

П. Т. ДЖОНСТОН

ТЕОРИЯ ТОПОСОВ

Перевод с английского
А. П. ГАГАРИНА и В. В. ШОКУРОВА

Под редакцией
Ю. И. МАНИНА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.152
Д 42
УДК 515.12

TOPOS THEORY

P. T. Johnstone

ACADEMIC PRESS

London. New York. San Francisco 1977

Джонстон П. Теория топосов: Пер. с англ./Под ред. Ю. И. Манина.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 440 с.

В книге излагается теория топосов, приобретающая в последнее время важное значение не только в логике, но и в геометрии и топологии. Существенно дополняет вышедшую в 1983 г. в издательстве «Мир» книгу Р. Голдблатта «Топосы. Категорийный анализ логики».

Для математиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

Библиогр. 251 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	6
Предисловие	7
Введение	9
Заметки для читателя	19
Глава 0. Предварительные сведения	21
0.1. Теория категорий	21
0.2. Теория пучков	28
0.3. Топологии Гротендика	32
0.4. Теорема Жиро	35
Упражнения к главе 0	39
Глава 1. Элементарные топосы	44
1.1. Определение и примеры	44
1.2. Отношения эквивалентности и частичные отображения	48
1.3. Категория $\mathcal{E}^{\text{op}}$	52
1.4. Функторы замены базы	56
1.5. Эпимоноразложения	61
Упражнения к главе 1	64
Глава 2. Внутренняя теория категорий	67
2.1. Внутренние категории и диаграммы	67
2.2. Внутренние пределы и копределы	70
2.3. Диаграммы в топосе	73
2.4. Внутренние профункторы	79
2.5. Фильтрованные категории	85
Упражнения к главе 2	92
Глава 3. Топологии и пучки	96
3.1. Топологии	96
3.2. Пучки	100
3.3. Функтор ассоциирования пучка	103
3.4. $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ как категория частных	110
3.5. Примеры топологий	113
Упражнения к главе 3	120
Глава 4. Геометрические морфизмы	123
4.1. Теорема факторизации	123
4.2. Конструкция склейки	127

© 1977 by Academic Press INC. (London) LTD.
© Перевод на русский язык, дополнение. Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986

Д 1702040000—160
053(02)-86 9-86

4.3. Теорема Диаконеску	132
4.4. Ограниченные морфизмы	139
Упражнения к главе 4	152
Глава 5. Логические аспекты теории топосов	156
5.1. Булевы топосы	156
5.2. Аксиома выбора	160
5.3. Аксиома (SG)	165
5.4. Язык Митчела — Бенабу	172
Упражнения к главе 5	181
Глава 6. Объекты натуральных чисел	185
6.1. Определение и основные свойства	185
6.2. Конечные кардиналы	193
6.3. Классификатор объектов	199
6.4. Алгебраические теории	209
6.5. Геометрические теории	217
6.6. Объекты вещественных чисел	230
Упражнения к главе 6	240
Глава 7. Теоремы Делиня и Барра	243
7.1. Точки	243
7.2. Пространственные топосы	249
7.3. Когерентные топосы	252
7.4. Теорема Делиня	260
7.5. Теорема Барра	269
Упражнения к главе 7	274
Глава 8. Когомологии	279
8.1. Основные определения	279
8.2. Когомологии Чеха	286
8.3. Торсоры	292
8.4. Проконечные фундаментальные группы	303
Упражнения к главе 8	311
Глава 9. Теория топосов и теория множеств	317
9.1. Конечность по Куратовскому	317
9.2. Транзитивные объекты	325
9.3. Теорема равнонепротиворечивости	334
9.4. Построение фильтра-степени	340
9.5. Независимость континуум-гипотезы	345
Упражнения к главе 9	351
Приложение. Локально внутренние категории	355
Список литературы	367

Дополнение (В. А. Любецкий). Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем	376
§ 1. Метод нестандартного анализа: оценки, пучки и теоремы переноса	377
§ 2. Универсальная оценка и универсальный пучок	403
§ 3. Некоторые применения нестандартного анализа	425
Список литературы	430
Предметный указатель	434
Именной указатель	436

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Топос — это категория, на которую наложены дополнительные условия, делающие ее «похожей на категорию множеств». Однако аксиомам топосов удовлетворяют не только обычные множества, но также булевозначные модели или пучки множеств над топологическим пространством. Таким образом, понятие топоса доставляет, с одной стороны, естественный универсум для алгебраической топологии и гомологической алгебры, а с другой — альтернативные, по отношению к теоретико-множественным, рамки для оснований математики, очень естественно включающие разнообразные модельные интерпретации математических теорий логиками.

Современная концепция топосов, изложенная в книге, является результатом объединения идей, восходящих к Гротендику, с одной стороны (пучки и гомологии), и к Ловеру — с другой (логика). Автор приложил большие усилия по объединению и унификации довольно большого материала по общей теории топосов; многие результаты и/или доказательства принадлежат ему. В содержательном дополнении В. А. Любецкого описаны приложения топосов к теории алгебраических систем.

Стиль книги довольно жесткий: «теорема — доказательство — пример». Читатель, желающий войти в теорию по более легкой дорожке, должен будет обратиться сначала к гораздо более популярной (и содержащей гораздо меньше результатов) книге Р. Голдблатта «Топосы. Категорный анализ логики» (М.: Мир, 1983).

Теория категорий, или, скорее, категорное мышление как альтернатива теоретико-множественному мышлению все в большей степени становится распространенным среди профессиональных математиков. Судя по тому, что трудные классические задачи решаются (и новые задачи ставятся) в этих рамках, книги, которые квалифицированно и содержательно излагают такие вещи, необходимы. Книга Джонстона является весьма заметным вкладом в этот процесс.

Ю. Н. Манин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга восходит к серии из шести семинарских докладов, которые я прочел в Кембридже зимой 1973/74 г. и которые составили ядро глав 1—6. Остальные доклады этой же серии, охватывающие по материалу части глав 0, 7 и 9, были прочитаны Барри Теннисоном и Робертом Сили. По настоянию слушателей записи этих семинаров были приведены в порядок и получили ограниченное распространение. Летом 1974 г. я начал пересматривать и расширять эти записи с мыслью, что когда-нибудь они могут составить книгу. В течение зимы и весны 1975 г., находясь в Ливерпульском университете, я смог прочесть курс лекций, охватывающих материал глав 0—5 и 8 в некоторых деталях. К концу этого периода у меня сложилось довольно ясное представление о форме этой книги, и, ободренный Майклом Батлером, фактически я начал ее писать в июле 1975 г. С октября 1975 г. по март 1976 г. я работал в Чикагском университете, где проводился еженедельный семинар по теории топосов, организованный Сондерсом Маклейном и мною. Материал, проработанный за этот период, был взят, главным образом, из глав 2, 4, 5, 6 и 9, и докладчиками, кроме меня, были Кети Эдвардс, Стив Харрис и Стив Лендсберг. В течение этого периода я также написал текст глав 2—5 и большую часть главы 6. Остальной текст был завершен за май — июль 1976 г. после моего возвращения в Кембридж.

Эти лекции и семинары оказали весьма непосредственное влияние на текст данной книги, и все посещавшие их (особенно те, имена которых были упомянуты) заслуживают моей благодарности за участие в его формировании. Я также пользовался менее официальными контактами со многими математиками на конференциях и по другим поводам. К тем, чьи идеи (большей частью не опубликованные) я охотно заимствовал, относятся Джулиан Коул, Радуга Диаконеску, Майк Фурман, Питер Фрейд, Андре Жуаяль и Крис Малвей. Джон Грей дал мне ценные советы в области 2-категорий, а Джек Даскин и Барри Теннисон помогли мне лучше понять когомологии. Я должен поблагодарить Жана Бенабу за многие идеи, которые я намеренно или ненамеренно у него позаимствовал, а также Тима Брука за его помощь в составлении библиографии.

Остаются четыре математика, которым я по отдельности должен выразить свою признательность. Милль Тьерне своими

лекциями в Варенне в 1971 г. ввел меня в теорию топосов. Пространство опубликованный вариант этих лекций [TV], я по-прежнему нахожу невероятным, как он сумел научить меня так многому в восьми коротких лекциях. Очень много значили для меня помощь и одобрение Гевина Рейта, а его лекции в Бангоре [WB] служили мне моделью для некоторой части этой книги. Как каждый, работающий в теории топосов, я чрезвычайно обязан Биллу Ловеру в общем плане за его проникательность первопроездца, но я также пользовался его идеями и беседами на более личном уровне. Кроме того, я должен выразить признательность Сондерсу Маклейну; для него я никогда не был только теоретиком в области топосов, и забота, с которой он прочитывал машинописные оригиналы и предлагал улучшения почти в каждом параграфе, была совершенно исключительной. Если же в тексте еще остались крупные ошибки или неясности, то они бесспорно свидетельствуют о моем упрямстве, а не о его невнимательности.

На другом, но не менее значительном уровне я должен поблагодарить университеты Ливерпуля и Чикаго, а также колледж Св. Иоанна в Кембридже за поддержку во время написания этой книги; Пола Кона за принятие ее к публикации в серии монографий по математическим наукам (L. M. S. Monographs series) и штат служащих издательства Academic press — за высокий профессионализм, проявленный ими для превращения моей любительской рукописи в книгу, которую вы видите перед собой.

Кембридж, июнь 1977

П. Т. Дж.

ВВЕДЕНИЕ

Теория топосов восходит к двум самостоятельным линиям в развитии математической науки, сохранявшим свою обособленность в течение почти десяти лет. Чтобы избежать одностороннего представления о предмете данной книги, я считаю необходимым рассмотреть историю этих двух линий и понять, почему они в конце концов сошлись вместе. Поэтому я начинаю это введение с исторического обзора (отражающего личную точку зрения и, несомненно, весьма пристрастного).

Более ранняя из этих двух линий возникает с появлением теории пучков, основы которой заложил Лере в 1945 г. и которую развивали, наряду с другими, А. Картан и А. Вейль. Своей высшей точки она достигла в опубликованных работах Серра [107], Гротендика [42] и Годемана [TF]. Как и большая часть гомологической алгебры, теория пучков была первоначально задумана как инструмент алгебраической топологии с целью аксиоматизации понятия «системы локальных коэффициентов», что было важно для хорошей теории когомологий неодносвязных пространств. Полное название книги Годемана показывает, что в таком свете она виделась еще в 1958 г. Но задолго до этого силу теории пучков распознали специалисты по алгебраической и аналитической геометрии. В последующие годы влияние теории пучков распространилось на многие другие области математики. (Смотри два крайних примера в [49] и [106].)

Однако в алгебраической геометрии скоро обнаружили, что топологическое понятие пучка не вполне подходит в том отношении, что единственная топология, имеющаяся на абстрактных алгебраических многообразиях или схемах, т. е. топология Зарисского, не располагает «достаточным количеством открытых множеств», чтобы обеспечить хорошее геометрическое понятие локализации. В своей работе по технике спуска [43] и этальной фундаментальной группе [44] Гротендик заметил, что замена «включения двух открытых по Зарисскому множеств» понятием «эталного морфизма» было шагом в правильном направлении. Но, к сожалению, в общем случае схемы, являющиеся этальными над данной схемой, не образуют частично упорядоченного множества. Поэтому, чтобы подвести базу для развития этальных когомологий, оказалось необходимым изобрести понятие «топологии Гротендика» на произвольной категории и обобщенное понятие пучка для такой топологии.

Основания этой теории были доложены на семинарах по алгебраической геометрии, проводившихся в 1963—64 гг. Гротендиком с помощью Артина, Жиро, Вердые и др. (Труды этого семинара были опубликованы восемью годами позже в пересмотренном и значительно расширенном варианте [GV], включающем некоторые важные дополнительные результаты П. Делиня.) Среди наиболее важных результатов самого семинара была теорема Жиро, которая показала, что категории обобщенных пучков, возникающие на этом пути, можно полностью характеризовать свойствами точности и ограниченности. Скоро в свете этого результата стало ясно, что эти категории пучков являются более важным объектом изучения, чем возникшие из них сайты (= категория + топология). Ввиду этого, а также потому, что категория с топологией виделась как «обобщенное топологическое пространство», любой категории, удовлетворяющей аксиомам Жиро, было дано (несколько неудачное) название «топос».

Тем не менее топосы все еще рассматривались главным образом как подсобное средство для теорий когомологий, причем не только этальной, но также $\{fppf\}$, кристалльной и других. Значение метода, развитого Гротендиком, было в полной мере продемонстрировано существенными геометрическими результатами, полученными с использованием этих теорий когомологий в последующие годы. Высшей точкой явилось доказательство Делинем [159] знаменитой гипотезы Вейля — mod- p -аналога гипотезы Римана. А сама техника развивалась дальше, например, в работе Жиро [38] о неабелевых когомологиях. Но вся глубина высказывания «топос важнее чем сайт», кажется, никогда не была оценена пиколой Гротендика. Например, хотя они знали о декартово замкнутой структуре топосов ([GV], IV 10), они никогда не использовали это обстоятельство во всей полноте, как это предлагали Эйленберг и Келли в [160]. Поэтому было необходимо, чтобы элементарная теория топосов стимулировалась другой линией развития.

За исходную точку второй линии обычно принимают новаторскую работу Ловера [71] по элементарной теории категорий множеств, появившуюся в 1964 г. Однако мне кажется, что необходимо отойти дальше: к доказательству теоремы Любкина — Херона — Фрейда — Митчела о вложении для абелевых категорий [AC]. Именно эта теорема, показавшая, что имеется явное множество элементарных аксиом, из которых вытекают все (конечные) свойства точности категорий модулей, по-настоящему проложила путь для автономного развития теории категорий как основания математики.

(Между прочим, теорема вложения Фрейда — Митчела часто рассматривается как кульминация, а не как начальная точка; это как раз, как мне кажется, неправильное понимание (или,

по меньшей мере, обращение) ее истинного значения. Ее обычно понимают как высказывание: «Если вы хотите что-то доказать об абелевой категории, вы можете с успехом допустить, что это категория модулей», в то время как ее истинный смысл, по моему мнению, заключается в следующем: «Если вы хотите что-то доказать о категориях модулей, вы можете с тем же успехом работать в абелевой категории». Так как теорема о вложении гарантирует, что ваш результат будет истинным в такой общности, и, забыв явную структуру категорий модулей, вы можете сосредоточиться на существенных аспектах проблемы. В качестве примера вы можете сравнить теоретико-модульное доказательство леммы о змее в [HA] с ее абелево-категорным доказательством в [CW].)

Вскоре за этой теоремой последовала работа Ловера [71], в которой был представлен список элементарных аксиом, достаточный, если добавить неэлементарные аксиомы полноты и локальной малости, для описания категории множеств. (В последующей работе [72] Ловер привел аналогичную аксиоматизацию категории малых категорий, а Шломюк [105] сделал то же самое для категории топологических пространств.)

Вполне можно спросить, почему за этой работой немедленно не последовал фейерверк активности, которым было встречено появление элементарных топосов шестью годами позже. С ретроспективной точки зрения ответ состоит в том, что аксиомы Ловера слишком специализированы: категория множеств — крайне полезный объект в качестве основания математики, но как предмет аксиоматического изучения она не особенно интересна (да пребудут в мире работы Мартина, Соловея и других!); она слишком «жесткая», чтобы иметь внутреннюю структуру. Аналогично, если бы аксиомы абелевой категории были применимы только к категории абелевых групп и не применимы к категориям модулей и абелевых пучков, то на них бы тоже никто не обратил внимания. Поэтому нужна была аксиоматизация, которая охватывала бы категории функторов со значениями в категории множеств и категории пучков множеств, т. е. как раз аксиоматика элементарного топоса.

В своих последующих работах ([73], [75]) Ловер начал исследовать идею, состоящую в том, что двухэлементное множество {истина, ложь} можно рассматривать как «объект истинностных значений» в категории множеств. В частности, он заметил, что наличие такого объекта в произвольной категории позволяет нам свести аксиому свертывания к элементарному утверждению о сопряженных функторах. Та же идея легла в основу работы Фольгера ([125], [126]) о логических и семантических категориях.

Между тем направление, связанное с теоремой о вложении, было продолжено Барром [2], который сформулировал понятие

точной категории и использовал его как базис для неаддитивной теоремы о вложении. Близкое понятие *регулярной категории* независимо сформулировали Грийе [41] и Ван Осдол [122], которые использовали его в своих исследованиях по общей теории пучков. Сам Барр заметил, что теорема Жиро утверждает лишь немногим больше, чем специальный случай его теоремы о вложении. Это, вероятно, является (логически, если не хронологически) первым схождением двух упомянутых выше линий развития.

Однако примерно в то же время внимание Ловера привлекли также топосы Гротендика. Он заметил, что каждый топос Гротендика имеет объект истинностных значений Ω и что понятие топологии Гротендика тесно связано с эндоморфизмами этого объекта Ω (см. [LN]). В течение 1969—70 гг. Ловер и Тьерне, которые ранее внесли вклад в теорию точных категорий, начали исследовать следствия принятия утверждения «существует объект истинностных значений» в качестве аксиомы. Результатом явилась элементарная теория топосов. Удивительно, что большая часть основ этой теории была разработана в течение 12-месячного периода, как это будет видно из большого числа теорем в главах 1—4 этой книги; их доказательства принадлежат Ловеру и Тьерне.

Как только эти теоремы стали широко известны математикам (т. е. после лекций Ловера в Цюрихе и Ницце [LN]) летом 1970 г. и на конференции в Далюзи [LN] в январе 1971 г.), их немедленно подхватили и стали развивать несколько человек. Одним из первых и наиболее значительных из них был П. Фрейд, в лекциях которого в университете Нового Южного Уэльса [FK] была исследована теория вложения топосов. С нынешней точки зрения, она кажется кое в чем тупиковой; именно, обращение стандартной метатеоремы, которая упоминалась в связи с абелевыми категориями, применимо в еще большей мере к теории топосов; в самом деле, элементарность является большим достоинством аксиом для топосов и не следует прибегать к неэлементарной теореме о вложении для доказательства элементарных фактов о топосах. (Теорему Фрейда о вложении вы не найдете в этой книге, но наиболее важная и элементарная ее часть, которая показывает, что любой топос можно вложить в булев топос, доказывается в § 7.5.) Тем не менее, работа Фрейда содержала очень много важных технических результатов; в частности, его характеристизация объектов натуральных чисел является теоремой особой важности.

Среди тех, кто с самого начала работали над теорией топосов, следует упомянуть в Париже Бенабу и его ученика Селейретта и в Орхусе Кока и Рейта [KW]. Миккелсен, ученик Кока, первым доказал, что одна из аксиом Ловера — Тьерне, а именно аксиома о конечных копределах, может быть выведена из дру-

гих. Его диссертация [84] содержит интересный вклад в теорию решеток в топосе.

В свете доказательства независимости континуум-гипотезы, принадлежащего Ловеру и Тьерне [117], возникла существенная потребность определить точную связь между элементарной теорией топосов и аксиоматической теорией множеств. Ответ был найден независимо Коулом [18], Митчелом [85] и Озисусом [92]. Митчел также предложил идею, которая с тех пор стала центральной для данного предмета: каждый топос позволяет породить внутренний язык, который можно использовать для образования «квазитеоретико-множественных» высказываний об объектах и морфизмах топоса. В то время как первоначальная идея принадлежала Митчелу, ее наиболее восторженным сторонником, несомненно, стал Бенабу, и его ученики в последние годы интенсивно пользовались внутренним языком.

Следующий важный шаг вперед сделал Диаконеску, ученик Тьерне, диссертация которого была завершена в 1973 г. Теорема Диаконеску [30] была важна не только своим проникновением в 2-категорную структуру категории $\mathcal{Top}$, но и тем, что стала первым значительным применением теории внутренних категорий. (Эта теория развивалась на протяжении ряда лет довольно случайным образом, в основном в неопубликованных работах Бенабу.) Диаконеску, как бы «на бис», доказал относительную теорему Жиро. Сам Жиро неэлементарными средствами доказал относительный вариант своей теоремы [39] для топосов Гротендика, а Митчел нашел ее правильную элементарную форму. Но Митчел смог доказать ее только в особом случае, когда «объект образующих» (см. определение 4.43) представляет собой 1. Оказалось, что теорема Диаконеску является важным инструментом, необходимым для доказательства общего случая.

Примерно в то же время Джонстон [52] также использовал внутренние категории при доказательстве того, что введенную Гротендиком конструкцию функтора ассоциирования пучка можно перенести в элементарную теорию.

Последующее развитие (которое фактически перекрывалось с предыдущим) состояло в понимании топосов как теорий и во введении понятия классифицирующего топоса. В некотором смысле эти идеи восходят к работе Ловера [176] по алгебраическим теориям, но их связь с теорией топосов началась с исследований Хаким [45], ученицы Гротендика, по относительным схемам. В этих исследованиях она построила классификаторы для колец и локальных колец, а также установила их фундаментальные свойства. В 1972 г. Жуаяль и Рейес [RM] выделили понятие «когерентной теории» (финитарной геометрической теории в нашей терминологии) и доказали, что у каждой такой теории имеется классифицирующий топос. Их работа была поз-

же расширена Рейесом и Маккаи [82], чтобы охватить нефинитарные геометрические теории.

Именно Ловер [LV] первый заметил, что в свете работ Жуаяля и Рейеса теорема Делиня о точках когерентных топосов является точным эквивалентом теоремы Гёделя — Генкина о полноте для финитарных геометрических теорий. Ловер также высказал теорему о булевозначной полноте для нефинитарных теорий, теоретико-топосный эквивалент которой был доказан Барром [4].

И снова теорема Диаконеску дала ключ к «релятивизации» результатов Жуаяля и Рейеса. Решающий шаг был сделан в 1973 г. Рейтом, который построил классификатор объектов над произвольным топосом с объектом натуральных чисел. Отсюда до общей теоремы существования для классифицирующих топосов оставалось выполнить почти что формальные процедуры. Это было сделано независимо Жуаялем, Тьерне [119] и Бенабу [8].

Это приводит наш исторический обзор к текущему моменту, по меньшей мере в том, что касается главных результатов. Теперь рассмотрим современное состояние теории топосов и ее перспективы.

Во-первых, следует сказать, что базисная теория элементарных топосов (т. е. содержание глав 1—5 данной книги) кажется почти полностью разработанной. Действительно, мне известен только один существенный открытый вопрос, возникающий в этих пяти главах (а именно, вопрос о существовании конечного (псевдо) копредела в $\mathcal{E}x$, затронутый в § 4.2). Несомненно, имеется много менее важных вопросов, нуждающихся в выяснении, и ряд теорем, доказательства которых будут со временем усовершенствованы и упрощены; однако основания предмета кажутся вполне устоявшимися. Это, конечно, плохо в том смысле, что для благополучия такой базисной области, как теория топосов, жизненно важно, чтобы ее основы подвергались постоянному пересмотру и улучшению, и мне неудобно сознавать, что написанием этой книги я способствовал канонизации этих основ. В свое оправдание я могу сказать только то, что, как мне кажется, это произошло бы так или иначе, и лучше, чтобы это случилось в печатной форме, чем в форме неопубликованного фольклора, доступного лишь для посвященных.

Типичный математик, который рассматривает теорию категорий как «обобщенную абстрактную бессмыслицу», склонен рассматривать теорию топосов как обобщенную абстрактную теорию категорий. (Нет сомнений, что она унаследовала эту репутацию от подхода своего родителя — Гротендика к алгебраической геометрии.) Тем не менее Маклейн [179] рассматривает расцвет теории топосов как симптом упадка абстрактности в теории категорий и вообще в абстрактной алгебре. Я убежден,

что Маклейн прав и что его интуиция указывает путь к наиболее вероятному будущему развитию теории топосов, поскольку почти все современные значительные работы по теории топосов занимаются топосами не как абстрактной и изолированной областью математики, а как вспомогательным средством для понимания и прояснения понятий в других областях (см. например, [36], [57], [63], [79], [88], [90], [112], [130]).

В качестве конкретного примера рассмотрим общую теорему существования для классифицирующих топосов (теорема 6.56). Первая реакция на эту теорему — это восхищение ее элегантностью и общностью; вторая реакция, появляющаяся существенно позже, — это понимание ее фундаментальной бесполезности — особенности, которую она, между прочим, делит с общей теоремой о сопряженных функторах. Единственно возможное использование такой теоремы состоит в том, что она позволяет свести изучение конкретной геометрической теории к изучению ее общей модели (или, наоборот, свести изучение конкретного топоса к изучению теории, общую модель которой он содержит); однако теорема, как она доказана в § 6.5, просто не обеспечивает эффективных средств для перехода от одного к другому. Поэтому «синтаксическое» доказательство той же теоремы в § 7.4, хотя оно заметно сложнее, имеет гораздо большую практическую ценность. Именно это доказательство (а не более позднее, приведенное в одной из предшествующих глав) явилось источником многих работ в данной области.

Говоря, что будущее теории топосов заключается в прояснении различных областей математики путем применения теоретико-топосных идей, я не считаю, как Гротендик, теорию топосов машиной для разрешения нерешенных проблем в алгебраической геометрии или для решения открытых проблем еще где-либо. Наоборот, я думаю, что вряд ли элементарная теория топосов сама по себе решит какую-нибудь важную, выдающуюся проблему в математике. Но я все-таки верю, что распространение теоретико-топосной точки зрения на многие области математической деятельности неизбежно приведет к более глубокому пониманию подлинных особенностей этих проблем, что является существенной предпосылкой к их правильному решению.

Что же в таком случае представляет собой теоретико-топосная точка зрения? Коротко, она состоит в отбрасывании идеи о существовании фиксированного универсума «постоянных» множеств, среди которых может и должна развиваться математика, и в признании того, что работать с переменными величинами в универсуме непрерывно меняющихся множеств удобнее, чем в рамках традиционной (после возникновения абстрактной теории множеств) методики, когда отдельно рассматривается носитель (т. е. топологическое пространство) и последова-

тельность постоянных структур, привязанных к точкам этого носителя. Ловер [LB] писал: «Каждое понятие постоянства относительно, оно возникает чувственно или мысленно как предельный случай изменения, и бесспорное значение таких понятий для получения ясного представления об изменении всегда ограничено этим своим происхождением. Это, в частности, относится к понятию постоянного множества и объясняет, почему так много из наивной теории множеств переносится в том или ином виде в теорию переменных множеств. Именно переход от постоянных множеств к переменным множествам является душой теории топосов! Читатель, который будет видеть в этом конечную цель, сумеет многое понять.

Далее, несколько слов о том, что не сделано в этой книге.

(1) В определении топоса декартова замкнутость и существование объекта Ω взяты как две отдельные аксиомы вместо того, чтобы объединить их в одну аксиому об объектах-степенях, как предложил Кок [66]. (Их эквивалентность аксиоме Кокка является предметом упражнений к главе 1.) На практическом уровне я бы отстаивал это решение по двум причинам: (а) в этой книге, особенно в главе 2, приведен ряд результатов, использующих только декартову замкнутость, но не все аксиомы топоса, а некоторые из них (например теорема 1.47) используют в доказательстве экспоненциалы и Ω существенно различными способами; (б) если использовать определение объекта-степени, то окажется необходимым (как в [WB]) немедленно приводить довольно техническое доказательство того, что это определение влечет декартову замкнутость; в этот момент возникает опасность потерять читателей. На более философском уровне я бы добавил еще следующее: (в) определение с помощью объекта-степени является на самом деле теоретико-множественным, а не теоретико-категорным определением топоса; это проявляется в том, что оно подчиняет понятие «функции» понятию «подмножества» посредством теоретико-множественного приема отождествления функции с ее графиком. Одной из принципиальных особенностей теории категорий является то, что она принимает «морфизм» как первичное понятие на одном уровне (между прочим, не более высоком) с понятием «объект». Поэтому правильно, что определение топоса должно включать его декартовость.

(2) Язык Митчела — Бенабу вводится в книге довольно поздно, в конце главы 5. Я знаю, что есть люди, для которых идеальный учебник по теории топосов должен начинаться с определения и некоторого развития свойств точности, достаточного для введения этого языка и доказательства корректности его стандартной интерпретации. После этого все доказательства должны проводиться на этом формальном языке. Я не согласен с этим подходом. Я не верю, что можно осознать всю

силу языка Митчела — Бенабу, пока не получишь некоторого опыта доказательств без него (это почти единственное место в книге, где я сознательно упорядочил материал по педагогическим, а не логическим соображениям). Можно отметить также, что формально-логический подход не работает при столкновении с относительной теоремой Жиро (теорема 4.46). В то время как язык Митчела — Бенабу является очень сильным инструментом в доказательствах внутри одного топоса, он недостаточно приспособлен к доказательствам, в которых мы должны переходить от одного топоса к другому (и обратно) с помощью геометрических морфизмов. (Возможно, что доказательство теоремы 4.46 можно сократить, используя язык локально внутренних категорий, но это другое дело.)

(3) Я уже упомянул, что в книге отсутствует теорема Фрейда о вложении [FK]. Вследствие этого фрейдовское понятие точечного топоса играет относительно слабую роль, оно не вводится до § 9.3.

(4) Я не включил ссылок на более современные (еще не опубликованные) разработки Фрейдом теории *аллегорий*. Как предполагается, эта теория будет для категорий множеств и отношений тем же, чем теория топосов служит для множеств и функций. Как известно, Фрейд утверждает, что она предоставляет более простой и естественный базис для многих идей, развитых в этой книге, чем теория топосов, но лично я не убежден в этом.

(5) Я не упомянул исследования Бурна [13], Стрита [113], [114] и других по развитию 2-категорной аналогии теории топосов. Однако мне кажется, что основы этой теории еще не достигли столь определенного состояния, чтобы включать их в книгу.

(6) Одним из обобщений теории топосов, об отсутствии которого в книге я слегка сожалею, является введенное Пеноном [99] понятие *квазитопоса*. Однако я чувствую, что появление его в начале книги привело бы к дополнительному усложнению доказательств и не дало бы новых, важных примеров, а появление его в конце книги повлекло бы повторение материала. Тем не менее, я надеюсь, что ожидаемые заметки Уайлера о квазитопосах (обещанные в [130]) помогут восполнить этот пробел.

(7) В этой книге преднамеренно нигде не употребляется словосочетание «универсум Гротендика». Я сознательно не уточняю свойств теории множеств, которая используется (за исключением § 9.3), так как это в действительности не имеет значения. Теория топосов — это элементарная теория, т. е. теория первого порядка, и ее основные теоремы не зависят (или не должны зависеть) от темных аксиом теории множеств. (На самом деле я полноправный член «освободительного движения математиков», основанного Конвеем [157].) Однако если этого настойчиво

потребуют, я допускаю использование теории множеств типа Гёделя — Бернайса, различающей малые категории (множества) и большие категории (собственно классы), но я также хочу рассматривать некоторые «очень большие» 2-категории (особенно $\mathcal{Cat}$ и $\mathcal{Top}$), объектами которых являются сами большие категории. Если бы я хотел при этом быть строго формальным, то нужно было бы ввести по меньшей мере один универсум Гротендика. Но так как все утверждения, которые я хочу высказывать о $\mathcal{Cat}$ и $\mathcal{Top}$, являются элементарными (или эквивалентными им), то в этом нет реальной надобности. Чтобы соблюдать некоторые теоретико-множественные приличия, я ограничился рассмотрением пучков только на малых сайтах. Это неудобно в том отношении, что мы не можем сформулировать теорему Жиро в ее самой блестящей форме (категория является топосом Гротендика тогда и только тогда, когда она эквивалентна категории канонических пучков на ней самой), но не так скучно, как полагали авторы [GV].

Наконец, я должен сформулировать свою позицию по наиболее спорному вопросу во всей теории топосов: как образовать множественное число от слова «топос». Читатель уже заметил, что я использую английское множественное число *). Я поступаю так потому, что слово топос (в своем математическом смысле) не является производным от своего греческого корня, а образовано разложением слова «топология». Мне нечего больше добавить, кроме как спросить тех топософфов**), которые настаивают на слове «топои», берут ли они горячий чай с собой в «термои», когда отправляются на прогулку в холодную погоду.

*) В подлиннике *toposes* нами переводится русским множественным числом «топосы». Некоторые англоязычные авторы рассматривают слово «топос» как греческое и образуют от него множественное число по правилам (древне) греческого языка — *топои*. — *Примеч. пер.*

**) Я признателен Майлзу Риду за то, что он предложил термины «топософ» и «топософия» и призываю моих коллег-топософфов принять их. — *Примеч. авт.*

ЗАМЕТКИ ДЛЯ ЧИТАТЕЛЯ

В книге используется единая система нумерации определений, лемм, теорем, замечаний и т. п.: номер $n.pq$ обычно обозначает пункт q в параграфе p главы n , за исключением отдельных параграфов, в которых имеется более девяти пунктов. В них номера последовательно увеличиваются, начиная с $n.p9$. Так, 8.20 — это десятый пункт в § 8.1, а 5.51 — одиннадцатый в § 5.4. К счастью, наложения не происходит. Хотя эта система может показаться не очень логичной, в ней сочетаются простота и хорошая запоминаемость номеров с легкостью нахождения материала по ссылкам. $A.n$ обозначает пункт n в Приложении.

В конце каждой главы находится несколько упражнений: около десяти в каждой из первых глав и больше в последующих. Они значительно различаются по трудности: одни вполне шаблонны, в то время как другие совершенно нетривиальны. Я никак не указывал, какие упражнения считаю более легкими (порядок упражнений отражает расположение материала в той главе, к которой они относятся), но дал щедрые указания для большей части трудных. Во многих случаях результат упражнения используется в упражнениях или в тексте последующих глав. Эти упражнения выделены звездочкой.

Следующие сведения о логической связи глав между собой могут быть полезны читателю, интересующемуся одним конкретным вопросом. В главе 0 содержится сводка предварительных материалов, нужных либо для обоснования определения топоса, либо для построения примеров. Главы 1—5 образуют сердцевину книги, из них главы 1—4 образуют более или менее короткий путь (с незначительными отклонениями, как в § 4.2) от определения топоса (п. 1.11) к относительной теореме Жиро (п. 4.46) и к существованию расслоенных произведений в $\mathcal{Top}/\mathcal{E}$ (п. 4.48). Отношение логической зависимости в этих четырех главах весьма близко к линейному порядку.

Однако большая часть материала в главе 2 (о внутренних категориях) носит чисто технический характер, и некоторые читатели могут найти ее при первом чтении довольно трудной. Я посоветовал бы таким читателям пропустить всю главу 2, за исключением теоремы 2.32 (которая важна и применяется не только в теории внутренних категорий), и перейти к главе 3. (В § 3.3 имеется несколько ссылок на главу 2, которыми можно пользоваться только по мере надобности.) Затем можно изучить первый параграф (и только) главы 4, всю главу 5 (за исключением некоторых частей § 5.3) и даже первые два параграфа главы 6, прежде чем вернуться к главе 2.

В главе 5 вводится ряд понятий, которые хотя и относятся к магистральному направлению развития теории топосов, но не вовлечены в доказательство относительной теоремы Жиро. В частности, в ней содержится описание внутреннего языка топосов, широко используемого во второй половине книги.

Последние четыре главы представляют различные расширения и применения основной теории. Сначала я надеялся сделать их логически независимыми, так, чтобы можно было их читать в любом порядке, однако неизбежно установились определенные взаимные связи. Следующая таблица показывает наиболее важные из них:

Перед чтением	рекомендуется читать
7.4	6.3 и 6.5
8.1	7.5
8.4	6.2
9.1	6.2 и 6.4

Имеются также взаимные связи между упражнениями этих четырех глав (см., например, упражнения 6.11, 8.7, 9.6 и 9.14).

В Приложении представлен материал, поначалу предназначенный для включения в главу 2. Он был вынесен из нее потому, что хотя, по всей вероятности, этот материал в недалеком будущем станет составной частью основного направления развития теории топосов, базисные определения «локально внутренней категории» не достигли, возможно, своей окончательной формы. Приложение можно читать в любой момент после главы 2, хотя в нем много ссылок на более поздние главы.

Во всей книге ссылки на библиографию заключены в квадратные скобки. Сама библиография состоит из четырех разделов: раздел А состоит из «стандартных ссылок» к другим областям математики (например, к теории решеток, алгебраической топологии), которые используются, когда в тексте цитируются теорема или определение, относящиеся к одной из этих областей. В разделе Б содержатся общие работы по теории топосов и некоторые вводные статьи, написанные для неспециалистов (например, [MB], [W].) Раздел В содержит остальные ссылки по теории топосов и ряд примыкающих работ по теории категорий, теории пучков и т. п. Разделы Б и В претендуют на полный перечень статей, опубликованных до настоящего времени по теории топосов. Однако я не включал короткие тезисы выступлений и диссертации, если они не содержат важных результатов, не опубликованных где-либо еще. Раздел Г содержит остальные работы, на которые имеются ссылки в тексте. Работы в разделах А и Б обозначаются с помощью двухбуквенного кода, работы в разделах В и Г последовательно нумеруются. Во всех четырех разделах я указывал номера рефератов в *Mathematical Reviews*, если они существуют.

ГЛАВА 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

0.1. Теория категорий

Настоящий параграф не есть сколько-нибудь обстоятельное введение в основные идеи теории категорий. Скорее, его назначение — указать некоторые понятия и теоремы, которые будут предполагаться известными, и ввести некоторые стандартные обозначения. Читателю, который сочтет, что он недостаточно знаком с этими основными понятиями, лучше обратиться к превосходной книге Маклейна [CW] или к любому другому стандартному руководству по теории категорий прежде, чем продолжать дальнейшее изучение этой книги.

Для обозначения «больших» категорий обычно будут использоваться заглавные рукописные латинские буквы ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, ...). Утверждение « $\mathcal{C}$ есть категория», без каких-либо дополнительных указаний, означает, что $\mathcal{C}$ есть модель элементарной теории категорий [72], т. е. $\mathcal{C}$ является *метакатегорией* в смысле главы 1 [CW]. Это значит, что мы не предполагаем категорию $\mathcal{C}$ определенной формально в некоторой частной модели теории множеств; в частности, если X и Y — объекты из $\mathcal{C}$, то мы не требуем, чтобы морфизмы категории $\mathcal{C}$ из X в Y составляли множество.

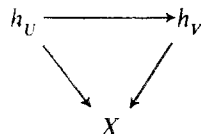
Однако всюду, кроме главы 9, как правило, предполагается заданной некоторая (фиксированная) модель подходящей теории множеств (включающей, при надобности, аксиому выбора). Получаемая из нее *категория множеств и функций* обозначается через $\mathcal{P}$. *Малыми* называются те категории, морфизмы которых образуют множество. Если $\mathbf{C}$ — малая категория, то через $\mathcal{P}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ обозначается категория *предпучков* на $\mathbf{C}$, т. е. контравариантных функторов из $\mathbf{C}$ в $\mathcal{P}$. Среди объектов категории $\mathcal{P}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ имеются *представимые* функторы h_U , где U — объект из $\mathbf{C}$; по определению $h_U(V) = \text{hom}_{\mathbf{C}}(V, U)$. По типографским причинам мы пишем иногда $h(U)$ вместо h_U ; кроме того, мы используем обозначение h^U для ковариантного представимого функтора $\text{hom}_{\mathbf{C}}(U, -)$. В дальнейшем часто используются следующие два результата.

0.11 Лемма (Йопеда [187]). Пусть U и X — объекты категории $\mathbf{C}$ и $\mathcal{P}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ соответственно. Тогда имеется (естественная

по обоим переменным) биекция между морфизмами $h_U \rightarrow X$ категории $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ и элементами множества $X(U)$. $\square$

0.12 Лемма. Любой объект категории $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ представим в виде копредела диаграммы, вершинами которой являются представимые функторы.

Доказательство. Пусть X — объект категории $\mathcal{P}^{\text{cop}}$. Обозначим через $(\mathcal{C} \downarrow X)$ (малую) относительную категорию, объектами которой являются пары (U, α) , где U — объект из $\mathcal{C}$, а $\alpha: h_U \rightarrow X$ — стрелка из $\mathcal{P}^{\text{cop}}$. Морфизмами этой относительной категории являются коммутативные треугольники



из $\mathcal{P}^{\text{cop}}$.

Тогда имеется очевидная «стирающая» диаграмма $(\mathcal{C} \downarrow X) \rightarrow \mathcal{P}^{\text{cop}}$, заданная на объектах по правилу $(U, \alpha) \mapsto h_U$. Непосредственная проверка показывает, что X является копределом этой диаграммы. $\square$

Предполагается, что читатель знаком с понятиями предела, копредела и сопряженных функторов. (Запись $T \dashv G$ обозначает, что функтор T сопряжен слева к функтору G .) Предостережение: говоря, что категория имеет пределы определенного типа, мы подразумеваем существование канонического выбора предела для каждой диаграммы соответствующего типа. Так, например, фразой «в $\mathcal{P}$ имеются бинарные произведения» мы хотим сказать, что для данных множеств X и Y существует не просто множество, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными парами $\langle x, y \rangle$, а каноническое множество, т. е. множество всех упорядоченных пар. Однако говоря, что функтор сохраняет пределы, мы не подразумеваем, что он сохраняет канонический выбор предела, и утверждение, что данный объект есть некоторый предел определенной диаграммы, не подразумевает его каноничности.

Если $\mathcal{C}$ — категория с конечным объектом (т. е. некоторым пределом для пустой диаграммы), то мы обозначим его через 1 , и для всякого объекта X из $\mathcal{C}$ мы также через 1_X (или просто 1) — единственный морфизм $X \rightarrow 1$, а через 1_X (или просто 1) — единичный, или тождественный морфизм на X . (Некоторая нечеткость, свойственная таким обозначениям, легко оправдывается тем, что морфизм 1_X является конечным объектом категории $\mathcal{C}/X$ объектов над X и для любого объекта $Y \xrightarrow{f} X$ этой катего-

рии морфизм f также является единственным морфизмом категории $\mathcal{C}/X$ из f в 1_X .) Если категория $\mathcal{C}$ имеет произведения и/или расслоенные произведения, то буквой π обозначается каноническая проекция произведения или расслоенного произведения на один из его сомножителей с индексом $1, 2, 3, \dots$, обозначающим первый, второй, третий, ... сомножитель. Аналогично, мы обычно (но не исключительно) пользуемся буквой v с соответствующими индексами для обозначения канонического включения сомножителя в копроизведение.

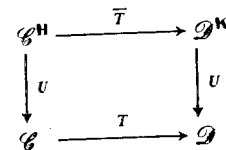
Также предполагается знакомство с понятиями монады (или тройки), комонады и алгебры над монадой. Нам понадобится теорема «грубой тройственности» Бека [153] в ее «рефлексивно-коуравнительном» виде. Напомним, что параллельная пара $X \xrightleftharpoons[f, g]{f, g} Y$ из категории $\mathcal{C}$ называется рефлексивной, если существует морфизм $Y \xrightarrow{h} X$ с $fh = gh = 1_Y$. [В случае $\mathcal{C} = \mathcal{P}$ это эквивалентно тому, что образ отображения $X \xrightarrow{(f, g)} Y \times Y$ является рефлексивным бинарным отношением на Y .]

0.13 Теорема. Пусть $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathcal{A}$ — пара функторов, $F \dashv U$ и H — монада на $\mathcal{C}$, индуцированная этим сопряжением. Предположим, что в категории $\mathcal{A}$ имеются коуравнители рефлексивных пар, U сохраняет их и отражает изоморфизмы. Тогда U — монадический функтор, т. е. функтор сравнения $K: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^H$ является эквивалентностью категорий, где $\mathcal{C}^H$ обозначает категорию H -алгебр. $\square$

Нам понадобятся также следующие теоремы о категориях алгебр.

0.14 Теорема (Эйленберг — Мур [162]). Пусть $H = (H, \eta, \mu)$ — монада на $\mathcal{C}$ и функтор H имеет правый сопряженный функтор G . Тогда на $\mathcal{C}$ существует единственная структура комонады $G = (G, \epsilon, \delta)$ такая, что категория G -алгебр $\mathcal{C}_G$ изоморфна категории $\mathcal{C}^H$ относительно изоморфизма, который отождествляет два соответствующих стирающих функтора. $\square$

0.15 Теорема (о подъеме сопряжения; см. [54]). Пусть H, K — комонады на категориях $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ соответственно, $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ — функтор, а $\bar{T}: \mathcal{C}^H \rightarrow \mathcal{D}^K$ — некоторый его подъем, входящий в коммутативный квадрат



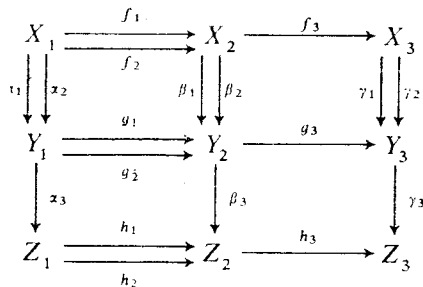
где через U обозначены стирающие функторы. Предположим

также, что в $\mathcal{C}^H$ имеются коуравнители рефлексивных пар. Тогда, если T имеет левый сопряженный функтор, то и $\bar{T}$ имеет левый сопряженный функтор. $\square$

0.16 Теорема (Линтон [178]). Пусть H — монада на категории $\mathcal{C}$. Предположим, что в категории $\mathcal{C}^H$ имеются коуравнители рефлексивных пар. Тогда, если в $\mathcal{C}$ имеются все конечные (соответственно все $\mathcal{P}$ -индексированные) копроизведения, то и в $\mathcal{C}^H$ имеются все конечные (соответственно все $\mathcal{P}$ -индексированные) копроизведения. $\square$

Из теорем 0.13, 0.15 и 0.16 видно, что коуравнители рефлексивных пар (рефлексивные коуравнители) играют важную роль в теории монад. Поэтому сейчас самое время упомянуть одну лемму, которая несмотря на то, что имеет очень широкий круг приложений (как будет видно из главы 6), пока не попала в стандартные руководства по теории категорий.

0.17 Лемма. Пусть



— диаграмма в произвольной категории, удовлетворяющая «очевидным» условиям коммутативности (т. е. $\beta_i f_j = g_j \alpha_i$ при $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ и т. п.), все строки и столбцы которой являются коуравнителями, а пары (f_1, f_2) и (α_1, α_2) рефлексивны. Тогда диагональ $X_1 \xrightarrow{\beta_1 f_1} Y_2 \xrightarrow{\gamma_2 g_2} Z_3$ является коуравнителем.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

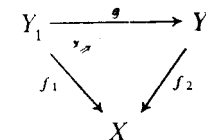
$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \text{соеq}(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= \text{соеq}(\gamma_1 f_3, \gamma_2 f_3) \quad (\text{поскольку } f_3 \text{ — эпистрелка}) \\ &= \text{соеq}(g_3 \beta_1, g_3 \beta_2). \end{aligned}$$

Поэтому нижний правый квадрат кокартов, в силу чего морфизм $Y_2 \xrightarrow{\theta} T$ пропускается через $Y_2 \xrightarrow{\gamma_2 g_2} Z_3$ тогда и только тогда, когда он коуравнивает обе пары (g_1, g_2) и (β_1, β_2) . Но если эти условия выполнены, то $\theta \beta_1 f_1 = \theta \beta_2 f_1 = \theta g_1 \alpha_1 = \theta g_2 \alpha_1 = \theta \beta_2 f_2$. Обратно, если $\theta \beta_1 f_1 = \theta \beta_2 f_2$ и $X_2 \xrightarrow{s} X_1$ — общее расщеп-

ление для стрелок f_1 и f_2 , то $\theta \beta_1 = \theta \beta_1 f_1 s = \theta \beta_2 f_2 s = \theta \beta_2$; аналогично, $\theta g_1 = \theta g_2$. Поэтому $Y_2 \rightarrow Z_3$ -коуравнитель стрелок $\beta_1 f_1$ и $\beta_2 f_2$. $\square$

В заключение упомянем две области теории категорий, не освещаемые в [CW]. Одна из них — теория 2-категорий; 2-категория $\mathcal{C}$ есть категория, «объектами» которой обладают структурой категории (не обязательно малой). Это значит, что для каждой пары объектов (X, Y) из $\mathcal{C}$ имеется категория $\mathcal{C}(X, Y)$, объектами которой являются все морфизмы (или 1-стрелки) категории $\mathcal{C}$ из X в Y и морфизмы которой называются 2-стрелками категории $\mathcal{C}$. Композиция 1-стрелок из $\mathcal{C}$ функториальна по обоим переменным. Введение в теорию 2-категорий можно найти в [155], [167] и [172].

Следует предупредить читателя, что при обсуждении 2-категорий мы обычно используем такие термины, как «функтор» и «предел», и такие обозначения, как $\mathcal{C}/X$, к чему австралийская школа [172] добавила бы «в псевдосмысле»; при этом диаграммы, коммутирующие «на конце», меняются на диаграммы, коммутирующие с точностью до (указанного) 2-изоморфизма. Например, категория $\mathcal{C}/X$ есть 2-категория, объектами которой являются 1-стрелки $Y \xrightarrow{f} X$ из $\mathcal{C}$ и 1-стрелками которой являются треугольники



коммутирующие с точностью до указанного 2-изоморфизма α ; 2-стрелка категории $\mathcal{C}/X$ из (g_1, α_1) в (g_2, α_2) есть 2-стрелка $g_1 \xrightarrow{\beta} g_2$ из $\mathcal{C}$ такая, что $(f_2 * \beta) \cdot \alpha_1 = \alpha_2$. Аналогично, говоря о функторе $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ между 2-категориями, мы не подразумеваем, что T точно коммутирует с композицией 1-стрелок, а лишь с точностью до согласованного естественного 2-изоморфизма. (Подразумевается, что обычная категория $\mathcal{C}$ отождествляется с локально дискретной 2-категорией, объектами и 1-стрелками которой являются объекты и морфизмы категории $\mathcal{C}$, а 2-стрелками — только единицы.)

Наш отход от австралийского обычая в терминологии объясняется тем, что на практике чаще всего появляются именно «псевдопонятия». Если же мы хотим подчеркнуть то, что отдельно взятый функтор точно коммутирует с композицией 1-стрелок (т. е. является функтором в австралийском смысле), то мы называем его строгим функтором. В одном из параграфов (4.2) у нас будет повод ввести еще менее ограничительное понятие слабого функтора, 2-стрелки которого, с точностью до

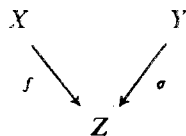
которых коммутируют диаграммы, не обязаны быть даже обратимыми; все эти слабые понятия будут определены в точности тогда, когда они нам понадобятся. Кроме того, в § 2.4 мы столкнемся с примером *бикатегории*, которая есть «псевдо-2-категория» в австралийском смысле; т. е. она определяется теми же данными, что и 2-категория, однако законы тождества и ассоциативности для композиции 1-стрелок в ней верны лишь с точностью до согласованного естественного 2-изоморфизма.

И, наконец, следует познакомиться с понятием категории частных. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а Σ — некоторый класс морфизмов из $\mathcal{C}$. Тогда категорию частных $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ можно определить (с точностью до эквивалентности) требованием существования универсального функтора $P_\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}\Sigma^{-1}$ среди функторов вида $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, переводящих все морфизмы из Σ в изоморфизмы.

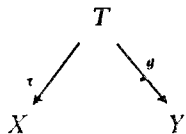
0.18 Определение. Класс Σ морфизмов из $\mathcal{C}$ называют допускающим исчисление правых частных, если:

(i) Σ замкнут относительно композиции и содержит все единичные морфизмы категории $\mathcal{C}$.

(ii) Для диаграммы вида



с $\sigma \in \Sigma$ существует диаграмма



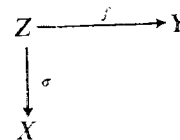
с $\tau \in \Sigma$ такая, что $ft = g\tau$. (Замечание. T не обязан быть расслоенным произведением.)

(iii) Для диаграммы вида $X \begin{smallmatrix} f \\ \downarrow g \end{smallmatrix} Y \xrightarrow{\sigma} Z$ с $\sigma \in \Sigma$ и $\sigma f = g\sigma$ существует такая стрелка $T \xrightarrow{\tau} X$ из Σ , что $ft = g\tau$. $\square$

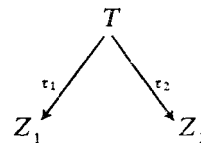
0.19 Теорема (Габриель и Цисман [CF]). Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными пределами, а Σ — класс морфизмов из $\mathcal{C}$, допускающий исчисление правых частных. Тогда категория частных $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ существует, имеет конечные пределы и функтор P_Σ их сохраняет.

Доказательство. Покажем, что категорию $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ можно описать следующим способом: ее объектами являются объекты из $\mathcal{C}$, а морфизмами $X \rightarrow Y$ из $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ являются классы эквивалент-

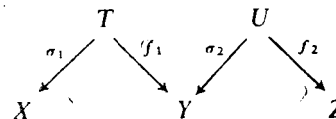
ности диаграмм



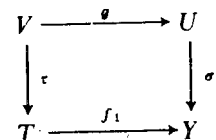
из $\mathcal{C}(\sigma \in \Sigma)$ по отношению «диаграмма (σ_1, f_1) эквивалентна диаграмме (σ_2, f_2) тогда и только тогда, когда существует диаграмма



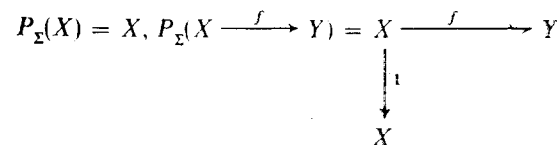
такая, что $\sigma_1\tau_1 = \sigma_2\tau_2 \in \Sigma$ и $f_1\tau_1 = f_2\tau_2$. (Нетрудно проверить, что так определяется действительно отношение эквивалентности.) Чтобы задать композицию двух морфизмов



в $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$, образуем коммутативный квадрат



с $\tau \in \Sigma$ (по 0.18 (ii)) и положим $(\sigma_2, f_2)(\sigma_1, f_1) = (\sigma_1\tau, f_2g)$. Снова легко убедиться, что это определение не зависит от выбора представителей и выбора продолжения до V , откуда также получается ассоциативность данной композиции. Функтор P_Σ определяется по правилу



и его универсальность проверяется непосредственно. Теперь покажем, что в категории $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ имеются уравниватели и функтор P_Σ их сохраняет. (Подобное рассуждение и даже более простое

годится для конечных произведений.) Пусть

$$\begin{array}{ccc} Z_i & \xrightarrow{f_i} & Y \\ \downarrow \sigma_i & & \\ X & & \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

— параллельная пара морфизмов из $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$; при подходящем выборе представителей можно считать, что $Z_1 = Z_2$ и $\sigma_1 = \sigma_2$. Пусть $E \rightarrow Z$ — уравнитель стрелок f_1 и f_2 в $\mathcal{C}$. Рассмотрим теперь произвольный морфизм

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \tau & & \\ T & & \end{array}$$

из $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$, уравнивающий (σ, f_1) и (σ, f_2) . Тогда при подходящем выборе коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & Z \\ \downarrow p & & \downarrow \sigma \\ U & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

с $\tau p \in \Sigma$ можно считать, что $f_1 h = f_2 h$ в $\mathcal{C}$, а потому h факторизуется через q с помощью некоторой стрелки $V \xrightarrow{k} E$. Но в этом случае морфизм (τ, g) факторизуется в $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$ через $P_2(\sigma q)$ с помощью

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow \tau p & & \\ T & & \end{array}$$

и, как нетрудно проверить, однозначно. Значит, $P_2(\sigma q)$ и есть уравнитель морфизмов (σ, f_1) и (σ, f_2) в $\mathcal{C}\Sigma^{-1}$, откуда также получается, что P_2 сохраняет уравнители. $\square$

0.2. Теория пучков

Как и в предшествующем параграфе, в наши намерения не входит представление сколько-нибудь обстоятельного изложения «классической» теории пучков на топологических пространствах; все это читатель может найти в одном из стандартных руководств по данному предмету, например, в [ST] или [TF]. Одна-

ко хотя бы краткий обзор этой классической теории необходим для понимания основ более общей теории в случае топологий Гротендика, которая будет описана в следующем параграфе.

Пусть $(X, \mathbf{T})$ — топологическое пространство. Множество $\mathbf{T}$ открытых подмножеств в X частично упорядочено по включению, а потому его обычным способом можно трактовать как малую категорию: а именно, объектами $\mathbf{T}$ считаются открытые подмножества, в $\mathbf{T}$ существует не более одного морфизма из U в V и такой морфизм определен тогда и только тогда, когда $U \subseteq V$.

0.21 Определение. Предпучком (множеств) на пространстве X называется предпучок на данной категории $\mathbf{T}$, т. е. контравариантный функтор из $\mathbf{T}$ в $\mathcal{P}$. Итак, предпучок P определяется заданием для каждого открытого подмножества $U \subseteq X$ некоторого множества $P(U)$ и заданием отображения ограничения

$$\rho_V^U: P(U) \rightarrow P(V)$$

для каждого открытого $V \subseteq U$, подчиненных очевидным условиям совместности. Морфизм предпучков есть попросту некоторое естественное преобразование этих функторов. $\square$

Понятие предпучка включает ряд примеров, связанных с известными представлениями из элементарной топологии.

0.22 Примеры. (i) Любое множество A определяет постоянный предпучок A , для которого $\bar{A}(U) = A$, $\rho_V^U = 1_A$ при всех $V \subseteq U \subseteq X$.

(ii) Любому открытому подмножеству $U \subseteq X$ соответствует представимый предпучок h_U , где

$$h_U(V) \begin{cases} \text{— одноэлементное множество, если } V \subseteq U, \\ \text{— пустое множество в противном случае.} \end{cases}$$

Отображения ограничения очевидны.

(iii) Для любого топологического пространства Y имеется предпучок C_Y непрерывных Y -значных функций. По определению $C_Y(U)$ — множество непрерывных функций $U \rightarrow Y$ и $\rho_V^U(f) = f|_V$.

(iv) Другой предпучок Ω : $\Omega(U)$ — множество открытых подмножеств в U и $\rho_V^U(W) = W \cap V$.

(v) Аналогично определяется предпучок J : $J(U)$ — множество открытых покрытий для U и $\rho_V^U(\{U_\alpha | \alpha \in A\}) = \{U_\alpha \cap V | \alpha \in A\}$. $\square$

Сверх того, многие из этих примеров удовлетворяют дополнительному условию «точности», которое состоит в том, что элементы из $P(U)$ можно строить при помощи «склеивания» элементов из $P(U_\alpha)$, где $\{U_\alpha\}$ — некоторое открытое покрытие множества U . И это приводит к определению пучка.

0.23 Определение. Пусть P — предпучок на X . Тогда P называют пучком, если для любого открытого множества U ,

любого его открытого покрытия $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ и любого семейства $\{\sigma_\alpha | \alpha \in A\}$ элементов из $P(U_\alpha)$ такого, что для всех пар (α, β) выполняется равенство $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ при ограничении в $P(U_\alpha \cap U_\beta)$, существует ровно один элемент $\sigma \in P(U)$, для которого при каждом α его ограничение в $P(U_\alpha)$ совпадает с σ_α .

Соответственно, P называют *отделимым предпучком*, если для него выполнено предыдущее условие с заменой «в точности один» на «не более чем один».

Через $\text{Shv}(X, \mathbf{T})$ (или просто $\text{Shv}(X)$) мы обозначаем полную подкатегорию в $\mathcal{F}^{\text{top}}$, объектами которой являются все пучки. $\square$

С диаграммной точки зрения предпучок P является пучком тогда и только тогда, когда для всякого покрытия $\{U_\alpha\}$ открытого множества U диаграмма

$$P(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} P(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} P(U_\alpha \cap U_\beta)$$

является уравнителем, где все отображения очевидным способом индуцируются ограничениями. Легко проверить, что в примерах 0.22 (ii), (iii) и (iv) предпучки в действительности являются пучками.

0.24 Теорема. Пусть $\mathbf{esp}$ обозначает категорию топологических пространств и непрерывных отображений. Существует пара сопряженных функторов $\mathcal{E}^{\text{top}} \xrightleftharpoons[\Gamma]{L} \mathbf{esp}/(X, \mathbf{T})$, ограничивающаяся до эквивалентности категории $\text{Shv}(X, \mathbf{T})$ и полной подкатегории в $\mathbf{esp}/(X, \mathbf{T})$, объектами которой являются локальные гомеоморфизмы $E \xrightarrow{p} X$.

Доказательство. Пусть P — предпучок на X и $x \in X$. Слой предпучка P в точке x определяется как копредел

$$P_x = \lim_{U \ni x} P(U);$$

если $\sigma \in P(U)$ для некоторого $U \ni x$, то через σ_x мы обозначаем образ σ в P_x . Определим теперь пространство $L(P)$ как множество пар (x, t) с $x \in X$, $t \in P_x$, топологизированное следующим способом: $V \subseteq L(P)$ открыто тогда и только тогда, когда для любого открытого подмножества $U \subseteq X$ и любого элемента $\sigma \in P(U)$ множество $\{x \in U | (x, \sigma_x) \in V\}$ открыто в X . Имеется естественная проекция $L(P) \xrightarrow{p} X$, задаваемая сопоставлением $(x, t) \mapsto x$, и, как легко проверить, морфизм предпучков $P \rightarrow Q$ индуцирует непрерывное отображение $L(P) \rightarrow L(Q)$ над X . Более того, проекция $L(P) \xrightarrow{p} X$ является локальным гомеоморфизмом; для каждой пары $(x, t) \in L(P)$ можно указать окрестность U точки x и элемент $\sigma \in P(U)$ такие, что $t = \sigma_x$, а тогда множество

$V = \{(y, \sigma y) | y \in U\}$ открыто в $L(P)$ и отображается гомеоморфно на U относительно p .

Обратно, пусть $E \xrightarrow{p} X$ — пространство над X . Тогда определим предпучок $\Gamma(E, p)$ так: $\Gamma(E, p)(U)$ — множество непрерывных отображений $U \xrightarrow{s} E$, являющихся сечениями проекции p , т. е. ps совпадает с включением $U \rightarrow X$, а для ограничений $p_V^U(s) = s|_V$. Далее нетрудно проверить, что на самом деле $\Gamma(E, p)$ — пучок (называемый *пучком сечений* отображения p). Теперь укажем естественное преобразование $\eta: 1 \rightarrow \Gamma L$. По определению η_p есть морфизм предпучков, переводящий элемент $\sigma \in P(U)$ в сечение

$$\tilde{\sigma}: U \rightarrow L(P); \quad x \mapsto (x, \sigma_x).$$

Кроме того, имеется естественное преобразование $\varepsilon: L\Gamma \rightarrow 1$ такое, что $\varepsilon_{(E, p)}$ переводит точку (x, t) из $L\Gamma(E, p)$ в точку $s(x)$, где $s \in \Gamma(E, p)(U)$ — некоторое сечение отображения p над окрестностью U точки x с $s_x = t$. (Легко проверить независимость этого определения от выбора окрестности U и сечения s , а также непрерывность отображения $\varepsilon_{(E, p)}$). Более того, преобразования η и ε удовлетворяют известным «треугольным соотношениям», откуда получается сопряженность $(L \dashv \Gamma)$.

Предположим теперь, что P — пучок и $s \in \Gamma LP(U)$. Тогда существует единственный элемент $\sigma \in P(U)$, для которого $\tilde{\sigma} = s$. Действительно, σ можно построить локально в каждой точке из U , а затем склеить требуемый элемент по аксиоме пучка. Поэтому η_p — изоморфизм. Аналогично, если p — локальный гомеоморфизм, то $\varepsilon_{(E, p)}$ — гомеоморфизм. Следовательно, наше сопряжение ограничивается до эквивалентности категорий, что и требовалось. $\square$

0.25 Следствие. Функтор включения $\text{Shv}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{\text{top}}$ имеет левый сопряженный, а именно композицию ΓL , рассматриваемую как функтор $\mathcal{E}^{\text{top}} \rightarrow \text{Shv}(X)$. Этот функтор называют *функтором ассоциирования пучка*. $\square$

Из 0.24 видно, что пучки на X можно рассматривать двояко: либо как предпучки, удовлетворяющие некоему условию точности (как в 0.23), либо как пространства, оснащенные локальным гомеоморфизмом в X . Многие возможности теории пучков выявляются в плодотворном взаимодействии этих двух идей, например:

0.26 Предложение. Пусть $(X, \mathbf{T}) \xrightarrow{f} (Y, \mathbf{U})$ — непрерывное отображение. Тогда существует пара функторов $\text{Shv}(X, \mathbf{T}) \xrightleftharpoons[f_*]{f^*} \text{Shv}(Y, \mathbf{U})$ такая, что $f^* \dashv f_*$, и функтор f^* точен слева.

Доказательство. Функтор f_* определяется по предпучковому представлению. Заметим, что поскольку отображение f непрерывно, оно индуцирует функтор (т. е. монотонное отображение) $f^{-1}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$. Композиция с f^{-1} и задает функтор $f_*: \mathcal{P}^{\text{top}} \rightarrow \mathcal{P}^{\text{top}}$, очевидно, переводящий пучки в пучки.

Чтобы определить $f^*(E)$ для пучка E на Y , мы рассматриваем E как локальный гомеоморфизм над Y и строим по нему подъем

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

в esp . Снова легко проверить, что проекция $f^*(E) \rightarrow X$ будет локальным гомеоморфизмом. То же рассуждение показывает, что включение категорий (локальные гомеоморфизмы над X) в esp/X сохраняет расслоенные произведения, а потому и любые конечные пределы, откуда легко выводится левая точность f^* . Сопряженность $f^* \dashv f_*$ устанавливается с помощью рассуждений, подобных рассуждениям из доказательства теоремы 0.24. $\square$

0.3. Топологии Гротендика

Понятие топологии Гротендика возникло из желания алгебраических геометров изучать объекты, имеющие свойства пучка, однако определенные на более общей категории, чем решетка открытых множеств топологического пространства. Из § 0.1 мы знаем, что определение предпучка без труда обобщается на любую малую категорию $\mathcal{C}$, но для того чтобы перейти к пучкам, необходимо понятие покрывающего семейства в $\mathcal{C}$, которое затем используется вместо обычного покрытия, как в 0.23.

0.31 Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория с расслоенными произведениями. Предтопология Гротендика на $\mathcal{C}$ определяется заданием для каждого объекта U из $\mathcal{C}$ множества $P(U)$ семейств морфизмов вида $\{U_i \xrightarrow{\alpha_i} U \mid i \in I\}$, называемых покрывающими семействами данной предтопологии, причем должны выполняться следующие условия:

- (i) Для любого объекта U семейство с единственным элементом $U \xrightarrow{1} U$ принадлежит $P(U)$.
- (ii) Если $V \rightarrow U$ — морфизм из $\mathcal{C}$, а $\{U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$ — семейство из $P(U)$, то $\{V \times_U U_i \xrightarrow{\pi_i} V \mid i \in I\}$ — семейство из $P(V)$.
- (iii) Если $\{U_i \xrightarrow{\alpha_i} U \mid i \in I\} \in P(U)$ и $\{V_{ij} \xrightarrow{\beta_{ij}} U_i \mid j \in J_i\} \in P(U_i)$ для каждого i , то $\{V_{ij} \xrightarrow{\alpha_i \beta_{ij}} U \mid i \in I, j \in J_i\} \in P(U)$. $\square$

Определим теперь пучок в предтопологии P как предпучок F такой, что для каждого покрывающего семейства $\{U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$ диаграмма

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} F(U_i \times_U U_j)$$

является уравнителем. Более того, если F — пучок, то вместе с каждым покрывающим семейством $R = \{U_i \rightarrow U\}$ указанному условию удовлетворяет любое семейство S морфизмов в объект U , содержащее R . Обратное верно для любого R , если каждый морфизм из S пропускается через некоторый морфизм $U_i \rightarrow U$ из R . Поэтому в определении предтопологии Гротендика ощущается один явный недостаток, состоящий в том, что две разные предтопологии могут иметь одни и те же пучки. Чтобы его устранить, ограничимся семействами R , насыщенными в следующем смысле: если $(V \xrightarrow{\alpha} U) \in R$, то $(W \xrightarrow{\alpha\beta} U) \in R$ для любого морфизма $W \xrightarrow{\beta} V$. Такое семейство называют решетом на объекте U . Теперь, используя понятие решета, мы можем улучшить определение 0.31.

0.32 Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория. Топология Гротендика на $\mathcal{C}$ определяется заданием для каждого объекта U из $\mathcal{C}$ множества $J(U)$ решет на U , называемых покрывающими решетками данной топологии, при этом

(i) для любого объекта U максимальное решето $\{\alpha \mid \text{конеч } (\alpha) = U\}$ принадлежит $J(U)$;

(ii) если $R \in J(U)$ и $V \xrightarrow{f} U$ — произвольный морфизм из $\mathcal{C}$, то решето

$$f^*(R) = \{W \xrightarrow{\alpha} V \mid f\alpha \in R\}$$

принадлежит $J(V)$;

(iii) если $R \in J(U)$, а решето S на U таково, что для каждого $V \xrightarrow{f} U$ из R верно, что $f^*(S) \in J(V)$, то $S \in J(U)$.

Малая категория, снабженная топологией Гротендика, называется сайтом. $\square$

Заметим, что из свойств 0.32 (i) и (iii) следует, что если $R \in J(U)$ и S — решето на U , содержащее R , то $S \in J(U)$. Очевидно, всякую предтопологию P на $\mathcal{C}$ можно заменить топологией, имеющей те же самые пучки; решето считается J -покрытием этой топологии в том и только в том случае, когда оно содержит P -покрывающее семейство.

Переход от определения 0.31 к определению 0.32 имеет еще одно преимущество, кроме устранения упомянутой выше неопределенности. Читатель, вероятно, заметил, что попутно мы освободились от предположения о том, что в $\mathcal{C}$ имеются расслоенные произведения. Это стало возможным благодаря тому, что решето

всегда поднимается вдоль морфизма из $\mathcal{C}$ (согласно 0.32 (ii)), даже если это невозможно для каждого индивидуального морфизма. Причина этого кроется в том, что каждое решето R на U можно отождествить с подпредпучком представимого функтора h_U , а именно, с предпучком $V \mapsto \{\alpha \in R \mid \text{начало}(\alpha) = V\}$, но в категории предпучков $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, конечно, имеются расслоенные произведения. Это отождествление решет с подпредпучками из h_U мы используем для определения пучков в топологии.

0.33 Определение. Пусть $(\mathcal{C}, J)$ — сайт, а F — предпучок на $\mathcal{C}$. Предпучок F называют *пучком* (в топологии J), если для любого объекта U из $\mathcal{C}$ и любого $R \in J(U)$ каждый морфизм $R \rightarrow F$ из $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ имеет ровно одно продолжение до морфизма $h_U \rightarrow F$; F называют *отделимым предпучком*, если предыдущее условие выполнено с заменой «в точности одно» на «не более чем одно».

Через $\text{Shv}(\mathcal{C}, J)$ (или просто через $\text{Shv}(\mathcal{C})$, если топология J очевидна из контекста) мы обозначаем полную подкатегорию в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, объектами которой являются все J -пучки. $\square$

Нетрудно убедиться, что 0.33 эквивалентно нашему предварительному определению пучка в предтопологии. Действительно, в силу 0.11 морфизмам $h_U \rightarrow F$ отвечают элементы множества $F(U)$, а задание морфизма $R \xrightarrow{f} F$, как легко проверить, равноценно заданию «совместимого» семейства элементов $f(\alpha) \in F(V)$ для каждого $V \xrightarrow{\alpha} U$ из R .

В общем случае на отдельно взятой категории можно ввести много различных топологий Гротендика. Две из них заслуживают особого упоминания: *максимальная топология*, всякое решето для которой является покрывающим, и *минимальная топология*, единственными покрывающими решетками которой являются решета из 0.32(i). Все предпучки в последней топологии являются пучками; в первой же топологии единственными пучками являются конечные объекты из $\mathcal{P}^{\text{cop}}$. Топологии на $\mathcal{C}$ частично упорядочены по включению и верна

0.34 Лемма. Пусть $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — множество топологий Гротендика на $\mathcal{C}$. Тогда

(i) $\bigcap_{\alpha \in A} J_\alpha$ — топология, являющаяся наибольшей нижней гранью всех J_α ;

(ii) существует топология $\sum_{\alpha \in A} J_\alpha$, являющаяся наименьшей верхней гранью всех J_α .

Доказательство. (i) следует непосредственно из определения.

(ii) Надо применить (i) к множеству $\{K \mid K \text{ — верхняя грань для всех } J_\alpha\}$. $\square$

0.35 Лемма. Для любого предпучка F существует (единственная) наибольшая топология J_F , для которой F — пучок.

Доказательство. Топологию J_F определим так, что $R \in J_F(U) \Leftrightarrow$ для каждой стрелки $V \xrightarrow{f} U$ всякий морфизм вида $f^*(R) \rightarrow F$ имеет единственное продолжение до морфизма $h_V \rightarrow F$. Легко проверяется, что это действительно топология и F является пучком в ней. Кроме того, если F — пучок в топологии J , то каждое J -покрывающее решето удовлетворяет предыдущему условию. $\square$

Комбинируя утверждения 0.35 и 0.34(i), получаем, что для каждого класса предпучков существует единственная наибольшая топология, в которой они являются пучками. В частности, определим *каноническую топологию* на $\mathcal{C}$ как наибольшую топологию, в которой все представимые предпучки являются пучками, и назовем топологию J *субканонической*, если она меньше канонической, т. е. если все представимые предпучки являются J -пучками. Следует отметить, что естественная топология Гротендика, вводимая на решетке $\mathbf{T}$ открытых множеств множества X из § 0.2, будет на самом деле канонической.

Один из аспектов теории пучков на топологических пространствах, не имеющий обобщения для пучков на сайтах, заключается в их ином представлении (0.24) локальными гомеоморфизмами. Тем не менее эквивалент следствия 0.25 остается верным, т. е. функтор включения имеет левый сопряженный функтор, *функтор ассоциирования пучка* $L: \mathcal{P}^{\text{cop}} \rightarrow \text{Shv}(\mathcal{C}, J)$. Подробности конструкции функтора L в этом случае мы откладываем до главы 3 (где фактически будет рассмотрена еще более общая ситуация); здесь мы только отмечаем его существование, а также важный фактор его точности слева (3.39).

0.4. Теорема Жиро

0.41 Определение. Категория $\mathcal{E}$ называется *топосом Гротендика*, если существует такой сайт $(\mathcal{C}, J)$, что $\mathcal{E}$ эквивалентна $\text{Shv}(\mathcal{C}, J)$. $\square$

Заметим, что топосы Гротендика включают любую категорию вида $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ (возьмите в качестве J минимальную топологию); в частности, они включают $\mathcal{P}$ (возьмите в качестве $\mathcal{C}$ тривиальную категорию 1). Эту главу мы закончим наброском доказательства замечательной теоремы Жиро ([GV], IV 1.2), которая показывает, что топосы Гротендика полностью характеризуются некоторой комбинацией «свойств точности», связанных с существованием и свойствами пределов, и «условий ограниченности». Позже (в § 4.4) мы сможем дать более подробное доказательство этой теоремы; однако его значение таково, что уже сейчас важно показать, как оно работает.

Для формулировки данной теоремы нам понадобятся еще некоторые определения.

0.42 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — категория с расслоенными произведениями.

(i) Пусть X — копроизведение семейства объектов $(X_\alpha | \alpha \in A)$ из $\mathcal{E}$. Оно называется *дизъюнктным*, если

(а) каждое каноническое включение $v_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ является мономорфизмом;

(б) для каждой пары (α, β) разных индексов расслоенное произведение $X_\alpha \times_X X_\beta$ является начальным объектом в $\mathcal{E}$.

(ii) Пусть $(X_\alpha \rightarrow X | \alpha \in A)$ — конус под диаграммой в $\mathcal{E}$ с вершинами X_α . Объект X называют *универсальным копределом*, если для каждого морфизма $Y \rightarrow X$ конус $(Y \times_X X_\alpha \rightarrow Y | \alpha \in A)$ является копределом «поднятой» диаграммы с вершинами $Y \times_X X_\alpha$. $\square$

0.43 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — категория с конечными пределами, а $R \xrightarrow[a]{a} X$ — параллельная пара морфизмов из $\mathcal{E}$. Такая пара (a, b) называется *отношением эквивалентности на X* , если

(i) $R \xrightarrow{(a,b)} X \times X$ — мономорфизм;

(ii) подобъект — диагональ $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ пропускается через стрелку (a, b) [т. е. пара (a, b) рефлексивна, ср. 0.13];

(iii) существует морфизм $\tau: R \rightarrow R$ с $b\tau = a$ и $a\tau = b$ [т. е. отношение (a, b) симметрично];

(iv) для расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{a} & R \\ \downarrow p & & \downarrow a \\ R & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

стрелка $T \xrightarrow{(ap, bq)} X \times X$ пропускается через (a, b) [т. е. (a, b) транзитивно]. $\square$

Отметим, что для любого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ ядерная пара морфизма f (т. е. расслоенное произведение f на себя) всегда будет отношением эквивалентности на X . Отношение эквивалентности, являющееся ядерной парой некоторого морфизма, называют *эффективным*.

0.44 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — категория, а $\mathcal{G}$ — некоторый класс объектов из $\mathcal{E}$. Его называют *классом образующих* категории $\mathcal{E}$ ([CW], с. 123), если для любой параллельной пары $X \xrightarrow[f]{g} Y$ с $f \neq g$ существуют объект $G \in \mathcal{G}$ и стрелка $G \xrightarrow{h} X$ такие, что $fh \neq gh$. $\square$

0.45 Теорема (Жиро). Пусть $\mathcal{E}$ — категория. Следующие утверждения равносильны:

(i) $\mathcal{E}$ — топос Гротендика;

(ii) $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) в $\mathcal{E}$ имеются конечные пределы;

(б) для каждого множества индексов в $\mathcal{E}$ существуют дизъюнктное и универсальное копроизведения;

(с) отношения эквивалентности в $\mathcal{E}$ имеют универсальные коуравнители;

(d) каждое отношение эквивалентности в $\mathcal{E}$ эффективно, и каждый эпиморфизм в $\mathcal{E}$ является коуравнителем;

(е) все «ном-множества» категории $\mathcal{E}$ малы (т. е. для любых двух объектов X и Y все морфизмы категории $\mathcal{E}$ из X в Y образуют множество);

(f) $\mathcal{E}$ имеет множество образующих.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Условия точности (а)–(d) очевидны для $\mathcal{P}$, а тогда они выполнены для $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, поскольку пределы и копределы в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ строятся «поточечно» ([CW], с. 112). В общем топосе (а) верно, так как в аксиоме пучка (0.33) появляются лишь морфизмы с областью значений F ; поэтому предел любой диаграммы пучков в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ будет снова пучком. Чтобы построить копроизведения в $\text{Shv}(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, мы строим их вначале в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, а затем применяем функтор ассоциирования пучка; их дизъюнктность и универсальность вытекает из того, что функтор ассоциирования пучка сохраняет расслоенные произведения и мономорфизмы.

Аналогично доказываются существование и универсальность коуравнителей, а также эффективность отношений эквивалентности. Далее, если $X \xrightarrow{f} Y$ — эпиморфизм в $\text{Shv}(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, то нетрудно проверить, что Y тогда будет пучком, ассоциированным с образом I морфизма f в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, но поскольку $X \twoheadrightarrow I$ является коуравнителем в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, то и f — коуравнитель в $\text{Shv}(\mathcal{C}, \mathcal{I})$.

Условие ограниченности (е) очевидно для любого топоса Гротендика. В качестве образующих из (f) можно взять пучки, ассоциированные с представимыми предпучками; в силу 0.12 представимые предпучки задают множество образующих категории $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, и нужный результат для $\text{Shv}(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ вытекает из отмеченной выше сопряженности между функторами включения и ассоциирования пучка.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mathcal{C}$ — полная малая подкатегория в $\mathcal{E}$, объекты которой порождают категорию $\mathcal{E}$. (Такая подкатегория существует в силу (е) и (f).) Рассмотрим функтор $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}^{\text{cop}}$,

сопоставляющий объекту X предпучок $U \mapsto \text{hom}(U, X)$; так как объекты из $\mathcal{C}$ порождают $\mathcal{E}$, то, очевидно, этот функтор унивалентен. Кроме того, он полон, так как каждый объект из $\mathcal{E}$ представляется в виде копредела объектов из $\mathcal{C}$. (В доказательстве последнего утверждения используется то, что эпиморфизмы категории $\mathcal{E}$ являются коуравнителями.)

Снабдим теперь категорию $\mathcal{C}$ наибольшей топологией Гротендика J , для которой все предпучки из образа функтора T являются пучками. (Заметим, что топология J субканонична, ибо образ функтора T содержит все представимые предпучки.) Остается показать, что каждый J -пучок на $\mathcal{C}$ изоморфен некоторому пучку из образа функтора T ; это докажет, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathcal{C}, J)$. Но с помощью условий точности (b)–(d) можно показать, что функтор $T: \mathcal{E} \rightarrow \text{Shv}(\mathcal{C}, J)$ сохраняет копроизведения по множествам индексов и коуравнители отношений эквивалентности, а так как представимые пучки порождают $\text{Shv}(\mathcal{C}, J)$, то каждый J -пучок можно получить из представимых с помощью этих двух конструкций (ср. 7.40 ниже). Поэтому требуемый результат установлен. $\square$

0.46 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Тогда существует «сайт определения» $(\mathcal{C}, J)$ топоса $\mathcal{E}$ (т. е. такой сайт, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathcal{C}, J)$) такой, что в $\mathcal{C}$ имеются конечные пределы, а топология J субканоническая.

Доказательство. Достаточно в предыдущем доказательстве импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) подобрать категорию $\mathcal{C}$ с конечными пределами. Действительно, пусть $\mathcal{C}_0$ — любая полная малая подкатегория в $\mathcal{E}$, объекты которой составляют множество образующих. Определим категорию $\mathcal{C}_n$ ($n \geq 1$) как полную подкатегорию, объектами которой являются все (канонические) пределы

в $\mathcal{E}$ конечных диаграмм из $\mathcal{C}_{n-1}$, и положим $\mathcal{C}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Тогда

по конструкции ясно, что в категории $\mathcal{C}_\infty$ имеются конечные пределы. Но по условию (e) в каждой из категорий $\mathcal{C}_n$ имеется лишь множество конечных диаграмм, а потому категория $\mathcal{C}_\infty$ мала. $\square$

На самом деле результат доказанного следствия можно несколько улучшить; Барр ([2], с. 116) показал, что если категория $\mathcal{C}$ замкнута относительно выделения подобъектов в $\mathcal{E}$, то указанная топология J в действительности канонична, а не только субканонична. Но поскольку в категории пучков на сайте все объекты малы ([CW], с. 126), то категорию $\mathcal{C}$ можно выбрать так, чтобы она также обладала этим свойством. Однако этот более тонкий факт нам не понадобится за исключением одного специального случая (теорема 5.37 ниже), который будет доказан явно.

Упражнения к главе 0

1. Пусть $\mathcal{E}$ — такая категория с конечными произведениями, что для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ функтор $(-)\times X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет коуравнители. Докажите, что если $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{h_1} Z_1$ и $X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{h_2} Z_2$ — два рефлексивных коуравнителя, то коуравнителем будет и их произведение

$$X_1 \times X_2 \xrightarrow[g_1 \times g_2]{f_1 \times f_2} Y_1 \times Y_2 \xrightarrow[h_1 \times h_2]{} Z_1 \times Z_2$$

2. Пусть $\mathcal{E}$ — категория, Σ — класс морфизмов из $\mathcal{E}$, а X — объект из $\mathcal{E}$. Обозначим через $(\Sigma \downarrow X)$ полную подкатегорию в $\mathcal{E}/X$, объектами которой являются морфизмы $Y \xrightarrow{\sigma} X$ из Σ . Докажите, что если Σ допускает исчисление правых частных на $\mathcal{E}$, то категория $(\Sigma \downarrow X)^{\text{op}}$ фильтрована для каждого X . [Определение фильтрованности см. ниже в 2.51 или в [CW], с. 207.]

3. (i) Почему предпучок $\bar{A}$ из 0.22(i) в общем случае не является пучком?

(ii) Опишите пучок, ассоциированный с $\bar{A}$.

4. Докажите, что пучок Ω из 0.22(iv) изоморфен пучку $\mathcal{C}_S$, где S — пространство Серпинского, т. е. двухточечное пространство с единственной замкнутой точкой.

5. Пусть $\mathbb{R}$ обозначает вещественную прямую с обычной топологией. Определим топологическое пространство $E \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ следующим способом: как множество E есть произведение $\mathbb{R} \times \{t, f, r, l, b\}$ (где t, f, r, l, b — пять абстрактных символов), а p — проекция на первый сомножитель. Топология на E такова, что базис открытых множеств в каждой точке имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(x - \delta, x + \delta) \times \{t\} \text{ для } \langle x, t \rangle \quad (\delta > 0), \\ &(x - \delta, x + \delta) \times \{f\} \text{ для } \langle x, f \rangle, \\ &(x - \delta, x) \times \{t\} \cup \langle x, r \rangle \cup (x, x + \delta) \times \{f\} \text{ для } \langle x, r \rangle, \\ &(x - \delta, x) \times \{f\} \cup \langle x, l \rangle \cup (x, x + \delta) \times \{t\} \text{ для } \langle x, l \rangle, \\ &(x - \delta, x) \times \{t\} \cup \langle x, b \rangle \cup (x, x + \delta) \times \{t\} \text{ для } \langle x, b \rangle. \end{aligned}$$

Докажите, что p — локальный гомеоморфизм и что пучок $\Gamma(E, p)$ можно естественно отождествить с подпучком пучка Ω из 0.22(iv). [Указание. Отождествите $s \in \Gamma(E, p)(U)$ с множеством $\{x \in U \mid s(x) = \langle x, t \rangle\}$.] Покажите, что открытое подмножество V из U лежит в $\Gamma(E, p)(U)$ тогда и только тогда, когда граница множества V не имеет точек накопления в U .

6. Пусть $F: \mathcal{D} \rightarrow G$ — мономорфизм в $\text{Shv}(X)$, а σ — элемент из $G(U)$ для некоторого открытого подмножества $U \subseteq X$. Докажите, что существует единственное наибольшее открытое множество $V \subseteq U$, для которого $\rho_V^U(\sigma)$ лежит в (образе) $F(V)$. Выведите отсюда инъективность пучка Ω из 0.22(iv) в $\text{Shv}(X)$, т. е. покажите, что для каждой диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{s} & G \\ \downarrow f & & \\ \Omega & & \end{array}$$

в $\text{Shv}(X)$ существует (не обязательно единственный) морфизм $G \xrightarrow{g} \Omega$ с $gs = f$.

7*. Пусть X — топологическое пространство. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(i) X локально связно.

(ii) Для каждого локального гомеоморфизма $E \xrightarrow{p} X$ пространство E локально связно.

(iii) Для каждого локального гомеоморфизма $E \xrightarrow{p} X$ пространство $P_0(E)$ компонент связности пространства E дискретно.

(iv) Для каждого открытого множества $U \subseteq X$ пространство $P_0(U)$ дискретно.

Выведите отсюда, что пространство X локально связно тогда и только тогда, когда функтор $\mathcal{P} \xrightarrow{\Delta} \text{Shv}(X)$, сопоставляющий множеству S постоянный пучок $\Delta(S)$ (т. е. пучок, ассоциированный с предпучком $\bar{S}$, или, эквивалентно, пучок сечений проекции $X \times S \xrightarrow{\pi_1} X$, где S берется с дискретной топологией), имеет левый сопряженный функтор P_0 .

8. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория, а $R: \mathcal{D} \rightarrow h\mathcal{U}$ — решето на объекте U из $\mathcal{C}$. Назовем решето R эпиморфным, если для каждой пары $U \xrightarrow[\beta]{\alpha} W$ из $\mathcal{C}$ с $\alpha \neq \beta$ существует стрелка $V \xrightarrow{\gamma} U$ из R с $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$, и назовем R универсально эпиморфным, если для каждого $V \xrightarrow{f} U$ из $\mathcal{C}$ эпиморфно решето f^*R на V . Покажите, что универсально эпиморфные решета образуют топологию на $\mathcal{C}$ и что это наибольшая топология, в которой отделимы все представимые предпучки.

9*. Пусть G — группа, а $G\text{-esp}$ — категория топологических пространств с G -действием и непрерывных G -эквивариантных отображений. Пусть X — объект из $G\text{-esp}$. Определим категорию $\text{Shv}_G(X)$ G -эквивариантных пучков на X как полную подкатегорию $G\text{-esp}/X$, состоящей из локальных геоморфизмов. Покажите,

что $\text{Shv}_G(X)$ — топос Гротендика. [Указание. Постройте его сайт определения (U_α, J_α) , где объектами категории U_α являются открытые подмножества пространства X , а морфизмы $V \rightarrow U$ в U_α соответствуют элементам $g \in G$ с $g(V) \subseteq U$.] Обозначим через X/G факторпространство пространства X по действию группы G . Покажите, что подъем локальных гомеоморфизмов вдоль отображения факторизации $X \rightarrow X/G$ задает функтор $\text{Shv}(X/G) \xrightarrow{u} \text{Shv}_G(X)$, который является эквивалентностью, если G действует эффективно*) на X (т. е. если стабилизатор каждой точки пространства X является тривиальной подгруппой в G). Покажите также, что верно и обратное последнему утверждению в предположении собственности действия группы G на X (т. е. если G -орбита любой точки пространства X является замкнутым подмножеством в X).

10* (Джонстон [57]). Пусть $\mathcal{C}$ — полная подкатегория в esp , объектами которой являются одноточечная компактификация $\mathbb{N}^+$ дискретного пространства $\mathbb{N}$ натуральных чисел и одноточечное пространство 1. Покажите, что каноническую топологию J на $\mathcal{C}$ можно описать следующим способом: 1 покрывает только максимальное решето и решето R покрывает $\mathbb{N}^+$ тогда и только тогда, когда (a) $1 \xrightarrow{x} \mathbb{N}^+ \in R$ для каждого $x \in \mathbb{N}^+$ и (b) для каждого бесконечного подмножества $T \subseteq \mathbb{N}$ существует такой мономорфизм $\mathbb{N}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{N}^+$ в R , что $\text{im}(f) \subseteq T \cup \{\infty\}$. [Указание. Убедитесь, что каждый морфизм $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ из $\mathcal{C}$ бесконечным образом разлагается в композицию эпистрелки и монострелки.] Покажите, что если X — произвольное пространство, то предпучок $\text{hom}_{\text{esp}}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}$ является пучком в этой топологии. Следовательно, определен функтор $F: \text{esp} \rightarrow \text{Shv}(\mathcal{C}, J)$. Покажите, что функтор F унивалентен и что его ограничение на подкатегорию $\mathcal{F}$ секвенциальных пространств полно. (Топологическое пространство X называется секвенциальным, если его топология определяется сходимостью последовательностей, т. е. если каждое незамкнутое подмножество $A \subseteq X$ содержит последовательность, сходящуюся к точке из $X - A$; ср. [GT], с. 71. Отметим, что секвенциальные пространства включают пространства, для которых выполнена первая аксиома счетности (а потому все метрические пространства); они также включают все CW-комплексы ([AT], § 7.6).)

Покажите, наконец, что если $\{C_1, \dots, C_n\}$ — конечное замкнутое покрытие пространства X , то каноническое отображение

$$\prod_{i=1}^n F(C_i) \rightarrow F(X) \text{ эпиморфно в } \text{Shv}(\mathcal{C}, J). \text{ [Указание. Пусть } I \rightarrow F(X) \text{ — образ морфизма } \prod F(C_i) \rightarrow F(X) \text{ в } \mathcal{C}^{\text{cop}}; \text{ за-}$$

*) Обычно такое действие называют свободным. — Примеч. пер.

метьте теперь, что для каждого элемента α из $F(X)(\mathbb{N}^+)$ можно указать такое J -покрывающее решето R на $\mathbb{N}_+^+$, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ h(\mathbb{N}^+) & \xrightarrow{\alpha} & F(X) \end{array}$$

коммутативен, а отсюда выведите, что $F(X)$ — пучок, ассоциированный с I .]

11*. (В этом упражнении кольцо означает коммутативное кольцо с 1, а ann обозначает категорию колец.)

Гомоморфизм колец $A \xrightarrow{f} B$ называется *эталным*, если (а) B — конечно представимая A -алгебра и (б) для любой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{q} & C/\Lambda \end{array}$$

где N — нильпотентный идеал в C , а q — каноническая проекция, существует единственный гомоморфизм $B \xrightarrow{h} C$ такой, что $qh = h$ и $kf = g$. (Также говорят, что B — *эталная A -алгебра*.) Докажите, что

(i) если $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ — диаграмма с этальным f , то g этален в том и только в том случае, когда этальная композиция gf ;

(ii) спуск этального гомоморфизма этален;

(iii) если S — конечно порожденный мультипликативный подмоноид в A , то каноническое отображение $A \rightarrow A[S^{-1}]$ этально ($A[S^{-1}]$ обозначает обычное кольцо частных);

(iv) если K — поле, а p — непостоянный многочлен от одной переменной t над K , то включение $K \rightarrow K[t]/(p)$ этально тогда и только тогда, когда многочлен p *сепарабелен* (т. е. имеет различные корни в некотором расширении поля K). [Указание: рассмотрите диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad} & K[t]/(p), \\ \downarrow & & \downarrow \\ L[\varepsilon]/(\varepsilon^2) & \xrightarrow{\quad} & L \end{array}$$

где L — некоторое расширение поля K . В общем случае K -алгебра $A = K[t_1, \dots, t_n]/I$ этальна над K тогда и только тогда,

когда идеал I порождается n многочленами $p_1, \dots, p_n$, для которых якобиан $\det(\partial p_i / \partial t_j)$ обратим в A .]

Фиксируем теперь кольцо A и обозначим через $\mathcal{C}$ категорию *двойственную* категории этальных A -алгебр. Отметим, что категорию $\mathcal{C}$ можно считать малой, выбрав по одному представителю для каждого конечного представления этальной A -алгебры. Используя (i) и (ii), докажите, что в $\mathcal{C}$ имеются конечные пределы. Проверьте также, что если определить *покрывающие* семейства как семейства гомоморфизмов $(C \rightarrow D_i | i \in I)$, для которых всякий простой идеал в C является обратным образом простого идеала некоторой алгебры D_i , то они зададут предтопологию на $\mathcal{C}$. Покажите, что соответствующая топология Гротендика на $\mathcal{C}$ субканонична. [Указание. Если $(C \rightarrow D_i | i \in I)$ — покрытие, то ядро гомоморфизма $C \rightarrow \prod D_i$ является нильпотентным идеалом в C . В действительности верно более общее утверждение: предпучок $\text{hom}_{(A/\text{ann})}(B, -)$ будет пучком на $\mathcal{C}$ для любой

A -алгебры B (не обязательно этальной) [43]. Топос $\text{Shv}(\mathcal{C})$ называют *эталным топосом* кольца A и обозначают через A_{et} .

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТОПОСЫ

1.1. Определение и примеры

В § 0.4 было показано, как определение топоса Гротендика можно свести к набору аксиом, в которых речь идет непосредственно о свойствах точности самого топоса, но не о каком-либо сайте его определения. Это важный шаг вперед, так как ясно, что один и тот же топос можно определить (по крайней мере с точностью до эквивалентности) с помощью многих различных сайтов. Однако определение топоса Гротендика все еще явно зависит от модели теории множеств, которая предполагается заданной. Если мы изменим нашу модель теории множеств, то тем самым изменим и наше понятие топоса Гротендика.

Определение *элементарного топоса* было введено Ловером и Тьерне [LN], [TV]. Они считали, что можно будет охарактеризовать класс категорий, которые «внутренне» ведут себя, как должны вести себя, по нашим представлениям, топосы Гротендика, и в то же время определяются «элементарными» аксиомами, независимыми от теории множеств.

1.11 Определение. Категория $\mathcal{E}$ называется (элементарным) *топосом*, если:

(i) $\mathcal{E}$ имеет все конечные пределы (т. е. в $\mathcal{E}$ имеются расслоенные произведения и конечный объект).

(ii) $\mathcal{E}$ *декартово замкнута*, т. е. для каждого объекта X имеется экспоненциальный функтор $(-)^X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, который сопряжен справа к функтору $(-)\times X$.

(iii) В $\mathcal{E}$ имеются классификатор подобъектов, т. е. объект Ω и морфизм $1 \xrightarrow{t} \Omega$ (называемый «истина») такие, что для каждого мономорфизма $Y \xrightarrow{\sigma} X$ в $\mathcal{E}$ имеется единственный морфизм $\phi_\sigma: X \rightarrow \Omega$ (называемый *классифицирующим отображением морфизма σ*), образующие декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow \sigma & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{\phi_\sigma} & \Omega \end{array} \quad \square$$

Неформально в 1.11(iii) утверждается, что $\mathcal{E}$ содержит *общий подобъект*, т. е. мономорфизм $S \xrightarrow{t} \Omega$ такой, что любой мо-

номорфизм в $\mathcal{E}$ может быть представлен единственным способом как подъем t . Нетрудно доказать, что область определения общего подобъекта представляет собой объект в $\mathcal{E}$, и притом конечный; наоборот, любой морфизм с областью определения 1 является мономорфизмом, что эквивалентно определению 1.11. Хотя важность декартова замкнутого категорий, т. е. категорий, удовлетворяющих условиям 1.11(i) и 1.11(ii), была понята за некоторое время до совместной работы Ловера и Тьерне (см. [71], [160]), введение ими понятия классификатора подобъекта явилось весьма важным шагом вперед, сделавшим возможным элементарное развитие теории топосов.

1.12 Предложение. *Любой топос Гротендика является топосом в смысле определения 1.11.*

Доказательство. (i) Существование конечных пределов было установлено в доказательстве теоремы 0.45.

(ii) Для $\mathcal{S}$ определим Y^X как множество функций вида $X \rightarrow Y$; при этом сопряженность видна непосредственно.

В $\mathcal{S}^{\text{cop}}$ функтор Y^X определяется согласно 0.11; следовательно,

$$Y^X(U) \cong \text{hom}(h_U, Y^X) \cong \text{hom}(h_U \times X, Y)$$

для каждого объекта U в $\mathcal{S}$. Если принять правую часть в качестве определения, то требуется доказать, что сопряженность

$$\text{hom}(Z, Y^X) \cong \text{hom}(Z \times X, Y)$$

верна не только для представимых, но и для всех предпучков Z . Но ввиду 0.12 Z можно выразить как копредел $\varinjlim (h_\alpha)$ представимых функторов h_α и провести следующее доказательство:

$$\begin{aligned} \text{hom}(Z, Y^X) &\cong \text{hom}\left(\varinjlim (h_\alpha), Y^X\right) \\ &\cong \varprojlim (\text{hom}(h_\alpha, Y^X)) \\ &\cong \varprojlim (\text{hom}(h_\alpha \times X, Y)) \quad (\text{по определению } Y^X) \\ &\cong \text{hom}\left(\varinjlim (h_\alpha \times X), Y\right) \\ &\cong \text{hom}\left(\left(\varinjlim (h_\alpha)\right) \times X, Y\right) \quad (\text{так как функтор } (-)\times X \\ &\quad \text{сохраняет копределы в } \mathcal{S} \text{ и, следовательно, в } \mathcal{S}^{\text{cop}}) \\ &\cong \text{hom}(Z \times X, Y). \end{aligned}$$

Наконец, можно показать, что если Y — пучок для топологии J на C , то таковым является и предпучок Y^x для любого X (ср. предложение 3.24 ниже); следовательно, экспоненциальные функторы существуют в $\text{Shv}(C, J)$.

(iii) В категории $\mathcal{P}$ классификатором подобъектов Ω является двухэлементное множество (t, f) , а классифицирующим отображением ϕ_σ — характеристическая функция подмножества Y , т. е.

$$\phi_\sigma(x) = \begin{cases} t & (x \in Y), \\ f & (x \notin Y). \end{cases}$$

В $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ объект Ω опять-таки определен с помощью леммы 0.11:

$$\Omega(U) \cong \text{hom}(h_U, \Omega) \cong \{\text{подпредпучки для } h_U\} \cong \{U\text{-решета}\}.$$

Опять с помощью леммы 0.12 можно непосредственно показать, что это определение удовлетворяет необходимым условиям на классификатор подобъектов любого предпучка X .

Аналогично для $\text{Shv}(C, J)$ находим, что $\Omega(U)$ является множеством таких подобъектов ассоциированного пучка $L(h_U)$, которые сами являются пучками. (Можно легко проверить, что таким образом как раз определяется пучок.) В частности, для категории $\text{Shv}(X)$ над топологическим пространством X объект Ω является пучком, который определен в 0.22(iv). □

Предложение 1.12 позволяет получить много примеров топосов, с помощью которых мы можем иллюстрировать основные моменты в развитии нашей темы. Однако не всякий топос в смысле определения 1.11 является топосом Гротендика; здесь мы дадим несколько примеров, которые будут важны позже.

1.13 Пример. Категория $\mathcal{P}$, конечных множеств и функций удовлетворяет определению 1.11 так же, как $\mathcal{P}$, но она не является топосом Гротендика, так как не имеет бесконечных копределов, требуемых по теореме 0.45. Аналогично, если C — конечная категория, то категория $\mathcal{P}_f^{\text{cop}}$ предпучков конечных множеств на C является топосом. □

1.14 Пример. Пусть G — группа; рассмотрим ее обычным образом как малую категорию G с одним объектом, морфизмы которой (элементы этой группы) все обратимы. Тогда предпучок над G является (левым) G -множеством, т. е. множеством, на котором G действует перестановками. Применяя предписания доказательства 1.12, находим, что в топосе $\mathcal{P}^{G^{\text{op}}}$ имеются Ω — двухэлементное множество с тривиальным G -действием и Y^x — множество всех (не обязательно G -эквивариантных) отображений $X \rightarrow Y$, на которое G действует посредством сопряжений. Отсюда легко следует, что категория $(\mathcal{P}_f)^{G^{\text{op}}}$ конечных G -множеств является топосом, даже если сама G бесконечна. □

Дальнейшие примеры могут быть построены с использованием следующего утверждения:

1.15 Лемма. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — топосы. Тогда декартово произведение $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ — топос.

Доказательство. Легко проверить, что конечные пределы в $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ могут быть вычислены отдельно по каждому множителю, что $(Y_1, Y_2)^{(Y_1^{X_1}, Y_2^{X_2})} = (Y_1^{X_1}, Y_2^{X_2})$ и что (Ω_1, Ω_2) является классификатором подобъектов для $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$. □

Теперь следует ввести подходящее понятие морфизма топосов. Может показаться, что морфизмом топосов мог бы быть просто функтор, сохраняющий конечные пределы, экспоненциалы и классификатор подобъектов. На самом деле так определяется понятие логического функтора; примеры логических функторов играют важную роль в теории топосов. Например, функтор включения $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}$, как и проекции $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{E}_i$, являются логическими функторами. Но имеется другое понятие — а именно, понятие геометрического морфизма, во многих отношениях гораздо более важное.

1.16 Определение. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — топосы. Геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ состоит из пары функторов $f_*: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, $f^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, называемых прямым и обратным образами морфизма f , таких, что $f^* \dashv f_*$ и функтор f^* точен слева. Если $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — два геометрических морфизма, то естественное преобразование $\eta: f \rightarrow g$ имеет смысл естественного преобразования функторов $f^* \xrightarrow{\eta} g^*$, которое, конечно, индуцирует путем сопряжения единственное преобразование $g_* \xrightarrow{\eta} f_*$. Топосы, геометрические морфизмы и их естественные преобразования, очевидно, образуют 2-категорию, которую будем обозначать $\mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{P}$.

Говорят, что геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ является существенным, если функтор f^* имеет сопряженный слева $f_!$ и сопряженный справа f_* . □

1.17 Примеры. (i) Пусть X, Y^* — топологические пространства. Тогда, как мы уже видели в 0.26, каждое непрерывное отображение $X \rightarrow Y$ определяет геометрический морфизм $\text{Shv}(X) \rightarrow \text{Shv}(Y)$; таким образом, операцию образования категорий пучков можно рассматривать как функтор $\text{esp} \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{O}\mathcal{P}$.

(ii) Пусть (C, J) — сайт. Тогда из замечаний, приведенных в конце § 0.3, следует, что функтор включения $\text{Shv}(C, J) \rightarrow \mathcal{P}^{\text{cop}}$ представляет собой прямой образ геометрического морфизма, а его обратный образ — функтор ассоциирования пучка.

(iii) Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — топосы. Тогда проекция $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}_1$ является обратным образом геометрического морфизма, а его

прямой образ — функтор $X \mapsto (X, 1)$. Если $\mathcal{E}$ имеет начальный объект 0 (что на самом деле всегда верно, как мы увидим в § 1.3), то этот морфизм является существенным, причем сопряженный слева к π_1 задается сопоставлением $X \mapsto (X, 0)$. $\square$

Дальнейшие примеры геометрических морфизмов будут часто встречаться в последующих параграфах.

1.18 Предостережение. В некоторых работах (особенно в [GV]) при определении стрелок категории $\mathcal{E}$ принимаются соглашения, «двойственные» соглашениям определения 1.16; в них за естественное преобразование $f \rightarrow g$ принимается естественное преобразование $f_* \rightarrow g_*$ или $g^* \rightarrow f^*$. Мотивы принятия соглашений определения 1.16 станут очевидными в § 4.3.

1.2. Отношения эквивалентности и частичные отображения

1.21 Лемма. В топосе любой мономорфизм является уравнителем.

Доказательство. Морфизм $1 \xrightarrow{t} \Omega$ является расщепимым мономорфизмом и, следовательно, уравнителем для 1_0 и $\Omega \rightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega$. Но каждый мономорфизм является подъемом морфизма t . $\square$

1.22 Следствие. Топос уравновешен (т. е. морфизм, являющийся мономорфизмом и эпиморфизмом, является изоморфизмом). $\square$

1.23 Предложение. В топосе отношения эквивалентности эффективны (ср. 0.43).

Доказательство. Пусть $R \xrightarrow{a} X$ — отношение эквивалентности, $X \times X \xrightarrow{\phi} \Omega$ — классифицирующее отображение для $R \xrightarrow{(a,b)} X \times X$, а $X \xrightarrow{\bar{\phi}} \Omega^X$ — его экспоненциальная транспозиция. [Заметим, что в $\mathcal{P}$ объект Ω^X является множеством подмножеств X , а $\bar{\phi}$ — отображением, которое переводит элемент из X в его класс эквивалентности по модулю R .] Покажем, что $R \rightrightarrows X$ является ядерной парой отображения $\bar{\phi}$.

Пусть $U \xrightarrow[f]{g} X$ — пара морфизмов, коуравненных посредством $\bar{\phi}$. Применяя затем экспоненциальное сопряжение, получим $\phi(f \times 1_X) = \phi(g \times 1_X): U \times X \rightarrow \Omega$, а устраивая композицию с $U \xrightarrow{(1_U, g)} U \times X$, получим $\phi(f, g) = \phi(g, g)$. Но так как отношение R рефлексивно, $U \xrightarrow{(g,g)} X \times X$ пропускается через R , и, следовательно, $\phi(g, g)$ классифицирует максимальный подобъект $U \xrightarrow{1} U$. Значит, $\phi(f, g)$ также классифицирует этот подобъект; поэтому (f, g) пропускается через R .

В обратную сторону следует показать, что $\bar{\phi}a = \bar{\phi}b$, или, что то же самое, что подобъекты из $R \times X$, классифицируемые посредством $\phi(a \times 1_X)$ и $\phi(b \times 1_X)$, изоморфны. Но если осуществить композицию этих подобъектов с мономорфизмом $R \times X \xrightarrow{(a,b) \times 1} X \times X \times X$, то в силу симметричности и транзитивности отношения R в каждом случае получим «объект R -эквивалентных троек», т. е. пересечение подобъектов из $X \times X \times X$, полученное подъемом морфизма $R \rightarrow X \times X$ вдоль (π_1, π_2) и (π_2, π_3) . $\square$

1.24 Определение. В частности, определим *синглетонное отображение* $\{ \}: X \rightarrow \Omega^X$ как экспоненциальную транспозицию классифицирующего отображения $\delta: X \times X \rightarrow \Omega$ для диагонального отображения $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$. Из предложения 1.23 следует, что $\{ \}$ — мономорфизм, так как $(1_X, 1_X)$ является его ядерной парой. $\square$

1.25 Определение. Частичное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ в категории $\mathcal{E}$ — эта диаграмма следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow d & & \\ X & & \end{array}$$

Будем говорить, что частичные отображения с областью значения Y *представимы*, если существует такой мономорфизм $Y \xrightarrow{\eta} \tilde{Y}$, что для любого $X \xrightarrow{f} Y$ существует единственный $X \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y}$, позволяющий образовать декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow d & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \end{array}$$

(Заметим, что частичный случай $Y = 1$ сводится к определению Ω). $\square$

1.26 Теорема (Ловер — Тьерне). Все частичные отображения в топосе представимы.

Доказательство. Пусть $\phi: \Omega^X \times Y \rightarrow \Omega$ классифицирует график синглетонного отображения, т. е. мономорфизм $Y \xrightarrow{(0, 1_Y)} \Omega^X \times Y$, и пусть $\bar{\phi}: \Omega^X \rightarrow \Omega^Y$ — его экспоненциальная транспозиция. Определим $\tilde{Y} \rightarrow \Omega^Y$ как уравнитель $\bar{\phi}$ и $1_{(\Omega^Y)}$. [Можно представлять, что $\tilde{Y}$ является «совокупностью подмножеств Y , имеющих самое большее один элемент».]

Теперь поскольку $\{ \}$ — мономорфизм, легко убедиться, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{1} & Y \\ \downarrow \Delta & & \downarrow ((1, 1_Y)) \\ Y \times Y & \xrightarrow{(\{ \} \times 1_Y)} & \Omega^Y \times Y' \end{array}$$

представляет собой декартов квадрат, но это означает, что $\phi(\{ \} \times 1_Y)$ классифицирует диагональный подобъект $Y \times Y$, и, следовательно, $\bar{\phi} \cdot \{ \} = \{ \}$. Таким образом, $\{ \}$ пропускается через $\tilde{Y} \rightarrow \Omega^Y$, давая нам мономорфизм $Y \xrightarrow{\eta} Y$.

Теперь пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — частичное отображение. Тогда график f (т. е. мономорфизм $X' \xrightarrow{(d, f)} X \times Y$) классифицируется морфизмом $\psi: X \times Y \rightarrow \Omega$. Мы желаем показать, что $\psi: X \rightarrow \Omega^Y$ пропускается через $\tilde{Y}$, но это равносильно проверке того, что

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow (d, f) & & \downarrow ((1, 1_Y)) \\ X \times Y & \xrightarrow{\bar{\psi} \times 1} & \Omega^Y \times Y \end{array}$$

— декартов квадрат или, что то же самое, что декартовым квадратом является диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow d & & \downarrow \{ \} \\ X & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \Omega^Y \end{array}$$

В самом деле, предположим, что заданы морфизмы $U \xrightarrow{a} X$, $U \xrightarrow{b} Y$ с $\bar{\psi}a = \{ \}b$; тогда получим $\psi(a, b) = \delta(b, b) = (U \rightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega)$, так как (b, b) пропускается через $Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y$. Следовательно, (a, b) пропускается через $X \xrightarrow{(d, f)} X \times Y$ единственным образом. Поэтому квадрат $(f, d, \{ \}, \bar{\psi})$ декартов, и мы имеем факторизацию $f: X \rightarrow \tilde{Y}$ морфизма $\bar{\psi}$ через $\tilde{Y} \rightarrow \Omega^Y$.

Из предыдущего также следует, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow d & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & \tilde{Y} \end{array}$$

декартов; остается только показать единственность $\bar{f}$. Предположим, что $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ удовлетворяют этим условиям; тогда, двигаясь в обратном направлении по вышеприведенному доказательству, можно показать, что обе экспоненциальные транспозиции композиций $X \xrightarrow{f_i} \tilde{Y} \rightarrow \Omega^Y$ классифицируют один и тот же под-объект произведения $X \times Y$, а именно, график f . Следовательно, они равны, а так как $\tilde{Y} \rightarrow \Omega^Y$ является мономорфизмом, то $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.

Заметим, что из утверждения единственности в определении 1.25 следует, что $Y \mapsto \tilde{Y}$ является на самом деле функтором $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ и η — естественное преобразование.

1.27 Следствие. Объекты $\tilde{Y}$, построенные в теореме 1.26, инъективны; следовательно, тоpos, в частности, имеет достаточно много инъективных объектов, т. е. для любого X имеется мономорфизм $Y \rightarrow E$ с инъективным E .

Доказательство. Предположим, что дана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & \searrow & \\ \tilde{Y} & & \end{array}$$

Образую декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{\quad} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\eta} & \tilde{Y} \end{array}$$

тогда у нас имеется такой единственный $X \rightarrow \tilde{Y}$, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{\quad} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\eta} & \tilde{Y} \end{array}$$

тоже декартов. А треугольник

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & \searrow & \\ \tilde{Y} & & \end{array}$$

коммутативен, так как оба пути представляют одно и то же частичное отображение $X' \rightarrow Y$. $\square$

1.28 Следствие. Допустим, что нам дана амальгама

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{\quad} & T \end{array}$$

в топосе, причем f — мономорфизм. Тогда g — также мономорфизм, а квадрат, кроме того, является декартовым.

Доказательство. Пусть $Z \xrightarrow{h} \tilde{Y}$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow f & & \\ Z & & \end{array}$$

Тогда конус $(Y \xrightarrow{\eta} \tilde{Y}, Z \xrightarrow{h} \tilde{Y})$ пропускается через амальгаму T , и, в частности, мономорфизм η пропускается через g . Следовательно, g — мономорфизм, а значит, квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow \eta \\ Z & \xrightarrow{h} & \tilde{Y} \end{array}$$

является декартовым, как и исходный.

1.3. Категория $\mathcal{E}^{\text{op}}$

Исходное определение элементарного топоса, как оно было дано Ловером и Тьерне, включало условие, что $\mathcal{E}$ должна обладать конечными копределами и конечными пределами. Миккелсен [84] первым показал, что эта аксиома на самом деле может быть выведена из аксиом определения 1.11; доказательство, которое кратко излагается в данном параграфе, предложено Паре [96].

Пусть $P: \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ обозначает «контравариантный функтор множества-степени», т. е. $PX = \Omega^X$, и если $f: X \rightarrow Y$, то $Pf: \Omega^Y \rightarrow \Omega^X$ является транспозицией композиции

$$\Omega^Y \times X \xrightarrow{1 \times f} \Omega^Y \times Y \xrightarrow{\text{ev}} \Omega$$

(ev обозначает функцию значения, т. е. коединицу экспоненциального сопряжения). Будем писать P_* для тех же данных, рассматриваемых как функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{op}}$.

1.31 Лемма. Имеется сопряжение $(P_*, \dashv P)$.

Доказательство. Это утверждение означает, что у нас имеется биекция (естественная по X и Y) между морфизмами

$X \rightarrow \Omega^Y$ и морфизмами $Y \rightarrow \Omega^X$. Но и те и другие естественно соответствуют морфизмам $X \times Y \rightarrow \Omega$, так как $X \times Y \cong Y \times X$. $\square$

Теперь, если $f: X \rightarrow Y$ — мономорфизм, то можно определить морфизм $\exists f: \Omega^X \rightarrow \Omega^Y$, а именно, как транспозицию классифицирующего отображения мономорфизма

$$\epsilon_X: \Omega^X \times X \xrightarrow{1 \times f} \Omega^X \times Y$$

(ϵ_X — подобъект, классифицируемый морфизмом $\Omega^X \times X \xrightarrow{\text{ev}} \Omega$).

1.32 Лемма («условие Бека»). Пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{k} & T \end{array}$$

будет декартовым с мономорфизмами g, h . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^Y & \xrightarrow{Pf} & \Omega^X \\ \downarrow \exists h & & \downarrow \exists g \\ \Omega^T & \xrightarrow{Pk} & \Omega^Z \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Легко проверить, что оба внешних пути, будучи транспонированы, представляют собой классифицирующие отображения одного и того же подобъекта $\Omega^Y \times Z$, а именно, $E: \Omega^Y \times X \xrightarrow{1 \times g} \Omega^Y \times Z$, где

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & \epsilon_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^Y \times X & \xrightarrow{1 \times f} & \Omega^Y \times Y \end{array}$$

является декартовым квадратом.

1.33 Следствие. Если $X \xrightarrow{f} Y$ — мономорфизм, то $Pf. \exists f = 1_{(\Omega^X)}$.

Доказательство. Применим лемму 1.32 к декартову квадрату

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ \downarrow 1 & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \square$$

1.34 Теорема (Паре). Функтор P является монадическим, т. е. $\mathcal{E}^{op}$ эквивалентна категории алгебр для монады над $\mathcal{E}$, индуцированной сопряжением леммы 1.31.

Доказательство. В силу теоремы 0.13 достаточно показать, что $\mathcal{E}^{op}$ имеет коуравнители рефлексивных пар, что P их сохраняет и что P отражает изоморфизмы. Но первое из этих условий тривиально, так как коуравнители в $\mathcal{E}^{op}$ как раз являются уравнителями в $\mathcal{E}$.

Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — диаграмма корефлексивного уравнителя в $\mathcal{E}$, т. е. рефлексивного коуравнителя в $\mathcal{E}^{op}$. Так как имеется морфизм $Z \xrightarrow{d} Y$ такой, что $dg = dh = 1_Y$, то g и h — мономорфизмы, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

является декартовым квадратом. Применяя к нему лемму 1.32, имеем $\exists f.Pf = Ph.\exists g$, а поскольку f и g — мономорфизмы, имеем $Pf.\exists f = 1_{(QX)}.$ $Pg.\exists g = 1_{(QY)}$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^Z & \xrightarrow{Pg} & \Omega^Y \xrightarrow{Pf} \Omega^X \\ \downarrow \exists g & & \downarrow \exists f \end{array}$$

образует расщепимый коуравнитель в $\mathcal{E}$, в частности, является коуравнителем Pg и Pf .

Пусть теперь $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в $\mathcal{E}$. Тогда композиция $Y \xrightarrow{0} \Omega^Y \xrightarrow{Pf} \Omega^X$, как легко видеть, является транспозицией классифицирующего отображения графика f . Следовательно, если $X \xrightarrow{f} Y$ — такая параллельная пара, что $Pf = Pg$, то графики f и g изоморфны как подобъекты $X \times Y$, откуда легко следует, что $f = g$. Таким образом, P унивалентен и, в частности, отражает мономорфизмы и эпиморфизмы, следовательно, по лемме 1.22 он отражает изоморфизмы.

Итак, условия теоремы 0.13 выполнены. $\square$

1.35 Замечание. В частном случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ теорему 1.34 можно рассматривать как следствие теоремы Линденбаума—Тарского ([BA], теорема 25.1) о том, что $\mathcal{P}^{op}$ эквивалентна категории полных атомарных булевых алгебр; она является вариетальной (varietal) категорией в смысле [177] и, следовательно, монадической над $\mathcal{P}$. Подобное «алгебраическое» описание $\mathcal{E}^{op}$ для случая произвольного топоса $\mathcal{E}$ было дано Миккелсеном [84] (см. также [23]). $\square$

1.36 Следствие. Топос имеет конечные копределы. Более того, если он имеет бесконечные пределы конкретного типа, то он имеет соответствующие копределы.

Доказательство. Хорошо известно, что стирающий функтор категории алгебр над $\mathcal{E}$ задает все типы пределов, какие существуют в $\mathcal{E}$. Но пределы в $\mathcal{E}^{op}$ как раз являются копределами в $\mathcal{E}$. $\square$

1.37 Следствие. Пусть $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — логический функтор. Тогда

- (i) T сохраняет конечные копределы;
- (ii) если имеется функтор, сопряженный к T слева, то имеется также функтор, сопряженный к T справа.

Доказательство. По определению T коммутирует с точностью до изоморфизма с сопряженными функторами леммы 1.31 и сохраняет конечные пределы. Поэтому (i) вытекает непосредственно из следствия 1.36, а (ii) получается в результате применения теоремы 0.15. $\square$

На самом деле можно показать (см. [54]), что также верно утверждение, обратное утверждению (ii) следствия 1.37; итак, если обратный образ геометрического морфизма является логическим, то этот морфизм является существенным.

1.38 Пример. В завершение параграфа покажем, как можно использовать лемму 1.31 и теорему 1.34 для явного построения коуравнителей в $\mathcal{E}$.

Предположим, что дана параллельная пара $X \xrightarrow{f} Y$; построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} PX & \xleftarrow{Pf} & PY & \xleftarrow{m} & Z \\ \uparrow P_{2X} & & \uparrow P_{2Y} & & \uparrow r \\ PPPX & \xleftarrow{PPPf} & PPPY & \xleftarrow{PPm} & PPZ \end{array}$$

где m — уравнитель Pf и Pg , α — единица сопряжения ($P_* \dashv P$), а r существует как факторизация через уравнитель. Теперь построим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{q} E \\ \downarrow g & & \downarrow s \\ & & \downarrow \alpha_Y \\ & & PPY \xrightarrow{Pm} PZ \\ \downarrow P\alpha_X & & \downarrow P\alpha_Z \\ & & PPPY \xrightarrow{PPm} PPPZ \end{array}$$

где s — уравнитель P , и α_{PZ} ; тогда q существует как факторизация через уравнитель и является коуравнителем f и g . $\square$

1.4. Функторы замены базы

Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в топосе $\mathcal{E}$. Поскольку $\mathcal{E}$ имеет канонические подъемы, операция подъема вдоль f дает нам функтор замены базы $f^*: \mathcal{E}/Y \rightarrow \mathcal{E}/X$.

1.41 Лемма. В любой категории $\mathcal{E}$ с расслоенными произведениями функтор f^* имеет сопряженный слева функтор $\Sigma_f: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/X$.

Доказательство. Определим $\Sigma_f(Z \xrightarrow{h} X) = (Z \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y)$. Сопряженность тривиальна. $\square$

1.42 Теорема (Повер — Тьерне). Пусть $\mathcal{E}$ — топос и X — объект из $\mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}/X$ — топос и функтор

$$X^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/X; Y \mapsto (Y \times X \xrightarrow{\pi_2} X)$$

(т. е. функтор замены базы вдоль $X \rightarrow 1$) является логическим.

Доказательство. (i) Произведения в $\mathcal{E}/X$ соответствуют расслоенным произведениям над X в $\mathcal{E}$, а уравниватели те же самые, что и в $\mathcal{E}$ (т. е. их задает Σ_X). Из леммы 1.41 непосредственно следует, что X^* сохраняет пределы.

(ii) Так как мономорфизмы в $\mathcal{E}/X$ те же самые, что и в $\mathcal{E}$, то очевидно, что $X^*(\Omega)$ является классификатором подобъектов для $\mathcal{E}/X$.

(iii) Чтобы образовать в $\mathcal{E}/X$ экспоненту $(Z \xrightarrow{g} X)^{(Y \xrightarrow{f} X)}$, допустим, что $\theta: X \times Y \rightarrow X$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow (f, 1_Y) & & \\ X \times Y & & \end{array}$$

Теперь построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & \tilde{Z}^Y \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{g}^Y \\ X & \xrightarrow{\theta} & \tilde{X}^Y \end{array}$$

тогда для любого $T \xrightarrow{h} X$ имеется последовательность естествен-

ных биекций:

$$\begin{array}{c} T \longrightarrow E \text{ над } X \\ T \longrightarrow \tilde{Z}^Y \text{ над } T \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\theta} \tilde{X}^Y \\ T \times Y \longrightarrow \tilde{Z} \text{ над } T \times Y \xrightarrow{h \times 1} X \times Y \xrightarrow{\theta} \tilde{X} \\ T \times Y \longrightarrow Z \text{ над } T \times_X Y \longrightarrow X^* \\ \downarrow \\ T \times Y \\ \hline T \times_X Y \longrightarrow Z \text{ над } X. \end{array}$$

Следовательно, $E \rightarrow X$ является искомым экспоненциалом, и легко проверить, что если Y, Z имеют вид $A \times X, B \times X$, то $B^A \times X$ также обладает свойствами экспоненциала и, таким образом, изоморфен E . Следовательно, X^* сохраняет экспоненциалы. $\square$

1.43 Следствие. Для любого $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{E}$ функтор замены базы $f^*: \mathcal{E}/Y \rightarrow \mathcal{E}/X$ является логическим, и к нему справа сопряжен $\Pi_f: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$.

Доказательство. Рассматривая f как объект $\mathcal{E}/Y$, можно отождествить $\mathcal{E}/X$ с категорией $(\mathcal{E}/Y)/f$. Поэтому, переходя к топосу $\mathcal{E}/Y$, мы сводим задачу к случаю $Y = 1$. Но уже известно, что в этом случае по теореме 1.42 f^* является логическим, и существование Π_f следует из леммы 1.41 и утверждения (ii) следствия 1.37. $\square$

1.44 Пример. В случае $\mathcal{E} = \mathcal{S}$ объекты из $\mathcal{S}/X$ удобно рассматривать как «семейства множеств, помеченных элементами X ». В терминах такой интерпретации функтор f^* можно описать как «переставляющий метки вдоль f », т. е.

$$f^*(S_y | y \in Y) = (S_{f(x)} | x \in X).$$

А функторы Σ_f и Π_f соответствуют тем, которые образуют произведения и произведения по слоям функтора f , т. е.

$$\Sigma_f(S_x | x \in X) = \left(\left(\prod_{f(x)=y} S_x \right) \middle| y \in Y \right)$$

и

$$\Pi_f(S_x | x \in X) = \left(\left(\prod_{f(x)=y} S_x \right) \middle| y \in Y \right). \quad \square$$

1.45 Пример. Рассмотрим морфизм $1 \xrightarrow{t} \Omega$. Легко проверить с помощью теоремы 1.26, что $\Pi_t(X) = (\tilde{X} \xrightarrow{\phi} \Omega)$, где ϕ классифицирует $X \xrightarrow{\eta} \tilde{X}$. $\square$

1.46 Следствие. Любой морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{E}$ индуцирует геометрический морфизм $\mathcal{E}/X \xrightarrow{f_*} \mathcal{E}/Y$, где $f_* = \Pi_f$ и f^* — функтор замены базы. Таким образом, у нас имеется функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Top}/\mathcal{E}$ для любого топоса $\mathcal{E}$, определенного на объектах выражением

$$X \mapsto (\mathcal{E}/X \xrightarrow{X} \mathcal{E}/1 \cong \mathcal{E}). \quad \square$$

Следует отметить две особенности геометрических морфизмов $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$, производных от морфизмов $\mathcal{E}$: они существенны и их функторы обратного образа являются логическими. На самом деле справедлива следующая обратная теорема.

1.47 Теорема. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — существенный геометрический морфизм такой, что f^* — логический морфизм и морфизм $f_!$, сопряженный слева к f^* , сохраняет уравнители. Тогда существует такой объект X топоса $\mathcal{E}$ (единственный с точностью до изоморфизма), что $\mathcal{F}$ эквивалентен $\mathcal{E}/X$ и это отношение эквивалентности отождествляет $f_!$, f^* и f_* с Σ_X , X^* и Π_X соответственно.

Доказательство. Так как f^* сохраняет Ω , у нас имеется естественная биекция между морфизмами $Y \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{F}$ и морфизмами $f_!Y \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{E}$, т. е. между подобъектами Y в $\mathcal{F}$ и подобъектами $f_!Y$ в $\mathcal{E}$. Поэтому, если $Y \xrightarrow{\sigma} Y'$ — такой морфизм в $\mathcal{F}$, что $f_!(\sigma)$ является изоморфизмом, то функтор замены базы σ^* индуцирует биекцию между подобъектами Y и подобъектами Y' , и, в частности, если σ — мономорфизм (так что $\sigma^*(\sigma) \cong 1_Y \cong \sigma^*(1_{Y'})$ как подобъекты Y'), то мы имеем $\sigma \cong 1_Y$, как подобъекты Y , т. е. σ — изоморфизм. Теперь пусть $Y \xrightarrow[\beta]{\alpha} Z$ — параллельная пара в $\mathcal{F}$, так что $f_!(\alpha) = f_!(\beta)$; тогда, применяя предыдущее рассуждение к уравнителю $Y' \xrightarrow{\sigma} Y$ морфизмов α и β , выводим, что $\alpha = \beta$. Итак, $f_!$ является унивалентным функтором, и, в частности, он отражает мономорфизмы и эпиморфизмы, следовательно, в силу следствия 1.22 он отражает изоморфизмы.

Пользуясь утверждением, двойственным теореме 0.13, получаем отсюда, что $f_!$ является комонадическим функтором, т. е. что $\mathcal{F}$ эквивалентен категории $\mathcal{E}_G$ коалгебр для комонады G , индуцированной сопряжением $(f_! \dashv f^*)$. Теперь определим $X = f_!f^*(1_{\mathcal{E}})$: достаточно показать, что G изоморфна комонаде C , функторная часть которой представляет собой $(-) \times X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ с коединицей и коумножением, заданным посредством $U \times X \xrightarrow{\pi_1} U$ и $U \times X \xrightarrow{1 \times \Delta} U \times X \times X$ соответственно, так как можно легко увидеть, что $\mathcal{E}_C \cong \mathcal{E}/X$.

Но имеется очевидный морфизм комонад $\theta: G \rightarrow C$, который задан тем, что компонентами морфизма $\theta_U: f_!f^*U \rightarrow U \times X$ яв-

ляются коединица сопряжения $(f_! \dashv f^*)$ при U и $f_!f^*(U \rightarrow 1)$ соответственно. Поэтому достаточно построить двустороннюю инверсию для θ . Этого можно достигнуть следующим выводом:

$$\begin{aligned} f^*U &\xrightarrow{\alpha \circ U} f^*f_!f^*U \\ 1 &\longrightarrow (f^*f_!f^*U)^{f^*U} \cong f^*((f_!f^*U)^U) \quad (\text{так как } f^* \text{ сохраняет экспоненциалы}) \\ X &\cong f_!1 \longrightarrow (f_!f^*U)^U \\ U \times X &\xrightarrow{\psi} f_!f^*U \end{aligned}$$

где α — единица сопряжения $(f_! \dashv f^*)$. Доказательство того, что ψ является двусторонней инверсией для θ_U , состоит в утомительном, но бесхитростном диаграммном поиске. $\square$

1.48 Замечание. Как показывает следующий пример, для того чтобы доказать теорему 1.47, необходима гипотеза, что $f_!$ сохраняет уравнители (эта гипотеза, конечно, верна для геометрических морфизмов, возникающих, как в следствии 1.46).

Пусть G — нетривиальная группа, и рассмотрим существенный геометрический морфизм $\mathcal{P}^{G^{\text{op}}} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$, определенный равенством $\gamma^*(S) = S$, причем G -действие тривиально, $\gamma_*(M)$ — множество G -фиксированных элементов из M , $\gamma_!(M)$ — множество G -орбит из M . Сопряженность $(\gamma_! \dashv \gamma^* \dashv \gamma_*)$ легко проверить, и из примера 1.14 непосредственно следует, что γ^* — логический функтор. Но ясно, что $\mathcal{P}^{G^{\text{op}}}$ не эквивалентна $\mathcal{P}/X$ ни для какого X . (Читатель может проверить, что функтор $\gamma_!$ сохраняет корефлексивные уравнители; поэтому в теореме 1.47 недостаточно только допустить, что $f_!$ сохраняет корефлексивные уравнители.) $\square$

Особенно важным следствием теоремы 1.42 является то, что она позволяет свободно пользоваться в рассуждениях «обобщенными элементами». По аналогии со случаем $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ будем называть элементом (или иногда глобальным элементом) объекта X категории $\mathcal{E}$ любой морфизм $1 \rightarrow X$. Но ясно, что в общем случае топоса объект 1 не является образующей, и поэтому объект не определяется заданием его глобальных элементов; следовательно, мы пришли к тому, чтобы по принципу леммы Йонеды рассматривать «элементы объекта X , определенные над U », т. е. морфизмы $U \rightarrow X$ для переменного объекта U . (Если у $\mathcal{E}$ имеется набор образующих, мы можем ограничиться теми U , которые лежат в этом наборе, но для текущего рассмотрения эта возможность не важна.)

Теперь из леммы 1.41 сразу следует, что морфизмы $U \rightarrow X$ биективно соответствуют глобальным элементам объекта U^*X в топосе $\mathcal{E}/U$, а так как U^* — логический объект, такие элементы можно интерпретировать точно так же, как глобальные элемен-

ты X в $\mathcal{E}$. Так, например, когда мы говорим об Ω^x как об объекте подобъектов из X , мы имеем в виду не только то, что его глобальные элементы биективно соответствуют морфизмам $X \cong \cong 1 \times X \rightarrow \Omega$ и, следовательно, подобъектам X в $\mathcal{E}$, но и то, что его U -элементы $U \rightarrow \Omega^x$ соответствуют подобъектам U^*X в $\mathcal{E}/U$ и это соответствие естественно по U .

Особенно важным обобщенным элементом объекта X является его *общий элемент* x , который можно описать в $\mathcal{E}$ как тождественный морфизм $X \xrightarrow{1} X$ или в $\mathcal{E}/X$ как глобальный элемент

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \\ 1_X \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

из X^*X . Он обладает следующим универсальным свойством: для любого обобщенного элемента $U \xrightarrow{f} X$ из X имеем $f^*(x) = f$; поэтому, если имеется высказывание об обобщенных элементах из X , истинность которого сохраняется функторами замены базы и которое истинно для общего элемента, то оно истинно для всех обобщенных элементов и, в частности, для всех глобальных элементов из X .

1.49 Примеры. Приведем пару типичных примеров применения общих элементов на практике.

(i) Построим морфизм $Y^x \times Y^x \xrightarrow{eq} \Omega^x$, который «интернализует» операцию образования уравнивателя параллельной пары морфизмов $X \rightrightarrows Y$. Будем писать Z вместо $Y^x \times Y^x$; тогда в топосе $\mathcal{E}/Z$ имеем общий элемент $Z^*Z \cong Z^*Y^{z^*x} \times Z^*Y^{z^*x}$, который можно рассматривать как общую параллельную пару $Z^*X \rightrightarrows Z^*Y$. Построение ее уравнивателя в $\mathcal{E}/Z$ дает нам подобъект из Z^*X , который можно рассматривать как глобальный элемент из $\Omega^{z^*x} \cong Z^*(\Omega^x)$. Но такой элемент согласно лемме 1.41 соответствует морфизму $Z \rightarrow \Omega^x$ в $\mathcal{E}$; он и есть искомый морфизм. Поскольку функторы замены базы сохраняют уравнители, можно легко увидеть, что отображение, индуцированное морфизмом eq на U -элементах $Y^x \times Y^x$, совпадает с отображением, индуцированным при образовании уравнивателей параллельных пар в $\mathcal{E}/U$.

(ii) Аналогично, можно интернализовать операцию образования пересечения (расслоенного произведения) пары подобъектов объекта топоса $\mathcal{E}$ с помощью единственного морфизма $\Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$. Для этого возьмем общую пару подобъектов объекта 1 в $\mathcal{E}/\Omega \times \Omega$ (т. е. подобъектов, которые классифицированы двумя проекциями произведения $\Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$), образуем их пересечение

и затем возьмем их классифицирующее отображение. Можно также описать $\bigwedge$ более явно как классифицирующее отображение для $1 \xrightarrow{(t,t)} \Omega \times \Omega$; нетрудно проверить, что это отображение обладает нужными свойствами. $\square$

Мы вернемся к идее общих элементов в более формальном контексте языка Митчела — Бенабу в § 5.4.

1.5. Эпимоноразложения

1.51 Лемма. В топосе копределы универсальны, т. е. сохраняются функторами замены базы (см. 0.42(ii)).

Доказательство немедленно следует из существования функторов Π_i (следствие 1.43). $\square$

Из леммы 1.51 могут быть введены многие важные свойства точности, например,

1.52 Теорема (Келли — Тьерне). Любой морфизм в топосе можно разложить на эпиморфизм, за которым следует мономорфизм. (Это разложение единственно с точностью до изоморфизма, как следует из 1.22.)

Доказательство. Пусть дан $X \xrightarrow{f} Y$, образуем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow b & & \searrow q & \nearrow i \\ & & & Q & \end{array}$$

где (a, b) является ядерной парой f , а q — коуравнителем (a, b) . Нужно показать, что i — мономорфизм. Предположим, что имеется пара морфизмов $T \xrightarrow{c} Q$ такая, что $ic = id$. образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & T \\ \downarrow (g, h) & & \downarrow (c, d) \\ X \times X & \xrightarrow{q \times q} & Q \times Q \end{array}$$

тогда $fg = igg = ice = ide = fh$, поэтому (g, h) факторизует посредством $R \xrightarrow{(a,b)} X \times X$ (скажем, посредством морфизма $S \xrightarrow{h} R$

Теперь $ce = gg = qak = qbk = gh = de$, но $q \times q$ — эпиморфизм, следовательно, мы можем разложить его в виде $(q \times 1_q)(1_x \times q)$, причем оба сомножителя являются эпиморфизмами согласно определению 1.11(ii). Таким образом, e является эпиморфизмом в силу леммы 1.51 и $c = d$. $\square$

1.53 Следствие. В топосе каждый эпиморфизм является коуравнителем.

Доказательство. Предположим, что f в диаграмме теоремы 1.52 является эпиморфизмом. Тогда эпиморфизмом является также i , и, следовательно, i является изоморфизмом в силу следствия 1.22. Таким образом, f — это коуравнитель своей собственной ядерной пары. $\square$

1.54 Замечание. Теорема 1.52 и ее следствие 1.53 в сочетании с высказыванием 1.23 доказывают, что топос — это точная категория в смысле Барра [2]. $\square$

Поскольку топос содержит копроизведения и допускает эпимоноразложения, видно, что можно образовать конечное объединение подобъектов, т. е. пусть заданы подобъекты $X_1 \xrightarrow{a} Y, X_2 \xrightarrow{b} Y$, тогда образ $X_1 \cup X_2 \xrightarrow{c} Y$ для $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{(a, b)} Y$ является наименьшей верхней гранью a и b в частично упорядоченном множестве подобъектов объекта Y . Но то обстоятельство, что копроизведения универсальны, позволяет нам дать другое описание $X_1 \cup X_2$, во многом более удобное.

1.55 Предложение. Пусть $X_1 \xrightarrow{a} Y, X_2 \xrightarrow{b} Y$ — два подобъекта в топосе $\mathcal{E}$. Образует их пересечение (расслоенное произведение)

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{c} & X_i \\ \downarrow d & & \downarrow a \\ X_2 & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

и их объединение, как было сделано выше. Тогда квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{c} & X_1 \\ \downarrow d & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{\quad} & X_1 \cup X_2 \end{array}$$

представляет амальгаму.

Доказательство. По определению амальгамой c и d является уравниватель морфизмов

$$X_1 \cap X_2 \xrightarrow[v_2 c]{v_1 c} X_1 \amalg X_2;$$

в то время как эпиморфизм $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{e} X_1 \cup X_2$ по построению теоремы 1.52 является коуравнителем для $R \xrightarrow{(a, b)} X_1 \amalg X_2$, где

R — ядерная пара для $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{(a, b)} Y$. Но так как в $\mathcal{E}$ копроиз-

ведения универсальны, декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{e} & X_1 \amalg X_2 \\ \downarrow f & & \downarrow (a, b) \\ X_1 \amalg X_2 & \xrightarrow{(a, b)} & Y \end{array}$$

можно разложить в копроизведение четырех объектов R_{ij} ($1 \leq i, j \leq 2$), где R_{ij} — это подъем X_i в X_j . Записывая e_{ij}, f_{ij} для композиций e, f с включением $R_{ij} \rightarrow R$, имеем, что $X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{e} X_1 \cup X_2$ является общим коуравнителем четырех пар (e_{ij}, f_{ij}) . Но a и b — мономорфизмы, поэтому $e_{11} = f_{11}$ и $e_{22} = f_{22}$; следовательно, эти две пары не влияют на коуравнитель. Итак, $R_{12} = R_{21} = X_1 \cap X_2$, причем $e_{12} = v_1 c = f_{21}$, $e_{21} = v_2 d = f_{12}$, так что общий коуравнитель (e_{12}, f_{12}) и (e_{21}, f_{21}) является просто коуравнителем $v_1 c$ и $v_2 d$, т. е. амальгамой c и d . $\square$

1.56 Лемма. Начальный объект 0 в топосе является строгим, т. е. любой морфизм $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом.

Доказательство. Предположим, что дан такой морфизм; тогда по тривиальным причинам диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow 1_X & & \downarrow 1_0 \\ X & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

является декартовым квадратом. Но 1_0 — начальный объект в $\mathcal{E}/0$, поэтому в силу леммы 1.51 1_X является начальным объектом в $\mathcal{E}/X$, из чего следует, что X — начальный объект в $\mathcal{E}$. $\square$

1.57 Следствие. Копроизведения в топосе дизъюнкты (см. определение 0.42(i)).

Доказательство. По определению квадрат

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow v_1 \\ Y & \xrightarrow{v_2} & X \amalg Y \end{array}$$

является амальгамой. Но в силу леммы 1.56 $0 \rightarrow X$ и $0 \rightarrow Y$ тривиально являются мономорфизмами; следовательно, согласно следствию 1.28 данный квадрат является декартовым. $\square$

1.58 Замечание. Сочетание утверждений 1.23, 1.36, 1.51, 1.53 и 1.57 позволяет убедиться, что, исходя из аксиом определения 1.11, можно доказать истинность всех тех условий теоремы Жиро (0.45), которые не зависят явно от теории множеств. Таким образом, мы убедились, что определение 1.11 можно рассматривать как подходящее «элементарное» обобщение понятия топоса Гротендика. $\square$

Упражнения к главе 1

1* (Кок [66]). Покажите, что аксиомы (ii) и (iii) определения 1.11 можно заменить одной аксиомой: «Для каждого объекта X категории $\mathcal{E}$ существует объект-степень PX и подобъект $\epsilon_X: PX \rightarrow X$ такие, что для каждого объекта Y и каждого подобъекта $R: Y \rightarrow X$ существует такой единственный морфизм $Y \rightarrow PX$, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & \epsilon_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y \times X & \xrightarrow{r \times 1} & PX \times X \end{array}$$

декартов».

[Метод. Определите отображение $1 \xrightarrow{\lceil x \rceil} PX$ так, чтобы оно соответствовало $X \xrightarrow{1} X \cong 1 \times X$, и определите синглетонное отображение $X \xrightarrow{\lfloor \cdot \rfloor} PX$ так, чтобы оно соответствовало $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$. Теперь пусть $P(X \times Y) \times X \xrightarrow{r} PY$ соответствует подобъекту $\epsilon_{(X \times Y)}$ произведения $P(X \times Y) \times X \times Y$, пусть

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \lfloor \cdot \rfloor \\ P(X \times Y) \times X & \xrightarrow{r} & PY \end{array}$$

— декартов квадрат, а $P(X \times Y) \xrightarrow{q} PX$ соответствует подобъекту Q . После этого постройте декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y^X & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow x^* \\ P(X \times Y) & \xrightarrow{q} & PX \end{array}$$

и докажите, что Y^X обладает свойством универсальности экспоненты. Наконец докажите, что $P(1)$ — классификатор подобъектов.]

2. Покажите, что аксиому (i) определения 1.11 можно свести к утверждению, что у $\mathcal{E}$ имеются конечные произведения и конечный объект и что всегда существуют расслоенные произведе-

ния диаграмм следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

[Метод. Постройте уравнитель для $X \rightrightarrows Y$ и образуйте его классифицирующее отображение $X \rightarrow \Omega$.]

3. (Хигге). Пусть $\Omega \xrightarrow{\alpha} \Omega$ — мономорфизм в топосе, а $U \xrightarrow{m} \Omega$ — подобъект, классифицируемый посредством α . Рассматривая подобъект U , классифицируемый посредством m , докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{m} & \Omega \\ \downarrow & & \uparrow \alpha \\ 1 & \xrightarrow{i} & \Omega \end{array}$$

коммутативна, и выведите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{1} & U \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ \Omega & \xrightarrow{\alpha^2} & \Omega \end{array}$$

является декартовым квадратом. Тем самым покажите, что $\alpha^2 = 1_\Omega$.

4 (Энджинс [33]). Пусть $\mathbf{On}$ означает класс ординальных чисел, рассматриваемый как (большая) категория, в смысле его обычного упорядочивания. Докажите, что $\mathcal{S}^{\mathbf{On}^{\mathbf{Op}}}$ является топосом, но $\mathcal{S}^{\mathbf{On}}$ — не топос. [Сравните с примером 1.14.]

5*. Докажите, что объект топоса $\mathcal{E}$ инъективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом Ω^X для некоторого X . Выведите, что если E инъективен, то функтор $E^{(-)}: \mathcal{E}^{\mathbf{Op}} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет рефлексивные коуравнители.

6. По аналогии с примером 1.38 покажите, как можно использовать теорему 1.34 для построения копроизведений в топосе.

7. Пусть X — топологическое пространство, а $E \xrightarrow{p} X$ — локальный гомеоморфизм. Докажите, что топос $\mathbf{Shv}(X)/\Gamma(E, p)$ эквивалентен $\mathbf{Shv}(E)$.

8*. Пусть $\mathcal{E}$ — категория с конечными пределами. Докажите, что $\mathcal{E}$ декартово замкнута тогда и только тогда, когда для каждого морфизма X с областью значений 1 с функтором замены

базы X^* справа сопряжен некоторый функтор Π_X . [Указание: если $\mathcal{E}$ декартово замкнута, покажите, что $\Pi_X(Y \xrightarrow{h} X)$ можно определить с помощью декартовой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi_X(h) & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \Gamma_X \\ Y^X & \xrightarrow{h^X} & X^X \end{array}$$

9. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, X — объект $\mathcal{E}$, а Y — объект $\mathcal{F}$. Рассматривая обобщенные элементы, покажите, что объекты $f_*(Y^{f^*X})$ и $(f_*Y)^X$ изоморфны в $\mathcal{E}$.

10*. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в топосе $\mathcal{E}$. Используйте эпиморфизм, чтобы определить морфизм $\exists f: \Omega^X \rightarrow \Omega^Y$ без допущения, принятого в § 1.3, что f — мономорфизм. Покажите, что $X \mapsto \Omega^X, f \mapsto \exists f$ является ковариантным функтором $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ и что лемма 1.32 остается истинной, если устранить ограничение, что g и h — мономорфизмы. Покажите, что если f — эпиморфизм, то $\exists f \cdot Pf = 1_{PY}$, и что функтор $f \mapsto \exists f$ сохраняет декартовы квадраты следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{k} & T \end{array}$$

где g, h — мономорфизмы.

ГЛАВА 2

ВНУТРЕННЯЯ ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЙ

2.1. Внутренние категории и диаграммы

Одна из главных тем, проходящих через всю теорию (элементарных) топосов, состоит в том, что топосы следует считать «универсумом рассуждения», в котором можно производить всевозможные построения почти так же, как и в категории множеств, и почти с такой же эффективностью. Некоторые примеры из этой темы нам уже встречались в § 1.4; в этой главе нашей целью будет развить теорию категорий в стиле, который был бы внутренним по отношению к любому топосу. Однако основные определения внутренней теории категорий можно показать в значительно более общем контексте, чем топос. Поэтому вначале от категории $\mathcal{E}$ мы потребуем лишь существования конечных пределов. Другие аксиомы топоса будут привлекаться в рассуждениях по мере необходимости.

2.11 Определение. Внутренняя категория C в $\mathcal{E}$ состоит из:

(i) пары объектов C_0, C_1 (называемых *объектом объектов* и *объектом морфизмов* категории C соответственно);

(ii) четырех морфизмов $C_1 \xrightarrow{d_0} C_0, C_1 \xrightarrow{d_1} C_0, C_0 \xrightarrow{i} C_1$ и $C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{m} C_1^*$;

(iii) при этом $d_0 i = d_1 i = 1_{C_0}, d_0 m = d_0 \pi_1, d_1 m = d_1 \pi_2, m(1 \times m) = m(m \times 1): C_3 = C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$ и $m(1 \times i) = m(i \times 1) = 1_{C_1}$.

Внутренний функтор (или морфизм внутренних категорий)

$f: C \rightarrow D$ состоит из пары морфизмов $C_0 \xrightarrow{f_0} D_0, C_1 \xrightarrow{f_1} D_1$, комму-

*) Соглашение. Всегда, когда C_1 появляется как множитель расслоенного произведения над C_0 , мы пишем его слева от символа $\times_{C_0}$, если он рассматривается как объект со структурным отображением d_1 , и справа, если он рассматривается как объект со структурным отображением d_0 . Итак, символ $C_1 \times_{C_0} C_1$ означает расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow d_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

тирующих с d_0, d_1, i и m . Через $\text{cat}(\mathcal{E})$ мы обозначаем категорию внутренних категорий и функторов в $\mathcal{E}$. (На самом деле $\text{cat}(\mathcal{E})$ есть 2-категория, поскольку можно также ввести понятие *внутреннего естественного преобразования*, однако эта дополнительная структура нам не понадобится. Детальное изложение теории внутренних категорий с точки зрения 2-категорий читатель найдет в монументальной работе Грея [168].) $\square$

2.12 Определение. Пусть $C \in \text{cat}(\mathcal{E})$.

(i) Категория C называется *частично упорядоченным множеством*, если $C_1 \xrightarrow{(d_0, d_1)} C_0 \times C_0$ — мономорфизм.

(ii) Категория C называется *дискретной*, если i — изоморфизм (откуда вытекает, что d_0, d_1 и m — также изоморфизмы).

(iii) Категория C называется *моноидом*, если C_0 — конечный объект 1.

(iv) Двойственная категория C^{op} к C определяется перестановкой морфизмов d_0 и d_1 и перестановкой в определении m . $\square$

2.13 Замечание. Напомним, что если Δ обозначает категорию (ненулевых) конечных ординалов и их отображений, сохраняющих порядок, то *симплициальным объектом* категории $\mathcal{E}$ называют функтор $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$. (Эквивалентно, симплициальный объект определяется заданием последовательности объектов C_n ($n \geq 0$) и морфизмов $d_i^n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ ($0 \leq i \leq n$), $s_i^n: C_n \rightarrow C_{n+1}$ ($0 \leq i \leq n$), удовлетворяющих определенным соотношениям; см [CW], § VII.5 или [CF], глава II.) Беря теперь в качестве C_n ($n \geq 2$) n -кратное расслоенное произведение $C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \dots \times_{C_0} C_1$, можно убедиться, что данные определения 2.11 суть в точности то, что необходимо для превращения сопоставления ($n \mapsto C_n$) в симплициальный объект категории $\mathcal{E}$. [В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ объект C_n является множеством композиемых n -ок морфизмов из C , морфизмы d_i^n задаются опусканием первого или последнего морфизма n -ки ($i = 0$ или n) или композицией двух соседних морфизмов, а морфизмы s_i^n вставляют тождественный морфизм в одно из $n+1$ возможного места его расположения.] Обратно, симплициальный объект категории $\mathcal{E}$ можно получить (с точностью до изоморфизма) этим способом из внутренней категории тогда и только тогда, когда он точен как функтор $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$. Поэтому категорию $\text{cat}(\mathcal{E})$ можно отождествить (с точностью до эквивалентности) с полной подкатегорией категории $\text{simpl}(\mathcal{E})$ симплициальных объектов в $\mathcal{E}$. $\square$

В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ это симплициальное описание малых категорий впервые было использовано Гротендиком [43]. Однако в отличие от 2.11 это описание нельзя превратить в элементарное определение внутренней категории (так как категория Δ не конечна и даже не конечно представима), тем не менее читатели,

уже знакомые с теорией симплициальных объектов, вероятно, сочтут его более удобным для работы.

В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ обычно рассматривают не только функторы из одной малой категории в другую, но также функторы из малой категории в большую, в частности, в саму категорию $\mathcal{P}$. Чтобы сделать это понятие внутренним, вводится понятие *внутренней диаграммы*. Внутренняя диаграмма на C должна состоять из C_0 -индексированного семейства объектов категории $\mathcal{E}$ (которое согласно идеям § 1.4 мы интерпретируем как объект относительной категории $\mathcal{E}/C_0$), оснащенного морфизмом, который описывает, как C_1 действует на данной диаграмме. Формально, имеем

2.14 Определение. Пусть $C \in \text{cat}(\mathcal{E})$. Внутренняя диаграмма F на C состоит из

(i) объекта $F_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_0$ из $\mathcal{E}/C_0$,

(ii) морфизма $e: F_1 = F_0 \times_{C_0} C_1 \rightarrow F_0$,

(iii) при этом $\gamma_0 e = d_1 \pi_2$, $e(1 \times i) = 1_{F_0}$ и $e(e \times 1) = e(1 \times m): F_2 = F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow F_0$.

Морфизмом внутренних диаграмм $f: F \rightarrow G$ называют морфизм $F_0 \rightarrow G_0$ над C_0 , коммутирующий со структурными морфизмами e . Через $\mathcal{E}^C$ мы обозначаем категорию внутренних диаграмм на C . $\square$

Меняя ролями d_0 и d_1 в 2.14, приходим к понятию *контравариантной внутренней диаграммы* на C (обычно называемой *внутренним предпучком* на C). Следует отметить также, что некоторые авторы используют термин «внутренний функтор» для того, что мы называем внутренней диаграммой.

2.15 Замечание. Пусть F — внутренняя диаграмма на C . Тогда легко убедиться, что если F_n ($n \geq 1$) определено как произведение $F_0 \times_{C_0} C_n$, а $\gamma_n = \pi_2: F_n \rightarrow C_n$, то данных определения 2.14 достаточно, чтобы превратить F во внутреннюю категорию, для которой γ станет внутренним функтором $F \rightarrow C$. (Например, отображениями $d_0, d_1: F_1 \rightrightarrows F_0$ будут соответственно π_1 и e .) Обратно, объект $F \rightarrow C$ из $\text{cat}(\mathcal{E})/C$ изоморфен объекту, построенному таким способом, в том и только в том случае, когда квадрат

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{d_0} & F_0 \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_0} & C_0 \end{array}$$

декартов. (Внутренний функтор, удовлетворяющий этому условию, называют *дискретным корасслоением*; в действительности это специальный случай понятия *расщепимого корасслоения*, по поводу которого см. упражнение 6 в конце настоящей главы.

Внутренние функторы, которые сопоставляются тем же способом внутренним предпучкам, называются *дискретными расслоениями*. Итак, категорию $\mathcal{E}^C$ (с точностью до эквивалентности) можно отождествить с полной подкатегорией в $\text{cat}(\mathcal{E})/C$, объектами которой являются все дискретные корасслоения. $\square$

Следующие четыре результата доказываются непосредственно при помощи диаграммного поиска.

2.16 Лемма. (i) Категория $\text{cat}(\mathcal{E})$ имеет конечные пределы; на самом деле их можно ввести с помощью стирающего функтора $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $C \mapsto (C_0, C_1)$.

(ii) Категория $\mathcal{E}^C$ имеет конечные пределы и функтор включения $\mathcal{E}^C \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/C$ задает их. $\square$

2.17 Лемма. Пусть $C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ — морфизмы из $\text{cat}(\mathcal{E})$.

(i) Если γ и δ — дискретные корасслоения, то и композиция $\delta\gamma$ является дискретным корасслоением.

(ii) Если $\delta\gamma$ и δ — дискретные корасслоения, то и γ — дискретное корасслоение.

2.18 Следствие. Пусть F — внутренняя диаграмма на C , а $F \rightarrow C$ — соответствующее дискретное корасслоение. Тогда категория $(\mathcal{E}^C)/F$ эквивалентна $\mathcal{E}^F$. $\square$

2.19 Лемма. Пусть $C \xrightarrow{f} D$ — морфизм из $\text{cat}(\mathcal{E})$. Тогда функтор замены базы $f^*: \text{cat}(\mathcal{E})/D \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/C$ сохраняет дискретные корасслоения, а потому индуцирует функтор $f^*: \mathcal{E}^D \rightarrow \mathcal{E}^C$. [В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ этот функтор отвечает операции композиции функтора $D \rightarrow \mathcal{P}$ с $C \xrightarrow{f} D$.] $\square$

2.2. Внутренние пределы и копределы

2.21 Предложение. Пусть $C \in \text{cat}(\mathcal{E})$. Тогда стирающий функтор

$$U: \mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}/C_0; F \mapsto (F_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_0)$$

является монадическим.

Доказательство. Определим функтор T_C как композицию

$$\mathcal{E}/C_0 \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{E}/C_1 \xrightarrow{\Sigma d_1} \mathcal{E}/C_0.$$

Тогда для любого морфизма $X \xrightarrow{\gamma} C_0$ из $\mathcal{E}/C_0$ отображения $1 \times i: X \rightarrow X \times_{C_0} C_1$ и $1 \times m: X \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow X \times_{C_0} C_1$ задают морфизмы $n_\gamma: \gamma \rightarrow T_C(\gamma)$ и $\mu_\gamma: T_C T_C(\gamma) \rightarrow T_C(\gamma)$ из $\mathcal{E}/C_0$, естественные по γ , а из соотношений 2.11(iii) вытекает, что

$T_C = (T_C, \eta, \mu)$ — монада на $\mathcal{E}/C_0$. Пусть теперь $F = (F_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_0, e)$ — внутренняя диаграмма на C . В этой ситуации первое соотношение из 2.14(iii) показывает, что e задает морфизм $T_C(\gamma_0) \rightarrow \gamma_0$ в $\mathcal{E}/C_0$, а два других соотношения в точности означают, что это структурное отображение T_C -алгебры. Поэтому категория $\mathcal{E}^C$ изоморфна категории T_C -алгебр. $\square$

2.22 Следствие. В частности, стирающий функтор из 2.21 имеет левый сопряженный функтор $R: \mathcal{E}/C_0 \rightarrow \mathcal{E}^C$. Если $X \xrightarrow{\gamma} C_0$ — объект из $\mathcal{E}/C_0$, то диаграмма $R(\gamma)$ соответствует дискретному корасслоению

$$\begin{array}{ccc} X \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow[\quad 1 \times m \quad]{\pi_{12}} & X \times_{C_0} C_1 \\ \downarrow \pi_3 & & \downarrow d_{12} \\ C_1 & \xrightarrow[\quad d_1 \quad]{d_0} & C_0 \end{array}$$

Диаграммы, лежащие в образе функтора R , называют *представимыми*. $\square$

2.23 Пример. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ и U — объект малой категории C , рассматриваемый как морфизм $1 \xrightarrow{u} C_0$. Тогда, как легко проверить, диаграмма $R(u)$ соответствует представимому функтору $h^U = \text{hom}_C(U, -)$. В более общей ситуации $R(X \xrightarrow{\gamma} C_0)$ соответствует X -индексированному копроизведению представимых функторов. Заметим, что лемма Йонеды (0.11) есть просто утверждение о том, что функтор R сопряжен слева к рассматриваемому стирающему функтору, а лемма 0.12 аналогично сводится к утверждению, что любой объект категории алгебр свободно представим ([CW], с. 149). $\square$

Предположим теперь, что в $\mathcal{E}$ имеются рефлексивные коуравнители.

2.24 Определение. (i) Определим функтор $\lim: \text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow$

$\rightarrow \mathcal{E}$ соотношением $\lim C = \text{coeq} \left(C_1 \xrightleftharpoons[d_1]{d_0} C_0 \right)$. (Заметим, что пара (d_0, d_1) рефлексивна с общим расщепляющим морфизмом i .)

(ii) Определим функтор $\lim_c: \mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}$ соотношением

$$\lim_c (F \xrightarrow{\gamma} C) = \lim F. \quad \square$$

2.25 Лемма. (i) Функтор $\lim$ сопряжен слева к функтору $\Delta: \mathcal{E} \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})$, переводящему объект X в дискретную категорию $\left(X \xrightleftharpoons[1]{1} X \right)$.

(ii) Функтор $\lim_C$ сопряжен слева к функтору $C^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^C$, переводящему объект X в постоянную диаграмму $(X \times C \xrightarrow{\pi_2} C)$.

Доказательство. Прямая проверка. $\square$

Однако в случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ сопряженность 2.25(ii) есть в точности определяющее свойство копредела функтора $C \rightarrow \mathcal{P}$ (см. [CW], с. 67); тем самым для $\lim_C$ вполне оправдано название

функтора копредела для внутренних диаграмм на C . Фактически 2.25(ii) можно перефразировать, сказав, что категория $\mathcal{E}$ является внутренней кополной.

Следующая техническая лемма имеет ряд важных приложений:

2.26 Лемма. Пусть $X \xrightarrow{\gamma} C_0$ — объект из $\mathcal{E}/C_0$. Тогда $\lim_C(R(\gamma)) \cong X$.

Доказательство. Согласно 2.22 достаточно показать, что

$$X \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow[1 \times m]{\pi_{12}} X \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\pi_1} X$$

есть диаграмма коуравнителя; на самом деле это расщепимый коуравнитель, расщепляемый с помощью

$$X \xrightarrow{1 \times i} X \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{1 \times i \times 1} X \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1. \quad \square$$

Другое, более идейное доказательство леммы 2.26 можно получить из наблюдения, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{C^*} & \mathcal{E}^C \\ & \searrow C_0^* & \downarrow U \\ & & \mathcal{E}/C_0 \end{array}$$

коммутативна. Значит, соответствующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}/C_0 & \xrightarrow{\Sigma_{C_0}} & \mathcal{E} \\ \downarrow R & \nearrow \lim_C & \\ \mathcal{E}^C & & \end{array}$$

из левых сопряженных функторов также коммутативна с точностью до изоморфизма.

Ввиду 2.25(ii) интересно узнать, когда функтор C^* имеет правый сопряженный $\lim_C$. Но если C — дискретная категория

(так что $\mathcal{E}^C \cong \mathcal{E}/C_0$, это эквивалентно вопросу о существовании

функтора Π_{C_0} , определенного в 1.43. Поэтому из упражнения 1.8 мы знаем, что для этого необходима декартова замкнутость $\mathcal{E}$. На самом деле это условие и достаточно:

2.27 Предложение. Декартова замкнутая категория внутренне полна, т. е. для любой категории C из $\text{cat}(\mathcal{E})$ имеется функтор $\lim_C: \mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}$, сопряженный справа к C^* .

Доказательство. Пусть $F \xrightarrow{\gamma} C$ — дискретное корасслоение. Определим морфизм $h: \Pi_{C_0}(\gamma_0) \rightarrow \Pi_{C_1}(\gamma_1)$ так: пусть β — коединица сопряжения $(C_0^* \dashv \Pi_{C_0})$; тогда по определению транспозицией морфизма h является композиция

$$C_1^*(\Pi_{C_0}(\gamma)) \cong d_0^* C_0^*(\Pi_{C_0}(\gamma_0)) \xrightarrow{d_0^* \beta} d_0^*(\gamma_0) \cong \gamma_1.$$

Определим теперь объект $\lim_C(F)$ как уравнитель диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_{C_0}(\gamma_0) & \xrightarrow{i_0} & F_0^{C_0} & \xrightarrow{F_0^*} & F_0^{C_1} \\ & \searrow h & & \nearrow d_1^* & \\ & \Pi_{C_1}(\gamma_1) & \xrightarrow{i_1} & F_1^{C_1} & \end{array}$$

где i_0, i_1 — включения, возникающие в конструкции из упражнения 1.8. [Заметим, что в случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ из 1.44 следует, что это есть в точности стандартная конструкция пределов через произведения и уравнители ([CW], с. 109).]

Но морфизмы $X \xrightarrow{f} \Pi_{C_0}(\gamma_0)$ в $\mathcal{E}$ соответствуют морфизмам $X \times C_0 \xrightarrow{\bar{f}} F_0$ над C_0 , и f пропускается через предыдущий уравнитель тогда и только тогда, когда коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times C_1 & \xrightarrow{d_0^*(\bar{f})} & F_1 \\ \downarrow 1 \times d_1 & & \downarrow d_1 \\ X \times C_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & F_0 \end{array}$$

т. е. тогда и только тогда, когда $\bar{f}$ индуцирует морфизм диаграмм $C^*(X) \rightarrow F$. Это и дает требуемую сопряженность. $\square$

2.3. Диаграммы в топосе

В настоящем параграфе исследуются некоторые специальные свойства внутренних категорий в случае, когда основная категория $\mathcal{E}$ — топос. Однако на самом деле мы не будем использовать аксиоматику топоса в полную силу; кроме доказательства теоре-

мы 2.32, все последующие рассуждения верны в любой категории $\mathcal{E}$ со свойством, что $\mathcal{E}/X$ декартово замкнута для каждого X . Такие категории Пенон [100] называет *локально замкнутыми*, а Дей [158] — *замкнутыми относительно оболочки*; помимо топов важными примерами таких категорий являются разные декартово замкнутые модификации категории $\mathbf{esp}$.

2.31 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а $\mathcal{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Тогда стирающий функтор $U: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{C}_0$ из 2.21 является комонадическим.

Доказательство. Функтор $T_{\mathcal{C}}$, определенный в 2.21, имеет правый сопряженный $G_{\mathcal{C}}$, а именно, композицию

$$\mathcal{E}/\mathcal{C}_0 \xrightarrow{d_1^*} \mathcal{E}/\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\text{Id}_0} \mathcal{E}/\mathcal{C}_0.$$

Значит, в силу 0.14 $G_{\mathcal{C}}$ составляет функторную часть некоторой комонады $\mathbb{G}_{\mathcal{C}}$, для которой категория $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ — алгебр изоморфна $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$. $\square$

2.32 Теорема (Ловер — Тьерне). Пусть $\mathbb{G} = (G, \mathcal{E}, \delta)$ — такая комонада на топосе $\mathcal{E}$, что функтор G точен слева. Тогда категория $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ коалгебр является топосом и существует геометрический морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{G}}$, прямой и обратный образы которого являются косвободным и стирающим функторами соответственно.

Доказательство. (i) Так как G точен слева, то стирающий функтор $\mathcal{E}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathcal{E}$ вводит конечные пределы; поэтому они существуют в $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$.

(ii) Для данных коалгебр $(X \xrightarrow{\theta} GX)$ и $(Y \xrightarrow{\phi} GY)$ построим их экспоненту $(Y, \phi)^{(X, \theta)}$ в виде уравнителя диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G(Y^X) & \xrightarrow{G(\phi^X)} & G(GY^X) \\ \delta_{Y^X} \searrow & & \nearrow c_{(GY^{\theta})} \\ GG(Y^X) & \xrightarrow{G\rho} & G(GY^{GX}) \end{array}$$

где $\rho: G(Y^X) \rightarrow GY^{GX}$ — экспоненциальная транспозиция морфизма

$$G(Y^X) \times GX \cong G(Y^X \times X) \xrightarrow{G(\text{ev})} GY.$$

(Заметим, что этот уравнитель обладает структурой коалгебры, поскольку все морфизмы данной диаграммы являются гомоморфизмами коалгебр, все объекты при этом считаются косвободными коалгебрами.)

Но для любой коалгебры (Z, ψ) имеется естественная биекция между гомоморфизмами коалгебр $(Z, \psi) \rightarrow (G(Y^X), \delta)$ и $\mathcal{E}$ -морфизмами $Z \rightarrow Y^X$, т. е. $\mathcal{E}$ -морфизмами $Z \times X \rightarrow Y$. Однако ут-

верждение, что $Z \times X \xrightarrow{f} Y$ — гомоморфизм коалгебр, эквивалентно утверждению о коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\bar{f}} & Y^X & \xrightarrow{\phi^X} & GY^X \\ \downarrow \psi & & & & \uparrow GY^{\theta} \\ GZ & \xrightarrow{G\bar{f}} & G(Y^X) & \xrightarrow{\rho} & GY^{GX} \end{array}$$

которое в свою очередь эквивалентно утверждению, что соответствующий гомоморфизм коалгебр $Z \rightarrow G(Y^X)$ пропускается через уравнитель, определенный выше. Поэтому данный уравнитель и есть требуемая экспонента.

(iii) Аналогично, классификатор подобъектов $\Omega_{\mathbb{G}}$ категории $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ можно отождествить с подкоалгеброй коалгебры $(G\Omega, \delta)$, а именно, с уравнителем треугольника

$$\begin{array}{ccc} G\Omega & \xrightarrow{1_{G\Omega}} & G\Omega \\ \delta_{\Omega} \searrow & & \nearrow G\tau \\ & G\Omega & \end{array}$$

где τ — классифицирующее отображение для $G(i): 1 \cong G(1) \rightarrow G\Omega$. Теперь гомоморфизмы коалгебр $(X, \theta) \rightarrow (G\Omega, \delta)$ соответствуют $\mathcal{E}$ -морфизмам $X \rightarrow \Omega$, т. е. произвольным подобъектам объекта X категории $\mathcal{E}$. Как и в (ii), находим, что те гомоморфизмы, которые пропускаются через указанный выше уравнитель, в точности соответствуют тем подобъектам в X , которые имеют (неизбежно одну) структуру подкоалгебры.

(iv) То, что функторы, указанные в формулировке теоремы, образуют геометрический морфизм, немедленно следует из (i). $\square$

2.33 Следствие. Если $\mathcal{E}$ — топос и $\mathcal{C} \in \text{cat}(\mathcal{E})$, то $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ — топос.

Доказательство. Поскольку функтор $C_{\mathcal{C}}$ имеет левый сопряженный, то он точен слева. Поэтому требуемое утверждение выводится непосредственно из 1.42, 2.31 и 2.32. $\square$

Более того, в силу 2.25 и 2.27 функтор $C^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ обладает левым и правым сопряженным функтором, а потому является обратным образом существенного геометрического морфизма $\mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$. В действительности имеем более общий результат. Прежде чем его формулировать, напомним, что согласно 2.19 для любой категории $\mathcal{E}$ с конечными пределами и любого морфизма $C \xrightarrow{f} D$ из $\text{cat}(\mathcal{E})$ подъем вдоль f индуцирует функтор $f^*: \mathcal{E}^D \rightarrow \mathcal{E}^C$.

2.34 Теорема. (i) Если категория $\mathcal{E}$ имеет рефлексивные коуравнители и функторы замены базы в $\mathcal{E}$ их сохраняют, то f^* имеет левый сопряженный функтор $\lim_f: \mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}^D$.

(ii) Если $\mathcal{E}$ — топос, то f^* имеет правый сопряженный функтор $\lim_f$.

Доказательство. (i) Из 2.16 легко выводится коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^D & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{E}^C \\ \downarrow u & & \downarrow r \\ \mathcal{E}/D_0 & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{E}/C_0 \end{array}$$

Но так как функторы замены базы сохраняют рефлексивные коуравнители, то то же самое верно для функтора T_D ; значит, функтор $U: \mathcal{E}^D \rightarrow \mathcal{E}/D_0$ задает рефлексивные коуравнители, и, в частности, они существуют в $\mathcal{E}^D$. Теперь ввиду 1.41 и 2.21 мы можем применить теорему о подъеме сопряжения (0.15) и получить функтор, сопряженный слева к f^* .

Аналогично доказывается (ii) с помощью результатов, двойственных к 0.15, 1.43 и 2.31. $\square$

2.35 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда сопоставление $C \mapsto \mathcal{E}^C, f \mapsto (\lim_f, f_*)$ определяет функтор (в смысле 2-категорий) $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Top}/\mathcal{E}$. Более того, если топос $\mathcal{E}$ вложить в $\text{cat}(\mathcal{E})$ с помощью функтора Δ из (2.25(i)), то композиция $\mathcal{E} \xrightarrow{\Delta} \text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Top}/\mathcal{E}$ будет (с точностью до изоморфизма) функтором из 1.46. $\square$

В случае $\mathcal{E} = \mathcal{S}$ существование и свойства сопряжений к f^* впервые рассмотрел Кан [171]; по этой причине функторы $\lim_f$ и

$\lim_f$ известны как левое и правое (внутреннее) расширения

Кана вдоль f . Заметим, что если в 2.34 в качестве D взять дискретную категорию I (т. е. конечный объект в $\text{cat}(\mathcal{E})$), то получим функторы $\lim_C$ и $\lim_C$, определенные в 2.24 и 2.27 со-

ответственно. Значит, эти функторы можно было бы определить с помощью теоремы 0.15; однако их более явное описание, данное в предыдущем параграфе, полезно на практике. В следующем параграфе будет дано более явное описание функторов $\lim_f$

для общих f через тензорное произведение внутренних профунк-

торов; особенно удобного описания функторов $\lim_f$ в общем случае, по-видимому, не имеется.

Несколько другой взгляд на левые расширения Кана дает следующий результат.

2.36 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — категория с конечными пределами, а D — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Тогда равносильны следующие утверждения:

(i) Для любого морфизма $C \xrightarrow{f} D$ существует левое расширение Кана $\lim_f$.

(ii) Функтор включения $\mathcal{E}^D \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/D$ имеет левый сопряженный функтор L .

Доказательство. Зная $\lim_f$, определим L соотношением

$$L(C \xrightarrow{f} D) = \lim_f(C \xrightarrow{f} C).$$

Тогда для любого дискретного ко-
расслоения $F \xrightarrow{\gamma} D$ морфизмы $C \rightarrow F$ над D отвечают глобальным элементам подъема $f^*(\gamma)$ в $\text{cat}(\mathcal{E})/C$ (или в $\mathcal{E}^C$), а потому морфизмам $L(f) = \lim_f(1_C) \rightarrow \gamma$ в $\mathcal{E}^D$.

Обратно, если задан функтор L , то определим $\lim_f$ как композицию

$$\mathcal{E}^C \xrightarrow{\text{вкл}} \text{cat}(\mathcal{E})/C \xrightarrow{\Sigma_f} \text{cat}(\mathcal{E})/D \xrightarrow{L} \mathcal{E}^D.$$

Снова легко проверить требуемую сопряженность. $\square$

Очевидно однако, что для правых сопряженных функторов нет аналога предложения 2.36. Отчасти это понятно из того, что функтор замены базы $f^*: \text{cat}(\mathcal{E})/D \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/C$ не всегда имеет правый сопряженный, даже если $\mathcal{E}$ — топос. Конечно, интересно знать, когда же такое правое сопряжение возможно; сформулированная ниже теорема, принадлежащая, по существу, Кондюше [20], предлагает некоторый ответ на этот вопрос. (Мы опускаем детали доказательства в силу их некоторой неприглядности и потому, что этот результат нигде не используется в данной книге.)

2.37 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а $C \xrightarrow{f} D$ — морфизм из $\text{cat}(\mathcal{E})$. Обозначим через P_f, Q_f расслоенные произведения

$$\begin{array}{ccc} P_f & \xrightarrow{\quad} & D_2 \\ \downarrow & & \downarrow m \\ C_1 & \xrightarrow{f_1} & D_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_f & \xrightarrow{\quad} & D_2 \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times 1 \\ C_3 & \xrightarrow{f_3} & D_3 \end{array}$$

соответственно, а через $C_2 \xrightarrow{q} P_f$ — морфизм, индуцированный

$C_2 \xrightarrow{(f_2, m)} D_2 \times C_1$. Тогда функтор замены базы $f^*: \text{cat}(\mathcal{E})/\mathbf{D} \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/\mathbf{C}$ имеет правый сопряженный функтор Π_1 в том и только в том случае, когда диаграмма

$$Q_f \xrightarrow[1 \times m]{m \times 1} C_2 \xrightarrow{q} P_f$$

является коуравнителем. [В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ это условие означает, что если для морфизма α из $\mathbf{C}$ задано разложение $f(\alpha)$ в композицию двух морфизмов из $\mathbf{D}$, то имеется, по существу, единственное разложение α в $\mathbf{C}$, отображающееся в заданное разложение в $\mathbf{D}$.] □

Существование дополнительной структуры на категории внутренних диаграмм, что видно в частности из 2.33 и 2.35, показывает одно из преимуществ ситуации, когда в качестве основной категории $\mathcal{E}$ взят топос. Другое преимущество заключается в возможности строить с помощью аксиом топоса внутренние категории частного типа, обладающие некоторыми специальными свойствами. Следующий важный пример, которым мы воспользуемся в главах 4 и 6, принадлежит Бенабу [7].

2.38 Пример. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а $U \xrightarrow{f} X$ — морфизм из $\mathcal{E}$. Рассматривая f как « X -индексированное семейство объектов категории $\mathcal{E}$ », мы можем построить внутреннюю категорию $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)$, которая играет роль «полной подкатегории в $\mathcal{E}$, объектами которой являются слои f », а именно: $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)_0 = X$,

а $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)_1 \xrightarrow{(d_0, d_1)} X \times X$ есть экспонента $\pi_2^*(f)^{\pi_1^*(f)}$, построенная в топосе $\mathcal{E}/X \times X$. Поскольку функтор замены базы сохраняет экспоненты, то задание умножения в $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)$ равно-

сильно заданию морфизма $\pi_2^*(f)^{\pi_1^*(f)} \times \pi_3^*(f)^{\pi_2^*(f)} \rightarrow \pi_3^*(f)^{\pi_1^*(f)}$ в $\mathcal{E}/X \times X \times X$, и в качестве такового мы берем отображение внутренней композиции. Аналогично, включение единичных стрелок категории $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)$ определяется как морфизм $1_X \xrightarrow{1_f} f^*$ в $\mathcal{E}/X$.

Отметим также, что категория $\text{Full}_{\mathcal{E}}(f)$ снабжена канонической внутренней диаграммой, играющей роль «функтора включения»; попросту это объект $U \xrightarrow{f} X$ из $\mathcal{E}/X$, снабженный структурным отображением относительно подходящей монады, которое по существу есть отображение вычисления $\pi_2^*(f)^{\pi_1^*(f)} \times \pi_1^*(f) \rightarrow \pi_2^*(f)$ в $\mathcal{E}/X \times X$. □

Как указал Пенон [100], в действительности 2.38 есть специальный случай гораздо более общей конструкции, относящейся к локально внутренним категориям: это обобщение обсуждается в Приложении.

Другой более тривиальный (но столь же полезный) источник примеров внутренних категорий заключается в следующем:

2.39 Пример. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда каждую конечную (внешнюю) категорию $\mathbf{C}$ можно отождествить с внутренней категорией $I(\mathbf{C})$, интернализацией категории $\mathbf{C}$. Для этого множество из p элементов отождествим с p -кратным копроизведением 1 в $\mathcal{E}$, а отображение конечных множеств — с подходящей смесью канонических включений. Более того, если $F \xrightarrow{\gamma} I(\mathbf{C})$ — дискретное корасслоение, то ввиду универсальности копроизведений в $\mathcal{E}$ мы можем рассмотреть морфизм $F_0 \xrightarrow{\gamma_0} I(\mathbf{C})_0 = \prod_{u \in C_0} 1$

как C_0 -индексированное семейство объектов $F(u) = \gamma_u^*(\gamma_0)$, а отображение действия $F_0 \times_{I(\mathbf{C})_0} I(\mathbf{C})_1 \xrightarrow{\gamma} F_0$ — как семейство морфизмов $F(u) \xrightarrow{F(f)} F(v)$ для каждого $u \rightarrow v$ из $\mathbf{C}$. Поэтому категория $\mathcal{E}^{I(\mathbf{C})}$ эквивалентна категории (внешних) функторов $\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{E}$. По этой причине конечную категорию и ее интернализацию мы обычно не различаем между собой.

2.4. Внутренние профункторы

В этом параграфе вводится некое обобщение понятия функтора, восходящее к Бенабу, которое сыграет важную роль в доказательстве теоремы Диаконеску (4.34). Пока предположим, что категория $\mathcal{E}$ имеет конечные пределы и рефлексивные коуравнители, причем последние универсальны (т. е. сохраняются при заменах базы).

2.41 Определение. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — внутренние категории в $\mathcal{E}$. Под *внутренним профунктором* из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{D}$ понимаем внутреннюю диаграмму на $\mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{D}$. Эквивалентно, профунктор G определяется заданием объекта $G_0 \xrightarrow{(\gamma_0, \delta_0)} C_0 \times D_0$ из $\mathcal{E}/C_0 \times D_0$, наделенного левым и правым отображениями действия $C_1 \times_{C_0} G_0 \xrightarrow{\alpha} G_0$ и $G_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{\beta} G_0$ над $C_0 \times D_0$ такими, что α и β ассоциативны и унитарны (в смысле 2.14), а также коммутируют друг с другом. Через $G: \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{D}$ мы обозначаем профунктор G из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{D}$, а через $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ — категорию $\mathcal{E}^{\mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{D}}$ профункторов $\mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{D}$. □

Отметим, что профунктор $\mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{D}$ можно рассматривать эквивалентно как внутренний предпучок на $\mathbf{D}^*(\mathbf{C})$ в $\mathcal{E}^{\mathbf{D}}$ или как внутреннюю диаграмму на $(\mathbf{C}^{\text{op}})^*(\mathbf{D})$ в $\mathcal{E}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$. В частности, категории $\mathcal{E}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ и $\mathcal{E}^{\mathbf{C}}$ можно отождествить с категориями $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(\mathbf{C}, 1)$ и $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(1, \mathbf{C})$ соответственно.

2.42 Определение. Пусть B, C, D — три внутренние категории, а $B \xrightarrow{F} C \xrightarrow{G} D$ — два профунктора. Определим профунктор

$$F \otimes G: B \dashrightarrow D$$

следующим способом: $(F \otimes G)_0$ есть коуравнитель пары

$$F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} G_0 \xrightarrow[\beta_F \times 1]{1 \times \alpha_G} F_0 \times_{C_0} G_0$$

в $\mathcal{E}/B_0 \times D_0$. Поскольку эта пара рефлексивна с расщеплением $F_0 \times_{C_0} G_0 \xrightarrow{1 \times i \times 1} F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} G_0$, то согласно предположениям относительно $\mathcal{E}$

$$B_1 \times_{B_0} F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} G_0 \xrightarrow[\beta_F \times 1]{1 \times 1 \times \alpha_G} B_1 \times_{B_0} F_0 \times_{C_0} G_0 \longrightarrow B_1 \times_{B_0} (F \otimes G)_0$$

— коуравнитель, но поскольку $1 \times \alpha_G$ и $\beta_F \times 1$ эквивариантны относительно α_F , последнее действие индуцирует левое действие

$$B_1 \times_{B_0} (F \otimes G)_0 \rightarrow (F \otimes G)_0.$$

Аналогично, β_G индуцирует правое действие категории D на $(F \otimes G)_0$; легко проверить, что эти индуцированные действия удовлетворяют нужным соотношениям. Более того, нетрудно убедиться, что $\otimes_C$ — в действительности бифунктор

$$\text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, C) \times \text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, D) \rightarrow \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, D). \quad \square$$

2.43 Предложение. Бифунктор $\otimes_C$ ассоциативен с точностью до согласованного естественного изоморфизма.

Доказательство. Рассмотрим профункторы $B \xrightarrow{F} C \xrightarrow{G} D \xrightarrow{H} E$. Они задают диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} H_0 & \xrightarrow{\quad} & F_0 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} H_0 & \xrightarrow{\quad} & (F \otimes G)_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} H_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} H_0 & \xrightarrow{\quad} & F_0 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} H_0 & \xrightarrow{\quad} & (F \otimes G)_0 \times_{D_0} H_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ F_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} (G \otimes_D H)_0 & \xrightarrow{\quad} & F_0 \times_{C_0} (G \otimes_D H)_0 & & \end{array}$$

Ее первые две строки и первые два столбца являются коуравнителями в силу предположений на $\mathcal{E}$; поэтому коуравнитель третьей строки канонически изоморфен коуравнителю третьего столбца. Но по определению они совпадают с $(F \otimes_C (G \otimes_D H))_0$ и $(F \otimes_C G) \otimes_D H$ соответственно, а указанный изоморфизм,

очевидно, является изоморфизмом профункторов $B \dashrightarrow E$. Более того, каноническое происхождение данного изоморфизма обеспечивает его естественностью по F, G и H , а также выполнением обычного пятиугольного условия согласованности ([CW], с. 158). $\square$

Пусть теперь $C \xrightarrow{f} D$ — внутренний функтор. Определим по нему профунктор $f_{\#}: C \dashrightarrow D$ следующим способом:

$$(f_{\#})_0 = C_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{(\pi_1, d_1 \pi_2)} C_0 \times D_0$$

с левым действием категории C , задаваемым так:

$$C_1 \times_{C_0} C_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{(d_0 \pi_1, m(f_1 \pi_1, \pi_3))} C_0 \times_{D_0} D_1,$$

и правым действием категории D , задаваемым так:

$$C_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{1 \times m} C_0 \times_{D_0} D_1.$$

Аналогично, объект $D_1 \times_{D_0} C_0 \xrightarrow{(d_0 \pi_1, \pi_2)} D_0 \times C_0$ из $\mathcal{E}/D_0 \times C_0$ превращается в профунктор $f^{\#}: D \dashrightarrow C$. В частности, заметим, что оба профунктора $(1_C)_{\#}$ и $(1_C)^{\#}$ представляют собой (с точностью до изоморфизма) объект $C_1 \xrightarrow{(d_0, d_1)} C_0 \times C_0$ с левым и правым действиями, заданными умножением m ; этот профунктор мы обозначаем через $Y(C)$ и называем профунктором Йонеды на C .

2.44 Лемма. Для любой категории B диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, D) & \xrightarrow{(-) \otimes_C f^{\#}} & \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, C) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{E}^{B \circ p \times D} & \xrightarrow{(1 \times f)^*} & \mathcal{E}^{B \circ p \times C} \end{array}$$

коммутативна с точностью до естественного изоморфизма. Аналогично, функтор $f_{\#} \otimes_D (-)$ отождествляется с заменой базы $(f^p \times 1)^*$.

Доказательство. Пусть $B \xrightarrow{G} D$ — профунктор. Тогда имеется расщепимый коуравнитель

$$G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} C_0 \xrightarrow[\beta_G \times 1 \times 1]{1 \times m \times 1} G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} C_0 \xrightarrow[\beta_G \times 1]{f_G \times 1} G_0 \times_{D_0} C_0 = ((1 \times f)^* G)_0$$

Но это есть в точности коуравнитель, определяющий $(G \otimes_D f^{\#})_0$. Непосредственная проверка показывает, что действия категорий

В и С на $(G \otimes_D f^\#)_0$ совпадают с их действиями на $((1 \times f^*)G)_0$. $\square$

2.45 Следствие. Профунктор Йонеды $Y(C)$ является (с точностью до канонического изоморфизма) двусторонней единицей бифунктора $\otimes_C$. Значит, внутренние профункторы в $\mathcal{E}$ составляют 1-стрелки бикатегории $\text{Prof}_{\mathcal{E}}$, объектами которой являются внутренние категории.

Доказательство. После 2.44 остается проверить лишь условия согласованности, связывающие изоморфизм единицы для $Y(C)$ с изоморфизмом ассоциативности из 2.43; доказывается это утомительно, но прямолинейно. $\square$

Рассмотрим теперь профунктор $f_\# \otimes_D f^\# : C \dashrightarrow C$. Согласно доказательству леммы 2.44 объект объектов этого профунктора совпадает со стрелкой $C_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} C_0 \xrightarrow{(\pi_1, \pi_3)} C_0 \times C_0$,

и морфизм $C_1 \xrightarrow{(d_0, f_1, d_1)} C_0 \times D_1 \times C_0$ индуцирует морфизм профункторов

$$Y(C) \xrightarrow{\eta} f_\# \otimes_D f^\#.$$

Аналогично, $(f^\# \otimes_C f_\#)_0$ есть коуравнитель пары

$$D_1 \times_{D_0} C_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{(m(\pi_1, \pi_2), d_1 \pi_2, \pi_3)} D_1 \times_{D_0} C_0 \times_{D_0} D_1;$$

и морфизм $D_1 \times_{D_0} C_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{m(\pi_1, \pi_2)} D_1$ пропускается через него, индуцируя морфизм

$$f^\# \otimes_C f_\# \xrightarrow{\varepsilon} Y(D).$$

Непосредственно проверяется, что η и ε удовлетворяют треугольным соотношениям

$$\begin{array}{ccc} Y(C) \otimes f_\# & \xrightarrow{\quad \quad} & f_\# \\ \downarrow \eta \otimes 1 & & \downarrow 1 \\ (f_\# \otimes f^\#) \otimes f_\# & \xrightarrow{\quad \quad} & f_\# \otimes (f^\# \otimes f_\#) \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} f_\# \otimes Y(D) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} f^\# \otimes Y(C) & \xrightarrow{\quad \quad} & f^\# \\ \downarrow 1 \otimes \eta & & \downarrow 1 \\ f^\# \otimes (f_\# \otimes f^\#) & \xrightarrow{\quad \quad} & (f^\# \otimes f_\#) \otimes f^\# \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} Y(D) \otimes f^\# \end{array}$$

а потому профунктор $f^\#$ сопряжен слева к $f_\#$ в бикатегории $\text{Prof}_{\mathcal{E}}$. В частности, отсюда получается

2.46 Лемма. Для любой категории В диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, C) & \xrightarrow{(-) \otimes_C f_\#} & \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, D) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{E}^{B \circ P \times C} & \xrightarrow{\lim_{\rightarrow} (1 \times f_\#)} & \mathcal{E}^{B \circ P \times D} \end{array}$$

коммутативна с точностью до изоморфизма. (Аналогичное верно для $f^\# \otimes_C (-)$.)

Доказательство. Так как профунктор $f_\#$ сопряжен справа к $f^\#$ в $\text{Prof}_{\mathcal{E}}$, то функтор $(-) \otimes f_\#$ сопряжен слева к $(-) \otimes f^\#$. Поэтому требуемое непосредственно вытекает из 2.44. $\square$

Из 2.46 можно вывести следующий технический результат, важный для § 4.4:

2.47 Следствие. Пусть $C \xrightarrow{f} D$ — внутренний функтор, G — внутренний предпучок на C , а F — внутренняя диаграмма на D . Тогда имеется естественный изоморфизм

$$(f^* F) \otimes_C G \cong F \otimes_D (\lim_f C).$$

Доказательство. Соедините 2.44 и 2.46 с изоморфизмом ассоциативности $(F \otimes_D f^\#) \otimes_C G \cong F \otimes_D (f^\# \otimes_C G)$. $\square$

Как видно из 2.44 и 2.46, функторы f^* и $\lim_f$ можно описать с помощью тензорного произведения профункторов. Теперь мы покажем, что верно и обратное.

2.48 Теорема (Бенабу [6]). Пусть $C \xrightarrow{G} D$ — внутренний профунктор. Тогда в $\text{cat}(\mathcal{E})$ существует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & D \\ \downarrow \gamma & & \\ C & & \end{array}$$

такая, что $G \cong \gamma^* \otimes_G \delta_\#$ в $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, D)$. Следовательно, для любой категории В функтор $(-) \otimes_C G : \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, C) \rightarrow \text{Prof}_{\mathcal{E}}(B, D)$

изоморфен композиции $\mathcal{E}^{B \circ P \times C} \xrightarrow{(1 \times \gamma)^*} \mathcal{E}^{B \circ P \times G} \xrightarrow{\lim_{\rightarrow} (1 \times \delta)} \mathcal{E}^{B \circ P \times D}$.

Доказательство. Определим G_1 с помощью декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\mu} & C_1 \times_{C_0} G_0 \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \alpha \\ G_0 \times_{D_0} D_1 & \xrightarrow{\beta} & G_0 \end{array}$$

а $d_0, d_1: G_1 \rightrightarrows G_0$ как композиции $\pi_1 \lambda$ и $\pi_2 \mu$ соответственно. Чтобы определить умножение $G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{m} G_1$, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} G_1 \times_{G_0} G_1 & \xrightarrow{\psi} & C_1 \times_{C_0} G_1 & \xrightarrow{\pi_2} & G_1 \\ \downarrow \phi & & \downarrow 1 \times \lambda & & \downarrow \lambda \\ G_1 \times_{D_0} D_1 & \xrightarrow{\mu \times 1} & C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 & \xrightarrow{\pi_{23}} & G_0 \times_{D_0} D_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_{12} & & \downarrow \pi_1 \\ G_1 & \xrightarrow{\mu} & C_1 \times_{C_0} G_0 & \xrightarrow{\pi_2} & G_0 \end{array}$$

каждый квадрат которой декартов. Тогда $d_1 \pi_2 \lambda \pi_1 \phi = \delta_0 \beta \lambda \pi_1 \phi = \delta_0 \pi_2 \mu \pi_1 \phi = \delta_0 \pi_1 \lambda \pi_2 \psi = d_0 \pi_2 \lambda \pi_2 \psi$, поэтому $(\pi_2 \lambda \pi_1 \phi, \pi_2 \lambda \pi_2 \psi)$ отображает $G_1 \times_{G_0} G_1$ в $D_1 \times_{D_0} D_1$. Значит, определен морфизм

$$\rho = (\pi_1 \lambda \pi_1 \phi, m(\pi_2 \lambda \pi_1 \phi, \pi_2 \lambda \pi_2 \psi)): G_1 \times_{G_0} G_1 \rightarrow G_0 \times_{D_0} D_1.$$

Аналогично определяется

$$\sigma = (m(\pi_1 \mu \pi_1 \phi, \pi_1 \mu \pi_2 \psi), \pi_2 \mu \pi_2 \psi): G_1 \times_{G_0} G_1 \rightarrow C_1 \times_{C_0} G_0,$$

а вместе они задают умножение $m: G_1 \times_{G_0} G_1 \rightarrow G_1$. Его унитарность и ассоциативность вытекает из соответствующих законов для умножения в C и D .

Рассматривая теперь $\gamma_1 = \pi_1 \mu: G_1 \rightarrow C_1$ и $\delta_1 = \pi_2 \lambda: G_1 \rightarrow D_1$, получаем требуемые внутренние функторы $G \xrightarrow{\gamma} C$ и $G \xrightarrow{\delta} D$. Чтобы установить изоморфизм $G \cong \gamma^* \otimes \delta_*$, нужно проверить, что диаграмма

$$C_1 \times_{C_0} G_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{(m(\pi_1 \lambda \pi_2, m(\pi_2 \lambda \pi_2, \pi_3)), m(\pi_1, \pi_1 \mu \pi_2), \pi_2 \mu \pi_2, \pi_3))} C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{\alpha(1 \times \beta)} G_0$$

является коуравнителем. Для этого воспользуемся рассуждениями, напоминающими 0.17. Прежде всего имеется расщепимый

коуравнитель

$$C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow[1 \times 1 \times (1, id_1)]{1 \times 1 \times m} C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow[1 \times (1, id_0)]{1 \times \beta} C_1 \times_{C_0} G_0.$$

Но пара $(1 \times 1 \times m, 1 \times \beta \times 1)$ пропускается через предшествующую пару с помощью морфизма

$$C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{1 \times \tau \times 1} C_1 \times_{C_0} G_1 \times_{D_0} D_1,$$

где τ — расщепление морфизма λ , индуцированное морфизмом $G_0 \xrightarrow{(i\gamma_0, 1)} C_1 \times_{C_0} G_0$; поэтому если $C_1 \times_{C_0} G_1 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{q} Q$ — коуравнитель рассматриваемой пары, то q пропускается через $1 \times \beta$. Аналогично, q пропускается через $\alpha \times 1$. Значит, q пропускается через копроизведение

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} G_0 \times_{D_0} D_1 & \xrightarrow{1 \times \beta} & C_1 \times_{C_0} G_0 \\ \downarrow \alpha \times 1 & & \downarrow \alpha \\ G_0 \times_{D_0} D_1 & \xrightarrow{\beta} & G_0 \end{array}$$

Но непосредственно проверяется, что композиция $\alpha(1 \times \beta)$ коуравняет рассматриваемую пару, а потому изоморфна q . Последнее утверждение теоремы вытекает прямо из 2.44, 2.46 и ассоциативности тензорного произведения $\otimes$. $\square$

Заметим, что если $C = 1$ в 2.48 (так что G есть просто внутренняя диаграмма на D), то $G \xrightarrow{\delta} D$ — дискретное кораслоение, отвечающее G , как в 2.15. Аналогичное верно, когда $D = 1$.

2.49 Следствие. Если $\mathcal{E}$ — топос, то бикатегория $\mathbf{FtoF}_{\mathcal{E}}$

бизамкнута, т. е. для каждой фиксированной 1-стрелки $C \xrightarrow{G} D$ функторы $(-) \otimes_C G$ и $G \otimes_D (-)$ имеют правые сопряженные.

Доказательство. Из 2.34 известно, что функторы $(1 \times \gamma)^*$ и $\lim_{\rightarrow (1 \times \delta)}$ имеют правые сопряженные функторы $\lim_{\leftarrow (1 \times \gamma)}$ и $(1 \times \delta)_*$ соответственно, поэтому требуемое вытекает из 2.48. $\square$

2.5. Фильтрованные категории

Из 2.33 мы знаем, что функтор $C^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^C$ является обратным образом некоторого геометрического морфизма. Можно спросить: когда функтор C^* будет прямым образом геометрического морфизма? Другими словами, когда его левый сопряжен-

ный функтор $\lim_{\leftarrow C}$ точен слева? Для $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ хорошо известно (см. [CW], с. 211), что операция взятия копределов по малой категории C коммутирует с конечными пределами в том и только в том случае, когда C фильтрована. В этом параграфе соответствующий результат будет установлен для внутренних копределов; всюду предполагается, что $\mathcal{E}$ — топос, хотя на самом деле все рассуждения проходят в более общей ситуации точных категорий (см. [40]).

2.51 Определение. (i) Внутренняя категория C из $\mathcal{E}$ называется *фильтрованной*, если

(а) $C_0 \rightarrow 1$ — эпиморфизм. [Интерпретация в случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$: C непуста.]

(б) Для расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow d_1 \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

отображение $P \xrightarrow{(d_0\pi_1, d_0\pi_2)} C_0 \times C_0$ эпиморфно. [Интерпретация: любая пара объектов U, V вкладывается в диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ & \searrow & \\ & & W \end{array}$$

(с) Для расслоенных произведений

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow (d_0, d_1) \\ C_1 & \xrightarrow{(d_0, d_1)} & C_0 \times C_0 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\pi_2} & C_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow (\pi_2, m) \\ C_2 & \xrightarrow{(\pi_2, m)} & C_1 \times C_1 \end{array}$$

отображение $T \xrightarrow{(\pi_1\pi_1, \pi_1\pi_2)} R$ эпиморфно. [Интерпретация: для заданной параллельной пары $U \rightrightarrows V$ можно указать коуравнивающий ее морфизм $V \rightarrow W$.]

(ii) Категория C называется *слабо фильтрованной*, если она удовлетворяет предыдущему условию (с) и условию

(d) Для расслоенных произведений

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow d_0 \\ C_1 & \xrightarrow{d_0} & C_0 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_2} & C_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow m \\ C_2 & \xrightarrow{m} & C_1 \end{array}$$

отображение $S \xrightarrow{(\pi_1\pi_1, \pi_1\pi_2)} Q$ эпиморфно. [Интерпретация: любая диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \searrow & \\ U & & \\ & \searrow & \\ & & W \end{array}$$

вкладывается в коммутативный квадрат.] $\square$

Всюду в этом параграфе буквы P, Q, R, S и T обозначают те же расслоенные произведения, что и в 2.51. Если же мы хотим уточнить категорию, по которой они построены, то мы пишем P_C и т. д. Заметим, что если C — частично упорядоченное множество, то условие (с) излишне, поскольку $R_C \cong C_1$ и $T_C \cong C_2$; работая с частично упорядоченными множествами, обычно используют термин *направленное* как синоним *фильтрованного*.

2.52 Замечание. Условие (b) из 2.51 эквивалентно следующему утверждению: «Для любого объекта U из $\mathcal{E}$ и любой пары U -элементов $U \rightrightarrows C_0$ существует эпистрелка $V \twoheadrightarrow U$ и V -элементы $V \rightrightarrows C_1$ такие, что $d_1\lambda_1 = d_1\lambda_2$ и $d_0\lambda_i = \gamma_i \varepsilon$ ($i = 1, 2$)».

Подобным «элементарным» образом можно переформулировать и условия (с) и (d).

Доказательство. Предположим, что условие (b) выполнено и задана пара $U \rightrightarrows C_0$. Тогда V строится с помощью замены базы

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{(\lambda_1, \lambda_2)} & P \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} & C_0 \times C_0 \end{array}$$

и ε эпиморфно в силу 1.51. Обратно, если выполнено предыдущее условие, то, применяя его к общей паре $C_0 \times C_0 \rightrightarrows C_0$, получаем коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & P \\ & \searrow \varepsilon & \downarrow \\ & & C_0 \times C_0 \end{array}$$

с эпиморфизмом ε ; поэтому $P \rightarrow C_0 \times C_0$ — эпиморфизм. $\square$

В действительности мы будем пользоваться попеременно «универсальной» формой условий (b), (c) и (d), как они даны в 2.51, и их «элементарной» формой.

2.53 Лемма. Каждая фильтрованная категория слабо фильтрована.

Доказательство. Предположим, что категория $\mathcal{C}$ фильтрована. Чтобы доказать элементарную форму условия (d), предположим, что нам дана пара $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} C_1$, коуравниваемая морфизмом

$C_1 \xrightarrow{d_0} C_0$. Нужно построить эпистрелку $V \xrightarrow{\varepsilon} U$ и пару $V \xrightarrow[\delta_2]{\delta_1} C_1$ такие, что $d_0 \delta_i = d_1 \gamma_i \varepsilon$ ($i = 1, 2$) и $m(\gamma_i \varepsilon, \delta_i) = m(\gamma_2 \varepsilon, \delta_2)$. При-

меняя (b) к паре $(d_1 \gamma_1, d_1 \gamma_2)$, находим стрелку $W \xrightarrow{\varepsilon_1} U$ и пару $W \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} C_1$ такие, что $d_0 \lambda_i = d_1 \gamma_i \varepsilon_1$ ($i = 1, 2$) и $d_1 \lambda_1 = d_1 \lambda_2$. Но морфизмы $m(\gamma_1 \varepsilon_1, \lambda_1)$ и $m(\gamma_2 \varepsilon_1, \lambda_2)$: $W \rightarrow C_1$ могут не совпадать, однако они коуравниваются как стрелкой d_0 , так и стрелкой d_1 .

Поэтому, применяя (c), получаем $V \xrightarrow{\varepsilon_2} W$ и $V \xrightarrow{\mu} C_1$ такие, что $m(m(\gamma_1 \varepsilon_1, \lambda_1) \varepsilon_2, \mu) = m(m(\gamma_2 \varepsilon_1, \lambda_2) \varepsilon_2, \mu)$. Далее ввиду ассоциативности m убеждаемся, что $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ и $\delta_i = m(\lambda_i \varepsilon_2, \mu)$ — требуемые морфизмы. $\square$

2.54 Лемма. Если $\mathcal{C}$ фильтрована, то $\lim \mathcal{C} \cong 1$.

Доказательство. Пусть $C_0 \xrightarrow{\tau} L$ — «конус копредела» категории $\mathcal{C}$, т. е. коуравнитель стрелок d_0 и d_1 . Тогда в силу (b) для любой пары морфизмов $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} C_0$ найдутся морфизмы

$V \xrightarrow{\varepsilon} U$ и $V \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} C_1$ такие, что $\tau \gamma_i \varepsilon = \tau d_0 \lambda_1 = \tau d_1 \lambda_1 = \tau d_1 \lambda_2 = \tau d_0 \lambda_2 = \tau \gamma_2 \varepsilon$. Но ε — эпиморфизм, откуда $\tau \gamma_1 = \tau \gamma_2$. В частности, τ коуравнивает ядерную пару стрелки $C_0 \rightarrow 1$. Значит, в силу (a) и 1.53 имеется факторизация

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{\tau} & 1 \\ & \searrow \tau & \downarrow \sigma \\ & & L \end{array}$$

Но σ — эпиморфизм, поскольку τ — эпиморфизм, и σ — мономорфизм, поскольку его область определения есть 1; поэтому $L \cong 1$. $\square$

Заметим теперь, что для любой категории $\mathcal{C} \in \text{cat}(\mathcal{E})$ с $\lim \mathcal{C} = L$ морфизмы, задающие $\mathcal{C}$, определены над L , а потому

категорию $\mathcal{C}$ можно рассматривать как объект из $\text{cat}(\mathcal{E}/L)$. Это изменение статуса категории $\mathcal{C}$ не меняет понятие «дискретного корасслоения» над $\mathcal{C}$.

2.55 Предложение. Если категория $\mathcal{C}$ слабо фильтрована в $\text{cat}(\mathcal{E})$, то она фильтрована как объект из $\text{cat}(\mathcal{E}/L)$. Значит, $\mathcal{C}$ фильтрована в $\text{cat} \mathcal{E}$ в том и только в том случае, когда она слабо фильтрована и $\lim \mathcal{C} \cong 1$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{C}$ — слабо фильтрованная категория в $\mathcal{E}$. Но переход от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}/L$ не влияет на условие (c), так как функтор $\Sigma_L: \mathcal{E}/L \rightarrow \mathcal{E}$ отражает расслоенные произведения, а условие (a) в $\mathcal{E}/L$ есть просто утверждение об эпиморфности $C_0 \rightarrow L$. Поэтому остается доказать условие (b) в $\mathcal{E}/L$, которое эквивалентно утверждению, что образ (в $\mathcal{E}$) морфизма $P \xrightarrow[(d_0 \pi_1, d_0 \pi_2)]{d_0 \pi_1} C_0 \times C_0$ есть в точности произведение $C_0 \times_L C_0$. Обозначим через $I \xrightarrow{d_0 \pi_1} C_0 \times C_0$ этот образ. Очевидно,

$I \leq C_0 \times_L C_0$, поскольку $P \xrightarrow{d_0 \pi_1} C_0$ и $P \xrightarrow{d_0 \pi_2} C_0$ — морфизмы над L . Однако I есть отношение эквивалентности на C_0 (рефлексивность и симметричность очевидны, а транзитивность легко выводится из (d)). Следовательно, в силу 1.23 существует морфизм $C_0 \xrightarrow{f} Y$, ядерная пара которого совпадает с I . Но f коуравнивает пару $C_1 \xrightarrow[\delta_1]{\delta_0} C_0$, так как морфизм $(1_{C_1}, id_1): C_1 \rightarrow P$ задает факторизацию этой пары через I , а потому имеется факторизация

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{\quad} & L \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

Значит, $C_0 \times_L C_0 \leq I$ и первая часть нашего предложения установлена. Вторая часть легко выводится из этого и двух последних лемм. $\square$

2.56 Лемма. Пусть $V \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}$ — дискретное корасслоение. Если $\mathcal{C}$ слабо фильтрована, то и V слабо фильтрована.

Доказательство. С помощью диаграммного поиска непосредственно проверяется, что квадраты

$$\begin{array}{ccc} S_B & \xrightarrow{\quad} & Q_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_C & \xrightarrow{\quad} & Q_C \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} T_B & \xrightarrow{\quad} & R_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_C & \xrightarrow{\quad} & R_C \end{array}$$

декартовы, вертикальные стрелки при этом естественно индуцированы функтором γ . Поэтому требуемое вытекает из 1.51. $\square$

2.57 Предложение. Если категория $\mathcal{C}$ фильтрована, то функтор $\varinjlim_{\mathcal{C}}: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет бинарные произведения.

Доказательство. Пусть $F^i \xrightarrow{\sigma^i} \mathcal{C}$ ($i=1, 2$) — дискретные корасслоения с копределами $F_0^i \twoheadrightarrow L^i$ и пусть $G \equiv F^1 \times_{\mathcal{C}} F^2$ имеет копредел $G_0 \twoheadrightarrow M$. Но проекции $G \rightarrow F^i$ индуцируют морфизмы $M \rightarrow L^i$, а потому имеется морфизм $M \xrightarrow{\varphi} L^1 \times L^2$. Нужно показать, что φ — изоморфизм.

Чтобы установить мономорфность φ , ввиду 1.52 достаточно показать, что любая пара морфизмов $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} G_0$, коуравняемая композицией $\varphi\tau$, на самом деле коуравняется τ . Действительно, отсюда будет следовать, что диаграмма $G_0 \xrightarrow{\tau} M \xrightarrow{\varphi} L^1 \times L^2$ и есть эпиморфное разложение композиции $\varphi\tau$. Итак, предположим заданную такую пару. Запишем каждую из ее составляющих в виде $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)$, где $\gamma_j^i: U \rightarrow F_0^i$.

Компоненты γ_1^1 и γ_2^1 коуравняются морфизмом σ^1 , а вследствие 2.56 категория F^1 слабо фильтрована, поэтому в силу 2.55

существует эпиморфизм $V^1 \xrightarrow{\varepsilon^1} U$ и морфизмы $V^1 \xrightarrow[\lambda_2^1]{\lambda_1^1} F_1^1$ такие,

что $d_1\lambda_1^1 = d_1\lambda_2^1$ и $d_0\lambda_j^1 = \gamma_j^1\varepsilon^1$. Аналогично, существуют $V^2 \xrightarrow{\varepsilon^2} U$ и $V^2 \xrightarrow[\lambda_2^2]{\lambda_1^2} F_1^2$. Рассматривая расслоенное произведение над U ,

мы можем предполагать в действительности, что $V^1 = V^2 = V$ и $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \varepsilon$.

Рассмотрим теперь четыре морфизма

$$\mu_j^i = \alpha_1^i \lambda_j^i: V \rightarrow C_1 \quad (i=1, 2, j=1, 2).$$

Для них выполнено соотношение

$$d_0\mu_j^1 = d_0\alpha_1^1\lambda_j^1 = \alpha_0^1 d_0\lambda_j^1 = \alpha_0^1 \gamma_j^1 \varepsilon = \alpha_0^2 \gamma_j^2 \varepsilon = d_0\mu_j^2 \quad (j=1, 2),$$

так как (γ_j^1, γ_j^2) отображает в $F_0^1 \times_{C_0} F_0^2$. С помощью несложного распространения рассуждений из доказательства леммы 2.53 находим морфизмы $W \twoheadrightarrow V$ и $W \xrightarrow[\rho^2]{\rho^1} C_1$ такие, что $m(\mu_j^1 \zeta, \rho^1) =$

$= m(\mu_j^2 \zeta, \rho^2)$ одновременно при $j=1$ и $j=2$. Заметим, что в силу того, что α^j — дискретные корасслоения, мы можем поднять ρ^i до морфизмов $\theta^i: W \rightarrow F_1^i$ с $d_0\theta^i = d_1\lambda_1^i \zeta = d_1\lambda_2^i \zeta$. Положим $\psi_j^i = m(\lambda_j^i \zeta, \theta^i): W \rightarrow F_1^i$; тогда $\alpha_1^1 \psi_j^1 = m(\mu_j^1 \zeta, \rho^1) = m(\mu_j^2 \zeta, \rho^2) = \alpha_1^2 \psi_j^2$, а потому (ψ_j^1, ψ_j^2) — морфизм вида $W \rightarrow F_1^1 \times_{C_1} F_1^2 = G_1$. Кроме того, $d_1(\psi_1^1, \psi_1^2) = (d_1\theta^1, d_1\theta^2) = d_1(\psi_1^1, \psi_1^2)$ и $d_0(\psi_j^1, \psi_j^2) = (d_0\lambda_j^1, d_0\lambda_j^2) \zeta = (\gamma_j^1, \gamma_j^2) \varepsilon \zeta = \gamma_j \varepsilon \zeta$. Поэтому $\gamma_1 \varepsilon \zeta$ и $\gamma_2 \varepsilon \zeta$ коуравняются морфизмом $G_0 \twoheadrightarrow M$, но $\varepsilon \zeta$ — эпиморфизм, а потому γ_1 и γ_2 коуравняются τ .

Чтобы установить эпиморфность φ , рассмотрим морфизмы $(\alpha_0^1 \pi^1, \alpha_0^2 \pi^2): F_0^1 \times F_0^2 \twoheadrightarrow C_0$. В силу 2.51 (b) имеются мор-

физмы $V \twoheadrightarrow F_0^1 \times F_0^2$ и $V \xrightarrow[\lambda^2]{\lambda^1} C_1$ такие, что $d_1\lambda^1 = d_1\lambda^2$ и $d_0\lambda^i = \alpha_0^i \pi^i \varepsilon$. Поднимем теперь λ^i до морфизмов $\mu^i: V \rightarrow F_1^i$ с $d_0\mu^i = \pi^i \varepsilon$ и определим отображение $\rho = (d_1\mu^1, d_1\mu^2): V \rightarrow F_0^1 \times_{C_0} F_0^2 = G_0$. Но $\varphi\tau\rho = (\sigma^1 \times \sigma^2)\rho = (\sigma^1 d_1\mu^1, \sigma^2 d_1\mu^2) = (\sigma^1 d_0\mu^1, \sigma^2 d_0\mu^2) = (\sigma^1 \times \sigma^2) \varepsilon$ — эпиморфизм, откуда φ — эпиморфизм. Значит, в силу 1.22 φ — изоморфизм. $\square$

2.58 Теорема. Если категория $\mathcal{C}$ фильтрована, то функтор $\varinjlim_{\mathcal{C}}: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$ точен слева.

Доказательство. В 2.54 мы убедились, что функтор $\varinjlim$ сохраняет конечный объект; поэтому достаточно проверить, что он сохраняет расслоенные произведения. Но соединяя 2.18, 2.55, 2.56 и 2.57, видим, что функтор $\varinjlim_{\mathcal{C}}$ преобразует расслоенные

произведения над $(F \twoheadrightarrow C)$ в $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ в произведения категории $\mathcal{E} / \varinjlim_{\mathcal{C}} F$, т. е. в расслоенные произведения над $\varinjlim_{\mathcal{C}} (\gamma)$ в $\mathcal{E}$. $\square$

В действительности верно и обратное:

2.59 Теорема. Если функтор $\varinjlim_{\mathcal{C}}$ точен слева, то категория $\mathcal{C}$ фильтрована.

Доказательство. (a) Так как $\varinjlim_{\mathcal{C}}$ сохраняет конечный объект, то $\varinjlim_{\mathcal{C}} C \cong 1$; поэтому $C_0 \rightarrow 1$ — эпиморфизм.

(b) Пусть $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} C_0$ — пара U -элементов из C_0 . Рассмотрим представимые диаграммы $R(\gamma_i)$; тогда в силу 2.26 $\varinjlim_{\mathcal{C}} (R(\gamma_i)) \cong$

$\cong U$, откуда $\lim_{\mathbf{C}} (R(\gamma_i) \times R(\gamma_2)) \cong U \times U$. Пусть теперь

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\epsilon} & U \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ R(\gamma_1)_0 \times_{C_0} R(\gamma_2)_0 & \longrightarrow & U \times U \end{array}$$

— расслоенное произведение, а λ_i — композиция

$$V \rightarrow R(\gamma_1)_0 \times_{C_0} R(\gamma_2)_0 \rightarrow R(\gamma_i)_0 = U \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\pi_2} C_1 \quad (i = 1, 2).$$

Легко проверить, что ϵ и λ_i обладают свойствами, указанными в 2.52.

(с) Пусть $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} C_1$ — два U -элемента таких, что $d_i \gamma_1 = d_i \gamma_2 = \eta_i$ ($i = 0, 1$). Тогда γ_i индуцируют морфизмы представимых диаграмм $R(\eta_1) \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} R(\eta_0)$; обозначим через $E \rightarrow R(\eta_i)$ их уравниватель в $\mathcal{E}^C$. Применяя теперь функтор $\lim_{\mathbf{C}}$ к морфизмам γ_i , получим 1_U для каждого из них; поэтому $\lim_{\mathbf{C}}(E) \cong \cong \text{eq}(1_U, 1_U) \cong U$. В частности, $E_0 \rightarrow U$ — эпиморфизм. Пусть δ есть композиция

$$E_0 \rightarrow R(\eta_1)_0 = U \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\pi_2} C_1;$$

тогда легко проверить, что морфизмы $E_0 \rightarrow U$ и δ обладают свойствами, требуемыми в элементарной форме условия (с). $\square$

Упражнения к главе 2

[В этих упражнениях $\mathcal{E}$ обозначает произвольную категорию с конечными пределами, если не оговорено противное.]

1. Дайте точное определение внутреннего естественного преобразования. Какому понятию из теории симплициальных объектов оно соответствует? Пусть $\mathbf{C} \xrightleftharpoons[g]{f} \mathbf{D}$ — параллельная пара внутренних функторов. Покажите, что каждое внутреннее естественное преобразование $f \rightarrow g$ индуцирует (внешнее) естественное преобразование $f^* \rightarrow g^*$, где $\mathcal{E}^{\mathbf{D}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}^{\mathbf{C}}$ — функтор, введенный в 2.19. Получите отсюда, что если $\mathcal{E}$ — топос, то функтор $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Top}/\mathcal{E}$ из 2.35 продолжается до функтора $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Top}/\mathcal{E}$, где $\text{cat}(\mathcal{E})$ — 2-категория, объектами и 1-стрелками ко-

торой являются объекты и стрелки из $\text{cat}(\mathcal{E})$, а 2-стрелками — внутренние естественные преобразования.

2. Определите понятие «внутренний группоид в $\mathcal{E}$ ». Докажите, что если $\mathbf{G}$ — группоид, то для любого дискретного кораслоения $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ категория $\mathbf{F}$ также будет группоидом.

3. Пусть $\mathbf{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Определите внутреннюю категорию $\mathbf{C}^2$, «объектами которой являются морфизмы из $\mathbf{C}$ » [Указание. В качестве объекта морфизмов категории $\mathbf{C}^2$ возьмите объект $S_{\mathbf{C}}$ из § 2.5], и постройте пару внутренних функторов $\mathbf{C}^2 \xrightleftharpoons[\partial_1]{\partial_0} \mathbf{C}$. Для любой пары внутренних функторов

$\mathbf{B} \xrightleftharpoons[\gamma_1]{\gamma_0} \mathbf{C}$ покажите, что внутренние естественные преобразова-

ния $\gamma_0 \rightarrow \gamma_1$ соответствуют внутренним функторам $\mathbf{B} \xrightarrow{\delta} \mathbf{C}^2$ с $\partial_0 \delta = \gamma_0$ и $\partial_1 \delta = \gamma_1$. [Поэтому категорию $\text{cat}(\mathcal{E})$ называют *представимой 2-категорией*.] Покажите, что диаграмма $\mathbf{C}^2 \xrightleftharpoons[\partial_1]{\partial_0} \mathbf{C}$ обладает структурой внутренней категории из $\text{cat}(\mathcal{E})$.

4. Предположим, что категория $\mathcal{E}$ декартово замкнута. Для категорий $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \text{cat}(\mathcal{E})$ определим «объект внутренних функторов $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ » как подобъект произведения $D_0^{C_0} \times D_1^{C_1} \times D_2^{C_2}$, задаваемый пересечением определенных уравнивателей. Используя идеи упражнения 3, покажите, что этот объект является объектом объектов некоторой внутренней категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ из $\mathcal{E}$; выведите отсюда, что категория $\text{cat}(\mathcal{E})$ декартово замкнута.

5. Пусть $\mathbf{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, а $\mathbf{D}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}^{\mathbf{C}}$, представленная диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightleftharpoons[\epsilon_1^1]{\epsilon_0^1} & D_1 & & \\ \downarrow d_0^1 & \searrow \delta_1 & \swarrow \gamma_1 & & \downarrow d_1^0 \\ & C_1 & & & \\ \downarrow d_1^1 & \downarrow d_0 & \downarrow d_1 & & \downarrow d_0^0 \\ E_0 & \xrightleftharpoons[\epsilon_1^0]{\epsilon_0^0} & D_0 & & \\ & \searrow \delta_0 & \swarrow \gamma_0 & & \\ & C_0 & & & \end{array}$$

Покажите, что $E_1 \xrightarrow{(d_0^1, e_1^1)} E_0 \times_{D_0} D_1$ — изоморфизм, а затем определите на $G(D) = \left(D_1 \times_{D_0} E_0 \xrightarrow[d_0^0 \pi_1]{d_0^0 \pi_1} D_0 \right)$ структуру внутренней категории. [Умножение задается композицией $D_1 \times_{D_0} E_0 \times \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} E_0 \xrightarrow{\sim} D_1 \times_{D_0} E_1 \times_{D_0} E_0 \xrightarrow{1 \times (e_0^1, d_1^1) \times 1} D_1 \times_{D_0} D_1 \times_{D_0} E_0 \times \times_{D_0} E_0 \xrightarrow{m \times m} D_1 \times_{D_0} E_0$.] Покажите, что морфизмы $(\gamma_0, \gamma_1 \pi_1)$ задают внутренний функтор $G(D) \rightarrow C$, и выведите отсюда, что G есть функтор $\text{cat}(\mathcal{E}^C) \rightarrow \text{cat}(\mathcal{E})/C$. [Категория $C(D)$ называется категорией Гротендика, отвечающей D ; см. [44], VI.9.]

6. Пусть $B \xrightarrow{f} C$ — объект из $\text{cat}(\mathcal{E})/C$. Покажите, что f изоморфен некоторому объекту из образа функтора G в том и только в том случае, когда существуют морфизмы $\sigma: B_0 \times_{C_0} C_1 \rightarrow B_1$ и $\tau: B_1 \rightarrow B_1$, удовлетворяющие следующим соотношениям:
 (i) $d_0 \sigma = \pi_1$; (ii) $f_1 \sigma = \pi_2$; (iii) $\sigma(1 \times i) = i$;
 (iv) $\sigma(1 \times m) = m(\sigma \pi_{12}, \sigma(d_1 \sigma \pi_{12}, \pi_3))$; $B_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow B_1$;
 (v) $\tau \tau = \tau$; (vi) $f_1 \tau = i f_0 d_1$; (vii) $d_1 \tau = d_1$;
 (viii) $d_0 \tau = d_1 \sigma(d_0, f_1)$; (ix) $1_{B_1} = m(\sigma(d_0, f_1), \tau)$;
 (x) $\tau \sigma = id_1 \sigma$; (xi) $\tau m = m(\tau m(\pi_1, \sigma(d_0, f_1) \pi_2), \tau \pi_2): B_2 \rightarrow B_1$.
 [Указание. По σ и τ определите $D_0 = B_0$, $D_1 = \text{im}(\sigma)$ и $E_0 = \text{im}(\tau)$. Из соотношения (ix) вытекает, что $B_1 \cong D_1 \times_{D_0} E$. Морфизм категории $\text{cat}(\mathcal{E})$, снабженный морфизмами σ и τ , удовлетворяющими предыдущим соотношениям, называется *расщепимым корасслоением*.] Покажите также, что морфизм f является дискретным корасслоением тогда и только тогда, когда он является расщепимым корасслоением и соответствующая внутренняя категория в $\mathcal{E}^C$ дискретна.

7*. Пусть C, D — внутренние категории, как в упражнении 5. Установите эквивалентность категорий $(\mathcal{E}^C)^D \simeq \mathcal{E}^{G(D)}$, получающуюся применением функтора G к дискретным корасслоениям над D .

8. Пусть C — частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$, а D — частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}^C$. Покажите, что $G(D)$ — частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$.

9. Пусть C — малая категория. Покажите, что C фильтрована (соответственно слабо фильтрована) в том и только в том случае, когда для любой конечной диаграммы (соответственно для любой конечной связной диаграммы) в C имеется конус (не

обязательно конус копредела) из данной диаграммы в некоторый объект категории C .

10*. Пусть C — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Морфизм $1 \xrightarrow{u} C_0$ называют *конечным объектом* в C , если существует морфизм $C_0 \xrightarrow{h} C_1$ такой, что $d_0 h = 1_{C_0}$ и квадрат

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow h & & \downarrow u \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

декартов. Покажите, что если C имеет конечный объект, то она фильтрована. [С помощью u и h постройте расщепления эпиморфизмов из 2.51.]

11*. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Внутренний функтор $C \xrightarrow{f} D$ между фильтрованными категориями из $\mathcal{E}$ называют *кофинальным*, если $(a) D_1 \times_{D_0} C_0 \xrightarrow{d_0 \pi_1} D_0$ — эпиморфизм и $(b) T_D \times_{D_1} C_1 \xrightarrow{(\pi_1 \pi_1, \pi_1 \pi_2) \times d_0} R_D \times_{D_0} C_0$ — эпиморфизм, где расслоенные произ-

ведения определены для структурных морфизмов $T_D \xrightarrow{\pi_2 \pi_1} D_1$ и $R_D \xrightarrow{d_1 \pi_1} D_0$ соответственно. Запишите условия в элементарной форме и выведите отсюда, что для компонуемой пары $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{f} E$ с кофинальным функтором f композиция gf кофинальна тогда и только тогда, когда кофинален функтор g . Покажите также, что функтор $C \xrightarrow{f} D$ кофинален в том и только в том случае, когда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^D & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{E}^C \\ & \searrow \text{h}_{\mathcal{E}^D} & \downarrow \text{h}_{\mathcal{E}^C} \\ & & \mathcal{E} \end{array}$$

коммутирует с точностью до изоморфизма. [Указание. Поскольку все функторы этой диаграммы сохраняют коуравнители, коммутативность достаточно проверять на представимых диаграммах.]

ГЛАВА 3

ТОПОЛОГИИ И ПУЧКИ

3.1. Топологии

Напомним, что понятие топоса Гротендика было введено в два этапа: от «предсуществующей» категории множеств $\mathcal{S}$ мы переходим к категории $\mathcal{S}^{\text{cop}}$ предпучков на малой категории $\mathcal{C}$, а затем к категории $\text{Shv}(\mathcal{C}, J)$ пучков в топологии Гротендика J . Из главы 2 мы знаем, как можно сделать первый шаг в ситуации, когда категория $\mathcal{S}$ заменена элементарным топосом $\mathcal{E}$; цель настоящей главы — дать аналогичное обобщение второго шага.

3.11 Определение (Ловер и Тьерне [LH]). Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Топологией в $\mathcal{E}$ называется морфизм $j: \Omega \rightarrow \Omega$ такой, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{i} & \Omega \\ & \searrow j & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \\ & \searrow j & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\ \downarrow j \times j & & \downarrow j \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

коммутативны, где $\wedge$ — морфизм, определенный в 1.49(ii). Если j — топология, то через $J \rightarrow \Omega$ мы обозначаем подобъект, классифицируемый посредством j , а через $\Omega_j \rightarrow \Omega$ — уравниватель морфизмов j и 1_Ω (эквивалентно, образ j , поскольку j — идемпотент). $\square$

3.12 Пример. Пусть $(\mathcal{C}, J)$ — сайт (ср. 0.32). Сравнивая 0.32(ii) и 1.12(iii), убеждаемся, что J — подобъект Ω в топосе $\mathcal{S}^{\text{cop}}$; поэтому ему соответствует классифицирующее отображение $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ в $\mathcal{S}^{\text{cop}}$. Более того, нетрудно проверить, что предпучок J из Ω удовлетворяет условиям 0.32(i) и (iii) в том и только в том случае, когда классифицирующее отображение j удовлетворяет всем условиям определения 3.11; поэтому имеется биекция между топологиями (в смысле 3.11) в $\mathcal{S}^{\text{cop}}$ и топологиями Гротендика на $\mathcal{C}$. $\square$

Хотя подавляющее преимущество данного элементарного определения топологии заключается в его краткости, существует, однако, и другой, более явный подход к определению топологии, преимущество которого состоит в его применимости к более общим категориям, чем топосы.

3.13 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольная категория с расслоенными произведениями. Универсальная операция замы-

кания на $\mathcal{E}$ определяется заданием для каждого объекта $X \in \mathcal{E}$ операции замыкания (т. е. возрастающего и сохраняющего порядок идемпотентного отображения) на частично упорядоченном множестве подобъектов из X такой, что замыкание коммутирует с подъемом вдоль любого морфизма из $\mathcal{E}$; замыкание подобъекта $X' \rightarrow X$ обозначается через $\bar{X}' \rightarrow X$. Таким образом, для любой стрелки $Y \xrightarrow{f} X$ имеется изоморфизм $f^*(\bar{X}') \cong \overline{f^*(X')}$ подобъектов в Y .

Слова *плотный* и *замкнутый* мы используем в их обычном значении по отношению к универсальной операции замыкания, т. е. подобъект $X' \rightarrow X$ плотен, если $\bar{X}' \cong X$, и замкнут, если $\bar{X}' \cong X'$. $\square$

3.14 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда существует биекция между топологиями в $\mathcal{E}$ и универсальными операциями замыкания на $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Ассоциированная с ней операция j -замыкания определяется так: если $X \xrightarrow{\phi} \Omega$ — классифицирующее отображение подобъекта $X' \rightarrow X$, то $\bar{X}'$ — подобъект, классифицируемый композицией $j\phi$. Согласно двум первым диаграммам из 3.11 очевидно, что это возрастающая (т. е. $X' \leq \bar{X}'$) и идемпотентная операция; то, что она сохраняет порядок, легко получается из третьей диаграммы, поскольку $X' \leq X''$ тогда и только тогда, когда $X' \cap X'' \cong X'$, а универсальность очевидна по определению.

Обратно, пусть задана универсальная операция замыкания на $\mathcal{E}$. Применяя ее к общему подобъекту $1 \rightarrow \Omega$, получаем подобъект $J \rightarrow \Omega$ с классифицирующим отображением $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$, а тогда вследствие универсальности вся операция замыкания индуцирована j , как и выше. Для проверки того, что j — топология, достаточно установить, что всякая универсальная операция замыкания коммутирует с пересечением подобъектов, откуда получится третье условие определения 3.11; первые два условия проверяются непосредственно.

Очевидно, однако, что подобъект $\bar{X}'$ однозначно характеризуется как подобъект в X такой, что $X' \rightarrow \bar{X}'$ плотен, а $\bar{X}' \rightarrow X$ замкнут. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad} & X' \cap X'' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \bar{X}' & \xleftarrow{\quad} & \bar{X}' \cap X'' & \xrightarrow{\quad} & X'' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \bar{X}' \cap \bar{X}'' & \xrightarrow{\quad} & \bar{X}'' \end{array}$$

оба квадрата которой декартовы, получаем, что подобъект

$$X' \cap X'' \longrightarrow \bar{X}' \cap \bar{X}''$$

плотен; аналогично доказывается замкнутость подобъекта $\bar{X}' \cap \bar{X}'' \longrightarrow X$. Итак, $\bar{X}' \cap \bar{X}'' \cong \overline{X' \cap X''}$, что и требовалось. $\square$

Следует предупредить читателя, чтобы он не путал универсальную операцию замыкания, индуцированную топологией в смысле 3.11, с операцией замыкания по Куратовскому, заданной на решетке всех подмножеств топологического пространства [175]. Возможно, неудачно, что словом «топология» продолжают называть результаты многократных обобщений, описанные в § 0.3 и в настоящем параграфе, ибо в действительности преобразование между топологией в смысле 3.11 и обычной топологией на множестве весьма слаба. Чтобы подчеркнуть различие этих двух типов операции замыкания, отметим, что операция замыкания по Куратовскому всегда коммутирует с конечными объединениями, но не коммутирует в общем случае с пересечениями, в то время как мы только что доказали, что универсальная операция замыкания коммутирует с пересечениями, хотя, как правило, не коммутирует с объединениями.

3.15 Лемма. Пусть j — топология в $\mathcal{E}$, а $X' \xrightarrow{\sigma} X$ — морфизм с классифицирующим отображением $X \xrightarrow{\phi} \Omega$. Тогда σ j -плотен тогда и только тогда, когда ϕ пропускается через $J \longrightarrow \Omega$, и j -замкнут тогда и только тогда, когда ϕ пропускается через $\Omega_j \longrightarrow \Omega$.

Доказательство. Очевидное следствие определений под-объектов J и Ω_j . $\square$

3.16 Пример. Пусть (C, J) — сайт, а j — соответствующая топология в $\mathcal{E}^{\text{cop}}$. Тогда подпредпучок $R \longrightarrow h_U$ j -плотен в том и только в том случае, когда он является элементом из $J(U)$, т. е. J -покрывающим решетом на U . Рассмотрим, в частности, классический случай топологического пространства (X, U) : тогда решетом на открытом множестве $U \subseteq X$ является семейство $\mathcal{V}$ открытых подмножеств из U такое, что верна импликация $V \in \mathcal{V}$, $V' \subseteq V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}$, а $\bar{\mathcal{V}} = j_U(\mathcal{V})$ является решетом

$$\{W \in U \mid W \subseteq \bigcup \mathcal{V}\};$$

поэтому $\mathcal{V}$ плотно в h_U тогда и только тогда, когда оно покрывает U , и замкнуто тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\{V \in U \mid V \subseteq V_0\}$ для некоторого $V_0 \subseteq U$, т. е. тогда и только тогда, когда оно является представимым решетом. $\square$

Третий подход, позволяющий описать топологию в топосе $\mathcal{E}$, состоит в описании класса всех плотных мономорфизмов в $\mathcal{E}$. Если D — произвольный подобъект в Ω , то через $\mathbb{E}_D$ мы обозначаем класс всех мономорфизмов, классифицирующее отображение которых пропускается через D . (Заметим, что из этого определения непосредственно следует, что класс $\mathbb{E}_D$ замкнут относительно подъемов; при этом нельзя утверждать противоположное, что любой класс мономорфизмов, замкнутый относительно подъемов, «классифицируем» некоторым подобъектом из Ω .)

3.17 Лемма. Пусть D — подобъект в Ω , и предположим, что $1 \xrightarrow{t} \Omega$ пропускается через D (эквивалентно, $\mathbb{E}_D$ содержит все изоморфизмы). Тогда класс $\mathbb{E}_D$ замкнут относительно спуска.

Доказательство. Пусть

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

— кодекартов квадрат с $\sigma \in \mathbb{E}_D$. Ввиду 1.28 данный квадрат также декартов, а потому, если $T \xrightarrow{\phi} \Omega$ — классифицирующее отображение мономорфизма τ , то композиция ϕg классифицирует $g^*(\tau) \cong \sigma$ и пропускается поэтому через D . Но $\phi \tau$ классифицирует $\tau^*(\tau) \cong 1_T$, а потому тоже пропускается через D . Используя теперь то, что данный квадрат кодекартов, получаем факторизацию ϕ через D . $\square$

3.18 Предложение. Пусть J — подобъект в Ω . Тогда классифицирующее отображение $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ подобъекта $J \longrightarrow \Omega$ является топологией в том и только в том случае, когда класс $\mathbb{E}_J$ представляет собой насыщенную мультипликативную систему мономорфизмов из $\mathcal{E}$, т. е. $\mathbb{E}_J$ содержит все изоморфизмы и $\sigma \tau \in \mathbb{E}_J \Leftrightarrow \sigma \in \mathbb{E}_J$ и $\tau \in \mathbb{E}_J$.

Доказательство. Предположим, что j — топология. Тогда с помощью 3.14 легко проверить, что класс j -плотных мономорфизмов удовлетворяет требуемым условиям.

Обратно, предположим, что класс $\mathbb{E}_J$ удовлетворяет данным условиям. Тогда легко убедиться, что операция замыкания ρ на подобъектах, индуцированная топологией j , описывается следующим способом: если $X' \longrightarrow X$ — подобъект в X , то $\rho(X')$ есть единственный наибольший подобъект $X'' \longrightarrow X$, для которого $X' \cap X'' \longrightarrow X''$ лежит в $\mathbb{E}_J$. Но поскольку $\mathbb{E}_J$ содержит 1_X , то $X' \leq \rho(X')$. С другой стороны, так как композиция $X' \longrightarrow \rho(X') \longrightarrow \rho(\rho(X'))$ лежит в $\mathbb{E}_J$, то $\rho(\rho(X')) \leq \rho(X')$, а потому ρ — идемпотент. Осталось проверить, что ρ сохраняет порядок; рассмотрим пару подобъектов $X' \longrightarrow X$, $X'' \longrightarrow X$ таких,

что $X' \leq X''$, и образуем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \rho(X') \cap \rho(X'') & \xrightarrow{\quad} & \rho(X'') \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ \rho(X') & \xrightarrow{\quad} & \rho(X') \cup \rho(X'') \end{array}$$

Но поскольку $X' \leq X'' \leq \rho(X'')$, включение $X' \rightarrow \rho(X')$ пропускается через σ , а потому $\sigma \in \Xi_j$. Однако указанная диаграмма задает спуск, поэтому в силу 3.17 $\tau \in \Xi_j$. Композиция $X' \rightarrow \rho(X'') \xrightarrow{\tau} \rho(X') \cup \rho(X'')$ также лежит в Ξ_j , откуда τ — изоморфизм, т. е. $\rho(X') \leq \rho(X'')$. Итак, ρ — универсальная операция замыкания, и в силу 3.14 j — топология. $\square$

Этот параграф мы закончим одной технической леммой об универсальных операциях замыкания, которая будет использована несколько раз в оставшейся части этой главы.

3.19 Лемма. Предположим, что

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ Z & \xrightarrow{\phi} & T \end{array}$$

— коммутативный квадрат, где σ плотен, а τ замкнут. Тогда ϕ пропускается (однозначно, так как τ — мономорфизм) через τ .

Доказательство. Ввиду коммутативности данного квадрата $\sigma \leq \phi^*(\tau)$ как подобъекты в Z . Поэтому $1_Z \cong \sigma \leq \phi^*(\tau) \cong \phi^*(\tau) \cong \phi^*(\tau)$, что эквивалентно факторизации ϕ через τ . $\square$

3.2. Пучки

3.21 Определение. Пусть j — топология в топосе $\mathcal{E}$, а F — объект из $\mathcal{E}$.

(i) Объект F называют (j) -отделимым, если для любого j -плотного мономорфизма $X' \xrightarrow{\sigma} X$ и любой пары морфизмов $X \xrightarrow{f} F$ с $f\sigma = g\sigma$ выполнено равенство $f = g$.

(ii) Объект F называют (j) -пучком, если для любого j -плотного мономорфизма $X' \xrightarrow{\sigma} X$ и любого морфизма $X' \xrightarrow{f} F$ существует единственный морфизм $X \xrightarrow{g} F$ с $g\sigma = f$.

Через $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ обозначается полная подкатегория в $\mathcal{E}$, объектами которой являются пучки. $\square$

3.22 Пример. Пусть (C, J) — сайт, а j — соответствующая топология в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$. Тогда, как легко убедиться, определения от-

делимого предпучка и пучка из 0.33 эквивалентны предыдущим, если ограничиться случаями, когда предпучок X представим.

Но если в $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ предыдущие условия выполнены для представимых X , то они выполнены для всех X , поскольку в силу 0.12 объект X можно задать в виде копредела представимых предпучков h_a , а тогда ввиду универсальности копределов X' есть копредел объектов $X' \times_X h_a$. Поэтому определения, данные в 3.21, согласованы с приведенными ранее. $\square$

Цель настоящего параграфа — доказать, что категория $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ — топос. Однако следует отметить, что хотя мы и рассматриваем пучки только в топосах, определение 3.21 имеет смысл для любой универсальной операции замыкания на категории с конечными пределами, и в действительности все результаты этого параграфа, в которых явно не упоминается определенная структура топоса, кроме предложения 3.29, верны в этой более общей ситуации.

3.23 Лемма. $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ имеет конечные пределы и функтор включения $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет их.

Доказательство. Все условия из 3.21 включают только морфизмы с концами в F ; поэтому предел в $\mathcal{E}$ любой конечной диаграммы пучков также является пучком. Следовательно, он будет пределом и в $\text{sh}_j(\mathcal{E})$. $\square$

3.24 Предложение. Если F — пучок, а X — любой объект из $\mathcal{E}$, то F^X — пучок.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f} & F^X \\ \downarrow \sigma & & \\ Y & & \end{array}$$

с плотным мономорфизмом σ . Тогда мономорфизм $Y' \times X \xrightarrow{[\sigma \times 1]} Y \times X$ плотен (так как является подъемом σ вдоль $Y \times X \xrightarrow{\pi_1} Y$), а потому $\bar{f}: Y' \times X \rightarrow F$ однозначно продолжается до морфизма $\bar{g}: Y \times X \rightarrow F$. А тогда $g: Y \rightarrow F^X$ есть единственное продолжение f . $\square$

3.25 Следствие. Категория $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ декартово замкнута и функтор включения $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет экспоненты.

Доказательство. Непосредственно следует из 3.23, 3.24 и того, что функтор включения полон. $\square$

3.26 Лемма. (i) Подобъект отделимого объекта отделим.

(ii) Замкнутый подобъект пучка — пучок.

(iii) Если F — пучок, а G отделим, то любой мономорфизм $F \xrightarrow{\tau} G$ замкнут.

Доказательство. (i) Пусть

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sigma} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ F' & \xrightarrow{\tau} & F \end{array}$$

— диаграмма с плотным σ , F отделим и $f\sigma = g\sigma$. Тогда $\tau f\sigma = \tau g\sigma \Rightarrow \tau f = \tau g$, но τ — мономорфизм, поэтому $f = g$.

(ii) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & F' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & & F \end{array}$$

с плотным σ , замкнутым τ и пучком F . Тогда существует единственный морфизм $X \xrightarrow{g} F$ с $g\sigma = \tau f$, но ввиду 3.19 g однозначно пропускается через τ . Поэтому F' — пучок.

(iii) Рассмотрим замыкание $\bar{F} \xrightarrow{\tau} G$ подобъекта F в G . Тогда $F \xrightarrow{i} \bar{F}$ плотен, поэтому существует единственный морфизм $r: \bar{F} \rightarrow F$ с $ri = 1_{\bar{F}}$. Но $iri = i$, а $\bar{F}$ отделим в силу (i), откуда $ir = 1_{\bar{F}}$. Значит, r — двусторонний обратный морфизм к i , т. е. F замкнут в G . $\square$

3.27 Лемма. Ω_j — пучок.

Доказательство. В силу 3.15 морфизмы $X \rightarrow \Omega_j$ соответствуют замкнутым подобъектам в X ; поэтому достаточно показать, что если подобъект $X' \rightarrow X$ плотен, а $Y' \rightarrow X'$ замкнут, то имеется единственный замкнутый подобъект $X' \rightarrow X$ с $Y \cap X' \cong Y'$. Но если определить Y как замыкание композиции $Y' \rightarrow X' \rightarrow X$, то, очевидно, $Y \cap X' \cong Y'$, и обратно, если $Z \rightarrow X$ — любой замкнутый подобъект с $Z \cap X' \cong Y'$, то $Y' \rightarrow Z$ плотен (будучи подъемом подобъекта $X' \rightarrow X$), а потому Z есть замыкание Y' в X . $\square$

3.28 Следствие. $\text{sh}(\mathcal{E})$ обладает классификатором подобъектов, а именно Ω_j .

Доказательство. В силу 3.23 мономорфизмы из $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ будут мономорфизмами и в $\mathcal{E}$. Значит, ввиду 3.26(ii) и (iii) все подпучки некоторого пучка суть в точности его замкнутые подобъекты, а в силу 3.15 они классифицируются морфизмами в Ω_j . $\square$

Собирая вместе 3.23, 3.25 и 3.28, получаем, что $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ — топос, что и требовалось установить.

В заключение приведем пару полезных характеристик отдельных объектов:

3.29 Предложение. Пусть F — объект из $\mathcal{E}$. Следующие утверждения равносильны:

(i) F отделим.

(ii) Диагональ $F \xrightarrow{\Delta} F \times F$ замкнута.

(iii) Существует мономорфизм $F \rightarrow G$ в пучок G .

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\bar{F} \xrightarrow{(a,b)} F \times F$ — замыкание диагонали Δ . Тогда a и b уравниваются плотным подобъектом $F \rightarrow F$, а потому совпадают; значит, $\bar{F} \cong F$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть диагональ Δ замкнута; ее классифицирующее отображение $F \times F \xrightarrow{\delta} \Omega$ пропускается через $\Omega_j \rightarrow \Omega$, а потому синглетонное отображение $F \xrightarrow{\delta} \Omega^F$ пропускается через Ω_j^F . Но Ω_j^F — пучок в силу 3.24 и 3.27.

(iii) $\Rightarrow$ (i) непосредственно в силу 3.26(i). $\square$

Следует отметить, что импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) из 3.29 не верна для произвольной универсальной операции замыкания на категории с конечными пределами (см. упражнение 3 в конце этой главы); однако эквивалентность утверждений (i) и (ii) сохраняется и в этом случае. Доказательство импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) получается непосредственно из 3.19.

3.3. Функтор ассоциирования пучка

В этом параграфе мы построим левый сопряженный функтор $L: \mathcal{E} \rightarrow \text{sh}_j(\mathcal{E})$ к функтору включения $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Метод, используемый нами (и впервые описанный в [52]), основан на предложенной Гротендиком ([GV], II.3.4) конструкции функтора ассоциирования пучка для пучков на сайте; следует упомянуть о существовании и другого метода (восходящего к Ловеру) построения функтора L в элементарном случае, который указан в упражнении 4 в конце этой главы.

Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Из третьей диаграммы определения 3.11 легко получить, что $\wedge: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ отображает подобъект $J \times J$ в J . Определим подобъект $J_1 \rightarrow J \times J$ как уравниватель пары $J \times J \xrightarrow[\pi_1]{\pi_2} J$; через $d: 1 \rightarrow J$ будет обозначаться общий j -плотный мономорфизм, т. е. морфизм, факторизующий $1 \rightarrow \Omega$ через $J \rightarrow \Omega$.

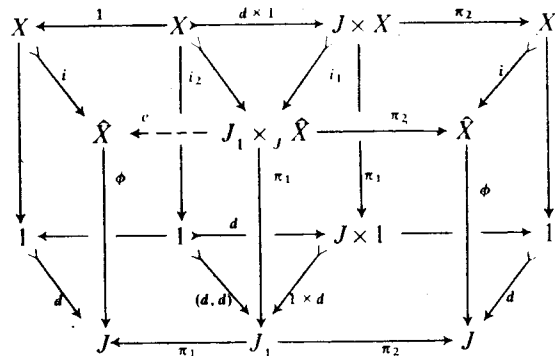
3.31 Лемма. $J = \left(J_1 \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} J \right)$ — внутреннее частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$. Более того, внутренняя категория J^{op} фильтрована в смысле определения 2.51.

Доказательство. Легко убедиться, что морфизм $X \xrightarrow{(\phi_1, \phi_2)} J \times J$ пропускается через J_1 в том и только в том случае, когда подобъекты Y_1, Y_2 из X , классифицируемые морфизмами ϕ_1 и ϕ_2 , удовлетворяют соотношению $Y_1 \leq Y_2$. Используя это, легко определить морфизмы $J \rightarrow J_1$ и $J_1 \times_J J_1 \rightarrow J_1$, превращающие J в частично упорядоченное множество. Но $J \rightarrow 1$ — эпиморфизм, поскольку его расщепляет d , а с помощью морфизмов $J \times J \xrightarrow{(\wedge, \pi_1)} J_1$ и $J \times J \xrightarrow{(\wedge, \pi_2)} J_1$ можно расщепить морфизм $P \rightarrow J \times J$ из 2.51(b). Условие 2.51(c) очевидно, поскольку J — частично упорядоченное множество. $\square$

Пусть теперь X — произвольный объект из $\mathcal{E}$. Обозначим через $\hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ замыкание подобъекта $X \rightarrow \tilde{X}$ (см. 1.25), а через $\phi: \hat{X} \rightarrow J$ — классифицирующее отображение плотного мономорфизма $X \rightarrow \tilde{X}$. Из 3.19 легко выводится, что морфизм $U \rightarrow \tilde{X}$ пропускается через $\hat{X}$ тогда и только тогда, когда область определения соответствующего частичного отображения $U \rightarrow X$ плотна в U . Отсюда, как и в 1.45, легко получить, что $X \rightarrow (X, \phi)$ — на самом деле функтор $\Pi_d: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/J$, и, в частности, он имеет левый сопряженный функтор d^* .

3.32 Предложение. Существует единственное структурное отображение $e: J_1 \times_J \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$, превращающее $\hat{X}$ во внутренний предпучок на J .

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



все грани правого куба которой декартовы, как и квадраты треугольной призмы. Отсюда, в частности, получается плотность $X \xrightarrow{i_2} J_1 \times_J \hat{X}$, поскольку этот мономорфизм есть подъем композиции плотных морфизмов. Значит, в силу предыдущего замечания существует единственное отображение $e: J_1 \times_J \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$, превращающее верхнюю грань левого куба в декартов квадрат, но согласно определению подобъекта J_1 нижняя грань левого

куба также декартова. Поэтому лицевая грань левого куба коммутативна, так как обе ее композиции классифицируют плотный подобъект $X \rightarrow J_1 \times_J \hat{X}$. Аналогично, используя единственность представления частичных отображений, можно проверить, что e удовлетворяет и двум другим условиям из 2.14(iii). $\square$

Определим теперь функтор $+: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$:

$$X^+ = \lim_J (\hat{X}, e).$$

(Отметим, что здесь по типографским причинам символ $\lim_J$ обозначает внутренний функтор копредела $\lim_{J^{\text{op}}}$ по J^{op} ; ковариантные диаграммы на J нам не понадобятся.) Идея, стоящая за этим определением, такова: если (C, J) — сайт, а X — предпучок на C , то для любого $U \in C_0$ $\hat{X}(U)$ есть предпучок на $J(U)$, переводящий J -покрывающее решето $R \rightarrow h_U$ в множество $\text{hom}(R, X)$. Следовательно, разница между $\hat{X}(U)$ и постоянным предпучком $X(U)$ является мерой невыполнения аксиомы пучка для X на U . В общем случае имеется следующий результат:

3.33 Предложение. Имеется морфизм предпучков $\alpha: J^*(X) \rightarrow (\hat{X}, e)$ такой, что

- (i) α — мономорфизм тогда и только тогда, когда X отделим.
- (ii) α — изоморфизм тогда и только тогда, когда X — пучок.

Доказательство. Пусть морфизм $\alpha_0: X \times J \rightarrow \hat{X}$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ \downarrow 1 \times d & & \\ X \times J & & \end{array}$$

Легко убедиться, что он продолжается до морфизма предпучков. Обобщенный элемент $U \rightarrow X \times J$ соответствует диаграмме вида $R \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow{f} X$ с плотным σ , и нетрудно проверить, что композиция с α_0 переводит предыдущую диаграмму в частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f\sigma} & X \\ \downarrow \sigma & & \\ U & & \end{array}$$

Поэтому утверждение о том, что α_0 — мономорфизм (соответственно изоморфизм), в точности соответствует определению от-

делимого объекта (соответственно пучка) из 3.21. Но стирающий функтор $\mathcal{E}^{J^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{E}/J$ отражает мономорфизмы и изоморфизмы, а потому α — мономорфизм (соответственно изоморфизм) в том и только в том случае, когда α_0 — мономорфизм (соответственно изоморфизм). $\square$

3.34 Следствие. Если X — *отделимый объект* (соответственно пучок), то композиция $X \xrightarrow{i} \widehat{X} \rightarrow X^+$ является мономорфизмом (соответственно изоморфизмом), где $\widehat{X} \rightarrow X^+$ — конус копредела.

Доказательство. Так как внутренняя категория J^{op} фильтрована, то $\lim J \cong 1$ в силу 2.54, а потому $\lim J(J^*(X)) \cong X$, так как $X \times (-)$ сохраняет коуравнители. Функтор $\lim J$ также сохраняет мономорфизмы в силу 2.58; отсюда, конечно, получается мономорфизм (соответственно изоморфизм) $X \rightarrow X^+$, если X отделим (соответственно является пучком). То, что этот морфизм задается указанной композицией, следует из существования расщепления $X \xrightarrow{1 \times d} X \times J$ конуса копредела $X \times J \xrightarrow{\pi_1} X$ диаграммы $J^*(X)$. $\square$

3.35 Следствие. Любой морфизм из X в пучок однозначно пропускается через морфизм $X \xrightarrow{u_i} X^+$.

Доказательство. Рассмотрим морфизм $X \xrightarrow{f} F$ в пучок F . Тогда требуемую факторизацию можно получить из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u_i} & X^+ \\ \downarrow f & & \downarrow f^+ \\ F & \xleftarrow{(u_i)^{-1}} & F^+ \end{array}$$

Чтобы установить единственность, предположим, что g_1 и g_2 — две такие факторизации; тогда $g_1 u_i = f = g_2 u_i \Rightarrow g_1 u = g_2 u$ (так как i плотен и F — пучок) $\Rightarrow g_1 = g_2$ (поскольку u — эпиморфизм). $\square$

Из 3.35 вытекает, что если $X^{(+)^n}$ — пучок для некоторого $n \geq 0$, то это и есть пучок, ассоциированный с X . В отличие от ситуации, рассмотренной Хеллером и Роу [46], в которой для получения пучка было необходимо итерировать функтор $+$ трансфинитное число раз, мы вскоре увидим, что в нашем случае достаточно взять $n = 2$.

3.36 Теорема (Джонстон). Объект X^+ отделим для любого X .

Доказательство. Рассмотрим диаграмму $R \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} X^+$ с плотным σ и $\gamma_1 \sigma = \gamma_2 \sigma$. Напишем расслоенные произведения

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{p} & T & \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} & \widehat{X} \times \widehat{X} \\ \downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u \times u \\ R & \xrightarrow{\sigma} & U & \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} & X^+ \times X^+ \end{array}$$

тогда $u \beta_1 p = \gamma_1 \sigma w = \gamma_2 \sigma w = u \beta_2 p$, откуда $(\beta_1 p, \beta_2 p)$ пропускается через $\widehat{X} \times_{X^+} \widehat{X} \rightarrow \widehat{X} \times \widehat{X}$. Но в силу 2.56 категория, отвечающая $(\widehat{X}, e)^{\text{op}}$, слабо фильтрована, значит, в силу 2.55 существуют эпиморфизм $V \xrightarrow{e} Q$ и морфизм $V \xrightarrow{\delta} \widehat{X}$ такие, что пары $(\delta, \beta_1 p e)$ и $(\delta, \beta_2 p e)$ пропускаются через $J_1 \times J \widehat{X} \xrightarrow{(e, \pi_2)} \widehat{X} \times \widehat{X}$. Пусть

$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{\alpha_i} & X \\ \downarrow \tau_i & & \\ V & & \end{array}$$

($i = 1, 2, 3$) — частичные морфизмы, представленные $\beta_1 p e, \beta_2 p e, \delta$ соответственно, а

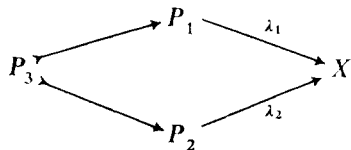
$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{\lambda_i} & X \\ \downarrow \mu_i & & \\ T & & \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

— отображения, представленные β_1 . Тогда из условий на δ вытекает, что $\tau_3 \leq \tau_1, \tau_3 \leq \tau_2$ и $\alpha_1|_{S_3} = \alpha_3 = \alpha_2|_{S_3}$ и имеются декартовы квадраты

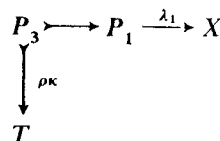
$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{\lambda_i} & P_i \\ \downarrow \tau_i & & \downarrow \mu_i \\ V & \xrightarrow{\sigma} & T \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

с $\lambda_i \tau_i = \alpha_i$. Пусть $S_3 \xrightarrow{\theta} P_3 \xrightarrow{\eta} Q$ — эпимоноразложение композиции $S_3 \xrightarrow{\tau_3} V \xrightarrow{\sigma} Q$; тогда в силу 3.19 θ пропускается через

замыкание мономорфизма k , а потому k плотен. Значит, композиция rk также плотна, но $rk \leq \mu_1$ и $rk \leq \mu_2$ как подобъекты в T , а композиции



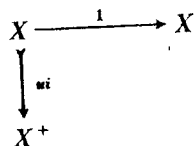
совпадают, поскольку они уравниваются эпиморфизмом $S \xrightarrow{\theta} P_3$. Поэтому, если $T \xrightarrow{\beta_3} \hat{X}$ представляет частичное отображение



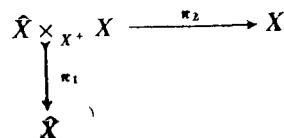
то пары (β_3, β_1) и (β_3, β_2) пропускаются через $J_1 \times_J \hat{X} \xrightarrow{(e, \pi_2)} \hat{X} \times \hat{X}$, откуда $\gamma_1 v = u \beta_1 = u \beta_3 = u \beta_2 = \gamma_2 v$. Но v — эпиморфизм, значит, $\gamma_1 = \gamma_2$. $\square$

3.37 Теорема. Если объект X отделим, то X^+ — пучок.

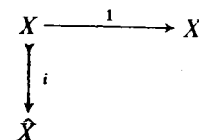
Доказательство. Вследствие 3.34 мы знаем, что $X \xrightarrow{u_i} X^+$ — мономорфизм, и он плотен в силу 3.19, так как u пропускается через его замыкание. Следовательно, имеется морфизм $X \xrightarrow{+\theta} X$, представляющий частичное отображение



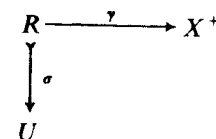
Но $\hat{X} \xrightarrow{\theta u} \hat{X}$ представляет частичное отображение



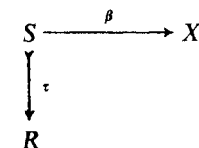
через которое пропускается



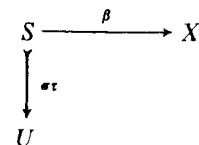
с помощью $X \xrightarrow{(i,1)} \hat{X} \times_{X^+} X$, поэтому пара $(1_{\hat{X}}, \theta u)$ пропускается через $J_1 \times_J X \xrightarrow{(e, \pi_2)} \hat{X} \times \hat{X}$. Значит, $u \theta u = u$, но u — эпиморфизм, откуда $u \theta = 1_{X^+}$. Рассмотрим теперь диаграмму



с плотным σ ; пусть



— частичное отображение, представленное $R \xrightarrow{\theta \gamma} \hat{X}$, и пусть $U \xrightarrow{\delta} \hat{X}$ представляет



Тогда $\delta \sigma = \theta \gamma$, поскольку обе композиции представляют одно и то же частичное отображение, откуда $u \delta \sigma = u \theta \gamma = \gamma$, т. е. $u \delta$ продолжает γ по δ . Но, как мы уже знаем, такое продолжение единственно в силу 3.36. $\square$

Собирая 3.35, 3.36 и 3.37 вместе, получаем, что функтор $++: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ пропускается через включение $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ и задает функтор ассоциирования пучка $L: \mathcal{E} \rightarrow \text{sh}_j(\mathcal{E})$.

3.38 Предложение. Функтор $+$ точен слева.

Доказательство. Функтор $+$ определяется как композиция $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{Jop}} \xrightarrow{\lim_J} \mathcal{E}$. Но функтор $\lim_J$ точен слева в силу 2.58 и 3.31, а функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{Jop}}$ точен слева, так как по отме-

ченному выше композиция $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{op}} \xrightarrow{U} \mathcal{E}/J$ имеет левый сопряженный функтор, а именно, d^* и U задают пределы. $\square$

3.39 Следствие. Имеется геометрический морфизм $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \xrightarrow{i} \mathcal{E}$, где i_* — функтор включения, а $i^* = L$.

Доказательство. Сопряженность $(i^* \dashv i_*)$ следует, как указывалось, из 3.35, 3.36 и 3.37, а левая точность i^* — из 3.38 и из того, что функтор i_* вводит пределы. $\square$

3.4. $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ как категория частных

В этом параграфе приводится другое описание категории $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ как категории частных (см. 0.18), получающейся обращением определенного класса морфизмов из $\mathcal{E}$. Фиксируем еще раз топологию j в $\mathcal{E}$.

3.41 Определение. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм из $\mathcal{E}$. Построим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{a} & X \\ & \searrow b & \downarrow f \\ & & Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow i & \uparrow f \\ & & Q \end{array}$$

как в 1.52, и обозначим через $X \xrightarrow{\tau} R$ факторизацию диагонали $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ через $R \xrightarrow{(a,b)} X \times X$. Морфизм f называют (j) -почти мономорфизмом (соответственно почти эпиморфизмом), если τ (соответственно i) плотен, и f называют биплотным, если он почти мономорфизм и почти эпиморфизм. (Отметим, что f — мономорфизм (соответственно эпиморфизм) в том и только в том случае, когда τ (соответственно i) — изоморфизм.) $\square$

3.42 Предложение. Пусть $X' \xrightarrow{\sigma} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$. Тогда $L(\sigma)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда σ плотен.

Доказательство. Предположим, что σ плотен. Тогда универсальный морфизм $X' \rightarrow LX'$ (т. е. единица сопряжения из 3.39) однозначно пропускается через σ ; поэтому имеется морфизм $X \rightarrow LX'$, который, в свою очередь, однозначно пропускается через универсальный морфизм $X \rightarrow LX$. В результате получаем морфизм $LX \rightarrow LX'$, который, как легко убедиться, является двусторонним обратным к $L(\sigma)$.

Обратно, предположим, что $L(\sigma)$ — изоморфизм. Тогда для любого пучка F каждый морфизм $X' \rightarrow F$ однозначно пропускается через σ . В частности, это верно для пучка Ω ; поэтому любой замкнутый подобъект в X' является пересечением подобъекта X' с единственным замкнутым подобъектом в X . Но подобъект $X' \xrightarrow{1} X'$ есть пересечение $X' \xrightarrow{\sigma} X$ и $X' \xrightarrow{\bar{\sigma}} X$; поэтому $\sigma \cong 1_X$, т. е. σ плотен. $\square$

3.43 Следствие. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — произвольный морфизм из $\mathcal{E}$. Тогда $L(f)$ — изоморфизм (соответственно мономорфизм, эпиморфизм) тогда и только тогда, когда f биплотен (соответственно является почти мономорфизмом, почти эпиморфизмом).

Доказательство. Функтор L сохраняет свойства точности диаграммы из 3.41; поэтому требуемое вытекает непосредственно из 3.42. $\square$

3.44 Следствие. Для любого объекта X универсальный морфизм $X \rightarrow LX$ биплотен. $\square$

3.45 Предложение. Пусть Ξ обозначает класс всех j -биплотных морфизмов из $\mathcal{E}$. Класс Ξ допускает исчисление как левых, так и правых частных.

Доказательство. Используя характеристику биплотных морфизмов, предложенную в 3.43, и то, что функтор L точен, легко проверить следующие факты:

(i) Композиция биплотных морфизмов биплотна.

(ii) Расслоенное произведение и амальгама биплотных морфизмов биплотны.

(iii) Для параллельной пары $X \xrightarrow{f} Y$ морфизмы f и g уравниваются биплотным морфизмом $\Leftrightarrow L(f) = L(g) \Leftrightarrow f$ и g коуравниваются биплотным морфизмом.

Из этого непосредственно вытекают условия определения 0.18 и двойственные им. $\square$

3.46 Предложение. Композиция $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \xrightarrow{i_*} \mathcal{E} \xrightarrow{P_\Xi} \mathcal{E}(\Xi_j)^{-1}$ является эквивалентностью категорий.

Доказательство. Из 3.43 следует, что любой морфизм σ из $\text{sh}_j(\mathcal{E})$, для которого $i_*(\sigma)$ биплотен, является на самом деле изоморфизмом. Поэтому композиция $P_\Xi \cdot i_*$ унивалентна; чтобы доказать ее полноту, рассмотрим представитель

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \sigma & \searrow f & \\ Y & & Z \end{array}$$

некоторого морфизма из $\mathcal{E}(\Xi_j)^{-1}$ с пучками Y, Z . Тогда мы можем заменить объект X ассоциированным с ним пучком, при этом данный класс эквивалентности морфизма не изменится, а морфизм σ станет обратимым в $\mathcal{E}$. Следовательно, (σ, f) лежит в образе функтора P_Ξ . Наконец, в силу 3.44 очевидно, что образ композиции $P_\Xi \cdot i_*$ пересекает каждый класс изоморфных объектов из $\mathcal{E}(\Xi_j)^{-1}$. $\square$

Следующий результат, хотя и не является прямым следствием предложения 3.46, тем не менее имеет непосредственную связь с ним. Он дает полезный критерий того, когда произвольный

геометрический морфизм пропускается через геометрический морфизм типа, описанного в 3.39.

3.47 Теорема (Ловер — Тьерне). Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, а j — топология в $\mathcal{E}$. Следующие условия равносильны:

(i) Существует геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \text{sh}_j(\mathcal{E})$ с $ig = f$.

(ii) f^* отображает все j -биплотные морфизмы в изоморфизмы.

(iii) f^* отображает все j -плотные мономорфизмы в изоморфизмы.

(iv) $f^*(1) \longrightarrow J$ — изоморфизм.

(v) Прямой образ $f_*(Y)$ любого объекта Y является j -пучком.

Более того, если существует морфизм g , как в (i), то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) следует непосредственно из 3.43, поскольку $f^* \cong g^*i^*$. Импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) очевидны, а импликация (iv) $\Rightarrow$ (iii) верна, поскольку f^* сохраняет расслоенные произведения.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\alpha} & f_*(Y) \\ \downarrow \sigma & & \\ X & & \end{array}$$

с плотным σ . Транспонируя ее, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} f^*(X') & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & Y \\ \downarrow f^*(\sigma) & & \\ f^*(X) & & \end{array}$$

но $\bar{\alpha}$ однозначно пропускается через $f^*(\sigma)$. Значит, α однозначно пропускается через σ .

(v) $\Rightarrow$ (iv). Предполагая (v), получаем единственный функтор g_* с $i_*g_* = f_*$ и можем тогда определить g^* как композицию $*i_*$, так как имеются естественные биекции

$$F \longrightarrow g_*(Y)$$

$$i_*(F) \longrightarrow f_*(Y)$$

$$g^*(F) \longrightarrow Y$$

для $F \in \text{sh}_j(\mathcal{E})$, $Y \in \mathcal{F}$. Более того, изоморфизм $i_*g_* \cong f_*$ опре-

деляет g_* (а потому и g^*) однозначно с точностью до изоморфизма, поскольку функтор полон и унивалентен. $\square$

3.48 Замечание. Еще одно описание категории пучков $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ было предложено Ламбеком и Ретреем [70]. Оно использует идеи из § 1.3. Если в определении пары сопряженных функторов леммы 1.31 Ω заменить на Ω_j , то их сопряженность сохранится; обозначим через $\mathbb{C}_j$ комонаду, индуцированную данным сопряжением, на $\mathcal{E}^{\text{op}}$. Тогда категория $(\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{C}_j}$ $\mathbb{C}_j$ -коалгебр эквивалентна категории $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ относительно эквивалентности, которая отождествляет функтор сравнения $\mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}^{\text{op}})_{\mathbb{C}_j}$ с функтором ассоциирования пучка. $\square$

3.5. Примеры топологий

В этом параграфе описываются некоторые методы построения топологий в топосе, отличные от тех, которые возникают из топологий Гротендика согласно 3.12. Дальнейшие примеры нам встретятся в следующих главах (см., например, 4.14 и 5.17). Вначале введем две дополнительные бинарные операции на классификаторе подобъектов Ω , аналогичные морфизму $\wedge$, введенному в 1.49 (ii).

3.51 Определение. (i) $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega$ есть классифицирующее отображение объединения (1.55) двух подобъектов $\Omega \times 1 \xrightarrow{1 \times t} \Omega \times \Omega$ и $1 \times \Omega \xrightarrow{t \times 1} \Omega \times \Omega$.

(ii) $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$ есть классифицирующее отображение отношения порядка $\Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \Omega \times \Omega$ (т. е. уравниватель морфизмов π_1 и $\wedge$, см. 3.31). $\square$

Поскольку функтор замены базы сохраняет объединения, то, очевидно, морфизм $\vee$ «интернализует» операцию образования объединений точно так же, как $\wedge$ интернализует образование пересечений. Внешнее описание морфизма $\Rightarrow$ ненамного сложнее: если подобъекты $Y_1 \times \longrightarrow X$ и $Y_2 \times \longrightarrow X$ классифицируются морфизмами ϕ_1 и ϕ_2 соответственно, то $\Rightarrow(\phi_1, \phi_2)$ классифицирует единственный наибольший подобъект $Z \times \longrightarrow X$ с $Z \cap Y_1 \leq Y_2$.

Пусть теперь $U \times \longrightarrow 1$ — подобъект объекта 1 в $\mathcal{E}$ с классифицирующим отображением $1 \xrightarrow{u} \Omega$. (Подобъект U иногда называют открытым объектом по аналогии с «классическим» случаем пучков на топологическом пространстве.)

3.52 Предложение. (i) Композиция $\Omega \xrightarrow{u \times 1} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$ является топологией в $\mathcal{E}$, называемой открытой топологией, определяемой по U и обозначаемой через j_U^0 .

(ii) Композиция $\Omega \xrightarrow{u \times 1} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega$ является топологией в $\mathcal{E}$, называемой замкнутым дополнением топологии j_U^0 и обозначаемой через j_U^c .

Доказательство. Согласно внешним описаниям морфизмов $\vee$ и $\Rightarrow$, приведенным выше, легко проверить, что операции на подобъектах, индуцированные этими двумя морфизмами, возрастают, сохраняют порядок и идемпотентны; отсюда в силу 3.14 эти два морфизма являются топологиями. $\square$

Причина наименования «открытые и замкнутые топологии» кроется в смысле этих топологий при $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$, где X — топологическое пространство. Если U — открытое подмножество в X (т. е. открытый объект в $\text{Shv}(X)$), то категория пучков из $\text{Shv}(X)$ в топологии j_U^0 (соответственно j_U^c) эквивалентна категории $\text{Shv}(U)$ (соответственно $\text{Shv}(X - U)$) относительно эквивалентности, которая отождествляет геометрический морфизм $\text{sh}_j(\text{Shv}(X)) \rightarrow \text{Shv}(X)$ из 3.39 с геометрическим морфизмом, индуцированным (как в 0.26) отображением включения $U \rightarrow X$ (соответственно $X - U \rightarrow X$).

В общем случае имеются следующие результаты:

3.53 Предложение. (i) Мономорфизм $X' \xrightarrow{\sigma} X$ j_U^c -плотен тогда и только тогда, когда квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' \times U & \xrightarrow{\pi_1} & X' \\ \downarrow \sigma \times 1 & & \downarrow \sigma \\ X \times U & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

кодекартов.

(ii) Объект X является j_U^c -пучком тогда и только тогда, когда $X \times U \cong U$.

(iii) Ассоциированный j_U^c -пучок любого объекта X есть амальгама диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \downarrow \pi_2 & & \\ U & & \end{array}$$

Доказательство. (i) По определению σ j_U^c -плотен тогда и только тогда, когда объект X является объединением под-объектов $X' \xrightarrow{\sigma} X$ и $X \times U \xrightarrow{\pi_1} X$, но это равносильно утверждению, что указанный квадрат кодекартов.

(ii) Предположим, что X — некоторый j_U^c -пучок. Если теперь $Z \rightarrow U$ произвольный объект над U , то $Z \times U \xrightarrow{\pi_1} Z$ — изоморфизм, а потому любой подобъект из Z (в частности, $0 \rightarrow Z$) j_U^c -плотен. Значит, согласно аксиоме пучка имеется единственный морфизм $Z \rightarrow X$ в $\mathcal{E}$, а поэтому единствен морфизм $Z \rightarrow X \times U$ в $\mathcal{E}/U$. Следовательно, $X \times U \cong U$, так как каждый из этих объектов конечен в $\mathcal{E}/U$. Обратно, если $X \times U \cong U$ и дана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \sigma & & \\ Y & & \end{array}$$

с j_U^c -плотным σ , то существует единственный морфизм $Y \times U \xrightarrow{g} X$ такой, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y' \times U & \xrightarrow{\pi_1} & Y' \\ \downarrow \sigma \times 1 & & \downarrow f \\ Y \times U & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

коммутативен, а именно, композиция $Y \times U \xrightarrow{\pi_2} U \cong X \times U \xrightarrow{\pi_1} X$. Отсюда в силу (i) получается существование единственного морфизма $Y \xrightarrow{h} X$, продолжающего f .

(iii) Рассуждая, как в (ii), получаем, что любой морфизм из X в некоторый пучок однозначно пропускается через указанную амальгаму. Но поскольку функтор $(-) \times U$ сохраняет амальгамы, то легко проверить, что данная амальгама — пучок. $\square$

3.54 Предложение. (i) Мономорфизм $X' \xrightarrow{\sigma} X$ j_U^c -плотен тогда и только тогда, когда $X' \times U \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times U$ — изоморфизм.

(ii) Объект X является j_U^c -пучком тогда и только тогда, когда транспозиция $X \xrightarrow{\eta} X^U$ морфизма $X \times U \xrightarrow{\pi_1} X$ является изоморфизмом, а функтор ассоциирования пучка для j_U^0 фактически задается сопоставлением $X \mapsto X^U$.

(iii) Категория $\text{sh}_{j_U^0}(\mathcal{E})$ эквивалентна категории $\mathcal{E}/U$ относительно эквивалентности, которая отождествляет функтор включения с Π_U , а функтор ассоциирования пучка с U^* .

Доказательство. (i) По определению σ j_U^c -плотен тогда и только тогда, когда проекция $X \times U \xrightarrow{\pi_1} X$ пропускается че-

рез σ , но так как квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' \times U & \xrightarrow{\pi_1} & X' \\ \downarrow \sigma \times 1 & & \downarrow \sigma \\ X \times U & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

декартов, то, очевидно, это эквивалентно тому, что $\sigma \times 1_U$ — изоморфизм.

(ii) В силу (i) очевидно, что любой объект вида X^U является j_U^0 -пучком. Но, как легко проверить, $X \times U \xrightarrow{\eta \times 1} X^U \times U$ — изоморфизм с обратным морфизмом $X^U \times U \xrightarrow{(\text{ev}, \pi_2)} X \times U$; поэтому в силу (i) морфизм η j_U^0 -биплотен. Следовательно, X^U — пучок, ассоциированный с X , и, в частности, η — изоморфизм, если X — пучок.

(iii) Так как $U \rightarrow 1$ — мономорфизм, то $U^U \cong 1$; откуда ввиду конструкции функтора Π_U , данной в упражнении 1.8, $\Pi_U(Z \rightarrow U) = Z^U$. Поэтому требуемое вытекает из (i) и (ii). $\square$

Другая характеристика открытых топологий, принадлежащая Тьерне, содержится в следующем результате:

3.55 Предложение. Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Следующие утверждения равносильны:

- (i) j открыта.
- (ii) Функтор ассоциирования пучка $\mathcal{E} \xrightarrow{L} \text{sh}_j(\mathcal{E})$ является логическим.
- (iii) Функтор $\mathcal{E} \xrightarrow{L} \text{sh}_j(\mathcal{E})$ сохраняет экспоненты.
- (iv) Если подобъект $X \rightarrowtail X$ j -плотен, то $X^Y \xrightarrow{\sigma^Y} X^Y$ j -плотен для всех Y .
- (v) $\Pi_J(1 \xrightarrow{d} J)$ — j -плотный подобъект в 1 .
- (vi) Внутреннее частично упорядоченное множество J^{op} имеет конечный объект (упражнение 2.10), т. е. существует морфизм $1 \xrightarrow{u} J$ такой, что $J \xrightarrow{u \times 1} J \times J$ пропускается через $J_1 \rightarrowtail J \times J$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) непосредственно в силу 3.54 (iii) и 1.42, а (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидно.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Если σ j -плотен, то $L(\sigma)$ — изоморфизм в силу 3.42, а потому $LX'^LY \xrightarrow{L\sigma^LY} LX^LY$ — также изоморфизм. Но в силу (iii) он изоморфен $L(X'^Y) \xrightarrow{L(\sigma^Y)} L(X^Y)$; значит, снова в силу 3.42 σ^Y j -плотен.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Из упражнения 1.8 получаем, что имеется декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Pi_J(d) & \longrightarrow & 1^J \\ \downarrow & & \downarrow d^J \\ 1 & \xrightarrow{1_J} & J^J \end{array}$$

и d^J плотен в силу (iv), откуда $\Pi_J(d) \rightarrowtail 1$ плотен.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Из сопряженности $(J^* \dashv \Pi_J)$ вытекает, что $J^*\Pi_J(d) \leq d$ как подобъекты в J , но первый из них классифицируется композицией $J \rightarrow 1 \xrightarrow{u} J$, где u — классифицирующее отображение подобъекта $\Pi_J(d) \rightarrowtail 1$, а второй — тождественным морфизмом 1_J . Поэтому u — конечный объект в J^{op} .

(vi) $\Rightarrow$ (i). Пусть $U \rightarrowtail 1$ — подобъект в 1 с классифицирующим отображением u ; непосредственно из 3.54(i) вытекает, что j -плотные мономорфизмы суть в точности j_U^0 -плотные мономорфизмы. $\square$

В дальнейшем мы не раз встретимся со следующей задачей: для данного подобъекта $\bar{D}$ из Ω в топосе $\mathcal{E}$ построить топологию j , порожденную $\bar{D}$, в том смысле, что: (i) все мономорфизмы, классифицирующие отображения которых пропускаются через $\bar{D}$, j -плотны и (ii) топология j минимальна по отношению к (i). Мы приведем здесь чрезвычайно элегантное решение этой задачи, принадлежащее Жуаялю.

Определим сперва для каждого объекта X бинарное отношение θ на множество подобъектов из X такое, что $\theta(\sigma, \tau)$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждого $X' \xrightarrow{p} X$ с $\sigma \wedge p \leq \tau$ в действительности $p \leq \tau$. Из описания операции $\Rightarrow$, данного выше, очевидно, это эквивалентно утверждению, что $(\sigma \Rightarrow \tau) \cong \tau$, а потому θ представимо подобъектом $\Theta \rightarrowtail \Omega \times \Omega$, а именно, таким, которое классифицируется композицией

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{1 \times \Delta} \Omega \times \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow \times 1} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\delta} \Omega,$$

где δ классифицирует диагональ $\Omega \xrightarrow{\Delta} \Omega \times \Omega$. Для данного подобъекта $\bar{D} \rightarrowtail \Omega$ определим теперь новый подобъект $D' \rightarrowtail \Omega$ как образ

$$\Pi_{(\Omega \times \Omega \xrightarrow{\pi_2} \Omega)}((\pi_1^* \bar{D} \Rightarrow \Theta) \rightarrowtail \Omega \times \Omega).$$

Кроме того, той же формулой, заменяя π_1 на π_2 и наоборот, определим подобъект $D'' \rightarrowtail \Omega$.

3.56 Лемма. Пусть $X' \xrightarrow{\tau} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$. Тогда τ лежит в $\Xi_{D'}$ (ср. 3.17) тогда и только тогда, когда для каждого

$Y \xrightarrow{\alpha} X$ и каждого $Y' \xrightarrow{\sigma} Y$ из $\mathcal{E}_D$ справедливо отношение $\theta(\sigma, \alpha^*\tau)$. [Аналогичный критерий имеется для мономорфизмов из $\mathcal{E}_D$].

Доказательство. Пусть $X \xrightarrow{\phi} \Omega$ — морфизм, классифицирующий τ , а $D \xrightarrow{i} \Omega$ — заданный морфизм. Тогда в силу сопряженности $(\pi_2^* \dashv \Pi_{\pi_2})$ морфизм ϕ пропускается через D' в том и только в том случае, когда морфизм $\Omega \times X \xrightarrow{1 \times \phi} \Omega \times \Omega$ пропускается через $(\pi_1^* D \Rightarrow \Theta)$. В свою очередь по определению операции $\Rightarrow$ это эквивалентно тому, что морфизм $D \times X \xrightarrow{i \times \phi} \Omega \times \Omega$ пропускается через Θ . Поэтому если возьмем $\alpha = \pi_2: D \times X \rightarrow X$, а в качестве σ — подобъект, классифицируемый отображением $D \times X \xrightarrow{\pi_1} D \xrightarrow{i} \Omega$, то непосредственно убеждаемся, что указанное условие достаточно. Но оно также необходимо, поскольку любая указанная в формулировке пара (α, σ) определяет Y -элемент $Y \xrightarrow{(\psi, \alpha)} D \times X$, где $i\psi$ — классифицирующее отображение мономорфизма σ , и $\theta(\sigma, \alpha^*\tau)$ выполнено тогда и только тогда, когда композиция $Y \xrightarrow{(\psi, \alpha)} D \times X \xrightarrow{i \times \phi} \Omega \times \Omega$ пропускается через Θ . $\square$

3.57 Теорема (Жуаяль). (i) Операции $D \rightarrow D'$ и $D \rightarrow D''$ задают соответствие Галуа решетки подобъектов в Ω с собой, т. е. эти операции сохраняют порядок и $D \leq D', D \leq D''$.

(ii) Если $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ — топология в $\mathcal{E}$, то $J' \cong \Omega_j$ и $(\Omega_j)' \cong J$.

(iii) Подобъект $D \xrightarrow{j} \Omega$ замкнут слева для данного соответствия (т. е. $D^{r1} \cong D$) тогда и только тогда, когда классифицирующее отображение морфизма $D \xrightarrow{j} \Omega$ является топологией в $\mathcal{E}$.

Доказательство. (i) вытекает непосредственно из 3.56 и его аналога, поскольку $D \leq E$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{E}_D \subseteq \mathcal{E}_E$.

(ii) Для любой топологии j , если σ j -плотен, а τ j -замкнут, то из 3.19 легко вывести, что $\theta(\sigma, \tau)$ выполнено, так как $\sigma \cap \rho$ — плотный подобъект в ρ . Отсюда вытекает, что $J' \geq \Omega_j$ и $(\Omega_j)' \geq J$.

Чтобы установить равенство, предположим, что мономорфизм $X' \xrightarrow{\tau} X$ лежит в $\mathcal{E}_{J'}$. Тогда, применяя 3.56 с $\alpha = \bar{\tau}: \bar{X}' \rightarrow X$ и $\sigma = (\bar{X}' \rightarrow \bar{X})$, получаем изоморфизмы $\sigma \cong (\sigma \Rightarrow \sigma) \cong 1_{\bar{X}'}$. Значит, τ замкнут, откуда $J' \cong \Omega$. Подобное рассуждение, использующее аналог леммы 3.56, показывает, что если σ лежит в $\mathcal{E}(\Omega_j)^1$, то $\bar{\sigma} \cong (\sigma \Rightarrow \sigma) \cong 1_X$, а потому $\sigma \in \mathcal{E}_{J'}$.

(iii) Если подобъект D классифицируем топологией, то равенство $D^{r1} \cong D$ следует непосредственно из (ii). Обратно, предположим, что $D^{r1} \cong D$; тогда для класса $\mathcal{E}_D$ остается проверить условия из 3.18.

Но если σ — изоморфизм, то очевидно, что $\theta(\sigma, \tau)$ имеет место для любого τ ; значит, $\sigma \in \mathcal{E}_{E1}$ для любого E и, в частности, $\sigma \in \mathcal{E}_{D^{r1}} = \mathcal{E}_D$. Предположим теперь, что задана композиция $X'' \xrightarrow{\sigma'} X' \xrightarrow{\sigma} X$ с $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}_D$. Тогда для любого $Y \xrightarrow{\tau} X$ из $\mathcal{E}_{D'}$ выполнено $\theta(\sigma, \tau)$ и $\theta(\sigma', \sigma^*\tau)$, откуда простым диаграммным поиском проверяется справедливость $\theta(\sigma\sigma', \tau)$. Это остается верным при любой замене базы $Z \xrightarrow{\alpha} X$, поэтому $\sigma\sigma' \in \mathcal{E}_{D^{r1}} = \mathcal{E}_D$. Рассуждая аналогично, получаем, что если $\sigma\sigma' \in \mathcal{E}_D$, то σ и σ' лежат в $\mathcal{E}_D$. $\square$

3.58 Следствие. Пусть $D \xrightarrow{j} \Omega$ — произвольный подобъект в Ω . Тогда в $\mathcal{E}$ существует топология j , порожденная D , в том смысле, что $D \xrightarrow{j} \Omega$ пропускается через $J \xrightarrow{j} \Omega$ и j минимальна относительно этого свойства.

Доказательство. Возьмем $J = D^{r1}$ и применим 3.57 (i) и (ii). $\square$

Применяя 3.58, можно построить ряд интересных примеров топологий, среди которых следующие:

3.59 Примеры. (i) Пусть j_1, j_2 — две топологии в $\mathcal{E}$. Тогда мы можем построить топологию $j_1 + j_2$ (сумму j_1 и j_2), которая содержит j_1 и j_2 и минимальна по отношению к этому условию. Применим для этого 3.58 к объединению подобъектов $J_1 \xrightarrow{j_1} \Omega$ и $J_2 \xrightarrow{j_2} \Omega$.

(ii) Пусть $X' \xrightarrow{\sigma} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$. Тогда существует единственная минимальная топология j такая, что мономорфизм σ j -плотен. Чтобы ее построить, применим 3.58 к образу $J \xrightarrow{j} \Omega$ классифицирующего отображения $X \xrightarrow{j} \Omega$ мономорфизма σ .

(iii) Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, а j — топология в $\mathcal{E}$. Тогда существует единственная минимальная топология j' в $\mathcal{F}$ такая, что композиция $\text{sh}_j(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ пропускается через $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. В силу 3.42 и 3.47 такая факторизация существует в том и только в том случае, когда мономорфизм $f^*(1 \xrightarrow{d} J)$ j -плотен; поэтому достаточно примерить (ii) к этому мономорфизму в $\mathcal{F}$.

(iv) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в $\mathcal{E}$. Тогда можно построить единственную наименьшую топологию в $\mathcal{E}$, для которой $L(f)$ — мономорфизм (соответственно эпиморфизм); для этого применим (ii) к мономорфизму τ (соответственно (i)) из 3.41. Беря сум-

му этих двух топологий, получаем единственную наименьшую топологию, в которой $L(f)$ — изоморфизм.

(v) Пусть $X' \xrightarrow{\tau} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$. Начиная с противоположной операции соответствия Галуа из 3.57, мы можем найти единственную наибольшую топологию, в которой τ замкнут. Беря, например, в качестве τ диагональ объекта F и применяя 3.29(ii), мы можем построить единственную наибольшую топологию, в которой F отделим. $\square$

Упражнения к главе 3

1. Пусть j_1 и j_2 — топологии в $\mathcal{E}$. Докажите, что $\Omega \xrightarrow{(j_1, j_2)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Delta} \Omega$ топология.

2. Пусть $\mathcal{E}$ — категория с конечными пределами, а $\mathbb{I} = (L, \eta, \mu)$ — точная слева идемпотентная монада на $\mathcal{E}$ (т. е. такая, что функтор L точен слева, а преобразование μ является изоморфизмом). Определим операцию ρ_X на подобъектах объекта X в $\mathcal{E}$ формулой $\rho_X(X' \rightarrow X) = \eta_X(LX' \rightarrow LX)$. Докажите, что ρ — универсальная операция замыкания на $\mathcal{E}$. Докажите также, что объект X отделим (соответственно является пучком) относительно ρ в том и только в том случае, когда η_X — мономорфизм (соответственно изоморфизм). [Указание. Докажите вначале, что диагональ $X \rightarrow R$ ρ -плотна, где $R \rightrightarrows X$ — ядерная пара морфизма η_X , и выведите отсюда, что L — функтор ассоциирования пучка для ρ . Покажите затем, что если $\mathcal{E}$ — топос, то существует биекция между классами изоморфизма точных слева идемпотентных монад на $\mathcal{E}$ и топологиями в $\mathcal{E}$. [Используйте 3.42.]

3. Пусть G — абелева группа, а H — подгруппа в G . Определим $\bar{H} \subseteq G$ как подмножество, элементы которого составляют кручение по модулю H , т. е. $\{g \in G \mid ng \in H \text{ для некоторого } n \geq 1\}$. Докажите, что $\bar{H}$ — подгруппа в G и что сопоставление $H \mapsto \bar{H}$ задает универсальную операцию замыкания на категории абелевых групп $\mathbf{ab}$. Покажите, что группа G отделима относительно этой операции тогда и только тогда, когда она без кручения, и является пучком тогда и только тогда, когда она без кручения и делима. Каков здесь функтор ассоциирования пучка? Ограничивая указанную операцию на полную подкатегорию $\mathbf{fgab}$ конечнопорожденных абелевых групп, покажите, что утверждения 3.29(iii) и 3.42 неверны для общего случая универсальной операции замыкания.

4 (конструкция функтора L по Ловеру). Пусть j — топология в топосе $\mathcal{E}$, а X — объект из $\mathcal{E}$. Обозначим через MX образ композиции $X \xrightarrow{\{\}} \Omega^X \xrightarrow{j^X} \Omega_j^X$, а через LX — замыкание MX в Ω_j . Докажите, что морфизм $X \rightarrow MX$ универсален в классе мор-

физмов из X в отделимые объекты [указание: что является его ядерной парой?] и что LX — пучок, ассоциированный с X .

5. Пусть X — дискретное двухточечное топологическое пространство, а U, V — два нетривиальных открытых подмножества в X . Покажите, что для любого предпучка P на X множество $P^+(X)$ есть расслоенное произведение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & P(U) \\ & & \downarrow \rho_U \\ P(V) & \xrightarrow{\rho_V} & P(\emptyset) \end{array}$$

Вычислите затем P^+ и P^{++} , когда P определен равенствами $P(X) = \emptyset$, $P(U) = P(V) = P(\emptyset)$ — двухэлементное множество с $\rho_U^U = \rho_V^V = 1$. Выведите отсюда, что в общем случае P, P^+, P^{++} и MP могут быть различными.

6 (доказательство левой точности функтора L по Фрейду; см. [FK]).

(i) Докажите прямой проверкой, что функтор $L: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{sh}_j(\mathcal{E})$ сохраняет конечные произведения. [Указание. Покажите, что отображение $X \times Y \rightarrow LX \times LY$ универсально в классе отображений из $X \times Y$ в пучки; при этом используйте 3.24.]

(ii) Докажите, что если Y — пучок, а X — произвольный объект из $\mathcal{E}$, то пучки Y^X и Y^{LX} естественно изоморфны.

(iii) Докажите, что включение $\mathbf{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет инъективные объекты. [Воспользуйтесь упражнением 1.5.]

(iv) Используя упражнение 1.5, покажите, что функтор $\mathcal{E} \xrightarrow{L} \mathbf{sh}_j(\mathcal{E})$ сохраняет корефлексивные уравнители.

7. Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Предположим, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega \\ \downarrow 1 \times j & & \downarrow j \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

коммутативен. Докажите, что ретракция $\Omega \rightarrow \Omega_j$ биплотна, и выведите отсюда, что функтор ассоциирования пучка для j сохраняет классификатор подобъектов. Проверьте, что это условие выполнено, когда j — открытая топология.

8. Пусть F — объект в топосе $\mathcal{E}$. Пусть морфизм $\alpha: F \times \Omega \rightarrow F$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{1} & F \\ \downarrow 1 \times \alpha & & \\ F \times \Omega & & \end{array}$$

а морфизм $\tilde{F} \xrightarrow{\phi} \Omega$ классифицирует подобъект $F \xrightarrow{\eta} \tilde{F}$. Определим $W_F \xrightarrow{\quad} \tilde{F}$ как «наибольший подобъект, на котором α однозначно обратим», т. е. как расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} W_F & \xrightarrow{\quad} & F \times \Omega \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \tilde{F} & \xrightarrow{(\quad)} \Omega^{\tilde{F}} \xrightarrow{\Omega^*} & \Omega^{(F \times \Omega)} \end{array}$$

и определим $J_F \xrightarrow{\quad} \Omega$ формулой $\Pi_{\phi}(W_F \xrightarrow{\quad} \tilde{F})$. Покажите, что мономорфизм $X' \xrightarrow{\quad} X$ лежит в Ξ_{J_F} тогда и только тогда, когда для любого морфизма $T \xrightarrow{j} X$ каждый морфизм $f^*(X') \rightarrow T \rightarrow F$ однозначно продолжается до морфизма $T \rightarrow F$. Выведите отсюда, что классифицирующее отображение j_* подобъекта $J_F \xrightarrow{\quad} \Omega$ является топологией и что это единственная наибольшая топология, в которой F является пучком.

9. Пусть j_1, j_2 — две топологии в $\mathcal{E}$. Используя упражнение 8, докажите, что $\text{sh}_{j_1+j_2}(\mathcal{E})$ есть пересечение $\text{sh}_{j_1}(\mathcal{E})$ и $\text{sh}_{j_2}(\mathcal{E})$.

10. Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Определим *внешность* $\text{ext}(j)$ топологии j как j -замыкание мономорфизма $0 \xrightarrow{\quad} 1$, а *внутренность* $\text{int}(j)$ топологии j как уравниватель морфизмов $1 \xrightarrow{j} \Omega^{\Omega}$ и $1 \xrightarrow{\bar{1}\Omega} \Omega^{\Omega}$. Покажите, что $j \mapsto \text{ext}(j)$ есть сохраняющее порядок отображение из решетки топологий в $\mathcal{E}$ в решетку подобъектов конечного объекта 1 и что оно задает правый сопряженный функтор к $U \mapsto j_U^c$. [Указание. Докажите, что если $U \leq \text{ext}(j)$ и подобъект $X' \xrightarrow{\quad} X$ j_U^c -плотен, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' \times \text{ext}(j) & \xrightarrow{\pi_1} & X' \\ \downarrow \sigma \times 1 & & \downarrow \sigma \\ X \times \text{ext}(j) & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

кодекартон.] Установите аналогичную (контравариантную) сопряженность между отображениями $j \mapsto \text{int}(j)$ и $U \mapsto j_U^0$.

ГЛАВА 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОРФИЗМЫ

4.1. Теорема факторизации

Эта глава посвящена более детальному изучению 2-категории $\mathcal{G}\text{or}$, введенной в 1.16.

4.11 Определение. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм.

(i) Морфизм f называют *включением*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(a) f_* полон и унивалентен;
(b) коединица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$ является изоморфизмом;

(c) (если морфизм f существует) единица сопряжения $(f_! \dashv f^*)$ является изоморфизмом или $f_!$ полон и унивалентен.

(ii) Морфизм f называют *сюръекцией*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(a) f^* отражает изоморфизмы;
(b) f^* унивалентен;
(c) единица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$ мономорфна. $\square$

4.12 Примеры. (i) Пусть j — топология в $\mathcal{E}$. Тогда геометрический морфизм $\text{sh}(\mathcal{E}) \xrightarrow{j} \mathcal{E}$ из 3.39 является включением.

(ii) Пусть $\mathbb{G}$ — точная слева комонада на $\mathcal{F}$. Тогда геометрический морфизм $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{G}}$ из 2.32 является сюръекцией.

[Вскоре мы увидим, что примеры (i) и (ii) наиболее общие из возможных.]

(iii) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм из $\mathcal{E}$. Тогда функтор $\Sigma_f: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ всегда унивалентен и полон в том и только в том случае, когда f — мономорфизм. Поэтому в силу 4.11(i) (c) геометрический морфизм $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ из 1.46 будет включением в том и только в том случае, когда f — мономорфизм.

Аналогично, этот морфизм будет сюръекцией в том и только в том случае, когда f — эпиморфизм. Действительно, если $I \xrightarrow{\quad} Y$ — образ морфизма f , то $f^*(I \xrightarrow{\quad} Y)$ — изоморфизм; поэтому, чтобы f^* отражало изоморфизмы, необходимо, чтобы f был эпиморфизмом. Обратно, если f — эпиморфизм и

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightleftharpoons[h]{g} & T \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

— два морфизма из $\mathcal{E}/Y$ с одним и тем же образом относительно f^* , то композиции $X \times_Y Z \xrightarrow{\pi_2} Z \xrightarrow[h]{g} T$ совпадают; поэтому g и h совпадают, так как π_2 , являясь подъемом эпиморфизма, есть эпиморфизм.

(iv) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда, рассуждая, как в (iii), можно показать, что геометрический морфизм $\text{Shv}(X) \rightarrow \text{Shv}(Y)$ из 4.17(i) будет включением (соответственно сюръекцией), если f — включение топологического пространства (соответственно сюръективное отображение), а обратные утверждения верны, если дополнительно предположить, что X является T_0 -пространством (соответственно Y является T_1 -пространством). □

4.13 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Если f — одновременно включение и сюръекция, то (f_*, f^*) — эквивалентность категорий (а потому f — эквивалентность в $\mathcal{E}\text{op}$).

Доказательство. Пусть α, β — единица и коединица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$. В силу 4.11(i) (b) β — изоморфизм, поэтому достаточно проверить, что α — изоморфизм. Но из «треугольного соотношения»

$$\begin{array}{ccc} f^* & \xrightarrow{f^*\alpha} & f^*f_*f^* \\ & \searrow 1_{f^*} & \downarrow \beta_{f^*} \\ & & f^* \end{array}$$

следует, что $f^*\alpha$ — изоморфизм, но f^* отражает изоморфизмы. □

4.14 Теорема (Ловер — Тьерне). Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Тогда существует разложение

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \\ & \searrow q & \nearrow i \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

(с точностью до естественного изоморфизма) морфизма f такое, что q — сюръекция, а i — включение; это разложение определено однозначно с точностью до эквивалентности.

Доказательство. Определим морфизм $j: \Omega \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{E}$ как композицию

$$\Omega \xrightarrow{\alpha} f_*f^*\Omega \xrightarrow{\phi} \Omega,$$

где ϕ классифицирует $f_*f^*(t): 1 \cong f_*f^*(1) \rightarrow f_*f^*(\Omega)$, а α — единица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$. Пусть $J \rightarrow \Omega$ — подобъект, классифицируемый с помощью j .

Но если $X' \xrightarrow{\sigma} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$ с классифицирующим отображением $X \xrightarrow{\theta} \Omega$, то

θ пропускается через $J \rightarrow \Omega \Leftrightarrow \alpha\theta$ пропускается через $f_*f^*(t) \Leftrightarrow f^*(\theta)$ пропускается через $f^*(t) \Leftrightarrow f^*(\sigma)$ — изоморфизм.

Из этого легко вывести, что класс Ξ_J удовлетворяет условиям предложения 3.18, а потому j — топология в $\mathcal{E}$. Более того, если положить $\mathcal{J} = \text{sh}_j(\mathcal{E})$, то в силу 3.47 имеется факторизация $\mathcal{F} \xrightarrow{q} \mathcal{J}$ морфизма f через включение $\mathcal{J} \xrightarrow{i} \mathcal{E}$.

Предположим теперь, что γ — такой морфизм из $\mathcal{J}$, что $q^*(\gamma)$ — изоморфизм. Тогда $f^*i_*(\gamma)$ — изоморфизм, значит, $i_*(\gamma)$ j -биplotен, откуда в силу 3.46 γ — изоморфизм. Поэтому q — сюръекция.

Наконец, предположим, что $\mathcal{F} \xrightarrow{r} \mathcal{L} \xrightarrow{i} \mathcal{E}$ — любое другое разложение f в композицию сюръекции и включения. Так как r — сюръекция, то i^* обращает все j -плотные мономорфизмы, а потому имеется разложение

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{i} & \mathcal{E} \\ & \searrow i & \nearrow i \\ & \mathcal{J} & \end{array}$$

Но теперь морфизм i должен быть одновременной сюръекцией и включением; значит, в силу 4.13 он является эквивалентностью. □

4.15 Предложение. (i) Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — включение. Тогда существует (единственная) топология j в $\mathcal{E}$ такая, что $\mathcal{F} \simeq \text{sh}_j(\mathcal{E})$.

(ii) Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — сюръекция. Тогда на $\mathcal{F}$ существует (единственная с точностью до изоморфизма) комонада $\mathbb{G}$ такая, что $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F}_{\mathbb{G}}$.

Доказательство. (i) получается непосредственно в силу конструкции из 4.14 топоса $\mathcal{J}$, являющегося образом данного включения.

(ii) Функтор f^* имеет правый сопряженный, сохраняет уравнители и отражает изоморфизмы; поэтому в силу утверждения, двойственного к 0.13, он комонадический. □

4.16 Замечание. Следует отметить, что в диаграмме из 4.14 комонады на $\mathcal{F}$, индуцированные сопряженными парами $(f^* \dashv f_*)$ и $(q^* \dashv q_*)$, изоморфны, поскольку комонада на $\mathcal{J}$, индуцированная сопряженной парой $(i^* \dashv i_*)$, тривиальна.

В действительности, используя 2.32, можно предложить несколько другое доказательство теоремы 4.14; в качестве образа $\mathcal{F}$ берется топос $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E}$ — комонада, индуцированная сопряжением $(f^* \dashv f_*)$, затем на основании уточненной теоремы Бека о трюйственности (см. [CW], с. 150, упражнение 2) доказывается, что функтор сравнения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ имеет полный и унивалентный правый сопряженный. $\square$

4.17 Замечание. Также без особых усилий можно привести другое доказательство утверждения 4.15(i), используя идеи упражнения 3.2, поскольку монада на $\mathcal{E}$, индуцированная сопряжением $(f^* \dashv f_*)$, идемпотентна в силу 4.11(i) (b). На самом деле в более общем варианте теоремы 4.14 монада на $\mathcal{E}$, индуцированная $(i^* \dashv i_*)$, является идемпотентной монадой, ассоциированной (в смысле Факира [163]) с монадой, индуцированной сопряжением $(f^* \dashv f_*)$; используя эту идею, можно дать еще одно, третье построение топоса-образа. $\square$

4.18 Примеры. (i) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в топосе $\mathcal{E}$. Тогда из 4.12(iii) легко вывести, что топос $\mathcal{F}$, являющийся образом геометрического морфизма $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$, есть (с точностью до эквивалентности) топос $\mathcal{E}/Q$, где Q — образ морфизма f (1.52).

(ii) Аналогично, если $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, то топос, лежащий в образе морфизма $\text{Shv}(X) \rightarrow \text{Shv}(Y)$, совпадает с $\text{Shv}(I)$, где I — образ отображения f с топологией подпространства в Y .

(iii) Пусть (X, U) — топологическое пространство. Тогда трудно проверить, что имеется геометрический морфизм $\mathcal{P}/X \xrightarrow{f} \mathcal{P}^{\text{top}}$, где $f_*(E \xrightarrow{p} X)$ — (пред)пучок всех (не обязательно непрерывных) сечений проекции p и $f^*(P)$ — индексированное семейство слоев предпучка P (ср. 0.24).

Но образ этого морфизма есть в точности топос $\text{Shv}(X)$, и два описания топоса, являющегося образом в 4.14 и 4.16, соответствуют двум «классическим» описаниям пучков на топологическом пространстве (т. е. как предпучков, удовлетворяющих некоторым условиям точности, или как множеств над X со структурой коалгебры (т. е. с топологией такой, что проекция есть локальный гомеоморфизм)). $\square$

С помощью теоремы 4.14 можно распространить универсальные свойства порождаемых топологий п. 3.59 с пучковых подтопосов в $\mathcal{E}$ на произвольные топосы над $\mathcal{E}$. Типичным примером является

4.19 Следствие. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, $X' \rightarrow X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$, а j — топология в $\mathcal{E}$, порожденная σ согласно 3.59(ii). Тогда f пропускается через включение $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ в том и только в том случае, когда $f^*(\sigma)$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть k — топология в $\mathcal{E}$, индуцированная морфизмом f , как в доказательстве 4.14. Тогда каждое из указанных условий эквивалентно утверждению, что $j \leq k$ в решетке топологий топоса $\mathcal{E}$. $\square$

4.2. Конструкция склейки

4.21 Предложение. 2-категория $\mathcal{E}\text{op}$ имеет начальный объект (а именно, вырожденный топос 1 с одним объектом и одним (тождественным) морфизмом) и конечные копроизведения (категория копроизведения топосов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в действительности есть их произведение в $\mathcal{E}\text{at}$; см. 1.15).

Доказательство. Прямая проверка. $\square$

Вполне естествен вопрос о том, существуют ли в $\mathcal{E}\text{op}$ более общие конечные копределы. В общем случае ответ на этот вопрос, по-видимому, неизвестен; однако он известен для более грубого понятия — слабого копредела, диаграммы которого коммутируют не с точностью до 2-изоморфизмов, а с точностью до не обязательно обратимых 2-стрелок. В этом параграфе вводится принадлежащая Рейту [129] общая конструкция склейки, которая позволяет строить слабые копределы, но сначала следует ввести необходимую 2-категорную терминологию.

4.22 Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая 2-категория, а D — категория.

(i) Слабая диаграмма $D \xrightarrow{(\Gamma, \alpha)} \mathcal{C}$ состоит из следующих данных:

- (a) каждому объекту d из D сопоставляется объект $\Gamma(d)$ из $\mathcal{C}$;
- (b) каждому морфизму $d' \xrightarrow{f} d$ из D сопоставляется 1-стрелка $\Gamma(f): \Gamma(d') \rightarrow \Gamma(d)$;
- (c) каждому объекту d сопоставляется 2-стрелка $\alpha_d: 1_{\Gamma(d)} \rightarrow \Gamma(1_d)$;
- (d) каждой компонентой пары $d'' \xrightarrow{f'} d' \xrightarrow{f} d$ сопоставляется 2-стрелка $\alpha_{f, f'}: \Gamma(f) \Gamma(f') \rightarrow \Gamma(ff')$;
- (e) при этом выполнены условия согласования: диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(f) \Gamma(1_d) & \xleftarrow{\Gamma(f) \cdot \alpha_d} & \Gamma(f) & \xrightarrow{\alpha_d \cdot \Gamma(f)} & \Gamma(1_d) \Gamma(f) \\ & \searrow \alpha_{f, 1_d} & \downarrow 1_{\Gamma(f)} & \swarrow \alpha_{1_d, f} & \\ & & \Gamma(f) & & \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f) \Gamma(f') \Gamma(f'') & \xrightarrow{\Gamma(f) \cdot \alpha_{f', f''}} & \Gamma(f) \Gamma(f' f'') \\ \downarrow \alpha_{f, f'} \cdot \Gamma(f'') & & \downarrow \alpha_{f, f' f''} \\ \Gamma(f f') \Gamma(f'') & \xrightarrow{\alpha_{f f', f''}} & \Gamma(f f' f'') \end{array}$$

коммутируют.

(ii) Слабый конус (X, s, σ) под слабой диаграммой (Γ, α) состоит из

- (a) объекта X 2-категории $\mathcal{C}$;
- (b) сопоставления каждому объекту d из D 1-стрелки $s_d: \Gamma(d) \rightarrow X$;
- (c) сопоставления каждому морфизму $d' \xrightarrow{f} d$ из D 2-стрелки $\sigma_f: s_d * \Gamma(f) \rightarrow s_{d'}$;
- (d) при этом выполнены условия согласования: $\sigma_{1_d} \cdot (s_d * \alpha_d) = 1_{s_d}$ и $\sigma_{ff'} \cdot (\sigma_f * \Gamma(f')) = \sigma_{ff'} \cdot (s_d * \alpha_{f, f'})$.

В терминологии из [184] слабый конус есть правое слабое естественное преобразование из (Γ, α) в постоянную диаграмму. Морфизмом слабых конусов $\gamma: (X, s, \sigma) \rightarrow (X, t, \tau)$ называют модификацию естественных преобразований, т. е. семейство 2-стрелок $\gamma_d: s_d \rightarrow t_d$, совместимых с сопоставлениями σ и τ . Обозначим через $\text{Icn}(\Gamma, \alpha; X)$ категорию слабых конусов под (Γ, α) с вершиной X .

(iii) Слабым копредделом слабой диаграммы (Γ, α) называется объект, представляющий функтор $\text{Icn}(\Gamma, \alpha; -): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}\text{at}$, т. е. слабый конус (L, t, τ) такой, что для любого X функтор $\mathcal{C}(L, X) \rightarrow \text{Icn}(\Gamma, \alpha; X)$, $h \mapsto (X, ht, h * \tau)$, является эквивалентностью категорий. $\square$

4.23 Пример (Бенабу [155]). Пусть $\mathcal{E}$ — категория. Тогда задание монады $\mathbb{T}$ на $\mathcal{E}$ в точности эквивалентно заданию слабой диаграммы $1 \rightarrow \mathcal{C}\text{at}$, переводящей единственный объект из 1 в $\mathcal{E}$. Кроме того, универсальные свойства категорий Клейсли $\text{KI}(\mathbb{T})$ означают, что она является слабым копредделом для этой слабой диаграммы. (Категория Эйленберга — Мура $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$ есть слабый предел для той же диаграммы.) $\square$

4.24 Конструкция. Пусть $\mathcal{C}$ обозначает 2-катеорию, объекты и 1-стрелки которой составляют топосы и их функторы, точные слева, а 2-стрелками являются противоположные естественные преобразования. (Если α — некоторая 2-стрелка из $\mathcal{C}$, то через $\bar{\alpha}$ будет обозначаться соответствующее естественное преобразование в противоположном направлении.) Пусть (Γ, α) — слабая диаграмма в $\mathcal{C}$ над конечной категорией D . Положим $\mathcal{E} = \prod_{d \in D_0} \Gamma(d)$; тогда на $\mathcal{E}$ имеется точная слева комонада $\mathbb{G} = (G, \varepsilon, \delta)$, определяемая соотношениями

$$G(X_d | d \in D_0) = \left(\prod_{d' \xrightarrow{f} d} \Gamma(f)(X_{d'}) \mid d \in D_0 \right),$$

$$(\varepsilon_X)_d: \prod_f \Gamma(f)(X_{d'}) \longrightarrow \Gamma(1_d)(X_d) \xrightarrow{(\alpha_d)_X} X_d.$$

и

$$\begin{array}{ccc} (\delta_X)_d: \prod_f \Gamma(f)(X_{d'}) & \longrightarrow & \prod_{(f, f')} \Gamma(f)\Gamma(f')(X_{d''}) \\ \downarrow \pi_{ff'} & & \downarrow \pi_{(f, f')} \\ \Gamma(ff')(X_{d''}) & \xrightarrow{(\bar{\alpha}_{f, f'})_{X_{d''}}} & \Gamma(f)\Gamma(f')(X_{d''}) \end{array}$$

Так как функторы $\Gamma(f)$ точны слева, то и функтор G точен слева; согласно 4.22(i) (e) легко проверить, что δ коассоциативно, а ε — коединица этого преобразования. Поэтому в силу 2.32 имеется топос $\mathcal{E}_{\mathbb{G}} = \text{Gl}(\Gamma, \alpha)$, называемый *склежкой* слабой диаграммы (Γ, α) . Объект топоса $\text{Gl}(\Gamma, \alpha)$ можно представлять поэтому в виде семейства объектов $X_d \in \Gamma(d)$ ($d \in D_0$) с морфизмами $\xi_f: X_d \rightarrow \Gamma(f)(X_{d'})$ для каждого $d' \xrightarrow{f} d$, удовлетворяющими некоторым условиям согласования, связывающими сопоставления ξ и α . $\square$

4.25 Теорема (Рейт). 2-категория $\mathcal{D}\text{or}$ имеет конечные слабые копредделы.

Доказательство. Пусть (Γ, α) — конечная слабая диаграмма в $\mathcal{D}\text{or}$. Рассмотрим ее композицию со стирающим функтором $\mathcal{D}\text{or} \rightarrow \mathcal{C}$, переводящим геометрические морфизмы в их прямые образы, и применим конструкцию из 4.24. Поскольку функторы $\Gamma(f)_*$ имеют левые сопряженные, то и функтор G , построенный в 4.24, имеет левый сопряженный; точнее, его левый сопряженный функтор H задается равенством

$$H(X_d | d \in D_0) = \left(\prod_{d' \xrightarrow{f} d} \Gamma(f)^*(X_{d'}) \mid d \in D_0 \right).$$

Поэтому в силу утверждения, двойственного к 0.14, H имеет структуру монады $\mathbb{H}$, и объекты топоса $\text{Gl}(\Gamma, \alpha)$ можно рассматривать как $\mathbb{H}$ -алгебры, а не только как $\mathbb{G}$ -коалгебры, т. е. структурные морфизмы $\xi_f: X_d \rightarrow \Gamma(f)_*(X_{d'})$ можно заменять их транспозициями $\bar{\xi}_f: \Gamma(f)^*(X_{d'}) \rightarrow X_d$.

Обозначим теперь через t_d геометрический морфизм $\Gamma(d) \xrightarrow{\nu_d} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{G}} = \text{Gl}(\Gamma, \alpha)$, где ν_d — включение копроизведения, указанного в $\mathcal{D}\text{or}$, т. е. морфизм, как и в 1.17(iii), а через $\tau_f: \Gamma(f)^* t_d^* \rightarrow t_{d'}^*$ обозначим естественное преобразование, значением которого на (X, ξ) является $\bar{\xi}_f$. Очевидно, тогда тройка $(\text{Gl}(\Gamma, \alpha), t, \tau)$ составляет слабый конус под (Γ, α) .

Для любого слабого конуса $(\mathcal{F}, s, \sigma)$ под диаграммой (Γ, α) в $\mathcal{D}\text{or}$ можно определить геометрический морфизм $h: \text{Gl}(\Gamma, \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \mathcal{F}$ с $h^*(Y) = (X, \xi)$, где $X_d = s_d^*(Y)$ и $\bar{\xi}_f = (\sigma_i)_Y$, и

$$h_*(X, \xi) = \text{eq}(\prod_a s_{d*}(X_d) \xrightarrow[a]{a} \prod_f s_{d*}\Gamma(f)_*(X_{d'}),$$

где a и b индуцированы композициями

$$\text{Ps}_{d*}(X_d) \xrightarrow{\pi_d} s_{d*}(X_d) \xrightarrow{s_{d*}(\xi_f)} s_{d*}\Gamma(f)_*(X_{d'})$$

$$\text{Ps}_{d*}(X_d) \xrightarrow{\pi_{d'}} s_{d'}(X_{d'}) \xrightarrow{s_{d'}(\xi_{f'})} s_{d'}\Gamma(f')_*(X_{d''})$$

соответственно.

Далее, непосредственная проверка показывает, что функтор h^* точен слева и сопряжен слева к функтору h_* и, очевидно, имеется канонический изоморфизм $(\mathcal{F}, s, \sigma) \cong (\mathcal{F}, ht, h * \tau)$ в $\text{Isn}(\Gamma, \alpha; \mathcal{F})$ (а фактически равенство на функторах обратного образа). Поэтому сопоставление $(\mathcal{F}, s, \sigma) \mapsto h$ определяет обратный (с точностью до естественного изоморфизма) функтор к функтору $\mathcal{X}\text{or}(\text{Gl}(\Gamma, \alpha), \mathcal{F}) \rightarrow \text{Isn}(\Gamma, \alpha; \mathcal{F})$ из 4.22(iii). $\square$

В некоторых случаях конструкция склейки может быть использована для построения настоящего копредела (в смысле 2-категорий) в $\mathcal{X}\text{or}$. Один из важных примеров состоит в следующем:

4.26 Предложение. В $\mathcal{X}\text{or}$ существуют амальгамы пар вложений.

Доказательство. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{u} & \mathcal{E}_2 \\ \downarrow v & & \\ \mathcal{E}_3 & & \end{array}$$

— диаграмма включений в $\mathcal{X}\text{or}$. Применим конструкцию склейки к слабой диаграмме следующего вида: D — категория $(d \xrightarrow[f]{f} e)$, т. е. недискретная категория (или тривиальный связный группоид) с двумя объектами d и e . $\Gamma(d) = \mathcal{E}_2$, $\Gamma(e) = \mathcal{E}_3$, $\Gamma(f) = v_* u^*$, $\Gamma(g) = u_* v^*$, $\Gamma(1_d) = 1_{\mathcal{E}_2}$, $\Gamma(1_e) = 1_{\mathcal{E}_3}$, $\alpha_d = \alpha_e = 1$, $\alpha_{f,g}$ есть композиция $1 \xrightarrow{\eta} v_* v^* \xrightarrow{\sim} v_* u^* u_* v^*$ (η — единица сопряжения $(v^* \dashv v_*)$), а $\alpha_{g,f}$ определяется аналогично.

Тогда каждый объект из $\text{Gl}(\Gamma, \alpha)$ состоит из четверки (X, Y, θ, ϕ) , где $X \in \mathcal{E}_2$, $Y \in \mathcal{E}_3$ и морфизмы $\theta: X \rightarrow u_* v^* Y$, $\phi: Y \rightarrow v_* u^* X$ удовлетворяют условиям согласования. Но эти

условия попросту означают, что $\bar{\theta}: u^* X \rightarrow v^* Y$ и $\bar{\phi}: v^* Y \rightarrow u^* X$ — взаимно обратные изоморфизмы в $\mathcal{E}_1$. Следовательно, $\text{Gl}(\Gamma, \alpha)$ есть предел в $\mathcal{C}\text{at}$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}_2 & \\ & \downarrow u^* & \\ \mathcal{E}_3 & \xrightarrow{v^*} & \mathcal{E}_1 \end{array}$$

откуда, рассуждая как и в 4.25, можно получить, что это копредел в $\mathcal{X}\text{or}$. $\square$

То, что как в 4.21, так и в 4.26 категории копределов в $\mathcal{X}\text{or}$ являются на самом деле пределами в $\mathcal{C}\text{at}$, можно объяснить по крайней мере для топосов, определенных над $\mathcal{P}$, тем, что стирающий функтор $(\mathcal{X}\text{or}/\mathcal{P})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}\text{at}$, переводящий геометрические морфизмы в их обратные образы, представим топосом $\mathcal{P}[U]$ (см. 4.37(iv) ниже). Поэтому для конструкции копределов более общих диаграмм в $\mathcal{X}\text{or}$ было бы достаточно показать, что соответствующие пределы в $\mathcal{C}\text{at}$ имеют структуру топоса; однако в общем случае это еще не сделано.

Другое приложение конструкции 4.24 относится к задаче об артиновой склейке (см. [GV], IV.9.5). Для заданного топоса $\mathcal{E}$ и открытого объекта U в $\mathcal{E}$ имеется два пучковых подтопоса $\mathcal{E}_o, \mathcal{E}_c$ из $\mathcal{E}$, определяемых открытой и замкнутой топологиями j_U^o, j_U^c (3.52). Какая нужна дополнительная информация для восстановления топоса $\mathcal{E}$ по $\mathcal{E}_o$ и $\mathcal{E}_c$? Напомним топологический аналог этой задачи, когда $\mathcal{E}$ соответствует пространству X , а топосы $\mathcal{E}_o, \mathcal{E}_c$ соответствуют дополнительным открытому и замкнутому подпространствам в X . Тогда, очевидно, необходима некоторая информация о том, как расположена «граница» топоса

$\mathcal{E}_o$ в $\mathcal{E}_c$. Если через $\mathcal{E}_o \xrightarrow{i_o} \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_c \xrightarrow{i_c} \mathcal{E}$ обозначить соответствующие морфизмы включения, то легко проверить, что композиция $i_o^* i_c^*: \mathcal{E}_c \rightarrow \mathcal{E}_o$ является тривиальным функтором, переводящим каждый объект из $\mathcal{E}_c$ в конечный объект категории $\mathcal{E}_o$. Но композиция $i_c^* i_o^*$ может быть нетривиальной; она называется *окаймляющим функтором*, ассоциированным с открытым объектом U .

4.27 Теорема (Артин — Рейт). Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — топосы, а $L: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ — произвольный функтор, точный слева. Тогда существует топос $\mathcal{E}$ (единственный с точностью до эквивалентности), содержащий открытый подобъект U , такой, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ эквивалентны соответствующим открытому и замкнутому пучковым топосам, а L — окаймляющему функтору.

Доказательство. Применим конструкцию склеивания к диаграмме $(\mathcal{E}_1 \xrightarrow{L} \mathcal{E}_2)$ в $\mathcal{C}$, рассматриваемой как слабая диаграмма с тождественными α -стрелками. Тогда каждый объект $\mathbf{x}$

$\mathcal{E} = \text{Gl}(\Gamma, \alpha)$ представляется тройкой (X_1, X_2, u) , где $X_1 \in \mathcal{E}_1$, $X_2 \in \mathcal{E}_2$ и $u: X_2 \rightarrow L(X_1)$ (условия согласования несущественны); поэтому топос $\mathcal{E}$ можно описать как относительную категорию $(\mathcal{E}_2 \downarrow L)$. Открытым объектом U является тройка $(1, 0, 0 \rightarrow 1)$; на основании 3.53 и 3.54 легко проверить, что j_U^c -пучки — это объекты (X_1, X_2, u) , для которых $X_1 \cong 1$ в $\mathcal{E}_1$, а j_U^c -пучки — это пучки, для которых u — изоморфизм в $\mathcal{E}_2$. Оставшиеся детали восстанавливаются непосредственно. $\square$

4.28 Пример. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, а $S = \{a, b\}$ обозначает пространство Серпинского, где a — открытая точка. Определим *открытый цилиндр* отображения f как факторпространство M_f^o , полученное из суммы $(X \times S) \amalg Y$ отождествлением для всех $x \in X$ пар (x, b) с одинаковыми образами $f(x)$. Тогда топос $\text{Shv}(M_f^o)$ можно получить, применяя конструкцию из 4.27 к точному слева функтору $\text{Shv}(X) \xrightarrow{f^*} \text{Shv}(Y)$. Аналогично, применяя 4.27 к $\text{Shv}(Y) \xrightarrow{f^*} \text{Shv}(X)$, получим топос пучков на замкнутом цилиндре M_f^c , который определяется так же, как M_f^o , после обращения ориентации пространства S . $\square$

4.3. Теорема Дняконеску

Одним из важнейших инструментов описания структуры категории $\mathcal{D}\mathcal{O}\mathcal{P}$ является теорема Дняконеску [30], характеризующая геометрические морфизмы, область значений которых имеет вид $\mathcal{E}^c$ для некоторой категории $\mathbf{C} \in \text{cat}(\mathcal{E})$. Всюду в этом и следующем параграфе мы работаем с топосами, определенными над фиксированным «основным топосом» $\mathcal{E}$ (т. е. с объектами категории $\mathcal{D}\mathcal{O}\mathcal{P}/\mathcal{E}$; для наименования таких объектов также используется термин *$\mathcal{E}$ -топос*).

4.31. Определение. Пусть $\mathbf{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, G — внутренний предпучок на $\mathbf{C}$, а $\mathbf{G} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{C}$ — соответствующее дискретное расслоение. Предпучок G называют *плоским*, если категория $\mathbf{G}$ фильтрована, а через $\text{Flat}(\mathbf{C}^{\text{op}}, \mathcal{E})$ обозначают полную подкатегорию в $\mathcal{E}^{\text{cop}}$, состоящую из плоских предпучков на $\mathbf{C}$. $\square$

4.32. Лемма. Если G — плоский предпучок на $\mathbf{C}$, то функтор $(-) \otimes_{\mathbf{C}} G: \mathcal{E}^c \rightarrow \mathcal{E}$ является обратным образом некоторого геометрического морфизма.

Доказательство. Ввиду 2.49 мы знаем, что функтор $(-) \otimes_{\mathbf{C}} G$ имеет правый сопряженный, а ввиду 2.48 он представим в виде композиции $\mathcal{E}^c \xrightarrow{\gamma^*} \mathcal{E}^c \xrightarrow{\lim_{\mathbf{G}}} \mathcal{E}$. Но функтор γ^* то-

чен слева, так как в силу 2.34 он имеет левый сопряженный, а функтор $\lim_{\mathbf{G}}$ точен слева в силу 2.58. $\square$

4.33 Пример. Пусть $\mathbf{C}$ — малая категория, а $G: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ — функтор. Если предпучок, соответствующий G , плоский, то функтор G точен слева, поскольку, как легко проверить, он представим в виде композиции $\mathbf{C}^{\text{op}} \xrightarrow{h} \mathcal{E} \xrightarrow{\mathbf{C}(-) \otimes G} \mathcal{E}$, где h — вложение Йонеды. Обратно, если $\mathbf{C}$ имеет все конечные копределы, то любой точный слева функтор $G: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ задает плоский предпучок. Например, пусть $x \in G(U)$, $y \in G(V)$ — два элемента из $G_0 = \coprod_{U \in \mathbf{C}_0} G(U)$; тогда в категории $\mathbf{G}$ они оба могут быть отображены в один элемент $\langle x, y \rangle$ из $G(U \amalg V) \cong G(U) \times G(V)$, поэтому условие 2.51(b) выполнено. (Рассуждения для 2.51(a) и 2.51(c) аналогичны.) $\square$

4.34 Теорема (Дняконеску). Пусть $\mathbf{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, а $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — топос над $\mathcal{E}$. Тогда существует эквивалентность между категорией $\mathcal{D}\mathcal{O}\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^c)$ геометрических морфизмов над $\mathcal{E}$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{E}^c$ и категорией $\text{Flat}(f^* \mathbf{C}^{\text{op}}, \mathcal{F})$, и эта эквивалентность естественна по $\mathcal{F}$.

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала случай $\mathcal{F} = \mathcal{E}^c$. Тожественному геометрическому морфизму соответствует профунктор Йонеды $Y(\mathbf{C})$ (2.45), рассматриваемый как предпучок на $\mathbf{C}^*(\mathbf{C})$ в $\mathcal{E}^c$. Для проверки того, что $Y(\mathbf{C})$ плоский, заметим, что поскольку стирающий функтор $U: \mathcal{E}^c \rightarrow \mathcal{E}/\mathbf{C}_0$ сохраняет и отражает пределы и эпиморфизмы, то достаточно проверить фильтрованность категории дискретного расслоения

$$\begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{m} & C_1 \\ \downarrow \pi_2 & \searrow (\pi_1, d_1; \pi_2) & \downarrow (d_0, d_1) \\ C_1 \times C_0 & \xrightarrow[d_1 \times 1]{d_0 \times 1} & C_0 \times C_0 \\ & \searrow \pi_2 \quad \swarrow \pi_2 & \\ & C_0 & \end{array}$$

в $\mathcal{E}/\mathbf{C}_0$. Но, как легко убедиться, квадрат

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\ \downarrow (1, d_1) & & \downarrow i \\ C_2 & \xrightarrow{\pi_2} & C_1 \end{array}$$

декартов и $m(1_{C_1}, id_1) = 1_{C_1}$; поэтому $1_{C_0} \xrightarrow{i} d_1$ — конечный объект указанной выше категории в смысле упражнения 2.10. Значит, она фильтрована и $Y(C)$ — плоский предпучок.

(ii) Пусть $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^C$ — морфизм $\mathcal{E}$ -топосов. Так как g^* сохраняет расслоенные произведения и эпиморфизмы, то этот функтор сохраняет дискретные расслоения и фильтрованные категории; значит, $g^*(Y(C))$ — плоский предпучок на $g^*C^*(C) \cong \cong f^*(C)$ в $\mathcal{F}$. Кроме того, естественные преобразования $\alpha: g_1 \rightarrow g_2$ над $\mathcal{E}$, очевидно, индуцируют морфизмы предпучков $g_1^*(Y(C)) \rightarrow g_2^*(Y(C))$, откуда получается функтор

$$\Phi: \mathcal{T}op/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^C) \longrightarrow \text{Flat}(f^*C^{op}, \mathcal{F}); g \longmapsto g^*(Y(C)).$$

(iii) Пусть G — плоский предпучок на f^*C . Определим функтор $\Psi(G)^*$ как композицию

$$\mathcal{E}^C \xrightarrow{(f^C)^*} \mathcal{F}^{f^*C} \xrightarrow{(-) \otimes G} \mathcal{F},$$

где $(f^C)^*$ обозначает функтор f^* , применяемый к дискретным корасслоениям над C . Но из 2.16 немедленно следует, что функтор $(f^C)^*$ точен слева; кроме того, он имеет правый сопряженный функтор $(f^C)_*$, описываемый как композиция f_* с последующей заменой базы вдоль единицы $C \xrightarrow{\alpha} f_*f^*C$. Поэтому в силу 4.32 функтор $\Psi(G)^*$ является обратным образом геометрического морфизма $\Psi(G): \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^C$. Далее, для любого X из $\mathcal{E}$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi(G)^* C^*(X) &\cong (f^*C)^* f^*(X) \otimes_{f^*C} G \\ &\cong \lim_G (G^* f^*(X)) \\ &\longrightarrow \\ &\cong f^*(X) \times \lim G \\ &\longrightarrow \\ &\cong f^*(X) \text{ (в силу 2.54).} \end{aligned}$$

Поэтому морфизм $\Psi(G)$ определен над $\mathcal{E}$, и, очевидно, Ψ есть функтор

$$\text{Flat}(f^*C^{op}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}op/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^C).$$

(iv) Наконец, осталось показать, что функторы Φ и Ψ взаимно обратны с точностью до естественного изоморфизма. Нетрудно проверить, что $(f^C)^*(Y(C)) \cong Y(f^*C)$, откуда $\Phi\Psi(G) \cong Y(f^*C) \otimes_{f^*C} G \cong G$ в силу 2.45.

Аналогично, для данного геометрического морфизма g и объекта F из $\mathcal{E}^C$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(g)^*(F) &= (f^C)^*(F) \otimes g^*(Y(C)) \\ &\cong (g^C)^*(C^C)^*(F) \otimes g^*(Y(C)) \\ &\cong g^*(C^*(F) \otimes_{C^*C} Y(C)) \text{ (поскольку } g^* \text{ сохраняет тензорные произведения)} \\ &\cong g^*(F) \text{ (в силу 2.45).} \end{aligned}$$

Очевидно, этот изоморфизм естествен по F и g . $\square$

4.35 Следствие. Квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{f^*C} & \xrightarrow{f^C} & \mathcal{E}^C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \end{array}$$

декартов в $\mathcal{T}op$, где f^C — геометрический морфизм, построенный в 4.34(iii).

Доказательство. Предположим, что задан топос $\mathcal{E}$ и морфизмы $\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \xrightarrow{h} \mathcal{E}^C$, образующие коммутативный квадрат (с точностью до изоморфизма). Тогда ввиду 4.34 h соответствует плоскому предпучку H на g^*f^*C , который в свою очередь соответствует геометрическому морфизму $\mathcal{G} \xrightarrow{h} \mathcal{F}^{f^*C}$ над $\mathcal{F}$. Но так как f^C соответствует плоскому предпучку $Y(f^*C)$, то имеется канонический изоморфизм $f^C \cdot h \cong h$, потому что оба морфизма соответствуют H . $\square$

4.36 Следствие. Функтор $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}op/\mathcal{E}$ из 2.35 сохраняет конечные произведения.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{C \times D} & \longrightarrow & \mathcal{E}^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^C & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

— диаграмма произведения в $\mathcal{T}op/\mathcal{E}$, т. е. декартов квадрат в $\mathcal{T}op$. Однако, как уже отмечалось в § 2.4, имеются канонические изоморфизмы $\mathcal{E}^{C \times D} \cong (\mathcal{E}^C)^{C^D} \cong (\mathcal{E}^D)^{C^*C}$, поэтому требуемое вытекает из 4.34. $\square$

Но, к сожалению, функтор из 2.35 не сохраняет все конечные пределы, контрпример будет предложен ниже в упражнении 6.7.

Важность теоремы Диаконеску подчеркивают ее приложения, которые встречаются всюду в теории топосов. На многие из них мы натолкнемся в последующих главах этой книги; здесь же мы обсудим ряд интересных примеров.

4.37 Примеры. (i) Пусть $X = \left(X \rightrightarrows X \right)$ — дискретная категория. Тогда $\mathcal{E}^X \cong \mathcal{E}^{X^{\text{op}}} \cong \mathcal{E}/X$, и, так как категория любого дискретного расслоения $G \xrightarrow{\gamma} X$ также дискретна, то легко убедиться, что объект $G \xrightarrow{\gamma} X$ категории $\mathcal{E}/X$ соответствует плоскому предпуку в том и только в том случае, когда $G \rightarrow 1$ — изоморфизм, т. е. в том и только в том случае, когда γ — глобальный элемент объекта X . Поэтому категория $\text{Top}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^X)$ эквивалентна дискретной категории глобальных элементов в f^*X ; в частности, отметим, что $Y(X)$ есть в точности общий элемент объекта X , как он определен в § 1.4. Следовательно, общие свойства этих элементов могут быть перенесены с топосов вида $\mathcal{E}/U$ на произвольные $\mathcal{E}$ -топосы.

(ii) Пусть $G = (G \rightrightarrows 1)$ — внутренняя группа в $\mathcal{E}$ (т. е. мономорфизм с отображением обращения $G \rightarrow G$). Теперь предпучок на G есть просто (левый) G -объект, т. е. некоторый объект M с унитарным ассоциативным действием $G \times M \xrightarrow{\alpha} M$. Используя то, что все морфизмы в G обратимы, можно без труда показать, что категория $\left(G \times M \xrightarrow[\pi_2]{\alpha} M \right)$ удовлетворяет 2.51(b) (соответственно 2.51(c)) в том и только в том случае, когда G действует транзитивно (соответственно эффективно) на M , т. е. когда $G \times M \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} M \times M$ — эпиморфизм (соответственно мономорфизм). Поэтому предпучок на G является плоским в том и только в том случае, когда он является (левым) G -торсором, т. е. когда $G \times M \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} M \times M$ — изоморфизм и $M \rightarrow 1$ — эпиморфизм.

В § 8.3 мы узнаем, что классы изоморфизма f^*G -торсоров в $\mathcal{E}$ -топосе $\mathcal{F}$ соответствуют элементам первой группы когомологий $H_1(\mathcal{F}; G)$, например, если $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, $G = \mathbb{Z}_2$ и $\mathcal{F}$ — топос пучков на единичной окружности S^1 , то имеется два класса изоморфизма G -торсоров в $\mathcal{F}$, именно: класс (пучка сечений) проекции $S^1 \times G \xrightarrow{\pi_1} S^1$ и класс двулистного накрытия $S^1 \rightarrow S^1$; они соответствуют двум элементам группы $\mathbb{Z}_2 \cong H^1(S^1; \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, в этом случае теорему Диаконеску можно интерпретировать как утверждение, что топос $\mathcal{E}^G$ правых G -объектов есть классифицирующий топос функтора $H^1(-; G)$. Отметим, однако, что групповая структура на этом функторе не получается

из категорной структуры на $\text{Top}/\mathcal{E}(-, \mathcal{E}^G)$, но в случае, когда G абелева, групповая структура получается из того, что $\mathcal{E}^G$ — абелев групповой объект в $\text{Top}/\mathcal{E}$; это вытекает из 4.36 и из того, что G — абелев групповой объект в $\text{cat}(\mathcal{E})$.

(iii) Обозначим через 2 (2.39) конечную категорию с диаграммой $(0 \rightarrow 1)$. Тогда предпучку на 2 соответствует диаграмма $D_1 \xrightarrow{f} D_0$ в $\mathcal{E}$, и, как легко проверить, такой предпучок является плоским в том и только в том случае, когда $D_0 \rightarrow 1$ — изоморфизм и f — мономорфизм. Поэтому категория $\text{Flat}(2^{\text{op}}, \mathcal{E})$ эквивалентна частично упорядоченному множеству открытых объектов категории $\mathcal{E}$. Итак, $\mathcal{E}^2$ — классифицирующий топос для открытых объектов $\mathcal{E}$ -топосов; назовем его топосом Серпинского над $\mathcal{E}$ по аналогии с обладающим известными универсальными свойствами пространством Серпинского в esp . (Отметим также, что топос $\mathcal{E}^2$ может быть получен с помощью артиновой склейки (4.27) диаграммы $\mathcal{E} \xrightarrow{1} \mathcal{E}$; это другая сторона того, что он содержит общий открытый объект.)

(iv) Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, а C — категория $\mathcal{P}_f$ (которую можно считать малой, выбрав по одному множеству в каждом конечном кардинале). Но в $\mathcal{P}_f$ имеются конечные копределы, откуда в силу 4.33 плоский предпучок на C есть просто точный слева функтор $G: \mathcal{P}_f^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}$. Но любой такой функтор определяется множеством $G(1)$, так как всякий объект из $\mathcal{P}_f$ есть конечное копроизведение нескольких экземпляров объекта 1 , и обратно, любое множество X определяет точный слева функтор $\text{hom}(-, X): \mathcal{P}_f^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}$. Поэтому имеется эквивалентность $\text{Flat}(C^{\text{op}}, \mathcal{P}) \cong \mathcal{P}$, и, более того, можно показать, что $\text{Flat}(\gamma^* C^{\text{op}}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ для любого $\mathcal{P}$ -топоса $\mathcal{F} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$. Итак, $\mathcal{P}^C$ — классификатор объектов $\mathcal{P}$ -топосов, т. е. объект, представляющий стирающий функтор

$$(\text{Top}/\mathcal{E})^{\text{op}} \longrightarrow \text{Cat}; (\mathcal{F} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{F}, f \longmapsto f^*.$$

Как легко проверить, общий объект U из $\mathcal{P}^C$, классифицируемый тождественным геометрическим морфизмом, будет функтором включения $\mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{P}$. Обычно будем обозначать классификатор объектов через $\mathcal{P}[U]$, мысля его при этом как «расширение категории $\mathcal{P}$, полученное присоединением неопределенного объекта U »; ниже в § 6.3 мы вернемся к этому примеру в более общем виде.

(v) Под интервалом в топосе $\mathcal{E}$ понимается линейно упорядоченное множество I (т. е. $I_1 \sqcup I_1^{\text{op}} \rightarrow I_0 \times I_0$ — эпиморфизм), имеющее различные максимальный и минимальный элементы $1 \xrightarrow{f} I_0, 1 \xrightarrow{f} I_0$. Морфизмом интервалов называется сохраняющее

порядок отображение (внутренний функтор), которое также сохраняет известные выделенные элементы; через $\text{int}(\mathcal{E})$ обозначается категория интервалов в $\mathcal{E}$. Положим $I_{-1} = 1$. Тогда сопоставление $n \mapsto I_{n-1}$ имеет структуру *косимплициального объекта* $S(\mathbf{I})$ в $\mathcal{E}$, т. е. ковариантного функтора $\Delta \rightarrow \mathcal{E}$ (ср. 2.13). [Отображениями ковырождения косимплициального объекта $S(\mathbf{I})$ являются отображения грани симплициального объекта категории $\mathbf{I}$; первое и последнее отображение кограни $S(\mathbf{I})_n \rightrightarrows S(\mathbf{I})_{n+1}$ получаются добавлением f в начале (или t в конце) упорядоченной n -ки объектов из $\mathbf{I}$, а остальные отображения кограни являются отображениями вырождения для $\mathbf{I}$.]

Если топос $\mathcal{E}$ определен над $\mathcal{P}$ относительно геометрического морфизма γ , то $S(\mathbf{I})$ можно рассматривать как внутреннюю диаграмму на $\gamma^*(\Delta)$ (ср. 2.39); легко показать, что эта диаграмма является плоской как предпучок на $\gamma^*(\Delta)^{\text{op}}$, и обратно, каждый плоский предпучок на $\gamma^*(\Delta)^{\text{op}}$ имеет такой вид. Поэтому топос $\mathcal{P}^{\Delta^{\text{op}}}$ симплициальных множеств является классифицирующим топосом для интервалов в $\mathcal{P}$ -топосах, т. е.

$$\mathcal{X}\text{or}/\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{P}^{\Delta^{\text{op}}}) \simeq \text{int}(\mathcal{E})$$

для любого $\mathcal{P}$ -топоса $\mathcal{E}$.

В частности, возьмем в качестве $\mathcal{E}$ топос из упражнения 0.10, а через $\mathcal{F}$ обозначим категорию секвенциальных пространств, рассматриваемую как полная подкатегория в $\mathcal{E}$. Из последнего абзаца упражнения 0.10 вытекает, что единичный интервал $I = [0, 1] \subseteq R$ является интервалом и в $\mathcal{E}$; пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{P}^{\Delta^{\text{op}}}$ — его классифицирующее отображение. Легко убедиться, что I_n (как объект $\mathcal{F}$) изоморфен стандартному $(n+1)$ -симплексу. Поэтому нетрудно проверить, что для симплициального множества $\mathbf{K}$ объект $p^*(\mathbf{K})$ есть просто геометрическая реализация для $\mathbf{K}$ ([CF], III 1.4). (Заметим, что это CW-комплекс, а потому объект из $\mathcal{F}$.) Аналогично, если X — объект из $\mathcal{F}$, то $p_*(X)$ — сингулярный комплекс пространства X . (Этот пример, принадлежащий Жуаялю, описан с большими подробностями в [57].)

4.38 Замечание. Как специальный случай 4.37(i) отметим, что категория $\mathcal{X}\text{or}/\mathcal{E}(\mathcal{E}/X, \mathcal{E}/Y)$ эквивалентна дискретной категории, объектами которой являются элементы объекта $X^*(Y)$ в $\mathcal{E}/X$, т. е. морфизмы $X \rightarrow Y$ в $\mathcal{E}$. Поэтому функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}\text{or}/\mathcal{E}$ из 1.46 является полным вложением (в смысле, подходящем для 2-категорий). $\square$

Отметим, однако, что 4.38 не обобщается на недискретные категории и функтор $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{X}\text{or}/\mathcal{E}$ из 2.35. Например, если взять $\mathcal{E} = \text{Shv}(S^1)$, в качестве $\mathbf{G}$ взять постоянный пучок $\Delta(\mathbb{Z}_2)$ (рассматриваемый как внутренняя группа в $\mathcal{E}$), а через 1 обозначить конечный объект в $\text{cat}(\mathcal{E})$, то в $\mathcal{E}$ имеется ровно один внутрен-

ний функтор (гомоморфизм групп) вида $1 \rightarrow \mathbf{G}$, однако имеется два неизоморфных морфизма $\mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{G}}$, соответствующих двум торсорам из 4.37(ii). Возвращаясь к примеру 4.37(iv), укажем, что внутренние функторы $1 \rightarrow \mathbf{C}$ индуцируют только те геометрические морфизмы $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}[U]$, которые классифицируют *конечные* множества.

Тем не менее можно дать следующее описание категории $\mathcal{X}\text{or}/\mathcal{E}(\mathcal{E}^{\mathbf{C}}, \mathcal{E}^{\mathbf{D}})$:

4.39 Предложение. Пусть $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ — две внутренние категории в $\mathcal{E}$. Будем называть профунктор $\mathbf{D} \dashrightarrow^{\mathbf{G}} \mathbf{C}$ *плоским слева*, если функтор $(-) \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{G}: \mathcal{E}^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{C}}$ *точен слева*. (Легко показать, что это условие эквивалентно тому, что $\mathbf{G}$ является *плоским как предпучок на $\mathbf{C}^*(\mathbf{D})$ в $\mathcal{E}^{\mathbf{C}}$* .) Тогда категория $\mathcal{X}\text{or}/\mathcal{E}(\mathcal{E}^{\mathbf{C}}, \mathcal{E}^{\mathbf{D}})$ эквивалентна полной подкатегории в $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$, объектами которой являются *плоские профункторы*. Кроме того, эта эквивалентность отождествляет операцию композиции геометрических морфизмов $\mathcal{E}^{\mathbf{B}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{C}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{D}}$ с тензорным произведением профункторов.

Доказательство. Получается непосредственно из 4.34. $\square$

В частности, отметим, что если $\mathbf{C} \xrightarrow{f} \mathbf{D}$ — внутренний функтор, то геометрический морфизм, индуцированный f , соответствует профунктору $f^{\#}$.

4.4. Ограниченные морфизмы

В отличие от ситуации предложения 4.21, переходя к построению пределов в $\mathcal{X}\text{or}$, мы сразу сталкиваемся с той трудностью, что эта категория не имеет конечного объекта. «Лучшим приближением» конструкции конечного объекта является следующий результат:

4.41 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Если существует геометрический морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ (или $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}_f$), то он единствен с точностью до канонического изоморфизма. Более того, морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ существует в том и только в том случае, когда в $\mathcal{E}$ имеются произвольные $\mathcal{P}$ -индексированные костепени и *hom-множества малы*, а морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}_f$ существует в том и только в том случае, когда *hom-множества в $\mathcal{E}$ конечны*.

Доказательство. Предположим, что задан геометрический морфизм $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{P}$. Тогда, очевидно, для любого объекта X из $\mathcal{E}$ элементы множества $f^*(X)$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с морфизмами $1 \cong f^*(1) \rightarrow X$ в $\mathcal{E}$; поэтому функтор f_* (а вместе с ним и f^*) определен однозначно с точностью до естественного изоморфизма. Более того, морфизмы $X \rightarrow Y$ в $\mathcal{E}$ индексируются множеством $f_*(Y^X)$, и для любого

множества S обратный образ $f^*(S)$ является S -индексированной костепенью объекта 1 в $\mathcal{E}$, так что $f^*(S) \times X$ есть S -индексированная костепень объекта X .

Обратно, если топос $\mathcal{E}$ удовлетворяет указанным условиям, то мы можем определить $f_*(X)$ — множество морфизмов $1 \rightarrow X$ и $f^*(S)$ — S -индексированная костепень объекта 1 . Легко проверить, что эти функторы образуют геометрический морфизм.

Рассуждения для $\mathcal{P}_f$ аналогичны. $\square$

Сравнивая предложение 4.41 с теоремой Жиро (0.45), видим, что в одном случае говорится о $\mathcal{P}$ -индексированных костепенях, а в другом — о $\mathcal{P}$ -индексированных копроизведениях. Однако из 4.41 нельзя вывести, что в любом $\mathcal{P}$ -топосе имеются $\mathcal{P}$ -индексированные копроизведения (см. ниже пример 4.49(ii)), но если имеется семейство объектов $(G_\alpha | \alpha \in A)$, индексированное множеством A , и некоторый один объект G , содержащий как подобъект каждый из объектов G_α , то копроизведение $\coprod_{\alpha \in A} G_\alpha$ можно по-

строить как подобъект костепени $\coprod_{\alpha \in A} G$, прямо выразив его классифицирующее отображение через классифицирующее отображение подобъектов $G_\alpha \rightarrow G$. Более того, если топос $\mathcal{E}$ имеет множество образующих, то, очевидно, достаточно существования $\mathcal{P}$ -индексированных копроизведений образующих, и обратно, если $\{G_\alpha | \alpha \in A\}$ — множество образующих топоса Гротендика, то объект $G = \coprod_{\alpha \in A} G_\alpha$ содержит как подобъект каждую образующую G_α . Поэтому, комбинируя 1.58 и 4.41, мы можем свести теорему Жиро к следующему утверждению:

Топос $\mathcal{E}$ является топосом Гротендика тогда и только тогда, когда он определен над $\mathcal{P}$ и содержит объект G , подобъекты которого порождают $\mathcal{E}$.

Теперь мы докажем (снова принадлежащий Диаконеску [30]) относительный вариант этой теоремы, в которой конкретный топос $\mathcal{P}$ заменен на произвольный основной топос.

4.42 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, а G — объект из $\mathcal{F}$. Следующие утверждения равносильны:

(i) Для любого $X \in \mathcal{F}$ композиция $f^*f_*(\bar{X}^G)G \xrightarrow{\beta \times 1} \bar{X}^G \times G \xrightarrow{\text{ev}} \bar{X}$ эпиморфна, где β — коединица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$.

(ii) Для любого $X \in \mathcal{F}$ существует $Y \in \mathcal{E}$ и эпиморфизм $f^*(Y) \times G \twoheadrightarrow \bar{X}$.

(iii) Для любого $X \in \mathcal{F}$ существует объект $Y \in \mathcal{E}$, подобъект $S \rightarrow f^*(Y) \times G$ и эпиморфизм $S \twoheadrightarrow X$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Возьмем $Y = f_*(\bar{X}^G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) получается непосредственно из декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ f^*(Y) \times G & \xrightarrow{\quad} & \bar{X} \end{array}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Применим (iii) к объекту $\bar{X}$. Тогда получится диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{q} & \bar{X} \\ \downarrow \sigma & & \\ f^*(Y) \times G & & \end{array}$$

но ввиду 1.27 объект $\bar{X}$ инъективен, поэтому имеется факторизация $f^*(Y) \times G \xrightarrow{p} \bar{X}$ морфизма q через σ , а так как $p\sigma = q$ — эпиморфизм, то и p — эпиморфизм.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что задан эпиморфизм $f^*(Y) \times G \xrightarrow{p} \bar{X}$. Транспонируя его относительно сопряженного $((-) \times G \dashv (-)^G)$ и $(f^* \dashv f_*)$, получаем морфизм $Y \xrightarrow{\bar{p}} f_*(\bar{X}^G)$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^*(Y) \times G & \xrightarrow{p} & \bar{X} \\ \searrow f^*(\bar{p}) \times 1 & & \nearrow \text{ev}(\beta \times 1) \\ & f^*f_*(\bar{X}^G) \times G & \end{array}$$

коммутативна, откуда и вытекает эпиморфность $\text{ev}(\beta \times 1)$. $\square$

4.43 Определение (Митчел). Если объект G удовлетворяет одному из эквивалентных условий леммы 4.42, то его называют объектом образующих топоса $\mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{F}$ имеет объект образующих над $\mathcal{E}$, то геометрический морфизм f называют ограниченным. $\square$

В случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ объект $f^*(Y) \times G$ является Y -индексированной костепенью объекта G в $\mathcal{F}$, а потому диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \\ f^*(Y) \times G & & \end{array}$$

из 4.42(iii) можно мыслить как « Y -индексированное покрытие объекта X подобъектами из G ». Это устанавливает связь 4.43 с обычным определением множества образующих.

*) Точнее, $\mathcal{P}$ -топос. — Примеч. пер.

4.44 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — два геометрических морфизма. Тогда

- (i) если f и g ограничены, то их композиция fg ограничена;
- (ii) если композиция fg ограничена, то g ограничен.

Доказательство. (i) Пусть F (соответственно G) — объект образующих топоса $\mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$ (соответственно $\mathcal{F}$ над $\mathcal{F}$). Для любого $X \in \mathcal{E}$ можно найти объект $Y \in \mathcal{F}$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \\ g^*(Y) \times G & & \end{array}$$

Далее, находим $Z \in \mathcal{E}$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ f^*(Z) \times F & & \end{array}$$

Комбинируя две указанные диаграммы и дополняя их расслоенным произведением, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & S & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ g^*(T) \times G & \longrightarrow & g^*(Y) \times G & & \\ \downarrow & & & & \\ g^*f^*(Z) \times g^*(F) \times G & & & & \end{array}$$

поэтому $g^*(F) \times G$ — объект образующих топоса $\mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$.

(ii) получаемые непосредственно в силу 4.42(i), так как морфизм $g^*f^*g_*(\tilde{X}^G) \times G \rightarrow \tilde{X}$ пропускается через $g^*g_*(\tilde{X}^G) \times G \rightarrow \tilde{X}$. $\square$

4.45 Лемма. (i) Пусть $\mathcal{C}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Тогда геометрический морфизм $\mathcal{E}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$ из 2.33 ограничен.

(ii) Всякое включение ограничено.

Доказательство. (i) Пусть G — внутренняя диаграмма на $\mathcal{C}$, определяемая объектом $C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ из $\mathcal{E}/C_0$, с правым действием категории $\mathcal{C}$, задаваемыми композицией m . Тогда, если

$$X = (X_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_0, X_0 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\alpha} X_0)$$

— внутренняя диаграмма на $\mathcal{C}$, то имеется эпиморфизм $R(\gamma_0) \twoheadrightarrow X$ в $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ (а именно, коединица сопряжения $(R \dashv U)$, см. 2.22). Но канонический мономорфизм

$$X_0 \times_{C_0} C_1 \longrightarrow X_0 \times C_1 \cong (X_0 \times C_0) \times_{C_0} C_1$$

в $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$, как легко убедиться, является морфизмом вида $R(\gamma_0) \twoheadrightarrow C^*(X_0) \times G$; поэтому мы получили диаграмму вида, требуемого в 4.42(iii).

(ii) Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — включение. Тогда коединица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$ является изоморфизмом. Поэтому, если взять $G = 1$, то $f^*f_*(\tilde{X}^G) \times G \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ — изоморфизм для любого X . $\square$

4.46 Теорема (Жиро — Митчел — Дяконеску). Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (i) f ограничен.
- (ii) Существует внутренняя категория $\mathcal{C}$ в $\mathcal{E}$ и включение $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \\ & \searrow i & \nearrow \\ & \mathcal{E}^{\mathcal{C}} & \end{array}$$

коммутативна с точностью до естественного изоморфизма.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i) вытекает непосредственно из 4.45 и 4.44(i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть G — объект образующих топоса $\mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$, а

$$\epsilon_G \xrightarrow{(n, e)} \Omega^G \times G$$

— отношение принадлежности на G , т. е. подобъект, классифицируемый морфизмом $\Omega^G \times G \xrightarrow{ev} \Omega$. Обозначим через $\mathcal{D}$ внутреннюю категорию $\text{Full}_{\mathcal{F}}(\epsilon_G \xrightarrow{n} \Omega^G)^{op} \in \text{cat}(\mathcal{F})$, двойственную к определенной в 2.38, а через $E \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D}$ — дискретное расслоение, соответствующее «функтору включения», определенному там же. Пусть $\mathcal{C} = f_*(\mathcal{D}) \in \text{cat}(\mathcal{E})$, а $f^*\mathcal{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{D}$ — коединица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$. Образует в $\text{cat}(\mathcal{F})$ декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow \zeta & & \downarrow \gamma \\ f^*\mathcal{C} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D} \end{array}$$

тогда ξ — дискретное расслоение в силу 2.19. Прежде всего покажем, что F фильтрована, откуда в силу 4.34 определен геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^C$ над $\mathcal{E}$.

Заметим сначала, что имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} F_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & E_0 & \xrightarrow{\beta_0} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f^*C_0 \times G & \xrightarrow{\beta \times 1} & D_0 \times G = \Omega^G \times G & \xrightarrow{ev} & \Omega \end{array}$$

состоящая из декартовых квадратов, и в силу 4.42(i) $ev(\beta \times 1)$ — эпиморфизм с $X=1$. Поэтому $F_0 \rightarrow 1$ — эпиморфизм, т. е. условие 2.51(a) выполнено.

Рассмотрим теперь покрытие

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{(q_1, q_2)} & F_0 \times F_0 \\ \downarrow (a, b) & & \\ f^*A \times G & & \end{array}$$

объекта $F_0 \times F_0$ подобъектами из G . Тогда, очевидно,

$$B \xrightarrow{(\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a, b)} f^*C_0 \times f^*C_0 \times f^*A \times G \cong f^*(C_0 \times C_0 \times A) \times G$$

— мономорфизм, поскольку (a, b) — мономорфизм; пусть $f^*(C_0 \times C_0 \times A) \xrightarrow{p} \Omega^G$ — транспозиция его классифицирующего отображения. Очевидно, морфизм

$$f^*(C_0 \times C_0 \times A) \xrightarrow{f^*(\pi_1)} f^*C_0 \xrightarrow{\beta_0} D_0 = \Omega^G$$

соответствует подобъекту

$$F_0 \times f^*(C_0 \times A) \xrightarrow{(\xi_0 \pi_1, \pi_2, e\delta_0 \pi_1)} f^*C_0 \times f^*(C_0 \times A) \times G.$$

поскольку β_0 соответствует $F_0 \xrightarrow{(\xi_0, e\delta_0)} f^*C_0 \times G$.

Далее, морфизм

$$B \xrightarrow{(q_1, \xi_0 q_2, a)} F_0 \times f^*(C_0 \times A)$$

является морфизмом объектов над $f^*(C_0 \times C_0 \times A)$, откуда в силу конструкции категории $\mathbf{D}^{op}$ как внутренней полной подкатегории в $\mathcal{F}$ он индуцирует $f^*(C_0 \times C_0 \times A)$ -элемент r_1 в D_1 такой, что $d_0 r_1 = \beta_0 \cdot f^*(\pi_1)$ и $d_1 r_1 = p$.

Аналогично строится элемент $f_*(C_0 \times C_0 \times A) \xrightarrow{r_2} D_1$ с $d_0 r_2 = \beta_2 \cdot f^*(\pi_2)$ и $d_1 r_2 = p$. Также коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^*(C_0 \times C_0 \times A) & \xrightarrow{r_2} & D_1 \\ & \searrow f^*(\hat{r}_1) & \nearrow \beta_1 \\ & f^*C_1 & \end{array}$$

где $\hat{}$ обозначает транспонирование относительно сопряжения ($f^* \dashv f_*$), и $d_0 \hat{r}_1 = \pi_1$, $d_1 \hat{r}_1 = \hat{p}$.

Так как композиция $ev(\beta_0 \times 1)(f^* \hat{p} \times 1) = ev(p \times 1)$ классифицирует подобъект $(\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a, b)$, то имеется подъем

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{q_1} & F_0 \\ \downarrow (\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a, b) & & \downarrow (\xi_0, e\delta_0) \\ f^*(C_0 \times C_0 \times A) \times G & \xrightarrow{f^* \hat{p} \times 1} & f^*C_0 \times G \end{array}$$

Используя то, что ξ — дискретное расслоение, можно поднять композицию

$$B \xrightarrow{(\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a)} f^*(C_0 \times C_0 \times A) \xrightarrow{f^*(\hat{r}_1)} f^*C_1$$

до морфизма $B \xrightarrow{s_1} F_1$ с $d_1 s_1 = q_3$. Чтобы найти $d_0 s_1$, отметим прежде всего, что

$$\xi_0 d_0 s_1 = d_0 \xi_1 s_1 = d_0 f^*(\hat{r}_1)(\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a) = f^*(\pi_1)(\xi_0 q_1, \xi_0 q_2, a) = \xi_0 q_1.$$

Затем из определения действия категории $\mathbf{D}$ на E_0 (см. 2.38) легко проверить, что $e\delta_0 d_0 s_1 = e\delta_0 \delta_1 s_1$ есть B -элемент

$$B \xrightarrow{(q_1, \xi_0 q_2, a)} F_0 \times f^*(C_0 \times A) \xrightarrow{e\delta_0 \pi_1} G$$

объекта G , т. е. $e\delta_0 d_0 s_1 = e\delta_0 q_1$. Но $F_0 \xrightarrow{(\xi_0, e\delta_0)} f^*C_0 \times G$ — мономорфизм, поэтому $d_0 s_1 = q_1$ и аналогично $d_0 s_2 = q_2$. Итак, эпиморфизм $B \xrightarrow{(q_1, q_2)} F_0 \times F_0$ пропускается с помощью $B \xrightarrow{(s_1, s_2)} P_F$ через морфизм $P_F \rightarrow F_0 \times F_0$ из 2.51(b); значит, последнее отображение эпиморфно и условие 2.51(b) выполнено.

Условие 2.51(c) проверяется несколько проще, поскольку при этом не используется то, что G — объект образующих. Так как $\mathbf{D}^{op}$ является внутренней полной подкатегорией в $\mathcal{F}$, то легко проверить, что U -элементы объекта R_D (соответственно T_D)

определяются диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\theta} & Y \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\
 U^*G & & U^*G
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{\psi} & X & \xrightarrow{\theta} & Y \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\
 U^*G & & U^*G & & U^*G
 \end{array} \quad \text{с } \theta\psi = \phi\psi$$

(соответственно)

в $\mathcal{F}/U$, где горизонтальные стрелки не предполагаются морфизмами над U^*G . Но поскольку в $\mathcal{F}/U$ имеются уравнители, мы можем по диаграмме первого типа построить диаграмму второго типа, взяв в качестве $Z \xrightarrow{\psi} X$ уравнитель θ и ϕ , а в качестве λ композицию $\mu\psi$. Применяя эту конструкцию к общему элементу объекта R_D в $\mathcal{F}/R_D$, получим расщепление σ_D морфизма $T_D \rightarrow R_D$ из 2.51(c).

Аналогично, U -элементу из R_E соответствует диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & 1_U & \\
 x \swarrow & & \searrow y \\
 X & \xrightarrow{\theta} & Y \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\
 U^*G & & U^*G
 \end{array}$$

в $\mathcal{F}/U$ с $\theta x = y = \phi x$, но тогда, факторизуя x через уравнитель θ и ϕ , получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1_U & & \\
 z \swarrow & & \downarrow x & & \searrow y \\
 Z & \xrightarrow{\psi} & X & \xrightarrow{\theta} & Y \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\
 U^*G & & U^*G & & U^*G
 \end{array}$$

т. е. U — элемент из T_E . На языке общих элементов это означает, что σ_D поднимается до расщепления σ_E морфизма $T_E \rightarrow R_E$.

Но поскольку функторы f_* и f^* точны слева, то они сохраняют конструкции R и T , поэтому $f^*f_*\sigma_D$ есть расщепление морфизма $T_{f^*c} \rightarrow R_{f^*c}$. Следовательно, имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 T_F & \xrightarrow{\quad} & T_E & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 & T_{f^*c} & & T_D & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 R_F & \xrightarrow{\quad} & R_E & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 & R_{f^*c} & & R_D &
 \end{array}$$

верхняя и нижняя грани которой являются декартовыми квадратами, так как конструкции объектов R и T коммутируют с конечными пределами. Значит, по расщеплениям σ_D , σ_E и $f^*f_*\sigma_D$ можно построить расщепление σ_F морфизма $T_F \rightarrow R_F$, а потому он является эпиморфизмом и F удовлетворяет 2.51(c).

Половина доказательства теоремы 4.46 позади.

Для того чтобы установить то, что геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}^c$, построенный нами, является включением, покажем, что коединица сопряжения $(i^* \dashv i_*)$ является изоморфизмом. Прежде всего заметим, что в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}^c & \xrightarrow{(f^c)^*} & \mathcal{F}f^*c & \xrightarrow{\lim} & \mathcal{F}^D \\
 & \searrow i^* & \downarrow (-) \otimes F & & \nearrow (-) \otimes E \\
 & & \mathcal{F} & &
 \end{array}$$

левый треугольник коммутативен в силу определения функтора i^* (4.34), а правый треугольник коммутативен с точностью до изоморфизма в силу 2.47, так как $F = \beta^*E$. Поэтому имеется коммутативная с точностью до изоморфизма диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F} & & \\
 H \swarrow & & \downarrow K & & \searrow i_* \\
 \mathcal{F}^D & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{F}f^*c & \xrightarrow{(f^c)^*} & \mathcal{F}^c
 \end{array}$$

где H, K — правые сопряженные функторы $(-)\otimes E$ и $(-)\otimes F$

соответственно. Также коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}^D & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{F}^{f^*C} & & \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \searrow (f^C)_* & \\
 \mathcal{E}^C & \xrightarrow{(f_*\beta)^*} & \mathcal{E}^{f_*f^*C} & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{E}^C
 \end{array}$$

1

где $\mathcal{C} \xrightarrow{\alpha} f_*f^*C$ — единица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$ (в силу определения функтора $(f^C)_*$ из 4.34, одного из треугольных соотношений для α и β и того, что f_* сохраняет расслоенные произведения). Комбинируя эти три диаграммы, получаем разложение с точностью до изоморфизма функтора i^*i_* в композицию

$$\mathcal{F} \xrightarrow{H} \mathcal{F}^D \xrightarrow{f_*} \mathcal{E}^C \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}^{f^*C} \xrightarrow{(-) \otimes F} \mathcal{F}.$$

Пусть теперь X — некоторый объект из $\mathcal{F}$. Тогда прямой проверкой устанавливается, что HX есть внутренняя диаграмма, задаваемая формулой $(HX \rightarrow D_0) = (\tilde{X}^G \xrightarrow{\phi^G} \Omega^G)$ (где ϕ классифицирует $X \xrightarrow{\eta} X$) со структурным отображением $HX_0 \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{\xi} HX_0$, интернализирующим операцию композиции частичного отображения

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \\
 G & &
 \end{array}$$

с частичным эндоморфизмом объекта G

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G & & G
 \end{array}$$

Действительно, если W — произвольная внутренняя диаграмма на D , то морфизм $W_0 \xrightarrow{g} HX_0$ над $D_0 = \Omega^G$ соответствует морфизму $W_0 \times G \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{X}$ над Ω , а потому морфизму $W_0 \times_{\Omega^G} G = W_0 \times_{D_0} E_0 \xrightarrow{g'} X$ в $\mathcal{F}$, и несложным диаграммным поиском проверяется, что g — морфизм внутренних диаграмм в том и только

в том случае, когда g' пропускается через канонический эпиморфизм $W_0 \times_{D_0} E_0 \rightarrow W \otimes_D E$.

Итак, i^*i_* задается коурравнителем

$$f^*f_*\tilde{X}^G \times_{f^*C_0} f^*C_1 \times_{f^*C_0} F_0 \xrightarrow[1 \times \omega]{f^*f_*\xi \times 1} f^*f_*\tilde{X}^G \times_{f^*C_0} F_0 \xrightarrow{\omega} i^*i_*X.$$

где ω обозначает действие категории f^*C на F_0 . Кроме того, ко-единица $i^*i_*X \xrightarrow{c} X$ получается факторизацией морфизма $f^*f_*\tilde{X}^G \times_{f^*C_0} F_0 \xrightarrow{u} X$ через v , где u получается заменой базы

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*f_*\tilde{X}^G \times_{f^*C_0} F_0 & \xrightarrow{u} & \tilde{X}^G \times_{D_0} E_0 & \longrightarrow & X \\
 \downarrow 1 \times e\beta_0 & & \downarrow 1 \times e & & \downarrow \eta \\
 f^*f_*\tilde{X}^G \times G & \xrightarrow{\beta \times 1} & \tilde{X}^G \times G & \xrightarrow{ev} & \tilde{X}
 \end{array}$$

Но u — эпиморфизм, так как $ev(\beta \times 1)$ — эпиморфизм в силу 4.42(i); значит, c — эпиморфизм. Поэтому остается показать, что c — мономорфизм.

Пусть

$$K \xrightarrow[(x_2, w_2)]{(x_1, w_1)} f^*f_*\tilde{X}^G \times_{f^*C_0} F_0$$

— ядерная пара морфизма u , а

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\kappa} & K \\
 \downarrow (h, g) & & \\
 f^*M \times G & &
 \end{array}$$

— покрытие объекта K подобъектами из G . Обозначим через N объект $f_*X^G \times f_*\tilde{X}^G \times M$ из $\mathcal{E}$, а через j — морфизм

$$L \xrightarrow{(x_1\kappa, x_2\kappa, h)} f^*f_*\tilde{X}^G \times f^*f_*\tilde{X}^G \times f^*M \cong f^*N.$$

Тогда $L \xrightarrow{(j, g)} f^*N \times G$ — мономорфизм, поскольку (h, g) — мономорфизм; пусть $f^*N \rightarrow \Omega^G = D_0$ — транспозиция его классифицирующего отображения. Поступая, как и при проверке условия 2.51(b), мы можем построить морфизмы $f^*N \rightarrow D_1$ ($i =$

$= 1, 2)$ с $d_i \lambda_i = l$ и

$$d_0 \lambda_i = (f^* N \xrightarrow{f^* \pi_i} f^* f_* \tilde{X}^G \xrightarrow{f^* f_* \phi_G} f^* C_0 \xrightarrow{f_0} D_0),$$

— равенствами, соответствующими диаграмме

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{(j, w_i k)} & f^* N \times_{f^* C_0} F_0 \\ \downarrow (j, g) & & \downarrow 1 \times e \phi_0 \\ f^* N \times G & & f^* N \times G \end{array}$$

в $\mathcal{F}/f^* N$.

Как легко проверить, согласно определению ξ композиция

$$f^* N \xrightarrow{(\beta \cdot f^* \pi_i, \lambda_i)} \tilde{X}^G \times_{D_0} D_1 \xrightarrow{\xi} \tilde{X}^G$$

соответствует частичному отображению

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\kappa} & K & \xrightarrow{(x_i, w_i)} & f^* f_* \tilde{X}^G \times_{f^* C_0} F_0 \xrightarrow{u} X \\ \downarrow (j, g) & & & & \\ f^* N \times G & & & & \end{array}$$

значит, $\xi(\beta \cdot f^* \pi_i, \lambda_i) = \xi(\beta \cdot f^* \pi_2, \lambda_2)$ в силу определения K и после транспонирования $f_* \xi(\pi_1, \hat{\lambda}_1) = f_* \xi(\pi_2, \hat{\lambda}_2)$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{w_3} & F_0 \\ \downarrow (j, g) & & \downarrow (\zeta_0, e \phi_0) \\ f^* N \times G & \xrightarrow{f^* \hat{u} \times 1} & f^* C_0 \times G \end{array}$$

Снова легко проверить, что

$$\omega(f^* \hat{\lambda}_i j, w_3) = w_i k: L \rightarrow F_0$$

для $i = 1, 2$. Поэтому можно построить морфизм

$$k_i: L \xrightarrow{(x_i k, f^* \lambda_i, j, w_3)} f^* f_* \tilde{X}^G \times_{f^* C_0} f^* C_1 \times_{f^* C_0} F_0$$

для которого $(1 \times \omega) k_i = (x_i, w_i) k$ и $(f^* f_* \xi \times 1) k_1 = (f^* f_* \xi \times 1) k_2$.

Отсюда сразу получается, что морфизм $f^* f_* \tilde{X}^G \times_{f^* C_0} F_0 \xrightarrow{v} i^* i_* X$

коуравнивает $(x_1, w_1) k$ и $(x_2, w_2) k$, но k — эпиморфизм, значит, $v(x_1, w_1) = v(x_2, w_2)$.

Следовательно, v пропускается через u ; поэтому c — изоморфизм. $\square$

4.47 Предложение. Пусть

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & & \downarrow g \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \end{array}$$

— диаграмма в $\mathcal{Xop}$ с ограниченным морфизмом g . Тогда расслоенное произведение $\mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{G}$ существует в $\mathcal{Xop}$ и ограничено над $\mathcal{F}$.

Доказательство. Поскольку замену базы можно производить поэтапно, то достаточно рассмотреть два случая: (а) когда $\mathcal{G}$ имеет вид $\mathcal{E}^G$ для некоторого $C \in \text{cat}(\mathcal{E})$ и (б) когда g является включением.

Но (а) верно в силу 4.35; для проверки (б) рассмотрим в $\mathcal{E}$ топологию j , индуцированную g , а в $\mathcal{F}$ — топологию j' , индуцированную j согласно 3.59(iii). Тогда из 4.19 легко вывести, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \text{sh}_{j'}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{sh}_j(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \end{array}$$

в $\mathcal{Xop}$ декартов. $\square$

4.48 Следствие. Пусть $\mathcal{V}\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ обозначает полную подкатегорию в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$, объектами которой являются ограниченные $\mathcal{E}$ -топосы. Категория $\mathcal{V}\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ имеет конечные пределы.

Доказательство. Очевидно, конечным объектом категории $\mathcal{V}\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ является $\mathcal{E} \xrightarrow{1} \mathcal{E}$. Но ввиду 4.44(ii) любой морфизм в $\mathcal{V}\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ ограничен, откуда в силу 4.47 в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ имеются расслоенные произведения любой пары морфизмов из $\mathcal{V}\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$, а в силу 4.44(i) эти расслоенные произведения ограничены над $\mathcal{E}$. $\square$

Эту главу мы закончим двумя различными, но тесно связанными между собой примерами неограниченных геометрических морфизмов.

4.49 Примеры. (i) Пусть G — бесконечная группа; тогда, очевидно, в силу 4.41 топос $(\mathcal{S}_f)^G$ из примера 1.14 определен над $\mathcal{S}_f$. (В явном виде требуемый геометрический морфизм можно задать функторами $\gamma^*(S)$ — множество S с тривиальным G -действием и $\gamma_*(M)$ — множество G -инвариантных элементов

из M .) Но, как видно из замечания после определения 4.43, $\mathcal{P}_f$ -топос ограничен в том и только в том случае, когда он имеет конечное множество образующих. Пусть теперь G — группа целых чисел, а M_n — множество целых чисел по модулю n с обычным аддитивным действием; тогда конечное G -множество X может быть отображено в M_n тогда и только тогда, когда длина каждой из его G -орбит делится на n . Поэтому всякое G -множество X можно отобразить лишь в конечное число G -множеств вида M_n ; значит, топос $(\mathcal{P}_f)^G$ не имеет конечного множества образующих. Выбирая подходящую «большую» группу (т. е. группу с собственным классом элементов), можно построить пример с $\mathcal{P}$ вместо $\mathcal{P}_f$ (см. [GV], IV 2.8).

(ii) Снова пусть G — группа целых чисел, а $\mathcal{E}$ — полная подкатегория в $\mathcal{P}^G$, объектами которой являются G -множества M с тем свойством, что умножение на n тождественно на M для некоторого целого положительного n , т. е. длины G -орбит множества M делят n . Если теперь M_1 и M_2 — два G -множества, удовлетворяющих этому условию для n_1 и n_2 соответственно, то, как легко убедиться, их произведение $M_1 \times M_2$ удовлетворяет этому условию для н.о.к. $[n_1, n_2]$; то же самое верно для экспонент. Значит, $\mathcal{E}$ — топос и его функтор включения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}^G$ является логическим. Более того, как легко вывести из 4.41, топос $\mathcal{E}$ определен над $\mathcal{P}$, но в $\mathcal{E}$ не существуют все $\mathcal{P}$ -индексированные копроизведения (например, не существует $\prod_n M_n$, где M_n — G -множества из (i)), а потому это не топос Гротендика. Это объясняет, почему в рассуждениях после доказательства предложения 4.41 мы обратили внимание на различие между копроизведениями и костепенями; отметим также, что $\mathcal{E}$ имеет множество образующих (а именно, множество M_n), но не имеет объекта образующих в смысле 4.43. $\square$

Упражнения к главе 4

1. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{q} \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}$ — эпиморфизм геометрического морфизма $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$.

(i) Докажите, что если f существен, то q и i существенны. [Указание. Удобно использовать описание категории $\mathcal{F}$ из 4.16 и утверждение, двойственное к 0.14.]

(ii) Докажите, что если f^* сохраняет экспоненты, то q^* и i^* сохраняют экспоненты. [Используйте то, что в силу 3.24 i_* сохраняет экспоненты.]

(iii) Докажите, что если f^* — логический функтор, то q^* и i^* — тоже логические функторы. [Используйте (ii) и 3.55.]

2*. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а $C \xrightarrow{f} D$ — морфизм из $\text{cat}(\mathcal{E})$. Докажите, что геометрический морфизм $\mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}^D$ из 2.35 является сюръекцией, если f_0 — эпиморфизм, и является включением, если f полон и унивалентен (т. е. если квадрат

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{(d_0, d_1)} & C_0 \times C_0 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \times f_0 \\ D_1 & \xrightarrow{(d_0, d_1)} & D_0 \times D_0 \end{array}$$

декартов). [Указание. В последнем случае, используя внутренние профункторы, докажите, что коединица сопряжения $(\lim_f - | f^*)$ является изоморфизмом.] Выведите отсюда, что для любого f топос, составляющий образ морфизма $\mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}^D$, может быть представлен в виде $\mathcal{E}^E$ для подходящей внутренней категории E .

3. Докажите, что включение всегда является регулярным морфизмом в $\mathcal{E}^{\text{op}}$ (т. е. является уравнивателем своей коядерной пары). Покажите, однако, что не всякий уравнитель в $\mathcal{E}^{\text{op}}$ является включением. [Рассмотрите морфизм $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^M$, индуцированный гомоморфизмом $1 \xrightarrow{e} M$ «в» нетривиальный моноид M .]

4. Пусть X, Y — две неизоморфных $\mathbb{Z}_2$ -торсора в $\text{Shv}(S^1)$. Покажите, что существует сюръекция $\mathcal{E} \xrightarrow{u} \text{Shv}(S^1)$ такая, что u^*X и u^*Y изоморфны. Рассматривая морфизмы $\text{Shv}(S^1) \rightrightarrows \mathcal{P}^G$, классифицирующие X и Y (см. 4.37 (ii)), установите, что сюръекция в $\mathcal{E}^{\text{op}}$ не обязана быть эпиморфизмом.

5*. Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что пучок X локально постоянен (т. е. локально изоморфен постоянному пучку) тогда и только тогда, когда его представление в виде локального гомеоморфизма является *накрывающим отображением* в смысле [AT], § 2.1. Выведите отсюда, что если пространство X линейно связно, то локально постоянный пучок полностью определяется заданием своего слоя в некоторой точке x из X и действием фундаментальной группы $G = \Pi_1(X, x)$ на этом слое, и если X имеет универсальное накрывающее пространство $\tilde{X} \rightarrow X$, то каждое G -множество получается с помощью предыдущей конструкции из некоторого локального постоянного пучка. Покажите также, что (пучок сечений) $\tilde{X} \rightarrow X$ является G -торсором в $\text{Shv}(X)$ и что его классифицирующее отображение $\text{Shv}(X) \xrightarrow{u} \mathcal{P}^G$ может быть задано следующими функторами: $u^*(M, \alpha)$ есть локально постоянный пучок на X со слоем M и $\Pi_1(X, x)$ -действием α на нем, а $u_*(E \xrightarrow{p} X)$ есть множество

морфизмов $X \rightarrow E$ в $\text{Shv}(X)$ с G -действием, индуцированным автоморфизмами (т. е. накрывающими преобразованиями) пространства X над X .

6. Пусть P — внутреннее частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$, а $\mathcal{F}$ — топос над $\mathcal{E}$. Докажите, что категория $\text{Top}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^P)$ эквивалентна частично упорядоченному множеству. [Указание. Покажите, что каждый плоский предпучок на P является под-объектом 1 в $\mathcal{E}^{\text{prop}}$.]

7*. Докажите, что декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{f^*C} & \xrightarrow{f^c} & \mathcal{E}^C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E} \end{array}$$

из 4.35 удовлетворяет условию Бека $C^* \cdot f_* \cong (f^c)_* \cdot (f^*C)^*$. Верно ли то же самое, если $\mathcal{E}^C$ заменить произвольным ограниченным $\mathcal{E}$ -топосом? [Указание. Рассмотрите квадрат

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & \text{sh}_{j_U}(\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{sh}_{j_U}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \end{array}$$

где U — открытый объект в $\mathcal{E}$.]

8. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ — невырожденный $\mathcal{P}$ — топос. Докажите равносильность следующих утверждений:

- (i) γ^* полон.
- (ii) γ_* сохраняет копроизведения.
- (iii) $\mathcal{E}$ *связен*, т. е. если $U \sqcup V \cong 1$, то либо $U \cong 1$ и $V \cong 0$, либо наоборот. (Сравните с определением связности топологического пространства.)

9*. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ — топос над $\mathcal{P}$ такой, что γ *существен*. (По аналогии с упражнением 0.7 такой топос называют *локально связным*). Покажите, что γ^* сохраняет экспоненты. Покажите также, что имеется биекция между прямыми слагаемыми конечного объекта 1 в $\mathcal{E}$ и подмножествами в $X = \gamma_!(1)$ [используйте то, что $\gamma_!$ сохраняет копроизведения], и выведите отсюда, что если множество X конечно, то топос $\mathcal{E}$ представим в Top в виде X -индексированного копроизведения связных $\mathcal{P}$ -топосов.

10. Дайте другое доказательство утверждения 4.44(i), используя характеризацию ограниченных морфизмов из теоремы 4.46 (т. е. беря за определение ограниченности условие 4.46(ii)).

[Указание. Здесь нужно воспользоваться результатом из упражнения 2.7.]

11. Пусть α — регулярный кардинал. Говорят, что функтор $\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{D}$ между кополными категориями имеет *rang* $< \alpha$, если он сохраняет α -фильтрованные копределы (ср. [165], § 5). Покажите, что если $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, то прямой образ любого геометрического морфизма $\mathcal{P} \xrightarrow{P} \mathcal{E}$ имеет rang. [Возьмите $\alpha > \text{card } p^*G$, где G — объект образующих для $\mathcal{E}$ над $\mathcal{P}$.] Выведите отсюда, что если $\mathcal{P} \xrightarrow{L} \mathcal{P}$ — *точный слева* функтор, то топос $\mathcal{E}$, получаемый артиновой склейкой вдоль L , является топосом Гротендика в том и только в том случае, когда L имеет rang. [Покажите, что если rang $< \alpha$, то топос $\mathcal{E}$ порождается объектом $(1, 0, 0 \rightarrow 1)$ и всеми объектами вида $(Y, 1, 1 \rightarrow L(Y))$, где Y — множество мощности $< \alpha$. Существование точных слева функторов $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ без ранга имеет непосредственное отношение к существованию измеримых кардиналов; см. [10].]

ГЛАВА 5

ЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ТОПОСОВ

5.1. Булевы топосы

До настоящего момента мы вслед за Гротендиком и его последователями [GV] рассматривали топос в основном с геометрической точки зрения как «обобщенное пространство». Так, например, при определении геометрического морфизма мы отвечали на вопрос «что произойдет с пучками, если задано непрерывное отображение соответствующих топологических пространств?», хотя позже мы увидели, что геометрические морфизмы естественно возникают в множестве других ситуаций, не все из которых естественно относятся к геометрическим. В данной главе мы хотим представить некоторые черты теории топосов, обусловленные другой, «логической», точкой зрения на него, а именно, идеей, что топос — это «обобщение теории множеств» *).

Начнем с детального рассмотрения алгебраической структуры Ω . Напомним, что в главе 3 мы определили частичный порядок Ω , на Ω и три бинарные операции $\wedge$, $\vee$ и $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, а также выделили два различных элемента из Ω , а именно $1 \xrightarrow{t} \Omega$ (являющийся, конечно, классифицирующим отображением $1 \rightarrow 1$) и $1 \xrightarrow{f} \Omega$ («ложь»), определенный как классифицирующее отображение $0 \rightarrow 1$; и определили унарную операцию $\Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$ как классифицирующее отображение $1 \rightarrow \Omega$.

5.11 Определение. Напомним, что решетку можно определить как множество L , снабженное двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$, а также двумя различными элементами t и f , которые удовлетворяют равенствам $x \wedge x = x$, $x \wedge t = x$, $x \wedge y = y \wedge x$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \wedge (x \vee y) = x$ и их двойственным аналогам для всех $x, y, z \in L$. Ясно, что можно интерпретировать это определение в любой категории с конечными произведениями, обычным приемом заменяя вышеприведенные равенства коммутативными диаграммами. Будем говорить, что решетка *дистрибутивна*, если она удовлетворяет дополнительному равенству $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$; хорошо известно, что это равенство эквивалентно в решетке двойственному равенству. (Мы отсылаем читателя к [LT] за основами теории решеток.) $\square$

*) «Обобщенный универсум». — Примеч. пер.

Хорошо известно, что на любой решетке L можно определить частичный порядок L_1 как уравниватель для $L \times L \xrightarrow[\pi_1]{\wedge} L$ (или, эквивалентно, для $\vee$ и π_2), и наоборот, частично упорядоченное множество $(L_1 \rightrightarrows L)$ является решеткой тогда и только тогда, когда оно *антисимметрично*, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & L_1 \\ \downarrow i & & \downarrow (d_0, d_1) \\ L_1 & \xrightarrow{(d_1, d_0)} & L \times L \end{array}$$

является декартовым квадратом, и имеет все конечные пределы и копределы ($\wedge$ и $\vee$ представляют собой бинарные операции произведения и копроизведения, а t и f — конечный и начальный объекты). Эту эквивалентность легко доказать также в любой категории с конечными пределами.

5.12 Определение. (i) *Гейтинговой алгеброй* (также называемой *брауэровой решеткой* [LT] или *псевдобулевой алгеброй* [MM]) называется решетка, которая декартово замкнута как частично упорядоченное множество, т. е. в ней имеется дополнительная бинарная операция $\Rightarrow$, обладающая свойством: отношение $(x \wedge y) \leq z$ выполняется тогда и только тогда, когда $x \leq (y \Rightarrow z)$ (операцию $\Rightarrow$ можно характеризовать также уравнениями, а именно с помощью условий $x \Rightarrow x = t$, $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$, $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$ и $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$; см. [FK], утверждение 1.22).

(ii) Булеву алгебру можно определить как дистрибутивную решетку L , снабженную такой унарной операцией $\neg$, что $x \wedge (\neg x) = f$ и $x \vee (\neg x) = t$ для всех $x \in L$. $\square$

5.13 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда частично упорядоченное множество $\Omega = (\Omega_1 \rightrightarrows \Omega)$ с операциями $t, f, \wedge, \vee, \Rightarrow$, которые были определены выше, является внутренней гейтинговой алгеброй в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что для каждого объекта X топоса $\mathcal{E}$ заданные операции образуют класс морфизмов $X \rightarrow \Omega$ в гейтингову алгебру (внешнюю). Но это немедленно следует из внешнего описания этих операций, которое было дано в главе 3. $\square$

Любая булева алгебра становится гейтинговой алгеброй, если мы зададим операцию $\Rightarrow$ равенством $x \Rightarrow y = (\neg x) \vee y$, но обратное неверно. Легко видеть, что гейтингова алгебра дистрибутивна (так как $x \wedge (\neg _)$, имея сопряженный справа, сохраняет копроизведения), и поэтому всегда можно определить унарную операцию $\neg$ равенством $\neg x = x \Rightarrow f$; тогда $\neg x$ будет единственным наибольшим элементом решетки L , удовлетворяющим равенству $x \wedge (\neg x) = f$, но не обязательно $x \vee (\neg x) = t$. На самом

деле нетрудно увидеть, что последнее равенство будет выполняться тогда и только тогда, когда $\bigwedge \bigwedge x = x$ для всех $x \in L$;

дело в том, что оно влечет $x \vee (\bigwedge x) = \bigwedge \bigwedge (x \vee (\bigwedge x)) = \bigwedge (\bigwedge x \wedge \bigwedge x) = \bigwedge f = t$, и наоборот,

$$\begin{aligned} \bigwedge \bigwedge x &= \bigwedge \bigwedge x \wedge t = \bigwedge \bigwedge x \wedge (x \vee \bigwedge x) = \\ &= (\bigwedge \bigwedge x \wedge x) \vee (\bigwedge \bigwedge x \wedge \bigwedge x) = (\bigwedge \bigwedge x \wedge x) \vee f = \bigwedge \bigwedge x \wedge x, \end{aligned}$$

так что $\bigwedge \bigwedge x \leq x$, но легко видеть, что $x \leq \bigwedge \bigwedge x$ истинно в любой гейтинговой алгебре.

5.14 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Следующие условия эквивалентны:

- (i) Ω — внутренняя булева алгебра.
- (ii) $\bigwedge \bigwedge = 1_\Omega$.
- (iii) У всех подобъектов в $\mathcal{E}$ имеются дополнения, т. е. если дан $X' \rightarrow X$, то существует такой $X'' \rightarrow X$, что $X' \amalg X'' \rightarrow X$ является изоморфизмом.

(iv) $1 \amalg 1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix}} \Omega$ является изоморфизмом.

Если эти условия выполнены, то будем говорить, что $\mathcal{E}$ является булевым топосом.

Доказательство. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) немедленно следует из соответствующего «внешнего» результата.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $X \xrightarrow{\phi} \Omega$ является классифицирующим отображением мономорфизма $X' \rightarrow X$, а X'' — подобъект, классифицируемый посредством $\bigwedge \phi$. По определению булевой алгебры имеем тогда $X' \cap X'' \cong 0$ и $X' \cup X'' \cong X$ как подобъекты X , но это эквивалентно утверждению, что

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \longrightarrow & X \end{array}$$

является амальгамой, т. е. $X' \amalg X'' \cong X$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). В частном случае у общего подобъекта $1 \xrightarrow{t} \Omega$ имеется дополнение, им должен быть $1 \xrightarrow{f} \Omega$, так как он является самым большим подобъектом, пересечение которого с t является 0.

(iv) $\Rightarrow$ (ii), так как в любом топосе ограничение $\bigwedge$ на под-объект $1 \amalg 1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix}} \Omega$ представляет собой, очевидно, инволюцию, которая переставляет компоненты $1 \amalg 1$. $\square$

5.15 Примеры. (i) Пусть X — топологическое пространство; рассмотрим топос $\text{Shv}(X)$. Для любого открытого $U \subseteq X$ $\Omega(U)$

представляет собой решетку открытых подмножеств U . В частности, для $U = X$ и $V \subseteq \Omega(X)$ имеем $\bigwedge V = \text{int}(X - V)$ и поэтому $\bigwedge \bigwedge V$ — внутренность замыкания V , которая в общем случае не совпадает с V . На самом деле, если X — T_0 -пространство, то топос $\text{Shv}(X)$ является булевым тогда и только тогда, когда X дискретно.

(ii) Пусть G — моноид, рассматриваемый как малая категория с одним объектом. Тогда топос $\mathcal{P}^G G$ -множеств является булевым тогда и только тогда, когда G — группа. В самом деле, если G — группа, то любое G -подмножество G -множества M является просто объединением G -орбит G -множества M , а его дополнение — объединением остальных орбит, но если G — не группа, то множество необратимых элементов из G представляет собой G -подмножество самого G , и оно, конечно, не имеет дополнения. Чуть более общо, для любой малой категории C можно показать, что $\mathcal{P}^C$ является булевым тогда и только тогда, когда C — группоид. $\square$

Теперь возникает вопрос: если задан небулев топос, то можно ли найти его «наилучшее приближение», которое является булевым топосом? Далее предлагается некий ответ на этот вопрос.

5.16 Замечание. Пусть H — гейтингова алгебра. Будем говорить, что x — регулярный элемент H , если $\bigwedge \bigwedge x = x$. Пусть $B \subseteq H$ — множество регулярных элементов; тогда частичный порядок в H , суженный на B , превращает его в булеву алгебру. (Операции $\wedge$ и $\bigwedge$ в B согласуются с соответствующими операциями в H , но $\vee_B = \bigwedge (\vee_H)$.) Например, если H — решетка открытых подмножеств топологического пространства, то B является алгеброй регулярных открытых подмножеств. $\square$

5.17 Теорема (Ловер — Тьерне). Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда $\bigwedge \bigwedge$ является топологией в $\mathcal{E}$, а $\text{sh}_{\bigwedge \bigwedge}(\mathcal{E})$ — булев топос.

Доказательство. Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$. Тогда легко видно, что унарная операция, индуцированная на подобъектах из X посредством $\bigwedge$, обращает порядок и что $X' \leq \bigwedge X''$ тогда и только тогда, когда $X'' \leq \bigwedge X'$. Из этого сразу следует, что $X' \leq \bigwedge \bigwedge X'$ (положить $X'' = \bigwedge X$) и что $\bigwedge X' \cong \bigwedge \bigwedge \bigwedge X'$; следовательно, $\bigwedge \bigwedge$ индуцирует операцию замыкания на подобъектах из X . Очевидно, что эта операция универсальна. Таким образом, в силу 3.14 $\bigwedge \bigwedge$ — топология. Теперь, поскольку $\Omega_{\bigwedge \bigwedge}$ определен как уравниватель 1_Ω и $\bigwedge \bigwedge$, из замечания 5.16 вытекает, что он является внутренней булевой алгеброй в $\mathcal{E}$, а следовательно, также булевой алгеброй в $\text{sh}_{\bigwedge \bigwedge}(\mathcal{E})$. $\square$

Следует сказать, что топос $\text{sh}_{\bigwedge \bigwedge}(\mathcal{E})$ является «наилучшим булевым приближением» к $\mathcal{E}$ в очень слабом смысле. Неверно, например, что он является максимальным булевым подтопосом пучков из $\mathcal{E}$; в общем случае такого максимального подтопоса не существует. Однако можно охарактеризовать $\bigwedge \bigwedge$ следующим универсальным свойством.

5.18 Предложение. $\sqcap \sqcap$ является единственной наибольшей топологией в $\mathcal{E}$, для которой $0 \rightarrow 1$ замкнут.

Доказательство. Так как $0 \rightarrow 1$ имеет дополнение (а именно, $1 \rightarrow 1$), он, конечно, $\sqcap \sqcap$ -замкнут. Наоборот, пусть j — топология, в которой $0 \rightarrow 1$ замкнут, и пусть $X' \xrightarrow{\sigma} X$ является j -плотным мономорфизмом. Пусть $X'' \xrightarrow{\sigma} X$ является отрицанием X' (т. е. подобъектом, классифицируемым морфизмом $\sqcap \Phi_0$); тогда из декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

видно, что $0 \rightarrow X''$ является j -плотным. Но он также j -замкнут, так как

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$$

представляет собой декартов квадрат. Следовательно $0 \rightarrow X''$ является изоморфизмом, поэтому $\sigma \sqcap \sqcap$ -плотен; значит, $j \leq \sqcap \sqcap$. $\square$

Отметим, что утверждение 5.18 можно было бы доказать иначе, используя идеи теоремы 3.57 и примера 3.59(v). В частности, из утверждения 5.18 вытекает, что 0 всегда является $\sqcap \sqcap$ -пучком; следовательно, если топос $\mathcal{E}$ невырожден (т. е. удовлетворяет $0 \neq 1$), то невырожденным является и топос $\text{sh}_{\sqcap \sqcap}(\mathcal{E})$.

5.2. Аксиома выбора

Пусть $\mathcal{E}$ — топос, X — объект топоса $\mathcal{E}$; будем обозначать символом $\mathcal{P}X$ частично упорядоченное (внешнее) множество подобъектов объекта X (т. е. множество мономорфизмов с областью значений X). Тогда имеем функтор включения $i_X: \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{E}/X$, а у него имеется сопряженный слева функтор носителя $\sigma_X: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{P}X$, который переводит морфизм $Y \rightarrow X$ в его образ (1.52), рассматриваемый как подобъект объекта X .

5.21 Определение. (i) Будем говорить, что носители расщепляются в $\mathcal{E}$ (или $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (SS)), если для каждого $X \in \mathcal{E}$ расщепляется канонический эпиморфизм $X \rightarrow \sigma_1(X)$ (т. е. единица $(\sigma_1 \dashv i_1)$). (Это эквивалентно утверждению, что каждый подобъект объекта 1 проективен в $\mathcal{E}$.)

(ii) Будем говорить, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме выбора (AC), если для каждого X носители расщепляются в $\mathcal{E}/X$. (Это

эквивалентно утверждению, что каждый объект топоса $\mathcal{E}$ проективен или что каждый эпиморфизм в $\mathcal{E}$ расщепляется.) $\square$

5.22 Примеры. (i) Пусть P — вполне упорядоченное множество. Тогда в топосе $\mathcal{P}^P$ носители расщепляются, так как если X — любая ненулевая диаграмма в P , то ее носитель

$$\sigma_1(X) = \{p \in P \mid X(p) = \emptyset\}$$

имеет минимальный элемент p_0 , и тогда ясно, что

$$\sigma_1(X) = \{p \in P \mid p_0 \leq p\} = h^{p_0}.$$

Тогда по лемме Йонеды (0.11) любой элемент из $X(p_0)$ определяет расщепление для $X \rightarrow \sigma_1(X)$.

Но в общем случае $\mathcal{P}^P$ не удовлетворяет (AC). В самом деле, пусть P — ординал $2 = \{0, 1\}$ и пусть Y — постоянная диаграмма 2, $X(0) = 2$, $X(1) = 1$. Тогда очевидный эпиморфизм $Y \rightarrow X$ не расщепляется.

(ii) Пусть X — топологическое пространство. Тогда в общем случае $\text{Shv}(X)$ не удовлетворяет условию (SS), так как если взять $X = S'$ и Y — пучок сечений двулистного накрывающего отображения (пример (ii) в 4.37), то $\sigma_1(Y) = 1$, но у Y нет глобальных элементов. $\square$

Важным следствием аксиомы выбора является следующая теорема, восходящая к Диаконеску [31].

5.23 Теорема. Если топос удовлетворяет условию (AC), то он булев.

Доказательство. Пусть $Y \xrightarrow{\sigma} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}$. Образует амальгаму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow \sigma & & \downarrow q_1 \\ X & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array}$$

В силу следствия 1.28 q_1 и q_2 — мономорфизмы, и эта диаграмма также является декартовым квадратом. Теперь ясно, что

$X \amalg X \xrightarrow{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}} Q$ — эпиморфизм; пусть $Q \xrightarrow{\tau} X \amalg X$ — его расщепление.

Образует декартовы квадраты для $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccccc} T_{ij} & \xrightarrow{t_{ij}} & Z_i & \xrightarrow{w_i} & X \\ \downarrow s_{ij} & & \downarrow z_i & & \downarrow v_i \\ X & \xrightarrow{q_j} & Q & \xrightarrow{\tau} & X \amalg X \end{array}$$

тогда в силу универсальности копроизведений в $\mathcal{E}$ имеем $Q \cong \cong Z_1 \amalg Z_2$ и $X \cong T_{1j} \amalg T_{2j}$. Теперь можно записать $T_{11} \cong U_{11} \amalg U_{12}$, $T_{21} \cong U_{21} \amalg U_{22}$, где квадрат

$$\begin{array}{ccc} U_{1j} & \xrightarrow{\quad} & T_{1i} \\ \downarrow & & \downarrow s_{i1} \\ T_{j2} & \xrightarrow{s_{j2}} & X \end{array}$$

декартов, а потому

$$X \cong U_{11} \amalg U_{12} \amalg U_{21} \amalg U_{22}.$$

Но пара $X \xrightarrow[\tau q_i]{v_i} X \amalg X$ корефлексивна и имеет общее расщепление, заданное кодиагональным отображением $X \amalg X \xrightarrow{\nabla} X$; следовательно, равенство $v_i w_i t_{ij} = \tau q_j s_{ij}$ влечет $w_i t_{ij} = s_{ij}$. Значит, квадрат

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \xrightarrow{\quad} & T_{1i} \\ \downarrow & & \downarrow t_{i1} \\ T_{i2} & \xrightarrow{t_{i2}} & Z_i \end{array}$$

коммутативен, так как два пути по периметру коуравниваются морфизмом $Z_i \xrightarrow{w_i} X$, и нетрудно увидеть, что этот квадрат должен быть также декартовым.

Таким образом, после того как мы перепишем наш исходный квадрат амальгамы в виде

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & T_{11} \amalg T_{21} \\ \downarrow & & \downarrow t_{11} \amalg t_{21} \\ T_{12} \amalg T_{22} & \xrightarrow{t_{12} \amalg t_{22}} & Z_1 \amalg Z_2 \end{array}$$

мы получим $Y \cong U_{11} \amalg U_{22}$ как подобъект из $T_{11} \amalg T_{21} \cong X$. При этом ясно, что этот подобъект имеет дополнение, а именно, $U_{12} \amalg U_{21}$. $\square$

Формулировка 5.21 аксиомы выбора (AC), как легко видеть, эквивалентна в $\mathcal{P}$ любой теоретико-множественной форме этой аксиомы. Однако ясно, что топос $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию (SS), если даже мы не принимаем аксиомы выбора, так как у каждого непустого множества имеется элемент. Оказывается, что имеется более слабая форма (AC), применимая к топосам, которые не удовлетворяют (SS), что часто бывает полезно на практике.

5.24 Определение. (i) Будем говорить, что объект X топоса $\mathcal{E}$ *внутренне проективен*, если функтор $(-)^X: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет эпиморфизмы.

(ii) Будем говорить, что эпиморфизм $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{E}$ *локально расщепим*, если существует объект V топоса $\mathcal{E}$ с глобальным носителем (т. е. такой, что $V \rightarrow 1$ является эпиморфизмом), так что $V^*(f)$ — расщепимый эпиморфизм в $\mathcal{E}/V$. $\square$

5.25 Предложение. Следующие условия эквивалентны:

(i) Каждый объект топоса $\mathcal{E}$ *внутренне проективен*.

(ii) Каждый эпиморфизм в $\mathcal{E}$ *локально расщепим*.

(iii) Если $X \xrightarrow{f} Y$ является эпиморфизмом в $\mathcal{E}$, то у $\Pi_Y(f)$ имеется глобальный носитель.

Если эти условия выполнены, то будем говорить, что $\mathcal{E}$ *удовлетворяет неявной аксиоме выбора (IC)*.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (iii). Согласно упражнению 1.8 имеем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Pi_Y(f) & \xrightarrow{\quad} & X^Y \\ \downarrow & & \downarrow f^Y \\ 1 & \xrightarrow{1_Y} & Y^Y \end{array}$$

таким образом, Y *внутренне проективен* $\Rightarrow f^Y$ является эпиморфизмом $\Rightarrow \Pi_Y(f) \rightarrow 1$ является эпиморфизмом.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Глобальные элементы из $\Pi_Y(f)$ по определению соответствуют морфизмам $1_Y \rightarrow f$ в $\mathcal{E}/Y$, т. е. расщеплениям f в $\mathcal{E}$; поэтому в топосе $\mathcal{E}/\Pi_Y(f)$ имеем такой расщепленный общий объект.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — эпиморфизм в $\mathcal{E}$, а V — такой объект с глобальным носителем, что $V^*(f)$ расщепим. Тогда V^* сохраняет экспоненты, и для любого Z имеем $V^*(f)^Z \cong V^*(f)^{V^*Z}$, представляющий собой расщепимый эпиморфизм; следовательно, f^Z — эпиморфизм, так как V^* обращает эпиморфизмы в силу 4.12 (iii).

5.26 Пример. Пусть G — группа. Тогда топос $\mathcal{P}^G$ удовлетворяет (IC), так как стирающий функтор $\mathcal{P}^G \rightarrow \mathcal{P}$ сохраняет экспоненты, а также сохраняет и отражает эпиморфизмы. Но $\mathcal{P}^G$ не удовлетворяет (AC), если только G не тривиальна. $\square$

5.27 Лемма. Если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (IC), то ей удовлетворяет $\mathcal{E}/X$ для любого X .

Доказательство. Пусть

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & X & \end{array}$$

является эпиморфизмом в $\mathcal{E}/X$. Тогда, транспонируя канонический изоморфизм $\Pi_X(f) \cong \Pi_X \Pi_h(f)$, можно получить морфизм $X^* \Pi_X(f) \rightarrow \Pi_h(f)$ в $\mathcal{E}/X$; следовательно, если $\Pi_X(f)$ имеет глобальный носитель в $\mathcal{E}$, то $\Pi_h(f)$ имеет глобальный носитель в $\mathcal{E}/X$. $\square$

5.28 Лемма. (AC) эквивалентна конъюнкции (IC) и (SS).

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет (IC) и (SS); пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — эпиморфизм в $\mathcal{E}$. Тогда ввиду (IC) $\Pi_Y(f) \rightarrow 1$ является эпиморфизмом, а ввиду (SS) этот эпиморфизм расщепим. Поэтому имеем глобальный элемент, принадлежащий $\Pi_Y(f)$, т. е. расщепление f в $\mathcal{E}$. Обратное тривиально. $\square$

Заметим, что в лемме 5.28 использована не вся сила (SS), а только то, что 1 проективен. Следовательно, если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (IC) и X внешне проективен в $\mathcal{E}$, то из леммы 5.27 вытекает, что $\mathcal{E}/X$ удовлетворяет (AC). Заметим также, что теорему 5.23 можно усилить и установить, что (IC) влечет свойство быть булевым; в самом деле, если отрицание подобъекта $Y \xrightarrow{\sigma} X$ становится «честным» дополнением после подъема вдоль эпиморфизма $V \rightarrow 1$, то оно должно было быть таковым уже в $\mathcal{E}$.

Пусть теперь $X \xrightarrow{f} Y$ является произвольным морфизмом в $\mathcal{E}$. Функторы $f^*: \mathcal{E}/Y \rightarrow \mathcal{E}/X$ и $\Pi_f: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ сохраняют конечные объекты и мономорфизмы, поэтому они ограничиваются до функторов $\mathcal{P}Y \rightarrow \mathcal{P}X$ и $\mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y$, которые мы обозначим f^* и Π_f соответственно, и поскольку $\mathcal{P}X$ — полная подкатегория $\mathcal{E}/X$, ясно, что $f^* \dashv \Pi_f$. Функтор Σ_f не сохраняет конечный объект, но тем не менее можно получить функтор $\exists_f$, сопряженный слева к f^* , образуя композицию $\sigma_Y \Sigma_f i_X$ (т. е. $\exists_f(T) \rightarrow \rightarrow X) = \text{im}(T \rightarrow X \rightarrow Y)$). Отметим, что $\exists_f$ представляет собой «экстернализацию» морфизма $\exists_f: \Omega^X \rightarrow \Omega^Y$, определенного в лемме 1.32 и упражнении 1.10.

Суммируя наши сведения об этой ситуации, имеем

5.29 Предложение. В диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}/X & \xrightleftharpoons[\Pi_f]{\Sigma_f} & \mathcal{E}/Y \\
 \uparrow i_X & & \uparrow i_Y \\
 \mathcal{P}X & \xrightleftharpoons[\exists_f]{f^*} & \mathcal{P}Y \\
 \downarrow \sigma_X & & \downarrow \sigma_Y \\
 \mathcal{P}X & \xrightleftharpoons[\exists_f]{f^*} & \mathcal{P}Y
 \end{array}$$

имеем сопряжения $\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$, $\exists_f \dashv f^{-1} \dashv \forall_f$, $\sigma \dashv i$ и ком-

мутативные квадраты (с точностью до естественного изоморфизма)

$$f^* i_X = i_X f^{-1}, \Pi_f i_X = i_Y \forall_f \quad (\text{по определению})$$

и

$$\sigma_X \Sigma_Y \cong \exists_f \sigma_Y, \sigma_X f^* \cong f^{-1} \sigma_Y \quad (\text{в силу единственности сопряжений}).$$

Далее, $\Sigma_f i_X \cong i_Y \exists_f$ тогда и только тогда, когда f — мономорфизм, а также $\sigma_Y \Pi_f \cong \forall_f \sigma_X$ для всех f тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ удовлетворяет (IC).

Доказательство. Только последнее предложение требует дополнительных пояснений. Но из утверждения 5.25 и леммы 5.27 легко следует, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет (IC) тогда и только тогда, когда функторы Π_f сохраняют эпиморфизмы, а так как известно, что они сохраняют мономорфизмы, это все равно, что утверждать, что они коммутируют с функторами носителя. $\square$

5.3. Аксиома (SG)

5.31 Определение. Будем говорить, что топос $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме (SG), если подобъекты 1 в $\mathcal{E}$ образуют класс образующих (см. 0.44), т. е. если дана пара морфизмов $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$ таких, что $f \neq g$, то можно найти $U \rightarrow 1$ и $U \xrightarrow{h} X$ такие, что $fh \neq gh$. $\square$

Заметим, что если $\mathcal{E}$ определен над $\mathcal{P}$, то аксиома (SG) эквивалентна утверждению, что 1 — это объект образующих для $\mathcal{E}$ над $\mathcal{P}$ (см. 4.43). В более общей форме, если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG), то любой геометрический морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ограничен и имеет объект образующих; однако обратное не обязано быть истинным, если $\mathcal{F}$ не удовлетворяет (SG).

С точки зрения логики значение аксиомы (SG) состоит в том, что морфизмы $U \rightarrow X$, где U — подобъект объекта 1, соответствуют частичным отображениям $1 \rightarrow X$, т. е. глобальным элементам из X . Поэтому, применяя функтор $\sim$, можно свести «внутренние» вопросы об объектах и морфизмах топоса к «внешним» вопросам о глобальных элементах. Следующий результат является другим полезным следствием аксиомы (SG), отмеченным Борсе [12].

5.32 Лемма. Если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG), то Ω является кообразующей для $\mathcal{E}$.

Доказательство. Предположим, что даны $X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$ и $f \neq g$. Тогда можно найти $U \rightarrow 1$ и $U \xrightarrow{h} X$, причем $fh \neq gh$. Теперь, поскольку $U \rightarrow 1$ — мономорфизм, мономорфизмом является и $U \xrightarrow{h} X$; пусть $Y \xrightarrow{\phi} \Omega$ — его классифицирующее отображение.

В декартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & U \\ \downarrow q & & \downarrow fh \\ U & \xrightarrow{gh} & Y \end{array}$$

имеем $p = q$, и, следовательно, $V \xrightarrow{q} U$ является уравнителем fh и gh ; поэтому q — не изоморфизм. Кроме того, $\phi fh \neq \phi gh$, так как первый морфизм классифицирует 1_V , а второй классифицирует q ; следовательно, $\phi f = \phi g$. $\square$

Следующие два результата дают примеры топосов, удовлетворяющих (SG).

5.33 Лемма. Если $\mathcal{E}$ булев и удовлетворяет (SS), то $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG).

Доказательство. Предположим, что даны $X \xrightarrow{f} Y$ и $f \neq g$. Тогда уравнитель $E \rightarrow X$ морфизмов f и g не является изоморфизмом, а потому его дополнение $E' \rightarrow X$ — не нуль. Пусть $U = \sigma_1(E')$; тогда в силу утверждения 1.55 U — не нуль, и в силу (SS) имеем морфизм $U \rightarrow E'$. Пусть h — композиция $U \rightarrow E' \rightarrow X$, тогда уравнителем fh и gh является $h^*(E' \rightarrow X) \cong 0 \rightarrow U$; следовательно, $fh \neq gh$. $\square$

5.34 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, удовлетворяющий (SG). Тогда:

(i) Если P является внутренним частично упорядоченным множеством в $\mathcal{E}$, то $\mathcal{E}^P$ удовлетворяет (SG).

(ii) Если j является топологией в $\mathcal{E}$, то $sh_j(\mathcal{E})$ удовлетворяет (SG).

Доказательство. (i) Предположим, что даны $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{E}^P$ и $f \neq g$, где

$$X = (X_0 \xrightarrow{\gamma_0} P_0, X_0 \times_{P_0} P_1 \xrightarrow{a} X_0),$$

и т. п. Тогда можно найти $U \rightarrow 1$ в $\mathcal{E}$ и $U \xrightarrow{h} X_0$ с $f_0 h \neq g_0 h$; пусть δ обозначает композицию $U \xrightarrow{h} X_0 \xrightarrow{\gamma_0} P_0$, так что h представляет собой морфизм $\delta \rightarrow \gamma_0$ в $\mathcal{E}/P_0$. Переходя по сопряжению следствия 2.22, получаем $R(\delta) \xrightarrow{h} X$, причем $f\bar{h} \neq g\bar{h}$. Но из того, что $U \rightarrow 1$ и $P_1 \xrightarrow{(d_0, d_1)} P_0 \times P_0$ являются мономорфизмами в $\mathcal{E}$, без труда выводим, что $U \times_{P_0} P_1 \xrightarrow{d_1 \pi_2} P_0$ — мономорфизм, т. е. $R(\delta) \rightarrow 1$ является мономорфизмом в $\mathcal{E}^P$.

(ii) немедленно следует из того, что функтор ассоциирования пучка сохраняет 1 и мономорфизмы. $\square$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы доказать теорему, характеризующую те топосы, определенные над $\mathcal{P}$, которые удовлетворяют (SG). Однако прежде следует уделить немного внимания «нефинитной» структуре внутреннего частично упорядоченного множества Ω .

Пусть $P = (P_1 \rightrightarrows P)$ — внутреннее частично упорядоченное множество в топосе. Тогда имеем морфизмы $\uparrow \text{seg}: P \rightarrow \Omega^P$ и $\downarrow \text{seg}: P \rightarrow \Omega^P$, экспоненциальные транспозиции которых являются классифицирующими отображениями $P_1 \rightarrow P \times P$ и $P_1^{\text{op}} \rightarrow P \times P$ соответственно. [Символ $\downarrow \text{seg}$ следует читать «сегмент-вниз»; в $\mathcal{P}$ это отображение, переводящее $p \in P$ в подмножество $\{p' \in P \mid p' \leq p\}$.] Легко видеть, что $\downarrow \text{seg}$ сохраняет порядок (т. е. является внутренним функтором), а $\uparrow \text{seg}$ обращает порядок, где Ω^P частично упорядочено посредством $\Omega_1^P \rightarrow (\Omega \times \Omega)^P \cong \Omega^P \times \Omega^P$.

Если $P \xrightarrow{f} Q$ и $Q \xrightarrow{g} P$ являются отображениями между внутренними частично упорядоченными множествами, сохраняющими порядок, то будем говорить, что f внутренне сопряжен слева к g , если $P \xrightarrow{(1, gf)} P \times P$ пропускается через $P_1 \rightarrow P \times P$, а $Q \xrightarrow{(fg, 1)} Q \times Q$ пропускается через Q_1 . (Очевидно, вместо этого следует говорить, что отображения на обобщенных элементах, индуцированные отображениями f и g , сопряжены во внешнем смысле.)

Будем говорить, что внутреннее частично упорядоченное множество P внутренне полно, если существует отображение $\Omega^P \xrightarrow{\cup} P$, сохраняющее порядок, которое внутренне сопряжено слева к $\downarrow \text{seg}$. Ясно, что в случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ это эквивалентно обычному определению полноты решеток, и, как в $\mathcal{P}$, нетрудно доказать, что это условие эквивалентно двойственному ему, т. е. утверждению, что $\uparrow \text{seg}: P^{\text{op}} \rightarrow \Omega^P$ имеет внутреннее сопряженное слева отображение $\cap$. Чтобы это увидеть, образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & \Omega_1^P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^P \times P & \xrightarrow{1 \times \downarrow \text{seg}} & \Omega^P \times \Omega^P \end{array}$$

и пусть $\Omega^P \xrightarrow{ubd} \Omega^P$ является транспозицией классифицирующего отображения для $B \rightarrow \Omega^P \times P$. Вычисляя затем, как оно действует на обобщенные элементы, можно легко проверить, что композиция $\Omega^P \xrightarrow{ubd} \Omega^P \xrightarrow{\cap} P$ является внутренним сопряженным слева отображением к $\downarrow \text{seg}$. Аналогично по $\cup$ можно восстановить $\cap$.

5.35 Лемма. Ω является внутренне полным частично упорядоченным множеством в любом топосе.

Доказательство. Определим $\bigcup$ как отображение Ω' : $\Omega^2 \rightarrow \Omega' \cong \Omega$. Пусть $X \xrightarrow{\phi} \Omega$, $X \xrightarrow{\psi} \Omega^2$ — любые два обобщенные элемента, а $X' \xrightarrow{\sigma} X$, $Y \xrightarrow{\tau} X \times \Omega$ — соответствующие под-объекты. Образует декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & \xrightarrow{1 \times t} & X \times \Omega \end{array}$$

так как $\Omega_1 \rightarrow \Omega \times \Omega$ классифицируется посредством $\Rightarrow$, ясно, что подобъект $Z \rightarrow X \times \Omega$, соответствующий $\downarrow \text{seg. } \phi$, представляет собой $(X \xrightarrow{1 \times t} X \times \Omega) \Rightarrow (X' \times \Omega \xrightarrow{\alpha \times 1} X \times \Omega)$. Таким образом, имеем

$\psi \leq \downarrow \text{seg. } \phi$ тогда и только тогда, когда $Y \leq Z$ как подобъекты из $X \times \Omega$,
тогда и только тогда, когда $Y \cap X = T \leq (X' \times \Omega)$ как подобъекты из $X \times \Omega$,
тогда и только тогда, когда $T = (1 \times t) * Y \leq X'$ как подобъекты из X ,
тогда и только тогда, когда $\Omega'. \psi \leq \phi$.

Следовательно, имеем желаемое внутреннее сопряжение. $\square$

Если $\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{F}$ — логический функтор и P — внутренне полное частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$, то ясно по определению, что $T(P)$ внутренне полно в $\mathcal{F}$. Еще важнее следующий результат.

5.36 Предложение (Миккелсен). Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — топосы, а $\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{F}$ — функтор, имеющий сопряженный к нему слева функтор L , который сохраняет расслоенные произведения. Если P — внутренне полное частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$, то TP внутренне полно в $\mathcal{F}$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенный элемент $U \xrightarrow{x} (\Omega_{\mathcal{F}})^{TP}$. Он соответствует подобъекту $X \xrightarrow{(a,b)} U \times TP$ в $\mathcal{F}$; пусть $I \rightarrow LU \times P$ обозначает образ $LX \xrightarrow{(La,b)} LU \times P$ в $\mathcal{E}$, где $\wedge$ обозначает переход по $(L \dashv T)$. Пусть $LU \times P \xrightarrow{\phi} \Omega_{\mathcal{E}}$ классифицирует $I \rightarrow LU \times P$ и пусть $U \xrightarrow{\cup x} TP$ является транспозицией композиции $LU \xrightarrow{\phi} (\Omega_{\mathcal{E}})^P \xrightarrow{\cup} P$.

Применяя это построение к общему элементу объекта $(\Omega_{\mathcal{F}})^{TP}$, получаем морфизм $(\Omega_{\mathcal{F}})^{TP} \xrightarrow{\cup} TP$, а поскольку все использованные конструкции устойчивы при подъемах, выводим, что $\bigcup x$ — действительно композиция x и $\bigcup$.

Чтобы доказать, что $\bigcup$ внутренне сопряжен слева к $\downarrow \text{seg.}$, рассмотрим морфизм $U \xrightarrow{p} TP$ как U -элемент TP и обозначим через $Y \rightarrow U \times TP$ подобъект, соответствующий $\downarrow \text{seg. } p$. Кроме того, у нас есть подобъект $Z \rightarrow LU \times P$, соответствующий $LU \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\downarrow \text{seg.}} \Omega^P$, а поскольку T сохраняет расслоенные произведения, имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\quad} & TZ & \xrightarrow{\quad} & TP_1^{\text{op}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U \times TP & \xrightarrow{\alpha \times 1} & TLU \times TP & \xrightarrow{T\hat{p} \times 1} & TP \times TP \end{array}$$

в которой α представляет собой единицу сопряжения $(L \dashv T)$, а оба квадрата декартовы. Поэтому

$x \leq \downarrow \text{seg. } p$ тогда и только тогда, когда $X \leq Y$ как подобъекты из $U \times TP$,

тогда и только тогда, когда $LX \xrightarrow{(La,b)} LU \times P$ пропускается через $Z \rightarrow LU \times P$,

тогда и только тогда, когда $I \leq Z$ как подобъекты из $LU \times P$,

тогда и только тогда, когда $\bar{\phi} \leq \downarrow \text{seg. } \hat{p}$,

тогда и только тогда, когда $\bigcup \bar{\phi} \leq \hat{p}$ в силу внутренней полноты P ,

тогда и только тогда, когда $\bigcup x \leq p$. $\square$

Важнейшее применение утверждения 5.36 относится, конечно, к случаю, когда T — прямой образ геометрического морфизма с обратным образом L . Однако преимущество слегка более общей формулировки, данной нами, состоит в том, что ее можно применить к случаю $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, $T = (-)^X$, $L = (-) \times X$ и вывести, что если P внутренне полно, то таковыми является и P^X для любого X . (Это также можно установить, разлагая $(-)^X$ в логический функтор X^* , за которым следует функтор прямого образа Π_X .) В частности, частично упорядоченное множество Ω^X внутренне полно для любого X . Стоит отметить, что отображение внутреннего объединения $\Omega^{\Omega^X} \rightarrow \Omega^X$ является фактически мультипликативной частью структуры монады на ковариантном функторе множества-степени $(X \mapsto \Omega^X, f \mapsto \exists f)$ из упражнения 10 к гла-

ве 1. Единицей этой монады является синглетонное отображение (1.24). Более того, категория алгебр для этой монады изоморфна категории, объекты которой являются (антисимметричными) внутренне полными частично упорядоченными множествами в $\mathcal{E}$, а морфизмы представляют собой отображения, сохраняющие $\sup$ (т. е. такие морфизмы $P \xrightarrow{f} Q$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^P & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Q \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cap \\ P & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

коммутативна). Мы отсылаем читателя к [1] или [84] за деталями доказательства.

5.37. Теорема. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -топосом. Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG).
- (ii) Существует такая полная гейтингова алгебра H в $\mathcal{P}$, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathbf{H}, C)$, где C — каноническая топология Гротендика на $\mathbf{H}$ (см. 0.35).

Более того, гейтингова алгебра H из (ii) определена по $\mathcal{E}$ с точностью до изоморфизма.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i) немедленно следует из утверждения 5.34, так как $\mathcal{P}$ удовлетворяет (SG), а $\mathbf{H}$ — частично упорядоченное множество.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG). Тогда γ ограничен, так как 1 — это объект образующих для $\mathcal{E}$ над $\mathcal{P}$, а поскольку $\gamma_*(\Omega_{\mathcal{E}})$ является полной подкатегорией открытых объектов в $\mathcal{E}$ (эквивалентен ей), из теоремы 4.46 следует, что можно записать $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\gamma_*(\Omega), J)$, где J — топология Гротендика на $\gamma_*(\Omega)$, определенная, как в теореме 0.45.

Но в силу утверждений 5.13, 5.35 и 5.36 $\gamma_*(\Omega)$ является полной гейтинговой алгеброй, поэтому остается доказать, что топология J каноническая. (На самом деле в силу следствия 0.46 известно, что J субканоническая, поэтому достаточно доказать, что $C \leq J$.) Но в любой гейтинговой алгебре конечные пересечения дистрибутивны над произвольными объединениями (действительно, для полной решетки это условие по теореме о сопряженных функторах эквивалентно декартовой замкнутости), и поэтому из леммы 0.35 легко вывести, что C -покрывающие решета на $\gamma_*(\Omega)$ — это именно те, которые порождаются семействами $(U_{\alpha}) \rightarrow U | \alpha \in A$, для которых $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$. Но отсюда следует,

что $\prod_{\alpha \in A} U_{\alpha} \rightarrow U$ является эпиморфизмом в $\mathcal{E}$, и поэтому каждый

объект из $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме пучка относительно этого семейства. Следовательно, каждое C -покрывающее решето является J -покрывающим.

Наконец, пусть F — подобъект объекта 1 в $\text{Shv}(\mathbf{H}, C)$, где $\mathbf{H}$ — полная гейтингова алгебра. Тогда для каждого $x \in \mathbf{H}$ имеем $F(x) = 0$ или 1 , и из предыдущего описания C -покрывающих решет на $\mathbf{H}$ легко видно, что F должен быть представимым посредством объекта $\bigcup \{x \in \mathbf{H} | F(x) = 1\}$ алгебры $\mathbf{H}$. Поэтому $\mathbf{V}_*(\Omega_{\text{Shv}(\mathbf{H}, C)}) \cong \mathbf{H}$, т. е. $\mathbf{H}$ определяется по $\mathcal{E}$ с точностью до изоморфизма. $\square$

5.38 Замечание. Имеется также «относительный» вариант теоремы 5.37, восходящий к Митчелу; если $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — ограниченный геометрический морфизм, имеющий 1 в качестве объекта образующих, то существует внутренне полная гейтингова алгебра $\mathbf{H}$ в $\mathcal{E}$ (а именно, $\mathbf{H} = f_*(\Omega_{\mathcal{F}})$) такая, что $\mathcal{F} \simeq \text{sh}_j(\mathcal{E}^{\mathbf{H}^{\text{op}}})$, где j — внутренний эквивалент канонической топологии на $\mathbf{H}$. В частности, взяв $f = 1_{\mathcal{E}}$ для любого топоса $\mathcal{E}$, имеем, что $\mathcal{E} \simeq \text{sh}_j(\mathcal{E}^{\Omega^{\text{op}}})$, и включение $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\Omega^{\text{op}}}$ на самом деле является тем, которое индуцировано полным и унивалентным внутренним функтором $1 \xrightarrow{f} \Omega$ (см. упражнение 2 к главе 4). $\square$

5.39 Теорема. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -топосом (примем аксиому выбора для $\mathcal{P}$). Тогда эквивалентны следующие условия:

- (i) $\mathcal{E}$ удовлетворяет (AC).
- (ii) $\mathcal{E}$ булев и удовлетворяет (SG).
- (iii) В $\mathcal{P}$ существует полная булева алгебра $\mathbf{B}$ такая, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathbf{B}, C)$, где C — каноническая топология Гротендика на $\mathbf{B}$.

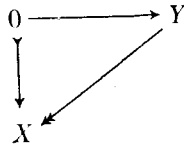
Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) немедленно следует из теоремы 5.23 и леммы 5.33, а (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) — это частный случай теоремы 5.37. Остается показать, что (ii) $\Rightarrow$ (i).

Пусть $Y \xrightarrow{f} X$ — эпиморфизм в $\mathcal{E}$. Назовем *частичным сечением* f коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & \searrow f & \\ X & & \end{array}$$

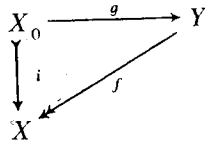
Тогда ясно, что можно построить «объект частичных сечений f » как подобъект E из Y^X и, следовательно, эти частичные сечения параметризуются множеством $S = \gamma_*(E)$. Более того, S непусто,

так как всегда имеется частичное сечение

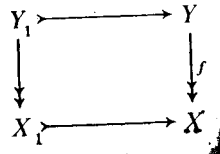


и если частично упорядочить частичные сечения отношением $(X', g) \leq (X'', g')$, если $X' \leq X''$ и $g'|_{X'} = g$,

то S удовлетворяет предположениям леммы Цорна, так как $\mathcal{E}$ — топос Гротендика и поэтому можно образовать произвольные $\mathcal{P}$ -индексированные объединения подобъектов из X . Поэтому у S имеется максимальный элемент



Предположим, что i не является изоморфизмом, тогда дополнение $X_1 \rightarrow X$ для X_0 является ненулевым и, следовательно, таковым является и подъем



Поэтому оба включения в копроизведение $Y_1 \rightrightarrows Y_1 \sqcup Y_1$ различны, следовательно, в силу (SG) существует ненулевой $U \rightarrow 1$ и морфизм $U \rightarrow Y_1$. Но композиция $U \rightarrow Y_1 \rightarrow Y \xrightarrow{f} X$ является мономорфизмом, и $U \cap X_0 \leq X_1 \cap X_0 = 0$. Поэтому можно продолжить наше частичное сечение (X_0, g) до сечения с областью определения $X_0 \sqcup U$, а это противоречит допущению, что (X_0, g) максимально. Следовательно, i должно быть изоморфизмом, а g является расщеплением для f .

5.4. Язык Митчела — Бенабу

Одним из наиболее важных подходов к формализации идеи топоса как «обобщенной теории множеств» состоит в том, чтобы сопоставить данному топосу $\mathcal{E}$ язык $L_{\mathcal{E}}$, который можно использовать как удобное средство для построения высказываний об объектах и морфизмах топоса $\mathcal{E}$ или даже для доказательства

теорем о них. Этот замысел впервые был явно высказан Митчелом [85]; позже различные «усовершенствованные» описания были даны Бенабу [24], Озиусом [94] и Фурманом [35], а также другими. Данное здесь описание не соответствует точно ни одному из предложенных ранее; оно задумано, чтобы подчеркнуть удобство $L_{\mathcal{E}}$ как простого математического средства для описания $\mathcal{E}$, а не как формальной системы для доказательства теорем о $\mathcal{E}$.

5.41 Определение. Язык $L_{\mathcal{E}}$ состоит из следующих символов:

- (i) Типы $X, Y, \dots$ все являются объектами топоса $\mathcal{E}$.
- (ii) Термы каждого типа конструируются следующим образом:
 - (a) для каждого типа X имеется запас переменных $x, x', x'', \dots$;
 - (b) для каждого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ топоса $\mathcal{E}$ и каждого термина τ типа X имеется терм $f(\tau)$ типа Y ;
 - (c) если заданы термы σ типа X , τ типа Y , то имеется терм $\langle \sigma, \tau \rangle$ типа $X \times Y$.
- (iii) Формулы — это термы типа Ω . Более конкретно, имеется:
 - (a) бинарный предикат « $=_x$ » сигнатуры (X, X) для каждого типа X [если σ, τ — термы типа X , то $(\sigma =_x \tau)$ есть $\delta_x(\langle \sigma, \tau \rangle)$, где $\delta_x: X \times X \rightarrow \Omega$ классифицирует диагональный подобъект];
 - (b) бинарный предикат « $\in_x$ » сигнатуры (X, Ω^x) для каждого типа X [определяется аналогично с использованием отображения оценки $X \times \Omega^x \rightarrow \Omega$];
 - (c) логические связки $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$ [индуцируемые операциями гейтинговой алгебры на Ω].
- (iv) Кванторы и описания. Пусть ϕ — формула и x — переменная. Тогда:
 - (a) $\forall x \phi$ и $\exists x \phi$ — формулы;
 - (b) $\{x | \phi\}$ — терм типа Ω^x ;
 - (c) $\iota x \phi$ — терм типа X . $\square$

Понятия *свободного* и *связанного* вхождения переменных в терм $L_{\mathcal{E}}$ определяются как обычно, т. е. переменная свободна, если она не связана квантором или оператором описания.

5.42 Определение. Определяем интерпретацию языка $L_{\mathcal{E}}$, приписывающую терму τ типа X со свободными переменными $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, морфизм

$$|\tau|: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow X$$

следующим образом:

- (a) Каждая переменная типа X интерпретируется как тождественный морфизм $X \xrightarrow{1} X$;
- (b) $f(\tau)$ интерпретируется как композиция $\prod U_i \xrightarrow{|\tau|} X \xrightarrow{f} Y$;

(с) предположим, что σ имеет свободные переменные $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$, а τ имеет свободные переменные $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_p$, где v_i и w_j все различны. Тогда $\langle \sigma, \tau \rangle$ интерпретируется как морфизм с компонентами

$$U \times V \times W \xrightarrow{\pi_{12}} U \times V \xrightarrow{|\sigma|} X$$

и

$$U \times V \times W \xrightarrow{\pi_{13}} U \times W \xrightarrow{|\tau|} X,$$

где $U = \prod_{i=1}^n U_i$, и т. п. [Отметим, что мы рассматриваем переменные x и x' как различные в данном контексте, хотя они могут быть одного типа. Так, например, интерпретацией $\langle x, x' \rangle$ является $X \times X \xrightarrow{1} X \times X$, в то время как $\langle x, x \rangle$ интерпретируется как $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$.]

(d) Предположим, что ϕ имеет свободные переменные $x, u_1, u_2, \dots, u_n$. Тогда

$$|\{x | \phi\}| : \prod U_i \rightarrow \Omega^X$$

является экспоненциальной транспозицией морфизма

$$|\phi| : X \times \prod U_i \rightarrow \Omega,$$

а $|\{x | \phi\}|$ является представлением частичного отображения $\prod U_i \rightarrow X$, заданного декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow (1) \\ \prod U_i & \xrightarrow{|\{x | \phi\}|} & \Omega^X \end{array}$$

(e) Опять предположим, что ϕ имеет свободные переменные $x, u_1, \dots, u_n$. Обозначим через f проекцию произведения $X \times \prod U_i \rightarrow \prod U_i$, и пусть

$$\|\phi\| \rangle \longrightarrow X \times \prod U_i$$

является подобъектом, классифицированным формулой $|\phi|$ (экстенционал формулы ϕ). Тогда $|\forall x \phi|$ (соответственно $|\exists x \phi|$) является классифицирующим отображением $\forall_f(\|\phi\| \rangle \rightarrow X \times \prod U_i)$ (соответственно $\exists_f(\|\phi\| \rangle \rightarrow X \times \prod U_i)$) (см. 5.29);

(f) если x не входит свободно в ϕ , то $\forall x \phi, \exists x \phi, \{x | \phi\}$ и $\{x \phi\}$ можно интерпретировать, заменяя $|\phi|$ на $(x =_X x \wedge \phi)$ (эквивалентно, заменяя $|\phi|$ на $X \times \prod U_i \xrightarrow{f} \prod U_i \xrightarrow{|\phi|} \Omega$). □

5.43 Определение. Пусть ϕ — формула языка $L_{\mathcal{E}}$ со свободными переменными $u_1, \dots, u_n$. Будем говорить, что ϕ универсально действительна в $\mathcal{E}$ (и писать $\mathcal{E} \models \phi$), если $|\phi|$ представляет собой композицию $\prod U_i \rightarrow 1 \xrightarrow{!} \Omega$ (эквивалентно, если $\|\phi\|$ — максимальный подобъект $\prod U_i$). □

Отметим, что любой логический функтор $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ индуцирует очевидное отображение из $L_{\mathcal{E}}$ в $L_{\mathcal{F}}$, сохраняющее интерпретацию; поэтому $\mathcal{E} \models \phi$ влечет $\mathcal{F} \models T(\phi)$. Более того, если T унивалентен, то справедлива обратная импликация.

5.44 Примеры. Следующие утверждения справедливы в любом топосе $\mathcal{E}$ (их доказательство можно рассматривать как легкое упражнение).

(i) $\mathcal{E} \models x =_X x$ [но $\mathcal{E} \models x =_{X'} x'$ тогда и только тогда, когда $X \rightarrow 1$ является мономорфизмом].

(ii) $\mathcal{E} \models (x \in_x \{x | \phi\}) \Leftrightarrow \phi$.

(iii) Если τ относится к типу Ω^X , то $\mathcal{E} \models \tau =_{\Omega^X} \{x | x \in_x \tau\}$.

(iv) $\mathcal{E} \models \phi$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} \models \forall x \phi$.

(v) $\mathcal{E} \models \exists x \phi \Rightarrow \exists x (x =_X x)$ [заметим, что $\|\exists x (x =_X x)\|$ является в точности $\sigma_1(X)$].

(vi) Если σ и τ имеют одни и те же свободные переменные, то $\mathcal{E} \models \sigma =_X \tau$ тогда и только тогда, когда $|\sigma| = |\tau|$.

(vii) $\mathcal{E} \models \phi \Rightarrow \neg \neg \phi$.

(viii) Если ω — переменная типа Ω , то $\mathcal{E} \models (\omega \vee \neg \omega)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ булев. □

В том же духе, что и в (vii), можно доказать, что все тавтологии интуиционистской логики высказываний (см. [ММ], глава IX) общезначимы в $\mathcal{E}$. Более того, можно убедиться в истинности всех обычных аксиом и правил вывода интуиционистской логики предикатов за единственным исключением правила modus ponens: если $\models \phi$ и $\models \phi \Rightarrow \psi$, то $\models \psi$. Причина, по которой это правило не сохраняется, состоит по существу в том, что проекция произведения $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ может не быть эпиморфизмом, если X не имеет глобального носителя; поэтому формула $\psi(y)$, которая не общезначима, может быть верной, если мы добавим «фиктивную переменную» x . В предельном случае, если ϕ содержит свободную переменную типа 0, то $\mathcal{E} \models \phi$ и $\mathcal{E} \models \phi \Rightarrow \psi$ всегда верны, причем ψ может быть вообще чем угодно!

Одно из решений этой проблемы, предложенное Фурманом, состоит в том, чтобы работать с «частично определенными термами», которые рассматриваются как обозначение обобщенных элементов из X , а не из X . Таким образом, интерпретацией терма в языке Фурмана становится морфизм $\prod \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{X}$. Так как $\tilde{X}$ инъективен, он всегда имеет глобальный носитель; поэтому в такой интерпретации правило modus ponens выполняется. Однако этому подходу присущи значительные дополнительные сложности,

и мы приняли более простую интерпретацию, изложенную выше. По существу она не отличается от интерпретаций Бенабу и Озиуса. Заметим, что эта интерпретация все-таки удовлетворяет правилу вывода, которое Озиус [94] назвал *ограниченным modus ponens*: если все свободные переменные формулы ϕ также свободны в формуле ψ , $\mathcal{E} \models \phi$ и $\mathcal{E} \models \phi \Rightarrow \psi$, то $\mathcal{E} \models \psi$.

Наше описание языка $L_{\mathcal{E}}$ принципиально отличается от описаний Бенабу и Озиуса тем, что формулы у нас отождествляются с термами типа Ω . С нашей точки зрения это выглядит разумным упрощением, так как в любом случае мы должны иметь сохраняющую интерпретацию биекцию между формулами (классами эквивалентности формул) и термами типа Ω ; эта биекция задается сопоставлениями $\phi \mapsto \{|\phi|\}$ и $\tau \mapsto (\equiv_1, \tau)$. Здесь пробел означает переменную типа 1; эта переменная единственна, а так как ее обозначение не влияет на интерпретацию какого-либо терма, в котором она появляется, кажется чрезмерным выбирать для нее символ.

5.45 Замечание. Перечислим некоторые общепринятые сокращения, которыми мы будем пользоваться в языке $L_{\mathcal{E}}$.

(i) Где возможно, будем опускать индексы при предикатах $=$ и $\in$.

(ii) Если $1 \xrightarrow{\gamma} X$ является глобальным элементом из X , то вместо терма $\gamma(\)$ типа X будем просто писать γ . В частности, если $X' \xrightarrow{\sigma} X$ является подобъектом из X , то будем писать $\lceil X' \rceil$ или $\lceil \sigma \rceil$ для соответствующего глобального элемента из Ω^X или для терма, который его обозначает.

(iii) Если σ — терм типа Y^X , а τ — терм типа X , то можно писать $\sigma(\tau)$ вместо $ev(\langle \sigma, \tau \rangle)$, где $ev: Y^X \times X \rightarrow Y$ — отображение оценки.

(iv) Если ϕ — формула, а τ — терм, ни одна из свободных переменных которого не встречается связанной в ϕ , то будем писать $\phi[\tau/x]$ вместо формулы, полученной подстановкой τ вместо каждого свободного вхождения x в ϕ .

(v) Будем использовать квантор существования и единственности $\exists!x\phi$ в качестве сокращения для $\exists x(\phi \wedge \forall x'(\phi[x'/x] \Rightarrow x = x'))$.

(vi) Вообще, будем чувствовать себя вправе использовать знакомые теоретико-множественные сокращения без дальнейших пояснений. Например, если $P = (P_1 \rightrightarrows P)$ является частично упорядоченным множеством и p, p' — две переменных типа P , то будем писать $p \leq p'$ вместо формулы $\langle p, p' \rangle \in_{P \times P} P_1$. □

5.46 Примеры. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих удобство языка $L_{\mathcal{E}}$ как средства «интернализации» привычных теоретико-множественных определений.

(i) *Отображение образа* $im: Y^X \rightarrow \Omega^Y$ — это $\{y | \exists x(f(x) = y)\}$, где f представляет собой переменную типа Y^X .

(ii) *Объект эпиморфизмов* $Epi(X, Y) \rightarrow Y^X$ — это $\|im(f) = \lceil 1_Y \rceil\|$, или, что то же самое, $\|\forall y \exists x(f(x) = y)\|$, где f — опять переменная типа Y^X .

(iii) *Отображение уравнителя* $eq: Y^X \times Y^X \rightarrow \Omega^X$ — это $\{x | f(x) = f'(x)\}$ (сравните с определением этого отображения в 1.49 (ii)); *отображение ядерной пары* $ker: Y^X \rightarrow \Omega^{X \times X}$ — это $\{t | f(\pi_1(t)) = f(\pi_2(t))\}$, где t относится к типу $X \times X$.

(iv) *Объект мономорфизмов* $Mono(X, Y) \rightarrow Y^X$ — это $\|ker(f) = \lceil \Delta \rceil\|$, а *объект изоморфизмов* $Iso(X, Y) \rightarrow Y^X$ можно определить в силу следствия 1.22 либо как $Epi(X, Y) \cap Mono(X, Y)$, либо как $\|\exists!g(c_1(\langle f, g \rangle) = \lceil 1_X \rceil \wedge c_2(\langle g, f \rangle) = \lceil 1_Y \rceil)\|$, где g относится к типу X^Y и $c_1: Y^X \times X^Y \rightarrow X^X$, $c_2: X^Y \times Y^X \rightarrow Y^Y$ являются внутренними отображениями композиции. □

Имеется иная интерпретация формул языка $L_{\mathcal{E}}$ (Озиус назвал ее «внешней интерпретацией»), в которой формула ϕ со свободными переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ интерпретируется как некоторое утверждение $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ об обобщенных элементах

$$U \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \prod_{i=1}^n X_i.$$

(Конкретно, $\phi(x_1, \dots, x_n)$ означает « $(x_1, \dots, x_n)$ пропускается через $\|\phi\|$ », или, что то же самое, « $\mathcal{E} \models \phi[x_i(u)/x_i]_{i=1}^n$ »). В этом контексте логическая связка $\wedge$ интерпретируется как конъюнкция обычным способом, но другие связки и кванторы привлекают дополнительный квантор «изменение области определения $(x_1, \dots, x_n)$ ». Правила этой интерпретации обычно известны как *семантика Крипке — Жуаяля*. Они являются развитием исходной семантики Крипке [173], предназначенной для моделирования интуиционистской логики в универсуме, который по существу был топосом предпучков. Эти правила приводятся ниже; для удобства работа ведется с формулами, у которых имеются только одна или две свободных переменных.

5.47 Лемма. Пусть ϕ, ψ — формулы языка $L_{\mathcal{E}}$ с одной свободной переменной x , χ — формула со свободными переменными (x, y) , а $U \xrightarrow{\alpha} X$ — обобщенный элемент из X . Тогда

(i) $(\phi \wedge \psi)(x)$ в том и только в том случае, когда $\phi(x)$ и $\psi(x)$.

(ii) $(\phi \vee \psi)(x)$ в том и только в том случае, когда существуют такие $V_1 \xrightarrow{\alpha_1} U$ и $V_2 \xrightarrow{\alpha_2} U$, что $V_1 \amalg V_2 \rightarrow U$ является эпиморфизмом и имеют место $\phi(x\alpha_1)$ и $\psi(x\alpha_2)$.

(iii) $(\phi \Rightarrow \psi)(x)$ в том и только в том случае, когда для всех таких $V \xrightarrow{\alpha} U$, что $\phi(x\alpha)$, имеем $\psi(x\alpha)$.

(iv) $(\bigwedge \phi)(x)$ в том и только в том случае, когда для всех таких $V \xrightarrow{\alpha} U$, что $\phi(x\alpha)$, имеем $V \cong 0$.

(v) $(\exists y\chi)(x)$ в том и только в том случае, когда существуют эпиморфизм $V_1 \twoheadrightarrow U$ и V -элемент $V \xrightarrow{y} Y$ такие, что $\chi(x\alpha, y)$.

(vi) $(\forall y\chi)(x)$ в том и только в том случае, когда для всех $V \xrightarrow{\alpha} U$ и всех V -элементов $V \xrightarrow{y} Y$ имеем $\chi(x\alpha, y)$.

Доказательство. Проведем рассуждение для (ii) и (iii); другие утверждения леммы проверяются аналогично.

(ii) Допустим, что $(\phi \vee \psi)(x)$. Образует декартовы квадраты

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\quad} & \|\phi\| \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{x} & \|\phi \vee \psi\| \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{\quad} & \|\psi\| \\ \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{x} & \|\phi \vee \psi\| \end{array}$$

тогда, поскольку $\|\phi\| \sqcup \|\psi\| \rightarrow \|\phi \vee \psi\|$ является эпиморфизмом, а копроизведения в $\mathcal{E}$ универсальны, заключаем, что α_1 и α_2 обладают требуемыми свойствами. Наоборот, если данные условия выполнены, то заключаем, что x должен пропускаться через образ $\|\phi\| \sqcup \|\psi\| \rightarrow X$, который есть в точности $\|\phi \vee \psi\|$.

(iii) Если $(\phi \Rightarrow \psi)(x)$, то ясно, что $(\phi \Rightarrow \psi)(x\alpha)$ для любого α ; поэтому если также имеем $\phi(x\alpha)$, то $x\alpha$ пропускается через $\|\phi \Rightarrow \psi\| \cap \|\phi\| \leq \|\psi\|$. Наоборот, если данное условие выполнено, то пусть $I \twoheadrightarrow X$ является образом x . Тогда, если взять декартов квадрат

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\quad} & I \cap \|\phi\| & \xrightarrow{\quad} & \|\phi\| \\ \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\quad} & I & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

композиция $x\alpha$ пропускается через $\|\psi\|$. Отсюда следует, что $I \cap \|\phi\| \leq \|\psi\|$, и поэтому $I \leq \|\phi \Rightarrow \psi\|$. $\square$

Наблюдательный читатель заметит, что семантика Крипке — Жуаяля использовалась неформальным образом в предшествующих главах данной книги. В частности, то, что называлось в § 2.5 «универсальной» и «элементарной» формами определения фильтрованности, было просто внутренней и внешней интерпретациями определенных формул языка $L_{\mathcal{E}}$, содержащих кванторы существования. Лемма 3.56 — просто пример семантики квантора всеобщности, $\prod$ -функтор, встречающийся в определении D^r , является, конечно, квантором всеобщности в языке $L_{\mathcal{E}}$. Доказательство леммы 5.47 ((v) и (vi)) неявно и в частных случаях рассматривается в замечании 2.52 и в лемме 3.56.

Следует подчеркнуть, что в исходной семантике Крипке дизъюнкция и квантор существования были интерпретированы сразу и непосредственно, как для конъюнкции. Причина заключается в том, что Крипке занимался топосом вида $\mathcal{P}^C$ и поэтому ограничивался рассмотрением представимых функторов в качестве объектов U и V . Из леммы Йонеды легко следует, что они проактивны в $\mathcal{P}^C$, так что эпиморфизмы, встречающиеся в лемме 5.47 (ii) и (v), автоматически расщепляются. Для общего случая топоса потребность в «локальной» интерпретации существования, как в лемме 5.47, была впервые подчеркнута Жуаялем; однако Кок [61] указал, что квантор существования и единственности все же имеет глобальную интерпретацию. Мы не будем доказывать этого формально, а приведем иллюстрирующий пример.

5.48 Определение. Пусть $\mathbf{P} = (P_1 \rightrightarrows P)$ — внутреннее частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$. Будем говорить, что $\mathbf{P}$ вполне упорядочено, если оно антисимметрично (5.11) и

$$\mathcal{E} \models (\exists p(p \in q) \Rightarrow (\exists p(p \in q) \wedge \forall p'(p' \in q \Rightarrow p \leq p'))),$$

где q — свободная переменная типа Ω^P . $\square$

Используя лемму 5.47, можно перевести это условие следующим образом: «для любого $U \xrightarrow{q} \Omega^P$, если существуют такие $V \twoheadrightarrow U$ и $V \xrightarrow{p} P$, что $(q\alpha, p)$ пропускается через $\in_P \rightarrow \Omega^P \times P$, то существуют такие $V_0 \xrightarrow{\alpha_0} U$ и $V_0 \xrightarrow{p_0} P$, что $(q\alpha_0, p_0)$ пропускается через $\in_P$ и для всех $W \xrightarrow{\beta} V_0$ и всех $W \xrightarrow{p_1} P$, если $(q\alpha_0, \beta, p_1)$ пропускается через $\in_P$, то $(p_0\beta, p_1)$ пропускается через $P_1 \rightarrow P \times P$ ». Надеемся, что этого примера достаточно, чтобы убедить читателя в нужности такой системы, как язык $L_{\mathcal{E}}$!

5.49 Предложение. Если $\mathbf{P}$ вполне упорядочено, то каждый эпиморфизм $P \twoheadrightarrow X$ расщепим.

Доказательство. Пусть $X \xrightarrow{q} \Omega^P$ — интерпретация терма $\{p \mid f(p) = x\}$, т. е. транспозиция классифицирующего отображения графика f . Тогда легко видеть, что $(qf, 1_P)$ пропускается через $\in_P \rightarrow \Omega^P \times P$; таким образом, по определению можно найти такие $V \twoheadrightarrow X$ и $V \xrightarrow{p} P$, что « p — минимальный элемент из $q\alpha$ ».

Теперь пусть $W \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} V$ является ядерной парой морфизма α ; тогда $q\alpha\gamma_1 = q\alpha\gamma_2$, так что оба морфизма определяют один и тот же подобъект из $W \times P$. Но $p\gamma_1$ и $p\gamma_2$ — минимальные элементы этого подобъекта, по условию антисимметрии они равны, следовательно, p пропускается через коуравнитель для γ_1 и γ_2 . Но в силу следствия 1.53 этот коуравнитель представляет собой α (изоморфен ему): поэтому можно писать $p = g\alpha$, а тогда $(q, g)\alpha$ про-

пускается через $\in_P \rightarrow \Omega^P \times P$. Но α — эпиморфизм, поэтому (g, g) пропускается через $\in_P$; очевидно, это то же самое, что сказать, что g — расщепление морфизма f . $\square$

Основная идея, которая стоит за утверждением 5.49, представляет собой не что иное, как аксиому пучков (0.23), выраженную внутренним образом. Другими словами, процесс пропускания обобщенного элемента $V \xrightarrow{p} P$ через эпиморфизм α аналогичен процессу построения глобального сечения пучка путем «склеивания» семейства локальных сечений, согласованных на перекрывающихся частях своих областей определения. Иначе говоря, лозунг «единственное существование влечет глобальное существование» можно рассматривать как переформулировку следствия 1.22; так, формула $\mathcal{E} \models \exists x \phi$ утверждает, что определенный морфизм топоса $\mathcal{E}$ является эпиморфизмом (но не обязательно расщепимым эпиморфизмом), $\mathcal{E} \models \exists ! x \phi$ утверждает, что он и эпиморфизм, и мономорфизм, а значит, изоморфизм.

В завершение параграфа дадим доказательства двух «теоретико-множественных» лемм, которые понадобятся в следующей главе.

5.50 Лемма (теорема Тарского о неподвижной точке [185]). Пусть P — антисимметричное внутренне полное частично упорядоченное множество в $\mathcal{E}$ и пусть $P \xrightarrow{r} P$ — отображение, сохраняющее порядок. Тогда существует такой глобальный элемент p_0 из P , что $rp_0 = p_0$.

Доказательство. Построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & P \\ \downarrow i & & \downarrow 1 \\ P & \xrightarrow{(1, r)} & P \times P \end{array}$$

и пусть p_0 будет композицией $1 \xrightarrow{\lceil i \rceil} \Omega^P \xrightarrow{U} P$. Теперь имеем следующие общезначимые формулы:

$$\mathcal{E} \models p \in \lceil i \rceil \Leftrightarrow p \leq r(p),$$

$$\mathcal{E} \models p \in \lceil i \rceil \Rightarrow p \leq p_0,$$

$$\mathcal{E} \models p \leq p_0 \Rightarrow r(p) \leq rp_0.$$

В силу ограниченного modus ponens и транзитивности $\leq$ получаем

$$\mathcal{E} \models p \in \lceil i \rceil \Rightarrow p \leq rp_0,$$

т. е. $\lceil i \rceil \leq \downarrow \text{seg. } rp_0$, или, что то же самое, $rp_0 \geq \bigcup \lceil i \rceil = p_0$. Но теперь имеем $rrp_0 \geq rp_0$, поэтому $rp_0 \in \lceil i \rceil$, и, следовательно, $rp_0 \leq p_0$. $\square$

Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$, а $S \xrightarrow{(a,b)} X \times X$ — бинарное отношение на X . Будем говорить, что подобъект $X' \xrightarrow{i} X$ S -замкнут, если $X' \times_X S \xrightarrow{b \pi_2} X$ пропускается через i , т. е. если

$$\mathcal{E} \models (x \in \lceil i \rceil \wedge \langle x, x' \rangle \in \lceil S \rceil) \Rightarrow x' \in \lceil i \rceil.$$

5.51 Лемма. Пусть $S \xrightarrow{(a,b)} X \times X$ — симметричное отношение на объекте X из $\mathcal{E}$ и пусть $R \xrightarrow{(c,d)} X \times X$ — ядерная пара коуравнителя для (a, b) . Тогда любой S -замкнутый подобъект из X является R -замкнутым.

Доказательство. Определим бинарное отношение $T \xrightarrow{(e,f)} X \times X$ как экстенционал формулы

$\forall u (u \text{ является } S\text{-замкнутым}) \Rightarrow (x \in u \Leftrightarrow x' \in u)$, где u относится к типу Ω^X . Из природы этой формулы ясно, что T представляет собой отношение эквивалентности на X , и поэтому в силу утверждения 1.23 имеем морфизм $X \xrightarrow{h} Y$ с ядерной парой (e, f) . Но поскольку S симметричен, очевидно, имеем

$$\mathcal{E} \models (\langle x, x' \rangle \in \lceil S \rceil \wedge u \text{ является } S\text{-замкнутым}) \Rightarrow \Rightarrow (x \in u \Leftrightarrow x' \in u),$$

откуда выводим

$$\mathcal{E} \models \langle x, x' \rangle \in \lceil S \rceil \Rightarrow \langle x, x' \rangle \in \lceil T \rceil,$$

т. е. $S \leq T$ как подобъекты из $X \times X$. Но теперь имеем $ha = hb$, поэтому h пропускается через коуравнитель для (a, b) и, следовательно, $R \xrightarrow{(c,d)} X \times X$ пропускается через (e, f) . А так как

$$\mathcal{E} \models (u \text{ } S\text{-замкнут} \wedge x \in u \wedge \langle x, x' \rangle \in \lceil T \rceil) \Rightarrow x' \in u,$$

то, очевидно, любой S -замкнутый подобъект из X также T -замкнут, и, следовательно, R -замкнут. $\square$

Упражнения к главе 5

1. Пусть $\mathcal{E}$ — булев топос. Покажите, что любая топология в $\mathcal{E}$ и открыта, и замкнута, и выведите, что каждый подтопос пучков топоса $\mathcal{E}$ булев. [Указание. Если j — топология в $\mathcal{E}$, то обратите внимание на то, что j определяется композицией $1 \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{j} \Omega$.] Наоборот, если каждая топология в $\mathcal{E}$ открыта, то покажите, что $\mathcal{E}$ булев. [Указание. Если $\lceil \rceil = j_U$, то $U \rightarrow 1$ должен быть $\lceil \rceil$ -плотен; теперь рассмотрите j_U° .]

2. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория, и предположим, что множество всех морфизмов из $\mathcal{C}$ допускает исчисление правых частных. (Проверьте, что это условие удовлетворяется, если $\mathcal{C}^{\text{op}}$ слабо фильтруется или если $\mathcal{C}$ является коммутативным моноидом.) Покажите, что любые два непустых решета на объекте из $\mathcal{C}$ имеют непустое пересечение, и выведите, что каждое непустое решето является $\sqcap$ -покрывающим. Следовательно, покажите, что $\text{sh}_{\sqcap}(\mathcal{P}^{\text{cop}})$ эквивалентна $\mathcal{P}^{\text{Gop}}$, где $\mathbf{G}$ — свободный групп-поид, порожденный категорией $\mathcal{C}$, т. е. категория частных, полученная обращением каждого морфизма из $\mathcal{C}$.

3. Напомним, что гейтингову алгебру называют *стоуновой решеткой* ([LT], с.130)*, если равенство $\sqcap x \vee \sqcap \sqcap x = t$ выполняется для всех $x \in H$. Если $\mathcal{E}$ — топос, то покажите, что эквивалентны следующие условия:

- (a) Ω — внутренняя стоунова решетка в $\mathcal{E}$;
- (b) каждый $\sqcap$ -замкнутый подобъект в $\mathcal{E}$ имеет дополнение;
- (c) $1 \xrightarrow{f} \Omega$ имеет дополнение;
- (d) объект X топоса $\mathcal{E}$ $\sqcap$ -отделен тогда и только тогда, когда диагональное отображение $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ имеет дополнение (объект, удовлетворяющий этому условию, называется *разрешимым*);
- (e) каждый $\sqcap$ -пучок в $\mathcal{E}$ разрешим;
- (f) $\Omega_{\sqcap}$ разрешим.
- (g) $1 \sqcup 1 \xrightarrow{(f)} \Omega_{\sqcap}$ является изоморфизмом в $\mathcal{E}$;
- (h) $\Omega_{\sqcap}$ является подрешеткой Ω (в частности, включение сохраняет $\vee$);

(i) (если $\mathcal{E} = \mathcal{P}^{\text{cop}}$) $\mathcal{C}^{\text{op}}$ удовлетворяет условию (d) определения 2.51;

(k) (если $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$) X совершенно несвязен ([GT], с. 106).

[Указание. Для (b) $\Rightarrow$ (d) следует использовать 3.29(ii). Для (f) $\Rightarrow$ (g) покажите, что любой глобальный элемент разрешимого объекта имеет дополнение, образуя соответствующий декартов квадрат. Для (c) $\Leftrightarrow$ (i) обратите внимание, что в (i) утверждается, что подъем непустого решета непуст, т. е. непустые решета образуют предпучок из Ω .]

4*. Напомним, что топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем имеется счетное плотное подмножество, и *нульмерным*, если подмножества, одновременно открытые и замкнутые («открыто-замкнутые»), образуют базу топологии ([GT], с. 109 и 240). Покажите, что оба эти свойства наследуются открытыми подпространствами, и, следовательно, докажите, что если X сепарабельно и нульмерно, то $\text{Shv}(X)$ удовлетворяет

(SS). [Метод. Если дан пучок F на X , то пусть $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ — счетное плотное подмножество из $\sigma_1(F)$. Теперь определите такую возрастающую последовательность открыто-замкнутых множеств $U_n \subseteq \sigma_1(F)$, что: (1) $x_n \in U_n$; (2) у F имеется сечение s_n над U_n ; (3) $s_n|_{U_{n-1}} = s_{n-1}$.]

5*. Пусть G обозначает аддитивную группу целых чисел и пусть $\mathcal{E}$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathcal{P}^G$, состоящую из тех G -множеств, в которых каждая G -орбита конечна. [Предупреждение. Это не тот же топос, что в примере 4.49(ii).] Покажите, что функтор включения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}^G$ не отражает экспонент, но точен слева и имеет сопряженный справа [а именно, функтор, который переводит G -множество в объединение его конечных орбит]. Выведите, используя теорему 2.32, что $\mathcal{E}$ — топос, и покажите также, что он булев и определен над $\mathcal{P}$ (на самом деле $\mathcal{E}$ — топос Гротендика в силу теоремы 4.46). Дайте явное описание экспоненциального функтора в $\mathcal{E}$ и, следовательно, покажите, что $\mathcal{E}$ не удовлетворяет (IC), даже если допустить (AC) для $\mathcal{P}$.

6. Пусть M — моноид с двумя элементами 1 и e и $e^2 = e$. Покажите, что топос M -множеств удовлетворяет (SS), но не удовлетворяет (SG).

7*. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, X — его объект, и допустим, что у нас имеется мономорфизм $\Omega^X \rightarrow X$. Докажите, что $\mathcal{E}$ вырожден. [Указание. Так как Ω^X инъективен, мономорфизм должен иметь расщепление $X \rightarrow \Omega^X$; теперь рассмотрите $\{x \mid \sqcap (x \in f(x))\}$.] (Сравните [73].)

8*. Пусть N обозначает множество натуральных чисел, $s: N \rightarrow N$ — отображение следования, и пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P}^2$ является топосом Серпинского (пример 4.37(ii)) над $\mathcal{P}$. Рассматривая объекты $N \xrightarrow{1} N$ и $N \xrightarrow{s} N$ топоса $\mathcal{E}$, покажите, что для $\mathcal{E}$ неверна теорема Шрёдера — Бернштейна. Однако докажите, что эта теорема выполняется в любом булевом топосе. [Используйте теорему Тарского о неподвижной точке.]

9. (Исбел [51]). Пусть j и k являются топологиями в топосе $\mathcal{E}$. Пусть $l: \Omega \rightarrow \Omega$ — интерпретация формулы $\forall \omega' ((\omega \leq \omega' \wedge \omega' \in \ulcorner J \urcorner) \Rightarrow \omega' \in \ulcorner K \urcorner)$, где ω, ω' — переменные типа Ω . Докажите, что l — топология. [Указание. Используйте семантику Крипке — Жуаяля для описания класса $\mathcal{E}_L$, а затем используйте утверждение 3.18.] Выведите, что решетка топологий в $\mathcal{E}$ является гейтинговой алгеброй и, в частности, что она дистрибутивна (см. [GV], IV 9.1.14(a)).

10*. Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$. Определим отображение неупорядоченных пар $\text{pr}_X: X \times X \rightarrow \Omega^X$ так:

$$\{ \{x \mid x = x' \vee x = x''\} \},$$

*) С. 173 русского перевода. — Примеч. ред.

а отображение упорядоченных пар Куратовского kr_X — как композицию

$$X \times X \xrightarrow{(\cup, \pi_1, \text{pr}_X)} \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\text{pr}_{\Omega^X}} \Omega^{\Omega^X}$$

Покажите, что kr_X — мономорфизм. [Метод: сначала заметьте, что $\bigcup \cdot \text{kr}_X = \text{pr}_X$ и $\bigcap \cdot \text{kr}_X = \{\}$. π_1 . Теперь покажите, что

$$\mathcal{E} \models \text{pr}_X(\langle x, x' \rangle) = \text{pr}(\langle x, x'' \rangle) \Rightarrow (x'' = x \vee x'' = x')$$

и

$$\mathcal{E} \models (\text{pr}_X(\langle x, x' \rangle) = \text{pr}_X(\langle x, x'' \rangle) \wedge x'' = x) \Rightarrow x = x'.]$$

ГЛАВА 6

ОБЪЕКТЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

6.1. Определение и основные свойства

6.11 Определение (Ловер [71]). Под *объектом натуральных чисел в топосе $\mathcal{E}$* будем понимать такой объект N с морфизмами $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$, что для любой диаграммы $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$ в $\mathcal{E}$ существует единственный морфизм $N \xrightarrow{f} X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow x & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & X & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

коммутативна. $\square$

Пользуясь этим свойством, морфизмы с областью определения N (или, используя экспоненциальное сопряжение, объект вида $N \times N$) можно определять «рекурсивно». Например, имеем

6.12 Определение. Арифметические операции $+$, $\cdot$ и exp: $N \times N \rightarrow N$ определяются, если потребовать, чтобы их экспоненциальная транспозиция $N \rightarrow N^N$ удовлетворяла следующим коммутативным диаграммам:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow \bar{1}_N & \downarrow \bar{+} & & \downarrow \bar{+} \\ & & N^N & \xrightarrow{s^N} & N^N \end{array}$$

[т. е. $o + q = q$, $(sp) + q = s(p + q)$],

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N & & \\ \downarrow o & & \downarrow \bar{\cdot} & & \downarrow \bar{\cdot} & & \\ N & \xrightarrow{N^{(N-1)}} & N^N & \xrightarrow{1_N \times \bar{1}_N} & N^N \times N^N \cong (N \times N)^N & \xrightarrow{+^N} & N^N \end{array}$$

[т. е. $o \cdot q = o$, $(sp) \cdot q = (p \cdot q) + q$] и

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ \downarrow so & & \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ N & \xrightarrow{N^{(k+1)}} & N^N & \xrightarrow{1_N \times 1_N} & N^N \times N^N \cong (N \times N)^N \xrightarrow{N} N^N \end{array}$$

[т. е. $q^o = 1$, $q^{(sp)} = (q^p) \cdot q$]. $\square$

«Обычные рассуждения по индукции» (т. е. оговорка о единственности в определении 6.11) показывают, что эти операции удовлетворяют обычным законам арифметики.

Следующую важную характеристику объектов натуральных чисел в топосе впервые указал Фрейд [FK].

6.13 Предложение. Пусть N — объект натуральных чисел в топосе. Тогда:

(i) $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$ является диаграммой копроизведения. (Следовательно, в частности, s — мономорфизм.)

(ii) $N \xrightarrow{s} N \rightarrow 1$ является диаграммой коуравнителя.

Доказательство. (i) Рассмотрим морфизмы

$$1 \xrightarrow{v_1} 1 \amalg N \xrightarrow{v_2 \begin{pmatrix} o \\ s \end{pmatrix}} 1 \amalg N.$$

Нетрудно видеть, что они превращают $1 \amalg N$ в объект натуральных чисел в $\mathcal{E}$, так как если даны $1 \xrightarrow{x} X \xleftarrow{u} X$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{v_1} & 1 \amalg N & \xrightarrow{v_2 \begin{pmatrix} o \\ s \end{pmatrix}} & 1 \amalg N \\ & \searrow x & \downarrow \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \\ & & X & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

коммутативна тогда и только тогда, когда f — единственный морфизм, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow ux & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & X & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Но из определения ясно, что если объект натуральных чисел существует, то он единствен с точностью до изоморфизма; отсюда имеем изоморфизм $1 \amalg N \xrightarrow{\sim} N$, который должен представлять собой $\begin{pmatrix} o \\ s \end{pmatrix}$, так как именно последний делает соответствующую диаграмму коммутативной.

(ii) Пусть $N \xrightarrow{f} X$ — любой такой морфизм, что $fs = f$. Тогда должно быть $f = (N \rightarrow 1 \xrightarrow{f_0} X)$, так как оба морфизма заставляют быть коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow f_0 & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \xrightarrow{1} & X \end{array}$$

Следовательно, f пропускается (единственным образом, так как $N \rightarrow 1$ — расщепимый эпиморфизм) через $N \rightarrow 1$. $\square$

Прежде чем доказывать утверждение, обратное предложению 6.13, введем специальную терминологию.

Предположим, что нам дан объект X с морфизмами $1 \xrightarrow{x} X \xleftarrow{u} X$; будем говорить, что подобъект $X' \rightarrow X$ (x, u) -замкнут, если существуют (обязательно единственные) морфизмы $1 \xrightarrow{x'} X' \xleftarrow{u'} X'$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{x'} & X' & \xleftarrow{u'} & X' \\ & \searrow x & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \xleftarrow{u} & X \end{array}$$

коммутативна, и что X' (x, u) -рекурсивен, если он (x, u) -замкнут и к тому же $1 \amalg X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix}} X'$ является эпиморфизмом. Если

теперь определить $r: \Omega^X \rightarrow \Omega^X$ как композицию $\Omega^X \xrightarrow{\Gamma x \times \exists u} \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\vee^X} \Omega^X$, то легко видеть, что X' (x, u) -замкнут (соответственно рекурсивен) тогда и только тогда, когда $\Gamma X' \rceil \geq r \cdot \Gamma X' \rceil$ (соответственно $\Gamma X' \rceil = r \cdot \Gamma X' \rceil$). Но очевидно, что r сохраняет порядок, поэтому по теореме Тарского о неподвижной точке (5.50) заключаем, что любой объект X , обладающий вышеуказанными свойствами, имеет рекурсивный подобъект.

6.14 Теорема (Фрейд). Пусть N — объект топоса $\mathcal{E}$, снабженный такими морфизмами $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$, что $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$ является копроизведением, а $N \xrightarrow{s} N \rightarrow 1$ — коуравнителем. Тогда:

(i) Любой (o, s) -замкнутый подобъект из N представляет собой весь N (т. е. N удовлетворяет пятому постулату Пеано).

(ii) N является объектом натуральных чисел в $\mathcal{E}$.

Доказательство. (i) Пусть $N' \xrightarrow{i} N$ является (o, s) -замкнутым подобъектом. Применяя приведенные выше рассуждения к $1 \xrightarrow{o'} N \xrightarrow{s'} N'$, мы имеем право допустить, что сам N' (o, s) -рекурсивен.

Пусть теперь $S \xrightarrow{(a,b)} N \times N$ является объединением подобъектов $N \xrightarrow{(1,s)} N \times N$ и $N \xrightarrow{(s,1)} N \times N$. Покажем сначала, что N' S -замкнут (в смысле леммы 5.5.1). Однако ясно, что

$$\mathcal{E} = (n \in \ulcorner N' \urcorner \Rightarrow s(n) \in \ulcorner N' \urcorner)$$

и

$$\mathcal{E} \models s(n) \in \ulcorner N' \urcorner \Rightarrow (s(n) = o \vee \exists n' (n' \in \ulcorner N' \urcorner \wedge s(n) = s(n'))).$$

Однако из данной диаграммы копроизведения получаем

$$\mathcal{E} \models \ulcorner (s(n) = o) \urcorner$$

и

$$\mathcal{E} \models (s(n) = s(n') \Rightarrow n = n');$$

поэтому заключаем

$$\mathcal{E} \models s(n) \in \ulcorner N' \urcorner \Rightarrow n \in \ulcorner N' \urcorner.$$

Таким образом, N' S -замкнут.

Теперь $N \rightarrow 1$ является коуравнителем для $S \xrightarrow{a} N$, так как S содержит график морфизма s ; следовательно, в силу леммы 5.5.1 N' замкнут по ядерной паре для $N \rightarrow 1$, т. е. по максимальному отношению $N \times N \xrightarrow{1} N \times N$. Но поскольку $N' \rightarrow 1$ является эпиморфизмом (ведь N' имеет глобальный элемент), можно сразу заключить, что $N' \rightarrow N$ должен быть эпиморфизмом.

(ii) Предположим, что дана диаграмма $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$. Применяя к $1 \xrightarrow{(o,x)} N \times X \xrightarrow{s \times u} N \times X$ рассуждения, предшествовавшие данной теореме, получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{y} & Y & \xrightarrow{r} & Y \\ & \searrow (w,x) & \downarrow (a,b) & & \downarrow (a,b) \\ & & N \times X & \xrightarrow{s \times u} & N \times X \end{array}$$

в которой $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ — эпиморфизм. Покажем, что Y является графиком морфизма $N \rightarrow X$, т. е., что a — изоморфизм; очевидно, этого достаточно, чтобы констатировать существование, требуемое в определении 6.11.

Но то, что a является эпиморфизмом, сразу следует из (i), так как его образ — это (o, s) -замкнутый подобъект объекта N ;

чтобы показать, что он является мономорфизмом, предположим, что $N' \xrightarrow{i} N$ представляет собой экстенционал формулы $\exists! y (a(y) = n)$. Теперь, поскольку $\text{im}(v) \leq a^{-1}(\text{im}(s))$, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{v} & Y \\ \downarrow & & \downarrow a \\ 1 & \xrightarrow{o} & N \end{array}$$

является декартовым квадратом, т. е. $\mathcal{E} \models a(y) = o \Leftrightarrow y = y_*$ и поэтому $o \in \ulcorner N' \urcorner$. Аналогично можно показать, что $\mathcal{E} \models n \in \ulcorner N' \urcorner \Rightarrow S(n) \in \ulcorner N' \urcorner$; таким образом, N' (o, s) -замкнут и, следовательно, $N' = N$, т. е. a — изоморфизм.

Наконец, чтобы установить единственность, требуемую в определении 6.11, предположим, что оба морфизма $N \xrightarrow{f} X$ рекурсивно определены диаграммой $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$. Тогда легко видно, что уравниватель морфизмов f и f' (o, s) -замкнут и поэтому $f = f'$. $\square$

6.15 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а X — такой объект из $\mathcal{E}$, что $1 \sqcup X \cong X$. Тогда существует подобъект объекта X , являющийся объектом натуральных чисел в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $1 \xrightarrow{x} X$ и $X \xrightarrow{u} X$ — морфизмы, определяющие данный изоморфизм. Пусть $X \xrightarrow{h} Y$ является коуравнителем для u и 1_X и пусть y обозначает глобальный элемент h_X из Y . Теперь образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow h \\ 1 & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

Мы видим, что поскольку u — морфизм над Y , данный изоморфизм можно интерпретировать как изоморфизм $h \cong y \sqcup h$ в $\mathcal{E}/Y$. Но y — мономорфизм, поэтому $y^*(y) = 1$; следовательно, после применения y^* к этому изоморфизму получаем $N \cong 1 \sqcup N$ в $\mathcal{E}$. Но мы имеем также

$$\text{coeq}(y^*(u), 1_N) \cong y^*(\text{coeq}(u, 1_h)) \cong y^*(1_Y) \cong 1;$$

поэтому в силу 6.14 (ii) N является объектом натуральных чисел в $\mathcal{E}$. $\square$

6.16 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — топосы, а $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — функтор, сохраняющий 1 и конечные копределы. Если $1 \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$ является объектом натуральных чисел в $\mathcal{E}$, то

$1 \cong T1 \xrightarrow{T_0} TN \xrightarrow{T_s} TN$ является объектом натуральных чисел в $\mathcal{F}$.
Доказательство. Немедленно следует из 6.13 и 6.14 (ii). $\square$

Необходимо отметить, что если имеется функтор R , сопряженный справа к функтору T (т. е. если T является обратным образом геометрического морфизма), то предложение 6.16 можно доказать непосредственно на основе определения объекта N , не прибегая к теореме 6.14, ввиду того, что если даны $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$ в $\mathcal{F}$, то определение можно применить к $1 \cong R1 \xrightarrow{Rx} RX \xrightarrow{Ru} RX$ и получить морфизм $N \rightarrow RX$, а затем транспозицией получить $TN \rightarrow X$ с требуемыми свойствами.

Важным применением предложения 6.13 является определение структуры порядка на объекте N . Примечательной особенностью этого упорядочения является то, что если даже тоpos $\mathcal{E}$ не булев, этот объект натуральных чисел в определенной степени сохраняет свойство булевости, состоящее в том, что у всех его «интересных» объектов имеются дополнения. Это станет еще более очевидным далее, в § 6.2.

6.17 Предложение. (i) Морфизм $N \times N \xrightarrow{(\pi_1, +)} N \times N$ является мономорфизмом (т. е. $(N, +, o)$ является моноидом с сокращением) и определяет антисимметричный частичный порядок на N , который будет обозначаться $W \rightarrow N \times N$.

(ii) Аналогично, $N \times N \xrightarrow{(\pi_1, s+)} N \times N$ является мономорфизмом и определяет строгое упорядочение на N , которое будет обозначаться $S \rightarrow N \times N$.

(iii) Имеются разложения и копроизведения $W \cong R \amalg \Delta$ и $N \times N \cong S \amalg \Delta \amalg S^{\text{op}}$, где Δ , как обычно, обозначает диагональный подобъект.

Доказательство. (i) Пусть $N' \rightarrow N$ является расширением формулы

$$\forall n' \forall n'' ((n + n' = n + n'') \Rightarrow (n' = n'')).$$

Тогда в силу определения операции $+$ и того, что s — мономорфизм, можно легко увидеть, что $o \in \ulcorner N' \urcorner$ и

$$\mathcal{E} \models n \in \ulcorner N' \urcorner \Rightarrow s(n) \in \ulcorner N' \urcorner,$$

поэтому $N' = N$. Но это равносильно утверждению о том, что $(\pi_1, +)$ — мономорфизм.

Чтобы показать, что отношение W рефлексивно, заметим, что $N \cong N \times 1 \xrightarrow{1 \times o} N \times N$ обеспечивает пропускание диагонали через саму себя. Транзитивность аналогично вытекает из существования отображения

$$W \times_N W \xrightarrow{(\pi_1 \pi_1, + (\pi_2 \pi_1, \pi_2 \pi_2))} N \times N$$

и ассоциативности операции $+$. А антисимметричность следует из того, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (o, o) & & \downarrow o \\ N \times N & \xrightarrow{\quad + \quad} & N \end{array}$$

декартов, а это, в свою очередь, легко следует из разложения в копроизведения $N \times N \cong 1 \amalg (N \times 1) \amalg (1 \times N) \amalg (N \times N)$.

(ii) немедленно следует из (i) и того, что s — мономорфизм.

(iii) Копроизведение $W \cong S \amalg \Delta$ сразу получается из 6.13 (i). Из него же и из антисимметричности отношения W выводим, что три подобъекта s , Δ и S^{op} дизъюнкты; поэтому остается доказать, что их объединение составляет $N \times N$ целиком. Будем писать $\phi(n, n')$ вместо формулы

$$(n < n') \vee (n = n') \vee (n > n')$$

и пусть $N' \rightarrow N$ является экстенсиналом формулы $\forall n' \phi(n, n')$. Теперь нетрудно увидеть, что

$$\mathcal{E} \models o \leq n',$$

$$\mathcal{E} \models n > n' \Rightarrow s(n) > n',$$

$$\mathcal{E} \models n = n' \Rightarrow s(n) > n'$$

и

$$\mathcal{E} \models n < n' \Rightarrow (s'(n) < n' \vee s(n) = n'),$$

откуда легко следует, что $N' (o, s)$ -замкнут. $\square$

До сих пор мы рассматривали объекты натуральных чисел в терминах рекурсивного определения морфизмов в топосе, но в математике часто встречается другой способ использования идеи рекурсии, а именно, построение объектов в топосе $\mathcal{E}/N$. Точнее говоря, предположим, что дан объект X из $\mathcal{E}$ и «процесс» T построения новых объектов из старых. С определенной долей вольности мы будем называть эти сведения «данными рекурсии в $\mathcal{E}$ ». Тогда мы желаем найти объект $F \rightarrow N$ из $\mathcal{E}/N$, который интернализует понятие последовательных $(X, TX, TTX, \dots)$, т. е. так, что $o^*(F) \cong X$ и $s^*(F) \cong T_N(F)$, где T_N обозначает процесс T , «применяемый по слоям» к объектам из $\mathcal{E}/N$.

Теперь о случае топоса $\mathcal{S}$, который не имеет внутренней структуры. Ясно, что можно решить данную проблему, если T — любая функция. Но если мы рассматриваем топос $\mathcal{E}$ более общей природы, то, очевидно, существенно, чтобы T «принимал во внимание внутреннюю структуру топоса $\mathcal{E}$ ». Далее в § 6.3 будет приведена теорема существования, которая говорит, что любая проблема рекурсии в хорошо определенном классе имеет решение; в данный момент мы приводим теорему единственно-

сти (восходящую к Рейту), которая имеет много полезных применений.

Напомним, что если $\mathcal{E}$ — любая декартово замкнутая категория, то функтор $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ называется *сильным*, если он является $\mathcal{E}$ -функтором в смысле замкнутых категорий [160], т. е. если нам даны морфизмы $T_{X,Y}: Y^X \rightarrow TY^{TX}$ для каждой пары объектов (X, Y) из $\mathcal{E}$, которые интернализуют действие функтора T на морфизмы из $\mathcal{E}$.

6.18 Лемма. Пусть $F \xrightarrow{\gamma} N$ является объектом из $\mathcal{E}/N$, и предположим, что даны:

(i) глобальный элемент $1 \xrightarrow{x} o^*(\gamma)$ в $\mathcal{E}$,

(ii) морфизм $\gamma \xrightarrow{t} s^*(\gamma)$ в $\mathcal{E}/N$.

Тогда для γ в $\mathcal{E}/N$ существует единственный глобальный элемент f (т. е. сечение морфизма γ в $\mathcal{E}$) такой, что $o^*(f) = x$ и $s^*(f) = tf$.

Доказательство. Определим f диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\
 \downarrow x & & \downarrow f & & \downarrow f \\
 o^*(\gamma) & \xrightarrow{\quad} & F & \xrightarrow{t} & s^*(F) \xrightarrow{\quad} F \\
 \downarrow \cdot & & \downarrow \gamma & \nearrow s^*(\gamma) & \downarrow \gamma \\
 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N
 \end{array}$$

Тогда $\gamma f = 1_N$ в силу свойства единственности, которое утверждается в определении 6.11, и очевидно, что f — единственный элемент из γ , удовлетворяющий данным условиям. $\square$

6.19 Теорема (Рейт). Пусть X — объект из $\mathcal{E}$, а $T: \mathcal{E}/N \rightarrow \mathcal{E}/N$ — сильный функтор. Тогда, если существует объект $F \xrightarrow{\gamma} N$ из $\mathcal{E}/N$, для которого $o^*(\gamma) \cong X$ и $s^*(\gamma) \cong T(\gamma)$, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Предположим, что γ, γ' — два таких объекта из $\mathcal{E}/N$. Образует объект изоморфизмов $\text{Iso}(\gamma, \gamma')$ в $\mathcal{E}/N$ (см. 4.56 (iv)); ясно, что свойство силы функтора T индуцирует морфизм $T_{\gamma, \gamma'}: \text{Iso}(\gamma, \gamma') \rightarrow \text{Iso}(T\gamma, T\gamma')$. Функторы замены базы o^* и s^* , будучи логическими, сохраняют объекты изоморфизмов; поэтому имеем элемент

$$1 \xrightarrow{\bar{1}_X} \text{Iso}(X, X) \cong o^*(\text{Iso}(\gamma, \gamma'))$$

в $\mathcal{E}$ и морфизм

$$\text{Iso}(\gamma, \gamma') \xrightarrow{T_{\gamma, \gamma'}} \text{Iso}(T\gamma, T\gamma') \cong s^*(\text{Iso}(\gamma, \gamma'))$$

в $\mathcal{E}/N$.

Применяя построение леммы 6.18, получаем канонический элемент объекта $\text{Iso}(\gamma, \gamma')$, т. е. канонический изоморфизм $\gamma \xrightarrow{\sim} \gamma'$ в $\mathcal{E}/N$. $\square$

6.2. Конечные кардиналы

Один из важных способов применения объектов натуральных чисел состоит в том, что они позволяют определить «конечные объекты» в топосе. В этом параграфе мы исследуем основные свойства таких объектов.

6.21 Определение (Бенабу [7]). Пусть $p: 1 \rightarrow N$ — натуральное число в топосе $\mathcal{E}$ (т. е. глобальный элемент объекта натуральных чисел). Под *кардиналом* числа p понимаем объект $[p]$ в декартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc}
 [p] & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 N \times N & \xrightarrow{+} & N \xrightarrow{s} N
 \end{array}$$

Будем представлять $[p]$ как финитный объект с p элементами; ясно, что в $\mathcal{P}$ это как раз множество $\{ \langle a, b \rangle \in N \times N \mid a + b + 1 = p \}$. На самом деле в любом топосе нетрудно доказать, что композиция $[p] \rightarrow N \times N \xrightarrow{\pi_1} N$ является мономорфизмом и отождествляет $[p]$ с сегментом вниз от p для отношения строгого порядка из предложения 6.17.

6.22 Лемма. Пусть $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — функтор, сохраняющий конечные пределы и копределы (т. е. логический функтор, или обратный образ геометрического морфизма), а p — натуральное число в $\mathcal{E}$. Тогда $T([p]) \cong [T(p)]$.

Доказательство. Из предложения 6.16 мы знаем, что T сохраняет N ; следовательно, он сохраняет рекурсивно определенные морфизмы, включая $+$, и поэтому сохраняет декартов квадрат определения 6.21. $\square$

Конечные кардиналы складываются, умножаются и возводятся в степень в соответствии с нашими ожиданиями.

6.23 Теорема. Пусть p, q — натуральные числа в топосе $\mathcal{E}$. Тогда имеются изоморфизмы:

- (i) $[0] \cong 0$,
- (ii) $[sp] \cong [p] \sqcup 1$,
- (iii) $[p + q] \cong [p] \sqcup [q]$,
- (iv) $[p \cdot q] \cong [p] \times [q]$,
- (v) $[q^p] \cong [q]^{[p]}$.

Доказательство. Формула (i) немедленно следует из 6.13 (i) и дизъюнктивности копроизведений в $\mathcal{E}$. Чтобы дока-

зять (ii), заметим, что поскольку s — мономорфизм, $[sp]$ является расслоенным произведением для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \downarrow p \\ N \times N & \xrightarrow{+} & N \end{array}$$

Но опять в силу 6.13 (i) $(N \times N \xrightarrow{+} N)$ можно заменить на

$$(N \amalg 1) \times N \cong (N \times N) \amalg N \xrightarrow{\begin{pmatrix} s^+ \\ 1_N \end{pmatrix}} N;$$

поэтому требуемый результат следует из универсальности копроизведений в $\mathcal{E}$.

Теперь из (i) и (ii) следует, что кардинал общего натурального числа n (которое, конечно, является объектом $N \times N \xrightarrow{s^+} N$ категории $\mathcal{E}/N$) удовлетворяет данным о рекурсии

$$o*[n] \cong 0, \quad s*[n] \cong [n] \amalg 1.$$

Так как функтор замены базы $p^*: \mathcal{E}/N \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет копроизведения, произведения и экспоненциалы, то, чтобы доказать (iii)–(v), достаточно рассмотреть пару натуральных чисел вида (n, N^*q) в $\mathcal{E}/N$, где q — натуральное число в $\mathcal{E}$. Но что касается утверждения (iii), то видно, что объекты по обе стороны изоморфизма удовлетворяют следующим данным рекурсии:

$$o*[n + N^*q] \cong [o + q] \cong [q],$$

$$S*[n + N^*q] \cong [sn + N^*q] \cong$$

$$\cong [s(n + N^*q)] \cong [n + N^*q] \amalg 1$$

и

$$o*([n] \amalg [N^*q]) \cong [o] \amalg [q] \cong o \amalg [q] \cong [q],$$

$$s*([n] \amalg [N^*q]) \cong [sn] \amalg [N^*q] \cong [n] \amalg 1 \amalg [N^*q] \cong [n] \amalg [N^*q] \amalg 1.$$

Но легко видеть, что функтор $(-)\amalg 1$ является сильным в любом топосе (его свойство силы $Y^X \rightarrow (Y \amalg 1)^{(X \amalg 1)}$ можно определить как транспозицию изоморфизма

$$Y^X \times (X \amalg 1) \cong (Y^X \times X) \amalg (Y^X \times 1) \xrightarrow{\text{eval}_{\pi_2}} Y \amalg 1,$$

и, таким образом, по теореме 6.19 получаем изоморфизм

$$[n + N^*q] \cong [n] \amalg [N^*q]$$

в $\mathcal{E}/N$, как и требовалось.

Доказательства утверждений (iv) и (v) аналогично следуют из рекурсивных определений умножения и возведения в степень, которые даны в определении 6.12, и из того, что функторы $(-)\amalg [q]$ и $(-)\times [q]$ сильны. $\square$

Одним из свойств конечных кардиналов является то, что операция возведения в степень, являющаяся кардиналом, ведет себя во многих отношениях так же, как конечный предел. Два следующих предложения иллюстрируют это явление.

6.24 Предложение. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{F}$ — функтор между топосами, сохраняющий конечные пределы и копределы, X — объект из $\mathcal{E}$, а p — натуральное число в $\mathcal{E}$. Тогда $T(X^{[p]}) \cong TX^{T[p]}$.

Доказательство. Рассмотрим объект $(N^*X)^{[n]}$ из $\mathcal{E}/N$. По теореме 6.23 он удовлетворяет данным рекурсии

$$o*((N^*X)^{[n]}) \cong X^{[o]} \cong X^o \cong 1$$

и

$$s*((N^*X)^{[n]}) \cong (N^*X)^{([n] \amalg 1)} \cong (N^*X)^{[n]} \times N^*X.$$

Но T , рассматриваемый как функтор $\mathcal{E}/N \rightarrow \mathcal{F}/TN$, сохраняет эти данные, а потому имеем $T((N^*X)^{[n]}) \cong T(N^*X)^{T[n]}$ по теореме 6.19 и лемме 6.22. Так как T сохраняет декартовы квадраты, квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}/N & \xrightarrow{T} & \mathcal{F}/TN \\ \downarrow p^* & & \downarrow (Tp)^* \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{T} & \mathcal{F} \end{array}$$

коммутативен с точностью до изоморфизма. Поэтому после применения функтора $(Tp)^*$ к вышеприведенному изоморфизму получаем требуемый результат. $\square$

6.25 Предложение. Пусть p — натуральное число в топосе $\mathcal{E}$. Тогда функтор $(-)^{[p]}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет рефлексивные коуравнители.

Доказательство. Пусть $X \rightrightarrows Y \rightarrow Z$ — диаграмма рефлексивного коуравнителя в $\mathcal{E}$. Как обычно, достаточно рассмотреть случай $p = n$ и затем применить функтор замены базы p^* . Поэтому пусть $(N^*Y)^{(n)} \rightarrow W$ — коуравнитель корефлексивной пары $(N^*X)^{[n]} \rightrightarrows (N^*Y)^{[n]}$ в $\mathcal{E}/N$. Теперь в силу упражнения 1 к главе 0 W удовлетворяет данным рекурсии

$$o*W \cong \text{coeq}(1 \rightrightarrows 1) \cong 1$$

и

$$s*W \cong \text{coeq}(N^*X^{[n]} \times N^*X \rightrightarrows N^*Y^{[n]} \times N^*Y) \cong W \times N^*Z.$$

Следовательно, по теореме 6.19 $W \cong (N^*Z)^{[n]}$, что и требовалось. $\square$

Отметим, что из предложения 6.25 следует, что конечные кардиналы внутренне проективны (5.24 (i)), так как каждый

эпиморфизм в $\mathcal{E}$ можно выразить как уравнитель рефлексивной пары (конкретнее, его собственной ядерной пары).

«Булевость» отношения порядка на N , как оно описано в предложении 6.17, проявляется в структуре мономорфизмов между финитными кардиналами.

6.26 Лемма. Пусть p — натуральное число в топосе. Тогда:

(i) $[p]$ разрешим (см. упражнение 3 к главе 5), т. е. диагональ $[p] \xrightarrow{\Delta} [p] \times [p]$ имеет дополнение.

(ii) Если $[p] \rightarrow 1$ — мономорфизм, то у него имеется дополнение.

(iii) Любой подобъект из $[p]$, имеющий дополнение, является (с точностью до изоморфизма) конечным кардиналом.

Доказательство. (i) В 6.17 (iii) мы видели, что объект N разрешим. Но, как легко увидеть, свойство разрешимости наследуется конечными произведениями и подобъектами (последними, так как мономорфизм $X \xrightarrow{f} Y$ влечет то, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

декартов). А по определению $[p]$ является подобъектом из $N \times N$.

(ii) Пусть p — натуральное число, и определим подобъекты U_0, U_1, U_2 объекта 1 как экстенционалы формул « $p < so$ », « $p = so$ » и « $p > so$ » соответственно. Тогда из 6.17 (iii) следует, что $U_0 \sqcup U_1 \sqcup U_2 \cong 1$. Но после подъема к $\mathcal{E}/U_2$ утверждение $p \geq so$ становится истинным, и у нас имеется мономорфизм $U_2^* [ss0] \cong U_2 \sqcup U_2 \xrightarrow{\Delta} [p]$. Следовательно, если $[p] \xrightarrow{\Delta} 1$ — мономорфизм, у нас должно быть $U_2 \cong 0$, и поэтому $U_0 \sqcup U_1 \cong 1$. Но теперь легко видеть, что $U_1^* [p] \cong 1$ и $U_0^* [p] \cong 0$; таким образом, мы должны иметь $[p] \cong U_1$.

(iii) Рассмотрим объект $(M \xrightarrow{\gamma} N) = (1 \sqcup 1)^{[n]}$ из $\mathcal{E}/M$. В топосе $\mathcal{E}/M$ имеем общий морфизм $\gamma^* [n] \rightarrow 1 \sqcup 1$ и, следовательно, общую копроизводную $\gamma^* [n] \cong X \sqcup Y$. Потому достаточно найти натуральное число p в $\mathcal{E}/M$, кардинал которого изоморфен X . Но такое натуральное число соответствует морфизму $M \xrightarrow{p} N$ в $\mathcal{E}$ или, что то же самое, элементу объекта $N^{(2^{[n]})}$ в $\mathcal{E}/N$ (где мы пишем 2 вместо $1 \sqcup 1$ и N обозначает объект натуральных чисел из $\mathcal{E}/N$, т. е. объект N^*N). Мы можем построить элемент этого объекта по методу леммы 6.18, используя данные

$$1 \xrightarrow{o} N \cong N^1 = o^* (N^{(2^{[n]})})$$

и

$$N^{(2^{[n]})} \xrightarrow{\theta} N^{(2^{[n]} \times 2)} \cong s^* (N^{(2^{[n]})}),$$

где транспозицией для θ является композиция

$$N^{(2^{[n]})} \times 2^{[n]} \times 2 \xrightarrow{(cv, \pi_1, \binom{so}{o}, \pi_2)} N \times N \xrightarrow{+} N.$$

Затем можно непосредственно убедиться, что $[p]$ удовлетворяет тем же данным рекурсии, что и X . $\square$

В § 6.4 мы увидим, что объект M , построенный в 6.26 (iii), на самом деле является свободным моноидом, который порожден посредством $1 \sqcup 1$, а p — это на самом деле гомоморфизм моноидов $M \rightarrow (N, +, 0)$, индуцированный посредством

$\binom{so}{o} : 1 \sqcup 1 \xrightarrow{o} N$. Следует также отметить, что для любого моноида (G, m, e) в $\mathcal{E}$ коединицу сопряжения свободных моноидов, относящегося к G , можно рассматривать как морфизм $N^*G^{[n]} \xrightarrow{\mu_n} N^*G$ в $\mathcal{E}/N$, и подъем вдоль $1 \xrightarrow{p} N$ дает морфизм $G^{[p]} \xrightarrow{\mu_p} G$ в $\mathcal{E}$, который интернализует операцию «умножения наборов по p элементов из G » в том смысле, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G^{[o]} & \xrightarrow{\mu_o} & G \\ \downarrow \downarrow & \nearrow e & \\ 1 & & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} G^{[sp]} & \xrightarrow{\mu_{sp}} & G \\ \downarrow \downarrow & & \uparrow m \\ G^{[p]} \times G & \xrightarrow{\mu_p \times 1} & G \times G \end{array}$$

коммутативны.

6.27 Теорема. Пусть $X \xrightarrow{f} [p]$ — морфизм в $\mathcal{E}$, область значений которого представляет собой конечный кардинал. Тогда X изоморфен конечному кардиналу в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда f изоморфен некоторому конечному кардиналу в $\mathcal{E}/[p]$.

Доказательство. (i) Положим $X \cong [q]$ для некоторого натурального числа q . Теперь декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} [q] & \xrightarrow{f} & [p] \\ \downarrow (1, f) & & \downarrow \Delta \\ [q] \times [p] & \xrightarrow{f \times 1} & [p] \times [p] \end{array}$$

в $\mathcal{E}$ можно переинтерпретировать как декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & 1_{[p]} \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ [p] * [q] & \xrightarrow{[p] * f} & [p] * [p] \end{array}$$

в $\mathcal{E}/[p]$, где y — общий элемент из $[p]$. Но в силу 6.26 (i) y имеет дополнение. Следовательно, дополнение имеется у x , и поэтому в силу 6.26 (iii) f изоморфен конечному кардиналу в $\mathcal{E}/[p]$.

(ii) Обратно, пусть $[p] \xrightarrow{r} N$ — натуральное число в $\mathcal{E}/[p]$, кардинал которого изоморфен морфизму f . Тогда простая индукция по p показывает, что X изоморфен кардиналу из $1 \xrightarrow{F} N^{1[p]} \xrightarrow{\mu} N$, где μ определяется с использованием моноидной структуры $(N, +, o)$. $\square$

6.28 Следствие. *Расслоенное произведение конечных кардиналов является конечным кардиналом.*

Доказательство. Предположим, что имеется декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & [p] \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ [q] & \xrightarrow{k} & [r] \end{array}$$

в $\mathcal{E}$. Тогда в силу (i) из доказательства теоремы 6.27 h — конечный кардинал в $\mathcal{E}/[r]$ (изоморфен ему), поэтому в силу леммы 6.22 $g \cong k^*(h)$ — финитный кардинал в $\mathcal{E}/[q]$. Следовательно, в силу (ii) из доказательства теоремы 6.27 он же является конечным кардиналом в $\mathcal{E}$. $\square$

6.29 Теорема. Пусть $\mathcal{E}_{fc}$ обозначает полную подкатегорию из $\mathcal{E}$, объектами которой являются конечные кардиналы. Тогда $\mathcal{E}_{fc}$ — топос и удовлетворяет (AC), а функтор включения $\mathcal{E}_{fc} \rightarrow \mathcal{E}$ является логическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ — булев топос.

Доказательство. Из следствия 6.28 и из того, что $\{so\} \cong 1$, получаем, что $\mathcal{E}_{fc}$ имеет конечные пределы, а функтор включения сохраняет их. Согласно же 6.23 (v) $\mathcal{E}_{fc}$ имеет экспоненциалы, и функтор включения сохраняет их. Сочетая 6.26 (ii) и (iii) с теоремой 6.27, выводим, что подобъекты кардинала $[p]$, являющиеся кардиналами, представляют собой в точности его подобъекты, имеющие дополнения. Поэтому $so[ss] \cong 1$ и 1 — классификатор подобъектов для $\mathcal{E}_{fc}$. Но 1 и 1

является классификатором подобъектов для $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ булев.

Наконец, из замечания, следующего за предложением 6.25, вытекает, что $\mathcal{E}_{fc}$ удовлетворяет (IC); поэтому согласно следствию 5.28 достаточно показать, что 1 проективен в $\mathcal{E}_{fc}$, т. е. что любой кардинал с глобальным носителем имеет глобальный элемент. Но если у $[p]$ имеется глобальный носитель, то в силу доказательства утверждения (ii) леммы 6.26 легко видно, что формула « $p \geq so$ » верна, и, следовательно, имеется (единственное) натуральное число q такое, что $so + q = p$. Тогда у $[p]$

имеется глобальный элемент $1 \cong [so] \xrightarrow{v} [so] \sqcup [q] \cong [p]$. $\square$

Следует, однако, отметить, что даже в случае, когда $\mathcal{E}$ является булевым, категория $\mathcal{E}_{fc}$ не обязательно отражает внутреннюю структуру $\mathcal{E}$. Например, если G — группа, то объектом натуральных чисел в $\mathcal{P}^G$ является множество натуральных чисел с тривиальным G -действием, и поэтому каждый конечный кардинал в $\mathcal{P}^G$ имеет тривиальное G -действие. Таким образом, $(\mathcal{P}^G)_{fc}$ эквивалентна $\mathcal{P}_f$, а не $(\mathcal{P}_f)^G$, как можно было бы надеяться. Чтобы обнаружить такой подтопос в $\mathcal{P}^G$, следует использовать либо понятие локальной конечности, развиваемое далее в § 8.4, либо понятие конечности по Куратовскому, описанное в § 9.1.

6.3. Классификатор объектов

В предыдущем параграфе категория конечных кардиналов в топосе $\mathcal{E}$ рассматривалась как внешняя категория; данный параграф будет посвящен изучению «той же самой» категории, рассматриваемой как внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Из леммы 6.22

сразу следует, что объект $[n] = (N \times N \xrightarrow{so} N)$ из $\mathcal{E}/N$ можно рассматривать как индексированное объединение всех конечных кардиналов в $\mathcal{E}$, и поэтому категория $\text{Full}_{\mathcal{E}}([n])$, определенная, как в примере 2.38, «интернализует» категорию $\mathcal{E}_{fc}$ из теоремы 6.29 в том смысле, что для любого объекта X из $\mathcal{E}$ (внешняя) категория X -элементов из $\text{Full}_{\mathcal{E}}([n])$ изоморфна категории $(\mathcal{E}/X)_{fc}$. Будем писать E_{fin} вместо $\text{Full}_{\mathcal{E}}([n])$; из теоремы 6.29 следует, что E_{fin} на самом деле является внутренним топосом в $\mathcal{E}$ (оставляем точное доказательство этого читателю!).

В данный момент кажется удобным ввести соглашение об обозначениях, значительно упрощающее выражения, с которыми мы должны будем работать в этом и последующих параграфах. Это соглашение состоит просто в том, что когда мы работаем в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ для некоторого фиксированного $\mathcal{E}$, мы больше не различаем объект X из $\mathcal{E}$ и соответствующий «постоянный объект»

f^*X в $\mathcal{E}$ -топосе $(\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E})$, если это не требуется для устранения двусмысленности. (Это можно считать аналогичным соглашению, по которому отождествляют элемент a кольца A с элементом $a \cdot 1_B$ в произвольной A -алгебре B .) Так, например, объект из $\mathcal{E}/N$, до сих пор обозначавшийся $(N^*X)^{[n]}$, будет далее обозначаться просто $X^{[n]}$.

6.31 Лемма. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — топосы с объектами натуральных чисел, а $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — точный функтор. Тогда $T(E_{fin}) \cong E_{fin}$.

Доказательство. Из утверждений 6.22 и 6.24 мы знаем, что T сохраняет $[n]$ и все конструкции, вовлеченные в определение E_{fin} (в частности, экспоненциал $[\pi_2^*n][\pi_1^*n]$, использованный для построения объекта морфизмов, см. пример 2.38). $\square$

6.32 Предложение. Имеется эквивалентность категорий:

$$\mathcal{E} \simeq \text{Flat}(E_{fin}^{op}, \mathcal{E}).$$

Доказательство. Если дан объект X из $\mathcal{E}$, то определение предпучок HX на E_{fin} равенством

$$(HX_0 \rightarrow N) = X^{[n]}$$

с действием категории E_{fin} , заданным внутренним отображением композиции

$$[\pi_2^*n][\pi_1^*n] \times X[\pi_2^*n] \rightarrow X[\pi_1^*n]$$

в $\mathcal{E}/N \times N$. Тогда можно легко увидеть, что U -элементы из HX_0 (соответственно из HX_1) соответствуют морфизмам $[p] \rightarrow X$ (соответственно коммутативным треугольникам

$$\begin{array}{ccc} [p] & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ [q] & & \end{array}$$

в $\mathcal{E}/U$, где p и q — произвольные натуральные числа в $\mathcal{E}/U$. Поэтому, чтобы проверить, что HX фильтруется, достаточно показать, что $\mathcal{E}_{fc}$ имеет конечные пределы, а функтор включения $\mathcal{E}_{fc} \rightarrow \mathcal{E}$ их сохраняет. Теперь должно быть ясно, что теорема 6.29 влечет справедливость первой половины этого утверждения. К несчастью, нельзя прямо вывести его вторую половину, если $\mathcal{E}$ не окажется булевым. Однако то, что начальный объект и копроизведения сохраняются, сразу следует из утверждений (i) и (iii) теоремы 6.23. Доказательство того, что сохраняются коуравнители, представляет собой бесхитростное, но достаточно утомительное рассуждение по индукции, подобное рассуждению из 6.26 (iii). Таким образом, HX является плоским предпучком на E_{fin} .

Обратно, пусть S является плоским предпучком на E_{fin} , и предположим, что $V(S)$ получается подъемом $S_0 \rightarrow N$ вдоль $1 \xrightarrow{S_0} N$. Тогда, если применить стирающий функтор $\mathcal{E}^{E_{fin}^{op}} \rightarrow \mathcal{E}/N$ к изоморфизму $S \cong Y(E_{fin}) \otimes_{E_{fin}} S$, то получим

$$(S_0 \rightarrow N) \cong G \otimes_{E_{fin}} S,$$

где $N \xrightarrow{G} E_{fin}$ — профунктор из дискретной категории N в E_{fin} , полученный «стиранием» левого действия категории E_{fin} на профунктор Йонеды $Y(E_{fin})$. Но теперь нетрудно увидеть, что $G \cong R(so)^{[n]}$, где $R: \mathcal{E}/N \rightarrow \mathcal{E}^{E_{fin}^{op}}$ сопряжен слева к стирающему функтору, а поскольку S плоский, функтор $(-)\otimes S$ сохраняет возведение в степень, являющуюся конечным кардиналом, по лемме 4.32 и предложению 6.24. Поэтому

$$(S_0 \rightarrow N) \cong (R(so) \otimes S)^{[n]} \cong V(S)^{[n]},$$

и мы можем изгнать отображения E_{fin} -действия из всех вышеприведенных эквивалентностей и, таким образом, расширить все рассмотренные изоморфизмы в $\mathcal{E}/N$ до изоморфизма $S \cong H(V(S))$ в $\mathcal{E}^{E_{fin}^{op}}$. Но ясно, что для любого X в $\mathcal{E}$ имеем $V(HX) \cong X^{[so]} \cong X$, так что H и V определяют требуемую эквивалентность категорий. $\square$

6.33 Теорема (Рейт). Существует такая внутренняя диаграмма U на E_{fin} , что функтор

$$\text{Top}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}^{E_{fin}}) \rightarrow \mathcal{F}; \quad g \mapsto g^*(U)$$

является эквивалентностью категорий для любого $\mathcal{E}$ -топоса $\mathcal{F}$. Иными словами, $\mathcal{E}^{E_{fin}}$ (который отныне обозначается $\mathcal{E}[U]$) представляет собой классификатор объектов для $\text{Top}/\mathcal{E}$ (см. пример 4.37 (iv)). Более того, общим объектом U является «функтор включения $E_{fin} \rightarrow \mathcal{E}$ », определенный, как в примере 2.38.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ является $\mathcal{E}$ -топосом. Тогда имеем следующие эквивалентности:

$$\text{Top}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}[U]) \simeq \text{Flat}(f^*E_{fin}^{op}, \mathcal{F}) \quad (\text{в силу теоремы 4.34})$$

$$\simeq \text{Flat}(F_{fin}^{op}, \mathcal{F}) \quad (\text{в силу теоремы 6.31})$$

$$\simeq \mathcal{F} \quad (\text{в силу предложения 6.32}).$$

Эти эквивалентности естественны в $\mathcal{F}$, так как из предложения 6.24 следует, что функтор H , определенный в доказательстве предложения 6.32, коммутирует с функторами обратного образа. Таким образом, остается только обосновать последнее утверждение данной теоремы, что сводится просто к проведению профунктора Йонеды $Y(E_{fin})$ через эквивалентность теоремы 6.32.

На самом деле, мы находим, что $V(Y(E_{fin}))$ является представимой диаграммой $R(so)$, которая, как легко увидеть, изоморфна функтору включения из примера 2.38. $\square$

Обозначение $\mathcal{E}[U]$, восходящее к Рейту, умышленно выбрано так, чтобы напоминать обозначения, употребляющиеся для колец многочленов, ибо понятнее думать о $\mathcal{E}[U]$ как о «свободном $\mathcal{E}$ -топосе, полученном присоединением неопределенного объекта U ». В некотором смысле объекты из $\mathcal{E}[U]$ можно рассматривать как «многочлены в U с коэффициентами в $\mathcal{E}$ » (см. [58]).

Если X — объект $\mathcal{E}$ -топоса $\mathcal{F}$, то будем писать $\mathcal{F} \xrightarrow{\bar{X}} \mathcal{E}[U]$ вместо геометрического морфизма, который его классифицирует, а если T — объект из $\mathcal{E}[U]$, то будем писать $T \otimes X$ вместо объекта из $\mathcal{F}$, классифицируемого композицией

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\bar{X}} \mathcal{E}[U] \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{E}[U],$$

т. е. вместо объекта $\bar{X}^*(T)$. В частности, взяв $\mathcal{F} = \mathcal{E}[U]$, имеем бифунктор $\otimes: \mathcal{E}[U] \times \mathcal{E}[U] \rightarrow \mathcal{E}[U]$; по определению ясно, что этот бифунктор ассоциативен (с точностью до канонического и, следовательно, согласованного естественного изоморфизма) и что общий объект U является для него двусторонней единицей (опять с точностью до согласованного изоморфизма). Поэтому $(\mathcal{E}[U], \otimes, U)$ представляет собой моноидальную категорию ([CW], с. 158).

6.34 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел. Тогда следующие понятия эквивалентны (в том смысле, что они определяют эквивалентные категории):

- (i) объекты из $\mathcal{E}[U]$, т. е. внутренние диаграммы T на E_{fin} ;
- (ii) левые плоские профункторы $E_{fin} \xrightarrow{\hat{T}} E_{fin}$ (см. предположение 4.39);
- (iii) геометрические морфизмы $\mathcal{E}[U] \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{E}[U]$ над $\mathcal{E}$;
- (iv) естественные эндоморфизмы стирающего функтора $(\mathcal{D}or/\mathcal{E})^{op} \rightarrow \mathcal{Cat}$, т. е. семейство функторов $T_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ для каждого $\mathcal{E}$ -топоса $\mathcal{F}$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{g^*} & \mathcal{G} \\ \downarrow T_{\mathcal{F}} & & \downarrow T_{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{g^*} & \mathcal{G} \end{array}$$

коммутативна с точностью до согласованного естественного изоморфизма для каждого $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$ над $\mathcal{E}$.

Доказательство. (i) $\simeq$ (iii) является специальным случаем равенства $\mathcal{F} = \mathcal{E}[U]$ теоремы 6.33, а (ii) $\simeq$ (iii) — особый случай предложения 4.39. По поводу (i) $\simeq$ (iv) предположим, что

дан объект T из $\mathcal{E}[U]$. Тогда можем считать, что $T_{\mathcal{F}}$ является функтором $X \mapsto T \otimes X$, и естественность стала очевидной. Наоборот, если дан естественный эндоморфизм $(T_{\mathcal{F}})$ как указано в (iv), то свойство естественности означает, что он канонически изоморфен эндоморфизму, который индуцирован объектом $T_{\mathcal{E}[U]}(U)$ из $\mathcal{E}[U]$. $\square$

6.35 Замечание. Пусть $(E_{fin})^2$ является категорией (внутренней) морфизмов из E_{fin} , построенной, как в упражнении 2.3. Тогда рассуждения, подобные тем, которые проводятся в предположении 6.32 и теореме 6.33, показывают, что топос $\mathcal{E}^{(E_{fin})^2} = \mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2]$ является классификатором морфизмов для $\mathcal{D}or/\mathcal{E}$ в том смысле, что для любого $\mathcal{E}$ -топоса $\mathcal{F}$ выполняется

$$\mathcal{D}or/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2]) \simeq \mathcal{F}^2$$

(детали доказательства можно найти в [58], теорема 6.5). Более того, нетрудно проверить, что геометрические морфизмы $\bar{U}_1, \bar{U}_2: \mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2] \rightarrow \mathcal{E}[U]$, классифицирующие область определения и область значения общего морфизма, как раз индуцированы (как в следствии 2.35) внутренними функторами $\partial_0, \partial_1: (E_{fin})^2 \rightarrow E_{fin}$, построенными в упражнении 2.3.

Если теперь образовать подъем диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}[U_1] & \longrightarrow & \mathcal{E}[U_2] \\ \downarrow \bar{U}_1 & & \downarrow \bar{U}_2 \\ \mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2] & \xrightarrow{\bar{U}_3} & \mathcal{E}[U] \end{array}$$

в $\mathcal{D}or/\mathcal{E}$ (см. следствие 4.48), то получим, очевидно, топос $\mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_3]$, который классифицирует в $\mathcal{E}$ -топосах пары морфизмов, способные образовывать композиции. С еще более общих позиций можно легко увидеть, что любую конечную внешнюю категорию D можно выразить как копредел конечной диаграммы в $\mathcal{Cat}$, вершины которой представляют собой копии категорий 1, 2 и категории 3 «коммутативного треугольника»; поэтому путем образования предела соответствующей диаграммы в $\mathcal{D}or/\mathcal{E}$ с вершинами $\mathcal{E}[U]$, $\mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2]$ и $\mathcal{E}[U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_3]$ для диаграмм вида D в $\mathcal{E}$ -топосах получим классифицирующий топос $\mathcal{E}[D]$. $\square$

Теперь вернемся к проблеме определения по рекурсии объектов из $\mathcal{E}/N$, которой мы касались в § 6.1. Как мы там увидели, существенно, чтобы «процесс», используемый нами для построения новых объектов из старых, должен был быть совместим с внутренней структурой топоса $\mathcal{E}$. Один (весьма сильный) способ истолкования этого требования состоит в том, чтобы T

был эндофунктором топоса $\mathcal{E}$, который естественным образом расширяется до эндофунктора любого $\mathcal{E}$ -топоса; т. е. должен быть естественным эндоморфизмом из $(\mathcal{X}op/\mathcal{E})^{op} \rightarrow \mathcal{C}at$, как описано в 6.34 (iv). (Кстати, заметим, что любой такой T является сильным функтором, так как он естественно расширяется до $\mathcal{E}$ -топосов вида $\mathcal{E}/Z$, и, следовательно, применяя функтор $\bar{T}(\mathcal{E}/Y^X)$ к общему морфизму $(Y^X)*X \rightarrow (Y^X)*Y$ в $\mathcal{E}/Y^X$ и рассматривая результат как глобальный элемент из $(Y^X)*(TY^{TX})$, можно получить $T_{X,Y}: Y^X \rightarrow TY^{TX}$. Поэтому к таким функторам T определено применима теорема 6.19 о единственности.)

Но если мы требуем, чтобы T имел такую форму, то теорема существования, которую мы стремимся доказать, может быть сформулирована следующим образом в терминах классифицирующих морфизмов: если дана любая диаграмма $\mathcal{E} \xrightarrow{\bar{X}} \mathcal{E}[U] \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{E}/N \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{E}[U]$ в $\mathcal{X}op/\mathcal{E}$, то существует такой геометрический морфизм $\mathcal{E}/N \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{E}[U]$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\bar{X}} & \mathcal{E}/N & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathcal{E}[U] \\ & \searrow \bar{X} & \downarrow \bar{F} & & \downarrow \bar{F} \\ & & \mathcal{E}[U] & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathcal{E}[U] \end{array}$$

коммутативна с точностью до изоморфизма. Непосредственно очевидно, что эта диаграмма подобна диаграмме из определения 6.11.

На самом деле мы будем доказывать более сильный результат: а именно, что $\mathcal{E}/N$ является объектом натуральных чисел (в смысле 2-категорий) в полной подкатегории $\mathcal{D}\mathcal{X}op/\mathcal{E}$ категории $\mathcal{X}op/\mathcal{E}$, объектами которой являются топосы вида $\mathcal{E}^C$, $C \in \mathcal{C}at(\mathcal{E})$. Можно, действительно, показать, что $\mathcal{E}/N$ представляет собой объект натуральных чисел в большей 2-категории $\mathcal{D}\mathcal{X}op/\mathcal{E}$ ограниченных $\mathcal{E}$ -топосов, определенной в дополнении 4.48, но доказательство этого требует усиления предложения 4.39 для получения «описания профункторов» из $\mathcal{X}op/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ для произвольных ограниченных $\mathcal{E}$ -топосов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Детали этого усиления достаточно сложны, и поэтому они здесь не приводятся. Интересующийся читатель может обратиться к [58], предложение 3.2.

Пусть C — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Теперь роль предложения 4.39 состоит в том, чтобы свести проблему построения « n -й итерации» геометрического морфизма $\mathcal{E}^C \rightarrow \mathcal{E}^C$ над $\mathcal{E}$ к проблеме построения « n -й тензорной степени» профунктора $C \dashrightarrow C$. Два следующих предложения посвящены этому построению. Во-первых, рассмотрим случай дискретной категории

$C = (C \xrightarrow{1} C)$; в этом случае просто имеем $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, C) \cong \mathcal{E}/C \times C$ и $\otimes_C$ отождествляется с $\times_C$ (мы пользуемся соглашением из определения 2.11 об интерпретации последнего символа). Кроме того, профунктор Йонеды $Y(C)$ отождествляется с диагональю $C \xrightarrow{\Delta} C \times C$.

Пусть p — натуральное число в $\mathcal{E}$. Тогда равенства $sp = so + p = p + so$ дают с помощью теоремы 6.23 (iii) две различные декомпозиции копроизведений

$$[sp] \cong 1 \amalg [p] \cong [p] \amalg 1.$$

Будем в данный момент писать μ_1, μ_2 вместо включений копроизведений, соответствующих первой декомпозиции, и ν_1, ν_2 вместо включений, соответствующих второй декомпозиции. (Если мы отождествляем $[p]$ с сегментом вниз от p для отношения строгого порядка, то μ_1, μ_2, ν_1 и ν_2 представляют собой пропускания соответственно морфизмов $1 \xrightarrow{o} N, [p] \rightarrow N \xrightarrow{s} N, [p] \rightarrow N$ и $1 \xrightarrow{o} N$ через $[sp] \rightarrow N$.) Тогда из ассоциативности операции $+$ можно легко вывести, что для любого p диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\mu_1} & [sp] & \xleftarrow{\mu_2} & [p] \\ & \searrow \mu_1 & \downarrow \nu_1 & & \downarrow \nu_1 \\ & & [ssp] & \xleftarrow{\mu_2} & [sp] \\ & & & \nearrow \nu_2 & \uparrow \nu_2 \\ & & & & 1 \end{array}$$

коммутативна.

6.36 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, а C — объект из $\mathcal{E}$. Тогда существует (единственный с точностью до канонического изоморфизма) функтор

$$(-)^{(n)}: \mathcal{E}/C \times C \rightarrow (\mathcal{E}/C \times C)/N,$$

обладающий тем свойством, что для любого $X \xrightarrow{(\nu_1, \nu_2)} C \times C$ имеем

$$o^*(X^{(n)}) \cong (C \xrightarrow{\Delta} C \times C)$$

а

$$s^*(X^{(n)}) \cong X^{(n)} \times_C X \cong X \times_C X^{(n)}.$$

Доказательство. Поскольку $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$ является копроизведением, $X^{(n)}$ можно определить заданием отдельно двух объектов $o^*(X^{(n)})$ и $s^*(X^{(n)})$. Положим, что первый есть Δ ,

а второй — уравнитель в $\mathcal{E}/N$ морфизмов

$$\begin{array}{ccccc} & & C^{[sn]} & & \\ & \nearrow^{c^{[sn]}_1} & & \searrow^{c^{[sn]}_2} & \\ X^{[sn]} & & & & C^{[n]} \\ & \searrow_{c^{[sn]}_1} & & \nearrow_{c^{[sn]}_2} & \\ & & C^{[sn]} & & \\ & & \nearrow^{c^{[sn]}_1} & & \\ & & C^{[n]} & & \end{array}$$

причем проекции $s^*(X^{(n)}) \rightarrow C \times C$ индуцируются композициями $X^{[sn]} \xrightarrow{\gamma_1^{[sn]}} C^{[sn]} \xrightarrow{c^{[sn]}_1} C$ и $X^{[sn]} \xrightarrow{\gamma_2^{[sn]}} C^{[sn]} \xrightarrow{c^{[sn]}_2} C$ соответственно.

Тогда первый из изоморфизмов в формулировке предложения оказывается тривиальным. Чтобы установить справедливость второго, заметим сначала, что

$$(so)^*(X^{(n)}) \cong \text{eq}(X^{[so]} \rightrightarrows C^{[0]}) \cong \text{eq}(X \rightrightarrows 1) \cong X \cong X \times_c \Delta \cong \Delta \times_c X,$$

а затем — что $(ss)^*(X^{(n)})$ можно (используя коммутативную диаграмму, непосредственно предшествующую доказываемому предложению) выразить как уравнитель диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & C^{[sn]} \times C & & \\ & \nearrow^{\gamma_1^{[sn]} \times \gamma_1} & & \searrow^{c^{[sn]} \times 1_c} & \\ X^{[sn]} \times X & & & & C^{[n]} \times C \\ & \searrow_{\gamma_2^{[sn]} \times \gamma_2} & & \nearrow_{(c^{[sn]}, c^{[n]}) \pi_2} & \\ & & C^{[sn]} \times C & & \end{array}$$

который, как легко видно, представляет собой $s^*(X^{(n)}) \times_c X$. Аналогично можно получить изоморфизм $(ss)^*(X^{(n)}) \cong X \times_c s^*(X^{(n)})$.

Доказательство единственности $X^{(n)}$ получается, конечно, применением идей теоремы 6.19. К несчастью, функтор $(-)\times_c X$ не является в общем случае сильным, как функтор $\mathcal{E}/C \times C \rightarrow \mathcal{E}/C \times C$, но он обогащен над $\mathcal{E}$, и, следовательно, $X^{(n)}$ можно выразить как единственное решение рекурсивной проблемы в $\mathcal{E}$. Остальные детали не вызывают затруднений. $\square$

Пусть теперь C — произвольная внутренняя категория в $\mathcal{E}$ и $C \rightarrow C$ — профунктор. В диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 & \xrightarrow{\quad} & (X \otimes_c X)_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} X_0 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} X_0 & \xrightarrow{\quad} & (X \otimes_c X)_0 \times_{c_0} X_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} (X \otimes_c X)_0 & \xrightarrow{\quad} & X_0 \times_{c_0} (X \otimes_c X)_0 & \xrightarrow{\quad} & (X \otimes_c X \otimes_c X)_0 \end{array}$$

которую мы использовали в предложении 2.43 для доказательства ассоциативности операции $\otimes_c$, строки и столбцы являются на самом деле рефлексивными коуравнителями, причем расщепления индуцируются включениями тождеств из C . Таким образом, по лемме 0.17 $(X \otimes_c X \otimes_c X)_0$ можно вычислить как коуравнитель единственной пары

$$X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} C_1 \times_{c_0} X_0 \xrightarrow{\frac{1 \times \alpha \times \alpha}{\beta \times \beta \times 1}} X_0 \times_{c_0} X_0 \times_{c_0} X_0,$$

где α и β являются левым и правым действиями C на X_0 . Все это обосновывает построение, используемое в следующем предложении.

6.37 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, а C — внутренняя категория в $\mathcal{E}$. Тогда существует (с точностью до канонического изоморфизма) функтор

$$(-)^{\otimes n}: \text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, C) \rightarrow \text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, C)/N,$$

обладающий тем свойством, что для любого профунктора $C \xrightarrow{X} C$

$$o^*(X^{\otimes n}) \cong Y(C) \quad \text{и} \quad s^*(X^{\otimes n}) \cong X^{\otimes n} \otimes_c X \cong X \otimes_c X^{\otimes n}$$

(следует отметить, что объекты из $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(C, C)/N$ можно также рассматривать как профункторы $N^*C \rightarrow N^*C$ в $\mathcal{E}/N$ либо как профункторы $C \times N \rightarrow C$ или $C \rightarrow C \times N$ в $\mathcal{E}$, где N рассматривается как дискретная внутренняя категория).

Доказательство. Как и раньше определим $X^{\otimes n}$ в два этапа: $o^*(X^{\otimes n}) = Y(C)$ и $(s^*(X^{\otimes n}))_0$ является коуравнителем в $\mathcal{E}/C_0 \times C_0 \times N$ для

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times_{c_0} (C_1 \times_{c_0} X_0)^{(n)} & \xrightarrow{1 \times \alpha^{(n)}} & X_0 \times_{c_0} X_0^{(n)} \\ \downarrow & & \searrow \\ (X_0 \times_{c_0} C_1)^{(n)} \times_{c_0} X_0 & \xrightarrow{\beta^{(n)} \times 1} & X_0^{(n)} \times_{c_0} X_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \nearrow \end{array} \quad s^*(X_0^{(n)})$$

где вертикальная стрелка слева строится рекурсивно с использованием метода леммы 6.18 для задания морфизма

$$\Delta \rightarrow \text{Hom}_{C_0}(X_0 \times_{c_0} (C_1 \times_{c_0} X_0)^{(n)}, (X_0 \times_{c_0} C_1)^{(n)} \times_{c_0} X_0).$$

(Здесь $\text{Hom}_{C_0}(X, -)$ обозначает функтор, сопряженный справа к $(-)\times_{c_0} X$, т. е. замкнутую структуру моноидальной категории $(\mathcal{E}/C_0 \times C_0, \times_{c_0}, \Delta)$; ее можно рассматривать как частный случай бизамкнутой структуры на бикатегории $\text{Prof}_{\mathcal{E}}$ (см. следствие 2.49)).

Левое и правое действия категории $\mathcal{C}$ на $X^{\otimes n}$ очевидным образом индуцируются посредством α и β .

Доказательство того, что $X^{\otimes n}$ удовлетворяет заданным данным о рекурсии, аналогично рассуждению, приведенному в 6.36, причем лемма 0.17 используется, как уже отмечено, в качестве индуктивного шага, и доказательство единственности аналогично тому, которое приведено в 6.36. $\square$

6.38 Теорема (Джонстон — Рейт). Топос $\mathcal{E}/N$ является объектом натуральных чисел в 2-категории $\mathcal{D}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{P}/\mathcal{E}$.

Доказательство. Предположим, что заданы морфизмы $\mathcal{E} \xrightarrow{x} \mathcal{F} \xrightarrow{t} \mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$, где $\mathcal{F} = \mathcal{E}^c$. Тогда в силу предложения 4.39 t можно представить левым плоским профунктором $\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$. Рассмотрим профунктор $T^{\otimes n}$. Покажем, что $T^{\otimes n}$ плоский слева и поэтому определяет геометрический морфизм $\mathcal{F}/N \rightarrow \mathcal{F}/N$ над $\mathcal{E}/N$ или, эквивалентно, $\mathcal{F}/N \rightarrow \mathcal{F}$ над $\mathcal{E}$. Для этого достаточно показать, что если имеется конечная диаграмма в $\mathcal{F}$ с вершинами $(V_\alpha | \alpha \in A)$, то каноническое отображение

$$\left(\lim_{\leftarrow} V_\alpha \right) \otimes_{\mathcal{C}} T^{\otimes n} \rightarrow \lim_{\leftarrow} (V_\alpha \otimes_{\mathcal{C}} T^{\otimes n})$$

является изоморфизмом в $\mathcal{F}/N$. Но для того чтобы это показать, используем то, что $(-)\otimes_{\mathcal{C}} T$ обогащен над $\mathcal{E}$ и точен слева. Это используется для построения глобального элемента из

$$\lim_{\leftarrow} \text{Iso} \left(\left(\lim_{\leftarrow} V_\alpha \right) \otimes_{\mathcal{C}} T^{\otimes n}, \lim_{\leftarrow} (V_\alpha \otimes_{\mathcal{C}} T^{\otimes n}) \right)$$

в $\mathcal{E}/N$ по методу леммы 6.18, и можно легко увидеть, что транспозиция этого элемента должна действительно быть каноническим отображением.

Теперь пусть f — геометрический морфизм, полученный композицией

$$\mathcal{E}/N \xrightarrow{x/N} \mathcal{F}/N \xrightarrow{t^{\otimes n}} \mathcal{F},$$

где $t^{\otimes n}$ — морфизм, соответствующий $T^{\otimes n}$, а x/N — подъем x вдоль $\mathcal{E}/N \rightarrow \mathcal{E}$. Тогда из предложений 4.39 и 6.37 легко следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{o} & \mathcal{E}/N & \xrightarrow{s} & \mathcal{E}/N \\ & \searrow x & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & \mathcal{F} & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \end{array}$$

коммутативна с точностью до изоморфизма. Но в силу утверждения единственности в предложении 6.37 эта диаграмма на

самом деле определяет f с точностью до канонического изоморфизма. $\square$

6.39 Следствие (теорема о рекурсии). Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, X — объект из $\mathcal{E}$, а T — натуральный эндоморфизм стирающего функтора $(\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{P}/\mathcal{E})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{T}$. Тогда существует (единственный с точностью до канонического изоморфизма) объект F из $\mathcal{E}/N$, удовлетворяющий данным о рекурсии

$$o^*F \cong X, \quad s^*F \cong T_{\mathcal{E}/N}(F).$$

Доказательство. Следует в теореме 6.38 взять $\mathcal{F} = \mathcal{E}[U]$. $\square$

6.4. Алгебраические теории

Одно из наиболее важных применений аксиомы бесконечности в классической теории множеств состоит в построении свободных алгебраических структур. Поэтому не удивительно, что и в теории топосов именно существование объекта натуральных чисел открывает дверь в универсальную алгебру. Мы начнем с теоремы, которая восходит к Миккелсену и неявно содержится во многих уже доказанных результатах, однако мы воздерживались от ее явного доказательства до настоящего параграфа.

6.41 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос и пусть $\text{mon}(\mathcal{E})$ обозначает категорию моноидов в $\mathcal{E}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathcal{E}$ имеет объект натуральных чисел.
- (ii) Имеется функтор, сопряженный слева к стирающему функтору $U: \text{mon}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть X — объект из $\mathcal{E}$. Рассмотрим объект $MX = \Sigma_N(X^{[n]})$; покажем, что он является носителем объекта свободного моноида, порожденного объектом X . Единица этой моноидной структуры на MX задается подъемом

$$\begin{array}{ccc} 1 \cong X^{[0]} & \xrightarrow{o} & MX \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{o} & N \end{array}$$

а умножение — подъемом

$$\begin{array}{ccc} MX \times MX \cong \Sigma_{N \times N}(X^{[\pi_1^*n + \pi_2^*n]}) & \xrightarrow{m} & MX \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \times N & \xrightarrow{+} & N \end{array}$$

Поскольку эти квадраты декартовы, диаграммы ассоциативности и единицы для (MX, m, e) немедленно следуют из соответствующих диаграмм для моноида $(N, +, o)$.

Единица сопряжения $(M \dashv U)$ получается подъемом

$$\begin{array}{ccc} X \cong X^{[so]} & \xrightarrow{\eta_X} & MX \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{so} & N \end{array}$$

Для получения коединицы допустим, что (G, p, f) является моноидом в $\mathcal{E}$. Нам следует определить морфизм $MG \xrightarrow{e_G} G$ в $\mathcal{E}$, или, эквивалентно, $G^{[n]} \rightarrow G$ в $\mathcal{E}/N$, или, эквивалентно, глобальный элемент из $G^{(G^{[n]})}$ в $\mathcal{E}/N$. Для построения последнего используем метод леммы 6.18 и данные

$$1 \xrightarrow{f} G \cong G^{(G^{[o]})} \cong o^*(G^{(G^{[n]})})$$

и

$$G^{(G^{[n]})} \xrightarrow{\theta} G^{(G^{[n]})} \times G \cong s^*(G^{(G^{[n]})}),$$

где транспозиция морфизма θ представляет собой композицию

$$G^{(G^{[n]})} \times G^{[n]} \times G \xrightarrow{(ev, \pi_{12}, \pi_3)} G \times G \xrightarrow{p} G$$

Теперь простой индукцией можно показать, что e_a является гомоморфизмом моноидов и что η и ε удовлетворяют треугольным тождествам.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть (M, m, e) — свободный моноид, порожденный объектом 1. Покажем, что $M \cong 1 \sqcup M$, откуда в силу следствия 6.15 следует требуемый результат.

Пусть $1 \xrightarrow{g} M$ — включение (т. е. единица сопряжения) и определим s как композицию

$$M \cong M \times 1 \xrightarrow{1 \times g} M \times M \xrightarrow{m} M.$$

Теперь определим μ как композицию

$$(1 \sqcup M) \times (1 \sqcup M) \cong 1 \sqcup M \sqcup M \sqcup (M \times M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \\ v_{2sm} \end{pmatrix}} 1 \sqcup M$$

Легко проверяется, что $(1 \sqcup M, \mu, v_1)$ — моноид, что $\begin{pmatrix} e \\ s \end{pmatrix}: 1 \sqcup M \rightarrow M$ — гомоморфизм моноидов и что $1 \sqcup M$ — свободный моноид с порождающим $1 \xrightarrow{v_{2e}} 1 \sqcup M$. Поэтому $\begin{pmatrix} e \\ s \end{pmatrix}$ — изоморфизм.

На самом деле, конечно, из построения, использованного в первой части, очевидно, что M сам является объектом натуральных чисел, но трудно дать этому прямое доказательство. $\square$

Раз у нас имеется функтор свободы для моноидов, непосредственно возникает задача построить функторы свободы для других финитарных алгебраических теорий. В этом контексте мы считаем (в данный момент) удобным использовать не «структурно-семантическое» определение алгебраической теории, введенное Ловером в [176], а старое «универсально-алгебраическое» определение теории в терминах специального представления операциями и равенствами (см. [180]). (Вскоре мы окажемся в состоянии ввести новое определение алгебраических теорий, идущее от Рейта [58] и более удобное для использования в контексте теории топосов.)

Финитарная алгебраическая теория, таким образом, состоит из множества операций, каждая из которых помечена натуральным числом, или «числом мест», вместе с множеством финитарных равенств между ними. Будем говорить, что теория конечно представима, если оба этих множества конечны. Если $\mathbb{T}$ — такая теория, в $\mathcal{E}$ — категория с конечными произведениями, то под моделью теории $\mathbb{T}$ в $\mathcal{E}$ мы имеем в виду объект M , снабженный морфизмом $\alpha_m: M^m \rightarrow M$ для каждой m -местной операции α теории $\mathbb{T}$, так что каждое равенство теории $\mathbb{T}$ приводит очевидным образом к коммутативной диаграмме в $\mathcal{E}$. Будем писать $\mathbb{T}(\mathcal{E})$ вместо категории $\mathbb{T}$ -моделей в $\mathcal{E}$.

6.42 Лемма. Пусть $\mathcal{E}$ — декартово замкнутая категория, а $\mathbb{T}$ — финитарная алгебраическая теория. Тогда стирающий функтор $\mathbb{T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{v} \mathcal{E}$ задает рефлексивные коуравнители.

Доказательство. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — рефлексивная пара гомоморфизмов $\mathbb{T}$ -модели, а $Y \xrightarrow{h} Z$ — их коуравнитель в $\mathcal{E}$. Индуктивно применяя упражнение 0.1, выведем, что $X^m \xrightarrow{f} Y^m \rightarrow Z^m$ является коуравнителем для любого натурального числа m , и потому имеется единственный способ определения структуры $\mathbb{T}$ -модели на Z , превращающий h в гомоморфизм $\mathbb{T}$ -моделей. Ясно, что h является коуравнителем f и g в $\mathbb{T}(\mathcal{E})$. $\square$

Ясно также, что стирающий функтор $\mathbb{T}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ отражает изоморфизмы; поэтому, если можно построить функтор, сопряженный к нему слева (т. е. функтор свободы $\mathbb{T}$ -моделей), то из теоремы 0.13 будет следовать, что $\mathbb{T}(\mathcal{E})$ является монадической над $\mathcal{E}$.

6.43 Теорема (Лесафр [78]). Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, а $\mathbb{T}$ — конечно представимая конечная алгебраическая теория. Тогда

(i) Существует функтор свободы $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{E})$.

(ii) $\mathbb{T}(\mathcal{E})$ является монадической над $\mathcal{E}$.

(iii) $\mathbb{T}(\mathcal{E})$ имеет конечные копределы.

Доказательство. Уже было отмечено, что (ii) следует из (i) леммы 6.42 и теоремы 0.13, а (iii) аналогично следует из (ii) и теоремы Линтона (0.16).

Чтобы доказать (i), рассмотрим сначала случай, когда $\mathbb{T}$ является свободной теорией, порожденной конечным множеством $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ конечных операций. Как обычно, отождествляем A с m -кратным копроизведением копий объекта 1 в $\mathcal{E}$ и записываем $A \xrightarrow{\gamma} N$ вместо морфизма, индексирующего каждую операцию числом ее мест. Теперь пусть X — любой объект из $\mathcal{E}$, и рассмотрим свободный моноид $M(A \amalg X)$, который можно представлять как множество всех слов в алфавите α_i и элементов объекта X . Нетрудно увидеть, что $M(A \amalg X)$ имеет структуру $\mathbb{T}$ -моделей, причем операции определяются подобно тому, как в структуре моноидов на MX ; чтобы получить свободную $\mathbb{T}$ -модель на X , нужно уметь идентифицировать подобъект из $M(A \amalg X)$, состоящий из правильно построенных слов, т. е. таких, в которых каждая операция применяется в точности к положенному для нее количеству аргументов.

Для этого определим морфизм

$$\text{pr}_S: M(A \amalg X) \rightarrow \Omega \times N,$$

который «разбирает» слово как последовательность правильно построенных слов следующим образом: сначала определим, что отображение предшествования $N \xrightarrow{p} N$ представляет собой $N \cong$

$\cong 1 \amalg N \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_N \end{pmatrix}} N$, а отображение вычитания $N \times N \xrightarrow{-} N$ представляет собой морфизм, экспоненциальная транспозиция которого

удовлетворяет данным о рекурсии $1 \xrightarrow{\bar{1}_N} N^N \xrightarrow{p^N} N^N$. [Следует отметить, что $-(q, r) = r - q$, если $q \leq r$; $-(q, r) = 0$, если $q > r$.] Пусть θ обозначает композицию

$$\Omega \times N \times A \xrightarrow{(\pi_1, \gamma \pi_3, \pi_2)} \Omega \times N \times N \xrightarrow{1 \times (\phi, -)} \Omega \times \Omega \times N \xrightarrow{\wedge \times S} \Omega \times N$$

где $\phi: N \times N \rightarrow \Omega$ является классифицирующим отображением отношения порядка $N \times N \xrightarrow{(\pi_1, +)} N \times N$. Теперь определим элемент объекта $(\Omega \times N)^{(A \amalg X)^{[n]}}$ из $\mathcal{E}/N$, используя метод

леммы 6.18 и данные

$$1 \xrightarrow{(t, \alpha)} \Omega \times N \cong o^*((\Omega \times N)^{((A \amalg X)^{[n]})})$$

и

$$(\Omega \times N)^{(A \amalg X)^{[n]}} \times (A \amalg X)^{[n]} \times (A \amalg X) \xrightarrow{\text{ev} \times 1} \Omega \times N \times (A \amalg X)$$

$$\cong (\Omega \times N \times A) \amalg (\Omega \times N \times X) \xrightarrow{(\pi_1, S \pi_2)} \Omega \times N$$

Транспозиция этого элемента дает морфизм $(A \amalg X)^{[n]} \rightarrow \Omega \times N$ в $\mathcal{E}/N$ и, следовательно, морфизм $M(A \amalg X) \xrightarrow{\text{pr}_S} \Omega \times N$ в $\mathcal{E}$.

Определим FX декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow (t, \text{so}) \\ M(A \amalg X) & \xrightarrow{\text{pr}_S} & \Omega \times N \end{array}$$

тогда просто проверить, что структура $\mathbb{T}$ -моделей на $M(A \amalg X)$ ограничивается до единицы на FX , что включение $X \xrightarrow{\gamma_2} A \amalg X \xrightarrow{\gamma_1} M(A \amalg X)$ пропускается через FX и что любой морфизм $X \rightarrow Y$, в котором Y — $\mathbb{T}$ -модель, единственным образом расширяется до гомоморфизма $FX \rightarrow Y$.

Теперь докажем общий случай индукцией по числу равенств теории $\mathbb{T}$. Предположим, что $\mathbb{T}$ получена добавлением одного m -местного равенства ($f = g$) к теории $\mathbb{S}$, для которой данная теорема доказана; пусть F обозначает функтор свободы $\mathbb{S}$ -моделей и пусть Y — любая $\mathbb{S}$ -модель. Тогда f и g можно рассматривать как параллельную пару морфизмов $Y^m \rightrightarrows Y$ в $\mathcal{E}$, которые равны тогда и только тогда, когда Y является $\mathbb{T}$ -моделью. Пусть теперь $Y \xrightarrow{q} \hat{Y}$ является коуравнителем соответствующей пары $F(Y^m) \rightrightarrows Y$ в $\mathbb{S}(\mathcal{E})$; тогда в силу леммы 6.42 q является эпиморфизмом в $\mathcal{E}$, так как чтобы выразить его как коуравнитель рефлексивной пары, можно использовать существование копроизведений в $\mathbb{S}(\mathcal{E})$.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y^m & \xrightarrow{f} & \hat{Y}^m \\ \downarrow f & & \downarrow \hat{f} \\ Y & \xrightarrow{q} & \hat{Y} \end{array}$$

Так как q — гомоморфизм $\mathcal{S}$ -моделей, очевидно, имеем $\widehat{fq^m} = qf = qg = \widehat{gq^m}$, но поскольку q — эпиморфизм, таковым является q^m , и, следовательно, $\widehat{f} = \widehat{g}$, т. е. $\widehat{Y} — \mathbb{T}$ -модель. Более того, из построения немедленно следует, что любой гомоморфизм $\mathcal{S}$ -моделей из Y в $\mathbb{T}$ -модель (единственным образом) пропускается через q ; поэтому отображение $Y \rightarrow \widehat{Y}$ определяет функтор, сопряженный слева к включению $\mathbb{T}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{S})$. В частности, если для некоторого объекта X выполняется $Y = FX$, то $\widehat{Y}$ является свободной $\mathbb{T}$ -моделью, порожденной объектом X . $\square$

Пусть $\mathbb{T}$ — финитарная алгебраическая теория, а $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ — геометрический морфизм. Поскольку f_* и f^* сохраняют конечные произведения, их можно поднять до сопряженной пары функторов между $\mathbb{T}(\mathcal{F})$ и $\mathbb{T}(\mathcal{S})$. Более того, имеет место

6.44 Лемма. Пусть $\mathbb{T}$ и $\mathcal{S}$ определены, как в теореме 6.43, и пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ — геометрический морфизм. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{F} \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \mathbb{T}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{T}(\mathcal{F}) \end{array}$$

в которой буквами F обозначены функторы свободы $\mathbb{T}$ -моделей, коммутирует с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Соответствующая диаграмма сопряженных справа функторов (т. е.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{T}(\mathcal{S}) \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{S} \end{array}$$

коммутирует по определению, поэтому требуемый результат следует из единственности сопряженных функторов.

Из леммы 6.44 следует, что если $\mathbb{T}$ и $\mathcal{S}$ определены, как в теореме 6.43, то композиция функторов $T_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathbb{T}(\mathcal{S}) \xrightarrow{U} \mathcal{S}$ продолжается, как описано в 6.34 (iv), до «естественного эндоморфизма $\mathcal{S}$ -топосов». Более того, этот функтор имеет (естественную) монадическую структуру, возникающую из сопряжения $(F \dashv U)$. В терминах следствия 6.34 это эквивалентно приданию T моноидной структуры в моноидальной категории $(\mathcal{S}[U], \otimes, U)$, приданию $\bar{T}^*$ монадической структуры, или (посредством теоремы 0.14) приданию $\bar{T}_*$ комонадической структуры. Так мы подошли к следующему определению.

6.45 Определение (Рейт). Пусть $\mathcal{S}$ — топос с объектом натуральных чисел. Под (внутренней) финитарной алгебраической теорией в $\mathcal{S}$ мы имеем в виду моноид в моноидальной категории $(\mathcal{S}[U], \otimes, U)$. Будем писать $\text{alg}(\mathcal{S})$ вместо категории таких моноидов. Если $\mathbb{T} = (T, \mu, \eta)$ является конечной алгебраической теорией в $\mathcal{S}$, а $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ представляет собой $\mathcal{S}$ -топос, то определим, что $\mathbb{T}$ -модель в $\mathcal{F}$ является алгеброй для монады $T_{\mathcal{F}}$, функторную часть которой составляет $T_{\mathcal{F}}$. Будем писать $\mathbb{T}(\mathcal{F})$ вместо категории $\mathbb{T}$ -моделей в $\mathcal{F}$. $\square$

Преимущество этого определения по отношению к предыдущему, «внешнему», состоит в том, что оно позволяет нам работать с теориями, в которые «встроена» внутренняя структура топоса $\mathcal{S}$. Например, теория колец является внешней, потому что в области варьирования $\mathcal{S}$ ее операции постоянны, но если R — конкретное (не постоянное) внутреннее кольцо в $\mathcal{S}$, то невозможно аналогично описать внешними операциями теорию R -модулей. Однако не составляет труда так модифицировать теорему 6.43, чтобы получить функтор свободы R -модулей, и таким образом мы получаем описание R -модулей как алгебраическую теорию в смысле определения 6.45.

6.46 Лемма. Пусть $\mathcal{S}$ — топос с объектом натуральных чисел, $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ — $\mathcal{S}$ -топос. Тогда

(i) Если T — любой объект из $\mathcal{S}[U]$, то функтор $T_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ сохраняет рефлексивные коуравнители.

(ii) Если $\mathbb{T}$ — конечная алгебраическая теория в $\mathcal{S}$, то у $\mathbb{T}(\mathcal{F})$ имеются конечные копределы.

(iii) Стирающий функтор $\text{alg}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}[U]$ порождает рефлексивные коуравнители.

Доказательство. (i) Предположим сначала, что T представим как внутренняя диаграмма на $\mathbf{E}_{\text{fin}}$, т. е. $T = R(\gamma)$ для некоторого $A \xrightarrow{\gamma} N$. Тогда из доказательства предложения 6.32 легко убедиться, что $T_{\mathcal{F}}$ можно описать как композицию

$$\mathcal{F} \xrightarrow{N^*} \mathcal{F}/N \xrightarrow{(-)^{n!}} \mathcal{F}/N \xrightarrow{(-)^{\times f^*}} \mathcal{F}/N \xrightarrow{\Sigma_N} \mathcal{F}$$

Теперь ко всем функторам в этой композиции, кроме второго, имеются сопряженные справа, а второй согласно предложению 6.25 сохраняет рефлексивные коуравнители. Поэтому рефлексивные коуравнители сохраняются функтором $T_{\mathcal{F}}$.

Вообще, можно построить свободное представление объекта T как алгебру для монады из предложения 2.21, т. е. диаграмму коуравнителя $R \rightrightarrows S \rightarrow T$, где R и S представимы. Так как для любого X в $\mathcal{F}$ функтор $(T \mapsto T_{\mathcal{F}}(X)) = \bar{X}^*$ сохраняет коуравнители, по диаграмме легко показать, что $T_{\mathcal{F}}$ сохраняет

рефлексивные коуравнители, поскольку то же самое делают $R_{\mathcal{F}}$ и $S_{\mathcal{F}}$.

(ii) Так как $T_{\mathcal{F}}$ сохраняет рефлексивные коуравнители, стирающий функтор $\mathbb{T}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ порождает их, поэтому доказываемое утверждение является простым применением теоремы 0.16.

(iii) Пусть $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{h} T$ является рефлексивной диаграммой в $\mathcal{E}[U]$. Тогда в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} R \otimes R & \xrightarrow{\quad} & R \otimes S & \xrightarrow{\quad} & R \otimes T \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ S \otimes R & \xrightarrow{\quad} & S \otimes S & \xrightarrow{\quad} & S \otimes T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T \otimes R & \xrightarrow{\quad} & T \otimes S & \xrightarrow{\quad} & T \otimes T \end{array}$$

строки являются рефлексивными коуравнителями в силу (i), а столбцы являются таковыми, потому что $(-)\otimes R = \bar{R}^*$ сохраняет копределы. Поэтому согласно лемме 0.17 коуравнителем является диагональ $R \otimes R \rightrightarrows S \otimes S \rightarrow T \otimes T$. Теперь так же, как в лемме 6.42, если R и S — $\otimes$ -моноиды, а f и g — гомоморфизмы моноидов, то имеется единственная структура $\otimes$ -моноидов на T , делающая его коуравнителем в $\mathbf{alg}(\mathcal{E})$. $\square$

6.47 Теорема (Рейт). Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел. Тогда:

(i) У стирающего функтора $\mathbf{alg}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}[U]$ имеется сопряженный к нему слева.

(ii) $\mathbf{alg}(\mathcal{E})$ является монадическим над $\mathcal{E}[U]$.

(iii) $\mathbf{alg}(\mathcal{E})$ является монадическим над $\mathcal{E}/N$.

(iv) У $\mathbf{alg}(\mathcal{E})$ имеются конечные копределы.

Доказательство. (i) Построение свободного функтора $\otimes$ -моноидов в точности аналогично построению из теоремы 6.41 за исключением того, что функтор $(-)^{[n]}$ заменяется функтором $(-)^{*n}$, определенным в предложении 6.37. Детали доказательства оставляем читателю.

(ii) и (iv) следуют из (i) и 6.46 (iii) так же, как соответствующие утверждения теоремы 6.43, а (iii) следует из (ii) и предложения 2.21, так как объектом объектов из $\mathbf{E}_{\text{fin}}$ является N и предположения грубой теоремы о тройственности устойчивы относительно композиции. $\square$

В 6.47 (iii) мы возвращаемся к идее представления теории в терминах объектов операций и равенств, индексированных над N . В частности, если $\mathbb{T}$ — свободная теория, порожденная объектом $(A \xrightarrow{\gamma} N)$ из $\mathcal{E}/N$, а X — объект из $\mathcal{E}$, то находим, что

структура $\mathbb{T}$ -модели на X эквивалентна морфизму

$$\Sigma_N(X^{[n]} \times \gamma) \rightarrow X$$

в $\mathcal{E}$, т. е. « γ -индексированному семейству конечных операций на X ». Еще один путь интернализации понятия конечной алгебраической теории мог бы состоять в том, чтобы взять определение Ловера [176] и непосредственно перевести его на язык теории $\mathbf{cat}(\mathcal{E})$, заменяя категорию конечных множеств внутренней категорией $\mathbf{E}_{\text{fin}}$. Можно показать (см. [58]), что этот процесс влечет категорию алгебраических теорий, которая согласно определению 6.45 эквивалентна $\mathbf{alg}(\mathcal{E})$.

В заключение следует сделать несколько замечаний относительно возможности распространения идей этого параграфа на нефинитарные теории. При попытке это сделать немедленно возникают три трудности: первая и, возможно, наиболее важная состоит в том, что модели таких теорий обычно не сохраняются функторами обратного образа. Вторая связана с тем, что перестают быть применимыми наши рассуждения, касающиеся рефлексивных коуравнителей. Третья проявляется в том, что развитые нами методы рекурсии над N обычно оказываются недостаточными для построения свободных функторов. Однако в этой области достигнут некоторый прогресс. В частности, Паре [97] показал, что если $\mathbb{T}$ — свободная теория, порожденная единственной « I -местной операцией» (т. е. морфизмом $X' \rightarrow X$ для некоторого фиксированного объекта I из $\mathcal{E}$), то в любом топосе $\mathcal{E}$ с объектом натуральных чисел можно построить функтор «свободы $\mathbb{T}$ -моделей».

6.5. Геометрические теории

В последнем параграфе было показано, как создать универсальную алгебру способом, который является истинно «внутренним» по отношению к произвольному топосу с объектом натуральных чисел. Однако в математике нам часто приходится рассматривать объекты, структура которых не является чисто алгебраической, т. е. структура определяется формулами, которые не являются простыми равенствами. Хороший пример представляет собой теория локальных колец, которая играет решающую роль в алгебраической геометрии.

6.51 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, A — внутреннее (коммутативное) кольцо в $\mathcal{E}$. Будем писать 0 , e вместо нуля и единицы кольца A , а $\ulcorner A \urcorner \rightarrow A$ вместо группы единиц из A , т. е. расширения формулы $\exists a'. (a.a' = e)$. Будем говорить, что A является локальным кольцом, если

$$(i) \mathcal{E} \models \ulcorner 0 = e \urcorner$$

и

$$(ii) \mathcal{E} \models (a \in \ulcorner A \urcorner \vee (e - a) \in \ulcorner A \urcorner).$$

Говорят, что гомоморфизм колец $A \xrightarrow{f} B$ между локальными кольцами является *локальным*, если квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Gamma A & \xrightarrow{\gamma f} & \Gamma B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

декартов. $\square$

Поскольку свойство быть локальным кольцом выражается формулами из $L_{\mathcal{E}}$, ясно, что оно сохраняется логическими функторами. Но на самом деле формулы определения 6.51 принадлежат более ограниченному классу «геометрических формул», истинность которых сохраняется функторами обратного образа. (Чтобы убедиться в этом, следует заметить, что формула (i) выражает, что $0 \rightarrow 1 \xrightarrow{\circ} A$ является уравнителем, а формула (ii) выражает, что морфизм $\Gamma A \hookrightarrow \Gamma A \rightarrow A$ является эпиморфизмом, но функторы обратного образа сохраняют 0, копроизведения и эпиморфизмы так же, как и конечные пределы.) Легко, например, вывести, что в топосе пучков на топологическом пространстве кольцо является локальным тогда и только тогда, когда каждый его слой образует локальное кольцо в $\mathcal{P}$.

Чтобы формализовать введенное выше понятие «геометрической формулы», сначала опишем понятие конечного геометрического языка (также называемого положительным языком первого порядка), в котором мы сможем выразить понятие «конечной геометрической теории». Описываемый язык отличается от того, который введен в § 5.4, тем, что он строится абстрактно, а не над конкретным топосом $\mathcal{E}$. Однако наш опыт с языком Митчела — Бенабу позволит, тем не менее, вводить геометрические языки более быстро и кратко, чем пришлось бы делать в противном случае.

6.52 Определение. Конечный геометрический язык $\mathbb{L}$ состоит из:

- (i) множества типов $X, Y, Z, \dots$;
- (ii) множества примитивных функциональных символов $\alpha, \beta, \dots$; каждый функциональный символ имеет сигнатуру, являющуюся парой $(\bar{X}; Y)$, в которой $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ представляет собой конечную (возможно пустую) строку типов, а Y — тип;
- (iii) множества примитивных символов отношений $r, s, \dots$, каждый из которых снабжен сигнатурой $\bar{X}$, представляющей собой строку типов;
- (iv) термов каждого типа, определяемых следующим образом:

(a) для каждого типа X имеется запас переменных $x, x', x'', \dots$;

(b) если α — функциональный символ сигнатуры $(\bar{X}; Y)$ и $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ — строка термов, относящихся к типам $X_1, X_2, \dots, X_n$ (которую мы будем нестрого называть «термом типа $\bar{X}$ »), то $\alpha(\bar{\tau})$ является термом типа Y ;

(v) формул языка $\mathbb{L}$, определяемых следующим образом:

(a) имеются два атомарных предложения «истина» и «ложь»;

(b) если σ и τ — два термина одного и того же типа, то $\sigma = \tau$ является формулой,

(c) если r — отношение сигнатуры $\bar{X}$, а $\bar{\tau}$ — терм типа $\bar{X}$, то $r(\bar{\tau})$ — формула,

(d) если ϕ и ψ — формулы, то $\phi \wedge \psi$ и $\phi \vee \psi$ также являются формулами,

(e) если ϕ — формула, а x — переменная, то $\exists x \phi$ является формулой. $\square$

Следует отметить, что язык $\mathbb{L}$ не содержит символов $\neg$, $\Rightarrow$ и $\vee$; это вызвано тем, что функторы обратного образа в общем случае не сохраняют интерпретацию этих символов в $L_{\mathcal{E}}$.

6.53 Определение. Пусть $\mathbb{L}$ — конечный геометрический язык, а $\mathcal{E}$ — категория с конечными произведениями. Под интерпретацией языка $\mathbb{L}$ в $\mathcal{E}$ будем понимать функцию, приписывающую каждому типу X из $\mathbb{L}$ объект M_X из $\mathcal{E}$, каждому функциональному символу α сигнатуры $(\bar{X}; Y)$ морфизм

$$M_\alpha: M_{\bar{X}} = \prod_{i=1}^n M_{X_i} \longrightarrow M_Y$$

и каждому символу отношения r сигнатуры $\bar{X}$ — подобъект $M_r: M_{\bar{X}} \longrightarrow M_{\bar{X}}$. Морфизм интерпретаций $f: M \rightarrow N$ состоит из морфизма $f_X: M_X \rightarrow N_X$ для каждого X , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_X & \xrightarrow{f_X} & N_X \\ \downarrow M_r & & \downarrow N_r \\ M_Y & \xrightarrow{f_Y} & N_Y \end{array}$$

коммутативна для каждого α , и $M_r \longrightarrow M_{\bar{X}} \xrightarrow{f_{\bar{X}}} N_{\bar{X}}$ пропускается через $N_r \longrightarrow N_{\bar{X}}$ для каждого r . Таким способом получается категория $\mathbb{L}(\mathcal{E})$ интерпретаций языка $\mathbb{L}$ в $\mathcal{E}$, и если $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — функтор, точный слева, то ясно, что он индуцирует функтор $\mathbb{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{L}(\mathcal{F})$. $\square$

Предположим теперь, что дана интерпретация M языка $\mathbb{L}$ в топосе $\mathcal{E}$ (или, в более общем случае, в любой регулярной категории с универсальными конечными объединениями подобъек-

ектов; см. [RM]). Тогда мы можем поступать, как в определении 5.42, и интерпретировать каждый терм типа X в $\mathbb{L}$ как морфизм с областью значений M_X , а каждую формулу ϕ со свободными переменными $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — как подобъект

$$M_\phi \rightarrow \prod_{i=1}^n M_{x_i}.$$

(В частности, мы интерпретируем «истину» и «ложь» как максимальный и минимальный подобъекты объекта 1; предикат равенства интерпретируется как диагональный подобъект из $M_X \times M_X$; подстановка термов вместо переменных интерпретируется подъемом; конъюнкция и дизъюнкция — как пересечение и объединение подобъектов (после предварительного подъема вдоль соответствующей проекции произведения), а квантор существования интерпретируется образованием образов.) Более того, если $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ является точным функтором (в частности, функтором обратного образа), то он сохраняет все эти интерпретации.

6.54 Определение (Жуаяль — Рейес). Пусть $\mathbb{L}$ — конечный геометрический язык. Под *секвенцией* языка $\mathbb{L}$ будем понимать выражение, имеющее вид $(\phi \vdash \psi)$, где ϕ и ψ — формулы из $\mathbb{L}$. [Символ $\vdash$ можно читать «штор»; он не является символом языка $\mathbb{L}$.]

Конечная геометрическая теория — это пара $T = (\mathbb{L}, A)$, где $\mathbb{L}$ — конечный геометрический язык, а A — множество секвенций из $\mathbb{L}$, называемых *аксиомами* теории T . Будем говорить, что T *конечно представлена*, если в языке имеется конечное число типов функциональных символов и символов отношений, а также конечное множество аксиом.

Если M — интерпретация языка $\mathbb{L}$ в топосе $\mathcal{E}$, то будем говорить, что секвенция $(\phi \vdash \psi)$ *удовлетворяется в M* , если (в установленной выше системе обозначений) имеем $M_\phi \leq M_\psi$ как подобъекты из M_X . (Следует отметить, что если у формул ϕ и ψ не одни и те же свободные переменные, то прежде чем сравнивать M_ϕ и M_ψ , необходимо поднять их вдоль соответствующих проекций произведения.) Будем говорить, что M является *моделью* теории $T = (\mathbb{L}, A)$, если каждая аксиома теории T удовлетворяется в M , и будем писать $T(\mathcal{E})$ вместо полной подкатегории категории $\mathbb{L}(\mathcal{E})$, объектами которой являются T -модели. $\square$

Ясно, что свойство быть T -моделью сохраняется любым точным функтором $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, и если, кроме того, T унивалентен, то он также отражает это свойство.

6.55 Примеры. (i) Пусть T — внешняя конечная алгебраическая теория. Ее можно представить как геометрическую теорию следующим образом: в языке $\mathbb{L}$ имеется один тип X , один функциональный символ α сигнатуры $(X^m; X)$ для каждой

m -местной операции α теории T и нет отношений. Для каждого равенства $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ теории T возьмем в качестве аксиомы секвенцию

$$(истина \vdash f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)).$$

(ii) Аналогично, как геометрические теории можно описать многосортные алгебраические теории [58] или существенно алгебраические теории [FK]. Однако часто оказывается удобным вводить операцию, у которой область определения не является просто произведением типов, не с помощью функционального символа, а с помощью отношения вместе с аксиомами, выражающими, что это отношение является графиком функции. Например, теорию *cat* категорий (2.11) можно описать, как в [72], как имеющую два типа 0 и 1, три функциональных символа d_0 , d_1 и i с сигнатурами $(1; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; 1)$ соответственно, и символ отношения Γ сигнатуры $(1, 1, 1)$, которые удовлетворяют аксиомам

$$истина \vdash d_0(i(u)) = u \wedge d_1(i(u)) = u,$$

$$d_1(f_1) = d_0(f_2) \vdash \exists f_3 \Gamma(f_1, f_2, f_3),$$

$$\Gamma(f_1, f_2, f_3) \vdash d_0(f_1) = d_0(f_3) \wedge d_1(f_1) = d_0(f_2) \wedge d_1(f_2) = d_1(f_3),$$

$$\Gamma(f_1, f_2, f_3) \wedge \Gamma(f_1, f_2, f_4) \vdash f_3 = f_4,$$

$$истина \vdash \Gamma(f, i(d_1(f)), f) \wedge \Gamma(i(d_0(f)), f, f),$$

$$\Gamma(f_1, f_2, f_4) \wedge \Gamma(f_2, f_3, f_5) \wedge \Gamma(f_4, f_3, f_6) \wedge \Gamma(f_1, f_5, f_7) \vdash f_6 = f_7.$$

Здесь u, f обозначают переменные типов 0, 1 соответственно.

(iii) Очевидно, что теория локальных колец *lann*, как она определена в 6.51, имеет геометрическое представление. Достаточно просто взять представление теории колец *ann*, данное выше в примере (i), и добавить аксиомы

$$0 = e \vdash ложь$$

и

$$истина \vdash \exists a' (a \cdot a' = e) \vee \exists a'' ((e - a) \cdot a'' = e).$$

Следует, однако, отметить, что в категории *lann*($\mathcal{E}$) морфизмами являются не локальные гомоморфизмы, как они определены в 6.51, а произвольные гомоморфизмы колец между локальными кольцами.

(iv) Геометрически можно представить теорию *filt* фильтрованных категорий. Три условия из определения 2.51 можно выразить секвенциями

$$истина \vdash \exists u (u = u),$$

$$истина \vdash \exists f_1 \exists f_2 (d_0(f_1) = u_1 \wedge d_0(f_2) = u_2 \wedge d_1(f_1) = d_1(f_2)),$$

$$p_0(f_1) = d_0(f_2) \wedge d_1(f_1) = d_1(f_2) \vdash \exists f_3 \exists f_4 (\Gamma(f_1, f_3, f_4) \wedge \Gamma(f_2, f_3, f_4)),$$

которые мы добавляем к аксиомам теории *cat*.

(v) Пусть $\mathcal{T}$ — любая геометрическая теория. Можно следующим образом сконструировать новую теорию $\mathcal{T}^2$, моделями которой являются морфизмы $\mathcal{T}$ -моделей: вместо каждого типа X теории $\mathcal{T}$ возьмем два новых типа X^0, X^1 и функциональный символ γ_X сигнатуры $(X^0; X^1)$. Вместо каждого функционального символа α (соответственно символа отношения r) возьмем два новых символа α^0, α^1 (соответственно r^0, r^1) и новую аксиому истина $\vdash \gamma_{\mathcal{T}}(\alpha^0(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \alpha^1(\gamma_{X_1}(x_1), \gamma_{X_2}(x_2), \dots, \gamma_{X_n}(x_n))$

(соответственно

$$r^0(x_1, x_2, \dots, x_n) \vdash r^1(\gamma_{X_1}(x_1), \gamma_{X_2}(x_2), \dots, \gamma_{X_n}(x_n)).$$

Каждая аксиома $(\phi \dashv \psi)$ теории $\mathcal{T}$ дает две аксиомы $(\phi^0 \dashv \psi^0)$, $(\phi^1 \dashv \psi^1)$ очевидным способом. Тогда легко можно увидеть, что для любого топоса $\mathcal{E}$ имеем $\mathcal{T}^2(\mathcal{E}) \cong (\mathcal{T}(\mathcal{E}))^2$. $\square$

6.56 Теорема (Жуаяль, Бенабу [8], Тьерне [119]). Пусть $\mathcal{T}$ — конечно представленная конечная геометрическая теория, а $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел. Тогда существует $\mathcal{E}$ -топос $\mathcal{E}(\mathcal{T})$, который является $\mathcal{T}$ -классифицирующим топосом в том смысле, что для любого $\mathcal{E}$ -топоса $\mathcal{F}$ имеем $\text{Top}(\mathcal{E}/\mathcal{F}, \mathcal{E}(\mathcal{T})) \cong \mathcal{T}(\mathcal{F})$, причем эквивалентность является естественной в $\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T} = (\mathbb{L}, A)$. Во-первых, следующим образом построим конечную категорию $\mathbf{D}$: для каждого типа X (соответственно функционального символа α и символа отношения r) языка $\mathbb{L}$ в $\mathbf{D}$ имеется один объект v_X (соответственно v_α и v_r) и для каждого вхождения X как типа в сигнатуру формулы α (соответственно отношения r) имеется (в дополнение к тождественным морфизмам) один морфизм $v_\alpha \rightarrow v_X$ (соответственно $v_r \rightarrow v_X$). Теперь по каждой интерпретации M языка $\mathbb{L}$ в топосе $\mathcal{F}$ можно перейти к диаграмме типа $\mathbf{D}$ в $\mathcal{F}$, которая переводит v_X в M_X , v_r в M_r и v_α в график морфизма M_α . Наоборот, диаграмма F типа $\mathbf{D}$ изоморфна диаграмме, построенной описанным выше способом, тогда и только тогда, когда

$$F(v_r) \rightarrow \prod_{i=1}^n F(v_{X_i})$$

является мономорфизмом для каждого r сигнатуры $(X_1, \dots, X_n)$, а

$$F(v_\alpha) \rightarrow \prod_{i=1}^n F(v_{X_i})$$

является изоморфизмом для каждого α сигнатуры $(X_1, \dots, X_n; Y)$.

Таким образом, мы можем с точностью до эквивалентности отождествить $\mathbb{L}(\mathcal{F})$ с полной подкатегорией категории $\mathcal{F}^{\mathbf{D}}$.

Теперь рассмотрим классифицирующий топос $\mathcal{E}[\mathbf{D}]$ для диаграмм типа $\mathbf{D}$, построенный, как показано в замечании 6.35. Пусть F обозначает общую диаграмму типа $\mathbf{D}$; тогда согласно 3.59 (i) и (iv) имеется единственная наименьшая топология j в $\mathcal{E}[\mathbf{D}]$ такая, что у j -пучка $L(F)$, ассоциированного с F , каждый $LF(v_r) \rightarrow \prod LF(v_{X_i})$ является мономорфизмом, а каждый $LF(v_\alpha) \rightarrow \prod LF(v_{X_i})$ — изоморфизмом. Более того, согласно

следствию 4.19 геометрический морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{E}[\mathbf{D}]$ пропускается через $\text{sh}_j(\mathcal{E}[\mathbf{D}]) \rightarrow \mathcal{E}[\mathbf{D}]$ тогда и только тогда, когда диаграмма типа $\mathbf{D}$, классифицированная посредством f , действительно является интерпретацией языка $\mathbb{L}$; поэтому $\text{sh}_j(\mathcal{E}[\mathbf{D}]) = \mathcal{E}[\mathbb{L}]$ является классифицирующим топосом для интерпретаций языка $\mathbb{L}$. (В образной терминологии Тьерне говорится, что топология j заставляет F быть интерпретацией языка $\mathbb{L}$.)

Пусть $M = L(F)$ — общая интерпретация языка $\mathbb{L}$ в $\mathcal{E}(\mathbb{L})$. В общем случае M не будет удовлетворять аксиомам теории $\mathcal{T}$, но мы опять можем вернуть ей это свойство, снабдив на $\mathcal{E}[\mathbb{L}]$ подходящей топологией. В частности, для каждой секвенции $(\phi \vdash \psi)$ в A строим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M_\phi \cap M_\psi & \xrightarrow{\quad} & M_\psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\phi & \xrightarrow{\quad} & \prod M_{X_i} \end{array}$$

и затем определяем, что k является наименьшей топологией в $\mathcal{E}(\mathbb{L})$, для которой каждый $M_\phi \cap M_\psi \rightarrow M_\phi$ является плотным. Поскольку функторы обратного образа сохраняют построения M_ϕ, M_ψ и их пересечения, опять можно легко увидеть, что $\text{sh}_k(\mathcal{E}[\mathbb{L}]) = \mathcal{E}[\mathcal{T}]$ является классифицирующим топосом для $\mathcal{T}$ -моделей, причем общая $\mathcal{T}$ -модель является k -пучком, ассоциированным с M . $\square$

Причина, по которой мы требовали конечного представления теории $\mathcal{T}$ в доказательстве теоремы 6.56, состояла, конечно, в том, что мы работали с внешними геометрическими теориями. Ясно, что следующим шагом в нашем разворачивании темы должно быть введение понятия «внутренней геометрической теории», подобно тому как мы в последнем параграфе интернализовывали алгебраические теории. Мы надеемся, что теперь читатель охотно примет по крайней мере теоретическую возможность такого шага. Ясно по меньшей мере, что если у $\mathcal{E}$ имеется объект натуральных чисел, то можно определить « $\mathcal{E}$ -представленный конечный геометрический язык», задавая объект T типов, объект F функциональных символов и объект R символов отношений, а также морфизмы $F \rightarrow \Sigma_N(T^{[n]})$, $R \rightarrow \Sigma_N(T^{[n]})$, определяющие

сигнатуры. Тогда техника теоремы 6.43 может быть приспособлена к построению объектов формул и, следовательно, объектов секвенций такого языка. Так можно определить « $\mathcal{E}$ -представленную геометрическую теорию» и модель такой теории. Поскольку решетка топологий в топосе внутренне полна (это легко выводится из следствия 3.58 и внутренней полноты Ω^a), рассуждения теоремы 6.56 можно будет использовать для построения классифицирующего топоса такой теории, как только мы научимся классифицировать диаграммы на внутренней категории $\mathbf{D}$. Это произойдет ниже в примере 6.60 (i).

Однако мы не будем заполнять все детали рассуждений, представленных только что в виде наброска, в основном потому, что полученная при этом выгода не оправдывает затраченных усилий. Вместо этого мы обратим внимание на частный класс классифицирующих топосов, называемых *спектрами* и позволяющих строить «глобальные сопряжения» в ситуациях, в которых обычные сопряжения могут не существовать.

Пусть $\mathbf{T}$ — геометрическая теория. Сначала построим следующим образом «глобальную» 2-категорию $\mathbf{T}\text{-}\mathcal{E}\text{op}$ *T-модельных топосов*: ее объектами являются пары $(\mathcal{E}, M)$, в которых $\mathcal{E}$ — топос, а M — $\mathbf{T}$ -модель в $\mathcal{E}$, 1-стрелкой $(\mathcal{F}, L) \rightarrow (\mathcal{E}, M)$ является пара (p, f) , в которой $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм и $p^*M \xrightarrow{f} L$ — гомоморфизм $\mathbf{T}$ -моделей, а 2-стрелка $(p, f) \rightarrow (g, g)$ является естественным преобразованием $p \xrightarrow{\eta} q$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^*M & \xrightarrow{f} & L \\ \eta_M \downarrow & \searrow u & \\ q^*M & & \end{array}$$

коммутативна. Мы обычно будем рассматривать такие $\mathbf{T}$ -модельные топосы $(\mathcal{E}, M)$, что у $\mathcal{E}$ имеется объект натуральных чисел. Будем применять обозначение $\mathbf{T}\text{-}\mathcal{E}\text{op}_N$ для соответствующей полной под-2-категории $\mathbf{T}$ -категории $\mathbf{T}\text{-}\mathcal{E}\text{op}$.

6.57 Определение. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathbf{T}$ — две такие геометрические теории, что $\mathbf{T}$ является *частной теорией* по отношению к теории $\mathcal{S}$, т. е. у этих теорий один и тот же язык и аксиомы теории $\mathcal{S}$ составляют подмножество аксиом теории $\mathbf{T}$. (Это с очевидностью влечет, что $\mathbf{T}(\mathcal{E})$ — полная подкатегория категории $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ для любого $\mathcal{E}$.) Предположим далее, что дан отдельный класс $\mathbf{A}$ морфизмов $\mathbf{T}$ -моделей. Будем говорить, что $\mathbf{A}$ является *допустимым классом морфизмов* (относительно теории $\mathcal{S}$), если он удовлетворяет следующим условиям:

(i) Свойство принадлежать классу $\mathbf{A}$ является «геометрическим», т. е. сохраняется функторами обратного образа.

(ii) $\mathbf{A}$ содержит все тождественные морфизмы, и если имеется $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$, причем $g \in \mathbf{A}$, то $f \in \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $gf \in \mathbf{A}$.

(iii) («Лемма о разложении»). Предположим, что дан морфизм $\mathcal{S}$ -моделей $M \xrightarrow{f} L$, где L является $\mathbf{T}$ -моделью. Тогда существует разложение $M \xrightarrow{g} M_f \xrightarrow{\hat{f}} L$ с $\mathbf{T}$ -моделью M_f и $\hat{f} \in \mathbf{A}$, которое представляет собой наилучшее возможное разложение морфизма f через $\mathbf{A}$ -морфизм в том смысле, что если дано любое другое такое разложение $M \xrightarrow{r} P \xrightarrow{g} L$, то существует такой единственный морфизм $M_f \xrightarrow{h} P$ (в силу (ii) обязательно входящий в $\mathbf{A}$), что $gh = \hat{f}$ и $hg = r$. Более того, это разложение сохраняется функторами обратного образа. $\square$

На самом деле условие (i) определения 6.57 вытекает из последнего утверждения условия (iii), ибо если применить лемму о разложении к морфизму $M \xrightarrow{f} L$, который уже входит в $\mathbf{A}$, то получим разложение $M \xrightarrow{1} M \xrightarrow{f} L$. Из (i) и (ii) следует, что можно образовать под-2-категорию $\mathbf{A}\text{-}\mathcal{E}\text{op}$ 2-категории $\mathbf{T}\text{-}\mathcal{E}\text{op}$, рассматривая только те 1-стрелки (p, f) , для которых $f \in \mathbf{A}$. Будем говорить, что морфизм $\mathcal{S}$ -моделей $M \xrightarrow{f} L$, где L является $\mathbf{T}$ -моделью, *экстремален* (по отношению к $\mathbf{A}$), если $\hat{f}$ — изоморфизм; в этой ситуации будем также называть L *T-частным* от M .

6.58 Теорема (Коул [19]). Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathbf{T}$ — конечно представленные геометрические теории, так что $\mathbf{T}$ является частной теорией по отношению к $\mathcal{S}$, и пусть $\mathbf{A}$ — допустимый класс морфизмов $\mathbf{T}$ -моделей. Тогда функтор включения $\mathbf{A}\text{-}\mathcal{E}\text{op}_N \rightarrow \mathbf{A}\text{-}\mathcal{E}\text{op}_N$ имеет сопряженный к нему справа $\text{Spec}: \mathcal{S}\text{-}\mathcal{E}\text{op}_N \rightarrow \mathbf{A}\text{-}\mathcal{E}\text{op}_N$.

Доказательство. Пусть $(\mathcal{E}, M)$ — $\mathcal{S}$ -модельная теория. Заметим сначала, что у нас имеются морфизмы $\mathcal{E}[\mathcal{S}^2] \xrightleftharpoons[\text{cod}]{\text{dom}} \mathcal{E}(\mathcal{S})$, классифицирующие область значения и область определения общего морфизма $\mathcal{S}$ -моделей. (На самом деле $\mathcal{E}[\mathcal{S}^2] \xrightleftharpoons[\text{cod}]{\text{dom}} \mathcal{E}(\mathcal{S})$ имеет структуру внутренней категории в $\mathcal{E}\text{op}(\mathcal{E})$.) Если теперь образовать декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}[\mathbf{T}] \\ \downarrow p & & \downarrow \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{M} & \mathcal{E}[\mathcal{S}] \\ & \nearrow \text{cod} & \\ & \mathcal{E}[\mathcal{S}^2] & \xrightarrow{\quad} \mathcal{E}[\mathcal{S}] \\ & \downarrow \text{dom} & \end{array}$$

в $\mathcal{E}\text{-}\mathcal{T}\text{op}/\mathcal{E}$, то нетрудно увидеть, что $\mathcal{E}$ -топос $\mathcal{F}$ содержит общий пример морфизма $\mathcal{S}$ -моделей $p^*M \xrightarrow{j} L$, где L является $\mathcal{T}$ -моделью. Разложим этот морфизм, как в 6.57 (iii); пусть j — топология в $\mathcal{F}$, которая принуждает $\hat{f}$ быть изоморфизмом, и пусть $\tilde{M}$ обозначает j -пучок, ассоциированный с L . Тогда $\text{sh}_j(\mathcal{F})$ является классифицирующим топосом для теории $\mathcal{T}$ -частных от M , причем $\tilde{M}$ является общей моделью этой теории.

Пусть теперь $(\mathcal{G}, P) \xrightarrow{(q, g)} (\mathcal{E}, M)$ является 1-стрелкой из $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\text{op}_N$, где P — $\mathcal{T}$ -модель. Согласно 6.57 (iii) $q^*M \xrightarrow{g} P$ можно разложить так: $q^*M \xrightarrow{r} M_g \xrightarrow{\hat{g}} P$, где $\hat{g} \in \mathbb{A}$ и r экстремален. Тогда r классифицируется геометрическим морфизмом $\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{r}} \text{sh}_j(\mathcal{F})$ над $\mathcal{E}$, так что $\tilde{r}^*(\tilde{M}) \cong M_g$, и легко проверить, что сопоставление $(q, g) \mapsto (\tilde{r}, \hat{g})$ индуцирует эквивалентность категорий

$$\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\text{op}_N((\mathcal{G}, P), (\mathcal{E}, M)) \simeq \mathbb{A}\text{-}\mathcal{T}\text{op}_N((\mathcal{G}, P), (\text{sh}_j(\mathcal{F}), \tilde{M})).$$

Более того, эта эквивалентность является естественной с точностью до согласованного изоморфизма по всем входящим переменным, и поэтому $\text{Spec}(\mathcal{E}, M) = (\text{sh}_j(\mathcal{F}), \tilde{M})$ — требуемый сопряженный справа функтор. $\square$

Следует отметить, что если в ситуации определения 6.57 первая компонента разложения (согласно лемме о разложении) $M \rightarrow M_f$ зависит только от M (и не зависит от f), то M_f будет свободной $\mathcal{T}$ -моделью, порожденной моделью M , т. е. $M \rightarrow M_f$ — функтор, сопряженный слева к функтору включения $\mathbb{A}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Так, если мы рассматриваем топосы как модели «обобщенной теории множеств», то теорема 6.58 утверждает, что если у нас не будет возможности строить свободные $\mathcal{T}$ -модели, находясь в фиксированной модели теории множеств, то мы, тем не менее, сможем сделать это, если согласимся разрешить изменяться как нашей теории множеств, так и нашим моделям. Причина того, что свободные объекты оказываются в теореме 6.58 сопряженными справа, состоит в том, что, определяя 1-стрелки из $\mathcal{T}\text{-}\mathcal{T}\text{op}$, мы ориентировали их в «геометрическом» направлении, которое противоположно (двойственно) «алгебраическому».

6.59 Примеры. (i) «Классический» пример спектра, послуживший основным мотивом для доказательства теоремы 6.58, получается, если взять $\mathcal{S} = \text{ann}$, $\mathcal{T} = \text{lann}$, а в качестве $\mathbb{A}$ — класс локальных морфизмов (см. определение 6.51). В этом случае лемма о разложении доказывается следующим образом: если дан гомоморфизм колец $A \xrightarrow{f} L$, где L локально, то образуем

подъем

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & YL \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

и допустим, что A_f является кольцом частных $A[S^{-1}]$. Подробное изложение построения колец частных в топосе можно найти в [69] и [118]; в последнем также содержится детальное доказательство леммы о разложении. $\mathcal{T}$ -частные от A являются, таким образом, локализациями объекта A , т. е. кольцами частных $A[S^{-1}]$, где S — подобъект из A , удовлетворяющий аксиомам, которые в булевом топосе сводятся к свойству быть дополнением первичного идеала. Если A — коммутативное кольцо в $\mathcal{P}$, то можно показать, что $\text{Spec}(\mathcal{P}, A)$ эквивалентен $(\text{Shv}(\text{spec } A), \tilde{A})$, где $\text{spec } A$ — первичный спектр для A с топологией Зарисского, а $\tilde{A}$ — его обычный структурный пучок (см. [ST], § 4.2); в то время как давно было известно, что $\tilde{A}$ является в некотором смысле «свободным локальным кольцом», порожденным кольцом A , глобальное свойство сопряженности из теоремы 6.58 было впервые обнаружено (в этом случае) Хаким [45], и она первой построила $\text{Spec}(\mathcal{E}, A)$ для произвольного топоса Гротендика $\mathcal{E}$.

Хаким также указала, что этальный топос кольца (упражнение 11 к главе 0) является другим примером спектра в смысле теоремы 6.58, в котором теория локальных колец заменяется теорией строго локальных колец. Дальнейшие применения спектров к частным теориям коммутативных колец см. в [55].

(ii) Пусть $\mathbb{L}$ — геометрический язык. Говорят, что морфизм $M \xrightarrow{f} L$ интерпретацией языка $\mathbb{L}$ является *вложением*, если для каждого типа X f_X является мономорфизмом, и квадрат

$$\begin{array}{ccc} M_r & \longrightarrow & L_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod M_{x_i} & \longrightarrow & \prod L_{x_i} \end{array}$$

декартов для каждого символа отношения r . Несложная индукция тогда показывает, что если ϕ — любая формула, не содержащая $\exists$, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} M_\phi & \longrightarrow & L_\phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod M_{x_i} & \longrightarrow & \prod L_{x_i} \end{array}$$

декартов; следовательно, если $(\phi \vdash \psi)$ — секвенция языка $\mathbb{L}$, не содержащая кванторов, то M удовлетворяет секвенции $(\phi \vdash \psi)$ каждый раз, когда ей удовлетворяет L .

Следовательно, если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ — такие теории, что аксиомы теории $\mathcal{T}$ не содержат кванторов, то можно всегда получить спектр, взяв в качестве $\mathcal{A}$ класс вложений. Для доказательства леммы о разложении для морфизма $M \xrightarrow{f} L$ положим, что $(M_f)_x$ является образом (см. теорему 1.52) для f_x , а $(M_f)_+$ является подъемом L_+ . Экстремальные морфизмы, следовательно, — это такие f , что f_x является эпиморфизмом для каждого x . (Этот пример в своих существенных чертах восходит к Кеннисону [60].)

(iii) Пусть $\mathcal{S} = \mathbf{cat}$, $\mathcal{T} = \mathbf{filt}$ и возьмем $\mathcal{A}$ так, чтобы он был классом кофинальных функторов (упражнение 11 к главе 2). Тогда $\mathcal{A}$ обладает свойствами, двойственными соответствующим свойствам из определения 6.57; утверждение, двойственное свойству (ii), было установлено в упражнении 11 к главе 2, а лемма о разложении была доказана Стритом и Уолтерсом [115]. Таким образом, можно построить функтор *коспектра*, т. е. функтор, сопряженный справа к включению

$$\mathcal{A}^{\text{op}}\text{-}\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{cat}^{\text{op}}\text{-}\mathcal{D},$$

где $\mathcal{T}^{\text{op}}\text{-}\mathcal{D}$ определяется как $\mathcal{T}\text{-}\mathcal{D}$, за исключением того, что его 1-стрелками являются пары (p, f) , в которых $L \xrightarrow{f} p^*M$.

Это исключает, что разложение внутреннего функтора $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ имеет вид $\mathcal{C} \rightarrow L(\mathcal{C}) \xrightarrow{L(f)} \mathcal{D}$, где $L(f)$ является отражением функтора f в категории дискретных расслоений над $\mathcal{D}$, т. е. левым расширением по Кану вдоль f дискретного расслоения тождества над $\mathcal{C}$ (см. 2.36). Поэтому экстремальные морфизмы с областью значений $\mathcal{D}$ представляют собой просто дискретные расслоения над $\mathcal{D}$ с фильтрованной областью определения, т. е. плоские предпучки на $\mathcal{D}$ (см. определение 4.31). Следовательно, теорема 4.34 говорит нам, что $\text{Cospec}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \simeq (\mathcal{E}^{\mathcal{D}}, Y(\mathcal{D}))$. $\square$

Мы заключаем этот довольно длинный параграф некоторыми применениями теоремы 6.56 к проблеме построения экспоненциалов в 2-категории $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{D}/\mathcal{E}$.

6.60 Примеры. (i) Ясно, что теория **dofib** дискретных корасслоений (см. замечание 2.15) является геометрической, так как ее можно представить как фактортеорию теории $\mathbf{cat}^2$. Поэтому, если $\mathcal{C}$ — некоторая категория в $\mathcal{E}$, то подъем

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}[\mathbf{dofib}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}[\mathbf{cat}^2] \\ & & \downarrow \text{cod} \\ & & \mathcal{E}[\mathbf{cat}] \end{array}$$

представляет собой классифицирующий топос для дискретных корасслоений над $\mathcal{C}$, или, эквивалентно, для внутренних диаграмм на $\mathcal{C}$.

(ii) Аналогично, если даны две категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, можно добавить общий профунктор $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$, а затем путем наложения подходящей топологии можно сделать G плоским в смысле предложения 4.39. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает топос, содержащий общий левый плоский профунктор; тогда для любого $\mathcal{E}$ -топоса $(\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E})$ имеем эквивалентности

$$\mathcal{D} \text{op}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \simeq \text{lfProf}_{\mathcal{E}}(p^*\mathcal{D}, p^*\mathcal{C})$$

$$\simeq \mathcal{D} \text{op}/\mathcal{F}(\mathcal{F}^{p^*\mathcal{C}}, \mathcal{F}^{p^*\mathcal{D}}) \quad (\text{в силу 4.39})$$

$$\simeq \mathcal{D} \text{op}/\mathcal{E}(\mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}^{\mathcal{C}}, \mathcal{E}^{\mathcal{D}}) \quad (\text{в силу 4.35}),$$

где lfProf обозначает полную подкатегорию категории профункторов, состоящую из левых плоских профункторов. Поэтому топос $\mathcal{H}$ является (в смысле, подходящем для 2-категорий) экспоненциалом $(\mathcal{E}^{\mathcal{D}})^{(\mathcal{E}^{\mathcal{C}})}$ в $\mathcal{D} \text{op}/\mathcal{E}$.

(iii) В еще более общем случае пусть $\mathcal{G} = \text{shj}(\mathcal{E}^{\mathcal{D}})$ является ограниченным $\mathcal{E}$ -топосом, а $\mathcal{C}$ — внутренней категорией в $\mathcal{E}$. Тогда из теоремы 3.47 и предложения 4.39 мы знаем, что геометрический морфизм $\mathcal{E}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{G} \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ над $\mathcal{E}$ пропускается через $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда левый плоский профунктор $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ обладает тем свойством, что $(-)\otimes_{\mathcal{D}} G$ обращает все j -плотные мономорфизмы. Пусть теперь $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ -топос, построенный в примере (ii), j' — топология в $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$, индуцированная посредством j , как в примере 3.59 (iii), и d' — общий j' -плотный мономорфизм. Тогда, если G обозначает общий левый плоский профунктор в $\mathcal{H}$, то можно построить топологию k в $\mathcal{H}$, которая делает $d' \otimes_{\mathcal{D}} G$ изоморфизмом, и можно легко увидеть, что $\text{sh}_k(\mathcal{H})$ является экспоненциалом $\mathcal{G}^{(\mathcal{E}^{\mathcal{C}})}$ в $\mathcal{D} \text{op}/\mathcal{E}$. $\square$

Однако неверно, что можно построить произвольный экспоненциал в 2-категории $\mathcal{D}\text{-}\mathcal{D}/\mathcal{E}$. Причина заключается в том, что для этого мы должны были бы иметь возможность сделать j -плотным заданный мономорфизм m в $\mathcal{E}$, где j — некоторая заранее существовавшая в $\mathcal{E}$ топология, т. е. находить единственную наименьшую топологию k в $\mathcal{E}$ такую, что $k + j \geq j_m$, где j_m — топология, делающая m изоморфизмом. Если бы мы могли это делать в общем случае, то из этого вытекало бы, что решетка топологий в $\mathcal{E}$ была бы гейтинговой коалгеброй (эквивалентно, что решетка подтопосов пучков из $\mathcal{E}$ была бы гейтинговой алгеброй). Но хорошо известно, что это не так. Контрпример является ниже, в упражнении 1 к главе 7.

С другой стороны, Жуаялю удалось доказать одно важное расширение примера 6.60 (iii). Он показал, что если $\mathcal{F} = \text{sh}_j(\mathcal{E}^c)$, где топология j удовлетворяет определенным «условиям конечности», а $\mathcal{E}$ — любой ограниченный $\mathcal{E}$ -топос, то можно построить экспоненциал $\mathcal{E}^{\mathcal{F}}$ в $\text{Top}/\mathcal{E}$. В замечании 7.49 ниже приводится набросок этого доказательства для частного случая $\mathcal{E} = \mathcal{P}$.

6.6. Объекты вещественных чисел

Как мы уже заметили, «булевость» объекта натуральных чисел в топосе означает, что его арифметика много ближе к арифметике стандартной теории множеств, чем поначалу можно было ожидать. Однако как только мы попытаемся построить вещественные числа из натуральных, мы натолкнемся на неклассическую природу внутренней логики топосов; в частности, мы обнаружим, что имеющиеся в нашем распоряжении различные классически эквивалентные построения дают неизоморфные результаты. В этом параграфе мы будем заниматься двумя конкретными конструкциями, которые обычно называются «вещественными числами по Дедекинду» и «вещественными числами по Коши» (хотя фактически ни одно из этих названий не отражает авторство с полной исторической точностью). Имеется ряд других изученных возможностей (см., например, [112]), но они оказываются менее важными для конкретных приложений.

Если в нашем топосе $\mathcal{E}$ дан объект натуральных чисел N , то прежде всего можно построить объект целых чисел Z посредством амальгамы

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad \bullet \quad} & N \\ \downarrow o & & \downarrow \rho_1 \\ N & \xrightarrow{\quad \rho_2 \quad} & Z \end{array}$$

арифметические операции и отношение порядка Z определяются в терминах тех же операций и порядка на N , и легко проверить, что Z является внутренним кольцом. Затем можно построить объект рациональных чисел Q как кольцо частных $Z[P^{-1}]$ (см.

пример 6.59 (i)), где $(P) \longrightarrow Z = (N \xrightarrow{s} N \xrightarrow{\rho_1} Z)$ является объектом целых положительных чисел. Еще раз заметим, что Q наследует отношение порядка от Z ; он удовлетворяет свойству «трихотомичности» (см. 6.17 (iii)) и Q является полем в том же смысле, что $\mathcal{E} \models \neg(o = e)$ и $\mathcal{E} \models (q = 0) \vee (q \in \ulcorner \Gamma Q \urcorner)$ (см. ниже теорему 6.65). Более того, поскольку использованные до сих пор построения включают только конечные пределы и копределы, из предложения 6.16 следует, что объекты Z и Q

сохраняются точными функторами и, в частности, функторами обратного образа. Так, в топосе $\text{Shv}(X)$ пучков на топологическом пространстве X Q является просто постоянным пучком $\Delta(Q)$, слой которого в каждой точке представляет собой множество Рациональных чисел (в $\mathcal{P}$).

6.61 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел. Вещественное число по Дедекинду в $\mathcal{E}$ представляет собой упорядоченную пару $r = (L, U)$ подобъектов из Q , удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $\mathcal{E} \models \forall q (q \in \ulcorner L \urcorner \Leftrightarrow \exists q' (q' \in \ulcorner L \urcorner \wedge q' > q))$,
- (ii) $\mathcal{E} \models \forall q (q \in \ulcorner U \urcorner \Leftrightarrow \exists q' (q' \in \ulcorner U \urcorner \wedge q' < q))$,
- (iii) $\mathcal{E} \models \forall q \forall q' (q \in \ulcorner L \urcorner \wedge q' \in \ulcorner U \urcorner \Rightarrow q < q')$,
- (iv) $\mathcal{E} \models \forall n \exists q \exists q' (q \in \ulcorner L \urcorner \wedge q' \in \ulcorner U \urcorner \wedge n(q' - q) < e)$.

Вместо объекта вещественных чисел по Дедекинду будем писать $R_d \xrightarrow{(l,u)} \Omega^Q \times \Omega^Q$, т. е. экстенционал формулы, полученной подстановкой свободных переменных l, u типа Ω^Q вместо констант $\ulcorner L \urcorner, \ulcorner U \urcorner$.

Легко проверить, что морфизм $Q \xrightarrow{(\downarrow \text{seg}, \uparrow \text{seg})} \Omega^Q \times \Omega^Q$ является мономорфизмом и что он пропускается через R_d ; следовательно, у нас имеется канонический мономорфизм $Q \xrightarrow{i} R_d$. $\square$

Объект R_d , будучи конструкцией «более высокого порядка», не сохраняется, вообще говоря, ничем, кроме логических функторов. Однако аксиомы (i)–(iv), если очистить их от начальных кванторов всеобщности, можно представить секвенциями на геометрическом языке, в котором N и Q являются типами, а L, U — первичными отношениями сигнатуры (Q) . Поэтому свойство быть вещественным числом по Дедекинду сохраняется функторами обратного образа, и на самом деле можно построить классифицирующий топос $\mathcal{E}[\text{ded}]$, содержащий общее вещественное число. Нетрудно показать, что $\mathcal{P}[\text{ded}]$ является топосом $\text{Shv}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ имеет свою обычную топологию (см. ниже упражнение 2 к главе 7). Поэтому, вспоминая высказывание Гротендика, что топос — это обобщенное пространство, а геометрический морфизм — обобщенное геометрическое отображение, вещественное число по Дедекинду в $\mathcal{E}$ можно представлять себе как непрерывную вещественнозначную функцию на $\mathcal{E}$. Первый из следующих примеров подкрепляет это интуитивное представление.

6.62 Примеры. (i) Пусть X — топологическое пространство, а $r = (L, U)$ — вещественное число по Дедекинду в $\text{Shv}(X)$. Тогда для каждой точки x из X пара (L_x, U_x) является дедекиндовым сечением множества Q и потому определяет веще-

ественное число $r(x)$ в $\mathcal{P}$. [Здесь, как обычно, F_x обозначает слой из F в точке x .] Поэтому r определяет функцию $X \rightarrow \mathbb{R}$. Теперь пусть $q \in \mathbb{Q}$ и пусть $q \in L_x$. Тогда, поскольку L является подпучком пучка Q , существует окрестность N точки x такая, что $q \in L_y$ для всех $y \in N$, т. е. множество $\{x \in X | q < r(x)\}$ является открытым. Аналогично, открытым является множество $\{x \in X | q > r(x)\}$, но поскольку открытые интервалы с рациональными концами образуют базу топологии на $\mathbb{R}$, этого достаточно, чтобы доказать, что r представляет собой непрерывную функцию $X \rightarrow \mathbb{R}$.

Наоборот, пусть $X \xrightarrow{r} \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда легко проверить, что сопоставление

$$V \mapsto \{q \in \Delta Q(V) | q(x) < r(x) \text{ для всех } x \in V\}$$

определяет подпучок L из $\Delta Q = Q$ [при этом используется отождествление $\Delta Q(V)$ с множеством локальных постоянных $\mathbb{Q}$ -значных функций на V] и что если U определено аналогичным образом, то пара (L, U) является вещественным числом по Дедекинду в $\text{Shv}(X)$.

Следовательно, вещественные числа по Дедекинду в $\text{Shv}(X)$ являются в точности непрерывными вещественнозначными функциями на X . Из этого легко следует, что объект R_d фактически является пучком C_R непрерывных вещественнозначных функций (см. пример 0.22 (iii)). Следует также отметить, что если модифицировать определение вещественных чисел по Дедекинду, оставляя лишь аксиомы, включающие нижнее сечение L , то мы получим пучок полунепрерывных сверху вещественнозначных функций на X .

(ii) Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство. Делинь ([GV], IV, 7.4) заметил, что можно построить топос $\text{Meas}(X, \Sigma, \mu)$, взяв частично упорядоченное множество Σ измеримых подмножеств X как категорию и снабдив ее предтопологией Гротендика (определение 0.31), накрывающие семейства которой являются счетными семействами включений $\{B_i \rightarrow B | i = 1, 2, \dots\}$, так что $B - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ имеет меру нуль. Можно легко увидеть, что в этом топосе Q представляет собой пучок классов эквивалентности почти всюду определенных Σ -локальных постоянных $\mathbb{Q}$ -значных функций на X , связанных отношением эквивалентности

$$q \sim q' \Leftrightarrow q(x) = q'(x) \text{ почти всюду.}$$

Пусть теперь $r = (L, U)$ — вещественное число по Дедекинду в $\text{Meas}(X, \Sigma, \mu)$; тогда можно использовать определение 6.61 (iv), чтобы построить последовательности (q_n) , (q'_n) глобальных элементов из Q так, что $q_n \in L$, $q'_n \in U$ и $q'_n - q_n < 1/n$ для всех n .

Тогда последовательности $q_n(x)$ и $q'_n(x)$ почти для всех $x \in X$ стремятся к общему пределу $r(x)$, и рассуждения, подобные тем, которые приведены в примере (i), показывают, что определенная таким образом на X вещественнозначная функция измерима. Наоборот, любая измеримая вещественнозначная функция на X определяет вещественное число по Дедекинду; поэтому R_d является пучком случайных переменных на X , т. е. классами эквивалентности измеримых вещественнозначных функций, связанных отношением равенства почти всюду. [Этот пример по существу восходит к Скотту [182].] $\square$

У нас имеется два альтернативных пути для определения отношения порядка на R_d . Если r, r' — переменные типа R_d , то будем писать $r \leq r'$ вместо формулы $l(r) \leq l(r')$ и $r < r'$ вместо формулы $\exists q (q \in u(r) \wedge q \in l(r'))$. (Следует отметить, что из определения 6.61 (i) следует, что $\mathcal{E} \models q \in l(r) \Leftrightarrow i(q) < r$.) Следует подчеркнуть, что $\leq$ не эквивалентно дизъюнкции $<$ и $=$; если, например, в $\text{Shv}(\mathbb{R})$ взять $r(x) = 0$ и $r'(x) = x^2$, то соответствующие вещественные по Дедекинду числа удовлетворяют соотношениям

$$\|r \leq r'\| = 1, \quad \|r < r'\| = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \|r = r'\| = 0$$

(так как функции r и r' не согласованы на любом непустом открытом множестве). Также неверно, что или $\leq$, или $<$ определяет линейный порядок на R_d (опять $\text{Shv}(\mathbb{R})$ дает контрпример, если взять $r(x) = 0$, $r'(x) = x$).

Можно просто определить операцию сложения на R_d ; положим

$$l(r + r') = \{q | \exists q' \exists q'' (q' \in l(r) \wedge q'' \in l(r') \wedge q = q' + q'')\}$$

и аналогично определим $u(r + r')$, а также убедимся, что эта пара термов типа Ω^q удовлетворяет аксиомам определения 6.61. Однако «классический» способ определения умножения путем подразделения на случаи не будет работать, так как R_d не является линейно упорядоченным. Чтобы преодолеть эту трудность, используем идею Конвея [157]. Сначала превратим R_d в модуль над Q , положив

$$r \cdot q = \begin{cases} (l(r) \cdot q, u(r) \cdot q), & \text{если } q > 0, \\ i(0), & \text{если } q = 0, \\ (u(r) \cdot q, l(r) \cdot q), & \text{если } q < 0, \end{cases}$$

где

$$l(r) \cdot q = \{q' | \exists q'' (q'' \in l(r) \wedge q' = q'' \cdot q)\}.$$

(Это подразделение на случаи законно, так как Q удовлетворяет трихотомии, т. е.

$$\mathcal{E} \models (q > 0) \vee (q = 0) \vee (q < 0).)$$

Тогда определим $l(rr')$ как терм

$$\{q | \exists q' \exists q'' (((q' \in (r \wedge q'' \in l(r')) \vee (q' \in u(r) \wedge q'' \in u(r'))) \wedge \\ \wedge q \in l(r'q' + rq'' - i(q'q''))))\}$$

и аналогично определим $u(rr')$. Доказательство того, что это определение превращает R_d в коммутативное кольцо, по существу совпадает с тем, как это делается в [157].

Однако R_d не является в общем случае полем в том смысле, в каком мы применяли это слово к Q . Для получения дальнейшей информации о его алгебраической структуре следует подробнее изучить связь между двумя определенными выше отношениями порядка.

6.63 Лемма. (i) $\mathcal{E} \models q \in l(r) \Leftrightarrow \exists q' (q' > q \wedge \neg (q' \in u(r)))$.

(ii) $\mathcal{E} \models r \leq r' \Leftrightarrow u(r) \geq u(r')$.

(iii) $\mathcal{E} \models r \leq r' \Leftrightarrow \neg (r > r')$.

Доказательство. (i) Из определения 6.61 (iii) немедленно выводим

$$\mathcal{E} \models q' \in l(r) \Leftrightarrow \neg (q' \in u(r)),$$

следовательно, импликация слева направо вытекает из определения 6.61 (i). Наоборот, предположим, что даны вещественное

по Дедекинду число $r = (L, U)$ и два рациональных числа $1 \xrightarrow[q']{q} Q$

таких, что $q < q'$ и $\neg (q' \in U)$. Тогда $q' - q$ — положительное рациональное число, поэтому его можно выразить локально как частное двух положительных целых чисел и, следовательно,

можно найти $V \xrightarrow{\alpha} V$ и $V \xrightarrow{n} N$ с $(q' - q)\alpha > 1/n$. Теперь в силу

6.61 (iv) можно найти такие $W \xrightarrow{q''} V$ и $W \xrightarrow{q'} Q$, что $q'' \in L$,

$q''' \in U$ и $q''' - q'' < 1/n\beta$. Тогда имеем $\neg (q'\alpha\beta > q''')$, и потому $q'\alpha\beta < q'''$, так как Q удовлетворяет трихотомии. Таким образом,

$$q\alpha\beta \leq q'\alpha\beta - 1/n\beta < q''' - 1/n\beta < q'',$$

но $q'' \in L$, поэтому $q\alpha\beta \in L$. Поскольку $\alpha\beta$ является эпиморфизмом, $q \in L$.

(ii) Пусть $l(r) \leq l(r')$; тогда

$$\mathcal{E} \models q \in u(r') \Rightarrow \exists q' (q' < q \wedge q' \in u(r')) \quad (\text{в силу 6.61 (ii)})$$

$$\Rightarrow \exists q' (q' < q \wedge \neg (q' \in l(r'))) \quad (\text{в силу 6.61 (iii)})$$

$$\Rightarrow \exists q' (q' < q \wedge \neg (q' \in l(r))) \quad (\text{согласно допущению})$$

$$\Rightarrow q \in u(r) \quad (\text{в силу (i)}).$$

Доказательство обратного утверждения двойственно данному.

(iii) Из $r \leq r'$ и $r > r'$ выводим $\exists q (q \in u(r') \wedge q \in l(r'))$, что противоречит 6.61 (iii); поэтому $\mathcal{E} \models r \leq r' \Rightarrow \neg (r > r')$.

Обратно, пусть $\neg (r > r')$. Тогда

$$\mathcal{E} \models q \in l(r) \Rightarrow \exists q' (q' > q \wedge q \in l(r)) \quad (\text{в силу 6.61 (i)})$$

$$\Rightarrow \exists q' (q' > q \wedge \neg (q' \in u(r'))) \quad (\text{согласно допущению})$$

$$\Rightarrow q \in l(r') \quad (\text{в силу (i)}).$$

Следовательно, $r \leq r'$. $\square$

Чтобы уточнить, в каком смысле R_d является полем, введем сейчас определенную терминологию (см. также [55]).

6.64 Определение. Пусть A — коммутативное кольцо в топосе $\mathcal{E}$ и пусть $\mathcal{E} \models \neg (0 = e)$.

(i) Будем говорить, что A — геометрическое поле, если

$$\mathcal{E} \models (a = 0) \vee (a \in {}^\Gamma \Gamma A {}^\Gamma).$$

(ii) Будем говорить, что A — поле частных, если

$$\mathcal{E} \models \neg (a = 0) \Rightarrow (a \in {}^\Gamma \Gamma A {}^\Gamma).$$

(iii) Будем говорить, что A — поле вычетов, если

$$\mathcal{E} \models \neg (a \in {}^\Gamma \Gamma A {}^\Gamma) \Rightarrow (a = 0).$$

(iv) Будем говорить, что A — целочисленная область определения, если

$$\mathcal{E} \models (aa' = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (a' = 0). \quad \square$$

Ясно, что первую и четвертую из этих аксиом можно выразить как секвенции в геометрическом языке теории колец (отсюда название «геометрическое поле»). Если A — целочисленная область определения, то подобъект $N \rightarrow A$ ненулевого элемента замкнут относительно умножения и кольцо $A[N^{-1}]$ является полем частных; двойственно, если A — локальное кольцо, то подобъект $M \rightarrow A$ неединицы является идеалом и частное A/M является полем вычетов. Дальнейшее обсуждение взаимосвязи между этими аксиомами находится в [55] и [88].

6.65 Теорема. (i)

$$\mathcal{E} \models r \in {}^\Gamma \Gamma R_d {}^\Gamma \Leftrightarrow (r > 0 \vee r < 0).$$

(ii) R_d является полем вычетов.

(iii) R_d является локальным кольцом.

Доказательство. (i) Пусть $r > 0$. Тогда легко проверить, что терм

$$\{q | q \leq 0 \vee (q > 0 \wedge q^{-1} \in u(r))\}, \quad \{q | q > 0 \wedge q^{-1} \in l(r)\}$$

определяет вещественное по Дедекинду число, обратное r относительно умножения. Поэтому

$$\mathcal{E} \models r > 0 \Rightarrow r \in {}^\Gamma \Gamma R_d {}^\Gamma$$

и аналогично $\mathcal{E} \models r < 0 \Rightarrow r \in {}^\Gamma \Gamma R_d {}^\Gamma$.

Обратно, пусть r — вещественное по Дедекинду число и $V \rightarrow 1$ — экстенционал формулы $(r > 0 \vee r < 0)$. Тогда в силу 6.63 (iii) имеем $V \cong 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$. Но формула, определяющая V , составлена на геометрическом языке теории вещественных чисел по Дедекинду; следовательно, V сохраняется функторами обратного образа. В частности, если i^* — это функтор ассоциирования пучка для замкнутой топологии j_V^c , то $i^*V \cong 0$, и поэтому $i^*r = 0$. Но если r — единица, то единицей является и i^*r , и, следовательно, тонос $\text{sh}_{j_V^c}(\mathcal{E})$ должен быть вырожденным, т. е. $V \cong 1$. Применяя это рассуждение к обобщенным элементам R_d , получаем импликацию

$$\mathcal{E} \models r \in \ulcorner \Gamma R_d \urcorner \Rightarrow (r > 0 \vee r < 0).$$

(ii) сразу следует из (i) и 6.63 (iii).

(iii) Из 6.61 (iv) получаем

$$\mathcal{E} \models \exists q \exists q' (q \in l(r) \wedge q' \in u(r) \wedge q' - q < e).$$

Но поскольку Q линейно упорядочен, имеем

$$\mathcal{E} \models q' - q < e \Rightarrow (q > 0 \vee q' < e);$$

поэтому $\mathcal{E} \models (0 \in l(r) \vee e \in u(r))$, т. е. $\mathcal{E} \models r > 0 \vee r < e$. Следовательно, в силу (i)

$$\mathcal{E} \models (r \in \ulcorner \Gamma R_d \urcorner \vee (e - r \in \ulcorner \Gamma R_d \urcorner)). \quad \square$$

Однако R_d не является в общем случае полем частных; не является он также целочисленной областью определения. Действительно, в $\text{Shv}(\mathbb{R})$ для вещественного числа по Дедекинду, определенного равенством $r(x) = x$, верно $\ulcorner (r = 0) \urcorner$, но неверно $(r \in \ulcorner \Gamma R_d \urcorner)$, и если определить $r'(x) = \max(x, 0)$, $r''(x) = \min(x, 0)$, то будем иметь $r'r'' = 0$, но не $(r' = 0 \vee r'' = 0)$.

6.66 Примеры. Нарушая в какой-то степени содержательную последовательность оставшейся части текущего параграфа, приведем два примера, иллюстрирующих независимость аксиом поля, перечисленных в определении 6.64.

(i) Пусть $\mathcal{E} = \text{sh}_j(\mathcal{P}[\text{ann}])$, где j — такая топология, что общее кольцо удовлетворяет аксиоме нетривиальности ($0 = e \vdash \text{ложь}$), и пусть U обозначает общее нетривиальное кольцо в $\mathcal{E}$. Легко показать (см. [45], [53]), что $\mathcal{P}[\text{ann}]$ является тоносом $\mathcal{P}^c$, где $\mathcal{C}$ — категория конечно представленных колец в $\mathcal{P}$, причем носитель общего кольца является стирающим функтором $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$. Так как тривиальное кольцо является строгим конечным объектом в $\mathcal{C}$, топология j (рассматриваемая как топология Гротендика на $\mathcal{C}^{\text{op}}$) отличается от минимальной топологии только тем, что пустое решето покрывает тривиальное кольцо. Теперь рассмотрим h^A -элемент $h^A \xrightarrow{a} U$ из U , где A — конечно представленное кольцо;

из определения U следует, что это просто элемент кольца A . Тогда внешняя интерпретация предложения $\ulcorner (a = 0) \urcorner$ состоит, очевидно, в том, что кольцо $A/(a)$ тривиально, где (a) — идеал, порожденный морфизмом a , т. е. что a является единицей. Поэтому U является полем частных в $\mathcal{E}$. Однако U не является полем вычетов, ибо предложение $\ulcorner (a \in \ulcorner \Gamma U \urcorner) \urcorner$ означает, что кольцо $A(a^{-1})$ тривиально, откуда следует просто то, что a нильпотентен, а не то, что $a = 0$. (Этот пример восходит к Коку [63].)

(ii) Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(\mathbb{R})$ и пусть W является пучком колец на $\mathbb{R}$, сечения которых над открытым множеством U представляют собой классы эквивалентности вещественнозначных непрерывных функций, определенных на плотных открытых подмножествах множества U , причем отношением эквивалентности является согласованность на плотном открытом подмножестве. Если w является U -элементом из W , то предложение $\ulcorner (w = 0) \urcorner$ означает, что множество $\{x \in U \mid w(x) = 0\}$ нигде не плотно, откуда следует, что w обратим в $W(U)$. Поэтому W является полем частных, но он также является полем вычетов, так как предложение $\ulcorner (w \in \ulcorner \Gamma W \urcorner) \urcorner$ означает, что не имеется непустого открытого множества, на котором w принимает ненулевые значения, и, следовательно, $w = 0$. Однако W не является ни геометрическим полем, ни локальным кольцом; глобальный элемент W , определенный формулами $w(x) = 0$ при $x < 0$, $w(x) = e$ при $x > 0$, дает контрпримеры для обоих утверждений. $\square$

Сейчас мы обратимся к нашему второму определению вещественных чисел, которое использует известное понятие последовательностей Коши рациональных чисел.

6.67 Определение. Объект $S \rightarrow Q^N$ последовательностей Коши представляет собой экстенционал формулы

$$\forall n \forall n' (n' \geq n > 0) \Rightarrow (-1/n < f(n') - f(n) < 1/n),$$

где f — свободная переменная типа Q^N . Подобъект $E \xrightarrow{(a,b)} S \times S$ определяем формулой

$$\forall n (n > 0) \Rightarrow (-2/n \leq f(n) - f'(n) \leq 2/n),$$

а также определяем, что объект R_c вещественных чисел по Коши является коуравнителем для $E \xrightarrow{a,b} S$. [Следует отметить, что приведенные выше формулы отличаются от обычно используемых для определения последовательностей Коши тем, что мы требуем, чтобы наши последовательности сходились с «одной» скоростью; эта модификация позволяет сократить количество кванторов, с которыми мы должны бороться при доказательстве утверждений об R_c , и тем самым значительно упростить эти доказательства.] $\square$

Формулы, определяющие S и E , очевидно, эквивалентны тем, которые можно выразить на геометрическом языке, имеющем Q^N

в качестве типа, так как согласно 6.17 (iii) формулу $(n' \geq n) \Rightarrow \phi$ можно переписать как $(n' < n) \vee \phi$. Следовательно, если f^* — функтор обратного образа, сохраняющий возведение в степень N , то он также сохраняет эти объекты и, следовательно, сохраняет R_c . В частности, если $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ — локально связный $\mathcal{P}$ -топос (например, пучки на локально связном пространстве; см. примеры 0.7 и 4.9), то объект вещественных чисел по Коши в $\mathcal{E}$ представляет собой просто постоянный объект $\gamma^*(\mathbb{R})$.

Операции сложения и умножения на S можно определить посредством

$$(f + f')(n) = f(2n) + f'(2n)$$

и

$$(ff')(n) = f(k(f, f')n) \cdot f'(k(f, f')n),$$

где $k(f, f')$ — целое число, большее $|f(so)| + |f'(so)| + 2$.

Более того, нетрудно проверить, что эти операции пропускаются через эпиморфизм $S \twoheadrightarrow R_c$ и придают R_c структуру коммутативного кольца. Ясно, что транспозиция $Q \xrightarrow{h} Q^N$ морфизма $Q \times N \xrightarrow{\pi_1} Q$ пропускается через S , и поэтому мы получаем мономорфизм $Q \hookrightarrow R_c$. Можно определить мономорфизм $R_c \xrightarrow{j} R_d$ следующим образом: если f — свободная переменная типа S , то терм

$$\{q | \exists n (q < f(n) - 1/n)\}, \{q | \exists n (q > f(n) + 1/n)\},$$

как легко можно видеть, удовлетворяет аксиомам из 6.61 (для аксиомы (iv) возьмем $q = f(4n) - 1/3n$ и $q' = f(4n + 1/3n)$). Так мы получаем морфизм $S \xrightarrow{g} R_j$; чтобы показать, что он пропускается через $S \twoheadrightarrow R_c$, предположим, что $(f, f') \in {}^{\ulcorner}E^{\urcorner}$ и $g(f) > g(f')$. Из последнего предположения выводим

$$\exists q \exists n \exists n' ((q < f(n) - 1/n) \wedge (q > f'(n') + 1/n')),$$

затем имеем

$$\exists n'' (n'' \geq n \wedge n'' \geq n' \wedge (f(n) - f'(n') > 1/n + 1/n' + 2/n'')),$$

откуда получаем

$$f(n'') - f'(n'') > 2/n'',$$

что противоречит первому предположению. Поэтому

$$\mathcal{E} \models (f, f') \in {}^{\ulcorner}E^{\urcorner} \Rightarrow \ulcorner (g(f) > g(f') \vee g(f) < g(f')) \urcorner \Rightarrow g(f) = g(f') \text{ (в силу 6.63 (iii)).}$$

Обратно, из определения g следует, что

$$\mathcal{E} \models \forall n (i(f(n) - 1/n) \leq g(f) \leq i(f(n) + 1/n)),$$

откуда

$$\mathcal{E} \models g(f) = g(f') \Rightarrow (f, f') \in {}^{\ulcorner}E^{\urcorner}.$$

Поэтому пропускание $R_c \xrightarrow{j} R_d$ морфизма g через R_c является мономорфизмом.

Пример пучков на локально связном пространстве, упомянутый выше, показывает, что j , вообще говоря, не является изоморфизмом. Однако все же имеется следующий результат.

6.68 Пример. Пусть X — сепарабельное нульмерное топологическое пространство (см. упражнение 4 к главе 5). Тогда $R_c \xrightarrow{j} R_d$ — изоморфизм в $\text{Shv}(X)$, поскольку если $r = (L, U)$ — вещественное число по Дедекинду в $\text{Shv}(X)$, то утверждение, что $\text{Shv}(X)$ удовлетворяет (SS), позволяет нам выбрать последовательность глобальных элементов (q_n, q^n) из $Q \times Q$ так, что $q_n \in {}^{\ulcorner}L^{\urcorner}$, $q^n \in {}^{\ulcorner}U^{\urcorner}$ и $q^n - q_n < 1/n$. Если рассматривать q_n как морфизм $N \rightarrow Q$ в $\text{Shv}(X)$, то соответствующий глобальный элемент $1 \xrightarrow{f} Q_{\mathbf{A}}$, как легко можно увидеть, пропускается через S и удовлетворяет равенству $g(f) = r$. Поэтому j индуцирует изоморфизм на глобальных элементах, но, применяя те же рассуждения к $\text{Shv}(V)$, где V — открытое подмножество пространства X , выводим, что j , как и требовалось, является изоморфизмом в $\text{Shv}(X)$. $\square$

В этом параграфе мы смогли дать не более чем обзор основных свойств вещественных чисел по Дедекинду и Коши, а также связи между ними. Поэтому в заключение мы даем ссылки на три работы, в которых читатель может найти гораздо более подробную информацию по аспектам, касающимся вещественных чисел. Малви [88] изучал вещественные числа по Дедекинду (конкретнее, модули над R_d) с алгебраической точки зрения. Он показал, например, что теорема Свана о связках векторов над компактным пространством X представляет собой не что иное, как интернализацию на $\text{Shv}(X)$ теоремы Капланского о проективных модулях над локальными кольцами. Стаут [112] рассматривал R_d как внутреннее топологическое пространство и установил, в каком смысле можно считать, что известные топологические свойства $\mathbb{R}$ сохраняются внутренне. Фурман [36] использовал аналитический подход. В частности, он изучал способ, с помощью которого понятие «гладкой вещественнозначной функции на $\mathcal{E}$ » можно определить с использованием подходящего подкольца из R_d , а также (обобщая пример 6.68, приведенный выше) способ, с помощью которого, используя различия между R_c и R_d , можно дать «аналитическое» (как противоположное кохомологическому) определение размерности топоса.

Упражнения к главе 6

1. Дайте формальное доказательство того, что $+$ ассоциативна и коммутативна и что $\cdot$ дистрибутивна по отношению к $+$.

2. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел и $\mathbb{G}$ — точная слева комонада на $\mathcal{E}$. Задайте единственный морфизм $\theta: N \rightarrow GN$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{o} & N & \xrightarrow{s} & N \\ \downarrow i & \circlearrowleft & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ G1 & \xrightarrow{Go} & GN & \xrightarrow{Gs} & GN \end{array}$$

коммутативна. Докажите, что (N, θ) является $\mathbb{G}$ -коалгеброй и что он представляет собой объект натуральных чисел в $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$.

3. Пусть **end** обозначает алгебраическую теорию, порожденную единственной одноместной операцией, причем без равенств. Докажите прямо (т. е. не используя теорем 6.41 и 6.43), что существование объекта натуральных чисел в $\mathcal{E}$ эквивалентно существованию функтора свободы **end**-моделей. [Обратите внимание на то, что **end**-модели эквивалентны N -объектам, где N рассматривается как моноид.]

4*. Пусть p и q — натуральные числа в $\mathcal{E}$ такие, что $p < q$. Покажите, что $\text{Eri}([p], [q]) \cong 0$. [Указание. Сначала покажите, что $\text{Eri}([n], [sn]) \cong 0$ в $\mathcal{E}/N$.] Выведите, что если $[p] \cong [q]$, то $p = q$.

5. Используйте лемму 6.18, чтобы задать факториальное отображение $(!): N \rightarrow N$ как элемент из N в $\mathcal{E}/N$ и теорему 6.19, чтобы установить изоморфизм $\text{Iso}([n], [n]) \cong [n!]$ в $\mathcal{E}/N$. Используя теорему 6.29 и упражнение 4, выведите, что если X и Y — финитные кардиналы, то $\text{Iso}(X, Y)$ — подобъект объекта Y^X , имеющий дополнение.

6*. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Покажите, что i^* ограничивается до логического функтора $\mathcal{E}_{fc} \rightarrow \mathcal{F}_{fc}$. Является ли этот ограниченный функтор обязательно обратным образом некоторого геометрического морфизма?

7. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает уравнитель для $\mathcal{P}[U_1 \rightarrow U] \xrightarrow[\overline{U}_3]{\overline{U}_1} \mathcal{P}[U]$ в $\mathfrak{Top}/\mathcal{P}$. Покажите, что $\mathcal{F}$ классифицирует теорию **end**, определенную в упражнении 3. Заметьте, что $\mathcal{F}$ можно описать как $\mathcal{P}^{\mathbb{C}}$, где $\mathbb{C}$ — категория конечно представленных **end**-моделей в $\mathcal{P}$, и выведите, что функтор $\text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{Top}/\mathcal{E}$ следствия 2.35 не сохраняет уравнители.

8. Пусть s обозначает наименьшую верхнюю грань последовательности кардиналов $(\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \dots)$ и пусть $\mathcal{P}_s$ обозначает

категорию множеств мощности $< s$ и функций между ними. Покажите, что $\mathcal{P}_s$ — топос и что у него имеется объект натуральных чисел, но что имеется рекурсивная проблема (X, T) , не разрешимая в $\mathcal{P}_s$, несмотря на то, что T является сильным функтором. [Возьмите в качестве T ковариантный функтор множеств степеней.]

9*. (Йонсон и Тарский [170], Фрейд). Пусть jt_2 обозначает алгебраическую теорию, порожденную двумя одноместными операциями l, r и двуместной операцией b , удовлетворяющий равенствам

$$b(lx, rx) = x, \quad l(b(x, y)) = x, \quad r(b(x, y)) = y.$$

Покажите, что jt_2 -модель в $\mathcal{E}$ является объектом X в $\mathcal{E}$, снабженной специфическим изоморфизмом $X \rightarrow X \times X$, и выведите, что свободные модели $F(1)$ и $F(1 \amalg 1)$ изоморфны. Покажите также, что $\text{jt}_2(\mathcal{E})$ является топосом. [Указание: пусть M является свободным моноидом с двумя порождающими l и r ; покажите, что jt_2 -модели можно рассматривать как пучки для определенной топологии в $\mathcal{E}^M$.]

10. Покажите, что внутренняя алгебраическая теория $\mathbb{T}$ в $\mathcal{E}$ эквивалентна некоторой слабой диаграмме (определение 4.22) $1 \rightarrow \mathfrak{Top}/\mathcal{E}$, которая переводит единственный объект из 1 в $\mathcal{E}[U]$. Покажите также, что слабые конусы над этой диаграммой с вершиной $\mathcal{F}$ соответствуют $\mathbb{T}$ -моделям в $\mathcal{F}$, и выведите, что классифицирующим топосом для $\mathbb{T}$ является слабый предел этой диаграммы. Аналогично, покажите, что если $\mathbf{D}$ — любая конечная категория, то классифицирующим топосом для диаграмм типа $\mathbf{D}$ является слабый предел постоянной диаграммы $\mathbf{D} \rightarrow \mathfrak{Top}/\mathcal{E}$ со значением $\mathcal{E}[U]$.

11. Пусть $\mathbb{T}$ — внутренняя алгебраическая теория в булевом топосе $\mathcal{E}$. Покажите, что функтор $T_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ сохраняет мономорфизмы, и выведите, что стирающий функтор $\mathbb{T}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$

сохраняет инъективные морфизмы. [Метод. Пусть $X \rightarrow Y$ является мономорфизмом в $\mathcal{E}$. Рассматривая эпиморфизм $T_{\mathcal{E}}(X) \amalg V \rightarrow 1$, где V является дополнением носителя объекта $T_{\mathcal{E}}(X)$, сведите рассуждения к двум случаям: а) $T_{\mathcal{E}}(X)$ имеет глобальный элемент; б) $T_{\mathcal{E}}(X) \cong 0$. В первом случае постройте пропускание σ через единичное отображение $X \rightarrow T_{\mathcal{E}}(X)$ и выведите, что $T_{\mathcal{E}}(\sigma)$ является расщепленным мономорфизмом. Те, кто уже прочитал приложение, поймут, что это рассуждение работает для любой локальной внутренней монады $\mathbb{T}$ на $\mathcal{E}$ (Рейт предлагал рассматривать такие монады как «внутренние неконечные алгебраические теории»), но для частного случая конечной алгебраической теории мы можем обойтись без гипотезы, что $\mathcal{E}$ является булевым топосом, используя предложение

7.54, приведенное далее. Но на произвольном топосе результат для локальной внутренней монады неверен; см. [58].]

12. Пусть A — коммутативное кольцо в $\mathcal{P}$. Представьте «теорию локальности A » как конечную геометрическую теорию. [Указание. Возьмите каждый элемент A как тип.]

13. Пусть $\mathbb{T}$ — любой представимый функтор $(\mathcal{S}op/\mathcal{E})^{op} \rightarrow \mathcal{S}at$. Покажите, что $\mathbb{T}(\mathcal{E}^2) \simeq (\mathbb{T}(\mathcal{E}))^2$ [используйте то, что $\mathcal{E}^2$ является слабым копределом в $\mathcal{S}op$]. Выведите, что если $\mathbb{T}$ — конечно представленная геометрическая теория, то $\mathcal{E}[\mathbb{T}^2]$ эквивалентна экспоненциалу $\mathcal{E}[\mathbb{T}]^{\mathcal{E}^2}$ в $\mathcal{S}op/\mathcal{E}$.

14. Пусть f — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на открытом подмножестве из $\mathbb{R}$. Покажите, что существуют непрерывные функции g, h , определенные на всем $\mathbb{R}$, такие, что $h(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ неопределена, и $f(x) = g(x)/h(x)$ каждый раз, когда $f(x)$ определена. Выведите, что кольцо W из примера 6.66 (ii) является кольцом частных $R_d[N^{-1}]$, где N — подобъект ненулевых элементов R_d . Покажите также, что W является $\sqcap$ -пучком, ассоциированным с R_d в $\mathcal{S}hv(\mathbb{R})$.

15. (Фурман [36]). Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что R_c изоморфен постоянному пучку $\Delta(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}hv(X)$ тогда и только тогда, когда для каждого открытого $U \subseteq X$ решетка замкнуто-открытых подмножеств множества U является счетно полной. Покажите, что если X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то это условие эквивалентно локальной связности.

16. Каким аксиомам поля, приведенным в определении 6.64, удовлетворяет (если вообще им удовлетворяет) R_c в произвольном топосе?

ГЛАВА 7

ТЕОРЕМЫ ДЕЛИНЯ И БАРРА

7.1. Точки

Всюду в этой главе и в главе 8 мы работаем с топосами, определенными и ограниченными над фиксированным основным топосом $\mathcal{P}$; мы продолжаем предполагать для удобства, что $\mathcal{P}$ — стандартная категория множеств, хотя фактически большинство из доказываемых результатов остается верным для любого топоса $\mathcal{P}$, который удовлетворяет (АС) и имеет объект натуральных чисел. Детали этого обобщения мы оставляем заинтересованному читателю.

7.11 Определение. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{P}$ — некоторый $\mathcal{P}$ -топос. Под *точкой* в $\mathcal{E}$ мы понимаем геометрический морфизм $\mathcal{P} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ над $\mathcal{P}$. Класс K точек из $\mathcal{E}$ называют *достаточным*, если семейство функторов $(p^* | p \in K)$ консервативно, т. е. если любой морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ из $\mathcal{E}$ такой, что $p^*(f)$ — изоморфизмы при всех $p \in K$, обязательно является изоморфизмом. Про топос $\mathcal{E}$ говорят, что он имеет *достаточно много точек*, если класс всех точек из $\mathcal{E}$ достаточен. $\square$

Отметим, что если K — множество, то топос $\mathcal{P}/K$ есть K -индексированная степень топоса $\mathcal{P}$ в $\mathcal{S}op/\mathcal{P}$ (ср. 4.21), а потому для топоса Гротендика $\mathcal{E}$ мы можем собрать все точки из K в один геометрический морфизм $\mathcal{P}/K \xrightarrow{q} \mathcal{E}$, обратным образом которого является функтор $(X \mapsto (p^*X | p \in K))$, а прямым образом — функтор $((S_p | p \in K) \mapsto \prod_{p \in K} p_*(S_p))$. В этом случае, очевидно, утверждение о достаточности K равносильно утверждению о том, что q — сюръекция (4.11 (ii)).

7.12 Примеры. (i) Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{S}hv(X)$, где X — топологическое пространство. Тогда каждая точка x из X соответствует непрерывному отображению $P \xrightarrow{x} X$, где P — одноточечное пространство, а потому (согласно (0.26)) — точке из $\mathcal{E}$. Более того, множество всех точек из $\mathcal{E}$, которые получаются таким способом, достаточно в силу 4.18 (iii). В § 7.2 мы установим один результат, позволяющий охарактеризовать все точки в $\mathcal{E}$.

(ii) Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P}[U]$ (см. 4.37 (iv) и 6.33). Тогда, как мы уже знаем, категория точек в $\mathcal{E}$ эквивалентна $\mathcal{P}$, так что эта

категория даже в случае ограниченного топоса $\mathcal{E}$ не обязательно эквивалентна малой категории. Однако $\mathcal{E}$ обладает достаточным множеством точек, а именно тех, которые соответствуют конечным множествам, поскольку любое множество представимо в виде фильтрованного копредела конечных множеств (ср. с 7.17 выше).

(iii) Пусть X — хаусдорфово пространство, а $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$. В § 7.2 мы узнаем, что каждая точка топоса $\text{Shv}(X)$ определяется точкой пространства X с помощью соответствия из примера (i); значит, в силу 3.47 точками $\mathcal{E}$ будут в точности те точки $x \in X$, для которых функтор слоя в x обращает все $\square$ -плотные мономорфизмы. Но легко убедиться, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда x — изолированная точка пространства X , т. е. множество $\{x\}$ открыто. Поэтому, если X не имеет изолированных точек (например, если $X = \mathbb{R}$), то топос $\mathcal{E}$ не имеет точек. Но, очевидно, $\mathcal{E}$ невырожден*); однако он не всегда имеет достаточно много точек. $\square$

Следующий результат позволяет охарактеризовать точки топоса Гротендика $\mathcal{E}$ в терминах некоторого его сайта определения. Однако данный результат удобнее сформулировать в более общем виде, который применим к геометрическим морфизмам между произвольной парой топосов Гротендика. Напомним, что в любой категории $\mathcal{E}$ семейство морфизмов $(Y_i \xrightarrow{l_i} X \mid i \in I)$ с общим концом называют (совместно) *эпиморфным*, если для любой пары морфизмов $X \xrightarrow{g} Z$ с $g \neq h$ существует $i \in I$ с $gf_i \neq hf_i$.

(Если в $\mathcal{E}$ существует копроизведение $\coprod_{i \in I} Y_i$, то, конечно, это эквивалентно эпиморфности морфизма $\coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow X$.) Если (C, J) — сайт, то функтор $C \rightarrow \mathcal{E}$ называют *(J-)непрерывным*, когда каждое J -покрывающее решето из C он переводит в эпиморфное семейство категории $\mathcal{E}$. (Эта терминология восходит к Гротендику ([GV] III, 1.2); однако для согласования с употреблением слова «топология» в других частях теории категорий ([CW], с. 112) здесь был бы уместнее термин «конепрерывность».) Через $l: C \rightarrow \text{Shv}(C, J)$ обозначается композиция вложения Йонеды $C \xrightarrow{h} \mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$ и функтора ассоциирования пучка; отметим, что эта композиция всегда непрерывна.

7.13 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, (C, J) — сайт такой, что C имеет конечные пределы, а $\phi: \text{Shv}(C, J) \rightarrow \mathcal{E}$ — некоторый функтор. Тогда следующие условия равносильны:

(i) ϕ — обратный образ некоторого геометрического морфизма $\mathcal{E} \rightarrow \text{Shv}(C, J)$.

*) Если X непусто. — Примеч. пер.

(ii) ϕ точен слева и сохраняет $\mathcal{P}$ -индексированные копределы.
(iii) Существует точный слева непрерывный функтор $P: C \rightarrow \mathcal{E}$ такой, что ϕ есть (с точностью до изоморфизма) левое расширение Кана функтора P вдоль $C \xrightarrow{l} \text{Shv}(C, J)$. Более того, функтор P из (iii) определяется по ϕ однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Обозначим через P композицию $C \xrightarrow{l} \text{Shv}(C, J) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}$. Тогда, конечно, P точен слева, а его непрерывность следует из непрерывности l и из того, что ϕ сохраняет копроизведения и эпиморфизмы. Пусть X — произвольный объект из $\text{Shv}(C, J)$; тогда в силу 0.12 $X \cong \lim_{(h \downarrow X)} h_U$ в $\mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$, откуда получается изоморфизм $X \cong \lim_{(l \downarrow X)} l(U)$ в $\text{Shv}(C, J)$, поскольку относительная категория $(h \downarrow X)$ изоморфна категории $(l \downarrow X)$, а функтор ассоциирования пучка сохраняет копределы. Применяя функтор ϕ , приходим к изоморфизму $\phi(X) \cong \lim_{(l \downarrow X)} \phi(l(U))$, который является в точности формулой, а задающей левое расширение Кана (см. [CW], с. 236).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Функтор P можно отождествить с дискретным расслоением $F \xrightarrow{\gamma} I(C)^{\text{op}}$, где $I(C)$ обозначает интернализацию категории C в топосе $\mathcal{E}$ (ср. 2.39). Так как C имеет конечные пределы, а P сохраняет их, то рассуждение из 4.33 показывает, что γ — плоский предпучок, откуда в силу 4.34 определен геометрический морфизм $\mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$. Легко проверить, что обратный образ этого морфизма задается сопоставлением $X \mapsto \lim_{(h \downarrow X)} P(U)$;

в частности, если R — решето на объекте U из C , то $p^*(R)$ — образ соответствующего семейства в $\mathcal{E}$ с концом в $P(U)$. Поэтому в силу непрерывности P функтор p^* обращает J -покрывающие решета; значит, ввиду 3.47 p пропускается через включение $\text{Shv}(C, J) \rightarrow \mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$ и обратный образ данной факторизации, очевидно, изоморфен ϕ .

Чтобы доказать последнее утверждение данного предложения, нужно показать, что любой точный слева непрерывный функтор $P: C \rightarrow \mathcal{E}$ изоморфен ограничению своего левого расширения Кана вдоль ϕ , т. е. что каноническое отображение

$$P(U) \xrightarrow{\eta} \lim_{(l \downarrow l(U))} P(V)$$

является изоморфизмом. Если топология J субканоническая, то это очевидно даже без предположений на P , поскольку тогда функтор l есть просто вложение Йонеды и, следовательно, полон

и унивалентен; поэтому $(U, 1_{(U)})$ — конечный объект категории $(\mathcal{M}(U))$. В общем случае не всякий морфизм $l(V) \xrightarrow{f} l(U)$ в $\text{Shv}(\mathbf{C}, J)$ происходит из некоторого морфизма категории $\mathbf{C}$; однако для всякого такого f решет

$$\{W \xrightarrow{\alpha} V \mid f \cdot l(\alpha) = \text{образ функтора } l\},$$

очевидно, является J -покрытием, откуда η — эпиморфизм по непрерывности P . Аналогично, если $V \xrightarrow{\alpha} U$ — два морфизма такие, что $l(\alpha) = l(\beta)$, то решет, порожденное уравнителем α и β , будет J -решетом, а потому $P(\alpha) = P(\beta)$; отсюда легко вывести, что η — мономорфизм. $\square$

Отметим, что равносильность утверждений (i) и (ii) можно получить непосредственно из теоремы о специальном сопряженном функторе ([CW], с. 125). (Существование множества образующих для $\text{Shv}(\mathbf{C}, J)$ гарантирует выполнение существования правого сопряженного к φ .) Однако знание явного описания геометрических морфизмов с помощью непрерывных и точных слева функторов полезно на практике.

7.14 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — топосы Гротендика. Тогда категория $\text{Top}/\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ имеет малые hom -множества и фильтрованные $\mathcal{F}$ -индексированные копределы.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow[p]{q} \mathcal{E}$ — два геометрических морфизма. В силу 7.13 функтор p^* изоморфен левому расширению Кана своего ограничения на подходящую малую полную подкатегорию $\mathbf{C}$ в $\mathcal{E}$. Значит, любое естественное преобразование $\eta: p^* \rightarrow q^*$ полностью определяется своими значениями на объектах из $\mathbf{C}$, а так как hom -множества в $\mathcal{F}$ малы, то имеется лишь множество возможных выборов этих значений.

Предположим теперь, что $(p_i \mid i \in I)$ — фильтрованная система геометрических морфизмов $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$. Тогда в силу 2.58 (пообъектно построенный) копредел функторов $p_i^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ сохраняет конечные пределы, а также произвольные $\mathcal{F}$ -индексированные копределы. Следовательно, в силу 7.13 он является обратным образом некоторого геометрического морфизма, который, очевидно, и есть копредел системы p_i . $\square$

Пусть теперь $\mathbf{C}$ — малая категория с конечными пределами, а $P: \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{F}$ — точный слева функтор. Если $\mathbf{F} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{C}^{\text{op}}$ — соответствующий плоский предпучок (см. 4.33), то лемму 0.12 можно интерпретировать как утверждение о том, что имеется естественный изоморфизм

$$P \cong \lim_{\mathbf{F}} (\text{hom}_{\mathbf{C}}(\gamma_0(U), -)),$$

т. е. функтор P представим в виде *фильтрованного копредела* представимых функторов. Обратно, в силу 2.58 любой фильтрованный копредел представимых функторов точен слева. Определим поэтому *псевдоточку* в $\mathbf{C}$ как обратную фильтрованную систему объектов в $\mathbf{I}$, т. е. как (малую) фильтрованную категорию $\mathbf{I}$ с функтором $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{op}}, i \mapsto U_i$. Если $P = (U_i \mid i \in \mathbf{I})$ — псевдоточка в $\mathbf{C}$, то через P мы также обозначаем точный слева функтор $\lim_1 (\text{hom}_{\mathbf{C}}(U_i, -)): \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{F}$.

7.15 Предложение. Пусть $(\mathbf{C}, J)$ — такой сайт, что $\mathbf{C}$ имеет конечные пределы, а $P = (U_i \mid i \in \mathbf{I})$ — псевдоточка в $\mathbf{C}$. Тогда точка предпучкового топоса $\mathcal{F}^{\text{C}^{\text{op}}}$, определяемая функтором P , пропускается через включение $\text{Shv}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{C}^{\text{op}}}$ в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие: для каждого объекта V из $\mathbf{C}$, каждого $R \in J(V)$, каждого $i \in \mathbf{I}_0$ и каждого $U_i \rightarrow V$ из $\mathbf{C}$ существует морфизм $i \rightarrow k$ в $\mathbf{I}$ такой, что композиция $U_k \rightarrow U_i \rightarrow V$ лежит в $R(U_k)$. Псевдоточка, удовлетворяющая этому условию, будет называться псевдоточкой сайта $(\mathbf{C}, J)$.

Доказательство. Указанное условие есть просто утверждение, что функтор $\lim_1 (\text{hom}_{\mathbf{C}}(U_i, -))$ переводит каждое решет в эпиморфное семейство топоса $\mathcal{F}$; поэтому данное предложение вытекает непосредственно из 7.13. $\square$

Следующая теорема разрешает трудность, возникшую в примере 7.12 (ii), а именно то, что топос Гротендика может иметь собственный класс изоморфных точек. Если в духе § 6.5 каждый топос Гротендика $\mathcal{E}$ рассматривать как классифицирующий топос некоторой теории, моделями которой являются точки в $\mathcal{E}$, то читатель, знакомый с теорией моделей, может узнать в этой теореме теорему Лёвенгейма — Скулема для полученного класса теорий.

7.16 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Тогда в $\mathcal{E}$ существует такое множество точек K , что любая точка из $\mathcal{E}$ представима в виде фильтрованного копредела точек из K .

Доказательство. Пусть $(\mathbf{C}, J)$ — такой сайт определения топоса $\mathcal{E}$, что $\mathbf{C}$ имеет конечные пределы, а a — кардинал $\geq \max(\aleph_0, \text{card } C_1)$. Обозначим через K множество точек в $\mathcal{E}$, которые определяются псевдоточками $(U_i \mid i \in \mathbf{I})$ в $(\mathbf{C}, J)$ с $\text{card } \mathbf{I} \leq 2^a$. Пусть теперь p — произвольная точка в $\mathcal{E}$ и $(U_i \mid i \in \mathbf{I})$ — определяемая ею псевдоточка в $(\mathbf{C}, J)$. Определим на частично упорядоченном множестве подкатегорий в $\mathbf{I}$ операции Q, R и S :

(a) Для каждого $i \in \mathbf{I}_0$, каждого $U_i \xrightarrow{\alpha} V$ из $\mathbf{C}$ и каждого $R \rightarrow h_V$ из $J(V)$ выберем морфизм $v_{i, \alpha, R}: i \rightarrow i'$ такой, что $U_{i'} \rightarrow$

$\rightarrow U_i \xrightarrow{\alpha} V$ лежит в $R(U_{i'})$, и положим

$$q(i) = \{v_{i,\alpha,R} | U_i \xrightarrow{\alpha} V \in C_1, R \in J(V)\}.$$

(Отметим, что $\text{card } q(i) \leq \text{card } C_1 \times 2^{\text{card } C_1} \leq 2^a$). Определим теперь для каждой подкатегории $I' \in I$ подкатегорию $Q(I')$ как наименьшую подкатегорию, содержащую I' и $\bigcup_{i \in I_0} q(i)$.

(b) Для каждой конечной диаграммы d в I обозначим через $r(d)$ множество морфизмов некоторого конуса под данной диаграммой (см. упражнение 9 к главе 2). Тогда для $I' \in I$, обозначая через D множество всех конечных диаграмм в I' , определим подкатегорию $R(I')$ как наименьшую подкатегорию, содержащую I' и $\bigcup_{d \in D} r(d)$.

(c) Наконец, для любой подкатегории $I' \in I$ положим

$$S(I') = \bigcup_{n=0}^{\infty} (QR)^n(I').$$

Поскольку $S(I')$ есть объединение возрастающей последовательности подкатегорий в I , то это также подкатегория, а поскольку любая конечная диаграмма в $S(I')$ лежит в $(QR)^n(I')$ при некотором конечном n , то, очевидно, по определению операции R категория $S(I')$ фильтрована. Аналогично, по определению Q ограниченная псевдоточка $(U_i | i \in S(I'))$ удовлетворяет условию из предложения 7.15.

Но так как всякая подкатегория в I , порожденная множеством морфизмов мощности k , имеет мощность $\leq \aleph_0 \cdot k$, то легко убедиться, что все три операции Q , R и S^0 сохраняют свойство категории иметь мощность $\leq 2^a$; поэтому, если $I_1 \leq 2^a$, то точка из $\mathcal{E}$, определяемая системой $(U_i | i \in S(I'))$, лежит в K . Но, очевидно, категория I является фильтрованным объединением конечно порожденных (а потому счетных) подкатегорий, а потому также и подкатегорий $\{S(I') | I' \in I, I' \text{ счетна}\}$; значит, точка p есть фильтрованный копредел соответствующих точек из K . $\square$

7.17 Следствие. Если топос Гротендика $\mathcal{E}$ имеет достаточно много точек, то он имеет достаточно множество точек, т. е. имеется сюръекция $\mathcal{P}/K \rightarrow \mathcal{E}$ для некоторого K из $\mathcal{P}$.

Доказательство. Пусть K — множество точек из $\mathcal{E}$, построенное согласно теореме 7.16, а f — такой морфизм из $\mathcal{E}$, что $p^*(f)$ — изоморфизм для всех $p \in K$. Рассмотрим произвольную точку q из $\mathcal{E}$; тогда, представляя точку q в виде фильтрованного копредела точек $p_i \in K$, мы можем представить морфизм $q^*(f)$ в виде копредела изоморфизмов $p_i^*(f)$, откуда $q^*(f)$ — изоморфизм. Поэтому, если $\mathcal{E}$ имеет достаточно много точек, то f — изоморфизм в $\mathcal{E}$. $\square$

7.18 Следствие. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Тогда существует единственная наименьшая топология j в $\mathcal{E}$ такая, что топос $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ имеет достаточно много точек.

Доказательство. Пусть K — множество точек топоса $\mathcal{E}$, построенное в 7.16, а j — такая топология, что топос $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ является образом геометрического морфизма $\mathcal{P}/K \rightarrow \mathcal{E}$ (см. 4.14). Тогда для любой точки p топоса $\mathcal{E}$ функтор p^* является (фильтрованным) копределом функторов, каждый из которых обращает j -плотные мономорфизмы; значит, p^* обращает j -плотные мономорфизмы, т. е. p пропускается через $\text{sh}_j(\mathcal{E})$. Итак, любой геометрический морфизм костепени топоса $\mathcal{P}$ в $\mathcal{E}$ пропускается через $\text{sh}_j(\mathcal{E})$.

Пусть теперь $\text{sh}_k(\mathcal{E})$ — произвольный пучковый подтопос в $\mathcal{E}$, имеющий достаточно много точек, а L — достаточное множество точек топоса $\text{sh}_k(\mathcal{E})$. Тогда топос $\text{sh}_k(\mathcal{E})$ можно описать как образ геометрического морфизма $\mathcal{P}/L \rightarrow \mathcal{E}$, но этот морфизм пропускается через $\text{sh}_j(\mathcal{E})$, откуда $\text{sh}_k(\mathcal{E}) \subseteq \text{sh}_j(\mathcal{E})$ или, эквивалентно, $j \leq k$. $\square$

7.2. Пространственные топосы

Пусть (X, U) — топологическое пространство. В этом параграфе мы выясним, в какой мере пространство (X, U) восстанавливается по топосу $\text{Shv}(X, U)$. Напомним сначала некоторые определения из общей топологии.

7.21 Определение. Пусть (X, U) — топологическое пространство.

(i) Замкнутое множество $C \subseteq X$ называют *неприводимым*, если оно не представимо в виде объединения двух собственных замкнутых подпространств. (Так, например, для точки x пространства X замыкание одноточечного множества $\{x\}$ неприводимо.)

(ii) Пространство X называют *трезвым*, если каждое неприводимое замкнутое множество $C \subseteq X$ имеет ровно одну общую точку (т. е. точку $x \in C$, для которой $C = \overline{\{x\}}$). $\square$

Считая, что две различные точки с общим замыканием делятся в глазах (а неприводимое замкнутое множество без общей точки — разновидность зеленого змия!), читатель уяснит выбор термина «трезвое пространство». Отметим, что каждое хаусдорфово пространство трезво (неприводимые замкнутые пространства в этом случае одноточечны), так же как и спектр коммутативного кольца с топологией Зарисского (см. [AG], с. 22).

7.22 Предложение. Пусть **sob** обозначает полную подкатегорию в **esp**, объектами которой являются трезвые пространства. Тогда функтор включения **sob** $\rightarrow$ **esp** имеет левый сопряженный. Кроме того, функтор **esp** $\rightarrow$ **Top** из 1.17 (i) пропускается через этот левый сопряженный функтор.

Доказательство. Пусть (X, U) — произвольное топологическое пространство. Обозначим через $\hat{X}$ множество неприводимых замкнутых подмножеств из X . Для замкнутого множества $C \subseteq X$ определим подмножество $\hat{C} \subseteq \hat{X}$ как множество $\{F \in \hat{X} \mid F \subseteq C\}$. Легко проверить, что $(C_1 \cup C_2)^\wedge = \hat{C}_1 \cup \hat{C}_2$ и $\left(\bigcap_\alpha C_\alpha\right)^\wedge = \bigcap_\alpha \hat{C}_\alpha$, по-

этому все $\hat{C}$ являются замкнутыми множествами некоторой топологии $\hat{U}$ на $\hat{X}$. Более того, решетка $\hat{U}$ изоморфна U , а потому неприводимые замкнутые подмножества из $\hat{X}$ составляют в точности множество $\{\hat{F} \mid F \in \hat{X}\}$. Значит, $(\hat{X}, \hat{U})$ — трезвое пространство. Далее, имеется непрерывное отображение $\eta: X \rightarrow \hat{X}$, $x \mapsto \overline{\{x\}}$, и если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение пространства X в трезвое пространство, то можно определить отображение $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, переводящее $F \in \hat{X}$ в единственную общую точку множества $\hat{f}(\hat{F})$ (которое, очевидно, неприводимо в Y). Отображение $\hat{f}$ является единственным непрерывным отображением, для которого $\hat{f}\eta = f$. Требуемая сопряженность установлена.

Наконец, заметим, что отображение η индуцирует изоморфизм $\text{Shv}(X, U) \cong \text{Shv}(\hat{X}, \hat{U})$, так как по определению топос $\text{Shv}(X, U)$ зависит лишь от решетки U . $\square$

7.23. Определение. Пусть (X, U) — трезвое пространство. Определим на точках множества X следующий частичный порядок: $x \leq y$ тогда и только тогда,

когда $x \in \overline{\{y\}}$ (эквивалентно, $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$).

Если $x \leq y$, то точку x называют *специализацией* точки y , а точку y — *обобщением* точки x . Аналогично определяется частичный порядок на множестве непрерывных отображений $Y \rightarrow X$ для любого пространства Y :

$f \leq g$ тогда и только тогда, когда $f(y) \leq g(y)$ при всех $y \in Y$. $\square$

7.24 Теорема. Пусть X и Y — топологические пространства и X трезво. Тогда категория $\text{Top}/\mathcal{P}(\text{Shv}(Y), \text{Shv}(X))$ эквивалентна частично упорядоченному множеству непрерывных отображений $Y \rightarrow X$, упорядоченному согласно 7.23.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда Y — одноточечное пространство, так что $\text{Shv}(Y) \cong \mathcal{P}$.

Пусть $\mathcal{P} \xrightarrow{p} \text{Shv}(X)$ — точка в $\text{Shv}(X)$. Обозначим через U_p объединение всех открытых множеств $U \subseteq X$ таких, что $p^*(U) = 0$; тогда, поскольку p^* сохраняет копределы, $p^*(U_p) = 0$. Кроме того, если V_1, V_2 — открытые множества, строго содержащие U_p , то $p^*(V_1) = p^*(V_2) = 1$; значит, $p^*(V_1 \cap V_2) = 1$ ввиду левой точности p^* , откуда $V_1 \cap V_2 \neq U_p$. Но это означает, что замкнутое

множество $X - U_p$ неприводимо; пусть x — его общая точка. Тогда, очевидно, функторы p^* и $(-)_x$ совпадают на всех подобъектах объекта 1 в $\text{Shv}(X)$, но поскольку оба они сохраняют копределы, они совпадают всюду. Итак, точка p определяется точкой пространства X , т. е. непрерывным отображением $Y \rightarrow X$.

Пусть теперь p, q — две точки из $\text{Shv}(X)$, и предположим, что имеется естественное преобразование $\eta: p \rightarrow q$. Тогда имеется отображение $p^*(U_q) \rightarrow q^*(U_q) = 0$, откуда $p^*(U_q) = 0$; значит, $U_q \subseteq U_p$, т. е. $p \leq q$ в смысле порядка из 7.23. Обратно, если $p \leq q$, то для любого $U \rightarrow 1$ либо $p^*(U) = 0$, либо $q^*(U) = 1$; поэтому имеется единственное отображение $p^*(U) \rightarrow q^*(U)$ (очевидно, естественное по U). Но в силу 7.13 p^* изоморфно левому расширению Кана своего ограничения на частично упорядоченное множество подобъектов в 1; следовательно, это отображение однозначно продолжается до естественного преобразования $p^* \rightarrow q^*$.

Рассмотрим теперь случай общего пространства Y . Пусть $\text{Shv}(Y) \xrightarrow{f} \text{Shv}(X)$ — геометрический морфизм. Тогда каждая точка y пространства Y задает точку $\mathcal{P} \xrightarrow{y} \text{Shv}(Y) \xrightarrow{f} \text{Shv}(X)$ топоса $\text{Shv}(X)$, т. е. точку (обозначаемую через $g(y)$) пространства X . Поэтому f определяет функцию из множества Y в множество X , и если U — открытое подмножество в X , то

$$g^{-1}(U) = \{y \in Y \mid (f^*U)_y = 1\} = f^*U.$$

Следовательно, g непрерывна и геометрический морфизм, индуцированный ею, изоморфен f . Рассуждения с естественными преобразованиями аналогичны предыдущим. $\square$

7.25 Теорема. Пусть топос $\mathcal{E}$, определенный над $\mathcal{P}$, имеет достаточно много точек и удовлетворяет (SG) (5.31). Тогда существует топологическое пространство (X, U) такое, что $\mathcal{E}$ эквивалентен $\text{Shv}(X, U)$.

Доказательство. Из 5.37 мы уже знаем, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathbf{H}, C)$, где $\mathbf{H}$ — полная гейтингова алгебра в $\mathcal{P}$ (а именно, $\mathbf{H} = \gamma_*(\Omega_{\mathcal{E}})$) и C — каноническая топология на $\mathbf{H}$. Поэтому достаточно найти пространство (X, U) с решеткой топологии U , изоморфной $\mathbf{H}$. Пусть X — достаточное множество точек в $\mathcal{E}$ (существующее в силу 7.17, так как топос $\mathcal{E}$ ограничен над $\mathcal{P}$); для любого подобъекта $U \rightarrow 1$ в $\mathcal{E}$ определим подмножество $\phi(U) \subseteq X$ как множество точек $\{p \in X \mid p^*(U) = 1\}$. Так как функторы p^* сохраняют конечные пределы и произвольные копределы, то отображение $\phi: \gamma_*(\Omega_{\mathcal{E}}) \rightarrow (\Omega_{\mathcal{P}})^X$ сохраняет конечные пересечения и произвольные объединения; поэтому образ ϕ является топологией (обозначим ее через U) на X . Но раз множество X достаточно, то ϕ — мономорфизм, ибо если $U_1 \neq U_2$, то (без потери общности) $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$ не есть изоморфизм, а потому существует точка $p \in X$ такая, что $p^*(U_1 \cap U_2) = 0$, а $p^*(U_1) = 1$,

иначе говоря, $p \in \phi(U_1)$, но $p \in \phi(U_2)$. Значит, имеется изоморфизм решеток $U \cong \gamma_*(\Omega_{\mathcal{E}})$, а потому и гейтинговых алгебр. $\square$

7.26 Определение. Топос, удовлетворяющий предположениям теоремы 7.25, называют *пространственным*. Через $\mathcal{E}\text{Top}$ обозначается полная под-2-категория в $\text{Top}/\mathcal{P}$, объектами которой являются пространственные топосы. $\square$

7.27 Следствие. *Имеется эквивалентность между 2-категориями $\mathcal{E}\text{Top}$ и sob , где последняя превращается в 2-категорию с помощью частичного порядка на hom -множествах, определенного в 7.23.*

Доказательство. В силу 7.24 функтор $\text{sob} \rightarrow \mathcal{E}\text{Top}$, $(X, U) \rightarrow \text{Shv}(X, U)$ является полным вложением, а в силу 7.25 и 7.22 он представителен (т. е. сюръективен с точностью до изоморфизма) на объектах. $\square$

7.3. Когерентные топосы

В этом параграфе будет введено одно важное условие малости для топосов Гротендика, которое (как мы увидим в § 7.4) имеет непосредственное отношение к геометрическим теориям, обсуждавшимся в предыдущей главе.

7.31 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а X — объект из $\mathcal{E}$.

(i) Объект X называется *компактным*, если любое эпиморфное семейство $\{Y_i \xrightarrow{f_i} X\}$ с концом в X содержит конечное эпиморфное подсемейство.

(ii) Объект X называется *стабильным*, если для любых морфизмов $S \rightarrow X \leftarrow T$ с компактными S и T расслоенное произведение $S \times_X T$ компактно.

(iii) Объект X называется *когерентным*, если он одновременно компактен и стабилен. $\square$

7.32 Примеры. (i) Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$, где X — топологическое пространство. Так как образ любого локального гомеоморфизма открыт, то легко убедиться, что объект топоса $\mathcal{E}$ компактен в том и только в том случае, когда пространство определения E соответствующего локального гомеоморфизма $E \xrightarrow{p} X$ компактно в обычном топологическом смысле. Аналогично, если E хаусдорфово, то соответствующий объект в $\mathcal{E}$ стабилен; однако обратное утверждение в этом случае не обязательно верно. Например, в $\text{Shv}(\mathbb{R})$ единственным компактным объектом является начальный объект, а потому все объекты стабильны.

(ii) Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{P}^G$, где G — группа. Так как любое под- G -множество в G -множестве M представимо в виде объединения G -орбит из M , то легко убедиться, что M компактно в том и только в том случае, когда множество $\varinjlim_G (M)$ G -орбит из M конечно. В частности, группа G , рассматриваемая как G -множест-

во, компактна. Если X — произвольное G -множество, то элемент $x \in X$ можно рассматривать как G -эквивариантное отображение $G \rightarrow X$; тогда G -орбиты расслоенного произведения $G \times_X G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами стабилизатора G_x элемента x в G . Поэтому, если X стабильно, то стабилизатор G_x должен быть конечен при всех $x \in X$; на самом деле, как легко проверить, это условие не только необходимо, но и достаточно. Так, например, если $G = \mathbb{Z}$, то G -множество стабильно тогда и только тогда, когда оно не имеет кручения, поскольку каждая ненулевая подгруппа в G бесконечна. Но если $G = C_{(p^\infty)}$ то каждая собственная подгруппа в G конечна, а потому G -множество X стабильно тогда и только тогда, когда в нем нет G -инвариантных точек, т. е. $\varprojlim^G (X) = 0$. $\square$

7.33 Лемма. Пусть (G, J) — некоторый сайт, а U — объект из G . Тогда пучок $l(U)$, ассоциированный с предпучком h_U , компактен в $\text{Shv}(C, J)$ в том и только в том случае, когда каждое J -покрывающее решето на U содержит конечное подсемейство $\{V_i \xrightarrow{\alpha_i} U \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ такое, что решето, порожденное морфизмами α_i , является J -покрывающим.

Доказательство. Предположим, что требуемое условие выполнено. Пусть $\{Y_i \xrightarrow{f_i} l(U) \mid i \in I\}$ — эпиморфное семейство. Тогда решето $\{V \xrightarrow{\alpha} U \mid l(\alpha) \text{ пропускается через } f_i \text{ при некотором } i\}$ должно быть J -покрывающим; пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — конечное подсемейство, порождающее некоторое покрывающее решето. Выберем одно f_i , соответствующее каждому α_i в отдельности; эти отображения образуют эпиморфное подсемейство в $\{f_i \mid i \in I\}$.

Обратно, предположим, что пучок $l(U)$ компактен. Тогда, если R — произвольное J -покрывающее решето на U , то семейство $\{l(\alpha) \mid \alpha \in R\}$ эпиморфно в $\text{Shv}(C, J)$, и если $\{l(\alpha_1), \dots, l(\alpha_n)\}$ — его конечное эпиморфное подсемейство, то решето, порожденное $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, должно быть J -покрытием. $\square$

7.34 Лемма. (i) Пусть X, Y — объекты топоса $\mathcal{E}$. Тогда объект $X \amalg Y$ компактен в том и только в том случае, когда X и Y одновременно компактны.

(ii) Эпиморфный образ компактного объекта компактен.

(iii) Копроизведение стабильных объектов стабильно.

(iv) Подобъект стабильного объекта стабилен.

Доказательство. (i) Предположим, что сумма $X \amalg Y$ компактна, а $\{Z_i \xrightarrow{f_i} X \amalg Y\}$ — эпиморфное семейство. Тогда семейство, составленное из морфизмов $Z_i \xrightarrow{v_i f_i} X \amalg Y$ и морфизма $Y \xrightarrow{v_2} X \amalg Y$, эпиморфно, поэтому оно имеет конечное эпиморфное

подсемейство. Отбрасывая морфизм v_2 , мы снова получаем конечное эпиморфное подсемейство, но в семействе f_i .

Обратно, предположим, что X и Y компактны, а $\{Z_i \xrightarrow{f_i} X \sqcup Y \mid i \in I\}$ — эпиморфное семейство. Пусть J, K — конечные подмножества в I , индексирующие эпиморфные подсемейства в $\{v_1^*(f_i) \mid i \in I\}$ и $\{v_2^*(f_i) \mid i \in I\}$; тогда $J \cup K$ индексирует конечное эпиморфное подсемейство для f_i .

(ii) Рассмотрим эпиморфизм $X \xrightarrow{f} Y$ с компактным X и эпиморфное семейство $\{Z_i \xrightarrow{g_i} Y \mid i \in I\}$. Тогда семейство $\{f^*(g_i) \mid i \in I\}$ также эпиморфно, а потому оно имеет конечное эпиморфное подсемейство (с индексами $i_1, \dots, i_n$, например). Предположим теперь, что пара $Y \xrightleftharpoons[h]{h} T$ уравнивается каждым из морфизмов $g_{i_1}, \dots, g_{i_n}$; тогда она уравнивается и морфизмом f , но f — эпиморфизм, а потому $h = k$.

(iii) Предположим, что X и Y стабильны и задана диаграмма $S \rightarrow X \sqcup Y \leftarrow T$ с компактными S и T . Обозначая $v_i^*(S)$ через S_i и т. п., получаем изоморфизмы $S \cong S_1 \sqcup S_2$ и $T \cong T_1 \sqcup T_2$; но в силу (i) все объекты S_i и T_i компактны. Значит, $S_1 \times_X T_1$ и $S_2 \times_X T_2$ компактны; однако произведение $S \times_{X \sqcup Y} T$ изоморфно копроизведению этих двух объектов.

Это доказывает требуемый результат для конечных копроизведений; что касается бесконечных копроизведений, то для них этого достаточно, поскольку для всякого морфизма $S \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ с компактным S имеется лишь конечное число индексов $i \in I$ с ненулевыми $v_i^*(S)$.

(iv) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ & \searrow & \\ & X & \xrightarrow{f} Y \\ & \nearrow & \\ T & & \end{array}$$

где S, T компактны, а Y стабилен. Поскольку f — мономорфизм, то $S \times_X T \cong S \times_X T$, а последний объект компактен, поэтому X стабилен. $\square$

7.35 Теорема (Гротендик). Пусть (C, J) — такой сайт, что C имеет конечные пределы, а топология J порождена некоторой предтопологией (0.34), каждое покрывающее семейство которой конечно. Тогда для каждого $U \in C_0$ пучок $l(U)$ в $\text{Shv}(C, J)$, ассоциированный с предпучком h_U , когерентен. Топос, который обладает некоторым сайтом определения, удовлетворяющим этим условиям, называется когерентным.

Доказательство. Из 7.33 мы уже знаем, что $l(U)$ компактен. Предположим, что в $\text{Shv}(C, J)$ задана диаграмма $X \xrightarrow{f} l(U) \xleftarrow{g} Y$ с компактными X и Y . Но всякий пучок X представим в виде копредела пучков, ассоциированных с представимыми предпучками, значит, в силу компактности имеется конечное эпиморфное семейство

$$\{l(V_i) \xrightarrow{p_i} X \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Аналогично, имеется конечное эпиморфное семейство

$$\{l(W_j) \xrightarrow{q_j} Y \mid j = 1, \dots, m\}.$$

Если топология J не субканоническая, то композиции $l(V_i) \xrightarrow{fp_i} l(U)$ и $l(W_j) \xrightarrow{gq_j} l(U)$ могут не получаться из морфизмов $V_i \xrightarrow{\alpha_i} U$ и $W_j \xrightarrow{\beta_j} U$ в C , но это верно локально, т. е. заменяя каждое V_i и W_j последующим (конечным) эпиморфным семейством, можно считать, что это выполнено. (Сравните с конструкцией функтора ассоциирования пучка из § 3.3.)

Произведение $l(V_i) \times_{l(U)} l(W_j) \cong l(V_i \times_U W_j)$ компактно в силу 7.33, но конечное семейство

$$\{l(V_i) \times_{l(U)} l(W_j) \xrightarrow{p_i \times q_j} X \times_{l(U)} Y \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$$

эпиморфно, откуда в силу 7.34 (i) и (ii) $X \times_{l(U)} Y$ компактно. Итак, пучок $l(U)$ стабилен. $\square$

Даже в когерентном топосе класс когерентных объектов не обязан быть замкнутым относительно образования произвольных коуравнителей (см. упражнение 8 ниже). Однако согласно следующему результату он замкнут относительно образования коуравнителей отношений эквивалентности.

7.36 Лемма. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, порожденный компактными объектами, X — когерентный объект в $\mathcal{E}$, а $R \rightrightarrows X$ — отношение эквивалентности с коуравнителем $X \xrightarrow{f} Y$. Тогда Y стабилен в том и только в том случае, когда R компактно.

Доказательство. Если Y стабилен, то, очевидно, $R \cong \cong X \times_Y X$ компактно.

Обратно, предположим, что R компактно и задана диаграмма $S \rightarrow Y \leftarrow T$ с компактными S и T . Так как топос $\mathcal{E}$ порождается компактными объектами, то имеется эпиморфное семейство $\{K_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} S \times_Y X \mid \alpha \in A\}$ с компактными K_α . Но поскольку f — эпиморфизм, то композиции $K_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} S \times_Y X \xrightarrow{\pi_1} S$ задают эпиморфное семейство; пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — индексы его конечного эпиморфного подсемейства. Так как R компактно, а X стабилен, то

$1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i\}$

$1, \dots, n, k = 1, \dots, p_i\}$

эпиморфно и семейство

$\dots, n, j = 1, \dots, m_i, k = 1, \dots$

$\dots, p_i\}$,

(W_{ih}) компактны в силу 7.35, а по-

X, Y и Z стабильны и задана диа-
граммой S и T . Тогда легко убедиться,

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & S \times_X T \\ & & \downarrow \\ & \longrightarrow & S \times_Z T \end{array}$$

из приведенного выше рассуждения про-
изводно. Значит, P стабильно.

Из равенства копроизведений вытекает из
стабильности и универсальности следует из
(1.57 и 1.51).

Существование коуравнителей отношений
7.36, а их универсальность — из 1.51.

Из отношений эквивалентности выте-
кает, что их уравнители лежат
уже знаем, что их уравнители лежат
можно вывести из 1.53, предполагая
эпиморфизм из $\mathcal{E}_{\text{coh}}$ является эпимор-

физм в $\mathcal{E}_{\text{coh}}$, а $Y \rightrightarrows Q$ — его коядер-
ная пара эпиморфизма $Y \rightrightarrows Y \rightarrow Q$ изо-
морфна образ f в $\mathcal{E}$ (см. 1.55), но I ко-
герентен, а значит, и когерент-
но, пара морфизмов $Y \rightrightarrows Q$ лежит в
совпадении, т. е. эпиморфность f в $\mathcal{E}$.
Поэтому каждый когерентный объект в $\mathcal{E}$
является коуравнителем некоторого компактного
на конечном каноническом копроиз-
ведения функтора I . Но имеется лишь мно-
жество пределов; поэтому мы можем их ис-
следовать в малой полной подкатегории в $\mathcal{E}_{\text{coh}}$
отношения является эквивалентностью

7.38 Определение ([GV], VI 3.11). Малая категория, удовлетворяющая первым четырем условиям из 7.37, называется *предтопосом*. На предтопосе $\mathbf{E}$ определим *предканоническую топологию* как топологию, порожденную предтопологией (0.31), покрывающими семействами которой являются все конечные эпиморфные семейства из $\mathbf{E}$. (Предположения универсальности из 7.37 (ii) и (iii) гарантируют выполнение для этих семейств всех условий из 0.31.) $\square$

Отметим, что предтопос является точной категорией в смысле Барра [2], поскольку эпиморфное произвольное морфизма может быть получено способом из 1.52. Обратно, (малая) точная категория $\mathbf{E}$ будет предтопосом в том и только в том случае, когда $\mathbf{E}$ имеет конечные копроизведения, которые дизъюнкты и универсальны, и каждый эпиморфизм в $\mathbf{E}$ является коуравнителем. А так как каждый эпиморфизм в предтопосе есть коуравнитель, то легко проверить, что предканоническая топология является субканонической, и в действительности она может быть охарактеризована как наибольшая субканоническая топология на $\mathbf{E}$, для которой каждый представимый предпучок компактен.

7.39 Лемма. Пусть $\mathbf{E}$ — предтопос, а P — предканоническая топология на $\mathbf{E}$. Тогда вложение Йонеды $\mathbf{E} \xrightarrow{h} \text{Shv}(\mathbf{E}, P)$ сохраняет конечные копроизведения и коуравнители отношений эквивалентности.

Доказательство. Отметим сначала, что начальный объект категории $\mathbf{E}$ (т. е. пустое копроизведение) P -покрывается пустым решетом, а потому h сохраняет его.

Пусть теперь $U \xrightarrow{\alpha} W \xleftarrow{\beta} V$ — диаграмма копроизведения в $\mathbf{E}$, а $R \rightarrow h_W$ — (очевидно, P -покрывающее) решетом, порожденное α и β . Так как квадрат

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & U \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \xrightarrow{\beta} & W \end{array}$$

декартов, то, очевидно, морфизм $R \rightarrow X$ из $\mathcal{P}^{\text{Eop}}$ определяется произвольной парой морфизмов $h_U \rightarrow X$, $h_V \rightarrow X$, совпадающих при ограничении на h_0 , т. е. квадрат

$$\begin{array}{ccc} h_0 & \xrightarrow{\quad} & h_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_V & \xrightarrow{\quad} & R \end{array}$$

кодекартов в $\mathcal{P}^{\text{Eop}}$. Применяя функтор ассоциирования пучка,

получаем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & h_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_V & \xrightarrow{\quad} & h_W \end{array}$$

в $\text{Shv}(\mathbf{E}, P)$, т. е. h_W есть копроизведение пучков h_U и h_V .

Аналогично, если $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$ — коуравнитель отношения эквивалентности в $\mathbf{E}$, а $R \rightarrow h_W$ — решетом, порожденное γ , то R является P -покрытием; с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, получаем, что оно совпадает с коуравнителем пары $h_U \rightrightarrows h_V$ в $\mathcal{P}^{\text{Eop}}$. Поэтому $h_U \rightrightarrows h_V \rightarrow h_W$ — коуравнитель в $\text{Shv}(\mathbf{E}, P)$. $\square$

7.40 Теорема (Гротендик). Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Следующие условия равносильны:

(i) $\mathcal{E}$ когерентен.

(ii) Существует предтопос $\mathbf{E}$ такой, что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(\mathbf{E}, P)$, где P — предканоническая топология на $\mathbf{E}$.

Более того, предтопос $\mathbf{E}$ определяется по $\mathcal{E}$ однозначно с точностью до эквивалентности.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно, поскольку сайт $(\mathbf{E}, P)$ удовлетворяет условиям из 7.35.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $\mathbf{E}$ — малая подкатегория категории $\mathcal{E}_{\text{coh}}$, построенная согласно 7.37 (v). Тогда в силу 7.37 $\mathbf{E}$ — предтопос, поэтому достаточно показать, что топология J на $\mathbf{E}$, индуцированная $\mathcal{E}$, является предканонической. Но, очевидно, $J \equiv P$, так как J субканоническая и каждый объект из $\mathbf{E}$ компактен. Далее, если $(V_i \rightarrow U)$ — конечное эпиморфное семейство в $\mathbf{E}$, то в силу рассуждений из 7.37 (iv) оно также эпиморфно в $\mathcal{E}$, а потому каждый объект из $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме пучка для этого семейства. Значит, $P \equiv J$.

Чтобы установить последнее утверждение теоремы, нужно показать, что если $\mathbf{E}$ — предтопос, то каждый когерентный объект топоса $\text{Shv}(\mathbf{E}, P)$ изоморфен представимому пучку. Но если пучок X когерентен в $\text{Shv}(\mathbf{E}, P)$, то имеется конечное эпиморфное семейство $\{h(U_i) \rightarrow X \mid i = 1, \dots, n\}$, а значит, и эпиморфизм

$$h \left(\prod_{i=1}^n U_i \right) \cong \prod_{i=1}^n h(U_i) \xrightarrow{f} X.$$

Обозначим $\prod U_i$ через U , а ядерную пару морфизма f — через $R \xrightarrow[\beta]{\alpha} h(U)$; тогда в силу 7.36 R компактен, а потому имеется

еще один эпиморфизм $h(V) \xrightarrow{g} R$. Ядерная пара для g совпадает

с ядерной парой композиции

$$h(V) \xrightarrow{g} R \xrightarrow{(a,b)} h(U) \times h(U) \cong h(U \times U),$$

но эта композиция получается из морфизма $V \rightarrow U \times U$ категории $\mathbf{E}$, так как функтор h полон и унивалентен. Следовательно, ядерная пара морфизма g лежит в образе h , а потому R и X лежат в образе h . Итак, предтопос $\mathbf{E}$ эквивалентен категории $\text{Shv}(\mathbf{E}, P)_{\text{coh}}$, а значит, определен по $\mathcal{E}$ однозначно с точностью до эквивалентности. $\square$

7.4. Теорема Делиния

Теперь мы докажем одну важную теорему Делиния ([GV], VI, 9.0), утверждающую, что каждый когерентный топос имеет достаточно много точек. Пусть $(\mathbf{C}, J)$ — некоторый сайт, удовлетворяющий предположениям из 7.35; мы будем работать с классом псевдоточек в $\mathbf{C}$ (7.15), которые задаются фильтрованными частично упорядоченными множествами. Пусть $P = (U_i | i \in I)$ и $Q = (V_k | k \in K)$ — две такие псевдоточки. Псевдоточку Q называют *измельчением* псевдоточки P , если существует сохраняющий порядок мономорфизм $I \rightarrow K$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad} & C^{\text{op}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ K & & \end{array}$$

коммутативна. Поэтому наша цель — показать, что любая псевдоточка из $\mathbf{C}$ имеет подходящее измельчение, которое уже является псевдоточкой из $(\mathbf{C}, J)$. Если $P = (U_i | i \in I)$ — псевдоточка, то для удобства той же буквой P обозначается функтор обратного образа, ею определяемый:

$$S^{\text{cop}} \rightarrow \mathcal{P}, \quad X \mapsto \lim_I (X(U_i)).$$

Существенный индукционный шаг требуемой конструкции содержит следующая

7.41 Лемма. Пусть $P = (U_i | i \in I)$ — псевдоточка в $\mathbf{C}$, X — некоторый J -пучок на $\mathbf{C}$, а x, y — два различных элемента из $P(X)$. Пусть $(V_j \rightarrow V | j = 1, \dots, n)$ — конечное J -покрывающее семейство в $\mathbf{C}$, а v — элемент из $P(h_v)$. Тогда существует такое измельчение Q псевдоточки P , что: (а) образы элементов x и y при естественном отображении $P(X) \rightarrow Q(X)$ различны и (б) образ элемента v в $Q(h_v)$ лежит в $\bigcup_{j=1}^n \text{im}(Q(h_{V_j}) \rightarrow Q(h_v))$.

Доказательство. По определению элемент v происходит из морфизма вида $U_{i_0} \rightarrow V$ при некотором $i_0 \in I$. Для каждого $i \geq i_0$ и каждого j образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \xrightarrow{\quad} & V_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \xrightarrow{\quad} & U_{i_0} \rightarrow V \end{array}$$

тогда семейство $(U_{ij} \rightarrow U_i | j = 1, \dots, n)$ является J -покрытием, а потому $X(U_i) \rightarrow \prod_{j=1}^n X(U_{ij})$ — мономорфизм. Но фильтрованные копределы сохраняют конечные произведения и мономорфизмы, поэтому имеется мономорфизм

$$P(X) = \lim_I X(U_i) \cong \lim_{(i_0/I)} X(U_i) \xrightarrow{\quad} \prod_{j=1}^n \left(\lim_{(i_0/I)} X(U_{ij}) \right).$$

В частности, можно указать такой номер k , что элементы x и y имеют разные обзоры в $\lim_{(i_0/I)} X(U_{ik})$. Пусть K — множество вида $I \times \{0\} \cup (i_0/I) \times \{1\}$ с упорядочением произведения (т. е. $(i, j) \leq (i', j')$ тогда и только тогда, когда $i \leq i'$ и $j \leq j'$); тогда соответствующая категория $\mathbf{K}$ фильтрована и сопоставление

$$(i, 0) \mapsto U_i, \quad (i, 1) \mapsto U_{ik}$$

определяет псевдоточку Q с индексами в $\mathbf{K}$. Очевидно, для любого предпучка Y на $\mathbf{C}$ имеется изоморфизм $Q(Y) \cong \lim_{(i_0/I)} Y(U_{ik})$; поэтому псевдоточка Q обладает требуемыми свойствами. $\square$

7.42 Лемма. Пусть K, X, x и y таковы, как в 7.41. Тогда существует такое измельчение Q псевдоточки P , что: (а) образы элементов x и y при естественном отображении $P(X) \rightarrow Q(X)$ различны и (б) для каждого объекта V из $\mathbf{C}$, каждого J -покрывающего решета R на V и каждого $v \in P(h_v)$ образ v в $Q(h_v)$ лежит в образе мономорфизма $Q(R) \rightarrow Q(h_v)$.

Доказательство. Обозначим через Z множество троек (V, R, v) , где $V \in \mathbf{C}_0$, R — конечно порожденное J -покрывающее решето на V , а $v \in P(h_v)$. Вводя на Z структуру некоторого вполне упорядоченного множества, мы можем индексировать его элементы некоторым ординалом α . Теперь по трансфинитной индукции определим последовательность псевдоточек $(Q_\beta | \beta \leq \alpha)$:

$$Q_0 = P.$$

Если $\beta = \gamma + 1$, то точка Q_β получается из точки Q_γ применением леммы 7.41 к конечному порождающему семейству $(V_{\gamma_j} \rightarrow V_\gamma | j = 1, \dots, n_\gamma)$ решета R_γ и к образу v_γ в $Q_\gamma(h_{V_\gamma})$.

Если β — предельный ординал, то Q_β есть единственное общее измельчение точек Q_γ ($\gamma < \beta$), фильтрованное частично упорядоченное множество которого является копределом частично упорядоченных множеств для Q_γ .

Тогда легко убедиться, что образы элементов x и y в $Q_\beta(X)$ различны при всех β и что при $\gamma < \beta$ образ элемента v_γ в $Q_\beta(h_{V_\gamma})$ лежит в образе множества $Q_\beta(R_\gamma)$. Следовательно, Q_α и есть требуемое измельчение точки P . $\square$

Псевдоточка Q , построенная в 7.42, не обязана удовлетворять условию из 7.15, поскольку некоторые элементы из $Q(h_v)$ могут не лежать в образе отображения $P(h_v) \rightarrow Q(h_v)$. Однако это можно исправить последующей индукцией длины ω .

7.43 Лемма. Пусть P, X, x и y таковы, как в 7.41. Тогда существует псевдоточка Q в (C, J) , являющаяся измельчением P и такая, что образы элементов x и y в $Q(X)$ различны.

Доказательство. Зададим последовательность псевдоточек P_n , полагая $P_0 = P$ и определяя P_{n+1} как измельчение P_n , построенное согласно 7.42. Пусть Q — копредел последовательности P_n ; тогда, очевидно, $Q(Y) = \lim P_n(Y)$ для любого предпучка Y

на C . Значит, элементы x и y имеют различные образы в $Q(X)$, и если $R \rightarrow h_v$ — некоторое J -покрывающее решето, то каждый элемент в $Q(h_v)$ происходит из некоторого элемента в $P_n(h_v)$ при некотором n , а потому — из элемента в $P_{n+1}(R)$. Следовательно, в силу 7.15 Q является псевдоточкой в (C, J) . $\square$

7.44 Теорема (Делинь). Каждый когерентный топос имеет достаточно много точек.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(C, J)$, где (C, J) — сайт, удовлетворяющий предположениям из 7.35. Достаточно показать, что для любой параллельной пары $Y \rightrightarrows X$ в $\mathcal{E}$ с $f \neq g$ имеется точка q в $\mathcal{E}$ такая, что $q^*(f) \neq q^*(g)$. Но, конечно, можно найти $U \in C_0$ и $u \in Y(U)$ с $f_U(u) \neq g_U(u)$; применим теперь 7.43 к этой паре элементов в $X(U)$, беря в качестве P псевдоточку в C , задаваемую тривиальной фильтрованной системой (U) . Тогда получим псевдоточку Q в (C, J) , а потому и точку q в $\mathcal{E}$ такую, что образ элемента u в $q^*(Y)$ имеет различные образы относительно $q^*(f)$ и $q^*(g)$. $\square$

Точно так же, как теорема 7.16 является категорным вариантом теоремы Лёвенгейма — Скулема, доказательство теоремы 7.44 должно напомнить теорему Гёделя — Генкина о полноте для финитарных теорий первого порядка. В действительности, как показали Маккаи и Рейес ([MR], [RM], [82]), этой связи между теоремой 7.44 и теоремой о полноте можно придать более явную

форму; сейчас мы приведем достаточно подробный набросок их рассуждений.

Пусть $\mathbb{T} = (\mathbb{J}, A)$ — финитарная геометрическая теория. Прежде чем обсуждать теорему о полноте для такой теории $\mathbb{T}$, необходимо уточнить понятие доказуемости в $\mathbb{T}$; иначе говоря, задать множество L секвенций языка $\mathbb{J}$, называемых *логическими аксиомами*, и множество *правил вывода*, которые позволяют из одних секвенций получать другие. Для экономии места мы не приводим здесь полного списка аксиом и правил вывода (интересующийся читатель может найти его в [22]); отметим только, что в *правиле силлогизма* (из $(\phi \vdash \psi)$ и $(\psi \vdash \chi)$ выводится $(\phi \vdash \chi)$) предполагается, что каждая свободная переменная формулы ψ встречается либо в ϕ , либо в χ . (Это соответствует ограничению на правило *modus ponens* в § 5.4 при обсуждении языка Митчела — Бенабу.) Секвенцию $(\phi \vdash \psi)$ языка $\mathbb{J}$ называют *доказуемой* в $\mathbb{T}$, если она получается из множества секвенций $L \cup A$ применением конечного числа правил вывода, а две формулы ϕ и ψ с одним и тем же множеством свободных переменных называют *доказуемо эквивалентными*, если секвенции $(\phi \vdash \psi)$ и $(\psi \vdash \phi)$ доказуемы в $\mathbb{T}$.

Теперь мы переходим к построению категории $C_{\mathbb{T}}$, называемой *синтаксической категорией* теории $\mathbb{T}$: объект категории $C_{\mathbb{T}}$ есть класс эквивалентности формул языка $\mathbb{Z}$ по отношению $\phi \sim \psi$, которое выполнено в том и только в том случае, когда формула ψ получается из формулы ϕ (сохраняющей тип) заменой переменных в ϕ . Чтобы определить морфизмы $\phi \rightarrow \psi$ в $C_{\mathbb{T}}$, прежде всего предположим, что ϕ и ψ не имеют общих свободных переменных (пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — свободные переменные формулы ϕ , а $(y_1, \dots, y_m)$ — свободные переменные формулы ψ). Тогда морфизм $\phi \rightarrow \psi$ определяется как класс доказуемо эквивалентных формул θ таких, что:

- (a) свободные переменные формулы θ суть в точности $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$,
- (b) θ «доказуема на графике функции из ϕ в ψ », т. е. в $\mathbb{T}$ доказуемы секвенции

$$\begin{aligned} \theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &\vdash \phi(x_1, \dots, x_n) \wedge \psi(y_1, \dots, y_m), \\ \phi(x_1, \dots, x_n) &\vdash \exists y_1 \dots \exists y_m \theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \wedge \theta(x_1, \dots, x_n, y'_1, \dots, y'_m) &\vdash \\ &\vdash \bigwedge_{i=1}^m (y_i = y'_i). \end{aligned}$$

[Во избежание путаницы мы обозначаем через $\{\phi\}$ класс эквивалентности формулы ϕ , рассматриваемый как объект категории

$\mathcal{C}_T$, а через $[\phi]$ — класс эквивалентности ϕ , рассматриваемый как морфизм.]

Определим композицию двух морфизмов

$$\{\phi(x)\} \xrightarrow{[\theta(x,y)]} \{\psi(y)\} \xrightarrow{[\eta(y,z)]} \{\chi(z)\}$$

в $\mathcal{C}_T$ как класс $[\exists y \theta(x, y) \wedge \eta(y, z)]$; тождественным морфизмом на $\{\phi(x)\}$ является морфизм

$$\{\phi(x)\} \xrightarrow{[x=x' \wedge \phi(x)]} \{\phi(x')\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{C}_T$ — действительно категория. Более того, $\mathcal{C}_T$ имеет конечные пределы; объект {истина} является конечным (так как для любой формулы ϕ морфизм $[\phi]$, как легко убедиться, является единственным морфизмом из $\{\phi\}$ в {истина}), а расслоенное произведение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & \{\psi(y)\} & \\ & \downarrow [\eta(y,z)] & \\ \{\phi(x)\} & \xrightarrow{[\theta(x,z)]} & \{\chi(z)\} \end{array}$$

задается объектом $\{\exists z (\theta(x, z) \wedge \eta(y, z))\}$. (В действительности категория $\mathcal{C}_T$ регулярна и имеет универсальные конечные объединения подобъектов; однако эта дополнительная информация в дальнейшем нам не понадобится.)

Семейство морфизмов

$$\{\{\phi_i(x_i)\} \xrightarrow{[\theta(x_i,y)]} \{\psi(y)\} \mid i = 1, \dots, n\}$$

называется *доказуемо эпиморфным*, если в T доказуема секвенция

$$\psi(y) \vdash \bigvee_{i=1}^n \exists x_i \theta_i(x_i, y).$$

Снова непосредственно проверяется, что конечные доказуемо эпиморфные семейства задают предтопологию на $\mathcal{C}_T$; через J_T обозначается порожденная ею топология. Отметим, что топология J_T субканоническая, ибо если

$$\{\phi_i(x_i)\} \xrightarrow{[\eta_i(x_i,z)]} \{\chi(z)\}$$

— совместимое семейство морфизмов относительно доказуемо эпиморфного семейства $([\theta_i(x_i, y)])$, то любая факторизация морфизмов η_i через θ_i доказуемо эквивалентна

$$\left[\bigvee_{i=1}^n \exists x_i (\theta(x_i, y) \wedge \eta_i(x_i, z)) \right].$$

В тех случаях, когда категория $\mathcal{C}_T$ оказывается предтопосом, топология J_T является просто предканонической топологией в смысле определения 7.38.

7.45 Теорема (Жуаяль — Рейес). Пусть T — финитная геометрическая теория. Тогда топос $\text{Shv}(\mathcal{C}_T, J_T)$ является классифицирующим топосом для T -моделей в топосах Гротендика.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, а M — некоторая T -модель в $\mathcal{E}$. Конструкция интерпретации любой формулы ϕ языка $\mathbb{L}$ объектом $M\phi$ в $\mathcal{E}$, данная в § 6.5, фактически определяет функтор $\mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{E}$. (Для доказательства этого нужна теорема когерентности для теории T , т. е. доказательство справедливости в каждой модели теории T секвенции, которая доказуема в T , а это получается непосредственной индукцией.) Более того, этот функтор точен слева и преобразует доказуемо эпиморфные семейства из $\mathcal{C}_T$ в эпиморфные семейства в $\mathcal{E}$; поэтому в силу 7.13 он определяет геометрический морфизм $\mathcal{E} \rightarrow \text{Shv}(\mathcal{C}_T, J_T)$. Обратно, предположим, что задан точный слева и непрерывный функтор $T: \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{E}$. Тогда можно определить интерпретацию M языка $\mathbb{L}$ в $\mathcal{E}$, положив

$$M_x = T(\{x = x\}), \quad M_a = T(\{\alpha(x_1, \dots, x_n) = y\}),$$

$$M_r = T(\{r(x_1, \dots, x_n)\});$$

непосредственная индукция показывает, что $M\phi \cong T(\{\phi\})$ для любой формулы ϕ . В частности, из этого вытекает, что M — модель теории T , и функтор $\mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{E}$, индуцированный ею, естественно изоморфен функтору T . Отсюда получается эквивалентность категорий $T(\mathcal{E}) \simeq \text{Exp}/\mathcal{P}(\mathcal{E}, \text{Shv}(\mathcal{C}_T, J_T))$. $\square$

На первый взгляд кажется, что теорема 7.45 не имеет никаких существенных преимуществ перед семантической конструкцией классифицирующего топоса теории T из 6.56. Конечно, эта теорема показывает, что $\mathcal{P}[T]$ — когерентный топос; однако на самом деле эту информацию можно также извлечь тщательным анализом «топологий вынуждения», использованных в доказательстве теоремы 6.56. Реальное же преимущество синтаксической конструкции топоса $\mathcal{P}[T]$ заключено в возможности получить теорему о полноте для финитарных геометрических теорий прямо из теоремы 7.44:

7.46 Следствие. Пусть T — финитарная геометрическая теория. Тогда секвенция $(\phi \vdash \psi)$ доказуема в T в том и только в том случае, когда она верна в каждой T -модели в $\mathcal{P}$.

Доказательство. Обозначим через M общую T -модель в $\text{Shv}(\mathcal{C}_T, J_T)$. Поскольку точный слева непрерывный функтор $\mathcal{C}_T \rightarrow \text{Shv}(\mathcal{C}_T, J_T)$, соответствующий M , есть просто вложение Йонеды, то легко убедиться, что секвенция $(\phi \vdash \psi)$ верна в M

тогда и только тогда, когда она доказуема в $\mathbb{T}$. Но топос $\text{Shv}(C_T, J_T)$ когерентен, а потому в силу 7.44 он имеет достаточно много точек; значит, секвенция верна в M тогда и только тогда, когда она верна в каждой $\mathbb{T}$ -модели в $\mathcal{P}$. $\square$

Следует отметить, что предыдущее рассуждение можно обратить и вывести теорему Делиния из теоремы о полноте. Наиболее существенным шагом в этом направлении является следующий результат:

7.47 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный топос. Тогда существует финитарная геометрическая теория $\mathbb{T}$ такая, что $\mathcal{E} \simeq \mathcal{P}[\mathbb{T}]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(C, J)$, где (C, J) — некоторый сайт, удовлетворяющий предположениям из 7.35. Мы дадим геометрическое представление «теории точных слева непрерывных функторов на C »; в силу 7.13 этого достаточно для доказательства.

При конструкции языка $\mathbb{T}$ возьмем в качестве типа каждый объект из C , а в качестве функционального символа сигнатуры $(U; V)$ каждый морфизм $U \xrightarrow{\alpha} V$ из C . В качестве аксиом теории $\mathbb{T}$ берутся следующие секвенции:

- (a) секвенция истина $\vdash 1_U(u) = u$ для каждого объекта U ;
- (b) секвенция

$$\text{истина} \vdash \beta\alpha(u) = \beta(\alpha(u))$$

для каждой компонентой пары;

- (c) секвенции истина $\vdash i = i'$ и истина $\vdash \exists i (i = i)$, где i, i' — переменные типа 1;
- (d) секвенции

$$\gamma(u) = \delta(v) \vdash \exists p (\alpha(p) = u \wedge \beta(p) = v)$$

и

$$\alpha(p) = \alpha(p') \wedge \beta(p) = \beta(p') \vdash p = p'$$

для каждого декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & U \\ \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ V & \xrightarrow{\delta} & W \end{array}$$

(e) секвенция

$$u = u \vdash \bigvee_{i=1}^n \exists v_i (\alpha_i(v_i) = u),$$

где дизъюнкция справа интерпретируется как ложь при $n=0$, для каждого конечного J -покрывающего семейства

$$(V_i \xrightarrow{\alpha_i} U \mid i = 1, \dots, n).$$

(Отметим, что если сайт (C, J) является предтопосом с его предканонической топологией, то аксиомы группы (e) можно заменить аксиомами, относящимися к конечным копроизведениям и коуравнителям отношений эквивалентности, поскольку эпиморфных семейств, ассоциированных с ними, достаточно для порождения нужной топологии.)

Теперь легко проверить, что интерпретация теории $\mathbb{T}$ в некотором топосе $\mathcal{F}$, удовлетворяющая аксиомам (a) и (b), есть просто функтор $C \rightarrow \mathcal{F}$, и этот функтор удовлетворяет аксиомам (c) и (d) тогда и только тогда, когда он точен слева, и аксиоме (e) тогда и только тогда, когда он непрерывен. $\square$

Из доказательства предложения 7.47 очевидно, что если обобщить наше определение геометрического языка, допустив бесконечные дизъюнкции формул (но с ограничением, что число свободных переменных любой формулы конечно), то каждый топос Гротендика будет описываться как классифицирующий топос некоторой обобщенной геометрической теории. На самом деле имеется и обратный результат; подходящее изменение конструкции синтаксического сайта (C_T, J_T) позволяет построить классифицирующий топос для любой обобщенной геометрической теории. Конечно, существуют топосы без точек, поэтому мы не смеем надеяться получить теорему о полноте для этих обобщенных теорий, близкую к 7.46; однако теорему Барра, которую мы докажем в следующем параграфе, можно рассматривать как булевозначную теорему о полноте, т. е. как утверждение, что доказуемость равносильна истинности в каждой булевозначной модели. Здесь мы не будем развивать эту идею; гораздо более подробный обзор теории топосов Гротендика с этой точки зрения читатель может найти в [MR].

Этот параграф мы закончим двумя замечаниями, относящимися к финитарным геометрическим теориям; второе из них выполняет обещание, данное в § 6.5.

7.48 Замечание. Предположим, что когерентный топос $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG). Тогда в силу 7.44 топос $\mathcal{E}$ имеет достаточно много точек, а потому в силу теоремы 7.25 он пространствен, т. е. существует такое топологическое пространство X , что $\mathcal{E} \simeq \text{Shv}(X)$. Из описания компактных объектов в $\text{Shv}(X)$, данного в 7.32 (i), нетрудно вывести, что топос $\text{Shv}(X)$ когерентен в том и только в том случае, когда множество компактных открытых подмножеств в X замкнуто относительно конечных пересечений и задает базис топологии пространства X . Если потребовать дополнительно трезвость X (7.21 (ii)), то это будет в точности определением спектрального пространства по Хохстеру [169]. Ввиду примера 6.59 (i) мы можем теорему Хохстера о том, что каждое спектральное пространство гомеоморфно простому спектру некоторого коммутативного кольца, интерпретировать как утверждение, что каждая финитарная геометрическая теория, класси-

фицирующий топос которой удовлетворяет (SG), эквивалентна по Морите теории локализаций некоторого коммутативного кольца. $\square$

7.49 Замечание. Пусть (C, J) — сайт, удовлетворяющий предположениям из 7.35. Из 7.47 мы знаем, как представить теорию точек в $\text{Shv}(C, J)$ в виде финитарной геометрической теории; также имеется следующее представление теории пучков на (C, J) : снова в качестве типа мы берем каждый объект из C , а в качестве функционального символа сигнатуры $(V; U)$ на этот раз берем каждый морфизм $U \xrightarrow{\alpha} V$ из C . В качестве аксиом берем:

- (a) секвенцию истина $\vdash 1_U(u) = u$ для каждого объекта U ;
- (b) секвенцию

$$\text{истина} \vdash \beta\alpha(w) = \alpha(\beta(w))$$

для каждой пары компонент морфизмов $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$;

- (c) для каждого конечного J -покрывающего семейства $(V_i \xrightarrow{\alpha_i} U \mid i = 1, \dots, n)$ секвенции

$$\bigwedge_{i=1}^n (\alpha_i(u) = \alpha_i(u')) \vdash u = u'$$

и

$$\bigwedge_{i,j} (\beta_{ij}(v_i) = \gamma_{ij}(v_j)) \vdash \exists u \left(\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i(u) = v_i \right),$$

где квадраты

$$\begin{array}{ccc} W_{ij} & \xrightarrow{\beta_{ij}} & V_i \\ \downarrow \gamma_{ij} & & \downarrow \alpha_i \\ V_j & \xrightarrow{\alpha_j} & U \end{array}$$

декартовы.

Обозначив через $\mathcal{S}$ предыдущую теорию, убеждаемся, что $\mathcal{S}$ -модель в топосе Гротендика $\mathcal{F}$ есть просто пучок $\mathcal{F}$ -объектов на (C, J) , т. е. функтор $C^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}$, удовлетворяющий аксиоме пучка (в диаграммной форме) для каждого J -покрывающего семейства. Но из 4.35 и 4.47 легко вывести, что категория таких пучков есть просто расслоенное произведение $\mathcal{F} \times_{\mathcal{P}} \text{Shv}(C, J)$ в $\mathcal{E}\text{op}/\mathcal{P}$; поэтому имеются эквивалентности

$$\mathcal{E}\text{op}/\mathcal{P}(\mathcal{F}, \mathcal{P}[\mathcal{S}]) \simeq \mathcal{F} \times_{\mathcal{P}} \text{Shv}(C, J) \simeq$$

$$\simeq \mathcal{E}\text{op}/\mathcal{P}(\mathcal{F} \times_{\mathcal{P}} \text{Shv}(C, J), \mathcal{P}[U]),$$

т. е. топос $\mathcal{P}[\mathcal{S}]$ является экспонентой $\mathcal{P}[U]^{\text{Shv}(C, J)}$ в $\mathcal{E}\text{op}/\mathcal{P}$.

Более того, если D — произвольная малая категория, а $\mathbb{D}$ — теория диаграмм типа D , то экспоненту $\mathcal{P}[D]^{\text{Shv}(C, J)}$ можно построить как классификатор теории диаграмм типа D в $\text{Shv}(C, J)$. Но тогда для любой топологии k в $\mathcal{P}[D]$ мы можем, используя топологии вынуждения, как и в 6.60 (iii), получить экспоненту $\text{sh}_k(\mathcal{P}[D])^{\text{Shv}(C, J)}$. Но топос $\mathcal{P}^{\text{Dop}}$ представим ввиду пучкового подтопоса в $\mathcal{P}[D]$ относительно включения, которое представляет теорию плоских предпучков на D^{op} как частную теорию диаграмм типа D , откуда можно получить экспоненту $\text{Shv}(D, L)^{\text{Shv}(C, J)}$ для любого топоса Гротендика $\text{Shv}(D, L)$. $\square$

7.5. Теорема Барра

Как мы уже знаем из § 7.1, существование достаточного множества точек $\mathcal{P}$ -топоса $\mathcal{E}$ эквивалентно существованию сюръекции $\mathcal{P}/K \rightarrow \mathcal{E}$ для некоторого множества K . Однако для многих целей достаточно потребовать выполнение более слабого предположения, а именно, что существует сюръекция $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, где топос $\mathcal{F}$ удовлетворяет (AC). Например, если мы хотим доказать коммутативность определенной диаграммы в $\mathcal{E}$ или то, что некоторая ее часть является конечным пределом или копределом, то достаточно (поскольку функтор f^* точен и унивалентен) доказать нужный результат для соответствующей диаграммы в $\mathcal{F}$, а при его доказательстве в $\mathcal{F}$ может оказаться полезным то, что эпиморфизмы расщепимы, а мономорфизмы имеют дополнения.

Существование такой сюръекции для произвольного топоса Гротендика впервые доказал Барр [4]; однако первый шаг его рассуждений мы слегка упростим, следуя Дяконеску.

7.51 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Тогда существует сюръекция $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ такая, что топос $\mathcal{F}$ удовлетворяет (SG).

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(C, J)$. Сначала мы докажем требуемый результат для предпучкового топоса $\mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$, а затем для самого топоса $\mathcal{E}$.

Пусть P — частично упорядоченное множество, объектами которого являются все конечные компоненты последовательности морфизмов из C (т. е. n -ки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с $d_1(\alpha_i) = d_0(\alpha_{i+1})$ при $1 \leq i < n$), упорядоченные так, что $w_1 \leq w_2$ в том и только в том случае, когда w_2 заканчивает w_1 (т. е. когда существуют морфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такие, что $w_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, w_2)$). Отображение $d: P \rightarrow C_0$, переводящее $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в $d_0(\alpha_1)$, очевидным образом продолжается до функтора $(P \rightarrow C)$, и этот функтор очевидно сюръективен на объектах. Значит (см. упражнение 4.2), он индуцирует геометрический морфизм $\mathcal{P}^{\text{Dop}} \xrightarrow{d} \mathcal{P}^{C^{\text{op}}}$, являющийся сюръекцией; но в силу 5.34 (i) топос $\mathcal{P}^{\text{Dop}}$ удовлетворяет (SG).

Определим теперь топологию Гротендика K на P , считая решетку $S \rightarrow h_w$ K -покрывающим тогда и только тогда, когда для всех $w' \leq w$ множество

$$\{d(w'') \rightarrow d(w') \mid w'' \leq w' \text{ и } w'' \in S\}$$

является J -покрывающим решетом на $d(w')$. То, что указанные решета удовлетворяют первым двум условиям из 0.32, проверяется непосредственно; для проверки третьего условия рассмотрим два решета S и T на w такие, что S — K -покрывающее решетом и для каждого $w' \in S$ решетом $\{w'' \in T \mid w'' \leq w'\}$ является K -покрывающим на w' . Тогда для любого $w_0 \leq w$ решетом

$$\{d(w') \rightarrow d(w_0) \mid w' \leq w_0 \text{ и } w' \in S\}$$

является J -покрывающим, и для каждого такого w' решетом

$$\{d(w'') \rightarrow d(w') \mid w'' \leq w' \text{ и } w'' \in T\}$$

является J -покрывающим на $d(w')$. Отсюда в силу условия 0.32 (iii) для J решетом

$$\{d(w'') \rightarrow d(w_0) \mid w'' \leq w_0 \text{ и } w'' \in T\}$$

является J -покрывающим, а потому T является K -покрывающим.

Теперь утверждается, что мономорфизм $R \xrightarrow{\sigma} X$ из $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ J -плотен в том и только в том случае, когда K -плотен его обратный образ $d^*R \xrightarrow{d^*\sigma} d^*X$ в $\mathcal{P}^{\text{pop}}$. Очевидно, при доказательстве этого можно предполагать, что объект X представим, т. е. $X = h_v$; поэтому остается показать, что R является J -покрывающим решетом на U в том и только в том случае, когда для каждого $w \in P$ и каждого $d(w) \xrightarrow{\alpha} U$ из C решетом

$$\{\psi' \leq w \mid d(w') \rightarrow d(w) \xrightarrow{\alpha} U \in R(d(w'))\}$$

является K -покрывающим. Но если решетом R является J -покрывающим, то J -покрывающим будет и подъем α^*R , а потому решетом, указанное выше, является K -покрывающим. Обратно, если указанное выше условие выполнено, то возьмем $w = (1_v)$ и $\alpha = 1_v$, откуда сразу получим, что решетом R должно быть J -покрывающим.

Согласно предыдущему и 3.47 композиция

$$\text{Shv}(P, K) \rightarrow \mathcal{P}^{\text{pop}} \xrightarrow{d} \mathcal{P}^{\text{cop}}$$

пропускается через включение $\text{Shv}(C, J) \xrightarrow{i} \mathcal{P}^{\text{cop}}$, и факторизация $\text{Shv}(P, K) \xrightarrow{\bar{d}} \text{Shv}(C, J)$ является сюръекцией, ибо если $\bar{d}^*\sigma$ — изоморфизм в $\text{Shv}(P, K)$, то морфизм $i_*(\sigma) J$ -биplotен в

$\mathcal{P}^{\text{cop}}$, а потому σ — изоморфизм в $\text{Shv}(C, J)$. Но тоpos $\text{Shv}(P, K)$ удовлетворяет (SG) в силу 5.34. $\square$

7.52 З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \text{Shv}(P, K) & \xrightarrow{d} & \text{Shv}(C, J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}^{\text{pop}} & \xrightarrow{d} & \mathcal{P}^{\text{cop}} \end{array}$$

декартов в $\mathcal{S}\text{or}$, т. е. K — топология подъема, определенная в 3.59 (iii). Однако в общем случае неверно, что если имеется такой декартов квадрат с сюръекцией d , то $\bar{d}$ — сюръекция (см. упражнение 1 ниже); именно поэтому в 7.51 нам понадобилось явное описание топологии K . $\square$

На следующем этапе доказательства теоремы Барра нам требуется результат, утверждающий, что для любого (элементарного) топоса $\mathcal{E}$ имеется сюръекция $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ с булевым топосом $\mathcal{B}$. При доказательстве этого факта мы следуем рассуждению Фрейда [FK].

7.53 Л е м м а. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — параллельная пара морфизмов

в топосе $\mathcal{E}$ такая, что $f \neq g$. Тогда существуют булев топос $\mathcal{B}$ и геометрический морфизм $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ такие, что $p^*f \neq p^*g$.

Доказательство. Предположим, что $X = 1$, так что f и g — глобальные элементы в Y . Пусть $U \rightarrow 1$ — их уравниватель; тогда $U \neq 1$, а потому топос $\text{sh}_{j_U} \mathcal{E}$ невырожден, так как U является j_U^c -пучком. Обозначим через p композицию включений

$$\mathcal{B} = \text{sh}_{\neg \neg} \left(\text{sh}_{j_U^c}(\mathcal{E}) \right) \xrightarrow{i_1} \text{sh}_{j_U^c}(\mathcal{E}) \xrightarrow{i_2} \mathcal{E},$$

но $\text{eq}(i_2^*f, i_2^*g) \cong i_2^*U \cong 0$ в $\text{sh}_{j_U^c}(\mathcal{E})$, откуда $\text{eq}(p^*f, p^*g) \cong i_1^*0 \cong 0$ в $\mathcal{B}$. Но так как 0 является $\neg \neg$ -пучком в любом топосе (5.18), то топос $\mathcal{B}$ невырожден, а значит, $p^*f \neq p^*g$.

Рассмотрим теперь общий случай. Если применить предыдущие рассуждения к морфизмам f и g , рассматриваемым как глобальные элементы $\hat{f}$ и $\hat{g}$ объекта X^*Y в топосе $\mathcal{E}/X$, то получим геометрический морфизм $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}/X$ с булевым топосом $\mathcal{B}$ и $p^*\hat{f} \neq p^*\hat{g}$. А так как $\hat{f}$ есть композиция $1 \xrightarrow{x} X^*X \xrightarrow{X^*f} X^*Y$, где x — общий элемент объекта X , то $p^*X^*f \neq p^*X^*g$; поэтому композиция морфизмов $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

Конечно, композиция включений $\text{sh}_{\neg\neg}(\text{sh}_{ju}(\mathcal{E})) \rightarrow \text{sh}_{ju}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, построенная в первой части доказательства леммы 7.53, в силу 4.15 (i) может быть задана одной топологией в $\mathcal{E}$. В действительности, как легко убедиться, эта топология является интерпретацией формулы $((\omega \vee u) \Rightarrow u) \Rightarrow u$ языка $L_{\mathcal{E}}$, где ω — переменная типа Ω , а $1 \xrightarrow{u} \Omega$ — классифицирующее отображение подобъекта $U \rightarrow 1$. Действительно, в силу 3.53 некоторый подобъект объекта X ju -замкнут в том и только в том случае, когда он содержит подобъект $X \times U \xrightarrow{\pi_1} X$; значит, классификатор Ω_{ju} замкнутых подобъектов есть в точности сегмент $\uparrow \text{seg}(u) \rightarrow \Omega$ и, в частности, его минимальный элемент является факторизацией $1 \xrightarrow{u} \Omega$ через $\uparrow \text{seg}(u)$. Эта топология называется *квази-замкнутой топологией*, определяемой U , и обозначается через q_U .

7.54 Предложение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Тогда существует сюръекция $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$, где $\mathcal{B}$ — булев топос. Более того, если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG), то топос $\mathcal{B}$ можно выбрать также удовлетворяющим (SG).

Доказательство. Рассмотрим общий подобъект $1 \xrightarrow{t} \Omega$ как подобъект в 1_{Ω} топоса $\mathcal{E}/\Omega$, обозначим через $\mathcal{B}$ топос $\text{sh}_{q_t}(\mathcal{E}/\Omega)$, а через p композицию геометрических морфизмов $\text{sh}_{q_t}(\mathcal{E}/\Omega) \rightarrow \mathcal{E}/\Omega \rightarrow \mathcal{E}$. Тогда, конечно, топос $\mathcal{B}$ булев; покажем, что p — сюръекция.

Пусть (f, g) — параллельная пара морфизмов в $\mathcal{E}$ такая, что $f \neq g$; тогда в силу леммы 7.53 существует $\mathcal{E}$ -топос вида $\text{sh}_{q_U}(\mathcal{E}/X)$, где X — объект из $\mathcal{E}$, а U — подобъект 1_X в $\mathcal{E}/X$, в котором f и g остаются различными. Пусть $X \xrightarrow{\phi} \Omega$ — классифицирующее отображение подобъекта U , рассматриваемого как подобъект объекта X в $\mathcal{E}$, так как функтор замены базы ϕ^* является логическим, то легко убедиться, что $\phi^*(q_t) = q_U$, а потому любой q_t -плотный мономорфизм из $\mathcal{E}/\Omega$ переходит при замене базы ϕ^* в q_U -плотный мономорфизм топоса $\mathcal{E}/X$. Следовательно, в силу 3.42 и 3.47 имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \text{sh}_{q_U}(\mathcal{E}/X) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}/X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ \text{sh}_{q_t}(\mathcal{E}/\Omega) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}/\Omega & & \end{array}$$

в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}/\Omega$, где морфизм $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/\Omega$ индуцирован ϕ . Значит, f и g должны оставаться различными в $\text{sh}_{q_t}(\mathcal{E}/\Omega)$, т. е. $p^*f \neq p^*g$.

Последнее утверждение доказываемого предложения вытекает непосредственно из 5.34, так как категорию $\mathcal{E}/\Omega$ можно рассматривать как топос внутренних диаграмм на дискретной категории Ω . $\square$

Понутно из 7.54 получается доказательство известной в теории решеток теоремы о вложении, восходящей к Фунае [164]:

7.55 Следствие. Пусть H — полная гейтингова алгебра (в $\mathcal{P}$). Тогда существует булева алгебра B и вложение $H \rightarrow B$, которое сохраняет конечные пересечения и произвольные объединения.

Доказательство. Применим 7.54 к топосу $\mathcal{E} = \text{Shv}(H, C)$, где C — каноническая топология. Тогда получим сюръекцию $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$, где топос $\mathcal{B}$ булев. Ограничивая функтор p^* на подобъекты объекта 1 в $\mathcal{E}$, приходим к сохраняющему порядок отображению алгебры H в булеву алгебру подобъектов объекта 1 в $\mathcal{B}$. Но поскольку p^* отражает изоморфизмы, то это отображение является мономорфизмом, и оно сохраняет конечные пересечения и произвольные объединения, так как p^* сохраняет конечные пределы и произвольные копределы. $\square$

7.56 Замечание. В действительности, используя идеи из 7.53 и 7.54, можно предложить доказательство теоремы Фунае, не выходящее за рамки теории решеток. Для гейтинговой алгебры H обозначим через $H_{\neg\neg}$ булеву алгебру регулярных элементов в H (5.16) и для каждого $u \in H$ рассмотрим отображение

$$P(u): H \rightarrow (\uparrow \text{seg}(u))_{\neg\neg}; \quad x \mapsto (((x \vee u) \Rightarrow u) \Rightarrow u).$$

Нетрудно проверить, что отображение $P(u)$ сохраняет конечные пересечения и произвольные объединения (последнее верно, поскольку оно сопряжено слева к включению $(\uparrow \text{seg}(u))_{\neg\neg} \rightarrow H$) и что морфизм $H \rightarrow \prod_{u \in H} (\uparrow \text{seg}(u))_{\neg\neg}$, u -я компонента которого есть $P(u)$, является мономорфизмом.

Отметим также, что 7.54, по крайней мере в случае, когда топос $\mathcal{E}$ определен над $\mathcal{P}$ и удовлетворяет (SG) (что нам и нужно в 7.57 ниже), может быть получено в качестве следствия из 7.55. Действительно, в силу 5.37 можно считать, что топос $\mathcal{E}$ имеет вид $\text{Shv}(H, C)$, где H — полная гейтингова алгебра, а C — ее каноническая топология, а тогда условия на вложение $H \xrightarrow{p} B$ из 7.55 гарантируют левую точность и непрерывность композиции функторов $H \xrightarrow{p} B \xrightarrow{i} \text{Shv}(B, C)$ для канонической топологии на H (а потому эта композиция индуцирует геометрический морфизм $\text{Shv}(B, C) \rightarrow \text{Shv}(H, C)$ в силу 7.13). Наконец, этот морфизм является сюръекцией, так как p — мономорфизм, но в силу 5.39 топос $\text{Shv}(B, C)$ булев и удовлетворяет (SG). $\square$

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы этого параграфа:

7.57 Теорема (Барр [4]). Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика (и предположим, что (AC) выполнена в $\mathcal{P}$). Тогда существует топос $\mathcal{B}$, удовлетворяющий (AC), и сюръекция $\mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$.

Доказательство. В силу 7.51 имеется сюръекция $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, где $\mathcal{F}$ удовлетворяет (SG). Но тогда в силу 7.54 имеется сюръекция $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$, где $\mathcal{B}$ булев и удовлетворяет (SG), откуда в силу 5.39 $\mathcal{B}$ удовлетворяет (AC). $\square$

7.58 Замечание. В силу 4.15 (ii) теорему 7.57 можно перефразировать, сказав, что каждый топос Гротендика имеет вид $\mathcal{B}_G$, где $\mathcal{B}$ — топос, удовлетворяющий одному из условий теоремы 5.39, а G — точная слева комонада на $\mathcal{B}$. При этом возникает вполне естественный вопрос: всякий ли топос вида $\mathcal{B}_G$ является топосом Гротендика? На самом деле, как можно установить методами, близкими к методам, введенным в упражнении 4.11, этот топос будет топосом Гротендика в том и только в том случае, когда функторная часть комонады G имеет ранг. $\square$

Упражнения к главе 7

1. Пусть K — множество точек топоса $\mathcal{E}$, а j — топология в $\mathcal{E}$. Докажите, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}/L & \longrightarrow & \text{sh}_j(\mathcal{E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}/K & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

декартов, где L — множество точек в K , которые пропускаются через функтор $\text{sh}_j(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Используя 7.12 (iii), выведите отсюда, что подъем сюръекции в $\mathcal{E}$ не обязан быть сюръекцией. Покажите также (используя тот же пример), что решетка пучковых подтопосов в $\mathcal{E}$ не обязана быть гейтинговой алгеброй.

2. Докажите, что топос $\text{Shv}(\mathbb{R})$ является классифицирующим для вещественных чисел по Дедекунду в топосах Гротендика. Воспользуйтесь 7.13, беря за сайт определения топоса $\text{Shv}(\mathbb{R})$ сайт, определенный на категории, представляющей собой частично упорядоченное множество открытых интервалов с рациональными концами.

3. (Роос [104]). Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Покажите, что функтор $\mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}$ имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда он представим. Выведите отсюда, что функтор ϕ является обратным образом существенной точки из $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда он имеет вид $\text{hom}_{\mathcal{E}}(P, -)$, где объект P проективен, связан (т. е. не разложим в нетривиальное копроизведение) и не изоморфен 0. (Такой объект P называют *существенным объектом* в $\mathcal{E}$.) [Указание. Если P существует, то, используя идеи уп-

ражнения 4.8, покажите, что функтор $\text{hom}_{\mathcal{E}}(P, -)$ сохраняет копроизведения, а значит, и все пределы; затем воспользуйтесь 7.13.] Покажите, что если объект P существует, то семейство $(X_i \xrightarrow{f_i} P \mid i \in I)$ эпиморфно в том и только в том случае, когда один из f_i является расщепимым эпиморфизмом, а потому следующие условия эквивалентны:

- (i) Класс существенных точек в $\mathcal{E}$ достаточен.
- (ii) Существенные объекты составляют класс образующих топоса $\mathcal{E}$.

(iii) Существует малая категория $\mathbf{C}$ такая, что $\mathcal{E} \simeq \mathcal{P}^{\text{cop}}_{\mathbf{C}}$. Покажите затем, что если дополнительно потребовать расщепимость идемпотентов в $\mathbf{C}$, то категория $\mathbf{C}$ будет определяться однозначно с точностью до эквивалентности. [Бандж [16] установил относительноый вариант этого результата, характеризующий $\mathcal{E}$ -топосы вида $\mathcal{E}^{\mathbf{C}}$.]

4. Пусть (X, U) и (Y, V) — два топологических пространства, а $\mathbf{B}$ — частично упорядоченное множество открытых прямоугольных подмножеств в $X \times Y$ (т. е. подмножеств вида $U \times V$, где U — открытое множество в X , а V — открытое множество в Y), упорядоченных по включению. [Заметьте, что $\mathbf{B}$ есть замкнутая по пересечению база топологии произведения на $X \times Y$.] Определим на $\mathbf{B}$ топологии Гротендика J_1, J_2 такие, что J_1 -покрывающие решета имеют вид $(U_i \times V \rightarrow U \times V \mid i \in I)$, где $(U_i \rightarrow U \mid i \in I)$ — открытое покрытие в X ; аналогично определяется J_2 -покрываемость по открытым покрытиям в Y . Покажите, что если J_3 обозначает сумму топологий J_1 и J_2 , то топос $\text{Shv}(\mathbf{B}, J_3)$ эквивалентен $\text{Shv}(X) \times_{\mathcal{P}} \text{Shv}(Y)$. [Используйте 4.35 и 4.47.] Предположим теперь, что пространство X локально компактно, а R — произвольное открытое прямоугольное покрывающее (в теоретико-множественном смысле) решето на прямоугольном множестве $U \times V \subseteq X \times Y$. Покажите, что R является J_3 -покрывающим. [Указание. Для каждой точки $x \in U$ выберите компактную окрестность $K_x \subseteq U$, затем покройте каждое произведение $(\text{int } K_x) \times V$ открытыми прямоугольниками $(\text{int } K_x) \times L_{x,y}$, каждый из которых может быть покрыт конечным числом прямоугольников из R вида $M \times L_{x,y}$.] Выведите отсюда, что если пространство X или Y локально компактно, то канонический морфизм

$$\text{Shv}(X \times Y) \rightarrow \text{Shv}(X) \times_{\mathcal{P}} \text{Shv}(Y)$$

задает эквивалентность категорий.

5. Топос Гротендика $\mathcal{E}$ называют *локально пространственным* ([GV] IV 9.8.2), если в $\mathcal{E}$ существует такой объект X с глобальным носителем, что топос $\mathcal{E}/X$ пространствен. Покажите, что локально пространственный топос имеет достаточно много точек и

что категория его точек существенно мала. Покажите, что топос G -эквивалентных пучков $\text{Shv}_G(X)$, определенный в упражнении 9 к главе 9, локально пространствен, а топос $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ является локально пространственным в том и только в том случае, когда каждый морфизм из $\mathcal{C}$ является мономорфизмом. [Указание. Используя 2.18, покажите, что топос $\mathcal{P}^{\text{cop}}$ локально пространствен в том и только в том случае, когда существует дискретное расслоение $\mathbf{F} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{C}$ такое, что γ_0 — эпиморфизм, а $\mathbf{F}$ — частично упорядоченное множество.]

6. Обозначим через K канторов дисконтинуум, рассматриваемый как декартово произведение (в esp) счетного числа копий дискретного двухточечного пространства $z = \{l, r\}$ (так что точки из K можно считать бесконечными последовательностями из элементов l и r). Пусть M обозначает свободный моноид с двумя образующими из 2. Для каждого элемента $w \in M$ определим U_w как множество точек в K , начинающихся с конечной последовательности w . Покажите, что совокупность множеств $B = \{U_w \mid w \in M\}$ есть замкнутая по пересечению база топологии канторова дисконтинуума K . Вводя на B обычную структуру частично упорядоченного множества, постройте дискретное корасслоение $\mathbf{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{M}$, а затем покажите, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \text{Shv}(K) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}^{\text{cop}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{jt}_2(\mathcal{P}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}^{\text{M}} \end{array}$$

декартов в $\mathcal{D}\text{op}$, где $\mathbf{jt}_2$ — алгебраическая теория, определенная в упражнении 9 к главе 6, а горизонтальные стрелки — включения. Выведите отсюда, что топос $\mathbf{jt}_2(\mathcal{P})$ локально пространствен.

7. Напомним, что элемент i полной решетки L называют *недостижимым* ([LT], с. 186*), если для любого фильтрованного частично упорядоченного подмножества P в L с $\bigcup P = i$ элемент $i \notin P$. Покажите, что объект X компактен в топосе $\mathcal{E}$ в том и только в том случае, когда максимальный элемент (внешней) решетки подобъектов в X недостижим.

8. Пусть X — множество, а R — бинарное отношение на X (предполагаемое рефлексивным и симметричным). Обозначив через R_n n -кратную композицию R с собой, а через R_∞ — объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, покажите, что R_∞ есть отношение эквивалентности,

порожденное R . Выберем некоторое бесконечное множество X и отношение R на нем такое, что последовательность (R_n) строго возрастает; обозначим затем через $\mathbf{E}$ малую полную подкатегорию в $\mathcal{P}$, содержащую X и R , а также замкнутую относительно конечных пределов и копределов. Обозначим через $\mathcal{E}$ топос пучков на $\mathbf{E}$ в предканонической топологии. Покажите, что отношение эквивалентности на $l(X)$, порожденное отношением $l(R) \triangleright \longrightarrow \triangleright \longrightarrow l(X) \times l(X)$, является объединением отношений $l(R_n)$ (что не есть $l(R_\infty)$), и выведите отсюда, что оно некомпактно. Покажите затем, что категория $\mathcal{E}_{\text{coh}}$ не замкнута относительно образования коуравнителей в $\mathcal{E}$. [Используйте 7.36.]

9. Пусть $\mathcal{E}$ — когерентный топос. Установите равносильность следующих условий:

- (i) Каждый эпиморфный образ когерентного объекта в $\mathcal{E}$ когерентен.
- (ii) Каждый подобъект когерентного объекта в $\mathcal{E}$ когерентен.
- (iii) Каждый объект в $\mathcal{E}$ стабилен.
- (iv) Каждый компактный объект в $\mathcal{E}$ когерентен.
- (v) Если X — когерентный объект в $\mathcal{E}$, то решетка подобъектов в X удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. [Указание. Для импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) используйте 7.36. Для равносильности (ii) $\Leftrightarrow$ (v) используйте упражнение 7.] Когерентный топос, удовлетворяющий этим условиям, называют *нётеровым*. Покажите, что если A — нётерово коммутативное кольцо в $\mathcal{P}$, то топос $\text{Shv}(\text{spec } A)$ нётеров. Верно ли обратное?

10. Пусть $\mathcal{E}$ — нётеров топос, а j — топология в $\mathcal{E}$. Покажите, что топос $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ нётеров. [Указание. Если X — объект в $\mathcal{E}$ с ассоциированным пучком LX , то решетка подобъектов пучка LX в $\text{sh}_j(\mathcal{E})$ изоморфна решетке замкнутых подобъектов объекта X в $\mathcal{E}$.]

11. Пусть $T: \mathcal{P}_I \rightarrow \mathcal{P}$ — функтор. Покажите, что T компактен как объект категории $\mathcal{P}[U]$ (см. 4.37 (iv)) в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

- (a) Для каждого конечного множества X множество $T(X)$ конечно.
- (b) Существует такое натуральное число n , что для любого множества X мощности $> n$ и любого элемента $x \in T(x)$ имеется отображение $X' \xrightarrow{f} X$ с $\text{card}(X') \leq n$ и такое, что x лежит в образе отображения $T(f)$.

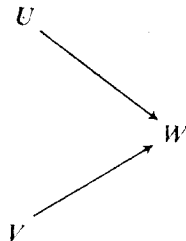
Выведите отсюда, что топос $\mathcal{P}[U]$ нётеров.

12. (Барр [5]) Малая категория $\mathbf{C}$ называется *атомной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- (a) Каждый морфизм $U \xrightarrow{\alpha} V$ в $\mathbf{C}$ является совместным коуравнителем некоторого семейства пар морфизмов $\left(W_i \xrightarrow[\gamma_i]{\beta_i} U \mid i \in I \right)$.

*) С. 243 русского перевода. — Примеч. ред.

(b) Каждая диаграмма



может быть дополнена до коммутативного квадрата в $\mathcal{C}$. Покажите, что если X — бесконечное множество, то моноид эпизоморфизмов множества X является атомной категорией. Покажите также, что если $\mathcal{C}$ — атомная категория, не эквивалентная $\mathbf{1}$, то каноническая топология и топология двойного отрицания на $\mathcal{C}$ совпадают.

13. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ — некоторый $\mathcal{P}$ -топос. Установите равносильность следующих условий:

- (i) γ^* — логический функтор.
- (ii) Категория $\mathcal{E}$ локально связана (упражнение 4.9) и булева.

(iii) Каждый объект из $\mathcal{E}$ представим в виде $\mathcal{P}$ -индексированного копроизведения атомов (т. е. ненулевых объектов, не имеющих нетривиальных подобъектов).

(iv) (если морфизм γ ограничен) Существует атомная категория $\mathcal{C}$ такая, что $\mathcal{E} \simeq \text{sh}_{\neg\neg}(\mathcal{P}^{\mathcal{C}^{\text{op}}})$.

[При доказательстве импликации (iii) $\Rightarrow$ (iv) возьмите в качестве категории $\mathcal{C}$ категорию, эквивалентную полной подкатегории атомов в $\mathcal{E}$.]

ГЛАВА 8

КОГОМОЛОГИИ

8.1. Основные определения

Эта глава посвящена изучению гомологической алгебры в категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ внутренних абелевых групп топоса $\mathcal{E}$ (обычно топоса Гротендика). Многие из доказываемых результатов без труда обобщаются на категорию R -модулей, где R — внутреннее кольцо в $\mathcal{E}$; однако здесь эти обобщения не изучаются. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами гомологической алгебры в абелевых категориях (см., например, [НА]).

8.11 Теорема. (i) Для любого топоса $\mathcal{E}$ категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ абелева.

(ii) Если топос $\mathcal{E}$ имеет объект натуральных чисел, то категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является монадической над $\mathcal{E}$.

(iii) Если $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, то в категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ выполнена аксиома Гротендика АВ 5 [42] и она имеет образующую.

Доказательство. (i) Очевидно, категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет конечные пределы, задаваемые стирающим функтором $\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Далее, как и в случае $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, проверяется, что каждый конечный объект из $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является также начальным и что произведение двух объектов в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является также их копроизведением. Чтобы построить коядро морфизма $A \xrightarrow{f} B$ в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ достаточно взять коуравнитель композиции $A \times B \xrightarrow{f \times 1} B \times B \xrightarrow{+} B$

и морфизма $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ в $\mathcal{E}$. (Отметим, что эта пара рефлексивна с расщеплением $B \xrightarrow{0 \times 1} A \times B$, что можно использовать вместе с 6.42 для введения групповой структуры на указанном коуравнителе.) Теперь легко проверить, что любой мономорфизм в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является ядром своего коядра; отсюда вытекает, что мономорфизм, эпиморфный в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$, в то же время эпиморфен и в $\mathcal{E}$, а потому (так как образ в $\mathcal{E}$ любого гомоморфизма абелевых групп обладает абелевой групповой структурой) каждый эпиморфизм из $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является эпиморфизмом в $\mathcal{E}$. Из 1.53 легко выводится, что каждый эпиморфизм в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ является коядром. Итак, все аксиомы абелевой категории ([CW], с. 194) проверены.

(ii) есть частный случай утверждения 6.43 (ii).

(iii) Аксиома АВ 5 может быть сформулирована и так: категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет все $\mathcal{P}$ -индексированные копределы и филь-

рованные $\mathcal{P}$ -индексированные копределы универсальны. Но существование копределов следует из (ii) и теоремы Линтона (0.16), поскольку они имеются в $\mathcal{E}$, а так как фильтрованные копределы коммутируют с конечными пределами в $\mathcal{E}$ (2.58), то стирающий функтор $\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ и задает их. Задает он также и замены базы, но поскольку все копределы в $\mathcal{E}$ сохраняются при заменах базы (1.51), то фильтрованные копределы в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ тоже сохраняются при заменах базы.

Наконец, легко проверить, что если $\{G_\alpha | \alpha \in A\}$ — множество образующих топоса $\mathcal{E}$, то свободная абелева группа $F\left(\prod_{\alpha \in A} G_\alpha\right)$

является образующей категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$. $\square$

Из 8.11 (iii) и теоремы Гротендика ([42], 1.10.1) вытекает, что если $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, то категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет достаточно много инъективных объектов. Однако имеется более прямое доказательство этого важного факта, которое использует теорему Барра. Прежде всего нам понадобится один результат о геометрических морфизмах; отметим, что если $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, то функторы f^* и f_* поднимаются до пары сопряженных функторов между соответствующими абелевыми категориями $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ и $\mathbf{ab}(\mathcal{F})$, поскольку они точны слева.

8.12 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Тогда:

(i) функтор $f_*: \mathbf{ab}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{E})$ сохраняет инъективные объекты;

(ii) если f — сюръекция и категория $\mathbf{ab}(\mathcal{F})$ имеет достаточно много инъективных объектов, то категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. (i) Пусть E — инъективный объект в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ и предположим, что в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ задана диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & f_*(E) \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

Тогда транспонированную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} f^*(A) & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & & \\ f^*(B) & & \end{array}$$

можно дополнить до коммутативного треугольника; транспонируя еще раз, получаем дополнение исходной диаграммы до коммутативного треугольника.

(ii) Пусть A — абелева группа в $\mathcal{E}$; тогда в $\mathbf{ab}(\mathcal{F})$ имеется мономорфизм $f^*(A) \hookrightarrow E$ с инъективным объектом E . Но единица сопряжения $(f^* \dashv f_*)$ является мономорфизмом в силу 4.11 (ii) (c); поэтому композиция $A \hookrightarrow f_* f^*(A) \hookrightarrow f_*(E)$ вкладывает A в инъективный объект категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$. $\square$

8.13 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика. Тогда категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. Согласно 8.12 (ii) и 7.57 нужный результат достаточно установить в случае, когда топос $\mathcal{E}$ удовлетворяет (AC), т. е. когда $\mathcal{E} = \mathbf{Shv}(B, C)$, где B — полная булева алгебра, а C — каноническая топология.

Но в этом случае мы можем точно подражать обычному доказательству для $\mathcal{E} = \mathcal{P}$ (см. [НА], с. 31–33). Сначала доказывается теорема Бэра [151], что объект E категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ инъективен тогда и только тогда, когда он делим (т. е. когда $E(b)$ — делимая абелева группа для всех $b \in B$). Затем доказывается, что рациональная циклическая группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (которая строится либо внутренним способом, как в § 6.6, либо переходом к ассоциированному C -пучку постоянного предпучка $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) является кообразующей в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$, а так как $\mathcal{E}$ (а потому и $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$) имеет $\mathcal{P}$ -индексированные произведения, мы получаем отсюда, что любой объект категории $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ вложим в степень группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Дальнейшие подробности остаются читателю. $\square$

Однако в общем случае категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ не имеет достаточно много проективных объектов; это едва ли удивительно, ибо невыполнение аксиомы (AC), имеющее место в общем топосе, означает, что сам топос $\mathcal{E}$, как правило, не имеет достаточно много проективных объектов (в то время как в силу 1.27 он всегда имеет достаточно много инъективных объектов).

Из 8.13 вытекает, что для любого аддитивного функтора $\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ можно обычным способом, используя образование инъективных корезольвент, построить правые производные функторы. Теория когомологий в топосах заключается, по существу, в изучении этих производных функторов; теперь мы готовы к введению следующего фундаментального определения.

8.14 Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, A — абелева группа в $\mathcal{E}$. Тогда q -й группой когомологий топоса $\mathcal{E}$ с коэффициентами в A называется группа $H^q(\mathcal{E}; A) = R^q(\gamma_*)(A)$, где γ_* — функтор вида $\mathbf{hom}_{\mathcal{E}}(1, -): \mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$, т. е. прямой образ геометрического морфизма $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$. Эквивалентно, группа $H^q(\mathcal{E}; A)$ описывается как $\mathbf{Ext}_{\mathbf{ab}(\mathcal{E})}^q(Z, A)$, где Z — свободная абелева группа, порожденная объектом 1 , в $\mathcal{E}$.

В более общей ситуации, когда X — произвольный объект из $\mathcal{E}$, через $H^q(\mathcal{E}; X; -)$ (или просто через $H^q(X; -)$, если топос $\mathcal{E}$ очевиден из контекста) обозначается q -й правый производный

функтор функтора $\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, -)$. (Отметим, что группа $H^q(\mathcal{E}, X; A)$ естественно изоморфна группе $H^q(\mathcal{E}/X; X^*(A))$, так как функтор $X^*: \text{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{E}/X)$ точен и сохраняет инъективные объекты.) $\square$

8.15 Примеры. (i) Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$, где X — топологическое пространство. Тогда группа когомологий $H^q(\mathcal{E}; A)$ суть в точности группы когомологий пространства X (в обычном смысле) с коэффициентами в пучке A (см. [ST], § 5.3).

(ii) Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{G}^G$, где G — группа. Тогда категория $\text{ab}(\mathcal{E})$ является категорией (правых) модулей над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}G$ для G ; в частности, $\mathbb{Z} \in \text{ab}(\mathcal{E})$ является группой целых чисел с тривиальным G -действием. Поэтому когомологии топоса $\mathcal{E}$ совпадают с когомологиями Эйленберга — Маклейна [161] группы G .

(iii) Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда G — топологическая группа. G -множество M называют непрерывным, если его G -действие $M \times G \rightarrow M$ непрерывно в дискретной топологии на M ; как легко проверить, это эквивалентно утверждению, что стабилизатор каждой точки из M является открытой подгруппой в G . Обозначим через $\mathcal{E}$ категорию непрерывных G -множеств и их G -эквивариантных отображений; тогда, как и в упражнении 5.5, легко проверить, что функтор включения $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}^G$ точен слева и имеет правый сопряженный, а потому $\mathcal{E}$ — топос. В общем случае когомологии топоса $\mathcal{E}$ отличны от когомологий Эйленберга — Маклейна группы G ; в частности, если G проконечна (см. 8.41 ниже), то они совпадают с когомологиями Галуа группы G (см. [183]).

(iv) Пусть X — проективный объект топоса $\mathcal{E}$. Так как эпиморфизмы из $\text{ab}(\mathcal{E})$ являются эпиморфизмами в $\mathcal{E}$, то функтор $\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, -): \text{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{P})$ сохраняет их, а потому точен. Значит, $H^q(\mathcal{E}, X; A) = 0$ для всех $q > 0$ и всех $A \in \text{ab}(\mathcal{E})$. Отметим, в частности, два важных случая, относящихся к этому: (а) если $\mathcal{E}$ удовлетворяет (АС), то $H^q(\mathcal{E}, X; A) = 0$ для всех X и A и всех $q > 0$; (б) если $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{C^{op}}$ для некоторой малой категории C , то $H^q(\mathcal{E}, h_U; A) = 0$ для всех $U \in C_0$, всех $A \in \text{ab}(\mathcal{E})$ и всех $q > 0$. $\square$

Теперь мы исследуем функториальность групп когомологий по отношению к геометрическим морфизмам. Сначала приведем без доказательства формулировку одной известной теоремы Гротендика ([42], 2.4.1) о спектральных последовательностях; подробное доказательство читатель сможет найти в [НА], VIII 9.3.

8.16 Теорема. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — абелевы категории такие, что категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют достаточно много инъективных объектов, а $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$ — два функтора, точных слева*). Предпо-

ложим, что функтор S переводит инъективные объекты категории $\mathcal{A}$ в T -ациклические объекты категории $\mathcal{B}$ (т. е. в объекты из ядра функторов $R^q T$ для всех $q > 0$). Тогда имеется спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ функторов вида $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ (называемая спектральной последовательностью композиции TS) такая, что $E_2^{p,q} \cong (R^p T)(R^q S)$, и сходящаяся к функтору $E_{\infty}^{p,q}$, задающему фильтрацию в $R^{p+q}(TS)$. $\square$

8.17 Предложение. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм топосов Гротендика. Тогда

(i) Если A — абелева группа в $\mathcal{E}$, то имеется гомоморфизм $H^q(\mathcal{E}; A) \xrightarrow{f^*} H^q(\mathcal{F}; f^*A)$ для каждого q , функториальный по f и естественный по A .

(ii) Если A — абелева группа в $\mathcal{F}$, то имеется спектральная последовательность (спектральная последовательность Лере) $H^p(\mathcal{E}; R^q f_*(B)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{F}; B)$, естественная по B .

Доказательство. (i) Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P} \xleftarrow{\delta} \mathcal{F}$ — геометрические морфизмы из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ в $\mathcal{P}$, а α обозначает единицу сопряжения ($f^* \dashv f_*$). Так как функтор f^* точен, то последовательность функторов $(R^q(\delta_*) \cdot f^*: \text{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{P}) | q \geq 0)$ точна и связна; значит, ввиду универсальности производных функторов естественное преобразование $\gamma_*(\alpha): \gamma_* \rightarrow \gamma_* f_* f^* \cong \delta_* f^*$ однозначно продолжается до естественного преобразования $R^q(\gamma_*) \rightarrow R^q(\delta_*) \cdot f^*$. Значение этого преобразования в A дает требуемый гомоморфизм.

(ii) Примените спектральную последовательность из 8.16 к композиции

$$(\text{ab}(\mathcal{F}) \xrightarrow{f_*} \text{ab}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\gamma_*} \text{ab}(\mathcal{P})) = (\text{ab}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_*} \text{ab}(\mathcal{P})). \quad \square$$

Из 8.17 (i) вытекает, что группы $H^q(\mathcal{E}, X; A)$ задают контравариантный функтор по переменной X , ибо если $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм в $\mathcal{E}$, то $\mathcal{E}/Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}/X$ — функтор обратного образа. Ввиду 8.17 (ii) удобно иметь явное описание функтора $R^q f$; его дает следующая лемма.

8.18 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм и $\mathcal{E} = \text{Shv}(C, J)$. Тогда для любой абелевой группы A из $\mathcal{F}$ и любого q пучок $R^q f_* A$ является ассоциированным J -пучком предпучка

$$U \mapsto H^q(\mathcal{F}; f^* l(U); A)$$

на C , где $C \xrightarrow{l} \text{Shv}(C, J)$ — введенный выше канонический функтор.

*) Достаточно левой точности второго из них. — Примеч. пер.

Доказательство. Предположим сначала, что J — минимальная топология, а потому $\mathcal{E} = \mathcal{P}^{\text{cop}}$. Тогда в силу 8.15 (iv) функтор «значение в U »: $\text{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{P})$ точен, откуда функтор $R^q f_*(-)(U)$ есть q -й правый производный функтор функтора $f_*(-)(U) \cong \text{hom}_{\mathcal{E}}(h_U, f_*(-)) \cong \text{hom}_{\mathcal{F}}(f^*(h_U), -) \cong$

$$\cong H^0(\mathcal{F}, f^*(h_U); -): \text{ab}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{P}).$$

Это дает нужный результат в этом частном случае; в общем случае пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{P}^{\text{cop}}$ — включение, а g — обозначение композиции морфизмов if . Тогда $i^*g_* = i^*i_*f_* \cong f_*$, но функтор i^* точен, а потому $R^q f_* \cong R^q(i^*g_*) \cong i^* \cdot R^q g_*$. Так как i^* — функтор ассоциирования пучка, то общее утверждение леммы вытекает теперь из указанного частного случая и того, что $g^*(h_U) = f^*i^*(h_U) = f^*l(U)$. $\square$

Существование в категории $\text{ab}(\mathcal{E})$ достаточно большого числа инъективных объектов дает нам теорему существования для производных функторов; однако для реальных вычислений групп когомологий совсем не обязательно пользоваться только инъективными корезольвентами. Часто более удобно воспользоваться корезольвентой из абелевых групп, которые ацикличны для рассматриваемого функтора, а теорема Барра фактически позволяет делать это функториально. Абелева группа A из топоса $\mathcal{E}$ называется *слабой*, если $H^q(\mathcal{E}, X; A) = 0$ для всех объектов X из $\mathcal{E}$ и всех $q > 0$. (Слово *слабый* есть перевод английского термина flabby, который в свою очередь является переводом французского flasque*), введенного Годеманом [TF] для пучков на топологических пространствах.)

8.19 Лемма. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, а A — слабая абелева группа в $\mathcal{F}$. Тогда

(i) Группа A ациклична для функтора $f_*: \text{ab}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{E})$.

(ii) $f_*(A)$ — слабая группа в $\mathcal{E}$.

Доказательство. (i) следует непосредственно из описания функторов $R^q f_*$, данного в 8.18.

(ii) Рассмотрим спектральную последовательность Лере для морфизма f . Тогда

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}; R^q f_*(A)) = \begin{cases} 0 & \text{для } q > 0 \text{ (в силу i),} \\ H^p(\mathcal{E}; f_*(A)) & \text{для } q = 0. \end{cases}$$

Но все дифференциалы данной спектральной последовательности вырождены, а потому $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Так как последние группы задают фильтрацию на $H^{p+q}(\mathcal{F}; A)$ и тривиальны при $p + q > 0$, то $H^p(\mathcal{E}; f_*(A)) = 0$ при $p > 0$.

* Обычно переводимого на русский словом *вялый*. — Примеч. пер.

Поэтому группа $f_*(A)$ ациклична для функтора $\text{hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$. Чтобы получить тот же результат для $\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, -)$, применим предыдущее рассуждение к геометрическому морфизму $\mathcal{F}/f^*X \xrightarrow{f/X} \mathcal{E}/X$ и воспользуемся тем, что

$$X^* f_*(A) \cong (f/X)_*(f^*X)^*(A)$$

по условию Бека на расслоенные произведения в $\mathcal{E}$ (упражнение 7 к главе 4). $\square$

Пусть снова $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм; обозначим через T композицию функторов $f_* f^*$, а через α — единицу сопряжения ($f^* \dashv f_*$). Тогда для любого объекта A из $\mathcal{E}$ имеется полный косимплициальный объект вида

$$A \xrightarrow{\alpha_A} TA \xrightarrow[T_{\alpha_A}]{\alpha_{TA}} TTA \rightrightarrows TTTA \rightrightarrows \dots;$$

и если объект A обладает структурой абелевой группы, то, беря альтернативные суммы отображений грани, мы превращаем его в коцепной комплекс $F^*(A)$. Но единица сопряжения ($f^* \dashv f_*$) задает стягивающую гомотопию дополненного комплекса

$$f^*A \rightarrow f^*TA \rightarrow f^*TTA \rightarrow \dots$$

в $(\text{ab})(\mathcal{F})$; поэтому, если f — сюръекция (так что f^* отражает свойство иметь нулевые когомологии), то последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow TA \rightarrow TTA \rightarrow \dots$$

точна в $\text{ab}(\mathcal{E})$, т. е. $F^*(A)$ — корезольвента группы A .

8.20 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, а $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ — такая сюръекция, что топос $\mathcal{F}$ удовлетворяет (AC). (Ее существование было установлено в 7.57.) Тогда когомологии топоса $\mathcal{E}$ совпадают с когомологиями комонады G на $\mathcal{F}$, индуцированной сопряжением ($f^* \dashv f_*$) (см. [152]).

Доказательство. Пусть X — произвольный объект из $\mathcal{E}$, а A — абелева группа в $\mathcal{E}$. По определению группа когомологий $H^q(G, X; A)$ указанной комонады является q -й группой когомологий комплекса $\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, F^*(A))$ в $\text{ab}(\mathcal{F})$. Но все эпиморфизмы из $\text{ab}(\mathcal{F})$ расщепимы в $\mathcal{F}$, а потому функтор f_* их сохраняет и точен; функтор f^* также точен, а потому F^* есть точный функтор из $\text{ab}(\mathcal{E})$ в категорию коцепных комплексов категории $\text{ab}(\mathcal{E})$. Кроме того, каждая абелева группа из $\mathcal{F}$ является слабой в силу 8.15 (iv), откуда в силу 8.19 (ii) все группы комплекса $F^*(A)$ слабы в $\mathcal{E}$, значит, функтор $\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, F^*(-))$

точен. Итак, функторы $H^q(G, X; -) = H^q(\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, F^*(-)))$ образуют точную связную последовательность.

Пусть теперь A — инъективный объект в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$, а $TA \rightarrow A$ — произвольное расщепление мономорфизма $A \xrightarrow{\alpha} TA$. Тогда, применяя подходящие степени функтора T к s , получаем в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ стягивающую гомотопию дополненного комплекса $A \rightarrow F^*(A)$, откуда $H^q(G, X; A) = 0$ при $q > 0$. Поэтому функтор $H^q(G, X; -)$ есть (с точностью до изоморфизма) q -й правый производный функтор для

$$H^0(G, X; -) = H^0(\text{hom}_{\mathcal{E}}(X, F^*(-))) \cong \text{hom}_{\mathcal{E}}(X, -). \quad \square$$

Если $\mathcal{E} = \text{Shv}(X)$ для некоторого топологического пространства, то в 8.20 можно взять $\mathcal{F} = \mathcal{P}/X$ в силу 4.18 (iii). В этом случае $F^*(A)$ является известной корезольвентой Годамана [TF] для вычисления пучковых когомологий. Аналогично, если $\mathcal{E} = \mathcal{P}^G$ или является топосом из 8.15 (iii), то можно взять $\mathcal{F} = \mathcal{P}$; в этом случае получаем так называемую коиндуцированную резольвенту. (А именно, $F^n(A)$ есть множество всех непрерывных (но не обязательно G -эквивариантных) отображений $G^{n+1} \rightarrow A$ со структурой абелевой группы, индуцированной сложением на A , а G действует перемещением каждой координаты области определения.)

8.2. Когомологии Чеха

В этом параграфе развивается техника вычисления когомологий топоса Гротендика в терминах его подходящего сайта определения. Фиксируем топос $\mathcal{E} = \text{Shv}(\mathbf{C}, J)$; обозначим через $\mathcal{P}$ соответствующий топос предпучков $\mathcal{P}^{\text{cop}}$, а через $i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ — каноническое включение. Пусть $H^q: \mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$ обозначает q -й правый производный функтор для i_* .

8.21 Лемма. Пусть A — абелева группа в $\mathcal{E}$. Тогда $(H^q(A))^+ = 0$ для любого $q > 0$, где $+: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ — функтор полупучкования, определенный в § 3.3.

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность композиции

$$(\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \xrightarrow{i_*} \mathbf{ab}(\mathcal{P}) \xrightarrow{i^*} \mathbf{ab}(\mathcal{E})) = (\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \xrightarrow{1} \mathbf{ab}(\mathcal{E})).$$

Так как функтор i^* точен, то $E_2^{p,q} = 0$ при $p > 0$ и $E_2^{0,q} = i^*R^q(i_*) = i^*H^q$. Но функтор $1_{\mathbf{ab}(\mathcal{E})}$ также точен, а потому $E_\infty^{p,q} = 0$ при всех $p + q > 0$. Так как в данной последовательно-

сти нет ненулевых дифференциалов, то обязательно $E_2^{0,q} = 0$ при $q > 0$. Значит, $(H^q(A))^{++} = i_*i^*(H^q(A)) = 0$ при $q > 0$. Но в силу 3.36 предпучок $(H^q(A))^+$ j -отделим, а потому в силу 3.34 каноническое отображение $(H^q(A))^+ \rightarrow (H^q(A))^{++}$ является мономорфизмом. Следовательно, $(H^q(A))^+ = 0$. $\square$

Предположим теперь, что в $\mathbf{C}$ имеются расслоенные произведения. Пусть $\mathcal{U} = (U_i \rightarrow U | i \in \Gamma)$ — семейство морфизмов из $\mathbf{C}$ с общим концом; для каждого $\sigma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^{n+1}$ определим объект U_σ как $(n+1)$ -компонентное расслоенное произведение $U_{\gamma_0} \times_U U_{\gamma_1} \times_U \dots \times_U U_{\gamma_n}$. Тогда в $\mathcal{P}$ можно определить дополненный симплициальный объект вида

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \coprod_{i \in \Gamma^1} h_{U_i} \xrightarrow{\quad} \coprod_{\sigma \in \Gamma^2} h_{U_\sigma} \xrightarrow{\quad} \coprod_{i \in \Gamma} h_{U_i} \longrightarrow h_U,$$

отображения грани которого получаются композицией с каноническими проекциями $U_i \rightarrow U_\sigma$, где σ — грань симплекса τ . Применяя функтор свободы $\mathcal{P} \xrightarrow{Z} \mathbf{ab}(\mathcal{P})$, получаем симплициальный объект в $\mathbf{ab}(\mathcal{P})$, который можно превратить, беря альтернированные суммы отображений грани, в цепной комплекс. Обозначим этот комплекс через

$$N_*(\mathcal{U}) \rightarrow Z(h_U).$$

8.22 Лемма. Последовательность $\dots \rightarrow N_3(\mathcal{U}) \rightarrow N_2(\mathcal{U}) \rightarrow N_1(\mathcal{U}) \rightarrow N_0(\mathcal{U})$ точна в $\mathbf{ab}(\mathcal{P})$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $V \in \mathbf{C}$, последовательность

$$\dots \rightarrow N_2(\mathcal{U})(V) \rightarrow N_1(\mathcal{U})(V) \rightarrow N_0(\mathcal{U})(V)$$

точна в $\mathbf{ab}(\mathcal{P})$. Но так как функтор «значение в V » является функтором обратного образа, то он коммутирует с функтором свободы в категорию абелевых групп, а потому группа $N_q(\mathcal{U})(V)$ является свободной абелевой группой, порожденной

множеством $\prod_{\sigma \in \Gamma^{q+1}} (\text{hom}(V, U_\sigma))$. Для каждого морфизма $V \xrightarrow{\phi} U$ из $\mathbf{C}$ обозначим через S_ϕ множество $\prod_{\gamma \in \Gamma} (\text{hom}_{\mathbf{C}/U}(\phi, \theta_\gamma))$;

тогда, поскольку объект U_σ определяется как расслоенное произведение, легко проверить, что

$$\prod_{\sigma \in \Gamma^{q+1}} (\text{hom}_{\mathbf{C}}(V, U_\sigma)) \cong \prod_{\phi \in \text{hom}(V, U)} (S_\phi)^{q+1}.$$

Но так как абелева категория $\mathbf{ab}(\mathcal{P})$ удовлетворяет аксиоме AB4, то копроизведение точных последовательностей точно. Поэтому остается доказать, что последовательность вида $\dots \rightarrow Z(S^3) \rightarrow Z(S^2) \rightarrow Z(S)$ точна, где отображениями являются альтерни-

рованные суммы отображений, индуцированных проекциями $S^{q+1} \rightarrow S^q$. Однако если S пусто, то это очевидно; в противном случае можно построить стягивающую гомотопию этого комплекса, выбрав некоторый элемент $t \in S$ и рассмотрев гомоморфизмы $Z(S^q) \rightarrow Z(S^{q+1})$, индуцированные отображением $(s_1, \dots, s_q) \mapsto (t, s_1, \dots, s_q)$. $\square$

Пусть теперь A — произвольная абелева группа в $\mathcal{P}$. Обозначим через $C^*(\mathcal{U}; A)$ коцепной комплекс $\text{hom}_{\text{ab}(\mathcal{P})}(N_*(\mathcal{U}), A)$ из $\text{ab}(\mathcal{P})$. Поскольку все группы комплекса $N_*(\mathcal{U})$ свободны, то он представим в виде

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} A(U_\gamma) \rightarrow \prod_{\sigma \in \Gamma^2} A(U_\sigma) \rightarrow \prod_{\tau \in \Gamma^3} A(U_\tau) \rightarrow \dots$$

Через $H^q(\mathcal{U}; A)$ обозначается q -я группа когомологий этого комплекса, называемая q -й группой когомологий Чеха семейства $\mathcal{U}$ с коэффициентами в A . Мы также пользуемся известными терминами *коцель Чеха*, *коцикл Чеха* и т. п. для элементов групп $C^q(\mathcal{U}; A)$. Отметим, в частности, что

$$H^0(\mathcal{U}; A) = \text{eq} \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} A(U_\gamma) \xrightarrow[\sigma \in \Gamma^2]{} A(U_\sigma) \right) \cong \text{hom}_{\mathcal{P}}(R, A),$$

где R — решето на U , порожденное семейством $\mathcal{U}$; поэтому $H^0(\mathcal{U}; A) \cong A(U)$ в том и только в том случае, когда предпучок A удовлетворяет аксиоме пучка для $\mathcal{U}$.

8.23 Предложение. $H^q(\mathcal{U}; -)$ есть q -й правый производный функтор для $H^0(\mathcal{U}; -)$.

Доказательство. Так как представимые предпучки проективны в $\mathcal{P}$, то все группы комплекса $N_*(\mathcal{U})$ проективны в $\text{ab}(\mathcal{P})$, а потому функтор $A \mapsto C^*(\mathcal{U}; A)$ из $\text{ab}(\mathcal{E})$ в категорию коцепных комплексов в $\text{ab}(\mathcal{P})$ точен. Следовательно, функторы $H^q(\mathcal{U}; -)$ образуют точную связную последовательность. Но если объект A инъективен, то из 8.22 вытекает, что комплекс $C^*(\mathcal{U}; A)$ точен в положительной размерности, откуда $H^q(\mathcal{U}; A) = 0$ при $q > 0$. Поэтому требуемый результат получается из теоремы единственности для производных функторов. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{U} = (U_\gamma \rightarrow U | \gamma \in \Gamma)$ и $\mathcal{V} = (V_\delta \rightarrow U | \delta \in \Delta)$ — два семейства морфизмов из $\mathcal{C}$ с одним и тем же концом. Под отображением измельчения $r: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ понимается функция $r: \Delta \rightarrow \Gamma$ вместе с семейством факторизаций

$$\begin{array}{ccc} V_\delta & \xrightarrow{r_\delta} & U_{r(\delta)} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

для каждого $\delta \in \Delta$. Очевидно, каждое отображение измельчения $\mathcal{V} \xrightarrow{r} \mathcal{U}$ индуцирует морфизм $V_\sigma \rightarrow U_{r(\sigma)}$ над U , а потому и цепное отображение $r_*: N_*(\mathcal{V}) \rightarrow N_*(\mathcal{U})$. $\square$

8.24 Лемма. Пусть r, s — два отображения измельчения $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$. Тогда их цепные отображения r_* и s_* цепно гомотопны.

Доказательство. Для каждого $\sigma = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q) \in \Delta^{q+1}$ и каждого $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ обозначим через t_q^i морфизм

$$(r_{\delta_0}, \dots, r_{\delta_i}, s_{\delta_{i+1}}, \dots, s_{\delta_q}): V_\sigma \rightarrow U_{(r(\delta_0), \dots, r(\delta_i), s(\delta_{i+1}), \dots, s(\delta_q))}$$

над U ; пусть $t_q^i: N_q(\mathcal{V}) \rightarrow N_{q+1}(\mathcal{U})$ — гомоморфизм групп, индуцированный морфизмами t_q^i . Тогда непосредственно проверяется, что альтернативная сумма $\sum_i (-1)^i t_q^i$ является q -й ком-

понентой цепной гомотопии между r_* и s_* . $\square$

8.25 Следствие. Пусть $\mathcal{U} = (U_\gamma \rightarrow U | \gamma \in \Gamma)$ — семейство морфизмов из $\mathcal{C}$, а $R \rightarrow h_U$ — решето над U , порожденное семейством $\mathcal{U}$. Тогда группы $H^q(\mathcal{U}; A)$ и $H^q(R; A)$ канонически изоморфны для любых $A \in \text{ab}(\mathcal{P})$.

Доказательство. Так как каждый морфизм из R пропускается через некоторый морфизм $U_\gamma \rightarrow U$, то имеется отображение измельчения $R \rightarrow \mathcal{U}$, но, очевидно, отображение включения задает измельчение $\mathcal{U} \rightarrow R$. Поэтому в силу 8.24 комплексы $N_*(\mathcal{U})$ и $N_*(R)$ эквивалентны в смысле цепной гомотопии; значит, комплексы $C^*(\mathcal{U}; A)$ и $C^*(R; A)$ тоже эквивалентны в смысле цепной гомотопии, откуда вытекает изоморфизм их групп когомологий. Более того, этот изоморфизм не зависит от выбора отображения $R \rightarrow \mathcal{U}$, поскольку два различных выбора индуцируют коцепные отображения $C^*(\mathcal{U}; A) \rightarrow C^*(R; A)$, отличающиеся на гомотопию. $\square$

Теперь мы можем дать определение когомологий Чеха сайта $(\mathcal{C}, J)$; в этом определении встречаются группы $H^q(\mathcal{U}; A)$ только в том случае, когда $\mathcal{U}$ является J -покрывающим решето, но согласно 8.25 мы можем всегда заменить покрывающее решето на семейство, его порождающее, если это упростит вычисление требуемых групп когомологий. Отметим мимоходом, что если R и S — два решета на U , то отображение измельчения $R \rightarrow S$ существует в том и только в том случае, когда $R \cong S$, при этом в качестве такого отображения можно взять включение. Поэтому комплексы $C^*(R; A)$ (и тем более группы $H^q(R; A)$) образуют диаграмму над частично упорядоченным множеством $J(U)^{\text{op}}$.

8.26 Определение. Пусть $(\mathcal{C}, J)$ — такой сайт, что категория $\mathcal{C}$ имеет расслоенные произведения, U — объект из $\mathcal{C}$, а A — предпучок абелевых групп из $\mathcal{C}$. q -я группа когомологий Чеха объекта U с коэффициентами в A определяется как (филь-

трованный) копредел

$$\check{H}^q(U; A) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ R \in J(U)}} H^q(R; A). \quad \square$$

Так как функтор $\lim_{J(U)}$ точен, то функторы $\check{H}^q(U; -)$ образуют точную связную последовательность на $\mathbf{ab}(\mathcal{P})$ и обращаются в нуль на инъективных объектах при $q > 0$. Обычно рассматриваются группы когомологий Чеха с коэффициентами в пучке; однако в общем случае функторы $\check{H}^q(U; -)$ не образуют точной связной последовательности на $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$, поскольку функтор включения $i_*: \mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$, как правило, не точен. Отметим, что

$$\check{H}^0(U; A) \cong \lim_{\longrightarrow J(U)} \text{hom}_{\mathcal{E}}(R, A) = A^+(U)$$

(ср. 3.33), а потому функтор $\mathbf{ab}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$, переводящий A в предпучок $U \mapsto \check{H}^q(U; A)$, является q -м правым производным для $+$. (Конечно, мы не доказали, что группа $\check{H}^q(U; A)$ функториальна по переменной U , но сделать это нетрудно — см. упражнение 6 ниже.)

8.27 Теорема. Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(\mathbf{C}, J)$, U — объект из $\mathbf{C}$, а A — абелева группа в $\mathcal{E}$. Тогда существует гомоморфизм $\check{H}^q(U; A) \rightarrow H^q(\mathcal{E}, l(U); A)$, который является изоморфизмом при $q = 0$ и 1 и мономорфизмом при $q = 2$. (Здесь l обозначает канонический функтор $\mathbf{C} \rightarrow \text{Shv}(\mathbf{C}, J)$.)

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность композиции

$$(\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \xrightarrow{i_*} \mathbf{ab}(\mathcal{P}) \xrightarrow{+} \mathbf{ab}(\mathcal{P})) = (\mathbf{ab}(\mathcal{E}) \xrightarrow{i_*} \mathbf{ab}(\mathcal{P})),$$

окомпонованную с точным функтором «значение в U »: $\mathbf{ab}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$. Тогда $E_2^{p,q} = \check{H}^p(U; H^q(A))$ непосредственно в силу предшествующих замечаний, и группы $E_{\infty}^{p,q}$ составляют фильтрацию $(p+q)$ -го правого производного функтора для $\text{hom}_{\mathcal{P}}(h_U, i_*(-)) \cong \text{hom}_{\mathcal{E}}(l(U), -)$ с коэффициентами в A . Поэтому имеется краевой гомоморфизм

$$\check{H}^p(U; A) = E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_{\infty}^{p,0} \longrightarrow H^p(\mathcal{E}, l(U); A).$$

Однако в силу 8.21 $E_2^{0,q} = \check{H}^0(U; H^q(A)) = (H^q(A))^+(U) = 0$ при $q > 0$. Значит, при $p = 0, 1$ и 2 каноническое отображение $E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_{\infty}^{p,0}$ является изоморфизмом, поскольку ни на одной из этих групп не действует ненулевой дифференциал, а при $p = 0$ и 1 отображение $E_{\infty}^{p,0} \longrightarrow H^p(\mathcal{E}, l(U); A)$ является изоморфизмом, поскольку $E_{\infty}^{p,0}$ — единственный ненулевой член соответствующей фильтрации. $\square$

В общем случае обычные когомологии и когомологии Чеха не обязаны совпадать в размерности выше 1. Однако они совпадают в большинстве из часто встречающихся случаев; следующий результат А. Картана весьма полезен при этом.

8.28 Предложение. Пусть $\mathcal{E} = \text{Shv}(\mathbf{C}, J)$, а A — абелева группа в $\mathcal{E}$. Предположим, что в $\mathbf{C}_0$ имеется такое подмножество K , что:

- (i) $H^q(V; A) = 0$ для каждого $V \in K$ при $q > 0$.
- (ii) Для каждого $U \in \mathbf{C}_0$ существует J -покрывающее семейство $(V_\gamma \rightarrow U | \gamma \in \Gamma)$, каждое начало V_γ которого лежит в K .
- (iii) Если V и W лежат в K , то и любое расслоенное произведение вида $V \times_U W$ лежит в K .

Тогда каноническое отображение $\check{H}^q(U; A) \rightarrow H^q(\mathcal{E}, l(U); A)$ является изоморфизмом для всех $U \in \mathbf{C}_0$ и всех q .

Доказательство. Поскольку покрытие любого покрытия само является покрытием (0.31 (iii)), то из (ii) вытекает, что любое J -покрывающее семейство $\mathcal{U} = (U_\beta \rightarrow U | \beta \in B)$ может быть измельчено до покрывающего семейства $\mathcal{V} = (V_\gamma \rightarrow U | \gamma \in \Gamma)$, где каждое V_γ лежит в K ; значит, каждый элемент из $\check{H}^q(U; A)$ получается из некоторого элемента группы $H^q(\mathcal{V}; A)$ для семейства $\mathcal{V}$ указанного вида. Кроме того, если $\mathcal{V}$ — такое семейство, то из (iii) вытекает, что все объекты V_σ ($\sigma \in \Gamma^{q+1}$) лежат в K .

Докажем теперь наше предложение индукцией по q . Предположим, что требуемый результат уже установлен для всех $q < n$, и рассмотрим комплекс $C^\bullet(\mathcal{V}; H^q(A))$, где $0 < q < n$, а $\mathcal{V}$ является покрывающим семейством типа, рассмотренного выше. Из 8.18 мы знаем, что $H^q(A)$ есть предпучок $U \mapsto H^q(\mathcal{E}, l(U); A)$, но $H^q(\mathcal{E}, l(U); A) \cong \check{H}^q(U; A)$ в силу предположения индукции, а потому $C^p(\mathcal{V}; H^q(A)) = 0$ при всех p , поскольку объекты, в которых нужно вычислять предпучки $H^q(A)$, лежат в K . Следовательно, $H^p(U; H^q(A)) = 0$, т. е. в спектральной последовательности из 8.27 $E_2^{p,q} = 0$ при $0 < q < n$ и всех p . Так как мы знаем, что $E_2^{0,n} = 0$, то отсюда следует, что $E_2^{p,0}$, $0 \leq p \leq n$, — единственные ненулевые группы ниже диагонали $p+q=n$; отсюда, как и в 8.27, получается, что канонические отображения $E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_{\infty}^{p,0} \longrightarrow H^n(\mathcal{E}, l(U); A)$ являются изоморфизмами. Поэтому требуемый результат установлен для $q = n$. $\square$

8.29 Пример. Пусть X — открытое подпространство евклидова n -пространства, а K — множество выпуклых открытых подмножеств в X . Так как каждое (непустое) выпуклое множество стягиваемо, то можно показать, что первое условие из 8.28 выполнено для любого пучка A на X ; второе условие выполнено, поскольку открытые шары выпуклы, а третье условие выполнено,

поскольку пересечение двух выпуклых множеств выпукло. Поэтому обычные кохомологии и кохомологии Чеха пространства X с коэффициентами в любом пучке совпадают. $\square$

Дальнейшие примеры совпадения кохомологий Чеха и обычных кохомологий приводятся в упражнениях 8 и 9 в конце этой главы.

8.3. Торсоры

В этом параграфе вводятся методы, позволяющие представлять 1-мерные классы кохомологий торсорами (ср. 4.37 (ii)), и дается набросок того, как можно продолжить такое представление на высшие классы кохомологий. Значение этого представления заключается не только в том, что оно дает совершенно ясную картину для классов кохомологий, но и в том, что оно позволяет расширить определение кохомологий до случая, когда группа коэффициентов неабелева.

Напомним, что если G — внутренняя группа топоса $\mathcal{E}$, то G -торсором называется плоский предпучок на внутренней категории $\mathbf{G}$, т. е. левый G -объект $(G \times T \xrightarrow{\alpha} T)$ такой, что $T \rightarrow 1$ — эпиморфизм, а $G \times T \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} T \times T$ — изоморфизм. (Второе условие, очевидно, эквивалентно существованию отображения деления $T \times T \xrightarrow{\delta} G$, для которого треугольники

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{(\delta, \pi_2)} & G \times T \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \alpha \\ & & T \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} G \times T & \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} & T \times T \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \delta \\ & & G \end{array}$$

коммутативны.

8.31 Лемма. (i) Категория G -торсоров $\text{Flat}(G^{\text{op}}, \mathcal{E})$ в $\mathcal{E}$ является группоидом.

(ii) G -торсор изоморфен тривиальному торсору $(G \times G \xrightarrow{m} G)$ тогда и только тогда, когда он имеет глобальный элемент.

Доказательство. (i) Пусть T и U — два G -торсора, а $T \xrightarrow{f} U$ — их G -эквивалентное отображение. Тогда квадрат

$$\begin{array}{ccc} G \times T & \xrightarrow{1 \times f} & G \times U \\ \downarrow (\alpha, \pi_2) & & \downarrow (\alpha, \pi_2) \\ T \times T & \xrightarrow{f \times f} & U \times U \end{array}$$

коммутативен, а потому коммутативен и треугольник

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f \times f} & U \times U \\ & \searrow \delta & \downarrow \delta \\ & & G \end{array}$$

но квадрат

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow \Delta & & \downarrow e \\ T \times T & \xrightarrow{\quad} & G \end{array}$$

декартов, откуда получается декартовость квадрата

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ T \times T & \xrightarrow{f \times f} & U \times U \end{array}$$

что влечет мономорфность f . Также легко проверяется коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} U \times T & \xrightarrow{\pi_1} & & & U \\ & \searrow 1 \times f & & \searrow \alpha & \\ & & U \times U & \xrightarrow{(\delta, \pi_2)} & G \times U \\ & \swarrow 1 \times (f, 1) & & \swarrow 1 \times f & \\ U \times U \times T & \xrightarrow{\delta \times 1} & G \times T & \xrightarrow{\alpha} & T \end{array}$$

но $T \rightarrow 1$ — эпиморфизм, а потому и $U \times T \xrightarrow{\pi_1} U$ — эпиморфизм. Значит, f — эпиморфизм.

(ii) Предположим, что T имеет глобальный элемент $1 \xrightarrow{t} T$. Тогда, очевидно, морфизм $G \xrightarrow{1 \times t} G \times T \xrightarrow{\alpha} T$ G -эквивалентен; поэтому в силу (i) это изоморфизм. Обратное тривиально. $\square$

Предположим теперь, что группа G абелева. Тогда, если $(G \times M \xrightarrow{\alpha} M)$ — произвольный левый G -объект, то $(M \times G \xrightarrow{(\pi_2, \pi_1)} G \times M \xrightarrow{\alpha} M)$ — правый G -объект и на самом деле левое и правое G -действия на M коммутируют, так что M можно рассматривать как профунктор $G \rightarrow \mathbf{G}$. Поэтому имеется полная

подкатегория в $\text{Prof}_{\mathcal{E}}(G, G)$, изоморфная как $\mathcal{E}^G$, так и $\mathcal{E}^{G^{\text{op}}}$; профункторы из этой подкатегории будут называться *симметрическими*.

8.32 Лемма. (i) Пусть L, M — симметрические профункторы вида $G \rightarrow G$. Тогда их тензорное произведение $L \otimes_G M$ (2.42) симметрично и изоморфно $M \otimes_G L$.

(ii) Пусть T — предпучок на G . Тогда T^G будет плоским в том и только в том случае, когда, рассматриваемый как симметрический профунктор, он является плоским слева (4.39).

Доказательство. (i) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 L \times M \times G & \xrightarrow{\quad} & (L \otimes_G M) \times G & & \\
 \downarrow 1 & \searrow 1 \times \beta_M & \downarrow 1 & \searrow \beta & \\
 L \times G \times M & \xrightarrow[1 \times \alpha_M]{\beta_L \times 1} & L \times M & \xrightarrow{\quad} & L \otimes_G M \\
 \downarrow 1 & \nearrow \alpha_L \times 1 & \downarrow & \nearrow \alpha & \\
 G \times L \times M & \xrightarrow{\quad} & (G \times (L \otimes_G M)) & &
 \end{array}$$

где α и β обозначают левое и правое действия группы G . Поскольку L и M симметричны, то оба треугольника слева коммутативны, а средняя строка является коуровнителем; поэтому две возможные композиции $L \times M \times G \rightarrow L \otimes_G M$ совпадают. Но $L \times M \times G \rightarrow (L \otimes_G M) \times G$ — эпиморфизм, потому правый треугольник коммутативен, т. е. профунктор $L \otimes_G M$ симметричен.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 L \times G \times M & \xrightarrow[1 \times \alpha_M]{\beta_L \times 1} & L \times M & \xrightarrow{\quad} & L \otimes_G M \\
 \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\
 M \times G \times L & \xrightarrow[1 \times \alpha_L]{\beta_M \times 1} & M \times L & \xrightarrow{\quad} & M \otimes_G L
 \end{array}$$

строки которой являются коуровнителями и оба квадрата слева коммутативны в силу симметричности L и M . Из нее получается изоморфизм $L \otimes_G M \cong M \otimes_G L$, который, как легко убедиться, является изоморфизмом профункторов.

(ii) вытекает непосредственно из того, что стирающий функтор $\mathcal{E}^G \rightarrow \mathcal{E}$ задает пределы; оба условия на T эквивалентны тому, что функтор $(-) \otimes_G T$ сохраняет конечные пределы, с той лишь разницей, в какой категории берутся эти пределы. $\square$

Но тензорное произведение профункторов, плоских слева, очевидно, является плоским слева; поэтому из 8.32 вытекает, что бифунктор $\otimes_G$ ограничивается в симметрическую моноидальную

структуру на $\text{Flat}(G^{\text{op}}, \mathcal{E})$. (Единицей этой структуры является тривиальный торсор $(G \times G \xrightarrow{m} G)$, который соответствует относительно указанного изоморфизма профунктору Йонеды $Y(G)$.) Более того, любой торсор $(G \times T \xrightarrow{\alpha} T)$ имеет $\otimes_G$ -обратный $\bar{T}$, который имеет тот же самый носитель, что и T , с G -действием $G \times T \xrightarrow{i \times 1} G \times T \xrightarrow{\alpha} T$ (i обозначает отображение обращения $G \rightarrow G$), ибо отображение деления $T \times T \xrightarrow{\delta} G$ индуцирует G -эквивариантное отображение $\bar{T} \otimes_G T \rightarrow G$, которое обязано быть изоморфизмом в силу 8.31 (i). Поэтому классы изоморфизма объектов (т. е. связные компоненты) группоида $\text{Flat}(G^{\text{op}}, \mathcal{E})$ образуют абелеву группу, которая обозначается через $\text{Tors}^1(\mathcal{E}; G)$.

8.33 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, а G — абелева группа в $\mathcal{E}$. Тогда

$$H^1(\mathcal{E}; G) \cong \text{Tors}^1(\mathcal{E}; G).$$

Доказательство. Пусть Z обозначает свободную абелеву группу в $\mathcal{E}$, порожденную объектом 1. Тогда, поскольку $H^1(\mathcal{E}; G) \cong \text{Ext}_{\text{ab}(\mathcal{E})}^1(Z, G)$, известно, что элементы группы $H^1(\mathcal{E}; G)$ соответствуют классам изоморфизма коротких точных последовательностей $0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow 0$ в $\text{ab}(\mathcal{E})$. Предположим, что нам дана такая последовательность; образуем в $\mathcal{E}$ декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow u \\
 E & \xrightarrow{\quad} & Z
 \end{array}$$

где u обозначает включение образующей в группу Z . Так как квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow 0 \\
 E & \xrightarrow{\quad} & Z
 \end{array}$$

также декартов, то сложение в E ограничивается до G -действия на T . Но $T \rightarrow 1$ — эпиморфизм, поскольку $E \rightarrow Z$ — эпиморфизм, и легко проверить, что композиция $E \times E \xrightarrow{i \times 1} E \times E \xrightarrow{\delta} E$ ограничивается до отображения деления $T \times T \rightarrow G$, так что T является G -торсором.

Обратно, предположим, что задан G -торсор T . Определим группу E как копроизведение $\coprod_{p \in \mathbb{Z}} T^{\otimes p}$, где $T^{\otimes p}$ обозначает p -ю

степень торсора T относительно произведения $\otimes_G$. Тогда, объединяя канонические отображения

$$T^{\otimes p} \times T^{\otimes q} \longrightarrow T^{\otimes p} \otimes_G T^{\otimes q} \cong T^{\otimes (p+q)} \quad (p, q \in \mathbb{Z}),$$

получаем морфизм, который, как легко проверить, задает абелеву групповую структуру на E . Кроме того, каноническое отображение $\prod_{p \in \mathbb{Z}} T^{\otimes p} \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} 1$ является гомоморфизмом $E \rightarrow Z$ абелевых групп, который эпиморфен (так как каждое отображение $T^{\otimes p} \rightarrow 1$ эпиморфно) и ядром которого является группа $T^{\otimes 0} \cong G$. Итак, мы построили короткую точную последовательность $0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow 0$ в $\text{ab}(\mathcal{E})$.

Чтобы показать, что две указанные выше конструкции взаимно обратны с точностью до естественного изоморфизма, нужно показать, что если $0 \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow 0$ — произвольная короткая точная последовательность, а T_p — подъем морфизма $E \rightarrow Z$ вдоль p -й степени образующей группы Z , то $T_p \cong T^{\otimes p}$. Но это простая индукция по p , так как сложение в E ограничивается до отображения $T_p \times T_q \rightarrow T_{p+q}$, а потому индуцирует изоморфизм $T_p \otimes_G T_q \cong T_{p+q}$ для каждой пары (p, q) .

Итак, мы установили биекцию между множествами $H^1(\mathcal{E}; G)$ и $\text{Tors}^1(\mathcal{E}; G)$. Согласованность аддитивной структуры на $\text{Ext}_{\text{ab}(\mathcal{E})}^1(Z, G)$ с аддитивной структурой на группе торсоров, индуцированной тензорным произведением, доказывается достаточно скучно, но прямолинейно. $\square$

В действительности эквивалентность между G -торсорами и расширениями группы Z с помощью G имеет место в любом топосе с объектом натуральных чисел, поскольку здесь можно воспользоваться внутренней конструкцией n -й тензорной степени из 6.37 вместо внешнего Z -индексированного копроизведения, использованного выше. Однако в общем случае у нас нет гарантии, что классы изоморфизма G -торсоров в $\mathcal{E}$ можно параметризовать множеством.

8.34 Следствие. Пусть G — абелева группа в топосе Гротендика $\mathcal{E}$. Тогда топос $\mathcal{E}^G$ является классифицирующим топосом для 1-мерных когомологий с коэффициентами в G , т. е. представляющим объектом функтора

$$H^1(-; G): (\mathcal{B}\mathcal{X}\text{op}/\mathcal{E})^{\text{op}} \rightarrow \text{ab}(\mathcal{P}). \quad \square$$

Вернемся теперь к случаю неабелевой группы G . Ввиду теоремы 8.33 представляется разумным определить $H^1(\mathcal{E}; G)$ как множество классов изоморфизма G -торсоров в $\mathcal{E}$. Это определение предполагает, конечно, что эти классы изоморфизма в действительности параметризуются множеством; согласно следующей лемме это предположение выполняется в любом топосе Гротендика.

8.35 Лемма. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, а X — объект в $\mathcal{E}$. Тогда классы $\mathcal{E}$ -изоморфизма объектов, локально изоморфных X (т. е. изоморфных V^*X в $\mathcal{E}/V$ для некоторых объектов V с глобальным носителем), можно параметризовать множеством.

Доказательство. Пусть Y — такой объект из $\mathcal{E}$, что имеется изоморфизм $V^*Y \xrightarrow{\alpha} V^*X$ в $\mathcal{E}/V$. Поскольку V имеет глобальный носитель, то диаграмма

$$Y \times V \times V \xrightarrow[\pi_{13}]{\pi_{12}} Y \times V \xrightarrow{\pi_1} Y$$

является коуравнителем, а потому коуравнителем является и диаграмма

$$X \times V \times V \xrightarrow[\pi_{13} \cdot \beta]{\pi_{12}} X \times V \xrightarrow{\pi_1 \cdot \alpha^{-1}} Y,$$

где β — сложный изоморфизм

$$(V \times V)^*(X) \xrightarrow{\pi_1^*(\alpha^{-1})} (V \times V)^*(Y) \xrightarrow{\pi_2^*(\alpha)} (V \times V)^*(X).$$

Но поскольку топос $\mathcal{E}$ определен над $\mathcal{P}$, то имеется лишь множество возможных выборов для β в силу 4.41, а объект Y определяется по β однозначно с точностью до изоморфизма.

Рассмотрим теперь возможные выборы для V . Пусть (C, J) — сайт определения топоса $\mathcal{E}$ такой, что C имеет конечный объект; тогда утверждение, что объект V имеет глобальный носитель, очевидно, эквивалентно утверждению, что семейство $\{U \in C_0 \mid V(U) \neq \emptyset\}$ задает J -покрывающее решето на 1 в C . Обозначим через R это решето и пусть $W = \prod_{U \in R} I(U)$; тогда W имеет глобальный носитель и в $\mathcal{E}$ существует морфизм $W \rightarrow V$. Поэтому достаточно ограничиться объектами V вида $\prod_{U \in R} I(U)$ для некоторого $R \in J(1)$, но имеется лишь множество таких объектов. $\square$

Теперь носитель G -торсора T локально изоморфен G , так как $T^*T \cong T^*G$ в $\mathcal{E}/T$; поэтому можем теперь определить $H^1(\mathcal{E}; G)$ (для топоса Гротендика $\mathcal{E}$) как множество классов изоморфизма G -торсоров в $\mathcal{E}$. Конечно, это множество уже не обладает групповой структурой, так как рассуждения из 8.32 годятся лишь в том случае, когда группа G абелева, но класс изоморфизма тривиального G -торсора задает выделенный элемент в $H^1(\mathcal{E}; G)$, а потому $H^1(\mathcal{E}; -)$ рассматривается как функтор из $\text{gr}(\mathcal{E})$ в категорию $\text{pt}(\mathcal{P})$ пунктированных множеств. (Чтобы проверить функториальность, рассмотрим гомоморфизм групп $G \xrightarrow{f} H$ и G -торсор T ; определим тогда торсор $f_*(T)$ как тензорное

произведение $f^* \otimes_G T$, где $f^*: \mathbf{H} \dashrightarrow \mathbf{G}$ — (точный слева) про-
функтор, определенный перед 2.44.) Аналогично, определим
 $H^0(\mathcal{E}; G)$ как группу глобальных элементов группы G в $\mathcal{E}$, рас-
сматриваемую как пунктированное множество; тогда имеет место

8.36 Предложение. Пусть G — группа в топосе $\mathcal{E}$, а K —
нормальная подгруппа в G . Тогда существует точная последова-
тельность пунктированных множеств

$$1 \rightarrow H^0(\mathcal{E}; K) \rightarrow H^0(\mathcal{E}; G) \rightarrow H^0(\mathcal{E}; G/K) \xrightarrow{\partial} \\ \rightarrow H^1(\mathcal{E}; K) \rightarrow H^1(\mathcal{E}; G) \rightarrow H^1(\mathcal{E}; G/K).$$

Доказательство. Пусть $K \xrightarrow{h} G \xrightarrow{q} G/K$ — канонические
гомоморфизмы.

Связывающее отображение ∂ строится, как в 8.33, т. е. для
элемента $1 \xrightarrow{u} G/K$ образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow h & & \downarrow u \\ G & \xrightarrow{q} & G/K \end{array}$$

а действие группы K на T зададим с помощью умножения в G .
То, что T является K -торсором, доказывается, как в 8.33.

Точность данной последовательности в членах $H^0(\mathcal{E}; K)$ и
 $H^0(\mathcal{E}; G)$ вытекает из левой точности функтора $\text{hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$;
для доказательства точности в члене $H^0(\mathcal{E}; G/K)$ заметим, что
 K -торсор $T = \partial(u)$ имеет глобальный элемент в том и только
в том случае, когда u пропускается через $G \xrightarrow{q} G/K$.

Пусть теперь $T = \partial(u)$ — некоторый K -торсор из образа ото-
бражения ∂ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K \times T & \xrightarrow{\alpha} & T & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow (im(k \times h), 1) & & \downarrow (ih, 1) & & \\ G \times K \times T & \xrightarrow{1 \times \alpha} & G \times T & \longrightarrow & k_*(T) \\ & m(1 \times k) \times 1 & & & \end{array}$$

где i, m обозначают обращение и умножение в группе G . Первая
строка в ней является коуравнителем, поскольку T — K -торсор,
а вторая является коуравнителем в силу определения $k_*(T)$.
Поэтому торсор $k_*(T)$ имеет глобальный элемент, а значит, три-
виален. Обратно, пусть T — произвольный K -торсор такой, что
 $k_*(T)$ тривиален; тогда нетрудно проверить K -эquivариантность
композиции $T \xrightarrow{e \times 1} G \times T \dashrightarrow k_*(T) \cong G$ (где K действует на G

умножением слева), а потому имеется коммутативная диаграм-
ма вида

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow u \\ G & \xrightarrow{\quad} & G/K \end{array}$$

(так как факторами T и G по соответствующему K -действию
являются 1 и G/K). Поэтому имеется морфизм K -торсоров
 $T \rightarrow \partial(u)$, который ввиду 8.31 (i) должен быть изоморфизмом.
Итак, наша последовательность точна в члене $H^1(\mathcal{E}; K)$.

Так как когомологии $H^1(\mathcal{E}; -)$ функториальны, то компози-
ция $H^1(\mathcal{E}; K) \rightarrow H^1(\mathcal{E}; G) \rightarrow H^1(\mathcal{E}; G/K)$, очевидно, является ну-
левым отображением. Обратно, пусть V — некоторый G -торсор;
тогда легко проверить, что композиция $V \xrightarrow{e \times 1} G/K \times V \dashrightarrow q_*(V)$
является эпиморфизмом, а потому

$$K \times V \xrightarrow[\pi_2]{\alpha(k \times 1)} V \dashrightarrow q_*(V)$$

— диаграмма коуравнителя. Поэтому, если торсор $q_*(V)$ три-
виален, то подъем

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & q_*(V) \end{array}$$

задает под- K -объект в V , который, как легко проверить, является
 K -торсором, а морфизм

$$G \times T \dashrightarrow G \times V \xrightarrow{\alpha} V$$

индуцирует G -эquivариантное отображение $k_*(T) \rightarrow V$, которое
должно быть изоморфизмом. Следовательно, изучаемая последо-
вательность точна в $H^1(\mathcal{E}; G)$. $\square$

Естественно задаться вопросом: можно ли определить кого-
мологии топоса с неабелевыми коэффициентами в размерности,
большей 1, так, чтобы при этом продолжалась точная последова-
тельность из предложения 8.36. Первое значительное продвиже-
ние в этом вопросе принадлежит Жиро [38], который предложил
рабочее, хотя и несколько громоздкое, определение множества
 $H^2(\mathcal{E}; G)$ в терминах классов эквивалентности «расширений то-
поса $\mathcal{E}$ с помощью G » (см. также [WB], гл. 10). Совсем недавно

Даскин [32] ввел понятие $K(G, n)$ -торсора, призванное решить задачу определения множеств $H^n(\mathcal{E}; G)$ для всех n .

Определение Даскина существенно опирается на теорию симплициальных объектов; сначала для каждого $n \geq 0$ он определяет симплициальный объект $K(G, n)$, который в симплициальной теории играет почти ту же роль, что и пространства Эйленберга — Маклейна в теории гомотопий (в частности, $K(G, 1)$ есть категория $G = (G \rightrightarrows 1)$, рассматриваемая как симплициальный объект (2.13), а $K(G, 0)$ — дискретная категория с объектом объектов G). Затем определяются $K(G, n)$ -торсоры как симплициальные объекты, удовлетворяющие определенным условиям точности и расслоенные над $K(G, n)$ в подходящем смысле; в частности, при $n = 0$ или 1 $K(G, n)$ -торсор есть просто плоский предпучок на $K(G, n)$ (что согласовано с нашими первоначальными определениями функторов H^0 и H^1). В общем случае при $n > 1$ категория $K(G, n)$ -торсоров не является группоидом (сравните с представлением Йонеды [187] для Ext-групп), а потому $H^n(\mathcal{E}; G)$ следует определять как множество связных компонент (а не классов изоморфизма) категории $K(G, n)$ -торсоров. Выделенным элементом множества $H^n(\mathcal{E}; G)$ является компонента, содержащая определенный симплициальный объект $L(G, n)$, который расслоен над $K(G, n)$ со слоем $K(G, n-1)$.

Чтобы дать полное описание обобщенных торсоров Даскина, нам потребовалось бы включить в изложение обширный фрагмент по теории симплициальных объектов, что заняло бы гораздо больше места, чем то, которое разумно посвятить этому вопросу в данной книге. Однако ввиду потенциальной важности этого мы приведем краткое описание (эквивалентное, но не совпадающее с описанием Даскина) понятия $K(G, 2)$ -торсора вместе с некоторыми примерами. (Фактически мы опишем слой $K(G, 2)$ -торсора, а не сам торсор.)

Пусть $T = (T_1 \rightrightarrows T_0)$ — внутренний группоид в $\mathcal{E}$. Группоид T называется *связным*, если $T_1 \xrightarrow{(d_0, d_1)} T_0 \times T_0$ — эпиморфизм. Образует декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & T_1 \\ \downarrow v & & \downarrow (d_0, d_1) \\ T_0 & \xrightarrow{\Delta} & T_0 \times T_0 \end{array}$$

тогда $(V \rightrightarrows T_0)$ — группа в топосе $\mathcal{E}/T_0$. Даже если группоид T связен, группа V не обязана быть постоянной (т. е. изоморфной $T_0^*(G)$) для некоторой группы $G \in \mathbf{gr}(\mathcal{E})$, но если такой изоморфизм имеет место, то мы будем называть G *группой вершин* внутреннего группоида T . Предположим, что группоид T имеет

группу вершин G , а $1 \xrightarrow{t} T_1$ — глобальный элемент из T_1 . Так как t обратим в T , то операция сопряжения с помощью t определяет морфизм из слоя проекции $V \xrightarrow{v} T_0$ над $d_0 t$ в слой над $d_1 t$, т. е. морфизм $G \rightarrow G$ в $\mathcal{E}$. Как легко убедиться, этот морфизм будет автоморфизмом группы G ; поэтому методом общих элементов можно построить морфизм $T_1 \rightarrow \text{aut}(G)$ в $\mathcal{E}$, где $\text{aut}(G)$ обозначает (внутреннюю) группу автоморфизмов (внутренней) группы G . Действие группоида T на его группе вершин называют *собственным*, если этот морфизм пропускается через подгруппу $\text{inn}(G)$ внутренних автоморфизмов, т. е. через образ гомоморфизма $G \rightarrow \text{aut}(G)$, определяемый сопряжением. (Отметим, в частности, что G действует собственно на своей группе вершин.)

Следует подчеркнуть, что требование, чтобы действие было собственным, является в действительности ограничением не на сам группоид T , а на данные спуска для V , т. е. на изоморфизм, с помощью которого мы отождествляем V с $G \times T_0$. Если группа G абелева, то выбор этого изоморфизма всегда *однозначен*, если потребовать, чтобы действие T на G было собственным, но если группа G неабелева, то может быть несколько возможностей для такого выбора, а потому мы рассматриваем изоморфизм $V \cong G \times T_0$ в следующем определении как часть структуры торсора.

8.37 **Определение.** Пусть G — группа в топосе $\mathcal{E}$. $K(G, 2)$ -торсором в $\mathcal{E}$ называется внутренний группоид T , имеющий глобальный носитель, связный и действующий собственно на своей группе вершин, которая изоморфна G . $\square$

Это определение не функториально для произвольных групповых гомоморфизмов $G \xrightarrow{f} H$, но функториально для *центральных* гомоморфизмов, т. е. для таких гомоморфизмов, которые отображают центр группы G в центр группы H (а потому индуцируют гомоморфизм $\text{inn}(G) \rightarrow \text{inn}(H)$). В частности, оно функториально для эпиморфизмов и произвольных гомоморфизмов абелевых групп. Отметим, что если эпиморфизмы $T_0 \twoheadrightarrow 1$ и $T_1 \twoheadrightarrow T_0 \times T_0$ расщепимы, то в действительности группоид T эквивалентен G как категория; поэтому, если последний эпиморфизм локально расщепим (5.24), то T локально эквивалентен G . Это всегда так, когда класс когомологий, представляемый группоидом T , является классом когомологий по Чеху.

8.38 **Примеры.** (i) Пусть $K \xrightarrow{h} G \xrightarrow{a} G/K$ — короткая точная последовательность групп, как в 8.36, а T — некоторый (G/K) -торсор. Тогда $G \times T \xrightarrow[\pi_2]{\alpha(q \times 1)} T$ — связный группоид в $\mathcal{E}$

с глобальным носителем и группой вершин K и он будет $K(K, 2)$ -торсором в том и только в том случае, когда G действует на K внутренними автоморфизмами, т. е. когда группа G

представима в виде произведения подгруппы K на ее централизатор в G . (Из этого условия вытекает, что гомоморфизм k централен, и если группа K абелева, то верно и обратное.) Если торсор T имеет вид $q_*(V)$ для некоторого G -торсора V и $V \twoheadrightarrow T$ — канонический эпиморфизм, то диаграмма

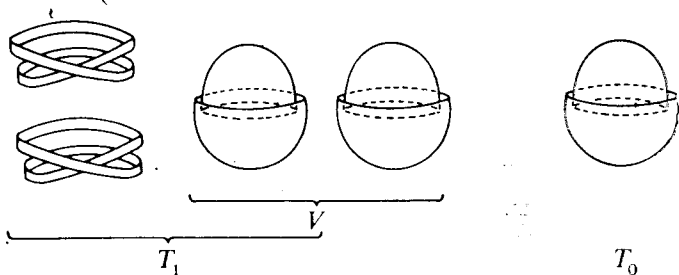
$$\begin{array}{ccc}
 G \times T & \xrightarrow{\alpha_T(q \times 1)} & T \\
 \uparrow (\pi_2, r\pi_3) & \searrow \pi_2 & \uparrow r \\
 K \times G \times V & \xrightarrow{\alpha_V \cdot \pi_{23}} & V \\
 \downarrow \pi_1 & \searrow \pi_3 & \downarrow \\
 K & \xrightarrow{\quad} & 1
 \end{array}$$

связывает группоиды T и K в категории $K(K, 2)$ -торсоров. Поэтому композиция

$$H^1(\mathcal{E}; G) \rightarrow H^1(\mathcal{E}; G/K) \rightarrow H^2(\mathcal{E}; K)$$

является нулевым отображением; более того, Даскин и Гленн показали, что эта последовательность в действительности точна.

(ii) Пусть G — абелева группа в $\mathcal{S}$, X — топологическое пространство, а V — некоторый G -торсор в $\text{Shv}(X)$. Тогда в $\text{Shv}(\Sigma X)$, где ΣX обозначает надстройку над X ([AT], § 1.6), можно построить следующий $K(G, 2)$ -торсор $T = \sigma(V)$: T_0 есть пучок сечений покрытия надстройки ΣX двумя перекрывающимися на X конусами. Если пересечение этих конусов обозначить через $X \times U$, то T_1 определяется как копроизведение (группы вершин) $T_0 \times G$ и двух копий произведения $V \times U$, которые составляют морфизмы из T между двумя листами покрытия над $X \times U$. Нижеследующий рисунок иллюстрирует случай $X = S^1$, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



(iii) Пусть G — абелева группа в $\mathcal{E}$. Тогда G — внутренняя абелева группа в $\text{cat}(\mathcal{E})$, а потому $\mathcal{E}^G$ — абелева группа в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ (ср. 4.37 (ii)). Пусть T — некоторый $K(G, 2)$ -торсор, когда левое умножение на элементы группы вершин индуцирует внутренний

функтор $G \times T \xrightarrow{\alpha} T$, являющийся действием G на T в $\text{cat}(\mathcal{E})$. Поэтому $\mathcal{E}$ -топос $\mathcal{E}^T$ имеет $\mathcal{E}^G$ -действие. Кроме того, существует геометрический морфизм $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}^T$ над $\mathcal{E}$, где X — объект из $\mathcal{E}$ с глобальным носителем (возьмите, например, $X = T_0$), а морфизм $\mathcal{E}^G \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}^T \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} \mathcal{E}^T \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}^T$ является эквивалентностью,

поскольку функтор $G \times T \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} T \times T$ полон, унивалентен и, по существу, эпиморфен на объектах (см. упражнение 2 к главе 4). Представляется разумным назвать такой $\mathcal{E}$ -топос $\mathcal{E}^G$ -торсором в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$. Обратно, Рейт показал, что любой $\mathcal{E}^G$ -торсор $\mathcal{F}$ в $\mathcal{Xop}/\mathcal{E}$ определяет следующий $K(G, 2)$ -торсор в $\mathcal{E}$: пусть X — такой объект с глобальным носителем, что существует геометрический морфизм $\mathcal{E}/X \xrightarrow{q} \mathcal{F}$; тогда рассмотрим композицию

$$\mathcal{E}/X \times X \simeq \mathcal{E}/X \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}/X \xrightarrow{q \times q} \mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}^G \times_{\mathcal{E}} \mathcal{F} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{E}^G.$$

В силу 4.37 (ii) эта композиция определяет G -торсор T в $\mathcal{E}/X \times X$; но поскольку действие группы $\mathcal{E}^G$ на $\mathcal{F}$ ассоциативно и унитарно, то легко проверить, что имеются изоморфизмы $\pi_{12}^*(T) \otimes_{G\pi_{23}^*} (T) \cong \pi_{13}^*(T)$ в $\mathcal{E}/X \times X \times X$ и $\Delta^*(T) \cong X^*(G)$ в $\mathcal{E}/X$. Это означает, что мы можем определить в $\mathcal{E}$ группоид с объектом объектов X и объектом морфизмов $\Sigma_{X \times X}(T)$ и этот группоид является $K(G, 2)$ -торсором. $\square$

8.4. Проконечные фундаментальные группы

В этом параграфе вводится удобное для многих приложений определение фундаментальной группы топоса. Исходным пунктом этого определения является наблюдение из упражнения 5 к главе 4 о тесной связи локально постоянных пучков на пространстве X с его фундаментальной группой. Однако наше общее определение фундаментальной группы не совпадает в точности с тем, которым пользуются алгебраические топологи; причина этого состоит в том, что в общем топосе, используя локально постоянные объекты, можно рассчитывать самое большее на реконструкцию «наилучшего приближения» фундаментальной группы с помощью ее конечных факторов. Чтобы уточнить, что мы имеем в виду, начнем с напоминания определения проконечной группы.

8.41 Теорема. Пусть G — группа. Следующие условия равносильны:

(i) Существует множество $\{H_i | i \in I\}$ нормальных подгрупп конечного индекса в G , замкнутое относительно пересечений и такое, что группа G (канонически) изоморфна пределу диаграмм

мы, вершинами которой являются группы G/H_i , $i \in I$, а стрелками — факторотображения $G/H_i \rightarrow G/H_j$, индуцированные включениями $H_i \subseteq H_j$.

(ii) Группа G изоморфна пределу диаграммы, в вершинах которой находятся конечные группы.

(iii) На группе G существует топология U , превращающая ее в топологическую группу и такая, что (G, U) — стоуновское пространство (т. е. вполне несвязное компактное пространство, или, эквивалентно, хаусдорфово спектральное пространство; см. 7.48).

Если эти условия выполнены, то группу G называют проконечной.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). На всех конечных группах указанной диаграммы введем дискретную топологию и рассмотрим ее предел в категории топологических групп. Так как класс стоуновских пространств содержит конечные дискретные пространства и замкнут относительно образования пределов в esp , то на G получаем топологию стоуновского пространства, превращающую G в топологическую группу.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\{H_i | i \in I\}$ — множество открытых нормальных подгрупп в G . Если теперь K — произвольная открытая подгруппа в G , то пространство $G:K$ классов смежности дискретно и компактно, а потому конечно; поэтому все группы H_i имеют конечный индекс в G . Покажем, что каноническое отображение $G \rightarrow \varprojlim_I (G/H_i)$ является изоморфизмом, т. е. что диаграмма

$$G \longrightarrow \varprojlim_i (G/H_i) \rightrightarrows \varprojlim_{i,j} (G/H_i, H_j)$$

является уравниателем. Пусть $(x_i | i \in I)$ — некоторый элемент данного уравниателя, т. е. $x_i \in G/H_i$ для каждого i и x_i равен x_j по модулю $H_i \cdot H_j$ для каждой пары (i, j) . Базисная открытая окрестность точки (x_i) в $\varprojlim G/H_i$ имеет вид

$$\{(y_i | i \in I) | y_{i_k} = x_{i_k} \text{ при } k = 1, \dots, n\}$$

для некоторого конечного подмножества $\{i_1, \dots, i_n\}$ в I ; если H_{i_0} обозначает пересечение $\bigcap_{k=1}^n H_{i_k}$, то элемент (y_i) изучаемого уравниателя лежит в указанной окрестности в том и только в том случае, когда $y_{i_0} = x_{i_0}$. Поэтому если $t \in G$ — произвольный представитель класса смежности x_{i_0} , то элемент $(tH_i | i \in I)$ лежит в данной окрестности. Значит, образ группы G плотен в уравниателе, но этот образ компактен, а потому и замкнут, откуда вытекает, что группа G отображается сюръективно на изучаемый уравниатель.

Чтобы показать взаимную однозначность отображения $G \rightarrow \prod G/H_i$, рассмотрим неединичный элемент x группы G . Так как пространство группы G вполне несвязно, то имеется открыто-замкнутая (а потому компактная) окрестность U точки x , не содержащая x . Очевидно, достаточно показать, что U содержит открытую нормальную подгруппу группы G . Рассмотрим для этого множество $F = (G - U) \cap U^2$; поскольку U компактно, F замкнуто, а пересечение $U \cap F$ пусто, то имеется такая открытая окрестность V точки e , что $UV \cap F$ пусто. Очевидно, также можно предполагать, что $V = V^{-1}$ и $V \subseteq U$; поэтому $UV \subseteq U^2$, откуда $UV \cap (G - U)$ пусто, т. е. $UV \subseteq U$. Далее по индукции получается, что $UV^n \subseteq V$ для всех n , а потому $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ — открытая подгруппа

в G , содержащаяся в U . Эта подгруппа не обязательно нормальна; однако она имеет конечный индекс в силу рассуждения, использованного выше, а потому имеется лишь конечное число сопряженных к этой подгруппе в G . Беря их пересечение, получаем требуемую открытую нормальную подгруппу. $\square$

Если G — произвольная (дискретная) группа, то ее проконечное пополнение $\hat{G}$ определяется как предел диаграммы, в вершинах которой лежат конечные факторы группы G . В общем случае неверно, что любая подгруппа конечного индекса в проконечной группе открыта (поэтому проконечная группа не обязательно изоморфна проконечному пополнению!), но это верно для проконечных групп вида $\hat{G}$.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — произвольный топос с объектом натуральных чисел. Под локально постоянным конечным*) объектом в $\mathcal{E}$ понимается такой объект X , что V^*X изоморфен конечному кардиналу в $\mathcal{E}/V$ для некоторого объекта V из $\mathcal{E}$, имеющего глобальный носитель. Обозначим через $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ полную подкатегорию локально постоянных конечных объектов из $\mathcal{E}$.

8.42 Предложение. (i) Категория $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ является булевым топосом, а функтор включения $\mathcal{E}_{\text{loc}} \rightarrow \mathcal{E}$ логический в том и только в том случае, когда топос $\mathcal{E}$ булев.

(ii) Если $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, то функтор p^* ограничивается до логического функтора $\mathcal{E}_{\text{loc}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}$.

(iii) Если $\mathcal{E}$ — связный $\mathcal{F}$ -топос (см. упражнение 8 к главе 4), а $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — точка в $\mathcal{E}$, то функтор $\mathcal{E}_{\text{loc}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}} = \mathcal{F}_1$, индуцированный p^* , отражает изоморфизмы.

(iv) Если $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, то категория $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ эквивалентна малой.

Доказательство. (i) следует непосредственно из 6.29 и из того, что функторы замены базы являются логическими.

*) В смысле теории кардиналов. — Примеч. пер.

Например, чтобы доказать, что категория $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ замкнута относительно образования экспонент в $\mathcal{E}$, рассмотрим два объекта X и Y в $\mathcal{E}_{\text{loc}}$. По определению имеются такие два объекта V, W с глобальными носителями, что подъемы V^*X и W^*Y изоморфны конечным кардиналам. Значит, в силу 6.23 (v) объект $(V \times W)^*(Y^X)$ изоморфен конечному кардиналу в $\mathcal{E}/V \times W$.

(ii) получается, как и предыдущее утверждение, из соответствующего результата для конечных кардиналов (упражнение 6 к главе 6) и из того, что функтор p^* сохраняет свойство иметь глобальный носитель.

(iii) Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм из $\mathcal{E}_{\text{loc}}$, а $U \rightarrow 1$ — экстенционал предложения

$$\bar{f} \in \text{Iso}(X, Y)$$

из $L_{\mathcal{E}_{\text{loc}}}$. Так как топос $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ булев, то U — дополняемый под-объект объекта 1 в $\mathcal{E}_{\text{loc}}$, а потому и в $\mathcal{E}$; значит, это либо 0 , либо 1 . Но ограничение функтора p^* на $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ сохраняет экстенционалы формул; поэтому, если $p^*(f)$ — изоморфизм, то $U \cong 1$, т. е. f — изоморфизм.

(iv) получается непосредственно из 8.35, поскольку имеется лишь множество натуральных чисел (а потому и конечных кардиналов) в $\mathcal{E}$. $\square$

8.43 Определение (Гротендик [GV], V 5.1). *Категорией Галуа* называется пара $(\mathcal{G}, F)$, где $\mathcal{G}$ — малый булев $*$) (пред)топос, а $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}_I$ — точный функтор, отражающий изоморфизмы. (Как следует из структурной теоремы, доказываемой ниже, каждая категория Галуа является на самом деле топосом, хотя при доказательстве этой теоремы используется лишь структура предтопоса. Из структурной теоремы также вытекает, что функтор F определяется однозначно с точностью до (неканонического) изоморфизма по $\mathcal{G}$, поэтому мы имеем право писать «категория Галуа $\mathcal{G}$ », опуская F .) $\square$

Напомним, что объект A булева (пред)топоса называется атомом (упражнение 13 к главе 7), если он отличен от нулевого объекта и не разложим в нетривиальное копроизведение (эквивалентно, не имеет нетривиальных подобъектов).

8.44. Лемма. Пусть $\mathcal{G}$ — категория Галуа. Тогда

(i) Любой объект из $\mathcal{G}$ (однозначно) представляется в виде конечного копроизведения атомов.

(ii) Любой эндоморфизм атома из $\mathcal{G}$ является автоморфизмом.

Доказательство. (i) Пусть X — некоторый объект из $\mathcal{G}$. Если $X \cong 0$, то он представляется в виде пустого копроизведения; поэтому предположим, что $X \not\cong 0$. Тогда множество $F(X)$ непусто, так как F сохраняет 0 и отражает изоморфизмы. Но если

X — не атом, то мы можем разложить его в нетривиальное копроизведение $X \cong Y_1 \sqcup Y_2$; оно соответствует нетривиальному разложению $F(X) \cong F(Y_1) \sqcup F(Y_2)$ в $\mathcal{P}_I$. Однако множество $F(X)$ конечно, поэтому процесс расщепления объекта X в копроизведение обрывается за конечное число шагов.

(ii) Пусть $A \xrightarrow{f} A$ — эндоморфизм атома из $\mathcal{G}$. Поскольку A отличен от нуля, то и его образ относительно f отличен от нуля, а потому он совпадает со всем объектом A , т. е. f — эпиморфизм. Значит, $F(f)$ — эпиморфизм конечного множества $F(A)$ на себя, и, следовательно, он должен быть изоморфизмом. Поэтому f — изоморфизм. $\square$

8.45 Предложение. Пусть $(\mathcal{G}, F)$ — категория Галуа. Тогда функтор F «пропредставим», т. е. имеется обратная фильтрованная система $(A_i | i \in I)$ объектов из $\mathcal{G}$ и естественный изоморфизм

$$F(X) \cong \varinjlim \text{hom}_{\mathcal{G}}(A_i, X).$$

Доказательство. Рассмотрим категорию I , объектами которой являются пары (A, a) , где A — атом из $\mathcal{G}$ и $a \in F(A)$, а морфизмами $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b)$ — морфизмы $A \xrightarrow{f} B$ из $\mathcal{G}$ такие, что $F(f)(a) = b$.

Категория I является частично упорядоченным множеством, поскольку если два морфизма $A \rightrightarrows B$ действуют одинаково на элемент $a \in F(A)$, то их уравниватель отличен от нуля, а потому совпадает с A . Категория I^{op} фильтрована, поскольку объектам (A, a) и (B, b) в I предшествует объект $(C, \langle a, b \rangle)$, где C обозначает компоненту произведения $A \times B$ (для разложения из 8.44 (i)), «содержащую» элемент $\langle a, b \rangle$ из $F(A) \times F(B) \cong F(A \times B)$. (Непустота I вытекает из того, что $F(1) \cong 1 \neq 0$, а потому $1 \neq 0$ в $\mathcal{P}_I$.)

Пусть (A, a) — объект из I ; согласно 0.11 мы можем рассматривать элемент a как естественное преобразование $\text{hom}_{\mathcal{G}}(A, -) \rightarrow F$. По определению морфизмов в I эти преобразования в совокупности индуцируют преобразование

$$\theta: G = \varinjlim (\text{hom}_{\mathcal{G}}(A, -)) \rightarrow F.$$

Но θ — эпиморфизм в силу 8.44 (i), так как любой элемент из $F(X)$ лежит в (образе) $F(A)$ для некоторого атома $A \rightarrow X$, и θ — мономорфизм, так как если даны элементы $x, y \in G(X)$ с $\theta(x) = \theta(y)$, то оба элемента x и y представимы морфизмами $A \xrightarrow{x, y} X$ для некоторого $(A, a) \in I$ с $F(x)(a) = F(y)(a)$. Тогда,

как и ранее, отсюда вытекает, что уравниватель стрелок x и y совпадает со всем A , т. е. $x = y$ в $\text{hom}_{\mathcal{G}}(A, X)$, а потому и в $G(X)$. $\square$

*) В смысле 5.14 (iii). — Примеч. пер.

Для каждого объекта $(A, a) \in I$ имеется естественное отображение $\text{aut}_{\mathcal{G}}(A) = \text{hom}_{\mathcal{G}}(A, A) \rightarrow F(A)$, которое, очевидно, мономорфно, поскольку в указанной обратной системе все отображения перехода эпиморфны. Назовем объект (A, a) *нормальным*, если это отображение также эпиморфно. (Замечание: так как это эквивалентно утверждению, что группа $\text{aut}(A)$ действует транзитивно на $F(A)$, то фактически данное определение нормальности не зависит от элемента a .)

8.46 Предложение. Для любого объекта X из $\mathcal{G}$ существует нормальный объект (A, a) такой, что каноническое отображение $\text{hom}(A, X) \rightarrow F(X)$ является изоморфизмом. Поэтому, в частности, нормальные объекты образуют кофинальную подкатегорию в I (см. упражнение 11 к главе 2).

Доказательство. Очевидно, имеется элемент $(B, b) \in I$ такой, что каждый элемент x в $F(X)$ происходит из некоторого морфизма $B \xrightarrow{\bar{x}} X$, так как множество $F(X)$ конечно, а категория I фильтрована. Рассмотрим теперь образ A канонического отображения $B \rightarrow \prod_{F(X)} X$ в $\mathcal{G}$, x -й компонентой которого является $\bar{x}$. Поскольку объект A является фактором объекта B , то он является атомом; поэтому если a обозначает образ элемента x в $F(A)$, то пара (A, a) лежит в I , и снова имеется изоморфизм $\text{hom}(A, X) \cong F(X)$.

Пусть теперь (C, c) — другой элемент из I такой, что каждый элемент в $F(A)$ происходит из некоторого морфизма $C \rightarrow A$; в частности, пусть $C \xrightarrow{\phi} A$ — такой морфизм, что $F(\phi)(c) = a$. Чтобы установить нормальность (A, a) , надо показать, что для любого морфизма $C \xrightarrow{\psi} A$ существует морфизм $A \xrightarrow{v} A$ с $v\phi = \psi$. Но для каждого $x \in F(X)$ композиция $C \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\bar{x}} X$ определяет такой элемент x' в $F(X)$, что $\bar{x}\psi = \bar{x}'\phi$, и отображение $F(X) \rightarrow F(X)$, определяемое сопоставлением $x \mapsto x'$, очевидно, мономорфно (так как ψ — эпиморфизм), а потому оно является изоморфизмом.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\phi} & A & \longrightarrow & \prod_{F(X)} X \\ \downarrow 1 & & & & \downarrow u \\ C & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & \prod_{F(X)} X \end{array}$$

где u — изоморфизм, отвечающий перестановке сомножителей; тогда ввиду функториальности эпимоноразложения получаем изоморфизм $A \xrightarrow{v} A$ такой, что $v\phi = \psi$, а это и требовалось. $\square$

Если G — произвольная топологическая группа, то обозначим через $\mathcal{G}(G)$ топос непрерывных G -множеств (8.15 (iii)), а через $\mathcal{G}_f(G)$ — полную подкатегорию непрерывных конечных G -множеств (которая, очевидно, является логическим подтопосом в $\mathcal{G}(G)$, см. 1.14).

8.47 Теорема (Гротендик). Пусть $\mathcal{G}$ — малая категория, $\mathcal{G} \xrightarrow{F} \mathcal{P}$ — функтор. Следующие условия равносильны:

(i) $(\mathcal{G}, F)$ — категория Галуа.

(ii) Имеется топологическая группа G и эквивалентность $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_f(G)$, отождествляющая F со стирающим функтором.

Более того, если мы потребуем проконечность группы G в (ii), то она по $(\mathcal{G}, F)$ будет определяться однозначно с точностью до изоморфизма; так определяемая группа называется фундаментальной группой категории Галуа $(\mathcal{G}, F)$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно, поскольку топос $\mathcal{G}_f(G)$ является булевым, а стирающий функтор $\mathcal{G}_f(G) \rightarrow \mathcal{P}$ — логическим.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Обозначим через N полную подкатегорию в I , составленную из нормальных объектов. Если $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b)$ — морфизм из N , то отображение $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ можно рассматривать как отображение вида $\text{aut}(A) \xrightarrow{\phi} \text{aut}(B)$, и в действительности это отображение переводит автоморфизм $A \xrightarrow{v} A$ в единственный автоморфизм $B \xrightarrow{w} B$ такой, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow v & & \downarrow w \\ A & \xrightarrow{\phi} & B \end{array}$$

коммутативен. Из этого описания легко вывести, что в действительности отображение ϕ является гомоморфизмом групп, а потому группы $\text{aut}(A) ((A, a) \in N)$ образуют диаграмму над N в категории конечных групп. Определим искомую группу G как предел этой диаграммы; тогда, очевидно, группа G проконечна.

Теперь для любого объекта X из $\mathcal{G}$ получаем непрерывное G -действие на конечном множестве $F(X)$; для этого выберем нормальный объект (A, a) , как в 8.46, и рассмотрим естественное действие группы $\text{aut}(A)$ (очевидно, являющейся дискретным фактором группы G) на $\text{hom}(A, X) \cong F(X)$. (Легко проверить, что так определенное G -действие не зависит от выбора объекта A .) Поэтому функтор F пропускается через стирающий функтор $\mathcal{G}_f(G) \rightarrow \mathcal{P}$.

Чтобы построить обращение $\mathcal{G}_f(G) \xrightarrow{T} \mathcal{G}$ найденной факторизации, достаточно ввиду 8.44 (i) определить T на транзитив-

ных G -множествах (т. е. атомах категории $\mathcal{C}_f(G)$), а затем продолжить данное определение, требуя, чтобы T сохраняло копроизведения. Но любой атом в $\mathcal{C}_f(G)$ имеет вид $G:H$, где H — открытая подгруппа в G , а тогда, поскольку H — окрестность единицы в G , она содержит ядро проекции $G \rightarrow \text{aut}(A)$ для некоторого нормального объекта (A, a) . Пусть $\bar{H} \equiv \text{aut}(A)$ — образ подгруппы H относительно этой проекции; тогда, поскольку категория $\mathcal{C}$ имеет конечные копроизведения, образы и коуравнители отношений эквивалентности, можно построить факторобъект объекта A по этой конечной группе автоморфизмов, т. е. совместный коуравнитель пар $(v, 1_A)$ для каждого $v \in \bar{H}$. Определим объект $T(G:H)$ как такой факторобъект; тогда снова непосредственная проверка показывает, что объект $T(G:H)$ не зависит (с точностью до канонического изоморфизма) от выбора нормального объекта (A, a) , что T функториально на отображениях транзитивных G -множеств и что T обращает ранее построенный функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_f(G)$.

Последнее утверждение теоремы следует из 8.41, ибо всякая проконечная группа G определяется однозначно с точностью до изоморфизма своими дискретными факторгруппами, а они являются в точности нормальными объектами в $\mathcal{C}_f(G)$. $\square$

8.48 Следствие. Пусть $(\mathcal{C}, F)$ — категория Галуа, а $F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ — другой функтор такой, что $(\mathcal{C}, F')$ — также категория Галуа. Тогда функторы F и F' естественно изоморфны.

Доказательство. Ввиду 8.47 можно предполагать, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f(G)$ для некоторой проконечной группы и что F — стирающий функтор. Так как F' сохраняет копроизведения, то морфизм $F \cong F'$ достаточно установить на атомах категории $\mathcal{C}$. Пусть теперь I' — частично упорядоченное множество, объектами которого являются пары (A, a') , где A — атом из $\mathcal{C}$, а $a' \in F'(A)$ (ср. 8.45). Рассмотрим в $\mathcal{C}$ предел

$$X = \lim_{\leftarrow (A, a') \in I'} F(A).$$

Так как множества $F(A)$ конечны и непусты, категория $I'^{\text{ор}}$ фильтрована, а отображения перехода данной обратной системы эпиморфны, то, используя лемму Цорна, легко показать, что множество X непусто. Пусть x — элемент из X , а $x(a')$ обозначает образ элемента x в компоненте, отвечающей элементу (A, a') из I' . Тогда сопоставление $a' \mapsto x(a')$ определяет отображение $F'(A) \xrightarrow{\xi} F(A)$, которое, очевидно, естественно по A . Более того, это отображение мономорфно, поскольку если $x(a') = x(a'')$, то можно указать элемент $(B, b') \in I'$ и морфизмы $B \xrightarrow{f} A$ в $\mathcal{C}$ такие, что $F'(f)(b') = a'$ и $F'(g)(b') = a''$, а тогда f и g совпадают на элементе $x(b')$ из $F(B)$, поэтому они совпадают всюду.

Функтор F' сохраняет 1 и конечные копроизведения; значит, ξ — изоморфизм для любого G -множества с тривиальным действием. Однако любой объект из $\mathcal{C}_f(\mathcal{C})$ локально изоморфен G -множеству с тривиальным действием, ибо если H — открытая нормальная подгруппа в G , стабилизирующая каждый элемент из A , то сопоставление $(a, Hg) \mapsto (ag^{-1}, Hg)$ определяет изоморфизм $A \times (G/H) \xrightarrow{\sim} A_0 \times (G/H)$, где A_0 обозначает носитель G -множества A с тривиальным G -действием. Из этого легко выводится, что множества $F'(A)$ и $F'(A_0)$ имеют одно и то же число элементов, а потому то же число элементов, что и $F(A)$; поэтому ξ — изоморфизм для всех A . $\square$

Отметим, что изоморфизм $F' \cong F$ из 8.48 не каноничен, ибо он зависит от выбора элемента x .

8.49 Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — связный топос Гротендика, а p — точка в $\mathcal{C}$. Определим проконечную фундаментальную группу $\Pi_1(\mathcal{C}, p)$ как фундаментальную группу категории Галуа $(\mathcal{C}_{\text{loc}}, p^*)$. $\square$

8.50 Примеры. (i) Пусть X — связное топологическое пространство, имеющее универсальное накрывающее пространство $\tilde{X}$, а x — точка из X . Конечными кардиналами в $\text{Shv}(X)$ являются постоянные пучки на X с конечными слоями; поэтому локально постоянными конечными объектами являются пучки сечений конечных накрывающих пространств над X , которые соответствуют (согласно упражнению 5 к главе 4) конечным множествам с $\Pi_1(X, x)$ -действием. Поэтому группа $\Pi_1(\text{Shv}(X), x)$ изоморфна проконечному пополнению обычной фундаментальной группы.

(ii) Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}^G$, где G — (дискретная) группа. Тогда в силу рассуждения из последней части доказательства следствия 8.48 каждое конечное G -множество локально изоморфно конечному кардиналу в $\mathcal{C}$; поэтому $\mathcal{C}_{\text{loc}} = (\mathcal{C}_f)^G$. Значит, проконечная фундаментальная группа топоса $\mathcal{C}$ (с единственно возможной базисной точкой) совпадает с проконечным пополнением группы G .

(iii) Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$, где G — компактная топологическая группа. Как и в (ii), оказывается, что $\mathcal{C}_{\text{loc}} = \mathcal{C}_f(G) \cong \mathcal{C}_f(G/N)$, где N — компонента связности единицы в G ; поэтому G/N — проконечная фундаментальная группа топоса $\mathcal{C}$. $\square$

Упражнения к главе 8

1. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{C}$ — существенный геометрический морфизм. Используя теорему 0.15, определите левый сопряженный f_* для функтора $f^*: \text{ab}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ab}(\mathcal{F})$. Покажите, что функтор f_* сохраняет проективные объекты, и выведите отсюда, что если f —

сюръекция и $\mathbf{ab}(\mathcal{F})$ имеет достаточно много проективных объектов, то $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет достаточно много проективных объектов.

2. Пусть j — топология в топосе $\mathcal{E}$ и предположим, что категория $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ имеет *инъективные оболочки*, т. е. для каждого $A \in \mathbf{ab}(\mathcal{E})$ можно найти мономорфизм $A \hookrightarrow E$ такой, что объект E инъективен и A пересекает нетривиально каждый ненулевой подобъект в E . Докажите, что категория $\mathbf{ab}(\mathrm{sh}_j(\mathcal{E}))$ тоже имеет инъективные оболочки. [Указание. Если $A \hookrightarrow E$ — инъективная оболочка в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ некоторого j -пучка A , то докажите, что $E \rightarrow L(E)$ — мономорфизм, а отсюда выведите, что E — пучок.]

3. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а A — абелева группа в $\mathcal{E}$. Установите равносильность следующих условий:

- (i) $H^1(X; A) = 0$ для каждого объекта X из $\mathcal{E}$.
- (ii) Для каждой короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в $\mathbf{ab}(\mathcal{E})$ эпиморфизм $B \twoheadrightarrow C$ имеет *трансверсаль* (т. е. расщепление в $\mathcal{E}$).

[Указание. Для (i) $\Rightarrow$ (ii) возьмите в качестве X (носитель группы) C .]

Достаточно ли этих условий, чтобы группа A была слабой? [Рассмотрите топос $\mathcal{P}^C$, где C — циклическая группа порядка 2, и возьмите $A = \mathbb{Z}$ с тривиальным C -действием.]

4. Пусть G — (не обязательно абелева) группа в топосе $\mathcal{E}$ такая, что $H^1(X; G) = 0$ для всех $X \in \mathcal{E}$. Докажите инъективность G как объект топоса $\mathcal{E}$. [Указание. Для диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow \sigma & & \\ X & & \end{array}$$

рассмотрите коядерную пару $X \rightrightarrows Q$ мономорфизма σ и, используя f , постройте в $\mathcal{E}/Q$ такой G -торсор, что любой глобальный элемент этого торсора определяет продолжение морфизма f вдоль σ .] Покажите, однако, что обратное неверно, даже если группа G абелева. [Возьмите в качестве $\mathcal{E}$ топос из уравнения 3 и рассмотрите группу $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с тривиальным C -действием.]

5. Пусть X — топологическое пространство, а A — пучок абелевых групп на X . Докажите равносильность следующих условий:

- (i) A — слабый пучок.
- (ii) A удовлетворяет эквивалентным условиям из упражнения 3.
- (iii) Пучок A инъективен как объект топоса $\mathrm{Shv}(X)$.
- (iv) Для каждого открытого множества $U \subseteq X$ отображение ограничения $\rho_U^X: A(X) \rightarrow A(U)$ сюръективно.

[Указание. Для (iv) $\Rightarrow$ (i) предположим, что задана короткая точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$; используя лемму Цорна, постройте трансверсаль для эпиморфизма $B \twoheadrightarrow C$. Предполагая теперь, что B — слабый пучок, покажите, что пучок C тоже удовлетворяет (iv).]

6. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория с расслоенными произведениями, $\mathcal{U} = (U_\gamma \xrightarrow{\theta_\gamma} U \mid \gamma \in \Gamma)$ — семейство морфизмов из $\mathcal{C}$ с общим концом, а $V \xrightarrow{\theta} U$ — морфизм из $\mathcal{C}$. Обозначая через $\phi^*\mathcal{U}$ семейство $(U_\gamma \times_U V \xrightarrow{\pi_2} V \mid \gamma \in \Gamma)$, постройте цепное отображение $N_\bullet(\phi^*\mathcal{U}) \rightarrow N_\bullet(\mathcal{U})$, а затем отображение $C^*(\mathcal{U}; A) \rightarrow C^*(\phi^*\mathcal{U}; A)$ для любого предпучка абелевых групп A на $\mathcal{C}$. Выведите отсюда, что группы когомологий Чеха $\check{H}^q(U; A)$ (в некоторой топологии Гротендика на $\mathcal{C}$) контравариантно функториальны по U . Покажите также, что если θ_γ — расщепимый эпиморфизм для некоторого $\gamma \in \Gamma$, то комплекс $N_\bullet(\mathcal{U})$ стягиваем, а отсюда получите, что $H^q(\theta_\gamma^*\mathcal{U}; A) = 0$ для любого $\mathcal{U}$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и всех $q > 0$.

7. Пусть $(\mathcal{C}, J)$ — сайт, удовлетворяющий предположениям 7.35 (так что топос $\mathcal{E} = \mathrm{Shv}(\mathcal{C}, J)$ когерентен). Покажите, что включение $\mathrm{Shv}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ сохраняет фильтрованные копределы [т. е. в $\mathcal{P}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ копредел фильтрованной диаграммы пучков является пучком], а отсюда выведите, что для любого $U \in \mathcal{C}_0$ функтор $\check{H}^q(U; -)$ сохраняет фильтрованные копределы. Затем установите ацикличность для функтора $\mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$ фильтрованных копределов слабых пучков [используйте 8.28 с $K = \mathcal{C}_0$], после чего докажите, что функтор $\check{H}^q(\mathcal{E}; -)$ сохраняет фильтрованные копределы.

8. Пусть A — коммутативное кольцо, а M — некоторый A -модуль. Покажите, что сопоставление $D(f) \mapsto M \otimes_A A[f^{-1}]$ ($f \in A$) определяет пучок $\tilde{M}$ на $\mathrm{spes}(A)$ и что $\check{H}^q(\mathrm{spes}(A); \tilde{M}) = 0$ для всех $q > 0$. [Метод: для заданного конечного открытого покрытия $\mathcal{U} = (D(f_i) \mid i \in I)$ пространства $\mathrm{spes}(A)$ базисными открытыми по Зарисскому множествами выразите пополненный коцепной комплекс $M = \tilde{M}(\mathrm{spes}(A)) \rightarrow C^*(\mathcal{U}; \tilde{M})$ в виде фильтрованного предела пополненных комплексов

$$C_n^*(\mathcal{U}; M): M \rightarrow \prod_{i \in I} M \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} M \rightarrow \dots (n \in \mathbb{N}),$$

кограничные отображения которых определяются сопоставлениями

$$m \mapsto (f_i^n \cdot m \mid i \in I), \quad (m_i \mid i \in I) \mapsto (f_j^n \cdot m_i - f_i^n \cdot m_j \mid (i,j) \in I \times I)$$

и т. д. Затем, используя то, что существуют элементы $g_{n,i} \in A$ с $\sum_i g_{n,i} f_i^n = 1$, покажите, что каждый комплекс $C_n(\mathcal{U}; M)$ стягиваем.] Получите отсюда, что если $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема, а F — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей, то когомологии Чеха и обычные когомологии пространства X с коэффициентами в F совпадают. [Используйте 8.28; пучок модулей называется *квазикогерентным*, если его ограничение на каждое открытое аффинное подмножество в X изоморфно пучку вида M .]

9. Пусть X — паракомпактное (хаусдорфово) топологическое пространство, а A — предпучок абелевых групп на X , слои которого в каждой точке изоморфны 0. Покажите, что $H^q(X; A) = 0$ для всех q . [Метод. Для заданной коцепи $\xi \in C^q(\mathcal{U}; A)$, где $\mathcal{U} = (U_i | i \in I)$ — локально конечное открытое покрытие пространства X , рассмотрите сжатие $\mathcal{V} = (V_i | i \in I)$ ([GT], с. 104) покрытия $\mathcal{U}$, а затем определите измельчение $\mathcal{W}$ покрытия $\mathcal{V}$, выбирая для каждой точки $x \in X$ такую окрестность W_x , что

- (a) $x \in U_i \Rightarrow W_x \subseteq U_i$;
- (b) $x \in V_i \Rightarrow W_x \subseteq V_i$;
- (c) $x \in U_i \Rightarrow W_x \cap V_i = \emptyset$;
- (d) если $x \in U_\sigma$ для некоторого $\sigma \in I^{q+1}$ (так что $W_x \subseteq U_\sigma$ по (a)), то элемент ξ_σ из $A(U_\sigma)$ ограничивается в 0 из $A(W_x)$.

Далее покажите, что ξ ограничивается в нулевую коцепь из $C^q(\mathcal{W}; A)$.] Выведите отсюда, что если F — любой пучок абелевых групп на X , то когомологии Чеха и обычные когомологии пространства X с коэффициентами в F совпадают.

10. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, а Φ — фильтр открытых объектов в $\mathcal{E}$ (т. е. множество подобъектов в 1 таких, что $1 \in \Phi$, $(U_1 \in \Phi \text{ и } U_2 \in \Phi) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \Phi$, и $(U_1 \in \Phi \text{ и } U_1 \subseteq U_2) \Rightarrow U_2 \in \Phi$). Пусть A — абелева группа в $\mathcal{E}$, а $1 \xrightarrow{a} A$ — глобальный элемент в A ; определим *коноситель* элемента a как уравниватель a и нулевого элемента $1 \xrightarrow{0} A$. Пусть $\gamma_\Phi(A)$ обозначает множество глобальных элементов в A с коносителем, лежащим в Φ ; докажете, что $\gamma_\Phi(A)$ — группа и что функтор $\gamma_\Phi: \mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{P})$ точен слева. Покажите, что слабые абелевы группы адикличны для γ_Φ [используйте упражнение 3 и индукцию]. (q -правый производный функтор функтора γ_Φ обозначается через $H_\Phi^q(\mathcal{E}; -)$ и называется q -й группой когомологий топоса $\mathcal{E}$ с коносителем в Φ .)

11 (Диаконеску). Пусть V — объект с глобальным носителем в топосе $\mathcal{E}$; обозначим через $G = \text{Iso}(V, V)$ группу всех перестановок объекта V в $\mathcal{E}$, а через $G \times V \xrightarrow{\alpha} V$ каноническое действие (т. е. отображение значения). Покажите, что в общем случае α не транзитивно [рассмотрите объект $(V_0 \xrightarrow{f} V_1)$ в $\mathcal{P}^2$, где множество V_0 трехэлементно, V_1 двухэлементно, а отображение f

сюръективно]. Покажите, однако, что если топос $\mathcal{E}$ булев, то $G \times V \xrightarrow{(\alpha, \pi_2)} V \times V$ — расщепимый эпиморфизм [используйте обобщенные элементы]; пусть $V \times V \xrightarrow{(\sigma, \pi_2)} G \times V$ — такое расщепление. Предположим, что существует такая группа H в $\mathcal{E}$, что группоид $(G \times V \xrightleftharpoons[\pi_2]{\alpha} V)$ является тривиальным $K(H, 2)$ -торсором; покажите тогда, что σ можно выбрать так, что будут выполнены следующие условия согласованности:

$$\begin{array}{ccccc} V \times V \times V & \xrightarrow{\pi_{13}} & V \times V & \xleftarrow{\Delta} & V \\ \downarrow (\sigma\pi_{12}, \sigma\pi_{23}) & & \downarrow \sigma & & \downarrow \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & \xleftarrow{e} & 1 \end{array}$$

Покажите, что если эти условия выполнены, то коуравниватель $G \times V \xrightarrow{q} T$ пары

$$G \times V \times V \xrightarrow[(m(1 \times \sigma), \pi_3)]{\pi_{12}} G \times V$$

является G -торсором в $\mathcal{E}$, и что действие $G \times V \xrightarrow{\alpha} V$ пропускается через q . Выведите отсюда, что если торсор T также тривиален, то V имеет глобальный элемент.

12. Пусть G и H — проконечные группы, а $\mathcal{E}_f(G) \xrightarrow{T} \mathcal{E}_f(H)$ — функтор, коммутирующий со стирающими функторами в категории множеств. (Заметим, что T автоматически точен и отражает изоморфизмы.) Докажете, что существует (единственный) непрерывный гомоморфизм $H \xrightarrow{f} G$ такой, что T индуцирует «заменой оператора» вдоль f . [Указание. Для каждой открытой нормальной подгруппы K в G покажите, что

$$H \xrightarrow{1 \times T(e)} H \times T(G/K) \xrightarrow{\alpha} T(G/K)$$

— гомоморфизм групп.] Выведите отсюда, что фундаментальная группа $\Pi_1(\mathcal{E}, p)$, определенная в 8.49, является (ковариантным) функтором из категории пунктированных связных топосов Гротендика в категорию проконечных групп.

13. Пусть K — поле, а $\mathcal{E}$ — этальный топос K_{et} из упражнения 0.11. Покажите, что локально постоянные конечные объекты в $\mathcal{E}$ являются в точности этальными пучками, представленными

K -алгебрами вида $\prod_{i=1}^n L_i$, где n конечно, а каждое L_i — конечное сепарабельное расширение поля K . Выведите отсюда, что нор-

мальными объектами в $\mathcal{E}_{\text{et}}$ являются конечные расширения Галуа поля K . Покажите затем, что если K^s — сепарабельное замыкание поля K , то включение $K \hookrightarrow K^s$ индуцирует геометрический морфизм $\mathcal{P} \simeq (K^s)_{\text{et}} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$, а фундаментальная группа $\Pi_1(\mathcal{E}, p)$ изоморфна проконечной группе Галуа $\text{Gal}(K^s/K)$.

14 (теорема Гильберта 90). Пусть L — конечное расширение Галуа поля K с группой Галуа G . Рассмотрим группу GL ненулевых элементов поля L как G -модуль (т. е. как объект категории $\text{ab}(\mathcal{P}^G)$). Покажите, что $H^1(\mathcal{P}^G; GL) = 0$. [Указание.

Для заданного 1-коцикла $G \xrightarrow{\xi} GL$ покажите, что элемент $f(x) = \sum_{\sigma \in G} \xi(\sigma) \cdot \sigma(x)$ отличен от нуля при некотором $x \in GL$, и вы-

ведите отсюда, что ξ является кограницей 0-коцепи $1 \xrightarrow{f(x)^{-1}} GL$.] Покажите затем, что $H^1(K_{\text{et}}; \Gamma) = 0$, где Γ — этальный пучок на K , переводящий K -алгебру в группу ее единиц. Покажите

также, что морфизм $\Gamma \xrightarrow{\phi_n} \Gamma$, переводящий единицы из L в их n -ю степень, является эпиморфизмом в K_{et} , а отсюда выведите, что если M_n обозначает ядро морфизма ϕ (т. е. пучок корней n -й степени из 1), то $H^1(K_{\text{et}}; M_n) \cong \Gamma K / (\Gamma K)^n$.

ГЛАВА 9

ТЕОРИЯ ТОПОСОВ И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

9.1. Конечность по Куратовскому

Первый параграф этой главы, возможно, не столь непосредственно связан с общей темой «теория топосов и теория множеств», чем те, которые за ним следуют. Но он их напоминает в том отношении, что идеи, которые мы здесь рассматриваем, вызваны к жизни размышлениями над теорией множеств и что доминирующую роль играют не геометрические, а логические функторы. В частности, мы занимаемся здесь другим определением «конечного объекта в топосе», которое отличается от определения финитного кардинала (6.21) тем, что нам не нужно пропускать наличие у этого топоса объекта натуральных чисел. В теорию множеств это определение было впервые введено Куратовским [174]; его приложениям к теории топосов мы в значительной степени обязаны трудам Кока, Лекутьерье и Миккелсена [65].

Пусть $\mathcal{T}$ — конечно представленная алгебраическая теория. Если X является $\mathcal{T}$ -моделью в топосе $\mathcal{E}$ и $Y \hookrightarrow X$ — подобъект из X , то можно (даже без использования теоремы 6.43) построить под- $\mathcal{T}$ -модель модели Y , порожденную объектом Y , применяя оператор внутреннего пересечения (предложение 5.34) к «объекту под- $\mathcal{T}$ -моделей для X , содержащих Y ». В частности, это верно для теории slat полурешеток ([LT], с. 9*). Мы определяем, что $K(X) \hookrightarrow \Omega^X$ для любого объекта X является под- $\vee$ -полурешеткой объекта Ω^X , порожденной морфизмом $X \xrightarrow{1_X} \Omega^X$.

9.11 Определение. Будем говорить, что X является *конечным по Куратовскому* (сокращенно, K -конечным), если максимальный элемент $1 \xrightarrow{1_X} \Omega^X$ объекта Ω^X пропускается через $K(X) \hookrightarrow \Omega^X$. Будем писать $\mathcal{E}_K$ вместо полной подкатегории K -конечных объектов из $\mathcal{E}$. □

Следует отметить, что высказывание « X является K -конечным» можно выразить предложением

$$\forall z (\ulcorner 0 \urcorner \longrightarrow X \urcorner \in z \wedge \forall x (\{x\} \in z) \wedge \forall y \forall y' (y \in z \wedge y' \in z \Rightarrow \Rightarrow (y \vee y') \in z) \Rightarrow \ulcorner 1_X \urcorner \in z)$$

*) См. с. 22 русского перевода. — Примеч. ред.

языка $L_{\mathcal{E}}$, где y и y' — переменные типа Ω^x , а z — переменная типа Ω^x . Следовательно, свойство быть K -конечным сохраняется логическими функторами и отражается унивалентными логическими функторами; в частности, если X локально K -конечен (т. е. V^*X является K -конечным в $\mathcal{E}/V$ для некоторого V с глобальным носителем), то X глобально K -конечен. Следует также отметить, что X является K -конечным тогда и только тогда, когда у частично упорядоченного множества $K(X)$ имеется максимальный элемент; действительно, такой элемент должен быть (внутренней) «верхней гранью для одноэлементных множеств» в Ω^x и, следовательно, должен представлять собой $\lceil 1_X \rceil$.

Пусть теперь $X \xrightarrow{f} Y$ является морфизмом из $\mathcal{E}$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Y \end{array}$$

коммутативна, и $\exists f$ (являясь внутренним сопряженным слева) представляет собой гомоморфизм V -полурешеток; поэтому он ограничивается до морфизма $K(f): K(X) \rightarrow K(Y)$. Следовательно, K является фактически подфунктором ковариантного функтора множеств-степеней.

9.12 Лемма. (i) Если X является K -конечным и $X \xrightarrow{f} Y$ — эпиморфизм, то Y является K -конечным.

(ii) $X \amalg Y$ является K -конечной тогда и только тогда, когда K -конечны как X , так и Y .

Доказательство. (i) Поскольку $\lceil 1_X \rceil$ пропускается через $K(X)$, из замечания выше следует, что $\exists f(\lceil 1_X \rceil = \lceil \text{im } f \rceil = \lceil 1_Y \rceil)$ пропускается через $K(X \amalg Y)$.

(ii) Предположим, что X и Y являются K -конечными. Тогда, как в (i), элементы $\exists v_1(\lceil 1_X \rceil = \lceil v_1 \rceil)$ и $\exists v_2(\lceil 1_Y \rceil = \lceil v_2 \rceil)$ пропускаются через $K(X \amalg Y)$, но $K(X \amalg Y)$ является полурешеткой, поэтому $\lceil 1_{X \amalg Y} \rceil = \vee(\lceil v_1 \rceil, \lceil v_2 \rceil)$ пропускается через $K(X \amalg Y)$.

Наоборот, предположим, что $X \amalg Y$ являются K -конечной. Теперь можно легко увидеть, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \amalg Y & \xrightarrow{1_{X \amalg Y}} & X \amalg 1 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Omega^{(X \amalg Y)} & \xrightarrow{\Omega^{\exists}} & \Omega^X \end{array}$$

коммутативен, так как оба пути по периметру соответствуют под-
($v_1, 1$)

объекту $X \mapsto (X \amalg Y) \times X$. Но Ω^{v_1} является гомоморфизмом V -полурешеток, поскольку подъем сохраняет объединения под-объектов, а поскольку $K(X)$ — полурешетка, он содержит элемент $\lceil 0 \rceil$. Следовательно, Ω^{v_1} отображает $K(X \amalg Y)$ в $K(X)$, и потому $\lceil 1_X \rceil = \Omega^{v_1} \lceil 1_{X \amalg Y} \rceil$ пропускается через $K(X)$. $\square$

9.13 Следствие. (i) $K(X)$ является «объектом конечных по Куратовскому подобъектов из X », т. е. если задан подобъект $Y \xrightarrow{f} X$, то

$$\mathcal{E} \models (Y \text{ } K\text{-конечен}) \Leftrightarrow (\lceil f \rceil \in \lceil K(X) \rceil).$$

(ii) Для любых двух объектов X и Y имеем $K(X \amalg Y) \cong K(X) \times K(Y)$.

Доказательство. (i) Если Y является K -конечным, то ясно, что $\lceil f \rceil = \exists f \lceil 1_Y \rceil$ пропускается через $K(X)$.

Наоборот, пусть $K'(X)$ обозначает объект K -конечных под-объектов (которые можно построить как истинное значение высказывания « $\in_x$ является K -конечным» в языке $L_{(\mathcal{E}/\Omega^x)}$); тогда из леммы 9.12 легко следует, что $K'(X)$ является под- V -полурешеткой для Ω^x . Но

$$(1 \xrightarrow{\wr} \Omega) = (1 \xrightarrow{t} \Omega) = (1 \xrightarrow{\lceil 1 \rceil} \Omega),$$

из чего следует, что 1 является K -конечной, и потому $X \xrightarrow{\wr} \Omega^x$ пропускается через $K'(X)$. Следовательно, $K'(X) \supseteq K(X)$, и, таким образом, $(\lceil f \rceil \in \lceil K(X) \rceil)$ влечет, что Y является K -конечным.

(ii) Согласно 9.12 (ii) подобъект $S \xrightarrow{\wr} X \amalg Y$ является K -конечным тогда и только тогда, когда K -конечны $v_1^*(S)$ и $v_2^*(S)$, следовательно, в силу (i) имеем естественную биекцию между обобщенными элементами объектов $K(X \amalg Y)$ и $K(X) \times K(Y)$.

Конечность по Куратовскому оказывается эквивалентной другому понятию конечности, связанному с фильтрованными частично упорядоченными множествами и кофинальностью. Напомним, что если P и Q — внутренние частично упорядоченные множества, то сохраняющее порядок отображение $P \xrightarrow{f} Q$ называется кофинальным, если $Q_1 \times_Q P \xrightarrow{d_0 \pi_1} Q$ является эпиморфизмом. (Второе условие кофинальности, указанное в упражнении 11 к главе 2, избыточно для частично упорядоченных множеств.)

9.14 Теорема (Кок — Лекутьере — Миккелсен). Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$. Тогда X является K -конечным тогда и только тогда, когда для каждого фильтрованного частично упо-

рядоченного множества P в $\mathcal{E}$ кофинален канонический морфизм $P \xrightarrow{h} P^X$, индуцированный морфизмом $X \rightarrow 1$.

Доказательство. Предположим, что X является K -конечным, и пусть P является фильтрованным частично упорядоченным множеством. Пусть $A \rightarrow \Omega^{\mathcal{E}} \times P$ является экстенсионалом формулы $\forall p' (p' \in w \Rightarrow p' \leq p)$, где w — переменная типа Ω^P , и пусть $B \rightarrow \Omega^P$ является экстенсионалом формулы

$$\exists p \forall p' (p' \in w \Rightarrow p' \leq p),$$

т. е. образом для $A \rightarrow \Omega^P \times P \xrightarrow{\pi_1} \Omega^P$. Таким образом, B является «объектом подобъектов из P , ограниченных сверху». Поскольку P фильтровано, можно легко увидеть, что B — под- $\vee$ -полурешетка для Ω^P (т. е. пустой подобъект ограничен, и ограничено объединение двух ограниченных подобъектов). Более того, $P \xrightarrow{\{1\}} \Omega^P$ пропускается через B , так как $P \xrightarrow{\{1\}} \Omega^P \times P$ пропускается через A ; поэтому $B \geq K(P)$. Теперь предположим, что дан U -элемент $U \xrightarrow{\gamma} P^X$; тогда его можно рассматривать как морфизм $U * X \xrightarrow{\gamma} U * P$ в топосе $\mathcal{E}/U$. Но согласно 9.12 (i) образ I этого морфизма K -конечен, поэтому согласно 9.13 (i) он определяет U -элемент из $K(P)$ и, следовательно, из B . Теперь $A \rightarrow B$ является эпиморфизмом, поэтому подъемом вдоль него получаем эпиморфизм $V \xrightarrow{e} U$ и V -элемент $V \xrightarrow{p} P$, являющийся верхней гранью для $e^*(I) \rightarrow U * P$. Но это говорит о том, что пара $(\gamma e, hp)$ пропускается через $P_1^X \rightarrow P^X \times P^X$; поэтому $P \xrightarrow{h} P^X$ кофинально.

Обратно, предположим, что данное условие выполнено. Поскольку $K(X)$ является $\vee$ -полурешеткой, он же является фильтрованным частично упорядоченным множеством (ср. с доказательством фильтрованности J^{op} в лемме 3.31), и потому отображение $K(X) \xrightarrow{h} K(X)^X$ кофинально. Рассмотрим глобальный элемент $1 \xrightarrow{s} K(X)^X$, соответствующий включению $X \rightarrow K(X)$; в силу кофинальности можно найти $V \rightarrow 1$ и V -элемент $V \xrightarrow{u} K(X)$, такие, что отображение $V \xrightarrow{s \times hu} K(X)^X \times K(X)^X$ пропускается через отношение порядка. Но тогда K -конечный подобъект $U \rightarrow V * X$, соответствующий u , должен быть верхней гранью для одноэлементных множеств из $V * X$; следовательно, он представляет собой весь $V * X$. Потому $V * X$ является K -конечным, и, следовательно, в силу замечаний, приведенных после определения 9.11, X является K -конечным. $\square$

Интересно отметить, что определение фильтрованности (2.51 (a) и (b)) для частично упорядоченного множества P эквивалентно утверждению о том, что единственное отображение

$P \rightarrow 1 (= P^0)$ и диагональное отображение $P \xrightarrow{\Delta} P \times P (= P^{1 \sqcup 1})$ кофинальны. Поэтому из теоремы 9.14 вытекает, что класс K -конечных объектов является замыканием двухэлементного класса $\{0, 1 \sqcup 1\}$ в смысле соответствия Галуа между классами объектов и классами частично упорядоченных множеств в $\mathcal{E}$, определенного отношением

$$D(X, P) \Leftrightarrow P \xrightarrow{h} P^X \text{ является кофинальным.}$$

9.15 Предложение. (i) Пусть X является K -конечным объектом $\mathcal{E}$, а P — фильтрованным частично упорядоченным множеством. Тогда P^X фильтровано.

(ii) Пусть X и Y являются K -конечными объектами из $\mathcal{E}$. Тогда $X \times Y$ является K -конечным.

Доказательство. (i) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h_1} & P^X \\ \downarrow h_2 & & \downarrow \Delta \\ P^X \sqcup X & \xrightarrow{\cong} & P^X \times P^X \end{array}$$

Поскольку согласно 9.12 (ii) $X \sqcup X$ является K -конечным, то в силу теоремы 9.14 h_1 и h_2 кофинальны. Следовательно, в силу упражнения 11 к главе 2 кофинально Δ . Аналогичное рассуждение показывает, что кофинально отображение $P^X \rightarrow 1$; следовательно, P^X фильтровано.

(ii) Пусть P — фильтрованное частично упорядоченное множество, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h_1} & P^X \\ \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 \\ P^X \times Y & \xrightarrow{\cong} & (P^X)^Y \end{array}$$

Так как P^X фильтровано в силу (i), то h_1 и h_2 кофинальны в силу теоремы 9.14. Следовательно, ввиду упражнения 11 к главе 2 h_3 кофинально; поэтому $X \times Y$ является K -конечным в силу 9.14.

На самом деле можно дать аналогичное доказательство теоремы о копроизведении (9.12 (ii)), если использовать теорему 9.14 как определение фильтрованности; мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Мы уже отметили, что $X \rightarrow K(X)$ является ковариантным функтором $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, и можно считать, что он принимает значения в $\text{slat}(\mathcal{E})$. Несколько удивительно, но мы имеем следующий результат.

9.16 Теорема (Миккелсен). K является функтором свободы для теории slat ; следовательно, в частности, $\text{slat}(\mathcal{E})$ является монадической над $\mathcal{E}$, даже если $\mathcal{E}$ не имеет объекта натуральных чисел.

Доказательство. Пусть L — полурешетка. Определяя отношение порядка $L_1 \rightarrow L \times L$ как уравнитель для $L \times L \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} L$, мы превращаем L в фильтрованное частично упорядоченное множество; поэтому, продолжая, как в теореме 9.14, можно определить объект ограниченных подобъектов из L и доказать, что он содержит $K(L)$. Но на самом деле мы можем сделать нечто лучшее. Пусть $C \rightarrow \Omega \times L$ — экстенционал формулы

$$\forall I' (I' \in w \Rightarrow I' \leq 1) \wedge \forall I'' (\forall I' (I' \in w \Rightarrow I' \leq I'') \Rightarrow I' \leq 1)$$

(т. е. формулы «1 является наименьшей верхней гранью для w »), $D \rightarrow \Omega^L$ — образ для $C \rightarrow \Omega^L \times L \xrightarrow{\pi_1} \Omega^L$. Так как отношение порядка на L по определению асимметрично, то наименьшая верхняя грань, если она существует, единственна, и поэтому $C \rightarrow D$ действительно является изоморфизмом.

Теперь легко показать, что C — подполурешетка для $\Omega^L \times L$ и что $L \xrightarrow{(\pi_1, 1)} \Omega^L \times L$ пропускается через нее; следовательно, $K(L) \leq D$ как подобъект объекта Ω^L . Пусть ε_L обозначает композицию гомоморфизмов полурешеток

$$K(L) \rightarrow D \xrightarrow{\cong} C \rightarrow \Omega^L \times L \xrightarrow{\pi_2} L;$$

тогда можно легко увидеть, что композиция $L \rightarrow K(L) \xrightarrow{\varepsilon_L} L$ является тождеством. Следовательно, если дан морфизм $X \xrightarrow{f} L$ из объекта X в L , то его можно пропустить через $X \rightarrow K(X)$ с помощью гомоморфизма полурешеток

$$K(X) \xrightarrow{K(f)} K(L) \xrightarrow{\varepsilon_L} L.$$

Но это пропускание единственно, ибо если g и g' обеспечивают пропускание, то их уравнитель является под- $\vee$ -полурешеткой для Ω^X , содержащей $X \rightarrow \Omega^X$, и таковым должен быть весь $K(X)$. Поэтому $K(X)$ является свободной полурешеткой, порожденной объектом X . Утверждение о том, что теория $\text{slat}(\mathcal{E})$ является монадической над $\mathcal{E}$, выводится, как в доказательстве теоремы 6.43, так как лемма 6.42 не требует объекта натуральных чисел. $\square$

Теорема 9.16 позволяет при установлении дальнейших свойств конечности по Куратовскому использовать знакомые свойства конечных алгебраических теорий. Далее приводится пример.

9.17 Следствие. Функторы обратного образа сохраняют K -конечность.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, X — объект из $\mathcal{E}$. В силу теоремы 9.16 и леммы 6.44 $p^*(K(X))$ и $K(p^*(X))$ изоморфны как полурешетки в $\mathcal{F}$ и, следовательно, как частично упорядоченные множества. Но p^* сохраняет свойство иметь максимальный элемент; поэтому K -конечность объекта X влечет K -конечность объекта $p^*(X)$. $\square$

9.18 Предложение. Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$. Тогда X является K -конечным тогда и только тогда, когда $K(X)$ является K -конечным.

Доказательство. Предположим сначала, что $K(X)$ является K -конечным. Из доказательства теоремы 9.16 возьмем гомоморфизм полурешеток $K(K(X)) \xrightarrow{\varepsilon_{K(X)}} K(X)$, являющийся расщепленным эпиморфизмом; тогда, если $1 \xrightarrow{x} K(K(X))$ — максимальный элемент из $K(X)$, легко можно увидеть, что $\varepsilon_{K(X)} x$ — максимальный элемент из $K(X)$.

Наоборот, предположим, что X является K -конечным. Пусть $Q \rightarrow \Omega^X$ — экстенционал формулы « $K(w)$ является K -конечным», где w — переменная типа Ω^X . Покажем, что Q является $\vee$ -полурешеткой и содержит $X \rightarrow \Omega^X$. На самом деле, ясно, что Q содержит $1 \rightarrow \Omega^X$ и $X \rightarrow \Omega^X$, так как $K(0) \cong 1$ и $K(1) \cong 1 \sqcup 1$ являются K -конечными; поэтому нужно только показать, что Q замкнут относительно $\vee$ или, что то же самое, что если $Y_1 \rightarrow X$ и $Y_2 \rightarrow X$ — такие подобъекты, что $K(Y_1)$ и $K(Y_2)$ являются K -конечными, то $K(Y_1 \sqcup Y_2)$ является K -конечным. Но K , будучи функтором свободы для конечной алгебраической теории, сохраняет рефлексивные коуравнители (и, следовательно, все эпиморфизмы в $\mathcal{E}$) в силу леммы 6.42. Поэтому эпиморфизм $Y_1 \sqcup Y_2 \rightarrow Y_1 \sqcup Y_2$ индуцирует эпиморфизм $K(Y_1 \sqcup Y_2) \rightarrow K(Y_1 \sqcup Y_2)$. Но $K(Y_1 \sqcup Y_2) \cong K(Y_1) \times K(Y_2)$ будет K -конечным в силу 9.13 (ii) и 9.15; поэтому согласно 9.12 (i) $K(Y_1 \sqcup Y_2)$ будет K -конечным. Следовательно, $Q \geq K(X)$, и потому K -конечность объекта X влечет, что $1 \xrightarrow{1_X} \Omega^X$ пропускается через Q , т. е. $K(X)$ является K -конечным. $\square$

9.19 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — булев топос. Тогда $\mathcal{E}_{kf}$ — топос и функтор включения $\mathcal{E}_{kf} \rightarrow \mathcal{E}$ является логическим.

Доказательство. Из 9.12 (ii) мы знаем, что любой подобъект K -конечного объекта K -конечен; следовательно, если X является K -конечным, то из 9.13 (i) следует, что $K(X)$ представляет собой Ω^X в целом. Поэтому согласно 9.18 $\mathcal{E}_{kf}$ замкнут относительно образования объектов-степеней. Но он также замкнут относительно образования конечных произведений (и, следовательно, всех конечных пределов) согласно 9.15 (ii), а в силу

упражнения 1 к главе 1 достаточно убедиться, что $\mathcal{E}_k$ обладает полной структурой топоса и что функтор включения сохраняет эту структуру. $\square$

Для небулева объекта $\mathcal{E}$ подкатегория $\mathcal{E}_k$ может не быть топосом; действительно, она может даже не быть замкнутой относительно образования уравнителей (см. упражнение 2 ниже).

Наконец, докажем результат, восходящий к Ловеру [LC], который уточняет связь между конечностью по Куратовскому и финитностью кардиналов в топосе с объектом натуральных чисел.

9.20 Теорема. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, X — объект из $\mathcal{E}$. Тогда X будет K -конечным тогда и только тогда, когда он локально является частным финитного кардинала, т. е. тогда и только тогда, когда существуют $V \rightarrow 1$ в $\mathcal{E}$, натуральное число p в $\mathcal{E}/V$ и эпиморфизм $[p] \rightarrow V^*X$.

Доказательство. Сначала покажем, что кардиналы K -конечны; точнее, что общий кардинал $[n]$ является K -конечным в $\mathcal{E}/N$. Для этого следует построить пропускание $1 \xrightarrow{[1[n]]} \Omega^{[n]}$ через $K([n])$, но это можно сделать по индукции, используя лемму 6.18 и данные

$$1 \xrightarrow{1} 1 \cong K([0]) \cong o^*(K([n]))$$

и

$$K([n]) \xrightarrow{1_{K([n])} \times 1_1} K([n]) \times K(1) \cong K([n] \amalg 1) \cong s^*(K([n])).$$

Теперь из 9.12 (i) и из замечания, которое следует за определением 9.11, вытекает, что каждый объект, удовлетворяющий данным условиям, K -конечен.

Наоборот, предположим, что X является K -конечным. Так как теория **slat** является фактортеорией теории **mon** моноидов (полученной добавлением равенств $m(x, y) = m(y, x)$ и $m(x, x) = x$), имеем эпиморфизм из свободного моноида $M(x) = \Sigma_N(X^{[n]})$ в свободную полурешетку $K(X)$. Поскольку это отображение представляет собой гомоморфизм моноидов, можно легко увидеть, что у него должно быть следующее «поэлементное» описание: слово $[p] \rightarrow X$ переводится в образ отображения $[p] \rightarrow X$, рассматриваемого как K -конечный подобъект объекта X . Теперь образуем декартов квадрат.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow w & & \downarrow 1_x \\ M(X) & \xrightarrow{\quad} & K(X) \end{array}$$

и пусть p — композиция $V \xrightarrow{w} M(X) \rightarrow N$. Тогда w соответствует слову длины p в элементах из V^*X , образ которого пред-

ставляет собой V^*X целиком, т. е. эпиморфизм $[p] \rightarrow V^*X$ в $\mathcal{E}/V$.

Три идеи, изученные в §§ 6.2, 8.4 и в настоящем параграфе, никоим образом не исчерпывают возможностей определения конечности в топосе. В частности, следует упомянуть, что Брук [14] изучал определение « X конечен тогда и только тогда, когда существует такой частичный порядок на X , что X и X^{op} вполне упорядочены», а Волгер [127] изучал определение « X конечен тогда и только тогда, когда каждый ультрафильтр на X является главным». В топосе общего вида определение Брука кажется неудобным из-за своей ограниченности (финитные кардиналы не всегда ему удовлетворяют), а определение Волгера кажется избыточно слабым (Ω ему всегда удовлетворяет). Причина в обоих случаях по существу одна и та же, а именно: топос, в котором не соблюдается (AC), не обеспечивает такого богатства полных упорядочиваний и неглавных ультрафильтров, как хотелось бы.

9.2. Транзитивные объекты

В этом и последующих параграфах мы собираемся доказать, что теория топосов (элементарная) с добавлением ряда «множественноподобных» аксиом логически эквивалентна некоторому «слабому» варианту теории множеств Цермело — Френкеля. Такая программа была впервые реализована Коуллом [18] и Митчеллом [85] (независимо), использовавшими идею о том, что отношение вхождения на множестве можно характеризовать деревом, имеющим определенные свойства. Мы будем следовать более позднему доказательству этого же результата Озиусом [92], который исходил из известного результата теории множеств ZF, называемого «теоремой Мостовского об изоморфизмах».

Напомним, что множество S называется транзитивным, если $(x \in y \wedge y \in S) \Rightarrow x \in S$.

9.21 Теорема (Мостовский [181]). Пусть A — множество и R — бинарное отношение на A . Следующие утверждения эквивалентны:

(i) R экстенционально (т. е. $\{a \in A \mid aRx\} = \{a \in A \mid aRy\} \Rightarrow x = y$) и вполне фундировано (т. е. $\forall B \subseteq (B \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in B \forall b \in B \neg (bRy))$).

(ii) Существует такое транзитивное множество S , что (A, R) изоморфно $(S, \{\langle x, y \rangle \mid x \in y \in S\})$ в категории множеств, снабженных бинарным отношением.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Рекурсивей на вполне фундированном отношении R определим функцию f с областью определения A , используя следующую формулу:

$$f(a) = \{f(b) \mid b \in A \wedge bRa\}.$$

Экстенциональность R обеспечивает взаимную однозначность функции f , и потому множество $\{f(a) | a \in A\}$ обладает требуемыми свойствами.

(ii) $\Rightarrow$ (i) получается непосредственно из аксиом экстенциональности и фундирования. $\square$

Сейчас мы продолжаем разрабатывать в рамках теории топосов основные свойства объектов, снабженных бинарными отношениями, которые подобны отношениям из теоремы 9.21.

9.22 Определение. Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$. Под *отношением на X* будем понимать (в данный момент) морфизм $X \rightarrow \Omega^X$. Будем говорить, что r *экстенционален*, если он является мономорфизмом, и r *индуктивен*, если любой подобъект $Y \xrightarrow{m} X$, удовлетворяющий неравенству $r^{-1}(\Omega^Y \xrightarrow{\exists m} \Omega^X) \leq m$, на самом деле является всем X .

Под *транзитивным объектом* из $\mathcal{E}$ мы имеем в виду пару (X, r) , в которой r — экстенциональное индуктивное отношение на X .

Как показывает следующая теорема, восходящая к Миккелсену [84], индуктивность означает, что мы можем определить морфизмы с областью определения X «рекурсией на r ». (Ср. теорему 6.14.) $\square$

9.23 Теорема. Пусть X — объект топоса $\mathcal{E}$, r — экстенциональное отношение на X . Тогда r индуктивно в том и только в том случае, когда (X, r) обладает следующим «свойством универсальной рекурсии»: для любого объекта Y и морфизма $Q^Y \xrightarrow{g} Y$ существует единственный $f: X \rightarrow Y$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow r & & \uparrow g \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Y \end{array}$$

коммутативна. (Будем говорить, что f *r -рекурсивно определено по g* .)

Доказательство. (i) Предположим, что r индуктивно, и нам дано $\Omega^Y \xrightarrow{g} Y$. Если f — переменная типа $\Omega^{X \times Y}$, то будем писать « $f: X \rightarrow Y$ » как сокращение формулы

$$\forall x \forall y \forall y' (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, y' \rangle \in f) \Rightarrow y = y'$$

языка $L_{\mathcal{E}}$. Ясно, что экстенционал этой формулы представляет собой $\tilde{Y}^X \rightarrow (\Omega^Y)^X \cong \Omega^{X \times Y}$ (и изоморфен ей). Теперь пусть $M \rightarrow \Omega^{X \times Y}$ — экстенционал формулы

$$\forall f' \forall x (f' \leq f \wedge f': X \rightarrow Y \wedge \exists \pi_1(f') = r(x) \Rightarrow \langle x, g(\exists \pi_2(f')) \rangle \in f)$$

и пусть $F \rightarrow X \times Y$ — внутреннее пересечение для M . Покажем, что F является графиком морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ с требуемыми свойствами.

Сначала следует заметить, что

$$\mathcal{E} \models f' \leq \lceil F \rceil \Rightarrow \forall f (f \in \lceil M \rceil \Rightarrow f' \leq f),$$

из чего легко следует, что $\lceil F \rceil \in \lceil M \rceil$. Если задать $G \rightarrow X \times Y$ как экстенционал формулы

$$\exists f (f \leq \lceil F \rceil \wedge f: X \rightarrow Y \wedge \exists \pi_1(f) = r(x) \wedge g(\exists \pi_2(f)) = y),$$

то будем иметь $\mathcal{E} \models \langle x, y \rangle \in \lceil G \rceil \Rightarrow \langle x, y \rangle \in F$, т. е. $G \leq F$. Но это, в свою очередь, влечет, что $\lceil G \rceil \in \lceil M \rceil$, и потому $F \leq G$; следовательно, $F = G$.

Теперь рассмотрим подобъект

$$X' \xrightarrow{m} X = \parallel \exists! y \langle x, y \rangle \in \lceil F \rceil \parallel;$$

покажем, что $r^{-1}(\exists m) \leq m$, и поэтому $m \cong 1_X$, т. е. F является графиком морфизма. Пусть $1 \xrightarrow{x} X$ — такой глобальный элемент, что $rx \leq \lceil m \rceil$; определим $F_x \rightarrow X \times Y$ как экстенционал формулы $\langle x, y \rangle \in \lceil F \rceil \wedge x \in rx$. Тогда можно легко увидеть, что F является графиком частичного отображения $X \rightarrow Y$ с областью определения rx ; поэтому пара $\langle x, g(\exists \pi_2(\lceil F_x \rceil)) \rangle$ находится в $\lceil G \rceil$ и, следовательно, в $\lceil F \rceil$. Но поскольку F_x является единственным таким частичным отображением, содержащимся в F , выводим, что

$$\mathcal{E} \models \langle x, y \rangle \in \lceil F \rceil \Rightarrow y = g(\exists \pi_2(\lceil F_x \rceil)),$$

и, следовательно, $x \in \lceil m \rceil$. А так как это рассуждение работает так же хорошо для обобщенных элементов из X , получаем требуемый результат. Чтобы показать, что морфизм f является единственным, предположим, что имеются два морфизма f_1, f_2 , r -рекурсивно определенных по g . Тогда нетрудно показать, что для их уравнителя $X' \xrightarrow{m} X$ имеет место $r^{-1}(\exists m) \leq m$, и поэтому $f_1 = f_2$.

(ii) Обратно, предположим, что r экстенционально и обладает свойством универсальной рекурсии. Пусть

$$\hat{r}: \Omega^{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{X}$$

представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ \downarrow r & & \\ \Omega^X & & \\ \downarrow \exists \eta_X & & \\ \Omega^{\hat{X}} & & \end{array}$$

тогда заметим, что $X \xrightarrow{\eta_X} \hat{X}$ r -рекурсивно определено по r . Если теперь дан такой морфизм $Y \xrightarrow{m} X$, что $r^{-1}(\exists m) \leq m$, то образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & \Omega^Y \\ \downarrow r & & \downarrow \exists m \\ X & \xrightarrow{r} & \Omega^X \end{array}$$

и пусть $\Omega^{\tilde{Y}} \xrightarrow{g} \tilde{Y}$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow s & & \\ \Omega^Y & & \\ \downarrow \exists \eta_Y & & \\ \Omega^{\tilde{Y}} & & \end{array}$$

Пусть $X \xrightarrow{f} \tilde{Y}$ рекурсивно определен по g .
Теперь квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\tilde{Y}} & \xrightarrow{\exists \tilde{m}} & \Omega^{\hat{X}} \\ \downarrow g & & \downarrow \hat{r} \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \hat{X} \end{array}$$

коммутирует, так как оба пути по периметру представляют

частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow s & & \\ \Omega^Y & & \\ \downarrow \exists \eta_Y & & \\ \Omega^{\tilde{Y}} & & \end{array}$$

следовательно, $\tilde{m}f = \eta_X: X \rightarrow \hat{X}$, поскольку оба морфизма r -рекурсивно определены по $\hat{r}$. Теперь η_X — мономорфизм, так что $\eta_X^*(\eta_X) \cong 1_X$, а так как $\eta_X^*(\tilde{m}) \cong m$, то применение η_X^* к равенству $\tilde{m}f = \eta_X$ дает пропускание 1_X через m . Следовательно, m является эпиморфизмом. $\square$

9.24 Предложение. Пусть (X, r) и (Y, s) — транзитивные объекты в $\mathcal{E}$. Тогда существует самое большое один $f: X \rightarrow Y$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow r & & \downarrow s \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Y \end{array}$$

коммукативна, и если такой f существует, то он является мономорфизмом. Будем говорить, что f является включением объекта (X, r) в объект (Y, s) , и будем обозначать $\mathcal{E}_{tr}$ категорию транзитивных объектов и включений в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $\hat{s}: \Omega^{\tilde{Y}} \rightarrow \tilde{Y}$ определяется, как в 9.23 (ii). Теперь диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \tilde{Y} \\ \downarrow r & & \downarrow s & & \uparrow \hat{s} \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Y & \xrightarrow{\exists \eta_Y} & \Omega^{\tilde{Y}} \end{array}$$

коммукативна, т. е. $\eta_Y f$ r -рекурсивно определено по $\hat{s}$. Следовательно, r и s однозначно определяют композицию $\eta_Y f$, но η_Y — мономорфизм, поэтому f определяется однозначно.

Чтобы доказать, что f — мономорфизм, допустим, что $Y \xrightarrow{g} \tilde{X}$ является морфизмом, который s -рекурсивно определен по $\hat{r}$. Тогда gf r -рекурсивно определен по $\hat{r}$, следовательно, $gf = \eta_X$. Но η_X — мономорфизм, поэтому f — мономорфизм. $\square$

Следующий результат можно считать частичным обращением предложения 9.24.

9.25 Лемма. Предположим, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow r & & \downarrow s \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^Y \end{array}$$

в которой f — мономорфизм. Тогда, если s экстенсионален (соответственно индуктивен), то таким же является r .

Доказательство. (i) Тривиально имеем: s — мономорфизм $\Rightarrow sf = \exists f \cdot r$ — мономорфизм $\Rightarrow r$ — мономорфизм.

(ii) Пусть $Z \xrightarrow{m} X$ удовлетворяет неравенству $r^{-1}(\exists m) \leq m$. Определим $T \xrightarrow{n} Y = \mathbf{V}_f(Z \xrightarrow{m} X)$; тогда из сопряжения $(f^{-1} \dashv \mathbf{V}_f)$ имеем $f^{-1}(n) \leq m$ как подобъекты X . Но согласно упражнению 10 к главе 1 функтор $f \mapsto \exists f$ сохраняет подъемы мономорфизмов, следовательно, $(\exists f)^{-1}(\exists n) \leq \exists m$ как подобъекты Ω^X . Поэтому

$$f^{-1}(s^{-1}(\exists n)) = r^{-1}((\exists f)^{-1}(\exists n)) \leq r^{-1}(\exists m) \leq m$$

и, следовательно, $s^{-1}(\exists n) \leq \mathbf{V}_f(m) = n$. Но s индуктивен, поэтому $n \cong 1_Y$, следовательно, $m \geq f^{-1}(1_X) = 1_X$. $\square$

9.26 Предложение. Частично упорядоченное множество $\mathcal{E}_{tr}$ имеет бинарные пересечения и объединения.

Доказательство. (i) Пусть (X, r) и (Y, s) — транзитивные объекты. Чтобы образовать их пересечение в $\mathcal{E}_{tr}$ (неформально обозначаемое $(X \cap Y, r \cap s)$), построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \cap Y & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow q & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{f} & \tilde{Y} \end{array}$$

где f r -рекурсивно определен по $\hat{s}$. Теперь имеем $\hat{s} \cdot \exists f \cdot r q = f q = \eta_Y p$; поэтому $\exists f \cdot r q$ пропускается через

$$(\hat{s})^{-1}(Y \xrightarrow{\eta_Y} \tilde{Y}) = (Y \xrightarrow{s} \Omega^Y \xrightarrow{\exists \eta_Y} \Omega^{\tilde{Y}})$$

и, следовательно, в частности, через $\exists \eta_Y$. Но квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{X \cap Y} & \xrightarrow{\exists p} & \Omega^Y \\ \downarrow \exists q & & \downarrow \exists \eta_Y \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists f} & \Omega^{\tilde{Y}} \end{array}$$

является декартовым в силу упражнения 10 к главе 1, и потому $r q$ пропускается через $\exists q$, т. е. $X \xrightarrow{r} \Omega^X$ ограничивается до отношения $X \cap Y \xrightarrow{r \cap s} \Omega^{X \cap Y}$ на $X \cap Y$. Теперь $(X \cap Y, r \cap s)$ является транзитивным объектом (а q является включением) в силу 9.25. Но p — тоже включение, так как два пути по периметру квадрата

$$\begin{array}{ccc} X \cap Y & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow r \cap s & & \downarrow s \\ \Omega^{X \cap Y} & \xrightarrow{\exists p} & \Omega^Y \end{array}$$

коуравниваются морфизмом $\Omega^Y \xrightarrow{\exists \eta_Y} \Omega^{\tilde{Y}}$.

Чтобы установить свойство универсальности пересечения $(X \cap Y, r \cap s)$, допустим, что (Z, u) — любой транзитивный объект, а $(Z, u) \xrightarrow{i} (X, r)$, $(Z, u) \xrightarrow{j} (Y, s)$ — два включения. Тогда композиции $f i$ и $\eta_Y j$ u -рекурсивно определены по $\hat{s}$, поэтому они равны; следовательно, (i, j) пропускается через подъем $X \cap Y$. Ясно, что это пропускание является включением транзитивных объектов.

(ii) Чтобы образовать объединение $(X \cup Y, r \cup s)$, построим диаграмму спуска

$$\begin{array}{ccc} X \cap Y & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow q & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & X \cup Y \end{array}$$

и определим, что $r \cup s$ представляет собой такой единственный морфизм, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{a} & X \cap Y & \xleftarrow{b} & Y \\ \downarrow r & & \downarrow r \cup s & & \downarrow s \\ \Omega^X & \xrightarrow{\exists a} & \Omega^{X \cap Y} & \xleftarrow{\exists b} & \Omega^Y \end{array}$$

коммутативна. Из свойства универсальности спуска немедленно следует, что $r \cup s$ удовлетворяет свойству универсальной рекурсии из теоремы 9.23, поэтому нужно только доказать, что он является мономорфизмом.

Пусть $X \cup Y \xrightarrow{w} \tilde{Y}$ представляет частичное отображение

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{1} & Y \\ \downarrow b & & \\ X \cup Y & & \end{array}$$

тогда, поскольку диаграмма спуска, определяющая $X \cup Y$, согласно следствию 1.28 также является декартовым квадратом, имеем $wa = f$, так как обе части равенства представляют одно и то же частичное отображение $X \rightarrow Y$. Но имеем также $wb = \eta_X$, а так как пара (a, b) совместно эпиморфна, выводим, что $w = (r \cup s)$ -рекурсивно определено по $\hat{s}$.

Теперь положим, что $U \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_1} X \cup Y$ коуравнены посредством $r \cup s$; тогда они также коуравнены посредством $w = \hat{s} \cdot \exists w. (r \cup s)$. Образует декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow v & & \downarrow \eta_Y \\ U & \xrightarrow{w \gamma_1} & \tilde{Y} \end{array}$$

так как

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{1} & Y \\ \downarrow b & & \downarrow \eta_Y \\ X \cup Y & \xrightarrow{w} & \tilde{Y} \end{array}$$

является декартовым квадратом по определению w , то квадраты

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow v & & \downarrow b \\ U & \xrightarrow{\gamma_1} & X \cup Y \end{array}$$

также декартовы (и, в частности, коммутативны) для $i = 1$ и $i = 2$. Следовательно, γ_1 и γ_2 уравниваются посредством $v = \gamma_1^*(b)$. Аналогичное рассуждение показывает, что они уравниваются посредством $\gamma_1^*(a)$, но (a, b) совместно эпиморфна, поэтому у нас должно быть $\gamma_1 = \gamma_2$. Наконец, свойство универсальности для $(X \cup Y, r \cup s)$ немедленно следует из свойства универсальности

амальгам в $\mathcal{E}$ и из того, что $\mathcal{E}_{tr}$ является частично упорядоченным множеством.

9.27 Предложение. (i) $(0, 0 \rightarrow \Omega \cong 1)$ является транзитивным объектом.

(ii) Если (X, r) — транзитивный объект, то транзитивным является $(\Omega^X, \exists r)$, и $(X, r) \xrightarrow{r} (\Omega^X, \exists r)$ — включение.

Доказательство. (i) тривиально.

(ii) Из следствия 1.33 известно, что $\exists$ сохраняет мономорфизмы, поэтому $\exists r$ экстенционально. Предположим, что дан $\Omega^Y \xrightarrow{g} Y$. Тогда, если $X \xrightarrow{f} Y$ r -рекурсивно определен по g , то легко проверить, что $\Omega^X \xrightarrow{\exists f} \Omega^Y \xrightarrow{g} Y$ $\exists r$ -рекурсивно определен по g . Более того, если h также $\exists r$ -рекурсивно определен по g , то должно быть $hr = f$, и потому $h = g$. $\exists h. \exists r = g. \exists f$. Таким образом, $\exists r$ обладает свойством универсальной рекурсии. Остальная часть утверждения тривиальна. $\square$

9.28 Определение. Говорят, что объект X из $\mathcal{E}$ частично транзитивен, если существуют транзитивный объект (Y, s) и мономорфизм $X \rightarrow Y$ в $\mathcal{E}$. Будем писать $\mathcal{E}_{ptr}$ вместо полной подкатегории частично транзитивных объектов в $\mathcal{E}$. $\square$

9.29 Теорема (Озиус). $\mathcal{E}_{ptr}$ является топосом и функтор включения $\mathcal{E}_{ptr} \rightarrow \mathcal{E}$ является логическим. Более того, любой логический функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ограничивается до логического функтора $\mathcal{E}_{ptr} \rightarrow \mathcal{F}_{ptr}$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно в силу упражнения 1 к главе 1 показать, что $\mathcal{E}_{ptr}$ замкнута относительно образования (в $\mathcal{E}$) конечных пределов и объектов-степеней и что каждый подобъект частично транзитивного объекта частично транзитивен.

Но если имеется мономорфизм $X \xrightarrow{m} Y$, где (Y, s) транзитивен, то $\Omega^X \xrightarrow{\exists m} \Omega^Y$ выражает Ω^X как подобъект транзитивного объекта согласно 9.27 (ii). Третье утверждение тривиально следует из определения; значит, $\mathcal{E}_{ptr}$ замкнута относительно образования уравнивателей. А так как $(1, 1 \xrightarrow{1} \Omega)$ в силу 9.27 (i) и (ii) транзитивен, остается рассмотреть произведения пар.

Предположим, что X и Y частично транзитивны. Используя 9.26 (ii), можно найти единственный транзитивный объект, содержащий их обоих как подобъекты. Но тогда согласно упражнению 10 к главе 5 имеем мономорфизм

$$X \times Y \rightarrow Z \times Z \xrightarrow{krg} \Omega^{\Omega^Z}.$$

Поэтому $X \times Y$ является частично транзитивным.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, достаточно показать, что логические функторы сохраняют как экстенциональность, так и индуктивность отношений. Для экстенциональности

это тривиально; что касается индуктивности, то следует заметить, что определение эквивалентно утверждению, что $1 \xrightarrow{\Gamma_1 X} \Omega^X$ является единственной неподвижной точкой сохраняющего порядок отображения

$$\Omega^X \xrightarrow{\text{Iseg}} \Omega^{\Omega^X} \xrightarrow{\Omega_r} \Omega^X.$$

Так как построение из теоремы Тарского о неподвижной точке (5.50) можно использовать для построения наименьшей неподвижной точки такого отображения, сохраняющего порядок, то это свойство, очевидно, сохраняется логическими функторами. $\square$

9.3. Теорема равнонепротиворечивости

Теперь мы готовы заняться построением модели теории множеств из заданного топоса. Используемая нами теория множеств не является стандартной теорией множеств ZF. Дело в том, что последняя, как хорошо известно, не является конечно аксиоматизируемой и поэтому не может быть логически эквивалентна никакому конечно представленному расширению элементарной теории топосов.

9.31 Определение. Слабая теория множеств Цермело zet_0 — это теория, выраженная в (классическом) исчислении предикатов первого порядка с равенством, имеющая один тип (термы, относящиеся к этому типу, называются «множествами»), константу (нульместную операцию) $\emptyset$, двуместную операцию $\langle -, - \rangle$ и двуместный предикат $\in$, удовлетворяющие аксиомам

- (i) (Экстенциональности) $\forall x(x \in s \Leftrightarrow x \in t) \Rightarrow s = t$.
- (ii) (Пустого множества) $\neg(x \in \emptyset)$.
- (iii) (Неупорядоченной пары) $\exists z \forall t(t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y))$.
- (iv) (Упорядоченной пары) $\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle \Leftrightarrow (x = z \wedge y = t)$.
- (v) (Множества-степени) $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \forall t(t \in z \Rightarrow t \in x))$.
- (vi) (Относительного дополнения) $\exists z \forall t(t \in z \Leftrightarrow (t \in x \wedge \neg(t \in y)))$.
- (vii) (Декартова произведения) $\exists z \forall t(t \in z \Leftrightarrow \exists u \exists v(u \in x \wedge v \in y \wedge t = \langle u, v \rangle))$.
- (viii) (Отношения принадлежности) $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists s \exists t(s \in \langle t, x \rangle \wedge t \in x \wedge z = \langle s, t \rangle))$.
- (ix) (Области определения) $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists t(\langle z, t \rangle \in x))$.
- (x) (Перестановок) $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists s \exists t(\langle s, t \rangle \in x \wedge z = \langle t, s \rangle))$.
- $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists s \exists t \exists u(\langle s, t \rangle, u \in x \wedge z = \langle \langle u, s \rangle, t \rangle))$.
- (xi) (Фундирования) $\neg(x = \emptyset) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall t(t \in y \Rightarrow \neg(t \in x)))$.

Из вида определения 9.31 должно быть ясно, что zet_0 конечно представлена. Однако уместно отметить, что аксиомы (vi) — (x) можно заменить эквивалентными: аксиомой о существовании

множеств-объединений и ограниченной аксиомой выделения, утверждающей, что для формулы $\phi(x)$, имеющей только ограниченные кванторы (т. е. кванторы вида $\forall s(s \in t \Rightarrow \dots)$ и $\exists s(s \in \langle t \wedge \dots \rangle)$), и любого множества y существует множество $\{x \in y \mid \phi(x)\}$. (Это установил Тиле [186].)

Следует заметить, что в zet_0 недоказуема теорема Мостовского об изоморфизмах, так как ее доказательство привлекает аксиому замещения: в zet_0 также недоказуемо, что любое множество вкладывается в транзитивное множество. Поскольку мы желаем, чтобы оба эти утверждения выполнялись в нашей модели, мы добавляем их как аксиомы.

9.32 Определение. Теория множеств zet определяется добавлением к аксиомам zet_0 следующих двух аксиом:

- (xii) (Транзитивности) $\exists y(x \in y \wedge y \text{ транзитивен})$.
- (xiii) (Аксиома Мостовского) $(r \text{ — экстенциональное вполне фундированное отношение на } x) \Rightarrow \exists y \exists f(y \text{ транзитивен}) \wedge (f \text{ — биекция из } x \text{ в } y) \wedge \forall s \forall t(\langle s, t \rangle \in r \Leftrightarrow f(s) \in f(t))$. $\square$

Легко доказать (ср. теорему 9.21), что множество y и биекция f из 9.32 (xiii) однозначно определяются по x и r . Аналогично, из 9.32 (xii) можно вывести, что у каждого множества x имеется транзитивное замыкание; используя ограниченную аксиому выделения, последнее можно определить как

$$\{t \in y \mid \forall z(z \in y(x \in z \wedge z \text{ транзитивен}) \Rightarrow t \in z)\},$$

где y — любое транзитивное множество, содержащее x , а затем доказать, что определение не зависит от выбора y .

Теперь ясно, что для любой модели в zet_0 соответствующая категория множеств и функций является элементарным топосом, но этот топос обладает некоторыми особыми свойствами, которые отсутствуют у других топосов. Поэтому, чтобы установить логическую эквивалентность, на топос нужно наложить дополнительные условия.

9.33 Предложение (Фрейд [FK]). Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Следующие условия эквивалентны:

- (i) 1 является порождающим для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}$ не вырожден (т. е. $0 \rightarrow 1$ не является изоморфизмом).

- (ii) $\mathcal{E}$ булев и удовлетворяет (SS) (5.21) и аксиоме двузначности (TV): существуют в точности два морфизма из 1 в Ω .

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Если $X \neq 0$, то включения копроизведения $X \xrightarrow{v_1} X \sqcup X \xrightarrow{v_2}$ не равны, и поэтому существует мор-

физм $1 \xrightarrow{x} X$ с $v_1 x \neq v_2 x$. В частности, $X \rightarrow 1$ является расщепленным эпиморфизмом, и, следовательно, $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SS). Более того, если U — ненулевой подобъект объекта 1, то $U \rightarrow 1$ является изоморфизмом, и потому $\mathcal{E}$ удовлетворяет (TV). Чтобы показать, что $\mathcal{E}$ булев, допустим, что $X' \xrightarrow{m} X$ является подобъ-

ектом в $\mathcal{E}$. Тогда для каждого $1 \xrightarrow{x} X$ имеем или $x \in \ulcorner m \urcorner$ или $x \cap \cap m = 0$, т. е. $x \in \ulcorner \neg m \urcorner$. Таким образом, каждый глобальный элемент из X пропускается через $X' \cap (\ulcorner \neg X' \urcorner) \longrightarrow X$, следовательно, последнее отображение является изоморфизмом, т. е. $\ulcorner X' \urcorner$ — дополнение для X' .

(ii) $\Rightarrow$ (i). По лемме 5.32 $\mathcal{E}$ удовлетворяет (SG), но единственными подобъектами объекта 1 являются 0 и 1 , а 0 как элемент любого множества порождающих, очевидно, избыточен. Поэтому 1 является порождающим, и невырожденность следует из (TV). $\square$

9.34 Определение. Топос, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения 9.33, называется *точечным*. Будем писать **wpt** вместо теории точечных топосов, т. е. элементарной теории категорий [72], плюс (элементарные формы) трех аксиом топосов (определение 1.11), плюс одно из условий предложения 9.33. Определим, что теория **wtt** состоит из теории **wpt** плюс аксиомы транзитивности: каждый объект из $\mathcal{E}$ частично транзитивен (ср. определение 9.28).

Ясно, что если $\mathcal{E}$ — модель теории **wpt**, то $\mathcal{E}_{\text{ptr}}$ — модель теории **wtt**, и на самом деле теорему 9.29 можно интерпретировать как теорему относительной непротиворечивости для (PT) относительно теории **wpt**. Чтобы устранить в нашей метатеории использование аксиомы выбора, будем интерпретировать (PT) таким же «конструктивным» способом, как интерпретировали утверждение о том, что у категории имеются пределы, т. е. что нам дана операция, которая связывает с каждым объектом X из $\mathcal{E}$ мономорфизм $X \longrightarrow T(X)$ и экстенциональное индуктивное отношение r_X на $T(X)$. По той же причине предпочтем допустить, что для каждого класса изоморфизмов транзитивных объектов в $\mathcal{E}$ дан канонический представитель, т. е. что дан функтор $\tau: \mathcal{E}_{\text{tr}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{tr}}$, естественно изоморфный тождественному, так что $(X, r) \cong (Y, s)$ влечет $\tau(X, r) = \tau(Y, s)$. Будем обозначать это допущение (TR).

9.35 Лемма. Пусть M — модель теории **zer**. Тогда категория $\mathcal{P}(M)$ множеств и функций в M является моделью теории **wpt**. Если, сверх того, M — модель теории **zer**, то $\mathcal{P}(M)$ удовлетворяет (PT) и (TR).

Доказательство. Можно легко увидеть, что если x и y — множества в M , то можно построить декартово произведение $x \times y$, уравнитель двух функций $x \rightrightarrows y$ и множество всех функций $x \rightarrow y$ в M , и что они обладают категорными свойствами. Более того, $1 = \{\emptyset\}$ является конечным объектом и порождающим для $\mathcal{P}(M)$, а $2 = \{\emptyset, 1\}$ — классификатором подобъектов. Если теперь x — транзитивное множество в M , то в силу 9.31 (i) и (xi) отношение принадлежности на x экстенционально и индуктивно. Поэтому 9.32 (xii) (вместе с замечанием о транзитивном замыкании, приведенном после 9.32) влечет, что $\mathcal{P}(M)$ удовлетворяет

(PT). Аналогично, 9.32 (xiii) влечет (TR), так как транзитивные множества можно взять в качестве канонических представителей объектов из $\mathcal{P}(M)_{\text{tr}}$. $\square$

Сейчас мы займемся построением модели $S(\mathcal{E})$ теории **zer** в произвольном точечном топосе $\mathcal{E}$. Будем рассматривать тройки вида (X, r, m) , где (X, r) — транзитивный объект из $\mathcal{E}$, а m — глобальный элемент из Ω^X .

9.36 Лемма. Пусть (X, r, m) и (Y, s, n) являются вышеуказанными тройками. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) Существуют транзитивный объект (Z, u) и включения $(X, r) \xrightarrow{a} (Z, u)$, $(Y, s) \xrightarrow{b} (Z, u)$ такие, что $\exists a.m = \exists b.n$.

(ii) Для всех транзитивных объектов (Z, u) с включениями $(X, r) \xrightarrow{a} (Z, u)$ и $(Y, s) \xrightarrow{b} (Z, u)$ имеем $\exists a.m = \exists b.n$.

(iii) Если $(Z, u) = (X \cup Y, r \cup s)$, как определено в предложении 9.26, и a, b — канонические включения, то $\exists a.m = \exists b.n$.

Более того, отношение на тройках, определенное этими тремя условиями, является отношением эквивалентности.

Доказательство. Тривиально следует из предложения 9.26 и из того, что включения являются мономорфизмами в $\mathcal{E}$. $\square$

Теперь определим, что множествами в $S(\mathcal{E})$ являются введенные выше тройки с равенством, заданным условиями эквивалентности из леммы 9.36. Чтобы определить отношение принадлежности, будем называть множество (X, r, m) r -элементом, если $1 \xrightarrow{m} \Omega^X$ пропускается через $X \xrightarrow{r} \Omega^X$ морфизмом $1 \xrightarrow{m} X$ (который, конечно, единствен, поскольку r — мономорфизм); будем тогда говорить, что $(X, r, m) \in_r (X, r, n)$, если m является r -элементом, а $\hat{m}$ пропускается через подобъект $N \longrightarrow X$, классифицированный по n . Если теперь $(X, r) \xrightarrow{i} (Y, s)$ является включением, то легко проверить, что $(X, r, m) \in_r (X, r, n)$ тогда и только тогда, когда $(Y, s, \exists i.m) \in_s (Y, s, \exists i.n)$; следовательно, можно определить глобальное отношение принадлежности $\in$ так:

$$(X, r, m) \in (Y, s, n), \text{ если } (X \cup Y, r \cup s, \exists a.m) \in_{r \cup s} (X \cup Y, r \cup s, \exists b.n).$$

(Как в лемме 9.36, это эквивалентно утверждению о том, что « $\exists a.m = \exists b.n$ » становится истинным в некотором транзитивном объекте (Z, u) , содержащем (X, r) и (Y, s) , или в каждом таком транзитивном объекте.)

Пустым множеством в $S(\mathcal{E})$, конечно, является тройка $(0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1)$, а операция образования упорядоченной пары определяется так: $\langle (X, r, m), (Y, s, n) \rangle = (\Omega^{X \cup Y}, \exists \exists (r \cup s), \text{kpr } \exists a.m, \exists b.n)$, где kpr — отображение упорядоченных пар Куратовско-

го, определенное в упражнении 10 к главе 5. Легко проверяется, что это определение не зависит от выбора представителей для (X, r, m) и (Y, s, n) .

Теперь мы готовы сформулировать основополагающую теорему.

9.37 Теорема (Коул — Митчел — Озюс). (i) Пусть $\mathcal{E}$ — модель теории **wpt**. Тогда $S(\mathcal{E})$ является моделью теории **zer**.

(ii) Если, кроме того, $\mathcal{E}$ удовлетворяет (TR), то $\mathcal{P}(S(\mathcal{E}))$ эквивалентна $\mathcal{E}_{\text{ptr}}$.

(iii) Пусть M — модель теории **zer**. Тогда $S(\mathcal{P}(M))$ изоморфна M .

Доказательство. (i) Поскольку подобъект из X в $\mathcal{E}$ определяется (с точностью до изоморфизма) глобальными элементами из X , которые пропускаются через него, аксиома экстенциональности выполняется в $S(\mathcal{E})$. Аналогично, поскольку в $\mathcal{E}$ отсутствуют морфизмы $1 \rightarrow 0$, выполняется аксиома пустого множества. Неупорядоченной парой $\{(X, r, m), (Y, s, n)\}$ является $(\Omega^{X \cup Y}, \exists(r \cup s), \text{pr}(\exists a.m, \exists b.n))$, где pr — отображение, определенное в упражнении 10 к главе 5, а упорядоченная пара была уже определена. Далее, множеством-степенью для (X, r, m) является $(\Omega, \exists r, \downarrow \text{seg}.m)$, где отображение «сегмент вниз» определено относительно частичного порядка $\Omega_1^X \rightarrow \Omega^X \times \Omega^X$; в каждом случае легко убедиться, что эти определения совместимы с нашим определением равенства в $S(\mathcal{E})$ и что они удовлетворяют соответствующим аксиомам. Убедиться в выполнении остальных аксиом существования множеств (9.31 (vi) — (x)) также несложно, но достаточно трудоемко.

Пусть теперь (X, r, m) — непустое множество в $S(\mathcal{E})$, а $M \rightarrow X$ — подобъект, классифицированный посредством m . Поскольку отношение r индуктивно и дополнение к M не совпадает со всем X , можно найти глобальный элемент x из X такой, что x пропускается через M , но подобъект, классифицированный посредством $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{r} \Omega^X$, содержится в дополнении к M . Тогда (X, r, rx) является $\Leftarrow$ -минимальным элементом из (X, r, m) ; поэтому в $S(\mathcal{E})$ выполняется аксиома фундирования.

Для любого транзитивного объекта (X, r) в $\mathcal{E}$ множество $(X, r, \lceil 1_X \rceil)$ транзитивно в $S(\mathcal{E})$, поскольку все элементы — это в точности множества вида (X, r, rx) для некоторого $1 \xrightarrow{x} X$, и они поэтому также являются подмножествами множества $(X, r, \lceil 1_X \rceil)$. Таким образом, аксиома транзитивности (9.32 (xii)) выполняется тривиально. Что касается аксиомы Мостовского, то видно, что экстенциональное и вполне фундированное отношение на множестве (X, r, m) определяет экстенциональное и индуктивное отношение $M \xrightarrow{s} \Omega^M$, где M — подобъект из X , классифицированный посредством m , и тогда тождественный мор-

физм $M \xrightarrow{1} M$ определяет требуемую биекцию $(X, r, m) \rightarrow (M, s, \lceil 1_M \rceil)$.

(ii) Будем считать тройку (X, r, m) минимальной, если $\lceil 1_X \rceil$ — единственная неподвижная точка (сохраняющего порядок) отображения

$$\Omega^X \xrightarrow{\exists r} \Omega^{\Omega^X} \xrightarrow{U \times m} \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\vee^X} \Omega^X.$$

Для любой тройки (X, r, m) пусть $1 \xrightarrow{h} \Omega^X$ является минимальной неподвижной точкой этого отображения (она может быть построена с использованием леммы 5.50); тогда, если $X' \xrightarrow{i} X$ — соответствующий подобъект из X , нетрудно показать, что r ограничивается до отношения r' на X' , что m пропускается через $\exists i$ (например, с помощью $1 \xrightarrow{m'} \Omega^{X'}$) и что (X', r', m') является минимальной тройкой, которая равна (X, r, m) в $S(\mathcal{E})$. Более того, если (X, r, m) и (Y, s, n) — две минимальные тройки, равные в $S(\mathcal{E})$, то (X, r) и (Y, s) изоморфны в $\mathcal{E}_r$ (так как если $X \cap Y \xrightarrow{q} X$ — каноническое включение из 9.26 (i), то $\lceil q \rceil$ — неподвижная точка данного отображения). Поэтому у нас имеется вполне определенное отображение из множеств в $S(\mathcal{E})$ в объекты категории $\mathcal{E}_{\text{ptr}}$, которое переводит (X, r, m) в каноническое рас слоенное произведение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \downarrow \tau \\ \tau X' & \xrightarrow{\sim} & X' \xrightarrow{m'} \Omega \end{array}$$

Ясно, что это отображение расширяется до функторов $\Phi: \mathcal{P}(S(\mathcal{E})) \rightarrow \mathcal{E}_{\text{ptr}}$, так как свойство «быть графиком функции» в $\mathcal{E}$ можно определить, рассматривая глобальные элементы.

Чтобы определить функтор, обратный (с точностью до естественного изоморфизма) функтору Φ , мы просто будем переводить объект $(X \xrightarrow{m} Y, Y \xrightarrow{r} \Omega^Y)$ из $\mathcal{E}_{\text{ptr}}$ в множество $(Y, r, \lceil m \rceil)$. (Следует отметить, что этот обратный функтор можно определить и доказать, что он полный, унивалентный и логический, даже не принимая аксиому (TR).)

(iii) Пусть (X, r, m) является множеством в $S(\mathcal{P}(M))$. Используя аксиому Мостовского, можно выбрать представителя этого множества, для которого X действительно является транзитивным множеством в M , а r — отношением принадлежности на X . Тогда можно определить $T(X, r, m)$ как подмножество множества X в M , соответствующее морфизму $1 \xrightarrow{m} \Omega^X$ в $\mathcal{P}(M)$; легко проверить, что T вполне определен и что он индуцирует биекцию

между множествами в M и множествами в $S(\mathcal{P}(M))$, которая сохраняет и отражает отношение принадлежности. Следовательно, M и $S(\mathcal{P}(M))$ изоморфны. $\square$

9.38 Следствие. Теории $\mathbf{zer}$ и $\mathbf{wtt} + (\mathbf{TR})$ логически эквивалентны в том смысле, что из модели любой одной из этих теорий можно построить модель другой теории, а по последней модели восстановить исходную модель. Более того, теории $\mathbf{wtt}$, $\mathbf{wpt}$ и $\mathbf{zer}$, равно непротиворечивы с вышеуказанными теориями в том смысле, что существование невырожденной модели для любой из них влечет существование модели для каждой из остальных.

9.39 Замечание. Конечно, можно получить дальнейшие логические эквивалентности из следствия 9.38, добавляя другие теоретико-множественные аксиомы к $\mathbf{zer}$ и их теоретико-топосные эквиваленты к $\mathbf{wtt}$. Например, аксиома бесконечности эквивалентна теоретико-топосной аксиоме (NN): существует объект натуральных чисел в $\mathcal{E}$, а теоретико-множественная аксиома выбора эквивалентна (AC), как она сформулирована в определении 5.21. (Следует мимоходом отметить, что добавление (AC) делает аксиому (PT) избыточной, так как она влечет то, что у каждого объекта имеется полное упорядочивание; см. ниже упражнение 8.) Аналогично можно сформулировать категорный вариант аксиомы замещения (это сделано в [92]) и таким образом получить логический эквивалент полной теории множеств Цермело — Френкеля. Однако этот последний шаг вряд ли представляет такой интерес, как предыдущие, так как оказывается, что те логические проблемы, в которых существенно используется замещение (например, проблемы, захватывающие большие кардиналы), всегда более «естественно» решаются теоретико-множественными, а не теоретико-топосными методами. В проблемах, не затрагивающих замещение (например, независимость континуум-гипотезы), теоретико-топосная точка зрения часто является более наглядной, что мы надеемся показать в двух следующих параграфах. $\square$

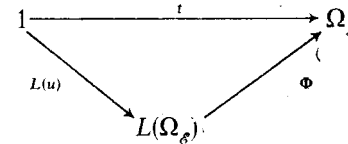
9.40 Замечание. Двигаясь в противоположном направлении, можно попытаться убирать аксиомы с обеих сторон эквивалентности, указанной в следствии 9.38, и таким образом характеризовать с «теоретико-множественной точки зрения» класс топосов, более общий, чем класс точечных топосов. В этом направлении окончательные результаты получили независимо Буало [11], Кост [26] и Фурман [35], каждый из которых построил «интуиционистскую теорию более высокого порядка», логически эквивалентную самой теории топосов. $\square$

9.4. Построение фильтра-степени

В этом параграфе вводится метод построения новых топосов из старых, который будет играть центральную роль в доказательствах независимости, рассматриваемых в следующем параграфе.

9.41 Определение. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ — топосы и $L: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — функтор, точный слева. Под *фильтром* на L будем понимать гомоморфизм $\wedge$ -полурешеток $\Phi: L(\Omega_{\mathcal{E}}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}$ в $\mathcal{F}$. Φ называется *ультрафильтром*, если в действительности он является гомоморфизмом гейтинговых алгебр. [В случае, когда $\mathcal{F}$ является «определенной» категорией множеств, это эквивалентно обычным определениям фильтра и ультрафильтра на гейтинговой алгебре $L(\Omega_{\mathcal{E}})$.] $\square$

Теперь любой фильтр на L определяет (внешний) фильтр подобъектов объекта 1 в $\mathcal{E}$, а именно тех $U \rightarrow 1$, классифицирующие отображения $1 \xrightarrow{u} \Omega_{\mathcal{E}}$ которых удовлетворяют коммутативной диаграмме



в $\mathcal{F}$. Будем называть такие подобъекты Φ -плотными; следует отметить, что если топос $\mathcal{F}$ является точечным (так, что подобъект из $L(\Omega_{\mathcal{E}})$, классифицированный посредством Φ , определяется своими глобальными элементами), а L — прямой образ геометрического морфизма, то любой фильтр подобъектов объекта 1 в $\mathcal{E}$ задает фильтр на L . Поскольку нас обычно интересует именно этот частный случай, мы осмелимся отождествить Φ с фильтром Φ -плотных подобъектов из 1 , поэтому будем просто писать « $U \in \Phi$ » вместо « U является Φ -плотным».

Будем говорить, что морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{E}$ является Φ -обратимым, если существует такой Φ -плотный подобъект U , что $U^*(f)$ является изоморфизмом в $\mathcal{E}/U$, и вместо класса Φ -обратимых морфизмов в $\mathcal{E}$ будем писать Φ . (Следует заметить, что $\Phi = \bigcup_{U \in \Phi} \exists_U$ согласно 3.54 (i).)

9.42 Лемма. Φ допускает (насыщенное) двустороннее исчисление частных на $\mathcal{E}$ и замкнуто относительно возведения

в степень (т. е. $X \xrightarrow{f} Y \in \Phi$ влечет $X^Z \xrightarrow{f^Z} Y^Z \in \Phi$ для любого Z).

Доказательство. Предположим, что имеется композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ с $f, g \in \Phi$. Тогда можно найти такие U и $V \in \Phi$, что $U^*(f)$ и $V^*(g)$ являются изоморфизмами, но поскольку Φ — фильтр, ясно, что $U \cap V \in \Phi$ и $(U \cap V)^*(gf)$ — также изоморфизм. Аналогично, если gf и f (соответственно gf и g) Φ -обратимы, то таковым же является g (соответственно f). Из того, что функторы U^* являются точными, сразу следует, что подъемы и спуски Φ -обратимых морфизмов Φ -обратимы и что параллельную пару $X \rightrightarrows Y$ можно уравнивать посредством Φ -обратимого

морфизма тогда и только тогда, когда ее можно коуравнять единицей. Аналогично, замыкание относительно возведения в степень следует из того, что U^* сохраняет экспоненциалы. $\square$

9.43 Определение. Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{L} \mathcal{F}$ — функтор, точный слева, а Φ — фильтр на L . Определим *фильтр-степень топоса $\mathcal{E}$ по модулю Φ* как категорию частных $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}[\Phi^{-1}]$ и будем писать $P_\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\Phi$ вместо канонической проекции. Обычно будем использовать слово «ультрастепень» вместо «фильтр-степень», если Φ является ультрафильтром. $\square$

9.44 Теорема (Ловер — Тьерне). Пусть $\mathcal{E} \xrightarrow{L} \mathcal{F}$ является левым функтором, а Φ — фильтр на L . Тогда $\mathcal{E}_\Phi$ — топос, а P_Φ — логический функтор.

Доказательство. (i) Существование конечных пределов в $\mathcal{E}_\Phi$ и то, что P_Φ их сохраняет, немедленно следуют из леммы 9.42 и теоремы 0.19.

(ii) В силу 9.42 $\mathcal{E}_\Phi$ -морфизм $X \times Y \rightarrow Z$ можно представить диаграммой

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & & Z \\ & \searrow & \downarrow s \\ & & T \end{array}$$

в $\mathcal{E}$ с $s \in \Phi$; а тогда преобразованная транспозицией диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & & Z^Y \\ & \searrow & \downarrow s^Y \\ & & T^Y \end{array}$$

представляет собой морфизм $X \rightarrow Z^Y$ в $\mathcal{E}_\Phi$. Наоборот, если морфизм $X \rightarrow Z^Y$ в $\mathcal{E}_\Phi$ представляется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} U & & Z^Y \\ \downarrow u & \searrow & \\ X^* & & \end{array}$$

с $u \in \Phi$, то ее транспозиция

$$\begin{array}{ccc} U \times Y & & Z \\ \downarrow u \times 1 & \searrow & \\ X \times Y & & \end{array}$$

представляет собой морфизм $X \times Y \rightarrow Z$ в $\mathcal{E}_\Phi$. Простое прослеживание по диаграмме показывает, что оба эти построения сохра-

няют отношение эквивалентности, определяющее морфизмы в $\mathcal{E}_\Phi$ (теорема 0.19), и что они взаимно обратны. Поэтому у $\mathcal{E}_\Phi$ имеются экспоненциалы, а P_Φ их сохраняет.

(iii) Пусть $Y \xrightarrow{m} X$ — мономорфизм в $\mathcal{E}_\Phi$ и пусть

$$\begin{array}{ccc} U & & X \\ \downarrow s & \searrow f & \\ Y & & \end{array}$$

— диаграмма в $\mathcal{E}$, представляющая его. Пусть $U \xrightarrow{q} I \xrightarrow{i} X$ — разложение образа f , тогда q должен быть Φ -обратимым, так как P_Φ сохраняет разложения образа, а Φ насыщен. Поэтому m изоморфен (как подобъект из X в $\mathcal{E}$) «настоящему» подобъекту $P_\Phi(i)$. Но любой морфизм $X \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{E}_\Phi$ фактически находится в образе P_Φ , так как Ω инъективен в $\mathcal{E}$ и из построения фильтра Φ ясно, что морфизм $X \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{E}_\Phi$ можно представить диаграммой вида

$$\begin{array}{ccc} X \times U & & \Omega \\ \downarrow \pi_1 & \searrow & \\ X & & \end{array}$$

с $U \in \Phi$. Два морфизма $X \rightarrow \Omega$ в $\mathcal{E}$ становятся равными в $\mathcal{E}_\Phi$ тогда и только тогда, когда их уравниватель Φ -обратим; это влечет, что классифицируемые ими подобъекты становятся изоморфными в $\mathcal{E}_\Phi$. Поэтому $P_\Phi(\Omega)$ является классификатором подобъектов для $\mathcal{E}_\Phi$. $\square$

9.45 Пример. Пусть $\mathcal{E}$ — топос, X — объект из $\mathcal{E}$ с глобальным носителем, а $\Phi: \Omega^X \rightarrow \Omega$ — ультрафильтр на $\Pi_X: \mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}$ точный, то таковым является и $(\mathcal{E}/X)_\Phi$

(см. ниже теорему 9.48), а если мы представляем себе $\mathcal{E}$ как модель теории множеств (на основании теоремы 9.38 о равнонепротиворечивости), то построение $(\mathcal{E}/X)_\Phi$ в точности совпадает с тем, которое используется для получения нестандартных моделей анализа в смысле Робинсона. Следует отметить, что компо-

зиция $\mathcal{E} \xrightarrow{X^*} \mathcal{E}/X \xrightarrow{P_\Phi} (\mathcal{E}/X)_\Phi$ является унивалентной и логической, так как если U — любой подобъект объекта 1 в $\mathcal{E}$, то $X \rightarrow 1$, будучи эпиморфизмом, влечет $U^X \cong U$, и поэтому $P_\Phi(X^*(U)) \cong 1$ влечет $U \cong 1$, но поскольку $P_\Phi \cdot X^*$ сохраняет уравниватели и функторы $\forall$, этого достаточно. Однако $P_\Phi \cdot X^*$ в общем случае не является эквивалентностью категорий; ср. ниже упражнение 12. Этот пример во всем объеме обсуждается в [67] Коком и Миккелсенем, давшими другое построение $(\mathcal{E}/X)_\Phi$ через теорему

разложения для функторов, сохраняющих логику первого порядка. $\square$

При доказательстве независимости континуум-гипотезы в следующем параграфе в качестве отправной точки будет взята система аксиом $\mathbf{tvm}$, которая представляет собой усиленную систему $\mathbf{wtt}$ из § 9.3. Сейчас мы введем эту систему и докажем результат, который показывает, как можно использовать построение ультрастепеней для получения новых моделей теории $\mathbf{tvm}$.

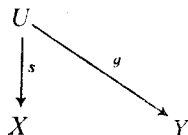
9.46 Определение. Под *булевозначной моделью* (категории множеств) будем понимать топос $\mathcal{E}$, удовлетворяющий (AC) и имеющий объект натуральных чисел. Если к тому же $\mathcal{E}$ удовлетворяет аксиоме (TV) из предложения 9.33, то он называется *двузначной моделью*. Будем писать $\mathbf{bvm}$, $\mathbf{tvm}$ соответственно вместо теорий булевозначной и двузначной моделей. $\square$

Из предложения 9.33 и приведенного ниже упражнения 8 следует, что $\mathbf{tvm}$ эквивалентна $\mathbf{wtt} + (\mathbf{AC}) + (\mathbf{NN})$; поэтому можно использовать следствие 9.38, чтобы интерпретировать доказательства независимости в $\mathbf{tvm}$ в терминах подходящей подсистемы теории множеств ZFC.

9.47 Замечание. Пусть $\mathcal{P}$ — двузначная модель. Тогда из теоремы 5.39 известно, что булевозначные модели, определенные над $\mathcal{P}$, соответствуют полным булевым алгебрам в $\mathcal{P}$. Поэтому любая двузначная модель, определенная над $\mathcal{P}$, в действительности эквивалентна $\mathcal{P}$ как категории. Как указал Тьерне [117], это является точной формой высказывания Ловера [74]: «если вы добавили (неэлементарную) аксиому полноты, то вы охарактеризовали теорию множеств». Следовательно, важно, чтобы при построении моделей теории $\mathbf{tvm}$ использовались конструкции, выводящие нас за пределы мира геометрических морфизмов. Именно эту роль играет построение ультрастепеней.

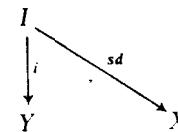
9.48 Теорема. Пусть $\mathcal{P}$ — двузначная модель, а $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$ — булевозначная модель, определенная над $\mathcal{P}$. Пусть Φ — ультрафильтр на $\gamma_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$ (который существует в $\mathcal{P}$ по лемме Цорна). Тогда ультрастепень $\mathcal{E}_\Phi$ является двузначной моделью.

Доказательство. В силу предложения 6.16 $\mathcal{E}_\Phi$ имеет объект натуральных чисел, поэтому остается проверить (AC) и (TV). Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — эпиморфизм в $\mathcal{E}_\Phi$ и



— диаграмма в $\mathcal{E}$, представляющая его. Пусть $U \xrightarrow{q} I \xrightarrow{i} Y$ — разложение образа g , тогда, как в 9.44 (iii), выводим, что i должен быть Φ -обратимым. Пусть $I \xrightarrow{d} U$ — расщепление для q в $\mathcal{E}$;

тогда можно легко увидеть, что



— расщепление для f в $\mathcal{E}_\Phi$.

Теперь пусть $U \rightarrow 1$ — подобъект из 1 в $\mathcal{E}$ с классифицирующим отображением $1 \xrightarrow{u} \Omega$. Поскольку $\mathcal{P}$ удовлетворяет (TV), мы должны иметь либо $\Phi \cdot \gamma_*(u) = t$ (в этом случае U является Φ -плотным, поэтому $P_\Phi(U) \cong 1$), либо $\Phi \cdot \gamma_*(u) = f$ (в этом случае Φ -плотно дополнение к U , так что $0 \rightarrow U$ является Φ -обратимым и $P_\Phi(U) \cong 0$). Но поскольку любой подобъект из 1 в $\mathcal{E}_\Phi$ является образом P_Φ (и поскольку Φ сохраняет минимальный элемент из $\gamma_*(\Omega_{\mathcal{E}})$, так что $0 \rightarrow 1$ не является Φ -плотным), выводим, что существуют в точности два таких подобъекта. $\square$

9.5. Независимость континуум-гипотезы

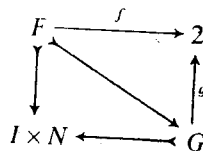
Одним из наиболее поразительных ранних применений элементарной теории топосов было категорное доказательство независимости континуум-гипотезы от аксиом теории множеств. Это доказательство впервые провел в 1963 г. Коэн [156]; категорные идеи содержатся в работе Коэна неявно, и потребовался язык элементарной теории топосов, чтобы проявить эту связь. На самом деле желание сделать это являлось одной из основных движущих сил развития элементарной теории топосов Ловером и Тьерне. В данном параграфе мы будем следовать доказательству независимости, представленному Тьерне [117].

Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел. Будем говорить, что объект X отрицает континуум-гипотезу в $\mathcal{E}$, если существуют мономорфизмы $N \rightarrow X \rightarrow \Omega^N$, но объекты эпиморфизмов $\text{Epi}(N, X)$ и $\text{Epi}(X, \Omega^N)$ суть 0 . (Следует отметить, что истинность этого утверждения сохраняется логическими функторами.) На протяжении оставшейся части параграфа будем предполагать, что дана двузначная модель $\mathcal{P}$, и мы будем искать построение булевозначной модели $\mathcal{E}$, заданной над $\mathcal{P}$ и содержащей объект, который отрицает (CH). Тогда, применяя построение ультрастепеней к $\mathcal{E}$, получим новую двузначную модель $\mathcal{P}'$, в которой (CH) ложна.

Мы позволим себе говорить об объектах из $\mathcal{P}'$, как если бы они были «настоящими» множествами; ввиду следствия 9.38 это разумное упрощение, хотя читателю, до сих пор следившему за нашими рассуждениями, будет, наверное, немного трудно перевести все, что мы говорим, на более строгий теоретико-топосный

язык. В частности, будем обозначать классификатор подобъектов из $\mathcal{P}$ символом 2, а не Ω . Так как $\mathcal{P}$ удовлетворяет (AC), из теоремы 9.20 легко следует, что определения финитности кардиналов и конечности кардиналов по Куратовскому совпадают, и поэтому мы не будем беспокоиться, в каком из этих смыслов употребляется слово «конечный»; следует также отметить, что благодаря упражнению 4 к главе 6 мы можем без двусмысленности говорить о мощности конечного объекта (т. е. о натуральном числе, индексирующем его элементы).

Пусть I — такой объект из $\mathcal{P}$, что имеется мономорфизм $2^N \rightarrow I$, но $\text{Epi}(2^N, I) = 0$. (Например, согласно упражнению 7 к главе 5 можно взять $I = 2^{2^N}$.) Наша цель состоит теперь в том, чтобы построить $\mathcal{P}$ -топос $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}$, в котором γ^*I становится подобъектом из Ω^N , в то время как еще имеет место $\text{Epi}(\gamma^*2^N, \gamma^*I) = 0$. Теперь пусть P — частично упорядоченное множество (в $\mathcal{P}$) частичных отображений $I \times N \rightarrow 2$ с конечной областью определения, упорядоченных отношением $f \leq g \Leftrightarrow g \text{ — расширение } f$, т. е. существует коммутативная диаграмма



Будем представлять себе элемент из P как конечное множество «вынуждающих условий», каждое из которых утверждает, что конкретный элемент n из N входит или не входит в конкретный элемент i из I .

9.51 Лемма. Пусть X — подобъект из P такой, что никакие два элемента из X не имеют общего расширения в P (т. е. такой, что

$$\mathcal{P} \models \forall p \forall p' \forall p'' (p \in \lceil X \rceil \wedge p' \in \lceil X \rceil \wedge p < p'' \wedge p' < p'') \Rightarrow p = p'.$$

Тогда X счетен, т. е. $X \cong 0$ или существует эпиморфизм $N \rightarrow X$. (Будем говорить, что P удовлетворяет условию счетной цепи.)

Доказательство. Предположим сначала, что существует натуральное число m , которое является верхней гранью мощностей областей определения частичных отображений в X . В этом случае покажем индукцией по m , что X на самом деле конечен и его мощность не превышает $2^m \cdot m!$.

Но это тривиально для $m = 0$, поэтому можно принять, что $m > 0$ и что доказываемое утверждение доказано для $m - 1$. Можно считать, что X непуст, и поэтому взять глобальный элемент $1 \xrightarrow{*} X$. Пусть q обозначает мощность области определения

соответствующего частичного отображения. Теперь, если y — любое другое частичное отображение в X , то должен существовать такой (i, n) в $\text{dom}(x) \cap \text{dom}(y)$, что $x(i, n) \neq y(i, n)$, так как в противном случае x и y имели бы общее расширение в P . Поэтому для каждого $(i, n) \in \text{dom}(x)$ пусть $Y(i, n)$ — множество частичных отображений, полученных, если взять частичное отображение в X , которое не согласуется с x на (i, n) , и удалить (i, n) из его области определения. Тогда ясно, что никакие два частичных отображения в $Y(i, n)$ не могут иметь общее расширение в P , и все их области определения имеют мощность $\leq m - 1$, поэтому по индукции

$$\text{card}(Y(i, n)) \leq 2^{m-1} \cdot (m - 1)!$$

Но имеется морфизм $\prod_{(i, n) \in \text{dom}(x)} Y(i, n) \rightarrow X$, образ которого содержит каждый элемент из X , кроме самого x , и поэтому

$$\text{card}(X) \leq q \cdot 2^{m-1} \cdot (m - 1)! + 1 \leq 2^{m-1} \cdot m! + 1 \leq 2^m \cdot m!.$$

В общем случае пусть X_m — подобъект из X , содержащий те частичные отображения, мощности областей определения которых $\leq m$. Тогда согласно проведенному рассуждению X_m конечен, и поэтому $X = \bigcup_{m \in N} X_m$ счетен. $\square$

Рассмотрим теперь топос $\mathcal{E} = \text{sh}_{\neg, \neg}(\mathcal{P})$. В силу теоремы 5.17 и предложения 5.34 $\mathcal{E}$ булев и удовлетворяет (SG); поэтому в силу теоремы 5.39 он удовлетворяет (AC) и, таким образом, является булевозначной моделью. Как обычно, мы пишем γ^* вместо обратного образа геометрического морфизма $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$. Нам потребуется следующая техническая лемма.

9.52 Лемма. Пусть S — объект из $\mathcal{P}$, и предположим, что дан элемент x из $\gamma^*S(p)$, где p — элемент из P . Тогда в P существует такой $q \geq p$, что образ элемента x в $\gamma^*S(q)$ содержится

в образе канонического отображения $S \xrightarrow{\sigma} \gamma^*S(q)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{P}$ булев, постоянный функтор $\bar{S}$ (разрешение (сравните упражнение 3 к главе 5), и, следовательно, $\neg \neg$ -отделен в $\mathcal{P}^P$, а потому γ^*S (будучи ассоциированным с $\bar{S}$ пучком) в обозначениях § 3.3 равен $(\bar{S})^+$. Поэтому любой элемент из $\gamma^*S(p)$ является производным морфизма $R \rightarrow \bar{S}$ в $\mathcal{P}^P$, где R — $\neg \neg$ -накрывающее решето на p в P^p . А так как любое $\neg \neg$ -накрывающее решето должно быть непустым, то мы, чтобы получить желаемый результат, должны просто выбрать элемент $(p \rightarrow q)$ из R . $\square$

Будем говорить, что объект S из $\mathcal{P}$ неконечен, если имеется изоморфизм $S \times N \cong S$. Не будем обсуждать соотношение между этим определением и различными определениями конечности, которые нами рассматривались. Мы просто заметим, что N неконечен

чен в любом топосе (так как сопоставление

$$(p, q) \mapsto \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+q$$

задает изоморфизм $N \times N \rightarrow N$), а Ω^N неконечен в любом булевом топосе (так как у нас имеются мономорфизмы

$$\Omega^N \xrightarrow{1 \times 0} \Omega^N \times N \xrightarrow{1 \times 1} \Omega^N \times \Omega^N \cong \Omega^{N \times N} \cong \Omega^N,$$

к которым применима теорема Шрёдера — Бернштейна). (См. также ниже упражнение 15.)

9.53 Предложение. Пусть $\mathbf{P}$ — частично упорядоченное множество в $\mathcal{P}$, удовлетворяющее условию счетной цепи, и пусть $\mathcal{E} = \text{sh}_{\neg\neg}(\mathcal{P}^{\mathbf{P}})$. Тогда функтор $\gamma^*: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ «сохраняет кардиналы» в том смысле, что если S неконечен и $\text{Epi}(S, T) = 0$ в $\mathcal{P}$, то $\text{Epi}(\gamma^*S, \gamma^*T) = 0$ в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Предположим, что $\text{Epi}(\gamma^*S, \gamma^*T) \neq 0$.

Тогда существуют $p \in P$ и эпиморфизм $l(p)^* \gamma^*S \twoheadrightarrow l(p)^* \gamma^*T$ в $\mathcal{E}/l(p)$. Очевидно, что можно допустить, что S и T ненулевые; поэтому у γ^*T имеется глобальный элемент, и он, следовательно, инъективен в $\mathcal{E}$. Поскольку $l(p)$ является подобъектом объекта 1 в $\mathcal{E}$, f можно расширить до морфизма $\bar{f}: \gamma^*S \rightarrow \gamma^*T$ (не обязательно являющегося эпиморфизмом) такого, что $l(p)^*(\bar{f}) = f$. Теперь положим, что $X \twoheadrightarrow P \times S \times T$ — экстенционал формулы

$$\bar{f}_p(\sigma_p(s)) = \tau_p(t)$$

языка $L_{\mathcal{P}}$, где $S \xrightarrow{\sigma_p} \gamma^*S(p)$ и $T \xrightarrow{\tau_p} \gamma^*T(p)$ — канонические мономорфизмы.

Сначала скажем, что композиция $X \twoheadrightarrow P \times S \times T \xrightarrow{\pi_3} T$ является эпиморфизмом. Чтобы доказать это, допустим, что t — элемент из T ; поскольку $l(p)^*(\bar{f}) = f$ является расщепленным эпиморфизмом, можно найти такой $x \in \gamma^*S(p)$, что $\bar{f}_p(x) = \tau_p(t)$. Тогда в силу леммы 9.52 можно найти такой $q \geq p$, что образ x' элемента x в $\gamma^*S(q)$ содержится в образе для $S \xrightarrow{\sigma_q} \gamma^*S(q)$. Пусть s — такой (единственный) элемент из S , что $\sigma_q(s) = x'$; тогда $\bar{f}_q(\sigma_q(s)) = \bar{f}_q(x') = \tau_q(t)$, поэтому тройка (q, s, t) содержится в X .

Пусть теперь $T \xrightarrow{h} X$ — расщепление для этого эпиморфизма, и рассмотрим композицию

$$T \xrightarrow{h} X \twoheadrightarrow P \times S \times T \xrightarrow{\pi_2} S.$$

Пусть для каждого элемента s из S T_s обозначает слой этого

отображения над $1 \xrightarrow{s} S$, т. е. T_s — множество тех $t \in T$, что $h(t) = (p, s, t)$ для некоторого p . Пусть g_s является композицией

$$T_s \twoheadrightarrow T \xrightarrow{h} X \twoheadrightarrow P \times S \times T \xrightarrow{\pi_1} P;$$

покажем, что g_s является мономорфизмом и что ни у каких двух элементов его образа нет общего расширения в $\mathbf{P}$.

Для этого предположим, что t и t' являются такими элементами из T_s , что $g_s(t) \leq q \geq g_s(t')$ для некоторого $q \in P$. Тогда, поскольку тройки $(g_s(t), s, t) (= h(t))$ и $(g_s(t'), s, t')$ содержатся в X , из определения X легко следует, что (q, s, t) и (q, s, t') содержатся в X . Поэтому $\tau_q(t) = \bar{f}_q(\sigma_q(s)) = \tau_q(t')$, но τ_q — мономорфизм (поскольку T является $\neg\neg$ -отделенным), следовательно, $t = t'$.

Отсюда согласно условию счетной цепи на $\mathbf{P}$ либо $T_s = 0$, либо имеется эпиморфизм $N \twoheadrightarrow T_s$. Но мы принимаем, что T ненулевой, поэтому можно построить эпиморфизм $S \times N \twoheadrightarrow \prod_{s \in S} T_s = T$. Но $S \times N \cong S$, значит, мы построили эпиморфизм $S \twoheadrightarrow T$ в S , т. е. элемент из $\text{Epi}(S, T)$. $\square$

Теперь вернемся к конкретному частично упорядоченному множеству $\mathbf{P}$ частичных отображений $I \times N \rightarrow 2$, которое было определено ранее. Решающая особенность этого частично упорядоченного множества заключается в следующем результате.

9.54 Предложение. В топосе $\mathcal{E} = \text{sh}_{\neg\neg}(\mathcal{P}^{\mathbf{P}})$ имеется мономорфизм $\gamma^*I \xrightarrow{m} \Omega^N$.

Доказательство. Определим подфунктор R из $I \times N$ в $\mathcal{P}^{\mathbf{P}}$ посредством

$$R(p) = \{(i, n) \mid p(i, n) = \text{истина}\}.$$

Сначала утверждаем, что R является $\neg\neg$ -замкнутым подобъектом из $I \times N$. Чтобы доказать это, следует показать, что если i, n и p таковы, что для всех $q \geq p$ существует $r \geq q$ с $r(i, n) = \text{истина}$ (так, что (i, n) содержится в $\neg\neg$ -замыкании объекта $R(p)$), то $(i, n) \in R(p)$. Но если это условие удовлетворено, то у нас должно быть $(i, n) \in \text{dom}(p)$, так как в противном случае можно было бы найти расширение q для p с $q(i, n) = \text{ложь}$, и по той же причине должно быть $p(i, n) = \text{истина}$, т. е. $(i, n) \in R(p)$.

Поэтому R является $\neg\neg$ -замкнутым подобъектом; следовательно, он классифицируется морфизмом $I \times N \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$ в $\mathcal{P}^{\mathbf{P}}$ или, эквивалентно, морфизмом $\bar{I} \xrightarrow{\phi} (\Omega_{\neg\neg})^{\bar{N}}$. Теперь для любого $p \in P$ можно отождествить $(\Omega_{\neg\neg})^{\bar{N}}(p)$ с множеством $\neg\neg$ -замкнутых подобъектов объекта $\bar{N} \times h^p$ (ср. 1.12); отсюда можно легко увидеть, что элемент i из $I = \bar{I}(p)$ переводится морфизмом ϕ_p

в функтор

$$q \mapsto \begin{cases} \{n \in N \mid q(i, n) = \text{истина}\} & (q \geq p), \\ 0 & (q \not\geq p). \end{cases}$$

Предположим, что i и j — два различных элемента из I ; тогда, поскольку $\text{dom}(p)$ конечен, можно найти натуральное число n такое, что ни (i, n) , ни (j, n) не содержатся в $\text{dom}(p)$, и тогда так зададим расширение q для p , что $q(i, n) = \text{истина}$, но $q(j, n) = \text{ложь}$. Следовательно, $\phi_p(i) \neq \phi_p(j)$, поэтому ϕ является мономорфизмом в $\mathcal{P}^P$.

Но $(\Omega_{\neg\neg})^{\bar{N}}$ в силу определения 3.24 и леммы 3.27 является $\neg\neg$ -пучком, поэтому после применения к ϕ функтора ассоциирования пучка получим мономорфизм

$$\gamma^* I \longrightarrow (\Omega_{\neg\neg})^{\bar{N}} \cong \Omega^{\gamma^* N}$$

в $\text{sh}_{\neg\neg}(\mathcal{P}^P)$. (Последний изоморфизм был установлен в упражнении 6 к главе 3.) Это как раз тот мономорфизм, который нам требуется. $\square$

9.55 Следствие. В топосе $\mathcal{E}$ объект $\gamma^*(2^N)$ отрицает континуум-гипотезу.

Доказательство. Поскольку γ^* сохраняет мономорфизмы, имеем мономорфизмы

$$N \cong \gamma^* N \longrightarrow \gamma^*(2^N) \longrightarrow \gamma^* I \xrightarrow{m} \Omega^N$$

в $\mathcal{E}$, а поскольку $\text{Epi}(N, 2^N) = \text{Epi}(2^N, I) = 0$ в $\mathcal{P}$, то

$$\text{Epi}(N, \gamma^*(2^N)) = \text{Epi}(\gamma^*(2^N), \gamma^* I) = 0$$

в $\mathcal{E}$ в силу леммы 9.51 и предложения 9.53. Но поскольку у $\gamma^* I$ имеется глобальный элемент, он инъективен в булевом топосе $\mathcal{E}$,

и поэтому m расщепляется, скажем, с помощью $\Omega^N \xrightarrow{q} \gamma^* I$. Тогда композиция с q индуцирует морфизм $\text{Epi}(\gamma^*(2^N), \Omega^N) \rightarrow \text{Epi}(\gamma^*(2^N), \gamma^* I)$ в $\mathcal{E}$, следовательно, в силу леммы 1.56 $\text{Epi}(\gamma^*(2^N), \Omega^N) = 0$. $\square$

Сочетая следствие 9.55 с результатами последнего параграфа, мы доказали следующую теорему.

9.56 Теорема (Коэн — Ловер — Тьерне). Континуум-гипотеза независима от системы аксиом tvm .

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — модель теории tvm . Построим, как выше, булевозначную модель $\mathcal{E}$ над $\mathcal{P}$ и предположим, что Φ является ультрафильтром на $\gamma^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$. Определим $\mathcal{P}' = \mathcal{E}_\Phi$; тогда в силу теоремы 9.48 $\mathcal{P}'$ является двузначной моделью, а так как $\gamma^*(2^N)$ отрицает континуум-гипотезу в $\mathcal{E}$, то объект $P_\Phi \gamma^*(2^N)$ отрицает ее в $\mathcal{P}'$. $\square$

9.57 Замечание. Рассуждения, использованные в данном параграфе, представляют собой просто частный случай общего

метода доказательства в tvm теорем независимости, подобного методу «вынуждения по Коэну» в теории множеств. Например, Бандж [15] использовал этот метод для доказательства независимости гипотезы Суслина. Этот метод обладает следующими общими чертами: сначала утверждение, непротиворечивость которого стремятся доказать (например, « X отрицает континуум-гипотезу» или « X — суслинское дерево»), выражают на внутреннем языке произвольного топоса (или по крайней мере произвольного булева топоса). Затем, взяв двузначную модель $\mathcal{P}$, выбирают частично упорядоченное множество P в $\mathcal{P}$ (обычно это частично упорядоченное множество «конечных частичных моделей» того, что стремятся построить), так что соответствующее утверждение становится истинным в булевозначной модели $\mathcal{E} = \text{sh}_{\neg\neg}(\mathcal{P}^P)$. Наконец, используют построение ультрастенени, чтобы «сжать» $\mathcal{E}$ до новой двузначной модели $\mathcal{P}'$. $\square$

Упражнения к главе 9

1. Пусть $\mathcal{E}$ — топос. Покажите, что объект $X = (X_0 \xrightarrow{f} X_1)$ топоса Серпинского $\mathcal{E}^2$ является K -конечным тогда и только тогда, когда X_0 является K -конечным в $\mathcal{E}$ и f является эпиморфизмом. [Указание. Используя то, что «оценить в 0» и «оценить в 1» представляют собой функторы обратного образа, покажите, что

$$K(X_0 \xrightarrow{f} X_1) \cong (K(X_0) \xrightarrow{K(f)} K(X_1)).]$$

Более общо, если C — любая внутренняя категория в $\mathcal{E}$, покажите, что внутренняя диаграмма $F \xrightarrow{\gamma} C$ является K -конечной в $\mathcal{E}^C$ тогда и только тогда, когда $F_0 \xrightarrow{\gamma_0} C_0$ является K -конечным в $\mathcal{E}/C$ и действие C на F_0 (рассматриваемое как отображение

$$(C_1 \xrightarrow{(d_0 d_1)} C_0 \times C_0) \rightarrow \pi_2^*(\gamma_0)^{\pi_1^*(\gamma_0)}$$

в $\mathcal{E}/C_0 \times C_0$), пропускается через объект эпиморфизмов $\text{Epi}(\pi_1^*(\gamma_0), \pi_2^*(\gamma_0))$.

2. Используя топос $\mathcal{E} = \mathcal{P}^2$, приведите примеры:

(i) параллельной пары $X \rightrightarrows Y$ в $\mathcal{E}_{\text{kl}}$, уравнитель которой (в $\mathcal{E}$) не является K -конечным;

(ii) сюръекции $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ и объекта X из $\mathcal{E}$ таких, что $p^* X$ является K -конечным, но X не является K -конечным;

(iii) такого объекта X , что Ω^X является K -конечным, но X не является K -конечным;

(iv) K -конечного объекта из $\mathcal{E}$, который не является внутренне проективным (ср. предложение 6.25);

(v) экспоненциала вида Y^X с K -конечным X , который не сохраняется обратным образом геометрического морфизма $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ (ср. предложение 6.24).

3. Пусть X — K -конечный объект в топосе $\mathcal{E}$ с объектом натуральных чисел, а p — натуральное число в $\mathcal{E}$. Покажите, что объект $\text{Eri}([p], X)$ сохраняется функторами обратного образа. [Указание. Постройте декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \text{Eri}([p], X) & \xrightarrow{\quad} & X^{[p]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{\tau_1} & K(X) \end{array}$$

Покажите с помощью примера в $\mathcal{P}^2$, что предположение о K -конечности объекта X нельзя опустить.

4. Пусть $\mathcal{E}$ — топос с объектом натуральных чисел, и предположим, что $\text{E}_{\text{finer}}^{\text{finer}}$ — внутренняя категория финитных кардиналов и эпиморфизмов в $\mathcal{E}$, т. е. ее объектом объектов является N , а ее объектом морфизмов является объект $\text{Eri}(\pi_1^*[n], \pi_2^*[n])$ из $\mathcal{E}/N \times N$. Если X — любой объект из $\mathcal{E}$, то покажите, что объект $\text{Eri}([n], X)$ из $\mathcal{E}/N$ имеет структуру внутреннего предпучка $H(X)$ на $\text{E}_{\text{finer}}^{\text{finer}}$ и что этот предпучок плоский тогда и только тогда, когда X будет K -конечным. [Указание. Для первого условия в определении плоского пучка используйте теорему 9.20, для второго — то, что финитные кардиналы внутренне проективны.] Выведите, что $\mathcal{E}_{\text{finer}}^{\text{finer}}$ является классифицирующим топосом для теории, моделями которой служат K -конечные объекты, а морфизмами — эпиморфизмы.

5. Пусть p — натуральное число в топосе $\mathcal{E}$, а $[p] \xrightarrow{f} X$ — морфизмы в $\mathcal{E}$. Покажите, что X изоморфен финитному кардиналу в $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда у диагонального подобъекта $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ имеется дополнение. [Указание. Рассмотрите ядерную пару для f .] Выведите, что если $\mathcal{E}$ является булевым топосом с объектом натуральных чисел, то подкатегории $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_{\text{loc}}$ совпадают.

6. Определите понятие *недостижимого элемента* внутренне полного частично упорядоченного множества в топосе и покажите, что X является K -конечным тогда и только тогда, когда максимальный элемент из Ω^X недостижим. [Сравните с упражнением 7 к главе 7.]

7. Теперь $\mathcal{E}$ — топос с объектом N натуральных чисел. Докажите, что (N, card) является транзитивным объектом, где $N \xrightarrow{\text{card}} \Omega^N$ — отображение «сегмент вниз» для строгого отношения порядка из предложения 6.17.

8. Пусть $X = (X_1 \rightrightarrows X)$ — вполне упорядоченный объект (предложение 5.49) в булевом топосе. Пусть $X \xrightarrow{r} \Omega^{X^+}$ — отображение «сегмент вниз» для строгого отношения порядка, соответствующего X_1 (т. е. дополнение к $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ в $X_1 \rightrightarrows X \times X$). Докажите, что (X, r) является транзитивным объектом.

9. Пусть $\mathcal{E}_{\text{og}}$ обозначает 2-категорию топосов, логических функторов и естественных преобразований. Покажите, что стирающий функтор $\mathcal{E}_{\text{og}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{at}}$ создает фильтрованные (псевдо-)копределы. Покажите, что топос $\mathcal{E}_{\Phi}$ из определения 9.43 можно описать как фильтрованный копредел диаграммы в $\mathcal{E}_{\text{og}}$, вершины которой имеют вид $\mathcal{E}/U$ для некоторого $U \in \Phi$.

10 (доказательство Фрейда независимости (AC)). Пусть $\mathcal{E}$ — топос из упражнения 5 к главе 5, а P — множество положительных целых чисел, упорядоченных отношением делимости (т. е. $p \leq q$ тогда и только тогда, когда p делит q). Покажите, что функтор $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, переводящий $\mathbb{Z}$ -многообразие (M, α) в (M, α^h) , является логическим, и, следовательно, постройте диаграмму над P в $\mathcal{E}_{\text{og}}$, вершинами которой являются копии топоса $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{F}$ — копредел этой диаграммы. Покажите, что объекты из $\mathcal{F}$ можно описать как тройки (M, α, k) , где (M, α) является объектом из $\mathcal{E}$, а k — целое положительное число, и что морфизмы $(M, \alpha, k) \xrightarrow{f} (Q, \beta, l)$ являются такими функциями $M \xrightarrow{f} Q$ в $\mathcal{P}$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & Q \\ \downarrow \alpha^{lm} & & \downarrow \beta^{km} \\ M & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

коммутативна для некоторого $m \geq 1$. Следовательно, покажите, что $\mathcal{F}$ является точечным, но не удовлетворяет (AC).

11 (Фрейд). Пусть B — булева алгебра в $\mathcal{P}$ (не обязательно полная). Покажите, что существует булевозначная модель, у которой решетка подобъектов объекта 1 изоморфна B . [Выразите B как (фильтрованное) объединение ее конечных подалгебр, затем обратите внимание на то, что любая конечная булева алгебра B_0 является полной и атомарной (так что $\text{Shv}(B_0, C) \simeq \mathcal{P}/X$ для некоторого X), и используйте упражнение 9.]

12. Пусть Φ — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел и пусть $\mathcal{E} = (\mathcal{P}/N)_{\Phi}$. Покажите, что в $\mathcal{E}$ существуют натуральные числа, которые не являются образом функтора $\mathcal{P} \xrightarrow{N^*} \mathcal{P}/N \xrightarrow{P_{\Phi}} (\mathcal{P}/N)_{\Phi}$.

13 (Фрейд [FK]). Пусть $\mathcal{E}$ — точечный топос, а $\mathcal{F}$ — произвольный топос. Покажите, что любой точный функтор $\mathcal{E} \xrightarrow{T} \mathcal{F}$ унивалентен. [Указание. T сохраняет образы морфизмов

1 и $1 \rightarrow X$ в $\mathcal{E}$.] Выведите, что не существует точного функтора $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$, где $\mathcal{E}$ — топос из упражнения 12.

14. Пусть $\mathcal{E}$ — топос Гротендика, а Φ — фильтр на γ_* : $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$. Покажите, что функтор $P_\Phi: \mathbf{ab}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathcal{E}_\Phi)$ сохраняет инъективные отображения, и выведите, что у $\mathbf{ab}(\mathcal{E}_\Phi)$ имеется достаточно много инъективных отображений. Если A — абелева группа в $\mathcal{E}$, то покажите, что имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \gamma_\Phi(A) \rightarrow \operatorname{hom}_{\mathcal{E}}(1, A) \rightarrow \operatorname{hom}_{\mathcal{E}_\Phi}(1, P_\Phi(A)),$$

где γ_Φ — функтор, определенный в упражнении 10 к главе 8, и что последний в последовательности морфизм является эпиморфизмом, если A инъективен. Следовательно, покажите, что у нас имеется длинная точная последовательность когомологических групп

$$\dots \rightarrow H_\Phi^q(\mathcal{E}; A) \rightarrow H^q(\mathcal{E}; A) \rightarrow H^q(\mathcal{E}_\Phi; P_\Phi(A)) \rightarrow H_\Phi^{q+1}(\mathcal{E}; A) \rightarrow \dots$$

15. Пусть $(X_0 \rightarrow X_1)$ обозначает объект Ω^N из $\mathcal{P}^2$. Опишите множества X_0 и X_1 и выведите отсюда, что Ω^N не является неконечным в смысле § 9.5. [Указание. Имеется в точности один элемент из X_1 , имеющий единственный предобраз в X_0 .]

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛОКАЛЬНО ВНУТРЕННИЕ КАТЕГОРИИ

Если элементарный топос, действительно, можно рассматривать как обобщенную теорию множеств, то следует попытаться развить внутри $\mathcal{E}$ теорию математических понятий, как «больших» по отношению к данному топосу $\mathcal{E}$, так и «малых». В частности, нам нужно это сделать для наиболее широко изученного «большого» математического понятия, а именно, понятия категории. В то время как методы, развитые в главе 2, позволяют нам достаточно уверенно оперировать с «малыми категориями» в топосе, потребность в соответствующих методах для больших категорий подчеркивается встречающимися нам многочисленными примерами такого рода категорий (наиболее примечательные примеры — топосы, определенные над $\mathcal{E}$, и категории моделей алгебраических и других теорий). В качестве типичного примера возникающих вопросов можно привести следующий: как сформулировать и доказать аналог следствия 7.14, если конкретный топос $\mathcal{P}$ будет заменен произвольным базисным топосом?

При развитии теории категорий с целью изучения больших категорий «относительно» некоторой базисной категории $\mathcal{E}$ применялись два подхода. Один подход привлекает теорию расслоений и псевдофункторов [44], [166] и позволяет говорить о семействах объектов категории $\mathcal{E}$, индексированных объектами категории $\mathcal{E}$. Второй подход, восходящий к теории обогащенных категорий [154], [160], позволяет индексировать семейства морфизмов категории $\mathcal{E}$ объектами из $\mathcal{E}$. Если базисная категория представляет собой топос, кажется желательным принять точку зрения, объединяющую оба этих подхода. Первое детальное исследование этой точки зрения было предпринято Ловером в [76]. Среди прочих этой же идеей занимались Бенабу [9], Селерет [17], Пенон [100], Паре и Шумахер [97]. В этом кратком обзоре мы будем следовать в основном терминологии, введенной Пеноном.

Напомним, что если $(\mathcal{E}, \otimes, I)$ — (симметричная) моноидальная категория, то $\mathcal{E}$ -категория $\mathcal{C}$ определяется заданием набора $\mathcal{C}_0$ объектов и для каждой пары объектов (A, B) объектом $\mathcal{C}(A, B)$ из $\mathcal{E}$ (который следует понимать как «объект $\mathcal{C}$ -морфизмов из A и B »), вместе с морфизмами $I \xrightarrow{i} \mathcal{C}(A, A)$ и $\mathcal{C}(A, B) \otimes \mathcal{C}(B, C) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(A, C)$, определяющими включение тождественных морфизмов и умножение в $\mathcal{C}$. Позже мы потребуем, чтобы они удовлетворяли соответствующим коммутативным

диаграммам в $\mathcal{E}$. [Во всех рассматриваемых нами примерах $\mathcal{E}$ будет категорией с конечными произведениями, а моноидная структура будет индуцироваться декартовым произведением.] Если $|\mathcal{E}|$ — обычная категория, то будем называть $|\mathcal{E}|$ *обогащенной над $\mathcal{E}$* (или имеющей структуру $\mathcal{E}$ -категории), если существует некоторая $\mathcal{E}$ -категория $\mathcal{C}$, объекты которой — это объекты категории $|\mathcal{E}|$, с функторной биекцией между $|\mathcal{E}|$ -морфизмами из A в B и I -элементами из $\mathcal{C}(A, B)$. В частности, заметим, что замкнутая моноидная категория, например, декартово замкнутая категория обогащена сама над собой. Подобным образом можно определить $\mathcal{E}$ -функторы, $\mathcal{E}$ -естественные преобразования и т. п. Будем обозначать 2-катеорию $\mathcal{E}$ -категорий через $\mathcal{E}\text{-Cat}$.

Если теперь $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ — моноидный функтор между моноидными категориями, а $\mathcal{C}$ — $\mathcal{E}$ -категория, то с помощью условий $T(\mathcal{C})_0 = \mathcal{C}_0$ и $T(\mathcal{C})(A, B) = T(\mathcal{C}(A, B))$ можно определить $\mathcal{F}$ -катеорию $T(\mathcal{C})$. (На самом деле T индуцирует функтор $\mathcal{E}\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{F}\text{-Cat}$.) Это приводит к следующему определению.

A.1 Определение (Пенон). Пусть $\mathcal{E}$ — топос. *Локально внутренняя категория $\mathcal{C}$ над $\mathcal{E}$* определяется путем задания для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ некоторой $(\mathcal{E}/X)$ -категории $\mathcal{C}_X$ [которую можно понимать как «катеорию X -индексированных семейств объектов из $\mathcal{C}$ »] и для каждого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ из топоса $\mathcal{E}$ $(\mathcal{E}/X)$ -полного вложения $\theta_f: f^*(\mathcal{C}_Y) \rightarrow \mathcal{C}_X$, так что θ_f функторно по f с точностью до согласованного естественного изоморфизма.

Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — локально внутренние категории над топосом $\mathcal{E}$, то *локально внутренний функтор $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$* состоит из $(\mathcal{E}/X)$ -функтора $T_X: \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{D}_X$ для каждого X , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^*(\mathcal{C}_Y) & \xrightarrow{f^*(T_Y)} & f^*(\mathcal{D}_Y) \\ \downarrow \theta_f & & \downarrow \theta_f \\ \mathcal{C}_X & \xrightarrow{T_X} & \mathcal{D}_X \end{array}$$

коммутативна для каждого f с точностью до (заданного согласованного) естественного изоморфизма. Аналогично можно определить локально внутренние естественные преобразования; таким образом, у нас имеется 2-катеория локально внутренних категорий над $\mathcal{E}$, которую мы будем обозначать $\text{Cat}(\mathcal{E})$. $\square$

Пусть $\mathcal{C}$ — локально внутренняя категория над $\mathcal{E}$. Если «забыть» обогащенную структуру на категории $\mathcal{C}_X$, то получим просто псевдофунктор $\mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$, а применяя «конструкцию Гротендика» ([44], VI 8), получим открыто-замкнутое расслоение

$\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$. Наоборот, если дано открыто-замкнутое расслоение над $\mathcal{E}$, то естественно спросить, когда соответствующий псевдофунктор $\mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ обладает структурой локально внутренней категории. Ответ дается следующей леммой.

A.2 Лемма. Пусть $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — расслоение над $\mathcal{E}$, снабженное расщеплением θ . Тогда задание структуры локально внутренней категории на соответствующем псевдофункторе $\mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ эквивалентно заданию для каждой пары (A, B) объектов категории $\mathcal{C}$ некоторого объекта $\mathcal{C}(A, B)$ из $\mathcal{E}/p(A) \times p(B)$, а для каждого объекта $Z \xrightarrow{(f, g)} p(A) \times p(B)$ из $\mathcal{E}/p(A) \times p(B)$ — биекции (функторной в Z) между морфизмами $(f, g) \rightarrow \mathcal{C}(A, B)$ в $\mathcal{E}/p(A) \times p(B)$ и морфизмами $\theta_f(A) \rightarrow \theta_g(B)$ в $\mathcal{C}_Z$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{C}$ — локально внутренняя категория; будем писать X, Y вместо $p(A), p(B)$ соответственно. Определим $\mathcal{C}(A, B) = \mathcal{C}_{X \times Y}(\theta_{\pi_1}(A), \theta_{\pi_2}(B))$; тогда морфизмы $(f, g) \rightarrow \mathcal{C}(A, B)$ в $\mathcal{E}/X \times Y$ соответствуют глобальным элементам из $(f, g)^*\mathcal{C}(A, B)$ в $\mathcal{E}/Z$. Но поскольку $\theta_{(f, g)}$ является $(\mathcal{E}/Z)$ -полным вложением, имеем изоморфизм

$$(f, g)^*(\mathcal{C}_{X \times Y}(\theta_{\pi_1}(A), \theta_{\pi_2}(B))) \cong \mathcal{C}_Z(\theta_f(A), \theta_g(B)),$$

т. е. требуемую биекцию.

Наоборот, предположим, что это условие выполнено; пусть X — объект из $\mathcal{E}$, а A, B — объекты из $\mathcal{C}_X$. Определим $\mathcal{C}_X(A, B) = \Delta^*(\mathcal{C}(A, B))$, где $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ — диагональное отображение. Теперь вложим $\mathcal{C}_X$ в $(\mathcal{E}/X)$ -катеорию, используя метод общих элементов. Например, чтобы определить умножение $\mathcal{C}_X(A, B) \times \mathcal{C}_X(B, C) \rightarrow \mathcal{C}_X(A, C)$, запишем $(Z \xrightarrow{f} X)$ вместо $\mathcal{C}_X(A, B) \times \mathcal{C}_X(B, C)$, а затем произведем композицию морфизмов $\theta_f(A) \rightarrow \theta_f(B) \rightarrow \theta_f(C)$ в $\mathcal{C}_Z$. Пусть теперь $Y \xrightarrow{g} X$ — любой морфизм с областью значений X ; тогда для любого $(T \xrightarrow{h} Y)$ имеем биекцию между h -элементами из $\mathcal{C}_Y(\theta_g(A), \theta_g(B))$ и gh -элементами из $\mathcal{C}_X(A, B)$, так как и те и другие соответствуют морфизмам $\theta_{gh}(A) \rightarrow \theta_{gh}(B)$ в $\mathcal{C}_T$. Поэтому $\mathcal{C}_Y(\theta_g(A), \theta_g(B)) \cong g^*(\mathcal{C}_X(A, B))$ в $\mathcal{E}/Y$, т. е. θ_g является $(\mathcal{E}/Y)$ -полным вложением. $\square$

A.3 Примеры. (i) $\mathcal{E}$ сама становится локально внутренней категорией, если положить $\mathcal{C}_X = \mathcal{E}/X$ и $\theta_f = f^*$. То, что θ_f является $(\mathcal{E}/X)$ -полным вложением, просто иным способом выражает свойство функторов замены базы сохранять экспоненциалы.

(ii) В более общем случае пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм. Тогда для любого объекта X из $\mathcal{E}$ имеем геометрический морфизм $\mathcal{F}/p^*X \xrightarrow{p/X} \mathcal{E}/X$, обратный образ которого просто представляет собой морфизм p^* , применяемый к объектам над X ,

а прямой образ является композицией

$$\mathcal{F}/p^*X \xrightarrow{p^*} \mathcal{E}/p_*p^*X \xrightarrow{\alpha_x^*} \mathcal{E}/X,$$

где α — единица сопряжения $(p^* \dashv p_*)$. Таким образом, положив $\mathcal{F}_X = (p/X)_*(\mathcal{F}/p^*X)$ и $\theta_f = (p/X)_*((p^*f)^*)$, мы можем превратить $\mathcal{F}$ в локально внутреннюю категорию над $\mathcal{E}$.

То, что θ_f является вполне определенным, зависит от выполнения условия Бека для расслоенных произведений в категории $\mathcal{E}$ (пример 4.7), т. е. от того, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}/p^*Y & \xrightarrow{(p^*f)^*} & \mathcal{F}/p^*X \\ \downarrow (p/Y)_* & & \downarrow (p/X)_* \\ \mathcal{E}/Y & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{E}/X \end{array}$$

коммутативен с точностью до изоморфизма.

А если $\mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{F}$ — произвольный геометрический морфизм над $\mathcal{E}$, то нетрудно проверить, что q_* и q^* индуцируют локально внутренние функторы над $\mathcal{E}$; следовательно, у нас имеются функторы $(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\text{co}} \rightarrow \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$ и $(\mathcal{E}/\mathcal{F})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$. (Показатель «со» обозначает категорию «второго порядка двойственности» по отношению к некоторой 2-категории, т. е. 2-категорию, полученную обращением 2-стрелок.)

(iii) В еще более общем случае пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{E}$ — геометрический морфизм, а $\mathcal{E}$ — локально внутренняя категория над $\mathcal{F}$. Тогда, как в случае (ii), нетрудно проверить, что сопоставление

$$X \mapsto (p/X)_*(\mathcal{E}_{p^*X})$$

задает локально внутреннюю категорию $p_*(\mathcal{E})$ над $\mathcal{E}$. Поэтому p_* становится функтором $\mathcal{Cat}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$, а сопоставление

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$$

само функторно на $\mathcal{E}^{\text{co}}$, так как если у нас имеется естественное преобразование $\eta: p \rightarrow q$ между геометрическими морфизмами $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, то очевидное естественное преобразование $\Sigma_{\eta_X} \cdot (p/X)^* \rightarrow (q/X)^*$ дает посредством транспозиции преобразование

$$(q/X)_* \xrightarrow{\bar{\eta}} (p/X)_* \cdot \eta_X^*.$$

Следовательно, у нас имеется $\mathcal{E}/X$ -функтор

$$\begin{aligned} (q_*(\mathcal{E}))_X &= (q/X)_*(\mathcal{E}_{q^*X}) \xrightarrow{\bar{\eta}} (p/X)_*(\eta_X^*(\mathcal{E}_{q^*X})) \xrightarrow{(p/X)_*(\theta_{\eta_X})} \\ &\xrightarrow{(p/X)_*(\theta_{\eta_X})} (p/X)_*(\mathcal{E}_{p^*X}) = (p_*(\mathcal{E}))_X. \end{aligned}$$

(iv) Пусть $\mathcal{E}$ — локально внутренняя категория над $\mathcal{E}$, а $\mathbb{T}$ — локально внутренняя монада на $\mathcal{E}$ (т. е. слабый функтор $1 \rightarrow \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$, посылающий единственный объект категории 1 в $\mathcal{E}$, сравните с 4.23). Тогда для каждого объекта X из $\mathcal{E}$ $\mathbb{T}_X$ представляет собой строгую монаду на $\mathcal{E}_X$, и поэтому категория $\mathbb{T}_X$ -алгебр имеет структуру $(\mathcal{E}/X)$ -категории. А функторы замены базы в $\mathcal{E}$ сохраняют уравнители, используемые для того, чтобы определить объекты морфизмов в $(\mathcal{E}_X)^{\mathbb{T}_X}$; поэтому соответствие

$$X \mapsto (\mathcal{E}_X)^{\mathbb{T}_X}$$

задает локально внутреннюю категорию $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$ - $\mathbb{T}$ -алгебр в $\mathcal{E}$. В частности, любая внутренняя финитарная алгебраическая теория в $\mathcal{E}$ (6.45) задает локально внутреннюю монаду на самой $\mathcal{E}$, так как функтор свободы $\mathbb{T}$ -модели коммутативен с функторами обратного образа и, следовательно, с функторами замены базы. Поэтому если $\mathbb{T}$ — такая теория, то соответствие

$$X \mapsto \mathbb{T}(\mathcal{E}/X)$$

задает некоторую локальную внутреннюю категорию над $\mathcal{E}$. $\square$

Эти примеры показывают, что понятие локально внутренней категории охватывает большую часть примеров «больших» категорий, которые мы хотели бы изучать. Далее исследуем его связь с понятием «малой», т. е. внутренней категории.

A.4 Предложение. Пусть $\text{cat}(\mathcal{E})$ обозначает 2-категорию внутренних категорий в $\mathcal{E}$. (Структура 2-категории была определена в упражнении 1 к главе 2.) Тогда имеется полное вложение 2-категории $L: \text{cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{Cat}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ является внутренней категорией в $\mathcal{E}$. Зададим локально внутреннюю категорию LC следующим образом: объектами из LC_X являются X -элементы из $\mathcal{C}_0$ в $\mathcal{E}$, а $LC_X(c_1, c_2)$ представляет собой декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} LC_X(c_1, c_2) & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 \\ \downarrow & & \downarrow (d_0, d_1) \\ X & \xrightarrow{(c_1, c_2)} & \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \end{array}$$

Если $X \xrightarrow{f} Y$ — морфизм из $\mathcal{E}$, а c является Y -элементом из $\mathcal{C}_0$, то определим $\theta_f(c)$ как композицию cf ; поскольку композиция декартовых квадратов является декартовым квадратом, θ_f является $(\mathcal{E}/X)$ -полным вложением. Определение L на 1-стрелках и 2-стрелках из $\text{cat}(\mathcal{E})$ тривиально.

Теперь предположим, что дан локально внутренний функтор $T: LC \rightarrow LD$. Пусть $f_0: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$ обозначает объект $T_{\mathcal{C}_0}(1_{\mathcal{C}_0})$ из

LD_{C_0} ; тогда, поскольку функтор $T_{C_0 \times C_0}$ является сильным, он задает морфизм

$$(C_1 \rightarrow C_0 \times C_0) \rightarrow (f_0 \times f_0)^*(D_1 \rightarrow D_0 \times D_0)$$

в $\mathcal{E}/C_0 \times C_0$, который в свою очередь задает морфизм $f_1: C_1 \rightarrow D_1$, так, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f_1} & D_1 \\ \downarrow (d_0, d_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\ C_0 \times C_0 & \xrightarrow{f_0 \times f_0} & D_0 \times D_0 \end{array}$$

Теперь нетрудно проверить, что (f_0, f_1) является внутренним функтором $C \rightarrow D$ и что интернализация $L(f)$ канонически изоморфна T . Следовательно, L индуцирует эквивалентность категорий $\text{cat}(\mathcal{E})(C, D) \simeq \text{Cat}(\mathcal{E})(LC, LD)$. $\square$

А.5 Замечание. Как показывает пример, обнаруженный Паре, эквивалентность $\text{cat}(\mathcal{E})(C, D) \simeq \text{Cat}(\mathcal{E})(LC, LD)$, установленная нами только что, вообще говоря, не является изоморфизмом категорий. Вот этот пример.

Пусть X и Y — объекты топоса $\mathcal{E}$ такие, что имеются мономорфизмы $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, но нет изоморфизма $X \simeq Y$ (ср. упражнение 8 к главе 5); и пусть C и D — недискретные категории (тривиальные связные группоиды), объектами которых являются X и Y . Тогда можно легко увидеть, что данные мономорфизмы индуцируют изоморфизм $LC \simeq LD$ в $\text{Cat}(\mathcal{E})$ каждый раз, когда C и D просто эквивалентны в $\text{cat}(\mathcal{E})$.

Таким образом, мы все же теряем определенную «1-категорную» информацию, переходя от внутренних к локально внутренним категориям. Один из способов, позволяющий устранить эту трудность, состоит в том, чтобы работать со строгими функторами, а не с псевдофункторами, т. е. с расщепимыми расслоениями вместо открыто-замкнутых. Однако «большие» категории, рассмотренные в А.3, обычно не имеют такой «строгой» структуры, хотя их можно «сделать строгими», например, с помощью метода, предложенного Фрейдом для канонизации конечных пределов [37]. Поэтому кажется, что правильное отношение к проблеме состоит в том, чтобы работать в категории $\text{cat}(\mathcal{E})$, когда рассматриваются 1-категорные вопросы, т. е. вопросы, зависящие от изоморфизма, а не от эквивалентности, и в $\text{Cat}(\mathcal{E})$, когда рассматриваются 2-категорные вопросы. $\square$

Важное достоинство локально внутренних категорий состоит в том, что они позволяют нам обобщить построение «внутренне полной подкатегории», приведенное в примере 2.38, на любой из рассмотренных выше примеров. В частности, пусть $\mathcal{E}$ — локально внутренняя категория над $\mathcal{E}$, а A — объект из $\mathcal{E}_X$. Тогда определим внутреннюю категорию $\text{Full}_{\mathcal{E}}(A)$ в $\mathcal{E}$ так, чтобы у нее

был объект объектов X и объект морфизмов, заданный объектом $\mathcal{E}_{X \times X}(\theta_{\pi_1}(A), \theta_{\pi_2}(A))$ из $\mathcal{E}/X \times X$. Умножение из $\text{Full}_{\mathcal{E}}(A)$ задается отображением

$$\mathcal{E}_{X \times X \times X}(\theta_{\pi_1}(A), \theta_{\pi_2}(A)) \times \mathcal{E}_{X \times X \times X}(\theta_{\pi_2}(A), \theta_{\pi_3}(A)) \xrightarrow{m} \mathcal{E}_{X \times X \times X}(\theta_{\pi_1}(A), \theta_{\pi_3}(A))$$

в $\mathcal{E}/X \times X \times X$, и аналогично задается включение тождественных стрелок. «Функтор включения» из примера 2.38 заменяется локально внутренним полным вложением $L(\text{Full}_{\mathcal{E}}(A)) \rightarrow \mathcal{E}$, которое определено на объектах посредством соответствия $(Y \xrightarrow{f} X) \mapsto \theta_f(A)$.

А.6 Предложение. Пусть A — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, а $\mathcal{E}$ — локально внутренняя категория. Тогда любой локально внутренний функтор $LA \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ может быть разложен на $LA \xrightarrow{Lg} LB \xrightarrow{h} \mathcal{E}$, где g — внутренний функтор, тождественный на объектах, а h — полное вложение, причем это разложение единственно с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Определим $B = \text{Full}_{\mathcal{E}}(f_{A_0}(1_{A_0}))$. Тогда h является просто функтором включения, определенным выше, а g — внутренним функтором, заданным на морфизмах следующим образом:

$$(A_1 \rightarrow A_0 \times A_0) \cong LA_{A_0 \times A_0}(\pi_1, \pi_2) \xrightarrow{f} \xrightarrow{f} \mathcal{E}_{A_0 \times A_0}(f(\pi_1), f(\pi_2)) \cong (B_1 \rightarrow B_0 \times B_0).$$

Теперь легко построить естественный изоморфизм $h: Lg \cong f$; более того, если f является полным вложением, то g представляет собой изоморфизм внутренних категорий, что доказывает свойство единственности разложения. $\square$

Предложения А.4 и А.6 в совокупности позволяют нам свободно переходить от внутренних категорий к локально внутренним и обратно. Другой полезный результат в этой области позволяет возводить локально внутреннюю категорию в степень, являющуюся внутренней категорией.

А.7 Предложение. Пусть A — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, а $\mathcal{E}$ — локально внутренняя категория. Тогда существует локально внутренняя категория $\mathcal{E}^A$, которая обладает универсальностью экспоненты $\mathcal{E}^{LA}$ в $\text{Cat}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Зададим $\mathcal{E}^A$ следующим образом: объект из $(\mathcal{E}^A)_X$ является парой (F, α) , где F — объект из $\mathcal{E}_{A_0 \times X}$, а α — морфизм

$$\theta_{d_0 \times 1_X}(F) \rightarrow \theta_{d_1 \times 1_X}(F)$$

в $\mathcal{C}_{A_1 \times X}$, так что $\theta_{i \times 1}(\alpha)$ представляет собой тождественный морфизм на F , а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \theta_{\pi_1 \times 1}(F) & \xrightarrow{\theta_{\pi_1 \times 1}(x)} & \theta_{\pi_2 \times 1}(F) \\ & \searrow \theta_{\pi_1 \times 1}(z) & \downarrow \theta_{\pi_2 \times 1}(z) \\ & & \theta_{\pi_3 \times 1}(F) \end{array}$$

коммутативна в $\mathcal{C}_{A_2 \times X}$. Чтобы задать объекты морфизмов из $(\mathcal{C}^A)_X$, для удобства обозначения примем $X=1$; пусть поэтому (F, α) и (F, β) являются двумя объектами из $(\mathcal{C}^A)_1$. Тогда $(\mathcal{C}^A)_1(F, \alpha), (G, \beta)$ представляет собой уравнитель в $\mathcal{C}$ пары морфизмов

$$\Pi_{A_0}(\mathcal{C}_{A_0}(F, G)) \rightrightarrows \Pi_{A_1}(\mathcal{C}_{A_1}(\theta_{d_0}(F), \theta_{d_1}(G))),$$

из которых первый является транспозицией для

$$\begin{aligned} A_1^* \Pi_{A_0}(\mathcal{C}_{A_0}(F, G)) &\cong d_1^* A_0^* \Pi_{A_0}(\mathcal{C}_{A_0}(F, G)) \xrightarrow{d_1^*(e)} d_1^*(\mathcal{C}_{A_0}(F, G)) \cong \\ &\cong \mathcal{C}_{A_1}(\theta_{d_1}(F), \theta_{d_1}(G)) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{C}_{A_1}(\theta_{d_0}(F), \theta_{d_1}(G)) \end{aligned}$$

(где e — коединица сопряжения $(A_0^* \dashv \Pi_{A_0})$, а $\bar{\alpha}$ индуцируется композицией с α), второй же морфизм аналогично индуцируется посредством композиции с β .

Проверка того, что $\mathcal{C}^A$ образует локально внутреннюю категорию, длинна, но не является сложной.

Теперь предположим, что дана другая локально внутренняя категория $\mathcal{D}$. Тогда с любым локально внутренним функтором $\mathcal{D} \times LA \xrightarrow{f} \mathcal{C}$ можно сопоставить $\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{C}^A$, который переводит объект V из $\mathcal{D}_X$ в объект $f_{A_0 \times X}(\theta_{\pi_2}(V), \pi_1)$ из $\mathcal{C}_{A_0 \times X}$, оснащенный структурным отображением, которое получено применением $f_{A_1 \times X}$ к общему морфизму $d_0 \pi_1 \rightarrow d_1 \pi_1$ в $LA_{A_1 \times X}$. Наоборот, если дан $\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{g}} \mathcal{C}^A$, то мы можем задать $\mathcal{D} \times LA \xrightarrow{\bar{g}} \mathcal{C}$ с помощью

$$\bar{g}_X(V, X \xrightarrow{\gamma} A_0) = \theta_{(\gamma, 1_X)}(g_X(V)).$$

Доказательство того, что $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — действительно локально внутренние функторы и что соответствия $f \mapsto \bar{f}$ и $g \mapsto \bar{g}$ индуцируют эквивалентность категорий $\text{Cat}(\mathcal{C})(\mathcal{D} \times LA, \mathcal{C}) \simeq \text{Cat}(\mathcal{C})(\mathcal{D}, \mathcal{C}^A)$, также несложно. $\square$

Заинтересовавшийся читатель может проверить, что функтор $L: \text{cat}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{C})$ сохраняет экспоненциалы (декартово замк-

нутая структура на $\text{cat}(\mathcal{C})$ была определена в упражнении 4 к главе 2) и что если в А.7 взять $\mathcal{C} = \mathcal{C}$, то локально внутренняя категория $\mathcal{C}^A$, построенная нами, эквивалентна категории, определенной посредством $\mathcal{C}$ -топоса (как в примере А.3 (ii)). Таким образом, использование локально внутренних категорий позволяет рассматривать внутренние диаграммы во внутренней категории A как «настоящие» функторы из A в $\mathcal{C}$.

Далее мы изучим понятия полноты и кополноты для локально внутренних категорий.

А.8 Определение. Пусть $\mathcal{C}$ является локально внутренней категорией над $\mathcal{E}$. Будем говорить, что $\mathcal{C}$ имеет *кручение* над $\mathcal{E}$, если для каждого $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{C}$ функтор $\theta_f: |\mathcal{C}_X| \rightarrow |\mathcal{C}_X|$ имеет (не обогащенный) сопряженный слева функтор σ_f . (Отметим, что σ_f автоматически является псевдофункторным по f .) Если, кроме того, для каждого декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

в $\mathcal{C}$ каноническое естественное преобразование $\sigma_g \theta_f \rightarrow \theta_h \sigma_k$ является изоморфизмом (т. е. σ удовлетворяет «условию Бека»), то будем говорить, что $\mathcal{C}$ имеет *сильное кручение* над $\mathcal{E}$. Двойственно, будем говорить, что $\mathcal{C}$ имеет (сильное) *кокручение* над $\mathcal{E}$, если у каждого θ_f имеется сопряженный справа функтор τ_f (и выполняется условие Бека). $\square$

Отметим, что сама $\mathcal{C}$ имеет сильное кручение и кокручение над $\mathcal{E}$, так же как и любой топос, определенный над $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{C}$ является геометрическим морфизмом, то функтор $p_*: \text{Cat}(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{C})$ сохраняет свойство иметь (сильное) кручение; если $\mathcal{C}$ имеет (сильное) кокручение над $\mathcal{E}$ и $\mathbb{T}$ — локально внутренняя монада на $\mathcal{C}$, то $\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$ имеет (сильное) кокручение. Читатель может проверить, что если P является внутренним частично упорядоченным множеством в $\mathcal{C}$, то P является внутреннее полным (5.34) тогда и только тогда, когда LP имеет сильное кручение и кокручение над $\mathcal{E}$.

А.9 Замечание. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{F}$ — топосы, а $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$ — функтор. Тогда можно без труда увидеть, что соответствие

$$X \mapsto \mathcal{F}/TX$$

преобразует $\mathcal{F}$ в локальную внутреннюю категорию над $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда T имеет сопряженный справа функтор; так как $\mathcal{F}/T(1)$ обогащена над $\mathcal{C}$, то мы можем задать сопряженный

справа функтор соответствием

$$Y \mapsto \mathcal{F}_1(1_{T(1)}, T(1)^*Y),$$

а доказательство в обратном направлении можно почерпнуть из примера А.3 (ii). Если это условие выполнено, то $\mathcal{F}$, конечно, имеет кручение над $\mathcal{E}$, но Бенабу указал, что она имеет *сильное* кручение тогда и только тогда, когда T сохраняет расслоенные произведения, поскольку условие Бека $\Sigma_g \cdot f^* \cong k^* \cdot \Sigma_h$ выполняется для коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда этот квадрат декартов. (Рекомендуется рассмотреть воздействие каждой композиции на объект 1_X из $\mathcal{F}/X$.) Это несомненно является частичным объяснением того, почему понятие геометрического морфизма, которое на первый взгляд может показаться несколько искусственным, служит «правильным» понятием морфизма топосов. $\square$

А.10 Лемма. *Предположим, что $\mathcal{C}$ имеет сильное кручение над $\mathcal{E}$. Тогда для каждого $X \xrightarrow{1} Y$ в $\mathcal{E}$ функтор σ_i на самом деле является $(\mathcal{E}/Y)$ -функтором $\Pi_i(\mathcal{C}_X) \rightarrow \mathcal{C}_Y$, и сопряжение $(\sigma_i \dashv \theta_i)$ обогащено над $\mathcal{E}/Y$ в том смысле, что имеется естественный изоморфизм*

$$\Pi_i(\mathcal{C}_X(A, \theta_i(B))) \cong \mathcal{C}_Y(\sigma_i(A), B)$$

для объектов A и B из $\mathcal{C}_X$ и $\mathcal{C}_Y$ соответственно.

Доказательство. Сначала докажем второе утверждение. Пусть α и β обозначают единицу и коединицу сопряжения $(\sigma_i \dashv \theta_i)$. Тогда композиция

$$f^*(\mathcal{C}_Y(\sigma_i(A), B)) \cong \mathcal{C}_X(\theta_i \sigma_i(A), \theta_i(B)) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{C}_X(A, \theta_i(B))$$

в результате транспозиции дает естественное отображение

$$\mathcal{C}_Y(\sigma_i(A), B) \rightarrow \Pi_i(\mathcal{C}_X(A, \theta_i(B))).$$

Чтобы задать отображение, обратное этому, обозначим объект $\Pi_i(\mathcal{C}_X(A, \theta_i(B)))$ из $\mathcal{E}/Y$ через $(V \xrightarrow{g} Y)$ и построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{k} & V \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Тогда коединичное отображение

$$h = f^* \Pi_i(\mathcal{C}_X(A, \theta_i(B))) \rightarrow \mathcal{C}_X(A, \theta_i(B))$$

индуцирует морфизм

$$\theta_h(A) \rightarrow \theta_h \theta_i(B) \cong \theta_h \theta_g(B)$$

в $\mathcal{C}_P$. Выполнив транспозицию и применив условие Бека, получим морфизм

$$\theta_g \sigma_i(A) \cong \sigma_h \theta_h(A) \rightarrow \theta_g(B)$$

в $\mathcal{C}_V$, который в свою очередь индуцирует морфизм

$$g \rightarrow \mathcal{C}_Y(\sigma_i(A), B)$$

в $\mathcal{E}/Y$. Доказательство того, что это отображение является обратным по отношению к построенному, проводится непосредственной проверкой.

Чтобы показать, что σ_i является $(\mathcal{E}/Y)$ -функтором, подставим $B = \sigma_i(C)$ в вышеприведенные выражения; тогда получим морфизм

$$\Pi_i(\mathcal{C}_X(A, C)) \xrightarrow{\Pi_i(\bar{\alpha})} \Pi_i \mathcal{C}_X(A, \theta_i \sigma_i(C)) \cong \mathcal{C}_Y(\sigma_i(A), \sigma_i(C)).$$

Нетрудно проверить, что этот морфизм обладает требуемыми свойствами. $\square$

Пусть теперь $\mathbf{A}$ — внутренняя категория в $\mathcal{E}$, а $\mathcal{C}$ — локально внутренняя категория. Тогда у нас имеется локально внутренний функтор $\mathbf{A}^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{A}}$, который переводит объект V категории $\mathcal{C}_X$ в объект $\theta_{\pi_2}(V)$ из $\mathcal{C}_{A_0 \times X}$ и оснащен тождественным структурным отображением. (Очевидно, что это аналогично функтору $\mathbf{A}^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{A}}$, определенному в 2.25 (ii).)

А.11 Теорема (Селерет). *Предположим, что $\mathcal{C}$ имеет сильное кручение над $\mathcal{E}$ и локально внутренние коуравнители рефлексивных пар (т. е. у каждой $\mathcal{C}_X$ имеются $\mathcal{E}/X$ -обогащенные коуравнители, а функторы θ_i их сохраняют). Тогда для каждой внутренней категории $\mathbf{A}$ в $\mathcal{E}$ функтор $\mathbf{A}^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{A}}$ имеет локально внутренний сопряженный слева $\lim_{\mathbf{A}}$. (Будем говорить, что $\mathcal{C}$ является $\mathcal{E}$ -кополной.)*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathbf{A}$ — некоторая дискретная категория $(A \xrightarrow{1} A)$; в этом случае естественно записывать $\mathcal{C}/A$ вместо $\mathcal{C}^{\mathbf{A}}$. Тогда $(\mathcal{C}/A)_X$ представляет собой просто $\Pi_{\pi_2}(\mathcal{C}_{A \times X})$, а $(\mathbf{A}^*)_X$ является транспозицией для $\theta_{\pi_2}: \pi_2^*(\mathcal{C}_X) \rightarrow \mathcal{C}_{A \times X}$; поэтому из А.10 сразу следует, что σ_{π_2} является требуемым сопряженным слева функтором. (Чтобы установить, что он является локально внутренним, используется

условие Бека для декартовых квадратов вида

$$\begin{array}{ccc} A \times X & \xrightarrow{1 \times f} & A \times Y \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть (F, α) является объектом из $(\mathcal{E}^A)_X$; поскольку $\mathcal{E}$ имеет кручение над $\mathcal{E}$, структурное отображение α можно рассматривать как морфизм

$$\sigma_{d_1 \times 1} \theta_{d_0 \times 1}(F) \rightarrow F$$

в $\mathcal{E}_{A_0 \times X}$, поэтому, используя доказательство предложения 2.21, выведем, что $(\mathcal{E}^A)$ является монадической над $(\mathcal{E}/A_0)_X$. Поскольку $\mathcal{E}$ имеет сильное кручение, нетрудно проверить, что $\mathcal{E}^A$ на самом деле является внутренне монадической над $\mathcal{E}/A_0$. Более того, у $\mathcal{E}^A$ имеются локально внутренние рефлексивные коуравнители, так как они имеются у $\mathcal{E}/A_0$ и функторная часть соответствующей монады сохраняет их. Построение функтора $\lim_{\rightarrow} A$ теперь может быть выполнено простым применением теоремы 0.15 о подъеме сопряжения, как в следствии 2.35. $\square$

Рассмотрим более общую ситуацию. Если $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположению теоремы A.11, то для морфизмов $A \xrightarrow{f} B$ из $\text{cat}(\mathcal{E})$ можно построить функторы $\lim_f: \mathcal{E}^A \rightarrow \mathcal{E}^B$ левого расши-

рения Кана, а если $\mathcal{E}$ имеет сильное кручение и локально внутренние (кореклексивные) уравниатели, то аналогичным способом можно построить правые расширения Кана.

Этой теоремой мы завершаем наш обзор локально внутренних категорий. Мы могли бы упомянуть немало других интересных результатов, в частности, доказательство варианта теоремы о сопряженных функторах применительно к локально внутренним категориям, которое было дано Паре и Шумахером [97]. Но все равно остались бы обширные, по существу, не исследованные области, относящиеся к данному предмету. Любая попытка их исследовать потребовала бы другой книги, по меньшей мере такой же толстой, как эта! Однако мы надеемся, что этот краткий обзор убедил читателя, что локально внутренние категории достойны изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

З а м е ч а н и е. Запись MR p, p, q в конце ссылки ($p \leq 19$) означает, что данная статья реферирована на странице q тома p журнала «Mathematical Reviews». Аналогично, MR p/q ($p \geq 20$) обозначает реферат номер q тома p .

A. СТАНДАРТНЫЙ МАТЕРИАЛ

- [AC] Freyd P. Abelian Categories.— Harper and Row, 1964. MR 29/3517.
- [AG] Macdonald I. G. Algebraic Geometry: Introduction to Schemes.— W. A. Benjamin Inc., 1968. MR 39/205.
- [AT] Spanier E. H. Algebraic Topology.— McGraw-Hill Inc., 1966. MR 35/1007. [Русский перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1979.]
- [BA] Sikorski R. Boolean Algebras.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1964. MR 31/2178. [Русский перевод: Сикорский Р. Булевы алгебры.— М.: Мир, 1964.]
- [CF] Gabriel P., Zisman M. Calculus of Fractions and Homotopy Theory.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1967. MR 35/1019. [Русский перевод: Габриел Р., Зисман М. Категории частных и теория гомотопий.— М.: Мир, 1971.]
- [CW] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. MR 50/7275.
- [GT] Willard S. General Topology.— Addison-Wesley Publishing Co., 1970. MR 41/9173.
- [HA] Hilton P., Stambach U. A Course in Homological Algebra.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. MR 49/10751.
- [LT] Birkhoff G. Lattice Theory.— Providence (Rhode Island), 1967. MR 37/2638. [Русский перевод: Биркгоф Г. Теория решеток.— М.: Наука, 1983.]
- [MM] Rasiowa H., Sikorski R. The Mathematics of Metamathematics.— Warszawa, PWN, 1963. MR 29/1149. [Русский перевод: Расова Е., Сикорский Р. Математика метаматематики.— М.: Наука, 1972.]
- [ST] Tennison B. R. Sheaf Theory.— Cambridge: Cambridge University Press, 1975. MR 53/8192.
- [TF] Godement R. Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.— Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 43. Paris: Hermann, 1958. MR 21/1583. [Русский перевод: Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.]

B. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ТОПОСОВ

- [AH] Artin M. Grothendieck Topologies.— Lecture Notes, Harvard University, 1962.
- [BC] Benabou J., Celeyrette J. Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1971.
- [FK] Freyd P. Aspects of Topoi.— Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 7, p. 1—76, 467—480. MR 53/576.
- [GB] Giraud J. Analysis Situs.— Séminaire Bourbaki, 1963, exposé 256. MR 33/1343.

- [GV] Grothendieck A., Verdier J. L. *Théorie des Topos*. (SGA 4, exposés I—VI).— Second edition.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972. MR 50/7130—1.
- [KS] Kelly G. M., Street R. *Elementary Topoi*.— Abstracts of Sydney Category Seminar, 1972.
- [KW] Kock A., Wraith G. C. *Elementary Toposes*.— Aarhus Universitet Lecture Notes Series, 1971, 30. MR 49/7324.
- [LB] Lawrence F. W. *Continuously Variable Sets: Algebraic Geometry = Geometric Logic*.— In: Proc. ASL Logic Colloquium, Bristol, 1973/Ed. H. E. Rose, J. C. Shepherdson. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 135—156. MR 52/13384.
- [LC] Lawvere F. W. *Variable Sets, Etendu and Variable Structures in Topoi* (notes by S. E. Landsburg).— Lecture Notes, University of Chicago, 1976.
- [LE] Lawvere F. W. *Variable quantities and variable structures in topoi*.— In: *Algebra, Topology and Category Theory: a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg*/Ed. A. Heller, M. Tierney. Academic Press, 1976, p. 101—131.
- [LH] Lawvere F. W. *Introduction*.— In: *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972, p. 1—12. MR 51/12973.
- [LM] Lawvere F. W. *Introduction*.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 3—14. MR 51/12982.
- [LN] Lawvere F. W. *Quantifiers and Sheaves*.— In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, Nice 1970, p. 329—334.
- [MB] Mac Lane S. *Sets, Topoi and Internal Logic in Categories*.— In: Proc. ASL Logic Colloquium, Bristol 1973/Ed. H. E. Rose, J. C. Shepherdson. Amsterdam: North-Holland, 1975, p. 119—134. MR 52/5419.
- [MR] Makikai M., Reyes G. E. *Coherent Logic*.
- [RM] Reyes G. E. *From Sheaves to Logic*.— In: *Studies in Algebraic Logic*/Ed. A. Daigneault, MAA Studies in Math, v. 9, Mathematical Association of America, 1974, p. 143—204. MR 50/13182.
- [RW] Rowe K. A. *Topoidal Set Theory*.— Lecture Notes, University of Waterloo, 1974.
- [SR] Schlomiuk D. *Topos di Grothendieck e topos di Lawvere e Tierney*.— Rend. Mat. (VI), 1974, 7, p. 513—553. MR 51/3252.
- [TV] Tierney M. *Axiomatic Sheaf Theory: some constructions and applications*.— In: Proc. CIME conference on Categories and Commutative Algebra, Varenna, 1971. Edizioni Cremonese, 1973, p. 249—326. MR 50/7277.
- [WB] Wraith G. C. *Lectures on Elementary Topoi*.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 114—206. MR 52/13989.
- [WI] Wraith G. C. *Logic from Topology: a survey of Topoi*.— Bull. Inst. Math. and its Applications, 1976, 12, p. 115—119.

С. ДРУГИЕ СТАТЬИ ПО ТЕОРИИ ТОПОСОВ
И БЛИЗКИМ ПРЕДМЕТАМ

- [1] Anghel C., Lecouturier P. *Généralisation d'un résultat sur le triple de la réunion*.— Ann. Fac. Sci. de Kinshasa (Zaire), Section Math.— Phys., 1975, 1, p. 65—94. MR 53/582.
- [2] Barr M. *Exact categories*.— In: *Exact categories and categories of sheaves*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971, p. 1—120.
- [3] Barr M. *The point of the empty set*.— Cahiers top. et geom. diff., 1979, 13, p. 357—638. MR 48/2216.
- [4] Barr M. *Toposes without points*.— J. Pure Appl. Algebra, 1974, 5, p. 265—280.
- [5] Barr M. *Atomic Sites*.— J. Pure Appl. Algebra.
- [6] Bénabou J. *Les distributeurs*.— Univ. Cath. Louvain, Inst. Math. Pure Appl., 1973, Rapport no. 33.

- [7] Bénabou J. *Problèmes dans les topos*.— Univ. Cath. Louvain, Inst. Math. Pures, Appl., 1973, Rapport no. 34.
- [8] Bénabou J. *Théories relatives à un corpus*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1975, 281, p. A831—834. MR 52/13990.
- [9] Bénabou J. *Fibrations petites et localement petites*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1981, 275, p. A897—900.
- [10] Blass A. *Exact functors and measurable cardinals*.— Pacific. J. Math., 1976, 63, p. 335—346.
- [11] Boileau A. *Types vs. topos*.— Université de Montreal, 1975, preprint.
- [12] Borceux F. *When is Ω a cogenerator in a topos?*— Cahiers top. geom. diff., 1975, 16, p. 3—15. MR 52/3277.
- [13] Bourn D. *Ditopos*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1974, 279, p. A731—732, A911—913. MR 51/639.
- [14] Brook T. G. *Order and recursion in topoi*.— A. N. U. Notes Pure Math.
- [15] Bunge M. C. *Topos theory and Souslin's hypothesis*.— J. Pure Appl. Algebra, 1974, 4, p. 159—187. MR 51/2908.
- [16] Bunge M. C. *Topoi of internal presheaves*.— Universidad Nacional Autónoma de Mexico, Comunicaciones técnicas, serie naranja, 1976, no 132.
- [17] Celeyrette J. *Fibrations et extensions de Kan*.— Thèse de 3^e cycle. Université Paris-Nord, 1974.
- [18] Cole J. C. *Categories of sets and models of set theory*.— In: Proc. Bertrand Russell Memorial Logic Conference, Uldum, 1971/Ed. J. Bell, A. Slomson. Leeds, 1973, p. 351—399. MR 50/9584.
- [19] Cole J. C. *The bicategory of topoi, and spectra*. J. Pure Appl. Algebra.
- [20] Conduché F. *Au sujet de l'existence d'adjoints à droite aux foncteurs «image réciproque» dans la catégorie des catégories*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1972, 275, p. A891—894. MR 46/9136.
- [21] Coste M. F. *Construction d'un modèle booléen de la théorie des ensembles à partir d'un topos booléen*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1974, 278, p. A1073—1076. MR 49/5114.
- [22] Coste M. F., Coste M. *Théories cohérentes et topos cohérents*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1975.
- [23] Coste M. F., Coste M., Parent J. *Algèbres de Heyting dans les topos*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1974.
- [24] Coste M. *Langage interne d'un topos*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1972.
- [25] Coste M. *Logique du premier ordre dans les topos élémentaires*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1973.
- [26] Coste M. *Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1974.
- [27] Coste M. *Une approche logique des théories définissables par limites projectives finies*.— Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord, 1976.
- [28] Day B. J. *An adjoint-functor theorem over topoi*.— Bull. Austral. Math. Soc., 1976, 15, p. 381—394.
- [29] Delale J. P. *Ensemble sous-jacent dans un topos*.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1973, 277, p. A153—156. MR 51/8197.
- [30] Diaconescu R. *Change of base for toposes with generators*.— J. Pure Appl. Algebra, 1975, 6, p. 191—218. MR 52/532.
- [31] Diaconescu R. *Axiom of choice and complementation*.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 51, p. 176—178. MR 51/10093.
- [32] Duskin J. W. *Simplicial methods and the interpretation of «triple» cohomology*.— Mem. Amer. Math. Soc., 1975, 163. MR 52/14006.
- [33] Engenes H. *Subobject classifiers and classes of subfunctors*.— Math. Scand., 1974, 34, p. 145—152. MR 51/8200.
- [34] Engenes H. *Uniform spaces in topoi*.— Oslo Universitet Math. Preprint Series, 1976, no. 5.

- [35] Fourman M. P. The logic of topoi.— In: Handbook of Mathematical Logic/Ed. J. Barwise. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 1053—1090. [Русский перевод: Фурман М. Логика топосов.— В кн.: Справочная книга по математической логике/Под ред. Дж. Барвайса, ч. IV. М.: Наука, 1983, с. 241—277.]
- [36] Fourman M. P. Comparaison des réelles d'un topos; structures lisses sur un topos élémentaire.— *Cahiers top. géom. diff.*, 1976, 16, p. 233—239.
- [37] Freyd P. On canonizing category theory, or, On functorializing model theory.— Pamphlet, University of Pennsylvania, 1974.
- [38] Giraud J. Cohomologie non abélienne.— *Die Grundlehren der math. Wissenschaften*, 179. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. MR 49/8992.
- [39] Giraud J. Classifying topos.— In: *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*/Ed. F. W. Lawvere. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972, p. 43—56. MR 50/2300.
- [40] Grillet P. A. Directed colimits and sheaves in some nonabelian categories.— In: *Reports of the Midwest Category Seminar*, V/Ed. J. W. Gray. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971, p. 36—69. MR 44/6787.
- [41] Grillet P. A. Regular categories.— In: *Exact categories and categories of sheaves*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971, p. 121—222.
- [42] Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique.— *Tohoku Math. J.*, 1957, 9, p. 119—221. MR 21/1328.
- [43] Grothendieck A. Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique.— *Seminaire Bourbaki*, 1959—1962, exposés 190, 195, 212, 232, 236. MR 26/3566.
- [44] Grothendieck A. Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 4).— Second edition.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. MR 50/7429.
- [45] Hakim M. Topos annelés et schémas relatifs.— *Ergebnisse der Mathematik*, 64. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972. MR 51/500.
- [46] Heller A., Rowe K. A. On the category of sheaves.— *Amer. J. Math.*, 1962, 84, p. 205—216. MR 26/1887.
- [47] Higgs D. A category approach to boolean-valued set theory.— *Lecture Notes*, University of Waterloo, 1973.
- [48] Hiller H. L. Fibrations and Grothendieck topologies.— *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1976, 14, p. 111—128.
- [49] Hofmann K. H. Representations of algebras by continuous sections.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1972, 78, p. 291—373. MR 50/415.
- [50] Illusie L. Complexe cotangent et déformations.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971—1972.
- [51] Isbell J. R. Atomless parts of spaces.— *Math. Scand.*, 1972, 31, p. 5—32. MR 50/11184.
- [52] Johnstone P. T. The associated sheaf functor in an elementary topos.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1974, 4, p. 231—242. MR 50/10002.
- [53] Johnstone P. T. Internal categories and classification theorems.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 103—113. MR 53/581.
- [54] Johnstone P. T. Adjoint lifting theorems for categories of algebras.— *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1975, 7, p. 294—297. MR 52/10845.
- [55] Johnstone P. T. Rings, Fields and Spectra.— *J. Algebra*.
- [56] Johnstone P. T. Automorphisms of Ω .
- [57] Johnstone P. T. On a topological topos.
- [58] Johnstone P. T., Wraith G. C. Algebraic theories in toposes.
- [59] Keane O. Abstract Horn Theories.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 15—50. MR 52/2871.
- [60] Kennison J. F. Integral domain type representations in sheaves and other topoi.— *Math. Z.*, 1976, 151, p. 35—56.

- [61] Kock A. Linear algebra and projective geometry in the Zariski topos.— *Aarhus Universitet Preprint Series* 1974/75, no. 4.
- [62] Kock A. Linear algebra in a local ringed site.— *Commun. Algebra*, 1975, 3, p. 545—561. MR 52/5690.
- [63] Kock A. Universal projective geometry via topos theory.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1976, 9, p. 1—24.
- [64] Kock A. A simple axiomatics for differentiation.— *Math. Scand.*
- [65] Kock A., Lecouturier P., Mikkelsen C. J. Some topos-theoretic concepts of finiteness.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 209—238. MR 52/2882.
- [66] Kock A., Mikkelsen C. J. Non-standard extensions in the theory of toposes.— *Aarhus Universitet Preprint Series* 1971/72, no. 25.
- [67] Kock A., Mikkelsen J. C. Topos-theoretic factorization of non-standard extensions.— *Proc. Victoria Symposium on Nonstandard Analysis*/Ed. A. Hurd, P. Loeb. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, p. 122—143.
- [68] Kock A., Reyes G. E. Doctrines in categorical logic.— In: *Handbook of Mathematical Logic*/Ed. J. Barwise. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 283—313. [Русский перевод: Кок А., Рейес Г. Э. Доктрины в категорной логике.— В кн.: Справочная книга по математической логике/Под ред. Дж. Барвайса, ч. I. М.: Наука, 1982, с. 289—319.]
- [69] Labella A. Construzione del monoide dei quozienti in un topos elementare.— *Rend. Mat. (VI)*, 1974, 7, p. 151—168. MR 50/10009.
- [70] Lambek J., Rattray B. A. Localization and sheaf reflectors.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, 210, p. 279—293.
- [71] Lawvere F. W. An elementary theory of the category of sets.— *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1964, 52, p. 1506—1511. MR 30/3025.
- [72] Lawvere F. W. The category of categories as a foundation for mathematics.— In: *Proc. La Jolla conference on Categorical Algebra*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1966, p. 1—20. MR 34/7332.
- [73] Lawvere F. W. Diagonal arguments and cartesian closed categories.— In: *Category Theory, Homology Theory and their Applications*, II. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1969, p. 134—145. MR 39/4075.
- [74] Lawvere F. W. Adjointness in foundations.— *Dialectica*, 1969, 23, p. 281—296.
- [75] Lawvere F. W. Equality in Hyperdoctrines and the Comprehension Schema as an adjoint functor.— In: *Proc. New York Symposium on Applications of Categorical Algebra*/Ed. A. Heller. American Mathematical Society, 1970, p. 1—14. MR 41/1829.
- [76] Lawvere F. W. Teoria delle categorie sopra un topos di base.— *Lecture Notes*, University of Perugia, 1973.
- [77] Lecouturier P. Quantificateurs dans les topos élémentaires.— *Université Nationale du Zaïre*, 1972, preprint.
- [78] Lesaffre B. Structures algébriques dans les topos élémentaires.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1973, 277, p. A663—666. MR 48/8597.
- [79] Loullis G. Some aspects of the model theory in a topos: Ph. D. thesis.— Yale University, 1976.
- [80] Mahé L. Topos infinitesimal.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1973, 277, p. A497—500. MR 49/8986.
- [81] Mahé L. Théorèmes, exemples et contre-exemples pour certaines propriétés des entiers naturels dans les topos.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1976, 282, p. A1273—1276.
- [82] Makkai M., Reyes G. E. Model-theoretic methods in the theory of topoi and related categories.— *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 1976, 24, p. 379—392.
- [83] Maurer C. Universes in topoi.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 284—296. MR 52/95.
- [84] Mikkelsen C. J. Lattice-theoretic and logical aspects of elementary topoi.— *Aarhus Universitet Various Publications Series*, 1976, 25.

- [85] Mitchell W. Boolean topoi and the theory of sets.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1972, 2, p. 261—274. MR 47/8299.
- [86] Mitchell W. On topoi as closed categories.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1973, 3, p. 133—139. MR 50/427.
- [87] Mitchell W. Categories of Boolean topoi.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1973, 3, p. 193—201. MR 50/9585.
- [88] Mulvey C. J. Intuitionistic algebra and representations of rings.— *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1974, 148, p. 3—57. MR 53/2650.
- [89] Mulvey C. J. A generalization of Swan's theorem.— *Math. Z.* 1976, 151, p. 57—70.
- [90] Mulvey C. J. Compact ringed spaces.
- [91] Mulvey C. J. The real numbers in a topos.
- [92] Osius G. Categorical Set Theory: a characterization of the category of sets.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1974, 4, p. 79—119. MR 51/643.
- [93] Osius G. The internal and external aspects of logic and set theory in elementary topoi.— *Cahiers top. géom. diff.*, 1974, 15, p. 157—180. MR 52/7896.
- [94] Osius G. Logical and set-theoretical tools in elementary topoi.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 297—346.
- [95] Osius G. A note on Kripke-Joyal semantics for the internal language to topoi.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 349—354. MR 52/7898.
- [96] Pare R. Colimits in topoi.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, 80, p. 556—561. MR 48/11245.
- [97] Pare R., Schumacher D. Abstract families and the Adjoint Functor Theorems.
- [98] Penk A. M. Two forms of the axiom of choice for an elementary topos.— *J. Symbolic Logic*, 1975, 40, p. 197—212. MR 51/5698.
- [99] Penon J. Quasitopos.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1973, 276, p. A237—A240. MR 48/11246.
- [100] Penon J. Catégories localement internes.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1974, 278, p. A1577—1580. MR 51/10435.
- [101] Pierce R. S. Modules over commutative regular rings.— *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1976, 70, MR 36/151.
- [102] Reyes G. E. Sheaves and Concepts: a model-theoretic introduction to Grothendieck topoi.— *Aarhus Universitet Preprint Series* 1975/76, no. 2.
- [103] Reyes G. E. Théorie des modèles et faisceaux.— *Univ. Cath. Louvain, Inst. Math. Pure Appl.*, 1976, Rapport no. 63.
- [104] Roos J. E. Sur la distributivité des foncteurs $\lim$ par rapport aux $\lim$ dans les catégories de faisceaux (topos).— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1964, 259, p. 969—972; 1605—1608, 1801—1804. MR 30/4816, 32/5714—5.
- [105] Schlomiuk D. An elementary theory of the category of topological spaces.— *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, 149, p. 259—278. MR 41/3559.
- [106] Scott D. S., Fourman M. P. Logic and Sheaves.
- [107] Serre J. P. Faisceaux algébriques cohérents.— *Ann. Math. (2)*, 1955, 61, p. 197—278. MR 16, p. 953.
- [108] Sols I. Bon ordre dans l'objet des nombres naturels d'un topos booléen.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1975, 281, p. A601—603. MR 52/96.
- [109] Sols I. Programming in topoi.— *Cahiers top. géom. diff.*, 1976, 16, p. 312—319.
- [110] Stout L. N. Topological space objects in a topos I: Variable spaces for variable sets.
- [111] Stout L. N. Topological space objects in a topos II: $\mathcal{E}$ -completeness and cocompleteness.— *Manuscripta Math.*, 1975, 17, p. 1—14.

- [112] Stout L. N. Topological properties of the real numbers object in a topos.— *Cahiers top. géom. diff.*, 1976, 17, p. 295—326.
- [113] Street R. Elementary cosmoi, I.— In: *Proc. Sydney Category Seminar* 1973. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, p. 134—180. MR 50/7290.
- [114] Street R. Cosmoi of internal categories.— *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [115] Street R., Walters R. F. C. The comprehensive factorization of a functor.— *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1973, 79, p. 936—941. MR 49/10753.
- [116] Street R., Walters R. F. C. Yoneda structures on 2-categories.— *J. Algebra*.
- [117] Tierney M. Sheaf Theory and the Continuum Hypothesis.— In: *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*/Ed. F. W. Lawvere. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1972, p. 13—42. MR 51/10088.
- [118] Tierney M. On the spectrum of a ringed topos.— In: *Algebra, Topology and Category Theory: a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg*/Ed. A. Heller, M. Tierney. Academic Press, 1976, p. 189—210.
- [119] Tierney M. Forcing topologies and classifying topoi. In: *Algebra, Topology and Category Theory: a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg*/Ed. A. Heller, M. Tierney. Academia Press, 1976, p. 211—219.
- [120] Ulmer F. On the existence and exactness of the associated sheaf functor.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1973, 3, p. 295—306. MR 51/10431.
- [121] Van de Wauw-de Kinder G. Arithmétique de premier ordre dans les topos.— *C. r. Acad. Sci. Paris*, 1975, 280, p. A1579—1582.
- [122] Van Osdol D. H. Sheaves in regular categories.— In: *Exact categories and categories of sheaves*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971, p. 223—239.
- [123] Van Osdol D. H. Coalgebras, Sheaves and Cohomology.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, 33, p. 257—263. MR 45/3517.
- [124] Van Osdol D. H. Homological algebra in topoi.— *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1975, 50, p. 52—54. MR 51/5714.
- [125] Volger H. Completeness theorem for logical categories.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 51—86. MR 51/12983.
- [126] Volger H. Logical categories, semantical categories and topoi.— In: *Model Theory and Topoi*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1975, p. 87—100. MR 51/12984.
- [127] Volger H. Ultrafilters, ultrapowers and finiteness in a topos.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1975, 6, p. 345—356. MR 52/84.
- [128] Wolff H. Flat epimorphisms in Cat.— *Math. Nachr.*, 1975, 69, p. 243—252.
- [129] Wraith G. C. Artin glueing.— *J. Pure Appl. Algebra*, 1974, 4, p. 345—348. MR 49/9040.
- [130] Wyler O. Are there topoi in topology?— In: *Proc. Mannheim conference on Categorical Topology*. Berlin; Heidelberg, N. Y.: Springer, 1976, p. 699—719.
- [131] Carboni A., Meloni G. C. Costruzione algebrica dello spazio étale.— *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, 1975, 12, p. 192—197. MR 52/13998.
- [132] Deligne P. (rédigé par J. F. Boutot). Cohomologie étale: les points de départ.— In: *Cohomologie étale (SGA 4 1/2)*. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1977, p. 4—75.
- [133] Diaconescu R. Grothendieck toposes have Boolean points — a new proof.— *Commun. Algebra*, 1976, 4, p. 723—729.
- [134] Fourman M. P. Sheaves over $\mathbf{cHa}$ and their logic.— *Lecture notes*, Rijksuniversiteit Utrecht, 1977.
- [135] Guitart R. Calcul des relations in verses.— *Cahiers top. géom. diff.*, 1977, 17, p. 67—100.

- [136] Radu A. Sur les topos de Giraud-Grothendieck.—Ann. Fac. Sci. de Kinshasa (Zaire), Section Math.-Phys., 1976, 2, p. 108—118.
- [137] Rousseau C. Topos theory and complex analysis: Ph. D. thesis.—Université de Montreal, 1977.
- [138] Schumacher D. Absolutely free algebras in a topos containing an infinite object.—Canad. Math. Bull., 1976, 19, p. 323—328.
- [139] Van den Bossche G. Relevements conservatifs de morphismes conservatifs de topos.—Univ. Cath. Louvain, Inst. Math. Pure Appl., 1977, Rapport no. 65.

D: ДРУГИЕ СТАТЬИ

- [151] Baer R. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group.—Bull. Amer. Math. Soc., 1940, 46, p. 800—806. MR 2, p. 126.
- [152] Barr M., Beck J. Homology and standard constructions.—In: Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1969, p. 235—335. MR 41/3562.
- [153] Beck J. Triples, algebras and cohomology: Ph. D. thesis.—Columbia University, 1967.
- [154] Bénabou J. Catégories avec multiplication.—C. r. Acad. Sci. Paris, 1963, 256, p. 1887—1890. MR 26/6225.
- [155] Bénabou J. Introduction to bicategories.—In: Reports of the Midwest Category Seminar, I. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1967, p. 1—77. MR 36/3841.
- [156] Cohen P. J. Set Theory and the Continuum Hypothesis.—N. Y.: W. A. Benjamin Inc., 1966. MR 38/999. [Русский перевод: Козен П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза.—М.: Мир, 1969.]
- [157] Conway J. H. On Numbers and Games.—Academic Press, 1976.
- [158] Day B. J. Limit spaces and closed span categories.—In: Proc. Sydney Category Seminar 1973. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, p. 65—74. MR 51/10440.
- [159] Deligne P. La conjecture de Weil.—I. I. H. E. S. Publ. Math., 1974, 43, p. 273—307. MR 49/5013.
- [160] Eilenberg S., Kelly G. M. Closed categories.—In: Proc. La Jolla conference on Categorical Algebra. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1966, p. 421—562. MR 37/1432.
- [161] Eilenberg S., MacLane S. Cohomology theory in abstract groups.—Ann. Math. (2), 1947, 48, p. 51—78, 326—341. MR 8, p. 367; 9, p. 7.
- [162] Eilenberg S., Moore J. C. Adjoint functors and triples.—Ill. J. Math., 1965, 9, p. 381—398. MR 32/2455.
- [163] Fakir S. Monade idempotente associée à une monade.—C. r. Acad. Sci. Paris, 1970, 270, p. A99—101. MR 41/1828.
- [164] Funayama N. On imbedding infinitely distributive lattices completely isomorphically into Boolean algebras.—Nagoya Math. J., 1959, 15, p. 71—81. MR 21/6341.
- [165] Gabriel P., Ulmer F. Lokal präsentierbare Kategorien.—Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971. MR 48/6205.
- [166] Gray J. W. Fibred and cofibred categories.—In: Proc. La Jolla conference on Categorical Algebra. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1966, p. 21—83. MR 35/4277.
- [167] Gray J. W. Formal Category Theory I: Adjointness for 2-categories.—Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974. MR 51/8207.
- [168] Gray J. W. Formal Category Theory II.
- [169] Hochster M. Prime ideal structure in commutative rings.—Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 142, p. 43—60. MR 40/4257.
- [170] Jonsson B., Tarski A. On two properties of free algebras.—Math. Scand., 1961, 9, p. 95—101. MR 23/A3695.

- [171] Kan D. M. Adjoint functors.—Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, p. 295—329. MR 24/A1301.
- [172] Kelly G. M., Street R. Review of the elements of 2-categories.—In: Proc. Sydney Category Seminar 1973. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1974, p. 75—103. MR 50/10010.
- [173] Kripke S. A. Semantic analysis of intuitionistic logic I.—In: Formal Systems and Recursive Functions/Ed. J. N. Crossley, M. A. Dummett. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 92—130. MR 34/1184.
- [174] Kuratowski C. Sur la notion d'ensemble fini.—Fundam. math. 1920, 1, p. 130—131.
- [175] Kuratowski C. Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs.—Fundam. math., 1922, 3, p. 182—199.
- [176] Lawvere F. W. Functorial semantics of algebraic theories.—Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, 50, p. 869—872. MR 28/2143.
- [177] Linton F. E. J. Some aspects of equational categories.—In: Proc. La Jolla conference on Categorical Algebra. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1966, p. 84—94. MR 35/233.
- [178] Linton F. E. J. Coequalizers in categories of algebras.—In: Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1969, p. 75—90. MR 39/5656.
- [179] MacLane S. A history of Abstract Algebra: origin, rise and decline of a movement.
- [180] Manes E. G. Algebraic Theories.—Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1976.
- [181] Mostowski A. An undecidable arithmetical statement.—Fundam. math., 1949, 36, p. 143—164. MR 12, p. 2.
- [182] Scott D. S. Boolean models and nonstandard analysis.—In: Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability/Ed. W. A. J. Luxemburg. Holt, Rinehart and Winston, 1969, p. 87—92. MR 38/4300.
- [183] Serre J. P. Cohomologie galoisienne.—Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1964. MR 31/4785.
- [184] Street R. Two constructions on lax functors.—Cahiers top. géom. diff., 1972, 13, p. 217—264. MR 50/436.
- [185] Tarski A. A lattice-theoretic fixpoint theorem and its applications.—Pacific J. Math., 1955, 5, p. 285—309. MR 17, p. 574.
- [186] Thiele E. J. Über endlich axiomatisierbare Teilsysteme der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre.—Z. math. Logik Grundl. Math., 1968, 14, S. 39—58. MR 36/6283.
- [187] Yoneda N. On the homology theory of modules.—J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. 1, 1954, 7, p. 193—227. MR 16, p. 947.

ДОПОЛНЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОПОСОВ
К ИЗУЧЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Любецкий

При выяснении роли теории топосов в конкретных разделах математики принципиальным является, конечно, вопрос о наличии содержательных примеров топосов и о возможности получения новой информации о традиционных математических объектах на основе исследования таких топосов. Типичным топосом является совокупность всех полных Ω -множеств, где Ω — параметр, являющийся произвольной фиксированной гейтинговой алгеброй. Этот топос обозначается $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$. В случае двухэлементной гейтинговой алгебры $\Omega = \{0, 1\}$ он совпадает с семейством всех множеств. Произвольный топос $\mathcal{E}$ содержит в определенном смысле «плотный» подтопос $\mathcal{E}_0$, эквивалентный топосу $\mathbf{C}\Omega_{\mathcal{E}}\text{-Set}$, где $\Omega_{\mathcal{E}}$ — гейтингова алгебра всех подобъектов объекта 1 исходного топоса $\mathcal{E}$ (см. [60], с. 427). Это, а также то, что топос $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$ изоморфен такому классическому топосу, как совокупность всех пучков на гейтинговой алгебре Ω (обозначаемому $\mathbf{sh}(\Omega)$), выделяют топос $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$ как точку приложения теории топосов и, с другой стороны, как пример, с которого можно начинать изучение общей теории топосов. В контексте математической логики топос $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$ представляет особый интерес, так как он изоморфен совокупности всех «нечетких множеств» или, иначе говоря, гейтинговозначному универсуму V^{Ω} , который является основой построения практически всех нетривиальных классических и интуиционистских моделей теории множеств Цермело — Френкеля ZFC и других интерпретируемых в ZFC теорий. В этом добавлении подробно рассматривается топос $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$ (или, что то же самое, $\mathbf{sh}(\Omega)$ или V^{Ω}) в связи с его ролью в исследовании таких традиционных алгебраических систем, как кольцо (ассоциативное, с единицей) K и модуль $\mathcal{Z}$ над таким кольцом K , и совокупность всех морфизмов одной полной гейтинговой алгебры Ω_1 в другую полную гейтингову алгебру Ω . Третий из этих объектов нуждается в пояснении. В любой полной гейтинговой алгебре рассматривается структура вида $\langle \sup, \wedge, 0, 1 \rangle$; совокупность всех морфизмов Ω_1 в Ω обозначается Ω^{Ω_1} . В качестве Ω_1 будем рассматривать топологию $\mathcal{T}_Y$ (или, короче, $\mathcal{T}$) некоторого топологиче-

ского пространства Y . В качестве Ω можно выбрать, например, топологию $\mathcal{T}_X$ какого-то топологического пространства X или произвольную полную булеву алгебру B . Если в Y имеется структура топологической группы, модуля, кольца, то она поднимается в $\Omega^{\mathcal{T}_Y}$ следующим каноническим образом: $(p \cdot q)(O) = \bigvee \{p(O_1) \wedge q(O_2) \mid O_1 \cdot O_2 \subseteq O\}$, где здесь и далее $p, q \in \Omega^{\mathcal{T}_Y}$ и $O, O_1, O_2 \in \mathcal{T}_Y$, а $\bigvee$ обозначает $\sup$ в Ω . Аналогично, $(kp)(O) = \bigvee \{k(O_1) \wedge p(O_2) \mid O_1 \cdot O_2 \subseteq O\}$, где $k \in \Omega^{\mathcal{T}_K}$ и Y — модуль над K , также $(p + q)(O) = \bigvee \{p(O_1) \wedge q(O_2) \mid O_1 + O_2 \subseteq O\}$ и т. д. Оказывается, что структура $\Omega^{\mathcal{T}_K}$ при подходящем выборе Ω и K изоморфна таким кольцам, как $C(X, K)$ — кольцу непрерывных функций вида $X \rightarrow K$, где K — локально компактное (здесь и далее недискретное) тело, $C'(X, K)$ — кольцу непрерывных функций вида $X \rightarrow K$, определенных на открытых плотных подмножествах в X и рассматриваемых с точностью до совпадения на пересечении их областей определения, K -пространству в смысле Л. В. Канторовича и кольцу измеримых функций вида $X \rightarrow K$, где X — пространство с мерой. Это показывает, что изучение структуры $\Omega^{\mathcal{T}_Y}$ наряду с кольцами, модулями и другими алгебраическими системами является уместной иллюстрацией роли топосов вида $\mathbf{C}\Omega\text{-Set}$.

§ 1. Метод нестандартного анализа:
оценки, пучки и теоремы переноса

1. Оценка со значениями в дискретной булевой алгебре — простейший пример оценки. Нестандартный анализ, как в основополагающих работах А. Робинсона ([1], [2], см. также [44]), так и в его современном состоянии не связан специфически с математическим анализом. Одна из возможных точек зрения состоит в том, что нестандартный анализ есть алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок (см. п. 2) и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде множества глобальных элементов некоторого пучка. Такое понимание нестандартного анализа возникло, конечно, постепенно. С этой точки зрения А. Робинсон рассматривал следующую ситуацию. Пусть $\{K_{\alpha}\}$ — семейство алгебраических систем, где $\alpha \in I$ и мощность $|K_{\alpha}| \geq 2$. Образует декартово произведение $K \rightleftharpoons \prod_{\alpha \in I} K_{\alpha}$. Операции и порядок в K определим по координатам. Если $f, g \in K$, то положим $[f = g] \rightleftharpoons \{\alpha \in I \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$. Аналогичным образом определим $[f \leq g] \rightleftharpoons \{\alpha \in I \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)\}$ и т. д. для всех исходных отношений того класса систем, к которому принадлежат системы K_{α} . Рассмотрим соответствующий системе

язык, формулы которого определяются по индукции: $t_1 = t_2$, $t_1 \leq t_2$ и т. д. — формулы, где t_1, t_2 — термы; если ϕ_1, ϕ_2 — формулы и x — переменная, то $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\neg \phi_1$, $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$, $\exists x \phi$, $\forall x \phi$ — формулы. Если ϕ — одна из таких формул, то запись ϕ_K означает, что вместо свободных переменных (если таковые имеются в ϕ) подставлены элементы из K и связанные переменные в ϕ пробегает множество K (т. е. ϕ — некоторое свойство K). Иногда вместо ϕ_K пишут $K \models \phi$. Допуская вольность речи, будем называть ϕ_K также суждением или формулой; если индекс K фиксирован и подразумевается, то вместо ϕ_K можно писать ϕ .

Суждение ϕ_K истинно или ложно в самом обычном смысле. Множество формул ϕ_K обозначим Y_K . В данном случае K фиксировано и меняется только ϕ . (Если дан любой класс алгебро-топологических систем $\mathcal{H}$, то точно так же определим множество всех суждений ϕ_K , где $K \in \mathcal{H}$. Это множество обозначим $Y_{\mathcal{H}}$.) Ясно, что Y_K состоит из всевозможных суждений о системе K (из всевозможных свойств K). Определим функцию $\llbracket \cdot \rrbracket$: $Y_K \rightarrow \mathcal{P}(I)$ (где $\mathcal{P}(I)$ — множество всех подмножеств фиксированного множества I), которую будем называть *оценкой*. А именно, чтобы найти значения $\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket$ или $\llbracket t_1 \leq t_2 \rrbracket$, нужно сначала вычислить термы t_1 и t_2 (получатся какие-то элементы f и g из K) и затем использовать предыдущие формулы для $\llbracket f = g \rrbracket$ или $\llbracket f \leq g \rrbracket$. Далее $\llbracket \phi_1 \wedge \phi_2 \rrbracket = \llbracket \phi_1 \rrbracket \cap \llbracket \phi_2 \rrbracket$, $\llbracket \phi_1 \vee \phi_2 \rrbracket = \llbracket \phi_1 \rrbracket \cup \llbracket \phi_2 \rrbracket$, $\llbracket \neg \phi \rrbracket = I \setminus \llbracket \phi \rrbracket$, где в правой части $\neg$ — теоретико-множественное дополнение, $\llbracket \phi \Rightarrow \psi \rrbracket = (\llbracket \phi \rrbracket \rightarrow \llbracket \psi \rrbracket)$, где $u \rightarrow v$ по определению равно $(\neg u \vee v)$, $\llbracket (\exists x \phi)_K \rrbracket = \bigcup_{f \in K} \llbracket \phi(f) \rrbracket$, $\llbracket (\forall x \phi)_K \rrbracket = \bigcap_{f \in K} \llbracket \phi(f) \rrbracket$.

Очевидно, $\mathcal{P}(I)$ — полная булева алгебра и в правых частях предыдущих формул находятся обычные булевы операции в полной булевой алгебре $\mathcal{P}(I)$. Если дана какая-то формула ϕ_K , то $\llbracket \phi_K \rrbracket$ может равняться 1 (наибольшему элементу в полной булевой алгебре $\mathcal{P}(I)$, т. е. I), может равняться 0 (наименьшему элементу в той же алгебре, т. е. пустому множеству $\emptyset$) или может равняться u , где $u \in \mathcal{P}(I)$ и $u \neq 1$, $u \neq 0$. Если $\llbracket \phi_K \rrbracket = u$, то говорят, что суждение ϕ о структуре K имеет место с вероятностью u (оценка суждения ϕ_K равна u). Сразу привлекает внимание случай, когда $\llbracket \phi_K \rrbracket = 1$.

Если ϕ_K — формула вида $\phi(f_1, \dots, f_n)$, где $f_1, \dots, f_n \in K$, то обозначим ϕ_{K_α} суждение о структуре K_α вида $\phi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$. В случае алгебры $\mathcal{P}(I)$ очевидно, что $\llbracket \phi_K \rrbracket = 1$ тогда и только тогда, когда $\forall \alpha \in I (\phi_{K_\alpha})$. Последнее удобно записывать в виде $\{K_\alpha | \alpha \in I\} \models \phi$, понимая эту запись как общезначимость свойства ϕ в классе $\{K_\alpha\}$. Более того, $\llbracket \phi_K \rrbracket = \{\alpha \in I | \phi_{K_\alpha}\}$.

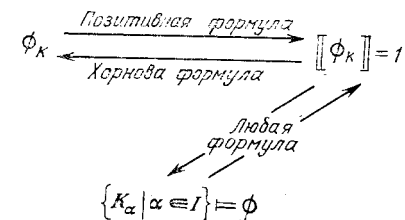
Запись $\llbracket \phi_K \rrbracket = 1$ определяет одноместный предикат $\text{Tr}(\phi_K) \Leftrightarrow (\llbracket \phi_K \rrbracket = 1)$, который можно понимать как особый вид истинности суждения ϕ_K , а именно, истинность с вероятностью 1.

Возникает вопрос о том, как обычная истинность суждения связана с этой истинностью.

Неверно, что $\phi_K \Rightarrow \text{Tr}(\phi_K)$. Например, пусть все $K_\alpha \models \mathbb{R}$, $f \in K$ и для каких-то α_0, α_1 выполняется $f(\alpha_0) = 0$, $f(\alpha_1) \neq 0$; если $\phi \Leftrightarrow (f \neq 0)$, то имеет место $\neg \text{Tr}(\phi_K)$ и ϕ_K . Если ϕ — позитивная формула, т. е. ϕ построена из термов с помощью только связок $=, \wedge, \vee, \exists, \forall$, то выполняется $\phi_K \Rightarrow \text{Tr}(\phi_K)$. Это проверяется непосредственной индукцией по длине формулы ϕ .

Неверно, что $\text{Tr}(\phi_K) \Rightarrow \phi_K$. Например, если $\phi \Leftrightarrow (f \leq g) \vee \vee (g \leq f)$ и для каких-то α_0, α_1 выполняется $f(\alpha_0) < g(\alpha_0)$, $g(\alpha_1) < f(\alpha_1)$, то $\text{Tr}(\phi_K)$ и $\neg \phi_K$ (все $K_\alpha \models \mathbb{R}$). Если ϕ — хорнова формула (см., например, [39]), то выполняется $\text{Tr}(\phi_K) \Rightarrow \phi_K$. Это проверяется непосредственной индукцией по длине формулы ϕ .

Итак, получена диаграмма 1:



Пусть j — фильтр в $\mathcal{P}(I)$, т. е. j — непустое подмножество в $\mathcal{P}(I)$, обладающее свойством $\forall u \in j \forall v \in j \forall v_1 \in \mathcal{P}(I) ((u \cap v \in j) \wedge (u \subseteq v_1 \Rightarrow v_1 \in j))$. Рассмотрим предикат Tr_j , аналогичный предикату Tr , определяемый как $\text{Tr}_j(\phi_K) \Leftrightarrow (\llbracket \phi_K \rrbracket \in j)$. Возникает еще один вид истинности суждения, а именно, истинность с вероятностью j . Можно исследовать вопрос о взаимоотношении двух истинностей (семантик): ϕ_K и $\text{Tr}_j(\phi_K)$. В этом дополнении рассмотрим случай $j = \{1\}$. В робинсоновском нестандартном анализе (т. е. для алгебры $\mathcal{P}(I)$) рассматривается случай, когда j — счетно неполный ультрафильтр ([50], с. 347). Первоначально казалось необходимым (и действительно полезно во многих вопросах робинсоновского нестандартного анализа) заменить предикат $\text{Tr}_j(\phi_K)$ обычной истинностью суждения ϕ_K в некоторой специально подобранной системе K' (при этом элементы K соответствуют элементам K').

А. Робинсон обеспечил это следующим образом. Пусть j — ультрафильтр в $\mathcal{P}(I)$, т. е. j — фильтр, и, кроме того, выполняется свойство $\forall u \in \mathcal{P}(I) (u \in j \vee \neg u \in j)$ (которое эквивалентно свойству $\forall v_1 \in \mathcal{P}(I) \forall v_2 \in \mathcal{P}(I) ((v_1 \cup v_2) \in j \Rightarrow v_1 \in j \vee v_2 \in j)$). Легко доказать, что любой фильтр j_0 содержится в некотором ультрафильтре j , $j_0 \subseteq j$. Факторизуем K по j , т. е. положим

$$K|j \neq K|\sim, \quad (1)$$

где $(f \sim g) \Leftrightarrow ([f = g] \in j)$. Непосредственной индукцией по длине формулы ϕ легко доказать, что

$$\phi_{K|j}([f_1], \dots, [f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_K(f_1, \dots, f_n)] \in j), \quad (2)$$

где $f_i \in K$ и $[f]$ — класс эквивалентности с представителем f . Это соотношение называется *теоремой Лося*. Алгебраическая система $K|j$ называется *ультрапроизведением* алгебраических систем $\{K_\alpha\}$. Из соотношения (2) в случае $\forall \alpha (K_\alpha \models K_0)$ сразу вытекает

$$((K|j) \models \phi) \Leftrightarrow (K_0 \models \phi), \quad (3)$$

хотя ясно, что в общем случае $K|j$ не изоморфно K_0 и даже не биективно с K_0 .

2. Общее определение оценки. Ее связь с выводимостью. Пусть Ω — произвольная полная решетка с нулем и единицей, в которой определена бинарная операция $u \rightarrow v$ со свойством

$$\forall u \in \Omega \forall v \in \Omega (u \wedge (u \rightarrow v) \leq v). \quad (4')$$

Обозначим $\top u \Leftrightarrow (u \rightarrow 0)$. Из предыдущего свойства вытекает $u \wedge \top u = 0$. Если усилить это свойство, положив

$$\forall u \forall v \forall v_1 ((u \wedge (u \rightarrow v) \leq v) \wedge (u \wedge v_1 \leq v \Rightarrow v_1 \leq (u \rightarrow v))),$$

что эквивалентно свойству

$$v_1 \leq (u \rightarrow v) \Leftrightarrow u \wedge v_1 \leq v, \quad (4)$$

то получим

$$\top u = \bigvee \{v | u \nabla v\}, \quad (u \rightarrow v) = \bigvee \{v_1 | u \wedge v_1 \leq v\}, \quad (5)$$

где здесь и далее $\bigvee$ обозначает точную верхнюю грань (вместо $\sup$), $\bigwedge$ обозначает точную нижнюю грань (вместо $\inf$) в решетке Ω и $u \nabla v \Leftrightarrow (u \wedge v = 0)$.

Решетка (не обязательно полная) с нулем и единицей, обладающая свойством (4), называется *гейтинговой алгеброй*. Из свойства (4) гейтинговой алгебры вытекают свойства дистрибутивности:

$$\begin{aligned} u \wedge (v_1 \vee v_2) &= (u \wedge v_1) \vee (u \wedge v_2), \\ u \vee (v_1 \wedge v_2) &= (u \vee v_1) \wedge (u \vee v_2). \end{aligned}$$

Более того, из свойства (4) вытекает бесконечная дистрибутивность

$$\left(\bigvee_{\alpha} u_{\alpha}\right) \wedge u = \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge u). \quad (6)$$

Действительно, $\left(\bigvee_{\alpha} u_{\alpha}\right) \wedge u \geq u_{\alpha} \wedge u$, и с другой стороны, $u_{\alpha} \wedge u \leq \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge u)$, $u_{\alpha} \leq u \rightarrow \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge u)$, $\left(\bigvee_{\alpha} u_{\alpha}\right) \leq u \rightarrow \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge u)$, $\left(\bigvee_{\alpha} u_{\alpha}\right) \wedge u \leq \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge u)$. Конечно, в (6) предполагается, что суще-

ствуют точные верхние грани семейств $\{u_{\alpha}\}$ и $\{u_{\alpha} \wedge u\}$. Другой вид дистрибутивности $\left(\bigwedge_{\alpha} u_{\alpha}\right) \vee u = \bigwedge_{\alpha} (u_{\alpha} \vee u)$ в общем случае

не имеет места. Гейтингова алгебра с дополнительным свойством

$$u \vee \top u = 1 \quad (7)$$

называется *булевой алгеброй*.

Гейтингова (булева) алгебра, являющаяся одновременно полной решеткой, называется *полной гейтинговой (полной булевой) алгеброй*.

Условие (4) весьма сильное, например, благодаря ему в предыдущих определениях можно опустить условие существования единицы (определяя ее как $0 \rightarrow 0$) и доказать функциональность записи $v_1 \rightarrow v_2$, понимая ее как обозначение произвольного элемента, удовлетворяющего условию (4). Действительно, если $u \leq w_1 \Leftrightarrow u \wedge v_1 \leq v_2$ и $u \leq w_2 \Leftrightarrow u \wedge v_1 \leq v_2$, то $w_1 = w_2$. Подробно гейтинговы и булевы решетки рассматриваются в [41], [49], [51], [52].

Пусть K — произвольная система (структура). По ее носителям, операциям и отношениям обычным образом определяются переменные (соответствующих сортов) и атомарные формулы. Точно так же, как в п. 1, определяется язык, соответствующий структуре K (или семейству таких структур $\mathcal{K}$), который мы обозначаем Y_K (или соответственно $Y_{\mathcal{K}}$).

Ω -значной *оценкой* в языке Y_K (или $Y_{\mathcal{K}}$) называется любая функция вида $[]: Y_K \rightarrow \Omega$, обладающая свойствами, указанными в п. 1 для связок $\wedge, \vee, \top, \Rightarrow, \exists, \forall$. При этом операции $\cap, \cup, \rightarrow, \bigcup, \bigcap$ в $\mathcal{P}(I)$ (в правых частях этих свойств) заменяются соответственно на операции $\inf\{u, v\}, \sup\{u, v\}, \top, \rightarrow, \vee, \wedge$ в Ω (первые две из них обозначаются соответственно $\bigwedge$ и $\bigvee$). Отметим, что определение оценки не накладывает никаких ограничений на ее значения для атомарных формул. В соответствии с определением оценка однозначно продолжается с множества всех атомарных формул на множество всех формул.

В п. 1 для атомарных формул оценка определялась с учетом специфической структуры K . В общем случае она должна определяться из соображений «внутренней интерпретации» элементов из K , которая, как мы увидим, возникает в связи с пучками и так называемыми нечеткими множествами. Поскольку сейчас K — произвольная структура, то мы не можем конкретно указать, как вычисляются значения оценки для атомарных формул. Вместо этого обычно предполагают, что для любой атомарной формулы ϕ_K выполняется

$$\phi'_K \Leftrightarrow [\phi'_K] = 1. \quad (8)$$

Произвольную оценку, обладающую этим свойством, назовем *отделимой*.

Само определение оценки не предполагает каких-либо свойств соответствующих операций в Ω . Однако если мы хотим, чтобы оценка была замкнута относительно хотя бы некоторых правил вывода, то такие свойства необходимы. Например, поскольку мы понимаем предикат $\text{Tr}(\phi_K) \Leftrightarrow ([\phi_K] = 1)$ как некоторый вид истинности, то естественно желать, чтобы для него выполнялось правило modus ponens:

$$\frac{\text{Tr}(\phi_K), \text{Tr}(\phi_K \Rightarrow \psi_K)}{\text{Tr}(\psi_K)},$$

т. е.

$$\frac{[\phi_K] = 1, [\phi_K \Rightarrow \psi_K] = 1}{[\psi_K] = 1}. \quad (9)$$

Так как $[\phi_K \Rightarrow \psi_K] = 1 \Leftrightarrow ([\phi_K] \rightarrow [\psi_K] = 1) \Leftrightarrow (1 \leq ([\phi_K] \rightarrow [\psi_K]))$, то в силу (4) последнее эквивалентно тому, что $[\phi_K] \leq [\psi_K]$, и, следовательно, из соотношения (4) получаем (9). Фактически мы использовали не (4), а более слабое условие (4'). Точно так же желательно, чтобы всегда выполнялось $\text{Tr}(\phi_K \wedge \neg \phi_K) = 0$, т. е.

$$[\phi_K \wedge \neg \phi_K] = 0. \quad (10)$$

Из того же свойства (4') получаем (10).

Мы будем рассматривать наиболее изученные случаи, когда Ω — полная гейтингова алгебра, или полная булева алгебра, или гейтингова алгебра, или булева алгебра. Тем не менее и для других решеток, например для модулярной или квантовой, или вообще для решетки, в которой ослаблено свойство (4), многие из приводимых ниже результатов имеют место. Конечно, в этих случаях нужно рассматривать соответствующие логики: более слабые, чем интуиционистская, или промежуточные между интуиционистской и классической.

Теорема 1. а) Если Ω — полная гейтингова алгебра и ϕ — любая формула, выводимая в интуиционистском исчислении предикатов с равенством PI , то $[\phi_K] = 1$.

б) Если Ω — полная булева алгебра и ϕ — любая формула, выводимая в обычном, классическом исчислении предикатов с равенством PI , то $[\phi_K] = 1$.

▷ Здесь не предполагаются никакие условия на значения оценки $[\]$ для атомарных формул.

Доказательство состоит в вычислении значений оценки $[\]$ для всех логических аксиом (каждый раз получается 1) и затем проверки того, что если в правилах вывода оценки посылок равны 1, то и оценки заключения равны 1. Например, $[\phi \vee \neg \phi] = [\phi] \vee \neg [\phi]$ и по формуле (7) получаем 1 независимо от того, чему равна оценка $[\phi]$. □

Систематическое обсуждение концепции оценки содержится, например, в фундаментальных работах [61], [49]; в них приведены дальнейшие ссылки.

В заключение продолжим линию, связанную с позитивными и хорновыми формулами, намеченную в п. 1 (в п. 4 мы обобщим диаграмму 1 на случай произвольного кольца).

Предложение 1. Пусть $[\]$ — отделяемая оценка со значениями в произвольной полной гейтинговой алгебре Ω , т. е. $[\]$ обладает свойством (8). Тогда

а) Для любой позитивной формулы ϕ выполняется

$$\phi_K \Rightarrow ([\phi_K] = 1).$$

б) Если, кроме того, оценка достижима, т. е.

$$[(\exists x \phi)_K] = 1 \Rightarrow \exists k \in K ([\phi_K(k)] = 1), \quad (11)$$

то для любой хорновой формулы ψ выполняется

$$([\psi_K] = 1) \Rightarrow \psi_K.$$

▷ Для атомарных формул эквивалентность имеет место в силу условия (8). Связки $\wedge$ и $\vee$, очевидно, сохраняют эквивалентность. Для позитивной формулы осталось проверить случаи связок $\vee$ и $\exists$; эти случаи очевидны. Для хорновой формулы осталось рассмотреть случай, когда $\psi \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n \vee p$. Если $[p] = 1$, то все доказано. В противном случае $[p] < 1$. Тогда $\neg [p_1] \vee \dots \vee \neg [p_n] \neq 0$, и для какого-то слагаемого $\neg [p_i] \neq 0$. Поэтому, если допустить p_i , то $[p_i] = 1$, $0 = [p_i] \wedge \neg [p_i] \neq 0$; получили противоречие. Конечно, доказательство не использует того, что Ω — именно полная гейтингова алгебра. □

Формально говоря, теорема 1 доказывается тривиально. Однако ее нужно рассматривать в связи с глубокой концепцией оценки. В работах А. Робинсона и в современных изложениях робинсоновского нестандартного анализа, например, в [44], [53], эта концепция содержится неявно: в доказательствах используется множество $\{\alpha | \phi_K\alpha\}$ (которое в робинсоновском случае и является оценкой $[\phi_K]$), но чаще всего работают с ультрапроизведениями, пользуясь формулами (1) и (3). Для некоторых специальных полных булевых алгебр Ω , отличных от дискретной полной булевой алгебры $\mathcal{P}(I)$, оценки рассматривал Козн. В частности, таким образом им была решена классическая континуум-проблема ([40]). Однако здесь оценки фигурируют неявно, в контексте доказательств, как некоторые конкретные множества.

Рассмотрение оценок со значениями в произвольной булевой алгебре было начато, по-видимому, в работе Вopenки [54] — здесь оценка рассматривалась для структуры одного определенного вида также в качестве технического средства для решения континуум-проблемы и ряда других специальных вопросов теории

множеств. А именно, она рассматривалась для структуры $\langle V, \in, = \rangle$, где V — класс всех множеств, $\in$ — бинарное отношение принадлежности одного множества другому и $=$ — бинарное отношение равенства двух множеств. Теорема 16) для языка, соответствующего этой структуре, т. е. для языка теории Цермело — Френкеля (языка ZF), содержится в работах Вopenки. Изложение результатов Козна и Вopenки с акцентированным рассмотрением булевозначных оценок содержится в книге [48]. Рассмотрение гейтингвозначных оценок для структуры анализа (для языка анализа) и случая, когда Ω — топология на прямой, появилось у Скотта (см. [55]), а для языка ZF — у Грейсона, а также Фурмана и Скотта ([56], [49]). Там же содержится теорема 1а).

3. Оценка в произвольном кольце — второй пример оценки. Сейчас мы приведем второй, принципиально важный пример оценки и затем увидим, как работают оценки.

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. Обозначим $B \triangleq \text{Idc } K$ множество всех его центральных идемпотентов, т. е. запись $k \in B$ означает, что $k^2 = k$ (« k — идемпотент») и $\forall k_1 \in K (kk_1 = k_1k)$ (« k принадлежат центру кольца K »). В B имеется естественная булева структура:

$$u \wedge v \triangleq u \cdot v, \quad \neg u \triangleq 1 - u, \quad u \vee v \triangleq u + v - u \cdot v$$

и относительно нее B является булевой алгеброй. Булева алгебра B может быть полной или неполной. В первом случае назовем исходное кольцо B -кольцом. Во втором случае нужно перейти к пополнению B до полной решетки.

Полная решетка Ω называется *пополнением* решетки Ω , если Ω — подалгебра $\bar{\Omega}$ (т. е. для них совпадают 0 и 1 и операции $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$) и Ω — плотная часть $\bar{\Omega}$ (т. е. всякий элемент из $\bar{\Omega}$ является точной верхней гранью элементов из Ω , меньших его). Пополнение называется *правильным*, если точные верхние и нижние грани подмножеств множества Ω , вычисленные в Ω и в $\bar{\Omega}$ (если таковые существуют в Ω), совпадают, т. е. $\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega (\bigvee_\alpha u_\alpha = \bigvee_\alpha u_\alpha, \bigwedge_\alpha u_\alpha = \bigwedge_\alpha u_\alpha)$, где $\bigvee_\alpha, \bigwedge_\alpha$ вычисляются в Ω и $\bigvee, \bigwedge$ вычисляются в $\bar{\Omega}$.

Имеется два естественных способа пополнения булевой алгебры B кольца K : или пополнить B по Дедекинду до полной булевой алгебры $\bar{B}$ (это правильное пополнение и существует ровно одно правильное пополнение до полной булевой алгебры, см. [51], [41], [48]), или пополнить B до топологии $\mathcal{T}$ стоуновского пространства S булевой алгебры B . Во втором случае пополнение является полной гейтинговой алгеброй и неправильно (кроме дискретного случая). Это второе пополнение назовем *топологическим пополнением* булевой алгебры B .

Напомним, что B , как и любую булеву алгебру, можно отождествить с кольцом, в котором $u \cdot v \triangleq u \vee v$, $u + v \triangleq u \Delta v \triangleq (u \wedge \neg v) \vee (\neg u \wedge v)$. Это кольцо идемпотентно, т. е. $\forall u (u^2 = u)$. Наоборот, по любому идемпотентному кольцу образуется булева алгебра, в которой $u \wedge v \triangleq u \cdot v$, $u \vee v \triangleq u + v - u \cdot v$, $\neg u \triangleq 1 - u$. Соответствующие категории изоморфны. Всякое идемпотентное кольцо коммутативно и имеет характеристику 2. Так как булеву алгебру можно считать кольцом, то стоуновское пространство $S(B)$ любой булевой алгебры B можно определить как спектр $\text{Spec } B$ этого кольца B . При этом $S(B)$ будет отделимым вполне несвязным компактным топологическим пространством. Совокупность всех его открытых множеств мы и обозначили $\mathcal{T}$. Само B отождествляется с открыто-замкнутыми множествами в $S(B)$ и, следовательно, $B \subset \mathcal{T}$. При этом B — база топологии в $S(B)$, состоящая из всех открыто-замкнутых множеств в $S(B)$. Топология $\mathcal{T}$, как и любая топология, является полной гейтинговой алгеброй относительно естественных операций:

$$\bigvee_\alpha O_\alpha \triangleq \bigcup_\alpha O_\alpha, \quad \bigwedge_\alpha O_\alpha \triangleq \left(\bigcup_\alpha O_\alpha \right)^o, \quad O_1 \vee O_2 \triangleq O_1 \cup O_2,$$

$$O_1 \wedge O_2 \triangleq O_1 \cap O_2, \quad O_1 \rightarrow O_2 \triangleq (\neg O_1)^o \cup O_2, \quad \neg O \triangleq (S - O)^o,$$

где $()^o$ означает внутренность множества. При этом B плотно в $\mathcal{T}$, т. е. $\forall O \in \mathcal{T} \exists \{u_\alpha\} \subseteq B (O = \bigvee_\alpha u_\alpha = \bigcup_\alpha u_\alpha)$. Единица (нуль) в B совпадает с единицей (нулем) в $\mathcal{T}$ и совпадает с 1 в K и с $S(B)$ в $\mathcal{T}$ (с 0 в K и с $\emptyset$ в $\mathcal{T}$).

Положим

$$[k_1 = k_2] \triangleq \bigvee \{e \in B \mid ek_1 = ek_2\}, \quad (12)$$

где $\bigvee$ вычисляется в пополнении B по Дедекинду или топологическом пополнении B . В общем случае $[k_1 = k_2]$ не принадлежит B . Для определенности будем рассматривать далее в этом пункте случай топологического пополнения, когда B вкладывается в $\mathcal{T}$. Продолжим оценку (12), как в пп. 1—2, с атомарных формул на все формулы в языке, соответствующем структуре кольца K . Поэтому операции над оценками выполняются в $\mathcal{T}$.

Отметим, что оценки вида (12) рассматривались в качестве примера Ω -множества в [49] (с. 366—367); исторически они возникли в связи с пирсовским представлением кольца как множества глобальных элементов пирсовского пучка на топологии стоуновского пространства $S(B)$; пирсовским и аналогичным представлениям колец и других алгебраических систем посвящены оригинальная работа [57] и обзоры, например, [62], [63].

Лемма 1. *Определенная таким образом $\mathcal{T}$ -значная оценка $[]$ в категории колец отделима и достижима (т. е. для нее выполняются свойства (8), (11)).*

▷ Если $k_1 = k_2$, то $1k_1 = 1k_2$. Докажем, что
если $[k_1 = k_2] = e \in B$, то $ek_1 = ek_2$. (13)

Отсюда, в частности, вытекает: если $[k_1 = k_2] = 1$, то $k_1 = k_2$. Поэтому будет выполняться свойство (8).

Соотношение (13) достаточно доказать для случая, когда $k_2 = 0$, т. е. достаточно проверить импликацию $(e = \bigvee_{\alpha} e_{\alpha}) \wedge \bigwedge (\forall \alpha (e_{\alpha} k = 0)) \Rightarrow ek = 0$. Пусть $p \in S$, где $S \neq S(B)$ — стоуновское пространство булевой алгебры B . По определению стоуновского пространства S это означает, что p — простой идеал в кольце B . Множество $\bar{p} \neq pK \neq \{ek \mid e \in p \wedge k \in K\}$ образует нетривиальный идеал в K , так как $e_1 k_1 + e_2 k_2 = (e_1 \vee e_2)(e_1 k_1 + e_2 k_2)$ и $pK \neq K$: если $ek = 1$, то $1 - e = 0$, $e = 1$, $p = B$, что противоречит определению простого идеала. Кроме того, если в p имеется какое-то $e \neq 0$, то $0 \neq e1 \in pK$.

Выполняется

$$ek = 0 \Leftrightarrow \forall p \in S(B) (e \notin p \Rightarrow k \in pK). \quad (14)$$

Действительно, $ek = 0 \Rightarrow k = (1 - e)k$, $(1 - e) \in p$, и наоборот, $\forall p \in S(B) (ek \in pK)$, $ek \in \bigcap_{p \in S} pK$, но $\bigcap_{p \in S} pK = \bigvee_{p \in S} \bar{p} = 0$.

Последнее равенство удобно проверить в более общем случае модулей над K (конечно, и K — один из модулей над K). Напомним обозначение

$$(\mathcal{X} : \mathcal{Y}) \neq \{k \in K \mid \mathcal{Y}k \in \mathcal{X}\}, \quad (15)$$

где $\mathcal{X}$ — подмодуль модуля $\mathcal{Y}$ и оба они являются (правыми) модулями над K . Напомним, что модуль называется *подпрямой неразложимым*, если пересечение всех его ненулевых подмодулей является ненулевым подмодулем. Следующие условия эквивалентны: $\forall \mathcal{X}_K (\bigcap_{p \in S} \mathcal{X}_K \bar{p} = 0)$ и $\forall \mathcal{X}_K (\mathcal{X} \text{ — подпрямой неразложимый модуль})$.

модуль $\Rightarrow \exists p \in S (\bar{p} \in (0 : \mathcal{X}))$, где здесь и далее запись $\mathcal{X}_K$ обозначает произвольный (правый) модуль над K . Действительно, если дано первое условие, то для подпрямой неразложимого модуля выполняется $\bigcap_p \mathcal{X} \bar{p} = 0 \Rightarrow \exists p (\mathcal{X} \bar{p} = 0)$. Пусть дано второе условие. Для любого $\mathcal{X}_K$, как известно, найдется семейство $\{\mathcal{Y}_{\alpha}\}$ его подмодулей, для которого $\bigcap_{\alpha} \mathcal{Y}_{\alpha} = 0$ и $\mathcal{X}/\mathcal{Y}_{\alpha}$ — подпрямой неразложимые модули. Следовательно, найдется семейство $\{p_{\alpha}\}$, $p_{\alpha} \in S$, для которого $\bar{p}_{\alpha} \in (0 : \mathcal{X}/\mathcal{Y}_{\alpha}) = (\mathcal{Y}_{\alpha} : \mathcal{X})$ и $\bigcap_p \mathcal{X} \bar{p} \subseteq \bigcap_{\alpha} \mathcal{X} \bar{p}_{\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha} \mathcal{Y}_{\alpha} = 0$. Воспользуемся доказанной эквивалентностью.

Пусть $\mathcal{X}_K$ — подпрямой неразложимый модуль. Пересечение всех его ненулевых подмодулей имеет вид ξK , где $\xi \neq 0$. Пусть $e \neq \in (0 : \mathcal{X})$, где $e \in B$. Тогда $\mathcal{X}e$ — ненулевой подмодуль в $\mathcal{X}$ и

$\xi K \subseteq \mathcal{X}e$, $\xi = \xi e$, $\xi(1 - e) = 0$, $e \notin (0 : \xi K)$ и $(1 - e) \in (0 : \xi K)$. Итак, $(0 : \xi K) \cap B = (0 : \mathcal{X}) \cap B$. Идеал в B вида $p \neq (0 : \xi K) \cap B$ является максимальным в решеточном смысле, так как если $e \notin p$, то $e \notin (0 : \mathcal{X})$, и, как и выше, $(1 - e) \in p$. Следовательно, p — простой идеал, т. е. $p \in S$ и $\bar{p} \in (0 : \mathcal{X})$. Итак, соотношение (14) доказано.

Обозначим $O_e = \{p \in S \mid e \notin p\}$. Как известно, e из B отождествляется именно с множеством O_e в $\mathcal{T}$. Тогда в силу (14) получаем $\forall \alpha \forall p \in O_e (k \in \bar{p})$, $\forall p \in O_e (k \in \bar{p})$, $ek = 0$. Предыдущий абзац по существу воспроизводит рассуждение из фундаментальной работы [57].

Осталось проверить свойство (14), т. е. достижимость нашей оценки. Пусть дано $[(\exists x \phi(x))_K] = 1$, т. е. $\bigcup_{k \in K} [\phi(k)] = 1$. Обозначим $u_k \neq [\phi(k)] \in \mathcal{T}$. Так как B — база топологии в S , то для всех k выполняется $u_k = \bigvee_{\alpha} e_{k, \alpha}$, $e_{k, \alpha} \in B$. В силу компактности S найдется конечное подсемейство $e_{k_1, \alpha_1}, \dots, e_{k_n, \alpha_n}$, для которого

$\bigcup_{i=1}^n e_{k_i, \alpha_i} = S$. Обозначим e_{k_i} объединение $e_{k_i, \alpha}$ при всевозможных α (если таковые имеются). Ясно, что $e_{k_i} \leq [\phi(k_i)]$ и $\bigcup_i e_{k_i} = S$.

Образуем дизъюнктивную подсистему $\{e'_{k_i}\}$ из элементов B . Тогда $e'_{k_i} \leq [\phi(k_i)]$ и $\bigcup_i e'_{k_i} = S$. Образуем $k_0 \neq \sum_i e'_{k_i} k_i$. Это k_0 искомого. Действительно, $[k_0 = k_i] \geq e'_{k_i}$, $[\phi(k_0)] \geq e'_{k_i}$ (используем теорему 1а)). □

Из предложения 1 и этой леммы 1 немедленно вытекает в точности верхняя часть диаграммы 1 (которая в п. 1 была установлена только для простейшей полной булевой алгебры, а именно, для дискретной полной булевой алгебры $\mathcal{P}(I)$). Чтобы для произвольного кольца K получить и нижнюю часть этой диаграммы, нужно определить аналог колец K_{α} , которые в п. 1 были заданы заранее: там K определялось в виде $K \neq \prod_{\alpha} K_{\alpha}$.

Обозначим $K_p \neq K/\bar{p}$, где $p \in S$. Следовательно, роль множества индексов I из примера в п. 2 играет теперь множество $S = S(B)$. Конечно, K не равно $\prod_{p \in S} K_p$. Кольцо K_p естественно

называть *локализацией* K в точке p из S . Локализации (в разных точках) образуют семейство колец $\{K_p \mid p \in S\}$, которое будем записывать короче $\{K_p\}$. Определение K_p содержится в [57].

Напомним, что АЕ-формулой называется любая формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \phi$, где ϕ — бескванторная формула.

Назовем *нормальным* кольцо K , обладающее свойством

$$\forall k \in K \exists e_0 \in B \forall e \in B (ek = 0 \Leftrightarrow e \leq e_0).$$

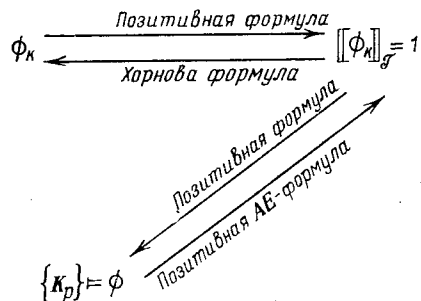
Очевидно, в таком и только в таком кольце выполняется

$$\forall k_1 \in K \forall k_2 \in K ([k_1 = k_2] \in B).$$

Рассмотрим какое-то фиксированное пополнение $\bar{\Omega}$ исходной решетки Ω . Оценка $[]$ со значениями в $\bar{\Omega}$ называется *нормальной*, если для всех атомарных формул ϕ' выполняется $[\phi'] \in \bar{\Omega}$. Таким образом, оценка, определяемая формулой (12), нормальна в том и только в том случае, когда соответствующее кольцо нормально.

Следующая теорема 2в) (вместе с предыдущим построением) получена автором в [28], см. также [29], [30]. Она докладывалась на конференциях в Тбилиси и Зальцбурге ([25], [64]). Утверждение в) этой теоремы сознательно сформулировано в виде серии примеров — общее утверждение имеет громоздкий вид.

Теорема 2. а) Для $\mathcal{T}$ -значной оценки в категории колец (т. е. для оценки, определяемой формулой (12) и вычисляемой в топологии $\mathcal{T}$) выполняются утверждения, показанные на следующей диаграмме 2 (аналогичной диаграмме 1)



б) Если кольцо K нормально, то для любой формулы ϕ в предваренной нормальной форме выполняется

$$([\phi_K] = 1) \Rightarrow (\{K_p\} \models \phi)$$

и для любой АБ-формулы выполняется

$$(\{K_p\} \models \phi) \Rightarrow ([\phi_K] = 1).$$

(Это усиление диаграммы 2 до аналогичной части диаграммы 1.)

в) Пусть формулы ϕ и ϕ' соответствуют друг другу, как показано в таблице 1. Тогда выполняется

$$\phi_K \Leftrightarrow ([\phi'_K] = 1).$$

(Это принципиальное усиление соответствующей стрелки на диаграмме 2 и даже на диаграмме 1.)

Далее переменная k пробегает кольцо K , переменная e пробегает булеву алгебру B ; $\langle k \rangle$ — главный идеал, порожденный элементом k , т. е. идеал KkK . Если X — произвольное под-

множество K , то $X^* = \{k | Xk = 0\}$, т. е. X^* — правый аннулятор множества X . Переменные a, b пробегают множество всех (двусторонних) идеалов в K и $\text{Id } K$ — множество всех идемпотентов кольца K . Будем считать, что в формулу ϕ' конъюнктивно

Таблица 1

	ϕ	ϕ'
1	$0 = 0$ — произвольное кольцо	$\forall k (\forall k_1 (k^2 = k \wedge k k_1 = k_1 k) \Rightarrow k = 0 \vee k = 1)$ — кольцо без нетривиальных центральных идемпотентов
2	$\forall k \exists e (\langle k \rangle^* = eK)$ — строго бириккартово кольцо	$\forall k \forall k_1 (\forall t (k t k_1 = 0) \Rightarrow k = 0 \vee \forall k_1 = 0)$ — первичное кольцо (K -нормальное)
3	$\forall k \exists e (\langle k \rangle = eK)$ — бирегулярное кольцо	$\forall k \exists n \exists p_1 \dots \exists p_n \exists q_1 \dots \exists q_n (k = 0 \vee 1 = p_1 k q_1 + \dots + p_n k q_n)$ — квазипростое кольцо
4	$\text{Id } K = \text{Idc } K, \forall k \exists t (k t k = k)$ — абелево регулярное кольцо	$\forall k \exists t (k = 0 \vee k t = t k = 1)$ — тело
5	$\forall k \exists e (k^* = eK)$ — строго бириккартово кольцо	$\forall k \forall k_1 (k k_1 = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k_1 = 0)$ — кольцо без делителей нуля (K -нормальное)

добавляется тривиальный сомножитель, который говорит, что « K — кольцо», т. е. сомножитель вида $\forall k_1 \forall k_2 \forall k_3 ((k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)) \wedge \forall k (k + 0 = 0 + k = k) \dots$ Легко проверить (независимо от остального содержания теоремы 2), что значение оценки $[]$ на этом конъюнктивном сомножителе равно 1. Поэтому, подсчитывая оценки $[\phi']$, можно забыть о нем.

Упомянутые алгебраические понятия содержатся, например, в [58].

▷ а) Осталось доказать нижнюю часть диаграммы. Сначала индукцией по длине формулы ϕ проверим

$$[\phi_K] \geq u \Rightarrow \forall p \in u (K_p \models \phi), \quad (16)$$

где $u \in B$. Для атомарной и, следовательно, для позитивной бескванторной формулы выполняется более сильное утверждение:

$$(p \in [\phi_K]) \Leftrightarrow (K_p \models \phi), \quad (17)$$

т. е. $[\phi_K] = \{p \in S | K_p \models \phi\}$ (как и в п. 1).

Действительно, если $\phi \Leftrightarrow (k_1 = k_2)$, то $p \in [\phi_K] = \bigcup \{e \in B \mid ek_1 = ek_2\}$ влечет $p \in O_e$ (т. е. $e \notin p$) и $ek_1 = ek_2$. Поэтому $(1-e)(k_1 - k_2) = k_1 - k_2$, $k_1 - k_2 \in \bar{p}$. Если $\{k_1\}_p = \{k_2\}_p$, то найдется e из p , для которого $k_1 - k_2 = et$, где $t \in K$. Тогда $(1-e) \notin p$ и $(1-e)(k_1 - k_2) = 0$, $(1-e) \leq [k_1 = k_2]$ и $p \in O_{1-e}$, т. е. $p \in [k_1 = k_2]$. Если ϕ получается из атомарных формул с помощью связок $\wedge$ и $\vee$, то эквивалентность (17) и соответствующее равенство, очевидно, сохраняются.

Для случая связки $\vee$ формула (16) очевидна. Для случая связки $\exists$, если $u = 1$, то нужно непосредственно применить свойство (11); для произвольного u нужно сначала доказать (для $u_0 \in B$) свойство, подобное свойству (11):

$$[(\exists x \phi(x))_K] \geq u_0 \Rightarrow \exists k_0 \in K ([(\phi(k_0))_K] \geq u_0). \quad (18)$$

Проверим стрелку, касающуюся АЕ-формул. Если ϕ — позитивная бескванторная формула, то в силу (17) получаем требуемую импликацию даже при каждом отдельном p из S .

Для связки $\exists$ получаем $\forall p \in S (K_p \models \exists x \phi), \forall p \exists k_p (K_p \models \phi([k_p]_p))$, множество $O_p \Leftrightarrow \{p' \mid K_{p'} \models \phi([k_p]_{p'})\}$ содержит p и открыто (так как ϕ бескванторная и в силу (17) это множество равно значению $[]$). Полученное семейство $\{O_p\}$ открытых множеств (индексируемое параметром p) покрывает все S . Каждое открытое множество из этого покрытия заменим на объединение открыто-замкнутого множества и в силу компактности выберем открыто-замкнутое подпокрытие. Превратим его в дизъюнктное покрытие и объединим те элементы этого покрытия, которые содержатся в одном O_p ; обозначим это объединение O'_p . Итак, $O_p \subseteq O'_p$, $O'_p \subseteq B$ и $\{O'_p\}$ конечно. Склеим k_p на $\{O'_p\}$, т. е. образуем $k_0 \Leftrightarrow \sum_{O'_p} e_p k_p$, где e_p — элемент B , соответствующий откры-

то-замкнутому множеству O'_p . Для любого q из S найдется такое O'_p , что $q \in O'_p$ (т. е. $e_p \notin q$). Тогда $[k_0]_q = [k_p]_q$, так как $e_p k_0 = e_p k_p$, $e_p(k_0 - k_p) = 0$, $(1 - e_p)(k_0 - k_p) = k_0 - k_p$ и $(1 - e_p) \in q$. Поэтому $\forall q \in S (K_q \models \phi([k_0]_q))$, т. е. $\{K_p\} \models \phi(k_0)$ и $[(\phi(k_0))_K] = 1$, $[(\exists x \phi(x))_K] = 1$.

Для связки $\forall$ получаем $\forall k \forall p (K_p \models \phi([k]_p)), \forall k (\{K_p\} \models \phi(k))$, $\forall k ([(\phi(k))_K] = 1)$.

Ясно, что такие же стрелки можно получить и на любом $u \in B$ вместо S .

б) Здесь нужно рассмотреть только один новый случай, когда бескванторная формула ϕ содержит связку $\neg$. Все остальные связки рассматриваются точно так же. Для нормальных колец оценка атомарной формулы принадлежит B (иными словами, является открыто-замкнутым множеством). Поэтому $[\neg \phi_K] = \neg [\phi_K] = \{p \in S \mid K_p \models \neg \phi\}$. Итак, соотношение (17) имеет место для любых бескванторных формул.

в) 1) Если $p \in [\forall k_1 (k^2 = k \wedge k k_1 = k_1 k)]$, то найдется какое-то O_{e_0} , где $e_0 \in B$, для которого $p \in O_{e_0}$ (т. е. $e_0 \notin p$) и $\forall k_1 \in K (e_0 k^2 = e_0 k \wedge e_0 k k_1 = k_1 e_0 k)$, т. е. $e_0 k \in \text{Idc } K$. Если $p \notin [k = 1]$, то $\forall e (e(k-1) = 0 \Rightarrow e \in p)$ и в качестве e выберем $e = e_0 k$. Так как $e_0 k(k-1) = e_0 k^2 - e_0 k = 0$, то $e_0 k \in p$, $(1 - e_0 k) \notin p$, $e_1 \Leftrightarrow e_0(1 - e_0 k) \notin p$ (так как p — простой идеал) и $(e_0 - e_0 k)k = 0$, т. е. $p \in O_{e_1}$ и $O_{e_1} \leq [k = 0]$. Итак, $p \in [k = 0]$.

В обратную сторону утверждение очевидно.

2) Если $p \in [\forall t (k t k_1 = 0)]$, то найдется такое O_{e_0} , что $p \in O_{e_0}$ и $\forall t (e_0 k t k_1 = 0)$. Тогда $e_0 k_1 \in \langle k \rangle^*$. В силу условия бирикартовости существует e , для которого $\langle k \rangle^* = eK$. В частности, $ek = 0$ (т. е. $e \leq [k = 0]$) и $e_0 k_1 = et$. Тогда $(1 - e)e_0 k_1 = 0$, $(1 - e)e_0 \leq [k_1 = 0]$, $e_0 = (1 - e)e_0 \vee ee_0 \leq (1 - e) \cdot e_0 \vee e \leq [k_1 = 0] \vee [k = 0]$. Итак $p \in [k_1 = 0] \vee [k = 0]$.

Рассмотрим обратное утверждение. Условие строгой бирикартовости можно записать формулой $\phi \Leftrightarrow \forall k \exists e \forall k_1 \forall t (e^2 = e \wedge \wedge ek_1 = k_1 e \wedge ek = 0 \wedge (\forall t_1 (k t_1 t = 0) \Rightarrow t = et))$. По условию $[k = 0] \in B$, т. е. $[k = 0] \vee [k \neq 0] = 1$. Оценим снизу $[\exists e \forall k_1 \forall t (e^2 = e \wedge \wedge ek_1 = k_1 e \wedge ek = 0 \wedge (\forall t_1 (k t_1 t = 0) \Rightarrow t = et))]$, подставив $e = 1$ и $e = 0$. Первое слагаемое оценивается снизу $[k = 0]$. Во втором слагаемом сомножитель оценивается снизу $[k \neq 0]$, так как по условию $[\forall t_1 (k t_1 t = 0)] \leq [k = 0] \vee [t = 0]$ и отсюда $[k \neq 0] \wedge [\forall t_1 (k t_1 t = 0)] \leq [t = 0]$.

Итак, исходная оценка равна 1. Раскрывая ее, получаем, что K строго бирикартово.

3) Пусть $k \in K$. В силу бирегулярности K найдутся e из B и $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ из K , для которых $k = ek$ и $e = p_1 k q_1 + \dots + p_n k q_n$. Тогда $[\exists p_1 \dots \exists p_n \exists q_1 \dots \exists q_n (k = 0) \vee (1 = p_1 k q_1 + \dots + p_n k q_n)] \geq [k = 0] \vee [1 = p_1 k q_1 + \dots + p_n k q_n] = [k = 0] \vee [1 - e = 0]$ и $(1 - e)k = 0$, $(1 - e) \leq [k = 0]$, $e \leq [1 - e = 0]$. Поэтому исходная оценка ≥ 1 , что и означает утверждение из правой части третьей строки таблицы 1. Наоборот, свойство бирегулярности записывается формулой

$$\phi \Leftrightarrow \forall k \exists e \exists n \exists p_1 \dots \exists p_n \exists q_1 \dots \exists q_n \forall t (e^2 = e \wedge et = te \wedge k = ek \wedge e = p_1 k q_1 + \dots + p_n k q_n),$$

где n — переменная по всем натуральным числам, и, строго говоря, вместо $p_1, \dots, p_n$ и $q_1, \dots, q_n$ соответственно нужно написать переменные p и q нового сорта, пробегающие не K , а множество всех конечных последовательностей из элементов K .

Следующая лемма при всей ее очевидности часто бывает полезна.

Лемма 2. Если оценка вычисляется в топологии $\mathcal{T}$ квази-компактного топологического пространства и оценка $[\exists \alpha \phi(\alpha)]$

является открыто-замкнутым множеством, то

$$[\exists \alpha \phi(\alpha)]_{\mathcal{T}} = [\phi(\alpha_1) \vee \dots \vee \phi(\alpha_k)],$$

где фиксированные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ переменной α определяются по формуле ϕ .

Формально мы не определили язык, которому принадлежит формула ϕ , и оценку $[\]$ для этого языка. Это легко сделать, и в дальнейшем будет очевидно. (Конечно $[\exists \alpha \phi(\alpha)] = \bigvee_{\alpha} [\phi(\alpha)]$

и $[\forall \alpha \phi(\alpha)] = \bigwedge_{\alpha} [\phi(\alpha)]$.) Можно заменить $\mathcal{T}$ на любую компактную полную гейтингую алгебру. Действительно, $[\exists \alpha \phi(\alpha)] = \bigvee_{\alpha} [\phi(\alpha)] = [\phi(\alpha_1) \vee \dots \vee \phi(\alpha_k)] = [\phi(\alpha_1) \vee \dots \vee \phi(\alpha_k)]$. $\square$

Нам дано $[\phi_K] = 1$. Пусть $k \in K$. Тогда

$$\begin{aligned} [\exists n \exists p \exists q ((\text{дл}(p) = \text{дл}(q) = n) \wedge (k = 0 \vee 1 = p_1 k q_1 + \dots \\ \dots + p_n k q_n))] = 1 = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} [\exists p \exists q (\dots)] = [\exists p \exists q (\text{дл}(p) = \text{дл}(q) = \\ = n_1 \wedge (\dots))] \vee \dots \vee [\exists p \exists q (\text{дл}(p) = \text{дл}(q) = n_k \wedge (\dots))], \end{aligned}$$

где $n_1 < n_2 < \dots < n_k \approx m$. Отсюда $1 = [\exists p \exists q (\text{дл}(p) = \text{дл}(q) = m \wedge \bigwedge (\dots))] \leq [\exists p_1 \dots \exists p_m \exists q_1 \dots \exists q_m (k = 0 \vee 1 = p_1 k q_1 + \dots + p_m k q_m)]$. Согласно свойству достижимости (11) найдутся $p_1, \dots, q_m \in K$, для которых $[k = 0 \vee 1 = p_1 k q_1 + \dots + p_m k q_m] = 1$. Поэтому два слагаемых в левой части не пересекаются, т. е. являются открыто-замкнутыми множествами. Пусть e соответствует второму слагаемому. Тогда $ek = k$ и $e = p_1 k q_1 + \dots + p_m k q_m$. Последнее как раз означает бирегулярность кольца K .

4) Пусть $k \in K$. Нужно вычислить значение оценки $\bigvee \{[k = 0] \vee ([kt = 1] \wedge [tk = 1]) \mid t \in K\}$. В силу регулярности K найдется t из K , для которого $ktk = k$. Положим $e \approx kt$. Такое e — идемпотент, и в силу условия $\text{Id } K = \text{Idc } K$ получаем $e \in B$. Отметим, что $e = e_1$, где $e_1 \approx tk$. Действительно, $eK = \langle k \rangle = e_1 K$, $e = e_1 p$, $e_1 = eq$, $ee_1 = e$, $ee_1 = e_1$, $e = e_1$. Далее, $ek = k$, $(1 - e)k = 0$, $(1 - e) \leq [k = 0]$, $e(1 - kt) = e(1 - e) = 0$, $e \leq [1 - kt = 0]$, $e = e_1 \leq [1 - tk] = 0$. Оценим исходную оценку одним слагаемым, соответствующим выбранному значению t . Это слагаемое $\geq (1 - e) \vee (e \wedge e) = 1$.

В обратную сторону будем рассуждать по привычной схеме. Условие абелевой регулярности записывается двумя хорновыми формулами $\phi_1 \approx \forall k \exists t (ktk = k)$ и $\phi_2 \approx \forall k \forall t (k^2 = k \Rightarrow kt = tk)$. Формула ϕ_K , выражающая свойство «быть телом», позитивна. Из утверждения а) этой теоремы получаем, что все локализации K_p кольца K — тела и, следовательно, абелевы регулярные кольца. Непосредственная проверка показывает, что тогда оценка формул ϕ_1 и ϕ_2 равна 1, и в силу хорновости переходим к K .

5) Пусть $k \in K$, $k_1 \in K$. Обозначим $e' \approx [kk_1 = 0]$, $e \approx [k = 0]$. Так как кольцо K строго риккартово, то $k^* = fK$ и $e = f$. Действительно, в силу (13) имеем $ek = 0$, $e = ft$, $ef = e$, $e \leq f$ и $fk = 0$, $f \leq e$. Итак, $k^* = eK$. Далее, $ke'k_1 = 0$, $e'k_1 \in k^*$, $e'k_1 = et$, $(1 - e)e'k_1 = 0$, $(1 - e)e' \leq [k_1 = 0]$, $e' = ee' \vee (1 - e)e' \leq e \vee \vee (1 - e)e' \leq [k = 0] \vee [k_1 = 0]$. Наоборот, свойство строгой риккартовости записывается формулой

$$\phi \approx \forall k \exists e \forall t \forall k_1 (e^2 = e \wedge et = te \wedge (kk_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = ek_1)).$$

Положим $e \approx [k = 0]$. По условию элемент $e \in B$ и, следовательно, осталось проверить, что для любого $k_1 \in K$ выполняется $kk_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = ek_1$. Пусть $kk_1 = 0$. Тогда, используя условие отдельности (8) и условие $[\phi_K] = 1$, получаем $[k = 0] \vee [k_1 = 0] = 1$. Умножением на $1 - e$ получим $[k_1 = 0] \geq 1 - e$, т. е. если $[k_1 = 0] = f$, то $(1 - e) \leq f$, $fk_1 = 0$, $(1 - e)k_1 = 0$, $k_1 = ek_1$. Пусть $k_1 = ek_1$. Тогда $(1 - e)k_1 = 0$, $(1 - e) \leq [kk_1 = 0]$ и в силу выбора e получаем $ekk_1 = 0$, $e \leq [kk_1 = 0]$. Согласно свойству отдельности (8) это означает, что $kk_1 = 0$.

Итак, теорема 2 доказана. $\square$

4. Теоремы переноса (и элементарная эквивалентность теорий) как следствия существования оценок. Теорема 2 в принципе позволяет получать математические утверждения по определенной схеме — а именно, она позволяет переносить утверждения, известные в частном случае, на случай, более общий. Утверждения, получаемые по этой схеме, иногда называют теоремами переноса. Изложим эту схему для категории колец. Общий случай во всем аналогичен этому. Возможны три варианта.

1) Если $[\phi_K] = 1$ и, может быть, кроме того, $[^1\phi_K] = 1, \dots, [^n\phi_K] = 1$, $\text{HPI} \vdash (\phi_K \wedge ^1\phi_K \wedge \dots \wedge ^n\phi_K \Rightarrow \psi)$, ψ — хорнова формула, то $[\phi_K \wedge ^1\phi_K \wedge \dots \wedge ^n\phi_K \Rightarrow \psi] = 1$, $[\phi_K \wedge ^1\phi_K \wedge \dots \wedge ^n\phi_K] \leq [\psi_K]$, $[\psi_K] = 1$, ψ_K . Это можно понимать как «устранимость сечений»: при доказательстве хорнова свойства ψ кольца K можно пользоваться свойствами ϕ' , $^1\phi'$, $\dots$, $^n\phi'$, которыми кольцо K в обычном смысле заведомо не обладает и которые являются усилениями свойства ϕ , характеризующего кольцо K .

Недостатком этого варианта является необходимость пользоваться интуиционистским выводом. (Хотя нужно отметить, что как раз интуиционистская выводимость простых теорем из анализа, элементарной геометрии и алгебры хорошо изучена, и таким образом можно превращать эти выводы в утверждения, относящиеся к более сложным объектам.)

Чтобы избежать этого, полезно иногда прямо вычислять значение оценки $[\psi]$, пользуясь ее индуктивным определением. Можно проверять не выводимость формулы $\phi \wedge ^1\phi' \wedge \dots \wedge ^n\phi' \Rightarrow \psi$, а ее интуиционистскую общезначимость.

2) *Специальной хорновой формулой* называется любая формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n (\phi_i \Rightarrow P_i) \right),$$

где ϕ_i — любые позитивные формулы и P_i — любые атомарные формулы. АЕ-хорновой формулой называется хорнова формула с кванторной приставкой вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m$. Следующее утверждение известно в случае специальной хорновой формулы (см. [50], с. 386); для АЕ-хорновой формулы оно отмечено в [28], [29].

Следствие 1. Если ψ — специальная хорнова или АЕ-хорнова формула и $PI \vdash (\phi' \Rightarrow \psi)$, то для любого кольца K , обладающего свойством ϕ , выполняется ψ_K , где ϕ и ϕ' соответствуют друг другу по таблице 1. Иными словами, теории, состоящие из формул этого вида, совпадают соответственно для классов колец $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, которые определяются формулами ϕ и ϕ' .

▷ Легко заметить, что импликация $([\phi] = 1) \Rightarrow \forall p \in S (K_p \models \phi)$ имеет место и для ряда формул ϕ , содержащих импликацию после кванторов. В частности, она верна для формул вида $\forall x \phi \Rightarrow \psi$, если оценка ψ — открыто-замкнутое множество и ϕ — конъюнкция или дизъюнкция равенств. Поэтому в K_p выполняется ϕ' и, следовательно, ψ . Отсюда для формул ψ указанного вида получаем $K \models \psi$. □

Заметим, что классы формул, которые фигурируют здесь и в теореме 2, можно без труда расширить.

Это приводит к совпадению АЕ-хорновых и специальных хорновых теорий для соответствующих классов алгебраических систем. В частности, если ${}^1\phi'$ выражает свойство, из которого вместе с ϕ' вытекает свойство «быть алгебраически замкнутым полем» (или «быть вещественно замкнутым полем») и $[{}^1\phi'_K] = 1$, то так как $\psi \Leftarrow \forall a_0 \dots \forall a_{n-1} \exists x (a_0 + a_1x + \dots + x^n = 0)$ есть АЕ-хорнова формула при всех n , то K — алгебраически замкнутое (соответственно вещественно замкнутое) поле. В [13], [28] приведены примеры такого сорта. Более широкий пример, когда применима рассматриваемая ситуация, можно описать следующим образом: теория Галуа для тел хорошо известна; переходя к предикату $[] = 1$, мы фактически переходим от коммутативного кольца K к «телу K » и затем можем превратить «оценочные свойства K », т. е. результаты вида $[\psi_K] = 1$, в обычные свойства K , т. е. в результаты вида ψ_K ([28] — [30]).

Опять-таки, вместо выводимости в PI можно непосредственно подсчитывать $[\psi]$ или пользоваться общезначимостью или истинностью в одной модели полной теории.

Конечно, вместо подсчета оценок для АЕ-формул можно проверять $\{K_p\} \models \psi$, что в ряде случаев бывает сложнее. В работе [49] приводится результат: если θ — геометрическая формула,

т. е. $\theta \Leftarrow \forall x_1 \dots \forall x_n (\phi \Rightarrow \psi)$, где ϕ и ψ строятся из связок $=, \wedge, \vee, \exists$, и θ классически выводима, то интуиционистски также выводима θ , т. е. $[\theta] = 1$.

3) Если рассматривать оценки со значениями в дедекиндовом пополнении B исходной булевой алгебры B , то интуиционистская специфика исчезает, но в этом случае, чтобы обеспечить отделимость и достижимость полученной B -оценки, нужно наложить некоторые ограничения на кольцо K . Вопрос о том, каковы эти ограничения, рассматривается в п. 6. Сейчас отметим, что в этом варианте, если $[\phi'_K \wedge {}^1\phi'_K \wedge \dots \wedge {}^n\phi'_K]_B = 1$ и $PI \vdash (\phi' \wedge {}^1\phi' \wedge \dots \wedge {}^n\phi' \Rightarrow \psi)$, где ψ — хорнова формула, то выполняется ψ_K . Образно говоря, хорновы следствия мифических свойств $\phi', {}^1\phi', \dots, {}^n\phi'$ кольца K выполняются для K .

Это приводит к совпадению хорновых теорий соответствующих классов алгебраических систем.

5. Оценка в произвольном пучке — третий пример оценки. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, K — ее объект и K представим в виде $K = \mathcal{F}_\Omega(1)$, где $\mathcal{F}_\Omega$ — пучок на гейтинговой алгебре Ω и 1 — наибольший элемент в Ω . Такой объект K назовем Ω -представимым, а пучок $\mathcal{F}_\Omega$ назовем представляющим объект K . Если любой объект из $\mathcal{C}$ является Ω -представимым с помощью объекта Ω из категории $\mathcal{C}_0$, то категорию $\mathcal{C}$ назовем $\mathcal{C}_0$ -представимой. Например, категория колец представима категорией булевых колец, т. е. рассматривается функтор из категории категорий в категорию решеточных категорий.

Напомним понятие пучка на решетке и связанную с ним терминологию.

Любая решетка рассматривается как категория, объектами которой являются элементы решетки и в которой морфизмы определяются порядком решетки:

$$u \leq v \Rightarrow \text{Hom}(u, v) \Leftarrow \{1\}, \quad u \not\leq v \Rightarrow \text{Hom}(u, v) \Leftarrow \emptyset.$$

Предпучком называется любой контравариантный функтор, определенный, вообще говоря, на произвольной категории, но в данном дополнении на категории, являющейся решеткой, и со значениями в какой-то подкатегории $\mathcal{C}$ категории множеств Set . Классическим примером предпучка является предпучок на решетке $\mathcal{T}$, состоящий из всех открытых множеств произвольного топологического пространства X . Такая решетка $\mathcal{T}$ называется топологией; конечно, $0_1 \leq 0_2 \Leftarrow 0_1 \leq 0_2$. Пучком называется любой предпучок, обладающий свойством

$$\begin{aligned} \forall \{k_\alpha\} \forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega \forall u \in \Omega \left(u = \bigvee_\alpha u_\alpha \wedge \forall \alpha (k_\alpha \in \mathcal{F}(u_\alpha)) \right) \wedge \\ \wedge \forall \alpha \forall \beta (\rho_{u_\alpha \wedge u_\beta}(k_\alpha) = \rho_{u_\alpha \wedge u_\beta}(k_\beta)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists! k \in \mathcal{F}(u) \Rightarrow (\forall \alpha (\rho_{u_\alpha}(k) = k_\alpha)), \end{aligned} \quad (19)$$

где ρ_v^u (в случае $v \leq u$) — морфизм категории C , являющийся значением предпучка на единственном морфизме из v в u . В записи $\rho_v^u(k)$ можно опускать верхний индекс, так как он однозначно восстанавливается по k , которое обязано принадлежать $\mathcal{F}(u)$. (Семейство $\{\mathcal{F}(u) | u \in \Omega\}$ состоит по определению из дизъюнктивных множеств, т. е. $u \neq v \Rightarrow \mathcal{F}(u) \cap \mathcal{F}(v) = \emptyset$.) Иногда вместо $\rho_v(k)$ пишут $k \uparrow v$.

Аддитивным предпучком назовем предпучок, для которого выполняется условие (19), когда в посылке находится любое конечное семейство $\{u_\alpha\}$.

Э-предпучком назовем предпучок, для которого выполняется условие (19) без требования единственности фигурирующего в нем k .

!-предпучком (отделимым) назовем предпучок, для которого выполняется часть условия (19), а именно,

$$\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega \forall u \in \Omega \forall k_1 \in \mathcal{F}(u) \forall k_2 \in \mathcal{F}(u) (u = \bigvee_\alpha u_\alpha \wedge \bigwedge \forall \alpha (k_1 \uparrow u_\alpha = k_2 \uparrow u_\alpha \Rightarrow k_1 = k_2)).$$

Аналогично определяется пучок со значениями в категории, которая не обязательно является категорией множеств. Рассматривая произвольный топос $\mathcal{S}$, опять-таки приходим к пучку на решетке $\Omega_{\mathcal{S}}$ (см., например, [60]).

Вместо оценки (12) рассмотрим следующую $\bar{\Omega}$ -значную оценку в категории C , где $\bar{\Omega}$ — пополнение Ω до полной гейтинговой алгебры:

$$[k_1 = k_2]_{\mathcal{F}} \doteq [k_1 = k_2]_{\bar{\Omega}} \doteq \bigvee \{u \in \Omega \mid \rho_u(k_1) = \rho_u(k_2)\}. \quad (20)$$

Как и в п. 4, $\bigwedge$ вычисляется в $\bar{\Omega}$. Такая оценка по существу рассматривается в [49].

На случай оценки, определенной формулой (20), хотелось бы перенести теорему 2. Для этого опишем действующих лиц: истинностные предикаты ϕ_k и $[\phi_k]_{\bar{\Omega}} = 1$ уже имеются, нужно определить аналоги S и K_p .

Если Ω — гейтингова алгебра (или даже только дистрибутивна верхняя полурешетка с нулем), то по Ω однозначно (с точностью до гомеоморфизма) строится T_0 -топологическое пространство $S = S(\Omega)$, в котором база $\mathcal{T}_0$ топологии, состоящая из всех открыто-квазикомпактных множеств, изоморфна Ω (см. [41]). А именно, S состоит из всех простых идеалов в Ω и $\mathcal{T}_0 \doteq \{O_u \mid u \in \Omega\}$, $O_u \doteq \{p \in S \mid u \notin p\}$. Соответствие $u \leftrightarrow O_u$ является изоморфизмом Ω и $\mathcal{T}_0$, и обычно u и O_u не различаются. Поскольку Ω содержит 1, то $S = O_1$, и, следовательно, само S является T_0 -топологическим квазикомпактным пространством.

Отделимость S эквивалентна булевости Ω . Пространство S — очевидное обобщение спектра кольца и стоунова пространства булевой алгебры. Его также называют *стоуновым пространством*.

Точкой в Ω называется любой простой идеал в Ω ; по определению точки образуют множество S . *Локализацией* (слоем) в точке p из S называется фактормножество $\mathcal{F}_p \doteq \left(\bigcup_{u \in \Omega} \mathcal{F}(u) \right) / \sim_p$, где $(k \sim_p t) \Leftrightarrow \exists u \in \Omega (p \in O_u \wedge \rho_u(k) = \rho_u(t))$. Структура объектов категории C индуцируется в слой $\mathcal{F}_p$. Обозначим $\mathcal{F} \doteq \bigcup_{u \in \Omega} \mathcal{F}(u)$. Тогда $\mathcal{F}_p \doteq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ u \in \Omega}} \langle \mathcal{F}, \mathcal{F}_p \rangle$, где $\mathcal{T}_p \doteq \{O_u \mid p \in O_u\}$ — база топологии в точке p и $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ u \in \Omega}}$ — индуктивный (прямой) предел.

Если $\mathcal{F}$ — вялый пучок (т. е. все отображения $\rho_v^1: \mathcal{F}(1) \rightarrow \mathcal{F}(v)$ сюръективны), то в определение $\mathcal{F}_p$ вместо $\mathcal{F}$ можно подставить $\mathcal{F}_1 \doteq \mathcal{F}(1)$.

Как и в п. 3, рассмотрим сначала топологическое пополнение $\bar{\Omega}$, т. е. в качестве $\bar{\Omega}$ выберем $\mathcal{T} \doteq \mathcal{T}(S)$. Выбор пополнения индуцирует в $\bar{\Omega}$, вообще говоря, частично определенную операцию вычисления точной верхней грани, в данном случае это теоретико-множественное объединение элементов $\bar{\Omega}$, рассматриваемых как множества.

Предпучок $\mathcal{F}$ назовем $\bigcup$ -пучком, если выполняется условие (19), в котором посылка $u = \bigvee_\alpha u_\alpha$ заменена на посылку $u = \bigcup_\alpha u_\alpha$. Так как $\bigcup_\alpha u_\alpha \leq \bigvee_\alpha u_\alpha$, то условие $u = \bigcup_\alpha u_\alpha$ влечет существование $\bigvee_\alpha u_\alpha$ и равенство $u = \bigcup_\alpha u_\alpha = \bigvee_\alpha u_\alpha$. Поэтому любой пучок на $\bar{\Omega}$ является $\bigcup$ -пучком на $\bar{\Omega}$. Аналогично определяется понятие $\bar{\Omega}$ -пучка для любого фиксированного пополнения $\bar{\Omega}$.

Ситуация, рассмотренная в п. 3, полностью укладывается в приведенную схему, а именно, по произвольному (ассоциативному, с единицей) кольцу K однозначно определяется предпучок $\mathcal{F}(\cdot)$ на $\bar{\Omega} \doteq \text{Idc } K$, представляющий K , т. е. $K = \mathcal{F}_1(1)$, $\bar{\Omega} \doteq \mathcal{T}(S(\bar{\Omega}))$, $[\] = [\]_{\bar{\Omega}}$ и, наконец, $K_p = \mathcal{F}_p$. Здесь $\bar{\Omega}$ — не только гейтингова алгебра, но и булева алгебра, поэтому вместо $\bar{\Omega}$ обычно пишут B . А именно, предпучок $\mathcal{F}$ на B определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(e) \doteq eK, \quad e_1 \leq e_2 \Rightarrow \rho_{e_1}^{e_2}(k) \doteq e_1 k, \quad (21)$$

где $e, e_1, e_2 \in B$. Этот предпучок назовем *каноническим предпучком* кольца K . Оказывается, что канонический предпучок независимо ни от каких условий на кольцо K является $\bigcup$ -пучком. Этот результат по существу содержится в [57] и легко получается из соотношений (13)–(14). Продолжение канонического

предпучка на $\mathcal{T}$, которое по теореме 3 всегда возможно, совпадает с пирсовским пучком, определенным в [57].

Назовем *пучковым* кольцо K , для которого канонический предпучок является пучком.

Если u из B отождествить с центральным идемпотентом $u \cdot 1 + \bar{u} \cdot 0$, то легко проверить, что любой аддитивный предпучок на произвольной булевой алгебре B , представляющий K , изоморфен сужению канонического предпучка кольца K на правильную подалгебру $\text{Idc } K$, изоморфную B (см. [28]). Поэтому изучение произвольного аддитивного предпучка (и тем более пучка) на булевой алгебре со значениями в категории колец по существу сводится к изучению канонического предпучка кольца; последний был рассмотрен в теореме 2.

Укажем еще три примера этой схемы (см. [28] — [30]).

Если $\mathcal{X}$ — (правый) модуль над кольцом K , $B \rightleftharpoons \text{Idc } K$ и

$$\mathcal{F}(e) \rightleftharpoons \mathcal{X}e, \quad e_1 \leq e_2 \Rightarrow \rho_{e_1}^e(x) = xe_1, \quad (22)$$

где $e, e_1, e_2 \in B$, то $\mathcal{F}$ — предпучок на B , представляющий $\mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{X} = \mathcal{F}(1)$. Назовем этот предпучок *каноническим предпучком* модуля $\mathcal{X}_K$. Оказывается, что и этот канонический предпучок без всяких условий на $\mathcal{X}$ и K является $\bigcup$ -пучком. Это, по существу, доказано в соотношениях (13) — (14), см. [57]. Следовательно, и для языка, соответствующего структуре модуля $\mathcal{X}_K$, возникает оценка $[\]_{\mathcal{F}} = [\]_{\bar{B}}$, где $\bar{B}$ — пополнение B , например, $\bar{B}$ совпадает с $\mathcal{T}(S(B))$. Образно говоря, в смысле этой оценки модуль $\mathcal{X}_K$ является векторным пространством.

Назовем *пучковым* модуль $\mathcal{X}_K$, у которого канонический предпучок является пучком.

Второй пример. Пусть G — моноид и Ω — множество всех его правых идеалов, т. е. $X \in G$, если $\forall g \in G (Xg \in X)$. Фиксируем в G в качестве булевых операций обычные теоретико-множественные операции и в качестве отношения порядка — отношение включения. Тогда Ω — полная гейтингова алгебра. Определим $\mathcal{F}$ на Ω :

$$\mathcal{F}(u) \rightleftharpoons \{f: u \rightarrow G \mid \forall g \in u \forall g_0 \in G (f(gg_0) = f(g)g_0)\}.$$

В качестве ρ_u^v выберем ограничение функций. Тогда $\mathcal{F}(1) = \{f: G \rightarrow G \mid \forall g \in G \forall g_0 \in G (f(gg_0) = f(g)g_0)\} \cong G$ и $\langle \mathcal{F}, \rho_u^v \rangle$ — пучок на Ω , представляющий G . Присоединяя к полугруппе единицу, получаем представляющий пучок для полугруппы.

Пусть G — группа, содержащая нетривиальное семейство нормальных делителей, которое относительно включения образует полную гейтингову алгебру. Для определенности пусть G — условно полная решеточно упорядоченная группа. Тогда множество всех ее дополняемых идеалов образует полную булеву ал-

гебру B (относительно включения). Определим канонический предпучок $F(u) \rightleftharpoons u$ и $p_u(g) \rightleftharpoons \bigvee (g \wedge u)$. Если G — ортогонально полная группа, то этот предпучок является пучком, который представляет исходную группу G .

Следующая, по существу, рутинная теорема часто бывает удобной.

Теорема 3. а) Предпучок на произвольной гейтинговой алгебре Ω является $\bigcup$ -пучком в том и только в том случае, если он (однозначно) продолжается до пучка на топологии $\mathcal{T}$ стоунова пространства этой алгебры.

б) Если в условиях утверждения а) Ω — полная решетка, $\mathcal{F}$ — исходный предпучок и $\bar{\mathcal{F}}$ — его продолжение, то для любого открытого множества O в топологии $\mathcal{T}$ выполняется

$$\bar{\mathcal{F}}(O) = \mathcal{F}(\bigvee_{\Omega} \{u \in \Omega \mid u \leq O\}). \quad (23)$$

в) Предпучок на произвольной гейтинговой алгебре Ω является пучком в том и только в том случае, если он (однозначно) продолжается до пучка на произвольном правильном ее пополнении $\bar{\Omega}$.

▷ а) Предпучок $\mathcal{F}$ на Ω тривиальным образом переносится на $\mathcal{T}_0$. Чтобы его продолжить до пучка на топологии $\mathcal{T} \rightleftharpoons \mathcal{T}(S(\Omega))$, положим

$$O \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{\mathcal{F}}(O) \rightleftharpoons \lim_{\leftarrow} \{\mathcal{F}(u) \mid u \in \Omega \wedge u \leq O\} \subseteq \prod_{u \in O} \mathcal{F}(u), \quad (24)$$

$$O_1 \leq O_2 \Rightarrow \rho_{O_1}^{O_2}(f) \rightleftharpoons f \upharpoonright \{u \mid u \leq O_1\},$$

где $\lim_{\leftarrow}$ — проективный (обратный) предел и $\upharpoonright$ — сужение функции на часть области определения.

Скажем, что $\bigcup$ -пучок $\mathcal{F}$ на булевой алгебре B *отделим*, если накрывающее пространство E отделимо, что в свою очередь эквивалентно тому, что для любых k_1, k_2 из $\mathcal{F}$ выполняется $\{p \in S \mid k_1(p) = k_2(p)\} \in B$, т. е. $\forall k_1 \in \mathcal{F} \forall k_2 \in \mathcal{F} ([k_1 = k_2]_{\mathcal{F}} \in B)$.

Такой отделимый $\bigcup$ -пучок является пучком в том и только в том случае, когда для всякого открытого плотного множества O в S все функции из $C(O, E, \pi)$ равномерно непрерывны (относительно единственности равномерности в S и равномерности в одноточечной компактификации E) и отделены от ∞ (см. [12]).

Предложение 2. Канонический предпучок кольца K является отделимым в том и только в том случае, когда K — нормальное кольцо.

Теорема 2 распространяется на языки второго порядка и такие категории, как алгебры Ли, группы, топологические пространства и регулярные топосы.

6. **Достаточные условия пучковости кольца.** По теореме 3в) канонический предпучок продолжается с B на ее дедекиндово пополнение $\bar{B}$ в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$\forall \{e_\alpha\} \subseteq B \left(1 = \bigvee_\alpha e_\alpha \wedge \forall \beta \forall \gamma (e_\beta \wedge e_\gamma \in \{e_\alpha\}) \Rightarrow K \cong \varprojlim (\mathcal{F}(e_\alpha)) \right), \quad (25)$$

где $\cong$ означает естественное отображение, т. е. $k \mapsto \{e_\alpha k\}$.

Назовем B -кольцом такое кольцо K , что $\text{Idc } K$ — полная решетка и, следовательно, $\text{Idc } K$ — полная булева алгебра. Для B -кольца критерий (25) пучковости кольца K принимает более простой вид

$$\forall \{e_\alpha\} \subseteq B \left(1 = \bigvee_\alpha e_\alpha \rightarrow K \cong \prod_\alpha e_\alpha K \right), \quad (26)$$

где $\{e_\alpha\}$ — дизъюнктное семейство и соответствие $\cong$ такое же, как в (25).

Хотелось бы описать пучковые кольца и пучковые B -кольца без использования семейств $\{e_\alpha\}$. Мы приведем достаточные условия пучковости, которые, по-видимому, значительно сильнее условия пучковости. Аналогичные условия пучковости для модуля содержатся в п. 6 следующего параграфа. Для модулей строится таблица, аналогичная таблице 2 (см. следствие к теореме 11).

Напомним, что *полупервичным* называется кольцо, в котором пересечение всех первичных идеалов равно нулю. Идеал a называется *первичным*, если $a \neq K$ и $\forall b \forall c (b \cdot c \in a \Rightarrow b \in a \vee c \in a)$, где b, c — произвольные идеалы в K . Пересечение всех первичных идеалов кольца K обозначается $\text{rad } K$. Поэтому полупервичность означает, что $\text{rad } K = 0$.

Плотным называется (двусторонний) идеал a , для которого $a^* = 0$. Для полупервичных колец выполняются важные свойства: $*a = a^*$, $a \cap a^* = 0$, $a + a^*$ — плотный идеал. В частности, a^* — (двусторонний) идеал. Правый идеал a называется *плотным*, если $\forall k (* (k^{-1}a) = 0)$, где $k^{-1}a = \{t \in K | kt \in a\}$. Разумеется, элемент k не обязательно обратим.

В обычных определениях инъективного и рационально полного кольца, которые мы сейчас напомним, переменная a пробегает все правые идеалы. Однако мы употребим эти термины в более широком смысле, считая, что a пробегает только двусторонние идеалы. А именно, кольцо K называется *инъективным*, если $\forall a \forall \phi: a \rightarrow K (\phi \in \text{Hom}_K(a, K)) \exists k_0 \in K \forall k \in a (\phi(k) = k_0 \cdot k)$. Иными словами, ϕ является линейной функцией из правого модуля a над K в себя. Кольцо K называется

рационально полным, если для всякого плотного идеала a выполняется

$$\forall \phi: a \rightarrow K (\phi \in \text{Hom}_K(a, K)) \exists k_0 \in K \forall k \in a (\phi(k) = k_0 \cdot k).$$

Кольцо K называется *абелевым*, если всякий его идемпотент является центральным элементом, т. е. $\text{Id } K = \text{Idc } K$. Простые факты и определения, относящиеся к кольцам, можно найти, например, в книге [58]. Следующая теорема фактически содержится в [28].

Теорема 4. а) Из инъективности (или из нормальности и рациональной полноты) B -кольца вытекает его $\exists$ -пучковость.

б) Если K — полупервичное рационально полное абелево кольцо, то K — нормальное B -кольцо. Из нормальности кольца вытекает его $!$ -пучковость.

в) Если кольцо K обладает одним из свойств ϕ , указанных в левой части следующей таблицы 2, то K — пучковое кольцо,

Таблица 2

	ϕ	ϕ'
1	Нормальное, рационально полное B -кольцо	Кольцо без нетривиальных центральных идемпотентов
2	Строго бириккартово рационально полное B -кольцо	Первичное кольцо
3	Бирегулярное рационально полное B -кольцо	Квазипростое кольцо
4	Абелево регулярное рационально полное B -кольцо	Тело
5	Строго риккартово рационально полное B -кольцо	Кольцо без делителей нуля

и для оценки [], определенной по каноническому пучку этого кольца, выполняется

$$\phi_K \Leftrightarrow ([\phi'_K] = 1), \quad (27)$$

где свойства $\phi \Leftrightarrow \phi'$ соответствуют друг другу по той же таблице.

б) Так как $\text{Idc } K$ по условию является полной булевой алгеброй, то можно считать, что $1 = \bigwedge_\alpha e_\alpha$. Образует идеал $a \neq$

$\Rightarrow \bigoplus_{\alpha} e_{\alpha} K$. Это действительно прямая сумма, так как $(e_1 t_1 + \dots + e_n t_n = 0) \Rightarrow (e_1 t_1 = 0)$ и т. д. Положим $f(e_1 t_1 \oplus \dots \oplus e_n t_n) \Leftarrow e_1 k_1 t_1 + \dots + e_n k_n t_n$. Это K -линейная функция вида $a_K \rightarrow K$. В силу инъективности существует k_0 , для которого $\forall t \in a (f(t) = k_0 t)$. Отсюда

$$f(e_{\alpha} \cdot 1) - e_{\alpha} k_{\alpha} = k_0 e_{\alpha} = e_{\alpha} k_0,$$

т. е.

$$[k_{\alpha} = k_0] \geq e_{\alpha}.$$

Если K — нормальное кольцо, то идеал a плотен: пусть $t \in a^*$ и $et = 0 \Leftrightarrow e \leq e_0$. Тогда $e_{\alpha} t = 0$, $e_{\alpha} \leq e_0$, т. е. $e_0 = 1$. Затем точно так же воспользуемся рациональной полнотой K .

б) Доказательство первой части утверждения по существу повторяет доказательство предложения 2.4.4 из [62] (относящееся к коммутативному случаю) и использует предложение 4.6.4 из [62].

Пусть

$$1 = \bigvee_{\alpha} e_{\alpha}, \quad \forall \alpha (e_{\alpha} t = 0) \text{ и } et = 0 \Leftrightarrow e \leq e_0.$$

Тогда

$$e_{\alpha} \leq e_0, \quad e_0 = 1, \quad t = 0.$$

в) Во всех случаях свойство ϕ кольца K обеспечивает, что K — рационально полное и нормальное B -кольцо. Из уже доказанных утверждений теоремы следует, что K — пучковое кольцо, т. е. канонический предпучок на $\text{Idc } K$ является пучком, и, следовательно, определена оценка []. Осталось проверить эквивалентность (27), но вычисление оценок в теоремах 2 и 4 проходит совершенно аналогично. $\square$

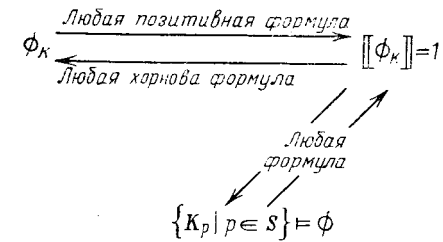
Отметим, что эквивалентность (27) справа налево можно понимать в том смысле, что отделяемая и достижимая оценка [] определена для произвольной полной булевой алгебры B . Тогда B изоморфна $\text{Idc } K$ и пучок на B , соответствующий этой оценке, изоморфен каноническому пучку.

7. Теоремы переноса (и элементарная эквивалентность теорий) как следствия пучковости модуля и кольца.

Теорема 5. а) Если $K = \mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}$ есть $\bigcup$ -пучок на произвольной гейтинговой алгебре Ω и $\mathcal{T}$ — топология стоунова пространства Ω , то выполняются все соотношения, показанные на диаграмме 2. Если пучок $\mathcal{F}$ отделим, то выполняются и соотношения из теоремы 2б).

б) Если $K = \mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}$ — пучок на произвольной булевой алгебре B и полная булева алгебра $\bar{B}$ является пополнением B ,

то имеет место следующее усиление диаграммы 2:



Аналогичные построения проходят и для других категорий: групп, модулей, алгебр, алгебр Ли, моноидов и даже топосов. Доказательства аналогичны доказательству в случае диаграммы 2.

В заключение этого параграфа сформулируем явным образом простую теорему, показывающую возможный характер применений теорем 2, 4, 5. Для конкретных вопросов эти применения рассматриваются в [12], [13].

Теорема 6. а) АЕ-хорновы и специальные хорновы теории соответственно модулей над абелевыми регулярными кольцами (коммутативными регулярными кольцами) и векторных пространств над телами (полями) совпадают.

б) АЕ-хорновы и специальные хорновы теории строго риккартовых модулей и модулей без делителей нуля совпадают.

в) АЕ-хорновы и специальные хорновы теории классов колец $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ из таблицы 1 совпадают.

г) Хорновы теории соответственно модулей над рационально полными абелевыми регулярными B -кольцами (рационально полными регулярными коммутативными B -кольцами) и векторных пространств над телами (полями) совпадают.

д) Хорновы теории классов колец $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ из таблицы 2 совпадают.

Доказательство непосредственно вытекает из предыдущих теорем 2—5, а в части модулей — из результатов п. 6 следующего параграфа. Содержание п. 6 можно получить и без использования понятий из § 2 аналогично тому, как доказывались теоремы 2 и 4. Из теоремы 5 видно, что теорему 6 можно доказывать прямым переходом от слоев к кольцу глобальных элементов.

§ 2. Универсальная оценка и универсальный пучок

1. Определение нечеткого (случайного) множества. Определение категории нечетких множеств (гейтинговозначного универсума). В предыдущем параграфе можно было заметить, что использование специальных языков, вроде языка теории колец,

создает трудности. Например, одновременное рассмотрение нескольких колец, колец и их нормирований и т. п. требует каждый раз введения нового сорта переменных, соответствующего расширения языка и соответствующего расширения области определения оценки []. Поскольку наиболее употребительные категории являются подкатегориями категории всех множеств V , то решим задачу универсального определения оценки для этой категории. Аналогичные построения возможны и для произвольного топоса. Совокупность всех объектов категории V , т. е. совокупность всех множеств, будем обозначать также V .

Объекты категории V образуются следующим специфическим способом, который удобно использовать. Обозначим $V_0 \triangleq \{\emptyset\}$, $V_{\beta+1} \triangleq \mathcal{P}(V_\beta)$, $V_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ (если α не представимо в виде $\alpha = \beta + 1$), где индекс α пробегает семейство всех ординальных чисел (ординалов, трансфинитов). Семейство всех ординалов обозначают On . Тогда $V \triangleq \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha$. Конечно, в приложениях можно рассматривать вместо V какое-то одно V_α , где α — достаточно большой фиксированный ординал. Однако неясно, как выбрать такое α раз и навсегда, поэтому удобно считать его неограниченно возрастающим. За это приходится «платить» оперированием с таким не соответствующим обычной математической практике объектом, как совокупность всех множеств V , но никаких трудностей при этом не возникает.

Множества V_α удобно описать на языке функций: $V_0 \triangleq \{f_0\}$, где f_0 — нигде не определенная функция, $V_{\beta+1} \triangleq Z_2^{V_\beta}$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, где $Z_2 \triangleq \{0, 1\}$ — булева алгебра, в которой $0 < 1$. Иными словами, элементы V можно представлять себе как характеристические функции, определенные на множествах характеристических функций. Функции f из $\bigcup_{\alpha} V_\alpha$ соответствует множество $i(f) \triangleq \{g \mid g \in D(f) \wedge f(g) = 1\}$. Отображение i из семейства функций в семейство множеств сюръективно, но не инъективно.

Можно считать, что множество X^Y состоит из всех частично определенных функций вида $f: Y \rightarrow X$. В этом случае точно такое же, как выше определение множеств V_α не приводит к расширению семейства $\bigcup_{\alpha} V_\alpha$ «по существу»: те g , для которых $f(g) = 0$, и те g , для которых $f(g)$ не определено, в равной мере не включаются в множество, соответствующее f .

Рассмотрим теперь «нечеткие» (или, как иногда говорят, «размазанные», «распыленные», «квантовые», «случайные») множества, определяя их как элементы любого из следующих множеств: $V_0 \triangleq \{f_0\}$, где f_0 — нигде не определенная функция, $V_{\beta+1} \triangleq \Omega^{V_\beta}$, $V_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, где Ω — фиксированная гейтингова

алгебра. Итак, нечеткое множество (Ω -нечеткое множество) определяется как произвольный элемент семейства $V^\Omega \triangleq \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha^\Omega$.

Поскольку $Z_2 \subset \Omega$, то возникает инъективное отображение $()^V: V \rightarrow V^\Omega$. Иными словами, элементы V рассматриваются как характеристические функции, а эти функции непосредственно являются элементами V^Ω . Если $x \in V$, то будем отождествлять x и x^V . Поэтому V^Ω является расширением V .

2. Универсальная оценка — четвертый пример оценки. Язык теории множеств (язык Цермело — Френкеля, язык ZF) имеет один сорт переменных (пробегающих V или V^Ω) и атомарные формулы вида $x \in y$ и $x = y$, где x, y — переменные. Формулы этого языка, как обычно, строятся из атомарных формул с помощью связок $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$. В отличие от оценки из § 1, оценку для языка ZF, соответствующую структуре $\langle V, \in, = \rangle$ или структуре $\langle V^\Omega, \in, = \rangle$, будем называть *универсальной*. Как мы увидим, универсальная оценка похожа по своим свойствам на оценку $[\phi_K]$ из § 1, хотя и определяется иным способом. В п. 5 с помощью универсальной оценки мы по-новому определим оценку из § 1, соответствующую языку произвольной алгебраической системы, например кольца.

Пусть $f_1, \dots, f_n \in V^\Omega$ и выражение $\phi(f_1, \dots, f_n)$ получается из формулы ϕ подстановкой в нее вместо свободных переменных «нечетких множеств» $f_1, \dots, f_n$. Тогда определим «универсальную оценку» $[\phi(f_1, \dots, f_n)]$ индукцией по длине слова ϕ :

$$[f_1 \in f_2] \triangleq \bigvee_{g \in D(f_2)} f_2(g) \wedge [g = f_1],$$

$$[f_1 = f_2] \triangleq \bigwedge_{g \in D(f_1)} (f_1(g) \rightarrow [g \in f_2]) \wedge \bigwedge_{g \in D(f_2)} (f_2(g) \rightarrow [g \in f_1])$$

$$[\phi_1 \wedge \phi_2] \triangleq [\phi_1] \wedge [\phi_2],$$

$$[\phi_1 \vee \phi_2] \triangleq [\phi_1] \vee [\phi_2],$$

$$[\phi_1 \Rightarrow \phi_2] \triangleq [\phi_1] \rightarrow [\phi_2],$$

$$[\neg \phi] \triangleq \neg [\phi],$$

$$[\exists x \phi] \triangleq \bigvee_{f \in V^\Omega} [\phi(f)],$$

$$[\forall x \phi] \triangleq \bigwedge_{f \in V^\Omega} [\phi(f)]. \quad (28)$$

Ясно, что $[\phi(f_1, \dots, f_n)]$ на неатомарных шагах определяется так же, как оценка $[\phi_K]$ из § 1, если в качестве K выбрать V^Ω и в качестве языка Y_K — язык, соответствующий структуре $\langle V^\Omega, \in, = \rangle$. В то же время нужно отметить, что в § 1 изучался объект K с помощью предиката $[\phi_K] = 1$, а здесь не имеется в виду изучать «объект» V^Ω с помощью предиката $[\phi] = 1$.

Факторизуем семейство V^a отношением эквивалентности $[\cdot = \cdot] = 1$. Полученное факторсемейство обозначим V^a и условимся не различать класс эквивалентности $[f]$ из факторсемейства V^a и его представитель f из семейства V^a (возможность этого будет видна из теоремы 4 п. 5).

Множество $V_{\alpha+1}^a \Leftarrow \Omega^{V^a}$ можно (и часто удобно) понимать в расширенном смысле, включая в него и все частично определенные функции вида $f: V_\alpha \rightarrow \Omega$. Любая такая функция f попадает в один класс эквивалентности со своим продолжением на всё V_α — значением нуль. Поэтому такое расширение V^a не приводит к расширению факторсемейства V^a . Практически мы имеем дело не со всей совокупностью V^a , а с некоторой ее частью V_α^a . Тогда все функции, содержащиеся в V_α^a , можно продолжить нулем на всё V_α^a и, следовательно, все рассматриваемые функции можно считать определенными на одном и том же множестве.

Функцию f из V^a назовем *экстенциональной*, если выполнено условие

$$\forall g \in D(f) \forall g_2 \in D(f) (f(g) \wedge [g = g_1] \leq f(g_1)). \quad (29)$$

Можно доказать следующее

Предложение 3. а) Для любой функции f из V^a существует экстенциональная функция g из V^a , область определения которой совпадает с любым наперед заданным множеством X , где $D(f) \subseteq X \subseteq V^a$, и для которой выполняется $[f = g] = 1$. (Поэтому в любом классе эквивалентности из V^a найдется ровно одна экстенциональная функция, определенная на всем V_α^a , т. е. практически все рассматриваемые функции можно считать экстенциональными и одинаково определенными.)

б) Для любых экстенциональных функций f и g выполняется

$$\begin{aligned} [g = f] &= \bigwedge_{h \in D(g)=D(f)} (g(h) \leftrightarrow f(h)), \\ [g \in f] &= f(g), \text{ если } g \in D(f), \\ [g \in f] &= \bigvee_{h \in D(f)} f(h) \wedge \bigwedge_{h_1 \in D(g)=D(h)} (g(h_1) \leftrightarrow h(h_1)), \end{aligned} \quad (30)$$

где $(u \leftrightarrow v) \Leftarrow ((u \rightarrow v) \wedge (v \rightarrow u))$.

Эти соотношения можно было бы принять за определение универсальной оценки на атомарных формулах, считая, что V^a состоит только из экстенциональных функций. Во всяком случае, эти соотношения (вместе с теоремами из п. 5) освобождают нас от необходимости пользоваться громоздкими формулами из определения универсальной оценки.

В дальнейшем, допуская вольность речи, будем называть универсальную оценку просто оценкой.

3. Взаимоотношения категорий множеств и нечетких множеств. Категория V обладает тем свойством, что ее морфизмы отождествляются с ее объектами. А именно, отображения отождествляются с их графиками. Удобно использовать эту особенность. В частности, отображение $(\)^V$ определено на морфизмах категории V , т. е. является функтором в категорию V^a . В последней категории объектами являются нечеткие множества, т. е. элементы семейства V^a , и морфизмами, соответствующими объектам g и h , — такие объекты f из V^a , что

$$[f \text{ — функция с областью определения } g \text{ и областью значений } h] = 1,$$

где внутри оценки написана обычная формула языка ZF, выражающая то, что сказано словами. Проверка того, что $(\)^V$ — функтор, является тривиальным упражнением.

Следующие два функтора рассматривались в [6], [7]. Если множество X является подмножеством V^a и, следовательно, объектом категории V , то обозначим $\underline{X}$ функцию с областью определения X , тождественно равную единице из решетки Ω . Упомянутым выше приемом отображение $(\)$ продолжается и на часть морфизмов категории V . А именно, если ψ — экстенциональное отображение вида $\psi: X \rightarrow Y$, где $X, Y \subseteq V^a$, т. е.

$$\forall f \in X \forall g \in X ([f = g] \leq [\psi(f) = \psi(g)]), \quad (31)$$

то положим $\underline{\psi}$ равным подчеркиванию графика ψ . Здесь «графиком ψ » называется не просто множество $\{\langle x, y \rangle \in X \times Y \mid \psi(x) = y\}$ (так как $\langle x, y \rangle$ не принадлежит V^a), а множество $\{\langle x, y \rangle^a \mid \langle x, y \rangle \in X \times Y \wedge \psi(x) = y\}$, где

$$\langle x, y \rangle^a \Leftarrow \{\{x\}, \{x, y\}\}. \quad (32)$$

Напомним, что в категории V упорядоченная пара $\langle x, y \rangle$ определяется как $\langle x, y \rangle \Leftarrow \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Итак, отображение $(\)$ определено для таких объектов из V , что $X \subseteq V^a$, и аналогичным образом — для объектов X со свойством $\forall x \in X (x \subseteq V^a)$ и т. д. и для соответствующих этим объектам морфизмов.

Получается (частично определенный) функтор $(\)$ из категории V в категорию V^a . При желании его легко продолжить на всю категорию V , однако практически он используется только для множеств и отображений указанного вида. Если $f \in V^a$, то положим $\hat{f} \Leftarrow \{g \in V^a \mid [g \in f] = 1\}$. Опять-таки тривиально: если $[f \text{ — функция с областью определения } g \text{ и областью значений } h] = 1$, то $\hat{f}: \hat{g} \rightarrow \hat{h}$ — экстенциональное отображение. Здесь f понимается как «множество пар и подмножество $g \times h$ »; вместо

этого можно написать $\hat{f} \rightleftharpoons \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \hat{g} \wedge y \in \hat{h} \wedge [f(x) = y] = 1 \}$. Очевидно, что функторы $(\hat{})$ и $(\check{})$ сопряжены.

Можно уточнить определение функторов $(\hat{})$ и $(\check{})$. Например, второй из них определить как $f^{\wedge j} \rightleftharpoons \{ g \in V^a \mid [g \in f] \in j \}$, где j — фиксированный фильтр на Ω . В этом дополнении функтор $(\hat{})^{\wedge j}$ используется только для случая $j = \{1\}$.

Автором предложены также следующие (частично определенные) функторы, см. [20] и (для случая полной булевой алгебры) [12].

Пусть (X, Σ) — равномерное пространство, где X — множество и Σ — семейство симметричных окружений для X ([42]). Тогда $[\langle \check{X}, \check{\Sigma} \rangle^a = \text{равномерное пространство}] = 1$. Как известно, произвольное равномерное пространство $\langle X, \Sigma \rangle$ имеет единственное пополнение X_1 , на котором определено семейство окружений Σ_1 . Такое X_1 явно описывается (термом) в языке ZF (как множество всех минимальных фильтров Коши в $\langle X, \Sigma \rangle$). Его существование и единственность выводимы в теории множеств ZFC, формулировка которой приведена, например, в [40], с. 27, и даже в теории множеств HZFC, которая отличается от ZFC отсутствием среди аксиом закона исключенного третьего: $\phi \vee \neg \phi$ для всех формул ϕ (см. [56]). По теореме 7 из п. 4 существует такое f из V^a , что

$$[f \text{ — пополнение } \langle \check{X}, \check{\Sigma} \rangle^a] = 1.$$

Семейство окружений Σ_1 явно описывается своей базой, элементы которой по определению состоят из всех пар минимальных фильтров Коши в $\langle X, \Sigma \rangle$, имеющих какое-то общее множество порядка σ , где σ пробегает Σ . Точно так же, как и в случае f , существует g из V^a , для которого

$$[g \text{ — указанная выше база окружений для пополнения равномерного пространства } \langle \check{X}, \check{\Sigma} \rangle^a] = 1.$$

Положим $\check{X} \rightleftharpoons f$ и $\check{\Sigma} \rightleftharpoons g$ (или $\langle X, \Sigma \rangle \sim \langle f, g \rangle^a$). При этом $[\langle f, g \rangle^a = \text{полное отделимое равномерное пространство и пополнение } \langle \check{X}, \check{\Sigma} \rangle^a] = 1$. Назовем $\langle X, \Sigma \rangle \sim \Omega$ -пополнением равномерного пространства $\langle X, \Sigma \rangle$.

Функтор $(\check{})$ является функтором из категории равномерных пространств (с равномерно непрерывными отображениями в качестве морфизмов) в категорию «полных отделимых равномерных пространств в V^a ». Последняя категория описывается понятным образом (и в дальнейшем мы не будем явно формулировать такие определения): ее объектами являются такие $\langle f, g \rangle^a$ из V^a , что $[f \text{ — полное отделимое равномерное пространство с$

базой окружений $g] = 1$. Ее морфизмами из объекта g в объект h служат такие f из V^a , что $[f \text{ — равномерно непрерывное отображение полного отделимого равномерного пространства } g \text{ в такое же пространство } h] = 1$. Если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм «внешней категории», т. е. в данном случае категории равномерных пространств, то $[f: \check{X} \rightarrow \check{Y} \text{ — равномерно непрерывное отображение}] = 1$, и, как и раньше, существует единственное $\check{f}$ из V^a , для которого $[\check{f} \text{ — продолжение } f \text{ с } \check{X} \text{ на } \check{Y}] = 1$.

С помощью функтора $\check{}$ определяется (см. [12], [20]) функтор Ω^x как композиция функторов $X \rightarrow \check{X} \rightarrow (\check{X})^\wedge$, он имеет вид $V \rightarrow V$. Функторы X и $(\check{X})^\wedge$ отличаются областью значений.

В качестве равномерного пространства обычно выступает топологическая группа (в которой окружения определяются окрестностями нейтрального элемента) или метрическое пространство (в котором окружения определяются метрикой). Компактное топологическое пространство имеет единственную равномерную структуру, согласованную с его топологией ([42]). Как быть, если топологическое пространство не допускает равномерную структуру, согласованную с его топологией? В этом случае рассмотрим функтор, который топологическому пространству X сопоставляет множество всех регулярных фильтров в $\mathcal{P}(X)$ или множество всех вполне регулярных фильтров в $\mathcal{P}(X)$ и т. д. Для таких функторов сделаем то же самое, что и для пополнения топологического пространства по равномерности. Аналогичным образом можно рассматривать соответствующие фильтры в наперед фиксированной полной гейтинговой алгебре вместо полной гейтинговой алгебры такого определенного вида, как топология.

Еще один существенный функтор рассматривается в п. 5. А именно, если X — пучковое множество, т. е. $X = \mathcal{F}(1)$ и $\mathcal{F}$ — пучок на Ω , то определяется (см. [20]) $\mathcal{F}'$ из V^a , для которого $X = (\mathcal{F}')$. Это обратный функтор для функтора $(\check{}): V^a \rightarrow V$.

Определение V^a для полной булевой алгебры Ω идейно предвосхищено в работах Коэна [40] и явным образом приводится у Вопенки [54]. Определение V^a для случая полной гейтинговой алгебры Ω было известно специалистам со времени работ Вопенки. Если булевозначный универсум V^B для некоторых конкретных и весьма специальных полных булевых алгебр был необходим для построения моделей коэновского типа и решения проблем, подобных континуум-проблеме, то было неясно, зачем нужно произвольное V^B и тем более произвольное V^a , где Ω — полная гейтингова алгебра. Некоторое применение гейтинговозначный универсум V^a находил при построении интуиционистских моделей теории множеств, т. е. моделей теории HZFC. В этом случае практически ограничивались одной определенной

Ω , а именно, топологией баровской прямой, т. е. топологией топологического пространства Z_2^N . Вообще, универсумы V^B и V^A мыслились как вспомогательное средство для построения моделей и во всяком случае исключительно в контексте теории моделей. Возможность использования V^A для получения содержательных математических результатов была отмечена в работах Такеути, Любецкого и Гордона в период с 1970 по 1982 годы.

Можно думать, что универсум V^A (включая оценку $[]$ для V^A) и универсум V^2/j , где j — фильтр на Ω (или соответствующее топосное оформление этих конструкций), окажутся более удобными мирами, чем канторовский универсум множеств V , в частности, в связи с вопросами квантовой теории.

Таким образом, в конце п. 2 § 1 и здесь мы очень кратко коснулись возникновения двух из трех концепций, лежащих в основе нестандартного анализа: оценок и нечетких множеств. Второе из этих понятий — определенное развитие понятия пучка; исторические аспекты понятия пучка содержатся, например, в [60].

4. Основные свойства категории нечетких множеств. В этом пункте приведем свойства гейтинговозначного универсума V^A , которые наряду с предложением 3 из п. 2 обеспечивают все, что нужно при работе с V^A . Можно было бы забыть явное определение V^A из п. 1 и рассматривать V^A как такое расширение V , для которого определены функторы $(_)$, $(_)$ и на котором функция $[]$ обладает свойствами (30) и свойствами из следующих теорем 7–9. В теореме 7 буквы f, g (возможно, с индексами) обозначают произвольные элементы V^A , а буква ϕ — произвольную формулу в языке ZF.

Теорема 7.

1) Если $g \in D(f)$, то $f(g) \leq [g \in f]$; если f, g экстенциональны, то $([f = g] \geq u) \Leftrightarrow (f \wedge u \equiv g \wedge u)$;

2) $[f = f] = 1$, $[f = g] = [g = f]$, $[f_1 = f_2] \wedge [f_2 = f_3] \leq [f_1 = f_3]$;

3) $[f_1 = f_2] \wedge [f_1 \in f_3] \leq [f_2 \in f_3]$, $[f_1 = f_2] \wedge [f_3 \in f_1] \leq [f_3 \in f_2]$;

4) $[f = g] \wedge [\phi(f)] \leq [\phi(g)]$;

5) $[(\exists x \in f)(\phi(x))] = \bigvee_{g \in D(f)} (f(g) \wedge [\phi(g)])$;

$[(\forall x \in f)(\phi(x))] = \bigwedge_{g \in D(f)} (f(g) \rightarrow [\phi(g)])$;

6) $[\phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)] = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi(x_1, \dots, x_n), \\ 0, & \text{если } \neg \phi(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$

где $x_1, \dots, x_n$ — произвольные элементы из V и ϕ — ограниченная формула, т. е. формула, в которую любой квантор входит в виде $(\exists x \in u)$ или $(\forall x \in u)$, а u — свободная или связанная пе-

ременная в ϕ . (Таким образом, $(_)^\vee$ — «почти элементарное» вложение V в V^A .)

7) Семейство V^A — пучок, т. е. $\forall \{f_\alpha\} \subseteq V^A \forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega (\forall \alpha \forall \beta (u_\alpha \wedge u_\beta \leq [f_\alpha = f_\beta]) \Rightarrow \exists f_0 \in V^A (\forall \alpha ([f_0 = f_\alpha] \geq u_\alpha)))$ и такое f_0 единственно с вероятностью $\bigvee_\alpha u_\alpha$.

[Семейство V^A является пучком и в смысле определения из п. 5 § 1, т. е. является множеством глобальных элементов отображения $u \rightarrow V^A/\sim_u$, где $(f \sim_u g) \Leftrightarrow [f = g] \geq u$ и $u \leq v \Rightarrow \rho_u([f]_v) \Leftrightarrow [f]_u$, которое является пучком в прямом смысле этого слова.

Если $\bigvee_\alpha u_\alpha = 1$, то соответствующий по свойству 7) семействам $\{u_\alpha\}, \{f_\alpha\}$ элемент f_0 обозначим $\sum_\alpha u_\alpha f_\alpha$.

8) а) Выполняется $[\exists! x \phi(x)] = [\phi(f_0)]$, где f_0 определяется по формуле $\phi(x)$ однозначно с вероятностью, большей или равной левой части этого равенства.

б) Если Ω содержит плотное подмножество Ω_0 , состоящее из компактных элементов, то

$$[\exists x \phi(x)] = u \in \Omega_0 \Rightarrow \exists f_0 \in V^A ([\phi(f)] \geq u'),$$

где $u - u' \Leftrightarrow u \wedge \neg u' = 0$, $u' \in \Omega$.

[Такое u' назовем плотным в u . Элемент u назовем компактным, если $\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega (u \leq \bigvee_\alpha u_\alpha \Rightarrow (u \leq u_{\alpha_1} \vee \dots \vee u_{\alpha_n}))$ для некоторых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; такие u называются еще финитными элементами [49]. Полную решетку Ω , обладающую вышеуказанным свойством, принято называть алгебраической (см., например, упомянутую статью). Плотное подмножество решетки называют еще базой решетки. Типичный пример алгебраической решетки — топология стоунова пространства произвольной гейтинговой алгебры.]

в) Если Ω — алгебраическая решетка, u , кроме того, соответствующее Ω_0 состоит из открыто-замкнутых элементов, т. е. $u \in \Omega_0 \Rightarrow u \vee \neg u = 1$, то

$$[\exists x \phi(x)] = u \in \Omega_0 \Rightarrow \exists f_0 \in V^A ([\phi(f)] = u).$$

[Такую решетку называют нульмерной алгебраической решеткой. Типичный пример такой решетки — топология стоунова пространства произвольной булевой алгебры.]

9) Если Ω имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых элементов, и существует f_0 из V^A , для которого $[\phi(f_0)] = 1$, то

$$[\forall x (\phi(x) \Rightarrow \psi(x))] = \bigwedge \{[\psi(g)] \mid [\phi(g)] = 1\}.$$

При том же условии $[(\hat{f})_- = f] = 1$.

[Полная решетка Ω с этим свойством называется *нульмерной*. Множество X , $\bar{X} \subseteq V^a$ назовем *пучковым*, если

$$\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega \left(\bigvee_\alpha u_\alpha = 1 \Rightarrow \forall \{f_\alpha\} \subseteq X \left(\left(\sum_\alpha u_\alpha f_\alpha \right) \in X \right) \right)$$

10) Для всякого пучкового множества X выполняется $(X)^\wedge = X$.

Теорема 8. Пусть f — произвольный элемент из V^a .

а) Если ϕ — позитивная формула, то

$$\phi_{x_1, \dots, x_n, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n} \Rightarrow ([\phi_{\check{x}_1, \dots, \check{x}_n, \check{f}_1, \dots, \check{f}_n}] = 1).$$

б) Если ϕ — хорнова формула и Ω — нульмерная алгебраическая решетка, то

$$[\phi_{f_1, \dots, f_m}] = 1 \Rightarrow \phi_{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m}.$$

Теорема 9. а) Если Ω — полная булева алгебра и $\text{ZFC} \vdash \phi$, то $[\phi] = 1$.

б) Если $\text{HZFC} \vdash \phi$, то $[\phi] = 1$.

▷ Утверждения 1)–8а) теоремы 7, за исключением определения пучка в утверждении 7) в случае, когда Ω — полная булева алгебра, а также теорема 9 возникли одновременно с конструкцией булевозначного универсума в работах [40], [54]. С этими работами можно познакомиться по более современному изложению в книге [48], с. 57. Получение тех же свойств для полной гейтинговой алгебры тормозилось отсутствием идеи рассмотрения полной гейтинговой алгебры вместо полной булевой алгебры. Технически утверждения 1)–8) легко доказываются и для случая полной гейтинговой алгебры. Теоремы 7–9 содержатся, например, в [20]. В контексте изучения моделей интуиционистских теорий теорема 9б), по-видимому, впервые появилась в работе [56].

Теорема 8 доказывается аналогично теореме 2 а), б) из § 1. □

5. Вложение произвольного пучка в категорию нечетких множеств. В этом пункте мы свяжем подход, который излагался в § 1, с нынешним подходом и определим оценки из § 1 с помощью универсальной оценки, иными словами, докажем универсальность пучка V^a . Одновременно мы построим функтор $\mathcal{F}(1) \rightarrow \mathcal{F}'$, где $\mathcal{F}$ — пучок, $\mathcal{F}(1) \in V$ и $\mathcal{F}' \in V^a$, обратный к функтору $(\hat{}): V^a \rightarrow V$. Эти результаты получены автором в работе [20], см. также [23].

Теорема 10. Пусть Ω — произвольная гейтингова алгебра и $\mathcal{F}$ — пучок на ней со значениями в категории $\mathcal{C}$.

а) Существует явно описываемое по $\mathcal{F}$ нечеткое множество $\mathcal{F}'$ (т. е. $\mathcal{F}' \in V^a$), «принадлежащее категории $\mathcal{C}$ », для которого $(\mathcal{F}')^\wedge \cong \mathcal{F}(1)$. Более того,

$$\forall u \in \Omega ((\mathcal{F}')^{\wedge u} \cong \mathcal{F}(u)),$$

где $g^{\wedge u}$ для любого g из V^a равно

$$[f \in V^a \mid [f \in g] = u] / \sim_u.$$

б) Если $\{f_u\}$ — функториальный морфизм двух пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на Ω , то $[(f_1)_-: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}' - \text{морфизм}] = 1$ и $(\hat{f}_1)^\wedge = f_1$. Более того, $\forall u \in \Omega ([f_u: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}' - \text{морфизм}] = u)$.

в) Если $[f: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}' - \text{морфизм}] = 1$, то $\{\hat{f}_u\}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ — функториальный морфизм и $[(\hat{f})_- = f] \geq u$.

▷ а) Знак $\cong$ указывает на наличие канонического изоморфизма. Его определение, как и определение слов, взятых в кавычки, и описание $\mathcal{F}'$ приводятся ниже.

Обозначим

$$\Pi \Leftarrow [P: \mathcal{F} \rightarrow \Omega \mid \forall t \in \mathcal{F} \forall t_1 \in \mathcal{F} (P(t) \leq \leq Et \wedge (P(t) \wedge [t = t_1]_{\mathcal{F}} \leq P(t_1)))], \quad (33)$$

где $\mathcal{F} \Leftarrow \bigcup \{\mathcal{F}(u) \mid u \in \Omega\}$, $t \in \mathcal{F} \Rightarrow (u = Et) \Leftarrow t \in \mathcal{F}(u)$ (такое u существует и единственно, см. с. 396). Поскольку мы отождествляем x и $\check{x}$, то, в частности, элементы множества $\mathcal{F}$ отождествляются с определенными элементами из V^a , т. е. $\mathcal{F}$ можно рассматривать как подмножество V^a . Поэтому $\Pi \subseteq V^a$. Интуитивно Π состоит из всех нечетких подмножеств четкого (т. е. принадлежащего V) множества $\mathcal{F}$. Идея определения $\mathcal{F}'$ состоит в том, чтобы описать элемент t из $\mathcal{F}$ через семейство нечетких подмножеств $\mathcal{F}$, указав, какому нечеткому подмножеству P элемент t принадлежит, а какому не принадлежит. А именно, положим

$$f_t \Leftarrow P(t): \Pi \rightarrow \Omega, \quad f_t \in V^a; \quad (34)$$

$$\mathcal{F}'(f_t) \Leftarrow Et: \{f_t \mid t \in \mathcal{F}\} \rightarrow \Omega, \quad \mathcal{F}' \in V^a.$$

Канонический изоморфизм, о котором идет речь (для случая $u = 1$) определяется так:

$$\cong: t \mapsto f_t, \quad (35)$$

где $t \in \mathcal{F}(1)$ и (по теореме 7.1) $[f_t \in \mathcal{F}'] = 1$, т. е. $f_t \in (\mathcal{F}')^\wedge$. Таким образом, $\cong$ — изоморфизм вида

$$\cong: \mathcal{F}(1) \leftrightarrow \hat{\mathcal{F}}'.$$

При этом выполняются три важных свойства:

$$\begin{aligned} [f_t \in \mathcal{F}'] &= Et, \\ [f_{t_1} \in \mathcal{F}'] \wedge [f_{t_2} \in \mathcal{F}'] \wedge [f_{t_1} = f_{t_2}] &= [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}, \end{aligned} \quad (36)$$

и если Ω — нульмерная полная гейтинг-алгебра, то

$$[\{f_k | k \in \mathcal{F}(1)\} = \mathcal{F}'] = 1. \quad (36')$$

Начнем последовательно доказывать эти утверждения. Сначала заметим, что функция

$$P_l(t) \Leftrightarrow [l = t]_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow \Omega \quad (37)$$

принадлежит Π .

Если $t_1 \neq t_2$ и $f_{t_1} \equiv f_{t_2}$, то $f_{t_1}(P_{t_1}) = [t_1 = t_1]_{\mathcal{F}} = Et_1 = f_{t_2}(P_{t_1}) = [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$ и аналогично $Et_2 = [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$. Поэтому $t_1 = t_2$.

Получаем противоречие. Итак, $\cong$ — инъективное отображение, и в дальнейшем мы иногда не будем различать t и f_t , обозначая оба эти элемента t .

Функции P , f_t и $\mathcal{F}'$ экстенциональны. Для двух первых функций это проверяется прямо по соотношению (29). Для третьей функции нужно проверить соотношение $Et \wedge \bigwedge_{P \in \Pi} (P(t) \leftrightarrow P(t_1)) \leq Et_1$. Так как $P_t \in \Pi$, то $(P_t(t) \rightarrow P_t(t_1)) = (Et \rightarrow P_t(t_1)) \geq \bigwedge_{P \in \Pi} (P(t) \leftrightarrow P(t_1))$, и воспользуемся формулой (4').

Тогда по формуле (30) $[f_t \in \mathcal{F}'] = \mathcal{F}'(f_t) = Et$.

Изоморфизм, о котором говорится в теореме 10, определяется так:

$$\cong_u: t \rightarrow [f_t]_u, \cong_u: \mathcal{F}(u) \rightarrow (\mathcal{F})^{\wedge u}. \quad (38)$$

Очевидно, $(\cong_1) = (\cong)$. Это отображение инъективно: если $t_1, t_2 \in \mathcal{F}(u)$ и $[f_{t_1} = f_{t_2}] \geq u$, то $\bigwedge_P (P(t_1) \leftrightarrow P(t_2)) \geq u$, $P(t_1) \wedge u = P(t_2) \wedge u$ для всех $P \in \Pi$. Подставим в это тождество P_{t_1} и получим $Et_1 \wedge u = [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}} \wedge u$. Аналогично, $[t_1 = t_2]_{\mathcal{F}} \wedge u = Et_2 \wedge u$, т. е. $Et_1 = Et_2 = [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$. Поэтому $t_1 = t_2$.

Принципиальным шагом в доказательстве теоремы 10 является проверка сюръективности отображения $\cong_u$. Пусть $[f \in \mathcal{F}'] = u$, т. е. $[f]_u \in (\mathcal{F}')^{\wedge u}$. По предложению 3 можно считать, что f — экстенциональная функция, содержащая в области определения множество Π . Выполняется $u \leq [f \in \Pi]$, так как $u = \bigvee_{t \in \mathcal{F}} Et \wedge [f = f_t]$ и $[f \in \Pi] = 1$. Отсюда выведем, что $[f = f \upharpoonright \Pi] \geq u$.

Действительно, в силу аксиомы объемности достаточно проверить равнообъемность этих функций: $[g \in f \upharpoonright \Pi] = \bigvee_P f(P) \wedge [P = g] = \bigvee_P [P \in f] \wedge [P = g] \leq [g \in f]$ (используя экстенциональность f). В другую сторону:

$$\begin{aligned} [g \in f] \wedge u &\leq [g \in f] \wedge [f \in \Pi] \leq [g \in f] \wedge \bigvee_P [g = P] = \\ &= \bigvee_P [P \in f] \wedge [g = P] = \bigvee_P f(P) \wedge [g = P] = \bigvee_P [g = P] \wedge \\ &\quad \wedge (f \upharpoonright \Pi)(P) = [g \in f \upharpoonright \Pi]. \end{aligned}$$

Аналогично, экстенциональная функция $f_0 \Leftrightarrow (f \upharpoonright \Pi) \wedge u$ равнообъемна с функцией $f \upharpoonright \Pi$ с вероятностью $\geq u$. Поэтому $[f_0 = f] \geq u$. При этом $[f_0 \in \mathcal{F}'] = \bigvee_t Et \wedge [f_0 = f_t] \leq \bigvee_t (Et \wedge [f \in \mathcal{F}'] \wedge [f = f_t]) \leq \bigvee_t [f \in \mathcal{F}'] = u$ и $[f]_u = [f_0]_u$. Иными словами, в произвольном классе эквивалентности имеется элемент f_0 , для которого $f_0(P) \leq u$ и $D(f_0) = \Pi$.

Обозначим

$$\pi_v(t) \Leftrightarrow Et \wedge v. \quad (39)$$

Ясно, что $\pi_v(t) \in \Pi$. Определим в Π порядок и решеточные операции поточечно. При этом Π становится полной гейтинг-алгеброй с единичным элементом E . Проверим соотношения

$$\begin{aligned} f(\pi_v) \wedge u &= f(E) \wedge v \wedge u, \quad f(P_1 \wedge P_2) \wedge u = f(P_1) \wedge f(P_2) \wedge u, \\ f\left(\bigvee_{\alpha} P_{\alpha}\right) \wedge u &= \bigvee_{\alpha} f(P_{\alpha}) \wedge u. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда для выбранного элемента f_0 те же соотношения выполняются без обрезания на u .

Обозначим Ω^{Ω_1} все морфизмы полной гейтинг-алгебры Ω_1 в полную гейтинг-алгебру Ω вида $\Omega_1 \rightarrow \Omega$, т. е. все отображения этого вида, сохраняющие конечные пересечения и произвольные объединения и переводящие 0_{Ω_1} в 0_{Ω} и 1_{Ω_1} в 1_{Ω} .

Обозначим $(\Omega^{\Omega_1})_u$ все квазиморфизмы, т. е. все отображения вида $\Omega_1 \rightarrow \Omega$, обладающие всеми свойствами морфизмов, кроме последнего свойства, которое заменяется на свойство: 1_{Ω_1} переходит в u . В частности, $(\Omega^{\Omega_1})_1 = \Omega^{\Omega_1}$. Например, f_0 — квазиморфизм, т. е. $f_0 \in (\Omega^{\Omega_1})_u$.

Выполняется $u = \bigvee_t Et \wedge [f_0 = f_t]$; обозначим слагаемое в правой части u_t . Любое f_t — квазиморфизм, так как $f_t(P_1 \wedge P_2) =$

$$= (P_1 \wedge P_2)(t) = P_1(t) \wedge P_2(t) = f_t(P_1) \wedge f_t(P_2) \text{ и } f_t\left(\bigvee_{\alpha} P_{\alpha}\right) = \bigvee_{\alpha} (P_{\alpha}(t)) = \bigvee_{\alpha} f_t(P_{\alpha}), f_t(0) = 0, f_t(E) = Et, \text{ т. е. } t \in \mathcal{F}(u) \Rightarrow f_t \in (\Omega^u)_u.$$

Вычислим $[\pi_v = E] = \bigwedge_t (\pi_v(t) \leftrightarrow Et) = v$, так как $1 \wedge v \leftrightarrow 1 \leq v$.

Теперь мы готовы проверить формулу из (40): $f_0(\pi_v) \wedge u = [\pi_v \in f_0] \wedge u$ и $[f_0 = f_t] \wedge f_0(\pi_v) \leq [\pi_v \in f_t] = f_t(\pi_v) = \pi_v(t) = Et \wedge \wedge v = f_t(E) \wedge v = [E \in f_t] \wedge [\pi_v = E] \wedge [f_0 = f_t] \leq [E \in f_0] \wedge \wedge [\pi_v = E]$, $u \wedge f_0(\pi_v) \leq [E \in f_0] \wedge [\pi_v = E]$; с другой стороны, $f_0(\pi_v) \geq [\pi_v \in f_0] \geq [E \in f_0] \wedge [\pi_v = E]$, и в левой части можно добавить сомножитель u , так как $[E \in f_0] = f_0(E) \leq u$. Итак, $f_0(\pi_v) \wedge u = f_0(E) \wedge v \wedge u$. Пользуясь тем, что левые и правые части этой и проверяемой формул равны, получаем требуемое равенство. Проверим вторую формулу из (40): $u_t \wedge [P_1 \wedge P_2 \in f_0] \leq [P_1 \wedge P_2 \in f_t] = f_t(P_1 \wedge P_2) = [P_1 \in f_t] \wedge [P_2 \in f_t] \wedge u_t \leq u_t \wedge [P_1 \in f_0] \wedge [P_2 \in f_0]$, $u_t \wedge [P_1 \in f_0] \wedge [P_2 \in f_0] \leq u_t \wedge \wedge f_t(P_1 \wedge P_2) \leq u_t \wedge [P_1 \wedge P_2 \in f_0]$. Поэтому $u_t \wedge f_0(P_1 \wedge P_2) = u_t \wedge f_0(P_1) \wedge f_0(P_2)$, $u \wedge f_0(P_1 \wedge P_2) = u \wedge f_0(P_1) \wedge f_0(P_2)$, $f_0(P_1 \wedge P_2) = f_0(P_1) \wedge f_0(P_2)$, и сравним эту формулу с проверяемой. Точно так же проверяется третья формула.

Положим

$$g(t) \Leftarrow f_0(P_t): \mathcal{F} \rightarrow \Omega. \quad (41)$$

Такая функция $g(t)$ — синглетон, т. е. для нее выполняется соотношение

$$g \in \Pi \wedge (g(t) \wedge g(t_1) \leq [t = t_1]_{\mathcal{F}}),$$

которое можно переписать в виде $(g(t) \wedge [t = t_1]_{\mathcal{F}} \leq g(t_1)) \wedge (g(t) \wedge g(t_1) \leq [t = t_1]_{\mathcal{F}})$. Обозначим $v \Leftarrow [t = t_1]_{\mathcal{F}}$. Тогда $g(t) \wedge [t = t_1]_{\mathcal{F}} = f_0(P_t) \wedge [t = t_1]_{\mathcal{F}} \wedge f_0(E) = f_0(P_t) \wedge f_0(\pi_v) = f_0(P_t \wedge \pi_v) \leq f_0(P_{t_1}) = g(t_1)$, так как $P_t \leq E$ и $(P_t \wedge \pi_v)(l) = P_t(l) \wedge \pi_v(l) = [l = t]_{\mathcal{F}} \wedge El \wedge v \leq [l = t_1]_{\mathcal{F}} = P_{t_1}(l)$, т. е. $P_t \wedge \pi_v \leq P_{t_1}$, и $f_0(\cdot)$ — монотонная функция. Проверим второе свойство в определении синглтона: $g(t) \wedge g(t_1) = f_0(P_t) \wedge \wedge f_0(P_{t_1}) = f_0(P_t \wedge P_{t_1}) \leq f_0(\pi_v) = f_0(E) \wedge v \leq v$, так как $f_0(\cdot)$ монотонна и $(P_t \wedge P_{t_1})(l) = [l = t]_{\mathcal{F}} \wedge [l = t_1]_{\mathcal{F}} \leq [t = t_1]_{\mathcal{F}} \wedge El = v \wedge El = \pi_v(l)$, т. е. $P_t \wedge P_{t_1} \leq \pi_v$.

Лемма 1. Предпучок $\mathcal{F}$ на Ω является пучком в том и только в том случае, если для любого синглтона $g(t): \mathcal{F} \rightarrow \Omega$ найдется t_g из $\mathcal{F}$, для которого

$$\forall t \in \mathcal{F} (g(t) = [t = t_g]_{\mathcal{F}} \Leftarrow P_{t_g}(t)). \quad (42)$$

Согласно этой лемме найдется t_g , для которого выполняется соотношение (42). Тогда f_0 и f_{t_g} совпадают на всех синглтонах,

так как синглетон имеет вид $P_t(\cdot)$ и $f_{t_g}(P_t) = [t = t_g]_{\mathcal{F}} = g(t) = f_0(P_t)$, и по формуле (40) для любого семейства синглетонов g_{α} $f_0\left(\bigvee_{\alpha} g_{\alpha}\right) = \bigvee_{\alpha} f_0(g_{\alpha}) = \bigvee_{\alpha} f_{t_g}(g_{\alpha}) = f_{t_g}\left(\bigvee_{\alpha} g_{\alpha}\right)$.

Следующая лемма по существу завершает доказательство сюръективности отображения $\cong_u$.

Лемма 2. В полной гейтинговой алгебре множество всех синглетонов плотно.

Осталось проверить, что $t_g \in \mathcal{F}(u)$, т. е. $Et_g = u$. Действительно, $Et_g = f_{t_g}(E) = [E \in f_{t_g}] \geq \bigvee_t [E \in f_t] \wedge [f_{t_g} = f_t] = \bigvee \{Et \wedge [f_{t_g} = f_t] \mid t\} = [f_{t_g} \in \mathcal{F}'] = [f_0 \in \mathcal{F}'] = u$ и $Et_g = [t_g = t_g]_{\mathcal{F}} = f_{t_g}(P_{t_g}) = f_0(P_{t_g}) \leq u$.

Итак, $t_g \rightarrow [f]_u$, $\mathcal{F}(u)$ и $(\mathcal{F}')^{\wedge u}$ биективны посредством указанного отображения $\cong_u$. Проверим вторую формулу из (36): $[f_{t_1} = f_{t_2}] = \bigwedge_v (P(t_1) \leftrightarrow P(t_2)) \geq [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$, так как $P(t_1) \wedge [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}} = P(t_2) \wedge [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$, и, учитывая неравенство $Et_1 \wedge Et_2 \geq [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$, получаем требуемое соответствие в одну сторону. Наоборот, $Et_1 \wedge Et_2 \wedge (P_{t_1}(t_1) \rightarrow P_{t_1}(t_2)) \wedge (P_{t_2}(t_2) \rightarrow P_{t_2}(t_1)) \leq [t_1 = t_2]_{\mathcal{F}}$.

Итак, например, $\cong_1$ — изоморфизм структур: $\langle \mathcal{F}(1), [=]_{\mathcal{F}} \rangle$ и $\langle \mathcal{F}', [=] \rangle$, что и означает универсальность пучка V^a . Обозначим $\mathcal{F}_1 \Leftarrow \{f_k \mid k \in \mathcal{F}(1)\}$. Очевидно (и часто используется), что

$$\widehat{\mathcal{F}}'_1 = \widehat{\mathcal{F}}', \quad (43)$$

т. е. с точки зрения изоморфизма $\cong_1$ объекты $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}'_1$ взаимозаменяемы. Формула (36') вытекает из утверждения 9) теоремы 7.

Осталось проверить, что биекция $\cong_1$ (и аналогичным образом любое $\cong_u$) сохраняет операции и отношения, имеющиеся в объектах категории $\mathcal{C}$. В общем виде можно было бы описать язык, на котором выражаются такие операции и отношения и их свойства, и затем проверять это утверждение. Однако мы ограничимся случаем реально полезных категорий групп, модулей, алгебр, модульных решеток и т. п., учитывая, что эта проверка происходит совершенно аналогично для всех категорий.

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок со значениями в категории алгебр на пучках колец $\mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{F}(1)$ — кольцо, и «операции в $\mathcal{F}_1$ » определяются следующим образом:

$$f_{k_1} + f_{k_2} \Leftarrow f_{k_1 + k_2}, \quad (+) \Leftarrow \{ \langle f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_1 + k_2} \rangle^a \mid k_1, k_2 \in \mathcal{F}(1) \}. \quad (44)$$

Легко проверить, что $[(+) - \text{график функции (и в этом смысле — функция)}]$ вида $(\mathcal{F}'_1)^2 \rightarrow \mathcal{F}'_1 = 1$. Аналогичным образом определяются и операции на $\mathcal{F}'$, а именно

$$(f_{t_1} + f_{t_2}) \Leftarrow f_{t_1 \uparrow (E_{t_1} \wedge E_{t_2}) + t_2 \uparrow (E_{t_1} \wedge E_{t_2})},$$

и подчеркиванием $+$ переносится на все $\mathcal{F}'$. Точно так же определяется операция $\cdot$ и умножение на скаляр из $\mathcal{G}'$. Оценки аксиом кольца (группы, модуля и т. д.) легко вычисляются и равны 1. После этого очевидно, что

$$k_1 + k_2 = k_3 \Leftrightarrow [f_{k_1} + f_{k_2} = f_{k_3}] = 1, \quad k_1 \leq k_2 \Leftrightarrow [f_{k_1} \leq f_{k_2}] = 1, \quad (45)$$

$$k \cdot x = y \Leftrightarrow [f_k \cdot f_x = f_y] = 1, \dots$$

Утверждения б), в) теоремы 10 проверяются непосредственным вычислением. $\square$

Следствие 1. Если множество K представимо в виде $K = \hat{K}'$, где $K' \in V^a$ и с вероятностью 1 элемент K' непуст и принадлежит категории C , то K является значением пучка $\mathcal{F}$ на Ω , на K индуцируется структура объекта K' и выполняются аксиомы, характеризующие структуру объектов из C , т. е. аксиомы группы, кольца, модуля, модульной решетки и т. д.

$\triangleright$ Действительно, $\mathcal{F}(u) \Leftarrow (K')^{\wedge u} / \sim_u$ и операции в K определяются по формулам (45). Если Ω — вполне несвязная полная гейтингова алгебра, то $[\mathcal{F}' \cong K'] = 1$. $\square$

Теорема 10 вместе с этим следствием объясняет понимание нестандартного анализа как оценок и пучков на гейтинговых алгебрах. Множество Π и понятие синглтона определены в [49], там же, по существу, содержатся леммы 1 и 2.

Следствие 2. Для предикатов ϕ_k и $[K' \models \phi] = 1$ выполняются утверждения, содержащиеся в теоремах 2–5 (и таблицах 1, 2).

Формула (39) определяет по переменной v , пробегающей полную гейтингову алгебру, морфизм вида $\pi_{(v)}: \Omega \rightarrow \Pi$. Назовем сечением структуры $\langle \Pi, \mathcal{F}, \pi \rangle$ все морфизмы вида $f: \Pi \rightarrow \mathcal{F}$, для которых $\forall v \in \mathcal{F} (f \circ \pi_{(v)} = v)$ (соответственно сечением над u , если $\forall v \in \Omega (f \circ \pi_{(v)} = v \wedge (f(v) \leq u))$). Множества всех сечений обозначим $C(\Pi, \mathcal{F}, \pi)$ (соответственно $C(\Pi, u, \pi)$).

Следствие 3. Выполняется $\forall u \in \Omega (\mathcal{F}(u) \cong C(\Pi, u, \pi))$.

$\triangleright$ Этот канонический морфизм определяется формулой (35), т. е. $t \mapsto f_t$, где $t \in \mathcal{F}(u)$ и $f_t \Leftarrow P(t): \Pi \rightarrow u$. $\square$

Такое представление $\mathcal{F}(u)$ соответствует реализации пучка с помощью сечений.

6. Представление кольца и модуля нечеткими простым кольцом и векторным пространством. Вопрос о том, когда выполнено условие теоремы 10, т. е. когда объект K из категории C пред-

ставим пучком в виде $K = \mathcal{F}_a(1)$, где $\mathcal{F}$ — пучок на Ω (особенно в том случае, если мы хотим наложить определенные условия на Ω , — например, потребовать, чтобы Ω была полной булевой алгеброй), требует специального исследования.

Например, любое (ассоциативное, с единицей) кольцо K представимо таким образом на топологии вполне несвязного компакта. Представление кольца K пучком на некоторой полной булевой алгебре предполагает определенные условия на K , которые были указаны в теореме 4.

В работе [20] этот вопрос решен также для категории модулей. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 11. Пусть $\mathcal{G}$ — пучок колец над какой-то полной булевой алгеброй B и $K = \mathcal{G}(1)$.

а) Произвольный (правый) K -модуль $\mathcal{X}$ имеет вид $\hat{\mathcal{X}}'$, где $\mathcal{X}' \in V^B$ и $\mathcal{X}'$ — модуль над K' , в том и только в том случае, если

$$\forall \{u_\alpha\} \left(\bigwedge_\alpha u_\alpha = 1 \Rightarrow \forall \{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{X} \exists! x \in \mathcal{X} \forall \alpha (x_\alpha u_\alpha = x u_\alpha) \right). \quad (46)$$

Здесь $\{u_\alpha\}$ — дизъюнктивное семейство и u из B отождествляется со скаляром и центральным идемпотентом $e \Leftarrow u \cdot 1 + \neg u \cdot 0$ из K . При этом B отождествляется с правильной полной подалгеброй в $\text{Idc } K$. Вместо $\mathcal{G}'$ будем писать K' .

б) Если кольцо K нормально, то рациональная полнота модуля $\mathcal{X}$ влечет условие (46).

в) Если K — рационально полное бирегулярное B -кольцо и $\mathcal{G}$ — его канонический предпучок, то условие (46) эквивалентно рациональной полноте модуля $\mathcal{X}$.

Напомним, что рационально полным называется модуль, в котором для любого плотного идеала a в K и любого ϕ из $\text{Hom}_K(a, \mathcal{X})$ найдется элемент x_0 из $\mathcal{X}$, для которого $\forall k \in a (\phi(k) = x_0 k)$ (см. [58], с. 142), и для любого плотного идеала a в кольце K и любого x из $\mathcal{X}$ выполняется

$$x a = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (47)$$

Обычно a пробегает даже более широкое множество всех правых идеалов.

$\triangleright$ а) Если $\mathcal{X}$ имеет вид $\hat{\mathcal{X}}'$, то в качестве x из условия (46) выберем элемент (единственный с вероятностью 1) из $\mathcal{X}'$ вида $\sum_\alpha u_\alpha x_\alpha$. Наоборот, пусть $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию (46).

Тогда положим

$$[x_1 = x_2]_{\mathcal{F}} \Leftarrow \bigvee \{u \in B \mid x_1 u = x_2 u\}. \quad (48)$$

Эта оценка обладает свойствами

$$[x = y] = [y = x], \quad [x = y] \wedge [y = z] \leq [x = z] \quad (49)$$

и индуцирует пучок $\mathcal{F}$ на B , представляющий $\mathcal{X}$. (Любой пучок на полной булевой алгебре является вялым.) А именно, $\mathcal{F}(u) \cong \mathcal{X}/\sim_u$ и $\rho_v^u([x]_u) \cong [x]_v$. В силу теоремы 10 искомым $\mathcal{X}'$ будет $\mathcal{F}'$.

б) Проверим, что условие (46) вытекает из условия (47). Будем рассуждать аналогично доказательству теоремы 4. Если $1 = \bigsqcup_{\alpha} e_{\alpha}$, то положим $a \cong \bigoplus_{\alpha} e_{\alpha} K$. Такое a — плотный идеал и прямая сумма. Положим $\phi(e_1 t_1 \oplus \dots \oplus e_n t_n) \cong x_1 e_1 t_1 \oplus \dots \oplus x_n e_n t_n$. Это K -линейная функция вида $a_K \rightarrow \mathcal{X}$. Ввиду инъективности $\mathcal{X}$ найдется x_0 из $\mathcal{X}$, для которого $\forall t \in a (f(t) = x_0 t)$. Следовательно, $x_0 e_{\alpha} = f(e_{\alpha}) = x_{\alpha} e_{\alpha}$, т. е. $[x_0 = x_{\alpha}] \geq e_{\alpha}$ для всех α . Проверим единственность (отделимость): пусть $1 = \bigvee_{\alpha} e_{\alpha}$ и $x e_{\alpha} = 0$ для всех α . Опять-таки образуем $a \cong \bigoplus_{\alpha} e_{\alpha}$. В силу условия нормальности вышеуказанное a является плотным идеалом. Так как $x a = 0$, то согласно условию $x = 0$.

в) Согласно условию и теореме 4в) выполняется $[K' - \text{квазипростое кольцо}] = 1$. В силу уже доказанного утверждения а) этой теоремы и в силу условия (46) выполняется $[\mathcal{X}' - \text{модуль над } K'] = 1$. Нужно получить условие (47). Сначала проверим инъективность $\mathcal{X}$. Если a — идеал в K , то $[a - \text{идеал в } K'] = 1$. Поэтому $[a = 0] \vee [a = K'] = 1$, т. е. $[a = K'] = \bigvee_{h \in a} [k = 1]$. Используя экстенциональность функции $\phi: a \rightarrow K$, положим $x_0 \cong [a = 0] \cdot 0 + \sum_{h \in a} [k = 1] \phi(k)$. Тогда для любого t из a выполняется $[\phi t = x_0 t] = 1$, и поэтому в силу отделимости $\phi(t) = x_0 t$.

Если a — плотный правый идеал, то $[a - \text{плотный правый идеал}] = 1$. Поэтому $[a = K'] = 1$. Если $x \cdot a = 0$, то $[x \cdot a = 0] = 1$ и $[x = 0] = 1$, $x = 0$. $\square$

Следствие. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный (правый) модуль над кольцом K . Кольцо K представимо в виде $K = \mathcal{F}(1)$, где $\mathcal{F}$ — пучок на полной булевой алгебре B , и модуль $\mathcal{X}_K$ имеет вид $\widehat{\mathcal{X}}'$, где $\mathcal{X}' \in V^B$ и $[\mathcal{X}' - \text{векторное пространство над телом (полем) } K'] = 1$, (и, следовательно, $\mathcal{X}$ пучковое) в том и только в том случае, когда K — рационально полное абелево B -кольцо и выполнено условие (47).

Теорема 12. Пусть G — канонический пучок кольца K и Ω — топология стоунова пространства $\text{Idc } K$.

а) Произвольный (правый) K -модуль $\mathcal{X}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{X}}'$, где $\mathcal{X}' \in V^a$ и $[\mathcal{X}' - \text{модуль над } K'] = 1$.

б) Произвольный (правый) K -модуль $\mathcal{X}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{X}}'$, где $\mathcal{X}' \in V^a$ и $[\mathcal{X}' - \text{векторное пространство над телом (полем) } K'] = 1$, в том и только в том случае, когда K — абелево регулярное (коммутативное регулярное) кольцо.

▷ Для $\mathcal{X}$ рассматриваем канонический предпучок (из п. 7 § 1), который является $\bigcup$ -пучком и в силу теоремы 3 продолжается на Ω , и затем применяем теорему 10. Для доказательства утверждения б) применяем теорему 2. $\square$

Эти теоремы в качестве следствия немедленно дают эквивалентность хорновых и АЕ-хорновых теорий, как об этом говорится в теореме 6.

7. Теоремы переноса для нечеткого пополнения равномерного пространства. Пусть Ω и Ω_1 — две полные гейтинговы алгебры. Обозначим Ω_1^{Ω} множество всех морфизмов одной из них Ω_1 в другую Ω (морфизмы рассматриваются относительно структуры в полной гейтинговой алгебре вида $\langle \bigvee, \bigwedge, 0, 1 \rangle$). В частности, если Y — произвольное топологическое пространство и $\mathcal{T}$ — его топология, то можно рассмотреть множество $\Omega^{\mathcal{T}}$ (здесь $\Omega_1 = \mathcal{T}$); если в Y определены алгебраические операции, то они естественно поднимаются в множество $\Omega^{\mathcal{T}}$. А именно, если $p, q \in \Omega^{\mathcal{T}}$, то положим

$$(p + q)(O) \cong \bigvee \{p(O_1) \wedge q(O_2) \mid O_1 + O_2 \subseteq O\},$$

$$(pq)(O) \cong \bigvee \{p(O_1) \wedge q(O_2) \mid O_1 \cdot O_2 \subseteq O\}.$$

Тривиально проверяется, что если Y — топологическая группа, кольцо, модуль над кольцом K , алгебра, то $\Omega^{\mathcal{T}}$ — соответственно топологическая группа, кольцо, модуль над кольцом $\Omega^{\mathcal{T}K}$ (где $\mathcal{T}_K$ — топология в K), алгебра.

Аналогично, предикаты в Y , например, предикат порядка $\leq$ в Y , поднимаются в $\Omega^{\mathcal{T}}$ по формуле

$$(p_1 \leq p_2) \cong \left(\bigvee_{u \leq v} p_1(u) \wedge p_2(v) \right) = 1.$$

Далее, равномерно непрерывная функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ поднимается до функции вида $f_1: \Omega^{\mathcal{T}} \rightarrow \Omega^{\mathcal{T}\mathbb{R}}$, где $f_1(p) = q$ и $q(u) \cong \bigvee \{p(v) \mid f(v) \subseteq u\}$. Кроме того, положим

$$[p = q] = \bigwedge \{p(O) \leftrightarrow q(O) \mid O \in \mathcal{T}\},$$

где $(u \leftrightarrow v) \cong (u \rightarrow v) \wedge (v \rightarrow u)$.

Легко проверить, что структура $\langle \Omega^{\mathcal{T}}, [=] \rangle$ является Ω -множеством.

Конечно, структура в $\Omega^{\mathcal{T}}$ гораздо сложнее одноименной структуры в Y ; однако мы увидим, что многие свойства Y переносятся на $\Omega^{\mathcal{T}}$, а структура в $\Omega^{\mathcal{T}}$ совпадает с рядом классических структур при различном выборе Ω и Y . Приведенные определения и последующие утверждения получены автором для

случая полной гейтинговой алгебры Ω в работе [20], а для случая полной булевой алгебры Ω в работе [12].

Теорема 13. Пусть Y — равномерное пространство, полное со счетной базой окружений или равномерно локально компактное. Тогда Ω -множества $\Omega^{\mathcal{F}}$ и $(\tilde{Y})^{\wedge}$ (последний функтор вычисляется в V^2) изоморфны по формуле: если $[\mathcal{F} \in \tilde{X}] = 1$, то $\mathcal{F} \mapsto p$, где $p(O) \Leftrightarrow [\tilde{O} \in \mathcal{F}]$. Кроме того, Ω -множество $\Omega^{\mathcal{F}}$ является пучковым и этот изоморфизм сохраняет алгебраические операции и отношения, свойства абсолютной величины и нормы (в $\tilde{Y}$ они по определению поднимаются с $\tilde{Y}$).

▷ Пусть $[\mathcal{F} \in \tilde{Y}] = 1$. Проверим, что соответствующее p принадлежит $\Omega^{\mathcal{F}}$. Прежде всего отметим следующее.

1) $p(\phi) = [\tilde{\phi} \in \mathcal{F}] = 0$, так как $\tilde{\phi}$ пусто, $[\tilde{\phi} \notin \mathcal{F}] = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma$ выполняется $\bigvee \{p(u) \mid u^2 \subseteq \sigma\} = [\exists u \in \tilde{\mathcal{F}} (u^2 \subseteq \sigma \wedge u \in \mathcal{F})] = 1$, поскольку $[\forall \sigma \in \Sigma \exists u \in \tilde{\mathcal{F}} (u^2 \subseteq \sigma \wedge u \in \mathcal{F})] = 1$.

2) $p(u \cap v) = [(u \cap v)^{\vee} \in \mathcal{F}] = [\tilde{u} \cap \tilde{v} \in \mathcal{F}] =$
 $= [\tilde{u} \in \mathcal{F}] \wedge [\tilde{v} \in \mathcal{F}] = p(u) \wedge p(v)$.

3) Ясно (притом интуиционистски), что $\{\sigma(u) \mid u \in \mathcal{F} \wedge \sigma \in \Sigma\}$ — база некоторого фильтра Коши, содержащегося в $\mathcal{F}$, и так как $\mathcal{F}$ — минимальный фильтр Коши, то это база именно $\mathcal{F}$. Поэтому $[\tilde{O} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists \sigma \in \Sigma \exists u \in \tilde{\mathcal{F}} (u \in \mathcal{F} \wedge \sigma(u) \subseteq \tilde{O})] = 1$, и, следовательно $p(O) = \bigvee \{p(u) \mid \sigma(u) \subseteq O, \sigma \in \Sigma, u \in \mathcal{F}\}$.

Лемма. Если Y — полное метрическое пространство (т. е. Y полное со счетной базой окружений) или Y — равномерно локально компактное пространство, то предыдущие условия 1)–3) влекут свойство полной аддитивности:

$$u \subseteq \bigvee_{\alpha} u_{\alpha} \Rightarrow p(u) \leq \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha}).$$

Последнее условие, конечно, можно заменить на

$$u = \bigvee_{\alpha} u_{\alpha} \Rightarrow p(u) = \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha}).$$

Из леммы сразу вытекает, что $p \in \Omega^{\mathcal{F}}$. Отображение $\mathcal{F} \mapsto p$ инъективно. Если $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ и соответствующие p_1 и p_2 равны, то $[\tilde{u} \in \mathcal{F}_1] = [\tilde{u} \in \mathcal{F}_2]$ для всех $u \in \mathcal{T}$, $[\forall u \in \tilde{\mathcal{F}} (u \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow u \in \mathcal{F}_2)] = 1$, $[\mathcal{F}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_2 \cap \tilde{\mathcal{F}}] = 1$, но $\mathcal{F} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ — база в $\mathcal{F}$, так как $\{\sigma(u) \mid u \in \mathcal{F} \wedge \sigma \in \Sigma\}$ — база в $\mathcal{F}$. Поэтому $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, т. е. получим противоречие. Это отображение сюръективно. Если $p \in \Omega^{\mathcal{F}}$, то положим $\mathcal{F}(\tilde{u}) \Leftrightarrow p(u)$, $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{\tilde{u} \mid u \in \mathcal{T}\}$. Тогда $[\mathcal{F} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}] = 1$ и $[\tilde{u} \in \mathcal{F}] = \bigvee \{p(v) \wedge [\tilde{v} = u] \mid \tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})\} = p(u)$. Кроме того, $[\mathcal{F}$ — база фильтра Коши] = 1, так как $[\forall u \in \mathcal{F} \forall v \in$

$\in \mathcal{F} (u \cap v \in \mathcal{F})] = \bigwedge_{u, v \in \mathcal{T}} (p(u) \wedge p(v) \rightarrow p(u \cap v)) = 1$, $[\tilde{\phi} \in \mathcal{F}] =$
 $= p(\phi) = 0$, $[\exists u \in \mathcal{F}] = \bigvee_{u \in \mathcal{T}} p(u) = 1$, $[\forall \sigma \in \Sigma \exists u \in \mathcal{F} (u^2 \subseteq \sigma)] =$
 $= \bigwedge_{\sigma} \bigvee \{p(u) \mid u^2 \subseteq \sigma, u \in \mathcal{T}\} = 1$. Более того, $\mathcal{F}$ — база минимального фильтра Коши (соответствующий фильтр обозначим $\mathcal{F}'$). Действительно, $\{\sigma(u) \mid u \in \mathcal{F} \wedge \sigma \in \Sigma\}$ — база в $\mathcal{F}$, так как $[\forall u \in \tilde{\mathcal{F}} (u \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists \sigma \in \Sigma \exists v \in \tilde{\mathcal{F}} (v \in \mathcal{F} \wedge \sigma(v) \subseteq u))] =$
 $= \bigwedge_{u \in \mathcal{T}} (p(u) \rightarrow \bigvee_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{v \in \mathcal{T}} (p(v) \wedge [\tilde{\sigma(v)} \subseteq \tilde{u}])) = \bigwedge_{u \in \mathcal{T}} (p(u) \rightarrow \bigvee_{\sigma(v) \subseteq u} p(v)) = 1$, и вместе с тем, если $\mathcal{F}_1$ — фильтр Коши и $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$, то для любых $u \in \mathcal{F}$, $\sigma \in \Sigma$ найдется $v \in \mathcal{F}_1$ порядка σ и с вероятностью $[u = u'] \wedge [v = v']$ получаем $\tilde{u}' \cap \tilde{v}' \in \mathcal{F}$, т. е. $u' \cap v'$ непусто, и поэтому $v' \subseteq \sigma(u')$, $v \subseteq \sigma(u)$, т. е. $\{\sigma(u) \mid u \in \mathcal{F} \wedge \sigma \in \Sigma\}$ содержится в $\mathcal{F}_1$; следовательно, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. Отметим, что $[\tilde{u} \in \mathcal{F}'] = [\exists \sigma \in \Sigma \exists v \in \tilde{\mathcal{F}} (v \in \mathcal{F} \wedge \sigma(v) \subseteq u)] = \bigvee_{\sigma(v) \subseteq u} p(v) = p(u) = [\tilde{u} \in \mathcal{F}]$.

В дальнейшем мы будем различать $\mathcal{F} \in (\tilde{Y})^{\wedge}$ и соответствующие ему p . Проверим, что соответствие $\mathcal{F} \leftrightarrow p$ является изоморфизмом. Прежде всего $[\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_2 \cap \tilde{\mathcal{F}}] =$
 $= \bigvee_{u \in \mathcal{T}} (p_1(u) \leftrightarrow p_2(u))$. Далее $[\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3] = 1$ эквивалентно $[\forall u \in \tilde{\mathcal{F}} (u \in \mathcal{F}_3 \Leftrightarrow \exists v_1 \in \tilde{\mathcal{F}} \exists v_2 \in \tilde{\mathcal{F}} (v_1 \in \mathcal{F}_1 \wedge v_2 \in \mathcal{F}_2 \wedge v_1 \cdot v_2 \subseteq u))] =$
 $= 1$, т. е. $\forall u \in \mathcal{T} (p_3(u) = \bigvee_{v_1, v_2 \subseteq u} p_1(v_1) \wedge p_2(v_2))$. Аналогично, $[\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2] = 1$ эквивалентно $[\exists u \in \tilde{\mathcal{F}} \exists v \in \tilde{\mathcal{F}} (u \in \mathcal{F}_1 \wedge v \in \mathcal{F}_2 \wedge u \subseteq v)] = 1$, т. е. $\bigvee_{u \subseteq v} p_1(u) \wedge p_2(v) = 1$.

Теперь проверим лемму. Выполняется $p(u) \leq \bigvee \{p(\sigma(x)) \mid x \in \sigma(u)\}$, так как $\bigvee \{p(\sigma(x)) \mid x \in X\} = 1$, $p(u) = \bigvee \{p(u) \wedge p(\sigma(x)) \mid x \in X\}$, но если $x \notin \sigma(u)$, то $u \cap \sigma(x) = \emptyset$. Пусть $\sigma^3(v) \subseteq u$. Тогда $p(v) \leq \bigvee \{p(\sigma(x)) \mid x \in \sigma(v)\}$; если $x \in \sigma(v)$, то $\sigma^2(x) \subseteq \sigma^2(v) \subseteq u$, т. е. $p(v) \leq \bigvee \{p(\sigma(x)) \mid \sigma^2(x) \subseteq u\}$ и $p(u) = \bigvee \{p(v) \mid \sigma(v) \subseteq u\} \leq \bigvee \{p(\sigma(x)) \mid \sigma^2(x) \subseteq u\}$.

С другой стороны, $\sigma^2(x) \subseteq u \Rightarrow p(\sigma(x)) \leq p(u)$, и, следовательно, $p(u) = \bigvee \{p(\sigma(x)) \mid \sigma^2(x) \subseteq u\}$.

Пусть Y — полное метрическое пространство и $\{\sigma_n\}$ — его база окружений, состоящая из множеств, радиусы которых стремятся к нулю. Допустим $u \subseteq \bigcup_{\alpha} u_{\alpha}$ и $p(u) \not\leq \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha})$. По доказанному $p(u) = \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid \sigma_1^2(x) \subseteq u\}$. Поэтому $\exists x_1 (\sigma_1^2(x_1) \subseteq u \wedge p(\sigma_1(x_1)) \not\leq$

$\nless \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha})$). Аналогично выберем точку x_2 , для которой $\sigma_2^2(x_2) \subseteq \sigma_1(x_1)$ и $p(\sigma_2(x_2)) \nless \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha})$. Продолжая, получим последовательность $u \supseteq \sigma_1(x_1) \supseteq \sigma_2(x_2) \supseteq \dots$. Ее пересечение содержит некоторую точку x_0 и $x_0 \in u$. Тогда $x_0 \in u_{\alpha}$ при некотором α , и так как u_{α} открыто, то $\exists \sigma_{m_0}(\sigma_{m_0}(x_0) \subseteq u_{\alpha})$, и, начиная с некоторого m , имеем $\sigma_n(x_n) \subseteq \sigma_{n_0}(x_0)$. Поэтому $p(\sigma_n(x_n)) \leq p(u_{\alpha}) \leq \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha})$, что противоречит выбору $\sigma_n(x_n)$.

Теперь пусть Y — равномерно локальное компактное пространство. Сначала проверим свойство

$$p(u) = \bigvee_{\alpha} \{p(v) \mid \bar{v} \subseteq u, \bar{v} \text{ — компакт}\},$$

где $\bar{v}$ — замыкание v . Пусть σ_0 — окружение, для которого $\sigma_0(x)$ относительно компактно для всех $x \in Y$. В свойстве 3) базу окружений Σ можно заменить на любую другую базу, в частности, на базу $\Sigma \cap \sigma_0$. Пусть $\sigma(v) \subseteq u$. Найдется σ_1 , для которого $\sigma_1^3(v) \subseteq u$; тогда $p(v) \leq \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid x \in \sigma_1(v)\}$, но $x \in \sigma_1(v) \Rightarrow \sigma_1(x) \subseteq u$ и $\sigma_1(x)$ относительно компактно, т. е. $p(v) \leq \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid \sigma_1(x) \subseteq u\} \leq \bigvee \{p(w) \mid \bar{w} \text{ — компакт}, \bar{w} \subseteq u\}$.

Теперь все вытекает из формулы полной аддитивности для относительно компактного u .

Последнее свойство проверим сначала для случая двух слагаемых, т. е. проверим, что $p(u \cup v) = p(u) \vee p(v)$. Если $\bar{w} \subseteq u \cup v$, то $\bar{w}$ — компакт. Для любого $x \in \bar{w}$ существует такое σ_x , что $(\sigma_x^2(x) \subseteq u) \vee (\sigma_x^2(x) \subseteq v)$. Из этих $\sigma_x(x)$ выберем конечное покрытие $\sigma_{x_1}(x_1), \dots, \sigma_{x_n}(x_n)$ компакта $\bar{w}$ и положим $\sigma = \sigma_{x_1} \cap \dots$

$\dots \cap \sigma_{x_n}$. Тогда $y \in \sigma(x)$, $x \in w$ влечет, что $y \in \sigma_{x_1}^2(x_1)$, т. е. $\exists \sigma \forall x \in w (\sigma(x) \subseteq u \vee \sigma(x) \subseteq v)$. Положим $\sigma_1^2 \subseteq \sigma$, $w_1 = \{x \in w \mid \sigma(x) \subseteq u\}$, $w_2 = \{x \in w \mid \sigma(x) \subseteq v\}$. Тогда $w = w_1 \cup w_2$, $\sigma(w_1) \subseteq u$, $\sigma(w_2) \subseteq v$, $\sigma_1^2(w_1) \subseteq u$, $\sigma_1^2(w_2) \subseteq v$, $\sigma_1(w) = \sigma_1(w_1) \cup \sigma_1(w_2)$, $p(w) \leq \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid x \in \sigma_1(w)\} = \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid x \in \sigma_1(w_1)\} \vee \bigvee \{p(\sigma_1(x)) \mid x \in \sigma_1(w_2)\} \leq p(u) \vee p(v)$.

Наконец, если u относительно компактно, $u \subseteq \bigcup_{\alpha} u_{\alpha}$ и $\bar{w} \subseteq u$, то $\bar{w}$ — компакт, $\bar{w} \subseteq u_{\alpha_1} \cup \dots \cup u_{\alpha_n}$, $p(w) \leq p(u_{\alpha_1}) \vee \dots \vee p(u_{\alpha_n}) \leq \bigvee_{\alpha} p(u_{\alpha})$. $\square$

Теорема 14. Пусть Ω — алгебраическая нульмерная полная гейтингова алгебра и Y — равномерное пространство из предыдущей теоремы. Кроме того, предположим, что Y описывается термом, т. е. $Y = \text{cl } Y_0$ и $Y_0 = \{y \mid \phi(y)\}$, где ϕ — любая формула языка ZF и терм cl означает пополнение равномерного

пространства Y_0 . Также предположим абсолютность формулы ϕ , т. е. $\forall g ([g \in \tilde{Y}_0] = [\phi(g)])$. (Всем этим условиям на Y , например, удовлетворяет любое неметрическое локально компактное тело.)

Если ψ — хорнова формула и $\Omega \vdash \psi_Y$, то $(\psi)_{\Omega^{\mathcal{T}}}$. (Это значит, что выводимое хорново свойство пространства Y переносится на пространство $\Omega^{\mathcal{T}}$.)

$\triangleright$ По условию $\Omega \vdash \psi_{\text{cl}\{y \mid \phi(y)\}}$. Поэтому $1 = [\psi_{\text{cl}\{y \mid \phi(y)\}}] = [\psi_{\text{cl}\tilde{Y}_0}] = [\psi_Y]$. По теореме 8б) получаем $(\tilde{Y}_0)^{\wedge} \models \psi$, т. е. $\Omega^{\mathcal{T}} \models \psi$. Здесь $\Omega \vdash$ означает интуиционистскую или классическую выводимость в зависимости от того, является ли Ω гейтинговой или булевой алгеброй. $\square$

§ 3. Некоторые применения нестандартного анализа

Применения развитого выше метода в случае теории колец видны из таблиц 1, 2 в § 1 и теорем 2, 4, 6. Как отмечалось в § 1, аналогичные таблицы и утверждения можно построить для моноидов, групп и алгебр. Конкретные результаты, полученные на этом пути, содержатся, например, в работах [28], [32].

Сейчас коснемся приложений, относящихся к другим структурам. Прежде всего приведем теорему, показывающую классический характер структуры $\Omega^{\mathcal{T}}$. Для каждой из получающихся таким образом структур применима теорема 14. Прообразом этой теоремы является следующее очевидное замечание:

если $\Omega = \mathcal{T}(X)$ и $\mathcal{T}$ — топология полного регулярного пространства Y , то $\Omega^{\mathcal{T}}$ есть алгебра $C(X, Y)$ непрерывных функций.

Действительно, каждому $p \in \Omega^{\mathcal{T}}$ сопоставим $f_p: X \rightarrow Y$, $f_p(x) = \lim p^{-1}(\mathcal{T}_x)$, где $\mathcal{T}_x$ — семейство всех открытых окрестностей точки x . Здесь $p^{-1}(\mathcal{T}_x)$ — база фильтра Коши, так как $\bigcup_{y \in Y} \sigma(y) = Y$, $\bigcup_y p(\sigma(y)) = X$, $x \in p(\sigma(y))$, $\sigma(y) \in p^{-1}(\mathcal{T}_x)$.

Теорема 15. а) Если Ω — произвольная полная булева алгебра и Y — поле вещественных чисел, то $\Omega^{\mathcal{T}}$ — расширенное K -пространство с базой Ω .

б) Если Ω — нормированная полная булева алгебра (т. е. лебегова алгебра пространства с мерой), то $\Omega^{\mathcal{T}}$ есть алгебра $L(Y, \mathbb{R})$ всех измеримых функций.

в) Если Ω — произвольная полная булева алгебра и Y — полное метрическое или локально компактное пространство, то Ω есть алгебра $C'(S, Y)$ всех непрерывных функций на стоуновском пространстве S алгебры Ω , определенных на открытых плотных подмножествах S , со значениями в Y (с точностью до совпадения на открытом плотном множестве).

г) Если Ω — произвольная полная гейтингова алгебра и Y — компактное пространство, то $\Omega^{\mathcal{T}}$ есть алгебра $C(S, Y)$ всех непрерывных функций.

Утверждение а) доказано в работе [8], остальные утверждения получены в [13], [17], [20].

▷ в), г) Пусть $p \in \Omega^{\mathcal{T}}$. Если s — простой идеал в Ω , т. е. $s \in S$, то положим

$$f_p(s) = \lim p^{-1}(\Omega - s).$$

Обозначим S_p множество тех $s \in S$, для которых $p^{-1}(\Omega - s)$ является базой фильтра Коши. Тогда $f_p: S_p \rightarrow Y$, так как Y — полное пространство. Проверим непрерывность функции f_p и даже ее равномерную непрерывность в равномерных структурах квазикompакта S и любой отделимой компактификации Y^* пространства Y . (Если Y — компакт, то $Y^* = Y$.) Множества

$\bigcup_{i=1}^n \bar{u}_i^2$ образуют базу окружений в Y (где $-$ — оператор замыкания и $\bigcup_{i=1}^n u_i = Y$). Поэтому $\bigcup_{i=1}^n p(u_i) = S$. По окружению $\{u_i\}$ образуем окружение $\{p(u_i)\}$ в S . Если $s_1, s_2 \in (p(u_i) \cap S_p)$, то $u_i \in p^{-1}(\Omega - s_1), p^{-1}(\Omega - s_2)$, т. е. $f_p(s_1), f_p(s_2) \in \bar{u}_i, \langle f_p(s_1), f_p(s_2) \rangle \in \bigcup_{i=1}^n \bar{u}_i^2 = \bigcup_{i=1}^n u_i^2$.

Проверим, что S_p — плотное множество. Пусть Y — полное пространство со счетной базой окружений, элементы которой мы будем обозначать σ . образуем плотные множества $S_\sigma = \bigcup \{p(u) | u^2 \subseteq \sigma\}$, так как $\bigvee \{p(u) | u^2 \subseteq \sigma\} = 1$. Если Ω — полная булева алгебра, то S отделимо, $\bigcap_{\sigma} S_\sigma$ — плотное множество (фактически используется, что S бэровское) и $S_p \supseteq \bigcap_{\sigma} S_\sigma$, так как если $s \in \bigcap_{\sigma} S_\sigma$, то для любого σ выполняется $s \in S_\sigma, s \in p(u)$, где $u^2 \subseteq \sigma, p(u) \not\subseteq s, u \in p^{-1}(\Omega - s)$. Если Y локально компактно, то объединение открытых относительно компактных множеств u дает Y . Поэтому $\bigcup \{p(u)\}$ плотно в S и $S_p \supseteq \bigcup \{p(u)\}$. Действительно, если $s \in \bigcup \{p(u)\}$, то $s \in p(u), p^{-1}(\Omega - s)$ содержит относительно компактное множество u . Последнее утверждение влечет, что $p^{-1}(\Omega - s)$ — база фильтра Коши, так как для любого σ существуют точки $x_1, \dots, x_n \in \bar{u}$, для которых $\bar{u} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \sigma(x_i), p(u) \subseteq p\left(\bigcup_{i=1}^n \sigma(x_i)\right), \sigma(x_i) \in p^{-1}(\Omega - s)$ и $\sigma(x_i)$ имеет порядок σ^2 .

Продолжим f_p на замыкание S_p и затем сузим на открытое множество, являющееся прообразом Y . В результате f_p определено на открытом плотном множестве. (Если исходное f_p имеет относительно компактный образ в Y , то результирующее f_p определено на всем S .)

Отображение $p \mapsto f_p$ из $\Omega^{\mathcal{T}Y}$ в $C'(S_p, Y)$ или $C(S_p, Y)$ (если Y — компакт) инъективно. Действительно, если $p \neq q$, то найдется такое $u \in \mathcal{T}_Y$, что $p(u) \not\subseteq q(u)$. Поэтому найдется и такое v , что $\bar{v} \subseteq u$ и $p(v) \subseteq q(u)$. Пусть $s \in (p(v) - q(u)) \cap D(f_p) \cap D(f_q)$. В утверждении в) множество $p(v) - q(u)$ открыто и используется бэровость S . В утверждении г) $D(f_p) = D(f_q) = S$. Тогда $f_p(s) \in \bar{v}$ и $s \in \bigcap q(u)$. Если $f_p(s) = f_q(s)$, то $f_q(s) \in u, q(u) \subseteq \Omega - s, s \in q(u)$, — получаем противоречие. (Если Ω — полная гейтингова алгебра и Y локально компактно, то получаем только сюръективное отображение $p \mapsto f_p$.)

Проверим сюръективность отображения $p \mapsto f_p$. Если $f \in C'(S, Y)$, то положим $p_f(u) = \bar{f^{-1}(u)}$, где $u \in \mathcal{T}_Y$. Здесь и далее черта означает суп семейства открыто-компактных множеств, содержащихся в открытом множестве O . Ясно, что $p_f \in \Omega^{\mathcal{T}Y}$. В утверждении в) нужно еще убедиться, что $S_{p_f} \supseteq D(f)$: если $s \in D(f)$, то база фильтра $p_f^{-1}(\Omega - s) = \{u | f^{-1}(u) \not\subseteq s\} = \{u | s \in \bar{f^{-1}(u)}\}$ сходится к $f(s)$, т. е. является базой фильтра Коши. Покажем, что f_{p_f} и f совпадают на $D(f)$ и, следовательно, совпадают как классы эквивалентности. Для этого достаточно проверить, что для всякого σ найдется такое $b_1 \in (\Omega - s)$, что $p_f^{-1}(b_1) \subseteq \sigma(f(s)) \subseteq u$. Действительно, в силу непрерывности f в $D(f)$ найдется такая окрестность b точки s , что $f(b) \subseteq u$. Поэтому

$$b_1 \subseteq p_f(u) \supseteq b \in (\Omega - s), \quad b_1 \in (\Omega - s). \quad \square$$

Связь $\Omega^{\mathcal{T}}$ и соответствующей алгебры функций самая тесная. Например, $\llbracket p = q \rrbracket = \{s | f_p(s) = f_q(s)\}$, а также, если X — метрическое пространство и $|\cdot|$ — расстояние до фиксированной точки в X , то

$$\inf \{\lambda \in \mathbb{R} | \llbracket |p| < \tilde{\lambda} \rrbracket = 1\} = \sup \{|f_p(s)| | s \in D(f_p)\}.$$

Замечание. Условие на пространство Y в теореме 15 г) часто бывает излишне сильным. Если в Y всякое ограниченное множество относительно компактно, то любая непрерывная функция $f: S \rightarrow Y$ точно так же отождествляется с некоторым ограниченным в смысле предыдущей нормы $p \in \Omega^{\mathcal{T}}$. Если p ограничено в том же смысле, то образ f_p ограничен и, следовательно, f_p — непрерывная функция на S . Поэтому $C(S, Y)$ соответствует множеству ограниченных элементов в $\Omega^{\mathcal{T}}$.

Предложение. Пусть Y — линейал, $\mathcal{T}$ — его порядковая топология и Y^s — пополнение $\tilde{Y}$ сечениями (в V^a). Тогда $\hat{Y}^s$ есть алгебра $\Omega_1^{\mathcal{T}}$.

▷ Если $[t \in Y^s] = 1$, то определим p следующим образом. Если $y_1, y_2 \in Y$, то $p((y_1, y'_1) \wedge \dots \wedge (y_n, y'_n)) \Leftrightarrow [y_1 \leq t < y'_1] \wedge \dots \wedge [y_n \leq t < y'_n]$. Если $u = \bigcup_{\alpha} (y_{\alpha}, y'_{\alpha})$, то $p(u) \Leftrightarrow \bigvee_{\alpha} p((y_{\alpha}, y'_{\alpha}))$. □

Отметим очевидное и весьма частное

Следствие. Если X — вполне несвязный компакт, то в алгебре $C(X, \mathbb{C})$ любое алгебраическое уравнение (со старшим коэффициентом 1) имеет решение, а в случае алгебры $C(X, \mathbb{R})$ любое такое же алгебраическое уравнение нечетной степени имеет решение.

▷ Алгебраическая замкнутость записывается АЕ-хорновой формулой, а упомянутые алгебры соответствуют полям комплексных и вещественных чисел, для которых эти утверждения выполняются. При этом легко описывается структура множества решений. □

Следующие несколько теорем относятся к булеву случаю и получены в работах [13], [15]. В этих работах содержатся и другие результаты того же сорта.

Все эти теоремы имеют такой характер: более сложному объекту T (морфизму определенного вида) сопоставляется один определенный объект T' (более простой морфизм) таким образом, что хорновы свойства T' переносятся на T .

В ближайшей теореме 16 нам потребуются некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{X}$ — слабо полное банахово пространство и B — полная булева алгебра проекторов в нем. Рассмотрим алгебру $B_c^{\mathcal{T}}$, состоящую из всех морфизмов из $B^{\mathcal{T}}$ с компактным носителем, где $\mathcal{T}$ — топология в поле $\mathbb{C}$. Для любого морфизма $p \in B^{\mathcal{T}}$ легко определяется B -значная мера на $\mathbb{C}$, которую обозначим также p , а именно, $p(w) \Leftrightarrow f_p^{-1}(w)$ (см. [12]).

Такой выбор B позволяет определить по мере p действие p на ξ , а именно, $p \cdot \xi \Leftrightarrow w\text{-}\lim \sum_{i=1}^n \lambda_i p(w_i) \xi$, где $\{\langle w_i, \lambda_i \rangle \mid 1 \leq i \leq n\}$ — интегральное разбиение $\mathbb{C}$. Таким образом, p задает ограниченный линейный оператор вида $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (а p является, в сущности, его разложением единицы).

Пусть G — коммутативная абелева локально компактная группа. Хорошо известно, что в ней содержится открытая подгруппа вида $G_0 \times \mathbb{R}^n$, где $n \geq 0$ и G_0 — компактная группа. Гомоморфизм $T: G \rightarrow B_c^{\mathcal{T}}$ назовем *интегрируемым*, если его сужения на G_0 и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (обозначаемые соответственно T_0 и T_i , где $1 \leq i \leq$

$\leq n$; последние понимаются как $(T \upharpoonright \mathbb{R}_i) \cdot (T(1))^{-1}$, здесь $\mathbb{R}_i$ — i -сомножитель в $\mathbb{R}^n$, $1 \in \mathbb{R}_i$ и λ — аргумент) интегрируемы по Бохнеру. Это означает, что все функции $T_i(g)\xi: G \rightarrow \mathcal{X}$, где $\xi \in \mathcal{X}$, обладают последовательностями почти всюду сходящихся к ним и счетнозначных измеримых функций («сильно измеримых») и $\int_G \|T_i(g)\xi\| dg < \infty$.

Теорема 16. Если $T: G \rightarrow B_c^{\mathcal{T}}$ — интегрируемый гомоморфизм, то T' — однозначное продолжение $\tilde{T}$ с $\tilde{G}$ на $\tilde{G}$ в V^a — является непрерывным комплекснозначным гомоморфизмом локально компактной абелевой группы $\tilde{G}$. Обозначим $E(\tilde{G}, \mathbb{C})$ множество всех комплекснозначных непрерывных гомоморфизмов в V^a . Тогда соответствие $T \rightarrow T'$ является вложением множества всех интегрируемых гомоморфизмов вида $T: G \rightarrow B_c^{\mathcal{T}}$ в $E(\tilde{G}, \mathbb{C})$. Хорновы свойства гомоморфизма T' переносятся на операторнозначный гомоморфизм T .

Следующая теорема относится в ее весьма частном случае к непрерывным операторам пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ в себя. Оказывается, что аналогично тому, как это было в предыдущей теореме, каждому оператору T можно сопоставить такую обобщенную функцию T' , что хорновы свойства T' переносятся на T .

Пусть $\mathcal{X}$ — векторное пространство, $\{\|\cdot\|\}$ — счетное семейство полунорм на нем, а $\mathcal{Y}$ — K -пространство с единицей и базой B . Линейный оператор $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется *кусочно ограниченным*, если существуют разбиение $\{b_i\}$ единицы базы B (т. е. $\bigvee_i b_i = 1$ и $b_i \wedge b_j = 0$ для всех $i \neq j$) и семейство $\{\lambda_i\} \in \mathbb{R}$, для которых

$$\forall \xi \in \mathcal{X} \forall i (|f(\xi)| b_i \leq \lambda_i \|\xi\|_i \cdot 1).$$

Теорема 17. Если $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — кусочно ограниченный оператор, то f' , являющаяся однозначным продолжением $\tilde{f}$ с $\tilde{\mathcal{X}}$ на $\mathcal{X}$, — обобщенная функция в V^a . Обозначим $\tilde{X}^*$ сопряженное пространство к $\tilde{X}$ в V^a . Тогда соответствие $f \leftrightarrow f'$ является изоморфизмом пространств кусочно ограниченных операторов и $(\tilde{X}^*)^{\wedge}$. Хорновы свойства обобщенной функции f' переносятся на оператор f .

Эта теорема получена в работах [15], [20], ее более подробное изложение содержится в первой части работы [35].

Следующая теорема относится к изучению модулей над кольцом измеримых функций, и, в частности, она приводит к интегральным представлениям операторов. Эта теорема по существу содержится в работе [13].

Пусть $\langle X, \mu \rangle$ и $\langle Y, \nu \rangle$ — пространства с конечной мерой, т. е., например, μ — конечная неотрицательная счетно аддитивная функция на определенной σ -алгебре подмножеств X . Обозначим B факторалгебру, получающуюся факторизацией из упомянутой σ -алгебры пространства Y по идеалу из множеств нулевой меры ν . Обозначим $L(X)$ и $L(Y)$ факторалгебры измеримых вещественнозначных функций на пространствах X и Y . По теореме 15 $L(Y)$ — кольцо (расширенное K — пространство с базой B), изоморфное $(\tilde{R})^\wedge = B^{\mathcal{T}^R}$. Так как $L(X \otimes Y)$ — модуль над $L(Y)$, то по теореме 11 найдется такое $M \in V^B$, что $L(X \otimes Y)$ изоморфно $\hat{M}$ и $[M$ — векторное пространство над $\tilde{R}] = 1$. Более того, из результатов работы [19] вытекает, что найдутся такие Z, κ , что $[\langle Z, \kappa \rangle$ — пространство с мерой $] = 1$ и $[M = L(Z)] = 1$. При этом $(L^1(Z, \kappa))^\wedge \cong L^1(X \otimes Y)$ и $\forall f \in L^1(X \otimes Y) ([\int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_Z f d\kappa] = 1)$.

Теорема 18. а) Подмодуль $(L^1(Z, \kappa))^\wedge$ состоит из всех функций $f(x, y)$ из $L(X \otimes Y)$, которые при почти всех y_0 из Y принадлежат $L^1(X)$ (этот подмодуль обозначим $L^1(X \otimes Y)$, или, короче, L^1) и $\forall f \in L^1 ([\int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_Z f d\kappa] = 1)$.

б) Пусть $T: L^1 \rightarrow L(Y)$ есть $L(Y)$ -гомоморфизм и T непрерывен относительно сходимости почти всюду. Тогда существует такое $f_0 \in L^1$, что

$$\forall f \in L^1 \left(T(f) = \int_X f_0(x, y) f(x, y) d\mu(x) \right).$$

В работах [13], [27] аналогичным образом хорновы свойства алгебры матриц над $\Omega^{\mathcal{T}^Y}$ сводятся к хорновым свойствам матриц над $\tilde{Y}$, а также получаются теоремы типа Минковского — Хассе для форм с коэффициентами в $\Omega^{\mathcal{T}^Q_p}$, где $\mathcal{T}^Q_p$ — топологии в $\mathbb{Q}_p$.

Список литературы

- [1] Robinson A. Non-standard analysis.—Proc. Roy. Acad. Sci. Amst., ser. A, 1961, 64, p. 432—440.
- [2] Robinson A. Non-standard analysis.—Amsterdam: North-Holland, 1966.
- [3] Любецкий В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества типа CA .—ДАН СССР, 1970, 195, № 3, с. 548—550.
- [4] Любецкий В. А. Случайные последовательности чисел и A_2 -множества.—В кн.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976, с. 96—122.

- [5] Любецкий В. А. О несуществовании эффективного неизмеримого множества.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 4. М.: МО, 1977, с. 36—40.
- [6] Любецкий В. А. Области изменения булевозначных мер.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 5. М.: МО, 1978, с. 37—41.
- [7] Любецкий В. А. Алгебра значений μ -измеримых функций.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 5. М.: МО, 1978, с. 41—44.
- [8] Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K -пространства.—ДАН СССР, 1977, 237, № 4, с. 794—796.
- [9] Takeuti G. Two applications of logic to mathematics.—Tokyo. Iwanami; Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
- [10] Любецкий В. А. Булевозначные расширения структур.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 6. М.: МО, 1979, с. 67—81.
- [11] Любецкий В. А. К вопросу об интегральном представлении элемента.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 6. М.: МО, 1979, с. 81.
- [12] Гордон Е. И., Любецкий В. А. Булевозначные расширения равномерных структур. I.—Деп. ВИНТИ 16.12.79, № 711-80 деп.
- [13] Гордон Е. И., Любецкий В. А. Булевозначные расширения равномерных структур. II.—Деп. ВИНТИ 8.12.80, № 2640-81 деп.
- [14] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Алгебра булевозначных мер.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 7. М.: МО, 1980, с. 62—66.
- [15] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер.—ДАН СССР, 1981, 256, № 5, с. 1037—1041.
- [16] Любецкий В. А. Булевозначный анализ в связи с некоторыми вопросами теории мер.—В кн.: Математические методы решения инженерных задач, вып. 8. М.: МО, 1981, с. 57.
- [17] Гордон Е. И. Измеримые функции и интеграл Лебега в булевозначных моделях теории множеств с нормированными булевыми алгебрами.—Деп. ВИНТИ 13.09.79, № 291-80 деп.
- [18] Гордон Е. И. Устойчивость хорновских формул относительно перехода к алгебрам мер на локально компактных телах.—Деп. ВИНТИ 19.03.81, № 1243-81 деп.
- [19] Гордон Е. И. Алгебры мер на локально компактных группах.—Канд. дисс., 1981.
- [20] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум.—Деп. ВИНТИ 07.09.82, № 782-82 деп.
- [21] Takeuti G. Boolean-valued analysis.—Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1979.
- [22] Takeuti G. A transfer principle in harmonic analysis.—J. Symbolic Logic, 1979, 44, N 3.
- [23] Takeuti G., Titani S. Heyting valued universes of intuitionistic set theory.—In: Lecture Notes in Mathematics, 891. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1981, p. 189—306.
- [24] Бейдар К. И., Михалев А. В. Ортогональная полнота.—Доклад на XV Всесоюзной алгебраической конференции в г. Красноярске, июнь 1979.
- [25] Любецкий В. А. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум и теоремы переноса.—В кн.: Шестая Всесоюзная конференция по математической логике, Тбилиси, 1982, с. 98.
- [26] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум.—ДАН СССР, 1983, 268, № 4, с. 794—798.

- [27] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур.— В кн.: Исследования по нестандартным логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983.
- [28] Любецкий В. А. Алгебраические аспекты нестандартного анализа.— Деп. ВИНТИ 16.09.83, № 9341-83 деп.
- [29] Любецкий В. А. Пучки на гейтинговой алгебре: случай колец.— Деп. ВИНТИ 09.01.84, № 3971-84 деп.
- [30] Любецкий В. А. О некоторых алгебраических вопросах нестандартного анализа.— ДАН СССР, 1985, 280, № 1.
- [34] Любецкий В. А. Нестандартный анализ алгебро-топологических систем.— В кн.: Тезисы 4 Всесоюзной конференции по теории групп. М., 1984.
- [32] Любецкий В. А. Теоремы переноса и нестандартный анализ.— В кн.: Седьмая Всесоюзная конференция по математической логике. Новосибирск, 1984.
- [33] Анохин М. В., Любецкий В. А. Представления абелевых групп в банаховом пространстве и нестандартный анализ.— В кн.: Тезисы 4-й Всесоюзной конференции по теории групп. М., 1984.
- [34] Любецкий В. А. Теоремы переноса и нестандартный анализ.— Деп. ВИНТИ, № 9001-В.
- [35] Сикорский М. Р. Кусочно ограниченные операторы на счетно нормированных пространствах как линейные функционалы.— Деп. ВИНТИ, № 3395-82 деп.
- [36] Антонов В. И. Нормальные кольца и булевозначный универсум.— Деп. ВИНТИ 16.05.83, № 3407-83 деп.
- [37] Антонов В. И. Гейтингозначные оценки в пирсовских пучках колец.— Деп. ВИНТИ 09.01.84.
- [38] Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца как поля в булевозначных моделях теории множеств.— Деп. ВИНТИ 14.04.83, № 3286-83 деп.
- [39] Мальцев А. И. Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
- [40] Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза.— М.: Мир, 1969.
- [41] Гретцер Г. Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.
- [42] Бурбаки Ж. Общая топология: основные структуры.— М.: Наука, 1968. Общая топология: использования вещественных чисел в общей топологии, функциональные пространства.— М.: Наука, 1975. Общая топология: основные структуры.— М.: Физматгиз, 1958.
- [43] Гудеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: Мир, 1969.
- [44] Девис М. Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.
- [45] Бейдар К. Н., Михалев А. В. Ортогональная полнота и минимальные первичные идеалы.— Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 1984, вып. 10. 227—234.
- [46] Бейдар К. Н., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Ассоциативные кольца.— Итоги науки и техники: Алгебра. Топология, 1984, 22, с. 3—115.
- [47] Lecture Notes in Mathematics, 983.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1983.
- [48] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.

- [49] Fourman M. P., Scott D. S. Sheaves and logic.— Lecture Notes in Mathematics, 753. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1979, p. 302—401.
- [50] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
- [51] Сикорский Р. Булевы алгебры.— М.: Мир, 1969.
- [52] Halmos P. Lecture on Boolean Algebras.— Toronto; N. Y.; London, 1963.
- [53] Nelson E. Interval set theory: a new approach to non-standard analysis.— Bull. Amer. Math. Soc., 1977, 83, № 6.
- [54] Vopěnka P. General theory of $\mathcal{V}$ -models.— Comm. Math. Univ. Carolinae, 1967, 8, p. 147—170.
- [55] Scott D. Extending the topological. Part I.— Compositio math., 1968, 20, p. 194—210. Part II.— In: Intuitionism and Proof Theory. Amsterdam: North—Holland, 1970, p. 235—255.
- [56] Grayson R. Heyting-valued models for intuitionistic set theory.— Lecture Notes in Mathematics, 753. Berlin; Heidelberg; N. Y.; Springer, 1979, p. 402—414.
- [57] Pierce R. Modules over commutative regular rings.— Mem. Amer. Math. Soc., 1967, 70, p. 1—112.
- [58] Ламбек И. Кольца и модули.— М.: Мир, 1971.
- [59] Клини С. Введение в метаматематику.— М.: ИЛ, 1957.
- [60] Гольдблат Р. Топосы.— М.: Мир, 1983.
- [61] Scott D. Identity and existence in intuitionistic logic.— Lecture Notes in Mathematics, 753. Berlin; Heidelberg; N. Y.; Springer, 1979, p. 660—696.
- [62] Mulvey C. Representations of rings and modules.— Lecture Notes in Mathematics, 753. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1979, p. 542—585.
- [63] Keimel K. The representations of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1971.
- [64] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Павилёнис Р. И., Петров В. В., Смирнов В. А. Логика, основания математики и лингвистика.— Вопросы философии, 1984, № 1, с. 45—59.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Артин (Artin M.) 10, 131

Бандж (Bunge M. C.) 275, 351

Барр (Barr M.) 11, 14, 38, 62, 269, 274, 277

Бек (Beck J.) 23, 53, 126

Бенабу (Bénabou J.) 12—14, 78, 79, 83, 128, 173, 176, 193, 222, 355, 364

Бернайс (Bernays P.) 18

Борсе (Borceux F.) 165

Брук (Brook T. G.) 325

Буало (Boileau A.) 340

Бурн (Bourn D.) 17

Бэр (Baer R.) 281

Ван Осдол (Van Osdol D. H.) 12

Вейль (Weil A.) 9

Вердые (Verdier J. L.) 10

Волгер (Volger H.) 11, 325

Габриель (Gabriel P.) 26

Генкин (Henkin L.) 14, 262

Гёдель (Gödel K.) 14, 18, 262

Гильберт (Hilbert D.) 316

Гленн (Glenn P.) 302

Годеман (Godement R.) 9, 284, 286

Грей (Gray J. W.) 68

Грийе (Grillet P. A.) 12

Гротендик (Grothendieck A.) 9, 10, 32, 35, 68, 94, 103, 254, 259, 280, 282, 306, 309, 356

Даскин (Duskin J. W.) 300, 302

Дей (Day B. J.) 74

Делинь (Deligne P.) 10, 14, 232, 260, 262

Джонстон (Johnstone P. T.) 13, 41, 106, 208

Диаконеску (Diaconescu R.) 13, 132, 133, 140, 143, 161, 269, 314

Жиро (Giraud J.) 10, 13, 35, 37, 140, 143, 299

Жуааль (Joyal A.) 13, 14, 117, 118, 177, 179, 220, 222, 230, 265

Зарисский (Zariski O.) 9

Исбел (Isbell J. R.) 183

Йонедэ (Yoneda N.) 21, 300

Йонсон (Jonsson B.) 241

Кан (Kan D. M.) 76

Капланский (Kaplansky I.) 239

Картан (Cartan H.) 9, 291

Келли (Kelly G. M.) 10, 61

Кеннисон (Kennison J. F.) 228

Кок (Kock A.) 12, 16, 64, 179, 317, 319, 343

Конвей (Conway J. H.) 17, 233

Кондюше (Conduché F.) 77

Кост (Coste M.) 340

Коул (Cole J. C.) 13, 225, 325, 338

Коэн (Cohen P.) 345, 350

Крипке (Kripke S.) 177, 179

Куратовский (Kuratowski C.) 98, 317

Ламбек (Lambek J.) 113

Лекутурье (Lecouturier P.) 317, 319

Лере (Leray J.) 9

Лесафр (Lesaffre B.) 212

Лёвенгейм (Löwenheim L.) 247

Линденбаум (Lindenbaum A.) 54

Линтон (Linton F. E.) 24

Ловер (Lawvere F. W.) 10—13, 16, 44, 45, 49, 56, 74, 96, 103, 112, 120, 124, 159, 185, 211, 324, 342, 344

Любкин (Lubkin S.) 10

Маккаи (Makkai M.) 14, 262

Маклейн (Mac Lane S.) 14, 21, 282, 300

Миккелсен (Mikkelsen C. J.) 12, 52, 54, 168, 209, 317, 319, 322, 326, 343

Митчел Б. (Mitchell B.) 10

Митчел У. (Mitchell W.) 13, 141, 143, 171, 172, 325, 338

Мостовский (Mostowski A.) 325, 335

Мулви (Mulvey C. J.) 239

Мур (Moore J. C.) 23

Озиус (Osius G.) 13, 173, 176, 177, 325, 333, 338

Паре (Paré R.) 52, 54, 217, 355, 360, 366

Пенон (Penon J.) 17, 74, 78, 355, 356

Рейес (Reyes G. E.) 13, 220, 262, 265

Рейт (Wraith G. C.) 12, 14, 127, 129, 131, 192, 201, 208, 211, 215, 216, 241, 303

Ретрей (Rattray B.) 113

Рид (Reid M. A.) 18

Робинсон (Robinson A.) 343

Роос (Roos J. E.) 274

Роу (Rowe K. A.) 106

Сван (Swan R. G.) 239

Селерет (Celeyrette J.) 12, 355, 365

Серр (Serre J. P.) 9

Скотт (Scott D. S.) 233

Скулем (Skolem T.) 247

Стаут (Stout L. N.) 239

Стрит (Street R.) 17, 228

Тарский (Tarski A.) 54, 180, 241, 334

Тиле (Thiele E. J.) 335

Тьерне (Tierney M.) 12, 14, 44, 45, 49, 56, 61, 74, 96, 112, 116, 124, 159, 222, 342, 344, 345, 350

Уайлер (Wyler O.) 17

Уолтерс (Walters R. F. C.) 228

Факир (Fakir S.) 126

Фрейд (Freyd P.) 10, 12, 17, 121, 186, 187, 241, 271, 335, 353, 360

Фунаяма (Funayama N.) 273

Фурман (Fourman M. P.) 173, 175, 239, 242, 340

Хаким (Hakim M.) 13, 227

Хеллер (Heller A.) 106

Херон (Heron A.) 10

Хиггс (Higgs D.) 65

Хохстер (Hochster M.) 267

Цермело (Zermelo E.) 334

Цисман (Zisman M.) 26

Шломюк (Schlomiuk D.) 11

Шумахер (Schumacher D.) 355, 366

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома выбора 160
 — — неявная 163
 Алгебра булева 157
 — гейтингова 157
 — псевдобулева 157
 Арифметические операции 185
 Атом 278

Включение (морфизм в топосе) 123
 — транзитивных объектов 329
 Внешность топологии 122
 Внутренне полная подкатегория 78, 360
 — полное частично упорядоченное множество 167
 — проективный объект 163
 Внутренность топологии 122

Геометрический морфизм 47
 — — включения 123
 — — ограниченный 141
 — — существенный 47
 — — сюръекции 123
 Глобальный носитель 163
 Группа абелева слабая 284
 — вершин 300
 — когомологий 281
 — — с коносителем 314
 — — Чеха 288, 289
 — проконечная 304

Диаграмма внутренняя 69
 — постоянная 72
 — представимая 71
 — слабая 127
 Дизъюнктивное копроизведение 36
 Доказуемо эквивалентные формулы 263
 Дополнение 158
 Допустимый класс 224

Замыкание 96

Интервал в топосе 137
 Интернализация 79

Интерпретация языка 173, 219
 Исчисление частных 26

Канторов дисконтинуум 276
 Кардинал финитный 193
 Категория атомная 277
 — внутренние полная 73
 — внутренняя 67
 — Галуа 306
 — Гротендика 94
 — декартово замкнутая 44
 — замкнутая относительно оболочек 74
 — локально внутренняя 356
 — локально замкнутая 74
 — малая 21
 — обогащенная 356
 — синтаксическая 263
 — слабо фильтрованная 86
 — уравновешенная 48
 — фильтрованная 86
 Классификатор морфизмов 203
 — объектов 137, 201
 — подобъектов 44
 Конечность по Куратовскому 317
 Континуум-гипотеза 345
 Корасслоение дискретное 69
 — расщепимое 94
 Кручение над $\mathcal{E}$ 363

Локально постоянный объект 153, 305
 — пространственный топос 275
 — расщепимый эпиморфизм 163
 Локальное кольцо 217

Модель теории 211, 220
 — — булевозначная 344
 — — двузначная 344
 Морфизм биplotный 110
 — геометрический 47
 — локальный 218
 — центральный 301
 — этальный 42

Образ геометрического морфизма 124
 — обратный 47

Образ прямой 47
 Объект ациклический 282
 — вещественных чисел по Дедекн-ду 231
 — — — Коши 237
 — внутренний строгий 63
 — вполне упорядоченный 179
 — изоморфизмов 177
 — когерентный 252
 — компактный 252
 — локально постоянный 153, 305
 — натуральных чисел 185
 — нормальный 308
 — образующих 141
 — общий 137, 201
 — объектов 67
 — отделимый 100
 — открытый 113
 — разрешимый 182
 — симплициальный 68
 — слабый 284
 — стабильный 252
 — существенный 274
 — транзитивный 326
 — частично транзитивный 333
 — эпиморфизмов 177
 Объект-степень 64
 Отношение эквивалентности 36
 — — индуктивное 326
 — — экстенциональное 326
 — — эффективное 36
 Отображение классифицирующее 44
 — синглетонное 49
 — частичное 48

Подобъект замкнутый 97
 — общий 44
 — плотный 97
 Покрывающее решето 33
 — семейство 32
 Поле вычетов 235
 — геометрическое 235
 — частных 235

Почти мономорфизм 110
 — эпиморфизм 110
 Предшучок 21, 29
 — внутренний 69
 — отделимый 30, 34
 — плоский 132
 — постоянный 29
 — представимый 21
 Предтопология 32
 — Гротендика 32
 Предтопос 258
 Преобразование естественное геометрических морфизмов 47
 — — внутреннее 64

Проконечное пополнение 305
 Пространство нульмерное 182
 — секвенциальное 41
 — сепарабельное 182
 — Серпинского 39
 — совершенно несвязное 182
 — спектральное 267
 — стоуновское 304
 — трезвое 249
 Профунктор внутренний 79
 — Йонеды 81
 — плоский слева 139
 Псевдоточка 247
 Пучок 29, 33, 100
 — ассоциированный 31, 109
 — постоянный 40
 — сечений 31
 — G -эквивалентный 40

Ранг функтора 155
 Расслоение дискретное 70
 Расширение Кана 72
 Рефлексивная пара 23
 Решетка 156
 — Брауэрова 157
 — дистрибутивная 156
 — стоунова 182
 Решето 33
 — эпиморфное 40

Сайт 33
 Семантика Крипке — Жуаяля 177
 Сигнатура 173
 Склепка 129
 Слабая абелева группа 284
 Слабый копредел 128
 Слой 30
 Спектр 224
 Спектральная последовательность Лере 283
 Сюръекция 123

Теория алгебраическая 211, 215
 — — внутренняя 215
 — геометрическая 220
 — множеств Цермело 334
 Топология Гротендика 32
 — замкнутая 114
 — каноническая 35
 — квазизамкнутая 272
 — максимальная 34
 — минимальная 34
 — открытая 113
 — предканоническая 258
 — субканоническая 35
 Топос 44

Топос булев 158
 — вырожденный 127
 — Гротендика 35
 — двузначный 335
 — классифицирующий 136, 222
 — когерентный 254
 — локально связный 154
 — нётеров 277
 —, определенный над $\mathcal{E}$ 132
 — пространственный 252
 — связный 154
 — Серпинского 137
 — точечный 336
 — элементарный 44
 — этальный 43
 — Т-модельный 224
 Торсор 136, 301
 Точка в топосе 243
 — общая 249
 Трансверсаль 312

Ультрастепень 342
 Ультрафильтр 341
 Универсальная операция замыкания 96
 Универсально действительная (формула) 175
 — эпиморфное (решето) 40
 Универсальный копредел 36
 Упорядоченная пара Куратовского 184
 Условие Бека 53, 154, 363
 Условие счетной цепи 346

Фильтр 341
 Фильтр-степень 342
 Фундаментальная группа 309
 Функтор ассоциирования пучка 31, 35, 109
 — внутренний 67
 — замены базы 56
 — копредела 72

Функтор кофинальный 95
 — логический 47
 — локально внутренний 356
 — непрерывный 244
 — носителя 160
 — обратного образа 47
 — окаймляющий 131
 — прямого образа 47
 — сильный 192
 — строгий 25
 Функция значения 52

Целочисленная область определения 235

Частично упорядоченное множество
 антисимметричное 157
 — — — внутренне полное 167
 — — — внутреннее 68
 — — — вполне упорядоченное 179
 — — — направленное 87

Экстенционал формулы 174
 Элемент 59
 — глобальный 59
 — недостижимый 276, 352
 — общий 60
 Эпиморфное разложение морфизма в топосе 61
 Эпиморфное семейство 244

Язык геометрический 218
 — Митчела — Бенабу 173
 $\mathcal{E}$ -категория 355
 $\mathcal{E}$ -топос 132
 $\mathcal{E}^G$ -торсор 303
 G -множество 46
 — непрерывное 282
 G -торсор 136
 T -модель общая 223, 265

Питер Т. Джонстон

ТЕОРИЯ ТОПОСОВ

Редактор В. В. Донченко
 Художественный редактор Т. Н. Кольченко
 Технический редактор Л. В. Лихачева
 Корректоры О. М. Березина, И. Я. Кристалл

ИБ № 12540

Сдано в набор 11.02.86. Подписано к печати 17.09.86.
 Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 27,5. Усл. кр.-отт. 27,5. Уч.-изд. л. 28,15. Тираж 5270 экз. Заказ № 44.
 Цена 3 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
 издательство «Наука»
 Главная редакция физико-математической литературы
 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
 630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25.