1-\xi_3)\times \times x_1=C_2$, $x_5^2-x_4^2=4x_1x_2x_3+C_3$.

Умножая первое из этих равенств на ξ_1 и вычитая второе, получим $\xi_1x_3+\xi_2x_2+\xi_3x_1-x_5=\xi_1C_1-C_2$, что может заменить второе равенство.

Таким образом, мы нашли три независимых интеграла:

$$x_1+x_2+x_3=C_1,\qquad x_5-\xi_1x_3-\xi_2x_2-\xi_3x_1=C_2,$$
$$x_5^2-x_4^2-4x_1x_2x_3=C_3,$$

которые совпадают с интегралами (3.1), (3.3), (3.21), и других, не зависимых от этих и не содержащих z, нет. Значения постоянных C_1, C_2 и C_3 в равенствах (3.1), (3.2) найдены.

Таким образом, чтобы изучить функции, решающие проблему Римана в случае (2.1), необходимо изучить свойства решений системы дифференциальных уравнений (3.22_1):

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\sqrt{P(x,y)}}{z},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{\sqrt{P(x,y)}}{1-z},\tag{4.3}$$

где $P(x, y)$ — полином, и, согласно замечанию после формулы (3.25), надо рассматривать обе ветви функции $\sqrt{P(x, y)}$, поэтому, согласно результатам, полученным в § 1 главы XI, решение системы (4.3) при любых конечных значениях (x_0, y_0) в точке $z=z_0(\neq 0, 1)$ существует по обе стороны от z_0 или существует вокруг z_0. Здесь

$$P(x,y)=4xy(x+y)+a_{20}x^2+a_{02}y^2+2a_{11}xy+$$
$$+a_{10}x+a_{01}y+a_0\tag{4.4}$$

с постоянными коэффициентами:

$$a_{20}=(\xi_3-\xi_1)^2,\quad a_{02}=(\xi_2-\xi_1)^2,\quad a_{11}=(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b,$$
$$a_{10}=2(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_2\xi_2)\xi_1,\quad a_{01}=2(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\xi_1,\tag{4.5}$$
$$a_0=\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2,\qquad b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3+\mu.$$

Как видно после (3.19) и (3.20),

$$\mu = -K = \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l}(W), \tag{4.5$_1$}$$

где $P_{2l}(W)$ — однородные полиномы степени $2l$ от элементов W_1, W_2 и W_3. Это система (7.1), (7.2), (7.3) XI главы.

Здесь в случае коммутирующих W_1, W_2 и W_3 будет $b = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3$, т. е. $\mu = 0$ [1], система переходит в систему вида (9.1) XI главы и решением уравнений (4.3), согласно (3.24), будет

$$x = \xi_1\xi_2, \quad y = \xi_1\xi_3. \tag{4.6}$$

При этих значениях x, y имеем

$$P(\xi_1\xi_2,\ \xi_1\xi_3) = 0 \tag{4.7}$$

и

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x} = 2(\tau_{12}\tau_{13} - \tau_{13}\tau_{23}) + (\xi_3 - \xi_1)(\xi_1\tau_{23} + \xi_2\tau_{13} + $$
$$+ \xi_3\tau_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3) \equiv 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\tau_{12}\tau_{13} - \tau_{13}\tau_{23}) + (\xi_2 - \xi_1)(\xi_1\tau_{23} + \xi_2\tau_{13} + $$
$$+ \xi_3\tau_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3) \equiv 0$$

в силу тождеств (3.7) (которые совпадают с (3.1$_1$) и (2.34)), где можно заменить $\rho_{kl} = \tau_{kl} = \xi_k\xi_l$.

Чтобы получить равенства (4.8), дифференцируем (4.4) по x или соответственно по y и заменяем $b = \tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23}$, $\rho_{kl} = \tau_{kl}$, $x = \rho_{12}$, $y = \rho_{13}$.

Таким образом, это будет случай IV системы (9.1) из XI главы. Как следует из общей теории уравнений типа (4.3) XI главы, при условии (4.8), кроме решений (4.6), нет других решений с начальными условиями (теорема 1.2 главы XI)

$$x \to \xi_1\xi_2, \quad y \to \xi_1\xi_3 \quad \text{при } z \to z_0 \neq 0,\ 1 \tag{4.9}$$

и (4.8) совпадает с (3.1) (т. е. (3.7) следует из $\sigma_4 = 0$).

Как мы показали, при $\rho_{kl} = \xi_k\xi_l$ выполнено и (3.20), поэтому решение (4.6) соответствует решению проблемы Римана ($\rho_{23} = \xi_2\xi_3$).

Следовательно, нас интересует такое решение системы (4.3), которое при $\mu = 0$ переходит в решение (4.6), или такое решение, которое при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 переходит в (4.6). Таким свойством обладает решение Лаппо-Дани-

---

[1] Но $\mu = 0$ не означает, что W_1, W_2 и W_3 коммутируют.

левского (замечание 1.2). Таким же свойством обладает параметрическое решение системы, полученное в § 9 XI главы. Но какое оно (решающее проблему Римана) при $\mu\neq 0$? Как его можно построить?

Мы нашли такие W_1, W_2 и W_3, которым соответствует стационарное решение ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} проблемы Римана.

Рассмотрим теперь уравнения (4.3), где $x=\rho_{12}$ и $y=\rho_{13}$. Пусть $x(z)$, $y(z)$ — решение уравнений (4.3) с начальными значениями $x=x_0$, $y=y_0$, при $z=z_0\neq 0$, 1, где $P(x_0, y_0)=0$.

Если при этом или

$$\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0,$$

то решение $x(z)$, $y(z)$, соответствующее проблеме Римана, не будет стационарным, так как нет (4.8), т. е. нет (3.1): $\sigma_4=$ $=\rho_{123}-\rho_{132}=0$, поэтому нет необходимого условия существования стационарного решения (2.34_1), соответствующего решению проблемы Римана.

Существуют ли такие W_1, W_2 и W_3, для которых $\rho_{12}=$ $=\rho^0_{12}=x_0$, $\rho_{13}=\rho^0_{13}=y_0$, $\rho_{23}=\rho^0_{23}$ при $z=z_0\neq 0$, 1 будут произвольно заданными и $P(x_0, y_0)=0$? Существуют, и вот как можно по заданным ρ^0_{12}, ρ^0_{13}, ρ^0_{23} найти W_1, W_2, W_3.

Мы имеем (1.17):

$$W_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\cdot 2\cdot 3} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}Q_j(a, b),$$

и эти ряды сходятся при достаточно малых $|U_j|$. Но эти функции мероморфные и, согласно (2.6), можно написать

$$\overline{W}_j=\frac{e^{2\pi i\xi_j}-1}{\xi_j}W_j=2\pi iU_j+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{1\cdot 2\cdot 3} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b),$$

здесь ряд сходится при всех конечных значениях U_1, U_2 и U_3.

Рассмотрим множество U_1, U_2, U_3, для которых ρ^0_{12}, ρ^0_{13} и ρ^0_{23} заданы, т. е. заданы $\rho^0_{kl}=\sigma(U_kU_l)$ и $P(x_0, y_0)=0$.

Пусть еще или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0$, или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0$. Это множество, согласно (1.17), порождает такие множества W_1, W_2 и W_3 (при $z=z_0$), для которых ρ^0_{kl} будут заданными и такими, что $P(x_0, y_0)=0$ и или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0$, или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0$.

Решение с такими начальными значениями x_0, y_0 при $z=z_0$ не будет стационарным, но будет голоморфным в окрестности точки $z=z_0$ и единственным.

Следовательно, оно и соответствует проблеме Римана (именно в силу единственности), так как такое решение, соответствующее проблеме Римана (в окрестности [1]) точки $z_0 \neq \neq 0, 1$), существует — так мы сейчас строили U_1, U_2, U_3 и W_1, W_2, W_3.

Согласно Лаппо-Данилевскому, U_i существует при произвольном z и достаточно малых $|\xi|$. У нас в окрестности любой точки $z_0 \neq 0$, 1 и при произвольных конечных $|\xi|$ (и при некоторых W_1, W_2, W_3). Но согласно § 2, мы должны брать U_k с $D(U_k)=0$.

Таким образом, мы показали, что произвольная точка z_0 при произвольных значениях ρ^0_{kl}, ρ^0_{klm}, удовлетворяющих условиям $P(\rho^0_{12}, \rho^0_{13})=0$, $\left|\dfrac{\partial P(\rho^0_{12}, \rho^0_{13})}{\partial \rho_{12}}\right| + \left|\dfrac{\partial P(\rho^0_{12}, \rho^0_{13})}{\partial \rho_{13}}\right| \neq 0$, не будет особенной для решения уравнений (4.3) $\rho_{kl}(z)$ при некоторых W_1, W_2 и W_3 (тем самым при некоторых τ_{kl}, τ_{klm} в $P(\rho_{12}, \rho_{13})$). Но это z_0 может оказаться особенным при других значениях W_1, W_2 и W_3.

Таким образом, для решения проблемы Римана необходимо найти решение уравнений (2.29)—(2.33) и подставить их в (2.11), после чего через формулы (2.5) и (2.4) получим решение проблемы Римана.

Но как можно найти решение уравнений (2.29)—(2.33), которое соответствует решению проблемы Римана?

Рассматривая решение уравнений (2.29)—(2.33), видим, что начальные значения ρ^0_{12}, ρ^0_{13}, ρ^0_{23}, ρ^0_{123}, ρ^0_{132}, z_0 решения, связанного с проблемой Римана, не могут быть независимыми, так как они подчинены интегралам (3.1*), (3.2$_1$) и (3.13). Можно ρ^0_{123}, ρ^0_{132} произвольно задать как функции ξ, τ_{kl}, τ_{klm}, а ρ^0_{12}, ρ^0_{13}, ρ^0_{23} найти из (3.1*), (3.2$_1$) и (3.13). Но ξ, τ_{kl}, τ_{klm} также не являются произвольными, так как связаны равенствами (3.1*) и (3.2$_1$). Но если W_1, W_2 и W_3 заданы с $D(W)=0$, то для них (3.1*) и (3.2$_1$) автоматически выполнены.

А можно поступить так. Запишем соответственно интегралы (3.13), (3.1*) и (3.2$_1$):

$$\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-K(\xi, \tau_{kl}, \tau_{klm})=b,$$

$$\xi_3\rho_{12}+\xi_2\rho_{13}+\xi_1\rho_{23}=\rho_{123}+\rho_{132}+\xi_1\xi_2\xi_3=B,$$

$$\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}=\rho_{123}\rho_{132}.$$

[1] Т. е. мы находим $\rho^0_{kl}(z)$ как функцию от z в окрестности точки z_0 при фиксированных (и не малых) W_1, W_2 и W_3.

Из первых двух уравнений находим

$$(\xi_2-\xi_3)\rho_{12}+(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}=\xi_2 b-B,$$

$$(\xi_3-\xi_2)\rho_{13}+(\xi_3-\xi_1)\rho_{23}=\xi_3 b-B,$$

откуда

$$\rho_{12}=\frac{\xi_2 b-B}{\xi_2-\xi_3}-\frac{(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}}{\xi_2-\xi_3},\quad \rho_{13}=\frac{\xi_3 b-B}{\xi_3-\xi_2}-\frac{(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}}{\xi_3-\xi_2}. \tag{4.10}$$

Подставим это в третье уравнение:

$$\left[\frac{\xi_2 b-B}{\xi_2-\xi_3}-\frac{(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}}{\xi_2-\xi_3}\right]\left[\frac{\xi_3 b-B}{\xi_3-\xi_2}-\frac{(\xi_3-\xi_1)\rho_{23}}{\xi_3-\xi_2}\right]\rho_{23}=$$

$$=\rho_{123}\rho_{132}. \tag{4.11}$$

Относительно ρ_{23} — это уравнение третьей степени. Величина B содержит $\rho_{132}+\rho_{123}$.

Зададим здесь $(\rho_{132}+\rho_{123})^0$, например, в виде $(\tau_{132}+\tau_{123})$ и $\rho^0_{23}=\tau_{23}$. Согласно (4.11), получим[1] значение $(\rho_{123}\,\rho_{132})^0$.

Заметим здесь следующее. Если W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то, как было указано выше, интегралам удовлетворяют значения $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$, $\rho_{klm}=\xi_k\xi_l\xi_m$. Если W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то, согласно $\rho^0_{23}=\tau_{23}$ и $(\rho_{132}+\rho_{123})^0=\tau_{123}+\tau_{132}$, имеем $\rho^0_{23}=$ $=\xi_2\xi_3$, $(\rho_{123}+\rho_{132})^0=2\xi_1\xi_2\xi_3$. А тогда и $(\rho_{123}\,\rho_{132})^0$, определенное равенством (4.11), при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 будет $(\rho_{123}\,\rho_{132})^0=\xi_1^2\,\xi_2^2\,\xi_3^2$, так как равенство (4.11) выполнено при $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$ и $\rho_{klm}=\xi_k\xi_l\xi_m$. И тогда в силу (4.10) будет $\rho^0_{13}=$ $=\xi_1\xi_3$, $\rho^0_{12}=\xi_1\xi_2$.

Таким образом, в уравнении (4.11) величины $(\rho_{132}+\rho_{123})^0$ и $(\rho_{132}\,\rho_{123})^0$ определены и известен один корень ρ^0_{23}. Два других значения ρ^0_{23} из уравнения (4.11) можно найти, так как это уравнение можно сократить на $(\rho_{23}-\rho^0_{23})$, после чего остается относительно ρ_{23} квадратное уравнение.

Таким образом, получим три решения уравнения (4.11): $\rho^{(k)}_{23}$, $k=1, 2, 3$, которые позволяют найти $\rho^{(k)}_{12}$, $\rho^{(k)}_{13}$, $k=1, 2, 3$, и соответственно построить три решения уравнений (2.29)—(2.33), соответствующие проблеме Римана.

Может быть, можно сразу положить $\rho_{klm}=\tau_{klm}$ и мы получим сразу одно решение $\rho_{kl}=\tau_{kl}$, а другие два значения ρ^0_{23} (и соответственно ρ^0_{12}, ρ^0_{13}) получим из (4.11). Это возможно, если имеем из (3.13) тождество

$$\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\tau_{12}-\tau_{13}-\tau_{23}=$$

[1] Этим мы как-то задали ρ_{123} и ρ_{132}.

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} D[\ln (e^{2\pi i W_1} e^{2\pi i W_2} e^{2\pi i W_3})] = K = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{123}),$$

которое имеет место, например, при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 (согласно (3.19), и $\tau_{kl} = \xi_k \xi_l$).

Но на этом не заканчивается определение начальных значений ρ^0_{kl} и ρ^0_{klm}, соответствующих проблеме Римана. Как отмечено выше, значения τ_{kl} и τ_{klm} должны быть связаны[1] равенствами (3.1*), (3.2$_1$). И, кроме того, решение проблемы Римана, согласно подстрочному замечанию к формуле (1.18), для коммутирующих W_1, W_2 и W_3 должно принимать вид $U_j = W_j$, так как в этом случае

$$X = (z - a_1)^{W_1} (z - a_2)^{W_2} (z - a_3)^{W_3} A,$$

$$A = (b - a_1)^{-W_1} (b - a_2)^{-W_2} (b - a_3)^{-W_3}.$$

Этим свойством должно, очевидно, обладать всякое решение проблемы Римана. Но в таком случае и наше решение проблемы Римана должно обладать свойством: начальные значения ρ^0_{kl} и ρ^0_{klm} должны перейти в $\rho^0_{kl} = \xi_k \xi_l$, $\rho^0_{klm} = \xi_k \xi_l \xi_m$, а решения системы (2.29)—(2.39) также должны перейти в $\rho^0_{kl} = \xi_k \xi_l$, $\rho^0_{klm} = \xi_k \xi_l \xi_m$ при коммутирующих W_1, W_2 и W_3.

Мы получим, вообще говоря, три набора начальных значений ρ^0_{kl}, ρ^0_{klm}:

$$\rho^{(\nu)}_{kl}, \ \rho^{(\nu)}_{klm}, \ \nu = 1, 2, 3. \tag{4.12}$$

Первое решение при $\nu = 1$ — это $\rho^{(0)}_{23} = \tau_{23}$, $\rho^{(0)}_{klm} = \tau_{klm}$ и соответственно $\rho^{(0)}_{12}$, $\rho^{(0)}_{13}$, при этом для всех трех таких начальных значений (4.12) будет:

$$(\rho_{123} + \rho_{132})^0 = \tau_{123} + \tau_{132} \ \text{и} \ (\rho_{123}\rho_{132})^0 = \tau_{123}\tau_{132}.$$

Отсюда следует, что при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 имеем

$$\rho^{(0)}_{kl} = \xi_k \xi_l \ \text{и} \ \rho^{(0)}_{klm} = \xi_k \xi_l \xi_m.$$

Следовательно, согласно предыдущему, первые начальные значения $\rho^{(0)}_{kl}$, $\rho^{(0)}_{klm}$ при $z = z_0$ уравнений (2.29)—(2.33) в случае коммутирующих W_1, W_2 и W_3 переходят в $\rho^{(0)}_{kl} = \xi_k \xi_l$, $\rho^{(0)}_{klm} = \xi_k \xi_l \xi_m$. А тогда и соответствующее решение уравнений (2.29)—

[1] Это и будет, если берем $D(W_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$.

2.33) $\rho_{kl}=\rho_{kl}(z)$, $\rho_{klm}=\rho_{klm}(z)$ при коммутирующих W_1, W_2 (и W_3 переходит в стационарное решение:

$$\rho_{kl}=\xi_k\xi_l,\ \rho_{klm}=\rho_{klm}(z)=\xi_k\xi_l\xi_m,$$

т. е. это решение обладает требуемым свойством решений, связанных с проблемой Римана.

Если для других корней $\rho_{23}^{(0)}$ уравнения (4.11) при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 также имеем $\rho_{23}^{(0)}=\xi_2\xi_3$, то имеем и соответственно $\rho_{12}^{(0)}=\xi_1\xi_2$, $\rho_{13}^{(0)}=\xi_1\xi_3$, поэтому и другие решения уравнений (2.29)—(2.33), соответствующие начальным значениям $\rho_{kl}^{(\nu)}$, $\rho_{klm}^{(\nu)}$, $\nu=2,\ 3$, будут обладать требуемым свойством, так как, очевидно, при коммутирующих W_1, W_2, W_3 будет $\rho_{23}^{(\nu)}=\xi_2\xi_3$ и $\rho_{13}^{(\nu)}=\xi_1\xi_3$, $\rho_{12}^{(\nu)}=\xi_1\xi_2$.

Но будет ли $\rho_{kl}^{(\nu)}=\xi_k\xi_l$ при $\nu=2,\ 3$, если W_1, W_2 и W_3 коммутируют? И прежде всего будет ли при коммутирующих W_1, W_2, W_3 другой корень $\rho_{23}^{(0)}=\xi_2\xi_3$?

Если этот другой корень $\rho_{23}^{(0)}$ уравнения (4.11) при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 переходит в $\rho_{23}^{(0)}=\xi_2\xi_3$, то при коммутирующих W_1, W_2, W_3 он кратный корень для уравнения (4.11). А тогда $\rho_{23}^{(0)}=\xi_2\xi_3$ удовлетворяет при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 и уравнению, полученному дифференцированием равенства (4.11) по $\rho_{23}^{(0)}$.

Как было показано выше, для коммутирующих W_1, W_2 и W_3 в (3.13) $K=0$, поэтому будет

$$\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{23}=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3,$$

т. е. будет $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$ и $B=3\xi_1\xi_2\xi_3$.

Продифференцируем равенство (4.11) по ρ_{23} и положим там $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$, $B=3\xi_1\xi_2\xi_3$. Получим

$$-\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_2-\xi_3}\left(\frac{\xi_3 b-B}{\xi_3-\xi_2}-\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}\rho_{23}\right)\rho_{23}-$$
$$-\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}\left(\frac{\xi_2 b-B}{\xi_2-\xi_3}-\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_2-\xi_3}\rho_{23}\right)\rho_{23}+$$
$$+\left(\frac{\xi_2 b-B}{\xi_2-\xi_3}-\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_2-\xi_3}\rho_{23}\right)\left(\frac{\xi_3 b-B}{\xi_3-\xi_2}-\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2}\rho_{23}\right)=0.$$

Умножаем это равенство на $(\xi_2-\xi_3)$:

$$(\xi_2-\xi_1)[\xi_3 b-B-(\xi_3-\xi_1)\rho_{23}]\rho_{23}+$$
$$+(\xi_3-\xi_1)[\xi_2 b-B-(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}]\rho_{23}-$$
$$-[\xi_2 b-B-(\xi_2-\xi_1)\rho_{23}][\xi_3 b-B-(\xi_3-\xi_1)\rho_{23}]=0,$$

$$-3(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\overset{2}{\rho}_{23}+2[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3 b-B)+$$
$$+(\xi_3-\xi_1)(\xi_2 b-B)+(\xi_2 b-B)(\xi_3-\xi_1)+$$
$$+(\xi_3 b-B)(\xi_2-\xi_1)]\rho_{23}-(\xi_2 b-B)(\xi_3 b-B)=0,$$
$$3(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\overset{2}{\rho}_{23}-2[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3 b-B)+(\xi_3-\xi_1)(\xi_2 b-$$
$$-B)]\rho_{23}+(\xi_2 b-B)(\xi_3 b-B)=0.$$

Подставляя сюда $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$, $B=3\xi_1\xi_2\xi_3$, получим

$$3(\xi_3-\xi_1)(\xi_2-\xi_1)\overset{2}{\rho}_{23}-2[(\xi_2-\xi_1)(\xi_1\xi_3^2+\xi_2\xi_2^3-2\xi_1\xi_2\xi_3)+$$
$$+(\xi_3-\xi_1)(\xi_1\xi_2^2+\xi_3\xi_2^2-2\xi_1\xi_2\xi_3)]\rho_{23}+$$
$$+(\xi_1\xi_3^2+\xi_2\xi_3^2-2\xi_1\xi_2\xi_3)(\xi_1\xi_2^2+\xi_3\xi_2^2-2\xi_1\xi_2\xi_3)=0.$$

Легко убедиться, что $\rho_{23}=\xi_2\xi_3$ не удовлетворяет этому уравнению. Это означает, что корни $\rho_{23}^{(\nu)}$, $\nu=2, 3$, не совпадают с $\rho_{23}^{(1)}=\overset{0}{\rho}_{23}$ и при коммутирующих W_1, W_2, W_3 не переходят в $\rho_{23}=\xi_2\xi_3$.

Тем самым $\rho_{23}^{(\nu)}$, $\nu=2, 3$, а вместе с этим и $\rho_{12}^{(\nu)}$, $\rho_{13}^{(\nu)}$, $\rho_{123}^{(\nu)}$, $\rho_{132}^{(\nu)}$ не являются такими начальными значениями в точке $z=$ $=z_0\neq 0$, 1, которые доставляют решение уравнений (2.29)—(2.33), связанных с проблемой Римана.

Но в целом, по-видимому, могут существовать и другие начальные значения $\rho_{12}^{(\nu)}$, $\rho_{13}^{(\nu)}$, $\rho_{23}^{(\nu)}$ $\rho_{123}^{(\nu)}$, $\rho_{132}^{(\nu)}$, удовлетворяющие интегралам (3.1*), (3.2$_1$) и (3.13), которые при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 переходят в $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$, $\rho_{klm}=\xi_k\xi_l\xi_m$, и тем самым доставляющие решения уравнений (2.29)—(2.33), связанные с проблемой Римана. Это вопрос о многозначности решения проблемы Римана, как функции от z. Мы нашим приемом нашли лишь одну систему начальных значений $\overset{0}{\rho}_{kl}$, $\overset{0}{\rho}_{klm}$, позволяющих построить решение уравнений (2.29)—(2.33), связанных с проблемой Римана.

З а м е ч а н и е 4.1. Мы построили решение уравнений (4.3) в главе XI в виде (4.18)

$$y=(1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}}-\frac{1}{2}\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)}+v,\quad u=x-x_0,$$

где $u\to 0$ и $v\to 0$ при $z\to 1$.

В этой главе это решение записано под номером (6.5) и показано, что оно не является решением, соответствующим проблеме Римана. Рассмотрим на этом решении точку $z=$ $=\bar z\neq 0$, 1 и соответствующие $x=\bar x$, $y=\bar y$ при некоторых W_1, W_2 и W_3. Если на этом решении $P(\bar x, \bar y)\neq 0$, то в точке $z=z_0$

это решение голоморфное и не лежит на решении, соответствующем проблеме Римана, так как решение, связанное с проблемой Римана, как мы показали, непродолжимо в окрестность точки $z=1$ (см. § 8).

Это означает, что при некоторых $x=x_0=\rho_{12}$, $y=y_0=\rho_{13}$ из трех интегралов нельзя найти ρ_{23}, ρ_{123}, ρ_{132}, переходящих соответственно в $\xi_2\xi_3$, $\xi_1\xi_2\xi_3$, или после нахождения из первых двух интегралов $\overset{0}{\rho}_{132}$, $\overset{0}{\rho}_{123}$ и подстановки их в 3-й интеграл получим уравнение, из которого нельзя найти ρ_{23}, переходящего в $\xi_2\xi_3$ при коммутирующих W_1, W_2 и W_3.

После того как мы построили решения $\rho_{kl}(z)$ и $\rho_{klm}(z)$ системы (2.29)—(2.33), соответствующие проблеме Римана, появляются вопросы:

1. Есть ли у этих решений особые точки $\overset{*}{z}$ и какие они?
2. Как ведут себя решения $\rho_{kl}(z)$ при $z\to 0$ или $z\to 1$?
3. Можно ли найти такое множество W, что $U\to U_0$ конечное или $\rho_{kl}\to\overset{0}{\rho}_{kl}$ конечное при $z\to 0$ или при $z\to 1$?

На эти вопросы мы ответим позднее. Здесь обратим внимание на следующее обстоятельство.

Как мы отметили, при условии (3.20_1), когда имеем $\tau_{132}-\tau_{123}=0$ и (3.21), определитель Δ уравнения (2.5) обращается в нуль. Если при этом W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то U_i определяется равенством подстрочного примечания к формуле (1.18), т. е. $U_i=W_i$, $i=1, 2, 3$, и, как мы отметили после (2.5), три из α_0, α_1, α_2, α_3 будут произвольными, а четвертый найдется через них. Если же W_1 и W_2 не коммутируют, а W_2, W_3 и W_1, W_3 коммутируют, то здесь для $U_1=W_1$ найдутся [1] $\alpha_0=\alpha_2=\alpha_3=0$, $\alpha_1=1$, так как в этом случае $\tau_{23}=\xi_2\xi_3$ и $\tau_{13}=\xi_1\xi_3$, $\sigma(U_1\ U_2)=\tau_{12}$. Другими словами, когда в системе (2.5) $\sigma(U_1W_1)=\xi_1^2$, то случай $\Delta=0$ не является особенностью для функций U_k ($k=1, 2, 3$). Но в общем случае $\Delta=0$ будет особенностью для функций U_i. Особенным случаем будет и тот, когда числа ξ_1, ξ_2 или ξ_3 будут целыми. Это видно из (2.6) и (2.8), так как при целом ξ_k W_k имеет полярную особенность. Это, как мы видели, наблюдалось и для функций $W_k=\Phi_k(U_1, ..., U_m)$ согласно формуле (1.17).

Какие же еще особенности можно увидеть для функций $U_k(W_1, W_2, W_3)$?

Еще мы здесь имеем в пространстве W_1, W_2 и W_3 многозначные особенности, которые содержат формулы [2] (3.18) и (3.19). В целом функция (3.19) в пространстве W_1, W_2, W_3 бесконечнозначная. Этим, согласно (3.20), определяется и многозначность функций ρ_{kl}, а также (в силу интегралов (3.1_1) и

---

[1] При условии $\tau_{132}-\tau_{123}=0$.
[2] [34], пояснение к теореме 2.2.

(3.3)) σ_4 и σ_5. Этим определяется и многозначность функций $U_i(W_1, W_2, W_3)$. Многозначность U_i как функций от a_1, a_2 и a_3 определяется зависимостью U_i от z и непосредственно от a_1, a_2 и a_3. Но, как мы видели в главе XI, $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ имеют только подвижные полюсы, поэтому U_j как функция от z будет однозначной функцией в области $M(z)$, не содержащей точек $z=0$; $z=1$.

§ 5. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (4.3) ПРИ $z \to 0$ И $z \to 1$

Замечание 5.1. Пусть $x(z)$ и $y(z)$ — вещественное решение уравнений (4.3) и $0<z<1$. Тогда, как следует из предыдущего, либо это решение существует при $z \to 0$ (или $z \to 1$), либо на этом пути встречается особая точка z_1 типа $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $z \to z_1 \neq 0$, которая будет полюсом (глава XI, § 2) второго порядка. Пусть такой точки z_1 в промежутке (0, 1) нет. Тогда решение существует на пути $z \to 1$. Мы видели (глава XI, § 3, 4), что при этом возможно:

I. $x \to x_0$, $y \to y_0$ (конечные) или

II. $y \to \infty$, $x \to x_0$.

Так как, очевидно, x и y изменяются монотонно, то точка $z=1$ не может быть точкой неопределенности. Покажем еще, что невозможно $x \to \infty$, $y \to \infty$ при $z \to 1$. Действительно, если, напротив, это имеет место, то по Лопиталю

$$\lim \frac{x}{y} = \lim \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \lim_{z \to 1} \frac{1-z}{z} = 0.$$

Это означает, что $y \to \infty$ быстрее, чем x, и $x = y(1-z) + y\delta(1-z)$, где $\lim\limits_{z \to 1} \frac{\delta(1-z)}{1-z} = 0$. Так как

$$P = x^2y + \ldots = xy^2\left(1 + \frac{x}{y} + \ldots\right) = xy^2\left[1 + \left(\frac{x}{y}\right)\right],$$

где $\left(\frac{x}{y}\right)$ — малая порядка $\frac{x}{y}$ при $z \to 1$, то

$$\frac{dx}{dz} = 2y\frac{\sqrt{x}}{z}\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{2x^{3/2}}{z[1-z+\delta(1-z)]} = \frac{2x^{3/2}}{z(1-z)\left[1+\frac{\delta(1-z)}{1-z}\right]}.$$

Отсюда имеем

$$x^{-\frac{1}{2}}-x_1^{-\frac{1}{2}}=\int\limits_{z_1}^{z}\frac{dz}{(1-z)z\left[1+\frac{\delta(1-z)}{1-z}\right]}\to\infty \text{ при } z\to 1,$$

что противоречит предположению $x\to\infty$ при $z\to 1$. Следовательно, решение $x\to\infty$, $y\to\infty$ при $z\to 1$ невозможно. Таким образом, решения I и II исчерпывают те решения, которые существуют при $z\to 1-0$ (или при $z\to 0+0$, при этом решение II заменяется решением $x\to-\infty$, $y\to y_0$ при $z\to 0+0$) (глава XI, § 4, 9).

Рассмотрим теперь решения

$$x\to x_0,\quad y\to y_0 \text{ при } z\to 0, \tag{5.1}$$

где x_0, y_0 конечные.

Такое решение рассматривается в § 3 главы XI.

Если такое решение есть, то, как было показано, должно быть

$$P(x_0,\ y_0)=0 \text{ и } \frac{\partial P(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0. \tag{5.2}$$

Существуют ли такие значения x_0, y_0, для которых выполнены равенства (5.2)?

Первое из равенств (5.2) для системы (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned}P(x,\ y)&=4xy(x+y)+(\xi_3-\xi_1)^2x^2+(\xi_2-\xi_1)^2y^2+\\&+2[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]xy+\\&+2(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\xi_1x+2(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\xi_1y+\\&+\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2=0\end{aligned} \tag{5.3}$$

или

$$\begin{aligned}P(x,\ y)&=[4y+(\xi_3-\xi_1)^2]x^2+2[((\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b)y+\\&+2y^2+(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_3\xi_2)\xi_1]x+\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2+\\&+(\xi_2-\xi_1)^2y^2+2(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\xi_1y=0\end{aligned} \tag{5.4}$$

и второе

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial x}&=[4y+(\xi_3-\xi_1)^2]x+[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-\\&-2b]y+2y^2+(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\xi_1=0,\end{aligned} \tag{5.5}$$

где b дано равенствами (4.5) и (4.5$_1$).[1)]

[1)] Кроме того, согласно предыдущему (см. § 4 после (4.5$_1$)), нас интересуют главным образом такие случаи, когда $x=x_0(\mu)\to\xi_1\xi_2$ и $y_0=y_0(\mu)\to\xi_1\xi_3$ при $\mu\to 0$, где μ входит в b.

Чтобы построить решение (5.1) системы (4.3), нужно, согласно (3.18) из XI главы, найти

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,\ y)}{\partial x^2}}\,, \\ \lambda_2 &= -1 + \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,\ y)}{\partial x^2}}\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где следует [1] подставить $x=x_0$ и $y=y_0$, найденные из (5.4) и (5.5). Следовательно, здесь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,\ y)}{\partial x^2} = 4y_0 + (\xi_3 - \xi_1)^2 \tag{5.7}$$

и y_0 — функция от μ, которая определяется системой уравнений (5.4) и (5.5). Если $R(\lambda_1)<0$, $R(\lambda_2)<0$, то решение (5.1) существует (по-видимому, единственное, но доказательства этого нет) и будет голоморфным в окрестности $z=0$. Определяет ли система уравнений (5.4), (5.5), где b задано формулой (4.5), функции $x(\mu)$, $y(\mu)$? Сначала рассмотрим предельную систему при $\mu=0$, когда $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$. Равенство (5.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P(x,\ y) = [(\xi_2 - \xi_1)\,y + (\xi_3 - \xi_1)\,x + \xi_1 b - \xi_1\xi_2\xi_3]^2 - \\ - 4xy(b - x - y). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Если подставим сюда $b=\tau_{12}+\tau_{13}+\tau_{23}$ и $x=\tau_{12}$, $y=\tau_{13}$, то получим (3.21)

$$\begin{aligned} P(\tau_{12},\ \tau_{13}) = (\xi_1\tau_{23} + \xi_2\tau_{13} + \xi_3\tau_{12} - \xi_1\xi_2\xi_3)^2 - \\ - 4\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

при условии $\tau_{123} - \tau_{132} = 0$, например при коммутирующих W_1, W_2 и W_3, когда $x = \xi_1\xi_2$, $y = \xi_1\xi_3$, $\tau_{23} = \xi_2\xi_3$, $b = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3$. Таким образом, предельному равенству (5.3) или (5.4) удовлетворяют

$$x = \xi_1\xi_2,\quad y = \xi_1\xi_3.$$

---

[1] В XI главе рассматривалась система $\frac{dx}{dz} = \frac{2\sqrt{P}}{z}$, $\frac{dy}{dz} = \frac{2\sqrt{P}}{1-z}$, а в системе (4.3) нет 2 перед корнем, поэтому в (4.3) под знаком корня надо рассматривать $\frac{1}{4}P$ и вместо $2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ в формуле (3.18) главы XI поставить $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, что и сделано в (5.7).

Рассмотрим предельное равенство для (5.5). Это будет первое равенство (4.8) при $\tau_{kl}=\xi_k\xi_l$, поэтому оно выполнено. Но определяют ли уравнения (5.4), (5.5) такие $x(\mu)$, $y(\mu)$, что

$$x(\mu)\to\xi_1\xi_2,\quad y(\mu)\to\xi_1\xi_3 \text{ при } \mu\to 0\,? \tag{5.10}$$

На это можно смотреть так: $x(\mu)$ и $y(\mu)$ определяются из уравнений

$$P(x,\ y)=0 \quad\text{и}\quad \frac{\partial P(x,\ y)}{\partial x}=0. \tag{5.11}$$

Найдем якобиан для этих уравнений в точке $\mu=0$, $x=\tau_{12}$, $y=\tau_{13}$. В силу (4.8)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} \end{vmatrix}_{\mu=0,\ x=\tau_{12},\ y=\tau_{13}} = 0. \tag{5.11$_1$}$$

Следовательно, имеем сомнительный случай, который можно изучить так, как показано в [12]. Но мы поступим иначе.

Нам нужно решить вопрос о совместности уравнений (5.4) и (5.5). Так как в (5.4) и (5.5) x одно и то же и (5.5) получено из (5.4) дифференцированием по x, то выполнение (5.5) означает условие кратности корня x уравнения (5.4):

$$\begin{aligned}[2y^2+((\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b)\,y+(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1]^2-{}\\ -[4y+(\xi_3-\xi_1)^2]\,[\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2+(\xi_2-\xi_1)^2y^2+{}\\ +2(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1 y]=0.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Отсюда получим

$$y=y_1=0 \tag{5.13}$$

и

$$\begin{aligned}y^3+y^2[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)-2b]+y\,[b^2-{}\\ -b(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)+\xi_1(b-\xi_2\xi_3)(\xi_3-2\xi_2+\xi_1)]-{}\\ -b\xi_1(\xi_3-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)-\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2=0\end{aligned} \tag{5.14}$$

или.

$$\begin{aligned}y^3+y^2[\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_3-\xi_2^2+\xi_1\xi_2-2b]+y\,[b^2+b(2\xi_1\xi_3-{}\\ -\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3)+2\xi_1\xi_2^2\xi_3-\xi_1^2\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_2\xi_3^2]-{}\\ -b^2\xi_1\xi_3+b\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1+\xi_3)-\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2=0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Так как (5.4) и (5.5) при $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$ и $x=\xi_1\xi_2$, $y=\xi_1\xi_3$ выполнены, то (5.14) выполнено при $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$ и $y=\xi_1\xi_3$, т. е. (5.14) выполнено при $\mu=0$ и имеет корень $y=\xi_1\xi_3$. Но убедимся непосредственно в том, что уравнению (5.14) удовлетворяет $y=\xi_1\xi_3$ при $\mu=0$. Запишем (5.14) в виде

$$b^2(y-\xi_1\xi_2)+b[\xi_1^2\xi_2\xi_3+\xi_1\xi_2\xi_3^2+y(2\xi_1\xi_3-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3)-$$
$$-2y^2]+y^3+y^2(\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_3-\xi_2^2+\xi_1\xi_2)+$$
$$+y(2\xi_1\xi_2^2\xi_3-\xi_1^2\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_2\xi_3^2)-\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2=0. \tag{5.16}$$

Подставляя сюда $y=\xi_1\xi_3$, видим, что это равенство выполнено независимо от значения b, т. е. и при $\mu\neq 0$. Это значит, что (5.15) делится на $(y-\xi_1\xi_3)$. Легко видеть, что (5.16) можно представить в виде

$$(y-\xi_1\xi_3)[b^2-b(2y+(\xi_1+\xi_3)\xi_2)+y^2-$$
$$-y(\xi_2^2-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3)+\xi_1\xi_2^2\xi_3]=0,$$

откуда имеем

$$y=y_2=\xi_1\xi_3 \tag{5.17}$$

и

$$y^2-y(2b+\xi_2^2-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_3)-b(\xi_1+\xi_3)\xi_2+$$
$$+\xi_1\xi_2^2\xi_3+b^2=0. \tag{5.18}$$

Легко убедиться в том, что $y=\xi_1\xi_3$ удовлетворяет и уравнению (5.18) при $\mu=0$.

Будем искать решение уравнения (5.18), обладающее свойством

$$y(\mu)\to\xi_1\xi_3 \text{ при } \mu\to 0. \tag{5.19}$$

Корнями уравнения (5.18) будут ($b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3+\mu$):

$$y_3(\mu)=\frac{1}{2}(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+2\xi_1\xi_3+\xi_2^2+2\mu)-$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_2^2)^2+4\xi_2^2\mu}, \tag{5.20}$$

$$y_4(\mu)=\frac{1}{2}(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+2\xi_1\xi_3+\xi_2^2+2\mu)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_2^2)^2+4\xi_2^2\mu}. \tag{5.21}$$

Отсюда видим, что

$$y_3(\mu) \to \xi_1\xi_3 \text{ при } \mu \to 0 \tag{5.22}$$

и

$$y_4(\mu) \to \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 + \xi_2^2 \text{ при } \mu \to 0. \tag{5.23}$$

Чтобы найти соответствующие значения $x(\mu)$, нужно подставить значения y_2 и y_3 в (5.4). Но y определено из уравнения (5.12), которое является условием кратности корня x уравнения (5.4), поэтому $x(\mu)$ можно определить просто из (5.5). Если подставим в (5.5) $y_2 = \xi_1\xi_3$ и $b = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \mu$, то после сокращений получим

$$(\xi_1 + \xi_3)^2 x = \xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_3)^2 + \xi_1(\xi_1 + \xi_3)\mu. \tag{5.24}$$

Если $\xi_1 + \xi_3 \neq 0$[1], то отсюда найдем

$$x = \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_3}\mu \to \xi_1\xi_2 \text{ при } \mu \to 0. \tag{5.25}$$

Таким образом, искомое решение уравнений (5.4), (5.5) имеет вид

$$y_2 = \xi_1\xi_3, \quad x_2 = \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_3}\mu. \tag{5.26}$$

Напоминаем, что если W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то, согласно замечанию к функциям (1.18), коммутируют и U_1, U_2, U_3 и $\mu = 0$. И так как $D(W_k) = D(U_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$, то, согласно (3.8), $\tau_{kl} = \rho_{kl} = \xi_k\xi_l$, что здесь и выполнено.

Будем искать решение y_3, x_3. Подставим значение $y_3(\mu)$ в (5.5):

$$[4y_3(\mu) + (\xi_3 - \xi_1)^2]x + [(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1) - 2b]y_3 +$$
$$+ 2y_3^2 + (\xi_3 - \xi_1)(b - \xi_2\xi_3)\xi_1 = 0. \tag{5.27}$$

При $\mu \to 0$, как видно на основании (5.20) и $b = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \mu$, (5.27) переходит в

$$(\xi_1 + \xi_3)^2 x - \xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_3)^2 = 0,$$

откуда видим, что при $\mu \to 0$ имеем

$$x(\mu) \to \xi_1\xi_2, \text{ если } \xi_1 + \xi_3 \neq 0. \tag{5.28}$$

---

[1] Если же $\xi_1 + \xi_3 = 0$, то x — произвольная функция от ξ_1, ξ_2, ξ_3 и μ и, следовательно, такая, что при $\mu \to 0$ будет $x \to \xi_1\xi_2$. Но нет $x \to \xi_1\xi_2$ при $\xi_1 + \xi_3 \to 0$ и при $\mu \to 0$.

Таким образом, можно построить два решения типа (5.1), где x_0, y_0 даны или формулами [1] (5.26), или (5.27), (5.20). При коммутирующих W_1, W_2 и W_3 будет $\mu=0$ и найденные $x(z, \mu)$, $y(z, \mu)$ в общем случае переходят в $x\equiv\xi_1\xi_2$, $y\equiv\xi_1\xi_3$, так как $x_0(0)=\xi_1\xi_2$, $y_0(0)=\xi_1\xi_3$ и тогда, как мы показали, выполняется не только равенство (4.7), но и (4.8). И можно показать, что найденные значения $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$ не удовлетворяют равенству $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}=0$ при $\mu\neq 0$, поэтому решение с начальными значениями $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$ не будет стационарным[2].

Но при $\mu\to 0$ в общем случае уравнений (1.5), когда $P(x, y)$ дана в виде (1.1) (глава XI), решение стремится к стационарному, как видно из доказательства теоремы 3.2 (глава XI, формула (3.12_1)). В общем случае, но не всегда, так как при некоторых значениях коэффициентов полинома (1.1) и при условиях

$$P(x_0, y_0)=\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}=\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}=0$$

в формальных рядах (3.11) не получим

$$x_k=y_k=u_k=0 \text{ при } k\geqslant 1, \text{ при } \mu=0.$$

(И не получим голоморфных рядов (3.11) (глава XI, § 3), если $\left.\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_{x_0, y_0}=\dfrac{1}{2}$.)

Возвращаемся к формулам (5.6) и (5.7). Найдем значение величины (5.7). Если $y_0=y_2=\xi_1\xi_3$, то

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2}=4\xi_1\xi_3+(\xi_3-\xi_1)^2=(\xi_1+\xi_3)^2, \tag{5.29}$$

$$\lambda_1=-1-(\xi_1+\xi_3),\ \lambda_2=-1+(\xi_1+\xi_3). \tag{5.30}$$

Если же

$$y_0=y_3=\frac{1}{2}\left(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+2\xi_1\xi_3+\xi_2^2+2\mu\right)-$$

---

[1] И, конечно, еще $y_0=0$, $x=\dfrac{\xi_1(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\mu)}{\xi_1-\xi_3}$. Но это нас меньше интересует, так как при коммутирующих W_1, W_2, W_3 будет $\mu=0$, а x_0, y_0 при этом не переходят здесь в $x_0=\xi_1\xi_2$, $y_0=\xi_1\xi_3$.

[2] См. примечание к (3.13) (глава XI). Хотя и при $P(x_0, y_0)=\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}=0$ оно может быть нестационарным (см. главу XI), но при $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0$ оно заведомо нестационарно (глава XI).

$$\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_2^2)^2+4\xi_2^2\mu},$$

то при

$$4y_0+(\xi_3-\xi_1)^2=(\xi_1+\xi_3)^2+2\xi_1\xi_2+2\xi_2\xi_3+2\xi_2^2+4\mu-$$
$$-2\sqrt{(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_2^2)^2+4\xi_2^2\mu}>0 \qquad (5.31)$$

λ_1, λ_2 будут вещественными. Если $\xi_1+\xi_3=0$, то

$$4y_0+(\xi_3-\xi_1)^2=2\xi_2^2+4\mu-2\sqrt{\xi_2^4+4\mu\xi_2^2}. \qquad (5.32)$$

Отсюда видим, что возможен и такой случай, когда $4y_0+(\xi_3-\xi_1)^2<0$ (при $\xi_1+\xi_3$, близкой к нулю). Следовательно, возможны неравенства

$$\lambda_1<0, \quad \lambda_2<0, \qquad (5.33)$$

$$\lambda_1<0, \quad \lambda_2>0, \qquad (5.34)$$

$$\lambda_2>0 \quad \text{целое} \qquad (5.35)$$

или тот случай, когда λ_1, λ_2 комплексные с $R(\lambda)<0$.

Согласно результатам, полученным в § 3 XI главы, во всех этих случаях имеем голоморфное [1] в окрестности $z=0$ решение (5.1) — единственное или однопараметрическое семейство (если имеем (5.34) и выполнены некоторые дополнительные условия (глава XI, §3)). И когда берем $(x_0(\mu), y_0(\mu))\to(\xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3)$ при $\mu\to 0$, то μ не обязано быть малым, так как $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$ мы нашли в конечной форме, а не в виде рядов, т. е. вначале μ не малое, но потом $\mu\to 0$.

До сих пор, начиная с формулы (5.24), мы подробно рассматривали случай $\xi_1+\xi_3\neq 0$. Изучим теперь случай

$$\xi_1+\xi_3=0. \qquad (5.36)$$

Отметим сначала следующее. Как мы видели, решением уравнения (5.16) будет (5.17): $y_2=\xi_1\xi_3$, и это приводит к определению x_2 из (5.24). Если здесь $\xi_1+\xi_3=0$, то $x=x_2$ произвольное. И можно взять $x_2=x_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\to\xi_1\xi_2$ при $\mu\to 0$.

Например, можно взять $x_2=\xi_1\xi_2$. Но в этом случае выполнены условия (4.7) и (4.8) и нестационарных решений (5.1) может не быть согласно § 3 главы XI. Но мы можем построить, например, решение

$$y\to\xi_1\xi_3=-\xi_1^2, \quad x\to\xi_1\xi_2+a\mu \quad \text{при } z\to 0$$

[1] Неголоморфное решение (5.1) существует при специальных соотношениях между коэффициентами $P(x, y)$, что не относится к проблеме Римана, так как представления ρ_{12}, ρ_{13} Л.-Д. получены без ограничений на коэффициенты полинома $P(x, y)$ — предполагается только малость $|W|$.

с постоянной a, которое при $\mu \to 0$ переходит в решение $y = -\xi_1^2 = \xi_1\xi_3$, $x = \xi_1\xi_2$:

$$x = x(z,\ \xi_1\xi_2 + a\mu,\ -\xi_1^2), \quad y = y(z,\ \xi_1\xi_2 + a\mu,\ -\xi_1^2).$$

Рассмотрим теперь $y_3(\mu)$, данное (5.20). Имеем $y_3(\mu) \to \xi_1\xi_3$ при $\mu \to 0$. Если подставим это $y_3(\mu)$ в (5.5), то для определения $x_3(\mu)$ получим (в силу (5.36))

$$x_3 a\mu^2 + b\mu + \varphi(\mu^2) = 0,$$

где a и b — постоянные относительно μ и неравные нулю, а $\varphi(\mu^2)$ — малая порядка μ^2 при малом $|\mu|$. Отсюда видим, что $x_3(\mu) \to \infty$ при $\mu \to 0$.

Этим мы отметили решение (5.1) при условии $\xi_1 + \xi_3 = 0$, иногда переходящее в те решения, которые имеем в случае коммутирующих W_1, W_2 и W_3. Как видим из (5.26).

$$x_2 \to \infty \quad \text{при } \xi_1 + \xi_3 \to 0, \quad \text{если } \mu \to 0. \tag{5.37}$$

Но, может быть, при $\xi_1 + \xi_3 \to 0$ будет и $\mu \to 0$ [1] и притом так, что

$$\frac{\mu}{\xi_1 + \xi_3} \to 0. \tag{5.38}$$

Для некоммутирующих W_1, W_2 и W_3 возможны случаи, когда при $\xi_1 + \xi_3 = 0$ будет $\mu = 0$, но, возможно, и $\mu \neq 0$. Покажем это. Как видно из (3.20) и (3.19), $b = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \mu$, где $\mu = -K = \dfrac{1}{4\pi^2} \ln t_1 \cdot \ln t_2$, а t_1, t_2 найдены в виде (3.18):

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sigma(V_\infty^{-1}) \pm \sqrt{\sigma^2(V_\infty^{-1}) - 4D(V_\infty^{-1})}\ \right].$$

Здесь $\sigma(V_\infty^{-1})$ дана формулой (3.16), а $D(V_\infty^{-1})$ — (3.17).

Если $\xi_1 + \xi_3 = 0$, то $D(V_\infty^{-1}) = e^{2\pi i \xi_2}$, а

$$\sigma(V_\infty^{-1}) = -1 + e^{2\pi i \xi_2} + e^{2\pi i \xi_1} + e^{-2\pi i \xi_1} + \frac{e^{2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \times$$
$$\times \frac{e^{2\pi i \xi_2} - 1}{\xi_2} \tau_{12} - \frac{e^{2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \frac{e^{-2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \tau_{13} -$$
$$- \frac{e^{2\pi i \xi_2} - 1}{\xi_2} \frac{e^{-2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \tau_{23} - \frac{e^{2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \frac{e^{2\pi i \xi_2} - 1}{\xi_2} \times$$
$$\times \frac{e^{-2\pi i \xi_1} - 1}{\xi_1} \tau_{123}.$$

[1] Ведь μ — функция τ_{kl}, ξ_1, ξ_2 и ξ_3.

Если при $\xi_1+\xi_3=0$ будет или $t_1=1$, или $t_2=1$, то $\mu=0$, при этом имеется в виду, что W_1, W_2 и W_3 не коммутируют (так как при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 автоматически $\mu=0$).

Пусть

$$W_1=\begin{Vmatrix} a & a \\ a & a \end{Vmatrix}, \quad W_3=\begin{Vmatrix} -a & a^2 \\ 1 & -a \end{Vmatrix}, \quad W_2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \xi_2 \end{Vmatrix},$$

они не коммутируют и $D(W_k)=0$.

Если $\xi_2=m$ целое, то $D(V_\infty^{-1})=1$ и

$$\sigma(V_\infty^{-1})=e^{2\pi i\xi_1}+e^{-2\pi i\xi_1}-\frac{e^{-2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1}\,\frac{e^{2\pi i\xi_1}-1}{\xi_1}\,\tau_{13},$$

$$\tau_{13}=a(a-1)^2, \quad \xi_1=2a, \quad \xi_3=-2a.$$

Предположим $a=\dfrac{1}{2}$. Тогда $\xi_1=1$, $\sigma(V_\infty^{-1})=2$ и $t_1=t_2=1$, т. е. $\mu=0$. Но при $a=\dfrac{1}{3}$, как легко убедиться, будет

$$t_{1,2}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}-1\pm 2\sqrt{1-\sqrt{3}}\right)\neq 1 \quad \text{и } \mu\neq 0.$$

Таким образом, в случае (5.36) возможен случай (5.37). Однако $|W_1|$, $|W_2|$ и $|W_3|$ не малые.

Но возьмем

$$W_1=\begin{Vmatrix} a & a \\ a & a \end{Vmatrix}, \quad W_3=\begin{Vmatrix} -a & a \\ a & -a \end{Vmatrix}, \quad W_2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ a & -2a \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\xi_1=2a$, $\xi_3=-2a$, $\xi_2=-2a$, $\tau_{13}=0$,

$$\tau_{12}=-a^2, \quad \tau_{23}=3a^2, \quad \tau_{132}=\tau_{321}=0,$$

и пусть a малое. Легко найдем

$$\sigma(V_\infty^{-1})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-4\pi i a}+\frac{3}{4}e^{4\pi i a}+\frac{3}{4}e^{-8\pi i a},$$

$$D(V_\infty^{-1})=e^{-4\pi i a},$$

поэтому получим $t_{1,2}=1+\alpha_1 a+\alpha_2 a^2+\ldots$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — постоянные, не зависящие от a, и ряд сходится при малых a.

Таким образом, здесь $t_{1,2}\neq 1$, поэтому $\mu\neq 0$, $\xi_1+\xi_2=0$ и $\xi_1+\xi_3=0$.

Итак, как же могут себя вести решения уравнений (4.3) при $z\to 1$, возможны ли решения (5.1), если $\xi_1+\xi_3=0$? Мы видели, что если $\xi_1+\xi_3\neq 0$, то существует решение $x\to x(\mu)$, $y\to y(\mu)$ при $z\to 0$, которое мы умеем и строить. И в общем случае $x(\mu)\to\xi_1\xi_2$, $y(\mu)\to\xi_1\xi_3$ при $\mu\to 0$, причем в $x(\mu)$, $y(\mu)$ величина μ любая (не малая[1]). А в рядах Л.-Д. при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 (когда $\mu=0$) $x(\mu)$ и $y(\mu)$ при $\mu=0$ переходят в $x\equiv\xi_1\xi_2$, $y\equiv\xi_1\xi_3$ всегда[2]. Отсюда следует, что наше решение (5.1) не является иным представлением $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ для рядов Л.-Д. (при $\xi_1+\xi_3\neq 0$).

Решение (5.1) в случае $\xi_1+\xi_3=0$ также не может быть представлением рядов Л.-Д. для $\rho_{12}(z)$ и $\rho_{13}(z)$ (хотя бы потому, что случай $\xi_1+\xi_3=0$ не является особенным для рядов Л.-Д.).

Отсюда следует и то, что, продолжая аналитически ряды Л.-Д. $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ в окрестность точки $z=0$, мы не получим $\rho_{12}(z,\mu)\to\rho_{12}(\mu)$, $\rho_{13}(z,\mu)\to\rho_{13}(\mu)$ при $z\to 0$, так что $\rho_{12}(z)\to\to\xi_1\xi_2$, $\rho_{13}(z)\to\xi_1\xi_3$ при $\mu\to 0$, где $\rho_{12}(\mu)$ и $\rho_{13}(\mu)$ — найденные нами значения x и y из уравнений (5.4) и (5.5). Другими словами, значения $\rho_{12}(z,\mu)$, $\rho_{13}(z,\mu)$ Л.-Д. не обладают свойством (5.1).

Кстати, вспоминая обозначение $z=\dfrac{a_3-a_1}{a_3-a_2}$, видим, что при $a_3-a_1\to 0$ (т. е. $z\to 0$) функции Л.-Д. $\rho_{12}(z,\mu)$, $\rho_{13}(z,\mu)$ не переходят в $\rho_{12}(0,\mu)=\rho_{12}(U_1+U_3,\ U_2,\ \mu)$, $\rho_{32}(0,\mu)=$ $=\rho_{12}(U_1+U_3,\ U_2,\ \mu)$ и $\rho_{13}(0,\mu)=b-2\,\rho_{12}(0,\mu)$ (в силу интеграла $\rho_{12}(z,\mu)+\rho_{13}(z,\mu)+\rho_{32}(z,\mu)=b$), так как таких предельных значений при $z\to 0$ решение (5.1) уравнений (4.3): $\rho_{12}(z,\mu)$, $\rho_{13}(z,\mu)$ (и соответственно $\rho_{23}(z,\mu)$) иметь не может (в силу того, что для этих предельных значений условия (5.2) не выполняются). Здесь через $\rho_{12}(U_1+U_3,\ U_2,\ \mu)$ обозначено $\sigma((U_1+U_3)\,U_2)=\rho_{12}+\rho_{23}$, соответствующее системе Гаусса

$$\frac{dY}{dz}=Y\left(\frac{U_1+U_3}{z-a_1}+\frac{U_2}{z-a_2}\right),$$

в которую переходит система

$$\frac{dY}{dz}=Y\left(\frac{U_1}{z-a_1}+\frac{U_2}{z-a_2}+\frac{U_3}{z-a_3}\right)\quad\text{при } a_1\to a_3.$$

Нет решений $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ системы (4.3), которые при $z\to 0$ имеют предельные значения $\overset{*}{\rho}_{12}(0,\mu)=\rho_{12}(U_1+U_3,\ U_2,\ \mu)$, $\overset{*}{\rho}_{13}(0,\mu)=b-2\rho_{12}(0,\mu)$, так как эти значения ρ_{12}, ρ_{13} не удов-

---

[1] Так как $x(\mu)$ и $y(\mu)$ получены в конечной форме (5.26) и (5.20), (5.27).

[2] Т. е. без дополнительных условий, например, $\xi_1+\xi_3\neq 0$.

летворяют условиям (5.2). Поэтому и функции Л.-Д. $\rho_{12}(z, \mu)$, $\rho_{13}(z, \mu)$—решения системы (4.3) не имеют этих предельных значений $\overset{*}{\rho}_{12}(0, \mu)$, $\overset{*}{\rho}_{13}(0, \mu)$.

Возможны решения (5.1) и в том случае, если возьмем $y_0 = y_1 = 0$, $x_0 = \dfrac{\xi_1(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \mu)}{\xi_1 - \xi_3}$, данные после (5.27) или $y_0 = y_4(\mu)$, $x_0 = x_4(\mu)$, где $y_4(\mu)$ дано формулой (5.21). Но эти решения не переходят в решения, которые получаем для коммутирующих W_1, W_2 и W_3. Решения же типа (5.1), найденные для $y_2(\mu) = \xi_1\xi_3$ и $y_3(\mu) \to \xi_1\xi_3$ на основе (5.26) и соответственно (5.27) при $\mu \to 0$, разрушаются, если $\xi_1 + \xi_3 = 0$, так как при этом будет $x_0 = \infty$. С такими же явлениями мы сталкиваемся, рассматривая решения

$$x \to x_0, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 1 - 0, \tag{5.39}$$

где x_0 и y_0 определяются уравнениями

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \tag{5.40}$$

Отсюда найдем два решения $x_0(\mu)$, $y_0(\mu)$, обладающие свойством

$$x_0(\mu) \to \xi_1\xi_2, \quad y_0(\mu) \to \xi_1\xi_3 \quad \text{при } \mu \to 0, \tag{5.41}$$

которые позволяют построить решение (5.39). Одно из этих решений есть

$$x_0 = \xi_1\xi_2, \quad y_0 = \xi_1\xi_3 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}\mu. \tag{5.41$_1$}$$

Здесь особенным случаем будет тот, когда[1])

$$\xi_1 + \xi_2 = 0, \tag{5.42}$$

так как при этом будет

$$y_0 = \infty, \quad \text{если } \mu \neq 0, \tag{5.43}$$

т. е. решение (5.40) при условии (5.42) разрушается. В связи этим интересно рассмотреть решения

$$x \to \infty, \quad y \to y_0 \quad \text{при } z \to 0 \tag{5.44}$$

и

$$x \to x_0, \quad y \to \infty \quad \text{при } z \to 1 - 0 \tag{5.45}$$

уравнений (4.3).

---

[1]) Но в формулах Л.-Д. (при малых W) $\xi_1 + \xi_2 = 0$ не является особым случаем. Подробнее, как и при $\xi_1 + \xi_3 = 0$, поведение решения (5.1) при условии (5.42) рассматривать не будем.

Рассмотрим решение

$$x\to x_0, \quad y\to\infty \quad \text{при } z\to 1-0. \tag{6.1}$$

Согласно § 4 главы XI, где теперь

$$P(x, y) = xy(x+y) + \frac{(\xi_3-\xi_1)^2}{4}x^2 + \frac{(\xi_2-\xi_1)^2}{4}y^2 + \\ + \frac{1}{2}[(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]\,xy + \frac{1}{2}(\xi_3-\xi_1)\times \\ \times(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1 x + \frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1 y + \\ + \frac{1}{4}\xi_1^2(b-\xi_2\xi_3)^2,$$

будет

$$P_2(x) = x + \frac{1}{4}(\xi_2-\xi_1)^2, \quad P_1(x) = x^2 + \frac{1}{2}[(\xi_2-\xi_1)\times \\ \times(\xi_3-\xi_1)-2b]\,x + \frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1.$$

Следовательно, здесь в соответствии с формулой (4.18) главы XI имеем

$$P_2(x_0) = x_0 + \frac{(\xi_2-\xi_1)^2}{4}, \\ P_1(x_0) = \frac{2x_0^2 + [(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)-2b]\,x_0}{2} + \\ + \frac{(\xi_2-\xi_1)(b-\xi_2\xi_3)\,\xi_1}{2}. \tag{6.2}$$

Если положим $x_0 = \xi_1\xi_2$, то

$$P_2(x_0) = \frac{(\xi_2+\xi_1)^2}{4}, \quad P_1(x_0) = \frac{(\xi_2+\xi_1)\,\xi_1(\xi_1\xi_2-b)}{2} \tag{6.3}$$

и, следовательно, при условии (5.42) будет

$$P_2(x_0) = P_1(x_0) = 0. \tag{6.4}$$

Таким образом, решение (6.1) в общем случае в соответствии с (4.18) (глава XI) имеет вид[1)]

$$y = (1-z)^{-2\sqrt{P_2(x_0)}} - \frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)} + v, \quad x = x_0 + u, \tag{6.5}$$

где $P_2(x_0)$ и $P_1(x_0)$ даны формулами (6.2) и (6.3) и $v \to 0$, $u \to 0$ при $z \to 1-0$. Если же имеем (5.42), то в силу (6.3) решение (6.5) разрушается (если при этом $\mu \neq 0$), так как в (6.3) $\xi_1\xi_2 - b = -\mu - \xi_3(\xi_1 + \xi_2)$. Соответственно к таким же выводам придем, рассматривая решение (5.44). В общем случае такое решение существует (при условии $0 < 4\sqrt{P_2(y_0)} < 1$), а при $\xi_1 + \xi_3 = 0$ и $\mu \neq 0$ оно разрушается. Но если в (6.5) W_1, W_2 и W_3 так изменяются, что сначала $\mu \to 0$, а потом $\xi_1 + \xi_2 \to 0$, то решение (6.5) переходит[2)] в

$$y = 1 + \xi_1\xi_3 + v, \quad x = x_0 + u. \tag{6.6}$$

Соответственно так же ведет себя решение (5.44), когда сначала $\mu \to 0$, а затем $\xi_1 + \xi_2 \to 0$, — оно переходит в

$$x = 1 + \xi_1\xi_2 + v, \quad y = y_0 + u. \tag{6.7}$$

Это возвращает нас (как и в случае (6.6)) к решению (5.1) с конечными x_0 и y_0. При этом в (6.6) и (6.7) единицу надо опустить. Нарушается и условие $0 < 4\sqrt{P_2(x_0)} < 1$, так как $\xi_1 + \xi_3 = 0$. Заметим теперь, что если $\xi_1 + \xi_2 > 0$, а W_1, W_2 и W_3 коммутируют, то в (6.5) $x_0 = \xi_1\xi_2$, $\mu = 0$ и, следовательно, (6.5) переходит в

$$y = (1-z)^{-(\xi_1+\xi_2)} + \xi_1\xi_3 + v.$$

Так как при $z \to 1$ имеем $v \to 0$, то y не может перейти в $y \equiv \xi_1\xi_3$, что должно быть для коммутирующих W_1, W_2 и W_3. Отсюда следует, что решение (6.5) не может соответствовать проблеме Римана.

§ 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ρ_{12} И ρ_{13} НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО

Обращаемся к формулам (21) и (22) [4, ст. IV]. У нас разложение Лаппо-Данилевского (21) записано в форме (1.18):

$$U_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{1\cdot 2\cdot 3} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b), \quad j = 1, 2, 3, \tag{7.1}$$

---

1) Согласно теореме 4.1 (глава XI), должно быть $0 < 4\sqrt{P_2(x_0)} < 1$.

2) При $\mu = 0$, согласно (6.3), $P_1(x_0) = -\frac{\xi_1\xi_3}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2$ и, следовательно, в (6.5) $-\frac{1}{2}\,\frac{P_1(x_0)}{P_2(x_0)} = \xi_1\xi_3$.

где $R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}|b)$ определяются[1] формулами (22): $R_j(a_j|b) = 1$, $R_j(a_{j_1}|b) = 0$, если $j_1 \neq j$;

$$R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}|b) =$$

$$= -\sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{h_1 \ldots h_\mu}^{1\cdot 2\cdot 3} \sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}}|b) R_{h_2}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots$$

$$\ldots a_{j_{\varkappa_2}}|b) \ldots R_{h_\mu}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}}} \ldots a_{j_\nu}|b) \dot{Q}_j(a_{h_1} \ldots a_{h_\mu}|b). \tag{7.2}$$

Отсюда получим [49]

$$\rho_{12} = \tau_{12} + \tau_{132} \ln \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} + \tau_{123} \text{ nl} \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} + \ldots$$

или

$$\rho_{12} = \tau_{12} + (\tau_{132} - \tau_{123}) \ln z + \ldots, \quad z = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}. \tag{7.3}$$

Так же найдем [2]

$$\rho_{13} = \tau_{13} + (\tau_{123} - \tau_{132}) \ln(1 - z) + \ldots \tag{7.4}$$

Таким образом, согласно формулам Лаппо-Данилевского, ρ_{12} и ρ_{13} получаются в параметрической форме в соответствии с § 7 главы XI.

Как отмечено в замечании 1.2, ряды (7.1), а следовательно, и (7.3), (7.4) сходятся при любом расположении a_1, a_2, a_3 (у нас при любом конечном $z \neq 0, 1$), но при соответственно достаточно малых $|W|$. Это же было получено и в § 7—9 (глава XI) независимо от теории Лаппо-Данилевского на основании общей теории системы (*).

Заметим теперь, что во всех предыдущих разложениях решений случай $\xi_1 + \xi_3 = 0$ был особым для представления решения в окрестностях $z = 0$, а случай $\xi_1 + \xi_2 = 0$ — в окрестности $z = 1$.

Для параметрического представления решений Лаппо-Данилевского эти случаи не являются особыми. Но это представление, как и (7.3), (7.4), имеет тот недостаток, что представляет решение для любого z, но при соответственно достаточно малых $|W_1|$, $|W_2|$ и $|W_3|$.

---

[1] Здесь $Q_j(a_{h_1} \ldots a_{h_\mu}|b)$ определены формулами ст. II, § 5 [4].

[2] Заметим, что из существования ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23} в этом виде следует, что и $u = \sqrt{P(x, y)}$ в (4.3) представимо в виде $u = u_3(\xi) + \sum_{k=4}^{\infty} u_k(\xi, z)$, т. е. решение уравнений (7.1), (7.2) в виде (7.4) (глава XI) имеем. И у нас эти ряды сходятся (глава XI) при любых W и малом $|z - z_0|$ (см. (9.21)).

§ 8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ρ_{12} И ρ_{13} ПРИ $\xi_3=0$ И $W_3=0$

Зададимся вопросом, что произойдет с нашими решениями ρ_{12}, ρ_{13}, если $W_3=0$, т. е. $\xi_3=0$ (поскольку $D(W_3)=0$). Согласно формулам (3.16)—(3.19), $\sigma(V_\infty^{-1})$, $D(V_\infty^{-1})$, t_1, t_2 и K перейдут в такие величины, которые соответствуют проблеме Римана для системы Гаусса (1.20).

Как видно из (3.22), здесь будет $\sigma_4=0$, а это значит, что $\rho_{12}=\text{const}$ и $\rho_{13}=\text{const}$. Стационарные решения перейдут в ρ_{12} системы Гаусса.

Но очевидно, что теперь $\rho_{13}=0$, так как должно быть $U_3=0$. А из (3.23) получим (см. также (4.5$_1$)) $\rho_{12}=b=\xi_1\xi_2+\mu(0)$ или ввиду (3.20) $\rho_{12}=\xi_1\xi_2-K(0)$, $K(0)=\frac{1}{(2\pi i)^2}D[\ln(e^{2\pi iW_1}\times e^{2\pi iW_2})]=\frac{1}{2\pi i}\ln t_1\cdot\ln t_2$, где t_1, t_2—х. ч. V_∞^{-1}, соответствующие проблеме Римана для системы Гаусса, т. е. получаются из (3.18), где $\sigma(V_\infty^{-1})$ и $D(V_\infty^{-1})$ даны формулами (3.16) и (3.17) при $\xi_3=0$ и $W_3=0$; $\mu(0)$ и $K(0)$ обозначают, что здесь положено $\xi_3=0$.

Рассмотрим $x_k(\mu)$, $y_k(\mu)$, $k=1, 2, 3, 4$, полученные из (5.4) и (5.5) при $W_3=0$ и $\xi_3=0$.

Таким образом, в (5.4) $b=\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3+\mu\to\xi_1\xi_2+\mu(0)$ при $\xi_3\to 0$.

Рассмотрим предельное равенство для (5.4) при $\xi_3=0$. Так как $y|_{\xi_3=0}=0$, то (5.4) принимает вид

$$\xi_1^2x^2-2\xi_1^2(\xi_1\xi_2+\mu(0))x+\xi_1^2(\xi_1\xi_2+\mu(0))^2=0,$$

откуда $x=\xi_1\xi_2+\mu(0)$, т. е. значение ρ_{12} для системы Гаусса согласно тождеству (3.13) при $\xi_3=0$ и $W_3=0$.

Подставим $b=\xi_1\xi_2+\mu(0)$, $y=0$ и $\xi_3=0$, $W_3=0$ в (5.5). Получим $\xi_1^2x-\xi_1^2(\xi_1\xi_2+\mu(0))=0$, т. е. снова $x=\xi_1\xi_2+\mu(0)$.

Таким образом,

$$x=\xi_1\xi_2+\mu(0),\quad y=0 \tag{8.1}$$

удовлетворяют предельным равенствам (5.4) и (5.5) при $\xi_3=0$, $W_3=0$. Покажем, что значения (8.1) удовлетворяют и равенству

$$\frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}=0 \tag{8.2}$$

при $\xi_3=0$, $W_3=0$.

Из (5.4) найдем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^2 + 2\,[(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1) - 2b + 4y]\,x + 2\,(\xi_2 - \xi_1)^2 y +$$

$$+ 2\,(\xi_2 - \xi_1)(b - \xi_2\xi_3)\,\xi_1\Big|_{\xi_3=0,\ y=0} = \frac{1}{4}\Big\{x^2 -$$

$$-\left[\frac{\xi_1\xi_2 - \xi_1^2}{2} + \xi_1\xi_2 + \mu(0)\right]x + \frac{1}{2}\,(\xi_1\xi_2 - \xi_1^2)(\xi_1\xi_2 + \mu(0))\Big\} = 0$$

при $x_1 = \xi_1\xi_2 + \mu(0)$, $x_2 = \frac{1}{2}(\xi_1\xi_2 - \xi_1^2)$, т. е. x_1 совпадает с (8.1).

Таким образом, значения (8.1) удовлетворяют предельным равенствам (5.4), (5.5) и (8.2) при $\xi_3=0$ и $W_3=0$. Но значения (8.1) являются предельными для x и y, найденными ранее из (5.4), (5.5) в виде (5.26):

$$y_2 = \xi_1\xi_3, \quad x_2 = \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_3}\,\mu,$$

так как здесь $y_2 \to 0$ и $x_2 \to \xi_1\xi_2 + \mu(0)$ при $\xi_3 \to 0$, если $\xi_1 \neq 0$.

Остальные $x_k(\mu)$, $y_k(\mu)$, найденные из (5.4), (5.5), не имеют этих предельных значений при $\xi_3=0$, $W_3=0$. Отсюда следует и то, что голоморфное в окрестности точки $z=0$ решение (5.1), построенное нами для $x_0=x(\mu)$, $y_0=y(\mu)$, данными (5.26) и обладающими свойством

$$x_0 = x(\mu) \to \xi_1\xi_2, \quad y_0 = y(\mu) \to \xi_1\xi_3 \text{ при } \mu \to 0,$$

при $\xi_3 \to 0$, $W_3 \to 0$ всегда переходит в стационарное

$$x_2 = \xi_1\xi_2 + \mu(0), \quad y_2 = 0.$$

Это следует из уравнений (2.29) — (2.33), так как при $\xi_3 = 0$, $\sigma_4 \equiv 0$ и $\frac{d\sigma_4}{dz} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)\,\sigma_5}{1 - z} - \frac{\xi_1\sigma_5}{z} = 0$ будет $\sigma_5 = 0$. Удовлетворяется и равенство (3.20), которым мы воспользовались. При $\mu \to 0$, вообще говоря (но не всегда [1]), решение (5.1) переходит в $x \equiv \xi_1\xi_2$, $y \equiv \xi_1\xi_3$. Этими двумя свойствами обладает и представление Лаппо-Данилевского. Но решение (5.1) не связано с малостью W_1, W_2 и W_3, где они произвольны. Решение (5.39) можно строить для (5.41_1), оно обладает свойствами

$$x \to 0, \quad y \to \xi_1\xi_3 + \mu(0) \text{ при } \xi_2 \to 0. \tag{8.3}$$

Легко убедиться в том, что решение (6.5) не переходит в стационарное: $x \equiv 0$, $y \equiv \xi_1\xi_3 + \mu(0)$ при $\xi_2 \to 0$, т. е. не обла-

[1] Например, при $\xi_1 + \xi_3 = 0$.

дает свойством (8.3). Не переходит в стационарное и решение (5.44) при $\xi_3 \to 0$.

Итак, что же мы имеем? Имеем решение Л.-Д. в параметрической форме

$$x = x(\xi, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{123}, \tau_{132}, z),$$
$$y = y(\xi, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{123}, \tau_{132}, z) \tag{8.4}$$

при любом z и соответственно достаточно малых $|\xi|$ и $|\tau|$. Это решение обладает свойствами:

I. При коммутирующих W_1, W_2 и W_3

$$x \equiv \xi_1\xi_2, \quad y \equiv \xi_1\xi_3. \tag{8.5}$$

В силу замечания 1.2 этим условием обладает и общее решение проблемы Римана (а не только при малых $|W_k|$).

II. При $W_3 = 0$ будет

$$x \equiv \xi_1\xi_2 + \mu(0), \quad y \equiv 0. \tag{8.6}$$

III. При $W_2 = 0$ имеем

$$x \equiv 0, \quad y \equiv \xi_1\xi_3 + \mu(0), \tag{8.7}$$

где $\mu(0)$ означает, что в μ положено $W_2 = 0$.

С другой стороны, имеем решение уравнений (4.3)

$$\text{A)}\ x = x(\mu, \xi, z), \quad y = y(\mu, \xi, z) \tag{8.8}$$

в окрестности $z = 0$ и обладающее свойствами

$$x \to x_0 = \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_3}\mu, \quad y \to y_0 = \xi_1\xi_3 \text{ при } z \to 0 \tag{8.9}$$

и I, II, III. Свойство I имеем лишь вообще говоря (не всегда, например, свойство I не выполнено при $\xi_1 + \xi_3 = 0$).

Имеем также решение

$$\text{B)}\ x = \bar{x}(\mu, \xi, z), \quad y = \bar{y}(\mu, \xi, z) \tag{8.10}$$

в окрестности точки $z = 1$ и обладающее свойствами

$$x \to x_0 = \xi_1\xi_2, \quad y \to y_0 = \xi_1\xi_3 + \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}\mu \text{ при } z \to 1 \tag{8.11}$$

и I, II, III. Свойство I имеем лишь в общем случае [1] (т. е. не всегда, например, этого свойства нет при $\xi_1 + \xi_2 = 0$). Здесь появляются вопросы:

а) Не являются ли решения (5.1) и (5.39) (или (8.8), (8.10)) разными представлениями одного и того же решения?

[1] Но удовлетворяют ли решения (8.8) и (8.10) 3 интегралам? См. замечание 4.1 в этой главе.

б) Не совпадают ли эти решения с решениями Л.-Д. (8.4)? Если совпадают, то мы получаем решение проблемы Римана при z, близких к $z=0$ и $z=1$ и произвольных W. Возможно ли аналитическое продолжение решений (5.1) и (5.39) соответственно из окрестности $z=0$, $z=1$?

Как мы показали (глава XI), подвижные особые точки $\overset{*}{z}$ решений уравнений (4.3) возможны двух родов:

I. $\overset{*}{z}$, в которых x и y принимают такие значения $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{y}$, что $P(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0$. В точке $\overset{*}{z}$ решение может оканчиваться. Но это только в том случае, когда в системе (4.3) берем лишь одну ветвь $\sqrt{P(x, y)}$. Однако в системе (4.3), которая возникла в проблеме Римана, надо рассматривать обе ветви $\sqrt{P(x, y)}$, поэтому в такой точке наше решение не оканчивается.

II. Возможны ещё такие подвижные особые точки $\bar{z}$, что $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $z\to\bar{z}$ и $\bar{z}$ будет полюсом второго порядка. Могут ли быть такие особые точки у решений, соответствующих проблеме Римана?

Отвечаем на поставленные вопросы. Так как ни решение (5.1), ни решение (6.5) во всех случаях коэффициентов уравнений (4.3) при коммутирующих W_1, W_2 и W_3 не переходят в $x\equiv\xi_1\xi_2$, $y\equiv\xi_1\xi_3$, то они не являются иными представлениями тех $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$, которые получаем по Лаппо-Данилевскому и которые всегда переходят в $x=\xi_1\xi_2$, $y=\xi_1\xi_3$ при коммутирующих W_1, W_2 и W_3. Отсюда следует, что при фиксированных W_1, W_2 и W_3 решения $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$, соответствующие проблеме Римана и получающиеся из разложений Лаппо-Данилевского, непродолжимы в окрестность точки $z=0$ (и $z=1$), ибо они не совпадают с решениями (5.1), (6.5), построенными нами, а решения (5.1) и (6.5) исчерпывают все решения, существующие при $z\to0$ и $z\to1$. Отсюда же следует, что точки $z=0$ и $z=1$ для решений проблемы Римана, данных рядами Лаппо-Данилевского при фиксированных W_1, W_2 и W_3, являются точками сгущения для особых точек $\overset{*}{z}$ типа $\rho_{12}(z)\to\infty$, $\rho_{13}(z)\to\infty$ при $z\to\overset{*}{z}$. Точки $\overset{*}{z}$ — изолированные особые точки (полюсы), поэтому их счетное множество (и конечное вне окрестности точек $z=0$, 1 и ∞). Но, как мы показали, существуют такие W_1, W_2 и W_3, для которых $\rho_{12}(z)$ и $\rho_{13}(z)$ (а также $\rho_{23}(z)$, $\sigma_4=0$, $\sigma_5(z)$) стационарны, т. е. не зависят от z.

В остальных случаях непараметрическое представление $\rho_{12}(z)$ и $\rho_{13}(z)$ можно получить, задавая ρ_{12}^0, ρ_{13}^0 при $z=z_0$ и находя соответствующие возможные значения W_1, W_2 и W_3 по проблеме Пуанкаре, для которых $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ представимы непараметрически в некоторой области $|z-z_0|<R$. Но в окрестности тех W_1, W_2 и W_3, для которых ρ_{12}, ρ_{13} стационар-

ны, и параметрическое представление Лаппо-Данилевского действует в большом круге $|z-z_0|<R$, о чем было сказано в § 7—9 (глава XI).

Параметрическое и другие представления также получены в § 7—9, и они позволяют получить $\rho_{kl}(z)$ в любой области $D(z)$, но в окрестности таких значений W_1, W_2, W_3, для которых $\rho_{kl}(z)$ стационарны.

Итак, подведем итоги. Для системы (2.1) рассматриваем заданными W_1, W_2, W_3 в представлении (2.2). Надо найти U_1, U_2, U_3. В окрестности нулевых значений W_1, W_2, W_3 матрицы U_1, U_2, U_3 получены Лаппо-Данилевским в виде (2.3) при любом расположении a_1, a_2 и a_3 (т. е. при любом z). Нужно получить U_1, U_2 и U_3 вне окрестности нулевых W_1, W_2 и W_3 и дать аналитическую характеристику функциям (2.3). Значения функций (2.3) вне окрестности нулевых значений W_1, W_2 и W_3 получаем в виде (2.4), где коэффициенты α_0, α_1, α_2 и α_3 находим из уравнений (2.5), для которых определитель Δ, вообще говоря, не равен нулю. Свободные члены в уравнении (2.5) $\sigma(U_iW_1)$, $\sigma(U_iW_2)$ и $\sigma(U_iW_3)$ представимы в виде (2.8), где $\sigma(U_iV_k)$ получаем в виде целых рядов (2.11), в которых оргументы ρ_{kl} и ρ_{klm} надо найти через τ_{kl}, τ_{klm}. Здесь 0, ξ_k, $k=1, 2, 3$, х. ч. матриц W_1, W_2 и W_3 и к этому случаю вопрос сводится, если х. ч. матриц W_1, W_2 и W_3 различные.

Нахождение величин ρ_{kl} и ρ_{klm} через τ_{kl}, τ_{klm} приводится к нахождению решения уравнений (4.3), где $x=\rho_{12}$, $y=\rho_{13}$, $z=$ $=\dfrac{a_3-a_1}{a_3-a_2}$, а b выражено, согласно (3.20), через W_1, W_2 и W_3 (K получено, например, в виде (3.19)). Что же можно сказать о решении системы (4.3), соответствующем проблеме Римана?

I. При некоторых значениях W_1, W_2 и W_3 $x=\rho_{12}$, $y=\rho_{13}$ и ρ_{23} будут постоянными относительно z — стационарное решение уравнений (4.3) (вернее, уравнений (2.29) — (2.33)). Эти стационарные решения определяются равенствами (3.21_1), а соответствующие значения W_1, W_2 и W_3 — равенством (3.21_2). Эти стационарные решения включают в себя и решение $\rho_{kl}=\xi_k\xi_l$, соответствующее коммутирующим W_1, W_2 и W_3.

II. При остальных значениях W_1, W_2 и W_3 решения x, y, соответствующие проблеме Римана, будут функциями z. Как их получить?

Рассмотрим уравнения (4.3), где $x=\rho_{12}$, $y=\rho_{13}$. Пусть $x(z)$, $y(z)$—решение уравнений (4.3) с такими заданными начальными значениями $x=x_0$, $y=y_0$ при $z=z_0\neq 0, 1$, что $P(x_0, y_0)=0$, но или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}\neq 0$, или $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}\neq 0$. Тогда решение $x(z)$,

$y(z)$, соответствующее проблеме Римана, не будет стационарным (согласно рассуждениям после (4.8)).

Существуют ли такие W_1, W_2 и W_3, для которых будут $\rho_{12} = \overset{0}{\rho}_{12}$, $\rho_{13} = \overset{0}{\rho}_{13}$, $\rho_{23} = \overset{0}{\rho}_{23}$ при $z_0 \neq 0$, 1 произвольно заданными и для которых $x(z)$, $y(z)$ будут соответствовать проблеме Римана?

Существуют, и после (4.9) показано, как их найти. Эти W_1, W_2 и W_3 не обязаны быть из окрестности нулевых значений W. Если возьмем все множество U_1, U_2 и U_3 такое, что $P(\rho_{12}, \rho_{13}) = 0$, то получим (согласно формулам (1.17)) соответствующее множество W_1, W_2 и W_3 при $z = z_0$. Пусть это множество $D(W)$. Если теперь возьмем $W_0 \bar{\in} D(W)$, то получим для этого W_0 такие $\overset{0}{\rho}_{kl}$, что $P(\overset{0}{\rho}_{12}, \overset{0}{\rho}_{13}) \neq 0$. Тогда решение $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ будет голоморфным, единственным, соответствующим проблеме Римана и будет определено в области $D(z) \ni z_0$. Соответствующие значения $\rho_{23}(z)$, $\rho_{123}(z)$, $\rho_{132}(z)$ или только их начальные значения $\overset{0}{\rho}_{23}$, $\overset{0}{\rho}_{123}$, $\overset{0}{\rho}_{132}$ найдем из интегралов (3.1*), (3.2$_1$) и (3.13). Начальные значения $\overset{0}{\rho}_{12}$, $\overset{0}{\rho}_{13}$, соответствующие z_0, произвольны, но $P(\overset{0}{\rho}_{12}, \overset{0}{\rho}_{13}) \neq 0$, чтобы получить нестационарные решения. И, таким образом, многозначность решения проблемы характеризуется двумя этими произвольными параметрами, кроме той многозначности, которая определяется $\rho_{12}(z)$, $\rho_{13}(z)$ как функциями z. Но, конечно, имеется еще многозначность и в определении $\rho_{23}(z)$, $\rho_{123}(z)$, $\rho_{132}(z)$ из интегралов (3.1*), (3.2$_1$) и (3.13).

В § 4 показано, какие особые точки будут иметь функции (1.18). Теперь мы показали, что эти $\rho_{kl}(z)$ (как и те $\rho_{kl}(z)$, которые можно получить из рядов (1.18) Лаппо-Данилевского) имеют бесконечное множество полярных особых точек $\overset{*}{z}$, для которых и $z=0$, и $z=1$, и $z=\infty$ будут точками сгущения.

К темам, затронутым в книге, рекомендуем дополнительно литературу [50—52].

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокало И. З. Важный вклад в развитие дифференциальных уравнений и их приложение.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 12, с. 2123—2130.

2. Мельников И. Г. Материалы к научным биографиям: Выдающийся математик И. А. Лаппо-Данилевский.— Вопросы истории естествознания и техники, 1975, вып. 4. (53).

3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. II.— М.: Наука, 1974.— 672 с.

4. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1957.— 456 с.

5. Донская Л. И. О структуре решений системы трех линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки $t=\infty$.— Докл. АН СССР, 1951, т. 80, с. 321—324; Построение решения линейной системы в окрестности регулярной особой точки в особых случаях.— Вестн. ЛГУ, 1952, № 6, с. 3—28.

6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.

7. Еругин Н. П. Приводимые системы.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 13. Л.— М.: Изд-во АН СССР, 1946.— 94 с.

8. Хорошилов В. В. О решениях системы линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— Уч. зап. ЛГУ. Серия матем., 1950, т. 19, с. 180—197; О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— Докл. АН СССР, 1950, т. 72, с. 241—242; О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— ПММ, 1951, т. 15, с. 37—54.

9. Збойчик И. Н. О представлениях решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 4, с. 601—618; Расчетные формулы и асимптотика с оценками функции $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k!)^2}$.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 5, с. 820—830.

10. Еругин Н. П. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (Проблема Пуанкаре).— Матем. сб., 1938, т. 3 (45), с. 509—526.

11. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1979.— 744 с.

12. Еругин Н. П. Неявные функции.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1956.— 57 с.

13. Schlesinger L.— Grelles Journal, 1905, v. 129, p. 287; Grelles Journal, 1912, v. 141, p. 96.

14. Мячин В. Ф. О системе двух уравнений Брио и Буке.— Вестн. ЛГУ. Серия матем., 1958, № 7, с. 88—102.

15. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1963.— 116 с.

16. Painleve P.— Bull. de la Soc. Math., 1900, t. 28.

17. Виттих Г.— Math. Ann., 1950, № 1, p. 221—234; Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 320 с.

18. Еругин Н. П. К теории первого уравнения Пенлеве.— Докл. АН БССР, 1958, т. 2, № 1, с. 3—6; О второй трансцендентной Пенлеве.— Докл. АН БССР, 1958, т. 2, № 4, с. 139—142.

19. Еругин Н. П. Исправления в § 5 гл. XIII «Книги для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений».— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1894—1897.

20. Smith R.— A. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1974, A72, N 4.

21. Артыков А. Р., Розет И. Г., Рабинков Г. А. Подвижные особенности решений, траектории которых в окрестности бесконечности являются спиралями.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1355—1359.

22. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. 1.— М.: Высшая школа, 1981.— 687 с.

23. Белман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1954.— 215 с.

24. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.: ГИТТЛ, 1950.— 436 с.

25. Марков С. Н. Об особенностях решений уравнений второго порядка в вещественной области.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 741—743.

26. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом.— ПММ, 1950, т. 14, в. 5, с. 459—512.

27. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.—Л.: ГИЗ, 1927.— XVI+419 с.

28. Риман Б. Сочинения.— М.: ГИТТЛ, 1948.— 543 с.

29. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений.— Киев: Вища школа, 1974.—451 с.

30. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1958.— 543 с.

31. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, т. 1.— М.: Физматгиз, 1963.— 343 с.

32. Röhre H. Das Riemann—Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.— Math. Ann., 1957, Bd. 133, S. 1—25.

33. Сайто Т. Проблема Римана.— Сучаку, 1961, т. 12, № 3, с. 145—159.

34. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск: Изд-во АН БССР, 1963.— 272 с.

35. Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса.— Труды Авиац. ин-та. Казань, 1956, в. 31, с. 203—445.

36. Кочин Н. Е. Об одном частном случае задачи Римана.— Докл. АН СССР, 1937, т. 17, с. 287—290.

37. Федоров Г. Ф. Проблема Фукса.— Матем. сб., 1942, т. 11 (53), с. 97—120.

38. Смирнов В. И. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками.— Пг., 1918.— XVI+317 с.

39. Еругин Н. П. О проблеме Римана для системы Гаусса.— Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та, 1939, т. 28, с. 293—304.

40. Еругин Н. П. Аналитическая теория нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— ПММ, 1952, т. 16, с. 465—486; К анали-

тической теории нелинейных дифференциальных уравнений.— Вестник ЛГУ, 1956, № 7, с. 60—70; Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Труды Ин-та физики и математики АН БССР, 1957, в. 2, с. 235—248.

41. Еругин Н. П. Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 11, с. 1821—1863.

42. Еругин Н. П. Аналитическая и качественная теории, а также асимптотика решений системы уравнений $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{z}\sqrt{xy(x+y)}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{1}{1-z}\sqrt{xy(x+y)}$.—Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 3, с. 379—408.

43. Еругин Н. П. Аналитическая и качественная теории, а также асимптотика решений системы $\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{P(x,\ y)}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{P(x,\ y)}$. I. — Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 6, с. 963—995.

44. Еругин Н. П. Аналитическая и качественная теории, а также асимптотика решений системы $\frac{dx}{dz}=\frac{2}{z}\sqrt{P(x,\ y)}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{2}{1-z}\sqrt{P(x,\ y)}$. II. — Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 11, с. 1964—1987.

45. Еругин Н. П. Проблема Римана. I.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5, с. 771—781.

46. Еругин Н. П. Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка. I.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 3, с. 387—416.

47. Еругин Н. П. Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка. II.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 4, с. 579—598.

48. Еругин Н. П. Проблема Римана. II.— Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 5, с. 779—799.

49. Еругин Н. П. Проблема Римана. Случай $n=2$ и $m=4$. III.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 2, с. 238—254.

50. Smith R. A.— Proc. London Math. Soc., 1953, v. 3, N 12, p. 498—512.

51. Sugiyama Shohei.— Kodai Math. Repts., 1955, v. 7, N 1, p. 23—29.

52. Kimura Toshihusa.— Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1956, v. 5, N 2, p. 81—94; 1960, v. 8, N 1, p. 63—70; 1961, v. 9, N 2, p. 87—90.

53. Шемякина Т. К., Яблонский А. И. Об отсутствии неголоморфных решений в окрестности неподвижной особой точки некоторых классов систем двух уравнений.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 9, с. 1713—1716.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ ЕРУГИН

ПРОБЛЕМА РИМАНА

Редактор *Е. Г. Волкинд*. Художник *А. И. Шабанов*. Художественный редактор *Л. И. Усачев*. Технический редактор *Л. А. Борисова*. Корректор *З. Я. Авербах*.

ИБ № 1245

Печатается по постановлению РИСО АН БССР.

Сдано в набор 22.06.81. Подписано в печать 11.01.82. АТ 14606. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Печ. л. 21,0. Усл. кр.-отт. 40,95 тыс. Уч.-изд. л. 18,3. Тираж 1950 экз. Зак. № 1036. Цена 2 р. 40 к. Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600. Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника». 220600. Минск, Ленинский проспект, 68.