

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Институт прикладной математики

А. Д. БРЮНО

ЛОКАЛЬНЫЙ
МЕТОД
НЕЛИНЕЙНОГО
АНАЛИЗА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1979

Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Брюно А. Д. М.: Наука. 1979. 252 с.

В монографии систематически изложен метод анализа системы нелинейных уравнений в окрестности известного решения. Подробно рассмотрены алгебраические и обыкновенные дифференциальные уравнения.

Применение локального метода продемонстрировано на решении ряда задач нелинейной механики.

Издание рассчитано на математиков, механиков физиков и доступно студентам 3-го курса математического факультета.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
К. И. Бабенко

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$\dot{x} = dx/dt,$$

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, \dots, y_n),$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad Q = (q_1, \dots, q_n).$$

Скаляры обозначены малыми буквами, векторы и матрицы — большими (только в §§ 1, 2 гл. V скаляры обозначаются большими буквами). Векторы записываются строчкой, но при матричном умножении рассматриваются как матрицы-столбцы.

$$\langle Q, \Lambda \rangle = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n,$$

$$X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n},$$

$$\|Q\| = q_1 + \dots + q_n,$$

$$|Q| = |q_1| + \dots + |q_n|,$$

$$|X| = (|x_1|, \dots, |x_n|),$$

E_k — k -й единичный вектор.

$E^{(m)}$ — единичная матрица размера $m \times m$.

$V \geq 0$ означает, что $v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0$.

$\bar{\lambda}$ — число комплексно-сопряженное к λ .

$$\Phi_i(X) = x_i f_i(X) \equiv x_i \sum f_{iq} X^Q,$$

$$F_Q = (f_{1Q}, \dots, f_{nQ}),$$

$$F = (f_1, \dots, f_n) \equiv \sum F_Q X^Q.$$

R_1^n — пространство показателей степеней,

R_2^n — сопряженное (двойственное) к нему пространство.

Множества в этих пространствах обозначены большими латинскими полужирными буквами $L, M, \dots$; и буквами Γ, Δ .

L — линейное подпространство в R_1^n , образованное всеми вещественными решениями Q уравнения $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$.

$O = \{Q : Q \geq 0\}$ — неотрицательный ортант (квадрант, октант, ...)

Z^n — целочисленная решетка в R_1^n .

$D = D(f) = \{Q : f_Q \neq 0\}$ — носитель ряда $f = \sum f_Q X^Q$.

Δ — выпуклая оболочка множества D .

Γ — замыкание множества Δ .

$\partial\Gamma$ — граница множества Γ .

$\Gamma_j^{(d)}$ — грани многогранника Γ .

$\tilde{\Gamma}$ — ломаная Ньютона, часть границы $\partial\Gamma$.

$V_j^{(d)}$ — касательный конус грани $\Gamma_j^{(d)}$.

$U_j^{(d)}$ — нормальный конус грани $\Gamma_j^{(d)}$.

$U_j^{(d)}(\varepsilon)$ — множество в R_2^n , соответствующее грани $\Gamma_j^{(d)}$ и числу $\varepsilon > 0$.

R_0^n или C_0^n — основное пространство с координатами X или Y или Z , ...

Большими рукописными латинскими буквами обозначены множества в R_0^n (или C_0^n) и классы функций и степенных рядов:

$\mathcal{U}$ — окрестность точки $X = 0$,

$\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ — часть окрестности $\mathcal{U}$, соответствующая грани $\Gamma_j^{(d)}$,

$\mathcal{V}_j^{(d)}(\varepsilon)$ — класс степенных рядов, носитель которых лежит в множестве $V_j^{(d)}$.

Для того чтобы лучше различать греческие Z, H, M, N, E от похожих на них латинских Z, H, M, N, E , под греческими буквами поставлен знак тильда: $\tilde{Z}, \tilde{H}, \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{E}$.

Всякие звездочки надо рассматривать как один и тот же знак.

ВВЕДЕНИЕ

1. Классификация уравнений. Во многих случаях задачи механики, физики и других естественных наук приводят к решению системы уравнений

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где правые части являются многочленами от своих переменных:

$$f_j = \sum a_{jq_1q_2\dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}, \quad j = 1, \dots, m \quad (2)$$

или близки к многочленам. В зависимости от вида переменных x_i и коэффициентов a получаются разные типы уравнений, которые изучают разные математические науки. В общих чертах эта классификация выглядит следующим образом:

I. Коэффициенты a — целые или рациональные числа, решения x_i — ищутся также целыми или рациональными. Это — задача теории чисел.

II. Коэффициенты a — вещественные или комплексные числа, решения x_i также ищутся вещественными или комплексными. Такие задачи относятся к алгебре, точнее, к алгебраической геометрии и к теории аналитических множеств.

III. Коэффициенты a суть вещественные или комплексные функции одного переменного t , неизвестные суть функции этого переменного $x_i = y_i(t)$, $\dots$, $x_l = y_l(t)$ и их производные $x_j = = dy_j/dt^s$ ($j > l$). Задача заключается в отыскании функций $y_1(t)$, $\dots$, $y_l(t)$, которые удовлетворяют системе (1). Такими задачами занимается теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

IV. Коэффициенты a суть функции нескольких переменных $t_1, \dots, t_k$, неизвестные x суть функции от этих переменных $x_i = y_i(t_1, \dots, t_k)$, $\dots$, $x_l = y_l(t_1, \dots, t_k)$ и частные производные от этих функций

$$x_j = \frac{\partial^s y_l}{\partial t_1^{s_1} \partial t_2^{s_2} \dots \partial t_k^{s_k}}, \quad j > l, \quad s = s_1 + \dots + s_k.$$

Задача отыскания функций $y_i(t_1, \dots, t_n)$, удовлетворяющих системе (1), относится к теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В задачах каждого из этих типов различают задачи линейные и нелинейные. Систему (1) называют *линейной*, если переменные x_i входят во все многочлены f_j только в первой и нулевой степенях, т. е. в записи (2) показатели q_k равны либо нулю, либо единице и их сумма не превосходит единицы. В противном случае система (1) и соответствующая задача называются *нелинейными*. Линейные задачи обычно гораздо проще нелинейных.

Далее, будем различать задачи локальные и глобальные. *Локальная задача* заключается в исследовании решений X системы (1) в сколь угодно малой окрестности некоторого известного решения X^0 , при том или ином определении окрестности. Важно, что при этом размеры окрестности не существенны, лишь бы найти все решения в какой-нибудь окрестности решения X^0 . *Глобальная задача* состоит в отыскании всех таких решений системы (1), которые принадлежат некоторому фиксированному множеству. Например, для задачи второго типа — множеству всех комплексных решений X . Глобальные задачи обычно труднее локальных.

К настоящему времени выработались общие концепции в подходе к нелинейным задачам, особенно — к локальным. Для них различают задачи квазилинейные и существенно нелинейные. *Квазилинейные задачи* решают либо с помощью учета нелинейных «возмущений» (классический подход), либо посредством замены координат, упрощающей систему (1) (приведение к «нормальной форме» — современный подход). В *существенно нелинейных задачах* прежде всего надо уметь выделять первое приближение («укорочение») системы (1), это приводит к линейным неравенствам для показателей степеней $q_1, \dots, q_n$ разложения (2). Эти неравенства решаются посредством геометрического построения («многогранника Ньютона»). Посредством степенных преобразований, нелинейных по X , но линейных по показателям q_i и $\ln x_i$, удастся упростить «укорочение». Таким образом существенно нелинейная задача приводится к нескольким квазилинейным задачам.

Замечательно, что при этом существенно нелинейные задачи тесно связаны с некоторой линейной геометрией в «пространстве показателей степеней».

2. Основные идеи локального метода поясним на задаче изучения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = \Phi(X) \quad (3)$$

в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ неподвижного решения $X = (x_1, \dots, x_n) = 0$. Случаи комплексных и вещественных X и Φ рас-

считаются параллельно. При этом функции $\Phi(X)$ предполагаются аналитическими или достаточно гладкими в окрестности $\mathcal{U}$. Других ограничений не делается: рассматриваются сколь угодно вырожденные и резонансные случаи.

Решение поставленной задачи ищется посредством построения такой специальной локальной замены координат, что в новых координатах система интегрируется. Лишь в сравнительно простых случаях существует указанная замена в полной окрестности. В сложных же случаях исследуемая окрестность определенным образом разбивается на куски, и в каждом куске вводятся свои локальные координаты, в которых система интегрируется. Построение указанных разбиений и замен, вообще говоря, производится не сразу, а постепенно — шаг за шагом. На каждом шаге строится более мелкое разбиение и в каждом куске вводятся свои координаты, в которых система становится проще. При весьма общих предположениях через конечное число шагов система становится интегрируемой в каждом кусочке.

В системах, возникающих из механических, физических и астрономических задач, как правило достаточно одного (редко двух) таких шагов. Основу этого локального метода составляют два понятия.

1. Нормальная форма. Если система (3) имеет ненулевую линейную часть, то ее можно преобразовать к *нормальной форме*, которая легко сводится к системе меньшего порядка с нулевой линейной частью и зачастую сразу интегрируется. Для различных случаев нормализующие преобразования исследовались Пуанкаре, Пикаром, Горном, Дюляком, Биркгофом, Черри, Зигелем, Мозером, Стернбергом и другими. Окончательный вид, способ понижения порядка и общие свойства указаны автором (1964—1976).

2. Разрешение сложных особенностей. Если разложение вектор-функции $\Phi(X)$ по степеням x_i не содержит линейных членов, то по этому разложению можно выделить конечное число «укороченных систем»

$$dX/dt = \hat{\Phi}_j^{(d)}(X) \quad (4)$$

и соответственно разбить окрестность $\mathcal{U}$ на куски $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ так, что каждый кусок $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ будет криволинейным конусом, примыкающим к неподвижной точке, а укорочение (4) является первым нетривиальным приближением системы (3) в $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$.

Это осуществляется построением некоторого многогранника в пространстве показателей степеней. Далее, для простого (в некотором смысле) укорочения (4) можно построить нормальную форму системы (3) в куске $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, т. е. упростить систему в этом куске. Для сложного укорочения (4) делается определенное бирациональное (степенное) преобразование, раздувающее неподвижную точку в некоторое многообразие $\mathcal{M}$, а кусок

$\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ — в окрестность $\mathcal{U}'$ этого многообразия. Теперь надо на $\mathcal{M}$ найти неподвижные точки и исследовать их окрестности, которые уже будут кусками окрестности $\mathcal{U}'$. Здесь система уже будет в некотором смысле проще, чем исходная и к ней можно снова применить такие же построения, приводящие к дальнейшим упрощениям. Этот прием разрешения особенностей аналогичен «кратному сигма-процессу» в алгебраической геометрии и ведет свое начало от многоугольника Ньютона. Для двумерных систем дифференциальных уравнений выделением и исследованием групп ведущих членов занимались Брио и Буке (1856), Горн, Фроммер и другие. Для многомерных систем это сделано автором (1962, 1965).

Локальный метод, естественно, распадается на две части. Первая — алгебраическая — заключается в указании алгоритма для построения требуемых формальных разложений. Вторая часть заключается в интерпретации этих рядов посредством функций аналитических (Пуанкаре, Дюлак, Зигель, Плисс, окончательный результат — автор, 1971) или гладких (Биркгоф, Стернберг, Хартман, Гробман и другие), а также в оценке точности приближенного интегрирования этим методом (Биркгоф, Зигель, Мозер и другие).

3. О содержании книги. Основным объектом настоящей книги являются локальные нелинейные задачи второго и третьего типов, но их изучение приводит иногда к линейным задачам первого или четвертого типа. При этом основное внимание уделено аналитическим системам (1), когда f_j — аналитические функции своих аргументов.

В главах I и II очень подробно рассмотрены двумерные задачи. В главах III—IV уже не столь подробно рассмотрены многомерные задачи. В главе V — локальный метод применяется к решению конкретных механических задач.

В главе I § 1 посвящен решению линейных неравенств и связанной с этим геометрии на плоскости R_1^2 и сопряженной плоскости R_2^2 . Развитый в нем аппарат является основой для «геометрии показателей степеней». В § 2 показаны методы решения аналитического уравнения

$$f(x_1, x_2) = 0$$

в окрестности критической точки $x_1 = x_2 = 0$. В § 3 локальный метод используется для изучения линий уровня $f(x_1, x_2) = c$ в окрестности критической точки. По-видимому, это самая простая задача, на которой можно продемонстрировать весь аппарат локального метода.

В главе II этим методом исследуется система дифференциальных уравнений

$$dx_1/dt = \varphi_1(x_1, x_2),$$

$$dx_2/dt = \varphi_2(x_1, x_2),$$

в окрестности особой точки.

В главе III систематически изложена теория нормальной формы системы дифференциальных уравнений (3) в окрестности элементарной особой точки $X=0$. В § 4 гл. III эта теория распространяется на окрестность инвариантного многообразия.

В § 1 главы IV показано применение локального метода для изучения решений системы (3) в окрестности неэлементарной особой точки. Наконец, в § 2 гл. IV дан обзор направлений недавних исследований, использующих геометрию показателей степеней (многоугольник или многогранник Ньютона).

В § 1 главы V рассмотрена задача о влиянии нутационных колебаний на скорость прецессии тяжелого гироскопа в кардановом подвесе. Он служит иллюстрацией § 1 гл. II и § 1 гл. III. В § 2 гл. V рассмотрена задача о существовании периодических колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты. В нем демонстрируется применение методов §§ 3 и 4 гл. III.

При этом в гл. I, II, V и §§ 1, 2 гл. III изложение подробное (особенно в главах I и II). §§ 10—13 носят обзорно-проблемный характер. Главы I и II основаны на лекциях автора [36] и написаны как учебное пособие (в них подробно излагаются доказательства, много рисунков, примеров и упражнений). Для их понимания достаточно знаний в объеме двух курсов института. Главы III и IV основаны на работе автора [31] и ряде статей. Изложение построено так, что каждую главу можно читать независимо от предыдущих.

ОСНОВЫ ЛОКАЛЬНОГО МЕТОДА

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА НА ПЛОСКОСТИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через $\mathbf{R}^2$ будем обозначать вещественное двумерное векторное пространство. Т. е. $\mathbf{R}^2$ — вещественная плоскость с декартовыми координатами q_1 и q_2 . Точки этой плоскости являются двумерными векторами $Q = (q_1, q_2)$. Пусть вещественные числа p_1, p_2 и c фиксированы, тогда решения уравнения

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = c \quad (1)$$

образуют на плоскости $\mathbf{R}^2$ прямую линию, перпендикулярную вектору $P = (p_1, p_2)$.

Будем теперь менять величину c и рассмотрим прямые (1) для разных значений c . Все эти прямые параллельны друг другу. При $c=0$ прямая (1) проходит через точку $Q=0$, при $c>0$ прямая (1) смещается в направлении вектора P , и это смещение тем больше, чем больше значение c . Наконец, при $c<0$ прямая (1) смещается в противоположную сторону (рис. 1). Каждая прямая (1) делит плоскость $\mathbf{R}^2$ на две полуплоскости: положительную, в которой $q_1 p_1 + q_2 p_2 \geq c$, и отрицательную, в которой $q_1 p_1 + q_2 p_2 \leq c$. Если ввести скалярное произведение $\langle Q, P \rangle = q_1 p_1 + q_2 p_2$, то уравнение прямой (1) запишется в виде

$$\langle Q, P \rangle = c.$$

В дальнейшем будем рассматривать векторы P и Q , стоящие в разных частях скалярного произведения, как точки двух разных плоскостей

$$Q \in \mathbf{R}_1^2, \quad P \in \mathbf{R}_2^2.$$

Преимущество такого разделения выяснится позже.

Пусть Δ — точечное множество на плоскости $\mathbf{R}^2$; оно называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками Q_1 и Q_2 оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. Множество Δ называется *выпуклой оболочкой* множества D , если Δ — наименьшее выпуклое множество, содержащее множество D . Например, выпуклой оболочкой двух точек Q_1 и Q_2 является отрезок

ок, их соединяющий; выпуклая оболочка трех точек — треугольник с вершинами в этих точках. Тот факт, что множество Δ является выпуклой оболочкой множества D , можно записать формулой

$$\Delta = \{Q : Q = \delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2 + \delta_3 Q_3;$$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0; \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1; \quad Q_1, Q_2, Q_3 \in D\}.$$

Если D — конечное множество точек, то его выпуклая оболочка Δ является замкнутым многоугольником, вершины которого являются точками множества D . Если множество D содержит бесконечно много точек, то его выпуклая оболочка Δ может

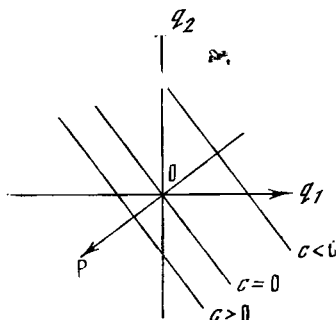


Рис. 1

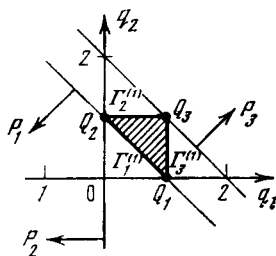


Рис. 2

быть замкнутой и не обязана быть многоугольником. Например, если

$$D = \{Q : q_1 = 1/m, q_2 = 0; m = 1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

то Δ есть незамкнутый отрезок $(0, 1]$ на оси q_1 . Другой пример: выпуклая оболочка окружности — круг.

Пусть множество $D \subset R_1^2$ и вектор $P \in R_2^2$ фиксированы, и пусть $c = \sup \langle Q, P \rangle$ по всем $Q \in D$. Тогда уравнение

$$\langle Q, P \rangle = c$$

определяет в плоскости R_1^2 опорную прямую L_P множества D по вектору P . Неравенство

$$\langle Q, P \rangle \leq c$$

определяет в плоскости R_1^2 соответствующую опорную полуплоскость L_P^+ . При этом в полуплоскости $\langle Q, P \rangle > c$ нет точек множества D , в то же время в любой полуплоскости

$$\langle Q, P \rangle > c - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

есть точки множества D . Если D — конечное точечное множество, то верхняя грань равна максимуму, и на опорной прямой

L_P есть точки множества D . Для бесконечного множества D опорная прямая может и не содержать точек множества D (например, для множества (2) и $P=(-1, 0)$). Пересечение

$$D \cap L_P = D_P$$

состоит из всех тех точек множества D , для которых скалярное произведение $\langle Q, P \rangle$ имеет наибольшее значение.

Обозначим через Γ пересечение всех опорных полуплоскостей множества D , т. е.

$$\Gamma = \bigcap_{P \neq 0} L_P^{(-)}$$
 по всем $P \in \mathbb{R}_2^2$.

Очевидно, Γ — замкнутое выпуклое множество, содержащее в себе выпуклую оболочку Δ множества D , т. е.

$$\Gamma \supset \Delta \supset D.$$

Поскольку Γ — замкнутое множество, то оно содержит замыкание множества Δ .

Теорема 1. Для всякого множества D пересечение Γ всех опорных полуплоскостей совпадает с замыканием выпуклой оболочки Δ .

Доказательство см. в § 1 книги Буземана [52], здесь его не приводим.

Пересечение множества Γ с опорной прямой L_P назовем *гранью*. Грани множества Γ лежат на его границе $\partial\Gamma$, и обратно — граница $\partial\Gamma$ состоит из граней. Если Γ — многоугольник, то его грани суть вершины и ребра. Будем обозначать грани через $\Gamma_j^{(d)}$, где d — размерность объекта ($d=0$ для вершины и $d=1$ для ребра) и j — номер. На каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ выделим из множества D подмножество

$$D_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \cap D,$$

состоящее из тех точек множества D , которые лежат на грани $\Gamma_j^{(d)}$. Грань $\Gamma_j^{(d)}$ назовем *собственной*, если ее размерность совпадает с размерностью выпуклой оболочки множества $D_j^{(d)}$. В противном случае грань $\Gamma_j^{(d)}$ назовем *несобственной*.

Пример 1. $D = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, где $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (1, 1)$ (рис. 2). Опорная прямая для вектора $P_1 = (-1, -1)$ дается уравнением $\langle Q, P_1 \rangle = -1$ (ибо $\langle Q_2, P_1 \rangle = -1$, $\langle Q_3, P_1 \rangle = -2 < -1$), соответствующая опорная полуплоскость $L_{P_1}^{(-)}$ есть $-q_1 - q_2 \leq -1$. Аналогично опорная прямая L_{P_2} и опорная полуплоскость $L_{P_2}^{(-)}$ для $P_2 = (-1, 0)$ даются уравнением $q_1 = 0$ и неравенством $-q_1 \leq 0$ соответственно. Наконец, опорная прямая и полуплоскость для $P_3 = (1, 1)$ суть $q_1 + q_2 = 2$ и $q_1 + q_2 \leq 2$ соответственно. Многоугольник Γ является треуголь-

ником с вершинами Q_1, Q_2, Q_3 . Его вершины суть

$$\Gamma_j^{(0)} = Q_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

его ребра $\Gamma_j^{(1)}$ суть отрезки с вершинами Q_j, Q_{j+1} . Соответственно,

$$D_j^{(0)} = Q_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$D_1^{(1)} = \{Q_1, Q_2\}, \quad D_2^{(1)} = \{Q_2, Q_3\}, \quad D_3^{(1)} = \{Q_3, Q_1\}.$$

Все грани здесь собственные.

Пример 2. Множество D — внутренность единичного круга:

$$D = \{Q : q_1^2 + q_2^2 < 1\}.$$

Тогда $\Delta = D$, множество Γ — замкнутый единичный круг:

$$\Gamma = \{Q : q_1^2 + q_2^2 \leq 1\}.$$

Граница $\partial\Gamma$ множества Γ — единичная окружность $q_1^2 + q_2^2 = 1$. Каждая ее точка является гранью $\Gamma_j^{(0)}$. Все множества $D_j^{(0)}$ пусты (их размерность равна -1); поэтому все грани здесь несобственные.

Заметим, что ребро $\Gamma_j^{(1)}$ является либо прямой (тогда оно единственно), либо полупрямой (их не более двух), либо отрезком.

1.2. КОНУСЫ

Множество $K \subset R^2$ называется конусом (см. Голдман и Таккер [60]), если вместе с точкой P оно содержит луч cP , для всех $c > 0$. Так, конусами являются: точка $P=0$, любой луч, любой сектор, вся плоскость R^2 . Конус K называется *выпуклым*, если он является выпуклым множеством. Так, сектор будет выпуклым конусом, только если его угол не превышает π .

Пусть L_P — опорная прямая к множеству D для вектора P , тогда для всякого $c > 0$ опорная прямая $L_{cP} = L_P$. Т. е. множество векторов P' , для которых прямая L_P является опорной, образует луч $P = \{cP, c > 0\}$.

Обозначим через U множество всех векторов $P \in R_+^2$, для которых существует опорная полуплоскость $L_P^{(-)}$ к множеству D .

Теорема 2. Множество U является *выпуклым конусом*.

Доказательство. Пусть два вектора P_1 и P_2 лежат в множестве U . Покажем, что в множестве U лежит всякий вектор $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Множество Γ имеет две опорные полуплоскости $L_{P_1}^{(-)}$ и $L_{P_2}^{(-)}$, следовательно, оно лежит в их пересечении:

$$\Gamma \subset L_{P_1}^{(-)} \cap L_{P_2}^{(-)}. \quad (3)$$

Если векторы P_1 и P_2 не параллельны, то опорные прямые L_{P_1} и L_{P_2} делят плоскость R_1^2 на четыре части. Одна из них —мно-

жество $L_P^{(1)} \cap L_P^{(2)}$. Это множество имеет опорные прямые для всех векторов P , лежащих между лучами $\{cP_1\}$ и $\{cP_2\}$. В силу (3) для таких векторов P имеются опорные прямые и у множества Γ .

Если векторы P_1 и P_2 параллельны, то либо они лежат на одном луче, либо на одной прямой. Оба эти множества выпуклые. Теорема доказана.

Множество U будем называть *нормальным конусом множества D* (или множества Γ).

Пусть $\Gamma_j^{(d)}$ — грань замкнутого выпуклого множества Γ . Множество $U_j^{(d)}$ всех векторов $P \in R_2^2$, для которых опорная прямая L_P пересекается с множеством Γ точно по грани $\Gamma_j^{(d)}$, называется *нормальным конусом грани $\Gamma_j^{(d)}$* , т. е.

$$U_j^{(d)} = \{P : \Gamma_j^{(d)} = L_P \cap \Gamma\}.$$

Легко видеть, что множество $U_j^{(d)}$ является выпуклым конусом. Объединение всех нормальных конусов $U_j^{(d)}$ граней $\Gamma_j^{(d)}$ образует нормальный конус U всего множества Γ . Если $\Gamma_j^{(d)} = L_P \cap \Gamma$ и $\tilde{Q} \in L_P$, то очевидно

$$\begin{cases} \langle Q, P \rangle = \langle \tilde{Q}, P \rangle \text{ для всех } Q \in \Gamma_j^{(d)}, \\ \langle Q, P \rangle < \langle \tilde{Q}, P \rangle \text{ для всех } Q \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)}. \end{cases} \quad (4)$$

Поэтому векторы P нормального конуса $U_j^{(d)}$ определяются системой равенств и неравенств (4).

Первое из этих условий означает, что прямая $\langle Q, P \rangle = \langle \tilde{Q}, P \rangle$ включает в себя грань $\Gamma_j^{(d)}$; второе условие означает, что эта прямая является опорной прямой к множеству Γ . Но тогда она будет опорной и к множеству D , поэтому второе условие в (4) можно заменить на $\langle Q, P \rangle < \langle \tilde{Q}, P \rangle$ для всех $Q \in D \setminus D_j^{(d)}$.

Если множество $D_j^{(d)}$ не пусто, то можно взять $\tilde{Q} \in D_j^{(d)}$. Наконец, если грань $\Gamma_j^{(d)}$ собственная, то в первом условии (4) достаточно рассмотреть лишь точки множества $D_j^{(d)}$. Тогда для некоторого $\tilde{Q} \in D_j^{(d)}$

$$U_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{cases} \langle Q, P \rangle = \langle \tilde{Q}, P \rangle \text{ для всех } Q \in D_j^{(d)}, \\ \langle Q, P \rangle < \langle \tilde{Q}, P \rangle \text{ для всех } Q \in D \setminus D_j^{(d)} \end{cases} \right\}. \quad (5)$$

Пример 3 (продолжение примера 1). $D = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$; $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (1, 1)$ (рис. 2). Здесь конус U является плоскостью R_2^2 . Для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ согласно (5) имеем

$$U_1^{(1)} = \left\{ P : \begin{cases} \langle Q_1, P \rangle = \langle Q_2, P \rangle, \\ \langle Q_3, P \rangle < \langle Q_1, P \rangle \end{cases} \right\}.$$

Учитывая числовые значения точек Q_j , получим

$$U_1^{(1)} = \{P: p_1 = p_2, \quad p_1 + p_2 < p_1\}$$

или

$$U_1^{(1)} = \{P: p_1 = p_2 < 0\}.$$

На плоскости p_1, p_2 конус $U_1^{(1)}$ является лучом, который служит биссектрисой третьего квадранта (рис. 3). Этот луч перпендикулярен ребру $\Gamma_1^{(1)}$ и направлен наружу многоугольника Γ . Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} U_2^{(1)} &= \left\{P: \langle Q_2, P \rangle = \langle Q_3, P \rangle\right\} = \\ &= \{P: p_1 = 0, p_2 > 0\}. \end{aligned}$$

На плоскости p_1, p_2 конус $U_2^{(1)}$ — это луч, ортогональный к ребру $\Gamma_2^{(1)}$ (рис. 2 и 3). Наконец,

$$\begin{aligned} U_3^{(1)} &= \left\{P: \langle Q_3, P \rangle = \langle Q_1, P \rangle\right\} = \\ &= \{P: p_1 > 0, p_2 = 0\} \end{aligned}$$

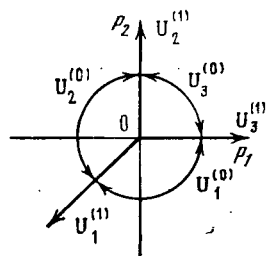


Рис. 3

— это также луч (рис. 3). Теперь построим конусы вершин. Заметим сначала, что вершина $\Gamma_1^{(0)}$ содержит одну единственную точку множества D , поэтому равенства в определении конуса теряют смысл, и остаются лишь неравенства. Итак,

$$U_1^{(0)} = \{P: \langle Q_2, P \rangle < \langle Q_1, P \rangle; \langle Q_3, P \rangle < \langle Q_1, P \rangle\}.$$

Учитывая числовые значения точек Q_j , получим

$$U_1^{(0)} = \{P: p_2 < p_1, p_1 + p_2 < p_1\} = \{P: p_2 < p_1, p_2 < 0\}.$$

На плоскости p_1, p_2 множество $U_1^{(0)}$ — это угол, ограниченный лучами $U_1^{(1)}$ и $U_3^{(1)}$ (рис. 3). Аналогично находим

$$\begin{aligned} U_2^{(0)} &= \{P: \langle Q_1, P \rangle < \langle Q_2, P \rangle, \langle Q_3, P \rangle < \langle Q_2, P \rangle\} = \\ &= \{P: p_1 < p_2, p_1 < 0\}. \end{aligned}$$

Это угол, ограниченный лучами $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$. Наконец,

$$U_3^{(0)} = \{P: \langle Q_1, P \rangle < \langle Q_3, P \rangle, \langle Q_2, P \rangle < \langle Q_3, P \rangle\} = \{P > 0\},$$

это угол, ограниченный лучами $U_2^{(1)}$ и $U_3^{(1)}$ (рис. 3).

Пример 4 (продолжение примера 2). Здесь конус U является плоскостью R_2^2 .

Каждая точка $\tilde{Q}$ единичной окружности $\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 = 1$ является несобственной гранью. Через нее проходит только одна опорная

прямая (касательная к единичной окружности) с нормальным вектором $P = \vec{Q}$. Следовательно, нормальный конус грани $\vec{Q}$ — это луч $\{c\vec{Q}\}$, где произвольное $c > 0$.

Пример 5. Пусть D — множество целочисленных точек Q , лежащих в I квадранте плоскости R_1^2 , т. е. $Q \geq 0$. Тогда Γ — это I квадрант:

$$\Gamma = \{Q : Q \geq 0\}.$$

Граница $\partial\Gamma$ состоит из одной вершины $\Gamma_1^{(0)} = \{0\}$ и двух ребер:

$$\Gamma_1^{(1)} = \{Q : q_2 = 0 \leq q_1\}, \quad \Gamma_2^{(1)} = \{Q : q_1 = 0 \leq q_2\}.$$

Нормальный конус для вершины $\Gamma_1^{(0)}$ есть

$$U_1^{(0)} = \{P : \langle Q, P \rangle < 0\}$$

для всех $Q \in \Gamma_1^{(1)} \setminus \Gamma_1^{(0)}$.

Взяв для Q значения $(1, 0)$ и $(0, 1)$, получим

$$U_1^{(0)} = \{P : p_1 < 0, p_2 < 0\}.$$

Нормальные конусы к ребрам суть

$$U_1^{(1)} = \{P = (0, p_2) : p_2 < 0\}, \quad U_2^{(1)} = \{P = (p_1, 0) : p_1 < 0\}.$$

Конус $U = U_1^{(0)} \cup U_1^{(1)} \cup U_2^{(1)}$ является третьим квадрантом плоскости R_2^2 : $U = \{P \leq 0\}$.

1.3. ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ

Может оказаться, что все точки множества D расположены на одной прямой. В этом случае множество Γ целиком лежит на этой прямой и является либо отрезком, либо полупрямой, либо всей прямой. Множество Γ имеет одно-единственное ребро $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma$, а число его вершин не превосходит двух.

Пример 6. $D = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, $Q_1 = (2, 0)$, $Q_2 = (0, 2)$, $Q_3 = (1, 1)$ (рис. 4). Множество Γ является отрезком с двумя вершинами $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ и $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$. Имеем три множества $D_j^{(d)} : D_1^{(0)} = Q_1$, $D_2^{(0)} = Q_2$, $D_3^{(1)} = D$. В задании нормальных конусов будет на одно неравенство меньше, чем в невырожденном случае. Итак (рис. 5), имеем

$$U_1^{(1)} = \{P : \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle = \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle\} = \{P : p_1 = p_2\}.$$

Это вся прямая, а не полупрямая, как в невырожденных случаях.

$$U_1^{(0)} = \{P : \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle\} = \{P : p_2 < p_1\};$$

$$U_2^{(0)} = \{P : \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle\} = \{P : p_1 < p_2\}.$$

Здесь конус $U = U_1^{(1)} \cup U_1^{(0)} \cup U_2^{(0)}$ — вся плоскость R_2^2 .

Если множество D состоит из одной точки Q_1 , то множество Γ вырождается в эту точку Q_1 , являющуюся единственной вершиной.

Поэтому $\Gamma = \Gamma_1^{(0)} = Q_1 = D = D_1^{(0)}$. Конус $U_1^{(0)}$ является плоскостью R_2^2 , ибо на вектор P нет никаких ограничений.

Итак, каждому множеству $D \subset R_1^2$ ставится в соответствие множество Γ , являющееся пересечением опорных полуплоскостей множества D . У множества Γ выделяются грани $\Gamma_j^{(d)}$. Каждой гра-

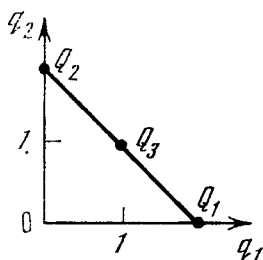


Рис. 4

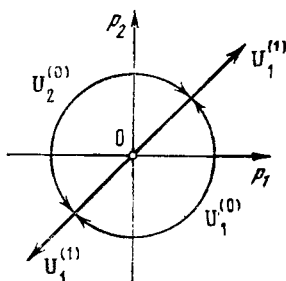


Рис. 5

ни $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует подмножество $D_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \cap D$ и нормальный конус $U_j^{(d)}$. Описанную последовательность действий можно наглядно изобразить следующим образом:

$$D \rightarrow \Gamma \rightarrow \{\Gamma_j^{(d)}\} \rightarrow \{D_j^{(d)}\} \rightarrow \{U_j^{(d)}\}.$$

1.4. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Разберем здесь случай, когда множество D состоит из конечного числа точек $Q_1, \dots, Q_m$. Тогда выпуклая оболочка Δ множества D является замкнутой и по теореме 1 совпадает с множеством Γ . Множество Γ является многоугольником. Его вершины обязательно являются точками множества D . Что касается остальных точек множества D , не являющихся вершинами, то они могут располагаться на ребрах или внутри многоугольника Γ . Может оказаться, что на некоторых ребрах нет других точек множества D , кроме вершин (см. пример 1).

Многоугольник Γ , являющийся выпуклой оболочкой конечного числа точек, имеет конечное число вершин и ребер $\Gamma_j^{(d)}$. В принципе, их нумерация может быть произвольной, но наиболее удобна следующая. Выберем какую-нибудь вершину и направление обхода (скажем, по часовой стрелке). Выбранную вершину обозначим $\Gamma_1^{(0)}$, следующую за ней вершину при выбранном направлении обхода обозначим $\Gamma_2^{(0)}$, затем $\Gamma_3^{(0)}$ и так далее. Наконец, получим вершину $\Gamma_n^{(0)}$, за которой следует $\Gamma_1^{(0)}$. Далее, ребро с вершинами $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$ обозначим $\Gamma_j^{(1)}$, для $j < n$, и через $\Gamma_n^{(1)}$ обозначим ребро

с вершинами $\Gamma_n^{(0)}$ и $\Gamma_1^{(0)}$. Так, в примере 1 можно положить $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$ и ребра занумеровать, как на рис. 2.

Вершины $\Gamma_j^{(0)}$ играют особую роль в многоугольнике. Во-первых, многоугольник Γ является выпуклой оболочкой всех своих вершин; во-вторых, каждое ребро $\Gamma_j^{(1)}$ является выпуклой оболочкой своих вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$.

Конус U является всей плоскостью R^2 . Нормальные конусы $U_j^{(d)}$ к граням $\Gamma_j^{(d)}$ задаются формулой [(5). В примере 3 нормальные конусы $U_j^{(d)}$ задавались довольно просто, что связано с простым строением множества D (оно состояло всего из трех точек).

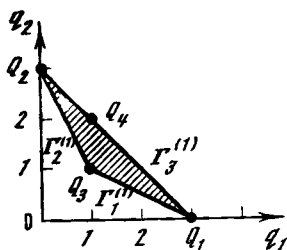


Рис. 6

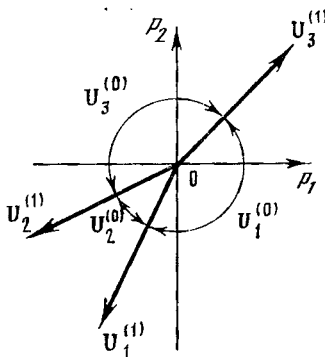


Рис. 7

В общем же случае количество равенств и неравенств в задании конуса можно сократить, используя вместо всех точек множества D только вершины $\Gamma_j^{(0)}$ многоугольника Γ . Тогда

$$U_j^{(1)} = \left\{ P : \begin{aligned} &\langle \Gamma_k^{(0)}, P \rangle = \langle \Gamma_j^{(0)}, P \rangle; \Gamma_k^{(0)}, \Gamma_j^{(0)} \in \Gamma_j^{(1)}; \\ &\langle \Gamma_i^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_j^{(0)}, P \rangle, \Gamma_i^{(0)} \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(1)} \end{aligned} \right\},$$

$$U_j^{(0)} = \{ P : \langle \Gamma_i^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_j^{(0)}, P \rangle, \Gamma_i^{(0)} \neq \Gamma_j^{(0)} \}.$$

Более того, в определении нормального конуса ребра $U_j^{(1)}$ достаточно оставить лишь одно неравенство, ибо равенство определяет прямую, ортогональную к ребру $\Gamma_j^{(1)}$, а каждое неравенство выделяет у этой прямой одну и ту же полупрямую, направленную наружу многоугольника Γ .

В определении же конуса вершины $U_j^{(0)}$ достаточно оставить два неравенства:

$$U_j^{(0)} = \{ P : \langle \Gamma_{j-1}^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_j^{(0)}, P \rangle, \langle \Gamma_{j+1}^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_j^{(0)}, P \rangle \},$$

то есть конус вершины $\Gamma_j^{(0)}$ ограничен нормальными к сторонам $\Gamma_{j-1}^{(1)}$ и $\Gamma_j^{(1)}$, которые примыкают к вершине $\Gamma_j^{(0)}$. Это вытекает из

того, что неравенства в задании конуса $U_j^{(0)}$ можно записать в виде $\langle \Gamma_i^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P \rangle < 0$. Все они следуют из неравенств $\langle \Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P \rangle < 0$ и $\langle \Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}, P \rangle < 0$, ибо векторы $\Gamma_i^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$ лежат внутри угла, образованного двумя векторами $\Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$. Т. е. $\Gamma_i^{(0)} - \Gamma_j^{(0)} = c_1(\Gamma_{j-1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}) + c_2(\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)})$, где $c_1, c_2 > 0$.

Пример 7. $D = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, где $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$, $Q_4 = (1, 2)$ (рис. 6). Точки Q_1, Q_2, Q_3 являются вершинами. Обозначим $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$, $\Gamma_2^{(0)} = Q_3$, $\Gamma_3^{(0)} = Q_2$. Тогда $\Gamma_1^{(1)}$ — ребро с вершинами Q_1 и Q_3 , $\Gamma_2^{(1)}$ — ребро с вершинами Q_3 и Q_2 ; $\Gamma_3^{(1)}$ — ребро с вершинами Q_2 и Q_1 (рис. 6). Далее, множества $D_j^{(d)}$ суть

$$\begin{aligned} D_1^{(0)} &= Q_1, & D_2^{(0)} &= Q_3, & D_3^{(0)} &= Q_2, \\ D_1^{(1)} &= \{Q_1, Q_3\}, & D_2^{(1)} &= \{Q_3, Q_2\}, & D_3^{(1)} &= \{Q_2, Q_4, Q_1\}. \end{aligned}$$

Найдем теперь нормальные конусы $U_j^{(d)}$. Имеем (рис. 7)

$$U_1^{(1)} = \{P : \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle = \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle > \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle\} = \{P : p_2 = 2p_1 < 0\};$$

$$U_2^{(1)} = \{P : \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle = \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle > \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle\} = \{P : 2p_2 = p_1 < 0\};$$

$$U_3^{(1)} = \{P : \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle = \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle > \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle\} = \{P : p_1 = p_2 > 0\};$$

$$\begin{aligned} U_1^{(0)} &= \{P : \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle, \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle\} = \\ &= \{P : p_2 < p_1, p_2 < 2p_1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{(0)} &= \{P : \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle, \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle\} = \\ &= \{P : 2p_1 < p_2, 2p_2 < p_1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3^{(0)} &= \{P : \langle \Gamma_2^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle, \langle \Gamma_1^{(0)}, P \rangle < \langle \Gamma_3^{(0)}, P \rangle\} = \\ &= \{P : p_1 < 2p_2, p_2 > p_1\}. \end{aligned}$$

1.5. ПОДМНОЖЕСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

Совокупность всех целочисленных векторов $Q = (q_1, q_2)$ называют *целочисленной решеткой* и обозначают Z^2 . Рассмотрим теперь случай, когда множество $D \subset Z^2$, и укажем некоторые свойства множеств Γ , U , $\Gamma_j^{(d)}$ и $U_j^{(d)}$.

1. Множество Γ имеет не более чем счетное множество гра-ней $\Gamma_j^{(d)}$.

2. Все вершины $\Gamma_j^{(0)}$ лежат в множестве D ; к каждой вершине примыкает два ребра.

3. Все ребра $\Gamma_j^{(1)}$, являющиеся отрезками, принадлежат выпуклой оболочке Δ множества D и суть выпуклые оболочки своих вершин.

4. Конусы $U_j^{(d)}$ всех вершин и всех ребер-отрезков можно получить по формуле (5).

Выпуклой конической оболочкой множества $D \subset R^2$ назовем множество

$$K = \{P: P = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2; P_i \in D, \beta_i \geq 0, i = 1, 2\}.$$

Выпуклый конус K назовем *рациональным*, если он является выпуклой конической оболочкой целочисленных векторов. Например, первый квадрант $\{P \geq 0\}$ является рациональным конусом, как выпуклая коническая оболочка единичных векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Нормальный конус U является объединением конусов $U_j^{(d)}$, которых может быть счетное число.

Теорема 3. Если $D \subset Z^2$, то всякий рациональный конус $K \subset U$ пересекается лишь с конечным числом конусов $U_j^{(d)}$.

Доказательство здесь не приводим.

Если множество D лежит в первом квадранте $\{Q \geq 0\}$ плоскости R_1^2 , то нормальный конус U множества D содержит в себе III квадрант $\{P \leq 0\}$ плоскости R_2^2 . Поэтому в третьем квадранте $\{P \leq 0\}$ плоскости R_2^2 будет лишь конечное число конусов $U_j^{(d)}$. Следовательно, у множества Γ имеется лишь конечное число граней $\Gamma_j^{(d)}$, которые лежат на опорных прямых L_P с $P \leq 0$. Находить эти грани можно двумя способами.

Во-первых, можно найти все грани $\Gamma_j^{(d)}$ и их конусы $U_j^{(d)}$, а затем выделить те конусы $U_j^{(d)}$, которые пересекаются с третьим квадрантом $\{P \leq 0\}$ плоскости R_2^2 .

Во-вторых, можно найти сначала вертикальную и горизонтальную опорные прямые множества D с нормальными векторами $P^* = (-1, 0)$ и $P_* = (0, -1)$, соответственно. Натянутые на эти векторы лучи $P^* = (-c, 0)$ и $P_* = (0, -c)$, где $c > 0$, служат границей множества $\{P < 0\}$. Пусть $q_{2*} = \min q_2$ по $Q \in D$. Тогда прямая $q_2 = q_{2*}$ будет горизонтальной опорной прямой; пусть далее $q_{1*} = \min q_1$ по $Q = (q_1, q_2) \in D$.

Точка $Q_* = (q_{1*}, q_{2*})$ принадлежит множеству D и является крайней левой точкой этого множества на опорной горизонтальной прямой $q_2 = q_{2*}$. Обозначим ее $\Gamma_1^{(0)}$ и проведем через нее такую наклонную опорную прямую L_P ($P < 0$), которая проходила бы еще хотя бы через одну точку множества D . Крайнюю левую точку из множества D на прямой L_P обозначим через $\Gamma_2^{(0)}$, через эту точку проведем новую опорную прямую, которая проходила бы через точку множества D и не проходила бы через вершину $\Gamma_1^{(0)}$. Крайнюю левую точку из множества D на этой прямой обозначим через $\Gamma_3^{(0)}$ и так далее. Эту процедуру нужно продолжать до тех пор, пока не придем в точку $Q^* \in D$, лежащую на вертикальной опорной

прямой ниже остальных точек множества D , т. е. $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$, где $q_1^* = \min q_1$ по $Q \in D$; $q_2^* = \min q_2$ по $Q = (q_1^*, q_2^*) \in D$. Точка Q^* как вершина получит некоторый номер: $\Gamma_k^{(0)} = Q^*$. Между вершинами $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_k^{(0)}$ заключена выпуклая ломаная $\hat{\Gamma}$, состоящая из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и заключенных между ними ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Все они будут вершинами и ребрами многоугольника Γ , но не все вершины и ребра многоугольника Γ попадут в их число. В ситуации примера 7 имеем

$$Q_* = Q_1 = \Gamma_1^{(0)}, \quad Q^* = Q_2 = \Gamma_3^{(0)}.$$

Ломаная $\hat{\Gamma}$ состоит из трех вершин $\Gamma_1^{(0)}, \Gamma_2^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}$ и двух сторон $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}$ (рис. 6).

Итак, справедлива

Теорема 4. Если множество $D \subset Z^2$ и лежит в первом квадранте $\{Q \geq 0\}$, то число граничных подмножеств D_P , соответствующих векторам $P \leq 0$, конечно.

Пересечение Γ всех опорных полуплоскостей множества D будем называть *многоугольником Ньютона*, часть его границы $\hat{\Gamma}$ — *ломаной Ньютона*.

Раньше под словами «многоугольник Ньютона» понимали ломаную $\hat{\Gamma}$, являющуюся частью границы $\partial\Gamma$ выпуклой оболочки $\hat{\Gamma}$ множества D . В последнее же время под «многоугольником Ньютона» понимают саму выпуклую оболочку Γ , т. е. двумерное множество. Этой терминологии будем здесь придерживаться, и для $\hat{\Gamma}$ будем употреблять термин «ломаная Ньютона».

Ломаная Ньютона применяется для нахождения вблизи нуля $x_1 = x_2 = 0$ всех решений уравнения

$$\sum f_{q_1 q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2} = 0,$$

где целочисленные показатели q_1, q_2 неотрицательны (см. ниже § 2). Сам Ньютон [100] строил лишь нижнее правое ребро этой ломаной, примыкающее к точке Q . (кроме того, он q_1 откладывал по вертикали, а q_2 — по горизонтали). В главе 4 книги Уокера [118] описан многоугольник Ньютона, но несколько иначе, чем здесь (см. также обзорную статью Чеботарева [125]).

Целью наших геометрических построений было решение следующей задачи: Пусть задано множество двумерных векторов D ; для каждого вектора $P \neq 0$ (или $P < 0$) надо выделить такое *граничное подмножество* D_P , что

$$\langle Q_i, P \rangle = \langle Q_j, P \rangle; \quad Q_i, Q_j \in D_P,$$

$$\langle Q_k, P \rangle < \langle Q_j, P \rangle; \quad Q_k \in D \setminus D_P.$$

Здесь было показано, что решениями этой задачи являются подмножества $D_P^{(d)}$, лежащие на гранях $\Gamma_j^{(d)}$ ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}$ множества D . Но возможны и другие геометрические способы

решения этой задачи. Рассмотрим их, предполагая для простоты, что множество D содержит лишь конечное число точек $Q_1, \dots, Q_m$.

1.6. ДВОЙСТВЕННАЯ ЛОМАНАЯ

Пусть задано множество D и надо найти его граничные подмножества D_p . Для этого на плоскости переменных s_1, s_2 каждому вектору $Q_j \in D$ поставим в соответствие прямую Q_j , определяемую уравнением

$$\langle Q_j, S \rangle = 1.$$

Зафиксируем вектор P и рассмотрим проходящую через него прямую $P = \{cP\}$, где c — произвольное вещественное число. Обозначим через S_j точку пересечения прямой P с прямой Q_j , т. е.

$$S_j = c_j P, \quad \langle Q_j, S_j \rangle = 1.$$

Поэтому

$$\langle Q_j, P \rangle = c_j^{-1} \text{ и } \max \langle Q_j, P \rangle = \max c_j^{-1} = \begin{cases} (\min c_j)^{-1} \text{ по } c_j \geq 0, \text{ если есть } c_j > 0, \\ (\min c_j)^{-1}, \text{ если все } c_j < 0. \end{cases}$$

Разобьем прямую P на два луча $P^{(+)} = \{cP, c \geq 0\}$ и $P^{(-)} = \{cP, c < 0\}$. Если луч $P^{(+)}$ пересекается с прямыми Q_j , то $\max c_j^{-1}$ достигается в той точке S_j на этом луче, которая наиболее близка к началу координат $s_1 = s_2 = 0$. Если луч $P^{(+)}$ не пересекается с прямыми Q_j , то $\max c_j^{-1}$ достигается в той точке S_j луча $P^{(-)}$, которая наиболее удалена от начала координат $s_1 = s_2 = 0$. Поэтому для каждого вектора P множество D_p состоит из тех векторов Q_j , для которых прямые Q_j пересекаются с лучом $P^{(+)}$ по наиболее близкой к нулю точке. Если же таких прямых нет, то множество D_p состоит из тех векторов Q_j , для которых прямые Q_j пересекают луч $P^{(-)}$ по наиболее удаленной от нуля точке. Наиболее близкие к нулю пересечения лучей $P^{(+)}$ с прямыми Q_j образуют выпуклую ломаную $\Omega^{(+)}$, наиболее удаленные от нуля точки пересечения лучей $P^{(-)}$ с прямыми Q_j образуют также выпуклую ломаную $\Omega^{(-)}$. Выпуклости этих ломаных направлены друг к другу. Ребру ломаной $\Omega = \Omega^{(+)} \cup \Omega^{(-)}$ соответствует граничное подмножество D_p , состоящее из одной точки Q_j . Вершине ломаной Ω соответствует подмножество D_p , состоящее из всех точек Q_j , для которых прямые Q_j проходят через эту вершину.

Ломаная Ньютона $\partial \Gamma$ и ломаная Ω двойственны друг другу, они расположены в сопряженных плоскостях R_1^1 и R_2^2 . Рассмотренная выше плоскость переменных s_1 и s_2 — это плоскость R_2^2 . Раньше

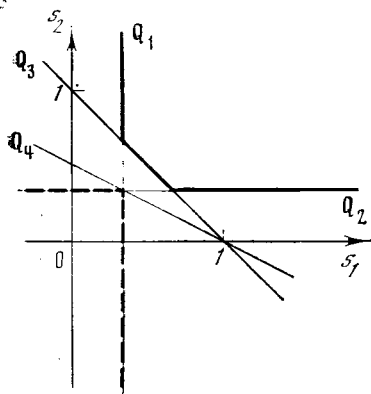


Рис. 8

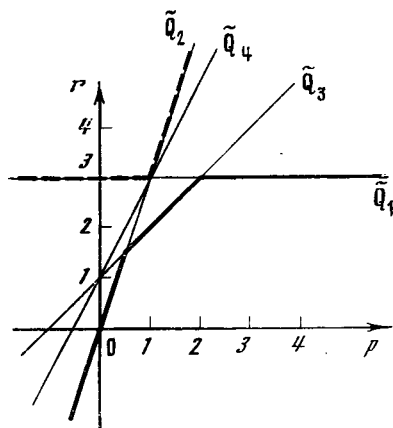


Рис. 9

на этой плоскости координаты обозначались p_1, p_2 . Обозначение координат s_1 и s_2 введено для удобства выкладок. Между вершинами и ребрами обеих ломаных $\partial\Gamma$ и Ω существует взаимно однозначное соответствие: ребру ломаной $\partial\Gamma$ соответствует вершина ломаной Ω и вершине ломаной $\partial\Gamma$ соответствует ребро ломаной Ω .

Пример 8 (ср. пример 7). Пусть $D = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, где $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$, $Q_4 = (1, 2)$. Тогда (см. рис. 8). имеем

$$Q_1 = \{S : s_1 = 1/3\}, \quad Q_2 = \{S : s_2 = 1/3\},$$

$$Q_3 = \{S : s_1 + s_2 = 1\}, \quad Q_4 = \{S : s_1 + 2s_2 = 1\}.$$

Ломаная $\Omega^{(-)}$ на рис. 8 обведена жирной чертой, она состоит из трех сторон и двух вершин (ср. рис. 6 и 7). Ломаная $\Omega^{(+)}$ обведена жирным пунктиром, она состоит из двух сторон и одной вершины.

1.7. О МЕТОДЕ ФРОММЕРА

Уравнение

$$\langle Q_j, P \rangle = q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 = r \quad (6)$$

однородно относительно величин p_1, p_2, r . Поэтому можно нормировать любую из этих трех величин, тогда в плоскости остальных двух величин уравнение (6) определяет прямую линию. В зависимости от того, какая из величин p_1, p_2, r нормирована (т. е. равна единице), получаем три варианта геометрической интерпретации, когда каждому вектору $Q_j = (q_{1j}, q_{2j})$ соответствует прямая линия. Вариант с $r=1$ был рассмотрен в предыдущем разделе. Здесь рассмотрим вариант с $p_1=1$. Итак, на плоскости

(p, r) каждому вектору $Q_j = (q_{1j}, q_{2j}) \in D$ ставится в соответствие прямая

$$q_{1j} + q_{2j}p = r, \quad (7)$$

которую обозначим $\tilde{Q}_j$. Для фиксированного вектора $P = (p_1, p_2)$ при $p_1 \neq 0$ имеем $P = p_1(1, p_2/p_1)$, поэтому

$\langle Q_j, P \rangle = p_1(q_{1j} + q_{2j}p_2/p_1) = p_1 r_j$, где r_j — ордината, соответствующая абсциссе $p = p_2/p_1$ на прямой $\tilde{Q}_j$. Поэтому

$$\max_j \langle Q_j, P \rangle = \max_j p_1 r_j = \begin{cases} p_1 \max_j r_j, & \text{если } p_1 > 0, \\ p_1 \min_j r_j, & \text{если } p_1 < 0. \end{cases}$$

Граничное множество D_p состоит из тех точек $Q \in D$, для которых $r = r^*(p) = \max_j r_j$, если $p_1 > 0$ или $r = r_*(p) = \min_j r_j$, если $p_1 < 0$. Геометрически это означает, что на плоскости (p, r) для каждого значения абсциссы p находим наибольшее значение $r^*(p)$ и наименьшее значение $r_*(p)$ по всем точкам прямых $\tilde{Q}_j$. В зависимости от знака p_1 берем либо точку $(p, r^*(p))$, либо точку $(p, r_*(p))$ и выделяем те прямые $\tilde{Q}_j$, которые проходят через выбранную точку.

Элементы множества D , соответствующие выделенным прямым, и образуют граничное подмножество D_p . Совокупность точек $(p, r^*(p))$ для всех p является ломаной линией $\Phi^{(+)}$, а совокупность точек $(p, r_*(p))$ образует ломаную линию $\Phi^{(-)}$. Обе эти ломаные выпуклы и обращены выпуклостями друг к другу. Ребро ломаной $\Phi = \Phi^{(-)} \cup \Phi^{(+)}$ соответствует одноточному граничному подмножеству D_p , т. е. вершине ломаной ∂G . Вершина ломаной Φ соответствует многоточному граничному подмножеству D_p , т. е. — ребру ломаной ∂G .

Пример 9 (ср. примеры 7 и 8). Для $D = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, где $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$, $Q_4 = (1, 2)$, имеем четыре прямых (рис. 9)

$$\tilde{Q}_1 = \{3 = r\}, \quad \tilde{Q}_3 = \{1 + p = r\},$$

$$\tilde{Q}_2 = \{3p = r\}, \quad \tilde{Q}_4 = \{1 + 2p = r\}.$$

Жирной линией выделена ломаная $\Phi^{(-)}$. Три ее ребра соответствуют вершинам Q_1, Q_2, Q_3 ломаной Ньютона (рис. 6). Две вершины ломаной $\Phi^{(-)}$ соответствуют ребрам $\Gamma_1^{(u)}$ и $\Gamma_2^{(u)}$ рис. 6. Ребру $\Gamma_3^{(u)}$ и вершинам Q_1, Q_2 рис. 6 соответствует ломаная $\Phi^{(+)}$, выделенная на рис. 9 жирным пунктиром.

Описанный здесь способ нахождения граничных подмножеств D_p с помощью ломаной Φ был предложен Фроммером [119] для исследования дифференциальных уравнений. Развитию этого метода много работ посвятили Куклес [75, 76] и его ученики, а также Андреев [1], Андреев и Глейзер [2] и другие. Заметим,

что третья возможная нормировка в уравнении (6) $p_2=1$ приводит к конструкции, аналогичной рассмотренной.

По сравнению с ломаной $\partial\Gamma$ и двойственным многоугольником Ω ломаная Фроммера Φ имеет тот недостаток, что она не симметрична относительно координат q_1, q_2 (или p_1, p_2). Из-за этого труднее построить многомерное обобщение ломаной Фроммера. Кроме того, неудобно следить за изменением ломаной Фроммера при степенных преобразованиях (см. ниже). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться только геометрической интерпретацией Ньютона. Многоугольник Ньютона к исследованию дифференциальных уравнений был применен Брио и Букке [134], затем использовался Горном [136], Дюляком [138] и другими (см. обзоры в § 20 книги Дюляка [139] и § 4 п. 7 книги Бибераха [132]). По-видимому, Фроммер не читал этих работ в подлиннике, а прочел лишь их краткое изложение в Математической Энциклопедии, написанное Пенлеве [143]. Поэтому Фроммер предложил свою менее удобную конструкцию. Создается впечатление, что многочисленные энтузиасты «метода Фроммера» не читали работ его предшественников. Это видно уже по приверженности к ломаной Фроммера, отсутствию соответствующих ссылок и дублированию старинных результатов. Например, уже Дюляк [138] исследовал интегральные кривые нулевого и бесконечного порядка; Фроммер [119] их не рассматривал, и Куклес [75] посвятил этому вопросу ряд работ, считая его не изученным (см. также Андреев [1]) *.

1.8. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Здесь рассмотрим линейные преобразования координат в плоскости $\mathbb{R}_2^2$

$$p'_1 = \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2, \quad p'_2 = \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2$$

с неособой матрицей

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

т. е. $\det \alpha \neq 0$. Это преобразование в векторной форме есть

$$P' = \alpha P. \quad (8)$$

Скалярное произведение $\langle Q, P \rangle$ для $Q \in \mathbb{R}_1^2$ и $P \in \mathbb{R}_2^2$ будет сохраняться после преобразования (8), если в плоскости $\mathbb{R}_1^2$ одновременно сделать линейное преобразование координат

$$Q' = \alpha^{-1*} Q, \quad (9)$$

где α^* — транспонированная матрица α . Тогда по свойству

* Беклемишева [9а] предлагает не нормировать величины p_1, p_2, r в уравнении (6), а рассматривать в трехмерном вещественном пространстве конус $M = \{p_1, p_2, r : q_{1j}p_1 + q_{2j}p_2 \leq r, j=1, \dots, m\}$.

скалярного произведения $\langle \beta Q, P \rangle = \langle Q, \beta^* P \rangle$ имеем

$$\langle Q', P' \rangle = \langle \alpha^{-1*} Q, \alpha P \rangle = \langle Q, \alpha^{-1} \alpha P \rangle = \langle Q, P \rangle.$$

Таким образом, при преобразованиях (8), (9) в плоскостях R_2^2 и R_1^2 соответственно сохраняется скалярное произведение между векторами этих плоскостей. Т. е. эти плоскости являются сопряженными (или двойственными) друг к другу.

Аффинное преобразование (8) является взаимно однозначным отображением плоскости R_2^2 на себя. При этом прямые линии переходят в прямые. Например, при фиксированном векторе Q_j прямая $\langle Q_j, P \rangle = c = \text{const}$ переходит в прямую $\langle Q', P' \rangle = c$. Более того, все линейные неравенства сохраняются. Пусть в плоскости R_1^2 задано множество D , и ему соответствуют множества $\Gamma, U, \Gamma_j^{(d)}, D_j^{(d)}, U_j^{(d)}$, построенные в предыдущих разделах. Пусть D' — множество, полученное из множества D после преобразования (9), и ему соответствуют множества $\Gamma', U', \Gamma_j^{(d)'}, D_j^{(d)'}, U_j^{(d)'}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \alpha^{-1*} \Gamma, & \Gamma_j^{(d)'} &= \alpha^{-1*} \Gamma_j^{(d)}, & D_j^{(d)'} &= \alpha^{-1*} D_j^{(d)}; \\ U' &= \alpha U, & U_j^{(d)'} &= \alpha U_j^{(d)}, \end{aligned}$$

т. е. все конструкции предыдущих разделов являются инвариантными при преобразованиях (8), (9).

Задача. Пусть $\Gamma_j^{(1)}$ — некоторое ребро (или отрезок). Требуется сделать такое преобразование (9), чтобы ребро $\Gamma_j^{(1)'} = \alpha^{-1*} \Gamma_j^{(1)}$ было параллельно одной из координатных осей q_1' или q_2' .

Пусть вектор $P \in R_2^2$ перпендикулярен ребру $\Gamma_j^{(1)}$.

Если вектор $P' = \alpha P$ лежит на координатной оси, то перпендикулярное ему ребро $\Gamma_j^{(d)'}$ также лежит на координатной оси. Поэтому достаточно найти такую матрицу α , чтобы у вектора αP одна из координат была равна нулю. В качестве такой матрицы можно взять

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

или

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $a = p_2/p_1$. Тогда вектор $P' = (p_1, 0)$ лежит на оси p_1' и ребро $\Gamma_j^{(d)'}$ параллельно оси q_2' (рис. 10 и 11). Отметим, что для матрицы (11) обратная есть

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

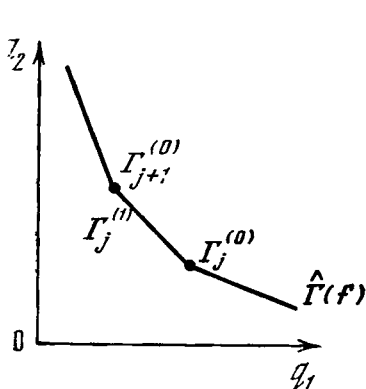


Рис. 10

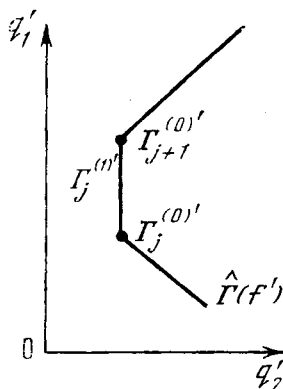


Рис. 11

е, если

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b-a & 1 \end{pmatrix},$$

при умножении таких треугольных матриц нижние левые элементы просто складываются.

Решим теперь предыдущую задачу. Пусть множество D лежит в первом квадранте плоскости R_1^2 . Требуется, чтобы множество D' , получающееся при решении предыдущей задачи, также лежало в I квадранте. При этом можно считать, что вектор $P < 0$. Поскольку $D' = \alpha^{-1}D$, то это свойство заведомо будет выполнено, если у матрицы α^{-1} все элементы неотрицательны. Но при $P < 0$ число $a = p_2/p_1$ положительно, и обе матрицы (12) и (13) обладают требуемым свойством.

9. УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Матрица α , у которой все элементы α_{ij} целочисленны и $\det \alpha = \pm 1$, называется *унимодулярной*. Для унимодулярной матрицы α обратная матрица α^{-1} также унимодулярна и есть

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \det \alpha. \quad (12)$$

Основное свойство преобразований (8) с унимодулярной матрицей α состоит в том, что оно взаимно однозначно на целочисленной решетке Z^2 .

Решим теперь задачу предыдущего раздела в классе унимодулярных преобразований (8), считая, что множество $D \subset Z^2$. В этом случае все вершины ломаной $\partial \Gamma$ целочисленны. Итак, имеется ребро $\Gamma_j^{(1)}$ с целочисленными концами, требуется с

помощью унимодулярного преобразования (8) перевести его в ребро $\Gamma_j^{(1)'}$, параллельное одной из координатных осей.

Пусть $R = (r_1, r_2)$ единичный вектор на ребре $\Gamma_j^{(1)}$, т. е. разность между соседними целочисленными точками ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Тогда вектор

$$P = (p_1, p_2) = (-r_2, r_1) \quad (13)$$

перпендикулярен ребру $\Gamma_j^{(1)}$, причем целые числа r_1 и r_2 взаимно просты. Надо найти такую унимодулярную матрицу α , чтобы у вектора

$$\alpha P = (\alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2, \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2) \quad (14)$$

аннулировалась одна из координат. Для упрощения дальнейших вычислений предположим, что $P > 0$. Укажем такую последовательность унимодулярных замен координат, в результате которой получим искомое преобразование. Пусть для определенности $p_2 > p_1$. Тогда в результате деления с остатком получим

$$p_2 = a_1 p_1 + p'_2,$$

где целые числа $0 \leq p'_2 < p_1$ и $a_1 > 0$. Причем $p'_2 = 0$, только при $p_1 = 1$, ибо числа p_1 и p_2 взаимно просты. Сделаем преобразование

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = -a_1 p_1 + p_2$$

с унимодулярной матрицей

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате этого преобразования вектор P перейдет в вектор $P' = (p'_1, p'_2)$. Если $p_1 = 1$, то $p'_2 = 0$, и искомое преобразование получено. Если $p_1 > 1$, то $p'_2 > 0$ и числа p'_1 и p'_2 взаимно просты; искомое преобразование еще не получено, но координаты вектора P' «меньше» координат вектора P . Продолжим процесс «уменьшения» координат. Разделим с остатком p'_1 на p'_2 :

$$p'_1 = a_2 p'_2 + p''_1,$$

где a_2 и p''_1 — целые числа: $a_2 > 0$ и $0 \leq p''_1 < p'_2$. Причем $p''_1 = 0$ только при $p'_2 = 1$. Сделаем унимодулярное преобразование

$$p''_1 = p'_1 - a_2 p'_2,$$

$$p''_2 = p'_2$$

с матрицей

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате этого преобразования вектор P' перейдет в вектор $P'' = (p_1'', p_2'') \geq 0$. Если $p_2' = 1$, то $p_1'' = 0$ и искомое преобразование является результатом двух преобразований:

$$\alpha = \alpha_2 \alpha_1.$$

Если $p_2' \neq 1$, то $p_1'' > 0$ и числа p_1'' и p_2'' взаимно просты. Координаты вектора P'' «меньше» координат вектора P' . Процесс надо продолжить. Пусть на k -м шаге получим вектор $P^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) \geq 0$. Если большая из координат $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}$ равна единице, то меньшая равна нулю. Тогда искомая матрица α есть

$$\alpha = \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1,$$

т. вектор αP является единичным координатным вектором. Если же большая из координат $p_1^{(k)}$ и $p_2^{(k)}$ не равна единице, то меньшая не равна нулю, ибо они взаимно просты. Используя деление с остатком большей координаты на меньшую, получим унитарное преобразование $P^{(k+1)} = \alpha_{k+1} P^{(k)}$, но вектор $P^{(k+1)}$ снова «меньше» вектора $P^{(k)}$. Продолжая этот процесс, на некотором шаге получим единичный вектор $P^{(n)}$. Тогда

$$\alpha = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \alpha_1, \quad (15)$$

вектор $P^{(n)} = \alpha P$ является единичным. Задача решена.

Заметим, что матрицы α_k треугольные с единицами по диагонали и в зависимости от четности индекса k они нижние или верхние:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Пример 10. Пусть $p_1 = 5, p_2 = 17$. Тогда

$$p_2 = 3p_1 + 2,$$

т. е. $a_1 = 3, p_1' = p_1 = 5, p_2' = 2$. Далее, $p_1' = 2p_2' + 1$; т. е. $a_2 = 2, p_1'' = 1, p_2'' = p_2' = 2$. Наконец, $p_2'' = 2p_1''$, т. е. $a_3 = 2, p_1''' = 1, p_2''' = 0$. Получаем

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -17 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\alpha P = P''' = (1, 0).$$

Отметим, что согласно (15)

$$\alpha^{-1} = \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \dots \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_n^{-1},$$

и согласно (16) матрицы α_k^{-1} имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем все их элементы неотрицательны. Следовательно, у матрицы α^{-1} также все элементы неотрицательны. Здесь существенно, что вектор $P > 0$.

На самом деле, использованная здесь конструкция последовательного деления с остатком — это алгоритм Евклида. Действительно, для взаимно простых чисел p_1 и p_2 надо найти такую унимодулярную матрицу α , чтобы вектор (14) был единичным. Т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 &= 1, \\ \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 &= 0, \\ \det \alpha &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \pm 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Из второго уравнения находим

$$\alpha_{21} = -p_2, \quad \alpha_{22} = p_1. \quad (18)$$

Тогда первое и третье уравнения (17) эквивалентны. Для решения первого уравнения (17) в целых $\alpha_{11} > 0$ и $\alpha_{12} < 0$ применяется описанный выше процесс последовательного деления с остатком (алгоритм Евклида).

Этот процесс можно также истолковать как разложение числа $\gamma = p_1/p_2$ в цепную дробь

$$\gamma = \frac{p_1}{p_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Здесь a_0 — целая часть числа γ , a_1 — целая часть числа $(\gamma - a_0)^{-1}$, a_2 — целая часть числа $((\gamma - a_0)^{-1} - a_1)^{-1}$ и т. д. Таким образом, чтобы разложить число γ в цепную дробь, надо у γ выделить целую часть a_0 и выделить остаток, затем взять целую часть обращенного остатка и выделить новый остаток, затем — у его обратного взять целую часть и т. д. В теории цепных дробей (см. Хинчин [123]) доказывается, что для рационального числа γ разложение в цепную дробь конечно, и число

$$\rho = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}}}$$

таково, что

$$\gamma - \rho = \frac{\sigma}{\tilde{q}_{n-1}\tilde{q}_n}, \quad (19)$$

где $\tilde{q}_{n-1}$ и $\tilde{q}_n$ — знаменатели дробей ρ и γ , соответственно, и $\sigma = \pm 1$. При этом $\tilde{q}_n = p_2$. Если $\rho = \tilde{p}_{n-1}/\tilde{q}_{n-1}$, то согласно (19)

$$p_1\tilde{q}_{n-1} - p_2\tilde{p}_{n-1} = \sigma = \pm 1.$$

Чтобы удовлетворить уравнение (17), остается положить

$$\alpha_{11} = \tilde{q}_{n-1}\sigma, \quad \alpha_{12} = -\tilde{p}_{n-1}\sigma. \quad (20)$$

Пример 11 (продолжение предыдущего примера). Пусть $p_1=5$, $p_2=17$. Тогда

$$\gamma = \frac{5}{17} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + 1/2}},$$

$$\rho = 0 + \frac{1}{3 + 1/2} = \frac{2}{7} = \hat{p}_{n-1}/\hat{q}_{n-1}.$$

Поскольку

$$\gamma - \rho = \frac{5}{17} - \frac{2}{7} = \frac{1}{119},$$

то $\sigma=1$. Согласно (20) $\alpha_{11}=7$, $\alpha_{12}=-2$. Итак, согласно (18) получаем матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -17 & 5 \end{pmatrix},$$

такую же, как в предыдущем примере.

З а м е ч а н и е. Если $\alpha P = (1, 0)$, то $\tilde{\alpha}P = (1, 0)$ для

$$\tilde{\alpha} = \alpha + k \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при любом целом k .

Здесь было предложено решение задачи лишь для положительного вектора P . Если $P < 0$, то надо взять матрицу α для вектора $-P$. Если $p_1 p_2 < 0$, то надо найти унимодулярную матрицу α для вектора $(|p_1|, |p_2|)$; тогда матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \operatorname{sgn} p_1 & \alpha_{12} \operatorname{sgn} p_2 \\ \alpha_{21} \operatorname{sgn} p_1 & \alpha_{22} \operatorname{sgn} p_2 \end{pmatrix}$$

является унимодулярной и аннулирует у вектора P одну из координат.

У п р а ж н е н и е 1. Пусть $p_1=5$, $p_2=7$; найти такую унимодулярную матрицу α , что у вектора αP одна из координат равна нулю.

§ 2. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

2.1. ПРОСТАЯ ТОЧКА

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ аналитична в точке $x_1=x_2=0$. Тогда она разлагается в степенной ряд (ряд Тейлора)

$$f(x_1, x_2) = \sum_{q_1, q_2 \geq 0} f_{q_1 q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2}, \quad (1)$$

который абсолютно сходится в некоторой окрестности нуля $\mathcal{U} = \{x_1, x_2 : |x_1|, |x_2| < \varepsilon\}$. Здесь показатели степеней q_1 и q_2 — целые неотрицательные числа, коэффициенты $f_{q_1 q_2}$ — вещественные или комплексные постоянные. Значения x_1 и x_2 также могут быть как вещественными, так и комплексными. Ради наглядности изложение в этом параграфе проведено для случая вещественной функции f и вещественного $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_0^2$. Но все построения применимы и для комплексного случая. Выпишем несколько первых членов разложения (1):

$$f = f_{00} + f_{10}x_1 + f_{01}x_2 + f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 + \dots$$

Пусть $f_{00}=0$, т. е. $f(0, 0)=0$; рассмотрим уравнение

$$f(x_1, x_2) = 0. \quad (2)$$

Совокупность решений уравнения (2) в окрестности $\mathcal{U}$ образует *аналитическое множество* (см. Фукс [120]), точнее говоря, — плоскую *аналитическую кривую*, проходящую через точку $X=0$. Цель этого параграфа — изучить расположение кривой (2) на плоскости $\mathbb{R}_0^2$ в достаточно малой окрестности точки $X=0$.

Если $|f_{10}| + |f_{01}| \neq 0$, то точка $X=0$ является *простой точкой* для кривой (2). В противном случае точка $X=0$ является *критической*. Начнем с разрешения уравнения (2) в окрестности простой точки, считая для определенности, что коэффициент $f_{01} \neq 0$.

Т е о р е м а 1. Пусть функция f аналитична в нуле, $f(0, 0)=0$, $f_{01} \neq 0$. Тогда уравнение (2) имеет аналитическое решение

$$x_2 = b(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_1^k. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом неопределенных коэффициентов. После подстановки решения (3) в разложение

(1), уравнение (2) должно обратиться в тождество по x_1

$$\sum_{q_1, q_2} f_{q_1 q_2} x_1^{q_1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_1^k \right)^{q_2} \equiv 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum f_{q_1 q_2} b_{k_1} \dots b_{k_s} \right) x_1^l \equiv 0, \quad (4)$$

где внутренняя сумма берется по

$$q_1 + k_1 + \dots + k_s = l. \quad (5)$$

Тождество (4) будет удовлетворено, если в левой части аннулируются все коэффициенты при x_1^l , т. е. если аннулируются все внутренние суммы для $l=1, 2, \dots$. В каждой такой сумме только у члена $f_{01} b_l$ имеется коэффициент a_k с индексом $k=l$; для остальных членов такой суммы индексы k коэффициентов b_k строго меньше l , ибо в сумме (5) $q_1 \geq 0$ и $k_j \geq 1$. Сумму указанных остальных членов обозначим через c_l . Тогда тождество (4) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$f_{01} b_l + c_l(b_1, \dots, b_{l-1}) = 0, \quad l=1, 2, \dots$$

Из этой системы последовательно по l определяем $b_l = -c_l/f_{01}$.

Посредством метода мажорант можно доказать, что ряд (3) сходится для достаточно малых $|x_1|$. Это теорема Коши о неявной функции (см. курс Гурса [62, § 184]). Однако здесь не будем доказывать сходимость ряда (3). Вообще, как правило, сведения о сходимости и расхождении рассматриваемых рядов будут даваться без доказательств. Доказательство окончено.

На плоскости переменных x_1, x_2 решения $x_2 = b(x_1)$ уравнения (2) образуют простую кривую линию, проходящую через ноль.

Практически вычислить разложение (3) можно разными способами. Например, можно выписать многочлены c_l как функции от коэффициентов b_j и $f_{q_1 q_2}$. Другой способ: ряд (3) ищется с помощью последовательных приближений. Для этого в исходном уравнении (2) делается замена переменной

$$x_2 = b_1 x_1 + y_1.$$

Тогда уравнение (2) перейдет в уравнение вида

$$f_1(x_1, y_1) = 0,$$

где надо искать решение

$$y_1 = \sum_{k=2}^{\infty} b_k x_1^k. \quad (6)$$

В следующих приближениях

$$y_k = b_{k+1}x_1^{k+1} + y_{k+1}.$$

Пример 1. Пусть $f = x_1 + x_2 + x_1x_2$. В обозначениях (1) здесь будет $f_{10}=1$, $f_{01}=1$, $f_{11}=1$, $f_{20}=0$ и т. д. Делаем в f подстановку $x_2 = b_1x_1 + y_1$. Получим

$$x_1 + b_1x_1 + y_1 + x_1(b_1x_1 + y_1) = 0.$$

Из (6) видно, что y_1 имеет более высокий порядок малости по x_1 , чем линейный. Выделяя члены первого порядка, получим для них уравнение $x_1 + b_1x_1 = 0$; откуда $b_1 = -1$; для y_1 получаем уравнение $y_1 - x_1^2 + y_1x_1 = 0$. Во втором приближении $y_1 = b_2x_1^2 + y_2$, имеем

$$f = b_2x_1^2 + y_2 - x_1^2 + b_2x_1^3 + x_1y_2 = 0.$$

Для членов второго порядка по x_1 получаем уравнение $b_2x_1^2 - x_1^2 = 0$, откуда $b_2 = 1$. Теперь $f = y_2 + x_1^3 + x_1x_2 = 0$. Аналогично для третьего приближения $y_2 = b_3x_1^3 + y_3$ получим $f = b_3x_1^3 + y_3 + x_1^3 + b_3x_1^4 + x_1y_3 = 0$. Для членов наименьшего (здесь третьего) порядка $b_3x_1^3 + x_1^3 = 0$, т. е. $b_3 = -1$. Продолжая таким же образом, получим $b = \sum_{k=1}^{\infty} (-x_1)^k$. С другой стороны, уравнение $x_1 +$

$+x_2 + x_1x_2 = 0$ легко решается относительно x_2 как линейное, и решение есть $x_2 = -x_1(1+x_1)^{-1}$. Разложение этого решения в ряд Тейлора в нуле дает полученный ранее ряд b .

Прежде чем изучать расположение аналитической кривой в окрестности критической точки, рассмотрим некоторые локальные свойства кривых на плоскости, а также асимптотические свойства аналитической функции на таких кривых.

2.2. ПОРЯДКИ МАЛОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть τ — вещественный параметр. При $\tau \rightarrow +\infty$ будем рассматривать функции от τ , определенные для $\tau > \tau_0$. Через $o(1)$ будем обозначать всякую функцию от τ , которая стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$. Если

$$\varphi(\tau) = b\tau^p(1 + o(1)), \quad (7)$$

где b и p — некоторые вещественные числа, то при $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$\varphi(\tau) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } p < 0, \\ b, & \text{если } p = 0, \\ \infty, & \text{если } p > 0. \end{cases}$$

Пусть

$$\varphi_1(\tau) = b_1\tau^{p_1}(1 + o(1))$$

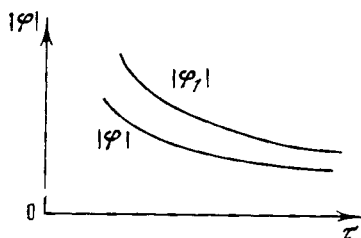


Рис. 12

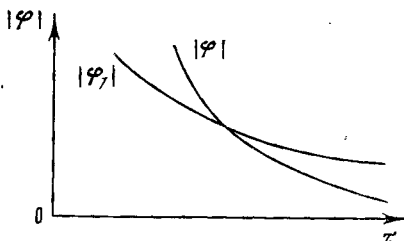


Рис. 13

и $p_1 > p$, тогда для достаточно больших τ будет $|\varphi_1| > |\varphi|$ и график имеет вид, изображенный на рис. 12. Если $p_1 = p$ и $|b_1| > |b|$, то $|\varphi_1| > |\varphi|$ и график будет таким же. Например, $\varphi = 1000 \tau^{-3}$, $\varphi_1 = \tau^{-2}$ (рис. 13). Но для достаточно больших τ расположение здесь такое же, как на рис. 12. Отметим, что в случае $p_1 > p$ будет

$$\varphi + \varphi_1 = b_1 \tau^{p_1} (1 + o(1)),$$

$$\varphi \varphi_1 = b b_1 \tau^{p+p_1} (1 + o(1)).$$

Наконец, при замене параметра

$$\tau = c \tau^* (1 + o(1)), \quad (8)$$

где $c > 0$ и $\alpha > 0$, функция (7) перейдет в функцию $\varphi^*(\tau^*) = \varphi(\tau) = b c^p \tau^{*p\alpha} (1 + o(1)) = b^* \tau^{*p^*} (1 + o(1))$, имеющую такой же вид, но с новым показателем степени $p^* = \alpha p$ и с новым коэффициентом $b^* = b c^p$.

2.3. ПОРЯДКИ МАЛОСТИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Рассмотрим теперь на плоскости x_1, x_2 кривую $\mathcal{F}$, задаваемую параметрически двумя уравнениями:

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_1 = b_1 \tau^{p_1} (1 + o(1)), \\ x_2 = b_2 \tau^{p_2} (1 + o(1)). \end{cases} \quad (9)$$

Кривые, допускающие такую параметризацию, назовем *кривыми класса $\mathcal{W}$* . Будем их рассматривать в окрестности нуля $X=0$, тогда $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$. Кроме того, для удобства дальнейшего изложения можно предположить, что $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$. На рис. 14 показан график некоторой кривой $\mathcal{F}$ класса $\mathcal{W}$.

Вектор $P = (p_1, p_2)$ назовем (векторным) *порядком кривой $\mathcal{F}$* . Если вместо τ на кривой $\mathcal{F}$ ввести новый параметр τ^* по формуле

(8), то получим

$$x_1 = b_1 c^{p_1} \tau^{*p_1 \alpha} (1 + o(1)) = b_1^* \tau^{*p_1} (1 + o(1)),$$

$$x_2 = b_2 c^{p_2} \tau^{*p_2 \alpha} (1 + o(1)) = b_2^* \tau^{*p_2} (1 + o(1)).$$

Т. е. по параметру τ^* кривая $\mathcal{F}$ является кривой класса $\mathcal{W}$, и векторный порядок при новой параметризации есть

$$P^* = (p_1^*, p_2^*) = (\alpha p_1, \alpha p_2) = \alpha P.$$

Поэтому кривой $\mathcal{F}$ при разных параметризациях, даваемых формулой (8), будут соответствовать векторные порядки P^* , расположенные на луче $P = \{P^* : P^* = \alpha P, \alpha > 0\}$.

Например, для кривой

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_1 = \tau^{-1}, \\ x_2 = \tau^{-3} \end{cases} \quad (10)$$

график изображен на рис. 14, порядок $P = (-1, -3)$ и луч порядков P изображены на рис. 15. Кривая (10) дается также одним уравнением $x_2 = x_1^3$. Вообще, если на кривой $\mathcal{F}$ в качестве параметра τ взята переменная x_1^{-1} , то у векторного порядка P первая координата $p_1 = -1$.

Пусть теперь кроме кривой (9) имеем кривую

$$\tilde{\mathcal{F}}: \begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 \tilde{\tau}^{\tilde{p}_1} (1 + o(1)), \\ x_2 = \tilde{b}_2 \tilde{\tau}^{\tilde{p}_2} (1 + o(1)). \end{cases}$$

Рассмотрим на плоскости x_1, x_2 кривые $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$ (рис. 14), и, с другой стороны, на плоскости p_1, p_2 рассмотрим лучи порядков P и $\tilde{P}$, соответствующие этим кривым (рис. 15). Заметим, что в достаточно малой окрестности нуля кривая $\mathcal{F}$ расположена правее кривой $\tilde{\mathcal{F}}$, если луч P расположен правее луча $\tilde{P}$. Это легко показать, если на обеих кривых в качестве параметра взять x_1^{-1} . Например, пусть кривая $\mathcal{F}$ дается формулой (10), а кривая

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_1 = \tau_1^{-2}, \\ x_2 = \tau_1^{-3}, \end{cases}$$

т. е. $x_2 = x_1^{3/2}$, тогда $\tilde{P} = (-2, -3)$ (см. рис. 14 и 15). Итак, видна определенная связь между геометрией в малой окрестности нуля для плоскости x_1, x_2 и геометрией на плоскости порядков p_1, p_2 .

Рассмотрим теперь более простой случай кривых

$$x_1 = b_1 \tau^{p_1},$$

$$x_2 = b_2 \tau^{p_2}.$$

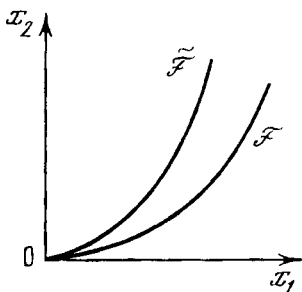


Рис. 14

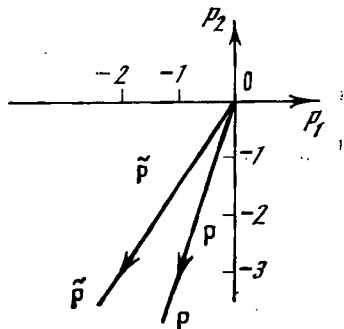


Рис. 15

Эти кривые назовем кривыми класса $\mathcal{W}_0$. Всякая кривая (9) класса $\mathcal{W}$ может быть заключена между двумя кривыми класса $\mathcal{W}_0$ в достаточно малой окрестности нуля.

Рассмотрим две такие кривые класса $\mathcal{W}_0$, а именно:

$$\mathcal{F}^* : \{x_1 = b_1 \tau^{p_1}, x_2 = (b_2 + \varepsilon) \tau^{p_2}\},$$

$$\mathcal{F}_* : \{x_1 = b_1 \tau^{p_1}, x_2 = (b_2 - \varepsilon) \tau^{p_2}\}.$$

Сравнивая их с кривой (9), заметим, что они имеют один и тот же порядок $P = (p_1, p_2)$ и отличаются лишь коэффициентами $b_2, b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon$. Небольшое изменение в этих постоянных и определяет расположение кривых $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}_*$ соответственно выше и ниже кривой $\mathcal{F}$.

У п р а ж н е н и е 1. Выяснить, куда стремится точка кривой (9) при $\tau \rightarrow \infty$ в зависимости от расположения векторного порядка $P = (p_1, p_2)$ (рассмотреть случаи, когда вектор P лежит в различных квадрантах и на осях координат).

2.4. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ НА КРИВОЙ

Рассмотрим асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$ функции $f(x_1, x_2)$ на кривой вида (9). Вначале рассмотрим случай, когда f — одночлен, т. е.

$f = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$. Тогда

$$f_{\mathcal{F}} = b_1^{q_1} b_2^{q_2} \tau^{p_1 q_1 + p_2 q_2} (1 + o(1)).$$

Порядок этой функции по τ есть

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = \langle Q, P \rangle.$$

Рассмотрим теперь конечную сумму

$$f = \sum_{j=1}^m a_j x_1^{q_{1j}} x_2^{q_{2j}}$$

с вещественными коэффициентами a_j . Тогда

$$f_{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^m a_j b_1^{q_{1j}} b_2^{q_{2j}} \tau^{p_1 q_{1j} + p_2 q_{2j}} (1 + o(1)). \quad (11)$$

Показатели степени в этой сумме будут разными для разных j ; если обозначить $Q_j = (q_{1j}, q_{2j})$, то эти показатели можно представить как скалярное произведение $\langle Q_j, P \rangle$.

Так как в сумме (11) при $\tau \rightarrow \infty$ слагаемые с большим показателем степени имеют большее значение, то выделим те индексы j , для которых показатель принимает наибольшее значение: $r = \max_{1 \leq j \leq m} \langle Q_j, P \rangle$, где вектор P фиксирован. Пусть этот максимум достигается на определенных $j = j_1, \dots, j_s$. Тогда будет

$$\begin{cases} \langle Q_j, P \rangle = r & \text{для } j = j_1, \dots, j_s; \\ \langle Q_j, P \rangle < r & \text{для } j \neq j_1, \dots, j_s. \end{cases} \quad (12)$$

Выделим все члены, для которых это скалярное произведение равно r , т. е. введем новую функцию

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^s a_{j_k} x_1^{q_{1j_k}} x_2^{q_{2j_k}}.$$

Тогда на кривой $\mathcal{F}$

$$f_{\mathcal{F}} = \hat{f}_{\mathcal{F}} + o(1) \tau^r = \hat{f}(b_1, b_2) \tau^r + \tau^r o(1). \quad (13)$$

Функция $\hat{f}$ называется первым приближением функции f по порядку P или *укорочением функции f по порядку P* . Ясно, что при такой конструкции от всей кривой $\mathcal{F}$ используется лишь ее порядок. Так как укорочение $\hat{f}$ дает ведущий член функции f на кривой $\mathcal{F}$, то надо научиться выделять из f первое приближение, причем нужно учесть, что для разных порядков P будут различные укорочения $\hat{f}$ от функции f .

2.5. ВЫДЕЛЕНИЕ УКОРОЧЕНИЙ

Пусть $D = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ — множество векторных показателей степеней в сумме f . При фиксированном векторе P в укорочение $\hat{f}$ попадают мономы $a_j x_1^{q_{1j}} x_2^{q_{2j}}$, у которых векторный показатель $Q_j = (q_{1j}, q_{2j})$ удовлетворяет условиям (12). Но это условия выделения граничного подмножества D_P из множества D . Поэтому

$$\hat{f} = \sum_{Q_j \in D_P} a_j x_1^{q_{1j}} x_2^{q_{2j}}. \quad (14)$$

Задача выделения граничных подмножеств D_P рассмотрена в § 1. Там предложен геометрический прием: по множеству D строится многоугольник Ньютона Γ , [его граница $\partial\Gamma$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$, им соответствуют нормальные конусы $U_j^{(0)}$ и $U_j^{(1)}$. Граничное множество D_P есть множество $D_j^{(d)} = D \cap \Gamma_j^{(d)}$, при этом $P \in U_j^{(d)}$. При фиксированном $U_j^{(d)}$ для всех $P \in U_j^{(d)}$ будет одно и то же граничное подмножество $D_P = D_j^{(d)}$, и, следовательно, одно и то же укорочение $\hat{f} = \hat{f}_j^{(d)}$ суммы f . В дальнейшем нормальный конус $U_j^{(d)}$ будем также называть *конусом укорочения* $\hat{f} = \hat{f}_j^{(d)}$.

Пример 2 (см. примеры 1 и 3 § 1). $f = x_1 + x_2 + x_1x_2$. Здесь $Q_1 = (1, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, $Q_3 = (1, 1)$; $D = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Многоугольник Ньютона Γ и разбиение плоскости R_2^2 на конусы $U_j^{(d)}$ показаны на рис. 2 и 3 соответственно. Если $P = (-1, -1)$, то $P \in U_1^{(1)}$, $D_P = \{Q_1, Q_2\}$, $\hat{f} = x_1 + x_2$.

Общую схему построения укорочений и конусов можно описать следующим образом. Сумме (1) ставится в соответствие множество D тех точек $Q = (q_1, q_2)$, для которых коэффициент $f_{q_1q_2} \neq 0$. Множество D называется *носителем* суммы (1), и иногда обозначается $\text{supp } f$. По множеству D строится многоугольник Ньютона $\Gamma = \Gamma(f)$, у него выделяются ребра и вершины $\Gamma_j^{(d)}$. Каждому ребру или вершине $\Gamma_j^{(d)}$ [соответствует [граничное подмножество $D_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \cap D$ множества D . Это подмножество $D_j^{(d)}$ определяет укорочение $\hat{f}_j^{(d)}$ по формуле (14). Наконец, для каждого укорочения строится его конус $U_j^{(d)}$ — это множество тех порядков $[P$, по которым укорочение $\hat{f}_j^{(d)}$ является первым [приближением суммы f . Описанную последовательность действий можно наглядно изобразить в виде схемы

$$\begin{array}{ccccccc} f & & \{\hat{f}_j^{(d)}\} & & & & \\ \downarrow & & \uparrow & & & & \\ D \rightarrow \Gamma \rightarrow \{\Gamma_j^{(d)}\} \rightarrow \{D_j^{(d)}\} \rightarrow \{U_j^{(d)}\}. \end{array}$$

Упражнение 2. Найти все укорочения $\hat{f}_j^{(d)}$ и их конусы $U_j^{(d)}$ для следующих многочленов f :

- 1) $x_1 + x_2 + x_1x_2$;
- 2) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + x_1x_2^2$;
- 3) $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

Все эти построения справедливы и для бесконечной суммы $f(x_1, x_2)$. Например, если f — ряд (1) по целым неотрицательным степеням переменных и изучаются значения этого ряда на кривых (9), стремящихся к точке $x_1 = x_2 = 0$, то $P < 0$ и согласно п. 1.5 число укорочений $\hat{f}$ будет конечным. Они соответствуют вершинам и ребрам той части ломаной $\partial\Gamma$, которая заключена между вершинами Q^* и Q_- . Формула (13) также остается справедливой.

Заметим, что укорочение $\hat{f}_j^{(0)}$, соответствующее вершине $\Gamma_j^{(0)} = Q$, является одночленом $f_{q,q} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$. А укорочение $\hat{f}_j^{(1)}$, соответствующее ребру, является квазиоднородным многочленом, ибо все его векторные показатели степеней Q лежат на одной прямой.

2.6. СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица с вещественными элементами и $\det \alpha \neq 0$. Тогда *степенное преобразование*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}}, \\ y_2 &= x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \end{aligned} \quad (15)$$

имеет обратное

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}}, \\ x_2 &= y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}}, \end{aligned} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

и матрица $\beta = \alpha^{-1}$. Действительно, преобразования (15) и (16) линейны относительно логарифмов координат:

$$\begin{cases} \ln y_1 = \alpha_{11} \ln x_1 + \alpha_{12} \ln x_2, \\ \ln y_2 = \alpha_{21} \ln x_1 + \alpha_{22} \ln x_2; \\ \ln x_1 = \beta_{11} \ln y_1 + \beta_{12} \ln y_2, \\ \ln x_2 = \beta_{21} \ln y_1 + \beta_{22} \ln y_2. \end{cases}$$

и обратны друг другу. Отметим некоторые свойства степенного преобразования (15).

1) Преобразование (15) всегда определено и взаимно однозначно внутри I квадранта плоскости R_0^2 с координатами x_1, x_2 или y_1, y_2 . В остальных квадрантах преобразование (15) вещественно только при определенных ограничениях на числа α_{ij} . Преобразование (15) всегда определено в комплексной плоскости S_0^2 с координатами x_1, x_2 или y_1, y_2 , но оно не всегда взаимно однозначно в S_0^2 .

2) При преобразовании (15) одночлен $x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ согласно (16) перейдет в

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} = (y_1^{\beta_{11}} y_2^{\beta_{12}})^{q_1} (y_1^{\beta_{21}} y_2^{\beta_{22}})^{q_2} = y_1^{\beta_{11}q_1 + \beta_{21}q_2} y_2^{\beta_{12}q_1 + \beta_{22}q_2}. \quad (17)$$

Т. е. векторный показатель степени Q по X перейдет в векторный

показатель

$$Q' = \beta^* Q \quad (18)$$

по $Y = (y_1, y_2)$, где β^* — транспонированная матрица β . Итак, при нелинейном преобразовании (15) векторные показатели степени испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы одночленов

$$f = \sum_{Q \in D} f_Q x_1^{q_1} x_2^{q_2}, \quad (19)$$

которая при преобразовании (15) перейдет в сумму

$$f' = \sum_{Q' \in D'} f_Q y_1^{q'_1} y_2^{q'_2}, \quad (20)$$

где $Q' = \beta^* Q$, $D' = \beta^* D$. Т. е. степенное преобразование (15) на плоскости R_1^2 показателей степеней Q индуцирует линейное преобразование (18). Как было показано в § 1, геометрические конструкции множеств D и D' связаны тем же линейным преобразованием: многоугольник $\Gamma(D') = \Gamma' = \beta^* \Gamma$, каждой вершине или ребру $\Gamma_j^{(d)} \subset \Gamma$ соответствует вершина или ребро $\Gamma_j^{(d')} \subset \Gamma'$. Поэтому при преобразовании (15) укорочение $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ переходит в укорочение $\hat{f}_j^{(d')}(Y)$, т. е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

3) Кривая класса $\mathscr{W}$

$$\mathscr{F}: \begin{cases} x_1 = b_1 \tau^{p_1} (1 + o(1)), \\ x_2 = b_2 \tau^{p_2} (1 + o(1)) \end{cases}$$

с положительными b_1 и b_2 при преобразовании (15) перейдет в кривую

$$y_1 = (b_1 \tau^{p_1})^{\alpha_{11}} (b_2 \tau^{p_2})^{\alpha_{12}} (1 + o(1)) = b_1^{\alpha_{11}} b_2^{\alpha_{12}} \tau^{\alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2} (1 + o(1)),$$

$$y_2 = (b_1 \tau^{p_1})^{\alpha_{21}} (b_2 \tau^{p_2})^{\alpha_{22}} (1 + o(1)) = b_1^{\alpha_{21}} b_2^{\alpha_{22}} \tau^{\alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2} (1 + o(1))$$

класса $\mathscr{W}$, но с векторным порядком

$$P' = \alpha P. \quad (21)$$

Следовательно, на плоскости R_2^2 порядков P степенное преобразование (15) индуцирует линейное преобразование (21). Это преобразование сопряжено преобразованию (18). Поэтому плоскости R_1^2 и R_2^2 оказываются сопряженными и скалярное произведение $\langle Q, P \rangle$ сохраняется при степенном преобразовании (15). В частности, конусы укорочений $U_j^{(d)}$ суммы (19) переходят в конусы укорочений $U_j^{(d')}$ суммы (20). Вообще все геометрические объекты сопряженных плоскостей R_1^2 и R_2^2 испытывают линейные преобразования (18) и (19) и сохраняют все свои взаимные свойства.

В дальнейшем придется иметь дело главным образом со степенными преобразованиями двух видов, когда матрица α является либо треугольной, либо унимодулярной. Поэтому здесь отметим некоторые свойства таких степенных преобразований.

Первый вид. Матрица α треугольна:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

число α_{21} — рационально: $\alpha_{21} = n/m$. Тогда

$$\beta = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Если знаменатель m дроби α_{21} нечетный, то преобразование (15) определено и взаимно однозначно для вещественных ненулевых значений x_1, x_2, y_1, y_2 (т. е. — в плоскости $\mathbf{R}_0^2$). Если же знаменатель m дроби α_{21} четный, то вещественное преобразование (15) определено только в полуплоскости $x_1 > 0$ (или $y_1 > 0$). В этой полуплоскости вне координатной оси $x_2 = 0$ (или $y_2 = 0$) оно взаимно однозначно.

В комплексной плоскости $\mathbf{C}_0^2$ преобразование (15) будет взаимно однозначным только при целом α_{21} .

Второй вид. Матрица α унимодулярна (т. е. α_{ij} — целые и $\det \alpha = \pm 1$, см. п. 1.9). Такие степенные преобразования (15) являются взаимно однозначными в комплексной области (и в вещественной тоже) вне координатных осей. Этим свойством выделяются степенные преобразования с унимодулярной матрицей α .

Кроме того, моном $x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ с целочисленными показателями степеней q_1 и q_2 переходит в моном $y_1^{q'_1} y_2^{q'_2}$, у которого показатели q'_1 и q'_2 также целочисленны. Это свойство сохраняется и при обратном преобразовании. Дело в том, что унимодулярное преобразование (18) переводит целочисленную решетку $\mathbf{Z}^2$ плоскости $\mathbf{R}_1^2$ на себя.

Степенные преобразования были введены и изучены Брюно [25, 27] для многомерной ситуации. Там же введены многоугольники (многогранники) и конусы укорочений для систем дифференциальных уравнений. В первоначальном варианте статья Брюно [27] была больше, но по требованию редакции была сокращена на одну треть: из нее были изъяты примеры и геометрическая интерпретация. Впоследствии из этих изъятых частей был составлен препринт Брюно [37].

2.7. КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА

Вернемся теперь к изучению решений уравнения (2) в окрестности критической точки $x_1 = x_2 = 0$. Через критическую точку может проходить несколько ветвей кривой, образованной решениями

ми уравнения (2). Надо уметь различать все эти ветви и находить их с любой степенью точности.

З а м е ч а н и е. Можно считать, что координатные оси $x_1=0$ и $x_2=0$ не являются решениями уравнения (2). Действительно, если это не так, то $f=x_1^{r_1}x_2^{r_2}f_0$, где целые числа $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ и f_0 — аналитическая в нуле функция, которая не имеет множителей вида x_1 или x_2 . Т. е. решения уравнения (2) удовлетворяют одному из трех уравнений

$$x_1^{r_1} = 0, \quad x_2^{r_2} = 0, \quad f_0 = 0.$$

Решения первых двух уравнений тривиальны, и приходим к исследованию уравнения, для которого оси не являются решениями.

Будем искать решения уравнения (2) в виде кривых (9) класса $\mathcal{W}$. При этом нас интересуют только кривые (9), которые при $\tau \rightarrow \infty$ входят в точку $x_1=x_2=0$. Для них, очевидно, $P < 0$.

Третий квадрант $\{P < 0\}$ плоскости R_2^2 разбивается на нормальные конусы $U_j^{(d)}$ вершин и ребер ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}$ суммы (1). Пусть $P \in U_j^{(d)}$, тогда согласно (13) на кривой (9) имеем

$$f_{\mathcal{T}} = \hat{f}_j^{(d)}(b_1, b_2) \tau^r + \tau^o o(1).$$

Следовательно, на кривой (9) при $\tau \rightarrow \infty$ отношение $f_{\mathcal{T}}/\tau^r$ стремится к значению $\hat{f}_j^{(d)}(b_1, b_2)$. Если кривая (9) удовлетворяет уравнению (2), то и предельное значение должно быть нулем. Т. е. коэффициенты b_1, b_2 должны удовлетворять уравнению

$$\hat{f}_j^{(d)}(b_1, b_2) = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0. \quad (22)$$

Если $d = 0$, т. е. $\Gamma_j^{(d)}$ — вершина, то укорочение $\hat{f}_j^{(d)}$ является одночленом: $\hat{f}_j^{(0)} = ax_1^{q_1}x_2^{q_2}$. Для него уравнение (22) имеет вид $ab_1^{q_1}b_2^{q_2} = 0$ и, очевидно, не имеет ненулевых решений b_1, b_2 . Поэтому кривая (9), у которой вектор P лежит в конусе вершины $U_j^{(0)}$, не может быть решением уравнения (2). Т. е. вершины не дают решений, и при отыскании решений уравнения (2) надо ограничиться ребрами $\Gamma_j^{(1)}$ многоугольника Ньютона $\Gamma(f)$.

Если $d = 1$, то $\hat{f}_j^{(1)}(x_1, x_2)$ — квазиоднородный многочлен. Чтобы использовать квазиоднородность укорочения $\hat{f}$, сделаем такое степенное преобразование (15), при котором ребро $\Gamma_j^{(1)}$ переходит в ребро $\Gamma_j^{(1)'}$, параллельное оси координат. Такая задача рассматривалась в конце § 1. Вектор $P' = \alpha P$ будет лежать на координатной оси. Матрицу степенного преобразования (15) можно взять либо треугольной (п. 1.8), либо унимодулярной (п. 1.9). В соответствии с видом используемых степенных преобразований получаем два метода разрешения уравнения (2).

Первый метод использует степенные преобразования с треугольной матрицей α и приводит к разложениям вида

$$\begin{cases} x_1 = \sigma \tau^{-1}, \\ x_2 = b^{(1)} \tau^{-p^{(1)}} + b^{(2)} \tau^{-p^{(2)}} + \dots, \end{cases} \quad (23)$$

где числа $p^{(k)}$ рациональны, положительны и возрастают вместе с индексом k . Число $\sigma = \pm 1$. Если все знаменатели чисел $p^{(k)}$ нечетны, то в разложении (23) σ принимает оба своих значения, т. е. разложение (23) справедливо как для положительных, так и для отрицательных x_1 . Если же у чисел $p^{(k)}$ есть четные знаменатели, то в разложении (23) знак σ и x_1 фиксирован.

Надо показать, что каждая ветвь решений уравнения (2) может быть представлена в таком виде и что для различных ветвей эти разложения будут отличаться. Это отличие может проявиться в очень далеких членах разложения (23). Тогда ветви, у которых совпадают начальные отрезки разложений (23), расположены на плоскости x_1, x_2 в окрестности нуля очень близко друг к другу.

Второй метод использует степенные преобразования с унимодулярными матрицами α и приводит к разложениям вида

$$x_i = b_i^{(1)} \tau^{p_i^{(1)}} + b_i^{(2)} \tau^{p_i^{(2)}} + \dots, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

где числа p_i^k — целые отрицательные.

2.8. ПЕРВЫЙ МЕТОД

Ищем кривую

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_1 = \sigma \tau^{-1}, \\ x_2 = b^{(1)} \tau^{-p^{(1)}} (1 + o(1)) \end{cases} \quad (25)$$

класса $\mathcal{W}$, удовлетворяющую уравнению (2). Здесь $P = (-1, -p^{(1)})$, $b_1 = \sigma = \pm 1$, $b_2 = b^{(1)} \neq 0$. Уравнение (22) принимает вид

$$\hat{f}(\sigma, b^{(1)}) = 0. \quad (26)$$

Определим для каждого ребра $\Gamma_j^{(1)}$ вектор $R_j = (r_{1j}, r_{2j})$ как разность между соседними целочисленными точками на ребре $\Gamma_j^{(1)}$. Для определенности будем считать, что $r_{1j} \leq 0$, $r_{2j} \geq 0$. Тогда числа r_{1j}, r_{2j} — взаимно просты, и $kR_j = \Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$, где целое положительное число k является наибольшим общим делителем координат вектора $\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)}$. Далее, положим $P_j = (-r_{2j}, r_{1j})$ — это вектор, ортогональный ребру $\Gamma_j^{(1)}$, он лежит в конусе $U_j^{(1)}$. Наконец, введем число $\gamma_j = -r_{1j}/r_{2j}$, тогда вектор $P = (-1, \gamma_j) \in U_j^{(1)}$ и, кроме того, $\gamma_{j-1} > \gamma_j > 0$.

Итак, ребру $\Gamma_j^{(1)}$ в разложении (25) соответствует один единственный показатель $p^{(1)} = \gamma_j$. Поскольку R_j — целочисленный вектор, то число $p^{(1)}$ рационально. Зафиксируем σ (пусть для определенности $\sigma = +1$) и найдем все ненулевые корни $b_1^{(1)}, \dots, b_s^{(1)}$ уравнения (26).

При этом, если нас интересуют только вещественные корни уравнения (2), то и корни уравнения (26) тоже надо брать только вещественные. Пусть $b_*^{(1)}$ — один из таких корней. Тогда первый член в разложении (23) уже найден. Чтобы найти второй член, сделаем замену

$$x_2 = x_1^{p^{(1)}} (b_*^{(1)} + y). \quad (27)$$

Тогда $f(x_1, x_2) = g(x_1, y)$, где g ряд по неотрицательным степеням x_1, y , при этом x_1 входит в ряд g теперь уже в рациональных степенях, а y — в целых.

Сократив ряд g на x_1^r , получим $g_0 = g/x_1^r$, и теперь для функции g_0 надо найти ветви кривой $g_0(x_1, y) = 0$, входящие в нуль. Эта задача похожа на исходную, только x_1 теперь входит в рациональных степенях. Пусть m — знаменатель числа $p^{(1)}$, тогда $x_1^{1/m}$ входит уже в целых степенях. Если эту величину принять за новую переменную, то задача станет совершенно такой же, с которой мы начали.

При этом, если в нуле $\partial g_0 / \partial y \neq 0$, то нуль — простая точка, и, применяя теорему 1, можно получить решение $y(x_1)$ уравнения $g_0(x_1, y) = 0$ в виде степенного ряда от $x_1^{1/m}$. Если же окажется, что в нуле $\partial g_0 / \partial y = 0$, то надо строить ломаную Ньютона, для g_0 выделять ребра, для каждого ребра находить свой показатель p и свои коэффициенты b и так далее.

Если рациональное число $p^{(1)}$ имеет нечетный знаменатель, то величина $\tau^{p^{(1)}}$ определена и для отрицательных τ . Поэтому достаточно рассмотреть случай $\sigma = 1$, считая, что знаки x_1 и τ принимают оба значения ± 1 . Здесь решения $b^{(1)}$ уравнения (26) не зависят от σ . Если знаменатель числа $p^{(1)}$ четный, то вещественная величина $\tau^{p^{(1)}}$ определена только для положительных τ . Поэтому надо отдельно рассмотреть случаи $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, соответствующие значениям $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Для рассмотрения второго случая ($\sigma = -1$) удобно изменить знак у x_1 : ввести $x_1 = -x_1$. Здесь решения $b^{(1)}$ уравнения (26) будут различными для разных σ .

Чтобы связать многоугольники Ньютона $\Gamma(f)$ и $\Gamma(g)$, разобьем преобразование (27) на два

$$x_2 = x_1^{p^{(1)}} z, \quad (28)$$

$$z = b^{(1)} + y. \quad (29)$$

В результате преобразования (28) каждый моном $ax_1^{q_1}x_2^{q_2}$ перейдет в моном $ax_1^{q_1+q_2p^{(1)}}x_2^{q_2} = ax_1^{q'_1}x_2^{q'_2}$. Т. е. ряд

$$f = \sum f_{q_1 q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$$

перейдет в ряд

$$f = \sum f_{q'_1 q'_2} x_1^{q'_1} x_2^{q'_2},$$

где $q'_1 = q_1 + p^{(1)}q_2$, $q'_2 = q_2$, т. е. множество точек $D(f')$ получается из множества точек $D(f)$ при линейном преобразовании $Q' = \alpha^{*-1}Q$ с матрицей

$$\alpha^{*-1} = \begin{pmatrix} 1 & p^{(1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом все точки Q сдвигаются по прямым, параллельным оси q_1 , для $q_2 > 0$ сдвиг происходит вправо. Многоугольник $\Gamma(f)$ деформируется в многоугольник $\Gamma(f')$, ребро переходит в ребро, вершина — в вершину. В частности, точки Q , лежащие на ребре $\Gamma_f^{(1)}$, соответствующем укорочению $\hat{f}$, имеют

$$\langle Q, P \rangle = \langle \Gamma_f^{(0)}, P \rangle = r,$$

т. е. $q_1 + q_2 p^{(1)} = r$.

После преобразования (28) они перейдут в

$$Q' = (q_1 + q_2 p^{(1)}, q_2) = (r, q_2),$$

т. е. ребро $\Gamma_f^{(1)}$ перейдет в вертикальное ребро $\Gamma_f^{(1)'}$, для которого $q'_1 = r$ и все множество $D(f')$ расположено справа от вертикали $q'_1 = r$. Если теперь положить $\hat{f}'_0 = x_1^{-r} f'$, то для $\hat{f}'_0$ точки Q' укорочения $\hat{f}$ расположены на оси q'_2 . На рис. 10, 11 и 16 показаны многоугольники Ньютона $\Gamma(f)$, $\Gamma(f')$ и $\Gamma(\hat{f}'_0)$, причем выделена судьба ребра $\Gamma_f^{(1)}$, соответствующего укорочению $\hat{f}$. При этом укорочение $\hat{f}$ функции f по порядку P переходит в укорочение $\hat{f}'_0$ функции $\hat{f}'_0$ по порядку $(-1, 0)$ и укорочение $\hat{f}'_0$ зависит только от z : $\hat{f}'_0(z) = x_1^{-r} \hat{f}(x_1, x_1^{p^{(1)}} z) = \hat{f}(1, z)$. Поэтому корень $b^{(1)} \neq 0$ уравнения (26) является корнем уравнения

$$\hat{f}'_0(z) = 0 \quad (30)$$

и определяет те точки на оси z , которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{f}'_0(x, z) = 0. \quad (31)$$

Для каждой из остальных точек оси z существует некоторая окрестность, в которой уравнение (31) не имеет решений.

Заметим, что при преобразовании (28) точка $x_1 = x_2 = 0$ раздвигается в прямую — ось z . При этом входящая в точку $x_1 = x_2 = 0$ кривая $x_2 = bx_1^p$ перейдет в кривую $z = bx_1^{p-p^{(1)}}$, которая стремится к бесконечности, константе или нулю, если $p < p^{(1)}$, $p = p^{(1)}$ или $p > p^{(1)}$, соответственно (при $x_1 \rightarrow 0$).

Если $b_*^{(1)}$ — простой корень уравнения (26) или (30), то $d\hat{f}'_0(b_*^{(1)})/dz \neq 0$, и поскольку

$$df'_0(0, b_*^{(1)})/dz = d\hat{f}'_0(b_*^{(1)})/dz,$$

то точка $\{x_1 = 0, z = b_*^{(1)}\}$ является простой точкой кривой (31), и согласно теореме 1 решение уравнения (31) в некоторой окрестности этой точки получается в виде разложения $y = z - b_*^{(1)}$ по степеням $x_1^{1/m}$. Это разложение и дает одну из ветвей решений уравнения (2) в виде ряда (23).

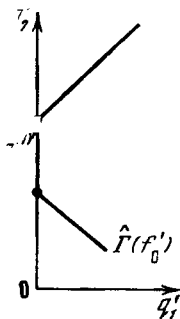


Рис. 16

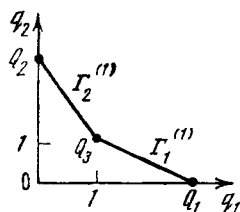


Рис. 17

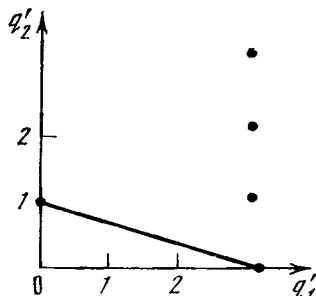


Рис. 18

Если $b_*^{(1)}$ не простой корень уравнения (30), то надо сделать параллельный перенос $z = b_*^{(1)} + y$, для функции $g_0(x_1, y) = \hat{f}'_0(x_1, b_*^{(1)} + y)$ построить многоугольник Ньютона и продолжать разделение ветвей. Это также приведет к разложению (23).

Если уравнение (30) не имеет вещественных корней $b^{(1)}$, то решения уравнения (2) не имеют для порядка $p^{(1)}$ вещественных ветвей вида (23), но имеют комплексные ветви.

Пример 3.

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2 = 0. \quad (32)$$

Кривая, определяемая этим уравнением, называется декартовым листом. В точке $x_1 = x_2 = 0$ будет $\partial f / \partial x_1 = \partial f / \partial x_2 = 0$. Поэтому эта точка является критической. Исследуем наше уравнение в ее окрестности. Здесь $Q_1 = (3, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$, $Q_3 = (1, 1)$; ломаная

Ньютона $\hat{\Gamma}$ (рис. 17) (см. пример 7 § 1) имеет два ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$.

Начнем с ребра $\Gamma_1^{(1)} \supset Q_1, Q_3$. Здесь $Q_3 - Q_1 = (-2, 1) = R_1$, поэтому $P_1 = (-1, -2)$, $\gamma = 2$. Соответствующее укорочение есть $\hat{f} = x_1^3 - 2x_1x_2$. Для коэффициента $b^{(1)}$ получаем уравнение (26):

$$\hat{f}(1, b) = 1 - 2b = 0,$$

откуда находим $b^{(1)} = 1/2$. Это уравнение линейно относительно b , и $b^{(1)}$ — простой корень. Поэтому этому корню и вообще ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует одна простая ветвь решений уравнения (32):

$$x_2 = 1/2 x_1^2 (1 + o(1)).$$

Чтобы найти дальнейшие члены разложения x_2 по x_1 на этой ветви, надо сделать замену переменного (27)

$$x_2 = x_1^2 (1/2 + y). \quad (33)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, x_2) &= g(x_1, y) = \\ &= x_1^3 + x_1^6 \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}y^2 + y^3 \right) - 2x_1^3 \left(\frac{1}{2} + y \right) = \\ &= -2x_1^3y + \frac{1}{8}x_1^6 + \frac{3}{4}x_1^6y + \frac{3}{2}x_1^6y^2 + x_1^6y^3. \end{aligned}$$

Сократив на x_1^3 , получим

$$g_0(x_1, y) = -2y + \frac{1}{8}x_1^3 + \frac{3}{4}x_1^3y + \frac{3}{2}x_1^3y^2 + x_1^3y^3.$$

Множество $D(g_0)$ и ломаная $\partial\Gamma(g_0)$ изображены на рис. 18. Здесь точка $x_1 = y = 0$ простая, ибо в ней $\partial g_0 / \partial y = -2 \neq 0$ (впрочем, простота этой точки следует из простоты корня $b^{(1)} = 1/2$). Согласно теореме 1 решения уравнения $g_0(x_1, y) = 0$ можно получить в виде ряда $y = y(x_1)$. В частности, первый член этого разложения находится из укорочения $\hat{g}_0 = -2y + 1/8 x_1^3$, соответствующего единственному ребру ломаной $\hat{\Gamma}(g_0)$. Из укороченного уравнения $\hat{g}_0 = 0$ находим, что $y = 1/16 x_1^3$, поэтому для решений полного уравнения имеем $y = 1/16 x_1^3 (1 + o(1))$. Подставляя это выражение в (35), получим разложение

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{16} x_1^5 + \dots$$

для ветви (обозначим ее $\mathcal{F}_1$) решений уравнения (32). Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует только одна эта ветвь.

Теперь возьмем ребро $\Gamma_2^{(1)} \supset Q_2, Q_3$. Для него $R_2 = Q_2 - Q_3 = (-1, 2)$, $P_2 = (-2, -1)$, $\gamma_2 = 1/2$. Для коэффициента $b^{(1)}$ при

$i=1$ получим уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(1, b) = b^3 - 2b = 0.$$

Корни этого уравнения суть $b=0$ и $b^{(1)} = \pm\sqrt{2}$. Нас интересуют лишь значения $b \neq 0$. Поэтому $b^{(1)} = \pm\sqrt{2}$. Оба эти корня простые. Поэтому получим еще две ветви:

$$\mathcal{F}_2: x_2 = \sqrt{2x_1} + \dots; \quad \mathcal{F}_3: x_2 = -\sqrt{2x_1} + \dots$$

Для вещественных x_1, x_2 эти ветви имеются лишь при $x_1 \geq 0$. При $i=-1$ уравнение (26) принимает вид $b^3 + 2b = 0$, оно не имеет ненулевых вещественных решений. Поэтому ребро $\Gamma_2^{(1)}$ не дает вещественных ветвей для отрицательных x_1 . На рис. 19 изображено расположение решений уравнения (32), на плоскости x_1, x_2 .

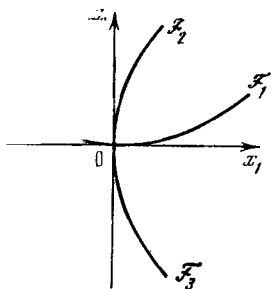


Рис. 19

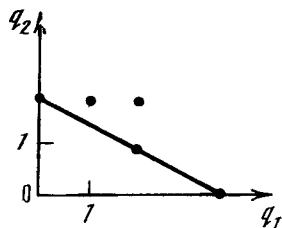


Рис. 20

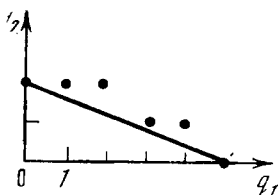


Рис. 21

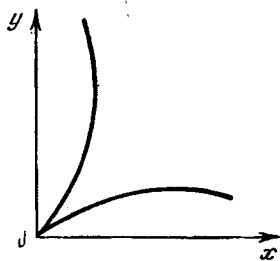


Рис. 22

З а м е ч а н и е. При вычислениях иногда проще вместо нелинейной замены (27) делать линейную замену $x_2 = b^{(1)}x_1^{p^{(1)}} + y$ и затем искать разложения для y , начинающиеся с членов по x_1 степени, большей $p^{(1)}$.

Пр и м е р 4. $f = x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ (здесь $x = x_1, y = x_2$). Ломаная Ньютона (рис. 20) здесь состоит из одного ребра,

его вектор $R = (-2, 1)$, $P = (-1, -2)$, $\gamma = 2$, $\hat{f} = x^4 - 2x^2y + y^2$. Для коэффициента b получаем уравнение $\hat{f}(1, b) = 1 - 2b + b^2 = 0$. Откуда $b = 1$ — двукратный корень. В соответствии с замечанием делаем замену $y = x^2 + z$. Тогда

$$\hat{f}(x, y) = g(x, z) = z^2 - x^5 - 2x^3z - xz^2 + x^6 + 2x^4z + x^2z^2.$$

Ломаная $\hat{\Gamma}(g)$ состоит из одного ребра (рис. 21). Для него $R = (-5, 2)$ и $P = (-2, -5)$, $\gamma = 5/2$, $\hat{g} = z^2 - x^5$. Из уравнения $\hat{g}(\sigma, b) = b^2 - \sigma = 0$, находим $b = \pm 1$ при $\sigma = 1$, причем оба корня простые. При $\sigma = -1$ вещественных корней нет. Поэтому имеем две простые ветви

$$z = \pm x^{5/2} + \dots, \quad x > 0,$$

или, возвращаясь к y , получим

$$y = x \pm x^{5/2} + \dots$$

Теперь уже ветви отделены друг от друга, т. е. для каждой ветви получено разложение, отличающееся от разложений для других ветвей. Заметим, что на первом шаге (когда был кратный корень $b = 1$) ветви еще не были отделены, ибо первый член разложения у обеих ветвей одинаков. Расположение ветвей на плоскости x, y показано на рис. 22.

У п р а ж н е н и е 3. Найти и нарисовать в окрестности точки $x = y = 0$ вещественные ветви корней следующих уравнений:

- 1) $x^3 - x^2 + y^2 = 0$,
- 2) $x^3 + x^2 + y^2 = 0$,
- 3) $x^3 + y^2 + x^2y^2 = 0$,
- 4) $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$,
- 5) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$,
- 6) $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$,
- 7) $y^6 - x^3y^2 - x^5 = 0$,
- 8) $x^2y - 2xy^2 + y^3 + x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 + ax^5 = 0$ для $a = 15, 16, 17$,
- 9) $-x^3 + x^4 - 2x^2y - xy^2 + 2xy^4 + y^5 = 0$.

Изложенный здесь метод восходит к Ньютону [100] (см. Чиботарёв [125], Уокер [118], Вайнберг и Треногин [53], там же изложены различные свойства разложений, получаемых этим методом). Он имеет тот недостаток, что приводит к дробным степеням переменной x_1 . Чтобы избавиться от этого недостатка, Брио и Буке [134] вместо замены (18) предложили делать замену

$$x_1 = u^m, \quad x_2 = u^n (b^{(1)} + v), \quad (34)$$

где целые числа m и n суть знаменатель и числитель дроби $p^{(1)}$. После такого преобразования ряд $f(x_1, x_2)$ перейдет в ряд по целым степеням u и v . Однако обратное к (34) преобразование будет, вообще говоря, содержать дробные показатели степени.

Т. е. преобразования (34) не являются взаимно однозначными вне осей координат в комплексной плоскости S_0^2 . Поэтому ниже изложен другой метод решения уравнения (2), основанный на степенных преобразованиях с унимодулярными матрицами.

2.9. ВТОРОЙ МЕТОД РАЗРЕШЕНИЯ ОСОБЕННОСТИ

Пусть по-прежнему $R_j = (r_{1j}, r_{2j})$ — единичный вектор ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Тогда вектор $P_j = (-r_{2j}, r_{1j})$ лежит в конусе $U_j^{(1)}$ и является целочисленным. Пусть унимодулярная матрица α такова, что

$$P' = \alpha P_j = (-1, 0).$$

В п. 1.9 было показано, что

$$\alpha = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где целые числа s_1 и s_2 подобраны так, чтобы определитель

$$s_1 r_2 - s_2 r_1 = 1. \quad (36)$$

Для любых целых взаимно простых чисел r_1 и r_2 существует бесконечно много пар целых чисел s_1 и s_2 , удовлетворяющих равенству (36). Обратная матрица есть

$$\beta = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} r_2 & -s_2 \\ -r_1 & s_1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Сделаем замену координат (15) с матрицей (35). Согласно формулам п. 2.6 имеем

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} = y_1^{r_2 q_1 - r_1 q_2} y_2^{-s_2 q_1 + s_1 q_2} = y_1^{q'_1} y_2^{q'_2},$$

т. е. у координаты y_1' показатель степени

$$q'_1 = -\langle Q, P_j \rangle \geq r = -\max_{Q \in D} \langle Q, P_j \rangle.$$

Сумма (19) перейдет в сумму (20), многоугольник $\Gamma = \Gamma(f)$ перейдет в многоугольник $\Gamma' = \Gamma(f')$; в частности, ребро $\Gamma_j^{(1)}$ перейдет в ребро $\Gamma_j^{(1)'}$, которое ортогонально вектору $P' = (-1, 0)$. Следовательно, ребро $\Gamma_j^{(1)'}$ параллельно оси ординат, и у всех точек $Q \in \Gamma_j^{(1)'}$ первая координата имеет одно и то же значение r (рис. 10, 11). Поэтому для соответствующих укорочений получаем

$$\hat{f}_j^{(1)}(x_1, x_2) = \hat{f}_j^{(1)'}(y_1, y_2) = y_1^r \hat{f}_0'(y_2).$$

Для остальных членов разложения (20) $q'_1 > r$. Поэтому функцию $\hat{f}'(y_1, y_2)$ можно разделить на y_1^r :

$$\hat{f}_0'(y_1, y_2) = y_1^{r-f'}(y_1, y_2).$$

Сокращению функции $f'(y_1, y_2)$ на y_1' соответствует на плоскости R_1^2 такой сдвиг многоугольника Γ' влево, при котором ребро $\Gamma_j^{(1)'}$ попадает на ось q_2' (рис. 16).

Теперь мы пришли к задаче: найти решения уравнения

$$\hat{f}_0'(y_1, y_2) = 0 \quad (38)$$

в классе $\mathcal{W}$ кривых с порядком $P = (-1, 0)$

$$y_1 = b_1' \tau^{-1} (1 + o(1)),$$

$$y_2 = b_2' (1 + o(1)), \quad b_2' \neq 0, \infty.$$

Укорочение по этому порядку есть $\hat{f}_0' = \hat{f}_0'(y_2)$. Т. е. для коэффициента b_2' получаем уравнение

$$\hat{f}_0'(b_2') = 0. \quad (39)$$

При этом нас интересуют корни b_2' , отличные от нуля и бесконечности. Пусть $b_2' = b_{2*}'$ — такой корень, нам надо найти решение уравнения (38) вблизи точки $y_1 = 0, y_2 = b_{2*}'$. Поскольку функция $\hat{f}_0'$ содержит y_1 и y_2 в целых степенях, то мы пришли к такой же задаче, с которой начали. А именно: Найти все решения аналитического уравнения в некоторой окрестности известного решения.

Если корень $b_2' = b_{2*}'$ уравнения (39) — простой (т. е. в нем $d\hat{f}_0'/dy_2 \neq 0$), то по теореме 1 вблизи точки $y_1 = 0, y_2 = b_{2*}'$ все решения уравнения (38) даются рядом $b(y_1)$ по целым положительным степеням y_1 : $y_2 = b_{2*}' + b(y_1)$. Эта ветвь решений уравнения (38) отделена от остальных ветвей. Возвращаясь от y_1, y_2 к x_1, x_2 с помощью степенного преобразования (16), получим выражения x_1 и x_2 в виде рядов по степеням y_1 . Т. е. решение уравнения (2) будет представлено в параметрическом виде (24) с параметром $\tau = y_1^{-1}$.

Если корень $b_2' = b_{2*}'$ уравнения (39) кратный, то точка $y_1 = 0, y_2 = b_{2*}'$ может оказаться критической для функции $\hat{f}_0'(y_1, y_2)$. Для ее изучения надо сделать параллельный перенос $z = y_2 - b_{2*}'$, строить для функции

$$g(y_1, z) = \hat{f}_0'(y_1, y_2)$$

ломаную Ньютона, выделять ребра и так далее. Словом, функцию $g(y_1, z)$ надо исследовать тем же способом, который описан здесь в применении к функции $\hat{f}(x_1, x_2)$.

Остается только доказать, что через конечное число таких шагов будут отделены друг от друга все ветви решений уравнения (2). Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ число целых точек на нем минус единица, назовем *высотой ребра* $\Gamma_j^{(1)}$ и обозначим δ_j . Сумму высот всех

ребер ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}$ назовем *высотой ломаной* и обозначим $\delta = \delta(\hat{\Gamma})$. Число δ характеризует сложность особенности в нуле. Если в нуле $f=0$ и $\partial f/\partial x_2 \neq 0$, то высота $\delta=1$ и нуль — простая точка. Вообще, используя крайние вершины Q_* и Q^* ломаной Ньютона, легко заметить, что

$$\delta \leq q_2^* - q_{2*}, \quad \delta \leq q_{1*} - q_1^*. \quad (40)$$

Теперь заметим, что высота ребра δ_i равна высоте δ всей ломаной только, если вся ломаная $\hat{\Gamma}$ состоит из одного ребра. В остальных случаях $\delta_i < \delta$. Далее, при степенном преобразовании (15) с унимодулярной матрицей α между целочисленными точками плоскостей q_1, q_2 и q_1', q_2' устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому высота ребра инвариантна при таких преобразованиях.

Если в многочлене $\hat{f}'_0(y_2)$ выделить множитель y_2^s в максимальной степени, т. е. $\hat{f}'_0(y_2) = y_2^s h(y_2)$ и $h(0) \neq 0$, то высота ребра $\Gamma_i^{(1)'}$ равна степени многочлена $h(y_2)$ (рис. 16, 17).

При изучении окрестности точки $y_1=0, y_2=y_2^0$ строим ломаную Ньютона $\hat{\Gamma}(g(y_1, z))$. Согласно (40) ее высота не превосходит координаты q_2^* . В свою очередь, число q_2^* равно кратности корня $b'_2 = y_2^0$ уравнения (39). Но кратность корня $y_2^0 \neq 0$ не превосходит степени многочлена $h(y_2)$, равной высоте δ_i ребра $\Gamma_i^{(1)'}$. Итак, высота ломаной $\hat{\Gamma}(g(y_1, z))$ не превосходит высоты ребра исходной ломаной $\hat{\Gamma}(f(x_1, x_2))$. Причем равенство возможно только в том случае, когда ломаная $\hat{\Gamma}(f)$ состоит из одного ребра и многочлен $\hat{f}'_0(y_2)$ имеет только один корень $y_2^0 \neq 0$, кратность которого равна степени многочлена $h(y_2)$. Т. е. во всех остальных случаях описанная процедура дает уменьшение высоты (и сложности) исследуемой особенности и приводит к случаю особой точки единичной высоты. Это простая точка, соответствующая отдельной ветви. Единичная высота не может быть достигнута за конечное число шагов, аналогичных описанному выше, только в том случае, когда уравнение (2) имеет кратные ветви. Например, если

$$f = \left(x_2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_1^k \right)^3 g(x_1, x_2),$$

то ветвь $x_2 = \sum x_1^k$ является трехкратным решением уравнения (2), и при ее выделении нашим методом высота все время будет равна трем.

Заметим еще, что число ветвей решений уравнения (2) в нуле не превосходит высоты δ ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}(f)$. Что касается вещественных ветвей, которым соответствуют только вещест-

венные корни $y_2 = y_2^0$ уравнений типа (39), то их может быть еще меньше.

Пример 5 (ср. пример 3). $f = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2$; ломаная $\hat{\Gamma}$ изображена на рис. 17. Для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ вектор $R_1 = (-2, 1)$. Подбираем такие целые s_1 и s_2 , чтобы было выполнено равенство (36):

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = s_1 + 2s_2 = 1.$$

Здесь можно взять $s_1 = 1$, $s_2 = 0$. Тогда замена (15) есть

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1^{-2} x_2. \quad (41)$$

Согласно (37) обратная замена (16) есть

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1^2 y_2. \quad (42)$$

Преобразование (41) переводит нашу функцию f в

$$f'(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = y_1^3 + y_1^2 y_2^3 - 2y_1^3 y_2.$$

Сокращая на y_1^3 , получим

$$f'_0 = y_1^{-3} f' = 1 - 2y_2 + y_1^3 y_2^3;$$

укорочение есть

$$\hat{f}'_0(y_2) = f'_0(0, y_2) = 1 - 2y_2,$$

его корень $y_2^0 = 1/2$, это простой корень, поэтому соответствующая ветвь отделена. Сделав подстановку

$$y_2 = y_2^0 + z = 1/2 + z,$$

получим

$$\hat{f}'_0(y_1, 1/2 + z) = -2z + y_1^3(1/2 + z)^3 = -2z + 1/8 y_1^3 + \dots$$

Первое приближение здесь есть

$$-2z + 1/8 y_1^3,$$

оно дает корень $z = 1/16 y_1^3$; итак, $z = 1/16 y_1^3 + \dots$, где точками обозначены члены разложения по y_1 степени выше 3, поэтому

$$y_2 = \frac{1}{2} + 1/16 y_1^3 + \dots$$

и согласно (42)

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = 1/2 y_1^2 + 1/16 y_1^5 + \dots$$

Эта ветвь представлена в такой же форме, как и в примере 3, ибо для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ преобразования обоих методов совпадают.

Рассмотрим теперь ребро $\Gamma_2^{(1)}$. Для него $R_2 = (-1, 2)$; подберем такие целые s_1 и s_2 , чтобы

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2s_1 + s_2 = 1.$$

Здесь можно взять $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, но тогда после преобразования (15) получим в f' отрицательные степени y_2 . Чтобы избежать этого, возьмем $s_1 = 1$, $s_2 = -1$. Преобразование (15) примет вид

$$y_1 = x_1 x_2^{-1}, \quad y_2 = x_1^{-1} x_2^2.$$

Обратное преобразование (16) согласно (37) есть

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1 y_2. \quad (43)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f'(y_1, y_2) &= f(x_1, x_2) = \\ &= y_1^4 y_2^2 + y_1^2 y_2^3 - 2y_1^3 y_2^2 = y_1^2 y_2^2 (y_1^2 y_2 + y_2 - 2). \end{aligned}$$

Укорочение $\hat{f}_0' = y_2^2 (y_2 - 2)$, откуда находим корень $y_2^2 = 2$. Это простой корень, следовательно, ветвь отделена. Найдем линейный член разложения y_2 по y_1 из уравнения

$$g(y_1, y_2) = y_1^2 y_2 + y_2 - 2 = 0.$$

Подстановка $y_2 = 2 + z$ дает

$$g(y_1, 2 + z) = z + 2y_1^2 + \dots,$$

откуда находим

$$z = -2y_1^2 + \dots$$

Итак, возвращаясь к исходным переменным, получим

$$y_2 = 2 - 2y_1^2 + \dots,$$

и согласно (43)

$$x_1 = 2y_1^2 - 2y_1^4 + \dots,$$

$$x_2 = 2y_1 - 2y_1^3 + \dots$$

Здесь y_1 — параметр τ^{-1} . Расположение ветвей показано на рис. 19.

Пример 6. $f = x_2^6 - x_1^3 x_2^2 - x_1^5 = 0$. Ломаная $\hat{\Gamma}$ (рис. 23) состоит из двух ребер. Начнем с ребра $\Gamma_1^{(1)}$. Для него $Q_2 - Q_3 = (-2, 2)$, поэтому $R_1 = (-1, 1)$, и равенство (36) будет выполнено, если положить $s_1 = 1$, $s_2 = 0$. Получаем степенное преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1^{-1} x_2$$

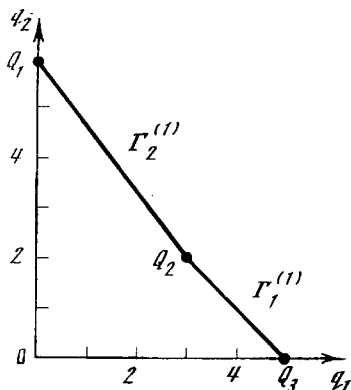


Рис. 23

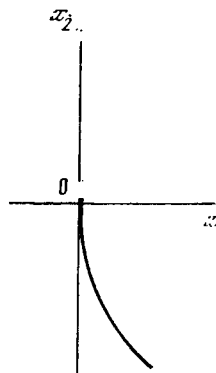


Рис. 24

и обратное

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 y_2.$$

Поэтому

$$f'(y_1, y_2) = y_1^6 y_2^6 - y_1^5 y_2^2 - y_1^5 = y_1^5 (y_1 y_2^6 - y_2^2 - 1);$$

корни укороченного уравнения $y_1^{-5} \hat{f}'(y_1, y_2) = -y_2^2 - 1 = 0$ являются комплексными $y_2^0 = \pm i$, им отвечают комплексные ветви решения исходного уравнения. Поскольку это укороченное уравнение не имеет вещественных корней, то ребру $\Gamma_1^{(1)}$ не отвечает никакая вещественная ветвь (только комплексные).

Для ребра $\Gamma_2^{(1)}$ имеем $Q_1 - Q_2 = (-3, 4) = R_2$. Разложим в целую дробь число $\gamma = |r_1/r_2| = 3/4 = (1 + 1/3)^{-1}$. Равенство (36) будет выполнено, если положить $s_1 = 1, s_2 = -1$. Это дает степенное преобразование

$$y_1 = x_1 x_2^{-1}, \quad y_2 = x_1^{-3} x_2^4,$$

и обратное преобразование (16) согласно (37) есть

$$x_1 = y_1^4 y_2, \quad x_2 = y_1^3 y_2.$$

Откуда получаем

$$f' = y_1^{18} y_2^6 - y_1^{18} y_2^5 - y_1^{20} y_2^5 = y_1^{18} y_2^5 (y_2 - 1 - y_1^2).$$

Укорочение

$$y_1^{-18} \hat{f}' = y_2^5 (y_2 - 1)$$

имеет только один ненулевой корень $y_2^0 = 1$. Это простой корень, и ему соответствует отдельная простая ветвь решений исходного

уравнения $f=0$. После подстановки $y_2=1+z$ найдем, что $z=y_1$. В отличие от предыдущих случаев это точное, а не приближенное решение уравнения $f'=0$. Итак, $y_2=1+y_1^2$,

$$x_1 = y_1^4 + y_1^6, \quad x_2 = y_1^8 + y_1^6.$$

Расположение этого решения на плоскости x_1, x_2 показано на рис. 24.

У п р а ж н е н и е 4. Сделать упражнение 3 вторым методом.

2.10. МЕТОД ВЕЙЕРШТРАССА

Вейерштрасс [135] предложил метод разрешения уравнения (2) с помощью бирациональных замен координат. Бирациональной называется замена $x_1, x_2 \rightarrow y_1, y_2$, при которой y_i выражаются в виде отношения многочленов от x_1, x_2 , и обратно x_i выражаются в виде отношения многочленов от y_1, y_2 . Бирациональными преобразованиями являются, например, параллельный перенос, аффинное преобразование, степенное преобразование с унимодулярной матрицей, а также любая конечная суперпозиция таких преобразований. В частности преобразования, использованные в предыдущем пункте для разделения ветвей, являются бирациональными. С наших позиций метод Вейерштрасса можно изложить иначе, чем в [135], следующим образом.

Вейерштрасс показал, что разделение ветвей аналитической кривой можно провести с помощью конечного числа преобразований вида

$$y_1 = x_1 x_2, \quad y_2 = x_2 \quad (44)$$

или

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 x_2 \quad (45)$$

и параллельных переносов. В предыдущем пункте было показано, что для разделения ветвей достаточно конечного числа степенных преобразований (15) с унимодулярной матрицей α и параллельных переносов. Покажем теперь, что степенное преобразование (15) с унимодулярной матрицей α может быть представлено в виде суперпозиции конечного числа преобразований вида (44) и (45). Эти преобразования являются степенными и им соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Таким образом, надо показать, что матрицы α , использованные в предыдущем пункте, могут быть представлены как произведение конечного числа матриц вида (46). Способ нахождения матриц α был указан в п. 1.9 и там же было показано, что матрица α

является произведением треугольных матриц

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \alpha_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

с целыми a_k . Легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Т. е. каждая матрица вида (47) является произведением матриц вида (46). Итак, каждое степенное преобразование предыдущего пункта разбивается на конечное число преобразований Вейерштрасса (44) и (45). Последовательность преобразований типа (44) и (45) используется в алгебраической геометрии для разрешения особенностей алгебраических кривых и называется «сигма-процесс» (см. Уокер [118]). Результирующее степенное преобразование можно было бы назвать «кратным сигма-процессом», его использование приводит к более коротким вычислениям, чем обычный сигма-процесс. Результат же, разумеется, одинаков.

Бендиксон [131] применил метод Вейерштрасса для разрешения особенности обыкновенного дифференциального уравнения (см. также Дюляк [140]). Его результаты тоже могут быть получены преобразованиями «второго метода», что и будет сделано во второй главе.

§ 3. ЛИНИИ УРОВНЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена в некоторой области. *Линией уровня* этой функции называется кривая, определяемая уравнением

$$f(x_1, x_2) = c = \text{const.} \quad (1)$$

Разным значениям константы c соответствуют разные линии уровня. В этом параграфе рассмотрим следующую задачу: Пусть функция $f(x_1, x_2)$ аналитична в точке $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$; в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{U}$ этой точки надо найти явные выражения для линий уровня (1):

$$x_i = b_i(c, \tau), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

(τ — параметр) и выяснить их взаимное расположение. Ради наглядности здесь рассмотрен вещественный случай, когда функция f и координаты x_i — вещественны, хотя все излагаемые методы применимы без изменений и в комплексной ситуации. Не нарушая общности, будем считать, что $x_1^0 = x_2^0 = 0$ и $f(x_1^0, x_2^0) = 0$.

К этому можно прийти посредством параллельного переноса в оординатах x_i и константе c . Тогда функция f разлагается в ряд Тейлора

$$f = \sum_{Q \geq 0} f_Q X^Q, \quad f_0 = 0, \quad (3)$$

который абсолютно сходится в некоторой окрестности точки $X = (x_1, x_2) = 0$. Здесь и далее

$$X = (x_1, x_2), \quad Q = (q_1, q_2), \quad X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}.$$

3.2. О ЗАМЕНАХ КООРДИНАТ

Напомним некоторые факты из курса анализа. Пусть имеется преобразование

$$x_i = \xi_i(Y), \quad \xi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

при котором точка $Y = (y_1, y_2) = 0$ переходит в точку $X = 0$. Пусть в некоторой окрестности точки $X = 0$ функции ξ_i имеют непрерывные частные производные и функциональный определитель (или якобиан)

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке $Y = 0$. Тогда преобразование (4) обладает следующими свойствами (см. Курант, ч. II, гл. III, § 3 [77]):

1) Образ всякой достаточно малой окрестности точки $Y = 0$ содержит некоторую окрестность точки $X = 0$. Т. е. для всякого ε из некоторого интервала $(0, \varepsilon^0)$ существует такое $\delta > 0$, что образ окрестности

$$|y_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

содержит в себе окрестность

$$|x_i| < \delta, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

2) Преобразование (4) обратимо в некоторой окрестности точки $Y = 0$. Т. е. существует обратное к (4) преобразование

$$y_i = \eta_i(X), \quad \eta_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

которое определено в некоторой окрестности точки $X = 0$. Преобразование (7) также обладает свойством 1) с заменой X на Y .

3) Существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки $X = 0$ и окрестность $\mathcal{V}$ точки $Y = 0$, которые лежат в областях определений и областях значений преобразований (4) и (7) и между точками которых преобразования (4) и (7) устанавливают взаимнооднозначное соответствие.

Следовательно, преобразование (4) определяет в области $\mathcal{U}$ взаимно однозначную замену координат X на координаты Y .

Если функции ξ_i аналитичны в точке $Y=0$, то они разлагаются в степенной ряд по Y , сходящийся на множестве вида (5). Тогда обратное преобразование (7) также будет аналитическим в точке $X=0$, т. е. функции η_i разлагаются в ряды Тейлора, сходящиеся в некоторой окрестности вида (6) (см. Гурса [62, т. 1, гл. IX, §§ 181—188]). Зачастую преобразование вида (4) сразу задается в виде ряда Тейлора. Тогда оно определено в области сходимости этого ряда. Вернемся теперь к задаче о линиях уровня.

Теорема 1. Пусть точка $X=0$ является простой точкой аналитической функции $f(X)$, т. е. в нуле

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \neq 0. \quad (8)$$

Тогда существует такая обратимая аналитическая замена координат (4), что

$$f(X) = y_2. \quad (9)$$

Доказательство. Благодаря условию (8) хотя бы одна из частных производных $\partial f / \partial x_1$ и $\partial f / \partial x_2$ в точке $X=0$ отлична от нуля. Пусть для определенности $\partial f / \partial x_2 \neq 0$. Сделаем преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = f(X). \quad (10)$$

В точке $X=0$ якобиан этого преобразования отличен от нуля, ибо

$$\left(\frac{D(X)}{D(Y)} \right)^{-1} = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0.$$

Непосредственно видно, что замена (10) дает для функции выражение (9). Теорема доказана.

Смысл этой теоремы в том, что с помощью локальной замены координат функция f приводится к наиболее простому виду, для которого линии уровня легко исследуются. Действительно, линии уровня функции (9) в координатах Y суть горизонтальные отрезки $y_1 = \tau$, $y_2 = c$. В исходных координатах X в окрестности точки $X=0$ эта картинка несколько повернется и искривится, но по-прежнему линии уровня будут без самопересечений. Их выражения даются формулами

$$x_i = \xi_i(\tau, c), \quad i=1, 2,$$

где $|\tau| < \varepsilon$, $|c| < \varepsilon$. На самом деле, такой же результат получается при разрешении уравнения $f(x_1, x_2) - c = 0$ относительно $x_2 = \xi_2(x_1, c)$.

3.3. НЕВЫРОЖДЕННАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА

В дальнейшем будем рассматривать только окрестность критической точки $X=0$, когда разложение (3) не содержит линейных членов. Если отличен от нуля дискриминант квадратичных членов $d=f_{(1,1)}^2-4f_{(2,0)}f_{(0,2)}$, то критическая точка $X=0$ называется *невыврожденной*. Если $d=0$, то она называется *вырожденной*.

Как известно из курса алгебры, всякая квадратичная форма

$$f_{20}x_1^2 + f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 \neq 0$$

с помощью неособого линейного преобразования $X=BZ$ приводится к сумме квадратов

$$a(z_1^2 + \sigma z_2^2), \quad a \neq 0,$$

где число σ равно либо нулю, либо ± 1 . Для невырожденной точки, очевидно, $\sigma \neq 0$. Разложение функции f в ряд по Z имеет вид

$$f = az_1^2 + a\sigma z_2^2 + \sum_{q_1+q_2 \geq 3} \tilde{f}_Q Z^Q. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть для функции f точка $X=0$ является невырожденной критической. Тогда существует обратимая аналитическая замена (4), приводящая функцию f к виду

$$f = a(y_1^2 + \sigma y_2^2). \quad (12)$$

Доказательство. Пусть функция f приведена к виду (11). По условию $a \neq 0$ и $\sigma \neq 0$; разобьем крайнюю сумму в (11) на три части

$$h^{(1)}(Z) = \sum_{q_2 < 2} \tilde{f}_Q Z^Q,$$

$$h^{(2)}(Z) = \sum_{q_1 < 2} \tilde{f}_Q Z^Q,$$

$$h^{(3)}(Z) = \sum_{q_1, q_2 \geq 2} \tilde{f}_Q Z^Q.$$

Так что

$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} = \sum_{q_1+q_2 \geq 3} \tilde{f}_Q Z^Q.$$

На рис. 25 на плоскости q_1, q_2 разной штриховкой выделены области, в которых расположены носители каждого из рядов $h^{(i)}$. Пусть $g(Z)$ — любой сходящийся ряд от Z , носитель которого $D(g)$ удовлетворяет неравенствам $q_1, q_2 \geq 2$, т. е. расположен на

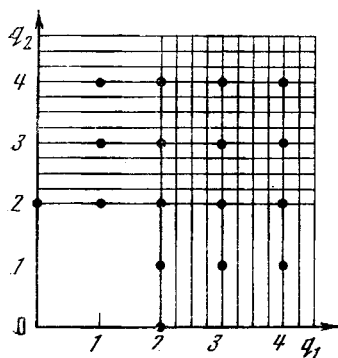


Рис. 25

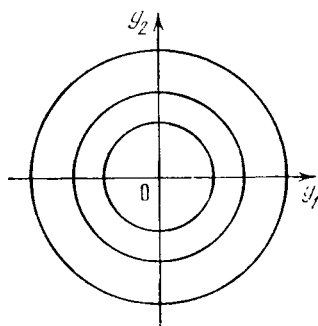


Рис. 26

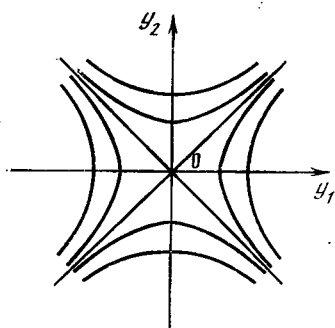


Рис. 27

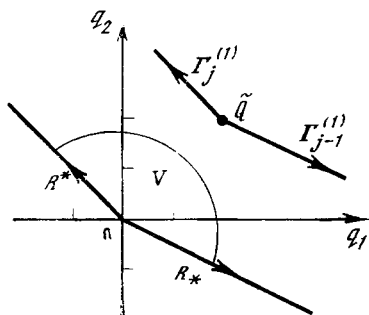


Рис. 28

рис. 25 в дважды заштрихованной части. Покажем, что система уравнений

$$az_1^3 + h^{(1)}(Z) + g(Z) = ay_1^3, \quad (15)$$

$$a\sigma z_2^3 + h^{(2)}(Z) + h^{(3)}(Z) - g(Z) = a\sigma y_2^3$$

имеет аналитическое решение. Действительно, из первого уравнения находим, что

$$y_1 = z_1 \sqrt{1 + a^{-1}z_1^{-3}(h^{(1)} + g)}. \quad (14)$$

Но по построению отношение $(h^{(1)} + g)/z_1^3$ аналитично в нуле и обращается там в ноль. Поэтому квадратный корень в (14) можно разложить по степеням этого отношения и, следовательно, в сходящийся ряд по степеням Z . Аналогично доказывается, что решение $y_2 = y_2(Z)$ второго уравнения (13) является аналитическим. Теорема доказана.

Отметим, что в этой теореме имеется значительный произвол в построении преобразования к виду (12). Это произвол в выбо-

ре ряда $g(Z)$. Можно, например, взять $g(Z)=0$ или $g(Z)=h^{(3)}$. Впрочем, на самом деле в выборе преобразования теоремы 2 имеется еще больший произвол.

Рассмотрим теперь в координатах Y линии уровня функции (12). Если $\sigma > 0$, то линии уровня суть окружности

$$y_1^2 + y_2^2 = a^{-1}c = \text{const}$$

(рис. 26), и в нуле функция f имеет экстремум. Разрешить это последнее уравнение можно в тригонометрических функциях

$$y_1 = \sqrt{c/a} \cos \tau, \quad y_2 = \sqrt{c/a} \sin \tau, \quad ac > 0, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Если $\sigma < 0$, то линии уровня суть гиперболы $y_1^2 - y_2^2 = c/a = \text{const}$ (рис. 27), и в нуле функция f имеет седловую точку. Разрешить это уравнение можно в гиперболических функциях

$$\begin{aligned} ac > 0, \quad y_1 &= \pm \sqrt{c/a} \operatorname{ch} \tau, \quad y_2 = \sqrt{c/a} \operatorname{sh} \tau; \\ c &= 0, \quad y_2 = \pm y_1; \quad -\infty < \tau < +\infty, \\ ac < 0, \quad y_1 &= \sqrt{-c/a} \operatorname{sh} \tau, \quad y_2 = \pm \sqrt{-c/a} \operatorname{ch} \tau. \end{aligned}$$

Уже здесь параметрические представления линий уровня различны в разных частях окрестности точки $Y=0$. Явные выражения (2) линий уровня получим, подставляя в формулы (4) вместо y_i их найденные выражения через параметры c и τ .

Теорема 2 означает, что в классе аналитических замен координат функция f равна своей квадратичной форме в подходящих координатах, если ее дискриминант отличен от нуля.

Пример 1. Найдем линии уровня функции

$$f = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2.$$

Здесь дискриминант $d=4 \neq 0$. По теореме 2 $f = -2y_1y_2$. Следовательно, точка $x_1=x_2=0$ является седловой для функции f . Через эту точку проходят ветви листа Декарта (см. пример 5 § 2 гл. I).

§ 1.4. МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ КЛАССА $\mathcal{U}$

Чтобы подготовить аппарат для изучения окрестности вырожденной критической точки, рассмотрим некоторые свойства кратных степенных рядов.

Следуя Гурса [62; §§161—164], рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^2} a_q, \quad (15)$$

индексы в котором $Q = (q_1, q_2)$ пробегают двумерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$. Пусть индексы Q изображены точками на плоскости $\mathbb{R}_1^2$. Вообразим себе на этой плоскости бесконечную возрастающую последовательность областей

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots,$$

в пределе при $n \rightarrow \infty$ занимающую всю плоскость R_1^2 . Пусть

$$s_n = \sum_{Q \in \Omega_n} a_Q$$

сумма тех членов ряда (15), индексы которых лежат в области Ω_n . Если при неограниченном возрастании n сумма s_n стремится к пределу s и этот предел не зависит от выбора последовательности областей $\{\Omega_n\}$, то ряд (15) *сходится к сумме s* .

Если при некоторой последовательности областей $\{\Omega_n\}$ стремиться к пределу соответствующие частичные суммы ряда

$$\sum |a_Q|, \quad (16)$$

то ряд (15) абсолютно сходится, и суммы рядов (15) и (16) не зависят от выбора последовательности областей $\{\Omega_n\}$.

Все сказанное применимо к суммированию кратных степенных рядов вида

$$h = \sum h_Q X^Q, \quad (17)$$

где $Q = (q_1, q_2)$ и $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, $Q \in Z^2$. Здесь индексы суть векторы Q , но остается вопрос: для каких значений X сходится такой ряд?

Пусть V замкнутый конус в плоскости R_1^2 , граничные лучи которого натянуты на векторы R_+ и R^* (рис. 28). Обозначим через $\mathcal{V}$ класс степенных рядов вида (17), у которых носитель лежит в конусе V :

$$D(h) \subset V. \quad (17')$$

Предположим сначала, что неотрицательны все коэффициенты h_Q ряда (17) класса $\mathcal{V}$, и переменные x_1, x_2 также принимают неотрицательные значения. Пусть две точки X и $\overset{\circ}{X}$ удовлетворяют неравенствам

$$\overset{\circ}{X}^{R_+} \leq \overset{\circ}{X}^{R^*}, \quad X^{R_+} \leq \overset{\circ}{X}^{R^*}. \quad (18)$$

Поскольку для каждого $Q \in V$ имеется представление в виде

$$Q = \alpha R_+ + \beta R^*,$$

где $\alpha, \beta \geq 0$, то из неравенств (18) следует оценка

$$\overset{\circ}{X}^Q = (\overset{\circ}{X}^{R_+})^\alpha (\overset{\circ}{X}^{R^*})^\beta \leq (X^{R_+})^\alpha (\overset{\circ}{X}^{R^*})^\beta = \overset{\circ}{X}^Q. \quad (19)$$

Отсюда ясно, что если ряд (17) сходится в точке $\overset{\circ}{X}$, то он будет сходиться в любой точке $\overset{\circ}{X}$, удовлетворяющей неравенствам (18); при этом

$$h(X) \leq h(\overset{\circ}{X}). \quad (20)$$

Обратно, если ряд (17) расходится в точке $\overset{\circ}{X}$, то он будет расходиться в любой точке $\overset{\circ}{X}$, удовлетворяющей неравенствам (18).

Чтобы разобраться в строении множеств, определяемых неравенствами (18), перейдем к логарифмам:

$$\ln X = (\ln x_1, \ln x_2).$$

Тогда неравенства (18) примут вид

$$\langle R_*, \ln \overset{\circ}{X} \rangle \leq \langle R_*, \ln \overset{\circ}{X} \rangle, \quad \langle R^*, \ln \overset{\circ}{X} \rangle \leq \langle R^*, \ln \overset{\circ}{X} \rangle. \quad (21)$$

Заметим, что преобразование

$$P = \ln X$$

переводит внутренность I квадранта плоскости X на плоскость P . Соответствие при этом монотонное и взаимно однозначное. При этом точка $x_1 = x_2 = 1$ переходит в точку $p_1 = p_2 = 0$; полуось x_1 переходит в «бесконечно удаленную прямую» $p_2 = -\infty$; точка $x_1 = x_2 = 0$ переходит в «бесконечно удаленную точку» $p_1 = p_2 = -\infty$ и т. д.

Пусть $\overset{\circ}{P}$ некоторая точка плоскости R_2^3 . Проведем через нее прямые, перпендикулярные векторам R_* и R^* :

$$K_* = \{P: \langle R_*, \tilde{P} \rangle = \langle R_*, P \rangle\},$$

$$K^* = \{P: \langle R^*, \tilde{P} \rangle = \langle R^*, P \rangle\}.$$

Они делят плоскость на четыре части (рис. 29). Часть III есть нормальный конус U множества V , параллельно перенесенный на вектор $\overset{\circ}{P}$. Если $\overset{\circ}{P} = \ln \overset{\circ}{X}$, то неравенства (21) выполнены для

тех $\overset{\circ}{P} = \ln \overset{\circ}{X}$, которые лежат в I части. Если $\overset{\circ}{P} = \ln \overset{\circ}{X}$, то неравенства (21) выполнены для тех $\overset{\circ}{P} = \ln \overset{\circ}{X}$, которые лежат в части III.

Переходя на плоскость X , получаем соответствующее разбиение первого квадранта на четыре части (рис. 30). Если точка $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}$,

то неравенства (18) выполнены для $\overset{\circ}{X}$ из I части. Если же $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}$, то неравенства (18) выполнены для $\overset{\circ}{X}$ из III части.

Пример 2. $R_* = (1, 0)$, $R^* = (0, 1)$. Тогда (17) — обыкновенный степенной ряд. Конус V является первым квадрантом, конус U является третьим квадрантом. Неравенства (18) принимают вид $|x_i| \leq |x_i|$, $i = 1, 2$.

Пример 3. $R_* = (2, -1)$, $R^* = (-1, 1)$ (рис. 28). Для $\overset{\circ}{P} = (-1, -1)$ соответствующее неравенствам (21) разбиение плоскости R_2^3 показано на рис. 29. Разбиение, соответствующее неравенствам (18), ограничено кривыми $x_2 = ex_1^2$, $x_2 = x_1$ (рис. 30).

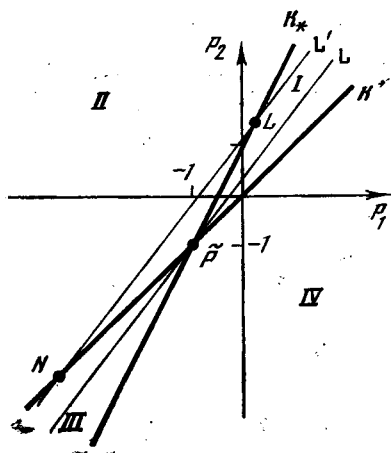


Рис. 29

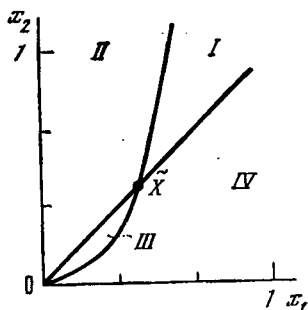


Рис. 30

Упражнение 1. Начертить конусы V и разбиения для P и X, соответствующие

$$R_* = (2, 1), (2, -1), (-1, -2);$$

$$R^* = (1, 2), (-1, 2), (-2, -1);$$

$$\tilde{P} = (-1, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1).$$

Рассмотрим на плоскости R_2^2 прямую L, нормаль к которой не пересекается с конусом V. Если для точки $P \in L$ построить разбиение плоскости R_2^2 на части, то прямая L будет лежать в частях I и III. Обозначим через $\overset{\circ}{L}(P)$ полупрямую, лежащую в части III, и через $\overset{\circ}{L}(P)$ — полупрямую, лежащую в части I. (Точка P не входит в эти полупрямые.) Если в точке $P = \ln \overset{\circ}{X}$ ряд (17) сходится, то он сходится и для всех $\ln X$, лежащих на полупрямой $\overset{\circ}{L}(P)$. Если же в точке $P = \ln X$ ряд расходится, то он будет расходиться во всех точках $\ln X \in \overset{\circ}{L}(P)$. Следовательно, на прямой L существует такая точка $M = \ln X$, что ряд (17) расходится для $\ln X \in \overset{\circ}{L}(M)$ и сходится для всех $\ln X \in \overset{\circ}{L}(M)$. Для $\ln X = M$ ряд (17) может как сходиться, так и расходиться. Возможны и крайние случаи, когда точка M оказывается одним из «бесконечных» концов прямой L. Тогда ряд (17) либо сходится при всех X, либо расходится при всех X вне координатных осей.

Но вернемся к случаю, когда точка M находится в конечной части плоскости. Рассмотрим на плоскости R_2^2 прямые, параллельные прямой L. На каждой из них отметим аналогичную точку M. Утверждается, что совокупность точек M образует непре-

рывную линию на плоскости R_2^2 . Действительно, пусть L' — другая прямая, параллельная прямой L , и точка $M' \in L'$ отделяет на L' множества сходимости и расходимости ряда (17). Тогда точка M' лежит либо во II, либо в IV части разбиения, соответствующего точке $P=M$, т. е. между точками N и L рис. 33. При приближении прямой L' к прямой L интервал NL стягивается к точке $M=P$. Отсюда вытекает непрерывность кривой ∂M , ограничивающей множество сходимости M .

Итак, для всякой точки $\ln X=P$, лежащей в области M , ряд (17) сходится; вне области M и кривой ∂M ряд (17) расходится, а в точках кривой ∂M может как сходиться, так и расходиться.

Пограничная кривая ∂M может иметь весьма различную форму в зависимости от ряда (17). Из приведенного выше рассуждения следует лишь, что если для каждой точки $M \in \partial M$ построить разбиение плоскости R_2^2 на части, то кривая ∂M расположена во II и IV частях. Изображая кривую ∂M в координатах $x_1 = \exp p_1$, $x_2 = \exp p_2$, получим в I квадранте плоскости X кривую ∂M_1 , которая ограничивает там множество сходимости M_1 . Эта кривая также находится во II и IV частях разбиения, соответствующего любой ее точке.

Рассмотрим теперь ряд (17) класса $\mathcal{U}$ с произвольными числовыми коэффициентами h_q . Положим

$$|h| = \sum |h_q| |X|^q.$$

Для этого ряда в I квадранте плоскости X построим кривую ∂M_1 , ограничивающую множество его сходимости M_1 . Ряд (17) абсолютно сходится, если точка X принадлежит множеству M , ограниченному четырьмя кривыми ∂M_I , ∂M_{II} , ∂M_{III} , ∂M_{IV} , три последние симметричны кривой ∂M_I относительно осей координат. Так же, как у Гурса [62, § 182], можно доказать, что в точке X , внешней по отношению к множеству M и не лежащей на осях, ряд (17) не является абсолютно сходящимся. Множество M на плоскости X может состоять из одного, двух или четырех односвязных кусков. Но если оно не пусто, то содержит в себе множество

$$|X|^{R_*} \leq a, \quad |X|^{R^*} \leq b. \quad (22)$$

Для ситуации примера 3 это множество заштриховано на рис. 31. В дальнейшем ряд (17) класса $\mathcal{U}$ будем называть *сходящимся*, если его множество абсолютной сходимости содержит множество вида (22). В противном случае такой ряд будем называть *расходящимся*.

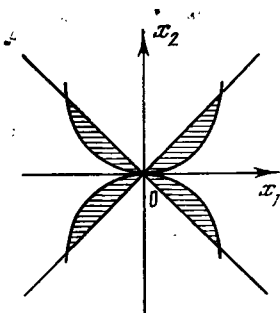


Рис. 31

3.5. СВОЙСТВА РЯДОВ КЛАССА $\mathcal{U}$

Рассмотрим сходящийся ряд (17) класса $\mathcal{U}$ (т. е. со свойством (17')) в множестве его абсолютной сходимости $\mathcal{M}$.

Теорема 3. Сумма h ряда (17) класса $\mathcal{U}$ является аналитической функцией во внутренних точках множества сходимости $\mathcal{M}$, исключая, быть может, координатные оси.

Доказательство. Если конус V целиком лежит в I квадранте плоскости R_1^2 , то сумма h ряда (17) является аналитической в точке $X=0$ и во всех внутренних точках сходимости (см. Гурса [62]). Если же конус V не лежит в I квадранте, то согласно приведенной ниже лемме 1 существует такая унимодулярная матрица α , что степенное преобразование

$$\ln Z = \alpha \ln X \quad (23)$$

переводит ряд (17) в ряд

$$h' = \sum h_Q Z^{Q'}, \quad Q' = \alpha^{-1} Q, \quad (24)$$

у которого носитель $D' = \alpha^{-1} D$ лежит в I квадранте плоскости q_1, q_2 . На плоскости R_2^2 координатами $\ln|z_1|, \ln|z_2|$ множество сходимости ряда (24) $\mathcal{M}'$ связано аффинным преобразованием с множеством сходимости ряда (17) $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}' = \alpha \mathcal{M}$. Но сумма h' ряда (24) аналитична в множестве $\mathcal{M}'$. Степенное преобразование (23) аналитично везде, кроме, быть может, координатных подпространств. Поэтому сумма ряда (17) будет аналитична внутри множества сходимости $\mathcal{M}$, возможно, кроме осей координат. Теорема доказана.

Лемма 1. Для всякого выпуклого конуса $V \subset R_1^2$, не содержащего в себе полуплоскости, существует такая унимодулярная матрица α , что конус $\alpha^{-1} V$ лежит в I квадранте.

Доказательство. Пусть граничный луч $R_i = \{cR_i\}$ конуса V проходит через целочисленные точки. Пусть $Q_i = (q_{i1}, q_{i2})$ — ближайшая к нулю такая точка. Пусть $\sigma = \text{sgn}(q_{2*} r_{1*} - q_{1*} r_{2*})$, найдем некоторое целочисленное решение $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ уравнения

$$q_{2*} \tilde{q}_1 - q_{1*} \tilde{q}_2 = \sigma.$$

Если точка $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ лежит внутри конуса V , то подберем такое натуральное k , чтобы точка $Q^* = (q_{1*}, q_{2*}) = \tilde{Q} - kQ_i$ лежала вне конуса V . Это возможно благодаря тому, что конус V не содержит полуплоскости. Конус $\tilde{V}$, натянутый на векторы Q и Q^* , содержит в себе конус V . Матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} q_{1*} & q_{2*} \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

унимодулярна, и преобразование

$$\alpha^* Q' = Q$$

переводит конус $\tilde{V}$ в I квадрант, векторы Q_* и Q^* переходят при этом в орты. Конус $V' = \alpha^{-1} V$ лежит целиком в конусе $\tilde{V}'$, т. е. в I квадранте.

Если оба граничных луча конуса V не содержат целых точек, то вместо V надо взять такой больший конус W , который ограничен рациональным лучом и не содержит полуплоскости. Это можно сделать благодаря тому, что рациональные числа всюду плотны среди вещественных чисел. Дальнейшие преобразования такие же, как раньше. Лемма доказана.

Точно так же, как у Гурса, можно доказать, что в множестве сходимости ряд (17) можно почленно дифференцировать. Множество сходимости для частной производной ряда совпадает с множеством сходимости ряда (17) и там операции суммирования и дифференцирования перестановочны.

Таким образом, в множестве сходимости ряды класса $\mathcal{U}$ обладают теми же свойствами, что и ряды Тейлора аналитических функций. Над ними можно производить арифметические операции, дифференцирование, подстановку ряда в ряд.

Если конус V не лежит в I квадранте, то точка $X=0$ не лежит в множестве сходимости $\mathcal{M}$ ряда (17). Но если внутри множества $\mathcal{M}$ устремить X к нулю, то сумма h ряда (17) стремится к значению h_0 . Это можно доказать так же, как теорему 1, используя степенное преобразование (23) и лемму 1.

3.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КЛАССА $\mathcal{U}^*$

Обозначим $\mathcal{U}^*$ класс преобразований вида

$$y_i = x_i(1 + g_i(X)), \quad g_i \in \mathcal{U}, \quad g_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

Такое преобразование определено в пересечении множеств сходимости рядов g_1 и g_2 и (согласно п.3.4) содержит множество вида (22).

Пусть X пробегает множество (22). Покажем, что тогда множество значений Y преобразования (25) содержит множество

$$|Y|^{R_*} \leq a', \quad |Y|^{R^*} \leq b'. \quad (26)$$

Действительно, пусть $\mathcal{U}_V$ — такое множество вида (22), на котором $|g_i| \leq 1/2$ ($i = 1, 2$). Согласно (25) на этом множестве

$$1/2 |x_i| \leq |y_i| \leq 3/2 |x_i|, \quad i = 1, 2.$$

Т. е.

$$2/3 |y_i| \leq |x_i| \leq 2 |y_i|, \quad i = 1, 2,$$

и

$$\mu_* |Y|^{R_*} \leq |X|^{R_*} \leq \nu_* |Y|^{R_*},$$

$$\mu^* |Y|^{R^*} \leq |X|^{R^*} \leq \nu^* |Y|^{R^*},$$

где μ_* , μ^* , ν_* , ν^* — некоторые положительные числа, образованные

произведениями степеней чисел 2 и $2/3$. Следовательно, образ множества (22) будет содержать множество (26), где $a' = v_*^{-1}a$, $b' = b/v_*$.

Теорема 4. Если преобразование (25) относится к классу $\mathcal{Y}^*(X)$ и является сходящимся, то существует единственное обратное преобразование

$$x_i = y_i(1 + h_i(Y)), \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

которое относится к классу $\mathcal{Y}^*(Y)$ и является сходящимся.

Доказательство естественно разбивается на две части: сначала докажем существование формальных рядов

$$h_i = \sum h_{iQ} Y^Q \in \mathcal{Y}, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

удовлетворяющих уравнениям

$$y_i = y_i(1 + h_i)(1 + g_i(y_1 + y_1 h_1, y_2 + y_2 h_2)), \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

Затем докажем их сходямость.

Вначале предположим, что конус V лежит в I квадранте. Будем решать уравнения (25) методом неопределенных коэффициентов. Нам дано, что в разложениях

$$g_i = \sum g_{iQ} X^Q, \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

$g_{i0} = 0$ и $g_{iQ} = 0$, если Q не лежит в конусе V . Требуется показать, что существуют такие решения (28) системы (29), у которых $h_{i0} = 0$ и $h_{iQ} = 0$, если Q не лежит в конусе V . Будем доказывать это индукцией по степени членов $\|Q\| = q_1 + q_2$. Пусть это выполнено для всех Q : $q_1 + q_2 < n$; докажем это для $q_1 + q_2 = n$. С учетом разложений (30) равенства (29) можно записать в виде

$$1 = 1 + h_i + \sum g_{iP} Y^P (1 + h_1)^{p_1} (1 + h_2)^{p_2} (1 + h_i), \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

Поэтому в первой части i -го равенства коэффициент при Y^Q ($\|Q\| = n$) имеет вид

$$h_{iQ} + \sum g_{iP} h_{1P_1} \dots h_{1P_k} h_{2S_1} \dots h_{2S_l} \equiv h_{iQ} + c_{iQ}, \quad (32)$$

где

$$P + P_1 + \dots + P_k + S_1 + \dots + S_l = Q.$$

Причем $\|P_j\| < \|Q\|$, $\|S_j\| < \|Q\|$. Если $Q \in V$, то положим $h_{iQ} = -c_{iQ}$, и уравнение (31) «в члене Y^Q » будет выполнено. Если Q не лежит в конусе, то по крайней мере один из индексов P , P_j или S_j в (32) не лежит в V , ибо сумма векторов из конуса V лежит снова в V . Тогда по индуктивному предположению и свойству рядов g_i получим, что соответствующий множитель g_{iP} , h_{1P_j} или h_{2S_j}

обращается в нуль. Поэтому аннулируются все слагаемые в сумме c_{iq} в (32), т. е. $c_{iq}=0$, и можно удовлетворить равенству (27), положив $h_{iq}=0$. Итак, свойство (28) доказано.

Сходимость и единственность найденных формальных рядов $h_i(Y)$ следуют из общей теоремы о неявных аналитических функциях (см. Гурса [62, ч. 2, § 185]).

Откажемся теперь от предположения, что конус V лежит в I квадранте, и рассмотрим общий случай. Сделаем степенное преобразование

$$\ln Z = \alpha \ln X, \quad (33)$$

$$\ln W = \alpha \ln Y,$$

с матрицей α , указанной в лемме 1. Тогда преобразование (25) перейдет в преобразование

$$w_i = z_i(1 + g'_i(Z)), \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

где $D(g'_i) \subset V' = \alpha^{-1} \cdot V$. По лемме 1 конус V лежит в I квадранте и для такого преобразования утверждение теоремы уже доказано. Остается только в обратном к (34) преобразовании

$$z_i = w_i(1 + h'_i(W)), \quad i = 1, 2$$

вернуться к координатам X и Y согласно (33). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если конус V не лежит в I квадранте, то обратить замену (25) можно и без степенного преобразования. Для этого достаточно частично упорядочить векторные индексы Q : вектор S предшествует вектору Q , если $\langle S, T \rangle > \langle Q, T \rangle$, где T — любой вектор из нормального к V конуса U .

Сходящееся преобразование (25) класса $\mathcal{Y}^*$ определено в некотором множестве (22). Согласно теореме 4 обратное преобразование (27) — также сходящееся и принадлежит к классу $\mathcal{Y}^*(Y)$. Как показано перед теоремой 4, область значений этого преобразования содержит множество

$$|X|^{R_*} \leq a', \quad |X|^{R^*} \leq b'.$$

Пусть $a'' = \min[a, a']$, $b'' = \min[b, b']$. Тогда для множества

$$|X|^{R_*} \leq a'', \quad |X|^{R^*} \leq b'' \quad (35)$$

прямое и обратное преобразования (25) и (27) определены и взаимно однозначны; их произведение дает тождественное отображение множества (35). Поэтому преобразование (25) или (27) можно рассматривать как замену координат на множестве (35).

3.7. СЛУЧАЙ ВЕРШИНЫ

Вернемся теперь к задаче построения линий уровня аналитической функции

$$f = \sum f_Q X^Q, \quad f_0 = 0, \quad 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^2 \quad (36)$$

в окрестности вырожденной критической точки $X = 0$. Рассмотрим многоугольник Ньютона $\Gamma(f)$. Пусть $\Gamma_j^{(0)} = \tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ — одна из его вершин, а $\Gamma_{j-1}^{(1)}$ и $\Gamma_j^{(1)}$ — ребра, примыкающие к этой вершине. Пусть $R_j = (r_{1j}, r_{2j})$ — единичный вектор на ребре $\Gamma_j^{(1)}$ (т. е. разность между соседними целыми точками) и $P_j = (-r_{2j}, r_{1j})$ — нормальный вектор к $\Gamma_j^{(1)}$, направленный во вне многоугольника Γ . Введем векторы $R_* = -R_{j-1}$, $P_* = P_{j-1}$, $R^* = R_j$, $P^* = P_j$. Тогда нормальный конус $U_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$ задается неравенствами $\langle R_*, P \rangle < 0$, $\langle R^*, P \rangle < 0$, и он ограничен лучами, проходящими через векторы P_* и P^* (рис. 28 и 32). На плоскости R_1^2 рассмотрим замкнутый

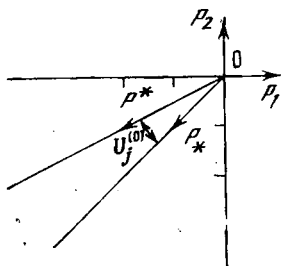


Рис. 32

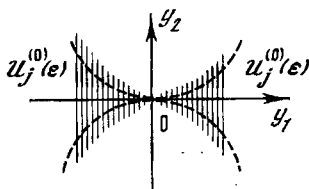


Рис. 33

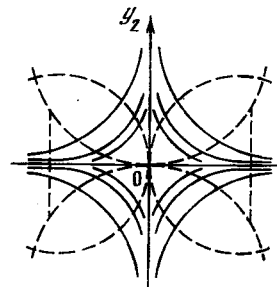


Рис. 34

конус $V = \{Q: \langle Q, P_* \rangle \leq 0, \langle Q, P^* \rangle \leq 0\}$, его вершина расположена в нуле, и граничные лучи параллельны ребрам $\Gamma_{j-1}^{(1)}$ и $\Gamma_j^{(1)}$ (рис. 28).

Теорема 5. Существует сходящееся преобразование (25) класса $\mathcal{U}^*$, которое приводит функцию (36) к виду

$$\tilde{f} = \tilde{f}_{\tilde{Q}} Y^{\tilde{Q}}. \quad (37)$$

Доказательство. Поскольку $\tilde{Q} \neq 0$, то одна из координат $\tilde{q}_1$ или $\tilde{q}_2$ отлична от нуля. Предположим для определенности, что $\tilde{q}_1 \neq 0$. Тогда преобразование

$$y_1 = x_1 \sqrt{\tilde{q}_1 / \tilde{f} / (f_{\tilde{Q}} X^{\tilde{Q}})}, \quad y_2 = x_2 \quad (38)$$

приводит функцию (36) к виду (37). Отношение $f/(f_{\tilde{q}} X^{\tilde{q}}) = 1 + g(X)$ является сходящимся рядом класса $\mathcal{V}$, его свободный член равен единице. Поэтому корень $\sqrt[\tilde{q}]{1+g(X)}$ можно представить в виде сходящегося ряда по степеням $g(X)$, что дает сходящийся ряд класса $\mathcal{V}$. Следовательно, преобразование (38) относится к классу $\mathcal{V}^*$ и является сходящимся. Теорема доказана.

Следствие. Для некоторого $\varepsilon > 0$ в множестве

$$\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, X) = \{X : |X|^{R_*} < \varepsilon, |X|^{R^*} < \varepsilon\}$$

существует замена координат, приводящая функцию (36) к *нормальной форме* (37).

Линии уровня нормальной формы (37) достаточно рассмотреть лишь в некотором множестве $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$. Обозначим $a = f_{\tilde{q}}$ и рассмотрим различные случаи.

1) $\tilde{q}_2 = 0$. Тогда можно считать, что $R_* = (1, 0)$. Линии уровня $ay_1^{\tilde{q}_1} = c$ суть вертикальные прямые

$$y_1 = \begin{cases} \sqrt[\tilde{q}_1]{c/a}, & \text{если } \tilde{q}_1 \text{ нечетно, } |c| < \varepsilon; \\ \pm \sqrt[\tilde{q}_1]{c/a}, & \text{если } \tilde{q}_1 \text{ четно, } 0 < c/a, \end{cases}$$

$$y_2 = \tau, |\tau| \leq \varepsilon.$$

На рис. 33 пунктиром выделены два куска множества $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$ и показаны линии уровня. Отметим, что величина c меняет знак в множестве $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$, только если $\tilde{q}_1$ нечетно.

2) $\tilde{Q} > 0$. Здесь линии уровня $ay_1^{\tilde{q}_1} y_2^{\tilde{q}_2} = c$ суть гиперболы вида

$$y_1 = \sigma |c/a|^{1/\tilde{q}_1} \tau^{-\tilde{q}_2/\tilde{q}_1},$$

$$y_2 = \pm \tau, \quad 0 < \tau < \infty,$$

где константа σ принимает значения ± 1 в зависимости от знаков чисел a, c и четности показателей $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$. Кроме того, линиями уровня $c=0$ будут оси координат (рис. 34). Если $R_* = (1, 0)$, то множество $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$ такое же, как на рис. 33. Оно содержит одну линию $y_2=0$, входящую в начало координат. Остальные линии уровня проходят от границы до границы множества $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$.

Если вектор R_* лежит в IV квадранте, то множество $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, Y)$ состоит из четырех кусков, в каждом из которых линии уровня являются транзитными (рис. 34).

Используя преобразование (27), обратное к (38), получим явные выражения (2) для линий уровня в множестве $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon, X)$.

Итак, каждой вершине $\Gamma_j^{(0)}$ ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}(f)$ можно сопоставить множество $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon, X)$, в котором функция f приводится к нормальной форме и легко исследуется. На плоскости $\mathbf{R}_2^1$ ему соответствует множество

$$U_j^{(0)}(\varepsilon) = \{P : \langle P, R_* \rangle < \ln \varepsilon, \langle P, R^* \rangle < \ln \varepsilon\},$$

оно получается сдвигом нормального конуса $U_j^{(0)}$ на вектор $(\ln \varepsilon, \ln \varepsilon)$.

Упражнение 2. Построить множества $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ для функции примера 1, считая $\varepsilon = 1/10$.

3.8. РЕБРО ЛОМАННОЙ НЬЮТОНА

Пусть теперь $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$ — две вершины ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}(f)$ (см. п. 2.9). Покажем, что в I квадранте плоскости x_1, x_2 точки множества $\mathcal{U}_{j+1}^{(0)}(\varepsilon)$ расположены выше точек множества $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$. Действительно, пусть $R = R_j$ — единичный вектор ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Тогда верхняя граница множества $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ дается кривой

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} = \varepsilon, \text{ т. е. } x_2 = \varepsilon^{1/r_2} x_1^{r_1/r_2},$$

а нижняя граница множества $\mathcal{U}_{j+1}^{(0)}(\varepsilon)$ дается кривой

$$x_1^{-r_1} x_2^{-r_2} = \varepsilon, \text{ т. е. } x_2 = \varepsilon^{-1/r_2} x_1^{r_1/r_2}.$$

Поскольку $r_2 > 0$ и $\varepsilon < 1$, то $\varepsilon^{1/r_2} < \varepsilon^{-1/r_2}$, и вторая кривая расположена выше первой. Следовательно, между криволинейными секторами множеств $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_{j+1}^{(0)}(\varepsilon)$ расположены криволинейные секторы, примыкающие к нулю. Поставим эти секторы в соответствие ребру $\Gamma_j^{(1)}$ и обозначим их совокупность через $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$. Итак,

$$\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon) = \{X : \varepsilon \leq |x_1|^{r_1} |x_2|^{r_2} \leq \varepsilon^{-1}, |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}, \quad (39)$$

и мы пришли к задаче: исследовать линии уровня функции f в множествах (39), соответствующих ребрам ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}(f)$. Для решения этой задачи применим преобразования «второго метода» разрешения особенности (см. п. 2.9 гл. I). Отметим еще, что на плоскости $\mathbf{R}_2^1$ с координатами $p_i = \ln |x_i|$ множество (39) изображается полуполосой, параллельной вектору P . Сделаем замену координат

$$y_1 = x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \quad y_2 = x_1^{r_1} x_2^{r_2}, \quad (40)$$

где целые числа s_1 и s_2 подобраны так, чтобы определитель

$$s_1 r_2 - s_2 r_1 = 1. \quad (41)$$

Для любых целых взаимно простых чисел r_1 и r_2 существует бес-

конечно много пар целых чисел s_1 и s_2 , для которых выполнено равенство (41) (см. п. 1.9).

Согласно формулам степенного преобразования п. 2.6 имеем

$$x_1^{q_1'} x_2^{q_2'} = y_1^{r_1 q_1' - r_2 q_2'} y_2^{-s_1 q_1' + s_2 q_2'} \equiv y_1^{q_1'} y_2^{q_2'},$$

т. е. у координаты y_1 показатель степени

$$q_1' = -\langle Q', P' \rangle = -\langle Q, P_j \rangle,$$

где $P_j = (-r_2, r_1)$ — вектор, ортогональный ребру $\Gamma_j^{(1)}$, $P' = \alpha P_j = (-1, 0)$. Поэтому для всех $Q' \in D'$ будет $q_1' \geq r = -\max \langle Q, P_j \rangle$. Причем $q_1' = r$ для членов $f_Q X^Q$ из укорочения $\hat{f}_j^{(1)}(X)$; т. е.

$$\hat{f}_j^{(1)}(X) = \hat{f}_j^{(1)'}(Y) = y_1^r \hat{f}_0'(y_2). \quad (42)$$

Для остальных членов разложения

$$f' = \sum f_Q Y^Q$$

будет $q_1' > r$. Геометрически все это означает, что ребро $\Gamma_j^{(1)}$ после преобразования (40) переходит в вертикальное ребро $\Gamma_j^{(1)'}$, и все остальные точки ломаной $\hat{\Gamma}'$ расположены справа от ребра $\Gamma_j^{(1)'}$. Т. е.

$$f(X) = f'(Y) = y_1^r f_0'(y_1, y_2), \quad (43)$$

где f_0' содержит y_1 в неотрицательных степенях и $r > 0$.

Теперь заметим, что после замены (40) множество (39) перейдет в множество

$$\mathcal{U}_j^{(1)'}(\varepsilon) = \{Y : \varepsilon \leq |y_2| \leq \varepsilon^{-1}, |y_1| \leq \varepsilon\}. \quad (44)$$

Таким образом, в результате степенного преобразования (40) пришли к задаче: найти линии уровня функции (43) в множестве (44). Это множество (44) является окрестностью той части оси y_2 , которая не содержит нулевой и бесконечно удаленной точек этой оси. Пусть теперь y_2^0 — некоторая точка оси y_2 , лежащая в множестве (44). Попробуем найти линии уровня функции f в ее окрестности

$$\mathcal{W}(\varepsilon, y_2^0) = \{Y : |y_1| \leq \varepsilon, |y_2 - y_2^0| \leq \varepsilon\}. \quad (45)$$

Для этого сделаем параллельный перенос $y_2 = y_2^0 + z_2$ и рассмотрим функцию от y_1, z_2 :

$$f(X) = y_1^r f_0'(y_1, y_2^0 + z_2)$$

для трех различных случаев.

1) $\hat{f}_0'(y_2^0) = a \neq 0$. Тогда преобразование

$$z_1 = y_1 \sqrt[3]{f_0'/a}, \quad z_2 = z_2$$

аналитично и обратимо в некоторой окрестности точки $y_1 = 0$,

$y_2 = y_2^0$, и приводит там функцию f к виду $f = az_1'$. Линии уровня этой функции параллельны оси z_2 (см. случай 1) в конце предыдущего пункта).

2) y_2^0 — простой корень уравнения $\hat{f}'_0(y_2) = 0$, т. е. $\hat{d}f'_0/dy_2 = a \neq 0$ при $y_2 = y_2^0$. Тогда преобразование $w_1 = y_1$, $w_2 = \hat{f}'_0/a = z_2 + \dots$ аналитично и обратимо в некоторой окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$; оно приводит там функцию f к виду

$$\hat{f} = a\omega_1'\omega_2.$$

Линии уровня этой функции содержат одну горизонтальную прямую $w_2 = 0$ и гиперболы $w_2 = c\omega_1'^{-r}$ (см. случай 2) в конце предыдущего пункта).

3) y_2^0 — кратный корень уравнения $\hat{f}'_0(y_2) = 0$. Тогда точка $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ является вырожденной критической точкой для функции $f'(Y)$. Для изучения ее линий уровня в соответствующей окрестности (45) надо строить ломаную Ньютона функции $g(y_1, z_2) = f'(y_1, y_2^0 + z_2)$, по ней разбивать окрестность (45) на куски вида $\mathcal{W}_j^{(d)}(\epsilon)$ и так далее.

Совокупность множеств (45) покрывает множество (44). Возьмем некоторое конечное покрытие $\mathcal{W}^r(\epsilon, y_2^{(1)}), \dots, \mathcal{W}^r(\epsilon, y_2^{(m)})$. В него будут входить окрестности всех корней уравнения $\hat{f}'_0(y_2) = 0$ и некоторое количество окрестностей простых точек функции $f'_0(Y)$. На плоскости $\mathbf{R}_2^2$ с координатами $p_1 = \ln|y_1|$, $p_2 = \ln|y_2|$ множество (44) изображается некоторой горизонтальной полуполосой. Множествам (45) соответствуют на этой плоскости также горизонтальные полуполосы, но более узкие. В совокупности они два раза покрывают полуполосу множества (44), один раз для $y_2 > 0$ и другой для $y_2 < 0$. Множество (44) покрыто конечным числом таких множеств (45), в которых либо задача решена, либо надо продолжить разрешение особенности, но эта особенность уже проще, чем исходная. Как показано в п. 2.9 гл. I, через конечное число таких шагов «второго метода» особенность будет разрешена. Т. е. мы придем либо к случаю 1), либо 2), либо к случаю 3'), когда функция $\hat{f}$ имеет кратный множитель $\hat{f} = z_1^r(z_2 - b(z_1))^k g(Z)$, где $b(z_1)$ и $g(Z)$ — аналитические функции в точке $Z = 0$, $b(0) = 0$, $g(0) = a \neq 0$. Тогда замена

$$w_1 = \sqrt[r]{g(Z)a}, \quad w_2 = z_2 - b(z_1)$$

аналитична в нуле и приводит функцию к нормальной форме

$$\hat{f} = a\omega_1^r\omega_2^k.$$

Линии уровня — гиперболы и оси координат (см. случай 2) в конце предыдущего пункта).

3.9. СИНТЕЗ, ПРИМЕРЫ

Итак, окрестность $\mathcal{U}$ критической точки $X=0$ покрыта конечным числом множеств

$$\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon), \quad \mathcal{W}_j^{(1)}(\varepsilon), \dots, \quad (46)$$

в каждом из которых имеется обратимая замена координат $X \rightarrow W$, приводящая функцию f к простому виду («нормальной форме»):

$$f = a w_1^{q_1} w_2^{q_2},$$

позволяющему легко исследовать линии уровня в соответствующем множестве (46) и выписать их явные выражения

$$w_i = w_i(\tau, c), \quad i = 1, 2.$$

Вернувшись от координат W к исходным координатам X , в каждом множестве (46) получим выражения вида (2) для линий уровня. Остается только объединить их вместе, и линии уровня будут найдены во всей окрестности $\mathcal{U}$. Но здесь возникает следующее затруднение. Переход от координат X к переменным W осуществляется в два этапа. Сначала особенность разрешается на простые посредством конечного числа бирациональных преобразований. Каждое такое преобразование есть результат конечного числа степенных преобразований и параллельных переносов. Затем в окрестности каждой простой особенности функция f приводится к нормальной форме посредством дальнейшей замены координат. Однако это *нормализующее преобразование* (и обратное к нему) дается в виде бесконечных степенных рядов. Поэтому в реальной ситуации можно вычислять эти преобразования лишь приближенно (до членов некоторой конечной степени). В результате решения $X=X(\tau, c)$ в каждом множестве (46) будут получены приближенно. Для склеивания решений в соседних секторах множеств (46) надо получить приближенные решения, достаточно близкие к истинным линиям уровня. В разных случаях требуются для этого вычисления разного объема. Например, для выяснения топологической картины линий уровня можно вообще не делать нормализующих замен — достаточно разрешить особенность. Если же требуется точность класса C^k , т. е. до производных k -го порядка, то придется вычислять нормализующие преобразования до членов некоторой конечной степени (правда, неизвестно, до какой именно). В приводимых ниже примерах мы ограничиваемся выяснением топологической картины линий уровня (чтобы не погрязнуть в вычислениях). При установлении топологической картины для склеивания кусков множеств (46) надо знать расположение линий уровня по отношению к границам этих кусков. Вместе с расположением кривых внутри этих кусков это дает полную топологическую картину в том случае, когда есть хотя бы одна

линия уровня, входящая в критическую точку внутри некоторого множества (46). Если такой линии уровня нет, то все линии уровня переходят из одного куска в другой и ни в одном не задерживаются. Из однозначности функции f следует, что линии уровня будут замкнутыми кривыми (как окружности).

Пример 4. Найдем расположение линий уровня функции

$$f = 2x_1^3 - x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 + x_2^3 + x_1^4 + x_2^4$$

в окрестности вырожденной критической точки $x_1 = x_2 = 0$. Лома-ная Ньютона $\hat{\Gamma}$ состоит из двух вершин $\Gamma_1^{(0)} = (3, 0)$, $\Gamma_2^{(0)} = (0, 3)$ и одного ребра $\Gamma_1^{(1)}$ с единичным вектором $R = (-1, 1)$ (рис. 35). На рис. 36 показаны нормальные конусы

$$U_1^{(0)} = \{P : p_1 < 0, \quad p_2 - p_1 < 0\},$$

$$U_2^{(0)} = \{P : p_2 < 0, \quad p_1 - p_2 < 0\},$$

$$U_1^{(1)} = \{P : p_1 = p_2 < 0\}.$$

Рассмотрим вершину $\Gamma_1^{(0)}$. Ей соответствует множество

$$\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon) = \{X : |x_1| \leq \varepsilon, \quad |x_1|^{-1}|x_2| \leq \varepsilon\}.$$

В координатах $p_i = \ln|x_i|$ это множество показано на рис. 37, в координатах x_1, x_2 — на рис. 38. Согласно теореме 5 внутри такого множества $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ существует аналитическая замена координат $X \rightarrow Y$, приводящая функцию f к виду $f = 2y_1^3$. Причем вблизи нуля эта замена близка к тождественной. Следовательно, линии уровня функции f в множестве $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ расположены примерно как вертикальные отрезки (рис. 38).

Аналогично, вершине $\Gamma_2^{(0)}$ соответствует множество

$$\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon) = \{X : |x_1||x_2|^{-1} \leq \varepsilon, \quad |x_2| \leq \varepsilon\}$$

(рис. 37 и 38). По теореме 5 в этом множестве существует такая обратимая замена координат $X \rightarrow Y$, что $f = y_2^3$. Поэтому линии уровня функции f в множестве $\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$ расположены примерно как горизонтальные отрезки (рис. 38).

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует множество

$$\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon) = \{X : \varepsilon \leq |x_1|^{-1}|x_2| \leq \varepsilon^{-1}, \quad |x_i| < \varepsilon\} \quad (47)$$

(рис. 37 и 38). Чтобы исследовать функцию f в этом множестве, сделаем степенное преобразование

$$y_1 = x_1, \quad x_1 = y_1,$$

$$y_2 = x_2x_1^{-1}, \quad x_2 = y_1y_2.$$

Тогда

$$f = y_1^3(2 - y_2 - 2y_2^2 + y_2^3 + y_1 + y_1y_2^4).$$

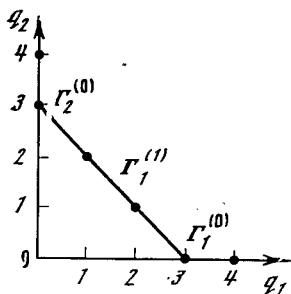


Рис. 35

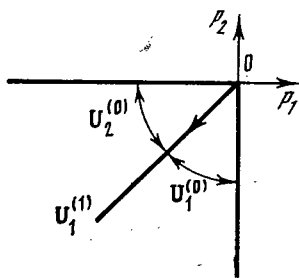


Рис. 36

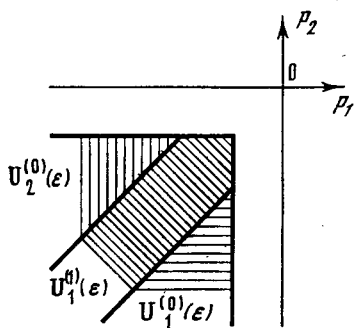


Рис. 37

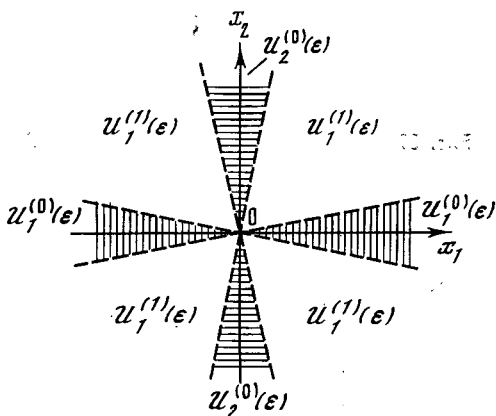


Рис. 38

Здесь

$$\mathcal{U}_1^{(1)'}(\varepsilon) = \{Y : |y_1| \leq \varepsilon \leq |y_2| \leq \varepsilon^{-1}\}. \quad (48)$$

На плоскости y_1, y_2 это множество состоит из двух кусков, ограниченных пунктирными линиями на рис. 39. При этом $\hat{f}' = y_1^3 \hat{f}_0'$, где $\hat{f}_0' = 2 - y_2 - 2y_2^2 + y_2^3$. Уравнение $\hat{f}_0'(y_2) = 0$ имеет три корня: $y_2 = 1, 2, -1$ (все они простые). Соответствующие три точки оси y_2 являются седловыми для функции f , остальные точки этой оси — простые. Поэтому в множестве (48) расположение линий уровня такое, как показано на рис. 39. При этом множество (48) можно было бы разбить на куски, содержащие не более одной седловой точки, и в каждом куске привести функцию f к нормальной форме. Но мы не будем этого делать. Возвращаясь к координатам X , получим, что в множестве (47) линии уровня расположены, как на рис. 40. Соединяя этот рисунок с рисунком 38, показывающим линии уровня в множествах $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и

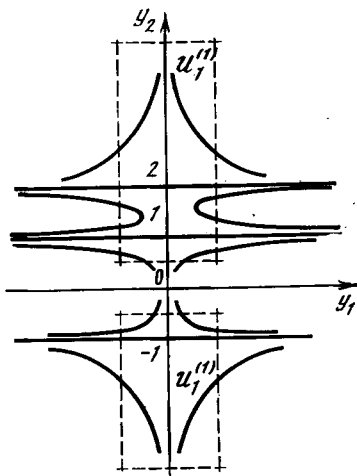


Рис. 39

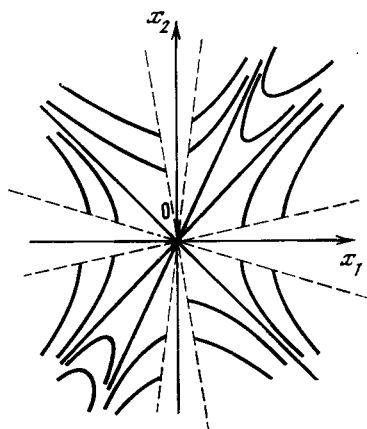


Рис. 40

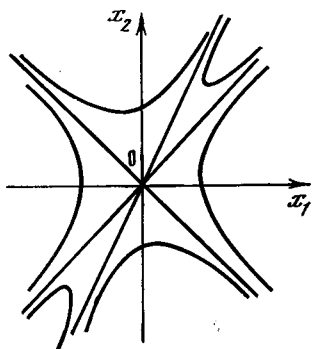


Рис. 41

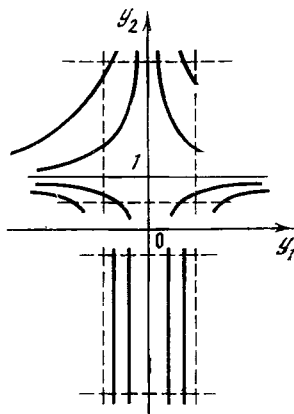


Рис. 42

$u_2^{(0)}(\varepsilon)$, получим расположение линий уровня во всей окрестности нуля (рис. 41).

Пример 5. Найдем расположение линий уровня функции

$$f = x_2^3 - x_1^3 + x_1^4 + x_2^4.$$

Здесь ломаная $\hat{\Gamma}$, конусы $U_f^{(d)}$ и множества $U_f^{(d)}(\varepsilon)$ — такие же, как в предыдущем примере. Расположение линий уровня в множествах $u_1^{(0)}(\varepsilon)$ и $u_2^{(0)}(\varepsilon)$ также аналогично предыдущему примеру; отличие возникает только в множестве (48). Там $\hat{f}'_0 = y_2^3 - 1$. Уравнение $\hat{f}'_0 = 0$ имеет три корня: один вещественный $y_2 = 1$ и два комплекс-

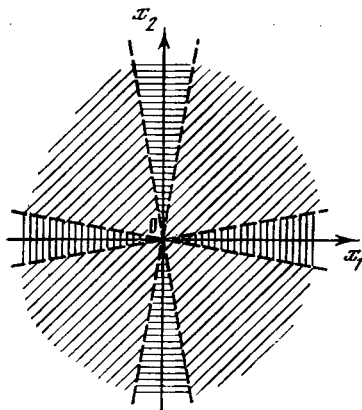


Рис. 43

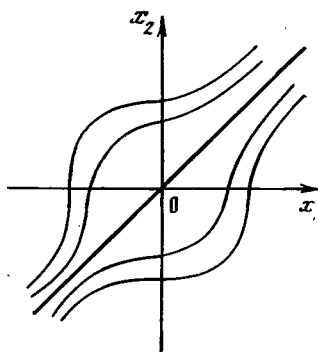


Рис. 44

ных. Все корни простые. Расположение линий уровня в множестве (48) показано на рис. 42. На рис. 43 показано разбиение окрестности точки $X=0$ на куски и ход отрезков линий уровня в каждом куске. Остается только соединить эти отрезки в гладкие кривые. В итоге получается рис. 44.

Упражнение 3. Найти расположение линий уровня для функций f из примеров и упражнений § 2.

З а м е ч а н и е. На самом деле, топологический тип расположения линий уровня функции f вполне определяется расположением кривой $f=0$. Только ветви этой кривой входят в точку $x_1=x_2=0$, между двумя соседними ветвями расположена так называемая «гиперболическая область». Однако изложенный здесь метод позволяет получить более полную информацию о расположении линий уровня. Например, расположение линий уровня рис. 44 топологически эквивалентно окрестности простой точки, но уже гладкой эквивалентности между ними нет. В то же время задача о линиях уровня аналитической функции служит лишь наиболее простым поводом для изложения локального метода. Этот метод позволяет решать более сложные задачи. Например,—исследование линий уровня отношения двух аналитических функций $f(X)/g(X)$ в окрестности такой точки $X=X^0$, в которой $f(X^0)=g(X^0)=0$. В следующей главе этот метод будет применен к изучению расположения интегральных кривых обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.10. О НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ

Изложенный выше метод заключается в следующем. По ломаной $\hat{\Gamma}(f)$ строится разбиение окрестности $\mathcal{U}$ вырожденной критической точки $X=0$ на куски $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, соответствующие верши-

нам и ребрам. Затем в каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ вводятся такие свои координаты Y , что

$$f = aY^Q. \quad (49)$$

В каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ делается дальнейшее разбиение на конечное число подмножеств $\mathcal{W}_{jk}(\varepsilon)$, каждое из которых содержит не более одного корня укорочения $\hat{f}^{(1)'}.$ Если подмножество $\mathcal{W}_{jk}(\varepsilon)$ не содержит кратного корня указанного укорочения, то в нем вводятся свои координаты Y , в которых выполнено (49). Если подмножество содержит кратный корень укорочения, то там делаются соответствующие преобразования, строится новый многоугольник Ньютона, по нему делаются дальнейшие разбиения на подмножества. В конце такой процедуры через конечное число шагов получим окончательное разбиение окрестности $\mathcal{U}$ на куски $\mathcal{W}_{jk\dots l}(\varepsilon)$ и такие свои координаты Y в каждом куске, что функция f имеет наиболее простой вид (49). При этом показатель Q и коэффициент a будут разными в разных кусках. Представление (49) естественно назвать «нормальной формой» функции f в куске $\mathcal{W}_{jk\dots l}(\varepsilon)$.

Если укорочение $\hat{f}^{(1)}(x)$ не имеет кратных корней, то можно упростить функцию сразу во всем множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$:

Теорема 6. Если укорочение $\hat{f}^{(1)}(X)$ не содержит кратных корней вне осей координат, то в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ существует обратимая замена координат

$$x_i = y_i(1 + h_i(Y)), \quad (50)$$

приводящая f к виду $f = \hat{f}^{(1)}(Y)$.

Доказательство здесь не приводим. Укажем только, что в преобразовании (50) h_i суть ряды по целым степеням Y , носители которых расположены в полуплоскости $\langle Q, P_j \rangle \leq 0$, где $P_j \in \mathcal{U}_j^{(1)}$.

Таким образом, в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ функция f эквивалентна своему укорочению $\hat{f}^{(1)}$. Поэтому можно сказать, что при отсутствии кратных корней укорочение является нормальной формой функции в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$.

Наконец, можно ограничиться заменами координат, обратимыми и аналитическими во всей окрестности $\mathcal{U}$, и искать, к каким наиболее простым видам («нормальным формам») можно привести функцию f такими заменами координат. Здесь придется перечислять очень много разных случаев, но общего ответа еще нет (см. Арнольд [8]). Дело в том, что этот класс замен координат слишком ограничен и не соответствует всей возможной сложности функций f .

Итак, вид нормальной формы зависит от класса преобразований координат. Здесь рассматриваются только обратимые ана-

литические замены координат, которые различаются размерами областей определения. Чем меньше область, тем проще нормальная форма.

3.11. О РАЗБИЕНИИ ПРОСТРАНСТВ

Перечислим субъекты, которые были поставлены в соответствие ряду

$$f = \sum_{Q \in D(f)} f_Q X^Q \quad (51)$$

в различных пространствах.

1) В пространстве R_1^2 с координатами q_1, q_2 ряду (51) соответствуют множество $[D(f)]$, его выпуклая оболочка — многоугольник Ньютона $\hat{\Gamma}$, ломаная Ньютона $\hat{\Gamma}$, ребра $\Gamma_j^{(1)}$ и вершины $\Gamma_j^{(0)}$ ломаной $\hat{\Gamma}$, множества $D_j^{(d)}$.

2) В дуальном пространстве R_2^2 с координатами p_1, p_2 ряду (51) соответствует разбиение III квадранта на конусы $U_j^{(d)}$ ребер и вершин ломаной $\hat{\Gamma}$, а также множества $U_j^{(d)}(\varepsilon)$ с достаточно малым числом $\varepsilon > 0$.

3) В пространстве R_0^2 переменных x_1, x_2 ряду (51) соответствует разбиение окрестности точки $X = 0$ на множества $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$. Между ними и множествами $U_j^{(d)}(\varepsilon)$ имеется взаимно однозначное соответствие. Каждое множество $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ может состоять из нескольких компонент, пересекающихся только в точке $X = 0$. Объединение всех множеств $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ составляет полную окрестность точки $X = 0$. В каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ ведущие члены ряда (51) при $X \rightarrow 0$ даются соответствующим укорочением $\hat{f}_j^{(d)}$. Уточним смысл последнего утверждения. Пусть $\{X^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ последовательность точек из $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, стремящихся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тогда на последовательности $\{X^{(n)}\}$ при $n \rightarrow \infty$ все члены $f_Q X^Q$, входящие в укорочение $\hat{f}_j^{(d)}$, будут иметь один порядок малости, а остальные члены ряда (51) будут иметь больший порядок малости.

Изложение велось для вещественных переменных X . Однако все остается справедливым и для комплексных значений x_1, x_2 . Куски $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ определяются теми же формулами, но уже являются кусками двумерного комплексного пространства S_0^2 . Указанное выше свойство укорочений сохраняется и для комплексных кусков $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$. Поэтому в комплексном пространстве переменных X справедливы все теоремы и аппарат степенных преобразований (с вещественными унимодулярными матрицами α).

Относительно степенных преобразований значения $x_i = 0$, $x_i = \infty$ равноправны, и мы можем применять развитую выше

теорию и для исследования особенностей в бесконечности. При этом удобно считать, что пространство с координатами x_1, x_2 является прямым произведением пространства $\{x_1\}$ на пространство $\{x_2\}$, а каждое пространство $\{x_i\}$ является либо комплексной сферой (комплексный вариант) с точкой $x_i = \infty$, либо вещественной частью этой сферы также с одной точкой $x_i = \infty$ (вещественный вариант). Такое пространство $\{x_1\} \times \{x_2\}$ содержит точки вида $x_1 = a, x_2 = \infty$; $x_1 = \infty, x_2 = \infty$; в вещественном варианте оно гомеоморфно двумерному тору. В пространстве $\mathbf{R}_2^2$ координаты $p_i = \ln|x_i|$. Поэтому удобно считать, что пространство $\mathbf{R}_2^2$ является прямым произведением двух вещественных прямых $-\infty \leq p_i \leq +\infty$, т. е. оно содержит точки вида $p_1 = -\infty, p_2 = a$; $p_1 = -\infty, p_2 = +\infty$ и гомеоморфно квадрату.

СИСТЕМА

ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ПРОСТЫЕ ТОЧКИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будем рассматривать решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/dt &\equiv \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \\ dx_2/dt &\equiv \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

в некоторой окрестности точки $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$. При этом функции φ_i считаются аналитическими в этой окрестности. Задача ставится так: в окрестности точки x_1^0 , x_2^0 найти решения системы (1) $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$ как функции произвольного параметра τ .

Характер зависимости координат x_1 , x_2 от времени t нас не будет интересовать. Поэтому точнее было бы сказать, что ищутся решения (интегральные кривые) одного уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi_2(x_1, x_2)}{\varphi_1(x_1, x_2)}. \quad (2)$$

Но запись (1) удобнее, чем (2), поэтому будем пользоваться записью (1). Если для уравнения (2) найдено решение $x_1 = b_1(\tau)$, $x_2 = b_2(\tau)$, то из первого уравнения системы (1) найдем, что

$$t = \int \frac{db_1(\tau)}{\varphi_1(b_1(\tau), b_2(\tau))},$$

т. е. для известной интегральной кривой зависимость координат от времени t находится с помощью одной квадратуры.

Сделаем параллельный перенос

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*, \quad x_2 = x_2^0 + x_2^*.$$

Тогда система (1) перейдет в систему

$$\dot{x}_i^* = \varphi_i^*(x_1^*, x_2^*) \equiv \varphi_i(x_1^0 + x_1^*, x_2^0 + x_2^*), \quad i = 1, 2,$$

которую надо изучать в окрестности нуля $x_1^* = x_2^* = 0$. В дальнейшем будем считать, что такой перенос уже сделан, и будем изучать систему (1) в окрестности нуля $x_1 = x_2 = 0$.

Если в нуле $|\varphi_1| + |\varphi_2| \neq 0$, то нуль — *простая точка* системы (1).

Если в нуле $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, то нуль — *особая точка* системы (1). Она является стационарным (неподвижным) решением системы (1). В особой точке разложение функций φ_i начинается с линейных членов по x_1, x_2 . Если выделить эти линейные члены, то систему (1) можно записать в векторной форме

$$\dot{X} = AX + \dots, \quad (2')$$

где A — квадратная матрица, вектор $X = (x_1, x_2)$. Пусть λ_1 и λ_2 — собственные числа матрицы A (т. е. корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$). Если $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$, то нуль назовем *элементарной особой точкой*. Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то нуль назовем *неэлементарной особой точкой*. Классификация точек системы (1) аналогична классификации точек аналитической функции f . Эта аналогия особенно выпукла в ситуациях, когда система (1) имеет интеграл $f = \text{const}$. К сожалению исторически сложилась разная терминология, поэтому укажем здесь соответствия:

- 1) простой точке функции f соответствует простая точка системы (1),
- 2) критической точке функции f соответствует особая точка системы (1),
- 3) невырожденной критической точке функции f соответствует элементарная особая точка системы (1),
- 4) вырожденной критической точке функции f соответствует неэлементарная особая точка системы (1).

Отметим две точки зрения на изучение интегральных кривых системы (1) в окрестности особой точки:

1. Ищутся только те решения, которые входят в особую точку. Для этого в основном достаточно тех же методов, с помощью которых в § 2 гл. I разрешалось аналитическое уравнение $f(x_1, x_2) = 0$. К этому направлению относятся работы Брио и Буке [134], Горна [136], Бендиксона [131], Дюляка [138] и других (см. обзор Дюляка [140] и § 4 книги Бибербаха [132]).

2. В окрестности особой точки ищутся все интегральные кривые, при этом размеры окрестности могут быть сколь угодно малы. Для этого в основном достаточно методов, с помощью которых в § 3 гл. I отыскивались линии уровня аналитической функции. В дальнейшем изложении будем придерживаться этого направления.

1.2. ОКРЕСТНОСТЬ ПРОСТОЙ ТОЧКИ

В дальнейшем в окрестности нуля будем рассматривать замены координат

$$x_i = \xi_i(y_1, y_2), \quad \xi_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

которые оставляют нуль на месте и являются обратимыми, т. е. в нуле якобиан $\det(\partial \xi_i / \partial y_i) \neq 0$. Свойства таких замен (3) уже обсуждались в п. 3.2 гл. I.

Теорема 1. Пусть нуль — простая точка системы (1), существует обратимая аналитическая замена (3), которая переводит систему (1) в систему

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0. \quad (4)$$

Эта теорема означает, что в некоторой достаточно малой окрестности простой точки решения системы (1) топологически

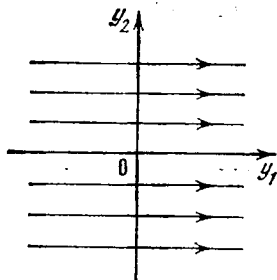


Рис. 45

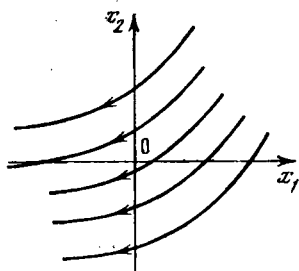


Рис. 46

расположены так же, как решения системы (4) — см. рис. 45 и 46. Теорему 1 можно назвать теоремой Коши — Арнольда. Коши доказал существование, единственность и аналитичность решения, проходящего через простую точку, а Арнольд [6] рассмотрел полную окрестность простой точки; он сформулировал и доказал теорему 1. Отметим, что система (4) является очень простой, а теорема 1 означает, что в окрестности простой точки решения всякой системы (1) устроены просто.

Доказательство теоремы 1. Продифференцируем по t равенства (3)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial y_2} \dot{y}_2, \quad i = 1, 2$$

и заменим производные $\dot{x}_i$ и $\dot{y}_i$ их выражениями через переменные согласно формулам (1) и (4). Тогда получим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y_1} = \varphi_i(X) = \varphi_i(\xi_1(Y), \xi_2(Y)), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Этой системе должны удовлетворять функции ξ_i для того, чтобы замена (3) переводила систему (1) в систему (4). Покажем, что система (5) имеет решения в виде степенных рядов

$$\xi_i = \sum \xi_{iQ} Y^Q,$$

где

$$Q = (q_1, q_2), \quad Y = (y_1, y_2), \quad Y^Q = y_1^{q_1} y_2^{q_2}.$$

Для этого распишем аналогично

$$\varphi_i = \sum \varphi_{iS} X^S.$$

Поскольку

$$X^S = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} = \left(\sum \xi_{1P} Y^P \right)^{s_1} \left(\sum \xi_{2R} Y^R \right)^{s_2},$$

то в этом произведении коэффициент при Y^Q есть сумма членов вида

$$\xi_{1P_1} \xi_{1P_2} \dots \xi_{1P_{s_1}} \xi_{2R_1} \xi_{2R_2} \dots \xi_{2R_{s_2}},$$

где

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{s_1} + R_1 + R_2 + \dots + R_{s_2} = Q. \quad (6)$$

Поэтому коэффициент при Y^Q в $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ есть сумма членов вида

$$\varphi_{iS} \xi_{1P_1} \dots \xi_{1P_{s_1}} \xi_{2R_1} \dots \xi_{2R_{s_2}}, \quad (7)$$

для которых выполнено равенство (6). Для вектора $Q = (q_1, q_2)$ определим норму $\|Q\| = q_1 + q_2$. Теперь заметим, что $\xi_{iP} \neq 0$ только для $P \geq 0$, $\|P\| \geq 1$. Поэтому в произведении (7) для всех P_j и R_j будет $\|P_j\| \leq \|Q\|$ и $\|R_j\| \leq \|Q\|$, если $\|S\| > 1$, т. е. если в левой части равенства (6) больше одного слагаемого. Если же $\|S\| = 1$, то $\|P_j\| = \|Q\|$ и $\|R_j\| = \|Q\|$. Но всегда

$$\|P_j\| \leq \|Q\|, \quad \|R_j\| \leq \|Q\|. \quad (8)$$

Т. е. в формировании коэффициента при члене с нормой индекса $\|Q\|$ ряда $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ участвуют только коэффициенты ξ_{1P} и ξ_{2R} таких членов в рядах ξ_1 и ξ_2 , нормы индексов которых $\|P\|$ и $\|R\|$ не превосходят нормы $\|Q\|$.

С другой стороны, коэффициент ряда $\partial \xi_i / \partial y_1$ при Y^Q есть $(q_1 + 1) \xi_{i(q_1+1, q_2)}$. Равенства (5) выполнены только тогда, когда для всякого вектора Q в обеих частях равны коэффициенты при Y^Q , т. е.

$$(q_1 + 1) \xi_{i(q_1+1, q_2)} = \sum \varphi_{iS} \xi_{1P_1} \dots \xi_{1P_{s_1}} \xi_{2R_1} \dots \xi_{2R_{s_2}}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Норма векторного индекса у коэффициента $\xi_{i(q_1+1, q_2)}$ есть $\|Q\| + 1$; для всех слагаемых вида (7) выполнены неравенства (8). Поэто-

му если определены все коэффициенты ξ_{is} с $\|S\| < \|Q\|$, то равенства (9) позволяют однозначно найти коэффициент $\xi_{i(q_1+1, q_2)}$, для $q_1+1 \neq 0$. При $q_1+1=0$ левая часть равенства (9) обращается в нуль, ибо содержит нулевой множитель. Правая часть в (9) также обращается в нуль, ибо ряды $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ не содержат отрицательных степеней ($q_1=-1$) переменных y_1, y_2 . Поэтому равенства (9) не накладывают никаких ограничений на $\xi_{i(0, q_2)}$, эти коэффициенты можно задавать произвольно.

Начнем определение коэффициентов ξ_{iq} с линейных членов $\xi_{i(1,0)}y_1 + \xi_{i(0,1)}y_2$, для них уравнения (5) дают равенства

$$\xi_{i(1,0)} = \varphi_{i(0,0)}, \quad i = 1, 2.$$

Коэффициенты $\xi_{i(0,1)}$ выберем произвольными, но такими, чтобы якобиан

$$\begin{vmatrix} \xi_{1(1,0)} & \xi_{1(0,1)} \\ \xi_{2(1,0)} & \xi_{2(0,1)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Это можно сделать, ибо по крайней мере один из коэффициентов $\varphi_{i(0,0)}$ отличен от нуля, поскольку нуль — простая точка системы (1). Например, если $\varphi_{1(0,0)} \neq 0$, то положим $\xi_{1(0,1)} = 0$, $\xi_{2(0,1)} \neq 0$ — тогда неравенство (10) будет выполнено. Итак, коэффициенты ξ_{iq} с $\|Q\|=1$ определены. Определим коэффициенты квадратичных частей

$$\xi_{i(2,0)}y_1^2 + \xi_{i(1,1)}y_1y_2 + \xi_{i(0,2)}y_2^2, \quad i = 1, 2.$$

Для линейных членов система (5) дает

$$2\xi_{i(2,0)}y_1 + \xi_{i(1,1)}y_2 = \varphi_{i(1,0)}(\xi_{1(1,0)}y_1 + \xi_{1(0,1)}y_2) + \\ + \varphi_{i(0,1)}(\xi_{2(1,0)}y_1 + \xi_{2(0,1)}y_2).$$

Отсюда однозначно находим $\xi_{i(2,0)}$ и $\xi_{i(1,1)}$, а коэффициенты $\xi_{i(0,2)}$ выбираем произвольно, например равными нулю. Продолжая таким же образом, найдем коэффициенты ξ_{iq} членов третьей степени и так далее. Коэффициенты $\xi_{i(0, q_2)}$ все время можно задавать произвольно, например равными нулю, а остальные коэффициенты определяются однозначно.

Итак, мы нашли ряды ξ_i , удовлетворяющие системе (5); с помощью мажорирующих рядов (см. Петровский [102]) можно доказать, что найденные ряды ξ_i сходятся для $|y_1|, |y_2| < \varepsilon$, но здесь не будем этого доказывать. Якобиан преобразования (3) в нуле есть определитель (10), который не равен нулю. Поэтому преобразование (3) обратимо. Доказательство окончено.

Отметим два момента доказательства. Во-первых, преобразование (3) находилось методом неопределенных коэффициентов. Эти коэффициенты ξ_{iq} были некоторым образом упорядочены (по росту суммы q_1+q_2) и определялись последовательно по этой упорядоченности. Во-вторых, некоторые коэффициенты

(здесь $\xi_{i(0, q_2)}$) можно было задавать произвольно, тогда остальные коэффициенты рядов ξ_i определялись однозначно. В дальнейшем нам еще не раз встретится подобная ситуация.

З а м е ч а н и е. В теореме 1 коэффициенты и переменные могут быть как вещественными, так и комплексными. Если исходная система (1) вещественная, т. е. все коэффициенты φ_{iq} — действительные числа, то коэффициенты ξ_{iq} тоже будут вещественными, если $\xi_{i(0, q_2)}$ брать вещественными.

1.3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

или в матричной форме

$$\dot{X} = AX, \quad (11)$$

где X — вектор-столбец. После замены

$$X = BY, \quad \det B \neq 0 \quad (12)$$

система (11) перейдет в систему

$$\dot{Y} = B^{-1}ABY = JY. \quad (13)$$

Как известно (см., например, Понтрягин [103]), всякую систему (11) с помощью замены (12) можно привести к такой системе (13), у которой матрица $J = B^{-1}AB$ является жордановой. Т. е.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \sigma & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где λ_1 и λ_2 — собственные (характеристические) числа матрицы A , являющиеся корнями уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0, \quad (14)$$

а число $\sigma = 0$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и $\sigma = 0$ или 1, если $\lambda_1 = \lambda_2$.

Чтобы найти матрицу B , приводящую матрицу A к жордановой форме, надо сначала найти корни λ_i уравнения (14). Затем для каждого λ_i , найти собственный вектор B_i из системы

$$AB_i = \lambda_i B_i. \quad (15)$$

Из этой системы двух уравнений вектор B_i определяется с точностью до множителя пропорциональности. Наконец, $B = (B_1, B_2)$, т. е. векторы B_i являются столбцами матрицы B . Числа λ_1 , λ_2 и σ являются инвариантами системы (11) относительно линейных замен (12).

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение (14) есть

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Для $B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ получаем систему

$$4b_{11} + 3b_{21} = 3b_{11},$$

$$-b_{11} = 3b_{21}.$$

Полагая $b_{21} = 1$, находим отсюда $b_{11} = -3$. Для $B_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$ система (15) есть

$$4b_{12} + 3b_{22} = b_{12},$$

$$-b_{12} = b_{22};$$

откуда $b_{12} = 1$, $b_{22} = -1$. Матрица B есть

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$ уравнения (14), если матрица A не диагональна, надо в качестве вектора B_2 взять единственный собственный вектор (решение системы (15)), затем вектор B_1 находится из системы

$$AB_1 = \lambda_1 B_1 + B_2. \quad (16)$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение (14) есть $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, оно имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = 1$. Для вектора B_2 составляем систему (15):

$$2b_{12} + b_{22} = b_{12},$$

$$-b_{12} = b_{22};$$

откуда $b_{12} = 1$, $b_{22} = -1$. Для вектора B_1 составляем систему (16)

$$2b_{11} + b_{21} = b_{11} + b_{12} = b_{11} + 1,$$

$$-b_{11} = b_{21} + b_{22} = b_{21} - 1.$$

Откуда находим $b_{11} = 1$, $b_{21} = 0$. Итак, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА

В дальнейшем речь пойдет о системе (1), у которой $\varphi_i(0, 0) = 0$, $i=1, 2$, т. е. ноль — особая точка. Тогда систему (1) можно записать в виде (2'). С помощью линейной обратимой замены переменных (12) матрица A линейной части системы (1) приводится к жордановой форме, а сама система (1) переходит в систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \varphi_i(Y), \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

где $\sigma_1=0$, $\sigma_2=\sigma$, ряды φ_i не содержат свободных и линейных членов. Здесь рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел λ_i отлично от нуля (т. е. $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$), тогда точка $Y=0$ является элементарной особой точкой системы (17).

Наша цель заключается в том, чтобы привести систему (17) к наиболее простому виду с помощью локальной обратимой замены координат

$$y_i = z_i + \xi_i(z_1, z_2), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где ряды ξ_i не содержат свободных и линейных членов. Если искать аналитические преобразования (18), то ξ_i разлагаются в степенные ряды, сходящиеся для достаточно малых $|z_1|$, $|z_2|$, и сформулированная выше задача разбивается на две:

1) Найти формальные степенные ряды ξ_i , приводящие систему (17) к наиболее простому виду, т. е. найти коэффициенты ξ_i этих рядов.

2) Исследовать сходимость полученных рядов ξ_i .

При решении первой задачи приходится иметь дело со степенными рядами, про которые неизвестно, существует ли такая окрестность точки $Z=(z_1, z_2)=0$, в которой они сходятся, или же они расходятся во всякой окрестности нуля. Такие степенные ряды называются *формальными*. Арифметические операции и дифференцирование над ними производятся так же, как над сходящимися рядами. До сих пор мы имели дело только со сходящимися рядами. Но в дифференциальных уравнениях встречаются и расходящиеся степенные ряды.

Пример 3. Уравнение

$$x^2 dy/dx = y - x$$

в качестве решения $y(x)$ имеет степенной ряд

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! x^k.$$

Этот ряд расходится при любом $x \neq 0$. В то же время это ряд Тейлора «истинного решения»

$$y = e^{-1/x} \int_0^x \frac{e^{1/u}}{u} du,$$

которое является неаналитическим, но бесконечно дифференцируемым в нуле $x=0$.

Итак, решаем следующую задачу: Дана формальная система (17), т. е. φ_i — формальные степенные ряды без свободных и линейных членов и матрица линейных членов — жорданова. Спрашивается, к какой наиболее простой формальной системе

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + \psi_i(Z) \equiv \tilde{\psi}_i(Z), \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

можно привести систему (17) с помощью обратимой формальной замены переменных (18), где ξ_i — степенные ряды без свободных членов и матрица линейных частей является единичной?

Чтобы сформулировать ответ, введем новую запись:

$$\tilde{\psi}_i = z_i g_i(Z) = z_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Z^Q, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где

$$Q = (q_1, q_2), \quad Z = (z_1, z_2), \quad Z^Q = z_1^{q_1} z_2^{q_2}.$$

Поскольку $\tilde{\psi}_i$ — ряды по целым, неотрицательным степеням переменных z_1, z_2 без свободных членов, то в записи (20) суммирование производится по множествам

$$N_1 = \{Q: \text{целые } q_1 \geq -1, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 \geq 0\},$$

$$N_2 = \{Q: \text{целые } q_1 \geq 0, q_2 \geq -1, q_1 + q_2 \geq 0\}.$$

На плоскости q_1, q_2 множества N_i — это все целые точки, удовлетворяющие неравенствам $q_i \geq -1, q_j \geq 0 \ (j \neq i), q_1 + q_2 \geq 0$. Границы множеств точек, удовлетворяющих этим неравенствам, заштрихованы на рис. 47 (см. с. 97).

У п р а ж н е н и е 1. Найти, как выглядят в записи (20) линейные члены системы (19), т. е. λ_i и σ_i записать как g_{iQ} .

1.5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Введем для системы (17) и преобразования (18) запись, аналогичную записи (20):

$$\varphi_i = y_i f_i(Y) = y_i \sum_{Q \in N_i} f_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$$\xi_i = z_i h_i(Z) = z_i \sum_{Q \in N_i} h_{iQ} Z^Q, \quad i = 1, 2.$$

При этом φ_i, ξ_i и ψ_i — формальные ряды по целым неотрицательным степеням своих переменных без свободных и линейных членов.

Заметим, что в замене (18) матрица линейной части единична, поэтому замена (18) обратима, т. е. z_i можно представить в виде степенных рядов от y_1, y_2 .

Теорема 2. Для всякой системы (17) существует замена (18), приводящая систему (17) к такой системе (19), у которой в записи (20) $g_{i(q_1, q_2)} = 0$, если $q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 \neq 0$.

Т. е. в системе (19) оставлены только такие члены $z_i g_{iq} Z^q$, для которых

$$\langle Q, \Lambda \rangle = 0, \quad (22)$$

где вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Такие члены называются *резонансными*. Система, у которой все члены резонансные, называется *нормальной формой*. Таким образом, теорема 2 утверждает, что всякая формальная система (17) приводится к своей нормальной форме (19) посредством *нормализующего преобразования*.

Доказательство теоремы 2 приведем лишь для случая $\sigma = 0$. Для общего случая такое доказательство см. в § 1 гл. III и Брюно [26, 31].

Продифференцируем равенства (18) по t :

$$\dot{y}_i = \dot{z}_i(1 + h_i) + z_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial h_i}{\partial z_2} \dot{z}_2 \right), \quad i = 1, 2.$$

и заменим здесь производные по t их выражениями (17), (19), (20) и (21) через координаты

$$\begin{aligned} \lambda_i y_i + y_i f_i &= (\lambda_i z_i + z_i g_i)(1 + h_i) + z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_1} (\lambda_1 z_1 + z_1 g_1) + \\ &+ z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_2} (\lambda_2 z_2 + z_2 g_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Если теперь выразить y_i через z_1, z_2 по формулам (18), то получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_i z_i + \lambda_i z_i h_i + z_i(1 + h_i) f_i(z_1 + z_1 h_1, z_2 + z_2 h_2) &= \\ = \lambda_i z_i + \lambda_i z_i h_i + z_i g_i + z_i g_i h_i + z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_1} (\lambda_1 z_1 + z_1 g_1) + \\ + z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_2} (\lambda_2 z_2 + z_2 g_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены и перенося некоторые члены в другую часть равенства, получим уравнения

$$\begin{aligned} z_i g_i(Z) + z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_1} \lambda_1 z_1 + z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_2} \lambda_2 z_2 &= \\ = -z_i g_i h_i - z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_1} z_1 g_1 - z_i \frac{\partial h_i}{\partial z_2} z_2 g_2 + \\ + z_i(1 + h_i) f_i(z_1 + z_1 h_1, z_2 + z_2 h_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу (18) и (21) имеем

$$\begin{aligned} y_i f_{iS} Y^S &= z_i (1 + h_i) f_{iS} Z^S (1 + h_1)^{s_1} (1 + h_2)^{s_2} = \\ &= z_i Z^S f_{iS} \sum h_{1P_1} \dots h_{1P_k} h_{2R_1} \dots h_{2R_l} Z^T, \end{aligned}$$

где

$$T = P_1 + \dots + P_k + R_1 + \dots + R_l.$$

Поэтому в последнем слагаемом правой части (23) коэффициент при $z_i Z^Q$ является суммой членов вида

$$f_{iS} h_{1P_1} \dots h_{1P_k} h_{2R_1} \dots h_{2R_l}, \quad (24)$$

где

$$S + P_1 + \dots + P_k + R_1 + \dots + R_l = Q. \quad (25)$$

Равенства (23) будут выполнены, только если в разных частях равенства равны коэффициенты при всех степенях переменных. Поэтому i -е уравнение (23) для коэффициентов при $z_i Z^Q$ дает равенства

$$\begin{aligned} g_{iQ} + h_{iQ} \langle Q, \Lambda \rangle &= - \sum_{P+R=Q} h_{iP} g_{iR} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} (p_1 g_{1R} + p_2 g_{2R}) + \\ &+ \text{сумма членов вида (24)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь заметим, что h_{iP} , g_{jR} и f_{iS} отличны от нуля только при $\|P\| > 1$, $\|R\| > 1$, $\|S\| > 1$. Но в (26) и (25) вектор Q является суммой нескольких векторов P , R и S , поэтому для каждого из них

$$\|P\| < \|Q\|, \quad \|R\| < \|Q\|.$$

Обозначим через c_{iQ} правую часть равенства (26), она зависит только от таких h_{jP} и g_{jR} , у которых векторные индексы имеют меньшую норму, чем Q . Перепишем уравнения (26) так:

$$g_{iQ} + h_{iQ} \langle Q, \Lambda \rangle = c_{iQ}, \quad Q \in N_i, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Теперь последовательно с ростом $\|Q\|$ найдем h_{iQ} и g_{jQ} . Пусть уже найдены коэффициенты h_{iP} и g_{jR} для $\|P\| < \|Q\|$ и $\|R\| < \|Q\|$, тогда однозначно определены числа c_{iQ} . Решим уравнения (27) так:

если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, то $g_{iQ} = 0$, $h_{iQ} = c_{iQ} / \langle Q, \Lambda \rangle$;

если $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, то $g_{iQ} = c_{iQ}$, h_{iQ} — произвольны.

Т. е. коэффициенты g_{iQ} могут быть отличными от нуля только для резонансных векторных индексов Q , что и утверждается теоремой. Утверждение теоремы доказывается математической индукцией по $\|Q\|$. Индукцию можно начать с линейных членов, для которых утверждение теоремы тривиально. Доказательство окончено.

1.6. КЛАССИФИКАЦИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ *

Найдем все нормальные формы (19). В п. 1.4 гл. II были введены множества

$$N_1 = \{Q : \text{либо целые } q_1, q_2 \geq 0, \text{ либо } q_1 = -1 \text{ и целое } q_2 \geq 1\},$$

$$N_2 = \{Q : \text{либо целые } q_1, q_2 \geq 0, \text{ либо } q_2 = -1 \text{ и целое } q_1 \geq 1\}.$$

Положим $N = N_1 \cup N_2 = \{Q : \text{либо целые } q_1, q_2 \geq 0, \text{ либо } q_1 = -1 \text{ и целое } q_2 \geq 1; \text{ либо } q_2 = -1 \text{ и целое } q_1 \geq 1\}$.

Т. е. множество N состоит из тех точек целочисленной решетки плоскости q_1, q_2 , которые либо находятся в I квадранте, либо во II квадранте лежат на полупрямой $q_1 = -1, q_2 \geq 1$, либо лежат в IV квадранте на полупрямой $q_2 = -1, q_1 \geq 1$ (рис. 47 и 48). Здесь $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$; пусть $\lambda_2 \neq 0$, тогда рассмотрим уравнение (22). Если положить $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, то оно эквивалентно уравнению

$$\lambda q_1 + q_2 = 0. \quad (28)$$

Разберем различные случаи:

а) λ — комплексное число (невещественное). Тогда уравнение (28) для действительных q_1 и q_2 имеет только тривиальное решение $q_1 = q_2 = 0$, и нормальная форма будет

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2. \quad (29)$$

Эта система имеет интеграл

$$z_1^{1/\lambda_1} = c z_2^{1/\lambda_2} \quad \text{или} \quad z_2 = c_0 z_1^{1/\lambda}, \quad (29')$$

и решения $z_i = c_i \exp \lambda_i t, i = 1, 2$.

Когда λ действительно, уравнение (28) определяет в плоскости q_1, q_2 прямую L , ортогональную вектору $(\lambda, 1)$ или Λ , и нормальная форма определяется теми точками из множества N , через которые проходит эта прямая L .

б) $\lambda > 0$, тогда прямая L проходит через II и IV квадранты (см. рис. 48, $L = L(b)$). В IV квадранте точки из множества N имеют вид $q_1 = m > 0, q_2 = -1$. Поэтому прямая L проходит через одну из этих точек только в том случае, когда $\lambda m - 1 = 0$, т. е. $\lambda = m^{-1}$. Если $\lambda = m^{-1} < 1$, то уравнение (28) имеет единственное нетривиальное решение $Q = (m, -1) \in N$, которое не входит в множество N_1 . Поэтому соответствующий член будет только в $g_2 = z_2^{-1} \psi_2$. Итак, нормальная форма есть

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, & \dot{z}_2 &= z_2 (\lambda_2 + g_{2(m,-1)} z_1^m z_2^{-1}) \quad \text{или} \\ \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, & \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + g_{2(m,-1)} z_1^m. \end{aligned} \quad (30)$$

Интеграл этой системы есть

$$z_2 = b z_1^m (\ln z_1 + c), \quad b = g_{2(m,-1)} / \lambda_1. \quad (30')$$

* См. также у Брюно в [31, пример 1 введения].

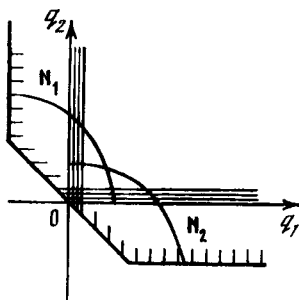


Рис. 47

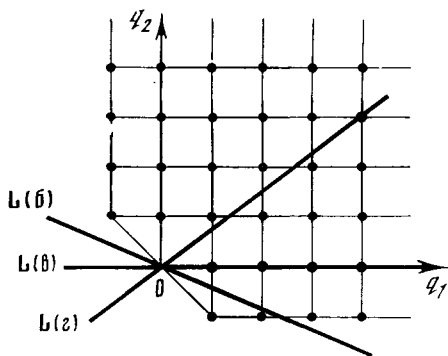


Рис. 48

Случай $\lambda = m > 1$ получается из только что рассмотренного изменением нумерации переменных.

Если $\lambda = 1$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$, то нетривиальными решениями $Q \in N$ уравнения (28) будут $Q = (-1, 1) \in N_1$ и $Q = (1, -1) \in N_2$. Этим показателям степеней в правых частях системы (19) соответствуют линейные члены, их матрица должна быть жордановой. Поэтому нормальная форма треугольна

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \sigma z_1. \quad (31)$$

При $\sigma = 0$ это система (29), при $\sigma \neq 0$ интеграл системы есть

$$z_2 = \lambda_1^{-1} z_1 (\ln z_1 + c).$$

Если $\lambda \neq m$ и $\lambda \neq m^{-1}$, где m — натуральное число, то уравнение (28) не имеет нетривиальных решений $Q \in N$, поэтому нормальная форма будет системой (29).

в) $\lambda = 0$, т. е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Прямая L пересекается с множеством N по точкам $Q = (k, 0)$, где целое $k \geq 0$ (рис. 48, $L = L(\theta)$). Следовательно, нормальная форма есть

$$\dot{z}_1 = z_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,0)} z_1^k \equiv z_1 g_1(z_1), \quad (32)$$

$$\dot{z}_2 = z_2 \left(\lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,0)} z_1^k \right) \equiv z_2 g_2(z_1).$$

Эту систему удобно записать в виде

$$(\ln \dot{z}_1) = g_1(z_1), \quad (\ln \dot{z}_2) = g_2(z_1).$$

Если $g_1 \equiv 0$, то $z_1 = \text{const}$ — интеграл этой системы. Если $g_1 \neq 0$,

то интеграл есть

$$\ln z_2 = \int \frac{g_2(z_1) dz_1}{z_1 g_1(z_1)} + c.$$

з) $\lambda < 0$. Прямая L проходит через I и III квадранты (см. рис. 48, $L=L(z)$). В III квадранте нет точек из множества N , но в I квадранте каждая точка целочисленной решетки принадлежит множеству N . Если λ — иррациональное число, то уравнение (28) не имеет нетривиальных решений и нормальная форма будет системой (29). Если $\lambda = -1$, т. е. $\lambda_1 = -\lambda_2$, то прямая L пересекается с множеством N по точкам $Q = (k, k)$, где целое $k \geq 0$. Нормальная форма будет

$$\dot{z}_1 = z_1 \left(\lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(k,k)} z_1^k z_2^k \right) \equiv z_1 g_1(z_1 z_2), \quad (33)$$

$$\dot{z}_2 = z_2 \left(\lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,k)} z_1^k z_2^k \right) \equiv z_2 g_2(z_1 z_2).$$

Преобразование $w_1 = z_1 z_2$, $w_2 = z_2$ приводит эту систему к системе

$$\dot{w}_1 = w_1 \sum_{k=1}^{\infty} (g_{1(k,k)} + g_{2(k,k)}) w_1^k,$$

$$\dot{w}_2 = w_2 \left(\lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2(k,k)} w_1^k \right),$$

которая аналогична системе (32).

Случай $\lambda = -r/s$, где r и s — взаимно простые целые положительные числа, разбирается аналогично предыдущему. Прямая L пересекается с множеством N по точкам $Q = (ks, kr)$, где целое $k \geq 0$. Нормальная форма будет

$$\dot{z}_1 = z_1 \left(\lambda_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{1(ks,kr)} z_1^{ks} z_2^{kr} \right) \equiv z_1 g_1,$$

$$\dot{z}_2 = z_2 \left(\lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2(ks,kr)} z_1^{ks} z_2^{kr} \right) \equiv z_2 g_2. \quad (34)$$

Так как r и s взаимно просты, то существуют целые числа u и v такие, что $ru - sv = 1$. Степенное преобразование

$$w_1 = z_1^s z_2^r, \quad w_2 = z_1^u z_2^v \quad (34')$$

приводит систему (34) к виду

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_1 \sum_{k=1}^{\infty} (sg_{1(ks,kr)} + rg_{2(ks,kr)}) w_1^k, \\ \dot{w}_2 &= w_2 \left[u\lambda_1 + v\lambda_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (ug_{1(ks,kr)} + vg_{2(ks,kr)}) w_1^k \right],\end{aligned}$$

аналогичному системе (32). Итак, нормальные формы в зависимости от λ_1, λ_2 суть системы (29), (30), (31), (32) и приводящаяся к (32) система (34). Во всех случаях нормальная форма интегрируется.

1.7. СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если ввести вектор-столбцы

$$\ln Z = \begin{pmatrix} \ln z_1 \\ \ln z_2 \end{pmatrix}, \quad \ln W = \begin{pmatrix} \ln w_1 \\ \ln w_2 \end{pmatrix},$$

то степенное преобразование

$$\begin{aligned}w_1 &= z_1^{\alpha_{11}} z_2^{\alpha_{12}}, \\ w_2 &= z_1^{\alpha_{21}} z_2^{\alpha_{22}},\end{aligned} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

можно записать в векторной форме

$$\ln W = \alpha \ln Z. \quad (35)$$

Также и обратное преобразование:

$$\ln Z = \alpha^{-1} \ln W.$$

Откуда получим

$$\begin{aligned}Z^Q &= \exp \langle Q, \ln Z \rangle = \exp \langle Q, \alpha^{-1} \ln W \rangle = \\ &= \exp \langle \alpha^{-1*} Q, W \rangle = W^{\alpha^{-1*} Q} = W^{Q'},\end{aligned}$$

где α^* — транспонированная матрица α . Итак, новый векторный показатель $Q' = \alpha^{-1*} Q$.

Введем вектор-столбцы $G_Q = \begin{pmatrix} g_{1Q} \\ g_{2Q} \end{pmatrix}$ и систему (19) запишем в векторной форме

$$(\ln \dot{Z}) = \sum_{Q \in \mathbb{D}} G_Q Z^Q. \quad (36)$$

Тогда согласно (35)

$$(\ln \dot{W}) = \alpha (\ln \dot{Z}) = \sum_{Q \in \mathbb{D}} \alpha G_Q Z^Q = \sum_{Q \in \mathbb{D}} \alpha G_Q W^{Q'},$$

т. е. система (36) при преобразовании (35) переходит в систему

$$(\ln W) = \sum_{Q' \in D'} G_{Q'} W^{Q'}, \quad (37)$$

где $Q' = \alpha^{*-1}Q$, $G_{Q'} = \alpha G_Q$.

В частности, соответствующее системе (36) множество D точек Q на плоскости q_1, q_2 при степенном преобразовании испытывает линейное преобразование с матрицей α^{*-1} (так же, как для случая функций в п. 2.6 гл. I). Поэтому, если множество D целиком расположено на некоторой прямой L в плоскости q_1, q_2 , то степенное преобразование можно использовать, чтобы перевести эту прямую в координатную ось (скажем, — в ось q'_1). Тогда у всех точек множества D' будет $q'_2 = 0$, т. е. в системе (37) правые части не зависят от w_2 . Именно так и было сделано при интегрировании нормальной формы (34). Этим же приемом можно получить интегралы нормальной формы (30).

1.8. О СХОДИМОСТИ НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Здесь без доказательств (которые довольно сложны) приведем результаты о сходимости преобразований к нормальной форме в случаях а) — г) п. 1.6 гл. II. Доказательства см. у Брюно [31]. В дальнейшем исходная система предполагается аналитической.

В случаях а) и б) нормализующее преобразование всегда сходится, ибо в этих случаях

$$| \langle Q, \Lambda \rangle | > \varepsilon \|Q\|, \text{ если } Q \in N, \quad \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0. \quad (38)$$

В случае в) прямая L совпадает с осью q_1 , на ней имеется бесконечно много точек $Q \in N$ и нормальная форма (32) содержит бесконечное число членов. Свойство (38) здесь не имеет места. Нормализующее преобразование сходится, если в нормальной форме (32) ряд

$$g_1(z_1) \equiv 0, \quad (39)$$

т. е. все коэффициенты $g_{1(k,0)} = 0$. Если же в нормальной форме (32) $g_1 \neq 0$, то существует такая аналитическая система, которая приводится к этой нормальной форме расходящимся преобразованием (это следует из теоремы III Брюно [31]).

Пример 4 (продолжение примера 3). Система

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2 - x_1 \quad (40)$$

эквивалентна уравнению

$$x_1^2 \frac{dx_2}{dx_1} = x_2 - x_1. \quad (41)$$

Преобразование

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)! y_1^k = y_2 + \xi(y_1) \quad (42)$$

приводит систему (40) к нормальной форме

$$\dot{y}_1 = y_1^2, \quad \dot{y}_2 = y_2. \quad (43)$$

Это соответствует тому, что, используя частное решение $x_2 = \xi(y_1)$ линейного неоднородного уравнения (41), приводим уравнение (41) к однородному. В нормальной форме (43) $g_1 = y_1 \neq 0$, т. е. условие (39) не выполнено, и нормализующее преобразование (42) расходится.

В случае 2) при рациональном $\lambda = -r/s$ нормальная форма имеет вид (34). Если существует такой ряд

$$a(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^{ks} z_2^{kr},$$

что в нормальной форме (34)

$$g_i = \lambda_i a, \quad i = 1, 2, \quad (44)$$

то нормализующее преобразование сходится. Если же условие (44) не выполнено, то существует аналитическая исходная система, которая приводится к нормальной форме расходящимся преобразованием. Условие (44) означает, что в системе (34) все векторы G_q пропорциональны вектору Λ , и $g_1 s + g_2 r = 0$. После степенного преобразования (34') система (34) перейдет в систему

$$(\ln \dot{w}_1) = s g_1 + r g_2 \equiv g'_1, \quad (45)$$

$$(\ln \dot{w}_2) = u g_1 + v g_2 \equiv g'_2,$$

для которой условие (44) означает, что $g'_1 \equiv 0$. Система (45) аналогична системе (32), и условие сходимости здесь то же самое, оно инвариантно относительно степенных преобразований. Геометрически условие (44) означает, что все векторы G_q ортогональны прямой L .

В случае 2) при иррациональном числе λ нормальная форма (29) проста, но условия сходимости нормализующего преобразования не просты. Более того, в этом случае они еще не выяснены до конца. Так, Зигель [64] доказал сходимость, если для всех целочисленных векторов $Q \neq 0$ выполнена оценка

$$|\langle Q, \Lambda \rangle| > \varepsilon (|q_1| + |q_2|)^{-\nu}, \quad (47)$$

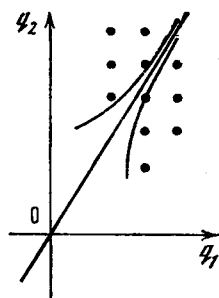


Рис. 49

где ν — некоторое положительное число. Геометрически условие (47) означает, что целочисленные точки плоскости q_1, q_2 подходят к прямой L не слишком близко (рис. 49). Условие (47) можно еще несколько ослабить, чтобы сохранилась сходимость. С другой стороны, если целочисленные точки располагаются слишком близко к прямой L , то будет расходимость. Точная граница по Λ между случаями сходимости и расходимости еще не установлена, хотя имеющиеся в настоящее время условия, достаточные для сходимости и достаточные для расходимости, очень близки друг к другу (см. Брюно [31]).

1.9. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы рассматривали комплексные системы (1), т. е. коэффициенты рядов φ_i и значения координат x_i были комплексными. Для упрощения системы (1) использовались комплексные преобразования координат.

Теперь же рассмотрим специфику вещественной системы (1), т. е. коэффициенты рядов φ_i и значения координат x_i теперь вещественны. Для такой системы естественно искать упрощение при помощи только вещественных замен координат (3).

Итак, рассматриваем вещественную систему

$$\dot{X} = AX + \Theta(X), \quad (48)$$

где ряды Θ не содержат свободных и линейных членов, коэффициенты рядов Θ и элементы матрицы A суть вещественные числа. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ матрицы A имеет вещественные коэффициенты. Его корни λ_1, λ_2 либо оба вещественны, либо оба комплексные. Если эти корни вещественны, то линейная часть системы (48) приводится к жордановой форме с помощью вещественного линейного преобразования. Как видно из доказательства теоремы 2, дальнейшее преобразование к нормальной форме также будет иметь вещественные коэффициенты, если резонансные коэффициенты h_{iq} брать вещественными. Следовательно, нормализующее преобразование и нормальная форма будут вещественными.

Если характеристические числа комплексные, то они комплексно сопряжены:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \mu + i\nu, \quad \nu \neq 0. \quad (49)$$

Здесь и далее черта сверху — знак комплексного сопряжения. В этом случае систему

$$\dot{v}_j = \eta_j(v_1, v_2), \quad j = 1, 2 \quad (50)$$

назовем *вещественной нормальной формой*, если в комплексно

сопряженных координатах

$$z_1 = v_1 + iv_2, \quad z_2 = v_1 - iv_2 \quad (51)$$

эта система является обычной нормальной формой.

Теорема 3. *Вещественная система (48) с комплексными собственными числами (49) приводится к вещественной нормальной форме (50) посредством вещественной формальной замены координат (3).*

Доказательство. В силу (49) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и жорданова форма J матрицы A диагональна. Пусть B_1 — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу λ_1 . Тогда сопряженный вектор $\bar{B}_1$ — также собственный и соответствует собственному числу $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Образует матрицу $B = (B_1, \bar{B}_1)$. Согласно п. 1.3 гл. II линейное преобразование

$$X = BY \quad (52)$$

приводит матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$. При этом вещественным значениям координат X соответствуют комплексно сопряженные значения координат Y :

$$y_1 = \bar{y}_2. \quad (53)$$

Для ряда $f(Y) = \sum f_Q Y^Q$ будем обозначать $\bar{f}(Y) = \sum \bar{f}_Q Y^Q$.

В результате преобразования (52) система (48) перейдет в систему

$$\dot{y} = \lambda_i y_i + y_i f_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2. \quad (54)$$

Поскольку переменные y_1 и y_2 сопряжены, то второе уравнение системы (54) должно быть сопряженным к первому, т. е.

$$\lambda_1 y_1 + y_1 f_1(y_1, y_2) = \bar{\lambda}_2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2 \bar{f}_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

Учитывая равенство (53), получим соотношение $f_1(y_1, y_2) = \bar{f}_2(y_2, y_1)$, которое для коэффициентов рядов f_1 и $\bar{f}_2$ дает

$$\bar{f}_1(q_1, q_2) = \bar{f}_2(q_2, q_1). \quad (55)$$

Аналогично, если при формальной замене координат

$$y_i = z_i + z_i \sum h_{iQ} Z^Q, \quad i = 1, 2 \quad (56)$$

выполнены соотношения

$$h_{1(q_1, q_2)} = \bar{h}_{2(q_2, q_1)}, \quad (57)$$

то сопряженным значениям координат y_1, y_2 соответствуют сопряженные координаты z_1, z_2 : $z_1 = \bar{z}_2$. Покажем, что существует нормализующая замена (56) со свойством (57), которое переводит систему (54) в нормальную форму

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + z_i \sum g_{iQ} Z^Q, \quad i = 1, 2, \quad (57')$$

где

$$g_{1(q_1, q_2)} = \bar{g}_{2(q_2, q_1)}. \quad (58)$$

Будем доказывать это математической индукцией по норме $\|Q\|$. Пусть $Q = (q_1, q_2)$, $Q' = (q_2, q_1)$ и свойства (57) и (58) выполнены для всех таких коэффициентов h_{jP} и g_{kR} , у которых $\|P\|, \|R\| < \|Q\|$. Докажем, что равенства

$$h_{1Q} = \bar{h}_{2Q'}, \quad g_{1Q} = \bar{g}_{2Q'} \quad (59)$$

также будут выполнены. Напомним, что коэффициенты рядов f, g, h связаны равенством (26). Для правых частей равенств (26), которые были обозначены через c_{iQ} , выполнены соотношения

$$c_{1Q} = \bar{c}_{2Q'}. \quad (60)$$

Это следует из свойства (55) и индуктивного предположения свойств (57) и (58). Равенства (27) дают

$$g_{1Q} + h_{1Q} \langle Q, \Lambda \rangle = c_{1Q}, \quad g_{2Q'} + h_{2Q'} \langle Q', \Lambda \rangle = c_{2Q'}.$$

Но согласно (49)

$$\langle Q, \Lambda \rangle = \mu(q_1 + q_2) + i\nu(q_1 - q_2),$$

$$\langle Q', \Lambda \rangle = \mu(q_1 + q_2) + i\nu(q_2 - q_1).$$

Т. е. $\langle Q, \Lambda \rangle = \overline{\langle Q', \Lambda \rangle}$. Поэтому если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, то

$$g_{1Q} = \bar{g}_{2Q'} = 0, \quad h_{1Q} = \frac{c_{1Q}}{\langle Q, \Lambda \rangle}, \quad h_{2Q'} = \frac{c_{2Q'}}{\langle Q', \Lambda \rangle},$$

и согласно (60) свойство (59) выполнено. Если же $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, то $g_{1Q} = \bar{g}_{2Q'} = c_{1Q}$, коэффициент h_{1Q} выбираем произвольным и полагаем $h_{2Q'} = \bar{h}_{1Q}$. Итак, свойство (59) выполнено для всех Q , и система (57') является нормальной формой. Преобразование (51) от координат Z к вещественным координатам V переводит комплексную нормальную форму (57') в вещественную нормальную форму (50). Остается заметить, что последовательное выполнение преобразований (52), (56) и (51) приводит к вещественному преобразованию координат X в координаты V . Теорема доказана.

Для общей ситуации доказательство существования вещественного нормализующего преобразования см. в п. 1.9 гл. III.

О расхожимости такого преобразования см. также Брюно [506].

1.10. О ГЛАДКОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ

Для замен вещественных координат можно использовать не только аналитические преобразования, но также гладкие (непрерывно дифференцируемые) или просто непрерывные. Поскольку аналитическое нормализующее преобразование сущест-

ует далеко не всегда, то для вещественных систем возникают следующие задачи:

1) В каких случаях существует бесконечно дифференцируемое преобразование к вещественной нормальной форме?

2) В каких случаях система приводится к линейной посредством один раз непрерывно дифференцируемой замены координат?

3) Или в более общем виде: к какой наиболее простой системе можно привести исходную систему с помощью конечно гладкой замены координат?

К настоящему времени получены следующие ответы на эти вопросы:

1) Этот вопрос поставил Биркгоф [133]. Согласно результатам Стернберга [145, 146] и Ченя [150, 151] при условии

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0 \quad (60')$$

всегда существует бесконечно гладкое нормализующее преобразование. В работе Брюно [38] предложена гипотеза, которую для двумерных систем можно сформулировать так:

Гипотеза. Для двумерной аналитической вещественной системы всегда существует бесконечно гладкое нормализующее преобразование.

Токарев [117а], уточняя результат Бибикова [19], доказал справедливость этой гипотезы в случае чисто мнимых $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_2$, когда условие (44) не выполнено.

2) При условии (60') всякая двумерная система эквивалентна своей линейной части в классе один раз непрерывно дифференцируемых замен переменных (см. Хартман [121, гл. 9, 148]). Для n -мерного случая Самовол [108] сформулировал условия конечно гладкой нормализации бесконечно гладкой системы. Наконец, Белицкий [13, 15] изучает условия конечно гладкой линеаризации конечно гладкой системы. Если условие (60') не выполнено, то легко строятся примеры, когда интегральные кривые нормальной формы и линейной системы даже топологически не эквивалентны.

3) На этот вопрос пока нет достаточно исчерпывающего ответа, есть только отдельные результаты (см. Самовол [108]).

1.11. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

В том же порядке, как в п. 1.6 гл. II, разберем поведение интегральных кривых нормальных форм вещественных систем (см. также п. 1.8 гл. II).

а) λ — комплексное число. В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu \neq 0$. Нормальная форма есть система

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{\bar{z}}_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2.$$

Вещественная нормальная форма в переменных (51) есть

$$\dot{v}_1 = \mu v_1 - \nu v_2, \quad \dot{v}_2 = \nu v_1 + \mu v_2.$$

Ее решения суть

$$v_1 = ce^{i\omega t} \cos \nu t, \quad v_2 = ce^{i\omega t} \sin \nu t. \quad (61)$$

На плоскости v_1, v_2 интегральные кривые суть спирали, стремящиеся к нулю (рис. 50). Такое расположение интегральных кривых называется *фокус*. Поскольку нормализующее преобразование в этом случае сходится, то у исходной системы интегральные кривые будут спиралями, только несколько искривленными.

б) λ — вещественное число, $\lambda > 0$. В этом случае числа λ_1 и λ_2 также вещественны. Нормальные формы могут быть двух типов: типа (29) и (если $\lambda = m^{-1}$) типа (30). Для системы (29) с $\lambda_1 \neq \lambda_2$ интегральные кривые $z_2 = cz_1^{\lambda_1/\lambda_2}$ входят в особую точку, касаясь той оси z_i , для которой $|\lambda_i|$ меньше (рис. 51). Кроме того, обе оси являются интегральными кривыми. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то интегральные кривые суть прямые $z_2 = cz_1$ (рис. 52).

Если $\lambda = m^{-1}$, и в нормальной форме (30) $g_{2(m, -1)} \neq 0$, то при $m > 1$ расположение интегральных кривых (30') похоже на рис. 51, но ось z_1 не является интегральной кривой (рис. 53). Заметим, что в этом случае гладкая замена

$$w_2 = z_2 - bz_1^m \ln |z_1| \quad (62)$$

переводит систему (30) в (29), т. е. эти случаи эквивалентны в классе гладких замен переменных.

Если $\lambda = 1$ и в системе (31) $\sigma \neq 0$, то в интегральных кривых $z_2 = \sigma \lambda_1^{-1} z_1 (\ln |z_1| + c)$ логарифм проявляется сильнее (рис. 54). Замена (62) уже не является гладкой, но остается непрерывной и приводит систему (31) к виду (29). Поскольку в случае $\lambda > 0$ нормализующее преобразование всегда сходится, то с топологической точки зрения в этом случае все вещественные системы эквивалентны системе (29). Этот случай называется — *узел*.

в) $\lambda = 0$, здесь $\lambda_1 = 0$ и вещественное число $\lambda_2 \neq 0$. Нормальная форма имеет вид (32). Если выполнено условие (39), то нормализующее преобразование сходится, и решения нормальной формы суть $z_1 = c = \text{const}$, $z_2 = \exp g_2(c)t$. Интегральные кривые суть вертикальные полупрямые (рис. 55), причем ось z_1 состоит из неподвижных точек.

Если $g_1 \neq 0$, то $g_1 = g_{1(t,0)} z_1^l + \dots$; интеграл системы (32) есть

$$\begin{aligned} \ln |z_2| + c &= \int \frac{g_2(z_1) dz_1}{z_1 g_1(z_1)} = \int \frac{\lambda_2}{g_{1(t,0)} z_1^{l+1}} (1 + \dots) dz_1 = \\ &= - \frac{\lambda_2}{l g_{1(t,0)} z_1^l} (1 + \dots), \end{aligned}$$

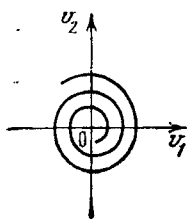


Рис. 50

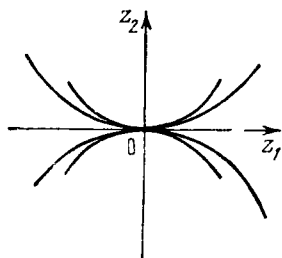


Рис. 51

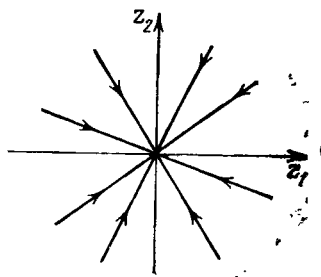


Рис. 52

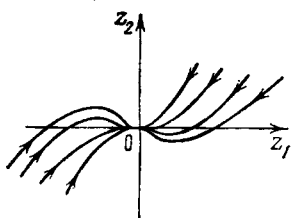


Рис. 53

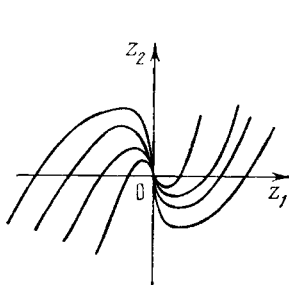


Рис. 54

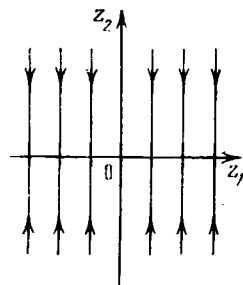


Рис. 55

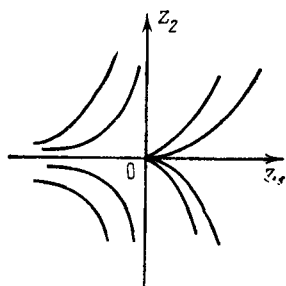


Рис. 56

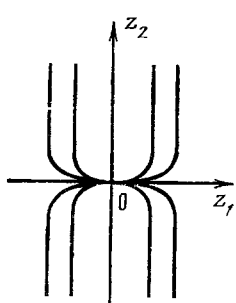


Рис. 57

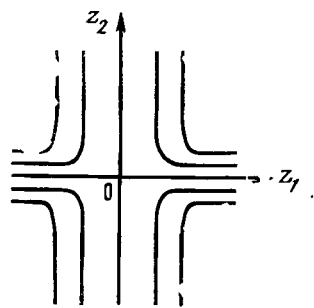


Рис. 58

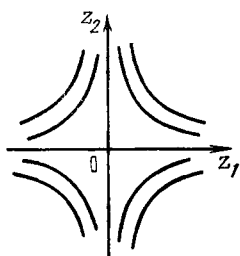


Рис. 59

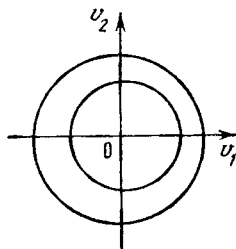


Рис. 60

ибо $g_2 = \lambda_2 + \dots$. Здесь оси z_1 и z_2 всегда являются интегральными кривыми. Расположение интегральных кривых зависит от четности числа l и знака отношения $\lambda_2/g_{1(l,0)}$. Если l — нечетное число, то расположение показано на рис. 56 с точностью до замены знака у координаты z_1 (*седло—узел*). Если число l — четное, то расположение интегральных кривых показано на рис. 57, если $\lambda_2/g_{1(l,0)} > 0$, и на рис. 58, если $\lambda_2/g_{1(l,0)} < 0$. На рис. 56 и 57 касание интегральных кривых с осью z_1 «бесконечного порядка».

Хотя в случаях $g_1 \neq 0$ нормализующее преобразование расходуется, но, по-видимому, существует вещественное бесконечно дифференцируемое нормализующее преобразование. Впрочем, кажется, это еще никем не доказано (см. гипотезу п. 1.10).

2) $\lambda < 0$. Возможны два принципиально разных подслучая.

Первый подслучай: числа λ_1 и λ_2 вещественны. Тогда интегральные кривые нормальной формы суть гиперболы (рис. 59 — *седло*). Как доказал Стернберг [145, 146], в этом случае всегда существует вещественное бесконечно дифференцируемое преобразование к нормальной форме (см. также Биркгоф [133] и Чень [150]). Если число λ иррационально, то нормальная форма является линейной системой (29). Для рационального числа λ нормальная форма (34), вообще говоря, содержит бесконечные ряды. Но с помощью формальных замен переменных можно оставить в правых частях системы (34) лишь конечное число членов (см. п. 2.3 гл. III). В классе один раз непрерывно дифференцируемых замен координат нормальная форма всегда эквивалентна линейной системе (см. предыдущий пункт).

Второй подслучай: числа λ_1 и λ_2 — комплексные, тогда они чисто мнимые: $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\nu$. Здесь $\lambda = -1$, и нормальная форма есть система (33). Она интегрируется введением переменного $w_1 = z_1 z_2 = v_1^2 + v_2^2$, ибо

$$\dot{w}_1 = w_1 (g_1(w_1) + g_2(w_1)).$$

Условие вещественности $g_{1(q_1, q_2)} = \bar{g}_{2(q_2, q_1)}$ здесь дает, что $g_{1(k, k)} = \bar{g}_{2(k, k)}$, т. е. у ряда $g_1(w_1) + g_2(w_2) = 2\sum \operatorname{Re} g_{1(k, k)} w_1^k$ все коэффициенты вещественные. Переменная w_1 также вещественная, она является квадратом радиус-вектора на вещественной плоскости $v_1 = \operatorname{Re} z_1$, $v_2 = \operatorname{Im} z_1$: $w_1 = z_1 \bar{z}_1 = (\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2$.

Если $g_1 + g_2 \equiv 0$, т. е. все коэффициенты $g_{1(k, k)}$ чисто мнимые, то система имеет интеграл $w_1 = \operatorname{const}$, и интегральные кривые на плоскости v_1, v_2 суть окружности $v_1^2 + v_2^2 = \operatorname{const}$ (рис. 60). В этом случае (называемом *центр*) нормализующее преобразование всегда сходится.

Если $g_1 + g_2 \neq 0$, то $g_1 + g_2 = a w_1^l + \dots$, где вещественное число $a \neq 0$, $l \geq 1$, коэффициенты $g_{1(k, k)}$ для $k < l$ чисто мнимые, $a = 2\operatorname{Re} g_{1(l, l)} \neq 0$. Интеграл системы при вещественном w_1 есть

$$\ln z_1 = \int \frac{g_1(w_1) dw_1}{w_1 (g_1 + g_2)} = \int \frac{\operatorname{Re} g_1 dw_1}{w_1 (g_1 + g_2)} + i \int \frac{\operatorname{Im} g_1 dw_1}{w_1 (g_1 + g_2)},$$

но

$$\frac{\operatorname{Re} g_1}{g_1 + g_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\operatorname{Im} g_1}{g_1 + g_2} = \frac{\operatorname{Im} \lambda_1}{a\omega_1^t} (1 + \dots).$$

Поэтому искомый интеграл есть

$$\ln z_1 = \frac{1}{2} \ln w_1 - \frac{i \operatorname{Im} \lambda_1}{a\omega_1^t} (1 + \dots).$$

Т. е. интегральные кривые суть спирали: при $\omega_1 \rightarrow 0$ они закручиваются по часовой стрелке, если $\operatorname{Im} \lambda_1/a > 0$, и против часовой стрелки, если $\operatorname{Im} \lambda_1/a < 0$.

Это случай *негрубого фокуса*, его существование и характер определяются нелинейными членами нормальной формы. В этом случае нормализующее преобразование расходится, но существует бесконечно гладкое нормализующее преобразование (см. Токарев [117а]).

З а м е ч а н и е. Нормализующее преобразование можно использовать для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Для этого у системы (1) приводят к нормальной форме лишь все члены до некоторого конечного порядка и отбрасывают остальные члены. Решение такой «укороченной» системы будет приближением решения полной системы, если в «укороченной» нормальной форме содержатся ведущие члены (например, член $g_{1(1,0)} z_1^t$ в случае в) или аналогичный член в случае негрубого фокуса)*.

У п р а ж н е н и е 2. Для приведенных ниже систем вычислить нормальную форму, проинтегрировать ее и нарисовать ее интегральные кривые.

1) $\dot{x} = ax - 4y + (x+y)^4$, $\dot{y} = x - (x-y)^4$, $a = 6, 5, 4, 3$.

2) $\dot{x} = 2x + y + 7x^2 + 3y^2$, $\dot{y} = -x + 6x^2 + y^2$.

Для приведенных ниже систем вычислить нормальные формы лишь до членов, определяющих характер интегральных кривых, и определить расположение интегральных кривых.

3) $\dot{x} = 3x + 4y + 17x^2 + xy$, $\dot{y} = x - 23y^2$.

4) $\dot{x} = 2x + y + 2x^2 + y^2$, $\dot{y} = 6x + 3y + 3x^2 + xy$.

5) $\dot{x} = y + 5x^3 + xy^2$, $\dot{y} = -4x - 2x^2y + y^3$.

6) Для каких μ, ν решение (61) стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$, и в какую сторону закручивается спираль на плоскости v_1, v_2 ?

* Для существования центра необходимо и достаточно выполнения счетного числа условий

$$g_{1(k,k)} + g_{2(k,k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом $g_{j(k,k)}$ суть многочлены от коэффициентов исходной системы (48). Если в исходной системе (48) правые части суть многочлены степени m , то для существования центра достаточно выполнения конечного числа указанных условий (только для $k \leq n(m)$). Так, $n(2) = 3$ (см. Сибирский [110], Зигель [65, § 25]).

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

2.1. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

До сих пор мы рассматривали систему

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

в которой φ_i — ряды по неотрицательным степеням переменных. Это приводило к тому, что в записи

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + x_i \sum f_{iq} X^Q \equiv \lambda_i x_i + x_i f_i, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

векторные показатели степени Q пробегали множество N , которое почти целиком содержится в I квадранте плоскости R_1^2 .

Образует для каждого вектора Q векторный коэффициент $F_Q = (f_{1Q}, f_{2Q})$ и системе (1) поставим в соответствие множество $D = D(F) = \{Q : F_Q \neq 0\}$. Т. е. $D(F)$ — множество векторных показателей в системе (1). Например, если функции φ_i делятся на x_i , то множество D для системы (1) целиком лежит в первом квадранте.

Здесь рассмотрим более общую ситуацию, когда множество $D(F)$ на плоскости R_1^2 лежит в некотором секторе V , ограниченном лучами, выходящими из нуля

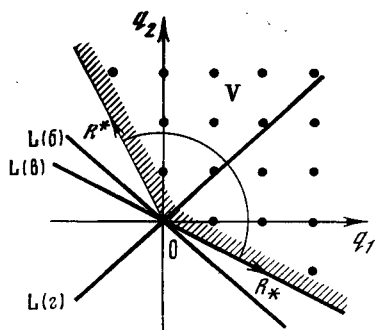


Рис. 61

ля (рис. 61, ср. п. 2,5 гл. I и рис. 28). Итак, пусть R^* и R_* — два линейно независимых вектора, и пусть векторы P^* и P_* ортогональны векторам R^* и R_* соответственно, причем

$$\langle R^*, P_* \rangle < 0, \quad \langle R_*, P^* \rangle < 0. \quad (2)$$

Определим на плоскости R_1^2 сектор V как множество точек Q , удовлетворяющих неравенствам

$$\langle Q, P_* \rangle \leq 0, \quad \langle Q, P^* \rangle \leq 0. \quad (3)$$

Границами сектора V служат лучи, проведенные через точки R^* и R_* . Благодаря условию (2) сектор V находится по одну сторону от прямой, проведенной через нуль и точку R^* (или R_*), т. е. сектор V занимает на плоскости q_1, q_2 угол, меньший π , и является выпуклым конусом. Поэтому каждая точка Q сектора V может быть представлена в виде

$$Q = \alpha_1 R^* + \alpha_2 R_*, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0. \quad (4)$$

Введем вектор $T = -P^* - P$. Уравнение $\langle Q, T \rangle = 0$ определяет в плоскости q_1, q_2 прямую, которая проходит через ноль; и весь сектор V расположен по одну сторону от этой прямой, ибо для $Q \neq 0$ хотя бы одно из скалярных произведений — $\langle Q, P \rangle$ и $-\langle Q, P^* \rangle$ не равно нулю благодаря линейной независимости векторов P и P^* . Но для $Q \in V$ согласно (3) эти скалярные произведения неотрицательны. Следовательно, для $Q \in V \setminus 0$ будет

$$\langle Q, T \rangle = -\langle Q, P \rangle - \langle Q, P^* \rangle > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{V}(X)$ класс всех рядов вида

$$f = \sum f_Q X^Q, \quad (5)$$

где целочисленные показатели степени Q лежат в секторе V . Заметим, что сумма и произведение рядов класса $\mathcal{V}(X)$ снова лежат в классе $\mathcal{V}(X)$. Если $|X|^{R^*} \rightarrow 0$ и $|X|^{R^*} \rightarrow 0$, то в силу (4) $X^Q \rightarrow 0$ для $Q \in V \setminus 0$. Поэтому ряд (5) назовем *сходящимся*, если он абсолютно сходится для некоторого $\varepsilon > 0$ на множестве

$$\mathcal{U}_V(\varepsilon) = \{X : |X|^{R^*} \leq \varepsilon, |X|^{R^*} \leq \varepsilon, |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}.$$

Замечание. Пусть ряд (5) относится к классу $\mathcal{V}$, не имеет свободного члена и сходится на множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$. Положим $\gamma(\varepsilon) = \max |f(X)|$ по $X \in \mathcal{U}_V(\varepsilon)$. Тогда $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лемма 1. Если в системе (1) f_i — сходящиеся ряды класса $\mathcal{V}(X)$, то всякая замена переменных

$$x_i = y_i(1 + h_i) \equiv y_i + y_i \sum h_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где h_i — сходящиеся ряды класса $\mathcal{V}(Y)$, переводит систему (1) в систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + y_i g_i \equiv \lambda_i y_i + y_i \sum g_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где g_i — сходящиеся ряды класса $\mathcal{V}(Y)$.

Доказательство. 1°. Если систему (1), преобразование (6) и систему (7) записать в векторной форме

$$\dot{X} = \Phi(X), \quad (8)$$

$$X = Y + \Xi(Y), \quad (9)$$

$$\dot{Y} = \Psi(Y), \quad (10)$$

то, дифференцируя равенство (9), получим

$$\dot{X} = \dot{Y} + \frac{\partial \Xi}{\partial Y} \dot{Y} = \left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y} \right) \dot{Y},$$

и, используя равенства (8), (10) и затем снова (9), получим

$$\left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y} \Psi(Y) = \Phi(Y, \Xi)\right)$$

или

$$\Psi(Y) = \left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y}\right)^{-1} \Phi(Y + \Xi). \quad (10')$$

2°. Вектор $W = (w_1, w_2)$ назовем вектором класса $\mathcal{Y}^*$, если $w_i y_i^{-1} \in \mathcal{Y}$. Например, Ξ — вектор класса $\mathcal{Y}^*$, к тому же сходящийся.

Наша задача — доказать, что Ψ — вектор класса $\mathcal{Y}^*$. Покажем сначала, что $\Phi(Y + \Xi(Y))$ — вектор класса $\mathcal{Y}^*$. Возвращаясь к записи (1) и (6), видим, что

$$\begin{aligned} \varphi_i &= x_i f_i(X) = x_i \sum f_{is} X^S = \\ &= y_i (1 + h_i) \sum f_{is} (1 + h_1)^{s_1} (1 + h_2)^{s_2} Y^S, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что для сходящегося ряда $h_i \in \mathcal{Y}$ ряд $(1 + h_i)^{s_i}$ при любом целом s_i (даже отрицательном) является сходящимся рядом класса $\mathcal{Y}$. Действительно, если $s_i > 0$, то $(1 + h_i)^{s_i}$ является многочленом от h_i и, следовательно, является сходящимся рядом класса $\mathcal{Y}$ вместе с h_i . Если же $s_i < 0$, то для $|h_i| < 1$ выражение $(1 + h_i)^{s_i}$ разлагается в сходящийся ряд по целым положительным степеням h_i , т. е. является сходящимся рядом класса $\mathcal{Y}$. Неравенства $|h_i| < 1$ для сходящихся рядов h_i будут выполнены при достаточно малом ε в множестве

$$\mathcal{U}_V(\varepsilon) = \{Y : |Y|^{R^*} \leq \varepsilon, |Y|^{R^*} \leq \varepsilon, |y_1| \leq \varepsilon, |y_2| \leq \varepsilon\}. \quad (11)$$

Поэтому произведение $Y^S (1 + h_1)^{s_1} (1 + h_2)^{s_2}$ является сходящимся рядом класса $\mathcal{Y}$, ибо $S \in V$. Следовательно, ряд

$$(1 + h_i) \sum f_{is} Y^S (1 + h_1)^{s_1} (1 + h_2)^{s_2}$$

также относится к классу $\mathcal{Y}$, т. е. $\Phi(Y + \Xi(Y))$ — вектор класса $\mathcal{Y}^*$. По замечанию перед леммой $|h_i| < 1/2$ для $Y \in \mathcal{U}_V(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$, следовательно

$$\begin{aligned} |X|^{R^*} &= |x_1|^{r_1^*} |x_2|^{r_2^*} = |Y|^{R^*} |1 + h_1|^{r_1^*} |1 + h_2|^{r_2^*} < \\ &< |Y|^{R^*} |1 - 1/2|^{r_1^*} |1 + 1/2|^{r_2^*} \leq \varepsilon 2^{-r_1^*} (3/2)^{r_2^*} = c^* \varepsilon; \end{aligned}$$

аналогично

$$|X|^{R^*} < \varepsilon (3/2)^{r_2^*} 2^{-r_1^*} = c_* \varepsilon.$$

Т. е. $X \in \mathcal{U}_V(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon \max[c^*, c_*]$. Итак, $X \in \mathcal{U}_V(\varepsilon_1)$ при $Y \in \mathcal{U}_V(\varepsilon)$. Поскольку вектор $\Phi(X)$ — сходящийся для $X \in \mathcal{U}_V(\varepsilon_1)$, то вектор $\Phi(Y + \Xi(Y))$ также сходится при $Y \in \mathcal{U}_V(\varepsilon)$ для доста-

точно малого ε . Поэтому $\Phi(Y + \Xi(Y))$ — сходящийся вектор класса $\mathcal{Y}^*$.

3°. Матрицу $A = (a_{ij})$ назовем матрицей класса $\mathcal{Y}^{**}$, если $a_{ij}y_i^{-1}y_j \in \mathcal{Y}$. Так, матрица

$$\frac{\partial \Xi}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

относится к классу $\mathcal{Y}^{**}$. Далее, имеем

$$\left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} \end{pmatrix}, \quad (11')$$

где

$$\Delta = \det \left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y}\right) = \left(1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1}\right) \left(1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2}\right) - \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1},$$

и матрица, стоящая справа, принадлежит классу $\mathcal{Y}^{**}$. Легко видеть, что Δ — сходящийся ряд класса $\mathcal{Y}$ со свободным членом 1; т. е. $\Delta = 1 + \tilde{\Delta}(Y)$. По замечанию перед леммой при $Y \in \mathcal{U}_V(\varepsilon)$ с достаточно малым ε будет $|\tilde{\Delta}| < 1$. Поэтому Δ^{-1} можно разложить в сходящийся ряд по положительным степеням $\tilde{\Delta}$, т. е. Δ^{-1} — это сходящийся ряд класса $\mathcal{Y}$. Следовательно, матрица (11') является сходящейся класса $\mathcal{Y}^{**}$.

4°. Остается заметить, что произведение $W = AZ$ матрицы A класса $\mathcal{Y}^{**}$ на вектор Z класса $\mathcal{Y}^*$ есть снова вектор класса $\mathcal{Y}^*$. Действительно, $w_i = \sum a_{ij}z_j = y_i \sum (a_{ij}y_i^{-1}y_j)(z_jy_i^{-1})$, где под знаком суммы в скобках стоят ряды класса $\mathcal{Y}$. Следовательно, произведение

$$\left(E + \frac{\partial \Xi}{\partial Y}\right)^{-1} \Phi(Y + \Xi(Y))$$

является сходящимся вектором класса $\mathcal{Y}^*$. Но это есть $\Psi(Y)$; лемма доказана.

Теперь будем рассматривать формальные ряды класса $\mathcal{Y}$, которые могут и расходиться в любом множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$. Поскольку арифметические операции и дифференцирование с формальными степенными рядами производим так же, как со сходящимися, то из леммы 1 вытекает следующее.

Если у системы (1) и преобразования (6) f_i и h_i суть формальные ряды класса $\mathcal{Y}$, то у системы (7) g_i также суть формальные ряды класса $\mathcal{Y}$. Возникает задача: привести фор-

мальную систему (1) с помощью замен (6) к наиболее простой системе (7). Ответ на эту задачу дает

Теорема 1. *Всякая формальная система (1) с помощью формальной замены (6) приводится к такой системе (7), в которой $g_{iq}=0$, если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. Здесь f_i , h_i и g_i — ряды класса $\mathcal{U}$ по своим переменным.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству основной теоремы о нормальной форме (теорема 2 п. 1.5 гл. II). Так же, как там, для коэффициентов при $y_i Y^q$ получаем равенства

$$g_{iq} + h_{iq} \langle Q, \Lambda \rangle = - \sum_{P+R=Q} h_{iP} g_{iR} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} \langle P, G_R \rangle + \\ + \text{сумма членов вида } f_{iS} h_{1P_1} \dots h_{1P_k} h_{2R_1} \dots h_{2R_l}, \quad (12)$$

где

$$S + P_1 + \dots + P_k + R_1 + \dots + R_l = Q.$$

Обозначим через c_{iq} правую часть i -го равенства (12), тогда

$$g_{iq} + h_{iq} \langle Q, \Lambda \rangle = c_{iq}.$$

Теперь упорядочим векторные индексы P , Q , R следующим образом: вектор P предшествует вектору Q , если $\langle P, T \rangle < \langle Q, T \rangle$, где вектор $T = -P^* - P_*$. Тогда для всех f_{iS} , h_{iP} , g_{iR} имеем $0 < \langle S, T \rangle$, $0 < \langle P, T \rangle$, $0 < \langle R, T \rangle$. Поэтому c_{iq} зависят лишь от таких h_{iP} и g_{iR} , у которых векторные индексы P и R предшествуют вектору Q по введенной упорядоченности. Кроме того, имеется лишь конечное число целочисленных векторов $P \in V$, предшествующих вектору Q . Последовательно по введенной упорядоченности определяем коэффициенты h_{iq} и g_{iq} , так же, как в основной теореме. Доказательство окончено.

З а м е ч а н и е. Если $\langle R_*, \Lambda \rangle = 0$, то указанное в теореме преобразование (6) можно взять таким, что $h_{iq} = 0$ для $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$; тогда $g_{iq} = f_{iq}$ для $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Т. е. в этом случае коэффициенты нормальной формы (7) находятся без вычислений: просто оставляются те члены $f_{iq} X^q$, у которых показатели Q лежат на соответствующей границе сектора V . Сама эта граница лежит на прямой L , определяемой уравнением $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а м е ч а н и я. Если точка Q расположена на границе сектора V и $Q = P + R$, где P и $R \in V$, то точки P и R лежат на той же границе сектора V . Это свойство всех выпуклых конусов. Поэтому если точка Q лежит на границе сектора V , то в равенстве (12) все векторы S , P , P_j и R_j лежат на той же границе сектора V . Т. е. все коэффициенты h_{iP} , h_{1P_1} и h_{2R_j} равны нулю, по индуктивному предположению. Следовательно, равенства (12) принимают вид

$$g_{iq} + h_{iq} \langle Q, \Lambda \rangle = f_{iq}.$$

Откуда $g_{iq} = f_{iq}$, кроме того, положим $h_{iq} = 0$.

2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ОБОБЩЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим случай, когда система (1) вещественная. Тогда Λ — вещественный вектор, и уравнение

$$\langle Q, \Lambda \rangle = 0 \quad (12')$$

определяет в плоскости q_1, q_2 прямую L . Нормализующее преобразование (6) и нормальная форма (7) также будут иметь вещественные коэффициенты. Если в исходной системе и в нормализующем преобразовании (6) ряды сходятся, то нормальную форму надо рассматривать в некотором множестве (11). Для ситуации, когда векторы R^* и R_* лежат во II и IV квадрантах соответственно, строение множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ разбиралось в § 3 гл. I. В дальнейшем будем предполагать, что у нас именно такая ситуация, и рассмотрим интегральные кривые нормальной формы в множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$, которое здесь состоит из четырех криволинейных секторов. При этом будем придерживаться той же классификации, что и раньше.

Случай а), когда вещественные решения уравнения (12') состоят из одной точки — нуля, здесь не возможен, поэтому начинаем со случая б).

б) Прямая L пересекается с сектором V только по нулю (рис. 61, $L=L(b)$). Нормальная форма есть система

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, 2; \quad (13)$$

ее интегралы суть $y_2 = c y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$. Теперь заметим, что здесь

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = -\frac{r_1^*}{r_2^*} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{p_{2*}}{p_{1*}} = -\frac{r_{1*}}{r_{2*}}.$$

Т. е. в I квадранте плоскости y_1, y_2 при $y_1 \rightarrow 0$ интегральные кривые располагаются ниже верхней границы $y_2 = \varepsilon^{1/r_2^*} y_1^{-r_1^*/r_2^*}$ множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ и выше нижней границы $y_2 = \varepsilon^{1/r_{2*}} y_1^{-r_{1*}/r_{2*}}$ этого множества (рис. 62, граница множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ в I квадранте показана пунктирной линией). Нормализующее преобразование в этом случае сходится, и у исходной системы поведение интегральных кривых в каждом секторе множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ такое же — они входят в сектор через обе границы.

в) Прямая L проходит через границу сектора V (рис. 61, $L=L(v)$) и R_* — целочисленный вектор с взаимно простыми компонентами. Нормальная форма есть система

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik} (Y^{R_*})^k = y_i g_i (Y^{R_*}), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $z = Y^{R_*}$ и $g(z) = r_{1*} g_1(z) + r_{2*} g_2(z)$. Тогда $\dot{z} = z g(z)$.

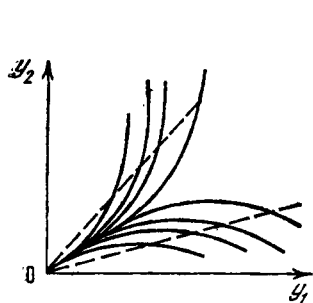


Рис. 62

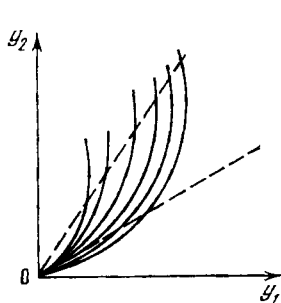


Рис. 63

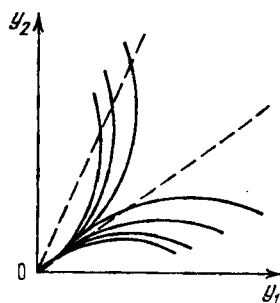


Рис. 64

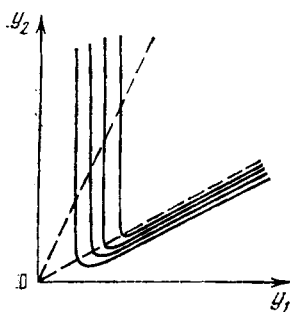


Рис. 65

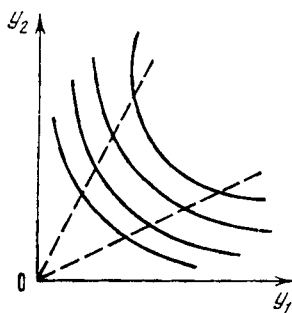


Рис. 66

Рассмотрим различные подслучаи. Если $g \equiv 0$, то интегральные кривые суть $z = \text{const}$, т. е. $y_2 = c_1 y_1^{-r_1/r_2}$, их расположение в секторе множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ показано на рис. 63. Т. е. интегральные кривые входят в сектор через верхнюю границу и затем входят в ноль, касаясь нижней границы; при этом часть кривых остается внутри сектора, а другие кривые выходят за нижнюю границу.

Пусть теперь $g \neq 0$, $g = az^k + \dots$, тогда решения суть

$$y_i = c_i \exp \int \frac{g_i dz}{zg(z)} = c_i \exp \left[-\frac{\lambda_i}{kaz^k} (1 + \dots) \right], \quad i = 1, 2;$$

надо определить их поведение для $|z| < \varepsilon$, т. е. при $z \rightarrow 0$. Если

ми чисел a и λ_i . Формальное нормализующее преобразование здесь не всегда сходится, но, видимо, существует гладкое нормализующее преобразование. Поэтому расположение интегральных кривых исходного уравнения в множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ будет такое же, как у нормальной формы.

г) Прямая L пересекает сектор V по внутренним точкам. Здесь нормальная форма есть либо система (13), либо более сложного вида. Здесь формальное нормализующее преобразование может расходиться, но всегда существует бесконечно дифференцируемое нормализующее преобразование (это выводится из результатов Стернберга [145, 146] с помощью степенных преобразований). Расположение интегральных кривых в криволинейных секторах множества $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$ показано на рис. 66. Аналогичное расположение будет для исходной системы (1).

Итак, во всех случаях установлено расположение интегральных кривых системы (1) в множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$. Для этого не требуется никаких вычислений — все определяется непосредственно по коэффициентам самой системы (1). В случаях б) и г) достаточно значений λ_1 и λ_2 , а в случае в) надо использовать еще коэффициенты f_{iq} , у которых векторы Q лежат на соответствующей границе сектора V .

Приведение к нормальной форме здесь нужно лишь для получения более точных аналитических выражений решений.

2.3. ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Здесь рассмотрим ситуацию, в некотором смысле промежуточную между ситуациями основной теоремы и второй теоремы о нормальной форме. Пусть в системе (1) правые части суть ряды по целым неотрицательным степеням x_2 и, кроме того, множество $D(F)$ целиком расположено в секторе

$$V = \{Q : Q = \alpha_1 R^* + \alpha_2 R_-, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\},$$

где векторы $R^* = (r_1^*, r_2^*)$ и $R_- = (r_{1-}, -1)$ таковы, что $r_1^* < 0 < r_2^*$, $r_{1-} > 0$ и $|r_1^*/r_2^*| < r_{1-}$. Т. е. для ряда $f_1(X)$ коэффициент $f_{1q} \neq 0$, только если вектор Q лежит в секторе

$${}_1V = \{Q : Q = \alpha_1 R^* + \alpha_2 E_1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\}.$$

Класс всех таких степенных рядов f_1 обозначим через $\mathcal{Y}(X)$. Для ряда $f_2(X)$ коэффициент $f_{2q} \neq 0$, только если вектор Q лежит либо в секторе ${}_1V$, либо на полупрямой $q_2 = -1$, $q_1 \geq r_{1-}$ (рис. 67). Класс всех таких степенных рядов f_2 обозначим через ${}_2\mathcal{Y}(X)$. Сектору ${}_1V$ в пространстве X соответствует множество

$${}_1\mathcal{U}(\varepsilon, X) = \{X : |X|^{R^*} = \varepsilon, |x_1| \leq \varepsilon\}$$

(см. рис. 33). Ряды $f_i(X) \in {}_i\mathcal{Y}(X)$ будем называть *сходящимися*, если ряды $\varphi_i = x_i f_i$ абсолютно сходятся на некотором множестве $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$.

Заметим, что сектор ${}_1V$ содержится в секторе V и множество ${}_1\mathcal{U}(\varepsilon)$ содержит в себе множество $\mathcal{U}_V(\varepsilon)$.

Лемма 2. Если в системе (1) f_i — сходящиеся ряды классов $\mathcal{P}(X)$ и в преобразовании (6) h_i — сходящиеся ряды классов $\mathcal{P}(Y)$, то в системе (7), полученной из системы (1), g_i суть сходящиеся ряды классов $\mathcal{P}(Y)$ соответственно.

Доказательство. Заметим, что ряды классов $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(X)$ являются рядами класса $\mathcal{P}(X)$, соответствующего сектору V . Применяя лемму 1, получим, что ряды $g_i(Y)$ являются сходящимися рядами класса $\mathcal{P}(Y)$. Из формулы (10') видно, что ряды $\psi_i(Y)$ содержат лишь неотрицательные степени второй координаты y_2 , ибо ряды φ_i и ξ_i обладают таким свойством. Итак, ряды ψ_i абсолютно сходятся на множестве (11) и содержат y_2 только в неотрицательных степенях. Но первое неравенство в формуле (11)

$$|Y|^{R_*} \leq \varepsilon \quad (14)$$

означает, что $|y_1|^{r_*} |y_2|^{-1} \leq \varepsilon$ или

$$|y_2| \geq \varepsilon^{-1} |y_1|^{r_*}. \quad (15)$$

Это оценка снизу на $|y_2|$. Пусть ряд $\psi = \sum \psi_Q Y^Q$ содержит y_2 только в неотрицательных степенях и абсолютно сходится в точке $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$. Тогда ряд ψ абсолютно сходится в любой точке $|y_1| = |y_1^0|$, $|y_2| \leq |y_2^0|$, ибо для такой точки Y ряд ψ мажорируется сходящимся рядом $\sum |\psi_Q| |Y^0|^Q$. Следовательно, если ряд ψ абсолютно сходится на [кривых $|y_2| = \varepsilon^{-1} |y_1|^{r_*}$, то он абсолютно сходится для всех таких Y , для которых $|y_2| \leq \varepsilon^{-1} |y_1|^{r_*}$. Т. е. область абсолютной сходимости рядов ψ_1 и ψ_2 не ограничена неравенством (15) или (14); она ограничена только остальными неравенствами в формуле (11). Итак, ряды ψ_i относятся к классам $\mathcal{P}(Y)$ и абсолютно сходятся на множестве $\mathcal{U}(\varepsilon, Y)$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к формальным рядам классов $\mathcal{P}$.

Теорема 2. Если в формальной системе (1) f_i — ряды классов $\mathcal{P}(X)$, то существует формальная замена (6), где h_i — ряды классов $\mathcal{P}(Y)$, которая приводит систему (1) к такой системе (7), у которой g_i — ряды классов $\mathcal{P}(Y)$, составленные только из резонансных членов $g_{iQ} Y^Q$ с $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$.

Доказательство аналогично доказательствам основной и второй теорем о нормальных формах (см. пп. 1.5 и 2.1 гл. II), поэтому предлагаем его в качестве упражнения.

Займемся теперь интегрированием нормальных форм в множествах $\mathcal{U}(\varepsilon, Y)$ для разных случаев.

б) Прямая L пересекается с сектором V только по нулю (рис. 67, $L = L(6)$). Нормальная форма имеет либо вид (13), либо $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + a y_1^m$.

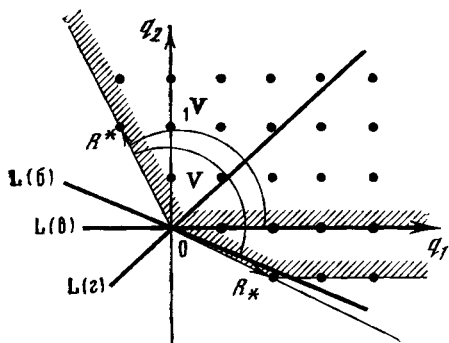


Рис. 67

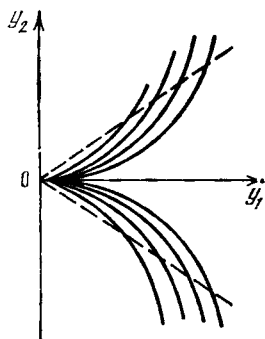


Рис. 68

В обоих случаях интегральные кривые входят в криволинейные секторы множества $\mathcal{U}(\varepsilon, Y)$ и, находясь в них, достигают нуля (рис. 68).

в) Прямая L является осью q_1 . Здесь так же, как и в ситуации основной теоремы (п. 1.5 гл. II), получаем четыре разных случая расположения (рис. 55—58).

г) Прямая L пересекает сектор V_i по внутренним точкам. В этом случае расположение интегральных кривых см. на рис. 69. Здесь в каждом криволинейном секторе множества $\mathcal{U}(\varepsilon, Y)$ только одна интегральная кривая входит в ноль (как и в случае рис. 58).

З а м е ч а н и е. Основная теорема о нормальной форме аналогична теореме 2 § 3 гл. I в том смысле, что обе теоремы дают упрощение исходной задачи по линейным членам. Вторая и третья теоремы о нормальной форме (пп. 2.1, 2.3 гл. II) соответствуют вершине ломаной Ньютона. В этом смысле они аналогичны теореме 5 п. 3.7 гл. I.

У п р а ж н е н и я. 1) В случае в) п. 2.2 гл. II при нечетном k установить расположение криволинейных секторов типа рис. 64 и 65 в различных квадрантах плоскости y_1, y_2 в зависимости от четности координат вектора R и знака отношения λ_1/a .

2) В ситуации п. 2.2 гл. II разобрать случай, когда прямая L проходит через R^* .

3) Провести доказательство теоремы 2.

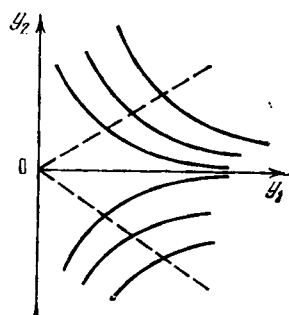


Рис. 69

§ 3. НЕЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть у системы

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, x_2), \quad \varphi_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

функции φ_i аналитичны в нуле и нуль — неэлементарная особая точка. Тогда запишем систему в виде

$$\dot{x}_i = x_i f_i = x_i \sum_j f_{ij} X^Q \quad (1)$$

и образуем множество

$$D = D(F) = \{Q : |f_{1Q}| + |f_{2Q}| \neq 0\}.$$

Очевидно, $D \subset N$. Изобразим множество D точками на плоскости q_1, q_2 и найдем выпуклую ломаную Ньютона $\hat{\Gamma}$, которая ограничивает выпуклую оболочку множества D по порядкам $P < 0$. Крайние вершины ломаной $\hat{\Gamma}$ по-прежнему обозначим Q_* и Q^* . Вершины $\Gamma_j^{(0)}$ занумеруем снизу вверх $\Gamma_1^{(0)} = Q_*, \dots, \Gamma_l^{(0)} = Q^*$. Так же занумеруем ребра.

Предлагается метод интегрирования такой системы в окрестности 0. Каждой вершине $\Gamma_j^{(0)}$ ставится в соответствие свое множество $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$. Промежутки $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ между соседними множествами $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_{j+1}^{(0)}(\varepsilon)$ приписываются ребрам $\Gamma_j^{(1)}$. Таким образом, криволинейные секторы множеств $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ заполняют всю окрестность нуля. В каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ система интегрируется с помощью приведения к нормальной форме (вообще говоря, обобщенной). Изучение системы в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ с помощью степенного преобразования сводится к исследованию нескольких особых точек другой системы. Каждая из этих особых точек проще исходных. Так что через конечное число шагов множество $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ будет разбито на конечное число подмножеств $\mathcal{U}_{jk}^{(1)}(\varepsilon)$, в каждом из которых система будет проинтегрирована с помощью нормальной формы. Останется только склеить результаты интегрирования в разных кусках $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$. Поскольку нас интересуют интегральные кривые, то в дальнейшем будем делать различные замены времени.

Запишем систему (1) в векторной форме

$$(\ln \dot{X}) = \sum F_Q X^Q = F(X).$$

Пусть $\Gamma_j^{(d)}$ — ребро или вершина ломаной $\hat{\Gamma}$ этой системы. Функцию $\hat{F}_j^{(d)}(X) = \sum F_Q X^Q$, где сумма берется только по $Q \in \Gamma_j^{(d)}$, назовем *укорочением* вектор-функции F . Так же, как и для скалярных функций f (см. § 2 гл. I), укорочение имеет свой конус $U_j^{(d)}$. Новое:

заключается только в том, что укорочение $\hat{F}_1$ векторной функции F отлично от нуля как вектор, т. е. хотя бы одна компонента вектора $\hat{F}$ не равна нулю тождественно, при этом другая компонента может быть тождественным нулем. Например, если $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1^2 + x_2^2$, то укорочение по любому порядку $P < 0$ есть $\hat{F} = (\hat{f}_1, 0)$. И здесь вторая компонента вектора $\hat{F}$ не является укорочением $\hat{f}_2$. Поэтому в дальнейшем компоненты вектора $\hat{F}$ будем обозначать $\hat{f}_i$. Каждому укорочению $\hat{F}$ соответствует *укороченная система*

$$(\ln X) = \hat{F}(X). \quad (1')$$

3.2. СЛУЧАЙ ВЕРШИНЫ

Пусть $\Gamma_j^{(0)} = \tilde{Q}$ — некоторая вершина ломаной Ньютона $\tilde{\Gamma}$ системы (1). Пусть $\Gamma_{j-1}^{(1)}$ и $\Gamma_j^{(1)}$ — ребра, прилегающие к вершине $\Gamma_j^{(0)}$, а R_{j-1} и R_j — единичные векторы на этих ребрах, причем $r_{2,j-1}$ и $r_{2,j} > 0$. Положим $R_* = -R_{j-1}$, $R^* = R_j$. Если вершина $\tilde{Q}$ — крайняя на ломаной Ньютона $\tilde{\Gamma}$, например, $\tilde{Q} = Q_*$, то возьмем $R_* = (1, 0)$; если $Q = Q^*$, то $R^* = (0, 1)$. Теперь сделаем в системе (1) сокращение на X^Q , т. е. введем новое «время» t_1 так, что $dt_1 = X^Q dt$. Тогда система (1) перейдет в систему

$$dx_i/dt_1 = x_i \sum_{Q \in \tilde{Q}} f_{iQ} X^{Q-\tilde{Q}}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

У этой системы показатели степени $Q - \tilde{Q}$ получаются из показателей степеней Q системы (1) параллельным переносом на вектор $-\tilde{Q}$. Поэтому вершине $\Gamma_j^{(0)}$ системы (1) теперь соответствует нулевой показатель в системе (2), т. е. $\Lambda = F_{\tilde{Q}}$. Все показатели степеней $Q - \tilde{Q}$ заключены в секторе V , который ограничен полупрямыми, проходящими через точки R^* и R_* (рис. 61). Т. е. система (2) удовлетворяет условиям второй теоремы о нормальной форме (п. 2.1 гл. II). По этой теореме в множестве

$$\mathcal{U}^{(0)}(\varepsilon) = \{X : |X|^{R^*} \leq \varepsilon, |X|^{R_*} \leq \varepsilon\} \quad (2')$$

существует замена переменных

$$x_i = y_i + \xi_i(Y), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

которая приводит систему (2) к нормальной форме

$$dy_i/dt_1 = y_i \sum_{\langle Q, \Lambda \rangle = 0} g_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Как было показано в § 2 гл. II, эта нормальная форма интегрируется. Решения нормальной формы (4) после замены (3) дают

решения системы (2) в множестве (2'). Поскольку интегральные кривые у систем (2) и (1) совпадают, то таким способом можно получить интегральные кривые (и решения) системы (1) с любой степенью точности в множестве (2'). Если нас интересует только расположение интегральных кривых системы (1) в окрестности нуля, то достаточно определить характер расположения интегральных кривых в множестве (2'). Как показано в § 2 гл. II, для этого зачастую не надо делать никаких вычислений — ответ виден сразу по коэффициентам системы (1). Все это общая конструкция. Для системы (1) с аналитической правой частью есть некоторая специфика, которая вносит определенные упрощения в анализ вершин и всей картины в целом. Будем различать четыре типа вершин $\tilde{Q}$.

1 тип. Вершина $\tilde{Q}$ является одной из крайних вершин Q_* или Q^* и лежит вне I квадранта, т. е. одна из координат точки $\tilde{Q}$ равна -1 . Пусть для определенности $q_2 = -1$. Тогда точка $\tilde{Q}$ входит в множество N_2 и не входит в множество N_1 . Поэтому в системе (1) коэффициент $f_{1\tilde{Q}} = 0$. Вершина $\tilde{Q} = Q_*$ лежит на нижней горизонтальной опорной прямой множества $D(F)$. Поэтому $R_* = (1, 0)$, и соответствующее множество $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ есть

$$\mathcal{U}_*(\varepsilon) = \{X : |X|^{R_*} \leq \varepsilon, |x_1| \leq \varepsilon\}. \quad (5)$$

Оно имеет такой вид, как на рис. 33. Поскольку $\Lambda = F_{\tilde{Q}} = (0, f_{2\tilde{Q}})$, то решения уравнения $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ в секторе V суть $(k, 0)$. Поскольку $\langle R_*, \Lambda \rangle = 0$, то здесь применима не только вторая теорема о нормальной форме (п. 2.1 гл. II), но и замечание к ней. Согласно этому замечанию нормальная форма (4) здесь имеет вид

$$dy_i/dt_1 = y_i \sum_{k=0}^{\infty} g_{i(k,0)} Y^{(k,0)} = y_i \sum f_{i(k,0)+\tilde{Q}} y_1^k, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Но здесь все $f_{1(k,0)+\tilde{Q}} = 0$, ибо у их векторных индексов $(k, 0) + \tilde{Q}$ вторая координата равна -1 , т. е. эти векторные индексы не лежат в множестве N_1 . Следовательно, первое уравнение системы (6) имеет вид $dy_1/dt_1 = 0$, откуда получаем, что $y_1 = \text{const}$ суть интегральные кривые нормальной формы (6). Итак, в множестве (5), соответствующем вершине первого типа, расположение интегральных кривых будет такое, как на рис. 33, т. е. в множестве $\mathcal{U}_*(\varepsilon)$ нет ни одной интегральной кривой, которая входила бы в нуль.

II тип. Вершина $\tilde{Q}$ является одной из крайних вершин Q^* или Q_* и $\tilde{Q} \geq 0$. Пусть для определенности $\tilde{Q} = Q_* \geq 0$. Тогда на плоскости q_1, q_2 вершине $\tilde{Q}$ соответствует сектор V , граничные лучи которого проходят через векторы $R^* = (r_1^*, r_2^*)$ и $R_* = (1, 0)$, где $r_1^* < 0 < r_2^*$. Для каждой точки $Q \in D(F)$ разность $Q - \tilde{Q} \in V$. Сектору V на плоскости x_1, x_2 соответствует множест-

во (5). Здесь к системе (2) применима вторая теорема о нормальной форме (п. 2.1 гл. II), причем ось x_1 является интегральной кривой. Расположение интегральных кривых в отдельном секторе множества (5) либо такое, как на рис. 68, либо — как на рис. 69, либо — как на рис. 55. Здесь возможны все случаи, перечисленные в конце п. 2.3 гл. II.

III тип. Вершина $\tilde{Q}$ не является крайней, одна из ее координат равна нулю. Пусть для определенности $q_2 = 0$. Тогда по общей конструкции этой вершине соответствуют сектор V и множество (2'). Но по конструкции п. 2.3. гл. II такой вершине можно поставить в соответствие сектор

$${}_1V = \{Q: Q = \alpha_1 R_1^* + \alpha_2 E_1; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\} \quad (7)$$

и множество

$${}_1\mathcal{U}(\varepsilon) = \{X: |X|^{R^*} \leq \varepsilon, |x_1| \leq \varepsilon\}. \quad (7')$$

При этом

$$V \supset {}_1V, \quad \mathcal{U}_V(\varepsilon) \subset {}_1\mathcal{U}(\varepsilon).$$

Строение множества (7) такое же, как у множества (5). К системе (2) в множестве (7) применима третья теорема о нормальной форме (п. 2.3 гл. II). В конце § 2 гл. II показано, что в каждом криволинейном секторе множества (7) обязательно будет хотя бы одна интегральная кривая, входящая в нуль (в случае ν она может состоять из неподвижных точек). В рассматриваемой ситуации вершина $\tilde{Q} = \Gamma_2^{(0)}$, правее ее на ломаной Ньютона лежит ребро $\Gamma_1^{(1)}$ и вершина $\Gamma_1^{(0)} = Q_*$. Заметим теперь, что множество (7) включает в себя множества $\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$ и вершине $\Gamma_1^{(0)}$. Если бы не было третьей теоремы о нормальной форме, то систему (1) пришлось бы исследовать отдельно в трех множествах $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$, $\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon)$, $\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$. Третья теорема позволяет исследовать систему (1) сразу в множестве (7'), включающем в себя указанные три множества. Т. е. соответствующее вершине $\tilde{Q}$ интегрирование в множестве (7') полностью покрывает интегрирование в секторе $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$, соответствующем вершине $Q_* = \Gamma_1^{(0)}$. Поэтому для вершины первого типа, имеющей рядом с собой вершину третьего типа, можно не выделять множество $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и не интегрировать в нем систему. Вполне достаточно интегрирования в множестве (7').

IV тип. Вершина $\tilde{Q} > 0$, которая не является крайней. Для нее нет никаких упрощений в использовании второй теоремы о нормальной форме. Множество $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ здесь состоит из четырех криволинейных секторов (рис. 31). В I квадранте плоскости x_1, x_2 сектор, соответствующий более высокой вершине, расположен выше, чем сектор, соответствующий более низкой вершине (см.

§ 3 гл. I). Как отмечено в § 2 гл. II, расположение интегральных кривых системы (1) в секторах множества $\mathcal{U}_f^{(0)}(\varepsilon)$ определяется по коэффициентам F_Q без дополнительных вычислений.

3.3. СЛУЧАЙ РЕБРА

Пусть $\Gamma_j^{(1)}$ — некоторое ребро ломаной Ньютона $\hat{\Gamma}$ системы (1). Это ребро заключено между вершинами $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$, вектор $R = R_j = (\Gamma_{j+1}^{(0)} - \Gamma_j^{(0)})/m$ — единичный на этом ребре. Множества $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_{j+1}^{(0)}(\varepsilon)$, соответствующие вершинам $\Gamma_j^{(0)}$ и $\Gamma_{j+1}^{(0)}$, ограничены неравенствами $|X|^R \leq \varepsilon$ и $|X|^{-R} \leq \varepsilon$. Поэтому ребру $\Gamma_j^{(1)}$ остается множество

$$\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon) = \{X: \varepsilon \leq |X|^{R_j} \leq \varepsilon^{-1}, |x_1| \leq \varepsilon, |x_2| \leq \varepsilon\}. \quad (8)$$

Так же, как в § 3 гл. I, для исследования системы (1) в множестве (8) сделаем степенное преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{s_1} x_2^{s_2}, \\ y_2 &= x_1^{r_1} x_2^{r_2}, \end{aligned} \quad \alpha = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

с целочисленной матрицей α , $\det \alpha = 1$. Заметим, что при $X \rightarrow 0$ в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ координата $y_2 \rightarrow \text{const} \neq 0$ и координата $y_1 \rightarrow 0$. Действительно, $s_1 r_2 = 1 + s_2 r_1$, поэтому

$$y_1^{r_2} = x_1^{s_1 r_2} x_2^{s_2 r_2} = x_1 (x_1^{r_1} x_2^{r_2})^{s_1} = x_1 y_2^{s_1}.$$

Следовательно, $y_1^{r_2} \rightarrow 0$ вместе с x_1 , ибо $y_2^{s_2} \rightarrow \text{const} \neq 0, \infty$; при этом вспомним, что $r_2 > 0$. Таким образом, расположенная около нуля часть множества $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ при степенном преобразовании (9) переходит в часть окрестности оси y_2 :

$$\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon) = \{Y: |y_1| \leq \varepsilon \leq |y_2| \leq \varepsilon^{-1}\}. \quad (10)$$

При степенном преобразовании система (1) перейдет в систему

$$(\text{In } Y) = \sum_{Q' \in \mathbb{D}'} F_{Q'} Y^{Q'} \equiv F'(Y), \quad (11)$$

ломаная $\hat{\Gamma}$ системы (1) перейдет в ломаную $\hat{\Gamma}'$ системы (11), причем ребро $\Gamma_j^{(1)}$ перейдет в вертикальное ребро $\Gamma_j^{(1)'}$. Укороченная система (1'), соответствовавшая ребру $\Gamma_j^{(1)}$, перейдет в укороченную систему

$$(\text{In } Y) = \sum_{Q' \in \mathbb{D}' \cap \Gamma_j^{(1)'}} F_{Q'} Y^{Q'} \equiv \hat{F}'(Y), \quad (12)$$

соответствующую ребру $\Gamma_j^{(1)'}$ (рис. 16). Поскольку ребро $\Gamma_j^{(1)'}$ вертикально, то у лежащих на нем точек Q одинакова координата

$q_1 = r$, т. е. $\hat{F}'(Y) = y_1^r \hat{F}'_0(y_2)$. Произведем теперь в системе (11) сокращение на максимальную степень y_1^s , чтобы из системы (11) получить систему

$$dy_i/dt_1 = y_1^{-s} y_i \hat{f}'_i(Y) = \zeta_i(Y), \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

в правые части которой координата y_1 входит только в неотрицательных степенях. Здесь $dt_1 = y_1^s dt$.

Итак, приходим к задаче: Исследовать поведение интегральных кривых системы (13) в множестве (8). При этом надо учитывать, что оси y_2 соответствует точка $x_1 = x_2 = 0$.

Для решения этой задачи надо сначала выяснить характер интегральных кривых, проходящих через конечные точки оси y_2 , отличные от нуля $y_2 = 0$. Остается заметить, что после сокращения на y_1^s укорочение (12) системы (11) перейдет в укорочение

$$dy_i/dt_1 = \zeta_i(y_1, y_2) = y_1^{-s} y_i \hat{f}'_{i0}(y_2), \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

системы (13). Здесь будем различать два типа укорочений (14).

I тип. У вектора $\hat{F}'(Y)$ вторая компонента $\hat{f}'_2(Y) \neq 0$. В этом случае $r = s$, и ось y_2 является интегральной кривой, на ней $\zeta_1(0, y_2) = 0$. Точки этой оси, в которых $\zeta_2(0, y_2) \neq 0$ являются простыми. В окрестности такой простой точки согласно теореме 1 § 1 гл. II интегральные кривые располагаются параллельно оси y_2 . Если учесть, что оси y_2 соответствует одна точка $x_1 = x_2 = 0$, то ясно, что эти интегральные кривые после преобразования (9) перейдут в такие интегральные кривые системы (1), которые не входят в особую точку. Остается исследовать окрестности всех особых точек на оси y_2 ($y_2 \neq 0, y_2 \neq \infty$).

Такие особые точки $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ находятся как корни $y_2 = y_2^0$ уравнения $\hat{f}'_{20}(y_2) = 0$. Если в такой точке $d\hat{f}'_{20}/dy_2 \neq 0$ или $\hat{f}'_{10} \neq 0$, то точка $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ является элементарной для системы (13), и ее окрестность можно исследовать с помощью приведения системы к нормальной форме. Если в этой точке $d\hat{f}'_{20}/dy_2 = 0$ и $\hat{f}'_{10}(y_2^0) = 0$, то такая точка является неэлементарной. Для исследования ее окрестности надо строить ломаную Ньютона и так далее. Но здесь особенность проще, чем исходная.

II тип $\hat{f}'_2(Y) \equiv 0$, тогда $\hat{f}'_1 \neq 0$ и $s = r + 1$. В этом случае ось y_2 не является интегральной кривой. Если $\hat{f}'_{10}(y_2^0) \neq 0$, то точка $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ — простая для системы (13) и через нее проходит одна интегральная кривая, которая не касается оси y_2 . На плоскости x_1, x_2 им соответствуют интегральные кривые, проходящие через особую точку $x_1 = x_2 = 0$. Если $\hat{f}'_{10}(y_2^0) = 0$ и $\zeta_2(0, y_2^0) \neq 0$, то точка $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ является простой для системы (13), но в

ней интегральная кривая касается оси y_2 . Для этой кривой может быть получено разложение y_1 по целым степеням $y_2 - y_2^0$ (теорема Коши), и это решение будет исследовано. Если же $\hat{f}'_{10}(y_2^0) = 0$ и $\xi_2(0, y_2^0) = 0$, то точка $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$ является особой для системы (13). Если это элементарная особая точка, то в ее окрестности систему можно проинтегрировать; если это не элементарная особая точка, то надо строить многоугольник Ньютона, разбивать окрестность на множества $\mathcal{U}'(\varepsilon)$ и т. д.

Итак, для обоих типов на оси y_2 надо выделить вещественные корни y_2^0 одного алгебраического уравнения:

$$\hat{f}'_{20}(y_2) = 0 \text{ для первого типа и}$$

$$\hat{f}'_{10}(y_2) = 0 \text{ для второго типа.}$$

Таких точек конечное число: $y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(m)}$. Каждая из них $y_1 = 0, y_2 = y_2^{(k)}$ получает свою окрестность $\mathcal{U}'_k(\varepsilon)$ на плоскости y_1, y_2 . Остальная часть множества (10) разбивается на конечное число областей $\tilde{\mathcal{U}}'_i(\varepsilon)$, не содержащих особых точек. В каждой из этих областей система интегрируется с помощью теоремы 1 § 1 гл. II. Что касается окрестностей $\mathcal{U}'_k(\varepsilon)$, то в них система (13) либо интегрируется сразу, либо посредством дальнейшего разбиения на множества $\mathcal{U}'_{ki}(\varepsilon)$. На плоскости x_1, x_2 разбиению множества (10) на куски $\mathcal{U}'_k(\varepsilon)$ и $\tilde{\mathcal{U}}'_i(\varepsilon)$ соответствует разбиение множества $\mathcal{U}'_j(\varepsilon)$ на более мелкие множества $\mathcal{U}'_{jk}(\varepsilon)$ и $\tilde{\mathcal{U}}'_{ji}(\varepsilon)$. Причем в множествах $\tilde{\mathcal{U}}'_{ji}(\varepsilon)$ система (13) (следовательно, и (1)) проинтегрирована, а в множествах $\mathcal{U}'_{jk}(\varepsilon)$ может потребоваться еще дальнейшее измельчение. Это зависит от сложности особенности. Вообще говоря, этот процесс последовательного измельчения множеств $\mathcal{U}(\varepsilon)$ и разрешения особенности может потребовать много шагов, но будет решен обязательно через конечное число шагов. Это доказывается для дифференциальных уравнений точно так же, как для аналитических уравнений в п. 2.9 гл. I с использованием понятия высоты ребра и особенности.

Замечание. Функции $\hat{f}'_{10}(y_2)$ и $\hat{f}'_{20}(y_2)$ определяют не только расположение вторичных особенностей, но и для элементарных особенностей в случае первого типа дают собственные числа $\lambda_1 = \hat{f}'_{10}(y_2)$ и $\lambda_2 = d\hat{f}'_{20}(y_2^0)/dy_2$. Поэтому эти функции во многих (но не во всех) случаях вполне определяют характер поведения интегральных кривых. Но эти функции $\hat{f}'_{10}(y_2)$ и $\hat{f}'_{20}(y_2)$ взяты из укороченной системы (12), которая получена из укороченной системы (1') в результате замены (9). Следовательно, многие свойства решений системы (1) можно узнать, используя укороченную систему (1'). Для n -мерной системы подобные исследования проводили Шестаков [128, 129], Брюно [27], Беклемишева [9].

Другой практический прием, облегчающий вычисления, заключается в том, что у аналитической системы (1) ребро $\Gamma_j^{(1)}$, расположенное целиком вне I квадранта плоскости q_1, q_2 , можно не исследовать. Вершина $\tilde{Q}$ этого ребра, находящаяся на границе первого квадранта, будет вершиной третьего типа; соответствующее ей множество $(7')$ содержит в себе множество $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$, соответствующее ребру $\Gamma_j^{(1)}$.

3.4. СИНТЕЗ

Итак, окрестность неэлементарной особой точки $X=0$ системы (1) разбита на конечное число множеств $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$. В каждом таком множестве введены свои координаты y_1, y_2 , и в этих координатах система (1) проинтегрирована. Вернувшись от координат Y к координатам X , получим решения системы (1) в каждом куске $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ отдельно. Остается только объединить их вместе, и система (1) будет проинтегрирована во всей окрестности. Но здесь возникает новое затруднение. Переход от переменных X к переменным Y , в которых система интегрируется, осуществляется с помощью бесконечных рядов, поэтому в реальной ситуации можно вычислять эти преобразования лишь приближенно (до членов некоторой конечной степени). В результате решения X в куске $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ будут получены приближенно. И хотя в принципе решения в каждом куске $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ можно вычислить со сколь угодно высокой точностью, сложность этих вычислений стремительно растет вместе с точностью. Для склеивания решений в соседних компонентах множества $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ надо, чтобы приближенные решения были достаточно близки к истинным решениям. В разных случаях для этого требуются вычисления разного объема.

Остановимся на задаче выяснения топологической картины расположения интегральных кривых в окрестности неэлементарной особой точки. Будем различать два случая:

1) Среди кусков множеств $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ имеется хотя бы один, в котором существует интегральная кривая, входящая в особую точку. В этом случае достаточно получить разбиение окрестности $\mathcal{U}$ на куски $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ и проинтегрировать систему (1) в каждом куске в своих координатах Y . Склеивание соседних кусков с топологической точностью не вызывает затруднений.

2) Ни в одном из множеств $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ нет интегральной кривой, входящей в особую точку. Интегральные кривые переходят из одной компоненты множеств $\mathcal{U}_{ijk...l}(\varepsilon)$ в другую, и ни в одной из компонент не задерживаются. В этом случае интегральные кривые закручиваются вокруг особой точки. При этом они либо являются замкнутыми кривыми (случай центра), либо приближаются к особой точке как спирали (случай фокуса). Задача отличия центра от фокуса является, вообще говоря, весьма сложной. Ей посвящен следующий параграф.

3.5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим теперь несколько примеров, относящихся к первому случаю.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - x_1 x_2 = x_1 (x_1^{-1} x_2 + x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= a x_1^2 + 3 x_1 x_2 - 5 x_2^2 = x_2 (a x_1^2 x_2^{-1} + 3 x_1 - 5 x_2),\end{aligned}$$

где параметр $a \neq 0$. Здесь

$$\begin{aligned}Q_1 &= (-1, 1), & Q_2 &= (1, 0), & Q_3 &= (0, 1), & Q_4 &= (2, -1); \\ F_{Q_1} &= (1, 0), & F_{Q_2} &= (1, 3), & F_{Q_3} &= (-1, -5), & F_{Q_4} &= (0, a).\end{aligned}$$

Ломаная Ньютона $\hat{\Gamma}$ состоит из одного ребра $\Gamma_1^{(1)}$ и двух вершин $\Gamma_1^{(0)} = Q_4$ и $\Gamma_2^{(0)} = Q_1$ (рис. 70). Вершины $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$ относятся к первому типу: расположение множеств $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$ и вид интегральных кривых приближенно изображены на рис. 71. Оставшееся множество $\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon)$ ограничено неравенствами $\varepsilon \leq |X|^R \leq \varepsilon^{-1}$, где $R = Q_1 - Q_4 = (-3, 2)$ — единичный вектор на ребре $\Gamma_1^{(1)}$. Найдем к вектору R такой вектор $S = (s_1, s_2)$, чтобы $s_1 r_2 - s_2 r_1 = 1$. Возьмем $S = (2, -1)$ и сделаем степенное преобразование

$$y_1 = x_1^2 x_2^{-1}, \quad y_2 = x_1^{-3} x_2^2;$$

обратное будет

$$x_1 = y_1^2 y_2, \quad x_2 = y_1^3 y_2^2.$$

Исходная система перейдет в систему

$$(\ln \dot{y}_1) = 2y_1 y_2 - y_1^2 y_2 + 3y_1^3 y_2^2 - a y_1,$$

$$(\ln \dot{y}_2) = -3y_1 y_2 + 3y_1^2 y_2 - 7y_1^3 y_2^2 + 2a y_1;$$

у укороченной системы компонента $\hat{f}_2' = -3y_1 y_2 + 2a y_1$ не равна тождественно нулю (рис. 72). Следовательно, это тип I по классификации п. 3.3 гл. II. Сокращая на y_1 , получим систему

$$dy_1/dt_1 = 2y_1 y_2 - y_1^2 y_2 + 3y_1^3 y_2^2 - a y_1,$$

$$dy_2/dt_1 = -3y_2^2 + 3y_1 y_2^2 - 7y_1^2 y_2^2 + 2a y_2.$$

Здесь ось y_2 является интегральной кривой и особые точки $y_2 = y_2^0 \neq 0$ на ней определяются из уравнения

$$\hat{f}_{20}'(y_2) = -3y_2 + 2a = 0.$$

Получаем одну особую точку $y_2^0 = 2a/3$. Через остальные точки $y_1 = 0$, $y_2 \neq y_2^0$, 0 проходит единственная интегральная кривая последней системы — ось y_2 . Для изучения окрестности особой точки

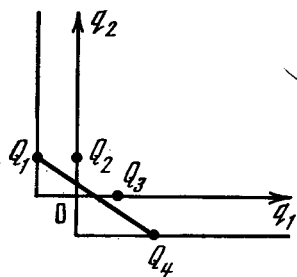


Рис. 70

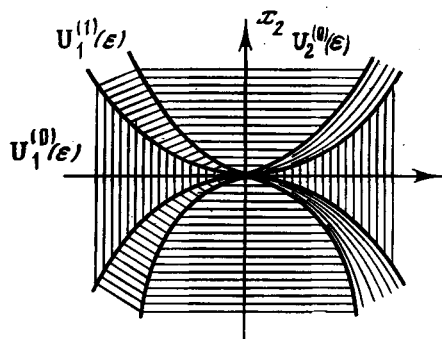


Рис. 71

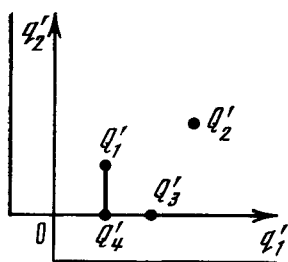


Рис. 72

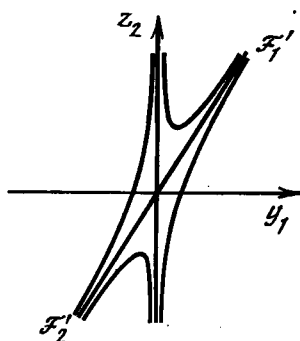


Рис. 73

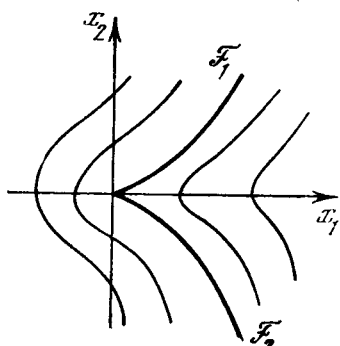


Рис. 74

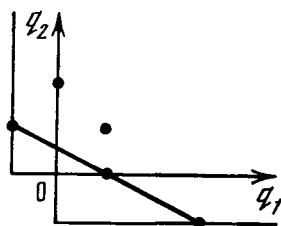


Рис. 75

$y_2 = y_2^0$, сделаем параллельный перенос

$$y_2 = y_2^0 + z_2 = \frac{2}{3}a + z_2,$$

тогда получим

$$\begin{aligned} dy_1/dt_1 &= \frac{1}{3}ay_1 + 2y_1z_2 - y_1^3(\frac{2}{3}a + z_2) + 3y_1^3(\frac{2}{3}a + z_2)^2, \\ dz_2/dt_1 &= -2az_2 - 3z_2^3 + 3y_1(\frac{2}{3}a + z_2)^2 - 7y_1^3(\frac{2}{3}a + z_2)^3 = \\ &= -2az_2 + \frac{4}{3}a^2y_1 + 4ay_1z_2 + 3y_1z_2^2 - 3z_2^3 - 7y_1^2(\frac{2}{3}a + z_2)^3. \end{aligned}$$

Матрица линейной части этой системы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} & 0 \\ \frac{4}{3}a^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = \frac{1}{3}a$, $\lambda_2 = -2a$. При любом вещественном $a \neq 0$ получаем $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 = -\frac{1}{6}$. Особая точка — седло, и через особую точку проходят точно две интегральные кривые. Одна из них — ось z_2 , вторая касается собственного вектора B_2 матрицы A . Для вектора B_2 составляем уравнение $AB_2 = \lambda_2 B_2$, откуда $B_2 = (7, 4a)$ или $z_2 = \frac{4}{7}ay_1$. Итак, единственная пересекающаяся ось y_2 интегральная кривая есть (рис. 73) $z_2 = \frac{4}{7}ay_1 + \dots$ или $y_2 = \frac{2}{3}a + \frac{4}{7}ay_1 + \dots$. Она состоит из двух полуветвей $\mathcal{F}_1'(y_1 > 0)$ и $\mathcal{F}_2'(y_1 < 0)$. В исходных переменных получим

$$x_1 = \frac{2}{3}ay_1^2 + \frac{4}{7}ay_1^3 + \dots, \quad x_2 = \frac{4}{9}a^2y_1^3 + \frac{16}{21}ay_1^4 + \dots$$

Это единственная интегральная кривая, входящая в особую точку $x_1 = x_2 = 0$, она состоит из двух полуветвей $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ (для $a > 0$ они изображены на рис. 71 и 74). Остальные интегральные кривые в множестве $\mathcal{U}_i^{(1)}(\varepsilon)$ расположены, как показано на рис. 71. Поэтому общая картина будет, как на рис. 74 (при $a > 0$).

Отметим, что для построения рис. 74 достаточно укороченной системы, соответствующей ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Действительно, степенное преобразование, значения y_2^0 и λ_1, λ_2 были получены из коэффициентов укороченной системы. Только первый член разложения z_2 по y_1 на ветвях $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ был получен с привлечением дальнейших членов исходной системы, которые не входили в укорочение. И это дало вторые члены в разложениях x_1 и x_2 по y_1 на ветвях $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Для картинки эти вторые члены в нашем случае не существенны, расположение полуветвей $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ вполне определяется первыми членами

$$x_1 = \frac{2}{3}ay_1^2 + \dots, \quad x_2 = \frac{4}{9}a^2y_1^3 + \dots$$

Итак, в данном примере, чтобы выяснить расположение интегральных кривых, достаточно было бы проделать все выкладки

(степенное преобразование и нахождение корня y_2^0) с укороченной системой. Это значительно упростило бы вычисления. Поэтому можно рекомендовать следующий вычислительный прием при исследовании множества $\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon)$, соответствующего ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Вместо исходной системы взять укороченную систему и проделать с ней необходимые преобразования. И только если по коэффициентам укороченной системы нельзя судить о характере решений (это будет для типа II и для типа I, если $\lambda_1=0$ у особой точки на оси y_2), надо проделать те же преобразования с остальными членами исходной системы.

Пример 2.

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1^3 + 5x_1x_2^2 = x_1(x_1^{-1}x_2 + ax_1 + 5x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 4x_2^3 = x_2(-2x_1^3x_2^{-1} + 3x_1x_2 - 4x_2^2).$$

Ломаная $\hat{\Gamma}$ (рис. 75) состоит из одного ребра и двух вершин. Обе вершины первого типа, поэтому расположение их множеств $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и интегральных кривых в них примерно такое же, как в примере 1. Для ребра единичный вектор есть $R = (-2, 1)$ и укороченная система есть

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^{-1}x_2 + ax_1), \quad \dot{x}_2 = -2x_1^3.$$

Для вектора R находим $S = (1, 0)$ и вводим новые переменные $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1^{-2}x_2$; обратная замена есть $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1^2y_2$. Укороченная система перейдет в систему

$$\dot{y}_1 = y_1^2y_2 + ay_1^3, \quad \dot{y}_2 = -2y_1 - 2ay_1y_2 - 2y_1y_2^2.$$

Полагая здесь $dt_1 = y_1 dt$, получим

$$dy_1/dt_1 = y_1y_2 + ay_1 \equiv g_1y_1, \quad dy_2/dt_1 = -2 - 2ay_2 - 2y_2^2 \equiv g_2.$$

Для особых точек y_2^0 на оси $y_1 = 0$ получаем уравнение

$$-1/2g_2 = y_2^2 + ay_2 + 1 = 0,$$

откуда находим

$$y_2^0 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}.$$

Если $|a| < 2$, то вещественных корней нет и в множестве $\mathcal{U}_1^{(1)}(\varepsilon)$ нет интегральных кривых, входящих в особую точку. Поскольку таких кривых нет и в множествах $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$, то здесь возникает проблема различения центра и фокуса. В случае рассматриваемой системы эта проблема может быть решена, но здесь не будем этого делать. Если $|a| > 2$, то имеем два вещественных корня.

Возьмем для определенности $a = -4$. Тогда $y_2^0 = 2 \pm \sqrt{3}$. Собственные числа для этих точек суть

$$\lambda_1 = g_1(y_2^0) = a + y_2^0 = -2 \pm \sqrt{3} < 0,$$

$$\lambda_2 = dg_2(y_2^0)/dy_2 = -2(a + 2y_2^0) = \mp 4\sqrt{3}.$$

Поэтому для корня $y_2^0 = 2 + \sqrt{3}$ имеем $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 > 0$, и особая точка $y_1 = 0$, $y_2^0 = 2 + \sqrt{3}$ является узлом. Для корня $y_2^0 = 2 - \sqrt{3}$ будет $\lambda < 0$, следовательно, особая точка $y_1 = 0$, $y_2 = 2 - \sqrt{3}$ является седлом. Примерное расположение интегральных кривых вблизи оси y_2 показано на рис. 76. Возвращаясь к исходным переменным, получим рис. 77.

Если $|a| = 2$, то оба корня y_2^0 совпадают. Пусть для определенности $a = -2$, тогда $y_2^0 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. Положим $z_2 = y_2 - y_2^0 = y_2 - 1$. Для исследования полной системы в окрестности точки $y_1 = 0$, $z_2 = 0$ надо найти нормальную форму. Но в полной системе в записи

$$dy_1/dt_1 = y_1 \sum h_{1Q} y_1^{q_1} z_2^{q_2}, \quad dz_2/dt_1 = z_2 \sum h_{2Q} y_1^{q_1} z_2^{q_2}$$

у всех членов $q_1 \geq 0$, а члены с $q_1 = 0$ получаются из укороченной системы. С другой стороны, $\Lambda = (-1, 0)$, поэтому в нормальной форме

$$dw_i/dt_1 = w_i \sum g_{iQ} W^Q, \quad i = 1, 2$$

будут только члены с $q_1 = 0$. Но согласно замечанию после второй теоремы о нормальной форме, здесь будет $g_{i(0, q_2)} = h_{i(0, q_2)}$, т. е. нормальная форма есть в точности укороченная система. Итак, исследование полной системы в окрестности особой точки $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ сводится к исследованию в этой окрестности укороченной системы

$$dy_1/dt_1 = -y_1 + y_1 z_2, \quad dz_2/dt_1 = -2z_2,$$

ее интеграл есть (рис. 78)

$$\ln |y_1| = -\frac{1}{2z_2} - \frac{1}{2} \ln |z_2| + c.$$

В переменных x_1 , x_2 получаем рис. 77, только теперь есть лишь ветвь $\mathcal{F}_1$.

Пример 3.

$$\dot{x}_1 = 4x_2^3 + x_1 x_2 - 2x_1^3 = x_1(4x_1^{-1}x_2 + x_2 - 2x_1),$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 + 2x_1 x_2 + 2x_1^3 = x_2(x_2 + 2x_1 + 2x_1^3 x_2^{-1}).$$

Ломаная Ньютона (рис. 79) состоит из трех вершин и двух ребер $\Gamma_1^{(1)} \supset Q_4$, Q_3 и $\Gamma_2^{(1)} \supset Q_3$, Q_2 , Q_1 . При этом $R_1 = (-2, 1)$, $R_2 = (-1, 1)$.

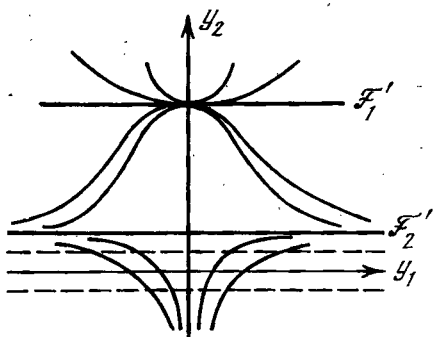


Рис. 76

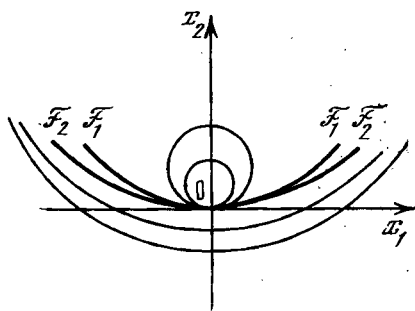


Рис. 77

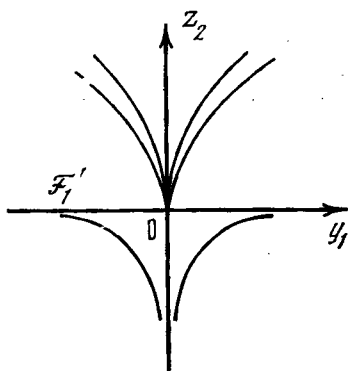


Рис. 78

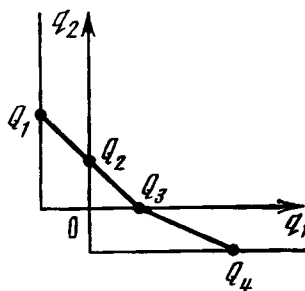


Рис. 79

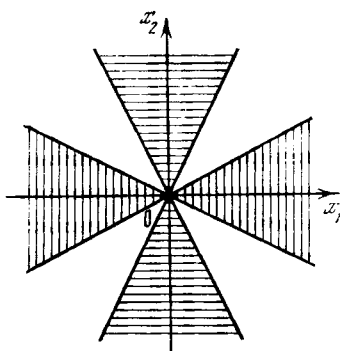


Рис. 80

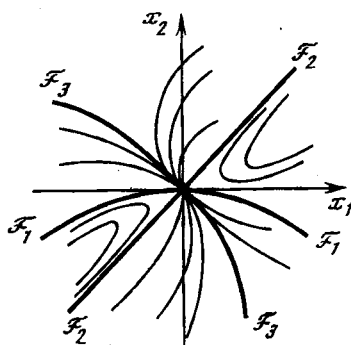


Рис. 81

Вершины $\Gamma_1^{(0)} = Q_4$ и $\Gamma_3^{(0)} = Q_1$ относятся к первому типу, и расположение интегральных [кривых в их множествах $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_3^{(0)}(\varepsilon)$ тривиально (рис. 80), но вершина $\Gamma_2^{(0)} = Q_3$ относится к третьему типу и ее множество ${}_1\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$ содержит в себе множества $\mathcal{U}_1^{(0)}(\varepsilon)$ и $\mathcal{U}_3^{(0)}(\varepsilon)$, относящиеся к вершине $\Gamma_1^{(0)} = Q_4$ и ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Для вершины $\Gamma_2^{(0)} = Q_3$ имеем $\tilde{R}_* = (1, 0)$, $R^* = R_3$, $\Lambda = F_{Q_3} = (-2, 2)$. Поскольку скалярные произведения $\langle \tilde{R}_*, \Lambda \rangle = -2$ и $\langle R^*, \Lambda \rangle = 4$ имеют разные знаки, то прямая L пересекает сектор ${}_1V$ по внутренним точкам. Это случай 2) п. 2.3 гл. II; расположение интегральных кривых в криволинейных секторах множества ${}_1\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$ такое же, как на рис. 69. Чтобы уточнить расположение единственной интегральной кривой, проходящей через нуль, воспользуемся ребром $\Gamma_1^{(1)}$. Здесь нужно сделать степенное преобразование и найти неподвижную точку на вертикальной оси. Вместо этого будем искать для решения разложение x_2 в ряд по степеням x_1 (т. е. вместо аналога второго метода разрешения алгебраических кривых применим аналог первого метода). Поскольку $R_1 = (-2, 1)$, то $\gamma_1 = 2$, и для укороченной системы (соответствующей ребру $\Gamma_1^{(1)}$)

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3, \quad \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_1^3$$

надо найти решение вида $x_2 = bx_1^2$. Запишем эту систему как одно уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2 + x_1^3}{x_1}.$$

Подставляя в него $x_2 = bx_1^2$, получаем для b уравнение $2b = -(b+1)$, откуда $b = -1/3$. Следовательно, единственная проходящая через нуль интегральная кривая в множестве ${}_1\mathcal{U}_2^{(0)}(\varepsilon)$ имеет разложение

$$x_2 = -1/3 x_1^2 + \dots$$

Чтобы разобраться в решениях, относящихся к ребру $\Gamma_2^{(1)}$, сделаем преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1^{-1}x_2.$$

Получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1(4y_1y_2^2 + y_1y_2 - 2y_1) = y_1^2(4y_2^2 + y_2 - 2), \\ \dot{y}_2 &= y_2(-4y_1y_2^2 + 4y_1 + 2y_1^2y_2^{-1}) = y_1y_2(-4y_2^2 + 4 + 2y_1y_2^{-1}). \end{aligned}$$

Для неподвижных точек $y_1 = 0$, $y_2 = y_2^0$ получаем уравнение $y_2^2 = 1$, откуда $y_2^0 = \pm 1$. Собственные числа в этих точках суть $\lambda_1 = 2 \pm 1$, $\lambda_2 = \pm 6$, т. е. точка с $y_2^0 = 1$ является седлом (через нее проходит единственная интегральная кривая $y_2 = 1 + \dots$), а точка с $y_2^0 = -1$ является узлом (через нее проходит бесконечно много

интегральных кривых $y_2 = -1 + \dots$). Следовательно, есть одна кривая $\mathcal{F}_2(x_2 = x_1 + \dots)$ и бесконечно много кривых $\mathcal{F}_3(x_2 = -x_1 + \dots)$ (рис. 81).

Упражнения 1. Выяснить расположение интегральных кривых в окрестности нуля для систем:

- 1) $\dot{x} = y - x^2 + 4y^2$,
 $\dot{y} = axy + 3y^2 + x^4$, $a = -1, -2, -3, -4$;
- 2) $\dot{x} = x^3$,
 $\dot{y} = x^4 + x^2 + x^2y + 2xy + y^2$;
- 3) $\dot{x} = xy$,
 $\dot{y} = x^2 - y^2$;
- 4) система примера 1 при $a = 0$.

3.6. СРАВНЕНИЕ С МЕТОДОМ ФРОММЕРА

Фроммер [119] предложил метод исследования интегральных кривых в окрестности неэлементарной особой точки. Его метод, хотя и отличается техническими деталями, по существу имеет много общего с локальным методом. Фроммер использует аналог ломаной Ньютона (п. 1.7 гл. I), разрешение особенности на элементарные (аналогично первому методу в п. 2.8 гл. I) и разбиение окрестности особой точки на криволинейные куски («области Фроммера»). Области Фроммера во многом аналогичны кускам множеств $\mathcal{U}_j^{(d)}(e)$. Но вот исследование интегральных кривых внутри этих областей в методе Фроммера производится иначе, чем в локальном методе. Дело в том, что Фроммер не владеет понятием нормальной формы. Вместо вычисления нормальной формы Фроммер доказывает ряд теорем, устанавливающих зависимость между поведением правых частей системы в области Фроммера (и на ее границе) и поведением интегральных кривых в этой области. В тех случаях, когда расположение интегральных кривых в области определяется далекими членами нормальной формы, в методе Фроммера приходится использовать все более тонкие свойства правых частей. Это породило обширную литературу (см., например: Немыцкий и Степанов [94], Куклес [75, 76], Андреев [1], Андреев и Глейзер [2]).

Метод Фроммера предпочтительнее метода нормальной формы только в следующей ситуации. Если в исходной системе правые части не аналитические, а имеют только конечное число производных, и если соответствующие отрезки разложений Тейлора недостаточны для вычисления определяющего члена в нормальной форме.

Отметим, что локальный метод исследования окрестности сложной особой точки состоит из последовательности алгебраич-

ческих операций. Эту последовательность операций можно запрограммировать и делать соответствующие вычисления на ЭВМ (см. Березовская и Крейцер [16]).

§ 4. О РАЗЛИЧИЕНИИ ЦЕНТРА И ФОКУСА

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть у вещественной аналитической системы

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

ни в одном из множеств $\mathcal{U}_f^{(d)}(\varepsilon)$, соответствующих вершинам и ребрам ломаной Ньютона Γ , нет интегральных кривых, входящих в особую точку $X=0$. В этом случае интегральные кривые в окрестности $\mathcal{U}$ либо являются замкнутыми (случай центра), либо суть спирали, выходящие из особой точки (случай фокуса). Настоящий параграф посвящен методам исследования таких ситуаций и различения случаев центра и фокуса. Очевидно, вместо системы (1) можно рассматривать и одно уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi_2(X)}{\varphi_1(X)}. \quad (2)$$

При этом основное внимание уделено простейшему случаю, когда ломаная $\hat{\Gamma}$ содержит одно ребро и его единичный вектор $R=(-1, 1)$. В этом случае в укороченной системе

$$\dot{x}_i = \hat{\varphi}_i(X), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$\hat{\varphi}_i(X)$ — однородные многочлены нечетной степени m . В последнем пункте этого параграфа обсуждаются другие случаи.

Итак, на протяжении этого параграфа (кроме последнего пункта) будем считать, что:

1) разложения для φ_i начинаются с однородных форм $\hat{\varphi}_i(X)$ нечетной степени m ;

2) у системы (1) отсутствуют вещественные исключительные направления, т. е.

$$x_1 \hat{\varphi}_2(X) - x_2 \hat{\varphi}_1(X) \neq 0 \text{ для } X \neq 0, X \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

4.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введем полярные координаты r, θ :

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Тогда система (1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r} (-\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta), \end{aligned}$$

эквивалентную уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r(\varphi_1 \cos \theta + \varphi_2 \sin \theta)}{-\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta}.$$

Благодаря условию (4) знаменатель правой части не обращается в ноль для $r \neq 0$. Следовательно, это уравнение можно записать в виде

$$dr/d\theta = f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k f_k(\theta), \quad (5)$$

где f_k — 2π -периодические функции, аналитические в некоторой полосе $|\operatorname{Im} \theta| < \varepsilon$.

Рассмотрим укороченное уравнение

$$dr/d\theta = r f_1(\theta). \quad (6)$$

Разделяя переменные, легко получаем его решение

$$r = c \exp \int f_1(\theta) d\theta. \quad (7)$$

Выделим среднее значение a функции $f_1(\theta)$:

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta; \quad (8)$$

тогда решение (7) можно записать в виде

$$r = c g(\theta) \exp a\theta, \quad (9)$$

где

$$g(\theta) = \exp \int_0^{\theta} (f_1(\theta_1) - a) d\theta_1; \quad (10)$$

это 2π -периодическая функция, не имеющая вещественных нулей.

Если $a \neq 0$, то решения (9) суть спирали (фокус), если $a = 0$, то они образуют замкнутые кривые (центр). Но все это относится к укороченному уравнению (6). Чтобы исследовать полное уравнение (5), введем «обобщенный полярный радиус» $\tilde{r} = rg^{-1}(\theta)$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$d\tilde{r}/d\theta = \tilde{a}\tilde{r} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{r}^k \tilde{f}_k(\theta), \quad (11)$$

где

$$\tilde{f}_k(\theta) = f_k g^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (12)$$

суть аналитические 2π -периодические функции, и ряд сходится для достаточно малых $\tilde{r}$. Попробуем упростить уравнение (11)

посредством формальной замены радиус-вектора:

$$\tilde{r} = \rho + \sum_{k=2}^{\infty} h_k(\theta) \rho^k \equiv \rho + h, \quad (13)$$

где $h_k(\theta)$ — аналитические 2π -периодические функции, но ряд может расходиться для любого $\rho \neq 0$.

Теорема 1. *Существует такая формальная замена (13), которая приводит уравнение (11) к виду*

$$d\rho/d\theta = a\rho + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \rho^k \equiv a\rho + b(\rho), \quad (14)$$

где все $b_k = 0$, если $a \neq 0$.

Доказательство. Дифференцируя равенство (13) по θ и подставляя выражения для производных (11) и (14), получим равенство

$$a\tilde{r} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{f}_k \tilde{r}^k = \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} k h_k \rho^{k-1}\right) (a\rho + b(\rho)) + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \frac{dh_k}{d\theta}.$$

Заменяя здесь $\tilde{r}$ на ρ по формуле (13) и приводя подобные, получим тождество по ρ, θ :

$$ah + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{f}_k (\rho + h)^k = b + a \sum_{k=2}^{\infty} k h_k \rho^k + b \sum_{k=2}^{\infty} k h_k \rho^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \rho^k \frac{dh_k}{d\theta}.$$

Это тождество будет выполнено, если в разных его частях равны коэффициенты при ρ^k для $k=2, 3, \dots$. Для этих коэффициентов получаем уравнения

$$ah_k + \{\tilde{f}\}_k = b_k + a \sum_{l+j=k+1} b_{lj} h_l + dh_k/d\theta, \quad (15)$$

где через $\{\tilde{f}\}_k$ обозначен коэффициент при ρ^k в ряду $\sum \tilde{f}_l (\rho + h)^l$. Положим

$$c_k(\theta) = \{\tilde{f}\}_k - \sum_{l+j=k+1} b_{lj} h_l; \quad (16)$$

очевидно, $c_k(\theta)$ будет 2π -периодической функцией, являющейся полиномом от h_j, b_j и f_j с индексами $j < k$. Запишем уравнение (15) в виде

$$dh_k/d\theta = a(1-k)h_k - b_k + c_k. \quad (17)$$

Надо показать, что уравнение (17) имеет периодическое решение h_k и соответствующую константу b_k . Тогда индукцией по k доказывается утверждение теоремы.

Если $a=0$, то

$$h_k = -b_k \theta + \int c_k(\theta) d\theta, \quad (18)$$

и функция $h_k(\theta)$ будет периодической, если в качестве b_k взять среднее значение функции c_k :

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_k(\theta) d\theta. \quad (19)$$

Если $a \neq 0$, то удобнее работать с рядами Фурье. Пусть

$$c_k = c_k^0 + \sum_{l=1}^{\infty} (c_{kl}^* \cos l\theta + c_{kl}^{**} \sin l\theta),$$

$$h_k = h_k^0 + \sum_{l=1}^{\infty} (h_{kl}^* \cos l\theta + h_{kl}^{**} \sin l\theta).$$

Уравнение (17) с $b_k=0$ будет удовлетворено, если совпадают коэффициенты при $\cos l\theta$ и $\sin l\theta$ в обоих его частях. Получаем систему уравнений для коэффициентов h_{kl} :

$$\begin{cases} a(1-k)h_k^0 + c_k^0 = 0; \\ \begin{cases} lh_{kl}^{**} = a(1-k)h_{kl}^* + c_{kl}^*, \\ -lh_{kl}^* = a(1-k)h_{kl}^{**} + c_{kl}^{**}, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Последняя система для каждого l имеет единственное решение, поскольку ее определитель равен $a^2(k-1)^2 + l^2$. У коэффициентов h_{kl}^* и h_{kl}^{**} скорость роста по l такая же, как у коэффициентов c_{kl}^* и c_{kl}^{**} . Поэтому функция h_k аналитична в той же полосе $|\operatorname{Im} \theta| < \varepsilon$, в которой аналитична функция $c_k(\theta)$. Теорема доказана.

Пример 1. Для уравнения (5) в случае $a=0$ вычислим константы b_2 и b_3 . Согласно (16), (12) и (19) имеем

$$c_2 = \tilde{f}_2 = f_2 g,$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2 g d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \exp \left(\int_0^\theta f_1(\theta_1) d\theta_1 \right) d\theta.$$

Аналогично получим

$$c_3 = \tilde{f}_3 + \tilde{f}_2 2h_2 - 2b_2 h_2 = f_3 g^2 + 2h_2 (f_2 g - b_2),$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_3 d\theta,$$

где согласно (18)

$$h_2(\theta) = \int_0^\theta (f_2 g - b_2) d\theta.$$

4.3. ИЗУЧЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

В предыдущем пункте было показано, что введением полярных координат и последующей их заменой уравнение (1) приводится к нормальной форме (14). Рассмотрим разные случаи.

1) $a \neq 0$, нормальная форма (14) есть уравнение $\dot{\rho} = a\rho$. Это случай грубого фокуса, он сохраняется при любых «возмущениях» системы (1), если порядок возмущения больше, чем m . В этом случае нормализующее преобразование сходится (см. Брюно [31]).

2) $a = 0$, $b(\rho) \neq 0$. В этом случае решения уравнения (14) суть спирали

$$\theta = \int \frac{d\rho}{b(\rho)} = - \frac{1}{(n-1)b_n \rho^{n-1}} (1 + \dots),$$

где b_n — первый ненулевой коэффициент в ряду $b(\rho) = \sum b_k \rho^k$. В теореме 3 § 2 гл. III показано, что посредством замены

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \tilde{\rho}^k$$

уравнение (14) можно привести к полиномиальной форме

$$d\tilde{\rho}/d\theta = b_n \tilde{\rho}^n + \tilde{b}_{2n-1} \tilde{\rho}^{2n-1}.$$

Это случай негрубого фокуса (ср. п. 1.11 гл. II). Нормализующее преобразование здесь, как правило, расходится (см. Брюно [31], Осипов [101]). Но существует гладкое нормализующее преобразование (Бибиков [19, 20] и Токарев [117a]).

3) $a = 0$, $b(\rho) \equiv 0$. В этом случае решения уравнения (14) суть концентрические окружности $\rho = \text{const}$, т. е. особая точка является центром. Нормализующее преобразование будет сходящимся (см. Брюно [31]).

Заметим, что переход от декартовых координат x_1, x_2 к полярным r, θ соответствует раздуванию особой точки $X=0$ в инвариантную окружность $r=0$. Затем использовался метод изучения решений вблизи инвариантного замкнутого решения, не содержащего особых точек. Специфика исходной системы (1) была забыта.

4.4. О ВЫЧИСЛИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Эта специфика сказывается, в частности, в том, что в уравнении (5) функции $f_k(\theta)$ являются рациональными функциями от $\cos \theta$ и $\sin \theta$; они являются даже однородными функциями этих аргументов $(k-1)$ -го измерения. Поэтому и согласно (8) величина a будет алгебраической функцией от коэффициентов многочленов φ_i (см. Хинчин [122, § 65]). Но величины b_k (если $a=0$)

будут и в этом случае трансцендентными функциями от этих коэффициентов. Например, рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \hat{\varphi}_i(X) + \psi_i(X), \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где $\hat{\varphi}_i$ и ψ_i — однородные многочлены степеней m и $m+2$ соответственно и $a=0$. Для нее в разложении (5) $f_2=0$. Поэтому и согласно формулам примера 1 имеем

$$h_2 = c_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad (21)$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3 g^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(\theta) \exp\left(2 \int_0^\theta f_1(\theta_1) d\theta_1\right) d\theta.$$

Здесь коэффициенты многочленов $\hat{\varphi}_i$ входят в f_1 и стоят в показателе степени e , т. е. участвуют в формуле (21) не алгебраическим образом. В частности, условия центра $b_k=0$, $k=2, 3, \dots$ не являются алгебраическими условиями на коэффициенты исходной системы (1). Напомним, что для элементарной особой точки коэффициенты нормальной формы суть многочлены от коэффициентов исходной системы, и там условия центра всегда являются алгебраическими условиями на коэффициенты исходной системы.

В связи с этим отметим утверждение Арнольда [4], что случай центра всегда выделяется алгебраическими условиями на коэффициенты исходной системы (1). В свете вышесказанного это утверждение справедливо для элементарной особой точки и не верно для неэлементарной. Ильяшенко [68] дал строгое доказательство неалгебраичности условий центра. Он рассмотрел такую систему (20), у которой $m=3$ и коэффициенты форм $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ образуют пятипараметрическое семейство.

Условия центра будут неалгебраическими только для коэффициентов форм $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$. Если эти коэффициенты фиксированы, то условия центра будут алгебраическими для остальных коэффициентов системы (1), ибо они не входят в экспоненту в формуле (21) (см. Ильяшенко [68]). По-видимому, это свойство сохраняется и в том случае, когда коэффициенты форм $\hat{\varphi}_i$ не фиксированы, но образуют семейство с малым числом параметров. Интересно было бы найти точную границу числа параметров, при котором условия центра остаются алгебраическими. Из доказательства Ильяшенко [68] следует только, что эта граница не превосходит четырех, но, может быть, она еще меньше?

4.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УКОРОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ (3) И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ a

Положим $u = x_1^{-1} x_2$, тогда система (3) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}(\ln \dot{x}_1) &= x_1^{m-1} \hat{\varphi}_1(1, u), \\ (\ln u) &= x_1^{m-1} [\hat{\varphi}_2(1, u) u^{-1} - \hat{\varphi}_1(1, u)].\end{aligned}$$

Этой системе соответствует уравнение

$$\frac{d \ln x_1}{du} = \frac{\hat{\varphi}_1(1, u)}{\hat{\varphi}_2(1, u) - \hat{\varphi}_1(1, u) u} \equiv \delta(u). \quad (22)$$

Благодаря условию (4) знаменатель правой части не обращается в ноль для вещественных u и является многочленом степени $m+1$. Степень числителя не выше m . Разложим правую часть уравнения (22) в сумму простых дробей

$$\delta(u) = \sum_k \sum_{l=1}^{l_k} \left(\frac{\alpha_{kl}}{(u - \beta_k)^l} + \frac{\bar{\alpha}_{kl}}{(u - \bar{\beta}_k)^l} \right), \quad (23)$$

где β_k и $\bar{\beta}_k$ — корни уравнения

$$\hat{\varphi}_2(1, u) - u \hat{\varphi}_1(1, u) = 0$$

кратности l_k , так что $2 \sum_k l_k = m+1$. Будем считать, что $\text{Im } \beta_k > 0$.

Из (22) имеем

$$\ln x_1 = \int \delta(u) du,$$

где интеграл берется вдоль вещественной оси. Используя разложение (23), легко выразить этот интеграл через элементарные функции: логарифм, арктангенс и рациональные дроби (см. Хинчин [122, §§ 60, 61]). Из-за громоздкости здесь не будем выписывать этого интеграла в общем виде. Вычислим лишь изменение значения x_1 на интегральной кривой при одном обходе вокруг точки $X=0$. Одному обходу вокруг этой точки соответствует двукратный обход по вещественной оси в комплексной плоскости u . Следовательно,

$$\ln x_1 - \ln x_1^0 = 2 \int_{\gamma} \delta(u) du = 2\pi a,$$

где интеграл понимается в смысле Коши и γ — замкнутый контур, соответствующий вещественной оси. Согласно теории аналитических функций вычисление такого интеграла сводится к нахождению вычетов функции $\delta(u)$ (см. Привалов [104, гл. 7]). Согласно (23)

$$2 \int_{\gamma} \delta(u) du = 2\pi i \sum_k (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_{k1}) = -4\pi \sum_k \text{Im } \alpha_{k1}.$$

Поэтому

$$a = -2 \sum_k \operatorname{Im} \alpha_{k1}. \quad (24)$$

Пример 2. Рассмотрим однородную систему

$$x_1 = -x_1 x_2^2 - x_2^3 \equiv \varphi_1, \quad (25)$$

$$x_2 = \omega^2 x_1^2 + (1 + \omega^2) x_1 x_2^2 - x_2^3 \equiv \varphi_2.$$

Для нее свойство (4) выполнено, ибо многочлен

$$x_1 \varphi_2 - x_2 \varphi_1 = \omega^2 x_1^4 + (1 + \omega^2) x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$

не имеет ненулевых вещественных корней. Уравнение (22) есть

$$\frac{d \ln x_1}{du} = \frac{-u^2 - u^3}{u^4 + (1 + \omega^2) u^2 + \omega^2} = \delta(u). \quad (26)$$

Корни знаменателя суть $\beta_1 = i = \bar{\beta}_3$, $\beta_2 = i\omega = \bar{\beta}_4$. Если $\omega \neq \pm 1$, то все корни простые. Будем считать, что

$$\omega > 0, \quad \omega \neq 1, \quad (27)$$

тогда разложение (23) есть

$$\delta(u) = \frac{\alpha_1}{u-i} + \frac{\bar{\alpha}_1}{u+i} + \frac{\alpha_2}{u-i\omega} + \frac{\bar{\alpha}_2}{u+i\omega}.$$

Приводя это выражение к общему знаменателю и сравнивая числитель с числителем в (26), получим систему линейных уравнений для коэффициентов α_1 , $\bar{\alpha}_1$, α_2 , $\bar{\alpha}_2$. Из этой системы находим, что

$$\alpha_1 = \frac{1-i}{\omega^2-1}, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega^2}{\omega^2-1} \left(1 - \frac{i}{\omega}\right).$$

Выпишем интеграл уравнения (26)

$$\ln x_1 = \operatorname{Re} \alpha_1 \ln(1+u^2) - \operatorname{Im} \alpha_1 \operatorname{arctg} u + \\ + \operatorname{Re} \alpha_2 \ln(1+\omega^{-2}u^2) - \operatorname{Im} \alpha_2 \operatorname{arctg} \frac{u}{\omega} + c.$$

Согласно (24) имеем

$$a = -2(\operatorname{Im} \alpha_1 + \operatorname{Im} \alpha_2) = -2 \left(-\frac{1}{\omega^2-1} + \frac{\omega}{\omega^2-1} \right) = \\ = -2 \frac{\omega-1}{\omega^2-1} = -\frac{2}{\omega+1}.$$

Следовательно, при условии (27) интегральные кривые системы (25) образуют фокус. Согласно теореме 1 он сохранится, если в

правые части системы (25) добавить любые члены выше третьего порядка.

Упражнение 1. Вычислить величину a для системы (25) при $\omega=1$ и выписать интеграл в явном виде.

4.6. НОРМАЛИЗАЦИЯ В КОМПЛЕКСНЫХ КООРДИНАТАХ

Введем комплексные координаты

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_1 - ix_2, \quad (28)$$

т. е.

$$x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \quad x_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2).$$

Вещественным x_1, x_2 соответствуют комплексно-сопряженные координаты z_1, z_2 : $z_2 = \bar{z}_1$. Система (1) перейдет в систему

$$\dot{z}_1 = \varphi_1 + i\varphi_2 = \varphi(z_1, z_2), \quad (29)$$

$$\dot{z}_2 = \varphi_1 - i\varphi_2 = \bar{\varphi}(z_2, z_1).$$

Сделаем степенное преобразование

$$v = z_2 z_1^{-1}. \quad (30)$$

Тогда система (29) перейдет в систему

$$\dot{z}_1 = \varphi(z_1, z_1 v),$$

$$\dot{v} = v(z_2^{-1} \bar{\varphi}(z_2, z_1) - \varphi(z_1, z_2) z_1^{-1}),$$

которой соответствует уравнение

$$\frac{dz_1}{dv} = \frac{z_1 \varphi}{\bar{\varphi}(z_1 v, z_1) - v \varphi(z_1, z_1 v)} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(v) z_1^k, \quad (31)$$

где $\xi_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{kl} v^l$ суть ряды Лорана, показатели k, l — целые.

Это уравнение можно приводить к нормальной форме посредством замен

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(v) w^k = \sum_{k=1}^{\infty} w^k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \zeta_{kl} v^l. \quad (32)$$

После замен (28) и (30) особая точка $X=0$ раздуется в единичную окружность $|v|=1$, $z_1=0$, и обходу вокруг точки $X=0$ на плоскости R_0^2 соответствует двукратный обход этой окружности. Ряды Лорана $\xi_k(v)$ и $\zeta_k(v)$ сходятся в некотором кольце $1-\varepsilon < |v| < 1+\varepsilon$.

Комплексные координаты следующим образом связаны с полярными координатами: $z_1 = r e^{i\theta}$, $v = e^{-2i\theta}$. Ряды Лорана по v есть в точности ряды Фурье по 2θ . Поэтому для укороченного уравнения имеем

$$\frac{d \ln z_1}{d \ln v} = \frac{d \ln r + i d\theta}{-2i d\theta} = i \frac{dr}{2d\theta} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2} i + \tilde{g}(v),$$

где $\tilde{g}(v)$ — ряд Лорана без свободного члена. Стандартным образом доказываем, что преобразованием (32) уравнение (31) приводится к нормальной форме

$$\frac{d \ln w}{d \ln v} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{kl} v^l w^k,$$

содержащей только резонансные члены, для которых

$$k\lambda + l = 0, \quad (33)$$

где $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2} i$ (см. Брюно [31, § 11; 30]).

Если $a \neq 0$, то уравнение (33) имеет только тривиальное вещественное решение $k=l=0$, и нормальная форма линейна

$$\frac{d \ln w}{d \ln v} = \lambda.$$

Если $a=0$, то целочисленные решения уравнения (33) имеют вид $k=2l$, т. е. нормальная форма есть

$$\frac{d \ln w}{d \ln v} = -\frac{1}{2} + \sum \gamma_l v^l w^{2l}. \quad (34)$$

Чтобы сохранить вещественность, надо для z_2 делать сопряженное к (32) преобразование $z_2 \rightarrow \bar{w}_2$. Тогда $w = \rho e^{i\theta}$ и

$$v^l w^{2l} = \rho^{2l},$$

и из уравнения (34) получаем нормальную форму

$$-\frac{d \ln \rho}{2i d\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \rho^{2l},$$

которая должна совпадать с нормальной формой (14). Следовательно, в нормальной форме (14)

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четно,} \\ -2i \gamma_{(k-1)/2}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Т. е. правая часть нормальной формы (14) содержит лишь нечетные степени ρ .

4.7. КЛАССИФИКАЦИЯ

Здесь будем придерживаться следующей классификации случаев, в которых возникает проблема различения центра и фокуса для системы (1):

1. Ломаная Ньютона $\hat{\Gamma}$ содержит лишь одно ребро $\Gamma_1^{(1)}$, и у его единичного вектора $R = (r_1, r_2)$ обе координаты r_1 и r_2 — нечетные числа.

2. Ломаная $\hat{\Gamma}$ содержит только одно ребро $\Gamma_1^{(1)}$, и у вектора R одна из координат четная.

3. Ломаная $\hat{\Gamma}$ содержит более одного ребра.

Ниже последовательно обсуждаются эти случаи.

1. После введения новых координат y_1, y_2 по формулам

$$x_1 = y_1^n, \quad x_2 = y_2^m,$$

где $m = |r_1|$, $n = |r_2|$, и замены времени $dt = y_1^{n-1} y_2^{m-1} d\tau$ система (1) перейдет в систему

$$dy_1/d\tau = y_2^{m-1} \varphi_1(y_1^n, y_2^m),$$

$$dy_2/d\tau = y_1^{n-1} \varphi_2(y_1^n, y_2^m).$$

У этой системы укорочения правых частей суть однородные многочлены и для нее выполнено свойство (4). Анализ таких систем посвящены предыдущие пункты. Ляпунов [86, пп. 9—20] изучал относящиеся сюда случаи с $R = (n, -1)$, вводя новые специальные функции.

2. В этом случае укороченная система всегда имеет центр, ибо ее интегральные кривые симметричны относительно одной из координатных осей. Действительно, если число r_1 — четно, то укороченная система переходит в себя при замене знака у x_1 . Этот случай сводится к случаю, разобранным в пп. 4.1—4.3 гл. II, посредством замены

$$x_1 = u^n, \quad x_2 = \frac{(v + \sqrt{u^2 + v^2})^{2m} - u^{2m}}{2(v + \sqrt{u^2 + v^2})^m},$$

где $m = |r_1|$, $n = |r_2|$. Переходя к полярным координатам r, θ ($u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$), получим такое уравнение (5), которое обладает всеми нужными свойствами. По теореме 1 оно приводится к нормальной форме (14) с $a = 0$.

Ляпунов [86, пп. 9—20] рассмотрел относящийся сюда случай с $R = (n, -1)$, используя специальные функции. В частности, в пункте 19 он вычислил величину b_2 в нормальной форме. Оказалось, что она алгебраически зависит от коэффициентов правых частей. По-видимому, это следствие того, что коэффициенты укорочения зависят лишь от одного параметра.

3. Для таких случаев не исследовано пока ни одного примера. Общий подход локального метода, заключающийся в инте-

гировании системы (1) отдельно в каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ и последующей склейке, может дать здесь ответ. Но для этого пока недостаточно разработаны вопросы склеивания решений из разных множеств $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ (синтез). Этот случай в какой-то степени похож на задачу об исследовании окрестности замкнутой интегральной кривой, содержащей на себе одну или несколько особых точек. Исследование подобных ситуаций — актуальная задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Похожие задачи с большим числом переменных возникают в небесной механике. Например, сюда можно отнести отыскание периодических решений второго вида в ограниченной задаче трех тел

З а м е ч а н и е. Имеется много работ, в которых выводятся условия центра для тех или других частных случаев (см., например, Садовский [107а, 107б]).

У п р а ж н е н и е 2. Выяснить, фокус или центр будет у системы примера 2 п. 3.5 гл. II при $|a| < 2$.

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ n ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. НОРМАЛИЗУЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой главе рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неподвижной точки. С помощью параллельного переноса неподвижную точку всегда можно поместить в начало координат. Итак, рассматривается система

$$\dot{X} = AX + \Phi(X), \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор, A — квадратная матрица порядка n , вектор-функция Φ — аналитична в точке $X=0$, и ее ряд Тейлора не содержит свободных и линейных членов. Вообще говоря, исходные координаты X не являются наиболее удобными для изучения свойств решений системы (1) вблизи неподвижной точки $X=0$. Возникает вопрос: нельзя ли упростить систему (1) посредством обратимой замены координат, оставляющей неподвижную точку на месте? Т. е.: к какой более простой системе

$$\dot{Y} = CY + \Psi(Y) \quad (2)$$

можно привести систему (1) заменой координат

$$X = BY + \Xi(Y), \quad (3)$$

переводящей точку $X=0$ в точку $Y=0$ и обратимой в этой точке? При этом можно рассматривать замены (3), относящиеся к разным классам: формальные, аналитические, гладкие и т. д. Здесь рассмотрим лишь формальные и аналитические замены координат (3), где B — неособая матрица и Ξ — степенные ряды без свободных и линейных членов. Поясним это. Всякая аналитическая в точке $X=0$ функция $f(X)$ разлагается в этой точке в степенной ряд (ряд Тейлора)

$$f(X) = \sum f_Q X^Q, \quad (3')$$

где $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$. Этот ряд абсолютно сходится в некоторой окрестности $|x_i| < \rho$ ($i=1, \dots, n$), и в этой ок-

рестности сумма ряда совпадает с функцией $f(X)$. При этом коэффициенты допускают оценку сверху

$$|f_Q| < c\rho^{-(q_1+\dots+q_n)}, \quad (4)$$

где c — некоторая константа. Если коэффициенты степенного ряда (3') не допускают оценки вида (4) ни при каких положительных ρ и c , то этот ряд расходится в любой окрестности точки $X=0$, и, вообще говоря, неясно, какую функцию ему можно поставить в соответствие. Степенные ряды, о сходимости которых ничего не предполагается, называются формальными. К помощи формальных степенных рядов зачастую прибегают при отыскании аналитических решений для тех или других задач. При этом сначала находят формальное решение в виде степенного ряда, а затем определяют область, в которой этот ряд сходится и представляет аналитическую функцию. Отыскание решения в классе формальных степенных рядов можно рассматривать как самостоятельную задачу. Даже в тех случаях, когда эти ряды расходятся, они могут быть рядами Тейлора бесконечно дифференцируемых функций. Арифметические операции, дифференцирование и подстановка ряда в ряд для формальных степенных рядов производятся так же, как для сходящихся.

Итак, сначала (в § 1 гл. III) рассмотрим задачу об упрощении системы (1) с помощью формальных замен координат (3). Затем (в § 3 гл. III) исследуем их сходимость.

При этом, прежде чем упрощать нелинейные части системы (1), надо сперва упростить ее линейную часть посредством линейной замены переменных:

$$X=BY. \quad (5)$$

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Сначала кратко напомним о жордановых матрицах. Клеткой Жордана называется квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma & \lambda_j \end{pmatrix},$$

где на главной диагонали стоит одно и то же число λ_j и все элементы одного ряда ниже диагонали равны $\sigma \neq 0$; остальные элементы равны нулю. Жордановой матрицей называется клеточно-диагональная матрица

$$J = \{J_1, \dots, J_s\},$$

в которой на главной диагонали стоят клетки Жордана $J_1, \dots, J_s$, а все элементы вне этих клеток равны нулю. Во всех клетках число σ одинаково.

Как известно (см. Гантмахер [58]), всякая матрица A подобна некоторой жордановой матрице J , т. е. существует такая неособая матрица B , что $J=B^{-1}AB$. Матрицу J называют жордановой нормальной формой матрицы A ; на главной диагонали матрицы J стоят собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A , число же σ может быть произвольным, отличным от нуля.

Поскольку всякая жорданова матрица $C=(c_{ij})$ обладает следующими двумя свойствами:

- а) является нижней треугольной, т. е. $c_{ij}=0$, если $i < j$;
- б) $c_{ij}=0$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$, где $\lambda_i=c_{ii}$ — элементы главной диагонали,

то всякая матрица A подобна матрице C с этими свойствами.

Теперь заметим, что преобразование (5) переводит систему (1) в систему (2), в которой матрица C подобна матрице A :

$$C=B^{-1}AB.$$

Поэтому всегда можно привести систему (1) к системе (2), где матрица C обладает свойствами а) и б). В дальнейшем изложении будем считать, что такое линейное преобразование уже сделано, и в системе (1) матрица $A=(a_{ij})$ уже обладает свойствами а) и б).

1.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ

НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Теперь систему (1) будем изучать при формальных нелинейных заменах (3), где B — единичная матрица. Такая замена переводит систему (1) в систему (2), в которой $C \neq A$. Обозначим через $\Lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ вектор, образованный из элементов главной диагонали матрицы A . Положим

$$\psi_j = y_j g_j(Y) \equiv y_j \sum_{Q \in N_j} g_{jQ} Y^Q, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где $Q=(q_1, \dots, q_n)$, $Y^Q = y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$. Поскольку $y_j g_j$ — степенные ряды без свободных членов, то

$$N_j = \{\text{целочисленные } Q : q_i \geq -1, q_n \geq 0 \ (k \neq j), \|Q\| \geq 0\},$$

где $\|Q\| = q_1 + \dots + q_n$. Обозначим $N = N_1 \cup \dots \cup N_n$.

Формальная система (2) называется *нормальной формой*, если 1) матрица C обладает свойствами а) и б); 2) при записи (6) все $g_{jQ}=0$ для $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, т. е.

$$\psi_j = y_j \sum_{\langle Q, \Lambda \rangle = 0} g_{jQ} Y^Q, \quad j = 1, \dots, n.$$

Те члены $y_j g_{jQ} Y^Q$ в разложениях (6), для которых $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, будем называть *резонансными*. Нормальная форма — это система (2), правые части которой содержат только резонансные члены.

На протяжении этой главы используются следующие обозначения

$$\varphi_i(X) = x_i f_i = x_i \sum f_{iq} X^q,$$

$$\psi_i(Y) = y_i g_i = y_i \sum g_{iq} Y^q,$$

$$\xi_i(Y) = y_i h_i = y_i \sum h_{iq} Y^q,$$

$$\eta_i(Z) = z_i d_i = z_i \sum d_{iq} Z^q.$$

Значки с одной части этих равенств переносятся на другую. Например: $\tilde{\psi}_i = y_i \tilde{g}_i$ и т. д.,

$$F_Q = (f_{1Q}, \dots, f_{nQ}), \quad F = (f_1, \dots, f_n) \equiv \sum_Q F_Q X^Q,$$

аналогично определяются G и H . При этом (если не оговорено противное) φ_i относятся к произвольной системе, ψ_i — к нормальной форме, ξ_i — к нормализующему преобразованию.

Теорема 1. *Существует формальное преобразование*

$$x_i = y_i + \xi_i(Y), \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

формальной системы

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{j>1} a_{ij} x_j + \varphi_i(X), \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

в такую формальную систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{j>1} a_{ij} y_j + \psi_i(Y), \quad i=1, \dots, n, \quad (9)$$

что $g_{iq}=0$, если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, причем h_{iq} для $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ можно задать произвольно, тогда остальные h_{iq} и g_{iq} определяются однозначно.

Здесь ξ_i , φ_i , ψ_i — степенные ряды, не содержащие членов ниже второй степени.

Доказательство. Преобразование (7) переводит (8) в (9), если выполнены формальные равенства рядов по Y :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y_i + \xi_i)}{\partial y_j} \left(\lambda_j y_j + \sum_{k>j} a_{jk} y_k + \psi_j \right) &= \lambda_i y_i + \lambda_i \xi_i + \\ &+ \sum_{j>1} a_{ij} y_j + \sum_{j>1} a_{ij} \xi_j + \varphi_i(Y + \Xi), \quad i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Эти равенства получаются из системы (8), если X выразить через Y по формулам (7) и затем $\dot{y}_i$ — по формулам (9). Раскры-

вая скобки, приводя подобные и перенося некоторые члены из левой части в правую, получаем

$$y_i g_i + y_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -h_i \sum_{i>j} a_{ij} y_j - h_i y_i g_i - y_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial y_j} \sum_{j>k} a_{jk} y_k - \\ - y_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial y_j} y_j g_j + \sum_{i>j} a_{ij} y_j h_j + \varphi_i(y_1 + y_1 h_1, \dots, y_n + y_n h_n), \\ i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Выписав коэффициенты при $y_i Y^Q$ в i -м равенстве (10), получим

$$g_{iQ} + h_{iQ} \langle Q, \Lambda \rangle = - \sum_{i>j} h_{iQ-E_j+E_i} a_{ij} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} g_{iR} - \\ - \sum_{j=1}^n \sum_{j>k} h_{iQ-E_k+E_j} (q_j + 1) a_{jk} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} \sum_{j=1}^n p_j g_{iR} + \\ + \sum_{i>j} a_{ij} h_{jQ-E_j+E_i} + \{\varphi_i\}_Q, \quad Q \in N_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь и далее E_j обозначает j -й юрт и $\{\varphi_i\}_Q$ — коэффициент при $y_i Y^Q$ в ряду $\varphi_i(Y + \Xi)$. Система равенств (11) эквивалентна системе (10), так как, когда Q пробегает N_i , произведение $y_i Y^Q$ пробегает все произведения неотрицательных степеней $y_1, \dots, y_n$.

Множество n -мерных действительных векторов вполне упорядочивается соотношением: вектор P предшествует вектору Q , если положительна первая ненулевая из последовательных разностей: $\|Q\| - \|P\|$, $q_1 - p_1, \dots, q_{n-1} - p_{n-1}$, где обозначено $\|Q\| = q_1 + \dots + q_n$. Очевидно, что каждому $Q \in N$ предшествует лишь конечное число векторов из N . Легко заметить, что в правую часть (11) входят только такие h_{iP} и g_{iR} , что векторы P и R предшествуют вектору Q . Это справедливо для 1-го, 3-го и 5-го слагаемых в правой части (11), так как вектор $Q - E_j + E_i$ с $j < i$ предшествует вектору Q , и для 2-го и 4-го слагаемых, так как там в индексы входят только такие P и R , что $\|P\| + \|R\| = \|Q\|$, $\|P\|, \|R\| > 0$, поэтому $\|P\|, \|R\| < \|Q\|$. Наконец, $\{\varphi_i\}_Q$ содержит лишь такие h_{jP} , что $\|P\| < \|Q\|$, ибо ряд $\varphi_i(X)$ без линейных членов.

Равенства (11) выполнены, если $\|Q\| = 0$, так как равенства (10) не содержат линейных членов. Равенства (11) для $\|Q\| > 0$ будут выполнены, если положить

$$g_{iQ} = 0, \quad h_{iQ} = \langle Q, \Lambda \rangle^{-1} c_{iQ} \quad \text{для } \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0;$$

$$g_{iQ} = c_{iQ}, \quad h_{iQ} \text{ — произвольно для } \langle Q, \Lambda \rangle = 0; \quad Q \in N_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь c_{iQ} обозначает правую часть равенств (11). Таким образом, в указанном выше порядке по Q определяются g_{iQ} и h_{iQ} ($i = 1, \dots, n$) в соответствии с утверждением теоремы.

Нормальную форму можно ввести и для неавтономных систем. Если зависимость от времени периодическая или квазипериодическая, то приведение такой системы к нормальной форме соответствует приведению к нормальной форме автономной системы в окрестности периодического решения или семейства условно-периодических решений (см. § 4 гл. III и Брюно [31, § 11]). Нормализацию общих неавтономных систем рассмотрели Костин [72, 73], Сибуя [144].

1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Как видно из теоремы 1, нормальная форма не однозначно определяется исходной системой. Пусть некоторая система (8) приводится одним преобразованием к нормальной форме (9) и другим преобразованием к нормальной форме

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sum_{t>j} \tilde{a}_{ij} z_j + \tilde{\psi}_i(Z), \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Тогда суперпозиция одного прямого и одного обратного преобразований переводит нормальную форму (9) в нормальную форму (12). Поэтому, изучив все преобразования этого последнего типа, будем знать и все преобразования исходной системы к нормальным формам.

Теорема 2. Если преобразование

$$y_i = \eta_i(Z), \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

переводит нормальную форму (9) в нормальную форму (12), то $d_{iQ} = 0$ для $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Точно так же, как там получаем систему равенств, связывающих $g, \tilde{g}, d$:

$$\begin{aligned} d_{iQ} \langle Q, \Lambda \rangle = & - \sum_{i>j} d_{iQ-E_j+E_i} \tilde{a}_{ij} - \sum_{P+R=Q} d_{iP} \tilde{g}_{iR} - \\ & - \sum_{j=1}^n \sum_{i>k} d_{iQ-E_k+E_j} (q_j + 1) a_{jk} - \sum_{P+R=Q} h_{iP} \sum_{j=1}^n p_j \tilde{g}_{iR} + \\ & + \sum_{i>j} a_{ij} h_{iQ-E_j+E_i} + \{\psi_i\}_Q, \quad Q \in N_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Вводим такую же, как в доказательстве теоремы 1, полную упорядоченность векторных индексов и замечаем, что в правую часть (14) входят только такие d_{iP} , что P предшествует вектору Q . Докажем теперь индукцией по упорядоченным индексам, что

$$d_{iP} = 0, \text{ если } \langle P, \Lambda \rangle \neq 0. \quad (15)$$

Наименьшим $P \in N$ при введенной упорядоченности является $P = -E_n - E_1$. Этот вектор входит только в N_1 и не входит в осталь-

ные N_i . Для него правая часть равенств (14) аннулируется, и они принимают вид $d_{iE_n-E_i}\langle E_n-E_i, \Lambda \rangle = 0$. Откуда следует (15) для наименьшего P . Пусть теперь (15) выполнено для всех P , предшествующих вектору $Q \in N$, и пусть $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. Покажем, что в этом случае правые части равенств (14) обращаются в нуль. Так как матрицы линейной части систем (8), (13) обладают свойством б), то $a_{jk} \neq 0$, только если $\lambda_j = \lambda_k$, т. е. $\langle E_j, \Lambda \rangle = \langle E_k, \Lambda \rangle$, но тогда $\langle Q - E_k + E_j, \Lambda \rangle = \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$ и $d_{jQ-E_k+E_j} = 0$ по индуктивному предположению. Поэтому аннулируется 1-е, 3-е и 5-е слагаемые в правой части (14). При $P+R=Q$ произведение $d_{iP}\tilde{g}_{iR} = 0$, так как $\langle P, \Lambda \rangle + \langle R, \Lambda \rangle = \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, т. е. хотя бы одно слагаемое в последней сумме не нуль и, следовательно, хотя бы один из сомножителей $d_{iP}\tilde{g}_{iR}$ равен нулю. Поэтому аннулируются 2-е и 4-е слагаемые в правой части (14). Остается показать, что равен нулю коэффициент при $y_i Y^q$ в ряду

$$\begin{aligned} y_i d_i g_i (y_1 d_1, \dots, y_n d_n) &\equiv y_i d_i \sum_S g_{iS} Y^S d_1^{s_1} \dots d_n^{s_n} \equiv \\ &\equiv y_i \sum_S g_{iS} Y^S d_1^{t_1} \dots d_n^{t_n}, \quad t_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что этот коэффициент есть сумма всех таких произведений

$$g_{iS} d_{1P_1} \dots d_{nP_r}, \quad (16)$$

для которых $S + P_1 + \dots + P_r = Q$. Так как $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$ и $\langle S, \Lambda \rangle = 0$, то $\langle P_j, \Lambda \rangle \neq 0$ хотя бы для одного P_j . В произведении (16) все P_j предшествуют Q , и согласно индуктивному предположению тогда соответствующий множитель в (16) равен нулю. Значит, член $\{\psi_i\}_Q$ также аннулируется и получаем $d_{iQ}\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Следовательно, $d_{iQ} = 0$, если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. Теорема доказана.

Пример 1. В связи с теоремой 2 возникает вопрос: нельзя ли дальше упрощать нормальную форму посредством преобразований из теоремы 2? Здесь показано, что нельзя.

Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= m x_n + \psi(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned} \quad (17)$$

где ψ — однородный многочлен степени $m > 1$, является нормальной формой. Здесь $\Lambda = (1, 1, \dots, 1, m)$, и уравнение

$$\langle Q, \Lambda \rangle \equiv q_1 + \dots + q_{n-1} + q_n m = 0 \quad (18)$$

имеет решения $Q \in N$ только двух типов:

$$I. q_n = 0, Q = E_i - E_j, \quad i, j = 1, \dots, n-1;$$

II. $q_n = -1$, $q_1 + \dots + q_{n-1} = m$, $q_1, \dots, q_{n-1} \geq 0$.

Записав систему (17) в форме (8)

$$\dot{x}_i = 1x_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{x}_n = x_n \left(m + \sum_{q_1 + \dots + q_{n-1} = m} g_{n(q_1, \dots, q_{n-1})} x_1^{q_1} \dots x_{n-1}^{q_{n-1}} \right),$$

видим, что (18) выполнено. Согласно теореме 2, все преобразования, переводящие систему (11) в другие нормальные формы, имеют вид

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (19)$$

$$x_n = c y_n + \xi(y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $c \det(c_{ij}) \neq 0$, ξ — однородный многочлен степени m . Преобразование (19) переводит систему (17) в систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{y}_n &= c^{-1} \dot{x}_n - c^{-1} \dot{\xi} = c^{-1} m x_n + c^{-1} \psi - c^{-1} m \xi = \\ &= m y_n + c^{-1} m \xi + c^{-1} \psi(x_1, \dots, x_{n-1}) - c^{-1} m \xi = \\ &= m y_n + \tilde{\psi}(y_1, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь была использована формула Эйлера для однородной функции ξ . Система (20) отличается от системы (17) только однородным многочленом

$$\tilde{\psi}(y_1, \dots, y_{n-1}) = c^{-1} \psi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

который получается из полинома ψ в результате линейного преобразования

$$x_i = c^{-1/m} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Поэтому вопрос об отыскании полной системы инвариантов системы (17) относительно формальных преобразований сводится к задаче нахождения полной системы инвариантов $(n-1)$ -арной формы степени m относительно линейных преобразований. То же самое о приведении к каноническому виду. Поскольку об алгебраических инвариантах в общем случае известно довольно мало (см. Гуревич [61]), то теорема 1 является наилучшим возможным в настоящее время общим результатом об упрощении системы (8) формальными преобразованиями. Поэтому были введены нормальные формы, которые не дают ни полной классификации, ни полной системы инвариантов; нормальность же в них проявляется в нормальности векторов Q и Λ .

Строя аналогичные примеры, можно показать, что задача отыскания инвариантов и классификации формальных систем в

классе формальных преобразований содержит в себе основные задачи теории алгебраических инвариантов. Но в некоторых специальных случаях можно получить дальнейшие упрощения нормальной формы и даже получить все ее инварианты. Об этом будет сказано ниже, в § 2 гл. III.

1.5. ОТМЕЧЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как видно из теоремы 1, нормализующее преобразование (7) и нормальная форма (9) однозначно определяются лишь после выбора резонансных коэффициентов h_{iq} нормализующего преобразования ($\langle Q, \Lambda \rangle = 0$). В частности, все резонансные коэффициенты h_{iq} можно положить равными нулю. Такое нормализующее преобразование (9) единственно, будем называть его *отмеченным*. Оказывается, многие свойства исходной системы переносятся на нормальную форму, если у нормализующего преобразования резонансные коэффициенты h_{iq} выбраны должным образом. В этой главе будет много тому примеров. Здесь же докажем, что «треугольность» системы можно сохранить при нормализующем преобразовании.

Теорема 3. Пусть в системе (8) ряды $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ зависят лишь от $x_1, \dots, x_m$ ($m \leq n$). Тогда в отмеченном нормализующем преобразовании (9) ряды $\xi_1, \dots, \xi_m$ не зависят от $y_{m+1}, \dots, y_n$ и преобразование

$$x_i = y_i + \xi_i(y_1, \dots, y_m), \quad i = 1, \dots, m$$

приводит подсистему

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sum_{j>i} a_{ij} x_j + \varphi_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, m$$

к нормальной форме.

Доказательство является продолжением доказательства теоремы 1. Условие теоремы означает, что

$$f_{iq} = 0, \text{ если } |q_{m+1}| + \dots + |q_n| \neq 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$h_{iq} = 0, \text{ если } \langle Q, \Lambda \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Нужно доказать, что

$$h_{ir} = g_{ir} = 0, \text{ если } |p_{m+1}| + \dots + |p_n| \neq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть это верно для всех P , предшествующих вектору Q . Докажем это для Q : $|q_{m+1}| + \dots + |q_n| \neq 0$. Покажем последовательно, что тогда все члены в правой части равенства (11) аннулируются для $i \leq m$.

1) Поскольку $i \leq m$, то у вектора $P = Q - E_j + E_i$

$$p_k = q_k, \quad k = m+1, \dots, n,$$

и по индуктивному предположению $h_{iQ-E_j+E_i} = 0$.

2) $P+R=Q$, откуда $|p_{m+1}|+\dots+|p_n|+|r_{m+1}|+\dots+|r_n|\geq |q_{m+1}|+\dots+|q_n|>0$ и либо $|p_{m+1}|+\dots+|p_n|\neq 0$, либо $|r_{m+1}|+\dots+|r_n|\neq 0$, либо и то и другое. Во всех этих случаях $h_{iP}g_{iR}=0$ по индуктивному предположению.

3) для $j\leq m$ так же, как в 1), $h_{iQ-E_k+E_j}=0$. Для $j>m$ у вектора $P=Q-E_k+E_j$ координата $p_j=q_j+1$. Если $p_j\neq 0$, то $|p_{m+1}|+\dots+|p_n|\neq 0$, и по индуктивному предположению $h_{iQ-E_k+E_j}=0$. Итак, всегда $(q_j+1)h_{iQ-E_k+E_j}=0$, $j=1, \dots, n$.

4) См. 2). Если $p_{m+1}=\dots=p_n=0$, то $\sum_{k=1}^n p_k g_{kR} = \sum_{k=1}^m p_k g_{kR}$, но тогда $|r_{m+1}|+\dots+|r_n|\neq 0$ и $g_{iR}=\dots=g_{mR}=0$ по индуктивному предположению.

Если $|p_{m+1}|+\dots+|p_n|\neq 0$, то $h_{iP}=0$.

5) См. 1).

6) Здесь стоит сумма членов вида

$$\{(1+h_i)f_{iS}Y^S(1+h_1)^{s_1}\dots(1+h_n)^{s_n}\}_Q. \quad (2')$$

Если $|s_{m+1}|+\dots+|s_n|\neq 0$, то $f_{iS}=0$ по условию, и такие члены аннулируются. Если $s_{m+1}=\dots=s_n=0$, то (2') есть

$$\{(1+h_i)f_{iS}Y^S(1+h_1)^{s_1}\dots(1+h_m)^{s_m}\}_Q,$$

это сумма членов вида

$$f_{iSh_{j_1P^{(1)}}}\dots h_{j_kP^{(k)}}, \quad j_1, \dots, j_k \leq m,$$

где $Q=S+P^{(1)}+\dots+P^{(k)}$. Откуда

$$|q_{m+1}|+\dots+|q_n| \leq \sum_{l=1}^k (|p_{m+1}^{(l)}|+\dots+|p_n^{(l)}|).$$

Поэтому $|p_{m+1}^{(l)}|+\dots+|p_n^{(l)}|\neq 0$ хотя бы для одного $P^{(l)}$ и $h_{j_lP^{(l)}}=0$ по индуктивному предположению, то есть члены (2') аннулируются. Следовательно, все слагаемые в $\{(1+h_i)f_i\}_Q$ равны нулю. Итак, доказано, что

$$g_{iQ}+h_{iQ}\langle Q, \Lambda \rangle=0, \quad i=1, \dots, m.$$

Если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, то $g_{iQ}=0$ по определению нормальной формы, и получаем, что $h_{iQ}=0$. Если $\langle Q, \Lambda \rangle=0$, то $h_{iQ}=0$ по условию, и получаем, что $g_{iQ}=0$. Индукция начинается с линейных членов, для которых утверждение теоремы очевидно.

Замечание. На самом деле здесь доказано несколько больше, чем утверждает теорема 3. А именно: Пусть в ситуации теоремы 1 ряды $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ зависят лишь от $x_1, \dots, x_m$, и аналогичным свойством обладает резонансная часть нормализующего преобразования (т. е. резонансные коэффициенты $h_{iQ}=0$, если $i\leq m$ и $q_{m+1}+\dots+q_n>0$). Тогда ряды $\xi_1, \dots, \xi_m$ и $\psi_1, \dots, \psi_m$ не зависят от $y_{m+1}, \dots, y_n$.

1.6. МАЛЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Пусть в системе

$$\dot{x}_i = \varphi_i(\underline{E}, X), \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

с параметрами $\underline{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ точка $\underline{E} = 0, X = 0$ является неподвижной. Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — вектор из собственных чисел матрицы $\partial\Phi/\partial X$, взятой в точке $\underline{E} = 0, X = 0$, и в этой точке φ_i аналитичны, т. е. разлагаются в сходящиеся степенные ряды по $\underline{E}$ и X .

Теорема 4. *Существует обратимая в точке $\underline{\Sigma} = 0, Y = 0$ замена*

$$x_i = \xi_i(\underline{E}, Y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (22)$$

которая приводит систему (21) к нормальной форме

$$\dot{y}_i = \psi_i(\underline{E}, Y) = y_i \sum_{\langle Q, \Lambda \rangle = 0} g_{iQ}(\underline{E}) Y^Q, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Здесь ξ_i и ψ_i — формальные ряды от $\underline{E}, Y$; $g_{iQ}(\underline{E})$ — степенные ряды от $\underline{E}$.

Доказательство. Рассмотрим малые параметры в качестве переменных и допишем к системе (21) систему

$$\dot{\varepsilon}_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (24)$$

При этом переменные ε_j удобно считать предшествующими переменным x_i . Для системы (24), (21) собственные числа матрицы линейной части в точке $\underline{E} = 0, X = 0$ суть $0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Выпишем подробнее линейную часть системы (24), (21):

$$\dot{\underline{E}} = 0, \quad \dot{X} = \Pi \underline{E} + AX + \dots, \quad (25)$$

где прямоугольная $(n \times m)$ -матрица Π и квадратная n -матрица A имеют постоянные коэффициенты. Линейной заменой только переменной X :

$$X = BZ \quad (26)$$

можно привести матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$. При этом нумерацию переменных Z возьмем такой, чтобы на диагонали матрицы J стояли сначала все нули $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = 0$, а затем — ненулевые собственные числа $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$. Тогда $J = \{J_0, J_1\}$ — блочно диагональная матрица, в которой все нулевые диагональные элементы находятся в матрице J_0 , а ненулевые — в матрице J_1 . Если вектор Z разбить на два вектора $Z_0 = (z_1, \dots, z_l)$ и $Z_1 = (z_{l+1}, \dots, z_n)$, то система (25) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\underline{E}} &= 0, \\ \dot{Z}_0 &= \Pi_0 \underline{E} + J_0 Z_0 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\underline{Z}}_1 = \Pi_1 \underline{E} + J_1 Z_1 + \dots = J_1 (J_1^{-1} \Pi_1 \underline{E} + Z_1) + \dots$$

Положим

$$\underline{W}_0 = \underline{Z}_0, \quad \underline{W}_1 = J_1^{-1} \Pi_1 \underline{E} + Z_1. \quad (28)$$

Тогда система (27) примет вид

$$\dot{\underline{E}} = 0,$$

$$\dot{\underline{W}}_0 = \Pi_0 \underline{E} + J_0 \underline{W}_0 + \dots,$$

$$\dot{\underline{W}}_1 = J_1 \underline{W}_1 + \dots$$

Причем у матрицы J_0 все собственные числа — нули. Матрица выписанной линейной части обладает свойствами а) и б), поэтому к системе (24), (21) в переменных $\underline{E}$, $\underline{W}$ применима теорема 1. По этой теореме существует обратимая формальная замена переменных

$$\underline{E}, \underline{W} \rightarrow \Delta, Y, \quad (29)$$

которая приводит систему (24), (21) к нормальной форме

$$\dot{\delta}_j = \delta_j \sum_{\langle Q, \Delta \rangle=0} d_{jQ}(\Delta) Y^Q, \quad j = 1, \dots, m; \quad (30)$$

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{\langle Q, \Delta \rangle=0} g_{iQ}(\Delta) Y^Q, \quad i = 1, \dots, n. \quad (31)$$

Такое нормализующее преобразование не единственно. В частности, по теореме 3 всегда существует отмеченное нормализующее преобразование, для которого $\varepsilon_j = \delta_j$, $j = 1, \dots, m$. Для него система (30) совпадает с системой (24), а система (31) — с системой (23). Последовательность преобразований (26), (28) и (29) не меняет параметров $\underline{E}$ и приводит систему (21) к виду (23). Теорема доказана.

Пример 2. Пусть правые части системы (21) линейны относительно X :

$$\Phi(\underline{E}, X) = A(\underline{E})X + \tilde{A}(\underline{E}).$$

Легко показать, что тогда нормализующая замена (22) будет также линейной по Y :

$$X = B(\underline{E})Y + \tilde{B}(\underline{E}).$$

Нормальная форма (23) будет также линейной по Y :

$$\dot{Y} = C(\underline{E})Y + \tilde{C}(\underline{E}),$$

где

$$C(\underline{E}) = B^{-1}(\underline{E})A(\underline{E})B(\underline{E}).$$

При этом по теореме 4 $c_{ij}(\underline{E}) \neq 0$, только если $\lambda_i = \lambda_j$, т. е. мат-

рица $A(E)$ подобна блочно-диагональной матрице $C(E)$, в которой каждому собственному числу λ_i матрицы $A(0)$ соответствует один блок. На самом деле преобразование подобия можно добиться дальнейших упрощений внутри каждого блока (см. Арнольд [5]). Но эти дальнейшие упрощения не охватываются теоремой о приведении к нормальной форме. Они соответствуют вторичной нормализации (см. § 2 гл. III).

Теорема 4 была сформулирована и доказана в статье Брюно [41], там же имеются другие примеры применения этой теоремы. Вообще, если рассматривать малые параметры в качестве локальных координат, то различные специальные методы учета возмущений оказываются лишь вариантами приведения системы (21) к нормальной форме (23) (см. §§ 3, 4 гл. III и Брюно [39]).

1.7. О ВЫЧИСЛЕНИИ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Многие свойства исходной системы проще исследовать по ее нормальной форме. При этом зачастую достаточно установить общие свойства нормальной формы и вычислить лишь несколько младших ее членов. Для вычисления нормальной формы сначала надо сделать линейное преобразование координат, приводящее матрицу линейной части к треугольному виду со свойством б) (например, к жордановой форме — см. Гантмахер [58]). Затем надо сделать нелинейную замену координат согласно теореме 1. Вычисление коэффициентов нормальной формы можно производить в той же последовательности, как в доказательстве теоремы 1.

Вообще говоря, это приводит к довольно громоздким выкладкам. При этом коэффициенты g_{iq} и h_{iq} оказываются многочленами от коэффициентов f_{jP} и δ_P , где

$$\delta_P = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle P, \Lambda \rangle \neq 0, \\ 1, & \text{если } \langle P, \Lambda \rangle = 0. \end{cases}$$

Было бы полезно выписать эти многочлены в явном виде для малых значений n и $\|Q\|$. Отчасти это сделано Старжинским [113—116]; однако у него довольно неудобные обозначения, которые вместо облегчения вычислений усложняют их и иногда приводят к ошибкам. Там же с помощью нормальных форм решается вопрос об устойчивости в некоторых механических задачах. Но если система (1) уже нормализована в младших членах, то есть все младшие члены в ее правых частях являются резонансными, то вычисление дальнейших членов нормальной формы можно упростить:

Теорема 5. Пусть для системы (8) существует такой вектор K , что для всех членов $f_{iq}X^q$ в (8) будет

$$1) \langle Q, K \rangle \geq 0,$$

в том числе и для линейных членов;

2) $f_{iq}=0$, если $\langle Q, K \rangle < s$ и $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. Т. е. в системе (8) нормализованы все члены до порядка s (относительно вектора K). Тогда в нормальной форме (9)

$$g_{iq} = f_{iq}, \text{ если } \langle Q, K \rangle < 2s. \quad (32)$$

Доказательство проводится так же, как в теореме 1. В качестве нормализующего преобразования берем отмеченное, у которого $h_{iq}=0$ для $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Индукцией по упорядоченным индексам Q покажем, что

$$h_{ip}=0 \text{ и } g_{ip}=f_{ip}, \text{ если } \langle P, K \rangle < s. \quad (33)$$

Пусть это справедливо для всех векторных индексов P , предшествующих вектору Q : $\langle Q, K \rangle < s$. В равенстве (11) правая сторона есть сумма членов вида

$$g_{iR}h_{jP} \text{ и } f_{iS}h_{jP_1} \dots h_{jP_k}, \quad (34)$$

где все $P, R, S, P_1, \dots, P_k$ предшествуют вектору Q . Согласно условию $\langle S, K \rangle \geq 0$ и по индуктивному предположению $\langle R, K \rangle \geq 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \langle Q, K \rangle &= \langle R, K \rangle + \langle P, K \rangle = \\ &= \langle S, K \rangle + \langle P_1, K \rangle + \dots + \langle P_k, K \rangle < s, \end{aligned}$$

то $\langle P, K \rangle < s$ и $\langle P_l, K \rangle < s$ хотя бы для одного l из $l=1, \dots, k$. По индуктивному предположению соответствующий коэффициент h_{jP} или h_{jP_l} равен нулю. Следовательно,

$$g_{iq} + \langle Q, \Lambda \rangle h_{iq} = f_{iq}.$$

Если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, то $f_{iq}=0$ по условию теоремы и $h_{iq}=0$. Если $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, то $g_{iq}=f_{iq}$. Индукция начинается с линейных членов, для которых утверждение тривиально выполнено. Итак, свойство (33) доказано.

Докажем теперь свойство (32) также индукцией по упорядоченным индексам. Пусть это свойство выполнено для всех векторных индексов, предшествующих вектору Q : $\langle Q, K \rangle < 2s$, $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Рассмотрим член (34) из правой части равенства (11). Поскольку $\langle R, \Lambda \rangle = 0$, то $\langle P, \Lambda \rangle = 0$. Но тогда $h_{iP}=0$, ибо взято отмеченное нормализующее преобразование. По доказанному в членах вида (34)

$$\langle S, K \rangle \geq 0, \quad \langle P_l, K \rangle \geq s,$$

но

$$2s > \langle Q, K \rangle = \langle S, K \rangle + \langle P_1, K \rangle + \dots + \langle P_k, K \rangle \geq sk;$$

следовательно, $k=1$, и остаются лишь члены вида $f_{iS}h_{jP_1}$ и f_{iq} , где $S+P_1=Q$. По свойству (33) $\langle P_1, K \rangle \geq s$, следовательно, $\langle S, K \rangle = \langle Q, K \rangle - \langle P_1, K \rangle < 2s - s = s$. По условию теоремы тогда f_{iS} отличны от нуля лишь для $\langle S, \Lambda \rangle = 0$. Но тогда $\langle P, \Lambda \rangle = 0$ и

$h_{j,P_1}=0$, ибо преобразование отмеченное. Итак, получаем равенство (32). Индукция начинается с линейных членов, для которых утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если в ситуации теоремы 5 матрица A диагональна и f_i не содержат членов порядка меньшего s , то

$$g_{iQ} = \sum_{P+R=Q} \frac{1}{\langle P, \Lambda \rangle} f_{iR}(f_{iP} + \langle R, F_P \rangle) + f_{iQ}, \quad (35)$$

где $s \leq \langle P, K \rangle$, $\langle R, K \rangle < 2s \leq \langle Q, K \rangle < 3s$; $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, $\langle P, \Lambda \rangle \neq 0$, $\langle R, \Lambda \rangle \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а м е ч а н и я. Из формулы (11) видно, что всегда

$$g_{iQ} = \{\varphi_i\}_Q,$$

где $\{\varphi_i\}_Q$ — коэффициент при $y_i Y^Q$ в ряду $\varphi_i(Y + \Xi(Y))$. Вычислим вклад в этот коэффициент от члена $x_i f_{iR} X^R$. Имеем

$$\begin{aligned} x_i f_{iR} X^R &= y_i Y^R f_{iR} (1 + h_i)(1 + h_1)^{r_1} \dots (1 + h_n)^{r_n} = \\ &= y_i Y^R f_{iR} (1 + h_i + \langle R, H \rangle + \dots), \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены порядка большего $2s$, ибо согласно (33) разложения h_j начинаются с членов порядка s . Поскольку $\langle R, K \rangle > s$, то для членов порядка меньшего $3s$ имеем

$$\{\varphi_i\}_Q = \sum_{P+R=Q} f_{iR}(h_{iP} + \langle R, H_P \rangle) + f_{iQ}$$

и для членов порядка меньшего $2s$ имеем $\{\varphi_i\}_P = f_{iP}$. Итак, при указанных ограничениях на порядки из формул (11) получаем

$$g_{iQ} = \sum_{P+R=Q} f_{iR}(h_{iP} + \langle R, H_P \rangle) + f_{iQ}, \quad h_{iP} \langle P, \Lambda \rangle = f_{iP}.$$

Отсюда следует формула (35).

Пример 3. Если $K = (1, \dots, 1)$, то $\langle Q, K \rangle = \|Q\|$ — обыкновенный порядок члена $f_Q X^Q$. Теорема 5 утверждает, что в системе, нормализованной до порядка s , вычисление коэффициентов нормальной формы до порядка $2s$ сводится к выделению резонансных членов (ср. лемма 3 § 4 Брюно [31]). Если матрица A диагональна, то $s=1$, тогда по теореме 5 и замечанию к ней имеем $g_{iQ} = f_{iQ}$ для $\|Q\|=1$, $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$, и формула (32) справедлива для $\|Q\|=1$, а формула (35) — для $\|Q\|=2$, $\|P\| = \|R\| = 1$. Чтобы воспользоваться этой формулой, надо для каждого $Q: Q \in \mathbb{N}$, $\|Q\|=2$, $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ найти все возможные разбиения $Q = P + R$, где $P, R \in \mathbb{N}$ и $\|P\| = \|R\| = 1$. В частности, для колебательных систем с нейтральной линейной частью эта формула позволяет вычислить кубические члены нормальной формы, определяющие устойчивость и другие асимптотические свойства.

Например, для $n=2$ и $\lambda_1 = -\lambda_2$ единственный вектор $Q \in N$ с $\|Q\|=2$ и $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ есть $Q = (1, 1)$. Для него значения R и $P \in N$ суть

$$\frac{R}{P} \begin{vmatrix} (2, -1) \\ (-1, 2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1, 0) \\ (0, 1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (0, 1) \\ (1, 0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (-1, 2) \\ (2, -1) \end{vmatrix}.$$

Формула (35) принимает вид

$$\begin{aligned} g_{i(1, 1)} = & -\frac{1}{3\lambda_1} f_{i(2, -1)} (f_{i(-1, 2)} + 2f_{i(-1, 2)}) - \\ & -\frac{1}{\lambda_1} f_{i(1, 0)} (f_{i(0, 1)} + f_{i(0, 1)}) + \frac{1}{\lambda_1} f_{i(0, 1)} (f_{i(1, 0)} + f_{i(1, 0)}) + \\ & + \frac{1}{3\lambda_1} f_{i(-1, 2)} (f_{i(2, -1)} + 2f_{i(2, -1)}) + f_{i(1, 1)}. \end{aligned}$$

Откуда после приведения подобных получаем, в частности,

$$g_{1(1, 1)} = f_{1(1, 1)} + \frac{2}{3\lambda_1} f_{1(-1, 2)} f_{1(2, -1)} - \frac{1}{\lambda_1} f_{1(1, 0)} f_{1(0, 1)} + \frac{1}{\lambda_1} f_{1(0, 1)} f_{1(1, 0)}.$$

Если λ_1 — чисто мнимое, то $\operatorname{Re} g_{i(1, 1)}$ — ляпуновская величина; неподвижная точка устойчива при $\operatorname{Re} g_{i(1, 1)} < 0$ и неустойчива при $\operatorname{Re} g_{i(1, 1)} > 0$ (ср. § 1 гл. II) *.

Пусть D — некоторое векторное множество в n -мерном вещественном пространстве R^n . Обозначим через D_+ множество, образованное конечными суммами векторов из множества D . Если C — другое точечное множество, то через $C+D$ обозначим множество, образованное суммами вектора из C и вектора из D .

Запишем систему (8) (включая линейные члены) в виде

$$\dot{x}_i = x_i f_i = x_i \sum f_{iq} X^q, \quad i = 1, \dots, n;$$

положим $F_q = (f_{1q}, \dots, f_{nq})$, $F = \sum F_q X^q$. Через $D(F)$ обозначим носитель ряда F , т. е. множество точек Q , для которых $F_Q \neq 0$.

Теорема 5'. В ситуации теоремы 1 для отмеченного нормализующего преобразования (9) коэффициенты h_{iq} и g_{iq} зависят от коэффициента f_{jp} только в том случае, если $Q \in P + D_+(F)$.

Доказательство здесь не приводим, оно аналогично доказательству леммы 2 § 7 Брюно [31]. Нетрудно вывести теорему 5 как следствие из теоремы 5'. В теореме 5' нормализующее преобразование может и не быть отмеченным. Пусть $H_\Lambda = (h_{1\Lambda}, \dots, h_{n\Lambda})$ — резонансные части рядов h_i . Тогда коэффици-

* Согласно п. 1.9 гл. II для исходной вещественной системы в комплексной записи выполняются соотношения $f_{1(p,q)} = f_{2(q,p)}$ поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g_{1(1,1)} = & \operatorname{Re} f_{1(1,1)} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\lambda_1} f_{1(1,0)} f_{1(0,1)} \right\} = \operatorname{Re} f_{1(1,1)} + \\ & + \operatorname{Im} \{ f_{1(1,0)} f_{1(0,1)} \} / \operatorname{Im} \lambda_1 \end{aligned}$$

енты h_{iq} и g_{iq} зависят от коэффициентов f_{jp} только в том случае, когда

$$Q \in P + D_+(F) + D_+(H_\Lambda).$$

1.8. ИНВАРИАНТНОСТЬ

В дальнейших пунктах этого параграфа излагаются результаты Брюно [44]. Здесь удобно несколько изменить обозначения. Запишем исходную систему (1) в виде

$$\dot{X} = AX + \Theta(X). \quad (36)$$

Пусть матрица J является жордановой нормальной формой матрицы A . Тогда $J = B^{-1}AB$. В результате линейной замены координат

$$X = BZ \quad (37)$$

система (36) перейдет в систему

$$\dot{Z} = JZ + \Phi(Z), \quad (38)$$

где ряд Тейлора функции $\Phi(Z)$ не содержит свободных и линейных членов. Рассмотрим формальные нелинейные замены координат вида

$$Z = W + \Xi(W), \quad (39)$$

где $\Xi(W) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — степенной ряд от W без свободных и линейных членов. Пусть замена (39) переводит систему (38) в формальную систему

$$\dot{W} = JW + \Psi(W), \quad (40)$$

где $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — степенной ряд без свободных и линейных членов. Положим $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — вектор из диагональных элементов матрицы J . Назовем Λ -резонансной частью ряда Ξ ряд $\Xi_\Lambda = (\xi_{1\Lambda}, \dots, \xi_{n\Lambda})$:

$$\xi_{j\Lambda} = w_j \sum h_{iq} W^Q,$$

где суммирование производится по векторам Q , удовлетворяющим уравнению

$$\langle Q, \Lambda \rangle = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n = 0. \quad (41)$$

Система (40) будет нормальной формой, если ряд Ψ совпадает со своей Λ -резонансной частью Ψ_Λ . Согласно теореме 1 всякая система (38) посредством формальной замены (39) приводится к нормальной форме (40). При этом коэффициенты ряда Ξ_Λ можно задавать произвольно, по ним ряды Ψ и Ξ определяются однозначно. Заметим, что ряды Φ , Ξ и Ψ связаны уравнениями

в частных производных:

$$\Psi(W) + \frac{\partial \Xi}{\partial W}(JW + \Psi(W)) = J\Xi(W) + \Phi(W + \Xi(W)), \quad (42)$$

и теорема 1 является утверждением о свойствах формальных решений Ξ и Ψ этой системы уравнений.

Пусть аналогичная (38) система

$$\tilde{Z} = J\tilde{Z} + \tilde{\Phi}(\tilde{Z}) \quad (43)$$

преобразованием

$$\tilde{Z} = \tilde{W} + \tilde{\Xi}(\tilde{W}) \quad (44)$$

приводится к системе

$$\dot{\tilde{W}} = \tilde{J}\tilde{W} + \tilde{\Psi}(\tilde{W}). \quad (45)$$

Пусть $\tilde{\Lambda}$ — вектор из диагональных элементов жордановой матрицы $\tilde{J}$. Если $\tilde{\Lambda} \neq \Lambda$, то для одного ряда Ξ его Λ -резонансная часть Ξ_Λ и $\tilde{\Lambda}$ -резонансная часть $\Xi_{\tilde{\Lambda}}$ могут содержать члены с разными показателями степеней. Если $\Xi(W)$ — степенной ряд, то через $\tilde{\Xi}(W)$ будем обозначать степенной ряд с комплексно сопряженными коэффициентами.

Теорема 6. Пусть система (38) приводится к нормальной форме (40) преобразованием (39). В указанных ниже трех случаях для системы (43) нормализующее преобразование (44) и нормальную форму (45) можно получить по следующим формулам:

1) Если $\tilde{J} = J$, $\tilde{\Phi}(Z) = \Phi(Z)$, тогда $\tilde{\Xi}(W) = \Xi(W)$, $\tilde{\Psi}(W) = \Psi(W)$, при этом $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}}(W) = \Xi_\Lambda(W)$;

2) если $\tilde{J} = \delta J$, $\tilde{\Phi}(Z) = \delta \Phi(Z)$ с числом $\delta \neq 0$, тогда $\tilde{\Xi}(W) = \Xi(W)$, $\tilde{\Psi}(W) = \delta \Psi(W)$, при этом $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}}(W) = \Xi_\Lambda(W)$;

3) если $\tilde{J} = K^{-1}JK$, $\tilde{\Phi}(Z) = K^{-1}\Phi(KZ)$ с неособой матрицей K , тогда $\tilde{\Xi}(W) = K^{-1}\Xi(KW)$, $\tilde{\Psi}(W) = K^{-1}\Psi(KW)$, при этом $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}}(W) = K^{-1}\Xi_\Lambda(KW)$.

Доказательство для каждого случая проводится по следующей схеме. Сначала доказывается, что преобразование (44) переводит систему (43) в систему (45), т. е. удовлетворена система формальных уравнений

$$\tilde{\Psi}(\tilde{W}) + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial \tilde{W}}(\tilde{J}\tilde{W} + \tilde{\Psi}(\tilde{W})) = \tilde{J}\tilde{\Xi}(\tilde{W}) + \tilde{\Phi}(\tilde{W} + \tilde{\Xi}(\tilde{W})). \quad (46)$$

Затем показывается, что $\tilde{\Psi}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{W}) = \tilde{\Psi}(\tilde{W})$ (то есть система (45) — нормальная форма) и ряд $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}}(W)$ указанным в теореме образом связан с рядом $\Xi_\Lambda(W)$. Переходим к отдельным случаям.

1) Если в системе (42) заменить все коэффициенты сопряженными, то равенство сохранится. Следовательно, система (46) удовлетворена с $\tilde{\Xi}(\tilde{W}) = \tilde{\Xi}(\tilde{W})$, $\tilde{\Psi}(\tilde{W}) = \tilde{\Psi}(\tilde{W})$. При этом $\tilde{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ и множества вещественных решений Q уравнений (41) и

$$\langle Q, \tilde{\Lambda} \rangle = 0 \quad (47)$$

совпадают. Следовательно, для всякого векторного степенного ряда $\Xi(W)$ совпадают резонансные части Ξ_{Λ} и $\Xi_{\tilde{\Lambda}}$. Поэтому ряд $\tilde{\Psi}$ содержит только резонансные члены и $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}} = \Xi_{\Lambda}$.

2) Умножая уравнения (42) на δ , получим, что ряды $\tilde{\Xi}(\tilde{W}) = \Xi(\tilde{W})$ и $\tilde{\Psi}(\tilde{W}) = \delta\Psi(\tilde{W})$ являются решениями системы (46). Поскольку $\tilde{\Lambda} = \delta\Lambda$, то множества вещественных решений Q уравнений (41) и (47) совпадают. Следовательно, для всякого векторного степенного ряда $\Xi(W)$ имеем $\Xi_{\Lambda} = \Xi_{\tilde{\Lambda}}$. Поэтому ряд $\delta\Psi$ содержит только резонансные члены и $\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}} = \Xi_{\Lambda}$.

3) Если в системе (42) сделать замену $W = K\tilde{W}$ и умножить систему слева на матрицу K^{-1} , то равенства сохраняются. Поэтому система (46) имеет решения $\tilde{\Xi}(\tilde{W}) = K^{-1}\Xi(K\tilde{W})$, $\tilde{\Psi}(\tilde{W}) = K^{-1}\Psi(K\tilde{W})$. Пусть $\Xi(W)$ — некоторый векторный степенной ряд и $\tilde{\Xi}(\tilde{W}) = K^{-1}\Xi(K\tilde{W})$. Покажем, что

$$\tilde{\Xi}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{W}) = K^{-1}\Xi_{\Lambda}(K\tilde{W}). \quad (48)$$

Пусть L и $\tilde{L}$ — диагональные матрицы, образованные диагональными элементами жордановых матриц J и $\tilde{J}$ соответственно, то есть $L = \text{diag } \Lambda$ и $\tilde{L} = \text{diag } \tilde{\Lambda}$. По условию теоремы $JK = K\tilde{J}$, $K = (k_{ij})$. Согласно Гантмахеру [58, гл. VIII, § 1, теорема 1] $k_{ij} = 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$. Следовательно,

$$LK = K\tilde{L}. \quad (49)$$

Пусть $Z(W)$ и $H(W)$ — векторные поля; их коммутатором (или скобками Пуассона) называется векторное поле

$$\Theta(W) = [Z, H] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial w_j} \eta_j - \frac{\partial H}{\partial w_j} \zeta_j \right).$$

Скобки Пуассона линейны относительно каждого из полей Z и H . Они инвариантны при заменах координат. Например, если $W = K\tilde{W}$, то

$$K^{-1}\Theta(K\tilde{W}) = [K^{-1}Z(K\tilde{W}), K^{-1}H(K\tilde{W})], \quad (50)$$

где скобки Пуассона вычисляются по координатам $\tilde{W}$. Теперь заметим, что для $\zeta_i = w_i f_i W^Q$, $i = 1, \dots, n$, где $(f_1, \dots, f_n)$ — постоянный вектор, имеем $[Z, LW] = Z\langle Q, \Lambda \rangle$. Поэтому резонансная

часть Z_Λ ряда Z выделяется свойством $[Z_\Lambda, LW] = 0$. Согласно (50) и (49)

$$[Z, LW] = [K^{-1}Z(K\tilde{W}), K^{-1}LK\tilde{W}] = [K^{-1}Z(K\tilde{W}), L\tilde{W}].$$

Т. е. Λ -резонансным членам ряда Z соответствуют $\tilde{\Lambda}$ -резонансные члены ряда $K^{-1}Z(K\tilde{W})$, а не Λ -резонансному члену ряда Z соответствуют не $\tilde{\Lambda}$ -резонансные члены ряда $K^{-1}Z(K\tilde{W})$, и наоборот. Следовательно, резонансной части E_Λ соответствует резонансная часть $\tilde{E}_{\tilde{\Lambda}}$, т. е. выполнено тождество (48).

Следствием этого тождества являются равенства

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{W}) = K^{-1}\Psi_{\Lambda}(K\tilde{W}) = K^{-1}\Psi(K\tilde{W}) = \tilde{\Psi}(\tilde{W}),$$

$$\tilde{E}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{W}) = K^{-1}E_{\Lambda}(K\tilde{W}),$$

т. е. система (45) является нормальной формой, и резонансная часть нормализующего преобразования (44) определяется резонансной частью нормализующего преобразования (39). Теорема доказана.

1.9. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть система (36) вещественная, т. е.

$$\bar{A} = A, \quad \bar{\Theta}(X) = \Theta(X). \quad (51)$$

Тогда жорданову форму J можно взять в виде блочно диагональной матрицы

$$J = \{J_1, J_2, J_3\} \quad (52)$$

где $J_1 = \bar{J}_2$ — жорданова матрица порядка l и $J_3 = \bar{J}_3$ — жорданова матрица порядка m . Очевидно, $2l + m = n$. На диагонали матрицы J стоят собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. При этом числа $\lambda_i = \bar{\lambda}_{i+l}$ — комплексные ($i = 1, \dots, l$), числа $\lambda_{2l+1}, \dots, \lambda_n$ — вещественные. Под диагональю расположены либо нули, либо вещественное число σ , которое можно взять произвольным. Обозначим через $E^{(k)}$ квадратную единичную матрицу порядка k .

Лемма 1. Если матрица A вещественная, то существует такое преобразование (37) к системе (38) с матрицей (52), что

$$\bar{B} = BI, \quad (53)$$

где I — блочная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E^{(l)} & 0 \\ E^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Доказательство следует немедленно из теоремы 28 § 34 учебника Понтрягина [103], согласно которой существует базис, в котором матрица A имеет жорданову форму и который отличается от комплексно сопряженного базиса лишь перестановкой. Матрица I дает эту подстановку для жордановой формы (52) (см. также Хартман [122, гл. 4, § 9]).

Заметим, что

$$I^2 = E^{(n)}, \quad I^{-1} = I, \quad \bar{I} = I, \quad \bar{J} = IJI. \quad (55)$$

Введем теперь матрицу

$$C = \begin{pmatrix} E^{(l)} & iE^{(l)} & 0 \\ E^{(l)} & -iE^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & E^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Согласно (54)

$$\bar{C} = IC. \quad (57)$$

Поэтому и в силу (53) и (55) матрица $D = BC$ вещественна, ибо $\bar{D} = \bar{B}\bar{C} = BIIC = BC = D$. Следовательно, вещественно преобразование $X = DY$. При этом вещественные координаты Y связаны с комплексными координатами Z стандартным преобразованием

$$Z = CY. \quad (58)$$

Это означает, что при вещественных значениях координат X координаты Y также вещественны, а координаты Z удовлетворяют соотношению вещественности $\bar{Z} = IZ$ (см. Хартман [121, гл. 6, § 9]). Заметим, что в системе (38) $\Phi(Z) = B^{-1}\Theta(BZ)$. Поэтому и согласно (51), (53), (55) справедливы равенства $I^{-1}\Phi(IZ) = I^{-1}\bar{B}^{-1}\bar{\Theta}(BIZ) = B^{-1}\Theta(BZ) = \Phi(Z)$, т. е.

$$I^{-1}\bar{\Phi}(IZ) = \Phi(Z). \quad (59)$$

Пусть теперь система (38) приводится к системе (40) преобразованием (39). Сделаем стандартное преобразование $W = CV$ с матрицей (56). Покажем, что при условии

$$I^{-1}\bar{\Xi}(IW) = \Xi(W) \quad (60)$$

преобразование от Y к V вещественно. Действительно, это преобразование есть $Y = V + C^{-1}\Xi(CV)$. Согласно (57), (55) и (60)

$$\overline{C^{-1}\Xi(CV)} = \bar{C}^{-1}\bar{\Xi}(\bar{C}V) = C^{-1}I\bar{\Xi}(ICV) = C^{-1}\Xi(CV).$$

Теорема 7. Пусть система (38) заменой (39) приводится к нормальной форме (40) и выполнено свойство (59), тогда будет выполнено и свойство (60), если резонансная часть $\Xi_{\Lambda}(W)$

задана так, что

$$I^{-1}\Xi_A(IW) = \Xi_A(W). \quad (61)$$

В частности, свойство (60) выполнено при $\Xi_A = 0$.

Доказательство заключается в двукратном использовании теоремы 6. Поскольку $I^{-1}JI = \tilde{J}$ — жорданова матрица, то к системе (38) применимо третье утверждение теоремы 6 с $K = I$. Используя также первое утверждение этой теоремы и свойство $\tilde{I} = I$, получим, что система (43), где $\tilde{J} = I^{-1}JI$, $\tilde{\Phi}(Z) = I^{-1}\Phi(IZ)$, приводится к нормальной форме (45) преобразованием (44), где $\tilde{\Xi}(W) = I^{-1}\Xi(IW)$. При этом $\tilde{\Xi}_A(W) = I^{-1}\Xi_A(IW)$ и $\tilde{\Psi}(W) = I^{-1}\Psi(IW)$. Но по условию выполнены свойства (59) и (61). Следовательно, $\tilde{J} = J$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{\Xi}_A = \Xi_A$, т. е. совпадают исходные системы (38) и (43), а у нормализующих преобразований (39) и (44) совпадают резонансные части. По теореме 1 такие нормализующие преобразования совпадают и

$$\Psi(W) = I^{-1}\tilde{\Psi}(IW), \quad (62)$$

т. е. выполнено (60). Теорема доказана. Ее доказательство обобщает доказательство вещественности в книге Зигеля [65, § 14], приведенное для весьма частного случая.

Пример 4. Пусть $n=2$. Если собственные числа λ_1 и λ_2 вещественны, то $I = E^{(2)}$, поэтому система (38) и нормальная форма (40) будут вещественными системами. Если собственные числа λ_1 и λ_2 чисто мнимые, то $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = -\lambda_2$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Условия вещественности (59) для системы (38) есть $\varphi_1(z_1, z_2) = \bar{\varphi}_2(z_2, z_1)$. Согласно теореме 7 нормальную форму (40) можно взять такую, что выполнены аналогичные соотношения (62) для Ψ .

1.10. ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ

Пусть при линейном преобразовании переменных

$$X = MX, \quad t = \delta\tilde{t}, \quad (63)$$

где M — неособая матрица и число $\delta \neq 0$, система (36) переходит в систему

$$d\tilde{X}/d\tilde{t} = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{\Theta}(\tilde{X}). \quad (64)$$

Если при замене $\tilde{X}$ на X и $\tilde{t}$ на t система (64) превращается в систему (36) (то есть $\tilde{A} = A$, $\tilde{\Theta}(X) = \Theta(X)$), то преобразование (63) называют *линейным автоморфизмом* системы (36). Если система (36) имеет автоморфизм (63), то система (38), полученная из (36) преобразованием (37), имеет автоморфизм

$$Z = NZ, \quad t = \delta\tilde{t}, \quad (65)$$

где $N = B^{-1}MB$; т. е.

$$\delta N^{-1} J N = J, \quad (66)$$

$$\delta N^{-1} \Phi(NZ) = \Phi(Z). \quad (67)$$

Теорема 8. Пусть система (38) заменой (39) приводится к нормальной форме (40) и система (38) обладает автоморфизмом (65), тогда нормальная форма (40) обладает автоморфизмом $W = NW$, $t = \delta \tilde{t}$, если в нормализующем преобразовании (39)

$$N^{-1} \Xi_{\Lambda}(NW) = \Xi_{\Lambda}(W). \quad (68)$$

В частности, это справедливо при $\Xi_{\Lambda} = 0$.

Доказательство. Применим к системе (38) второе утверждение теоремы 6 и к полученной системе применим третье утверждение теоремы 6 с $K = N$ (оно здесь применимо вследствие (66)). В итоге получим, что система

$$\dot{Z} = \delta N^{-1} J N Z + \delta N^{-1} \Phi(NZ) \quad (69)$$

преобразованием

$$Z = W + N^{-1} \Xi(NW) \quad (70)$$

приводится к нормальной форме

$$\dot{W} = \delta N^{-1} J N W + \delta N^{-1} \Psi(NW). \quad (71)$$

При этом

$$\{N^{-1} \Xi(NW)\}_{\Lambda} = N^{-1} \Xi_{\Lambda}(NW). \quad (72)$$

По условию (66) и (67) исходные системы (69) и (38) совпадают, по условию (68) и в силу (72) у нормализующих преобразований совпадают резонансные части. По теореме 1 совпадают нормализующие преобразования (70) и (39), а также — нормальные формы (71) и (40). Теорема доказана.

Пример 5. Пусть система (38) инвариантна при замене z_n на $-z_n$, т. е. z_n в ряд φ_n входит в нечетных степенях, а в остальные φ_i — в четных. Тогда нормальную форму (40) можно взять инвариантной относительно замены w_n на $-w_n$.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

2.1. СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Если в нормальной форме все правые части обозначить через $y_i g_i$:

$$\dot{y}^i = y_i g_i \equiv y_i \sum g_{iq} Y^q, \quad (1)$$

то $G_0 = \Lambda$ и коэффициенты g_{iq} отличны от нуля, только если $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Для нелинейных членов это свойство входит в определение нормальной формы. Покажем, что оно справедливо и для линейных членов. Действительно члену $a_{ij}y_j$ в записи (1) соответствует член $y_i g_{i\bar{j}} - \bar{y}_i y_j y_i^{-1}$. Для него

$$Q = E_j - E_i, \quad \langle Q, \Lambda \rangle = \lambda_j - \lambda_i;$$

но по свойству б) $\lambda_j - \lambda_i = 0$, если $a_{ij} \neq 0$.

Запись (1) и определение нормальной формы допускают простую геометрическую интерпретацию.

Каждому коэффициенту $g_{iq} \neq 0$ ставится в соответствие точка Q целочисленной решетки n -мерного действительного аффинного пространства $\mathbf{R}^n$ с координатами $q_1, \dots, q_n$. Множество всех таких точек обозначим через $\mathbf{D}(g_1, \dots, g_n)$ или $\mathbf{D}(G)$. От произвольной системы (1) нормальная форма отличается тем, что для нее множество $\mathbf{D}(G)$ целиком лежит в линейном подпространстве, ортогональном векторам $\operatorname{Re} \Lambda$ и $\operatorname{Im} \Lambda$. Это позволяет с помощью простейших бирациональных преобразований

$$u_i = y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

понижать порядок системы, являющейся нормальной формой, а иногда даже интегрировать ее. Преобразования систем дифференциальных уравнений при замене переменных (2) были подробно изучены в § 2 статьи Брюно [27].

Лемма 1. Пусть $\mathbf{D}(G)$ — множество таких точек Q в $\mathbf{R}^n$, что в системе (1) $G_Q = (g_{1Q}, \dots, g_{nQ}) \neq 0$, и пусть преобразование (2), где α_{ij} действительны и $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\det \alpha \neq 0$ переводит систему (1) в систему

$$\dot{u}_i = u_i g'_i(U) \equiv u_i \sum_{Q'} g'_{iQ'} U^{Q'}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда

$$\mathbf{D}(G') = \alpha^{-1} \mathbf{D}(G). \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим

$$\ln Y = (\ln y_1, \dots, \ln y_n), \quad \ln U = (\ln u_1, \dots, \ln u_n).$$

В векторной записи система (1) принимает вид

$$(\ln Y) = \sum_{Q \in \mathbf{D}(G)} G_Q \exp \langle Q, \ln Y \rangle,$$

система (3)

$$(\ln U) = \sum_{Q' \in \mathbf{D}(G')} G'_{Q'} \exp \langle Q', \ln U \rangle,$$

преобразование (2)

$$\ln U = \alpha \ln Y.$$

При преобразовании (2) член

$$\begin{aligned} Y^Q &\equiv \exp \langle Q, \ln Y \rangle = \exp \langle Q, \alpha^{-1} \ln U \rangle = \\ &= \exp \langle \alpha^{-1*} Q, \ln U \rangle \equiv U^{\alpha^{*-1} Q}, \end{aligned}$$

и

$$(\ln U) = \alpha (\ln Y) = \sum_{Q \in D(G)} \alpha G_Q Y^Q = \sum_{Q \in D(G)} \alpha G_Q U^{\alpha^{*-1} Q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{Q \in D(G)} \alpha G_Q \exp \langle \alpha^{-1*} Q, \ln U \rangle = \sum_{Q' \in D(G)} G_{Q'} \exp \langle Q', \ln U \rangle.$$

Поэтому

$$Q' = \alpha^{*-1} Q, \quad G_{Q'} = \alpha G_Q. \quad (4')$$

Следовательно, множество $D(G')$ таких точек Q' , для которых $G_{Q'} \neq 0$ получается из $D(G)$ линейным преобразованием (4').

Теорема 1. Пусть (1) — нормальная форма и δ — число линейно независимых $Q \in N$, удовлетворяющих уравнению $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Существует бирациональное преобразование (2) (α_{ij} целые, $\det \alpha = \pm 1$), переводящее нормальную форму (1) в систему

$$u_i = u_i g'_i(u_1, \dots, u_\delta), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Первые δ уравнений этой системы образуют систему порядка δ , а остальные — сводятся к квадратурам.

Доказательство опирается на лемму 1 и некоторые свойства свободных абелевых групп с конечным числом образующих (см. Курош [78]). Пусть K — линейное подпространство в R^n , натянутое на все решения $Q \in N$ уравнения $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Очевидно, размерность K есть δ . Векторы целочисленной решетки в R^n образуют по сложению свободную абелеву группу Z^n с n образующими. $M = Z^n \cap K$ есть подгруппа Z^n ранга δ , которая, очевидно, является свободной абелевой группой вместе с фактор-группой Z^n/M ранга $n - \delta$. Существует такой изоморфизм группы Z^n и прямой суммы $M \oplus Z^{n-\delta}/M$, который тождествен на M . Пусть векторы $R_1, \dots, R_\delta$ — образующие в M и $R_{\delta+1}, \dots, R_n$ — образующие в Z^n/M . Взятые вместе они дадут полную систему образующих в $M \oplus Z^{n-\delta}/M$. Их образы в Z^n $R_1, \dots, R_\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_n$ при указанном выше изоморфизме дадут полную систему образующих в Z^n , т. е. матрица α^* , i -й столбец которой есть R_i ($i \leq \delta$) или S_i ($i > \delta$), является унимодулярной и $\alpha^{*-1} R_i = E_i$. В то же время векторы $R_1, \dots, R_\delta$ образуют линейный

базис в K . Преобразование $Q' = \alpha^{*-1}Q$ переводит подпространство K в координатное подпространство, натянутое на $E_1, \dots, E_6$, то есть $q'_{6+i} = \dots = q'_n = 0$.

По лемме 1 между системами (1), (5) и преобразованием (2) имеется соотношение (4). Но $D(G) \subset K$, следовательно $D(G') \subset \alpha^{*-1}K$, т. е. $g'_1, \dots, g'_n$ не зависят от $u_{6+i}, \dots, u_n$. Доказательство окончено.

Другое доказательство теоремы 4, указывающее и способ вычисления матрицы α , см. Брюно [27].

2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ

До сих пор нам был безразличен порядок следования клеток Жордана в матрице $(\partial f_i / \partial x_j)_0$ или порядок следования чисел λ_i в векторе Λ . Оказывается иногда нормальная форма имеет почти треугольный вид при правильном расположении клеток Жордана или, что то же самое, при правильной нумерации переменных.

В дальнейшем будем различать следующие два случая собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть эти числа изображены точками на комплексной плоскости:

1. Существует такая проходящая через нуль прямая, что по одну сторону от нее нет точек λ_i , а на ней лежит ровно l точек λ_i (с учетом кратностей). Нумерация предполагается такой, что это первые l чисел λ_i .

2. По обе стороны всякой проходящей через нуль прямой лежат точки λ_i .

Пусть $\mathfrak{K}$ — выпуклая оболочка точек $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $\mathfrak{K}$ может быть точкой, отрезком или многоугольником. Очевидно, в случае 2 $\mathfrak{K}$ — многоугольник и нуль лежит внутри него.

Разобьем случай 1 на четыре подслучая:

а) нуль лежит вне $\mathfrak{K}$; тогда существует такая проходящая через нуль прямая $\mathfrak{M}$, что все λ_i лежат по одну сторону от $\mathfrak{M}$ и на ней нет точек λ_i ($l=0$);

б) нуль является вершиной многоугольника $\mathfrak{K}$ или концом отрезка $\mathfrak{K}$. Тогда $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = 0$ ($0 < l < n$), а остальные $\lambda_i \neq 0$, и существует такая проходящая через нуль прямая $\mathfrak{M}$, что $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$ лежат по одну сторону от нее и не на ней;

в) $\mathfrak{K}$ — многоугольник, и нуль лежит на его ребре, но не на вершине; пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — все точки λ_i , лежащие на этом ребре ($1 < l < n$); тогда прямая $\mathfrak{M}$, проходящая через это ребро многоугольника $\mathfrak{K}$, такова, что $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ лежат на $\mathfrak{M}$, а $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$ лежат по одну сторону от $\mathfrak{M}$ и не на ней.

г) $\mathfrak{K}$ — отрезок, и нуль внутри него; тогда прямая $\mathfrak{M}$, проходящая через этот отрезок, такова, что все λ_i лежат на $\mathfrak{M}$ ($l=n$).

В дальнейшем будем предполагать, что в качестве прямой в случае 1 выбрана указанная прямая $\mathfrak{M}$, l — количество чисел λ_i

на $\mathfrak{M}$ и переменные Y занумерованы так, что

$$0 = \mu_1 = \dots = \mu_l < \mu_{l+1} \leq \dots \leq \mu_n, \quad (6)$$

где μ_i — расстояние точки λ_i от $\mathfrak{M}$. Условие (6) регулирует в матрице J взаимное расположение клеток Жордана с разными μ_i , оставляя произвол во взаимном расположении клеток с одинаковыми μ_i . Заметим еще, что в подслучаях 1 в) и 1 г) прямая $\mathfrak{M}$ определена однозначно. В подслучаях 1 а) и 1 б) в качестве прямой $\mathfrak{M}$ можно взять любую прямую, лежащую внутри некоторой пары вертикальных углов с вершиной в нуле. В частности, ее можно выбрать так, чтобы $\mu_i = \mu_j$, только если $\lambda_i = \lambda_j$.

Обозначим через τ такое комплексное число единичного модуля, что двумерный вектор $(\operatorname{Re} \tau, \operatorname{Im} \tau)$ ортогонален прямой $\mathfrak{M}$ и точка τ лежит по ту же сторону от $\mathfrak{M}$, что и $\mathfrak{N}$. Положим

$$\mu_j = \operatorname{Re}(\bar{\tau} \lambda_j), \quad \nu_j = \operatorname{Im}(\bar{\tau} \lambda_j), \quad j = 1, \dots, n$$

и

$$\underline{M} = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \underline{N} = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

Тогда

$$\bar{\tau} \Lambda = \underline{M} + i \underline{N} \quad (\text{здесь } i^2 = -1).$$

Легко видеть, что μ_j — по-прежнему расстояние точки λ_j от $\mathfrak{M}$. Удобно представлять себе, что $\mathfrak{M}$ мнимая ось и $\mathfrak{N}$ лежит справа от нее. Тогда $\tau = 1$, $\underline{M} = \operatorname{Re} \Lambda$ и $\underline{N} = \operatorname{Im} \Lambda$. Заметим еще, что уравнение

$$\langle Q, \Lambda \rangle = 0 \quad (7)$$

для действительных Q эквивалентно системе двух уравнений:

$$\langle Q, \underline{M} \rangle = 0, \quad (8)$$

$$\langle Q, \underline{N} \rangle = 0.$$

Пусть $V = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор длины n , обозначим $V' = (v_1, \dots, v_l)$ — вектор длины l и $V'' = (v_{l+1}, \dots, v_n)$ — вектор длины $n-l$. Неравенство $V \geq 0$ означает, что $v_1 \geq 0, \dots, v_n \geq 0$. Эти обозначения будут широко использоваться. Например, согласно (6) $\underline{M}' = 0$, $\underline{M}'' > 0$.

Лемма 2. Если Λ относится к случаю 1, то уравнение (8) имеет только такие решения $Q \in N_i$, что $Q'' = 0$, если $i \leq l$;

$$Q'' = E_j - E_i, \text{ где } \mu_j = \mu_i, \quad (9)$$

или

$$Q'' = \sum_{j=l+1}^m q_j E_j - E_i, \text{ где } q_j \geq 0, m < i, \mu_m < \mu_i, \quad (10)$$

если $i > l$.

Доказательство. Вследствие (6) уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\langle Q'', M'' \rangle = 0. \quad (11)$$

Пусть $Q \in N_i$, $i \leq l$, тогда $Q'' \geq 0$ и $\langle Q, M \rangle > 0$, если $Q'' \neq 0$. Следовательно, для таких решений уравнения (8) $Q'' = 0$.

Пусть $Q \in N_i$, $i > l$, тогда уравнение (11) в силу (6) имеет решения только двух типов:

I. $\|Q''\| = 0$, $Q'' = E_j - E_i$, если $\mu_j = \mu_i$.

II. $\|Q''\| > 0$, $q_i = -1$, $q_{i+1} = \dots = q_n = 0$.

Это и есть решения (9) и (10).

Следствие. Если Λ относится к случаю 1, то уравнение (7) имеет только решения, указанные в лемме 2.

Теорема 2. Если Λ относится к случаю 1, то нормальная форма имеет вид

$$\dot{y}_i = \psi_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (12')$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j=l+1}^n b_{ij} y_j + \sum b_{iq_{l+1} \dots q_{i-1}} y_{l+1}^{q_{l+1}} \dots y_{i-1}^{q_{i-1}}, \quad i = l+1, \dots, n. \quad (12'')$$

Здесь ψ_i , b_{ij} , $b_{iq_{l+1} \dots q_{i-1}}$ — степенные ряды от $y_1, \dots, y_l$. Первая сумма в (12'') берется по тем $j > l$, для которых выполнено (9); вторая сумма — по всем целым $q_{l+1}, \dots, q_{i-1}$, для которых выполнено (10).

Доказательство немедленно следует из леммы 2. В нормальной форме (1) $q_{iq} \neq 0$, только если $Q \in N_i$, $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Если $i \leq l$, то по лемме 2, $q_{l+1} = \dots = q_n = 0$, то есть $y_{l+1}, \dots, y_n$ входят в ψ_i с нулевыми показателями степени. Следовательно, ψ_i не зависит от $y_{l+1}, \dots, y_n$.

Если $i > l$, то Q'' имеет либо вид (9), либо (10). Этим Q'' и отвечают члены, выписанные в (12'').

Замечание. Если Λ относится к случаю 1, то в нормальной форме (12) подсистема (12') сама является нормальной формой l -го порядка. Аналогично теореме 2 из леммы 2 и теореме 2 § 1 гл. III выводится, что в случае 1 преобразование, переводящее нормальную форму (12) в другую нормальную форму, имеет вид

$$y_i = \eta_i(z_1, \dots, z_l), \quad i = 1, \dots, l, \quad (13')$$

$$y_i = \sum_{j=l+1}^n c_{ij}(Z') z_j + \eta_i(z_1, \dots, z_{l-1}), \quad i = l+1, \dots, n. \quad (13'')$$

Причем (13') переводит нормальную форму l -го порядка (12') в нормальную форму l -го порядка, а η_i в (13'') не содержат членов ниже второй степени по Z'' .

Теперь покажем, что дает теорема 2 в подслучаях случая 1.

1а) Здесь $l=0$. Поэтому в (12) отсутствует подсистема (12'), и ряды b_{ij} , $b_{iq_{l+1} \dots q_{l-1}}$ являются константами. Причем $b_{ij}=0$ для $j>i$, ибо жорданова матрица линейной части (12) взята нижней треугольной, как в теореме 1 § 1 гл. III. Итак, нормальная форма треугольна:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum b_{iq_1 \dots q_{i-1}} y_1^{q_1} \dots y_{i-1}^{q_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где сумма берется по всем целым $q_1, \dots, q_{i-1} \geq 0$ таким, что

$$\lambda_i = q_1 \lambda_1 + \dots + q_{i-1} \lambda_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Эта нормальная форма (14) была получена Дюляком [139]. Уравнения (15) имеют только конечное число решений в целых $q_1, \dots, q_{i-1} \geq 0$. Поэтому правые части нормальной формы (14) являются полиномами. По этой же причине преобразования от одной нормальной формы к другой также являются полиномиальными и, следовательно, бирегулярными. Уравнения системы (14), очевидно, последовательно решаются в квадратурах.

1б) Здесь $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = 0$, поэтому первая сумма в (12'') берется по тем j , для которых $\lambda_j = \lambda_i$, а вторая сумма — по таким целым $q_{l+1}, \dots, q_{i-1} \geq 0$, что $q_{l+1} + \dots + q_{i-1} > 1$ и $\lambda_i = q_{l+1} \lambda_{l+1} + \dots + q_{i-1} \lambda_{i-1}$.

Интегрирование нормальной формы (12) в этом случае сводится к двум этапам: (I) решению системы l -го порядка и (II) последовательным интегрированиям систем линейных уравнений с переменными коэффициентами. Если все $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$ различны, то второй этап — это последовательные квадратуры, как в подслучае 1а).

1в) Здесь подсистема (12') сама является нормальной формой l -го порядка. К ней применима теорема 1. Поэтому интегрирование системы (12) в этом подслучае сводится к решению нелинейной системы порядка меньшего, чем l , интегрированию до порядка l и последовательному решению систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Если для всех $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$ расстояния от прямой $\mathfrak{M}$ различны, то (8) не имеет решений $Q'' \neq 0$ и не придется решать системы линейных дифференциальных уравнений, а только последовательно интегрировать линейные уравнения.

1г) В этом случае теорема 2 не дает никаких упрощений.

Пусть L — линейное подпространство в R^n , образованное действительными решениями уравнения (7) и $O = \{Q \geq 0\}$ — неотрицательный ортант (квадрант, октант и т. д.). Приведенная выше классификация Λ интерпретируется геометрически (в R^n) так:

1а) $L \cap O = 0$, т. е. если $Q \geq 0$, $Q \neq 0$, то $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$. Действительно, для таких Q комплексное число $\langle Q, \Lambda \rangle / \|Q\|$ лежит внутри или на границе выпуклой оболочки $\mathfrak{R}$ точек λ_i , следовательно, не может быть нулем.

1б) $L \cap O$ является l -мерной гранью конуса O , задаваемой равенствами

$$Q'' = 0. \quad (16)$$

1в) $L \cap O$ является $(l-1)$ -мерным подмножеством l -мерной грани выпуклого конуса O , задаваемой равенствами (16).

1г) Здесь L имеет размерность $n-1$ и пересекается с внутренними точками O . Если подслучаи 1а), 1б), 1в) следует рассматривать как вырожденные, то этот является регулярным, ибо пересечение не вырождается в часть границы O . Вообще говоря, здесь нельзя ожидать больших упрощений нормальной формы, чем даваемое теоремой 1 понижение порядка по крайней мере на единицу.

2. Этот случай отличается от 1г) лишь тем, что размерность L есть $n-2$.

Более тонкие свойства обобщенной треугольности нормальных форм см. в п° III § 2 Брюно [31].

2.3. ОДНОМЕРНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ *

Рассмотрим формальную систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 g_1(u_1), \quad g_1 = \sum_{k=m}^{\infty} g_{1k} u_1^k, \quad g_{1m} \neq 0, \quad m > 0, \\ \dot{u}_2 &= u_2 g_2(u_1), \quad g_2 = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} u_1^k. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $g_{20} \neq 0$, то эта система является нормальной формой, ибо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = g_{20}$ и векторные показатели имеют вид $Q = (k, 0)$. Согласно теореме 2 § 1 гл. III преобразования, переводящие нормальную форму (17) в другую нормальную форму, имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 d_1(v_1) \equiv v_1 \sum_{k=0}^{\infty} d_{1k} v_1^k, \quad d_{10} \neq 0, \\ u_2 &= v_2 d_2(v_1) \equiv v_2 \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} v_1^k, \quad d_{20} \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема 3. Существует формальное преобразование (18) с $d_{10} = d_{20} = 1$, которое приводит систему (17) к виду

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1 (\gamma_m v_1^m + \gamma_{2m} v_1^{2m}), \\ \dot{v}_2 &= v_2 \beta(v_1) \equiv v_2 \sum_{k=0}^m \beta_k v_1^k. \end{aligned} \quad (19)$$

* Об одномерных нормальных формах см. у Брюно в [38].

Доказательство проведем сначала для первого уравнения. Пусть замена (18.1) приводит уравнение (17.1) к виду

$$\dot{v}_1 = v_1 \gamma(v_1), \quad \gamma = \sum_{k=m}^{\infty} \gamma_k v_1^k.$$

Тогда ряды g_1 , d_1 , γ связаны равенством

$$\left(d_1 + v_1 \frac{dd_1}{dv_1}\right) v_1 \gamma = v_1 d_1 g_1(v_1 d_1) \equiv g_{1m} v_1^{m+1} d_1^{m+1} + \dots, \quad (20)$$

откуда для коэффициентов при v_1^{m+1+k} получается равенство

$$(1+k) d_{1k} \gamma_m + \gamma_{k+m} = g_{1m} (m+1) d_{1k} + c_{m+1+k}, \quad (21)$$

где c_{m+1+k} — полином от d_{ij} и γ_{m+j} с $j < k$. Для $k=0$, поскольку $d_{10}=1$, формула (20) дает $\gamma_m = g_{1m}$; и равенство (21) принимает вид

$$g_{1m} (k-m) d_{1m} + \gamma_{k+m} = c_{m+1+k} \quad (k > 0).$$

Это уравнение будет удовлетворено, если последовательно для $k=1, 2, \dots$ положим

$$\begin{aligned} \gamma_{k+m} &= 0, \quad d_{1k} = c_{m+1+k} g_{1m}^{-1} (k-m)^{-1} \text{ для } k \neq m, \\ \gamma_{2m} &= c_{2m+1}, \quad d_{1m} = 0. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (17.1) приведено к виду (19.1) преобразованием (18.1); при этом уравнение (17.2) примет вид

$$\dot{u}_2 = u_2 \tilde{\beta}(v_1), \quad \tilde{\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\beta}_k v_1^k. \quad (22)$$

Легко проверить, что замена

$$u_2 = v_2 \exp \int \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{\beta}_k v_1^k \right) v_1^{-1} (\gamma_m v_1^m + \gamma_{2m} v_1^{2m})^{-1} dv_1 \quad (23)$$

имеет вид (18.2) и приводит уравнение (22) к виду (19.2), где $\beta_k = \tilde{\beta}_k$. Теорема доказана.

Если допустить замену времени, то, как показано у Брюно в [31, в примере 3в) введения], система (17) с $g_{20} \neq 0$ приводится к системе

$$dv_1/dt_1 = v_1^{m+1}, \quad dv_2/dt_1 = v_2 (\beta_0 + \beta_m v_1^m)$$

формальной заменой переменных.

Из теоремы 3 и результатов Горна [137] (см. также Брюно [31, пример 3в) введения]) следует, что аналитическая система

$$\dot{x}_1 = x_1 g_1(x_1), \quad \dot{x}_2 = x_2 g_2(x_1) + a(x_1), \quad g_{20} \neq 0 \quad (24)$$

аналитической заменой $x_1 = y_1 d_1(y_1)$, $x_2 = y_2 d_2(y_1) + c(y_1)$ приводится к виду

$$\dot{y}_1 = y_1 (\gamma_m y_1^m + \gamma_{2m} y_1^{2m}),$$

$$\dot{y}_2 = y_2 \sum_{k=0}^m \beta_k y_1^k + \sum_{k=1}^m b_k y_1^k.$$

Т. е. в классе аналитических преобразований система (24) имеет, кроме $m+3$ формальных инвариантов γ и β , еще m новых инвариантов b_k . Число коэффициентов, имеющих в системе (19), равно $m+3$. Один из них можно сделать равным единице преобразованием подобия: $y_1 = \tilde{c}_1 z_1$. Следовательно, нормальная форма (17) относительно формальных замен координат имеет $m+2$ непрерывных инварианта.

Заметим, что у нормальной формы (17) размерность $\delta = 1$. Рассмотрим теперь произвольные нормальные формы (1) с $\delta = 1$. Т. е. среди решений $Q \in N$ уравнения $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$ все векторы Q пропорциональны одному вектору R . Будем различать два случая.

а) Одна из координат вектора R равна -1 . Можно считать, что $r_n = -1$, тогда нормальная форма есть

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{y}_n = \lambda_n y_n + a y_1^{r_1} \dots y_{n-1}^{r_{n-1}}.$$

На величину коэффициента a влияют лишь преобразования подобия $y_i = c_i \tilde{y}_i$, так что $\tilde{a} = C^n a$. Поэтому в классе комплексных преобразований a есть либо 0, либо 1, в классе же вещественных преобразований может сохраняться еще и знак a (если $a \neq 0$).

б) У вектора R все координаты $r_i \geq 0$. Исследование этого случая составляет основную цель этого пункта. Будем считать, что целочисленный вектор R является наименьшим возможным, т. е. наибольший общий делитель его компонент r_i равен 1. Тогда нормальная форма (1) есть

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik} Y^{kR}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Обозначим $G_k = (g_{1k}, \dots, g_{nk})$; очевидно, $G_0 = \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, поэтому $\langle R, G_0 \rangle = 0$. Пусть $\langle R, G \rangle \neq 0$, поскольку $\langle R, G \rangle \equiv \Sigma \langle R, G_k \rangle Y^{kR}$, то для некоторого натурального числа m

$$\langle R, G_j \rangle = 0 \text{ для } j < m, \langle R, G_m \rangle \neq 0. \quad (26)$$

Заметим, что, согласно теореме 2 § 1 гл. III, в нашем случае

преобразование, переводящее нормальную форму (25) в другую нормальную форму, имеет вид

$$y_i = z_i \sum_{k=0}^{\infty} d_{ik} Z^{kR}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Теорема 4. Если у формальной системы (25) выполнено свойство (26), то существует формальное обратимое преобразование (27) с $d_{i0}=1$, приводящее систему (25) к виду

$$\dot{z}_i = z_i \left(\sum_{k=0}^m \tilde{g}_{ik} Z^{kR} + \alpha_i Z^{2mR} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Доказательство. Пусть $S_i=R$, а $S_i=(s_{i1}, \dots, s_{in})$, $i=2, \dots, n$, — такие целочисленные векторы, что определитель $\det(s_{ij})=1$. Доказательство их существования см. в п. 2.1 гл. III. Сделаем степенное преобразование

$$u_i = y_1^{s_{i1}} \dots y_n^{s_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

тогда, согласно п. 2.1 гл. III, система (25) перейдет в систему

$$\dot{u}_i = u_i g'_i(u_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (30)$$

где $g'_i = \langle S_i, G \rangle$. В частности, по свойству (26)

$$g'_1 = g'_{1m} u_1^m + \dots, \quad g'_{1m} \neq 0.$$

Применяя к системе (30) теорему 3, получим, что существует формальная замена

$$u_i = v_i d_i(v_i), \quad d_i(0)=1, \quad i=1, \dots, n, \quad (31)$$

которая приводит систему (30) к виду

$$\dot{v}_1 = v_1 (\gamma_{1m} v_1^m + \omega_1 v_1^{2m}), \quad (32)$$

$$\dot{v}_i = v_i \left(\sum_{k=0}^m \gamma_{ik} v_1^k + \omega_i v_i^{2m} \right), \quad i = 2, \dots, n,$$

где $\omega_i (i > 1)$ можно взять произвольными. Чтобы получить ω_i , надо в (23) вместо суммы $\sum \tilde{\beta}_k v_1^k$ взять $\sum \tilde{\beta}_k v_1^k - \omega_i v_1^{2m}$. Положим

$$v_i = z_1^{s_{i1}} \dots z_n^{s_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (33)$$

тогда система (32) перейдет в систему

$$\dot{z}_i = z_i \left(\sum_{k=0}^m \tilde{g}_{ik} Z^{kR} + \tilde{\omega}_i Z^{2mR} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (34)$$

где $\tilde{G}_k = \alpha \Gamma_k$, $\tilde{\Omega} = \alpha \Omega$, $\alpha = (\alpha_{ij}) = (s_{ij})^{-1}$.

Чтобы получить $\tilde{\Omega} = Ra$, достаточно положить $\Omega = a^{-1}R$, тогда система (34) будет иметь вид (28). Остается показать, что преобразование от Y к Z имеет требуемый вид. Действительно, из (29), (31) и (33) получаем, что

$$y_1 = v_1^{\alpha_{i1}} \dots v_n^{\alpha_{in}} d_1^{\alpha_{i1}}(v_1) \dots d_n^{\alpha_{in}}(v_1) = z_1 d_1^{\alpha_{i1}}(Z^R) \dots d_n^{\alpha_{in}}(Z^R).$$

Поскольку d_i суть ряды по неотрицательным степеням v_i с единичным свободным членом, то таким же будет произведение любых целых степеней d_i . Т. е. преобразование от Y к Z имеет нужный вид. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы 3, 4 оставляют свободу в преобразованиях подобия $y_i = c_i \tilde{y}_i$, которое позволяет сократить еще на единицу число непрерывных инвариантов. Например, в системе (28) можно потребовать, чтобы $\langle R, \tilde{G}_m \rangle = \pm 1$. Тогда в системе (28) инвариантами будут собственные числа, коэффициенты $\tilde{g}_{ik}$ (связанные одним условием для каждого i) и число a . Итого $n+m(n-1)+1 = mn - m + n + 1$ инвариантов. В вещественном случае добавляется знак $\langle R, \tilde{G}_m \rangle$.

2.4. ВТОРИЧНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ

В предыдущем пункте было показано, что использование «нормальных» преобразований теоремы 2 § 1 гл. III позволяет в случаях $\delta=1$ существенно упростить нормальную форму и найти все ее формальные инварианты.

Такая ситуация встречается и в других случаях. Например, для системы Гамильтона в случае резонанса (см. теорему 2 § 1 Брюно [30]). Или для систем, у которых недиагональна жорданова форма J матрицы A линейной части. Остановимся на этом подробнее. Согласно Белицкому [14], нормальную форму можно привести к виду

$$\dot{Y} = JY + \Psi(Y), \quad (35)$$

где формальный ряд Ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} J^* Y = J^* \Psi(Y). \quad (36)$$

J^* — транспонированная матрица J . Если ввести диагональную матрицу $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то обычное определение нормальной формы записывается как (см. Стернберг [145])

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} LY = L\Psi(Y). \quad (37)$$

Если выполнено свойство (36), то выполнено также свойство (37) и, кроме того, добавочное свойство

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} (J^* - L)Y = (J^* - L)\Psi(Y).$$

Это дополнительное свойство, хотя и вносит некоторое упрощение в структуру нелинейных членов, тем не менее не дает дальнейшего понижения порядка системы (как теоремы 1 § 1 и 1 § 2 гл. III).

Пример 1 (см. Белицкий [15], Богданов [21], Садовский [107а]). Пусть $n=2$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то каждая двумерная формальная система (35) является нормальной формой. Свойство же (36) выполнено лишь для систем вида

$$\dot{y}_1 = \alpha(y_2) + y_1 \beta(y_2),$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + y_2 \beta(y_2),$$

при этом $\beta(0) = \alpha(0) = d\alpha(0)/dy_2 = 0$. Но «размерность» этой системы остается равной двум. Кроме того, эта система допускает еще преобразования $y_1 = z_1 + z_2 \gamma(z_2)$, $y_2 = z_2$.

Согласно теореме 1 нормальная форма посредством степенного преобразования сводится к системе, у которой выделяется подсистема порядка δ , имеющая нулевые собственные значения. Как показано в предыдущем пункте, для $\delta=1$ можно вычислить все формальные инварианты такой системы. Но для $\delta>1$ найти все формальные инварианты, вообще говоря, невозможно. Например, при $\delta=2$ это приводит к исследованию неэлементарной особой точки (см. § 3 гл. II). При $\delta>1$ вторичная нормализация не дает существенных упрощений нормальной формы. Более перспективен здесь подход с позиций локального метода. Он заключается в том, что окрестность неэлементарной особой точки (т. е. в случае $\Lambda=0$) разбивается на куски, в каждом из кусков находится своя «элементарная» нормальная форма. При этом класс используемых преобразований существенно шире, чем класс исходных формальных преобразований в виде степенных рядов (см. гл. IV).

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

для которой нуль $X = (x_1, \dots, x_n) = 0$ является неподвижной точкой. **Задача 1:** в окрестности точки $X=0$ найти все инвариантные аналитические множества, содержащие эту точку.

Здесь, следуя Брюно [45], кратко без доказательств изложим основные результаты в решении этой задачи.

Вместо задачи 1 здесь будет решаться задача 2: на каких множествах система (1) может быть нормализована посредством аналитической замены координат? В частности, когда аналитично преобразование

$$x_i = \xi_i(Y), \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

системы (1) в нормальную форму

$$\dot{y}_i = \psi_i(Y) = y_i \sum_{\langle Q, \Lambda \rangle=0} g_{iQ} Y^Q, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

Ответ на последний вопрос получен Брюно [31], а ответ на предыдущий — Брюно [42]. В дальнейшем в пп. 3.2—3.7 гл. III для упрощения изложения будем предполагать, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ чисто мнимые, т. е.

$$\operatorname{Re} \Lambda = 0. \quad (4)$$

3.2. СХОДИМОСТЬ

НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Нормализующее преобразование далеко не всегда является аналитическим. Поэтому возникает

В о п р о с: для каких нормальных форм (3) из аналитичности исходной системы (1) следует аналитичность нормализующего преобразования (2)?

Окончательный ответ на этот вопрос получен в работах Брюно [27, 31]. Заключается он в следующем.

У с л о в и е А. В нормальной форме (3)

$$\psi_i = \lambda_i y_i a, \quad i=1, \dots, n,$$

где $a = a(Y)$ — некоторый степенной ряд.

У с л о в и е ω . Положим $\omega_k = \min |\langle Q, \Lambda \rangle|$ по $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$, $Q \in \mathbb{N}$, $\|Q\| \leq 2^k$. Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \omega_k.$$

Это слабое арифметическое условие на собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, оно выполнено почти всегда. Напротив, условие А является жестким ограничением на нормальную форму, ибо оно требует, чтобы n рядов ψ_i определенным образом выражались через один ряд a .

Т е о р е м а 1. Если у системы (1) вектор Λ удовлетворяет условию ω и нормальная форма (3) удовлетворяет условию А, то нормализующее преобразование (2) аналитично.

Более того, в указанных работах автора показано, что условие А не может быть ослаблено. Т. е., если нормальная форма

(3) не удовлетворяет условию А, то существует аналитическая исходная система (1), которая приводится к нормальной форме (3) расходящимся преобразованием. Поэтому, как правило, нормализующее преобразование не аналитично, и нельзя аналитически нормализовать систему (1) в полной окрестности неподвижной точки $X=0$.

3.3. О МНОЖЕСТВАХ

Пусть функции $f_1(X), \dots, f_s(X)$ аналитичны в точке $X=0$ и в этой точке обращаются в ноль. Тогда система уравнений

$$f_j(X)=0, \quad j=1, \dots, s \quad (5)$$

определяет аналитическое множество $\mathcal{M}$, содержащее точку $X=0$.

Множеству $\mathcal{M}$ в кольце сходящихся степенных рядов соответствует идеал $\mathcal{J}$ с базисом $f_1, \dots, f_s$. Если $f_1, \dots, f_s$ — формальные степенные ряды, то будем говорить, что система уравнений (5) определяет формальное множество $\mathcal{M}$; в кольце формальных степенных рядов ему соответствует идеал $\mathcal{J}$ с базисом $f_1, \dots, f_s$. Множество $\mathcal{M}$ будет аналитическим, если в идеале $\mathcal{J}$ имеется базис из сходящихся степенных рядов.

Множество $\mathcal{M}$ назовем *многообразием* (локальным), если система уравнений (5) может быть разрешена относительно s координат из $x_1, \dots, x_n$.

При формальной обратимой замене координат (2) между формальными множествами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому образ и прообраз будем считать за одно множество в разных системах координат. В частности, многообразие остается многообразием в любой системе координат.

Множество $\mathcal{M}$ будет *интегральным* (или инвариантным) для системы (1), если

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \varphi_k(X) \in \mathcal{J}, \quad j=1, \dots, s.$$

Задача 1': Какие формальные инвариантные множества системы (1) являются аналитическими?

Дело в том, что формальные инвариантные множества сравнительно просто вычисляются по нормальной форме (3). Надо лишь научиться выделять из них те, которые аналитичны для исходной системы (1). Обычно такая задача ставилась лишь для многообразий (см. Брюно [40; 31, § 10]).

Пусть у системы

$$\dot{z}_i = \theta_i(Z), \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

с $\theta_i(0)=0$, матрица линейной части треугольна и ее диагональ

есть $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Аналогично записи (4) положим

$$\theta_i = z_i \sum h_{iq} Z^q, \quad i = 1, \dots, n.$$

Выделим «резонансные части»

$$\theta_{i\Lambda} = z_i \sum h_{iq} Z^q \text{ по } \langle Q, \Lambda \rangle = 0.$$

Пусть формальное множество

$$\mathcal{M} = \{Z : f_1(Z) = \dots = f_s(Z) = 0\} \quad (7)$$

является интегральным для системы (6). Будем говорить, что система (6) *нормализована на множестве (7)*, если все разности $\theta_i - \theta_{i\Lambda}$, $i = 1, \dots, n$ принадлежат идеалу $\mathcal{I}$ множества (7). Например, нормальная форма (3) нормализована на любом множестве.

3.4. МНОЖЕСТВО $\mathcal{A}$

Образуем по нормальной форме (3) формальное множество

$$\mathcal{A} = \{Y : \psi_i = \lambda_i y_i a, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (8)$$

где a — свободный параметр. Его можно исключить из уравнений, и получить задание множества $\mathcal{A}$ в виде (7). Иначе говоря, $\mathcal{A}$ — это множество, на котором выполнено условие А.

Теорема 2. Если у системы (1) все собственные числа λ_i попарно соизмеримы, то множество $\mathcal{A}$ аналитично и существует обратимая аналитическая замена координат

$$x_i = \eta_i(Z), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

переводящая систему (1) в систему (6), которая нормализована на множестве $\mathcal{A}$.

Если выполнено условие А, то множество $\mathcal{A}$ — это полная окрестность неподвижной точки, и, согласно теореме 2, система (1) может быть нормализована во всей окрестности, что следует также и из теоремы 1.

Пример 1. Пусть система (1) имеет две переменные x_1, x_2 и один малый параметр ε (то есть $\varepsilon = 0$); причем $\lambda_1 = -\lambda_2 = i$. Тогда согласно теореме 4 § 1 гл. III нормальная форма есть

$$\dot{\varepsilon} = 0; \quad \dot{y}_j = y_j g_j(\varepsilon, y_1 y_2) \equiv \psi_j, \quad j = 1, 2.$$

Положим $\rho = y_1 y_2$. Множество

$$\mathcal{A} = \{\varepsilon, y_1, y_2 : \psi_j = \lambda_j y_j a, \quad j = 1, 2\} = \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3,$$

где

$$\mathcal{A}^1 = \{y_2 = 0\}, \quad \mathcal{A}^2 = \{y_1 = 0\},$$

$$\mathcal{A}^3 = \{\varepsilon, y_1, y_2 : g_1 + g_2 = 0\}$$

суть три компоненты множества $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$ — координатные оси. По теореме 2 множество $\mathcal{A}$ аналитично. Если

$$g_j = \lambda_j + c_j \rho + b_j \varepsilon + \dots,$$

то компонента $\mathcal{A}^3$ определяется уравнением

$$g_1 + g_2 \equiv (c_1 + c_2)\rho + (b_1 + b_2)\epsilon + \dots = 0.$$

В случае общего положения $b_1 + b_2 \neq 0$ и по теореме о неявной функции это уравнение имеет единственное решение $\epsilon = \epsilon(\rho)$, т. е. компонента $\mathcal{A}^3$ является многообразием. Для исходной вещественной системы она содержит периодические решения, при прохождении параметра ϵ через ноль происходит бифуркация этих решений (ср. Арнольд [7, § 5.6], Пятли [106], Леонтович и Тареев [82], Тареев [117]).

3.5. МНОЖЕСТВО $\mathcal{A}$

В теореме 3 требование попарной соизмеримости чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ исключает появление малых знаменателей $\langle Q, \Lambda \rangle$. Если эти знаменатели могут быть сколь угодно малы, то множество $\mathcal{A}$ уже необязательно будет аналитическим (для многообразий это показано Брюно [40, 41]).

Пусть $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ — диагональная матрица. Рассмотрим на множестве $\mathcal{A}$ матрицу

$$B = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} - La,$$

где a — тот же параметр, что и в уравнениях (8), определяющих множество $\mathcal{A}$. Определим формальное множество $\mathcal{B}$ как такое подмножество множества $\mathcal{A}$, на котором матрица B нильпотентна. Т. е.

$$\mathcal{B} = \{Y : Y \in \mathcal{A}, B^n = 0\}.$$

Теорема 3. Если у системы (1) собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют условию ω , то множество $\mathcal{B}$ аналитично и существует обратимое аналитическое преобразование (9), переводящее систему (1) в систему (6), нормализованную на множестве $\mathcal{B}$.

3.6. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ $\mathcal{A}$ И $\mathcal{B}$

Для простоты предположим, что нормальная форма (3) аналитична и рассмотрим свойства решений этой системы на множествах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

1) Все решения из множества $\text{Re } \mathcal{A}$ условно периодичны (включая периодические и неподвижные решения). Действительно, на каждом решении значения параметра a постоянно, и имеем

$$y_i = y_i^0 \exp \lambda_i a t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

2) Пусть $\mathcal{K}$ — координатное подпространство:

$$y_{n'+1} = \dots = y_n = 0 \quad (n' \leq n).$$

Обозначим через $r=r(\mathcal{H})$ такое целое число, что среди $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ имеется r линейно независимых над рациональными числами, а всякие $r+1$ чисел из $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ линейно зависимы.

Тогда решение (10) из множества $\text{Re}(\mathcal{A} \cap \mathcal{H})$, не лежащее ни в каком меньшем координатном подпространстве, является условно периодическим с r базисными частотами ($0 \leq r \leq n'$).

3) Для условно периодического решения (10) из множества $\mathcal{A}$ базис частот вполне определяется значением параметра a . При этом собственные числа могут быть произвольными.

4) Для условно периодического решения (10) из множества $\mathcal{B}$ значение параметра a определяет не только базис частот, но и собственные числа. Этим свойством множество $\mathcal{B}$ выделяется в множестве $\mathcal{A}$.

3.7. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 2

Обозначим

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{r(\mathcal{H}) \leq 1} (\mathcal{A} \cap \mathcal{H}),$$

где объединение берется по всем координатным подпространствам $\mathcal{H}$ (по Y), для которых $r(\mathcal{H}) \leq 1$.

Теорема 4. *Множество $\tilde{\mathcal{A}}$ аналитично в системе (1), и система (1) может быть нормализована на этом множестве аналитической заменой (9).*

Это, очевидно, обобщение теоремы 2. Заметим, что в множество $\tilde{\mathcal{A}}$ попадают все формальные семейства периодических ($r=1$) и неподвижных ($r=0$) решений. По теореме 4 они всегда аналитичны. Итак, при условии ω у системы (1) имеются аналитические множества $\tilde{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}$.

Пример 2. Рассмотрим систему Гамильтона с m степенями свободы:

$$\dot{x}_j = \frac{\partial h}{\partial x_{j+m}}, \quad \dot{x}_{j+m} = -\frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10')$$

где гамильтониан h аналитичен в нуле, и его разложение начинается с квадратичных членов. Собственные числа разбиваются на пары с противоположными знаками:

$$\lambda_j = -\lambda_{j+m} = i\alpha_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Нормальная форма (3) также является системой Гамильтона

$$\dot{u}_j = \frac{\partial h}{\partial v_j}, \quad \dot{v}_j = -\frac{\partial h}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где ряд h содержит только резонансные члены. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ линейно независимы над рациональными числами.

Тогда в нормальной форме (11)

$$h = h(\rho_1, \dots, \rho_m), \text{ где } \rho_j = u_j v_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Поэтому имеем

$$\mathcal{A} = \left\{ U, V : u_j \frac{\partial h}{\partial \rho_j} = \lambda_j u_j a, \quad v_j \frac{\partial h}{\partial \rho_j} = \lambda_j v_j a, \quad j = 1, \dots, m \right\}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ в декартовых координатах $\tilde{P} = (\rho_1, \dots, \rho_m)$. Тогда каждое координатное подпространство (по $\tilde{P}$) содержит одну компоненту множества $\mathcal{A}$, не лежащую в меньшем координатном подпространстве. Следовательно, множество $\mathcal{A}$ состоит из $2^m - 1$ таких компонент; из них для каждого $d \leq m$ имеется ровно $\frac{m!}{d!(m-d)!}$ компонент, расположенных на d -мерных (по $\tilde{P}$) координатных подпространствах, для которых $r = d$. В частности, имеется одна компонента

$$\mathcal{A}^0 = \left\{ \tilde{P} : \frac{\partial h}{\partial \rho_j} = \lambda_j a, \quad j = 1, \dots, m \right\},$$

расположенная вне координатных подпространств. Для нее $r = m$ и на ней $B^2 = 0$. В случае общего положения матрица B не является нильпотентной на координатных подпространствах. Поэтому $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0$. Кроме того, m компонент

$$\mathcal{A}_i = \{ \tilde{P} : \rho_j = 0, j \neq i \}, \quad i = 1, \dots, m$$

являются осями по $\tilde{P}$ и имеют $r = 1$; они в совокупности составляют множество $\tilde{\mathcal{A}}$. Согласно теореме 4, система (10') имеет m однопараметрических аналитических семейств периодических решений (это семейства Ляпунова [85]). Если числа α_i удовлетворяют условию ω , то по теореме 3 аналитическим множеством будет и компонента $\mathcal{A}^0$. Если эта компонента имеет вещественную часть, то она является однопараметрическим семейством m -мерных неприводимых инвариантных торов с базисом частот $\alpha_1 a, \dots, \alpha_m a$ и с нулевыми собственными значениями. При $a \rightarrow 1$ торы этого семейства стремятся к неподвижной точке $X = 0$.

3.8. СПЕКТР ВНЕ МНИМОЙ ОСИ

Пусть теперь у аналитической системы

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad i = 1, \dots, k + l + m \quad (12)$$

в окрестности неподвижной точки $X = (x_1, \dots, x_{k+l+m}) = 0$ среди собственных чисел имеется l чисто мнимых $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, k с отрицательной вещественной частью $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ и m с положительной вещественной частью $(\mu_1, \dots, \mu_m)$. Тогда система (12) имеет три формальных интегральных многообразия: $\mathcal{W}_-$ (соответствующее $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_l$), $\mathcal{W}_+$ (соответствующее $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \mu_1, \dots, \mu_m$) и $\mathcal{V} = \mathcal{W}_- \cap \mathcal{W}_+$ (соответствующее $\lambda_1, \dots, \lambda_l$).

Посредством формальной обратимой замены переменных $X \rightarrow Y, U, V$ система (12) приводится к «полунормальной форме»:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \Psi(Y) + \check{\Psi}(Y, U, V), \\ \dot{U} &= \Theta(Y, U) + \check{\Theta}(Y, U, V), \\ \dot{V} &= Z(Y, V) + \check{Z}(Y, U, V),\end{aligned}\tag{13}$$

где $\hat{\Psi}(Y, U, 0) = \check{\Psi}(Y, 0, V) = 0, \hat{\Theta}(Y, 0) = \check{\Theta}(Y, 0, V) = \hat{\Theta}(Y, U, 0) = 0, \check{Z}(Y, 0) = \check{Z}(Y, U, 0) = \check{Z}(Y, 0, V) = 0$. То есть многообразия $\mathcal{W}_-, \mathcal{W}_+$ и $\tilde{\mathcal{W}}$ являются координатными многообразиями $V=0, U=0$ и $\tilde{U}=0, V=0$ соответственно. Кроме того, система (13) на многообразии $\mathcal{W}$ индуцирует систему

$$\dot{Y} = \Psi(Y),$$

которая является нормальной формой, а на многообразии $\mathcal{W}_-$ система (13) индуцирует систему

$$\dot{Y} = \Psi(Y), \quad \dot{U} = \Theta(Y, U),$$

которая является полунормальной в смысле Брюно [31, § 9] (аналогично для системы, индуцированной на многообразии $\mathcal{W}_+$).

Теперь так же, как выше, на многообразии $\mathcal{W}$ определяются формальные множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{A}}$. Для них остаются справедливыми теоремы 2—4 с заменой нормализации на полунормализацию. Более того, по каждому формальному множеству $\mathcal{M}$ из многообразия $\mathcal{W}$ определим множество $\mathcal{M}_-$ из многообразия $\mathcal{W}_-$, как такое множество в координатах Y, U , для которого $Y \in \mathcal{M}$, а координаты U произвольны. Аналогично определяется множество $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{W}_+$. Оказывается, что множества $\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+, \mathcal{B}_-, \mathcal{B}_+$ и $\tilde{\mathcal{A}}_-, \tilde{\mathcal{A}}_+$ аналитичны одновременно с множествами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ соответственно (см. Брюно [42, 43]). На множествах $\text{Re } \mathcal{A}_-$ и $\text{Re } \mathcal{A}_+$ лежат решения, асимптотические к торам из множества $\text{Re } \mathcal{A}$ при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ соответственно. Таким образом получаются инвариантные множества, расслаивающиеся на «усатые торы».

3.9. ОКРЕСТНОСТЬ ТОРА

Пусть у системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеется неприводимый инвариантный j -мерный тор $\mathcal{T}$, заполненный условно периодическими решениями ($j \geq 0$). Пусть система аналитична в некоторой окрестности этого тора $\mathcal{T}$.

Задача 1'': в окрестности тора $\mathcal{T}$ найти все инвариантные аналитические множества, содержащие тор $\mathcal{T}$.

Будем предполагать, что система на торе $\mathcal{T}$ и система в вариациях приводимы, тогда тор $\mathcal{T}$ обладает базисом частот и набором собственных чисел $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i$.

Если $j=0$, то тор $\mathcal{T}$ является неподвижной точкой; соответствующая задача разбиралась в предыдущих пунктах.

Если исходный тор $\mathcal{T}$ не является неподвижной точкой ($j > 0$), то это либо периодическое решение ($j = 1$), либо неприводимый тор с условно периодическими решениями ($j > 1$).

В первом случае система в вариациях всегда приводима, и существуют собственные числа. Поэтому существуют нормальная и полунормальная формы, и все конструкции множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ обобщаются без труда. Справедливы и соответствующие обобщения теорем 3 и 4 (см. Брюно [42, 43]). В частности, аналитично всякое формальное семейство периодических решений, приходящее к исходному периодическому решению $\mathcal{T}$.

Во втором случае приводимость системы на торе $\mathcal{T}$ и приводимость системы в вариациях являются дополнительными ограничениями, впрочем, не очень жесткими. После того, как найдены базис частот и все собственные числа, дальнейшая конструкция полунормальной формы и выделение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ производятся аналогично предыдущему. Справедливо и обобщение теоремы 3 (см. Брюно [42, 43]).

В работе [42] показано, что периодические решения, найденные ранее А. Пуанкаре [105], А. М. Ляпуновым [85], К. Л. Зиглем [65] и др., расположены на множестве $\tilde{\mathcal{A}}$; условно периодические решения, найденные ранее А. Н. Колмогоровым [71], В. И. Арнольдом [3], Ю. Мозером [91, 92], Н. Н. Боголюбовым [22] и др., расположены на множестве $\mathcal{B}$.

§ 4. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ

4.1. ЛОКАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Пусть автономная система

$$dS/dt \equiv \dot{S} = F(S), \quad (1)$$

где вектор $S = (s_1, \dots, s_{l+m+n})$, определена и аналитична в области $\mathcal{G}$ комплексного пространства $\mathbb{C}^{l+m+n}$ и вещественна в $\text{Re } \mathcal{G}$. Пусть в $\text{Re } \mathcal{G}$ система (1) имеет инвариантное аналитическое многообразие $\mathcal{M}$ размерности $l+m$, которое расслаивается на m -мерные инвариантные торы $\mathcal{T}^m$. Локальные координаты для многообразия $\mathcal{M}$ это такие функции

$$X = (x_1, \dots, x_l), \quad Y = (y_1, \dots, y_m), \quad Z = (z_1, \dots, z_n) \quad (2)$$

от S , которые определены и аналитичны в некоторой комплексной окрестности многообразия $\mathcal{M}$ и обладают следующими свойствами: (I) $Z=0$ на многообразии $\mathcal{M}$; (II) уравнения $X=\text{const}$, $Z=0$ выделяют m -мерный инвариантный тор $\mathcal{T}^m = \{Y \bmod 2\pi\}$; (III) на $\mathcal{M}$ отличен от нуля якобиан $D(X, Y, Z)/D(S)$. Много-

образе $\text{Re } \mathcal{M}$ является косым произведением m -мерного тора $\mathcal{T}^m = \{Y \bmod 2\pi\}$ на l -мерную область $\mathcal{H}$ по X . В локальных координатах (2) система (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \Phi^{(1)}(X, Y, Z), \\ \dot{Y} &= \Omega(X, Y) + \Phi^{(2)}(X, Y, Z), \\ \dot{Z} &= A(X, Y)Z + \Phi^{(3)}(X, Y, Z) \equiv \tilde{Z}(X, Y, Z),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\Phi^{(k)} = O(|Z|)$, $\Phi^{(3)} = O(|Z|^2)$, A — матрица.

Основное предположение: *Существуют такие локальные координаты (2), в которых у системы (3)*

$$\Omega(X, Y) = \Omega = \text{const} \quad (4)$$

и матрица A является треугольной с постоянной главной диагональю:

$$a_{ij}(X, Y) = 0 \text{ при } i < j, \quad a_{ii}(X, Y) = \lambda_i = \text{const}. \quad (5)$$

Т. е. на всех инвариантных торах $\mathcal{T}^m$ система (1) приводима и имеет один и тот же базис частот, и, кроме того, приводима система в вариациях и собственные числа λ_i одинаковы для всех торов $\mathcal{T}^m$. При этом вещественным координатам S соответствуют вещественные координаты X, Y и такие комплексные значения координат Z , которые связаны соотношением вещественности (см. п. 1.9 гл. III). Обозначим $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ диагональ матрицы A .

4.2. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Пусть функция $f(X; Y)$ аналитична по X, Y и 2π -периодична по Y при

$$\{X \in \mathcal{H}, |\text{Im } Y| < \epsilon\}. \quad (6)$$

Она разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum f_P(X) \exp i \langle P, Y \rangle, \quad P \in \mathbb{Z}^n, \quad (i^2 = -1),$$

который абсолютно сходится на множестве (6) (здесь $\langle P, Y \rangle = \sum p_i y_i$). Все такие функции образуют кольцо, которое обозначим $\mathcal{P}(X; Y)$. Обозначим через $\mathcal{P}(X; Y)[[Z]]$ кольцо формальных степенных рядов

$$\hat{f} = \sum f_Q(X; Y) Z^Q, \quad 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^n, \quad (7)$$

где $Z^Q = z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$ и $f_Q \in \mathcal{P}(X; Y)$. Всякий ряд из этого кольца допускает единственное разложение в ряд Тейлора — Фурье (также называемый рядом Пуассона)

$$\hat{f} = \sum f_{PQ}(X) Z^Q \exp i \langle P, Y \rangle. \quad (8)$$

Заметим, что в системе (3) функции $\Phi^{(k)}$ допускают сходящиеся разложения вида (7) и (8).

Будем теперь упрощать систему (3) посредством формальной замены локальных координат

$$\begin{aligned} X &= U + \Xi^{(1)}(U, V, W), \\ Y &= V + \Xi^{(2)}(U, V, W), \\ Z &= W + B(U, V)W + \Xi^{(3)}(U, V, W), \end{aligned} \quad (9)$$

где ряды $\xi_j^{(k)} \in \mathcal{P}(U; V)[[W]]$ и не содержат свободных от W членов, а $\xi_j^{(3)}$ — также и линейных членов, матрица B — треугольная с нулевой диагональю. Пусть преобразование (9) переводит систему (3), (4), (5) в формальную систему

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \Theta^{(1)}(U, V, W), \\ \dot{V} &= \Omega + \Theta^{(2)}(U, V, W), \\ \dot{W} &= C(U, V)W + \Theta^{(3)}(U, V, W) \equiv \Psi, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \psi_j \in \mathcal{P}(U; V)[[W]]$, $\Theta^{(k)}$ — не имеют свободных от W членов, а $\Theta^{(3)}$ — также и линейных; матрица C треугольна с постоянной диагональю Λ . Положим

$$g_j = \psi_j / \omega_j = \sum g_{jPQ}(U) W^Q \exp i \langle P, V \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь P пробегает $\mathbb{Z}^m$, а Q пробегает множество

$$N_j = \{Q : Q \in \mathbb{Z}^n, Q + E_j \geq 0, \|Q\| \geq 0\};$$

обозначим $N = N_1 \cup \dots \cup N_n$ (ср. п. 1.2 гл. III). Для $\Theta^{(1)}$ и $\Theta^{(2)}$ используем обычное разложение

$$\Theta^{(k)} = \sum \Theta_{PQ}^{(k)}(U) W^Q \exp i \langle P, V \rangle, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Формальную систему (10) назовем *нормальной формой*, если в разложениях (11), (12) отличны от нуля только те коэффициенты g_{jPQ} , $\Theta_{PQ}^{(1)}$ и $\Theta_{PQ}^{(2)}$, индексы которых удовлетворяют уравнению

$$i \langle P, \Omega \rangle + \langle Q, \Lambda \rangle = 0. \quad (13)$$

Ограничение 1. Для каждого $Q \in N$ при $|P| \rightarrow \infty$

$$\liminf |P|^{-1} \ln |i \langle P, \Omega \rangle + \langle Q, \Lambda \rangle| \geq 0, \quad (14)$$

где нижний предел берется по тем $P \in \mathbb{Z}^m$, которые не удовлетворяют уравнению (13) (см. Брюно [43]).

Теорема 1. При ограничении 1 для системы (3), (4), (5) существует формальное преобразование (9) к нормальной форме (10).

Преимущество нормальной формы (10) перед произвольной системой (3) заключается в том, что разложения (11), (12) содержат только резонансные члены. Поэтому решение системы

(10) сводится к интегрированию системы меньшего порядка (см. п. 2.2 гл. III). Нормальная форма (10) и нормализующее преобразование (9) неоднозначно определяются исходной системой. Нормальная форма (10) для многообразия $\mathcal{M}$ является обобщением нормальной формы для неподвижной точки (§§ 1—3 гл. III). Соответствующими обобщениями являются следующие свойства а) — г).

а) Нормализующее преобразование сохраняет соотношение вещественности между локальными координатами (п. 1.9 гл. III).

б) Если одно из уравнений системы (3), (4), (5) имеет вид $\alpha = \text{const}$, то соответствующая координата (x_j или y_j или z_j) не меняется при нормализующем преобразовании. Поскольку параметр удовлетворяет уравнению $\alpha = 0$, то параметры не меняются при нормализующем преобразовании (см. п. 1.6 гл. III). При этом параметры могут входить в любые из координат X, Y, Z . Другое следствие: при нормализации неавтономных систем время не меняется, ибо удовлетворяет уравнению $\dot{t} = 1$.

в) Как правило, нормализующее преобразование расходится в любой окрестности многообразия $\mathcal{M}$ (Брюно [31]), но оно может сходиться на некоторых множествах, определяемых по нормальной форме (§ 3 гл. III). Пусть числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}$ ($n' \leq n$) и $i\omega_1, \dots, i\omega_m$ соизмеримы (в частности, $\text{Re } \lambda_1 = \dots = \text{Re } \lambda_{n'} = 0$). На множестве

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n'}) = \{U, V, W : \Theta^{(1)} = 0, \Theta^{(2)} = \Omega a,$$

$$\varphi_j = \lambda_j \omega_j a, \quad j = 1, \dots, n', \quad w_{n'+1} = \dots = w_n = 0\}$$

сходится нормализующее преобразование, и само это множество аналитично в исходной системе. При этом $\text{Re } \mathcal{A}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n'})$ состоит из периодических решений. Аналогично обобщается конструкция аналитического множества $\mathcal{B}$, содержащего условно периодические решения.

г) Нормальная форма удобна для приближенного интегрирования системы (1) и изучения устойчивости многообразия $\mathcal{M}$, особенно — формальной устойчивости (см. Брюно [29, 46]; Нехорошев [95, 97, 98, 98a]).

д) Нормализующее преобразование перестановочно с заменой локальных координат на $\mathcal{M}$ вида $X = X(\bar{X}), Y = C + D\bar{Y}$, где X аналитическая функция с ненулевым якобианом, C — постоянный вектор, D — унимодулярная матрица.

е) Нормализующее преобразование перестановочно также с операцией сужения многообразия $\mathcal{M}$ до подмногообразия $\mathcal{M}'$. То есть нормальная форма для $\mathcal{M}'$ может быть получена из нормальной формы для $\mathcal{M}$ посредством соответствующей спецификации локальных координат.

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Вычисление коэффициентов нормальной формы (10) довольно громоздко. Покажем, что иногда его можно упростить. Выпишем разложения для правых частей системы (3)

$$\Phi^{(k)} = \sum \Phi_{PQ}^{(k)}(X) Z^Q \exp i \langle P, Y \rangle, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

$$f_j = \zeta_j / z_j = \sum f_{jPQ}(X) Z^Q \exp i \langle P, Y \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть n -мерный вектор K таков, что для всякого ненулевого коэффициента в разложениях (15) $\langle Q, K \rangle \geq 0$, и, кроме того, если $\langle Q, K \rangle < s$, то $i \langle P, \Omega \rangle + \langle Q, \Lambda \rangle = 0$, где $s > 0$ — некоторое фиксированное число. Т. е. система (3) нормализована до порядка s (ср. п. 1.7 гл. III).

Теорема 2. Пусть задан вектор K и система (3) нормализована до порядка s . Тогда у нее существует нормальная форма (10), у которой коэффициенты при членах порядка меньше $2s$ совпадают с соответствующими резонансными коэффициентами системы (3). То есть $\Theta_{PQ}^{(k)}(U) = \Phi_{PQ}^{(k)}(U)$, $g_{jPQ}(U) = f_{jPQ}(U)$ для $\langle Q, K \rangle < 2s$ и $i \langle P, \Omega \rangle + \langle Q, \Lambda \rangle = 0$.

Теперь заметим, что резонансная часть любого из разложений (15) совпадает с усреднением соответствующей функции вдоль решений системы $\dot{X}=0$, $\dot{Y}=\Omega$, $\dot{z}_j = \lambda_j z_j$ ($j=1, \dots, n$), если все $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. Следовательно, понятие «резонансная часть» аналогично понятию «усреднение», но применимо и в тех случаях, когда $\operatorname{Re} \Lambda \neq 0$. С другой стороны, усреднение определено и для неаналитических функций, для которых нет разложения типа (15) и нельзя выделить резонансную часть.

Пример 1. Рассмотрим систему в стандартной форме

$$\dot{X} = \varepsilon F(X, t), \quad (16)$$

где вектор-функция F аналитична по X , t в некоторой области $\mathcal{D}$ и условно периодична по t с базисом частот $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$. Тогда система (16) эквивалентна автономной системе

$$\dot{X} = \varepsilon \bar{F}(X, Y), \quad \dot{Y} = \Omega, \quad \varepsilon = 0, \quad (17)$$

где $\bar{F}(X, \Omega t) = F(X, t)$ и малый параметр ε — единственная малая координата. По теореме 1 и свойству б) нормализующее преобразование системы (17) имеет вид

$$X = U + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(U, V), \quad Y = V, \quad \varepsilon = \varepsilon.$$

Здесь решения уравнения (13) суть $P=0$, $Q \equiv q_1$ — любое целое.

Нормальная форма

$$\dot{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_k(U), \quad \dot{V} = \Omega, \quad \dot{\varepsilon} = 0$$

является «осредненной по времени». Согласно теореме 2 с $K=1$ и $s=1$ функция G_1 является резонансной частью функции $F(U, Y)$, или, что то же самое, — усреднением функции $F(U, t)$ по t . Следовательно, асимптотический метод Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова (см. Боголюбов и Митропольский [23]) для аналитических стандартных систем является частным случаем метода нормальной формы. Приведение же системы к стандартной форме является переходом к локальным координатам. В § 2 гл. V показано применение этого метода в механике.

4.4. СИСТЕМА ГАМИЛЬТОНА

Система Гамильтона (1) отличается тем, что определяется одной функцией Гамильтона, при этом все координаты, кроме параметров, разбиваются на пары канонически сопряженных. Локальные координаты для многообразия $\mathcal{M}$ также берутся канонически сопряженными, так что система (3), (4), (5) также Гамильтонова (см. Нехорошев [96]). При этом координаты Y все принадлежат разным парам. Функция Гамильтона h системы (3) разлагается в ряд

$$h = \sum h_{PQ}(X) Z^Q \exp i \langle P, Y \rangle. \quad (18)$$

Нормализующее преобразование (9) берется каноническим, поэтому нормальная форма (10) также является системой Гамильтона с гамильтонианом

$$h = \sum g_{PQ}(U) W^Q \exp i \langle P, V \rangle, \quad (19)$$

содержащим только резонансные члены, определяемые уравнением (13). Здесь сохраняются свойства а) — е).

Пусть гамильтониан (18) содержит один малый параметр μ и имеет вид $h = h_0 + \mu h_1$, где разложение для h_0 содержит только резонансные члены. Тогда по теореме 2 гамильтониан нормальной формы (19) имеет вид

$$h = h_0 + \mu [h_1] + O(\mu^2), \quad (20)$$

где $[h_1]$ — резонансная часть «возмущения» h_1 .

Пример 2. Плоская круговая ограниченная задача трех тел описывается системой Гамильтона с двумя степенями свободы и одним параметром μ . При $\mu=0$ система интегрируется; ее фазовое пространство содержит однопараметрическое семейство круговых движений и континуум трехмерных многообразий, соответствующих эллиптическим движениям с фиксированным

базисом частот (см. Брюно [33]). Для круговых движений $\text{Re } \mathcal{M}_1 = \mathcal{T}^1$ — окружность (периодическое решение), локальные координаты — вторая система элементов Пуанкаре. Для эллиптических решений $\text{Re } \mathcal{M}_2 = \mathcal{T}^2 \times \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — интервал $0 < e < 1$; локальные координаты — элементы Делоне или первая система элементов Пуанкаре со сдвигом на константу. В таких координатах при $\mu = 0$ система (3) является нормальной формой. Поэтому при малых μ гамильтониан нормальной формы имеет вид (20). Метод Делоне — Цейделя в интерпретации Красинского [74] соответствует приведению к нормальной форме в окрестности одного цикла $\mathcal{M}_1$ (круговые движения) или одного тора $\mathcal{T}^2$ из многообразия $\mathcal{M}_2$. Метод, описанный выше, позволяет делать нормализующее преобразование сразу в окрестности всего многообразия $\mathcal{M}_2$ для всех значений эксцентриситета $0 < e < 1$.

4.5. О МЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ, РЕШАЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Поскольку нормализующее преобразование, как правило, расходуется в любой окрестности многообразия $\mathcal{M}$ (см. Брюно [31]), то соответствие между решениями систем (3) и (10) требует специального изучения. Результаты, полученные в этом направлении, можно классифицировать следующим образом.

1) Изучение устойчивости многообразия $\mathcal{M}$:

а) Из асимптотической устойчивости (или неустойчивости) системы (10) выводится асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) системы (3). Здесь много работ, все они укладываются в гипотезу 2 Брюно [29] (см., Старжинский [113—116]).

б) Нейтральная устойчивость системы (10) влечет формальную устойчивость системы (3) (см. Нехорошев [95, 97, 98, 98a], а в некоторых случаях — устойчивость по Ляпунову (см. Мозер [91, 93]). Результаты этого типа использованы, например, для изучения устойчивости лагранжевых решений в различных вариантах ограниченной задачи трех тел (Маркеев [87, 88a]).

2) Оценка эффектов неустойчивости системы (3) по системе (10). Здесь, например, вычислено влияние нутационных колебаний на скорость ухода тяжелого гироскопа в кардановом подвесе (§ 1 гл. V); рассмотрен механизм образования щелей (люков) в кольце астероидов (Брюно [30]).

3) Отыскание периодических и квазипериодических решений системы (3) по системе (10) (см. § 3 гл. III). Здесь согласно примеру 1 асимптотическим методом Крылова — Боголюбова найдены новые (несимметричные) периодические решения в задаче о колебаниях спутника в плоскости эллиптической орбиты (§ 2 гл. V). Вычисления на ЭВМ согласно примеру 2 позволили найти все несимметричные периодические решения второго сорта в ограниченной задаче трех тел (Брюно [48]).

Изложение в этом параграфе следует работам Брюно [49, 46].

О МНОГОГРАННИКЕ НЬЮТОНА

§ 1. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать систему

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

в окрестности точки $X = (x_1, \dots, x_n) = 0$, предполагая, что функции φ_i аналитичны в этой окрестности. Изложение построено так же, как в двумерном случае, но без доказательств. Точка $X = 0$ называется *простой*, если хотя бы одна функция $\varphi_i(0) \neq 0$, и *особой*, если все $\varphi_i(0) = 0$. Особая точка называется *элементарной*, если собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A линейной части системы (1) не все равны нулю. Если все $\lambda_i = 0$, то нуль — *неэлементарная особая точка*.

Расположение интегральных кривых системы (1) в окрестности нуля будем изучать, вводя такие новые координаты Y

$$x_i = \xi_i(Y), \quad \xi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

в которых система (1) принимает наиболее простой вид

$$\dot{y}_i = \psi_i(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

При этом функции ξ_i предполагаются по крайней мере гладкими, и якобиан $D(\Xi)/D(Y)$ преобразования (2) в нуле не равен нулю. Т. е. замена координат (2) обратима. В более простых случаях такая замена переменных существует в полной окрестности нуля. В более сложных случаях приходится разбивать окрестность на куски $\mathcal{U}_j^{(d)}(\epsilon)$ и в каждом куске делать свою замену координат.

В дальнейшем особое внимание будет уделено случаю $n=3$. В тех местах, где речь идет о произвольном n , рекомендуется при первом чтении считать $n=3$.

1.2. ПРОСТЫЕ ТОЧКИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Теорема 1. Если нуль — простая точка системы (1), то существует такая замена (2), что в новых переменных система (1) принимает вид

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

Эта теорема аналогична теореме 1 § 1 гл. II и доказывается точно так же. Она означает, что через простую точку проходит одна интегральная кривая $\mathcal{F}_0$, а остальные интегральные кривые из окрестности нуля располагаются примерно параллельно кривой $\mathcal{F}_0$.

Если нуль — особая точка системы (1), то линейной заменой переменных можно привести матрицу линейной части к жордановой форме. Будем считать, что в системе (1) такое приведение уже сделано, тогда

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \sigma_i x_{i-1} + \dots, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\sigma_i = 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$, и $\sigma_i = 0$ или 1, если $\lambda_i = \lambda_{i-1}$. Введем вектор $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, векторы $Q = (q_1, \dots, q_n)$ и обозначение $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$.

Систему (3) запишем в виде

$$\dot{y}_i = y_i g_i = y_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Поскольку $y_i g_i(Y)$ — ряды по целым неотрицательным степеням переменных, то N_i — множество целочисленных точек $Q = (q_1, \dots, q_n)$, у которых $q_i \geq -1$, а остальные $q_j \geq 0$. Положим $N = N_1 \cup \dots \cup N_n$.

Теорема 2. Если нуль — элементарная особая точка системы (1), то существует формальная замена переменных (2), которая приводит систему (1) к такой системе (3), у которой в записи (4) $g_{iQ} = 0$, если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$.

Т. е. в системе (4) остаются только резонансные члены $y_i g_{iQ} Y^Q$, для которых

$$\langle Q, \Lambda \rangle \equiv \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i = 0. \quad (5)$$

Такую систему (4) будем называть *нормальной формой*. Эта теорема аналогична теореме 2 § 1 гл. II и доказывается она точно так же (см. § 1 гл. III).

Если исходная система вещественная, то среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вместе с числом λ будет и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — вещественны, $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m$ — комплексные, а $\lambda_{m+l} = \bar{\lambda}_{l+1}, \dots, \lambda_n = \bar{\lambda}_m$ ($n + l = 2m$). Тогда можно ве-

сти комплексно сопряженные координаты $x_{m+k} = \bar{x}_{l+k}$, и так делать нормализующее преобразование, чтобы сохранить эту сопряженность. Т. е. $y_1, \dots, y_l$ — вещественные, а $y_{m+1} = \bar{y}_{l+1}, \dots, \dots, y_n = \bar{y}_m$ — комплексно сопряженные переменные (см. п. 1.9 гл. II).

Пусть δ — число линейно независимых целочисленных векторов $Q \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих уравнению (5). Рассмотрим разные случаи.

1) $\delta = 0$. В этом случае нормальная форма (4) имеет вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ее решения суть $y_i = c_i \exp \lambda_i(t - t_0)$. Нормализующее преобразование (2) здесь не всегда сходится (см. Брюно [31]), но для вещественной системы всегда существует гладкое нормализующее преобразование (см. Стернберг [145, 146]). Например, если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$, то $\delta = 0$.

2) $\delta = 1$. Пусть вектор $R \in \mathbb{N}$ удовлетворяет уравнению $\langle R, \Lambda \rangle = 0$, и наибольший общий делитель его координат $r_1, \dots, r_n$ равен единице (см. п. 2.3 гл. III).

Если $R \geq 0$, то решениями $Q \in \mathbb{N}$ уравнения (5) будут векторы $Q = kR$, где целое $k \geq 0$. Поэтому нормальная форма имеет вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + y_i g_i(Y), \quad g_i = \sum_{k=1}^{\infty} g_{ik} Y^{kR}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Здесь ряды g_i зависят только от произведения Y^R . Сделаем его новым независимым переменным. Для этого к вектору $S_1 = R$ подберем $n-1$ целочисленных векторов $S_2, \dots, S_n$ так, чтобы был равен единице определитель, строками которого служат векторы $S_1, S_2, \dots, S_n$. Сделаем теперь степенное преобразование

$$z_i = Y^{S_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6')$$

Тогда система (6) перейдет в систему

$$(\ln z_i)' = g_i' \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik}' z_1^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $g_{10}' = \langle R, \Lambda \rangle = 0$. Система (7) легко интегрируется

$$\ln z_i = c_i + \int \frac{g_i'(z_1)}{z_1 g_1'(z_1)} dz_1.$$

Нормализующее преобразование здесь, как правило, расходится (Брюно [31]), но во многих случаях существует гладкое нормализующее преобразование. Например, если все $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ (см. Стернберг [145, 146]). Впрочем, здесь уже при $n=3$ есть случаи, когда нет даже гладкого нормализующего преобразования. На-

пример, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-\sqrt{2}$ и в нормальной форме (6) $g_1 \equiv 0$, но $g_2/g_3 \neq \lambda_2/\lambda_3$.

Если у вектора R одна координата равна -1 , скажем $r_n = -1$, то нормальная форма имеет вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\dot{y}_n = \lambda_n y_n + a y_1^{r_1} \dots y_{n-1}^{r_{n-1}}.$$

Эта система легко интегрируется.

3) $\delta=2$. Пусть R^1 и R^2 — два целочисленных вектора, которые образуют базис среди целочисленных решений уравнения (5), т. е. равен единице наибольший общий делитель всех миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \dots & r_n^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \end{pmatrix}. \quad (7')$$

Тогда существуют такие целочисленные векторы $S_3, \dots, S_n$ (см. Брюно [27] и также п. 2.1 гл. III), что равен единице определитель со строками $R^1, R^2, S_3, \dots, S_n$. Тогда степенное преобразование (6'), где $S_1=R^1$, $S_2=R^2$, переводит нормальную форму в систему

$$(\ln \dot{z}_i) = g'_i(z_1, z_2), \quad i = 1, \dots, n.$$

У этой системы выделяется независимая подсистема для первых двух переменных

$$(\ln \dot{z}_i) = g'_i(z_1, z_2), \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Если найдены $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то остальные переменные находятся квадратурой

$$\ln z_j = \int g'_j(z_1(t), z_2(t)) dt, \quad j = 3, \dots, n.$$

Подсистему (8) нужно рассматривать в окрестности нуля $z_1=z_2=0$, являющегося неэлементарной особой точкой. Такую задачу мы уже умеем решать. В процессе ее решения окрестность нуля разбивается на множества $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, в каждом из них вводятся свои переменные, в которых система (8) интегрируется. В этих случаях преобразование (2), как правило, расходится. Гладкое преобразование к интегрируемой системе надо искать не в полной окрестности точки $X=0$, а в множествах $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, соответствующих множествам $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ системы (8). При этом возможны случаи, когда такое гладкое преобразование существует лишь в некоторых множествах $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$, но не во всех. Тогда не будет и гладкого нормализующего преобразования (2). Если $n=3$, то $\delta=2$ только, если все λ_i вещественны и попарно соизмеримы, либо $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\bar{\lambda}_3$ — чисто мнимые.

4) $\delta \geq 3$. Тогда можно взять такие целочисленные решения уравнения (5) $R^1, \dots, R^\delta$, которые можно дополнить целочисленными векторами $S_{\delta+1}, \dots, S_n$ так, что определитель со строками $R^1, \dots, R^\delta, S_{\delta+1}, \dots, S_n$ равен единице. Тогда степенное преобразование (6'), где $S_i = R^i$ ($i = 1, \dots, \delta$), переводит нормальную форму (4) в систему

$$(\ln z_i) = g'_i(z_1, \dots, z_\delta), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8')$$

(см. п. 2.1 гл. III). У этой системы отщепляется независимая подсистема

$$\dot{z}_i = z_i g'_i(z_1, \dots, z_\delta), \quad i = 1, \dots, \delta \quad (9)$$

из δ уравнений, а остальные переменные находятся из первых δ переменных квадратурами. У системы (9) надо исследовать нулевую точку $z_1 = \dots = z_\delta = 0$, которая является неэлементарной особой точкой. Если $\delta > 2$, то это довольно сложная задача. Таким образом, приходим к задаче изучения неэлементарных особых точек. Приведение к нормальной форме использует линейные члены для понижения порядка системы от n к $\delta < n$. Если $\delta > 1$, то систему порядка δ надо еще исследовать.

1.3. ОБОБЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_k$ — такие векторы, что для некоторого вектора T будет

$$\langle R_i, T \rangle < 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда множество точек

$$V = \{Q : Q = \beta_1 R_1 + \dots + \beta_k R_k, \beta_i \geq 0\}$$

является *многогранным выпуклым конусом*. Ряд $f = \sum f_Q X^Q$ назовем *рядом класса $\mathcal{V}$* , если все показатели $Q \in V$ и целочисленны. Рассмотрим систему

$$(\ln x_i) = f_i(X) = \sum f_{iQ} X^Q, \quad (10)$$

где f_i — ряды класса $\mathcal{V}$; обозначим $\Lambda = F_0 = (f_{10}, \dots, f_{n0})$. Если ряды f_i сходятся, то они сходятся на множестве вида

$$\mathcal{U}_V = \{X : |X|^{R_i} \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k\}.$$

Теорема 3. Если в системе (10) f_i — ряды класса $\mathcal{V}$, то существует такая формальная замена переменных (2), где $y_i^{-1} \xi_i$ — ряды класса $\mathcal{V}$, которая приводит систему (1) к нормальной форме (4), где g_i — ряды класса $\mathcal{V}$ и $g_{iQ} = 0$, если $\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0$.

Это аналог теоремы 1 § 2 гл. II и доказывается точно так же. Множество $\mathcal{U}_V$ состоит из криволинейных конусов, примыкающих к нулю.

1.4. МНОГОГРАННИК И НОРМАЛЬНЫЕ КОНУСЫ

Пусть D — множество точек $Q = (q_1, \dots, q_n)$ в n -мерном вещественном пространстве R_1^n , и R_2^n — пространство, сопряженное к пространству R_1^n . Рассмотрим такую задачу: Для каждого $P \in R_2^n$ выделить такое подмножество D_P множества D , что

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= r \text{ для } Q \in D_P, \\ \langle Q, P \rangle &< r \text{ для } Q \in D \setminus D_P, \end{aligned}$$

где

$$r = r(P) = \max_{Q \in D} \langle Q, P \rangle.$$

Чтобы решить эту задачу, заметим, что при фиксированном векторе P уравнение

$$\langle Q, P \rangle = c_0 = \text{const} \quad (11)$$

определяет в R_1^n гиперплоскость L , которая делит пространство R_1^n на два полупространства: положительное $L^{(+)} = \{\langle Q, P \rangle > c_0\}$ и отрицательное $L^{(-)} = \{\langle Q, P \rangle < c_0\}$. Гиперплоскость (11) является *опорной* для множества D , если в ее положительном полупространстве нет точек из D , и у любой плоскости $\langle Q, P \rangle = c < c_0$ в положительном полупространстве есть точки из D . Обозначим через L_P опорную гиперплоскость, соответствующую вектору P . Очевидно, $D_P = L_P \cap D$.

Чтобы описать множества D_P для различных векторов P , рассмотрим выпуклую оболочку Δ множества D :

$$\Delta = \left\{ Q : Q = \delta_1 Q_1 + \dots + \delta_n Q_n, Q_i \in D, \delta_i \geq 0, \sum \delta_i = 1 \right\}.$$

Обозначим через Γ пересечение всех опорных полупространств $L_P^{(-)}$ множества D . Можно доказать, что множество Γ совпадает с замыканием множества Δ (см. теорему 1 § 1 гл. I). Пересечение множества Γ с опорной гиперплоскостью L_P назовем *гранью*. Граница замкнутого множества Γ состоит из граней различной размерности (вершина — нульмерная грань, ребро — одномерная грань и т. д.). Будем обозначать грани через $\Gamma_j^{(d)}$, где d — размерность и j — номер грани. Обозначим $D_j^{(d)} = D \cap \Gamma_j^{(d)}$. Если $\Gamma_j^{(d)} = L_P \cap \Gamma$, то очевидно, $D_P = D_j^{(d)}$; т. е. все граничные подмножества D_P суть подмножества $D_j^{(d)}$, расположенные на гранях.

Зафиксируем грань $\Gamma_j^{(d)}$ и опишем множество $U_j^{(d)}$ векторов $P \in R_2^n$, для которых $L_P \cap \Gamma = \Gamma_j^{(d)}$. Это множество

$$U_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{aligned} \langle Q', P \rangle &= \langle Q'', P \rangle, & Q' \in \Gamma_j^{(d)}, Q'' \in \Gamma_j^{(d)}; \\ \langle Q', P \rangle &> \langle Q, P \rangle, & Q \in \Gamma \setminus \Gamma_j^{(d)} \end{aligned} \right\}$$

является выпуклым конусом и называется *нормальным конусом грани* $\Gamma_j^{(d)}$.

Рассмотрим еще конус $V_j^{(d)}$, нормальный к конусу $U_j^{(d)}$, т. е.

$$V_j^{(d)} = \{Q : \langle Q, P \rangle \leq 0, \quad P \in U_j^{(d)}\}$$

и назовем его — *касательный конус грани* $\Gamma_j^{(d)}$.

При довольно широких предположениях относительно множества D множество Γ является *многогранником* и его граница $d\Gamma$ состоит из конечного числа граней $\Gamma_j^{(d)}$. Например, так будет, если множество D конечно (см. Голдман и Таккер [60]). В этом случае конусы $U_j^{(d)}$ и $V_j^{(d)}$ будут многогранными.

Пусть размерность самого многогранника Γ равна n . Тогда нормальный конус $U_j^{(n-1)}$ гиперграни $\Gamma_j^{(n-1)}$ является лучом, ортогональным грани $\Gamma_j^{(n-1)}$ и направленным вовне многогранника Γ . Касательный конус $V_j^{(n-1)}$ является полупространством, которое ограничено гиперплоскостью, проходящей через нуль $Q = 0$ и параллельной грани $\Gamma_j^{(n-1)}$. Нормальный конус $U_j^{(n-2)}$ является двумерным сектором, расположенным на плоскости, ортогональной грани $\Gamma_j^{(n-2)}$. Касательный конус $V_j^{(n-2)}$ является пересечением двух полупространств. Нормальный конус $U_j^{(1)}$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ — часть ортогональной к нему гиперплоскости; касательный конус $V_j^{(1)}$ является n -мерным и содержит только одну прямую, проходящую через нуль $Q = 0$ (эта прямая параллельна ребру $\Gamma_j^{(1)}$). Нормальный конус вершины — n -мерный многогранный конус; касательный конус вершины $\Gamma_j^{(0)} = \tilde{Q}$ также является многогранным выпуклым n -мерным конусом. Он получается как коническая оболочка множества $\Gamma - \tilde{Q}$ (т. е. многогранник Γ параллельно перенесен так, чтобы вершина $\Gamma_j^{(0)}$ оказалась в начале координат). Вообще касательный конус $V_j^{(d)}$ — это выпуклая оболочка многогранника $\Gamma - \tilde{Q}$, где $\tilde{Q}$ — любая внутренняя точка грани $\Gamma_j^{(d)}$ (т. е. точка $\tilde{Q}$ не лежит на грани размерности, меньшей d).

Пример 1. $n=3$, $D = \{Q_1, \dots, Q_6\}$, где $Q_1 = (0, 0, -1)$, $Q_2 = (0, -1, 0)$, $Q_3 = (-1, 0, 0)$, $Q_4 = (0, 0, 0)$, $Q_5 = (1, 0, 0)$, $Q_6 = (0, 1, 0)$. Многогранник Γ изображен на рис. 82. Его граница состоит из пяти вершин, восьми ребер и пяти граней. Грани $\Gamma_1^{(2)}$ с вершинами Q_1, Q_3, Q_6 соответствует нормальный конус

$$U_1^{(2)} = \left\{ P : \begin{aligned} \langle Q_1, P \rangle &= \langle Q_3, P \rangle = \langle Q_6, P \rangle, \\ \langle Q_1, P \rangle &> \langle Q_2, P \rangle \end{aligned} \right\}$$

или

$$U_1^{(2)} = \{P : -p_3 = -p_1 = p_2 > -p_2\},$$

т. е. луч

$$U_1^{(2)} = c(-1, 1, -1), \quad c > 0.$$

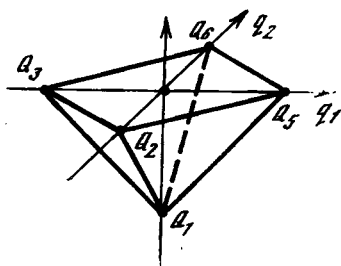


Рис. 82

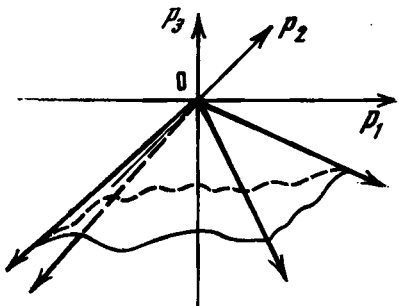


Рис. 83

Касательный конус $V_1^{(a)}$ — полупространство $\langle Q, P_1 \rangle \leq 0$, где $P_1 = (-1, 1, -1)$.

Т. е.

$$V_1^{(a)} = \{Q : q_1 - q_2 + q_3 \geq 0\}.$$

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ с вершинами Q_1, Q_6 соответствует нормальный конус

$$U_1^{(1)} = \left\{ P : \begin{aligned} \langle Q_1, P \rangle &= \langle Q_6, P \rangle, \\ \langle Q_1, P \rangle &> \langle Q_3, P \rangle, \quad \langle Q_1, P \rangle > \langle Q_5, P \rangle \end{aligned} \right\}$$

или

$$U_1^{(1)} = \{P : -p_3 = p_2, \quad -p_1 < -p_3, \quad p_1 < -p_3\}.$$

Это двумерный угол, лежащий в плоскости $p_2 = -p_3$ и ограниченный лучами, натянутыми на векторы P_1 и $P_2 = (-1, -1, 1)$.

Касательный конус $V_1^{(1)}$ — двугранный угол, ограниченный неравенствами

$$\langle Q, P_1 \rangle \leq 0, \quad \langle Q, P_2 \rangle \leq 0.$$

Т. е.

$$V_1^{(1)} = \{Q : -q_1 + q_2 - q_3 \leq 0, \quad -q_1 - q_2 + q_3 \leq 0\}.$$

Вершине $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ соответствует нормальный конус, нарисованный на рис. 83. Как видно из рисунка, нормальный конус вершины ограничен нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине. В формальной записи

$$U_1^{(0)} = \{P : \langle Q_1, P \rangle > \langle Q_j, P \rangle, \quad j = 2, 3, 5, 6\}.$$

Итак, для $n = 2, 3$ грани $\Gamma_j^{(d)}$ и их нормальные конусы $U_j^{(d)}$ можно находить из соответствующих чертежей. Но и для $n > 3$ граничные множества $D_j^{(d)}$ и их нормальные конусы можно находить из линейных соотношений между векторами $Q \in D$ (см. Брюно [37]).

В частности, грани $\Gamma_j^{(d)}$ и их нормальные конусы $U_j^{(d)}$ можно задавать посредством только вершин многогранника Γ . Более того, нормальный конус $U_j^{(d)}$ и касательный конус $V_j^{(d)}$ можно задавать, используя только ребра, лежащие на грани $\Gamma_j^{(d)}$ и примыкающие к ней. Пусть на грани $\Gamma_j^{(d)}$ лежат ребра $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_l^{(1)}$ и к ней примыкают ребра $\Gamma_{l+1}^{(1)}, \dots, \Gamma_m^{(1)}$. Обозначим через R_j единичный вектор ребра $\Gamma_j^{(1)}$, причем векторы $R_{l+1}, \dots, R_m$ направлены от грани $\Gamma_j^{(d)}$. Тогда нормальный конус

$$U_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{aligned} \langle R_j, P \rangle &= 0, & j &= 1, \dots, l; \\ \langle R_k, P \rangle &> 0, & k &= l+1, \dots, m \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

касательный конус

$$V_j^{(d)} = \{ Q : Q = \gamma_1 R_1 + \dots + \gamma_l R_l + \\ + \delta_{l+1} R_{l+1} + \dots + \delta_m R_m, \delta_k \geq 0 \}.$$

Нормальные конусы разных граней не пересекаются, их объединение покрывает конус U всего многогранника Γ . Например, если множество D лежит в положительном ортанте $Q > 0$ (т. е. квадранте, октанте и т. д.), то конус U содержит в себе отрицательный ортант $P < 0$.

Таким образом, чтобы выделить все граничные подмножества $D_j^{(d)}$ и их нормальные конусы $U_j^{(d)}$, надо рассмотреть многогранник Γ , выделить все его грани $\Gamma_j^{(d)}$ и для каждой построить нормальный конус $U_j^{(d)}$.

Для суммы

$$f(X) = \sum f_Q X^Q \quad (12')$$

множество

$$D = D(f) = \{ Q : f_Q \neq 0 \}$$

называется *носителем*. Замыкание его выпуклой оболочки $\Gamma = \Gamma(f)$ — многогранником Ньютона. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многогранника Γ соответствует укорочение

$$\hat{f}_j^{(d)} = \sum_{Q \in D_j^{(d)}} f_Q X^Q$$

по порядку $P \in U_j^{(d)}$.

Обозначим через $\mathcal{U}_j^{(d)}$ класс степенных рядов (12'), носители которых лежат в касательном конусе $V_j^{(d)}$. Вместе с конусом (12)

при малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$U_j^{(d)}(\varepsilon) = \left\{ P : \begin{array}{ll} \ln \varepsilon \leq \langle R_j, P \rangle \leq -\ln \varepsilon, & j = 1, \dots, l; \\ \langle R_k, P \rangle \leq \ln \varepsilon, & k = l+1, \dots, m \end{array} \right\}. \quad (13)$$

Если $d = 0$, то множество $U_j^{(0)}(\varepsilon)$ является множеством значений $P = 1.1 |X|$, для которых может сходиться ряд класса $\mathcal{Y}_d^{(0)}$.

1.5. НЕЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА

Рассмотрим систему (10), где $x_i f_i(X)$ — аналитические функции, причем собственные числа λ_i все равны нулю. Каждому вектору $Q \in N$ поставим в соответствие векторный коэффициент $F_Q = (f_{1Q}, \dots, f_{nQ})$. Рассмотрим носитель D ряда $\sum F_Q X^Q$, т. е. множество $D(F)$ векторных показателей Q с ненулевым коэффициентом F_Q :

$$D = D(F) = \{Q : F_Q \neq 0\}.$$

Пусть $\Gamma = \Gamma(F)$ — замыкание выпуклой оболочки множества D . Вообще говоря, Γ — выпуклый многогранник (см. Голдман и Таккер [60], Брюно [27, 37]). Обозначим через $\partial\Gamma$ его границу. Она состоит из вершин, ребер, граней и т. д. Все их будем называть гранями различной размерности и обозначать $\Gamma_j^{(d)}$, где d — размерность, j — номер

(см. Брюно [37]). Так $\Gamma_j^{(0)}$ — вершины, $\Gamma_j^{(1)}$ — ребра, и т. д. Например, для системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 5x_1^2 x_2 x_3 = x_1(x_1 + 5x_1 x_2 x_3),$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2 + 4x_1 x_2^2 x_3 = x_2(x_2 + 4x_1 x_2 x_3),$$

$$\dot{x}_3 = x_3^2 + 3x_1 x_2 x_3^2 = x_3(x_3 + 3x_1 x_2 x_3),$$

$$Q_1 = (1, 0, 0), Q_2 = (0, 1, 0), Q_3 = (0, 0, 1), Q_4 = (1, 1, 1),$$

Γ — тетраэдр с четырьмя вершинами $\Gamma_j^{(0)}$, шестью ребрами $\Gamma_j^{(1)}$ и четырьмя гранями $\Gamma_j^{(2)}$ (рис. 84).

Для вектора P опорная плоскость L_P множества D определяется уравнением

$$\langle Q, P \rangle = \max_{Q_j \in D} \langle Q_j, P \rangle.$$

Пересекается опорная плоскость L_P с многогранником Γ по граням $\Gamma_j^{(d)}$. Поскольку нас интересует окрестность нуля, то нужно выделить те грани $\Gamma_j^{(d)}$, которые лежат на опорных плоскостях L_P с $P < 0$. Пусть это сделано. На каждом ребре $\Gamma_j^{(1)}$ (одномерной гра-

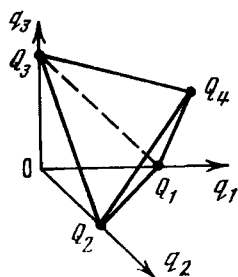


Рис. 84

ни) найдем единичный вектор $\pm R_j$, он определяется однозначно с точностью до знака как разность между соседними целыми точками на ребре $\Gamma_j^{(1)}$. Пусть теперь $\Gamma_j^{(d)}$ — грань некоторой размерности $0 \leq d < n$. Пусть ребра $\Gamma_1^{(1)}, \dots, \Gamma_l^{(1)}$ лежат на этой грани (если $d = 0$, то их нет) и ребра $\Gamma_{l+1}^{(1)}, \dots, \Gamma_m^{(1)}$ примыкают к этой грани $\Gamma_j^{(d)}$. Возьмем векторы $R_1, \dots, R_l$ с произвольным направлением (знаком), а векторы $R_{l+1}, \dots, R_m$ возьмем направленными от грани $\Gamma_j^{(d)}$. Поставим в соответствие грани $\Gamma_j^{(d)}$ множество $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ в пространстве X :

$$\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon) = \left\{ X: \begin{array}{ll} \varepsilon \leq |X|^{R_i} \leq \varepsilon^{-1}, & i = 1, \dots, l; \\ |X|^{R_k} \leq \varepsilon, & k = l+1, \dots, m \end{array} \right\}.$$

Это множество тех X , для которых $P = \ln |X| \in \mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ (см. (13)). Для всякого положительного $\varepsilon < 1$ множества $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ все вместе заполняют всю окрестность нуля $X = 0$. Теперь в каждом множестве $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ введем свои координаты, в которых система упрощается. В зависимости от размерности d грани $\Gamma_j^{(d)}$, это упрощение делается по-разному.

1) $d = 0$. Для исследования системы (10) в множестве $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$, соответствующем вершине $\Gamma_j^{(0)} = \tilde{Q}$, делаем замену времени $dt_1 = X^{\tilde{Q}} dt$ (сокращение на $X^{\tilde{Q}}$). Тогда вершина $\Gamma_j^{(0)}$ переходит в нуль, $F_{\tilde{Q}} = \Lambda$ и применима теорема 3 об обобщенной нормальной форме. Т. е. система (10) приводится заменой класса $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ к нормальной форме, которая степенным преобразованием переводится в систему вида (8'), где все сводится к исследованию системы вида (9) порядка $\delta < n$. Для этой системы снова надо исследовать окрестность неподвижной точки, но здесь уже понижен порядок. Здесь надо снова построить многогранник, разбить окрестность нуля на множества $\mathcal{U}_k^{(d)'}(\varepsilon)$, что соответствует разбиению множества $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ на части $\mathcal{U}_{jk}^{(0)(d)}(\varepsilon)$. В каждой части производится свое упрощение и так до тех пор, пока не придем к интегрируемой системе.

2) $d = 1$. Для исследования системы (10) в множестве $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$, соответствующем ребру $\Gamma_j^{(1)}$, надо сделать степенное преобразование, переводящее ребро $\Gamma_j^{(1)}$ в вертикальное ребро (параллельное оси q_n). Для этого найдем такие целочисленные векторы $S_1, \dots, S_{n-1}$, чтобы был равен единице определитель со строками $S_1, \dots, S_{n-1}, R_j$. Напомним, что R_j — единичный вектор на ребре $\Gamma_j^{(1)}$. Положим $y_i = X^{S_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, $y_n = X^{R_j}$. Тогда множество $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ перейдет в окрестность части оси y_n : $\varepsilon \leq |y_n| \leq \varepsilon^{-1}$. Чтобы исследовать систему в этой окрестности, надо произвести в системе по Y сокращение на максимальные степени $y_1, \dots, y_{n-1}$,

затем на оси y_n найти особые точки $y_n^0 \neq 0, \infty$, и выделить их окрестности. Остальную часть окрестности надо разбить на куски, в каждом из которых действует теорема 1 о простой точке и система интегрируется. Все это соответствует тому, что множество $\mathcal{U}_j^{(1)}(\varepsilon)$ разбивается на части. В частях, соответствующих простым точкам на оси y_n , система интегрируется, в частях, соответствующих особым точкам y_n^0 , надо исследовать окрестность этой особой точки. Если точка элементарная, то в ее окрестности надо привести систему к нормальной форме и потом исследовать приведенную систему меньшего порядка. Если точка неэлементарная, то надо построить многогранник, разбить окрестность на куски и так далее. Хотя это такая же задача, с которой мы начали, но особенность здесь проще, чем исходная особенность в переменных X , ибо здесь особенность уже отчасти разрешена.

3) $d=2$. Пусть векторы R^1 и R^2 образуют целочисленный базис на грани $\Gamma_j^{(2)}$, т. е. наибольший общий делитель всех миноров матрицы (7) равен единице, а плоскость, проведенная через векторы R^1 и R^2 , параллельна грани $\Gamma_j^{(2)}$. Дополним векторы R^1 и R^2 до целочисленного базиса во всем пространстве R_1^n векторами $S_1, \dots, S_{n-2}$ и сделаем степенное преобразование

$$y_i = X^{S_i}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad y_{n-1} = X^{R^1}, \quad y_n = X^{R^2}.$$

Тогда грань $\Gamma_j^{(2)'}$ станет параллельной координатной плоскости $\dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n$. Теперь надо сократить на максимальные степени $y_1, \dots, y_{n-2}$. При нашем степенном преобразовании множество $\mathcal{U}_j^{(2)}(\varepsilon)$ перейдет в множество $\mathcal{U}_j^{(2)'}(\varepsilon)$, которое является окрестностью части плоскости y_{n-1}, y_n :

$$\varepsilon \leq |y_{n-1}| \leq \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \leq |y_n| \leq \varepsilon^{-1}.$$

То есть задача изучения решений в окрестности особой точки привела нас к задаче исследования решений в окрестности части плоскости. Как правило, эта плоскость y_{n-1}, y_n будет инвариантной, и сначала следовало бы найти решения на плоскости. Эту задачу в целом мы не умеем решать, но можно разбить плоскость на куски так, что в каждом куске либо все точки простые и применима теорема 1, либо есть одна неподвижная точка и ее надо исследовать отдельно. При этом замкнутые интегральные кривые (например, предельные циклы) будут разбиты на части, которые попадут в разные куски плоскости y_{n-1}, y_n . Разбиению этой плоскости на куски соответствует разбиение множества $\mathcal{U}_j^{(2)'}(\varepsilon)$ на куски. В кусках, соответствующих простым точкам, система интегрируется; в кусках, соответствующих особым точкам, надо продолжать процесс. Поскольку с каждым шагом либо особенность упрощается, либо размерность понижается, то через конечное число шагов придем к интегрируемой системе.

В принципе локальный метод позволяет исследовать решения в окрестности периодического решения. Поэтому при разбиении плоскости y_{n-1}, y_n можно рассматривать куски типа кольца, являющиеся окрестностью периодического решения. Но здесь возникают три трудности: отыскание периодического решения и нормализация системы в его окрестности — это трансцендентные (не-алгебраические) операции; да и само аналитическое периодическое решение, как правило, не является алгебраическим. Вообще, при исследовании системы (10) в множестве $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ можно использовать замены координат (2), где $y_i^{-1}\xi_i$ — ряды класса $\mathcal{Y}_j^{(d)}$ (ср. п. 3.10 гл. I и § 4 гл. II).

4) $d > 2$. Пусть векторы $R^1, \dots, R^d$ образуют целочисленный базис грани $\Gamma_j^{(d)}$, а векторы $S_1, \dots, S_{n-d}$ дополняют его до целочисленного базиса во всем пространстве. Тогда степенное преобразование $y_i = X^{S_i}$, $i = 1, \dots, n-d$; $y_{n-d+j} = X^{R^j}$, $j = 1, \dots, d$ делает грань $\Gamma_j^{(d)}$ параллельной координатной плоскости $q'_{n-d+1}, \dots, q'_n$. В системе по Y надо сделать сокращение на максимальные степени $y_1, \dots, y_{n-d}$. Множество $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ перейдет в окрестность части координатной плоскости $y_{n-d+1}, \dots, y_n$:

$$\varepsilon \leq |y_{n-d+j}| \leq \varepsilon^{-1}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Эту часть плоскости разбиваем на куски так, чтобы в каждом куске либо применима теорема 1 о простой точке, либо одна особая точка. Теперь надо исследовать окрестность каждой из особых точек $y_{n-d+1}^0, \dots, y_n^0$. Особенности здесь проще, чем исходные.

Итак, надо разрешить особенности, сводя изучения решений в множестве $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ при $d > 0$ к изучению окрестностей нескольких особых точек. В элементарных особых точках, а также в множествах $\mathcal{U}_j^{(0)}(\varepsilon)$ можно применить теорему 2 или 3 о нормальной форме. Это вместе с подходящим степенным преобразованием дает понижение порядка системы. Таким образом, наша процедура упрощает сложные особенности и понижает порядок. Через конечное число шагов окрестность нуля $X=0$ системы (10) будет разбита на конечное число множеств $\mathcal{U}_{j_1 \dots j_k}^{(d_1) \dots (d_k)}(\varepsilon)$, где индексы $j_1, \dots, j_k$ указывают на повторные разбиения, и в каждом из этих множеств будут введены такие переменные, в которых исходная система интегрируется.

1.6. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Изложенный в предыдущих пунктах метод локального интегрирования системы (1) в окрестности особой точки имеет три основных аспекта:

1. Формально-алгебраический.

II. Интерпретация формальных преобразований.

III. Синтез разных кусков $\mathcal{U}_j^{(d)}(\varepsilon)$ в общую картину.

Рассмотрим подробнее, какие же задачи здесь возникают.

I. Формально-алгебраическая задача. Имеется три вида замен переменных:

а) формальное нормализующее преобразование;

б) степенное преобразование;

в) параллельный перенос.

Спрашивается, к какой наиболее простой системе (3) можно привести аналитическую систему (1) с помощью указанных преобразований? Т. е. надо найти все такие формальные системы (3), которые не упрощаются указанными преобразованиями, и к которым сведется любая система (1). При этом возникает вопрос о конечности числа простейших систем (3), получаемых из одной исходной системы, а также вопрос о конечном числе преобразований а), б), в), требующихся для такого приведения. Кроме того, надо выяснить, интегрируются ли все эти простейшие системы (3). В двумерном случае ($n=2$) все сводилось к интегрированию систем порядка $\delta < n$, т. е. $\delta=0$ или $\delta=1$. Такие системы всегда интегрируются. По-видимому и в общем случае все простейшие системы (3) будут интегрируемы.

II. Истолкование формальных преобразований. Поскольку нормализующие преобразования даются степенными рядами, которые, как правило, расходятся, то возникает задача истолковать эти формальные преобразования. Задача ставится так. Пусть исходная система (1) с помощью конечного числа преобразований типов а), б), в) приводится в множестве $\mathcal{U}^*$ к простейшей системе (3). Требуется по системе (3) указать свойства решений системы (1) в множестве $\mathcal{U}^*$. Здесь могут быть разные подходы: аналитический, гладкий, топологический, формальный и другие. Т. е. можно искать аналитическое соответствие между решениями исходной системы (1) в множестве $\mathcal{U}^*$ и решениями простейшей системы (3) (см. § 3 гл. III). Можно искать также гладкое или непрерывное преобразование системы (1) в систему (3). Кроме того, можно по свойствам решений системы (3) изучать свойства системы (1). Например, если система (3) не имеет решений, входящих в особую точку, то у системы (1) если и есть такие решения, то они входят в особую точку очень медленно. Это приводит к понятию «формальная устойчивость» (см. п. 4.5 гл. III). Можно также описывать по системе (3) свойства решений системы (1) на подмножестве почти полной меры в множестве $\mathcal{U}^*$. На мой взгляд, наиболее перспективными направлениями являются гладкая и формальная интерпретации.

III. Синтез. Метод локального интегрирования приводит к тому, что окрестность исследуемой особенности разбивается на множества

$$\mathcal{U}_{j_1 \dots j_k}^{(d_1) \dots (d_k)}(\varepsilon), \quad (14)$$

в каждом из них вводятся свои переменные и в этих переменных система интегрируется. Теперь надо склеить между собой части решения из разных кусков этих множеств. В некоторых случаях это не очень важно, а для других случаев это является основным. Например, если при $n=2$ нужно выяснить устойчивость особой точки. Если есть интегральная кривая, входящая в нуль внутри какого-нибудь куска множества (14), то вопрос о склейке не важен. Если таких кривых нет, то возникает вопрос различения центра от фокуса и выяснения характера фокуса. Для решения этой проблемы локальным методом надо разбивать окрестность на множества (14) и в каждой из них вычислять решения с высокой степенью точности. Эти решения определяют точечные преобразования с одной границы криволинейного сектора на другую. Надо, таким образом, обойти все сектора множеств (14) и выяснить направление смещения точки за полный оборот. Если (асимптотически при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 0$) это смещение больше, нежели ошибка от приближений, то найден фокус и установлен его характер, если же смещение меньше, чем ошибка, то надо вычислить решения с большей точностью.

З а м е ч а н и е. Локальный метод позволяет изучать зависимость решений системы (1) от малого параметра μ (или нескольких малых параметров). Надо только к системе (1) добавить уравнение $\dot{\mu}=0$. Тогда локальным методом можно изучать различные бифуркации, рождение периодических решений и другие локальные явления (см. пп. 1.6 и 3.4 гл. III).

Многогранник Ньютона функции Гамильтона позволяет находить укороченные системы Гамильтона (см. Брюно [50a]).

§ 2. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ С МНОГОГРАННИКОМ НЬЮТОНА

Применения многоугольника Ньютона в различных областях математики перечислены в обзоре Чеботарева [125]. С тех пор появился многогранник Ньютона (Брюно [25]) и сильно расширился круг исследований с применением методов геометрии показателей степеней. В этом параграфе дан краткий обзор тех из этих работ, которые известны автору (исключая систему обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотренную в § 1 гл. IV).

2.1. ЛОМАНАЯ АДАМАРА *

Рассмотрим многочлен от одного переменного

$$f(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k \quad (1)$$

и положим $l_k = \ln |a_k|$, тогда

$$f = \sum \theta_k \exp(l_k + k \ln |z|),$$

где $|\theta_k| = 1$. Чтобы среди членов $a_k z^k$ выделять наибольшие по модулю, т. е. искать

$$\max_k (l_k + k \ln |z|), \quad (2)$$

удобно положить $\alpha = \ln |z|$ и воспользоваться приемом, аналогичным ломаной Ньютона. Каждому члену $a_k z^k$ суммы (1) поставим в соответствие точку $k = k$, $l = l_k = \ln |a_k|$ на плоскости k, l . Тогда максимум (2) достигается на границе выпуклой оболочки этих точек. Эта граница является ломаной линией, аналогичной ломаной Ньютона; она была введена Адамаром [130] для исследования роста целых функций (1) с $m = \infty$.

Например, если число z является корнем уравнения $f=0$, то ведущих членов $a_k z^k$ должно быть больше одного (в предположении малости суммы остальных членов). Т. е. максимум (2) достигается в нескольких точках (k, l_k) сразу. Это возможно только тогда, когда эти точки лежат на одном ребре ломаной Адамара. Наклон этого ребра определяет значение α (приближенно).

2.2. ЧИСЛО РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система алгебраических уравнений

$$f_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

от n комплексных неизвестных: $X = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть $D_i = D(f_i)$ — носитель многочлена f_i . Спрашивается, как можно оценить число решений системы (3) по множествам D_i . Ответ на этот вопрос получен Бернштейном [17]: число решений не превосходит смешанного объема Минковского многогранников $\Gamma(f_i)$ (см. Бузедан [52]) и равно ему в случае общего положения. Из этой замечательной теоремы следуют результаты Кушниренко [79, 80, 141] о числе корней и кратности критической точки аналитической функции (см. также Бернштейн, Кушниренко и Хованский [18], Кушниренко [81], Хованский [123a]).

Варченко [55] использовал многогранник Ньютона для вычисления асимптотики интеграла от быстро осциллирующих функций.

* О ломаной Адамара [130] см. также в книге Валирона [54].

2.3. ОТДЕЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Пусть точка $X=0$ является особой для алгебраической кривой $\mathcal{F}$, определяемой системой уравнений

$$f_i(X)=0, \quad i=1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Т. е. $f_i=0$ и $\partial f_i/\partial x_j=0$ при $X=0$. Все ветви этой кривой, проходящие через точку $X=0$, можно найти следующим образом. Для каждого $i=1, \dots, n-1$ строим свой многогранник Ньютона $\Gamma_i = \Gamma(f_i)$ и сопровождающие объекты $\Gamma_{ij}^{(d)}$, $\hat{f}_{ij}^{(d)}$, $U_{ij}^{(d)}$, $\mathcal{U}_{ij}^{(d)}(\varepsilon)$. Ветви кривой $\mathcal{F}$ ищутся отдельно в каждом из пересечений

$$\mathcal{U}_{1i_1}^{(d_1)}(\varepsilon) \cap \dots \cap \mathcal{U}_{n-1, i_{n-1}}^{(d_{n-1})}(\varepsilon). \quad (5)$$

После подходящего степенного преобразования

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} \dots y_n^{\alpha_{in}}, \quad i=1, \dots, n. \quad (6)$$

с унимодулярной матрицей $\alpha = (\alpha_{ij})$ в образе множества (5) получим

$$\hat{f}_{ii} = y_n^{s_i} h_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i=1, \dots, n-1$$

и система (4) при $y_n \neq 0$ эквивалентна системе

$$f_i y_n^{-s_i} = h_i(y_1, \dots, y_{n-1}) + \dots = 0, \quad i=1, \dots, n-1. \quad (7)$$

Искомые решения этой системы расположены вблизи решений системы

$$h_i(y_1, \dots, y_{n-1})=0, \quad i=1, \dots, n-1, \quad y_n=0. \quad (8)$$

Если решение $Y=Y^0$ системы (8) является простой точкой системы (7), то соответствующая ветвь кривой $\mathcal{F}$ находится по теореме о неявной функции. Если же $Y=Y^0$ — особая точка системы (7), то сдвигом $Z=Y-Y^0$ ее нужно перевести в начало координат и продолжить процедуру разрешения особенности. Через конечное число таких шагов, как правило, можно отделить все ветви кривой $\mathcal{F}$ (см. Брюно [35, 36]).

При $n > 2$ отыскание граней многогранника $\Gamma(f)$ и изучение их взаимного расположения — не простая задача. Если множество $\mathbf{D}(f)$ состоит из конечного числа точек, то это можно сделать перебором всех возможных комбинаций. В препринте Брюно [37] предложен менее трудоемкий способ. При $n=3$ можно пользоваться соответствующим чертежом.

Бугаев [51] предложил отыскивать ветви кривой перебором всех возможностей и назвал это: начало наибольших и наименьших показателей. Синцов [111] для $n=3$ предложил геометрический метод, который можно объяснить следующим образом. В сопряженном к $\mathbf{R}_1^n$ пространстве $\mathbf{R}_2^n$ рассматриваются нормальные конусы $U_{ij}^{(d)}$ многогранников Γ_i . Затем рассматривается

сечение этих конусов некоторой гиперплоскостью (например, $p_1 = -1$). При $n=3$ эта гиперплоскость будет двумерной, и всю картину этого сечения можно изобразить на плоскости с помощью прямых линий. Для каждой функции f_i эти прямые проводятся своим цветом. Тогда можно найти все пересечения конусов $U_{ij}^{(d)}$ и соответствующие им укорочения.

Аналогичные приемы применяли при отыскании решений линейного дифференциального уравнения (см. Синцов [411], Чеботарев [125], Валирон [54]).

Заметим, что решать систему (4) можно путем исключения $n-2$ координат и замены системы (4) одним уравнением

$$g(x_1, x_2) = 0,$$

которое можно решать методом Ньютона. Но процесс исключения приводит к очень сильному увеличению порядка многочленов (см. Вайнберг и Треногин [53]). Поэтому изложенные выше приемы требуют гораздо меньше вычислений, чем исключение.

Компромиссный способ предлагает Боташев [24]. Он не владеет понятием многогранника Ньютона, и каждому векторному моному $F_Q x_1^{q_1} \dots x_{n-1}^{q_{n-1}} x_n^{q_n}$ ставит в соответствие точку плоскости $p, q: p = q_1 + \dots + q_{n-1}, q = q_n$.

Для таких множеств он строит ломаные Ньютона, выделяет первые приближения и так далее. Вычисление по этому способу проще, чем метод исключения, но сложнее, чем при использовании многогранников Ньютона.

2.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть

$$f(Y) = \sum_{Q \in D} f_Q Y^Q \quad (9)$$

многочлен, обозначим $\mathcal{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ — дифференциальный оператор и рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$f(\mathcal{D})u = 0 \quad (10)$$

для функции $u(X)$. Последние годы появилось много работ посвященных изучению свойств решений уравнения (10) по свойствам многогранника Ньютона $\Gamma(f)$ символического многочлена (9) (см. Михайлов [89], Фриберг [147], Волевич и Гиндикин [57], Волевич [56], Гиндикин [59]).

Рассматриваются и более общие уравнения. Например, изучаются уравнения с переменными коэффициентами, и в терминах многогранника Ньютона выделяются классы операторов, обладающие нужными свойствами

ПРИМЕНЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ В МЕХАНИКЕ

§ 1. О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Этот параграф служит иллюстрацией по применению результатов § 1 гл. II, §§ 1, 2 гл. III. Посредством приведения уравнений движения к нормальной форме вычислено влияние малых нутационных колебаний на скорость прецессии гироскопа. Доказывается, что в данном случае нормализующее преобразование сходится. Расчеты проведены для тяжелого гироскопа с учетом квадратов и кубов амплитуды нутационных колебаний. Рассмотрен также астатический гироскоп. В пп. 1—4 изложен математический аппарат, который в пп. 5—10 применяется для исследования механических задач. Здесь воспроизведена статья Брюно [34]. Некоторые из ее результатов были повторены Журавлевым [63].

1.1. ПРИВЕДЕНИЕ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим аналитическую в окрестности нуля $X=0$ систему

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad \varphi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $(\partial \varphi_i / \partial x_j)_0$. Разложим функции φ_i в степенные ряды и будем искать такую обратимую замену переменных

$$x_i = \xi_i(Y), \quad \xi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где ξ_i — степенные ряды, чтобы в новых переменных Y система (1) имела бы наиболее простую форму

$$\dot{y}_i = \psi_i(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Это так называемая нормальная форма, в которой ряды ψ_i содержат только резонансные члены $c y_1^{p_1} y_2^{p_2} \dots y_n^{p_n}$, для которых

$$\lambda_i = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \dots + p_n \lambda_n.$$

Согласно теореме 1 § 1 гл. III для всякой системы (1) сущест-

вует нормализующее преобразование (2), где ξ_i — формальные степенные ряды. Как правило, они расходятся (Брюно [31]).

Теорема 1. Если в аналитической системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i(x_1, x_2), & i &= 1, 2, 3, \\ \varphi_1(0, 0) &= \varphi_2(0, 0) = 0, & \lambda_1 &= -\lambda_2 \end{aligned} \quad (4)$$

подсистема из первых двух уравнений обладает аналитическим интегралом, то существует сходящееся нормализующее преобразование

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i(y_1, y_2), & \xi_i(0, 0) &= 0, & i &= 1, 2, \\ x_3 &= y_3 + \zeta(y_1, y_2), & \zeta(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

которое приводит систему (4) к нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + y_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_1 y_2)^k \equiv y_1(\lambda_1 + g), \\ \dot{y}_2 &= -y_2(\lambda_1 + g), \\ \dot{y}_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y_1 y_2)^k \equiv f. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Поскольку первые два уравнения (4) выделяются в независимую подсистему, то сначала найдем преобразование (5.1), (5.2), приводящее эту подсистему к нормальной форме. Доказательство того, что нормальная форма будет иметь вид (6.1), (6.2), а нормализующее преобразование сходится, можно найти в §§ 14, 15 книги Зигеля [65] (см. также § 1 гл. II). При этом существенно наличие интеграла. Сделав теперь в системе (4) замену (5.1), (5.2), получим

$$\dot{x}_3 = \eta(y_1, y_2) \equiv \varphi_3(\xi_1, \xi_2) \quad (7)$$

и будем искать замену (5.3), приводящую (7) к виду (6.3). Дифференцируя по t формулу (5.3) и заменяя $\dot{x}_3$, $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, $\dot{y}_3$ их выражениями из формул (7), (6), получим уравнение для рядов по y_1, y_2 :

$$\eta = f + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} y_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial y_2} y_2 \right) (\lambda_1 + g). \quad (8)$$

Разобьем ряд $\zeta(y_1, y_2)$ на бесконечную сумму

$$\zeta = \sum_s \zeta^{(s)}(y_1, y_2),$$

где в $\zeta^{(s)}$ входят те и только те члены $su_1^{p_1} u_2^{p_2}$ из разложения ζ , для которых $s = p_1 - p_2$. Аналогично положим $\eta = \sum \eta^{(s)}$. Тогда

$$\frac{\partial \zeta^{(s)}}{\partial y_1} y_1 - \frac{\partial \zeta^{(s)}}{\partial y_2} y_2 = s \zeta^{(s)}.$$

Поскольку в f входят только члены $sy_1^{p_1}y_2^{p_2}$, у которых $s = p_1 - p_2 = 0$, то из (8) получаем

$$\eta^{(0)} = f(y_1 y_2),$$

$$\eta^{(s)} = (\lambda_1 + g) s \zeta^{(s)}, \quad s \neq 0. \quad (9)$$

Из (9) имеем

$$\zeta^{(s)} = \frac{\eta^{(s)}}{s(\lambda_1 + g)},$$

$$\zeta = \frac{1}{\lambda_1 + g} \sum_{s \neq 0} \frac{\eta^{(s)}}{s}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что ряд ζ сходится, ибо сходятся ряды g и η , а $|s| \geq 1$. Формула (9) показывает, что ряд f является просто суммой членов $(y_1 y_2)^k$ из разложения ряда η . Теорема доказана.

1.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть теперь исходная система (4) действительна (то есть функции φ_i вещественны при вещественных значениях переменных), а собственное число λ_1 — чисто мнимое. Согласно пп. 1.9 гл. II и 1.9 гл. III, для вещественных значений переменных X переменные y_1 и y_2 будут комплексно сопряженными, а y_3 — действительным. Решение системы (6) есть

$$y_1 y_2 = h = \text{const},$$

$$y_1 = y_1^0 \exp(\lambda_1 t + g(h) t),$$

$$y_2 = y_2^0 \exp(-\lambda_1 t - g(h) t),$$

$$y_3 = y_3^0 + f(h) t, \quad (11)$$

где

$$f(h) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h^k. \quad (12)$$

При действительном t здесь $\text{Re } y_1$ и $\text{Im } y_1$ совершают периодические колебания около нуля, а $y_3(t)$ уходит от начальных значений со скоростью (12). Возвращаясь при помощи аналитической замены (5) к исходным переменным, замечаем, что x_1 и x_2 совершают периодические колебания около нуля, а переменная x_3 колеблется и уходит от нуля со средней скоростью (12), которая зависит от начальных данных x_1^0, x_2^0 через значение интеграла h . Для вычисления $f(h)$ нужно вычислить коэффициенты f_k и выразить h через x_1, x_2 . В следующем пункте будет вычислен первый коэффициент f_1 и интеграл h будет выражен через x_1, x_2 с точностью $O\{(x_1^2 + x_2^2)^2\}$.

Согласно (9) $f_0 = \varphi_3(0, 0)$ и решение с начальными данными $x_1^0 = x_2^0 = 0$ имеет вид

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = x_3^0 + f_0 t.$$

Если же $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1(t), & x_2 &= \beta_2(t), \\ x_3 &= x_3^0 + f(h)t + \beta_3(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где β_i периодические функции. Таким образом, здесь величина $f_1 h + f_2 h^2 + \dots$ дает отклонение средней скорости движения колеблющейся координаты x_3 от значения f_0 , которое является скоростью движения при отсутствии колебаний.

Итак, согласно теореме 1, справедливо следующее.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 и при λ_1 чисто мнимом существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое решение системы (4) с начальными данными $|x_1^0|^2 + |x_2^0|^2 < \varepsilon$ имеет вид (13).

Посредством более тщательного анализа доказательства сходимости в § 5 Брюно [31] или в § 15 книги Зигеля [65] можно получить оценку для ε , и также для f , как функции от x_1^0, x_2^0 . Однако здесь этого не будем делать.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО x_1 И x_2

В дальнейшем будем иметь дело с частным случаем системы (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= L(x_1) + M(x_1)x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= N(x_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где для достаточно малых $|x_1|$ имеются сходящиеся разложения:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} L_k x_1^k, \quad M = \sum_{k=0}^{\infty} M_k x_1^k, \quad N = \sum_{k=0}^{\infty} N_k x_1^k. \quad (15)$$

Очевидно, система (14.1), (14.2) эквивалентна одному уравнению второго порядка

$$\ddot{x}_1 = L(x_1) + \dot{x}_1^2 M(x_1).$$

Поскольку $L_0 = 0$, то точка $x_1 = x_2 = 0$ является неподвижной для системы (14.1), (14.2).

Теорема 3. Пусть в системе (14) $L_k = 0$ для $k < j$ и $L_j \neq 0$ ($0 < j < \infty$). Условие

$$j - \text{нечетно}, \quad L_j < 0 \quad (16)$$

является необходимым и достаточным для устойчивости по Ляпунову решения $x_1 = x_2 = 0$ относительно переменных x_1 и x_2 .

Доказательство. Система (14) имеет аналитический интеграл

$$Kx_2^2 - \int_0^{x_1} 2L(u)K(u)du = \text{const}, \quad (17)$$

в котором

$$K = \exp - \int_0^{x_1} 2M(u)du = \exp - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k x_1^{k+1}}{k+1} \equiv 1 + \dots$$

По условию теоремы

$$\int_0^{x_1} 2L(u)K(u)du = \frac{2}{j+1} L_j x_1^{j+1} + \dots$$

Поэтому условие (16) необходимо и достаточно для знакоопределенности интеграла (17) в некоторой окрестности нуля. Далее, если интеграл (17) знакопостоянен, то решение $x_1 = x_2 = 0$ устойчиво по теореме Дирихле (см. Зигель [65, § 27]). Если же интеграл (17) является знакопеременным, то его нулевому значению соответствуют такие интегральные кривые системы (14.1), (14.2), которые проходят через точку $x_1 = x_2 = 0$. Поскольку при $L \neq 0$ эта точка является изолированной неподвижной точкой, а система (14.1), (14.2) консервативна, то на указанных интегральных кривых будут как решения, неограниченно приближающиеся к точке $x_1 = x_2 = 0$, так и решения, покидающие сколь угодно малую ее окрестность. Т. е. в этом случае нулевое решение неустойчиво по Ляпунову. Доказательство окончено.

Например, условие

$$L_1 < 0 \quad (18)$$

достаточно для нашей устойчивости, а условие

$$L_1 \leq 0 \quad (19)$$

— необходимо.

1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ В $f(h)$

Рассмотрим систему (14) при условии (18). Поскольку

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{L_1}$$

и имеется интеграл (17), то эта система удовлетворяет условиям теорем 1 и 2. Для вычисления коэффициентов f_k в (6) или (12) надо вычислить коэффициенты преобразования (5.1), (5.2), затем коэффициенты ряда η из (7) и, наконец, воспользоваться равенством (9). При этом для вычисления коэффициентов f_k во

всех разложениях можно учитывать лишь члены до порядка $2k$ включительно. Проведем это для $k=1$. Для этого в системе (14), (15) выпишем все члены до второго порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= L_1 x_1 + L_2 x_1^2 + M_0 x_2^2 + \dots \\ \dot{x}_3 &= N_0 + N_1 x_1 + N_2 x_1^2 + \dots\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь $L_1 < 0$. Положим $\lambda = +\sqrt{-L_1}$ и сделаем линейное преобразование

$$z_1 = x_1 \sqrt{\lambda}, \quad z_2 = x_2 / \sqrt{\lambda}. \quad (21)$$

Тогда уравнения (20.1), (20.2) перейдут в

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\lambda z_1 + \nu z_1^2 + \mu z_2^2 + \dots,\end{aligned}\quad (22)$$

где

$$\nu = L_2 \lambda^{-3/2}, \quad \mu = M_0 \sqrt{\lambda}. \quad (23)$$

Чтобы привести матрицу линейной части системы (22) к диагональной форме, перейдем теперь к комплексно-сопряженным координатам

$$w = z_1 + iz_2, \quad \bar{w} = z_1 - iz_2. \quad (24)$$

Система (22) перейдет в

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -i\lambda w + \frac{i\nu}{4}(w + \bar{w})^2 - \frac{i\mu}{4}(w - \bar{w})^2 + \dots \\ \dot{\bar{w}} &= i\lambda \bar{w} - \frac{i\nu}{4}(w + \bar{w})^2 + \frac{i\mu}{4}(w - \bar{w})^2 + \dots\end{aligned}\quad (25)$$

Теперь сделаем нелинейную замену

$$\begin{aligned}w &= v + a_{11}v^2 + 2a_{12}v\bar{v} + a_{22}\bar{v}^2, \\ \bar{w} &= \bar{v} + \bar{a}_{11}\bar{v}^2 + 2\bar{a}_{12}v\bar{v} + \bar{a}_{22}v^2,\end{aligned}\quad (26)$$

которая приводит квадратичные члены из (25) к нормальной форме, т. е. полностью ликвидирует квадратичные члены, ибо их нет в нормальной форме (6.1), (6.2). Итак, с точностью до членов третьей степени

$$\dot{v} = -i\lambda v, \quad \dot{\bar{v}} = i\lambda \bar{v}. \quad (27)$$

Дифференцируя равенства (26) по t , получим

$$\dot{w} = \dot{v} + 2a_{11}v\dot{v} + 2a_{12}v\dot{\bar{v}} + 2a_{12}v\dot{\bar{v}} + 2a_{22}\dot{v}\bar{v}$$

и сопряженное выражение для $\bar{w}$. Заменим здесь все производные их выражениями по формулам (25) и (27), затем w выразим через v по формулам (26). Тогда получим равенства, связывающие две квадратичные формы от $v, \bar{v}$. Приравняв коэффициенты при одинаковых членах, получим линейные уравнения для неопределенных пока коэффициентов a_{ij} . Вычисления дают

$$a_{11} = \frac{\mu - \nu}{4\lambda}, \quad a_{12} = \frac{\nu + \mu}{4\lambda}, \quad a_{22} = \frac{\nu - \mu}{12\lambda}. \quad (28)$$

Выражая x_1 через $v, \bar{v}$ согласно (21), (23) и (26) получим

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \{v + \bar{v} + (a_{11} + \bar{a}_{11})v^2 + 2(a_{12} + \bar{a}_{12})v\bar{v} + (a_{22} + \bar{a}_{22})\bar{v}^2\}.$$

Если теперь в ряду $N(x_1) = N_0 + N_1x_1 + N_2x_1^2 + \dots$ выразить x_1 через $v, \bar{v}$, то коэффициент при $v\bar{v}$ будет

$$N_1 \frac{a_{12} + \bar{a}_{12}}{\sqrt{\lambda}} + N_2 \frac{1}{2\lambda}.$$

Как видно из (9), это и есть f_1 . Итак, учитывая (28), (23) и равенство $L_1 = -\lambda^2$, получим

$$2\lambda f_1 = N_2 + N_1M_0 - N_1L_2/L_1. \quad (29)$$

Далее, обращая преобразование (26)

$$v = w - a_{11}w^2 - 2a_{12}w\bar{w} - a_{22}\bar{w}^2 + \dots$$

и учитывая формулы (24), (21), (28) и (23), получим

$$\begin{aligned} v\bar{v} = & \lambda x_1^2 + \frac{1}{\lambda} x_2^2 - \frac{4M_0\lambda^2 + 2L_2}{3\lambda} x_1^3 - \\ & - \frac{2M_0}{\lambda} x_1x_2^2 + O\{(x_1^2 + x_2^2)^2\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку $h = v\bar{v} + O(|v|^4)$, то интеграл h равен правой части (30). Пусть Δx_1 — амплитуда колебаний x_1 , то есть $\max |x_1|$. В силу симметрии уравнений, этот максимум достигается при $x_2 = 0$.

Итак, доказана

Теорема 4. При условии (18) решения системы (14) имеют вид (13), причем

$$f(h) = N_0 + \delta_2(\Delta x_1)^2 + \delta_3(\Delta x_1)^3 + O\{(\Delta x_1)^4\}, \quad (31)$$

где

$$\delta_2 = \frac{1}{2}(N_2 + N_1M_0 - N_1L_2/L_1), \quad (32)$$

$$\delta_3 = \frac{2}{3}\delta_2(L_2/L_1 - 2M_0).$$

Наконец, если дана система

$$\begin{aligned} u &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= l(u) + mx_1^2, \\ \dot{x}_3 &= n(u) \end{aligned} \quad (33)$$

с аналитическими функциями l , m , n и $l(u_0)=0$, то точка $u=u_0$, $x_2=0$ будет неподвижной для системы (33.1), (33.2). Если положить $x_1=u-u_0$, то система (33) примет вид (20), где

$$\begin{aligned} L_1 &= l'(u_0), \quad L_2 = \frac{1}{2} l''(u_0), \quad M_0 = m(u_0), \\ N_0 &= n(u_0), \quad N_1 = n'(u_0), \quad N_2 = \frac{1}{2} n''(u_0). \end{aligned}$$

Формулы (32) примут вид

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{1}{4} (n'' + 2n'm - n'l''/l') = \\ &= \frac{1}{4} n' (n''/n' + 2m - l''/l') \equiv \frac{1}{4} n' \delta, \\ \delta_3 &= \frac{2}{3} \delta_2 \left(\frac{1}{2} l''/l' - 2m \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где все значения взяты в точке $u=u_0$.

1.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ГИРОСКОПЕ В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассмотрим движение симметричного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с учетом масс колец подвеса при вертикальной оси внешнего кольца. Обозначения и уравнения движения возьмем из статьи Четаева [126]. Кратко напомним их: ψ — угол поворота (внешнего) кольца (угол прецессии), θ — угол поворота кожуха в кольце (угол нутации), x, y, z — оси кожуха, φ — угол поворота гироскопа в кожухе, J — момент инерции внешнего кольца относительно вертикальной оси; A^0, B^0, C^0 — моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z ; A, A', C — моменты инерции симметричного гироскопа относительно осей x, y, z (рис. 85). Если трение в подшипниках отсутствует, активные силы суть силы тяжести, а центр тяжести кожуха и гироскопа лежит на оси z на расстоянии ξ от неподвижной точки гироскопа, то уравнения движения суть

$$\begin{aligned} (A + A^0) \ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 (A - C + B^0 - C^0) \cos \theta \sin \theta + \\ + C \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta = P \xi \sin \theta, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{d}{dt} \{ \dot{\psi} (J + (A + B^0) \sin^2 \theta + C^0 \cos^2 \theta) + C \cos \theta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = 0.$$

Здесь P — вес гироскопа и кожуха. Эти уравнения допускают

три первых интеграла, из которых в дальнейшем потребуется только два:

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = r, \quad (36)$$

$$\dot{\psi} \{J + (A + B^0) \sin^2 \theta + C^0 \cos^2 \theta\} + C \cos \theta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = k.$$

Здесь r и k — соответствующие постоянные. Разрешая интегралы (36) относительно $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ и подставляя полученные значения в (35.1), получим систему

$$\ddot{\theta} = -\frac{b^2}{e} \left\{ -\sigma + \frac{\alpha - u}{\gamma - u^2} - u \frac{(\alpha - u)^2}{(\gamma - u^2)^2} \right\} \sin \theta,$$

$$\dot{\psi} = \frac{b}{e} \frac{\alpha - u}{\gamma - u^2},$$

$$\dot{\varphi} = r - u \frac{b}{e} \frac{\alpha - u}{\gamma - u^2}. \quad (37)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P\xi(A + B^0 - C^0)}{C^2 r^2}, & \alpha &= \frac{k}{Cr}, \\ b &= \frac{Cr}{A + A^0}, & e &= \frac{A + B^0 - C^0}{A + A^0}, \\ \gamma &= \frac{J + A + B^0}{A + B^0 - C^0}, & u &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (38)$$

На параметры наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} J, A^0, B^0, C^0, A, C, P &\geq 0, & A + A^0 &> 0, \\ J + A + B^0 &> 0, & J + C^0 &> 0, & Cr &\neq 0. \end{aligned}$$

Из этих неравенств и соотношений (38) следует

$$b \neq 0, \gamma < 0 \text{ или } \gamma > 1, \gamma e > 0, |\alpha| < \infty.$$

Всякое стационарное значение $\theta = \theta_0$ обращает в ноль правую часть первого уравнения (37). Для упрощения выкладки случай, когда $u_0 = \cos \theta_0$ аннулирует фигурную скобку в (37), и случай $\sin \theta_0 = 0$ рассмотрим отдельно. Значению θ_0 соответствует регулярная прецессия гироскопа.

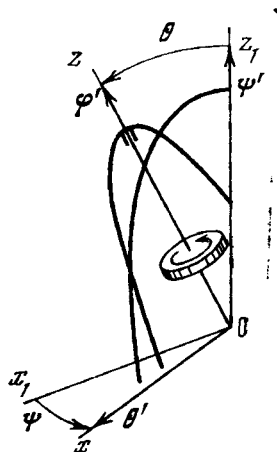


Рис. 85

1.6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $|u_0| < 1$

Поскольку для $|u| < 1$ имеем $-\ddot{\theta} \sin \theta = \ddot{u} + \frac{u\dot{u}^2}{1-u^2}$, то первое уравнение (37) можно записать так:

$$\ddot{u} + \frac{u\dot{u}^2}{1-u^2} = \frac{b^2}{e} \left\{ -\sigma + \frac{\alpha-u}{\gamma-u^2} - u \frac{(\alpha-u)^2}{(\gamma-u^2)^2} \right\} (1-u^2). \quad (39)$$

Если обозначить $x_3 = \psi$, то система из двух уравнений (39) и (37.2) будет эквивалентна системе (33), в которой

$$l(u) = \frac{b^2}{e} \left\{ -\sigma + \frac{\alpha-u}{\gamma-u^2} - u \frac{(\alpha-u)^2}{(\gamma-u^2)^2} \right\} (1-u^2), \quad (40)$$

$$m(u) = -\frac{u}{1-u^2}, \quad n(u) = \frac{b}{e} \frac{\alpha-u}{\gamma-u^2}.$$

Для удобства вычислений введем вспомогательные функции

$$G(u) = \frac{\alpha-u}{\gamma-u^2},$$

$$F(u) = -\sigma + G - uG^2,$$

$$P_2(u) = u^2 - 2\alpha u + \gamma, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} P_3(u) &= (\alpha-u)^2 (\gamma-u^2) + P_2^2 = \\ &= -2\alpha u^3 + 3(\alpha^2 + \gamma)u^2 - 6\alpha\gamma u + \alpha^2\gamma + \gamma^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$G' = -\frac{1-2uG}{\gamma-u^2} = -\frac{P_2}{(\gamma-u^2)^2}, \quad (42)$$

$$F' = -G^2 - \frac{(1-2uG)^2}{\gamma-u^2} = \frac{P_3 G'}{(\gamma-u^2)^2 P_2} = -\frac{P_3}{(\gamma-u^2)^3}.$$

Пусть теперь $u = u_0$ — корень уравнения $l(u) = 0$, причем $|u_0| < 1$. Поскольку $l = b^2 e^{-1} (1-u^2) F$, то u_0 будет корнем уравнения $F(u) = 0$ или

$$Q(u) \equiv \sigma (\gamma - u^2)^2 + (\alpha - u)(\alpha u - \gamma) = 0. \quad (43)$$

Поэтому при $u = u_0$

$$l' = b^2 e^{-1} (1-u^2) F',$$

$$l'' = -4b^2 e^{-1} u F' + b^2 e^{-1} (1-u^2) F'', \quad (44)$$

$$l'/l = -\frac{4u}{1-u^2} + F''/F'.$$

Теорема 6. Если $|u_0| < 1$, то решение $u = u_0$, $\dot{u} = 0$ в системе (37) устойчиво по переменным θ , ψ тогда и только тогда,

когда выполнено одно из двух условий

$$A+B^0-C^0 \geq 0 \quad (45)$$

или

$$A+B^0-C^0 < 0 \text{ и } P_3(u_0) > 0. \quad (46)$$

В устойчивом случае средняя скорость движения по углу ψ есть

$$[\dot{\psi}] = n(u_0) + \delta_2(\Delta u)^2 + \delta_3(\Delta u)^3 + O\{(\Delta u)^4\}, \quad (47)$$

где δ_2 и δ_3 даются формулами (54).

Доказательство. Согласно теореме 3 устойчивость по указанным переменным будет при условии

$$l'(u_0) < 0, \quad (48)$$

а неустойчивость — при

$$l'(u_0) > 0 \quad (49)$$

или

$$l'(u_0) = 0 \text{ и } l''(u_0) \neq 0. \quad (50)$$

Пусть $A+B^0-C^0 > 0$, тогда $e > 0$, $\gamma > 1$ и $F' \leq 0$ — как видно из первого выражения для F' в (42). Равенство $F' = 0$ достигается только при $u_0 = \alpha$, $\gamma = \alpha^2$, что невозможно при $\gamma > 1 \geq |u_0|$. Так как $1-u^2 > 0$, то согласно (44.1) выполнено (48). Устойчивость в этом случае была доказана Румянцевым [107].

Случай $A+B^0-C^0 = 0$ будет разобран в п. 7.8.

Пусть теперь $A+B^0-C^0 < 0$, тогда $e < 0$, $\gamma < 0$ и согласно (42) и (44)

$$l' = -b^2 e^{-1} P_3(\gamma - u^2)^{-3};$$

поэтому при $P_3 > 0$ выполнено (48). Если же $P_3 < 0$, то выполнено условие неустойчивости (49). Наконец, если $P_3 = 0$, то $l'(u_0) = 0$; однако, как сейчас покажем, $l''(u_0) \neq 0$, и согласно (50) будет неустойчивость. Действительно, тогда по (44)

$$l'' = b^2 e^{-1} (1 - u^2) F'' = -b^2 e^{-1} (1 - u^2) P_3'(\gamma - u^2)^{-3}.$$

Остается показать, что система трех уравнений

$$Q = 0, \quad P_3 = 0 \text{ и } P_3' = 0$$

не имеет общего решения. Поскольку $P_3' = 6(\alpha - u)(\alpha u - \gamma)$, то уравнение $P_3' = 0$ имеет два корня $u_0 = \alpha$ и $u_0 = \gamma/\alpha$. Согласно (41)

$$P_3(\alpha) = (\gamma - \alpha^2)^2 > 0,$$

$$P_3(\gamma/\alpha) = \gamma^3/\alpha^2 + \alpha^2\gamma - 2\gamma^2 < 0,$$

нбо $\gamma < 0 < \alpha^2$.

Пусть выполнено одно из условий устойчивости (45) или (46), тогда выполнено (18) и по теореме 4 можно вычислить коэффициенты δ_2 и δ_3 в (47). Согласно (42), (44) и (41) при $u=u_0$ имеем

$$\begin{aligned}\delta &= n''/n' + 2m - l''/l' = (\ln G')' - \frac{2u}{1-u^2} + \\ &+ \frac{4u}{1-u^2} - (\ln F')' = \frac{2u}{1-u^2} - \left\{ \ln \frac{P_3}{(\gamma-u^2)P_2} \right\}' = \\ &= \frac{2u}{1-u^2} - \frac{2u}{\gamma-u^2} + \frac{P'_2}{P_2} - \frac{P'_3}{P_3} = \\ &= \frac{2u(\gamma-1)}{(1-u^2)(\gamma-u^2)} + \frac{P'_2}{P_2} - \frac{P'_3}{P_3} = \frac{S}{(1-u^2)(\gamma-u^2)P_2P_3},\end{aligned}\quad (51)$$

где

$$\begin{aligned}P'_2 &= -2(\alpha - u), \quad P'_3 = 6(\alpha - u)(\alpha u - \gamma), \\ S &= 2(\gamma - 1)uP_2P_3 + (1 - u^2)(\gamma - u^2)(P'_2P_3 - P'_3P_2) = \\ &= 2(\gamma - 1)uP_2P_3 - \\ &- 2(1 - u^2)(\gamma - u^2)(\alpha u^3 - 3\alpha^2u^2 + 3\alpha\gamma u + \alpha^2\gamma - 2\gamma^2).\end{aligned}\quad (52)$$

Точно так же находим

$$n' = -\frac{b}{e} \frac{P_2}{(\gamma - u^2)^2}, \quad (53)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} l''/l' - 2m = \frac{1}{2} (\ln F')' = \frac{3u}{\gamma - u^2} + \frac{P'_3}{2P_3}.$$

Согласно (34) $f(h)$ выражается формулой (31), где

$$\delta_2 = \frac{1}{4} n' \delta = -\frac{1}{4} \frac{b}{e} \frac{S}{(\gamma - u^2)^3 (1 - u^2) P_3}, \quad (54)$$

$$\delta_3 = \frac{2}{3} \delta_2 \delta_1 = \frac{1}{3} \delta_2 \left(\frac{6u}{\gamma - u^2} + \frac{P'_3}{P_3} \right).$$

Теорема доказана.

Коэффициент $f_1=0$, т. е. $f(h)=O\{(\Delta u)^4\}$, только если $\delta=0$, т. е. $S=0$. Два алгебраических уравнения $Q=0$ и $S=0$ связывают u_0 и три параметра σ , α и γ . Если эти четыре величины удовлетворяют обоим уравнениям, то решение системы (37) с начальными данными

$$u^0 = u_0, \quad \dot{u}^0 = 0, \quad \dot{\psi}^0 = n(u^0), \quad \dot{\varphi}^0 = r - u^0 n(u^0)$$

соответствует регулярной прецессии гироскопа. При начальных данных, близких к этим, будет псевдорегулярная прецессия.

Причем с точностью до $(\Delta u)^4$ скорость псевдорегулярной прецессии будет неизменной. По-видимому, было бы интересно исследовать эти зависимости подробнее.

З а м е ч а н и е. Поскольку система (37) интегрируемая, то ее решения можно изучать по интегралам, как сделано в статье Лунц и Смолицкий [84] и в книге Лунц [83]. Как заметил Х. Л. Смолицкий, из формул этих работ можно вывести условие (45) со строгим неравенством и первые два члена разложения (47).

1.7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $|u_0| = 1$

Здесь $\theta_0 = 0$ или π , $u_0 = \cos \theta_0 = \pm 1$ и от системы (37) к системе (33) перейдем, положив

$$x_1 = \theta - \theta_0, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = \psi.$$

Тогда

$$l(\theta) = -b^2 e^{-1} F(\cos \theta) \sin \theta, \quad m \equiv 0, \quad (55)$$

$$n = \frac{b}{e} \frac{\alpha - \cos \theta}{\gamma - \cos^2 \theta}.$$

Теорема 7. Если $|u_0| = 1$, то решение $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ системы (37) устойчиво по переменным θ , $\dot{\theta}$, ψ тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий

- 1) $-e^{-1} F(u_0) u_0 < 0$;
- 2) $F(u_0) = 0$, $e^{-1} F'(u_0) < 0$;
- 3) $F(u_0) = 0$, $F'(u_0) = 0$, $-e^{-1} F''(u_0) u_0 < 0$.

(56)

При выполнении первого из этих условий средняя скорость движения внешнего кольца есть

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}] = & \frac{k - C r u_0}{J + C} + \\ & + \frac{(J + 2A - 2B^0 + C^0) C r - 2k(A + B^0 - C^0) u_0}{(J + C)^2} u_0 (\Delta \theta)^2 + O\{(\Delta \theta)^4\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Доказательство. Поскольку разложение функции l по степеням $x_1 = \theta - \theta_0$ содержит только нечетные степени x_1 , то, согласно теореме 3, достаточным для устойчивости будет любое из трех условий:

$$\begin{aligned} dl/d\theta & < 0, \\ dl/d\theta & = 0, \quad d^3 l/d\theta^3 < 0, \\ dl/d\theta & = d^3 l/d\theta^3 = 0, \quad d^5 l/d\theta^5 < 0, \end{aligned} \quad (58)$$

где производные берутся в точке $\theta = \theta_0$. В то же время для неустойчивости достаточно любого из условий:

$$\begin{aligned} dl/d\theta &> 0; \\ dl/d\theta &= 0, \quad d^3l/d\theta^3 > 0, \\ dl/d\theta &= d^3l/d\theta^3 = 0, \quad d^5l/d\theta^5 > 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Согласно (55)

$$\begin{aligned} dl/d\theta &= -b^2 e^{-1} F(u_0) u_0, \\ d^3l/d\theta^3 &= b^2 e^{-1} \{F(u_0) u_0 + 3F'(u_0) u_0^2\}, \\ d^5l/d\theta^5 &= -b^2 e^{-1} \{F(u_0) u_0 + 15F'(u_0) u_0^2 + 15F''(u_0) u_0^3\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Поэтому условия (56) совпадают с условиями (58) соответственно и, следовательно, они достаточны для устойчивости. Случай $F(u_0) = F'(u_0) = F''(u_0) = 0$ невозможен, как показано в доказательстве предыдущей теоремы. Поэтому, если не выполнено ни одно из условий (56), то будет выполнено одно из условий (59), что означает неустойчивость.

В дальнейшем будем считать, что выполнено первое условие устойчивости (56), и применим теорему 4. Поскольку при $\theta = \theta_0$ имеем

$$\frac{d^2l}{d\theta^2} = 0, \quad \frac{d^2n}{d\theta^2} = \frac{b(1 - 2\alpha u_0 + \gamma) u_0}{e(\gamma - 1)^2},$$

то согласно (31) и (34)

$$f(h) = n(\theta_0) + \frac{1}{4} \frac{d^2n}{d\theta^2} (\Delta\theta)^2 + O\{(\Delta\theta)^4\},$$

что эквивалентно формуле (57). Доказательство окончено.

З а м е ч а н и е. В отличие от теоремы 6 в теореме 7 скорость ухода вычисляется не для всех случаев устойчивости. Это связано с тем, что в случаях (56.2), (56.3) $\lambda_{1,2} = 0$, и теорема 4 не применима. Однако можно вычислить уход и в этих случаях. Для этого надо рассмотреть систему (14), (15) с $M \equiv 0$, где N — четная, а L — нечетная функции от x_1 , и, кроме того, либо $L_1 = 0$, $L_3 < 0$, либо $L_1 = L_3 = 0$, $L_5 < 0$. Здесь удобно воспользоваться введенными Ляпуновым [86] функциями $Sp(\theta)$ и $S\dot{p}(\theta)$ (см. также § 4 гл. II).

Условие (56.1) при $u_0 = 1$ совпадает с условием (2.8) у Рунца [107]; там же показано, что это условие достаточно, а условие $-e^{-1}F(u_0)u_0 \leq 0$ необходимо для устойчивости по переменным $\dot{\theta}$, θ , $\dot{\psi}$. Случай $F(u_0) = 0$ там не рассматривался.

Из (42) нетрудно вывести, что условие (56.2) эквивалентно условию $Q(u_0) = 0$ и либо $A + B^0 - C^0 \geq 0$, либо $A + B^0 - C^0 < 0$ и $P_3(u_0) > 0$. Условие (56.3) эквивалентно условию

$$Q(u_0) = 0, \quad A + B^0 - C^0 < 0, \quad P_3(u_0) = 0, \quad \zeta u_0 < 0.$$

Как видно из (57), скорость вращения внешнего кольца с точностью до $O\{(\Delta\theta)^4\}$ не зависит от амплитуды нутационных колебаний $\Delta\theta$, если

$$2u_0 \frac{k}{r} = \frac{J + 2A + 2B^0 - C^0}{A + B^0 - C^0} C.$$

1.8. СЛУЧАЙ $A + B^0 - C^0 = 0$

Здесь согласно (38)

$$e = 0, \quad e^{-1}\sigma = \frac{P\zeta(A + A^0)}{C^2 r^2}, \quad e\gamma = \frac{J + A + B^0}{A + A^0} > 0, \quad (61)$$

$$\frac{F(u)}{e} = -\frac{\sigma}{e} + \frac{\alpha - u}{e\gamma}.$$

Ограничимся случаями, когда $|u_0| < 1$, тогда уравнение для u_0 есть $e^{-1}F(u_0) = 0$, откуда

$$u_0 = \alpha - \sigma\gamma = \frac{k}{Cr} - \frac{P\zeta(J + A + B^0)}{C^2 r^2}. \quad (62)$$

Поскольку согласно (61)

$$e^{-1}F'(u) = -(e\gamma)^{-1} < 0,$$

то здесь всегда будет устойчивость. Далее, в формулах (51) и (53) стоят рациональные функции от γ . Устремляя γ к бесконечности и учитывая предельные равенства (61), получим в пределе

$$\delta = \frac{2u}{1 - u^2}, \quad n' = -b(e\gamma)^{-1}, \quad \delta_1 = 0.$$

Отсюда по (54) получаем $\delta_2 = 0$, а

$$\delta_2 = \frac{1}{4} n' \delta = -\frac{bu_0}{2e\gamma(1 - u_0^2)} = -\frac{Cru_0}{2(J + A + B^0)(1 - u_0^2)}.$$

Поскольку в данном случае уравнение (37.2) имеет вид

$$\dot{\psi} = \frac{k - Cru}{J + A + B^0} \equiv n(u),$$

то

$$\Delta\dot{\psi} = -\frac{Cr}{J + A + B^0} \Delta u,$$

и формула (47) принимает вид

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}] &= n(u_0) - \frac{Cru_0(\Delta u)^2}{2(J + A + B^0)(1 - u_0^2)} + O\{(\Delta u)^4\} = \\ &= n(u_0) - \frac{(J + A + B^0)u_0}{2Cr(1 - u_0^2)} (\Delta\dot{\psi})^2 + O\{(\Delta\dot{\psi})^4\}. \end{aligned}$$

Если в этом последнем выражении пренебречь оценкой остаточного члена $O\{\dots\}$, то получится формула (6.6) из статьи Климова и Степаненко [69], посвященной случаю $A+B^0-C^0=0$. В частности, $\delta_2=0$, только если $u_0=0$, т. е. согласно (62) при $Crk=P'_\zeta(J+A+B^0)$.

1.9. УРАВНОВЕШЕННЫЙ ГИРОСКОП

Для уравновешенного гироскопа $\zeta=0$, поэтому $\sigma=0$. Уравнение (43) принимает вид $(\alpha-u)(\alpha u-\gamma)=0$ и имеет два корня:

$$u=u_0=\alpha \quad (63)$$

и

$$u=u_0=\gamma/\alpha. \quad (64)$$

Рассмотрим сначала случай (63). Поскольку $n(\alpha)=0$, то это соответствует вращению гироскопа, при котором его ось неподвижна. Как видно из (44) и (42), здесь всегда $l'<0$. Согласно (52) $P'_2=P'_3=0$, и формулы (51) и (53) дают

$$\delta = \frac{2u(\gamma-1)}{(1-u^2)(\gamma-u^2)}, \quad \delta_1 = \frac{3u}{\gamma-u^2}.$$

Поскольку $P_2(\alpha)=\gamma-\alpha^2$, то $G'(\alpha)=-(\gamma-\alpha^2)^{-1}$; откуда по формуле (54) получаем

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{1}{4} n' \delta = -\frac{b}{2e} \frac{\alpha(\gamma-1)}{(1-\alpha^2)(\gamma-\alpha^2)^2} = \\ &= -\frac{(J+C^0)Cr \cos \theta_0}{2\{(J+A+B^0)\sin^2 \theta_0 + (J+C^0)\cos^2 \theta_0\}^2 \sin^2 \theta_c}, \\ \delta_3 &= \frac{2}{3} \delta_1 \delta_2 = -\frac{b}{e} \frac{\alpha^2(\gamma-1)}{(1-\alpha^2)(\gamma-\alpha^2)^3}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta u \approx -\sin \theta_0 \Delta \theta$, то с точностью до $O\{(\Delta \theta)^3\}$ выражение для $\delta_2(\Delta u)^2$ совпадает с формулой (20) в работе Магнуса [142], где впервые была вычислена скорость ухода оси гироскопа, правда, совсем иначе и без доказательства сходимости. В дальнейшем были многочисленные работы, где скорость ухода вычислялась с точностью до $O\{(\Delta \theta)^4\}$ (см. дополнение II в книге Николаи [99]).

В работе Смолицкого [112] вычислены коэффициенты s_1 и s_2 в разложении

$$[\dot{\psi}] = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \kappa^k$$

по параметру $\kappa = \gamma(\Delta u)^2 \{\gamma - (\alpha + \Delta u)^2\}^{-1}$. Здесь κ играет ту же роль, что и интеграл h в (11). Если переразложить ряд для κ в ряд по степеням Δu , то формулы Смолицкого [112] совпадут с

формулами данной работы до величины $O\{(\Delta u)^4\}$; однако вычисления Х. Л. Смолицкого дают $[\dot{\psi}]$ с большей точностью.

Сюда же можно отнести работу Кобрин и Мартыненко [70], в которой рассмотрен быстрозакрученный неуравновешенный гироскоп. Там для малых σ и $u_0 - \alpha$ вычислена величина $[\dot{\psi}]$ с точностью до $O(\mu^3)$, где $\mu = \max[\sigma, \Delta u]$. При этом асимптотический метод применялся там не по существу, результат получается из формулы Магнуса следующими простыми вычислениями. В окрестности точки $u_0 = \alpha$, $\sigma = 0$ формула (47) дает

$$[\dot{\psi}] = n'(\alpha)(u_0 - \alpha) + \frac{1}{2}n''(\alpha)(u_0 - \alpha)^2 + \delta_{20}(\Delta u)^2 + O(\mu^3). \quad (65)$$

Здесь $\delta_{20} = \delta_2$ при $\sigma = 0$ и $u_0 = \alpha$, то есть $\delta_{20}(\Delta u)^2$ — это магнусовская скорость ухода уравновешенного гироскопа. В окрестности точки $u_0 = \alpha$, $\sigma = 0$ корень уравнения (43) разлагается в ряд по σ

$$u_0 - \alpha = (\alpha^2 - \gamma)\sigma + 3\alpha(\alpha^2 - \gamma)\sigma^2 + O(\sigma^3).$$

Подставляя это в (65) и учитывая там лишь члены не выше второй степени по σ и Δu , получим формулу (3.4) статьи Кобрин и Мартыненко [70].

Рассмотрим теперь случай (64). Здесь будет регулярная прецессия со скоростью $n(\gamma\alpha^{-1}) \neq 0$, которая является величиной того же порядка, что и скорость собственного вращения гироскопа. Согласно (52) $P'_3 = 0$, $P'_2/P_2 = 2\alpha/\gamma$, и формулы (51) и (53) дают

$$\delta = \frac{2u(\gamma - 1)}{(1 - u^2)(\gamma - u^2)} + \frac{P'_2}{P_2} = \frac{2\alpha(\alpha^4 - 2\alpha^2\gamma + \gamma^3)}{\gamma(\alpha^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma)},$$

$$\delta_1 = \frac{3u}{\gamma - u^2} = \frac{3\alpha}{\alpha^2 - \gamma}, \quad n' = -\frac{b}{e} \frac{\alpha^2}{\gamma(\alpha^2 - \gamma)}.$$

Поэтому

$$\delta_2 = \frac{1}{4}n'\delta = -\frac{b}{2e} \frac{\alpha^3(\alpha^4 - 2\alpha^2\gamma + \gamma^3)}{\gamma^2(\alpha^2 - \gamma)^2(\alpha^2 - \gamma)}.$$

Поскольку $|\gamma/\alpha| < 1$ и $\gamma(\gamma - 1) > 0$, то для таких значений параметров $\alpha^4 - 2\alpha^2\gamma + \gamma^3 > 0$. Поэтому здесь всегда $\delta_2 \neq 0$.

Наконец, анализ случая $|u_0| = 1$ легко вывести из п. 1.7.

1.10. СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Сферический маятник — это точка массы m , движущаяся по сфере радиуса ζ (см. Зоммерфельд [67, § 18]). Сферический маятник можно рассматривать, как частный случай гироскопа в

кардановом подвесе при следующих значениях параметров:

$$J = A^0 = B^0 = C^0 = 0, \quad A = \xi^2 m, \quad P = mg; \quad (66)$$

$$Cr = 0. \quad (67)$$

Чтобы воспользоваться теоремой 6, придадим параметрам значения (66), а вместо (67) положим $Cr = \varepsilon$ и устремим ε к нулю. Тогда

$$\sigma = \frac{P \xi A}{C^2 r^2} = \frac{m^2 g \xi^3}{\varepsilon^2}, \quad \alpha = \frac{k}{\varepsilon}, \quad b = \frac{\varepsilon}{A}, \quad e = \gamma = 1.$$

Поскольку теорема 6 остается справедливой при $\gamma = 1$, а $A + B^0 - C^0 > 0$, то основное движение $u = u_0$ устойчиво. Здесь u_0 — корень уравнения

$$P \xi A (1 - u^2)^2 + (k - \varepsilon u) (ku - \varepsilon) = 0$$

или в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$P \xi A (1 - u^2) + k^2 u = 0.$$

Далее, из формул (40), (51), (53), (54) при $u = u_0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$n(u) = \frac{1}{A} \frac{k - \varepsilon u}{1 - u^2} \rightarrow \frac{k}{A} \frac{1}{1 - u^2},$$

$$\delta = \frac{P'_2}{P_2} - \frac{P'_3}{P_3} \rightarrow -\frac{1}{u},$$

$$n' = -\frac{\varepsilon}{A} \frac{P_2}{(1 - u^2)^2} \rightarrow \frac{k}{A} \frac{2u}{(1 - u^2)^2},$$

$$\delta_1 = \frac{3u}{1 - u^2} + \frac{P'_3}{P_3} \rightarrow \frac{3u}{1 - u^2} + \frac{1}{u},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4} n' \delta \rightarrow -\frac{k}{2A} \frac{1}{(1 - u^2)^2},$$

$$\delta_3 = \frac{2}{3} \delta_2 \delta_1 \rightarrow -\frac{k}{A} \frac{2u^2 + 1}{(1 - u^2)^3}.$$

Заметим, что при $k \neq 0$ всегда $\delta_2 \neq 0$ и $\delta_3 \neq 0$. Итак, согласно теореме 6

$$[\dot{\psi}] = \frac{k}{A} \frac{1}{1 - u^2} - \frac{k}{2A} \frac{(\Delta u)^2}{(1 - u^2)^2} - \frac{k}{A} \frac{2u^2 + 1}{(1 - u^2)^3} (\Delta u)^3 + O\{(\Delta u)^4\}. \quad (68)$$

Эту формулу можно получить и непосредственно из уравнений движения сферического маятника (см. Зоммерфельд [67, § 18, формулы (18.8) и (18.9)]). Для этого надо учесть, что обозначения Зоммерфельда следующим образом выражаются

через наши:

$$\varphi = \psi, \quad l = \zeta, \quad C = k/m.$$

Тогда в наших обозначениях из (18.8) получаем

$$\dot{\psi} = \frac{k}{A} \frac{1}{1-u^2}. \quad (69)$$

Подставляя это в формулу (18.9), дифференцируя ее и учитывая, что

$$-\ddot{\theta} \sin \theta = \ddot{u} + \frac{u\dot{u}^2}{1-u^2},$$

получаем второе уравнение

$$\ddot{u} + \frac{u\dot{u}^2}{1-u^2} + \left(\frac{k}{A}\right)^2 \frac{u}{1-u^2} + \frac{g}{\zeta} (1-u^2) = 0. \quad (70)$$

Если теперь к системе (70), (69) применить результаты пп. 1.1—1.4 гл. V, то снова получим формулу (68) (ср. Цельман [124]).

§ 2. О КОЛЕБАНИЯХ СПУТНИКА В ПЛОСКОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

Этот параграф иллюстрирует применение методов §§ 3—4 гл. III. Нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее плоское движение спутника относительно центра инерции, движущегося по эллиптической орбите, рассмотрено для двух случаев, соответствующих колебаниям спутника либо в орбитальной, либо в абсолютной системе координат. В этих случаях посредством вычисления высших приближений асимптотического метода (см. пример 1 § 4 гл. III) уточнены результаты об устойчивости известных периодических решений, а также найдены новые классы устойчивых периодических решений (см. § 3 гл. III).

Эта задача интересна также тем, что в ней встречается сильное вырождение (до пятого порядка по малому параметру). Изложение здесь следует Брюно [47].

2.1. ФОРМУЛЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Рассмотрим систему

$$dX/dt \equiv \dot{X} = \varepsilon F(X, t), \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$, функция $F = (f_1, \dots, f_n)$ аналитична по X , t и 2π -периодична по t в некоторой области $\mathcal{H}$. Согласно асимптотическому методу Н. М. Крылова — Н. Б. Боголюбова, изложенному в книге Боголюбова и Митропольского [23], существует

замена координат

$$X = Y + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(Y, t), \quad (2)$$

которая переводит систему (1) в «осредненную» систему

$$\dot{Y} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_k(Y) \equiv G(Y, \varepsilon). \quad (3)$$

При этом функции $H_k(Y, t)$ — аналитические по Y, t и 2π -периодические по t в области $\mathcal{H}$. Там же аналитичны функции G_k , которые от t не зависят. Ряды в правых частях формул (2) и (3) являются формальными (т. е. могут быть как сходящимися, так и расходящимися). Система (3) является «нормальной формой» системы (1) (§ 4 гл. III). Согласно §§ 3, 4 гл. III нормализующее преобразование (2) сходится на множестве неподвижных точек системы (3)

$$\mathcal{A} = \{Y, \varepsilon : G(Y, \varepsilon) = 0\}, \quad (4)$$

и само это множество аналитично. Точкам Y, ε из этого множества соответствуют 2π -периодические решения исходной системы (1). Следовательно, для отыскания 2π -периодических решений системы (1) при малых $|\varepsilon|$ надо вычислить те члены в разложении (3), которыми определяется строение множества (4). Для этого далеко не всегда достаточно знать первый член G_1 . Например, если $G_1 \equiv 0$, то необходимо вычислить G_2 , а в тех местах, где G_2 имеет кратные корни, — еще и G_3 .

В дальнейшем придется иметь дело с довольно вырожденными случаями и надо будет вычислять разложение (3) до пятого порядка. Поэтому до этого порядка выпишем уравнения, которые служат для определения функций H_k и G_k ($k=1, \dots, 5$). Эти уравнения получаются в результате дифференцирования по t равенства (2), замене производных $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ по формулам (1) и (3) с последующей заменой X через Y, t согласно (2). Получаем

$$\begin{aligned} F(Y, t) &= G_1 + \frac{\partial H_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} H_1 &= G_2 + \frac{\partial H_1}{\partial Y} G_1 + \frac{\partial H_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} H_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} H_1^2 &= G_3 + \frac{\partial H_1}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial H_2}{\partial Y} G_1 + \frac{\partial H_3}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} H_3 + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} H_1 H_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} H_1^3 &= G_4 + \frac{\partial H_1}{\partial Y} G_3 + \\ &+ \frac{\partial H_2}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial H_3}{\partial Y} G_1 + \frac{\partial H_4}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y} H_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} H_3^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} H_1 H_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} H_1^2 H_2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 F}{\partial Y^4} H_1^4 = \\ = G_5 + \frac{\partial H_1}{\partial Y} G_4 + \frac{\partial H_2}{\partial Y} G_3 + \frac{\partial H_3}{\partial Y} G_2 + \frac{\partial H_4}{\partial Y} G_1 + \frac{\partial H_5}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь частные производные по Y и их произведение на векторы надо понимать в тензорном смысле. Аргументом для F вместо X служит Y .

В дальнейшем придется иметь дело с системой (1) весьма специального вида:

$$\dot{x}_1 = \varepsilon x_2, \quad \dot{x}_2 = \varepsilon f(x_1, t), \quad (6)$$

которая эквивалентна уравнению второго порядка. Для этой системы вычисления по формулам (5) дают следующие значения $G_k = (g_{1k}, g_{2k})$:

$$\begin{aligned} g_{11} &= y_1, \quad g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{15} = 0; \\ g_{21} &= [f], \quad g_{22} = 0, \\ g_{23} &= \left[\tilde{f}^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right], \\ g_{24} &= -2y_2 \left[\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right], \\ g_{25} &= 3y_2^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{f}^*}{\partial y_1^2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] + 3[f] \left[\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] + \\ &+ \left[\left(\tilde{f}^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (\tilde{f}^*)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $f = f(y_1, t)$, $[f]$ — усреднение по t ,

$$f^* = f - [f],$$

$$\tilde{f}^* = \int f^* dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kt - b_k \cos kt),$$

если

$$f^* = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Следовательно, для системы (6) «осредненная» система с точностью до ε^6 имеет вид

$$\dot{y}_1 = \varepsilon y_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \varepsilon [f] + \varepsilon^3 \left[\widetilde{\widetilde{f}}^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] - \varepsilon^4 2y_2 \left[\frac{\partial \widetilde{\widetilde{f}}^*}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] + \\ & + \varepsilon^5 \{ y_2^2 p(y_1) + [f] q(y_1) + r(y_1) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$r = \left[\left(\widetilde{\widetilde{f}}^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (\widetilde{\widetilde{f}}^*)^2 \right]. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь еще более специальный случай, когда

$$f(y_1, t) = \alpha(t) \sin y_1 + \beta(t) \cos y_1, \quad (10)$$

где α — четная и β — нечетная функции, т. е.

$$\alpha(t) = \alpha(-t), \quad \beta(t) = -\beta(-t). \quad (11)$$

При этом α и β суть 2π -периодические функции. В этом случае имеем

$$[f] = [\alpha] \sin y_1,$$

$$\left[\widetilde{\widetilde{f}}^* \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] = s \cos y_1 \sin y_1,$$

$$\left[\frac{\partial \widetilde{\widetilde{f}}^*}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \right] \equiv 0, \quad r = r^{(1)} \cos^2 y_1 \sin y_1 + r^{(2)} \sin^3 y_1,$$

где

$$s = [\alpha \widetilde{\widetilde{\alpha}}^*] - [\beta \widetilde{\widetilde{\beta}}],$$

$$r^{(1)} = [\alpha (\widetilde{\widetilde{\alpha \widetilde{\alpha}}^*})] - [\alpha (\widetilde{\widetilde{\beta \widetilde{\beta}}^*})] - [\beta (\widetilde{\widetilde{\alpha \widetilde{\beta}}})] - [\beta \widetilde{\widetilde{\alpha}}^* \widetilde{\widetilde{\beta}}] - \frac{1}{2} [\alpha (\widetilde{\widetilde{\beta}})^2], \quad (12)$$

$$r^{(2)} = [\beta (\widetilde{\widetilde{\beta \widetilde{\alpha}}^*})] - \frac{1}{2} [\alpha (\widetilde{\widetilde{\alpha}})^2].$$

Итак, в случае (10), (11) «осредненная» система (8) принимает вид

$$\dot{y}_1 = \varepsilon y_2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \varepsilon [\alpha] \sin y_1 + \varepsilon^3 s \cos y_1 \sin y_1 + \\ & + \varepsilon^5 \{ y_2^2 p(y_1) + [f] q(y_1) + r^{(1)} \cos^2 y_1 \sin y_1 + r^{(2)} \sin^3 y_1 \}. \end{aligned}$$

2.2. ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СПУТНИКА

Рассмотрим плоское движение спутника относительно центра инерции, движущегося по эллиптической орбите в центральном гравитационном поле. Пусть главная центральная ось инерции спутника, момент инерции относительно которой равен B , все время перпендикулярна плоскости орбиты. Моменты инерции относительно двух других главных осей инерции обозначим через A , C . Уравнение относительного движения вывел Белецкий [10]. Оно имеет вид

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \delta}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\delta}{dv} + \mu \sin \delta = 4e \sin v. \quad (14)$$

Здесь δ — удвоенный угол между радиус-вектором центра масс и той осью инерции, момент инерции относительно которой равен C ; $\mu = 3(A - C)/B$; e — эксцентриситет орбиты; v — угловое расстояние радиус-вектора от перигея орбиты (истинная аномалия). Из известного неравенства $|A - C| \leq B$ следует, что $|\mu| \leq 3$.

Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (14) имеет периодические коэффициенты и два параметра e и μ , лежащие в прямоугольнике $\mathcal{E} = \{e, \mu : 0 \leq e \leq 1, |\mu| \leq 3\}$. Уравнение (14) инвариантно при заменах

$$v \rightarrow v + \pi, \quad \delta \rightarrow \delta, \quad e \rightarrow -e, \quad \mu \rightarrow \mu; \quad (15)$$

$$v \rightarrow v, \quad \delta \rightarrow \delta + \pi, \quad e \rightarrow e, \quad \mu \rightarrow -\mu; \quad (16)$$

$$v \rightarrow -v, \quad \delta \rightarrow -\delta, \quad e \rightarrow e, \quad \mu \rightarrow \mu. \quad (17)$$

Наша цель — изучить некоторые периодические решения уравнения (14) при малых $|\mu|$. Для этого, следуя Ф. Л. Черноусько [127], в качестве независимой переменной возьмем время t , отсчитанное от перигея и отнесенное к периоду обращения спутника, деленному на 2π :

$$t = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v}, \quad (18)$$

$$t(v + 2\pi) = t(v) + 2\pi.$$

Тогда

$$dt = (1 - e^2)^{3/2} (1 + e \cos v)^{-2} dv.$$

Введем новые переменные x_1 и x_2 по формулам Черноусько [127]:

$$\delta = mt - 2v + x_1, \quad d\delta/dt = m - 2 + \varepsilon x_2, \quad (19)$$

где $m = \text{const}$ и $\varepsilon = \sqrt{|\mu|}$ — новые параметры.

Тогда уравнение (14) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon \operatorname{sgn} \mu \frac{(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} \sin(mt - 2v + x_1),\end{aligned}\quad (20)$$

где v рассматривается как функция t , определенная равенством (18). Если m — целое число, то система (20) имеет вид (6), (10), (11), где

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\operatorname{sgn} \mu \frac{(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} \cos(mt - 2v), \\ \beta(t) &= -\operatorname{sgn} \mu \frac{(1 + e \cos v)^3}{(1 - e^2)^3} \sin(mt - 2v).\end{aligned}\quad (21)$$

Изучение первого приближения осредненной системы (13), соответствующей различным целым m , сделано Черноусько [127]. Здесь с помощью высших приближений рассмотрим два случая: $m=2$ (колебания в орбитальной системе координат) и $m=0$ (колебания в абсолютной системе координат).

Заметим, что при подстановке (15) правая часть второго уравнения (20) не меняется при четном m и меняет знак при нечетном m . В осредненной системе (13) подстановке (15) соответствует замена

$$t \rightarrow t + \pi, \quad e \rightarrow -e, \quad Y \rightarrow Y.$$

Поскольку правая часть системы (13) не зависит от t , то правая часть второго уравнения (13) является нечетной функцией e при нечетном m и четной — при четном m . Кроме того, в полной осредненной системе (3) при целом $m \neq 2$ правая часть второго уравнения обращается в ноль при $e=0$. Это следует из интегрируемости системы (20) при $e=0$.

2.3. КОЛЕБАНИЯ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим здесь случай $m=2$. В этом случае

$$[\alpha] = -\operatorname{sgn} \mu \cdot \varphi(e) \neq 0.$$

График функции $\varphi(e)$ вычислен Черноусько [127]: на интервале $0 \leq e \leq 1$ функция φ монотонно убывает и обращается в ноль при $e=e_0 \approx 0,682$.

При $e \neq 0$ неподвижные точки первого приближения системы (13) определяются системой уравнений

$$y_2 = 0, \quad \varphi(e) \sin y_1 = 0. \quad (22)$$

Решения этой системы при $\mu=0$ суть порождающие периодические решения системы (20), т. е. пределы при $\mu \rightarrow 0$ периодических решений системы (20). Итак, согласно (22) получаем следующие семейства порождающих периодических решений (везде $x_2=0$):

$$x_1=0, e \text{ — произвольно}; \quad (23)$$

$$x_1=\pi, e \text{ — произвольно}; \quad (24)$$

$$x_1 \text{ — произвольно, } e=e_0. \quad (25)$$

Семейства периодических решений, порожденные семействами (23), (24) и (25), будем обозначать $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{Z}$ соответственно. Для системы (13) семейства $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ суть

$$\mathcal{F}_0 = \{y_1=0, y_2=0; e, \mu \text{ — произвольны}\};$$

$$\mathcal{F}_1 = \{y_1=\pi, y_2=0; e, \mu \text{ — произвольны}\}.$$

Из свойства (16) следует, что $\mathcal{F}_0(e, -\mu) = \mathcal{F}_1(e, \mu)$. Следовательно, из двух семейств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ достаточно изучить одно.

Пренебрежем в системе (13) членами выше третьего порядка по ε и рассмотрим систему

$$\dot{y}_1 = \varepsilon y_2, \quad (26)$$

$$\dot{y}_2 = -\varepsilon \operatorname{sgn} \mu \cdot \varphi(e) \sin y_1 + \varepsilon^3 s(e) \cos y_1 \sin y_1.$$

Тогда неподвижные точки семейства $\mathcal{Z}$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi(e) = \mu s(e) \cos y_1, \quad (27)$$

где функция $s(e)$ вычисляется по формуле (12). Поскольку $e=e_0$ — простой корень уравнения $\varphi(e)=0$, то вблизи него по теореме о неявной функции можно уравнение (27) разрешить относительно $e=e_0$:

$$e - e_0 = \zeta(\mu \cos y_1) = \mu \cos y_1 \frac{s(e_0)}{\varphi'(e_0)} + O(\mu^2). \quad (28)$$

То есть для каждого μ семейство $\mathcal{Z}$ существует только для тех значений e , которые лежат между границами, определяемыми из уравнений

$$\varphi(e) = \pm s(e) \mu. \quad (29)$$

Согласно (28) приближенно эти границы даются формулой

$$e - e_0 = \pm \left| \mu \frac{s(e_0)}{\varphi'(e_0)} \right|. \quad (30)$$

Исследуем теперь устойчивость найденных неподвижных точек осредненной системы (26). Характеристическое уравнение для них

$$\lambda^2 = -\mu \varphi(e) \cos y_1 + \mu^2 s(e) \cos 2y_1. \quad (31)$$

Если $\varphi(e^0) \neq 0$, то вблизи точки $e=e^0$, $\mu=0$ устойчивость решений семейства $\mathcal{F}_0$ определяется знаком величины $\mu\varphi(e^0)$, а линия $\mu=0$ является границей области устойчивости, в которой $\mu\varphi(e^0) > 0$.

Например, при $\varphi(e^0) > 0$ для $\mu > 0$ будет устойчивость, а для $\mu < 0$ — неустойчивость.

Через точку $e=e_0$, $\mu=0$ проходит еще одна граница области устойчивости семейства $\mathcal{F}_0$. Эта граница согласно (31) определяется уравнением

$$\varphi(e) = \mu s(e), \quad (32)$$

аналогичным уравнению (27) при $y_1=0$. Разрешая это уравнение, согласно (28) получим

$$e - e_0 = \xi(\mu) = \mu \frac{s(e_0)}{\varphi'(e_0)} + O(\mu^2). \quad (33)$$

На самом деле граница (32) является местом пересечения семейства $\mathcal{F}_0$ с семейством $\mathcal{G}$. Аналогично на семействе $\mathcal{F}_1$ граница зоны устойчивости является местом пересечения с семейством $\mathcal{G}$ и дается уравнением (27) при $\cos y_1 = -1$.

На семействе $\mathcal{G}$ в силу (27) и (31) имеем

$$\lambda^2 = \mu^2 s(e) (\cos 2y_1 - \cos^2 y_1) = -\mu^2 s(e) \sin^2 y_1 \approx -\mu^2 s(e_0) \sin^2 y_1.$$

То есть при малых $|\mu|$ семейство все устойчиво, если $s(e_0) > 0$, и неустойчиво, если $s(e_0) < 0$. Семейство $\mathcal{F}_0$ и его устойчивость были вычислены для всех значений параметров e , $\mu \in \mathcal{G}$ (см. Златоустов и др. [66], Сарычев и Златоустов [109]). Опубликованных

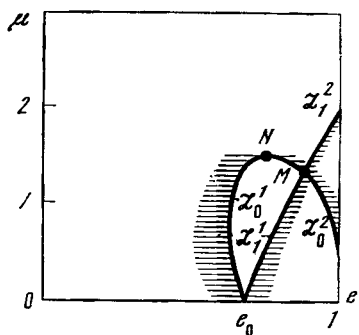


Рис. 86

результатов достаточно, чтобы показать, что $s(e_0) > 0$ и семейство $\mathcal{G}$ устойчиво. Действительно, граница зоны устойчивости семейства $\mathcal{F}_0$ дается уравнением (33). Согласно рис. 4 у Златоустова и др. [66] $s(e_0)/\varphi'(e_0) < 0$; согласно фиг. 3 у Черноусько [127] $\varphi'(e_0) < 0$; следовательно, $s(e_0) > 0$.

Проследим теперь судьбу семейства $\mathcal{G}$ при возрастании μ от нуля. Согласно вычислениям Златоустова и др. [66], Сарычева и Златоустова [109] границы $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ зон устойчивости семейств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ соответственно выходят из точки $e=e_0$,

$\mu=0$ и затем пересекаются еще в одной точке M (рис. 86). Штриховкой отмечено положение области устойчивости относительно границы. Периодические решения из семейств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ являются симметричными в том смысле, что переходят в себя при замене (17). Напротив, решения семейства $\mathcal{G}$ несимметричны.

Уравнение (14) является консервативным и эквивалентно системе Гамильтона, если в качестве гамильтониана взять значение параметра e или μ . В работах Хенон [149], Брюно [32] рассмотрены семейства симметричных периодических решений системы Гамильтона с двумя степенями свободы. Показано, что в случае общего положения смена устойчивости (основной резонанс) на семействе может быть двух типов:

I) На критическом решении семейство имеет экстремум гамильтониана и бифуркаций нет.

II) На критическом решении гамильтониан не имеет экстремума, происходит бифуркация двух семейств асимметричных периодических решений. Эти семейства существуют лишь для значений гамильтониана, лежащих по одну сторону от критического. Если для этих значений гамильтониана симметричное семейство устойчиво, то асимметричные семейства неустойчивы, и, наоборот: если для этих значений гамильтониана симметричное семейство неустойчиво, то асимметричные семейства устойчивы.

Здесь роль гамильтониана играет параметр e . При фиксированном μ семейства $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ проходят через точки линий $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ соответственно, не имея экстремумов. Следовательно, в этих точках происходят бифуркации семейств асимметричных решений. Граничные линии $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ точкой пересечения M делятся каждая на две части: $\mathcal{L}_0^1$ и $\mathcal{L}_1^1$ — части, выходящие из точки $e=e_0$, $\mu=0$; $\mathcal{L}_0^2$ и $\mathcal{L}_1^2$ — части, не примыкающие к этой точке. Обозначим через $\mathcal{G}_j^i$ семейства асимметричных периодических решений, которые ответвляются от семейств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ вдоль линий $\mathcal{L}_j^i$. Расположение этих семейств, по-видимому, такое. Семейства $\mathcal{G}_0^1$ и $\mathcal{G}_1^1$ определены в той области плоскости e, μ , которая ограничена линиями $\mathcal{L}_0^1$ и $\mathcal{L}_1^1$. Эти семейства составляют семейство $\mathcal{G}$ и являются устойчивыми во всей этой области. Точнее говоря, внутри этой области для семейства $\mathcal{G}$ индекс устойчивости $A < 1$, но внутри этой области может существовать подобласть параметрического резонанса, в которой $A < -1$ и семейство $\mathcal{G}$ неустойчиво. Семейства $\mathcal{G}_0^2$ и $\mathcal{G}_1^2$ определены только в точках, лежащих правее линий $\mathcal{L}_0^2$ и $\mathcal{L}_1^2$, и являются неустойчивыми (по крайней мере, вблизи этих линий). В точке M происходит смена характера бифуркаций. Посредством вычислений на ЭВМ Сарычев, Златоустов и Сазонов [110, § 3.7] уточнили характер поведения семейства $\mathcal{G}$ вблизи линий $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$.

Заметим, что семейству $\mathcal{G}$ соответствует новый тип колебаний спутника. Они отличаются тем, что их среднее может принимать любое значение между 0 и 2π , в то время как известные ранее колебания семейств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ имеют дискретные значения средних величин $\delta=0$ и $\delta=\pi$. При этом колебания семейства $\mathcal{G}$ устойчивы. Следовало бы просчитать на ЭВМ семейство $\mathcal{G}$ и для полноты исследования также семейства $\mathcal{G}_0^2$ и $\mathcal{G}_1^2$.

Функции $\varphi(e)$ и даже семейства $\mathcal{F}_0$ вычислялись также и для других целых m , кроме $m=0$ и $m=2$ (см. Белецкий [11], Белецкий и Лавровский [12]). Для них в интервале $0 < e < 1$ уравнение $\varphi(e) = 0$ имеет один простой корень $e = e_0$. Аналогично предыдущему доказывается, что и в этих случаях семейство (25) порождает семейство $\mathcal{F}$ устойчивых периодических решений. Интересно было бы вычислить семейство $\mathcal{F}$ в этих случаях и проследить его судьбу за пределами линий $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$. Было бы полезным также вычислить семейство $\mathcal{F}_0$ для $|\mu| > 3$, чтобы выявить другие линии бифуркаций семейств асимметричных периодических решений. Возможно, что такие асимметричные семейства существуют при $|\mu| < 3$, но пересекаются с семейством $\mathcal{F}_0$ только при $|\mu| > 3$.

2.4. КОЛЕБАНИЯ В АБСОЛЮТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим случай $m=0$. Здесь $[f] = [\alpha] = 0$, поэтому первое приближение ничего не дает. Довольно громоздкие вычисления по формулам (12), которые здесь не приводим (см. Брюно [50]), показывают, что

$$s(e) \equiv 0, \quad (34)$$

$$r^{(1)}(e) \equiv r^{(2)}(e) = be^2 \operatorname{sgn} \mu + O(e^4), \quad b = -\frac{1}{9 \cdot 2^9}. \quad (35)$$

Поэтому осредненная система (13), полученная из системы (20), имеет вид

$$\dot{y}_1 = ey_2, \quad (36)$$

$$\dot{y}_2 = e^5 \{y_2^2 p(y_1) + r^{(1)}(e) \sin y_1\}.$$

Для порождающих решений получаем уравнение

$$r^{(1)}(e) \sin y_1 = 0.$$

Следовательно, порождающими будут два семейства

$$\{y_2=0, y_1=0\} \text{ и } \{y_2=0, y_2=\pi\} \quad (37)$$

и еще семейства

$$y_1 - \text{произвольное, } e - \text{корень уравнения } r^{(1)}(e) = 0.$$

Согласно (35) это уравнение имеет кратный корень $e=0$. Сарычев, Златоустов и Сазонов [110, § 3.7 и рис. 30] на интервале $0 < e < 1$ вычислили функцию $r^{(1)}(e)$, которая у них обозначена $A_{21}(e)$. Согласно этим вычислениям уравнение $r^{(1)}(e) = 0$ не имеет корней в указанном интервале. Поэтому при $\mu=0$ имеется только два порождающих семейства (37).

Семейства периодических решений, порождаемые семействами (37), обозначим, соответственно, $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$. Вследствие авто-

морфизма (16) $\mathcal{F}_0(e, \mu) = \mathcal{F}_1(e, -\mu)$. Поэтому достаточно изучить лишь семейство $\mathcal{F}_0$.

Для него характеристическое уравнение системы (36) принимает вид

$$\lambda^2 = \mu^3 \operatorname{sgn} \mu r^{(1)}(e) \cos y_1.$$

Согласно (21) и (12) функция $r^{(1)} \operatorname{sgn} \mu$ от μ не зависит; следовательно, семейство $\mathcal{F}_0$ меняет вид устойчивости при смене знака у μ . Согласно (35) при малых μ и e семейство $\mathcal{F}_0$ устойчиво для $\mu > 0$ и неустойчиво для $\mu < 0$. При этом

$$|\lambda| \approx \mu^{3/2} e / (3 \cdot 2^4 \sqrt{2}).$$

Все это согласуется с результатами численных расчетов семейства $\mathcal{F}_0$ и его устойчивости в работе Златоустова и др. [66]. Отметим, что в рассмотренном случае $m=0$ вырождение очень сильное (до пятого порядка по ϵ).

1. *Андреев А. Ф.* О локальной схеме состояния равновесия.— Диф. уравнения, 1970, 6, № 4, с. 677.
2. *Андреев А. Ф., Глейзер Г. И.* Представление TO -решений уравнения $Xdy=Ydx$.— Диф. уравнения, 1972, 8, № 10, с. 1723.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, 25, № 1, с. 21—86.
4. *Арнольд В. И.* О локальных задачах анализа.— Вестн. МГУ, 1970, № 2, с. 52—56.
5. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров.— УМН, 1971, 26, № 2, с. 101—114.
6. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
7. *Арнольд В. И.* Лекции о бифуркациях и версальных семействах.— УМН, 1972, 27, № 5, с. 119—184.
8. *Арнольд В. И.* Критические точки гладких функций и их нормальные формы.— УМН, 1975, 30, № 5, с. 3—65.
9. *Беклемишева Л. А.* Асимптотика некоторых решений систем с полиномиальной правой частью.— Сиб. мат. журн., 1972, 13, № 5, с. 1123—1144.
- 9а. *Беклемишева Л. А.*— Диф. уравнения, 1971, 7, № 9, с. 1547.
10. *Белецкий В. В.* О либрации спутника.— В кн.: Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1959, вып. 3, с. 13—31.
11. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975.
12. *Белецкий В. В., Лавровский Э. К.* К теории резонансного вращения Меркурия.— Астроном. журн., 1975, 52, № 6, с. 1299—1308.
13. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и сопряженность локальных диффеоморфизмов конечного класса гладкости.— Функц. анализ, 1973, 7, № 4, с. 17—28.
14. *Белицкий Г. Р.* О нормальных формах локальных отображений.— УМН, 1975, 30, № 1, с. 223.
15. *Белицкий Г. Р.* Исследования по вопросам эквивалентности ростков гладких отображений: Докт. дис. Харьков, 1975.
16. *Березовская Ф. С., Крейцер Г. П.* Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений. Пушкино: Науч. центр биол. исслед. АН СССР, 1975.
17. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений.— Функц. анализ, 1975, 9, № 3, с. 1—4.
18. *Бернштейн Д. Н., Кушнirenко А. Г., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона.— УМН, 1976, 31, № 3, с. 201—202.
19. *Бибииков Ю. Н.* О приводимости системы двух дифференциальных уравнений к нормальной форме.— Диф. уравнения, 1971, 7, № 10, с. 1899—1902.
20. *Бибииков Ю. Н.* Об одном критическом случае в теории устойчивости движения.— Диф. уравнения, 1973, 9, № 12, с. 2123—2135.

21. Богданов Р. И. Приведение к орбитальной нормальной форме векторного поля на плоскости.— Функц. анализ, 1976, 10, № 1, с. 73—74.
22. Боголюбов Н. Н. О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики. Первая летняя мат. школа. Киев: Наук. думка, 1964, т. 1, с. 11.
23. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974.
24. Боташев А. И. Конечные методы в теории многомерного ветвления. Фрунзе: Илим, 1976.
25. Брюно А. Д. Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1962, 143, № 4, с. 763.
26. Брюно А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1964, 157, № 6, с. 1276—1279.
27. Брюно А. Д. Степенные асимптотики решений нелинейных систем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, 29, № 2, с. 329—364.
28. Брюно А. Д. О расходимости преобразований дифференциальных уравнений к нормальной форме.— ДАН СССР, 1967, 174, № 5, с. 1003—1006.
29. Брюно А. Д. Нормальная форма нелинейных колебаний.— Труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1970, т. 1, с. 112—119.
30. Брюно А. Д. Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов.— Мат. сб., 1970, 83 (125), 2 (10), с. 273—312.
31. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений.— Труды Моск. мат. о-ва, 1971, 25, с. 119—262; 1972, 26, с. 199—239.
32. Брюно А. Д. Исследования по ограниченной задаче трех тел. I. Периодические решения системы Гамильтона: Препринт № 18. М. Ин-т прикл. мат., 1972.
33. Брюно А. Д. Исследования по ограниченной задаче трех тел. II. Периодические решения и отрезки при $\mu=0$: Препринт № 75. М., Ин-т прикл. мат., 1972; Celestial Mech., 1978, 18, № 1, p. 9.
34. Брюно А. Д. О движении гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 6, с. 5—18.
35. Брюно А. Д. Локальный метод в нелинейных резонансах.— Arch. Math., Вгго, 1972, 4, № 8, с. 177.
36. Брюно А. Д. Элементы нелинейного анализа: Конспект лекций. Самарканд, 1973.
37. Брюно А. Д. О степенных асимптотиках решений нелинейных систем: Препринт № 51. М., Ин-т прикл. мат., 1973.
38. Брюно А. Д. О локальных инвариантах дифференциальных уравнений.— Мат. заметки, 1973, 14, № 4, с. 499—507.
39. Брюно А. Д. О локальных задачах механики.— В кн.: Теоретична и приложна механика (II конгресс). София, 1976, т. 1, с. 541—546; см. также: Препринт № 96. М., Ин-т прикл. мат., 1973.
40. Брюно А. Д. Аналитические интегральные многообразия.— ДАН СССР, 1974, 216, № 2, с. 253.
41. Брюно А. Д. Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром.— Мат. заметки, 1974, 16, № 3, с. 407—414.
42. Брюно А. Д. Множества аналитичности нормализующего преобразования: Препринты №№ 97, 98. М., Ин-т прикл. мат., 1974.
43. Брюно А. Д. Интегральные аналитические множества.— ДАН СССР, 1975, 220, № 6, с. 1255.
44. Брюно А. Д. Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений.— Мат. заметки, 1975, 18, № 2, с. 227—241.
45. Брюно А. Д. Аналитические интегральные множества: Препринт № 86. М., Ин-т прикл. мат., 1975; VII. Intern. Konferenz über nichtlineare Schwingungen. Berlin, Akademie-Verlag, 1977, B. I, 1, 119.
46. Брюно А. Д. Нормальная форма в нелинейных задачах: Препринт № 18. М., Ин-т прикл. мат., 1976.
47. Брюно А. Д. О колебаниях спутника на эллиптической орбите: Препринт № 53. М., Ин-т прикл. мат., 1976; см. также: В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1977, с. 46—53.
48. Брюно А. Д. Периодические решения второго сорта в ограничен-

- ной задаче трех тел: Препринт № 95. М., Ин-т прикл. мат., 1976.
49. Брюно А. Д. Нормальная форма и методы осреднения.— ДАН СССР, 1976, 230, № 2, с. 257.
 50. Брюно А. Д. О свойствах некоторых функций, встречающихся в небесной механике.— Мат. заметки, 1977, 22, № 1, с. 109—116.
 - 50а. Брюно А. Д. О периодических облетах Луны: Препринт № 91. М., Ин-т прикл. мат., 1978.
 - 50б. Брюно А. Д. О расходимости вещественного нормализующего преобразования.— Мат. заметки, 1979, 25, № 6, с. 653—660; Препринт № 112. М.: Ин-т прикл. мат., 1978.
 51. Бугаев Н. В. Различные применения начала наибольших и наименьших показателей в теории алгебраических функций.— Мат. сб., 1888, 14, 553—590.
 52. Бузедан Г. Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964.
 53. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1963.
 54. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
 55. Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.— Функци. анализ, 1976, 10, № 3, с. 13—38.
 56. Волевич Л. Р. Энергетический метод в задаче Коши для дифференциальных операторов, корректных по И. Г. Петровскому.— Труды Моск. мат. о-ва, 1974, 31, с. 147—187.
 57. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Об одном классе гипозэллиптических полиномов.— Мат. сб., 1968, 75 (117): 3, с. 400—416.
 58. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
 59. Гиндикин С. Г. Энергетические оценки, связанные с многогранником Ньютона.— Труды Моск. мат. о-ва, 1974, 31, с. 189—236.
 60. Голдман А., Таккер А. Многогранные выпуклые конусы.— В кн.: Линейные неравенства. М.: ИЛ, 1959, с. 142—161.
 61. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
 62. Гурса Э. Курс математич. анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1933, т. 1, ч. 2.
 63. Журавлев В. Ф. К вопросу об оценках эффекта Магнуса.— ДАН СССР, 1976, 226, № 3, с. 541—543.
 64. Зигель К. Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия.— Математика, 1961, 5, № 2, с. 119—128.
 65. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.
 66. Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты.— Косм. исслед., 1964, 2, № 5, с. 657—666.
 67. Зоммерфельд А. Механика. М.: ИЛ, 1947.
 68. Ильяшенко Ю. С. Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр-фокус.— Функци. анализ, 1972, 6, № 3, с. 30—37.
 69. Климов Д. М., Степаненко Н. П. Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1967, № 6, с. 143—150.
 70. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Об одном методе построения асимптотического решения задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 3, с. 40—47.
 71. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодического движения при малом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, 98, № 4, с. 527—530.
 72. Костин В. В. Нормальная форма неавтономных систем. ДАН УССР. Сер. А, 1973, № 8, с. 693—696.
 73. Костин В. В. Нормализующие преобразования неавтономных систем: Учеб. пособие. Одесса, 1975.
 74. Красинский Г. А. Асимптотические методы планетной теории.— В кн.: Малые планеты. М.: Наука, 1973, гл. 6.
 75. Куклес И. С. Об особых точках некоторых дифференциальных уравнений.— В кн.: Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, с. 81—91.

76. Куклес И. С. О некоторых проблемах качественной теории дифференциальных уравнений.— В кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда. Л.: Наука, 1964, т. 2, с. 456—467.
77. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.; Л.: ГНТИ, 1931. Ч. 2, гл. 3, § 3.
78. Курош А. Г. Теория групп. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1953.
79. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными.— УМН, 1975, 30, № 2, с. 266—267.
80. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора.— Функци. анализ, 1975, 9, № 1, с. 74—75.
81. Кушниренко А. Г. Многогранники Ньютона и теорема Безу.— Функци. анализ, 1976, 10, № 3, 82—83.
82. Леонтович Е. А., Тареев В. П. К вопросу о рождении интегральных кривых от сепаратрисного конуса двумерной комплексной динамической системы.— ДАН СССР, 1972, 207, № 6, с. 1277.
83. Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Л.: Судостроение, 1966.
84. Лунц Я. Л., Смолицкий Х. Л. Об одном классе движений консервативных систем с одной нециклической координатой.— ПММ, 1966, 30, № 4, с. 617—624.
85. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
86. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. См. [85], с. 280—343.
87. Маркеев А. П. К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел.— ПММ, 1973, 37, № 4, с. 753—757.
88. Маркеев А. П. О «диффузии Арнольда» в многомерной задаче об устойчивости треугольных точек либрации: Препринт № 109. М., Ин-т прикл. мат., 1974.
- 88а. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
89. Михайлов В. П. О первой краевой задаче для некоторых полуограниченных операторов.— ДАН СССР, 1963, 151, № 2, с. 282.
90. Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов.— Труды МИАН, 1967, 91, с. 59—80.
91. Мозер Ю. О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь.— Математика, 1962, 6, № 5, с. 51—67.
92. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды.— УМН, 1969, 24, № 2, с. 165—211.
93. Мозер Ю. Лекции о гамилтоновых системах. М.: Мир, 1973.
94. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 1-е изд. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947; 2-е изд. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949.
95. Нехорошев Н. Н. О поведении гамилтоновых систем, близких к интегрируемым.— Функци. анализ, 1971, 5, № 4, с. 82—83.
96. Нехорошев Н. Н. Переменные действие-угол и их обобщения.— Труды Моск. мат. о-ва, 1972, 26, с. 181—198.
97. Нехорошев Н. Н. Метод последовательных канонических замен переменных.— Добавление к кн.: Мозер Ю. Лекции о гамилтоновых системах. М.: Мир, 1973, с. 150—164.
98. Нехорошев Н. Н. Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций.— Мат. сб., 1973, 90 (132), 3, с. 432—478.
- 98а. Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамилтоновых систем, близких к интегрируемым.— Успехи мат. наук, 1977, 32, № 6, с. 5—66.
99. Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964.
100. Ньютон Исаак. Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. М.; Л.: ОНТИ, 1937, с. 33—44.
101. Осипов А. В. К вопросу о существовании преобразования в нормальную форму.— Диф. уравнения, 1973, 9, № 6, с. 1149—1150.
102. Петровский И. Г. Лекции по тео-

- рии обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е изд. М.: Наука, 1964, § 17.
103. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.
 104. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
 105. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики, т. 1—Избр. труды. М.: Наука, 1971, т. 1.
 106. *Пяртли А. С.* Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра.—Функц. анализ, 1972, 6, № 4, с. 95—96.
 107. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе.—ПММ, 1958, 22, № 3, с. 374—375.
 - 107а, б. *Садовский А. П.*—Диф. уравнения, 1976, 12, № 7, с. 1238; 1978, 14, № 2, с. 380.
 108. *Самовол В. С.* О линеаризации системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.—ДАН СССР, 1972, 206, № 3, с. 545—548.
 109. *Сарычев В. А., Златоустов В. А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты: Препринт № 48. М.: Ин-т прикл. мат., 1975.
 110. *Сарычев В. А., Златоустов В. А., Сазонов В. В.* Численное исследование периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка. М.: ВИНТИ, № 908—77 Дел.
 - 110а. *Сибирский К. С.* Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. Кишинев: Штиинца, 1976.
 111. *Синцов Д. М.* Рациональные интегралы линейных уравнений.—Учен. зап. Казан. ун-та, 1898.
 112. *Смолицкий Х. Л.* О движении гироскопа в кардановом подвесе.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1966, № 2, с. 17.
 113. *Старжинский В. М.* О нормальных формах четвертого порядка нелинейных колебаний.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 1, с. 5—13.
 114. *Старжинский В. М.* Практический способ вычисления нормальных форм в задачах нелинейных колебаний.—ПММ, 1973, 37, № 3, с. 407—413.
 115. *Старжинский В. М.* О колебаниях в системах третьего порядка в случае нейтральности линейного приближения.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1974, № 5, с. 21—27.
 116. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977.
 117. *Тареев В. П.* О рождении комплексных предельных циклов.—ДАН СССР, 1973, 209, № 2, с. 305—308.
 - 117а. *Токарев С. П.*—Диф. уравнения, 1977, 13, № 5, с. 892.
 118. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.
 119. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки.—УМН, 1941, вып. 9, с. 212—253.
 120. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1962.
 121. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
 122. *Хинчин А. Я.* Краткий курс математического анализа. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
 123. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
 - 123а. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений.—Функц. анализ, 1978, 12, № 1, с. 51—61.
 124. *Цельман Ф. Х.* О «резонансе» в задаче о малых колебаниях сферического маятника.—ДАН СССР, 1972, 202, № 3, с. 553—554.
 125. *Чеботарев Н. Г.* «Многоугольник Ньютона» и его роль в современном развитии математики.—В кн.: Исаак Ньютон. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943; см. также: *Чеботарев Н. Г.* Собр. соч., М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950, т. 3, с. 47—80.
 126. *Четаев Н. Г.* О гироскопе в кардановом подвесе.—ПММ, 1958, 22, № 3, с. 379—381.
 127. *Черноусько Ф. Л.* Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс.—

- Журн. вычислит. мат и мат. физ., 1963, 3, № 3, с. 528—538.
128. *Шестаков А. А.* Об асимптотическом поведении решений многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих особую точку высшего порядка.— ДАН СССР, 1960, 131, № 5, с. 1038—1041.
 129. *Шестаков А. А.* Об асимптотическом поведении многомерной системы дифференциальных уравнений, имеющих особую точку высшего порядка.— Сиб. мат. журн., 1961, 2, № 5, с. 767—788.
 130. *Hadamard J.* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.— Bull. Soc. math. France, 1896, 24, 199—220.
 131. *Bendixon I.* Sur les points singuliers des équations différentielles.— Öfversigt Kongl. Vetensk. Akad. Förhandl., Stockholm, 1898, 55, 69—85, 139—151, 171—188.
 132. *Bieberbach L.* Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin: Springer, 1953 (I. Aufl.), 1965 (II. Aufl.).
 133. *Birkhoff G. D.* Divergente Reihen im singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1929, 171—183.
 134. *Briot C., Bouquet T.* Recherches sur les propriétés des équations différentielles.— J. Ecole polytechn., Paris, 1856, 21, N 36, 133—199.
 135. *Weierstrass K.* Theorie der Abelschen Transcendenten, I. Absch., I. Kap., Mathematische Werke. Berlin: Mayer und Müller, 1902, Bd. 4, 11—45.
 136. *Horn J.* Zur Briot-Bouquetschen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.— J. reine und angew. Math., 1894, 113, 50—57.
 137. *Horn J.* Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle.— J. reine und angew. Math., 1899, 120, 1—26; 1900, 122, 73—83; 1913, 143, 212—240.
 138. *Dulac H.* Recherches sur les points singuliers des équations différentielles.— J. Ecole polytechn., Paris, sér. II, 1904, 9, 1—125.
 139. *Dulac H.* Solution d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières.— Bull. Soc. math. France, 1912, 40, 324—384.
 140. *Dulac H.* Points singuliers des équations différentielles.— Mém. sci. math., Fasc. 61, Paris, 1934.
 141. *Kouchnirenko A. G.* Polyedres de Newton et nombres de Milnor.— Invent. math., 1976, 32, N 1, 1—32.
 142. *Magnus K.* Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, Kardanisch gelagerten Kreisels.— Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, N 1/2, 23—34.
 143. *Painlevé P.* Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, H. 1, A 4a, Leipzig: Teubner, 1905, N 24—30, 189—229.
 144. *Sibuya Y.* Non-linear ordinary differential equations with periodic coefficients.— Funkc. ekvacioj, 1958, 1, 77—132.
 145. *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphism of Euclidean n -space.— Amer. J. Math., 1958, 80, N 3, 623—631.
 146. *Sternberg S.* The structure of local homeomorphism.— Amer. J. Math., 1959, 81, N 3, 578—604.
 147. *Friberg J.* Multi-quasielliptic polynomials.— Ann. Scuola norm. super. Pisa (3), 1967, 21, N 2, 239.
 148. *Hartman P.* On the local linearization of differential equations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, 568—573.
 149. *Hénon M.* Exploration numérique du problème restreint. II.— Ann. astrophys., 1965, 28, N 6, 992—1007.
 150. *Chen K. T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point.— Amer. J. Math., 1963, 85, N 4, 693—722.
 151. *Chen K. T.* Local diffeomorphism— C^∞ realisations of formal properties.— Amer. J. Math., 1965, 87, N 1, 140—157.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения	3
Введение	5
Глава I. ОСНОВЫ ЛОКАЛЬНОГО МЕТОДА	10
§ 1. Линейные неравенства на плоскости	10
1.1. Основные определения (т. 1; п. 1, 2)	10
1.2. Конусы (т. 2; п. 3, 4, 5)	13
1.3. Вырожденные случаи (п. 6)	16
1.4. Многоугольники (п. 7)	17
1.5. Подмножества целочисленной решетки (т. 3, 4)	19
1.6. Двойственная ломаная (п. 8)	22
1.7. О методе Фроммера (п. 9)	23
1.8. Аффинные преобразования	25
1.9. Унимодулярные преобразования (п. 10, 11; у. 1)	27
§ 2. Нули аналитической функции	32
2.1. Простая точка (т. 1; п. 1)	32
2.2. Порядки малости функций	34
2.3. Порядки малости плоских кривых (у. 1)	35
2.4. Асимптотика функции на кривой	37
2.5. Выделение укорочений (п. 2; у. 2)	38
2.6. Степенные преобразования	40
2.7. Критическая точка	42
2.8. Первый метод (п. 3, 4; у. 3)	44
2.9. Второй метод разрешения особенности (п. 5, 6; у. 4)	51
2.10. Метод Вейерштрасса	57
§ 3. Линии уровня аналитической функции	58
3.1. Постановка задачи	58
3.2. О заменах координат (т. 1)	59
3.3. Невырожденная критическая точка (т. 2; п. 1)	61
3.4. Множества сходимости степенных рядов класса $\mathcal{Y}$ (п. 2, 3; у. 1)	63
3.5. Свойства рядов класса $\mathcal{Y}^{\circ}$ (т. 3; л. 1)	68
3.6. Преобразования класса $\mathcal{Y}^*$ (т. 4)	69

3.7. Случай вершины (т. 5; у. 2)	72
3.8. Ребро ломаной Ньютона	74
3.9. Синтез, примеры (п. 4, 5; у. 3)	77
3.10. О нормальных формах (т. 6)	81
3.11. О разбиении пространств	83
Глава II. СИСТЕМА ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	85
§ 1. Простые точки и элементарные особенности	85
1.1. Введение	85
1.2. Окрестность простой точки (т. 1)	87
1.3. Линейные системы (п. 1, 2)	90
1.4. Элементарная особая точка (п. 3; у. 1)	92
1.5. Основная теорема о нормальной форме (т. 2)	93
1.6. Классификация и интегрирование нормальных форм	96
1.7. Степенные преобразования дифференциальных уравнений	99
1.8. О сходимости нормализующего преобразования (п. 4)	100
1.9. Вещественные системы (т. 3)	102
1.10. О гладкой нормализации	104
1.11. Интегрирование вещественных нормальных форм (у. 2)	105
§ 2. Обобщенные нормальные формы	110
2.1. Вторая теорема о нормальной форме (т. 1; л. 1)	110
2.2. Интегрирование обобщенной нормальной формы	115
2.3. Третья теорема о нормальной форме (т. 2; л. 2; у. 1)	117
§ 3. Неэлементарная особая точка	120
3.1. Постановка задачи	120
3.2. Случай вершины	121
3.3. Случай ребра	124
3.4. Синтез	127
3.5. Примеры 1, 2, 3 (у. 1)	128
3.6. Сравнение с методом Фроммера	135
§ 4. О различении центра и фокуса	136
4.1. Введение	136
4.2. Тригонометрическая теория (т. 1; п. 1)	136
4.3. Изучение нормальных форм	140
4.4. О вычислимости коэффициентов нормальной формы	140
4.5. Интегрирование укороченной системы (п. 2; у. 1)	142
4.6. Нормализация в комплексных координатах	144
4.7. Классификация (у. 2)	146
Глава III. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ n ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	148
§ 1. Нормализующее преобразование	148
1.1. Постановка задачи	148

1.2. Линейные системы	149
1.3. Существование нормализующего преобразования (т. 1)	150
1.4. Преобразования нормальной формы (т. 2; п. 1)	153
1.5. Отмененные преобразования (т. 3)	156
1.6. Малые параметры (т. 4; п. 2)	158
1.7. О вычислении нормальной формы (т. 5, 5'; п. 3)	160
1.8. Инвариантность (т. 6)	164
1.9. Вещественные системы (т. 7; л. 1; п. 4)	167
1.10. Линейные автоморфизмы (т. 8; п. 5)	169
§ 2. Интегрирование и классификация нормальных форм	170
2.1. Степенные преобразования (т. 1; л. 1)	170
2.2. Классификация (т. 2; л. 2)	173
2.3. Одномерные нормальные формы (т. 3, 4)	177
2.4. Вторичная нормализация (п. 1)	181
§ 3. Аналитические интегральные множества	182
3.1. Постановка задачи	182
3.2. Сходимость нормализующего преобразования (т. 1)	183
3.3. О множествах	184
3.4. Множество $\mathcal{A}$ (т. 2; п. 1)	185
3.5. Множество $\mathcal{B}$ (т. 3)	186
3.6. Свойства множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$	186
3.7. Уточнение теоремы 2 (т. 4; п. 2)	187
3.8. Спектр вне мнимой оси	188
3.9. Окрестность тора	189
§ 4. Нормальная форма и методы осреднения	190
4.1. Локальные координаты	190
4.2. Нормальная форма (т. 1)	191
4.3. Вычисление нормальной формы (т. 2; п. 1)	194
4.4. Система Гамильтона (п. 2)	195
4.5. О механических задачах, решаемых с помощью нормальной формы	196
Глава IV. О МНОГОГРАННИКЕ НЬЮТОНА	197
§ 1. Система дифференциальных уравнений	197
1.1. Введение	197
1.2. Простые точки и элементарные особенности (т. 1, 2)	198
1.3. Обобщенная нормальная форма (т. 3)	201
1.4. Многогранник и нормальные конусы (п. 1)	202
1.5. Неэлементарная особая точка	206
1.6. Основные математические задачи	209
§ 2. Другие задачи с многогранником Ньютона	211
2.1. Ломаная Адамара	212
2.2. Число решений системы алгебраических уравнений	212
2.3. Отделение ветвей алгебраической кривой	213
2.4. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных	214

Глава V. ПРИМЕНЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ	
В МЕХАНИКЕ	215
§ 1. О движении гироскопа в кардановом подвесе	215
1.1. Приведение к нормальной форме (т. 1)	215
1.2. Интегрирование нормальной формы (т. 2)	217
1.3. Устойчивость по x_1 и x_2 (т. 3)	218
1.4. Вычисление первых членов в $f(h)$ (т. 4)	219
1.5. Постановка задачи о гироскопе в кардановом под- весе	222
1.6. Общий случай $ u_0 < 1$ (т. 6)	224
1.7. Общий случай $ u_0 = 1$ (т. 7)	227
1.8. Случай $A + B^0 - C^0 = 0$	229
1.9. Уравновешенный гироскоп	230
1.10. Сферический маятник	231
§ 2 О колебаниях спутника в плоскости эллиптической орбиты	233
2.1. Формулы асимптотического метода	233
2.2. Задача о колебаниях спутника	237
2.3. Колебания в орбитальной системе координат . .	238
2.4. Колебания в абсолютной системе координат . .	242
ЛИТЕРАТУРА	244

АЛЕКСАНДР ДМИТРИЕВИЧ БРЮНО

**ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД
НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Утверждено к печати
Институтом прикладной математики
Академии наук СССР

Редактор издательства С. С. Матвеев
Художник Л. Г. Прохоров
Художественный редактор Т. П. Поленова
Технический редактор А. М. Сатарова
Корректоры М. К. Запрудская, А. А. Смогилева

ИБ № 16113

Сдано в набор 19.09.78
Подписано к печати 31.01.79
Т-01433. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 1
Гарнитура литературная
Печать высокая
Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 14,8
Тираж 3200 экз. Тип. зак. 4303.
Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Наука»,
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 91а.

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.