СМБ

Г. БЕЙТМЕН
А. ЭРДЕЙИ

ВЫСШИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

II

Этот труд посвящен памяти
ГАРРИ БЕЙТМЕНА,
создавшего столь грандиозный проект и продвинувшего свой замысел столь далеко по пути к завершению

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Главная редакция
физико-математической
литературы

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Г. БЕЙТМЕН и А. ЭРДЕЙИ

ВЫСШИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Перевод с английского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

517.2(083)
Б 41
УДК 517.5(083)

Высшие трансцендентные функции. Г. Бейтмен и А. Эрдейи

Настоящая книга представляет собой перевод второго тома вышедшего в США трехтомного издания под названием «Высшие трансцендентные функции». В отличие от других справочных пособий, оно содержит не только все формулы по теории специальных функций, полученные к середине 40-х годов, но и сжато изложенную теорию этих функций По полноте охвата материала издание уникально. Данная книга содержит теорию функций Бесселя, теорию функций параболического цилиндра и параболоида вращения, теорию ортогональных многочленов от одного и многих переменных. Многое из содержания этой книги впервые освещается в монографической литературе.

Книга является настольной для физиков-теоретиков и экспериментаторов, инженеров-исследователей, математиков-прикладников и др.

HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

Volume 2

BASED, IN PART, ON NOTES LEFT BY

HARRY BATEMAN

AND COMPILED BY THE

STAFF OF THE BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT DIRECTOR

ARTHUR ERDÉLYI

NEW YORK TORONTO LONDON MC GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC 1953

Б $\frac{20204-069}{053\,(02)-74}$ 84-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 7
ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Глава 8

ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Глава 9

НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 10
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Глава 11
СФЕРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Глава 12

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ТЕОРИЯ

7.1. Введение

Функции Бесселя являются, по-видимому, наиболее часто употребляемыми высшими трансцендентными функциями. Они чаще всего встречаются в связи с решением дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, а также в связи с некоторыми определенными интегралами. Опишем кратко оба типа приложений, причем начнем с последнего.

В 1770 году Лагранж изучил эллиптические движения планет вокруг Солнца. Пусть a и b — большая и малая главные полуоси эллиптической орбиты, обозначим эксцентриситет эллипса через $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, и пусть r, M, E — соответственно радиус-вектор, главная аномалия и эксцентрическая аномалия. Лагранж получил между этими величинами следующие соотношения:

$$M = E - \varepsilon \sin E, \tag{1}$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E) = \frac{a\,dM}{dE}. \tag{2}$$

Они приводят к разложениям

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nM), \quad \cos E = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nM). \tag{3}$$

В 1819 году Бессель выразил коэффициенты этих разложений в виде интегралов. Например,

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos(nE - n\varepsilon \sin E)\, dE.$$

С помощью простого преобразования встречающийся здесь интеграл может быть выражен через коэффициенты Бесселя (ср. 7.3 (2) и рекуррентные соотношения 7.2 (56)). Первое разложение (3) принимает при этом вид

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nM)\, J_n(n\varepsilon), \tag{4}$$

а второе разложение (3) может быть преобразовано к виду

$$\cos E = -\frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nM)\, J_n'(n\varepsilon). \tag{5}$$

Позже, в 1824 году, Бессель положил интеграл 7.3 (2) в основу изучения функций, которые теперь носят его имя.

Функции Бесселя чаще всего встречаются в связи с дифференциальными уравнениями. В монументальном трактате Ватсона (Ватсон, 1949), который является основным трудом по функциям Бесселя, история этих функций прослежена вплоть до И. Бернулли (около 1700 года). У Эйлера (1764) и Пуассона (1823) функции Бесселя обычно связывались с дифференциальными уравнениями в частных производных, возникавшими в теории потенциала, волнового движения и диффузии в цилиндрических или сферических полярных координатах. Однако иногда функции Бесселя встречаются в связи с другими дифференциальными уравнениями или системами координат

Пусть x, y, z — декартовы координаты, ρ, φ, z — цилиндрические координаты и r, θ, φ — сферические полярные координаты, определяемые соответственно равенствами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{6}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{7}$$

В этих координатах мы имеем

$$\Delta F = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = F_{\rho\rho} + \rho^{-1}F_{\rho} + \rho^{-2}F_{\varphi\varphi} + F_{zz}, \tag{8}$$

$$\Delta F = F_{rr} + 2\frac{F_r}{r} + \frac{F_{\theta\theta}}{r^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{F_{\theta}}{r^2} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\varphi}. \tag{9}$$

Если искать решение волнового уравнения $\Delta F + k^2F = 0$ в виде $f(\rho)\,g(\varphi)\,h(z)$ или $f(r)\,g(\theta)\,h(\varphi)$, то получим соответственно обыкновенные дифференциальные уравнения относительно f:

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{df}{\rho\, d\rho} + \left(k^2 - \alpha^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) f = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d^2(rf)}{r\,dr^2} + \left[k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\right] f = 0, \tag{11}$$

в которых α и ν — константы, возникшие при разделении переменных Общие решения этих уравнений имеют соответственно вид

$$f(\rho) = Z_\nu\left(\rho\sqrt{k^2-\alpha^2}\right), \tag{12}$$

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr), \tag{13}$$

где Z_ν обозначает функцию Бесселя или линейную комбинацию с постоянными коэффициентами функций Бесселя порядка ν.

Волновое уравнение и его решение в различных системах координат могут быть использованы для получения эвристических результатов в теории функций Бесселя (Weyrich, 1937) Сферические волны частоты ν с длиной волны λ и волновым числом $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, исходящие из источника (ξ, η, ζ), могут быть записаны с помощью волновой функции

$$R^{-1}e^{-i2\pi\left(\nu t-\frac{R}{\lambda}\right)}=R^{-1}e^{-i2\pi\nu t+ikR},$$

где R — расстояние между точками (ξ, η, ζ) и (x, y, z). Если ось z равномерно покрыта источниками, находящимися в одной и той же фазе, то результирующее волновое движение может быть представлено в виде суперпозиции колебаний:

$$u=e^{-i2\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[ik\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}\right]}{\sqrt{\rho^2+(z-\zeta)^2}}\,d\zeta, \tag{14}$$

где $\rho^2=x^2+y^2$. В силу принципа Гюйгенса эта функция представляет цилиндрическую волну. Если положить $\zeta=z+\rho\operatorname{sh}\tau$, то равенство (14) можно записать в виде

$$u=e^{-i2\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik\rho\operatorname{ch}\tau}\,d\tau. \tag{15}$$

Это приводит к интегральному представлению Зоммерфельда для функций Бесселя третьего рода.

Обозначения. В этой главе мы будем придерживаться обозначений, использованных в трактате Ватсона (Ватсон, 1949). Отметим некоторые обозначения, которые встречаются в литературе, но которые не будут здесь использоваться.

В книге Грей — Метьюз (1953, стр. 36 и 32 соответственно) введены функции $F_\nu(z)$ и $G_\nu(z)$ с помощью равенств

$$F_\nu(z)=z^{-\nu/2}J_\nu(2\sqrt{z}), \tag{16}$$

$$G_\nu(z)=\frac{1}{2}i\pi H_\nu^{(1)}(z). \tag{17}$$

Янке, Эмде, Лёш (1964, стр. 182) полагают

$$\Lambda_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z). \tag{18}$$

В книге Уиттекера — Ватсона (1963, стр. 214) модифицированная функция Ганкеля $K_\nu(z)$ определяется равенством

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right]\operatorname{ctg}(\nu\pi). \tag{19}$$

Это отличается от наших обозначений, см. 7.2 (13).

С функцией Неймана $Y_\nu(z)$ (см. 7.2 (4)) тесно связана функция $\mathbf{Y}_\nu(z)$ (Ватсон, 1949, стр. 71), ее обозначают также $\bar{Y}_\nu(z)$ (Грей — Метьюз, 1953, стр. 34):

$$\mathbf{Y}_\nu(z)=\bar{Y}_\nu(z)=\pi Y_\nu(z)\frac{e^{i\nu\pi}}{\cos(\nu\pi)}. \tag{20}$$

Относительно других обозначений функций, связанных с функциями Бесселя, см. п. 7.5.6.

7.2. Дифференциальное уравнение Бесселя

7.2.1. Функции Бесселя произвольного порядка. Функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$\nabla_\nu w \equiv z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = z\frac{d}{dz}\left(z\frac{dw}{dz}\right) + (z^2 - \nu^2) w = 0. \quad (1)$$

Вообще говоря, ν и z могут быть любыми числами, но сейчас мы будем предполагать, что ν не является целым числом (относительно целых значений ν см. п. 7.2.4). Дифференциальное уравнение (1) является предельным случаем гипергеометрического дифференциального уравнения (см. Klein, 1933, стр. 156). Оно имеет регулярную особую точку при $z = 0$ и нерегулярную особую точку при $z = \infty$. Все остальные точки являются для дифференциального уравнения обыкновенными. Обычный метод получения решения линейного дифференциального уравнения в окрестности регулярной особой точки (Уиттекер — Ватсон, 1961, 10.3) приводит к решениям

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \quad (2)$$

и $J_{-\nu}(z)$. Первое решение $J_\nu(z)$ называют функцией Бесселя первого рода; z — *независимое переменное*, ν — *порядок* функции Бесселя. Легко видеть, что ряд для $z^{-\nu} J_\nu(z)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области изменения z и ν. Равенство (2) может быть записано с помощью соотношений Куммера 6.3 (7) в виде

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{1}{4}z^2\right) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1, 2iz\right). \quad (3)$$

Линейные комбинации

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)}\left[J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)\right], \quad (4)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}\left[J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)e^{-i\nu\pi}\right], \quad (5)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)\right] \quad (6)$$

также являются решениями дифференциального уравнения (1); Y_ν называют функцией Бесселя второго рода или функцией Неймана, $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ являются функциями Бесселя третьего рода (их называют также первой и второй функциями Ганкеля). Из (5) и (6) имеем

$$J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2}, \quad (7)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)}{2i}. \quad (8)$$

Из определения непосредственно вытекает, что

$$H^{(1)}_{-\nu}(z) = e^{i\nu\pi} H^{(1)}_{\nu}(z), \quad H^{(2)}_{-\nu}(z) = e^{-i\nu\pi} H^{(2)}_{\nu}(z). \tag{9}$$

Мы будем обозначать через $\bar{z}$ (соответственно $\bar{\nu}$) число, комплексно сопряженное с z (соответственно ν) В этих обозначениях имеем

$$\left.\begin{aligned} \overline{J_{\nu}(z)} &= J_{\bar{\nu}}(\bar{z}), & \overline{Y_{\nu}(z)} &= Y_{\bar{\nu}}(\bar{z}), \\ \overline{H^{(1)}_{\nu}(z)} &= H^{(2)}_{\bar{\nu}}(\bar{z}), & \overline{H^{(2)}_{\nu}(z)} &= H^{(1)}_{\bar{\nu}}(\bar{z}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В частности, если порядок ν является вещественным числом, а независимое переменное z положительно, то функции J_ν и Y_ν принимают вещественные значения Все четыре функции Бесселя однозначны в плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной полуоси от 0 до $-\infty$. Если ν не является целым числом, то они имеют точку ветвления при $z=0$. Функция Бесселя первого рода является, очевидно, целой функцией от ν. Ниже будет показано, что при соответствующем определении для целых значений $\nu=n$ функции Бесселя второго и третьего рода также являются целыми функциями от ν.

7.2.2. Модифицированные функции Бесселя любого порядка. Если заменить в дифференциальном уравнении Бесселя (1) z на iz, оно примет вид

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2+\nu^2)\,w = 0. \tag{11}$$

Если ν не является целым числом (относительно целых значений ν см. п. 7.2.5), то $J_\nu(iz)$ и $J_{-\nu}(iz)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения (11). Чаще, однако, используются функции

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\nu+1, \frac{z^2}{4}\right) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2z\right) =$$

$$= 2^{-2\nu-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \frac{M_{0,\nu}(2z)}{\Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

(см. 6.9 (11)) и $I_{-\nu}(z)$. Их называют *модифицированными функциями Бесселя первого рода*. Если ν — вещественное число и z положительно, эти функции принимают вещественные значения.

Функция

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\,[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, W_{0,\nu}(2z) \tag{13}$$

(см. 6.9 (14)) также является решением уравнения (11). Ее называют модифицированной функцией Бесселя третьего рода или функцией Бассе (хотя современное определение дано Макдональдом).

Очевидно, что

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \tag{14}$$

а из (12), (5) и (6) следует, что

$$K_\nu(z)=\frac{i}{2}\pi e^{\frac{i\nu\pi}{2}}H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right)=-\frac{i}{2}\pi e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \tag{15}$$

а потому

$$K_\nu\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right)=\frac{i\pi}{2}e^{\frac{i\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(ze^{i\pi})=-\frac{i\pi}{2}e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}H_\nu^{(2)}(z), \tag{16}$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=-\frac{2i}{\pi}e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}K_\nu\left(ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right). \tag{17}$$

$K_\nu(z)$ принимает вещественные значения, если ν вещественно и z положительно.

7.2.3. Функции Кельвина и связанные с ними функции. Функции Кельвина $\operatorname{ber}(x)$ и $\operatorname{bei}(x)$ при вещественных x определяются равенствами

$$\operatorname{ber}(x)+i\operatorname{bei}(x)=J_0\left(xe^{\frac{3i\pi}{4}}\right)=I_0\left(xe^{\frac{i\pi}{4}}\right). \tag{18}$$

Обобщая это определение на функции Бесселя любого порядка и комплексные значения z, получаем соотношения

$$\operatorname{ber}_\nu(z)\pm i\operatorname{bei}_\nu(z)=J_\nu\left(ze^{\pm\frac{3i\pi}{4}}\right), \tag{19}$$

$$\operatorname{ker}_\nu(z)\pm i\operatorname{kei}_\nu(z)=e^{\mp\frac{i\pi\nu}{2}}K_\nu\left(ze^{\pm\frac{i\pi}{4}}\right). \tag{20}$$

Вместо (20) можно использовать

$$\operatorname{her}_\nu(z)+i\operatorname{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{3i\pi}{4}}\right), \tag{21}$$

$$\operatorname{her}_\nu(z)-i\operatorname{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{3i\pi}{4}}\right), \tag{22}$$

а потому

$$2\operatorname{ker}_\nu(z)=-\pi\operatorname{hei}_\nu(z),\quad 2\operatorname{kei}_\nu(z)=\pi\operatorname{her}_\nu(z). \tag{23}$$

Если ν вещественно и z положительно, то функции $\operatorname{ber}_\nu(z)$, $\operatorname{bei}_\nu(z)$, $\operatorname{ker}_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$, $\operatorname{her}_\nu(z)$, $\operatorname{hei}_\nu(z)$ принимают вещественные значения (относительно деталей см. McLachlan, 1934, стр 119, 168).

7.2.4. Функции Бесселя целого порядка. Функции Бесселя первого рода целого порядка называют также *коэффициентами* Бесселя. Если n — целое положительное число, то первые $n-1$ членов бесконечного ряда, определяющего $J_{-n}(z)$, обращаются в нуль, поскольку гамма-функции, стоящие в знаменателе этих членов, имеют полюс. Остающиеся гамма-функции могут быть заменены факториалами, и мы получаем

$$J_{-n}(z)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}}{m!\,(m-n)!}.$$

Заменяя здесь m на $n+l$, $l=0, 1, 2, \ldots$, получаем

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z). \tag{24}$$

Это соотношение справедливо для всех целых значений n.

Коэффициенты Бесселя возникают при разложении $\exp[z(t-t^{-1})/2]$ по степеням t. Чтобы доказать это, заметим, что

$$e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{zt}{2}\right)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z}{2t}\right)^m}{m!}.$$

Ясно, что коэффициенты при t^n в этом разложении являются не чем иным, как $J_n(z)$. Это приводит к производящей функции

$$\exp\left[(t-t^{-1})\frac{z}{2}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(z),$$

или если заменить z на αz и t на $\frac{t}{\alpha}$, к более общему выражению для коэффициентов Бесселя

$$\exp\left[(t-\alpha^2t^{-1})\frac{z}{2}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^nJ_n(\alpha z)=$$

$$=J_0(\alpha z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(\alpha z)\left[\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n+\left(-\frac{t}{\alpha}\right)^{-n}\right]. \tag{25}$$

При $\alpha=1$ и $t=e^{i\varphi}$ получаем формулу Якоби — Ангера

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(z)=$$

$$=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos(2n\varphi)+2i\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\sin[(2n-1)\varphi], \tag{26}$$

а при $t=ie^{i\varphi}$

$$e^{iz\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^ne^{in\varphi}J_n(z)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(z)\cos(n\varphi). \tag{27}$$

Если ν — целое число, то правые части равенств (4), (5) и (6) принимают неопределенную форму Однако предел этих правых частей при $\nu\to n$ (целому) существует и может быть использован для определения функции Бесселя второго и третьего рода целого порядка Ясно что нам достаточно вычислить

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(z),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Применяя к равенству (4) правило Лопиталя, получаем

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}. \tag{28}$$

Из (2) и 1.7 (1) вытекает

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = J_\nu(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\frac{\psi(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = -J_{-\nu}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\frac{\psi(-\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(-\nu+m+1)}, \tag{30}$$

и из формул 1.17 (11) и 1.17 (12) при $m \leqslant n-1$

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(-\nu+m+1)}{\Gamma(-\nu+m+1)} = (-1)^{n-m}(n-m-1)!.$$

Поэтому из (30) и (24) имеем

$$\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} = (-1)^n\left[-J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}\frac{(n-m-1)!}{m!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{m-n}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}\frac{\psi(m+1-n)}{(m-n)!\,m!}\right].$$

Относительно частных значений ν в (29) см. Mitra (1925), Airey (1935a) и также Müller (1940). Если ввести новый индекс суммирования $l = m-n$, то бесконечная сумма в этом выражении может быть записана в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\frac{\psi(l+1)}{l!\,(l+n)!}.$$

Мы получаем, таким образом,

$$\pi Y_n(z) = 2J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}\frac{(n-m-1)!}{m!} -$$
$$- \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l}\frac{\psi(n+l+1)+\psi(l+1)}{l!\,(n+l)!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{31}$$

Эта формула может быть переписана в виде

$$\pi Y_n(z) = 2\left[\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right]J_n(z) - \sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}\frac{(n-m-1)!}{m!} -$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}(h_{m+n}+h_m)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{32}$$

Мы использовали здесь равенство 1.7 (9) и положили

$$h_m = 1^{-1} + 2^{-1} + \ldots + m^{-1}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, \; h_0 = 0.$$

Если $\nu = 0$, то из (30) следует, что конечная сумма в равенстве (32) отсутствует. Таким образом, мы получаем

$$\pi Y_0(z) = 2\left[\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right)\right] J_0(z) - 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} (m!)^{-2} h_m, \tag{33}$$

где h_m имеет то же значение, что и в (32). Следует отметить, что в силу (28) имеем

$$Y_{-n}(z) = \lim_{\mu \to n} \frac{1}{\cos(\mu\pi)} \left[\frac{J_\mu(z)\cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)}\right] =$$

$$= (-1)^n Y_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{34}$$

При таком определении $Y_n(z)$ и $Y_{-n}(z)$ и соответствующем определении функций Бесселя третьего рода все функции Бесселя являются целыми функциями от ν.

7.2.5. Модифицированные функции Бесселя целого порядка. Из (24) и (12) имеем

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Поэтому в качестве фундаментальной системы решений уравнения (11) мы выбираем $I_n(z)$ и $K_n(z)$, где

$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right]_{\nu = n}. \tag{36}$$

Точно так же, как и в п. 7.2.4, получаем

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \frac{\psi(n+m+1) + \psi(m+1)}{m!\,(n+m)!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{37}$$

В случае $n = 0$ имеем

$$K_0(z) = -I_0(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{\psi(m+1)}{(m!)^2}. \tag{38}$$

Если доопределить функцию $K_\nu(z)$ при целых значениях ν указанным образом, она становится целой функцией от ν.

7.2.6. Сферические функции Бесселя. Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя сводятся к линейным комбинациям элементарных функций тогда и только тогда, когда ν является половиной нечетного числа или, как мы будем кратко говорить, полуцелым числом (Ватсон, 1949, 4.7—4.75). Выразим $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ через элементарные функции. Соответствующие выражения для других функций Бесселя следуют из (16), (17), (7) и (8) и приведены в п 7.11. Если $n=0, 1, 2, \ldots$ и $\nu = n+\frac{1}{2}$, то из 7.3 (16) вытекает

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\frac{e^{-z}}{n!}\int_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^n t^n\,dt \tag{39}$$

Но биномиальное разложение $\left(1+\frac{t}{2z}\right)^n$ состоит из конечного числа членов, а потому мы получаем выражение для $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ в виде конечной суммы:

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{m=0}^{n}(2z)^{-m}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{m!\,\Gamma(n+1-m)}. \tag{40}$$

Используя символ Ганкеля

$$(\nu, m) = \frac{2^{-2m}}{m!}\{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2]\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}$$

(см. 1.20 (3)), можно переписать это равенство в виде

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{m=0}^{n}\left(n+\frac{1}{2}, m\right)(2z)^{-m}. \tag{41}$$

В частности, при $n=0$ имеем

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}. \tag{42}$$

Из (42), см. также 7.11 (22), получаем представление

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z}. \tag{43}$$

Для других типов функций Бесселя см формулы 7.11 (1)—7.11 (13).

Функции Бесселя полуцелого порядка часто встречаются в связи с теорией сферических волн В этом контексте обычно используют обозначения Зоммерфельда

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{m+\frac{1}{2}}(z), \tag{44}$$

$$\zeta_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(1)}_{m+\frac{1}{2}}(z), \tag{45}$$

$$\zeta_m^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(z). \tag{46}$$

Иногда через $\psi_m(z)$ обозначают несколько отличную функцию (Ватсон, 1949, 3.41). Относительно одного класса многочленов, связанных со сферическими функциями Бесселя см. Krall — Frink (1949) и Burchnall (1951).

7.2.7. Произведения функций Бесселя. Для того чтобы получить выражение произведения $J_\mu(\alpha z)\,J_\nu(\beta z)$ двух функций Бесселя в виде степенного ряда по возрастающим степеням z, используем равенство (2) и правило Коши для умножения степенных рядов. Коэффициент при

$$(-1)^m\left(\frac{1}{2}\alpha z\right)^\mu\left(\frac{1}{2}\beta z\right)^\nu\left(\frac{1}{2}\alpha z\right)^{2m}$$

имеет вид

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(\beta/\alpha)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)\,(m-n)!\,\Gamma(\mu+m-n+1)}.$$

С помощью формул 1.2 (3), 1.20 (5), 2.1 (2) это выражение может быть представлено в виде конечного гипергеометрического ряда, что приводит к выражению

$$\Gamma(\nu+1)\,J_\nu(\beta z)\,J_\mu(\alpha z)=$$

$$=\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^\mu\left(\frac{\beta z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\,{}_2F_1(-m,\,-\mu-m;\;\nu+1;\;\beta^2\alpha^{-2}). \quad (47)$$

При $\beta=\alpha$ это разложение упрощается, поскольку тогда гипергеометрический ряд может быть просуммирован по формуле Гаусса 2.1 (14), так что

$$J_\nu(z)\;J_\mu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu+2m}\Gamma(\nu+\mu+2m+1)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(\nu+\mu+m+1)}. \quad (48)$$

Используя обозначения для обобщенных гипергеометрических рядов, получаем

$$\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu+1)\,J_\nu(z)\,J_\mu(z)=$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu}{}_2F_3\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\;1+\frac{\nu+\mu}{2};\;1+\nu,\;1+\mu,\;1+\nu+\mu;\;-z^2\right). \quad (49)$$

Из (48) легко вытекает разложение

$$e^{\pm iz}J_\nu(z)=\frac{(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)(\pm 2iz)^n}{n!\,\Gamma(2\nu+n+1)}.$$

7.2.8. Различные результаты. Укажем формулы дифференцирования и рекуррентные соотношения. Из (2) получаем, что

$$\frac{d}{dz}[z^{\nu}J_{\nu}(z)] = z^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}}{m!\,\Gamma(m+\nu)} = z^{\nu}J_{\nu-1}(z), \tag{50}$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_{\nu}(z)] = z^{-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}}{(m-1)!\,\Gamma(m+\nu+1)} = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z) \tag{51}$$

Следовательно, путем повторного дифференцирования получаем

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^{\nu}J_{\nu}(z)] = z^{\nu-m}J_{\nu-m}(z), \tag{52}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^{-\nu}J_{\nu}(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m}J_{\nu+m}(z), \quad m=1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{53}$$

Из равенств (50) и (51) следует, что

$$z\,J'_{\nu}(z) + \nu\,J_{\nu}(z) = z\,J_{\nu-1}(z), \tag{54}$$

$$z\,J'_{\nu}(z) - \nu\,J_{\nu}(z) = -z\,J_{\nu+1}(z) \tag{55}$$

и потому

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1}J_{\nu}(z), \tag{56}$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z). \tag{57}$$

В силу (4), (5), (6) эти соотношения справедливы и для функций Бесселя второго и третьего рода. Соотношения (12), (13) и полученные ранее результаты дают аналогичные формулы для модифицированной функции Бесселя. Относительно этих формул см. 7.11.

Из рекуррентных соотношений вытекает следующее неравенство (Szász, 1950):

$$[J_{\nu}(x)]^2 - J_{\nu-1}(x)\,J_{\nu+1}(x) > (\nu+1)^{-1}[J_{\nu}(x)]^2, \quad \nu>0, \quad x \text{ — вещественное.}$$

В р о н с к и а н. Определитель Вронского W двух решений w_1 и w_2 уравнения (1) равен постоянному числу, умноженному на $\exp\left[-\int z^{-1}\,dz\right]$:

$$W\{w_1,\,w_2\} \equiv w_1w'_2 - w_2w'_1 = Cz^{-1}. \tag{58}$$

Для вычисления постоянной C достаточно использовать первые члены полученных выше разложений решений в ряды. Если положить $w_1 = J_{\nu}(z)$, $w_2 = J_{-\nu}(z)$, получаем из ряда (2), что

$$\lim_{z\to 0} zW = -\frac{2\nu}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(1+\nu)} = -\frac{2}{\pi}\sin(\nu\pi) = C.$$

Следовательно, имеем

$$W\{J_{\nu},\,J_{-\nu}\} = -\frac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi). \tag{59}$$

Если ν — целое число, то определитель обращается в нуль, что согласуется с доказанной в 7.2.4 линейной зависимостью J_n и J_{-n}. Относительно определителей Вронского от других функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя см. п. 7.11.

Из (59) и (54) вытекает, что

$$J_{-\nu+1}(z)\,J_\nu(z)+J_{-\nu}(z)\,J_{\nu-1}(z)=\frac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi). \qquad (60)$$

Относительно других подобных формул см. п. 7.11.

Аналитическое продолжение. Функции Бесселя первого рода от переменного $ze^{im\pi}$, где m — любое целое число, могут быть, в силу (2), представлены в виде

$$J_\nu(ze^{im\pi})=e^{im\pi\nu}J_\nu(z),\quad m=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots \qquad (61)$$

Относительно соответствующих соотношений для других типов функций Бесселя см. п. 7.11.

Дифференциальные уравнения. Ломмель нашел широкий класс дифференциальных уравнений, решения которых могут быть выражены через функции Бесселя. Одно из преобразований Ломмеля имеет вид

$$z=\beta\zeta^\gamma,\quad w=\zeta^{-\alpha}v,$$

где ζ — независимое переменное и v — новое зависимое переменное. Это преобразование переводит уравнение (1) в

$$\zeta^2\frac{d^2v}{d\zeta^2}+(1-2\alpha)\,\zeta\frac{dv}{d\zeta}+[(\beta\gamma\zeta^\gamma)^2+(\alpha^2-\nu^2\gamma^2)]\,v=0. \qquad (62)$$

Если $w_1(z)$ и $w_2(z)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения Бесселя, то общее решение уравнения (62) имеет вид

$$v_1=\zeta^\alpha w_1(\beta\zeta^\gamma)\ \text{ и }\ v_2=\zeta^\alpha w_2(\beta\zeta^\gamma). \qquad (63)$$

Относительно других дифференциальных уравнений, решения которых могут быть выражены через функции Бесселя, см. Камке (1965, стр. 452—454).

Общее решение неоднородного уравнения Бесселя

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)\,w=f(z) \qquad (64)$$

может быть получено с помощью метода вариации произвольных постоянных в виде

$$w=A\,w_1(z)+B\,w_2(z)+u(z), \qquad (65)$$

где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения (1), $u(z)$ — частное решение уравнения (64), определяемое формулой

$$Cu(z)=-w_1(z)\int_{z_0}^{z}t^{-1}w_2(t)\,f(t)\,dt+w_2(z)\int_{z_0}^{z}t^{-1}w_1(t)\,f(t)\,dt, \qquad (66)$$

а C — постоянная в определителе Вронского функций w_1 и w_2 (см. (58)).

Функции $J'_\nu(z)$ и $azJ'_\nu(z)+bJ_\nu(z)$ удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$z^2(z^2-\nu^2)\frac{d^2w}{dz^2}+z(z^2-3\nu^2)\frac{dw}{dz}+[(z^2-\nu^2)^2-(z^2+\nu^2)]\,w=0, \qquad (67)$$

$$z^2[a^2(z^2-\nu^2)+b^2]\frac{d^2w}{dz^2}-z[a^2(z^2+\nu^2)-b^2]\frac{dw}{dz}+$$
$$+[a^2(z^2-\nu^2)^2+2abz^2+b^2(z^2-\nu^2)]\,w=0. \qquad (68)$$

7.3. Интегральные представления

7.3.1. Коэффициенты Бесселя. Применяя теорему о вычетах к формуле 7.2 (25), получаем

$$2\pi i J_n(\alpha z) = \alpha^n \int\limits_C t^{-n-1} \exp\left[\left(t - \frac{\alpha^2}{t}\right)\frac{z}{2}\right] dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Здесь C является любым простым замкнутым контуром в плоскости t, охватывающим начало координат. Если положить в равенстве (1) $\alpha = 1$ и выбрать в качестве C единичную окружность с центром в начале координат, $t = e^{i\varphi}$, получаем

$$2\pi J_n(z) = \int\limits_0^{2\pi} e^{i(z\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Это представление было получено Бесселем.

7.3.2. Интегральные представления типа Пуассона. Для любого ν имеем интегральное представление типа Пуассона (относительно обобщения этой формулы см. 7.8 (11))

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\, d\varphi, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Этот результат может быть доказан путем разложения $\cos(z\sin\varphi)$ в ряд по степеням z и почленного интегрирования. При этом возникают интегралы

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2m} (\cos\varphi)^{2\nu}\, d\varphi,$$

которые, в силу 1.5 (19), равны

$$\frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m + \nu + 1)}.$$

Таким образом,

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2m} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{(2m)!\,\Gamma(\nu + m + 1)}.$$

Применяя формулу удвоения 1.2 (15) для гамма-функции при $(2m)! = \Gamma(2m+1)$ и используя также 7.2 (2), мы получаем равенство (3). Небольшие модификации этого равенства даны в п. 7.12.

Интеграл Пуассона в виде 7.12 (6) может быть использован для вывода некоторых неравенств, касающихся функций Бесселя $J_\nu(z)$. Пусть ν вещественно, $\nu > -\frac{1}{2}$ и $z = x + iy$ (x, y вещественны), тогда

$$\Gamma(\nu+1)\,|J_\nu(z)| \leqslant \frac{\left(\frac{|z|}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{|y|}(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi$$

и, в силу 1.5 (19),

$$|J_\nu(z)| \leqslant \left|\frac{z}{2}\right|^\nu \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\nu+1)} \tag{4}$$

(см. также 7.10 (22)).

7.3.3 **Представления с помощью контурных интегралов.** Функции Бесселя для любых значений порядка ν могут быть представлены с помощью контурных интегралов. Пусть α — комплексное число, такое, что $\operatorname{Re}\alpha > 0$; тогда мы имеем представление

$$2\pi i\, J_\nu(\alpha z)\, z^\nu \int\limits_{-\infty}^{(0+)} \exp\left[\frac{\alpha(t - z^2 t^{-1})}{2}\right] t^{-\nu-1}\,dt =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_{-\infty}^{(0+)} \exp\left[\alpha\left(t - \frac{z^2 t^{-1}}{4}\right)\right] t^{-\nu-1}\,dt, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad |\arg t| \leqslant \pi. \tag{5}$$

Здесь символ $\int\limits_{-\infty}^{(0+)}$ обозначает, как обычно, интегрирование вдоль контура, который начинается в бесконечности на отрицательной вещественной t-полуоси, обходит начало координат против часовой стрелки и возвращается в исходную точку. Очевидно, что представление (5) является обобщением представления (1), именно: если ν — целое число, то подынтегральная функция в равенстве (5) однозначно определена и петля может быть деформирована в замкнутый контур, охватывающий начало координат. Для того чтобы доказать равенство (5), используем в правой части этого равенства разложение

$$\exp\left(-\frac{\alpha z^2}{4t}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\alpha z^2}{4}\right)^m t^{-m}$$

и почленно проинтегрируем. Из 1.6 (6) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{(0+)} e^{\alpha t} t^{-m-\nu-1}\,dt = \frac{2\pi i \alpha^{m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(\alpha t - \frac{\alpha z^2}{4t}\right) t^{-\nu-1}\,dt = 2\pi i\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)},$$

и, используя 7.2 (2), приходим к равенству (5).

Соответствующие контурные интегралы для других типов функций Бесселя могут быть получены с помощью формул 7.2 (4) — 7.2 (6) и формул 7.2 (12) и 7.2 (13). Относительно этого см. McLachlan и Meyers (1937).

Если $\operatorname{Re}\nu > -1$ и α — вещественное и положительное, то контур в формуле (5) может быть деформирован в прямую линию, параллельную мнимой оси, что приводит к равенству

$$2\pi i J_\nu(\alpha z) = z^\nu \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[\frac{\alpha}{2}\left(t - \frac{z^2}{t}\right)\right] t^{-\nu-1}\,dt, \qquad c, \alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1 \tag{6}$$

Представления Ганкеля. Обобщения интеграла Пуассона (3) были даны Ганкелем. Первое из них имеет вид

$$2\pi i J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int^{(1+,\,-1-)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \tag{7}$$

где $\nu + \frac{1}{2}$ не является отрицательным целым числом. Путем интегрирования является восьмерка, изображенная на рис. 1. Мы будем считать началом пути интегрирования точку пересечения восьмерки с положительной вещественной полуосью справа от $t = 1$. В этой точке аргументы комплексных

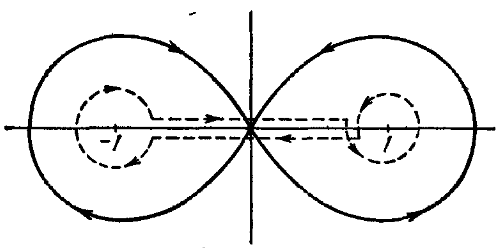


Рис. 1.

чисел $t - 1$ и $t + 1$ считаются равными нулю. Для того чтобы доказать (7), заменим первоначальный контур контуром, стянутым к отрезку [—1, 1]. Если мы предположим, что $\operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0$, и устремим радиусы окружностей с центрами в ± 1 к нулю то получим

$$\int^{(1+,\,-1-)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = 2i\cos(\nu\pi)\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \qquad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}.$$

Если выразить интеграл в правой части по формуле 7.12 (7), то получим равенство (7). В силу теории аналитического продолжения ограничение $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ может быть опущено, исключая случай, когда $\nu + \frac{1}{2}$ является натуральным числом.

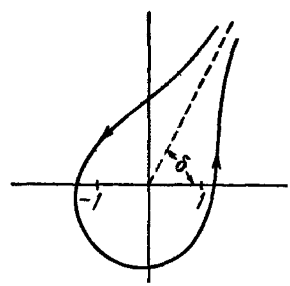
Другое представление имеет вид

$$2\pi i J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) e^{i3\nu\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \int\limits_{\infty e^{i\delta}}^{(-1+,\,1+)} e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \qquad (8)$$

$$\nu+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \delta \leqslant \arg t \leqslant 2\pi+\delta, \quad -\delta < \arg z < \pi-\delta$$

(аналогичное выражение см. 7.8 (13)). Путь интегрирования изображен на рис. 2. В качестве начального и конечного значений $\arg t$ выбраны δ и $2\pi+\delta$ Для того чтобы доказать (8), деформируем контур так, чтобы он лежал вне единичной окружности. Тогда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right) \frac{t^{-2\nu-2m-1}}{m!}.$$



t-плоскость

Рис. 2.

Подставим это выражение в (8) и почленно проинтегрируем; из формулы 1.6 (6) при $\zeta = ze^{-i\pi/2}$ получаем

$$\int\limits_{\infty e^{i\delta}}^{(0+)} t^{-2\nu-2m-1} e^{izt}\,dt = \frac{2\pi i z^{2\nu+2m} e^{-i3\pi(\nu+m)}}{\Gamma(2\nu+2m+1)},$$

$$-\delta < \arg z < \pi-\delta.$$

Таким образом,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m} \frac{2^{2m+2\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma(2m+2\nu+1)}.$$

Применяя формулу удвоения 1.2 (15) для гамма-функции, приходим к равенству (8).

7.3.4. **Интегральные представления Шлефли, Гублера и связанные с ними представления.** Из результатов п. 7.3.3 вытекает целый ряд представлений, имеющих вид определенных интегралов.

Представления Шлефли. Переставим в (5) α и z, положим $\alpha = 1$ и деформируем контур в путь, состоящий из луча отрицательной полуоси от $-\infty$ до -1 ($\arg t = -\pi$), единичной окружности, охватывающей в положительном направлении начало координат ($-\pi \leqslant \arg t \leqslant \pi$), и луча отрицательной полуоси от -1 до $-\infty$ ($\arg t = \pi$). В результате получим представление Шлефли

$$\pi J_\nu(z) = \int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi - \sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-(z\,\mathrm{sh}\,\beta+\nu\beta)}\,d\beta, \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \qquad (9)$$

Оно справедливо и при $\operatorname{Re} z = 0$ при условии, что $\operatorname{Re}\nu > 0$ В случае, когда ν — целое число, формула (9) сводится к формуле (2) Точно так же 7 2 (4) и (9) приводят к аналогичному выражению для функции Неймана·

$$\pi Y_\nu(z) = \int_0^\pi \sin(z\sin t - \nu t)\,dt - \int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\nu\pi)\,e^{-z\operatorname{sh} t}\,dt,$$

$$\operatorname{Re} z > 0 \qquad (10)$$

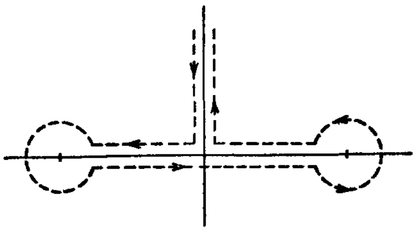


Рис. 3.

(первый интеграл в правой части равенств (9) и (10) ср. 7.5 (32)) Обобщения формул (9) и (10) дают формулы 7 12 (17) и 7 12 (18)

Представления Гублера. Из (8) могут быть получены другие представления для $J_\nu(z)$ путем специального выбора контура Положим $\delta = \frac{\pi}{2}$ и деформируем контур в линию, изображенную на рис. 3 пунктиром. Если $\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$ и радиусы окружностей с центрами в точках ± 1 стремятся к нулю, получаем, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\left[\int_0^1 (1-t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt - \nu\pi)\,dt - \right.$$
$$\left. - \sin(\nu\pi)\int_0^\infty (1+t^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-zt}\,dt\right], \ \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Эта формула соответствует интегралу Пуассона (3). Если заменить в (11) ν на $-\nu$ и использовать равенства (3), а также 7.2 (4), то получим соответствующее выражение для функций Неймана:

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) Y_\nu(z) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\left[\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,dt - \int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\right], \qquad (12)$$
$$\operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}.$$

Вводя в равенство (12) функцию Струве 7.5 (78), получаем

$$[\mathbf{H}_\nu(z) - Y_\nu(z)]\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^\infty e^{-zt}(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \qquad (13)$$
$$\operatorname{Re} z > 0.$$

Пусть теперь в равенстве (8) $\delta = 0$, а путем интегрирования является пунктирная линия (рис. 3). Заменим z на $ze^{i\pi/2}$, а ν на $-\nu$, и пусть $\operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}$. Тогда можно устремить к нулю радиусы окружностей, охватывающих точки $t = \pm 1$. Переходя к пределу, получаем

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\times$$

$$\times\left[\sin(2\nu\pi)\int_1^{\infty} e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt + \cos(\nu\pi)\int_{-1}^{1} e^{zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\right], \tag{14}$$

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Следовательно, используя формулы 7.2 (13), 7.2 (12) и 7.2 (14), получаем, что

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_{\nu}(z) = \sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_1^{\infty} e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{15}$$

Полагая $t - 1 = \frac{v}{z}$, выводим отсюда

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\int_0^{\infty} e^{-v}v^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{v}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dv, \tag{16}$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},$$

или, в более общем виде,

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\int_0^{\infty e^{i\delta}} e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad |\delta| < \frac{\pi}{2}, \quad \delta - \pi < \arg z < \delta + \pi.$$

7.3.5. Интегралы Зоммерфельда. Вычислим $\int e^{iz\cos\tau}e^{i\nu\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right)}d\tau$ вдоль контуров c_1 $\left(\text{от } -\frac{\pi}{2}+i\infty \text{ до } \frac{\pi}{2}-i\infty\right)$ и c_2 $\left(\text{от } \frac{\pi}{2}-i\infty \text{ до } \frac{3\pi}{2}+i\infty\right)$, состоящих из лучей и прямолинейных отрезков (рис. 4). Мы получим, в силу (9), (10), 7.2 (5) и 7.2 (6), что

$$\pi H_{\nu}^{(1)}(z) = \int_{c_1} e^{iz\cos\tau}e^{i\nu\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right)}d\tau, \tag{18}$$

$$\pi H_{\nu}^{(2)}(z) = \int_{c_2} e^{iz\cos\tau}e^{i\nu\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right)}d\tau, \tag{19}$$

причем оба интеграла справа сходятся при $\operatorname{Re} z > 0$. Контур c_1 может быть заменен контуром C_1 от $-\eta + i\infty$ до $\eta - i\infty$, где η — соответствующее число между 0 и π. Положим

$$\Phi = \arg z, \quad \alpha = \operatorname{Re}\tau, \quad \beta = \operatorname{Im}\tau, \quad \tau = \alpha + i\beta.$$

Легко проверить, что при больших значениях β $\operatorname{Re}(iz\cos\beta)$ асимптотически равно $-|z|\operatorname{ch}\beta\sin(\Phi \mp \alpha)$. Верхний и нижний знаки соответствуют значениям $\beta \gtrless 0$. Таким образом, подынтегральная функция в выражении (18)

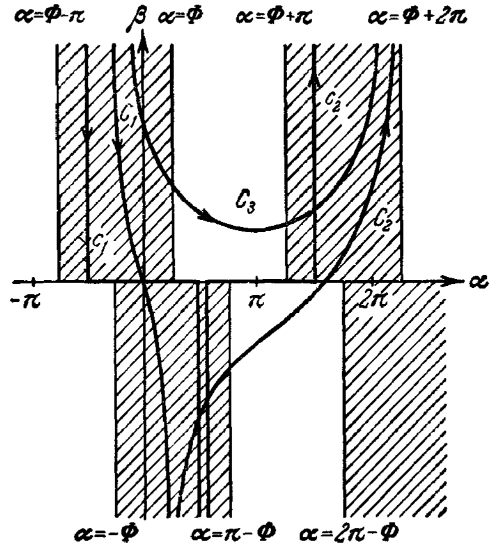


Рис. 4.

экспоненциально стремится к нулю, если $\tau \to \infty$ в заштрихованной части τ-плоскости. При замене c_1 на C_1 мы выбираем для Φ один из интервалов $-\eta < \Phi < \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2} < \Phi < \pi - \eta$ в зависимости от того, будет ли $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$ соответственно. Таким образом, имеем

$$\pi H_\nu^{(1)}(z) = \int\limits_{C_1} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)} d\tau \tag{20}$$

и аналогично

$$\pi H_\nu^{(2)}(z) = \int\limits_{C_2} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)} d\tau, \tag{21}$$

где C_2 — контур, идущий из $\eta - i\infty$ в $2\pi - \eta + i\infty$. Интегралы сходятся при

$$-\eta < \Phi = \arg z < \pi - \eta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi. \tag{22}$$

В силу теории аналитического продолжения эти неравенства определяют область, в которой справедливы формулы (20) и (21).

Из этих результатов вытекает в силу 7.2 (7), что

$$2\pi J_\nu(z) = \int_{C_3} e^{iz\cos\tau} e^{i\nu\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right)}\, d\tau, \tag{23}$$

$$-\eta < \arg z < \pi - \eta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi,$$

где C_3 — контур, идущий из $-\eta + i\infty$ в $2\pi - \eta + i\infty$.

Очень часто используются интегралы

$$\pi H_\nu^{(1)}(z) = -i \int_{-\infty}^{\infty + i\pi} e^{z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha}\, d\alpha, \tag{24}$$

$$\pi H_\nu^{(2)}(z) = i \int_{-\infty}^{\infty - i\pi} e^{z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha}\, d\alpha, \tag{25}$$

$$2\pi J_\nu(z) = -i \int_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} e^{z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha}\, d\alpha, \tag{26}$$

справедливые, если $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Они легко выводятся из равенств (20), (21) и (23) соответственно, если положить в них $\eta = \frac{\pi}{2}$ и сделать подстановку $\tau = \frac{\pi}{2} + i\alpha$.

Частные случаи. Положим $\eta = 0$ и выберем в качестве контуров C_1 и C_2 контуры, состоящие из отрезков прямых. Мы получим тогда выражения Гейне

$$\pi H_\nu^{(1)}(z) = -ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} t} e^{-\nu t}\, dt, \quad 0 < \arg z < \pi, \tag{27}$$

$$\pi H_\nu^{(2)}(z) = 2ie^{\frac{i\nu\pi}{2}} \left[\int_0^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t - i\nu\pi)\, dt - i \int_0^{\pi} e^{-iz\cos t} \cos(\nu t)\, dt \right], \tag{28}$$

$$0 < \arg z < \pi.$$

Если положить $\eta = \pi$ и выбрать контуры C_1, C_2, состоящими из отрезков прямых, получим

$$\pi H_\nu^{(1)}(z) = -2ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \left[\int_0^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t + i\nu\pi)\, dt + i \int_0^{\pi} e^{iz\cos t} \cos(\nu t)\, dt \right],$$

$$-\pi < \arg z < 0, \tag{29}$$

$$\pi H_\nu^{(2)}(z) = ie^{\frac{i\nu\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} t} e^{-\nu t}\, dt, \qquad -\pi < \arg z < 0. \tag{30}$$

Из (27) и (30), используя 7.2 (7), получаем соответственно

$$\pi J_\nu(z) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\left[\int_0^\pi e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)\,dt - \sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t + iz\,\mathrm{ch}\,t}\,dt\right], \tag{31}$$

$$0 < \arg z < \pi,$$

$$\pi J_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\left[\int_0^\pi e^{iz\cos t}\cos(\nu t)\,dt - \sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t - iz\,\mathrm{ch}\,t}\,dt\right], \tag{32}$$

$$-\pi < \arg z < 0.$$

Положим в формуле (27) $e^t = \frac{v}{\alpha}$. Мы получим тогда

$$\pi H_\nu^{(1)}(\alpha z) = -ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\alpha^\nu\int_0^\infty e^{\frac{iz(v+\alpha^2/v)}{2}}v^{-\nu-1}\,dv,\quad \operatorname{Im} z > 0,\quad \operatorname{Im}(\alpha^2 z) > 0. \tag{33}$$

7.3.6. Интегралы Бернса. Представление функции Бесселя первого рода в виде интеграла Меллина — Бернса (см. 1.19) имеет вид

$$4\pi i J_\nu(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}\,ds,\qquad x > 0,\quad -\operatorname{Re}\nu < c < 1. \tag{34}$$

Оно может быть получено путем вычисления интеграла с помощью вычетов подынтегральной функции или применения формулы обращения Меллина к 7.7 (19).

Если снять ограничение $-\operatorname{Re}\nu < c < 1$, то интеграл сохранит смысл, но уже не будет представлять функцию Бесселя. Положим

$$4\pi i J_{\nu,m}(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}\,ds, \tag{35}$$

$$x > 0,\quad \sigma < 1,\quad -2m - \operatorname{Re}\nu < \sigma < -(2m-1) - \operatorname{Re}\nu,\quad m = 1, 2, \ldots,$$

где интеграл взят вдоль прямой, параллельной мнимой оси. Выражая интеграл через вычеты подынтегральной функции, получаем

$$J_{\nu,m}(x) = J_\nu(x) - i\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Определим для любых комплексных значений z и ν

$$J_{\nu,m}(z) = \sum_{n=m}^\infty\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)},\qquad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{36}$$

и назовем эту функцию остатком функции Бесселя первого рода. Из (33) имеем

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} J_{\nu,m}(z)\right] = z^{\nu} J_{\nu-1,m}(z) \tag{37}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_{\nu,m}(z)\right] = -z^{-\nu} J_{\nu+1,m}(z). \tag{38}$$

7.3.7. Интегралы Эйри. Формулы Эйри

$$\int_0^{\infty} \cos(t^3+3tx)\,dt = \sqrt{\frac{x}{3}}\,K_{1/3}(2\sqrt{x^3}), \quad x>0, \tag{39}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(t^3-3tx)\,dt = -\frac{\pi}{3}\sqrt{x}\left[J_{1/3}(2\sqrt{x^3})+J_{-1/3}(2\sqrt{x^3})\right], \quad x>0, \tag{40}$$

могут быть доказаны следующим образом. Сделаем в (39) подстановку $t=2\sqrt{x}\,\mathrm{sh}\,\frac{v}{3}$. Так как

$$4\,\mathrm{sh}^3\frac{v}{3}+3\,\mathrm{sh}\frac{v}{3}=\mathrm{sh}\,v,$$

то получим

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3+3tx)\,dt=\frac{2\sqrt{x}}{3}\int_0^{\infty}\cos(2\sqrt{x^3}\,\mathrm{sh}\,v)\,\mathrm{ch}\frac{v}{3}\,dv$$

Применяя 7.12 (25), выводим отсюда (39).

Для того чтобы доказать (40), разложим правую часть равенства (39) в степенной ряд (см. 7.2 (12) и 7.2 (13)). Мы получим

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3+3tx)\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{3m}}{m!\,\Gamma\left(-\frac{1}{3}+m+1\right)}-x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{3m}}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{3}+m+1\right)}\right].$$

Заменив здесь x на $-x$ и использовав 7.2 (2), получаем равенство (40). Относительно обобщения формул (39) и (40) см. Ватсон (1949, стр. 348—354).

7.4. Асимптотические выражения

Асимптотическое поведение функций Бесселя различно в зависимости от того, что стремится к бесконечности: порядок ν, независимое переменное z или обе эти величины вместе. Степенные ряды 7.2 (2) являются асимптотическими разложениями, если z фиксировано и $\nu\to\infty$. Сравнительно легко вывести асимптотическое разложение в случае, когда ν фиксировано и $z\to\infty$. Если же и ν и z велики, то изучение усложняется.

7.4.1. Случай большого независимого переменного. Мы изучим здесь асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя третьего рода $K_\nu(z)$. Соответствующие разложения других функций Бесселя могут быть получены с помощью формул 7.2 (16), 7.2 (17), 7.2 (8); результаты указаны в п. 7.13.1.

Будем исходить из интегрального представления 7.3 (17)

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\int_0^{\infty e^{i\delta}} e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad |\delta|<\frac{\pi}{2},\quad \delta-\pi<\arg z<\delta+\pi.$$

Подставив в него биномиальное разложение с остаточным членом

$$\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)}\left(\frac{t}{2z}\right)^m+r_M$$

и используя 1.1 (6), получим

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)}(2z)^{-m}+R_M\right],\tag{1}$$

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2},$$

где остаточный член выражается формулой

$$(M-1)!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-M\right)R_M=$$
$$=(2z)^{-M}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}+M}dt\int_0^1(1-v)^{M-1}\left(1+\frac{vt}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}-M}dv.\tag{2}$$

Легко видеть, что для любого фиксированного ν при $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$

$$R_M=O(|z|^{-M}),\quad z\to\infty,\quad -\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}-\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Более тщательное рассмотрение выражения (2) показывает, что если ν вещественно, $\operatorname{Re}z>0$ и $M>\nu-\frac{1}{2}>-1$, то модуль остаточного члена в выражении (1) меньше модуля первого отброшенного члена ($m=M$) (MacRobert, 1947, стр 272; Ватсон, 1949, стр. 231). Далее, если ν и z вещественны причем $2z-M+\frac{1}{2}$ мало по сравнению с z, то остаток приблизительно равен половине отброшенного члена (см. Burnett, 1929). Эйри (Airey, 1937) модифицировал выражение (1), получив лучшее приближение, более пригодное для вычислений с высокой точностью.

Используя символ Ганкеля 1.20 (3)

$$(\nu, m) = \frac{2^{-2m}}{m!}\{(4\nu^2-1^2)\dots[4\nu^2-(2m-1)^2]\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}, \tag{3}$$

можно записать асимптотическое разложение в более удобной форме:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu, m)(2z)^{-m} + O(|z|^{-M})\right], \tag{4}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

Поскольку в определение (ν, m) входит лишь ν^2, то ограничение $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ может быть опущено

7.4.2. **Случай, когда порядок принимает большие значения.** Первое строгое изучение функций Бесселя при больших значениях независимого переменного и порядка было проведено Дебаем (Debye, 1909) с помощью метода наискорейшего спуска. Этот метод основан на следующих рассмотрениях (Copson, 1935, стр. 330; Ватсон, 1949, стр. 262).

Пусть функция $F(z)$ задана в виде

$$F(z) = \int_C e^{-z f(\alpha)} g(\alpha)\, d\alpha, \tag{5}$$

где C — контур на комплексной α-плоскости, на концах которого функция $e^{-z f(\alpha)}$ обращается в нуль Во многих случаях можно выбрать контур C так, чтобы он проходил через нуль α_0 функции $f'(\alpha)$, причем мнимая часть $f(\alpha)$ постоянна вдоль C. Таким образом, мы имеем $f'(\alpha_0) = 0$ и

$$\operatorname{Im}[f(\alpha)] = \text{const} = \operatorname{Im}[f(\alpha_0)] \tag{6}$$

вдоль C. Поэтому $\operatorname{Re}[f(z)]$ изменяется наискорейшим образом, когда α пробегает C. При больших значениях z модуль подынтегральной функции имеет острый максимум в точке α_0, и поэтому существенный вклад в интеграл (5) вносит лишь часть контура C, лежащая в непосредственной окрестности α_0.

Для простоты предположим, что как порядок, так и независимое переменное положительны и пусть

$$z = x > 0, \quad \nu = p > 0. \tag{7}$$

Кроме того, предположим, что величина v_0, определяемая формулами

$$\operatorname{sh} v_0 = \frac{p}{x}, \quad \operatorname{ch} v_0 = \sqrt{1+\frac{p^2}{x^2}}, \quad v_0 > 0, \tag{8}$$

постоянна, когда $p, x \to \infty$. Здесь будут изучены лишь $K_p(x)$, соответствующие разложения для других функций Бесселя указаны в п. 7.13.2.

Используя 7.2 (15) и выражение Зоммерфельда 7.3 (20), непосредственно получаем интегральное представление для $K_p(x)$, имеющее вид (5). Это представление таково:

$$K_p(x) = \frac{i}{2}\int_C e^{-x\cos\alpha} e^{ip\alpha}\, d\alpha = \frac{i}{2}\int_C e^{-x f(\alpha)}\, d\alpha, \tag{9}$$

где

$$f(\alpha) = \cos\alpha - ip\frac{\alpha}{x}. \tag{10}$$

В соответствии с результатами п. 7.3.5 контур C начинается в точке $-\eta + i\infty$, а оканчивается в точке $\eta - i\infty$, где $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$, и целиком лежит внутри полосы $-\eta \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant \eta$ комплексной α-плоскости. Условие $f'(\alpha) = 0$ дает

$$\sin\alpha = -\frac{ip}{x} = -i \operatorname{sh} v_0. \tag{11}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений

$$\alpha_m = -iv_0 + 2\pi m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

Из этих решений лишь α_0 лежит внутри полосы $-\eta < \operatorname{Re}\alpha < \eta$. Следовательно,

$$\alpha_0 = -i\ln[x^{-1}(p + \sqrt{p^2 + x^2})] = -iv_0 \tag{13}$$

и из (10)

$$f(\alpha_0) = \operatorname{ch} v_0 - v_0 \operatorname{sh} v_0. \tag{14}$$

Условие (6) показывает, что путем наискорейшего спуска является мнимая ось, и из (9) при $\alpha = iv$ получаем

$$K_p(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{ch} v + pv}\, dv = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x g(v)}\, dv, \tag{15}$$

где

$$g(v) = \operatorname{ch} v - v \operatorname{sh} v_0.$$

Подстановка

$$\tau = g(v) - g(v_0) = \operatorname{ch} v - \operatorname{ch} v_0 - (v - v_0)\operatorname{sh} v_0 \tag{16}$$

отображает плоскость v на плоскость τ. Отображение является конформным всюду, за исключением точек $v_m = v_0 + 2\pi i m$, в которых $\frac{d\tau}{dv}$ имеет простые нули. Таким образом,

$$\Phi(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{g'(v)} \tag{17}$$

может быть представлена в окрестности точки $\tau = 0$ в виде

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau^{\frac{n}{2} - 1}, \tag{18}$$

причем радиус сходимости этого разложения равен расстоянию до ближайшей особой точки τ, которая соответствует значению $v = v_0 \pm 2\pi i$.

Когда v возрастает от $-\infty$ до v_0, то τ убывает от ∞ до 0; когда v продолжает возрастать от v_0 до ∞, то переменное τ также возрастает от 0 до ∞. Определим коэффициенты b_n в (18) так, чтобы $\arg\tau = 2\pi$ на первой части и $\arg\tau = 0$ на второй части пути интегрирования. Тогда мы имеем

$$K_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x f(v_0)}\int_0^{\infty} e^{-\tau x}\,[\Phi(\tau) - \Phi(\tau e^{i2\pi})]\, d\tau. \tag{19}$$

Используя (18) и применяя лемму Ватсона (Copson, 1935, стр. 218), получаем искомое асимптотическое разложение

$$K_p(x) = e^{-x f(v_0)} \left[\sum_{n=0}^{M-1} b_{2n+1} x^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(x^{-M-\frac{1}{2}}\right) \right]. \quad (20)$$

Коэффициенты в формуле (18) выражаются по теореме Коши

$$4\pi i b_n = \int \tau^{-\frac{n}{2}} \Phi(\tau)\, d\tau = \int [g(v) - g(v_0)]^{-\frac{n}{2}}\, dv, \quad (21)$$

где интеграл берется вдоль малого замкнутого контура, охватывающего точку $v = v_0$ в положительном направлении.

Так как $[g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}$ имеет в точке $v = v_0$ полюс порядка $2n+1$, можно разложить

$$(v - v_0)^{2n+1} [g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}$$

в ряд Тейлора. Мы имеем

$$(v - v_0)^{2n+1} [g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(n)} (v - v_0)^l,$$

где

$$A_l^{(n)} = \frac{1}{l!} \left\{ \frac{d^l}{dv^l} (v - v_0)^{2n+1} [g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}} \right\}_{v=v_0}. \quad (22)$$

С другой стороны, теорема Коши показывает, что

$$2\pi i A_l^{(n)} = \int (v - v_0)^{2n-l} [g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}}\, dv, \quad (23)$$

где интеграл взят вдоль замкнутого контура, охватывающего точку $v = v_0$. Сравнение (21) и (23) дает значение коэффициентов в (20):

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2} A_{2n}^{(n)} = \frac{1}{2(2n)!} \left\{ \frac{d^{2n}}{dv^{2n}} (v - v_0)^{2n+1} [g(v) - g(v_0)]^{-n-\frac{1}{2}} \right\}_{v=v_0}. \quad (24)$$

Мы получили, таким образом, асимптотическое разложение

$$K_p(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4(p^2+x^2)}} \exp\left(-\sqrt{p^2+x^2} + p \arcsin \frac{p}{x}\right) \times$$
$$\times \left[\sum_{m=0}^{M-1} 2^m a_m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \sqrt{(p^2+x^2)^{-m}} + O(x^{-M}) \right], \quad p, x > 0, \quad (25)$$

где

$$a_m = \sqrt{2^{1-2m}} \left(\frac{p^2+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1+2m}{4}} b_{2m+1}.$$

Первые коэффициенты в (25) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = -\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1}, \\ a_2 &= \frac{3}{128}-\frac{77}{576}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1}+\frac{385}{3456}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Аналогичное разложение получил с помощью метода стационарной фазы J. Bijl (1937, стр. 23). Он вывел следующий результат, справедливый при $p > \sqrt{x} > 1$:

$$\left| K_p(x) - \frac{\exp\left(-\sqrt{p^2+x^2}+p \operatorname{Arsh}\frac{p}{x}\right)}{\sqrt[4]{4(p^2+x^2)}} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2^m d_{2m}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2m)!\sqrt{(p^2+x^2)^m}} \right| <$$

$$< \frac{C\exp\left(-\sqrt{p^2+x^2}+p \operatorname{Arsh}\frac{p}{x}\right)}{w^{2M}\sqrt[4]{p^2-x^2}}. \qquad (27)$$

Здесь $w = p\sqrt{\frac{1}{x}}$ или $\sqrt[4]{p^2+x^2}\sqrt[3]{\frac{1}{p}}$ в зависимости от того, будет ли $p < \sqrt[4]{x^3}$ или $p > \sqrt[4]{x^3}$.

Для коэффициентов в левой части неравенства (27) выполняется рекуррентное соотношение *)

$$d_m = -\sum\left[\binom{m-1}{l} p d_l + \binom{m-l}{l-1}\sqrt{p^2+x^2}\, d_{l-1}\right], \qquad (28)$$

где $d_0 = 1$, $d_1 = d_2 = 0$. Здесь $\binom{m-1}{-1}$ интерпретируется как нуль, а сумма распространена на все значения l, для которых $m-l$ нечетно и $0 \leqslant l \leqslant m-3$. Из (28) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} &d_0 = 1, \quad d_2 = 0, \quad d_4 = -\sqrt{p^2+x^2}, \quad d_6 = 10p^2 - \sqrt{p^2+x^2}, \\ &d_8 = 56p^2 + 35(p^2+x^2) - \sqrt{p^2+x^2} \quad \text{и} \\ &d_{10} = -2100p^2(p^2+x^2) + 246p^2 + 210(p^2+x^2) - \sqrt{p^2+x^2} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Соответствующие разложения для $J_p(x)$ и $H_p^{(1)}(x)$ получаются из найденного в 7.3 (20) и 7.3 (23) выражения Зоммерфельда с помощью метода наискорейшего спуска (см. Debye, 1909, Ватсон, 1949, стр. 262; Weyrich, 1937, стр. 49). Относительно выбора пути наискорейшего спуска в различных случаях см. Emde (1937, 1939) и Emde, Ruhle (1934). Здесь возникают разные случаи в зависимости от того, будет ли p больше или меньше, чем x, или же будет лежать в окрестности x. Они перечислены в формулах 7.13 (11) — 7.13 (16). Формулы для верхней границы остаточного члена в разложениях 7.13 (11) и 7.13 (14) и рекуррентные соотношения для коэффициентов были получены соответственно Мейером (Meijer, 1933, стр. 108) и Ван Вином (Veen, 1927, стр. 27).

*) В первом томе вместо $\binom{m}{n}$ используется обозначение C_m^n.

Недавно (см Schöbe, 1948) из контурного интеграла (7.3) 25 были получены два различных асимптотических разложения для второй функции Ганкеля В отличие от рядов Дебая, найденных в 7 13 (11) и 7 13 (13), члены рядов Шебе не являются элементарными функциями, а выражаются через вторую функцию Ганкеля порядков 1/3 и 2/3 Первые члены даются формулами Никольсона 7 13 (27) и Ватсона 7 13 (34) соответственно

7.4.3. Промежуточные области. Асимптотические выражения 7 13 (11), 7.13 (13) и 7 13 (15) для функции $H_p^{(1)}(x)$ справедливы соответственно для случаев когда $x > p$, $x < p$ и x приблизительно равно p Однако они не охватывают всех возможностей, поскольку в последнем случае наложено добавочное ограничение $x - p = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$. В переходной области, то есть в случае, когда $\frac{p}{x}$ близко к единице, но $|x-p|$ — большая величина, применяются другие формулы. Они были выведены Никольсоном (Ватсон, 1949, стр 275; Schöbe, 1948, Tricomi, 1949).

Формула Никольсона для функций Бесселя первого рода целого порядка имеет вид

$$J_n(x) \sim \pi^{-1}\, 3^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}}(\xi), \tag{30}$$

$$J_n(x) \sim 3^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left[J_{\frac{1}{3}}(\xi) + J_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right], \tag{31}$$

в зависимости от того, $x < n$ или $x > n$. Здесь

$$\xi = \frac{4}{3\sqrt{2x\,|x-n|^3}}. \tag{32}$$

(Относительно $Y_n(x)$ см. 7.13 (24) и 7 13 (26).) Эти формулы выводятся с помощью принципа стационарной фазы (Ватсон, 1949, стр. 256). С этой целью будем исходить из интегрального представления 7.3 (2):

$$\pi J_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi. \tag{33}$$

Фаза стационарна, если $\frac{d(n\varphi - x\sin\varphi)}{d\varphi} = 0$, то есть если $\cos\varphi = \frac{n}{x}$. Поскольку мы предположили, что n приблизительно равно x, то φ — малая величина, и в окрестности стационарной точки можно заменить $\sin\varphi$ на $\varphi - \frac{\varphi^3}{6}$. Таким образом,

$$\pi J_n(x) \sim \int_0^{\pi} \cos\left[\frac{x\varphi^3}{6} - (x-n)\varphi\right] d\varphi \sim \int_0^{\infty} \cos\left[\frac{x\varphi^3}{6} - (x-n)\varphi\right] d\varphi.$$

В зависимости от того имеем ли мы $x < n$ или $x > n$, этот интеграл является интегралом Эйри вида 7.3 (39) или 7.3 (40), что приводит к требуемым результатам (30), (31)

Этот метод вывода формул Никольсона является спорным Кроме того, область, в которой справедливы эти формулы, и порядок величины ошибки не могут быть определены (строгую теорию метода стационарной фазы дал Ван дер Корпут (Van der Corput, 1934, 1936). Бьюил (J. Bijl, 1937) применил этот метод для того, чтобы получить асимптотические разложения функций Бесселя.

Формулы Ватсона. Более точная форма для формул Никольсона была дана Ватсоном (1949, стр. 276):

$$e^{\frac{i\pi}{6}} H_p^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\, w \exp\left[-ip\left(w - \frac{w^3}{3} - \operatorname{arctg} w\right)\right] H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{pw^3}{3}\right) + O(p^{-1}). \tag{34}$$

Здесь порядок p может не быть целым числом, и мы имеем

$$w = \sqrt{\frac{x^2}{p^2} - 1}, \tag{35}$$

где $\arg w = 0$ при $x > p$ и $\arg w = \frac{\pi}{2}$ при $x < p$. Соответствующие формулы для $J_p(x)$ и $Y_p(x)$ перечислены в 7.13 (28) — 7.13 (31). В случае, если x приблизительно равно p, w может быть заменено на $\sqrt{2(x-p)/p}$ $\left(\arg\sqrt{x-p}\right.$ равно 0 или $\frac{\pi}{2}$ при $x > p$ или $x < p$ соответственно$\left.\right)$. Отсюда получаются формулы Никольсона (30), (31).

Используя свое асимптотическое разложение, Шёбе (Schöbe, 1948) получил следующий результат (см. конец п. 7.13.2):

$$e^{\frac{i\pi}{6}} H_p^{(2)}(x) = \\ = 3^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{9}{10} + \frac{p}{10x}\right)^{-\frac{3}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left[\xi\left(\frac{9}{10} + \frac{p}{10x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + O\left(p^{-\frac{5}{2}}\right), \tag{36}$$

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt{2(x-p)^3/x}$$

и $\arg\sqrt{(x-p)^3}$ равен 0 или $\frac{3\pi}{2}$ в зависимости от того, имеем ли мы $x > p$ или $x < p$.

Другая формула дана Tricomi (1949). Его результат имеет вид

$$\pi J_p\left(p + \sqrt[3]{\frac{p}{6}}\, t\right) = \\ = \sqrt[3]{\frac{6}{p}}\, A_1(t) - \frac{1}{10p}\left[3t^2 A_1'(t) + 2t A_1(t)\right] + O\left(p^{-\frac{5}{3}}\right), \tag{37}$$

$$\pi Y_p\left(p + \sqrt[3]{\frac{p}{6}}\, t\right) = \\ = \sqrt[3]{\frac{6}{p}}\, A_2(t) + \frac{1}{10p}\left[3t^2 A_2'(t) + 2t A_2(t)\right] + O\left(p^{-\frac{5}{3}}\right). \tag{38}$$

Здесь $A_1(t)$ и $A_2(t)$ обозначают функции

$$A_1(t) = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{t}{3}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\frac{t^3}{27}}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\frac{t^3}{27}}\right)\right], \tag{39}$$

$$A_2(t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{3}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\frac{t^3}{27}}\right) - J_{\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\frac{t^3}{27}}\right)\right] \tag{40}$$

(см. интеграл Эйри 7.3 (40)).

7.4.4. Равномерные асимптотические разложения. Методы, связанные с дифференциальным уравнением. Рассмотренные выше асимптотические формулы были получены с помощью интегральных представлений для функций Бесселя, в основном с помощью представлений Зоммерфельда (см. п. 7.3.5). Другой метод вывода этих разложений основан на дифференциальном уравнении Бесселя.

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда как порядок p, так и аргумент x являются положительными числами. Преобразуем уравнение Бесселя 7.2 (1) с помощью подстановки $x = pe^y$. В результате получим уравнение

$$w''(y) + p^2(e^{2y} - 1)\,w(y) = 0. \tag{41}$$

Асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения вида

$$w''(y) + [p^2\Phi^2(y) - K(y)]\,w(y) = 0, \tag{42}$$

в котором p является большим параметром, изучалось многими авторами (Horn, 1899; Schlesinger, 1907; Birkhoff, 1908; Blumenthal, 1912; Jeffreys, 1925; Jordan, 1930). Основным принципом этих исследований было то, что мало отличающиеся друг от друга дифференциальные уравнения должны иметь мало отличающиеся решения. Первоначально для сравнения брались уравнения с постоянным значением Φ. Все эти методы теряют силу в области, где $\Phi(y)$ имеет нули. В случае уравнения Бесселя это происходит в окрестности точек $y = 0$ или $x = p$

Лангер (Langer, 1931, 1932, 1934) использовал для сравнения уравнение, в котором $\Phi(y)$ является, по существу, соответствующей степенью y. Это позволило справиться с трудностями, связанными с нулями $\Phi^2(y)$. Решение уравнения, использованного Лангером для сравнения, может быть выражено через функции Бесселя порядка $1/3$. Применение результатов Лангера к уравнению (28) приводит к следующей асимптотической формуле, которая справедлива равномерно в $0 < x < \infty$ (Langer, 1931, стр. 60, 61):

$$e^{\frac{i\pi}{6}} H_p^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{w - \operatorname{arctg} w}{w}}\, H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(pw - p\operatorname{arctg} w) + O\left(p^{-\frac{4}{3}}\right), \tag{43}$$

$$w = \sqrt{\frac{x^2}{p^2} - 1}.$$

При $x > p$ $\arg w$ и $\arg(w - \operatorname{arctg} w)$ положены равными нулю; при $x < p$ $\arg w$ равен $\frac{\pi}{2}$, а $\arg(w - \operatorname{arctg} w)$ равен $\frac{3\pi}{2}$. (Результаты для $J_p(x)$ и $Y_p(x)$ перечислены в формулах 7.13 (32) — 7.13 (35).) Относительно сравнения числовых значений $J_p(x)$ со значениями, получаемыми по формуле Лангера (43), см. Фок (1934), а относительно распространения формулы (43) на комплексные значения p и x см. Langer (1932).

В случае, когда w достаточно мало (то есть x приблизительно равно p), $w - \operatorname{arctg} w$ можно заменить на $\frac{w^3}{3}$; при этом получается формула Ватсона (34).

Метод «приблизительно совпадающего» дифференциального уравнения был также использован Черри (Cherry 1949, стр. 121) для получения равномерных асимптотических разложений функций Бесселя. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$\sqrt{y}\, J_p\left(a\sqrt{1-y^2}\right),$$

имеет вид

$$\frac{d^2w}{du^2} + w\left[-p^2 + (y^{-2}-1)\left(\frac{5}{4}y^{-4} - \frac{1}{4}y^{-2} + a^2 - p^2\right)\right] = 0, \tag{44}$$

где

$$u = \operatorname{Art} y - y. \tag{45}$$

В окрестности точки $y = 0$ коэффициенты для w в (44) имеют разложения вида

$$-p^2 + \frac{5}{36}u^{-2} + \left(a^2 - p^2 - \frac{1}{35}\right)(3u)^{-\frac{2}{3}} + P\left(u^{\frac{2}{3}}\right),$$

где P означает степенной ряд. Таким образом, уравнение (4) близко к уравнению

$$\frac{d^2W}{du^2} + W\left(-p^2 + \frac{5}{36}u^{-2}\right) = 0. \tag{46}$$

Но в силу формул 7.2 (62) и 7.2 (63) решением уравнения (46) является

$$W = \sqrt{pu}\, K_{\frac{1}{3}}(pu). \tag{47}$$

Поэтому, если записать уравнение (44) в виде

$$\frac{d^2w}{du^2} + w\left(-p^2 + \frac{5}{36}u^{-2}\right) = w\, f(u), \tag{48}$$

где

$$f(u) = \frac{5}{36}u^{-2} - (y^{-2}-1)\left(\frac{5}{4}y^{-4} - \frac{1}{4}y^{-2} + a^2 - p^2\right), \tag{49}$$

то мы можем подставить в правую часть уравнения (48) вместо w выражение (47). Продолжая далее этот процесс последовательных приближений и применяя метод вариации произвольных постоянных, получаем решение уравнения (48). Дальнейшие результаты можно найти у Черри (Cherry, 1949, 1950).

7.5. Функции, связанные с функциями Бесселя

С функциями Бесселя связаны некоторые многочлены и функции, которые либо подобны им, либо обладают некоторыми похожими свойствами, либо, наконец, встречаются в исследованиях, относящихся к функциям Бесселя. Эти многочлены и функции подробно описаны в книге Ватсона (1949, гл. IX и X). Мы дадим здесь лишь краткий очерк основных свойств некоторых из этих функций. Более детальную информацию читатель найдет в книге Ватсона (1949).

7.5.1. Многочлены Неймана и связанные с ними многочлены. Многочлены Неймана $O_n(z)$ определяются равенством

$$(z-\xi)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n J_n(\xi)\,O_n(z),$$

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_n=2,\quad \text{если}\quad n\geqslant 1,\quad |\xi|<|z|. \tag{1}$$

Они играют важную роль в теории разложения произвольной аналитической функции $f(z)$ в ряды вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n J_n(z).$$

Для того чтобы получить явное выражение для $O_n(z)$, будем исходить из тождества

$$(z-\xi)^{-1}=z^{-1}\int_0^{\infty}e^{-x}e^{\frac{x\xi}{z}}\,dx,\qquad \operatorname{Re}\frac{\xi}{z}<1. \tag{2}$$

Положим в равенстве 7.2 (25) $\alpha=1$, заменим z на ξ и $t-t^{-1}$ на $\frac{2x}{z}$. Мы получим:

$$e^{\frac{x\xi}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[z^{-n}(x+\sqrt{x^2+z^2})^n+(-z)^n(x+\sqrt{x^2+z^2})^{-n}\right]J_n(\xi).$$

Подставим это разложение в равенство (2) и заметим, что при $\left|\frac{\xi}{z}\right|<1$ можно почленно проинтегрировать. Сравнив результат с (1), получаем интегральное представление Неймана

$$O_n(z)=\frac{1}{2}z^{-n-1}\int_0^{\infty}[(x+\sqrt{x^2+z^2})^n+(x-\sqrt{x^2+z^2})^n]\,e^{-x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty e^{i\delta}}\left[(t+\sqrt{1+t^2})^n+(t-\sqrt{1+t^2})^n\right]e^{-zt}\,dt, \tag{3}$$

где $n>0$ и $|\delta+\arg z|<\frac{\pi}{2}$.

Для того чтобы показать, что $O_n(z)$ является многочленом от z^{-1}, подставим

$$(\sqrt{1+t^2}\pm t)^n={}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2};\frac{1}{2};-t^2\right)\pm nt\,{}_2F_1\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{3}{2};-t^2\right)$$

в (3) и почленно проинтегрируем получившееся разложение Мы получим, что

$$O_{2n}(z)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-1}, \tag{4}$$

$$O_{2n+1}(z)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-2} \tag{5}$$

или, после некоторых алгебраических преобразований,

$$O_n(z)=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\leqslant\frac{n}{2}} n(n-m-1)!\,\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n-1}}{m!},\quad n\geqslant 1. \tag{6}$$

В частности, имеем

$$O_0(z)=z^{-1},\quad O_1(z)=z^{-2},\quad O_2(z)=z^{-1}+4z^{-3}. \tag{7}$$

Очевидно, что $O_n(z)$ является многочленом от z^{-1} степени $n+1$ Из (6) вытекает следующее неравенство:

$$|O_n(z)|\leqslant 2^{n-1}n!\,|z|^{-n-1}\exp\left(\frac{|z|^2}{4}\right). \tag{8}$$

Следовательно, используя 7.3 (4), получаем, что если ряд $\sum a_n\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$ абсолютно сходится, то и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\zeta)\, O_n(z)$$

абсолютно сходится.

Из определения вытекают следующие соотношения:

$$O_0'(z)=-O_1(z), \tag{9}$$

$$2O_n'(z)=O_{n-1}(z)-O_{n+1}(z),\quad n\geqslant 1, \tag{10}$$

$$(n-1)\,O_{n+1}(z)+(n+1)\,O_{n-1}(z)-2z^{-1}(n^2-1)\,O_n(z)=2nz^{-1}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2, \tag{11}$$

$$nz\,O_{n-1}(z)-(n^2-1)\,O_n(z)=(n-1)\,z\,O_n'(z)+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2, \tag{12}$$

$$nz\,O_{n+1}(z)-(n^2-1)\,O_n(z)=-(n+1)\,z\,O_n'(z)+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2. \tag{13}$$

Из этих соотношений следует, что $O_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2\frac{d^2v}{dz^2}+3z\frac{dv}{dz}+(z^2+1-n^2)\,v=z\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2+n\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^2. \tag{14}$$

Если C является простым замкнутым контуром, охватывающим начало координат, то из (6) и 7.2 (2) следует, что

$$\int_C O_m(z)\,O_n(z)\,dz=0,\qquad m=n\quad\text{и}\quad m\neq n, \tag{15}$$

$$\int_C J_m(z)\,O_n(z)\,dz=0,\qquad m\neq n, \tag{16}$$

$$\int_C J_m(z)\,O_m(z)\,dz=\pi i,\qquad m\geqslant 1. \tag{17}$$

Для некоторых целей удобнее использовать многочлены Шлефли

$$S_0(z)=0,\ S_n(z)=\sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}}(n-m-1)!\,\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}}{m!},\quad n\geqslant 1 \tag{18}$$

(Ватсон, 1949, п. 9.3—9.34). Они связаны с многочленами Неймана соотношением

$$n\,S_n(z)=2z\,O_n(z)-2\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)^2. \tag{19}$$

Многочлены $\Omega_n(z)$, определяемые разложением

$$(z^2-\xi^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\,[J_n(z)]^2\,\Omega_n(z),\quad |\xi|<|z|, \tag{20}$$

также были изучены Нейманом (Ватсон, 1949, п. 9.4 и 9.41).

Оба семейства многочленов Неймана были обобщены Гегенбауэром (Ватсон, 1949, п. 9.2, 9.5). Эти обобщения определяются разложениями

$$\frac{\xi^{\nu}}{z-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n,\nu}(z)\,J_{\nu+n}(\xi),\quad |\xi|<|z|, \tag{21}$$

$$\frac{\xi^{\nu+\mu}}{z-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n;\,\mu,\,\nu}(z)\,J_{\mu+\frac{n}{2}}(\xi)\,J_{\nu+\frac{n}{2}}(\xi). \tag{22}$$

7.5.2. Многочлены Ломмеля. Повторно применяя рекуррентную формулу 7.2 (56), получаем, что $J_{\nu+m}$ может быть выражено в виде

$$J_{\nu+m}(z)=J_{\nu}(z)\,R_{m,\nu}(z)-J_{\nu-1}(z)\,R_{m-1,\,\nu+1}(z), \tag{23}$$

где $R_{m,\nu}$ является многочленом степени m от z^{-1}; он называется многочленом Ломмеля. Аналогично имеем

$$(-1)^m J_{-\nu-m}(z)=J_{-\nu}(z)\,R_{m,\nu}(z)+J_{-\nu-1}(z)\,R_{m-1,\,\nu+1}(z). \tag{24}$$

Из (23), (24) и 7.11 (33) вытекает, что

$$R_{m,\nu}(z)=\frac{\pi z}{2\sin(\nu\pi)}\,[J_{\nu+m}(z)\,J_{-\nu+1}(z)+(-1)^m J_{-\nu-m}(z)\,J_{\nu-1}(z)]. \tag{25}$$

Используя степенной ряд 7.2 (48) для произведения двух функций Бесселя, получаем из (25), после некоторых преобразований, формулу

$$R_{m,\nu}(z)=\sum_{n=0}^{<\frac{m}{2}}\frac{(-1)^m\,(m-n)!\,\Gamma(\nu+m-n)}{n!\,(m-2n)!\,\Gamma(\nu+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2n}=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m}{}_2F_3\left(\frac{1-m}{2},\,-\frac{m}{2};\ \nu,\,-m,\,1-\nu-m;\,-z^2\right). \tag{26}$$

Из этой формулы видно, что

$$R_{m,\nu}(z)=(-1)^m\,R_{m,\,-\nu-m+1}(z). \tag{27}$$

Так как функции Бесселя второго рода удовлетворяют тому же самому рекуррентному соотношению 7.2 (56), что и $J_\nu(z)$, получаем следующее соотношение, аналогичное соотношению (25):

$$Y_{\nu+m}(z)=Y_\nu(z)\,R_{m,\nu}(z)-Y_{\nu-1}(z)\,R_{m-1,\nu+1}(z). \tag{28}$$

Следовательно, из (25) и 7.11 (36) имеем

$$R_{m,\nu}(z)=-\frac{\pi z}{2}\left[Y_{\nu+m}(z)\,J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+m}(z)\,Y_{\nu-1}(z)\right]. \tag{29}$$

Пусть в формуле (25) $m=2n$ и $\nu=\frac{1}{2}-n$, где n — целое число. Используя (26) и 7.11 (5), получаем

$$\left[J_{n+\frac{1}{2}}(z)\right]^2+\left[J_{-n-\frac{1}{2}}(z)\right]^2=\left[J_{n+\frac{1}{2}}(z)\right]^2+\left[Y_{n+\frac{1}{2}}(z)\right]^2=$$

$$=\frac{2}{\pi z}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2z)^{2m-2n}(2n-2m)!\,(2n-m)!}{m!\,(n-m)!\,(n-m)!}. \tag{30}$$

Рекуррентные формулы и формулы дифференцирования, которым удовлетворяет многочлен $R_{m,\nu}$, могут быть получены из его представления (25). Относительно этих формул и доказательства предельного соотношения Гурвица

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{m+\nu}R_{m,\nu+1}(z)}{\Gamma(\nu+m+1)}=J_\nu(z) \tag{31}$$

см. Ватсон (1949, п. 9.63, 9.65). Относительно других результатов см. Mcdonald (1926).

7.5.3. Функции Ангера — Вебера. Функция Ангера $\mathbf{J}_\nu(z)$ и функция Вебера $\mathbf{E}_\nu(z)$ определяются интегралами типа Бесселя

$$\mathbf{J}_\nu(z)\pm i\mathbf{E}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm i(\nu\varphi-z\sin\varphi)}\,d\varphi. \tag{32}$$

Используя формулы 7.3 (9) и 7.3 (10) соответственно, получаем отсюда разложения

$$\mathbf{J}_\nu(z)=J_\nu(z)+\frac{1}{\pi}\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t-\nu t}\,dt=$$

$$=J_\nu(z)+\frac{1}{\pi}\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-zv}\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)^{-\nu}\left(1+v^2\right)^{-1/2}dv, \tag{33}$$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)=-Y_\nu(z)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\nu\pi\right)e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt=$$

$$=-Y_\nu(z)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-zv}\left[\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)^\nu+\right.$$

$$\left.+\cos\nu\pi\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)^{-\nu}\right]\left(1+v^2\right)^{-1/2}dv,\quad \operatorname{Re} z>0. \tag{34}$$

Из (33) следует, что

$$\mathbf{J}_n(z) = J_n(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{35}$$

Разложение подынтегральной функции (32) по степеням z и почленное интегрирование с использованием равенства 1.5(29) приводят к разложениям

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\nu}{2}\right)} + \\ + \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}, \tag{36}$$

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\nu}{2}\right)} - \\ - \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}. \tag{37}$$

Связи между функциями Ангера и Вебера и рекуррентные соотношения. Из формул (33) и (34) имеем

$$\sin(\nu\pi)\,\mathbf{J}_\nu(z) = \cos(\nu\pi)\,\mathbf{E}_\nu(z) - \mathbf{E}_{-\nu}(z), \tag{38}$$

$$\sin(\nu\pi)\,\mathbf{E}_\nu(z) = \mathbf{J}_{-\nu}(z) - \cos(\nu\pi)\,\mathbf{J}_\nu(z). \tag{39}$$

Дифференцируя формулу (32), получаем

$$2\left[\mathbf{J}'_\nu(z) + i\mathbf{E}'_\nu(z)\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{e^{i[(\nu-1)\varphi - z\sin\varphi]} - e^{i[(\nu+1)\varphi - z\sin\varphi]}\right\} d\varphi,$$

откуда, вновь используя формулу (32), выводим, что

$$2\,\mathbf{J}'_\nu(z) = \mathbf{J}_{\nu-1}(z) - \mathbf{J}_{\nu+1}(z), \tag{40}$$

$$2\,\mathbf{E}'_\nu(z) = \mathbf{E}_{\nu-1}(z) - \mathbf{E}_{\nu+1}(z). \tag{41}$$

Аналогично из формулы (32) вытекает

$$\mathbf{J}_{\nu-1}(z) + \mathbf{J}_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1}\mathbf{J}_\nu(z) - 2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi), \tag{42}$$

$$\mathbf{E}_{\nu-1}(z) + \mathbf{E}_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1}\mathbf{E}_\nu(z) - 2(\pi z)^{-1}(1 - \cos\nu\pi). \tag{43}$$

Из (33) и 7.2 (1) выводим, что

$$\mathbf{J}''_\nu(z) + z^{-1}\mathbf{J}'_\nu(z) + (1 - \nu^2 z^{-2})\,\mathbf{J}_\nu(z) = \\ = \frac{1}{\pi} z^{-2}\sin(\nu\pi) \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[(-z\,\mathrm{ch}\,t + \nu)\,e^{-z\,\mathrm{sh}\,t - \nu t}\right] dt.$$

Таким образом, очевидно, что

$$\mathbf{J}_\nu''(z)+z^{-1}\mathbf{J}_\nu'(z)+(1-\nu^2z^{-2})\,\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}z^{-2}(z-\nu)\sin(\nu\pi). \tag{44}$$

Из (44) и (39) вытекает соотношение

$$\mathbf{E}_\nu''(z)+z^{-1}\mathbf{E}_\nu'(z)+(1-\nu^2z^{-2})\,\mathbf{E}_\nu(z)=-\frac{1}{\pi}z^{-2}[z+\nu+(z-\nu)\cos(\nu\pi)]. \tag{45}$$

Асимптотические разложения. Асимптотические разложения функций $\mathbf{J}_\nu(z)$ и $\mathbf{E}_\nu(z)$ при больших значениях z и фиксированном ν легко получаются с помощью леммы Ватсона. Подставим выражение

$$(v+\sqrt{1+v^2})^\nu(1+v^2)^{-1/2}=$$
$$={}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ -v^2\right)+\nu v\,{}_2F_1\left(1+\frac{\nu}{2},\ 1-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ -v^2\right) \tag{46}$$

соответственно в (33) и (34) и используем равенства 2.1 (2), 1.1 (5). Мы получим

$$\mathbf{J}_\nu(z)=J_\nu(z)+(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi)\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n2^{2n}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_n\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n z^{-2n}+\right.$$
$$+O(|z|^{-2M})+\nu\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n2^{2n}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)_n\left(1-\frac{\nu}{2}\right)_n z^{-2n-1}+$$
$$\left.+\nu O(|z|^{-2M-1})\right], \tag{47}$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)=-Y_\nu(z)-(\pi z)^{-1}(1+\cos\nu\pi)\times$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n2^{2n}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_n\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_n z^{-2n}+O(|z|^{-2M})\right]-$$
$$-\nu(\pi z)^{-1}(1-\cos\nu\pi)\left[\sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n2^{2n}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)_n\left(1-\frac{\nu}{2}\right)_n z^{-2n-1}+\right.$$
$$\left.+O(|z|^{-2M-1})\right]. \tag{48}$$

Относительно асимптотических разложений для $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ в (47) и (48) соответственно см. 7.13 (3) и 7.13 (4).

Случай больших значений $|\nu|$ и $|z|$ изучен в книге Ватсона (1949, стр. 345).

7.5.4. Функции Струве. Функции Струве определяются с помощью интегрального представления, похожего на интеграл Пуассона 7.3 (8):

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(zt)\,dt=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}. \tag{49}$$

Из этого выражения можно вывести (Ватсон, 1949, стр. 367), что функция $\mathbf{H}_\nu(x)$ положительна, если x положительно и $\nu \geqslant \frac{1}{2}$.

Если преобразовать равенство (49) в контурный интеграл, то можно снять ограничения, наложенные на ν, и мы получим

$$\mathbf{H}_\nu(z) = -i\pi^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_0^{(1+)} (t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin(zt)\,dt, \qquad (50)$$

$$\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Еще одно представление вытекает из 7.2 (12):

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)[\mathbf{H}_\nu(\xi z) - Y_\nu(\xi z)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\nu-1} z^\nu \int\limits_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-zt}(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,$$

$$\beta-\frac{\pi}{2} < \arg\xi < \beta+\frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2}-\beta < \arg z < \frac{\pi}{2}-\beta. \qquad (51)$$

(Относительно других интегральных представлений см. Meijer, 1935a, стр. 628, 744; 1939; 1940, стр. 198, 366; Nielsen, 1904, стр. 234.)

Модифицированная функция Струве имеет вид

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\mathbf{H}_\nu\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right). \qquad (52)$$

Следовательно, из (49) вытекает

$$\mathbf{L}_\nu(z)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(z\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \qquad (53)$$

Из (51) мы имеем

$$\mathbf{L}_\nu(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty (1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin(xt)\,dt, \qquad (54)$$

$$x > 0, \quad \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}.$$

Представление $\mathbf{H}_\nu(z)$ в виде степенного ряда по возрастающим степеням z получается из формулы (49) путем разложения $\sin(z\cos\varphi)$ по степеням z и почленного интегрирования:

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \frac{{}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}+\nu, \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}. \qquad (55)$$

Отсюда видно, что $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \mathbf{H}_\nu(z)$ является целой функцией от ν и z. Далее, мы имеем

$$\mathbf{H}_\nu(ze^{im\pi}) = e^{i\pi(\nu+1)m}\mathbf{H}_\nu(z), \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{56}$$

Из (52) получаем

$$\mathbf{L}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)} = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \frac{{}_1F_2\left(1;\ \frac{3}{2}+\nu,\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}. \tag{57}$$

Из (55) легко вывести формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu \mathbf{H}_\nu(z)\right] = z^\nu \mathbf{H}_{\nu-1}(z), \tag{58}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(z)\right] = \frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} - z^{-\nu}\mathbf{H}_{\nu+1}(z). \tag{59}$$

Выполняя дифференцирование в левых частях равенств (58) и (59) и сравнивая полученные результаты, выводим, что

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z) + \mathbf{H}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\mathbf{H}_\nu(z) + \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}, \tag{60}$$

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z) - \mathbf{H}_{\nu+1}(z) = 2\mathbf{H}'_\nu(z) - \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}. \tag{61}$$

Из (58) и (59) следует, что функции Струве удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z^2\mathbf{H}''_\nu(z) + z\mathbf{H}'_\nu(z) + (z^2-\nu^2)\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}. \tag{62}$$

Асимптотические представления. Если положить в формуле (51) $z = 1$ и разложить $(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-\frac{1}{2}}$ в ряд по возрастающим степеням t, после чего проинтегрировать почленно, то получим для больших значений ξ и фиксированного ν

$$\mathbf{H}_\nu(\xi) = Y_\nu(\xi) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-2m+\nu-1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)} + O(|\xi|^{\nu-2M-1}), \tag{63}$$

$$|\arg\xi| < \pi.$$

Относительно асимптотического разложения $Y_\nu(\xi)$ см. 7.13 (4). Далее, можно доказать, что если ν вещественно и $\xi>0$, то при $M+\frac{1}{2}-\nu\geqslant 0$ M-й остаток имеет тот же знак и меньше по абсолютной величине, чем первый отброшенный член.

Относительно случая, когда велики $|\nu|$ и $|\xi|$, см. Ватсон (1949, стр. 364).

Если $\nu=n+\frac{1}{2}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, то $(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-\frac{1}{2}}$ в (51) является многочленом и мы имеем

$$\mathbf{H}_{n+\frac{1}{2}}(\xi)=Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-2m+n-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1-m)}, \tag{64}$$

где $Y_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$ задается формулой 7.11 (2). Далее, из (51) и (54) получаем

$$\mathbf{H}_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z);\quad \mathbf{L}_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=I_{n+\frac{1}{2}}(z),\quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{65}$$

При $n=0$ формула (64) принимает вид

$$\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(z)=\frac{1-\cos z}{\sqrt{\frac{\pi z}{2}}}.$$

Если n — натуральное число, то из формул (37) и (55) получаем (Ватсон, 1949, стр. 367)

$$\mathbf{H}_n(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2m-1}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}-\mathbf{E}_n(z), \tag{66}$$

$$\mathbf{H}_{-n}(z)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(n-m-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}-\mathbf{E}_{-n}(z). \tag{67}$$

Относительно дальнейших результатов, касающихся функций Струве, см. Baudoux (1946).

7.5.5. **Функции Ломмеля.** Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение Бесселя

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=z^{\mu+1}, \tag{68}$$

где μ и ν — любые постоянные. Решением уравнения (68) является

$$s_{\mu,\nu}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{\mu+2m+1}}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+3)^2-\nu^2]\ldots[(\mu+2m+1)^2-\nu^2]}=$$

$$=z^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+2m+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+2m+3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{\mu-\nu+3}{2},\ \frac{\mu+\nu+3}{2},\ -\frac{z^2}{4}\right). \qquad (69)$$

Если одно из чисел $\mu\pm\nu$ является нечетным целым числом, решение (69) теряет смысл.

Интегрируя дифференциальное уравнение (68) с помощью метода вариации произвольных постоянных и выбирая решение, которое при малых z приблизительно равно $[(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)]^{-1}z^{\mu+1}$, получаем

$$s_{\mu,\nu}(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_{-\nu}(z)\,dz-J_{-\nu}(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\,dz\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[Y_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\,dz-J_\nu(z)\int_0^z z^\mu Y_\nu(z)\,dz\right]. \qquad (70)$$

Если ν не является целым числом, два выражения (70) для $s_{\mu,\nu}$ совпадают. Если же ν — целое число, то первое выражение не определено, а второе имеет смысл.

Другим частным решением уравнения (68) является

$$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+\frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\sin(\nu\pi)}\times$$

$$\times\left\{\cos\left[(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right]J_{-\nu}(z)-\cos\left[(\mu+\nu)\frac{\pi}{2}\right]J_\nu(z)\right\}=$$

$$=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{\sin\left[(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right]J_\nu(z)-\cos\left[(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right]Y_\nu(z)\right\}. \qquad (71)$$

Если одно из чисел $\mu\pm\nu$ является нечетным положительным числом, то $S_{\mu,\nu}$ может быть представлено в виде следующего конечного ряда по убывающим степеням z (см. Ватсон, 1949, стр. 379):

$$S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu-1}\{1-[(\mu-1)^2-\nu^2]\,z^{-2}+$$
$$+[(\mu-1)^2-\nu^2]\,[(\mu-3)^2-\nu^2]\,z^{-4}-\ldots\}. \qquad (72)$$

В случае, когда $\mu+\nu$ или $\mu-\nu$ является нечетным целым числом, $s_{\mu,\nu}$ не определено, а $S_{\mu,\nu}(z)$ имеет определенный предел (Ватсон, 1949, стр. 380).

Рекуррентные соотношения. В силу принятых определений имеем

$$s_{\mu+2,\,\nu}(z) = z^{\mu+1} - [(\mu+1)^2 - \nu^2]\, s_{\mu,\,\nu}(z), \tag{73}$$

$$s'_{\mu,\,\nu}(z) + \frac{\nu}{z} s_{\mu,\,\nu}(z) = (\mu+\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu-1}(z), \tag{74}$$

$$s'_{\mu,\,\nu}(z) - \frac{\nu}{z} s_{\mu,\,\nu}(z) = (\mu-\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu+1}(z), \tag{75}$$

$$\frac{2\nu}{z} s_{\mu,\,\nu}(z) = (\mu+\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu-1}(z) - (\mu-\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu+1}(z), \tag{76}$$

$$2s'_{\mu,\,\nu}(z) = (\mu+\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu-1}(z) + (\mu-\nu-1)\, s_{\mu-1,\,\nu+1}(z). \tag{77}$$

Из (71) следует, что в формулах (73) — (77) можно заменить $s_{\mu,\,\nu}(z)$ на $S_{\mu,\,\nu}(z)$.

Частные случаи функции Ломмеля. Многие функции, связанные с функциями Бесселя, могут быть выражены через функции Ломмеля

$$O_{2n}(z) = z^{-1} S_{1,\,2n}(z), \quad O_{2n+1}(z) = (2n+1)\, z^{-1} S_{0,\,2n+1}(z), \tag{78}$$

$$S_{2n}(z) = 4n\, S_{-1,\,2n}(z), \quad S_{2n+1}(z) = 2\, S_{0,\,2n+1}(z), \tag{79}$$

$$A_{2n,\,\nu}(z) = \frac{2^{\nu}}{n!} z^{\nu-1}\, \Gamma(\nu+n)\, (\nu+2n)\, S_{1-\nu,\,\nu+2n}(z), \tag{80}$$

$$A_{2n+1,\,\nu}(z) = \frac{2^{\nu+1}}{n!} z^{\nu-1} \Gamma(\nu+n+1)\, (\nu+2n+1)\, S_{-\nu,\,\nu+2n+1}(z), \tag{81}$$

$$\mathbf{J}_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi} [\sin(\nu\pi)\, s_{0,\,\nu}(z) - \nu \sin(\nu\pi)\, s_{-1,\,\nu}(z)], \tag{82}$$

$$\mathbf{E}_{\nu}(z) = -\frac{1}{\pi} [(1+\cos\nu\pi)\, s_{0,\,\nu}(z) + \nu(1-\cos\nu\pi)\, s_{-1,\,\nu}(z)], \tag{83}$$

$$\mathbf{H}_{\nu}(z) = \frac{2^{1-\nu}\, s_{\nu,\,\nu}(z)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} = Y_{\nu}(z) + \frac{2^{1-\nu}\, S_{\nu,\,\nu}(z)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{84}$$

где использованы обозначения, введенные в п. 7.5.

Функция Юнга (1912) имеет вид

$$C_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}}{\Gamma(\nu+2m+1)} = \sqrt{z}\, \frac{s_{\nu-\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}}(z)}{\Gamma(\nu-1)}. \tag{85}$$

Асимптотические разложения. Вообще говоря, ряд (72) расходится. Но можно показать (Ватсон, 1949, стр. 383), что он является асимптотическим разложением $S_{\mu,\,\nu}(z)$, когда $|z|$ — большое число и $|\arg z| < \pi$.

Интегральные представления. Интегральное представление

$$s_{\mu,\,\nu}(z) = 2^{\mu} \left(\frac{z}{2}\right)^{(1+\nu+\mu)/2} \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{(1+\mu-\nu)/2}(z \sin\theta)\, (\sin\theta)^{(1+\nu-\mu)/2} (\cos\theta)^{\nu+\mu}\, d\theta, \quad \operatorname{Re}(\nu+\mu+1) > 0, \tag{86}$$

легко проверить путем разложения по возрастающим степеням z. Относительно дальнейших интегральных представлений см. формулы 7.12 (48) — 7.12 (52) и Szymanski (1935), Meijer (1935a, 1938, 1939a, 1940, стр 198, 366).

Ломмель изучил также функции от двух переменных, определяемые равенствами

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z), \tag{87}$$

$$V_\nu(w, z) = \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right) + U_{-\nu+2}(w, z). \tag{88}$$

Относительно теории этих функций см. Ватсон (1949, п. 16.5 — 16.59); см. также Shastri (1938).

7.5.6. Некоторые другие обозначения и функции. В книге: Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen использованы некоторые обозначения, отличные от введенных в п. 7. 5; перечень их приведен в книге Нильсена на стр. 406. Этими обозначениями являются

$$Z^\nu(z) = \mathbf{H}_\nu(z), \quad \Psi^\nu(z) = \mathrm{J}_\nu(z), \quad \Omega^\nu(z) = -\mathbf{E}_\nu(z),$$

$$\Pi^{\nu,\rho}(z) = \frac{2^{2-\rho}\cos\left[\frac{\pi}{2}(\nu-\rho)\right] s_{\rho-1,\nu}(z)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Далее в этой книге изучены следующие функции:

$$\Pi^\nu(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{J}_\nu(z) + \mathrm{J}_{-\nu}(z)], \quad \mathrm{X}^\nu(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)],$$

$$\pi\Phi^\nu(z) = i^\nu \int_0^\pi e^{iz\cos\varphi} \cos(\nu\varphi)\, d\varphi,$$

$$\pi\Lambda^\nu(z) = i^{1-\nu} \int_0^\pi e^{iz\cos\varphi} \sin(\nu\varphi)\, d\varphi.$$

Последние две функции являются обобщением интеграла Хансена для коэффициентов Бесселя (см. 7.12 (2), а также 7.12 (40) — 7.12 (45)).

7.6. Теорема сложения

Существует два типа разложений функций Бесселя, известных под названием теорем сложения. Разложения типа Гегенбауэра связаны с теорией сферических волновых функций (в $2\nu+2$-мерном пространстве), в то время как разложения типа Графа связаны с теорией цилиндрических волн. Это различие не является вполне точным, и оба типа совпадают при $\nu = 0$. По сути дела, эти два типа разложения являются двумя различными обобщениями теоремы сложения Неймана для $J_0(z)$.

7.6.1. Теорема сложения Гегенбауэра. Мы установим теорему сложения Гегенбауэра для модифицированных функций Бесселя третьего рода $K_\nu(z)$. Положим

$$w = \sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ\cos\varphi} = \sqrt{(Z - ze^{-i\varphi})(Z - ze^{i\varphi})} \tag{1}$$

и предположим сначала, что z, Z, φ вещественны и $0 < z < Z$. Полагая в 7.12 (23) $z = 1$ и $\alpha = w$, имеем

$$w^{-\nu} K_\nu(w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2 + Z^2 - 2zZ\cos\varphi}{t}\right) t^{-\nu-1}\, dt. \tag{2}$$

При $\nu \neq 0$ используем разложение Сонина 7.10 (5)

$$\exp(t^{-1} z Z \cos\varphi) = \left(\frac{2t}{zZ}\right)^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^\infty (\nu + n)\, C_n^\nu(\cos\varphi)\, I_{\nu+n}\left(\frac{zZ}{t}\right)$$

и подставим его в (2), после чего почленно проинтегрируем, используя формулу 7.7 (37). Таким образом мы получим теорему сложения (относительно функций C_n^ν см. п. 3.15)

$$w^{-\nu} K_\nu(w) = \left(\frac{zZ}{2}\right)^{-\nu} \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^\infty (\nu + n)\, C_n^\nu(\cos\varphi)\, I_{\nu+n}(z)\, K_{\nu+n}(Z), \tag{3}$$
$$\nu \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad z < Z.$$

Если устремить здесь ν к нулю, то получим, используя 3.15 (14),

$$K_0(w) = I_0(z) K_0(z) + 2 \sum_{n=1}^\infty I_n(z) K_n(Z) \cos n\varphi, \quad z < Z. \tag{4}$$

Из 7.2 (12) и 7.2 (13) вытекает, что ряд (3) сходится одновременно с рядом $\sum C_n^\nu(\cos\varphi)\left(\frac{z}{Z}\right)^n$, и поэтому из 3.15 (1) следует, что формулы (3) и (4) сохраняют силу, если $|ze^{\pm i\varphi}| < |Z|$.

Теоремы сложения для других функций Бесселя могут быть получены из формулы (3) с помощью соотношений 7.2 (16), 7.2 (17), 7.2 (7) и 7.2 (8). См. также 7.15 (28) — 7.15 (32).

7.6.2. Теорема сложения Графа. Формула сложения Графа

$$J_\nu(w) \left(\frac{Z - ze^{-i\varphi}}{Z - ze^{i\varphi}}\right)^{\frac{\nu}{2}} = \sum_{n=-\infty}^\infty J_{\nu+n}(Z)\, J_n(z)\, e^{in\varphi}, \tag{5}$$

где

$$|ze^{\pm i\varphi}| < |Z|, \quad w = \sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ\cos\varphi} = \sqrt{(Z - ze^{-i\varphi})(Z - ze^{i\varphi})},$$

может быть доказана следующим образом. Из 7.3 (5) мы имеем

$$(2\pi i)\, J_{\nu+n}(Z)\, J_n(z)\, e^{in\varphi} =$$
$$= \int_{-\infty \exp(-i\beta)}^{(0+)} \exp\left[\frac{Z}{2}(t - t^{-1})\right] t^{-\nu-1} \left(\frac{e^{i\varphi}}{t}\right)^n J_n(z)\, dt.$$

Из 7.2 (25) вытекает

$$(2\pi i)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{\nu+n}(Z)\,J_n(z)\,e^{in\varphi} =$$

$$= \int\limits_{-\infty\exp(-i\beta)}^{0+} \exp\left[\frac{Z}{2}(t-t^{-1})-\frac{z}{2}(te^{-i\varphi}-t^{-1}e^{i\varphi})\right]t^{-\nu-1}\,dt.$$

Положим здесь $(Z-ze^{-i\varphi})t = wv$, $\dfrac{Z-ze^{i\varphi}}{t}=\dfrac{w}{v}$ и выберем значение квадратного корня (1) так, что $w\to+Z$, когда $z\to 0$. Тогда можно взять контур, начинающийся и оканчивающийся в точке $-\infty\exp(-i\alpha)$, где $\alpha=\arg w$. Таким образом, мы имеем

$$(2\pi i)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{\nu+n}(Z)\,J_n(z)\,e^{in\varphi} =$$

$$= w^{-\nu}(Z-ze^{-i\varphi})^{\nu}\int\limits_{-\infty\exp(-i\alpha)}^{(0+)} \exp\left[\frac{w}{2}(v-v^{-1})\right]v^{-\nu-1}\,dv.$$

Вновь применяя 7.3 (5), получаем (5).

Формула (5) может быть записана в несколько ином виде, если ввести угол ψ с помощью равенств

$$Z-z\cos\varphi = w\cos\psi,\qquad z\sin\varphi = w\sin\psi.$$

Ясно, что для вещественного φ и положительных z, Z и w ψ является углом, противолежащим стороне z в треугольнике со сторонами z, Z, w. Мы имеем тогда

$$e^{i\nu\psi}J_\nu(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{\nu+n}(Z)\,J_n(z)\,e^{in\varphi},$$

$$|ze^{\pm i\varphi}|<|Z|,\qquad \nu\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{6}$$

Относительно других функций Бесселя см. формулы 7.15 (33) — 7.15 (36).

Формулы удвоения для функций Бесселя первого рода и для модифицированной функции Ганкеля в случае полуцелого порядка вывел Кук (Cooke, 1930). Результат имеет вид

$$J_{m+\frac12}(2z) = (-1)^m\sqrt{\pi}\,m!\,z^{m+\frac12}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n(2m-2n+1)}{n!\,(2m-n+1)!}\,J_{m-n+\frac12}(z)\,J_{-\left(m-n+\frac12\right)}(z), \tag{7}$$

$$K_{m+\frac12}(2z) = \frac{m!}{\sqrt{\pi}}\,z^{m+\frac12}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n(2m-2n+1)\left[K_{m-n+\frac12}(z)\right]^2}{n!\,(2m-n+1)!}. \tag{8}$$

Относительно других таких формул см. Cooke (1930).

7.7. Интегральные формулы

7.7.1. Неопределенные интегралы. Из формул 7.2 (52) и 7.2 (53) соответственно мы имеем

$$\int z^{\nu+1} J_\nu(z)\, dz = z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z), \tag{1}$$

$$\int z^{-\nu+1} J_\nu(z)\, dz = -z^{-\nu+1} J_{\nu-1}(z). \tag{2}$$

Из 7.2 (57) получаем

$$\int J_\nu(z)\, dz = 2\sum_{n=0}^{m-1} J_{\nu+2n+1}(z) + \int J_{\nu+2m}(z)\, dz, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Равенства 7.2 (4) — 7.2 (6) показывают, что формулы (1) — (3) сохраняют силу для $Y_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Относительно других подобных формул см. 7.14 (1) — 7.14 (13).

7.7.2. Определенные интегралы по конечным отрезкам. Многие определенные интегралы, содержащие функции Бесселя, являются формулами типа свертки

$$F * G(t) = \int_0^t F(v)\, G(t-v)\, dv$$

и могут быть выведены из теоремы о свертке для преобразования Лапласа (Doetsch, 1937, стр. 161; Widder, 1941, стр. 84). Эта теорема утверждает, что если

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = L\{F\}$$

и $g(s) = L\{G\}$, то

$$f(s)\, g(s) = L\{F * G\}.$$

Эта формула справедлива, например, если $L\{F\}$ и $L\{G\}$ абсолютно сходятся.

В качестве примера получим этим способом второй интеграл Сонина. Полагая

$$F_\mu(\alpha, t) = \alpha^{-\mu} t^{\mu/2} J_\mu(\alpha\sqrt{t}),$$

получаем из формулы (24) при $\operatorname{Re}\mu > -1$

$$f_\mu(\alpha, s) = L\{F_\mu(\alpha, t)\} = 2^{-\mu} s^{-\mu-1} \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha^2 s^{-1}\right).$$

Но

$$f_\mu(\alpha, s)\, f_\nu(\beta, s) = 2 f_{\mu+\nu+1}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\, s\right),$$

откуда и вытекает интеграл Сонина

$$\int_0^t \sqrt{\tau^\mu (t-\tau)^\nu}\, J_\mu(\alpha\sqrt{\tau})\, J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau})\, d\tau =$$

$$= 2\alpha^\mu\beta^\nu \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{-(\nu+\mu+1)}}\, J_{\nu+\mu+1}\left(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right),$$
$$\operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -1.$$

Полагая $t = 1$ и подставляя $\tau = (\sin\theta)^2$, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(\alpha\sin\theta)\, J_\nu(\beta\cos\theta)\, (\sin\theta)^{\mu+1} (\cos\theta)^{\nu+1}\, d\theta =$$

$$= \alpha^\mu\beta^\nu \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{-(\nu+\mu+1)}}\, J_{\nu+\mu+1}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{4}$$
$$\operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -1.$$

Следует особо отметить предельный случай формулы (4). Если разделить обе части равенства (4) на β^ν и устремить β к нулю, получим первый интеграл Сонина

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(\alpha\sin\theta)\, (\sin\theta)^{\mu+1} (\cos\theta)^{2\rho+1}\, d\theta =$$

$$= 2^\rho\Gamma(\rho+1)\, \alpha^{-\rho-1} J_{\rho+\mu+1}(\alpha), \quad \operatorname{Re}\rho > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -1. \tag{5}$$

Другими формулами типа свертки являются

$$\int_0^t \tau^\mu J_\mu(\tau)\, (t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) t^{\nu+\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)} J_{\nu+\mu+\frac{1}{2}}(t), \quad \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} \tag{6}$$

(см. Hardy, 1921, стр. 169) и

$$\int_0^t \frac{J_{2\nu}(\alpha\sqrt{\tau})\cos(\beta\sqrt{t-\tau})}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\, d\tau =$$

$$= \pi J_\nu\left[\frac{\sqrt{t}}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta\right)\right] J_\nu\left[\frac{\sqrt{t}}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta\right)\right], \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Последняя формула может быть записана в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2\nu}(2\sqrt{z\zeta}\sin\theta)\cos[(z-\zeta)\cos\theta]\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_\nu(z)\, J_\nu(\zeta), \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Формулы (6) и (7) вытекают из теоремы о свертке, примененной к соотношениям (17) и (23), (25) соответственно.

Интегральная формула для функции Струве, соответствующая первому интегралу Сонина (5), имеет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{H}_\mu (z \sin\theta) (\sin\theta)^{\mu+1} (\cos\theta)^{2\rho+1} d\theta =$$
$$= \Gamma(\rho+1) 2^\rho z^{-\rho-1} \mathbf{H}_{\rho+\mu+1}(z), \quad \operatorname{Re}\rho > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -\frac{3}{2}. \qquad (9)$$

Она может быть установлена следующим образом. Разложим под знаком интеграла функцию Струве по формуле 7.5 (55) и почленно проинтегрируем получившееся разложение, используя 1.5 (19).

Во многих случаях для вычисления интегралов, содержащих функции Бесселя, могут быть использованы формулы 7.2 (47) — 7.2 (49), выражающие произведения двух функций Бесселя в виде степенного ряда. Например, мы имеем из 7.2 (2) и 1.5 (19)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu (2z \sin\theta) (\sin\theta)^\nu (\cos\theta)^{2\nu} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m} \Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(2\nu+m+1)}.$$

В силу 7.2 (49) это приводит к соотношению

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu (2z \sin\theta) (\sin\theta)^\nu (\cos\theta)^{2\nu} d\theta =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2z^\nu} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) [J_\nu(z)]^2, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Аналогично доказывается формула Неймана

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\nu+\mu} (2z\cos\theta) \cos[(\mu-\nu)\theta]\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_\nu(z) J_\mu(z), \quad \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1. \qquad (11)$$

В этом доказательстве используются формулы 7.2 (2), 1.5 (19) и 7.2 (49).

Обобщение формулы Неймана

$$\pi (2\alpha z)^{-\mu} (2\beta z)^{-\nu} J_\mu(\alpha z) J_\nu(\beta z) =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\theta(\mu-\nu)} (\cos\theta)^{\nu+\mu} (\lambda z)^{-\nu-\mu} J_{\nu+\mu}(\lambda z)\, d\theta, \qquad (12)$$
$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1, \quad \lambda = \sqrt{2\cos\theta\,(\alpha^2 e^{i\theta} + \beta^2 e^{-i\theta})},$$

может быть доказано следующим образом. Разлагая функцию Бесселя под знаком интеграла по формуле 7.2 (2), получим

$$\pi (\alpha z)^{-\mu} (\beta z)^{-\nu} J_\mu (\alpha z) J_\nu (\beta z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{-m} z^{2m}}{m! \, \Gamma(m+\nu+\mu+1)} \times$$

$$\times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\theta(\mu-\nu)} (\cos\theta)^{m+\nu+\mu} (\alpha^2 e^{i\theta} + \beta^2 e^{-i\theta})^m \, d\theta.$$

Интегралы, входящие в эту сумму, можно выразить через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$ (ср. также 2.4 (11)), и в силу 7.2 (47) справедливость соотношения (12) доказана. Относительно аналогичных представлений см. 7.14 (60).

Другой класс интегральных формул может быть получен из теорем сложения в п. 7.6 и 7.15. Из 7.15 (31) мы имеем

$$\pi [J_n(z)]^2 = \int_0^\pi J_0 (2z \sin\varphi) \cos(2n\varphi) \, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

или, более общо, из формул 7.15 (28), 7.15 (29) и 3.15 (17) имеем

$$\int_0^\pi w^{-\nu} Z_\nu (w) C_m^\nu (\cos\varphi) (\sin\varphi)^{2\nu} \, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi \, \Gamma(m+2\nu)}{m! \, \Gamma(\nu) (2zy)^\nu} Z_{\nu+m}(y) J_{\nu+m}(z), \tag{14}$$

$$w = \sqrt{z^2 + y^2 - 2zy\cos\varphi}, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь через Z_ν обозначена функция Бесселя любого вида, то есть первого, второго или третьего рода. Относительно других формул того же типа см. формулы 7.14 (14) — 7.14 (23) и Ватсон (1949, стр. 412); Copson (1932); Rutgers (1941); B. N. Bose (1948); MacRobert (1947, стр. 383).

7.7.3. Интегралы с бесконечными пределами, содержащие показательную функцию. Формула

$$2^{\nu+\mu} \alpha^{-\mu} \beta^{-\nu} \gamma^{\lambda+\mu+\nu} \Gamma(\nu+1) \int_0^\infty J_\mu(\alpha t) J_\nu(\beta t) e^{-\gamma t} t^{\lambda-1} \, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+2m)}{m! \, \Gamma(\mu+m+1)} \, {}_2F_1\left(-m, -\mu-m; \nu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right)^m, \tag{15}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda+\mu+\nu) > 0, \quad \operatorname{Re}(\gamma \pm i\alpha \pm i\beta) > 0,$$

может быть доказана путем замены произведения функций Бесселя его разложением в степенной ряд 7.2 (47), почленного интегрирования и использования формулы 1.1 (5). В некоторых частных случаях правая сторона равенства (15) сводится к более простым выражениям. Если, например, положить $\lambda+\nu=\rho$ и устремить β к нулю, то получится интеграл Ганкеля

$$\left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)^{\mu}\gamma^{\rho}\Gamma(\mu+1)\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}J_{\mu}(\alpha t)\,t^{\rho-1}\,dt=$$

$$=\Gamma(\mu+\rho)\,{}_2F_1\left(\frac{\rho+\mu}{2},\ \frac{\rho+\mu+1}{2};\ \mu+1;\ -\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=$$

$$=\Gamma(\mu+\rho)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)^{-\frac{\mu+\rho}{1}}{}_2F_1\left(\frac{\rho+\mu}{2},\ \frac{1+\mu-\rho}{2^2};\ \mu+1;\ \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2}\right),\qquad(16)$$

$$\operatorname{Re}(\rho+\mu)>0,\quad \operatorname{Re}(\gamma\pm i\alpha)>0.$$

Второе выражение в формуле (16) выведено из первого путем использования формулы преобразования 2.10 (6) для гипергеометрической функции.

Полагая во втором из выражений (16) $\rho=\mu+1$, получаем

$$\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}J_{\mu}(\alpha t)\,t^{\mu}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\alpha)^{\mu}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(\gamma^2+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}-\mu},\qquad(17)$$

$$\operatorname{Re}(2\mu+1)>0,\quad \operatorname{Re}(\gamma\pm i\alpha)>0.$$

Если положить в (16) $\rho=1$ и использовать формулу 2.8 (4), то получим

$$\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}J_{\mu}(\alpha t)\,dt=\frac{\left(\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}-\gamma\right)^{\mu}}{\alpha^{\mu}\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}},\qquad \operatorname{Re}\mu>-1,\quad \operatorname{Re}(\gamma\pm i\alpha)>0.\qquad(18)$$

Далее, полагая во втором из выражений (16) $\rho=1$ и используя 2.1 (14), получаем

$$\int_0^{\infty}J_{\mu}(\alpha t)\,t^{\rho-1}\,dt=\frac{2^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\rho}{2}\right)}{\alpha^{\rho}\,\Gamma\left(1+\frac{\mu-\rho}{2}\right)},\qquad -\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\rho<\frac{3}{2},\quad \alpha>0.\qquad(19)$$

Таким же путем можно вывести много интегральных формул, в которых показательная функция зависит от квадрата переменной интегрирования. Например, соотношение

$$2^{\nu+\mu+1}\alpha^{-\mu}\beta^{-\nu}\gamma^{\nu+\mu+\lambda}\Gamma(\nu+1)\int_0^{\infty}J_{\mu}(\alpha t)\,J_{\nu}(\beta t)\,e^{-\gamma^2t^2}t^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{\nu+\mu+\lambda}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m+\mu+1)}\,{}_2F_1\left(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right)^{m},\qquad(20)$$

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu+\lambda)>0,\quad \operatorname{Re}\gamma^2>0,$$

может быть выведено путем использования выражения 7.2 (47) и почленного интегрирования. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, в которых формула (20) сводится к более простым выражениям.

Пусть $\beta = \alpha$, тогда, используя 2.1 (14), получаем

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) J_\nu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} t^{\lambda-1}\, dt =$$

$$= 2^{-\nu-\mu-1}\gamma^{-\nu-\lambda-\mu}\alpha^{\nu+\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times {}_3F_3\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+\lambda}{2}; \mu+1, \nu+1, \mu+\nu+1; -\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\lambda+\mu) > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0. \tag{21}$$

Пусть в (20) β стремится к нулю. Тогда выражение в правой части равенства (20) сводится к вырожденной гипергеометрической функции, и, полагая $\nu + \lambda = \rho$, получаем

$$\Gamma(\mu+1) \int_0^\infty J_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} t^{\rho-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^{-\rho}\Gamma\left(\frac{\mu+\rho}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^\mu {}_1F_1\left(\frac{\mu+\rho}{2}; \mu+1; -\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^{-\rho}\Gamma\left(\frac{\mu+\rho}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^\mu \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right) {}_1F_1\left(\frac{\mu-\rho}{2}+1; \mu+1; \frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}\gamma^2 > 0, \quad \operatorname{Re}(\mu+\rho) > 0. \tag{22}$$

Далее, имеем

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right) I_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right), \tag{23}$$

$$\operatorname{Re}\gamma^2 > 0, \quad \operatorname{Re}\mu > -1,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha t) e^{-\gamma^2 t^2} t^{\mu+1}\, dt = \frac{\alpha^\mu}{(2\gamma^2)^{\mu+1}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}\right), \tag{24}$$

$$\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0,$$

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) e^{-\gamma^2 t^2} t\, dt = \frac{1}{2\gamma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\gamma^2}\right) I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma^2}\right), \tag{25}$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0.$$

Формулы (23) и (24) следуют из (22), а (25) — из (20).

Для того чтобы доказать аналогичное формуле (16) равенство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\frac{(\alpha+\beta)^{\nu+\mu}}{\sqrt{\pi}\,(2\beta)^{\nu}}\int_0^\infty e^{-\alpha t}K_\nu(\beta t)\,t^{\mu-1}\,dt=$$

$$=\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)\,{}_2F_1\left(\nu+\mu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \mu+\frac{1}{2};\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)=$$

$$=(2\alpha)^{-2\nu-2\mu}(\alpha+\beta)^{2\nu+2\mu}\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\nu+\mu,\ \mu;\ 2\nu+2\mu;\ 1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),\quad \operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0, \qquad (26)$$

заменим в нем $K_\nu(\beta t)$ выражением 7.3 (15), изменим порядок интегрирования и используем 2.12 (5). Из формул (26) и 2.8 (47) получаем, полагая $\alpha=0$,

$$\int_0^\infty K_\nu(\beta t)\,t^{\mu-1}\,dt=2^{\mu-2}\beta^{-\mu}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right), \qquad (27)$$

$$\operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0.$$

Далее, из формул (23) и 7.2 (13) имеем

$$\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)\,e^{-\gamma^2t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4\gamma\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}\exp\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}K_{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right), \qquad (28)$$

$$-1<\operatorname{Re}\mu<1.$$

Относительно дальнейших формул см Shabde (1935); Mohan (1942, стр. 171) Sinha (1942).

7.7.4. Разрывный интеграл Вебера—Шафхейтлина. Перейдем к изучению интеграла $\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,t^{-\rho}\,dt$, где a и b — положительные вещественные числа. Оказывается, что хотя этот интеграл сходится для всех положительных значений a и b, аналитическое выражение его различно в зависимости от того, будет ли a меньше, равно или больше b. Именно мы имеем

$$2^\rho b^{\mu-\rho+1}\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\rho-\mu}{2}\right)\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,t^{-\rho}dt=$$

$$=a^\mu\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}\right)\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2},\ \frac{1+\mu-\nu-\rho}{2};\ \mu+1;\ \frac{a^2}{b^2}\right), \qquad (29)$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1)>0,\quad \operatorname{Re}\rho>-1,\quad 0<a<b,$$

аналогичное выражение имеет место при $0 < b < a$ (при этом в формуле (29) надо переставить a и b). Далее имеем

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(at)\,t^{-\rho}\,dt =$$
$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\rho-1}\Gamma(\rho)\,\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1-\rho}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu+\rho}{2}\right)}, \tag{30}$$
$$\operatorname{Re}(\nu+\mu+1) > \operatorname{Re}\rho > 0, \quad a > 0.$$

Эти результаты доказываются следующим образом: подставим в подынтегральную функцию (29) выражение (12), сделав в нем подстановку $\alpha = a$, $\beta = b$, $z = t$; изменим порядок интегрирования и вычислим интеграл по t с помощью формулы (19). Мы получим

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,t^{-\rho}\,dt = \frac{1}{\pi}a^\mu b^\nu\, 2^{(\nu+\mu-\rho-1)/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\rho+1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\theta(\mu-\nu)}(\cos\theta)^{(\nu+\mu+\rho-1)/2}\left(a^2e^{i\theta}+b^2e^{-i\theta}\right)^{(\rho-\nu-\mu-1)/2}\,d\theta.$$

Но интеграл в правой части равенства можно выразить через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$ (см. 2.4 (11)). Соответственно тому, имеем ли мы $b > a$ или $b = a$, непосредственно получаем выражения (29) или (30). В некоторых частных случаях гипергеометрическая функция сводится к более простым функциям. Например, формулы 7.14 (28) — 7.14 (31) выводятся из (29) и (30), если положить $\rho = \nu = \frac{1}{2}$.

Через гипергеометрическую функцию может быть выражен и интеграл, аналогичный интегралу Вебера — Шафхейтлина, в котором одна из функций Бесселя заменена модифицированной функцией Бесселя третьего рода. Однако этот интеграл не имеет разрыва при $a = b$. Мы получаем

$$2^{\rho+1}\alpha^{\nu-\rho+1}\,\Gamma(\nu+1)\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)\,J_\nu(\beta t)\,t^{-\rho}\,dt =$$
$$= \beta^\nu\,\Gamma\left(\frac{\nu-\rho+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\rho-\mu+1}{2}\right)\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{\nu-\rho+\mu+1}{2},\ \frac{\nu-\rho-\mu+1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \tag{31}$$
$$\operatorname{Re}(\alpha \pm i\beta) > 0, \quad \operatorname{Re}(\nu-\rho+1\pm\mu) > 0.$$

Эта формула доказывается путем разложения $J_\nu(\beta t)$ в степенной ряд по формуле 7.2 (2) и почленного интегрирования с использованием формулы (27).

Дальнейшие интегралы такого типа приведены в 7.14 (35) — 7.14 (39). Формулы 7.14 (35) и 7.14 (36) вытекают из формулы (31), остальные были доказаны в работе: Dixon, Ferrar (1930).

7.7.5. Интегралы Сонина и Гегенбауэра и их обобщения. Разрывные интегралы более общего типа, чем (29) и (30), были изучены Сониным и Гегенбауэром. Интеграл

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty J_\mu(bt)\,J_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)\frac{t^{\mu+1}}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\,dt=\\&=\begin{cases}0 & \text{при } a<b,\\ \dfrac{b^\mu z^{1+\mu-\nu}}{a^\nu(a^2-b^2)^{(1+\mu-\nu)/2}}J_{\nu-\mu-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right) & \text{при } a>b,\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где $\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\mu>-1$, может быть вычислен путем замены второй функции Бесселя под знаком интеграла по формуле 7.3 (6), изменения порядка интегрирования и использования формул (24) и вновь 7.3 (6).

Обобщения формулы (32) были даны Bailey (1935a) и Gupta (1943). Например, следуя Бейли, имеем

$$\int_0^\infty J_\mu(bt)\,t^{\mu+1}\prod_{n=1}^m J_{\nu_n}\left(a_n\sqrt{t^2+z_n^2}\right)\left(t^2+z_n^2\right)^{-\nu_n/2}dt=0,$$

$$b>a_1+a_2+\ldots+a_m,\quad \operatorname{Re}\left(\nu_1+\ldots+\nu_m+\frac{m-1}{2}\right)>\operatorname{Re}\mu>-1, \tag{33}$$

$$\int_0^\infty J_\mu(bt)\,t^{\mu-1}\prod_{n=1}^m J_{\nu_n}\left(a_n\sqrt{t^2+z_n^2}\right)\left(t^2+z_n^2\right)^{-\nu_n/2}dt=$$

$$=2^{\mu-1}b^{-\mu}\,\Gamma(\mu)\prod_{n=1}^m z_n^{-\nu_n}J_{\nu_n}(z_na_n), \tag{34}$$

$$b>a_1+a_2+\ldots+a_m,\quad \operatorname{Re}\left(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m+\frac{m+3}{2}\right)>\operatorname{Re}\mu>0.$$

Другое обобщение формулы (32) было дано Сониным. Для того чтобы получить его, рассмотрим интеграл

$$\int_C\frac{z^{\rho-1}J_\mu\left(b\sqrt{z^2+\zeta^2}\right)H_\nu^{(1)}(\alpha z)}{(z^2+\zeta^2)^{\mu/2}(z^2-\alpha^2)^{m+1}}\,dz,$$

где m — положительное целое число, $\operatorname{Re}\alpha>0$ и C — контур, состоящий из двух полуокружностей $|z|=R$, $\operatorname{Im}z>0$ и $|z|=r$, $\operatorname{Im}z>0$ и из соединяющих их отрезков вещественной оси Если $a\geqslant b$, $\operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<(2m+4)+\operatorname{Re}\mu$, то при $R\to\infty$, $r\to0$ вклад полуокружностей в интеграл стремится к нулю. Разлагая подынтегральную функцию по возрастающим степеням $(z^2-\alpha^2)$, получаем, что вычет в полюсе $z^2=\alpha^2$ равен

$$\frac{2^{-m-1}}{m!}\left(\frac{d}{\alpha\,d\alpha}\right)^m\left[\frac{\alpha^{\rho-2}J_\mu\left(b\sqrt{\alpha^2+\zeta^2}\right)H_\nu^{(1)}(\alpha a)}{(\alpha^2+\zeta^2)^{\mu/2}}\right].$$

Из теоремы Коши о вычетах и 7.2 (16) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\rho-1}J_\mu\left(b\sqrt{t^2+\zeta^2}\right)}{(t^2+\zeta^2)^{\mu/2}(t^2-\alpha^2)^{m+1}}\left[H_\nu^{(1)}(at)+e^{i\pi(\rho-\nu)}H_\nu^{(2)}(at)\right]dt=$$

$$=\frac{\pi i}{m!}2^{-m}\left(\frac{d}{\alpha\,d\alpha}\right)^m\left[\frac{\alpha^{\rho-2}J_\mu\left(b\sqrt{\alpha^2+\zeta^2}\right)H_\nu^{(1)}(\alpha a)}{(\alpha^2+\zeta^2)^{\mu/2}}\right], \tag{35}$$

$$a>b,\ \operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<2m+4+\operatorname{Re}\mu,\quad \operatorname{Re}(i\alpha)<0,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Аналогичные формулы и частные случаи перечислены в 7.14 (46) — 7.14 (59).

7.7.6. **Формулы Макдональда и Никольсона.** Представления произведений функций Бесселя в виде несобственных интегралов были даны Макдональдом и Никольсоном. Формула Макдональда

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t}{2}-\frac{z^2+Z^2}{2t}\right)K_\nu\left(\frac{zZ}{t}\right)dt=2K_\nu(z)K_\nu(Z), \tag{36}$$

$$|\arg z|<\pi,\quad |\arg Z|<\pi,\quad |\arg(z+Z)|<\frac{\pi}{4},$$

является непосредственным следствием равенства

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t}{2}-\frac{x^2+X^2}{2t}\right)I_\nu\left(\frac{xX}{t}\right)dt=\begin{cases}2I_\nu(x)K_\nu(X)\\ 2K_\nu(x)I_\nu(X),\end{cases} \tag{37}$$

где соответственно $X>x$ или $X<x$. Мы докажем равенство (37) для положительных вещественных x и X. Отсюда, в силу 7.2 (13), вытекает формула (36) для положительных вещественных z, Z; распространение на комплексные z, Z выполняется с помощью аналитического продолжения. Полагая в формуле (25) $\alpha=x$, $\beta=X$, $\gamma^2=\frac{t}{2}$, получаем

$$I_\nu\left(\frac{xX}{t}\right)=t\exp\left(\frac{x^2+X^2}{2t}\right)\int\limits_0^\infty J_\nu(xv)J_\nu(Xv)e^{-\frac{tv^2}{2}}v\,dv. \tag{38}$$

Подставляя это выражение в (37), выводим, что

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{2}-\frac{x^2+X^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xX}{t}\right)\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty J_\nu(xv)\,J_\nu(Xv)\,v\,dv\int_0^\infty e^{-\frac{t(1+v^2)}{2}}\,dt=$$

$$=2\int_0^\infty J_\nu(xv)\,J_\nu(Xv)\,\frac{v\,dv}{1+v^2}.$$

В силу формулы 7.14 (57) отсюда вытекает равенство (37).

Формула Никольсона

$$K_\mu(z)\,K_\nu(z)=2\int_0^\infty K_{\nu+\mu}(2z\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt=$$

$$=2\int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}[(\mu+\nu)t]\,dt,\qquad \operatorname{Re}z>0, \tag{39}$$

может быть доказана следующим образом. Из 7.12 (21) следует

$$K_\nu(z)\,K_\mu(z)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}v)}\operatorname{ch}(\mu t)\operatorname{ch}(\nu v)\,dt\,dv.$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $t+v=2\zeta$, $t-v=2\eta$. После несложных преобразований получим

$$K_\nu(z)\,K_\mu(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\zeta\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\eta}\operatorname{ch}[(\mu+\nu)\zeta]\operatorname{ch}[(\mu-\nu)\eta]\,d\zeta\,d\eta.$$

В силу 7.12 (21) отсюда следует (39).

Другая формула, принадлежащая Никольсону, имеет вид (см. Ватсон, 1949, стр. 489)

$$[J_\nu(z)]^2+[Y_\nu(z)]^2=8\pi^{-2}\int_0^\infty K_0(2z\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(2\nu t)\,dt,\qquad \operatorname{Re}z>0. \tag{40}$$

Относительно аналогичных формул, в частности интегралов от произведений двух функций Бесселя, см. Ватсон (1949, стр. 482); Chaundy (1931); Dixon и Ferrar (1930, 1933); Meijer (1935, стр. 241, 1935b, 1936, 1936a, 1940, стр. 366). Относительно суммы и разности произведений двух функций Бесселя см. Buchholz (1939, 1947).

7.7.7. Интегралы от функций Бесселя по индексу. Рамануджану принадлежит следующая формула (Ватсон, 1949, стр. 494), справедливая при вещественных y и a, $b>0$, $\operatorname{Re}(\nu+\mu)>1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^{-\mu-x} J_{\mu+x}(a)\, b^{-\nu+x} J_{\nu-x}(b)\, e^{ixy}\, dx =$$

$$=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\left(2\cos\frac{y}{2}\right)^{\nu+\mu} e^{iy(\nu-\mu)}}{\left(a^2 e^{-\frac{iy}{2}}+b^2 e^{\frac{iy}{2}}\right)^{\nu+\mu}}}\, J_{\nu+\mu}\left[\sqrt{2\cos\frac{y}{2}\left(a^2 e^{-\frac{iy}{2}}+b^2 e^{\frac{iy}{2}}\right)}\right], & \text{если } |y|<\pi, \\ 0, & \text{если } |y|>\pi. \end{cases} \tag{41}$$

Она доказывается путем применения к 7.7 (12) формулы обращения преобразования Фурье.

Цилиндрические и сферические волновые функции могут быть соответственно выражены в виде

$$K_0\left(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_{ix}(a)\, K_{ix}(b)\, \operatorname{ch}[(\pi-\varphi)x]\, dx, \tag{42}$$

$$\frac{\exp\left(-ik\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\right)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}=$$

$$=-\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\int_0^{\infty} x e^{\pi x} H_{ix}^{(2)}(ka)\, H_{ix}^{(2)}(kb)\, \operatorname{th}(\pi x)\, P_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\varphi)\, dx, \quad \operatorname{Im} k\leqslant 0. \tag{43}$$

Равенство (42) вытекает из формулы Макдональда 7.7 (36), а равенство (43) — из теоремы о вычетах с использованием 7.15 (41) Формула (42) является частным случаем формулы Крама (Crum, 1940)

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{i(\xi+\eta)}(a)\, K_{i(\zeta+\eta)}(b)\, e^{(\pi-C)\eta}\, d\eta = K_{i(\xi-\zeta)}(c)\, e^{-\xi B-\zeta A}, \tag{44}$$

где A, B, C являются углами треугольника, длины сторон которого равны a, b, c

Другое обобщение формул (42) и (43) имеет вид

$$w^{-\nu} K_\nu(w)=\frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{1}{2}ab\right)^{-\nu}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu-\frac{1}{2}+ix}{\operatorname{ch}(\pi x)} K_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(a)\, I_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(b)\, C^{\nu}_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\varphi)\, dx, \tag{45}$$

$$w=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$$

$\left(\text{относительно определения } C^{\nu}_{-\frac{1}{2}+ix} \text{ см. п. 3.15}\right)$ Для доказательства формулы (45) надо использовать 7.6 (3) и теорему о вычетах.

Другие формулы имеют вид

$$\int_0^\infty K_{ix}(a)\cos(xy)\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a\,\operatorname{ch} y}, \tag{46}$$

$$\int_0^\infty K_{ix}(a)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(xy)\,dx = \frac{\pi}{2}\cos(a\operatorname{sh} y), \tag{47}$$

$$\int_0^\infty K_{ix}(a)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(xy)\,dx = \frac{\pi}{2}\sin(a\operatorname{sh} y). \tag{48}$$

Они могут быть соответственно выведены из формул 7.12 (21), 7.12 (25) и 7.12 (26). Относительно других результатов см. Ramanujan (1920, 1927, стр 200, 224, 229); Fox (1929); MacRobert (1931, 1937), Crum (1940).

7.8. Соотношения между функциями Бесселя и Лежандра

Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя могут быть выражены как предельные случаи функций Лежандра Заменим в выражениях 3.2 (14) и 3.4 (6) для функций Лежандра z на $\operatorname{ch}\frac{z}{\nu}$, а x — на $\cos\frac{x}{\nu}$ соответственно. Мы получим

$$P_\nu^{-\mu}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\nu}\right)\right]\Gamma(\mu+1) = \operatorname{th}^\mu\left(\frac{z}{2\nu}\right){}_2F_1\left[-\nu,\ 1+\nu,\ 1+\mu;\ -\operatorname{sh}^2\left(\frac{z}{2\nu}\right)\right],$$

$$\mathrm{P}_\nu^{-\mu}\left[\cos\left(\frac{x}{\nu}\right)\right]\Gamma(\mu+1) = \operatorname{tg}^\mu\left(\frac{x}{2\nu}\right){}_2F_1\left[-\nu,\ 1+\nu;\ 1+\mu;\ \sin^2\left(\frac{x}{2\nu}\right)\right].$$

Если теперь устремить ν к бесконечности и использовать 7.2 (12) и 7.2 (3), то получим

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\mu P_\nu^{-\mu}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\nu}\right)\right] = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\,{}_0F_1\left(\mu+1;\ \frac{z^2}{4}\right) = I_\mu(z), \tag{1}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\mu \mathrm{P}_\nu^{-\mu}\left[\cos\left(\frac{x}{\nu}\right)\right] = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\,{}_0F_1\left(\mu+1;\ -\frac{x^2}{4}\right) = J_\mu(x). \tag{2}$$

Аналогичное соотношение (см. Poole, 1934) может быть выведено из 3.2 (41). Оно имеет вид

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{Q_\nu^\mu(\mu/iz)\,e^{-i\mu\pi}}{\Gamma(\mu)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,ie^{i\nu\pi/2}(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,{}_0F_1\left(\nu+\frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{4}\right) = ie^{i\nu\pi/2}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \tag{3}$$

Соотношения, аналогичные (1) и (2), могут быть получены для функций Лежандра второго рода либо с помощью (1) и 3.3 (4), либо 2 и 3.4 (13). Эти соотношения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty} \nu^{-\mu} e^{-i\mu\pi} Q_\nu^\mu \left[\operatorname{ch}\left(\frac{z}{\nu}\right)\right] = K_\mu(z), \\ &\lim_{\nu\to\infty} \nu^{\mu} Q_\nu^{-\mu} \left[\cos\left(\frac{x}{\nu}\right)\right] = -\frac{\pi}{2} Y_\mu(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Перейдем теперь к некоторым интегральным соотношениям между функциями Бесселя и Лежандра Сравнивая гипергеометрический ряд в правой части равенства 7.7 (26) с формулой 3.2 (16), получаем

$$\Gamma(-\nu-\mu)\,\Gamma(\nu-\mu+1)\,P_\nu^\mu(z) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} \int_0^\infty e^{-tz} K_{\nu+\frac{1}{2}}(t)\, t^{-\mu-\frac{1}{2}}\,dt \tag{5}$$

$$\operatorname{Re} z > -1, \quad \operatorname{Re}(\nu-\mu+1) > 0, \quad \operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0.$$

Аналогично из 7.7 (16) и 3.2 (41) вытекает

$$Q_\nu^\mu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} e^{i\mu\pi} \int_0^\infty e^{-tz} I_{\nu+\frac{1}{2}}(t)\, t^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt, \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Применяя формулу Уиппла 3.3 (13) и 3.3 (14) к (5) и (6) соответственно, получаем следующие четыре интегральных представления:

$$\Gamma(\nu-\mu+1)\,Q_\nu^\mu(z) = \\ = e^{i\mu\pi}(z^2-1)^{-(\nu+1)/2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-tz}{\sqrt{z^2-1}}\right) K_\mu(t)\, t^\nu\,dt, \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}(\nu\pm\mu) > -1,$$

$$\Gamma(-\nu-\mu)\,P_\nu^\mu(z) = (z^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-tz}{\sqrt{z^2-1}}\right) I_{-\mu}(t)\, t^\nu\,dt, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0,$$

$$\Gamma(\nu+\mu+1)\,P_\nu^{-\mu}(z) = (z^2-1)^{-(\nu+1)/2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-tz}{\sqrt{z^2-1}}\right) I_\mu(t)\, t^\nu\,dt, \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,$$

$$\Gamma(\nu+\mu+1)\,\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \int_0^\infty e^{-t\cos\theta} J_\mu(t\sin\theta)\, t^\nu\,dt, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Равенство (9) вытекает из (8) с помощью 3.3 (1), а (10) следует из (9) с помощью 3.4 (1).

Простым примером представления функции Бесселя первого рода с помощью интеграла, содержащего функции Лежандра, является обобщение Гегенбауэра интеграла Пуассона

$$\frac{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\nu)\,i^{n}}{n!\,\Gamma(2\nu)}z^{-\nu}J_{\nu+n}(z)=$$

$$=\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\varphi}C_{n}^{\nu}(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi,\qquad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{11}$$

Оно может быть выведено из формулы Сонина 7.10 (5). Заменим γ на $\cos\varphi$, умножим обе части равенства на $C_{n}^{\nu}(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}$, почленно проинтегрируем по φ и используем 3.15 (17).

Аналогичная формула

$$\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,i^{n}(\sin\varphi)^{\nu-\frac{1}{2}}C_{n}^{\nu}(\cos\varphi)J_{\nu+n}(z)=$$

$$=\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\theta\cos\varphi}J_{\nu-\frac{1}{2}}(z\sin\theta\sin\varphi)\,C_{n}^{\nu}(\cos\theta)(\sin\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\theta, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\qquad |\arg z|<\pi,\qquad n=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

может быть выведена из теоремы сложения 7.15 (17). Относительно дальнейших формул такого типа см. Meijer (1934, 1938); MacRobert (1936, 1940); Bailey (1935a)

В заключение упомянем о контурном интеграле Уиттекера, который связан с интегралом Ганкеля 7.3 (8). Он имеет вид

$$\sqrt{\pi^{3}}\,J_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{z}{2}}\exp\left[-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{i\pi}{2}\right]\int_{\infty e^{i\delta}}^{(-1+,\,1+)}e^{izt}Q_{\nu-\frac{1}{2}}(t)\,dt, \tag{13}$$

$$-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg z<\frac{\pi}{2}+\delta,\qquad |\delta|<\frac{\pi}{2}.$$

Для доказательства этой формулы предположим, что контур целиком лежит вне окружности $|t|=1$; тогда мы можем разложить в формуле 3.2 (5) $Q_{\nu-\frac{1}{2}}(t)$ по убывающим степеням t и действовать далее так же, как в п. 7.3.

Из формулы (13) получаем соответствующее выражение для второй функции Ганкеля:

$$\sqrt{\pi^{3}}\,H_{\nu}^{(2)}(z)\cos(\nu\pi)=\sqrt{\frac{z}{2}}\exp\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{i\pi}{2}\right]\int_{\infty e^{-i\delta}}^{(-1+,\,1+)}e^{izt}P_{\nu-\frac{1}{2}}(t)\,dt, \tag{14}$$

$$-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg z<\frac{\pi}{2}+\delta,\qquad |\delta|<\frac{\pi}{2}.$$

Здесь при выводе используются 7.2 (6) и 3.3 (8).

Разложение функции Лежандра $P_\nu(\cos\theta)$ в ряд по функциям Бесселя

$$P_\nu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\theta)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^{-m}J_m\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \tag{15}$$

было дано Szegö (1933) Коэффициенты $a_m(\theta)$ являются элементарными функциями, регулярными в полосе $0\leqslant \operatorname{Re}\theta<\pi$ В частности, $a_0=1$, $a_1=2^{-3}(\operatorname{ctg}\theta-\theta^{-1})$ и т. д. Ряд (15) равномерно сходится в полосе $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ и

$$\theta_0=2(\sqrt{2}-1)\pi=(0{,}828\ldots)\pi$$

Эта формула может быть выведена следующим образом. Полагая в 7.10 (15) $s=1$, $z=\theta$, $\tau^2=1-\frac{t^2}{\theta^2}$ и $\nu=-\frac{1}{2}$, получаем

$$2\cos t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{1-m}}{m!}(\theta^2-t^2)^m\,\theta^{-m+\frac{1}{2}}J_{m-\frac{1}{2}}(\theta);$$

следовательно,

$$2(\cos t-\cos\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}(\theta^2-t^2)^m\frac{2^{1-m}}{m!}\theta^{\frac{1}{2}-m}J_{m-\frac{1}{2}}(\theta).$$

Если подставить это разложение в интеграл Мелера 3.7 (27), почленно проинтегрировать и использовать равенство 7.3 (3), получим формулу (15).

В упомянутой работе Szegö аналогичные разложения даны для $P_\nu(\operatorname{ch}\zeta)$, $Q_\nu(\cos\theta)$ и $Q_\nu(\operatorname{ch}\zeta)$, см. стр. 450 449 и 448 соответственно.

7.9. Нули функций Бесселя

Этот вопрос детально изложен в гл. XV книги Ватсона. Некоторые дальнейшие результаты были получены после опубликования книги Ватсона в 1922 году, но не помещены во второе издание. Здесь будут кратко изложены наиболее важные результаты.

Общие результаты. Из общих теорем о дифференциальных уравнениях (Айнс, 1941, гл X) вытекают следующие утверждения:

а) Любой нуль решений уравнений 7.2 (1) или 7.2 (11) является простым. Единственным исключением может быть точка $x=0$

б) Вещественные нули двух вещественных линейно независимых решений уравнения 7.2 (1) перемежаются друг с другом. Здесь вещественное решение определяется как $aJ_\nu(x)+bY_\nu(x)$, где a, b и ν вещественны, а x — положительное вещественное число.

Функции Бесселя первого рода. Для функций $J_\nu(z)$ могут быть доказаны следующие теоремы.

Нули функций $J_\nu(z)$ и $J'_\nu(z)$ при вещественных значениях ν расположены симметрично относительно осей координат.

При вещественном ν функция $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много вещественных нулей (Ватсон, 1949, стр. 526, Wilson, 1939).

Если $\gamma_{\nu,1}, \gamma_{\nu,2}, \ldots$ — положительные нули функции $J_\nu(x)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0<\gamma_{\nu,1}<\gamma_{\nu+1,1}<\gamma_{\nu,2}<\gamma_{\nu+1,2}<\gamma_{\nu,3}<\ldots,\quad \nu>-1$$

(Ватсон, 1949, стр. 528).

Если $\nu > -1$ и A, B, C, D — такие вещественные числа, что $AD - BC \neq 0$, то положительные нули функций $A J_\nu(x) + Bx J'_\nu(x)$ и $C J_\nu(x) + Dx J'_\nu(x)$ перемежаются друг с другом, и ни одна из функций такого вида не имеет кратного нуля, отличного от $x = 0$ (Ватсон, 1949 стр. 529).

Если A и B вещественны и $\nu > -1$, то функция

$$A J_\nu(x) + Bz J'_\nu(z)$$

имеет лишь вещественные нули, за исключением случая $\frac{A}{B} + \nu < 0$, когда она имеет два чисто мнимых нуля (Ватсон, 1949, стр. 53). Относительно асимптотической формулы для этих положительных нулей см. Moore (1920).

При $\nu > 1$ функция $J_{-\nu}(z)$ имеет бесконечно много вещественных нулей и $2[\nu]$ попарно сопряженных комплексных нулей. Если $[\nu]$ — нечетное целое число, то среди комплексных нулей есть два чисто мнимых (теорема Гурвица) (Относительно различных доказательств см. Ватсон, 1949, стр 532; Obreschkoff 1929; Polya, 1929, Falkenberg, 1932, Hille Szegö, 1943.)

Обобщение теоремы Гурвица, данное Хилбом (Hilb, 1922), утверждает, что если $[\nu]$ четно, главная ветвь функции

$$A J_\nu(z) + B J_{-\nu}(z) \quad (A,\ B \text{ — вещественные, } B \neq 0,\ \nu > 0)$$

имеет $[\nu]$ комплексных нулей с положительной вещественной частью; если же $[\nu]$ нечетно, то существует $[\nu] - 1$ либо $[\nu] + 1$ комплексных нулей с положительной вещественной частью, в зависимости от того, имеем ли мы $\frac{A}{B} > 0$ или $\frac{A}{B} < 0$.

Число нулей функций $z^{-\nu} J_\nu(z)$, лежащих между мнимой осью и прямой

$$\operatorname{Re} z = m\pi + \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \nu + \frac{1}{4}\right)\pi,$$

при достаточно больших значениях m равно m, и все нули функции $J_\nu(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < A_\nu$, где A_ν ограничено, если ν ограничено.

Пусть γ_ν, γ'_ν и γ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ и $J''_\nu(x)$ соответственно. Тогда мы имеем (Ватсон, 1949, стр. 535)

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \gamma_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)},$$

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \gamma'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)},$$

где $\nu > 0$, и

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \gamma''_\nu < \sqrt{\nu^2 - 1},$$

где $\nu > 1$. Относительно лучших оценок и результатов, касающихся следующих нулей см. Mayr (1935).

Формула

$$\gamma_\nu = \nu + 1855\,757\nu^{\frac{1}{3}} + 103315\nu^{-\frac{1}{3}} + O(\nu^{-1})$$

и аналогичные формулы для других нулей функций Бесселя первого и второго рода были получены Tricomi (1948). Относительно дальнейшей информации о нулях функций $J_\nu(x)$ и $J'_\nu(x)$ см. Bickley (1943); Bickley и Miller (1945); Gatteschi (1950); Olver (1950).

Siegel (1929) доказал что если ν — рациональное число и z — алгебраическое число, не равное нулю, то $J_\nu(z)$ не является алгебраическим числом. Из этой теоремы вытекает предположение Бурже, что $J_\nu(z)$ и $J_{\nu+m}(z)$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) не имеют общих нулей, за исключением точки $z = 0$ (Ватсон 1949, стр. 533).

Coulomb (1936) исследовал нули ν_n для $J_\nu(z)$, рассматриваемой как функция от ν при фиксированном z. Он показал, что если z — положительное вещественное число, то ν_n вещественны, просты и асимптотически близки к отрицательным целым числам (см. также Грей и Метьюз, 1953, стр. 114).

График функции $J_\nu(x)$ при фиксированном $\nu > -1$ и переменном $x \geqslant 0$ напоминает график затухающего колебания. Площади полуволн, лежащих выше и ниже оси, образуют убывающую последовательность (Cooke, 1937).

Теорема разложения для целых функций (Маркушевич А. И., 1950, стр. 520) приводит к представлению $z^{-\nu} J_\nu(z)$ в виде бесконечного произведения (Ватсон, 1949, стр. 548). Пусть ν — фиксированное число, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$ Рассмотрим нули функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ (они симметричны относительно вещественной оси), упорядочим их так, чтобы вещественные части образовывали неубывающую последовательность (если существуют нули, лежащие на мнимой оси то мы берем только нули с положительной мнимой частью). Обозначим эту последовательность через $\gamma_{\nu, n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Тогда мы имеем

$$\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\gamma_{\nu, n}^2}\right). \tag{1}$$

Аналогичное разложение для $J'_\nu(z)$ имеет вид (Buchholz, 1947)

$$2\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{1-\nu} J'_\nu(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(\gamma'_{\nu, n})^2}\right). \tag{2}$$

Здесь $\gamma'_{\nu, n}$ — последовательность, образованная из нулей функции $z^{1-\nu} J'_\nu(z)$ таким же образом, как последовательность $\gamma_{\nu, n}$ была образована из нулей функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$.

Образуя логарифмическую производную выражения (1) и используя 7.2 (51), получаем

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = -2z \sum_{n=1}^{\infty}\left(z^2 - \gamma_{\nu, n}^2\right)^{-1}. \tag{3}$$

Отсюда вытекает следующее разложение в степенной ряд, справедливое при $|z| < \gamma_\nu$:

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{2J_\nu(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n, \nu}\, z^{2n-1}, \tag{4}$$

где

$$S_{2l, \nu} = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{\nu, m}^{-2l}. \tag{5}$$

В частности,

$$S_{2,\nu}=\frac{1}{2^2(\nu+1)},\qquad S_{4,\nu}=\frac{1}{2^4(\nu+1)^2(\nu+2)}. \tag{6}$$

Относительно других аналогичных разложений и соотношений см. п. 7.15; Forsyth (1921); Buchholz (1947).

Функции Бесселя второго рода. Самым первым результатом относительно нулей функции Бесселя второго рода была теорема Шафхейтлина (Ватсон, 1949, стр. 531), согласно которой главная ветвь функции $Y_0(z)$ имеет в правой полуплоскости лишь вещественные нули. Этот результат обобщил Hilb (1922). Если $[\nu]$ — четное число, то $Y_\nu(z)$ имеет $[\nu]$ комплексных нулей в полуплоскости $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Если $[\nu]$ — нечетное число, то $Y_\nu(z)$ имеет $[\nu]-1$ или $[\nu]+1$ комплексных нулей в этой полуплоскости, в зависимости от того, имеем ли мы $\cos(\nu\pi)<0$ или $\cos(\nu\pi)>0$. Таким образом, функции $Y_{2n}(z)$ и $Y_{2n+1}(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ имеют $2n$ комплексных нулей в полуплоскости $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Все ветви функции $Y_n(z)$ (n — целое) имеют комплексные нули в левой полуплоскости, и все ветви, кроме главной, — в правой полуплоскости. Далее, $Y_\nu(z)$ имеет положительные вещественные нули лишь в случае, когда ν — рациональное, но не целое число. В этом случае $Y_\nu(z)$ имеет положительные вещественные нули на главной ветви, а другие вещественные нули могут быть лишь при условии, что ν — рациональное, но не целое число. При этом условии $Y_\nu(z)$ имеет вещественные нули лишь на ветвях, для которых $2m\nu$ в 7.11 (41) — целое число (Hillmann, 1949).

Относительно нулей линейных комбинаций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ см. Ватсон (1949, гл. XV); Hilb (1922); Hillmann (1949). Относительно теорем, аналогичных гипотезе Бурже, см. Banerjee (1936).

Относительно комбинаций произведения функций Бесселя первого и второго рода имеет место следующая теорема (Грей и Метьюз, 1953, стр. 107): если ν вещественно, а a и b положительны, то

$$J_\nu(ax)\,Y_\nu(bx)-J_\nu(bx)\,Y_\nu(ax)$$

является однозначной четной функцией от x, все нули которой вещественны и просты (см. также Янке — Эмде — Лёш, 1964, стр. 242; относительно аналогичных комбинаций см. Carslaw и Jaeger, 1940; Kline, 1949).

Функции Бесселя третьего рода. Исследование нулей главной ветви первой и второй функций Ганкеля при вещественных неотрицательных ν было проведено в работах Falkenberg, Hilb (1916) и Falkenberg (1932). Результаты таковы: $H_\nu^{(1)}(z)$, $\nu\geqslant 0$, не имеет нулей в полуплоскости $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$. При $\nu\geqslant 0$ нули функций $H_\nu^{(1)}$ в $-\pi<\arg z<0$ и $H_\nu^{(2)}$ в $0<\arg z<\pi$ симметрично расположены относительно мнимой оси.

Чисто мнимых нулей не существует, за исключением случаев, когда $\nu=(2k-1)+\frac{1}{2}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. В этом случае есть один такой нуль.

Полное число нулей функции $H_\nu^{(1),(2)}(z)$ на главной ветви равно

$$\begin{aligned}
&0, &&\text{если}\quad 0\leqslant\nu<\frac{3}{2},\\
&2k-1, &&\text{если}\quad \nu=(2k-1)+\frac{1}{2},\\
&2k, &&\text{если}\quad (2k-1)+\frac{1}{2}<\nu<2k+\frac{1}{2},\quad k=1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Теорема, аналогичная гипотезе Бурже, утверждает, что если ν вещественно, $\nu \geqslant -1$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$, то $H_\nu^{(1), (2)}(x)$ и $H_{\nu+m}^{(1), (2)}(x)$ не имеют общих нулей (Banerjee, 1935).

Модифицированные функции Бесселя третьего рода. Если $\nu \geqslant 0$, то $K_\nu(z)$ не имеет нулей, для которых $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Число нулей в области $|\arg z| < \pi$ является ближайшим четным числом к $\nu - \frac{1}{2}$, за исключением случая, когда $\nu - \frac{1}{2}$ — целое число. В последнем случае оно равно $\nu - \frac{1}{2}$ (Ватсон, 1949, стр. 562).

Если $\nu + 1$ — положительное вещественное число и m — положительное целое число, то $K_\nu(z)$ и $K_{\nu+m}(z)$ не имеют общих нулей.

Если $f(z)$ и $g(z)$ — заданные аналитические функции, не имеющие общих нулей и такие, что $\frac{g(z)}{f(z)}$ — мероморфная функция, причем $\operatorname{Re}\left[\frac{g(z)}{f(z)}\right] \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то функция

$$F(z) = f(z) K_\nu'(z) - g(z) K_\nu(z)$$

не имеет нулей в правой полуплоскости (Erdélyi и Kermack, 1945).

Все нули функций $K_\nu(z)$ и $I_\nu(az) K_\nu(bz) - K_\nu(az) I_\nu(bz)$, рассматриваемых как функции от ν, являются чисто мнимыми. Эти функции имеют бесконечно много нулей (Грей и Метьюз, 1953, стр 115); см. также Polya (1926) и Bruijn (1950) Функцией $G(z)$, соответствующей равенству (III) в работе Пойа, является $2K_{iz}(\lambda)$.

7.10. Представления произвольных функций в виде рядов и интегралов

7.10.1. Ряды Неймана. Рядом Неймана называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z). \tag{1}$$

Из разложения 7.2(2) очевидно, что радиус сходимости этого ряда совпадает с радиусом сходимости степенного ряда

$$\sum a_n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+n}}{\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Легко получить разложение в ряд Неймана для функции $f(z)$, представленной в виде степенного ряда. Для этого найдем сначала ряд Неймана для степени z:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu+2n}{n!} \Gamma(\nu+n) J_{\nu+2n}(z), \tag{2}$$

где ν не является целым отрицательным числом. Это разложение может быть проверено путем подстановки вместо $J_{\nu+n}(z)$ соответствующего степенного ряда, см. 7.2 (2), и последующей перегруппировки слагаемых в правой части по степеням z. При этом все коэффициенты, за исключением коэффициента при z^ν, обращаются в нуль

Пусть теперь

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l.$$

Заменяя каждую степень z ее рядом Неймана (2), получим

$$f(z)=z^{-\nu}\sum_{l=0}^{\infty} b_l 2^{l+\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\nu+l+2m}{m!}\Gamma(\nu+l+m)\,J_{\nu+l+m}(z).$$

Следовательно,

$$f(z)=z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z),$$

где

$$a_n=2^{\nu+n}(\nu+n)\sum_{s=0}^{\leqslant\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\nu+n-s)}{2^{2s}\,s!}\,b_{n-2s}. \tag{3}$$

Обратно, коэффициенты b_l можно выразить через a_n (Nielsen 1904, стр. 271) в виде

$$b_l\,\Gamma(\nu+l+1)=2^{-l-\nu}\sum_{m=0}^{\leqslant\frac{l}{2}}(-1)^m\binom{\nu+l}{m}a_{l-2m}. \tag{4}$$

Представляют интерес некоторые случаи, в которых для суммы (3) могут быть получены более простые выражения Например, положим

$$f(z)=e^{iz\gamma}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(i\gamma)^l}{l!}z^l.$$

Тогда из равенства (3) после некоторых преобразований получаем

$$a_n=i^n\gamma^n\frac{2^{\nu+n}}{n!}\Gamma(\nu+n+1)\,{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ 1-n-\nu;\ \gamma^{-2}\right).$$

Используя многочлены Гегенбауэра 3.15 (8), получаем формулу Сонина

$$z^\nu e^{i\gamma z}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty} i^n(\nu+n)\,C_n^\nu(\gamma)\,J_{\nu+n}(z),\quad \nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \tag{5}$$

Разложение функций Бесселя в ряд Неймана

$$\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^{\mu-\nu}J_\nu(\alpha z)\,\Gamma(\nu+1)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,{}_2F_1(-n,\ \mu+n;\ \nu+1;\ \alpha^2)\,\Gamma(\mu+n)(\mu+2n)\,J_{\mu+2n}(z) \tag{6}$$

легко может быть установлено аналогичным образом. разложим левую часть равенства (6) в степенной ряд по z и используем формулу (3). Таким же образом получаем ряд Неймана для функций Ломмеля 7.5 (69)

$$s_{\mu,\nu}(z)=2^{\mu+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu+1+2n)\,\Gamma(\mu+1+n)}{n!\,[(2n+1+\mu)^2-\nu^2]}\,J_{\mu+1+2n}(z). \tag{7}$$

Используя формулы 7.5 (82) — 7.5 (84), можно получить аналогичные выражения для функций Ангера, Вебера и Струве. Относительно дальнейших результатов ср. п. 7.15, Nielsen (1904, гл. XX); Ватсон (1949, гл. XVI); Boudoux (1945, 1946).

Теория разложений функций $f(x)$ вещественного переменного x в ряд Неймана основана на интегральной формуле (см. 7.14 (32))

$$\int_0^{\infty} t^{-1}J_{\nu+2n+1}(t)\,J_{\nu+2m+1}(t)\,dt=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ (4n+2\nu+2)^{-1}, & m=n,\quad \nu>-1.\end{cases}$$

Из нее мы получаем формально разложение

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2\nu+2+4n)\,J_{\nu+2n+1}(x)\int_0^{\infty}t^{-1}f(t)\,J_{\nu+2n+1}(t)\,dt,\quad \nu>-1. \tag{8}$$

Теорию этого разложения построил Wilkins (1948, 1950). Частный случай $\nu=0$ ранее рассматривали Webb, Kapteyn, Bateman (Ватсон, 1949, стр. 586); Korn (1931) и Титчмарш (1960, стр. 93). Относительно почленного интегрирования рядов Неймана см Харди (1926).

Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,J_{\mu+\frac{n}{2}}(z)\,J_{\nu+\frac{n}{2}}(z) \tag{9}$$

называются рядами Неймана второго рода. Если заменить здесь произведение двух функций Бесселя соответствующим степенным рядом по формуле 7.2 (48), то получим соотношение

$$z^{-\nu-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,J_{\mu+\frac{n}{2}}(z)\,J_{\nu+\frac{n}{2}}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^l, \tag{10}$$

где

$$\Gamma\left(\nu+1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1+\frac{n}{2}\right)b_l=2^{-l-\nu-\mu}\sum_{m=1}^{<\frac{l}{2}}(-1)^m\binom{l+\nu+\mu}{m}a_{l-2m} \tag{11}$$

и, следовательно, (Nielsen, 1904, стр. 292)

$$a_n=2^{\nu+\mu+n}(\nu+\mu+n)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{<\frac{n}{2}}2^{-2s}b_{n-2s}\frac{\Gamma(\nu+\mu+n-s)\,\Gamma\left(\nu+1-s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1-s+\frac{n}{2}\right)}{s!\,\Gamma(\nu+\mu+n-2s+1)} \tag{12}$$

при условии, что ни μ, ни ν, ни $\mu+\nu$ не являются целыми отрицательными числами. Формула (12) дает преобразование степенного ряда в ряд Неймана, и можно показать, что полученный таким образом ряд Неймана равномерно сходится внутри круга сходимости степенного ряда

Простым примером является разложение степени z. Из (12) легко получаем

$$\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu+\mu+2n}{\nu+\mu+n}\binom{\nu+\mu+n}{n}J_{\nu+n}(z)\,J_{\mu+n}(z). \tag{13}$$

(Относительно дальнейших результатов см. Nielsen, 1904, гл. XXI; Ватсон, 1949, стр. 578; Banerjee, 1939.) Относительно рядов, содержащих произведение любого числа функций Бесселя, см. Stevenson (1928).

Модифицированной формой рядов Неймана является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n J_{\nu+n}(z). \tag{14}$$

Из контурного интеграла, см. 7.3 (5), непосредственно вытекает следующее равенство:

$$(s^2-\tau^2)^{-\nu/2}J_\nu\left(z\sqrt{s^2-\tau^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\tau^2)^n}{2^n s^{\nu+n}n!}J_{\nu+n}(zs). \tag{15}$$

Полагая здесь $s=1$ и $\tau^2=1-\lambda^2$, получаем теорему умножения для функций Бесселя

$$J_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[z(1-\lambda^2)]^n}{2^n n!}J_{\nu+n}(z). \tag{16}$$

Отсюда, устремляя λ к нулю, выводим, что

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu=\Gamma(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n!}J_{\nu+n}(z). \tag{17}$$

Эта формула аналогична формуле (2).

Равенство (17) полезно для преобразования степенных рядов в ряды рассмотренного выше вида Мы имеем

$$\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{2l}=z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n J_{\nu+n}(z), \tag{18}$$

где

$$a_n=\sum_{s=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu+s+1)}{(n-s)!}2^{2s-n+\nu}b_s, \tag{19}$$

и, следовательно,

$$\Gamma(\nu+n+1)\,b_n=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{s!}2^{-\nu-n-s}a_{n-s} \tag{20}$$

(Nielsen, 1904, гл. XXI).

7.10.2 Ряды Каптейна. Ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z] \tag{21}$$

называют рядами Каптейна. Из неравенства (Ватсон, 1949, стр. 295)

$$|J_\alpha(\alpha z)| \leqslant \left(1+\left|\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\right|\right)\left|z^\alpha e^{\alpha\sqrt{1-z^2}}\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)^{-\alpha}\right| \tag{22}$$

очевидно, что ряд (21) сходится в области, в которой абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [w(z)]^n, \tag{23}$$

где

$$w(z) = \frac{ze^{\sqrt{1-z^2}}}{1+\sqrt{1-z^2}}. \tag{24}$$

Разложение степени z в ряд Каптейна

$$\left(\frac{z}{2}\right)^l = (\nu+l)^2\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+l+n)}{(\nu+l+2n)^{\nu+l+1} n!} J_{\nu+l+2n}(\nu+l+2n)z, \tag{25}$$

где ν не является целым положительным, может быть проверено путем замены каждой функции Бесселя в правой части равенства ее степенным рядом 7.2 (2). Ряд (25) сходится в области

$$|w(z)| < 1. \tag{26}$$

С помощью равенства (25) можно преобразовать степенные ряды в ряды Каптейна Заменив каждую степень z в разложении

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \tag{27}$$

соответствующим рядом Каптейна (25), мы получим, после некоторых преобразований,

$$f(z) = z^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z] \tag{28}$$

(ν не является положительным целым), где

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\leqslant \frac{n}{2}} (\nu+n-2s)^2 \Gamma(\nu+n-s)\left(\frac{\nu+n}{2}\right)^{2s-n-\nu-1}. \tag{29}$$

Ряд в (29) абсолютно сходится, если

$$|w(z)| < 1 \quad \text{и} \quad |w(z)| < |w(\rho)|,$$

где ρ — радиус сходимости ряда (27).

Рядом Каптейна второго рода называют ряд типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{\nu+n}{2}}\left[\frac{(\nu+\rho+2n)z}{2}\right] J_{\frac{\rho+n}{2}}\left[\frac{(\nu+\rho+2n)z}{2}\right]. \tag{30}$$

Можно показать (Nielsen, 1904, стр. 307), что

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\rho} = (\nu+\rho)\,\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\rho)\times \\ \times\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu+\rho+n-1}{n}(\nu+\rho+2n)^{-\nu-\rho-1}\times \\ \times J_{\nu+n}[(\nu+\rho+2n)z]\,J_{\rho+n}[(\nu+\rho+2n)z], \tag{31}$$

где ν, ρ, $\nu+\rho$ не являются целыми отрицательными числами

Далее, пусть

$$f(z)=\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l. \tag{32}$$

Тогда (Nielsen, 1904, стр. 308) мы имеем

$$f(z)=z^{-(\nu+\rho)/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\frac{\nu+n}{2}}\left[\frac{(\nu+\rho+2n)z}{2}\right] J_{\frac{\rho+n}{2}}\left[\frac{(\nu+\rho+n)z}{2}\right], \tag{33}$$

где

$$\left(\frac{\nu+\rho+n}{2}\right)^{(\nu+\rho+2n+2)/2} 2^{-(\nu+\rho+n)/2} a_n = \\ = \sum_{s=0}^{\leqslant \frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{\nu+\rho+2n-4s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n-2s+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+n-2s+2}{2}\right)}{\left(\frac{\nu+\rho+2n}{2}\right)^{-s}} \times \\ \times \binom{\frac{\nu+\rho+2n-2s-2}{2}}{s} b_{n-2s}. \tag{34}$$

Относительно дальнейших примеров и результатов см. Nielsen (1904, гл. XXII, XXIII); Ватсон (1949, гл. XVII); Bailey (1932); Budden (1926)

7.10.3. Ряд Шлемильха. Ряды вида

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx) \tag{35}$$

были изучены Шлемильхом. Имеет место теорема разложения для произвольной функции вещественного переменного x на отрезке $(0, \pi)$ (Грей и Метьюз, 1953, стр. 52; Ватсон, 1949, стр. 679).

Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, имеет на этом отрезке непрерывную производную с ограниченным изменением, то она может быть разложена в ряд вида (35), где

$$a_0 = 2f(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(v \sin \varphi)\, d\varphi\, dv, \tag{36}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v \cos(mv) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(v \sin \varphi)\, d\varphi\, dv. \tag{37}$$

Обобщенный ряд Шлемильха имеет вид

$$\sum [a_m J_\nu(mx) + b_m \mathbf{H}_\nu(mx)] \left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu}. \tag{38}$$

Теория таких разложений изложена в книгах: Ватсон (1949, гл. XIX) и Nielsen (1904, стр. 134). В работе Кука (Cooke, 1928) установленные в книге Ватсона результаты частично упрощены и обобщены. Теория основывается на формулах

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z \sin\theta)(\sin\theta)^{\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\, d\theta = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) z^{\nu-1} \sin z, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \tag{39}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{H}_\nu(z \sin\theta)(\sin\theta)^{\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\, d\theta = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) z^{\nu-1}(1 - \cos z), \quad -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \tag{40}$$

которые легко вывести из равенств 7.7 (5) и 7.7 (9), полагая в них $\mu = \nu$ и $\rho = -\nu - \frac{1}{2}$. Предположим, что имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m J_\nu(mx) + b_m \mathbf{H}_\nu(mx)] \left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu}, \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{41}$$

Заменим здесь x на $x \sin\theta$, умножим обе части на

$$(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu},$$

проинтегрируем по θ от нуля до $\frac{\pi}{2}$ и применим формулы (39) и (40). Тогда мы получим формально

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mx}\left[a_m\sin(mx)+b_m(1-\cos mx)\right].$$

Следовательно, для коэффициентов разложения (41) имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)a_m = \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(mt)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta\,dt, \quad (42)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)b_m = -\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(mt)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t\sin\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta\,dt. \quad (43)$$

Ряд (41) с коэффициентами (42), (43) называют рядом Шлемильха функции $f(x)$.

В упомянутой выше работе Кука доказано, что класс функций, для которых разложение (41) с коэффициентами (42) и (43) справедливо на всем отрезке, исключая 0, $\pm\pi$, совпадает с классом функций, к которым применима теория рядов Фурье. Далее, установлены теоремы, аналогичные теоремам Римана — Лебега, Парсеваля и Рисса — Фишера для рядов Фурье. В этой связи см. также Cooke (1927, 1929, 1930b, 1936); Wilton (1927); Jesmanowicz (1938); Wilkins (1950a).

Рассмотрим теперь некоторые простые примеры разложения Шлемильха (41). Положим $f(x) = (\alpha x)^{-\nu}\,\mathbf{H}_\nu(\alpha x)$ (α произвольно). Это — нечетная функция от x (см. 7.5 (55)); из формулы (41) мы имеем $a_m = 0$. Принимая во внимание равенство (40), мы получаем из (43)

$$\pi b_m = -\frac{(-1)^m 2^{-\nu+1} m}{m^2-\alpha^2}\sin(\alpha\pi)$$

и, таким образом,

$$\pi(\alpha x)^{-\nu}\,\mathbf{H}_\nu(\alpha x) = -2^{-\nu+1}\sin(\alpha\pi)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m}{m^2-\alpha^2}\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(mx). \quad (44)$$

Разделим обе части равенства (44) на $\sin(\alpha\pi)$ и устремим α к нулю. Мы получим (см. 7.5 (55))

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(mx) = 0, \quad (45)$$

$$0 < x < \pi, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}.$$

Пусть теперь $f(x)=(\alpha x)^{-\nu}J_\nu(\alpha x)$. Здесь $f(x)$ — четная функция от x, и, следовательно, $b_m=0$. Из равенств (42) и (39) получаем

$$\pi a_m = -\frac{(-1)^m 2^{-\nu+1}}{\alpha(m^2-\alpha^2)}\sin(\alpha\pi)\, m^2$$

и, таким образом,

$$\pi(\alpha x)^{-\nu}J_\nu(\alpha x) = -2^{-\nu+1}\alpha^{-1}\sin(\alpha\pi)\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m^2}{m^2-\alpha^2}\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(mx),\quad 0<x<\pi,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}. \tag{46}$$

Устремляя в равенстве (46) α к нулю, получаем

$$\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(mx)=0, \tag{47}$$
$$-\frac{1}{2}<\nu\leqslant\frac{1}{2}\quad \text{и}\quad 0<x<\pi\quad \text{или}\quad \nu>\frac{1}{2}\quad \text{и}\quad 0<x\leqslant\pi.$$

Из равенств (45) и (47) видно, что существуют сходящиеся обобщенные ряды Шлемильха с неравными нулю коэффициентами, сумма которых почти всюду равна нулю. Такие ряды называют нуль-рядами (Nielsen, 1904, гл. XXV; Fox, 1926; Cooke, 1930). Существование нуль-рядов указывает, что если даже существует разложение Шлемильха некоторой функции, оно не является единственным.

Относительно других результатов и примеров, касающихся рядов Шлемильха и связанных с ним рядов см. Pennell (1932); Bennet (1932); Doetsch (1935); Erdélyi (1937); Kober (1935); Watson (1931), Infeld (1947); Magnus и Oberhettinger (1948, стр. 58—62). Разложения, в которых функции Бесселя и Струве в (38) заменены их квадратами, даны в работе: Thielmann (1934).

7.10.4. **Ряды Фурье — Бесселя и Дини.** Пусть $\nu>-1$, а $x=\gamma_m$ и $x=\gamma_n$ — два положительных нуля функции $J_\nu(x)$ (в этом случае все нули функции $J_\nu(x)$ вещественны; см. п. 7.9). Используя 7.2 (56), получаем из 7.14 (9) и 7.14 (10) соответственно, что

$$\int_0^1 t\,J_\nu(\gamma_m t)\,J_\nu(\gamma_n t)\,dt=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \dfrac{[J_{\nu+1}(\gamma_m)]^2}{2}, & n=m.\end{cases} \tag{48}$$

Аналогично, если λ_m и λ_n означают два положительных нуля (см п. 7.9) функции $zJ'_\nu(z)+aJ_\nu(z)$, где $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ и a — данная константа, из формул 7.14 (9), 7.14 (10), 7.2 (54) и 7.2 (55) следует, что

$$\int_0^1 t\,J_\nu(\lambda_m t)\,J_\nu(\lambda_n t)\,dt=0,\qquad n\neq m,$$
$$=\frac{1}{2\lambda_m^2}\left\{\lambda_m^2\left[J'_\nu(\lambda_m)\right]^2+\left(\lambda_m^2-\nu^2\right)\left[J_\nu(\lambda_m)\right]^2\right\},\qquad n=m. \tag{49}$$

Интегральная формула (48) выражает свойство ортогональности функций Бесселя и указывает на то, что произвольную функцию $f(x)$ вещественного переменного x можно разложить в ряд

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\gamma_m x), \tag{50}$$

где

$$[J_{\nu+1}(\gamma_m)]^2\frac{a_m}{2}=\int_0^1 t f(t) J_\nu(\gamma_m t)\,dt \tag{51}$$

и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ — положительные нули функции $J_\nu(x)$, расположенные в порядке возрастания их величины. Это разложение называется разложением Фурье — Бесселя функции $f(x)$.

Аналогично из (49) мы имеем

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(\lambda_m x), \tag{52}$$

где

$$\left\{\lambda_m^2\left[J_\nu'(\lambda_m)\right]^2+\left(\lambda_m^2-\nu^2\right)\left[J_\nu(\lambda_m)\right]^2\right\} b_m=2\lambda_m^2\int_0^1 t J_\nu(\lambda_m t) f(t)\,dt. \tag{53}$$

Здесь $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — положительные нули функции $zJ_\nu'(z)+aJ_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины. Это разложение называют разложением Дини функции $f(x)$.

Теория разложений Фурье — Бесселя и Дини дана в книге Ватсона (1949, гл XVIII). Имеет место следующая теорема. Пусть функция $\sqrt{t}\,f(t)$ абсолютно интегрируема на отрезке $(0, 1)$, и пусть $\nu>-\frac{1}{2}$. Тогда, если $0<x<1$, то разложения (50) и (52) имеют место одновременно с соответствующими разложениями в обычный ряд Фурье (см. также Moore, 1911; Stone, 1927; MacRobert, 1931; Титчмарш, 1960, стр. 97) Относительно поведения около точек $x=1$ и $x=0$ см. Ватсон (1949, стр 652, 660, 674) и Young (1941) Относительно явления Гиббса см Cooke (1927); Wilton (1928); Moore (1930). Относительно рядов, аналогичных (50) и (52), но содержащих квадраты функций Бесселя, см. Thielmann (1934).

Пусть, например, $f(x)=x^\nu$, тогда мы получаем из (50), (53) и 7.7 (1)

$$x^\nu=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2J_\nu(\gamma_m x)}{\gamma_m J_{\nu+1}(\gamma_m)}, \qquad 0\leqslant x<1, \tag{54}$$

$$x^\nu=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\lambda_m J_\nu(\lambda_m x) J_{\nu+1}(\lambda_m)}{\left(\lambda_m^2-\nu^2\right)\left[J_\nu(\lambda_m)\right]^2+\lambda_m^2\left[J_\nu'(\lambda_m)\right]^2}, \tag{55}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad a+\nu>0.$$

Если $f(x)=J_\nu(xz)$, то мы получаем из 7.14 (9)

$$\frac{J_\nu(xz)}{J_\nu(z)}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_m J_\nu(\gamma_m x)}{\left(\gamma_m^2-z^2\right)J_{\nu+1}(\gamma_m)},\quad 0\leqslant x<1, \tag{56}$$

$$J_\nu(xz)=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^2 J_\nu(\lambda_m x)\left[\lambda_m J_{\nu+1}(\lambda_m)J_\nu(z)-zJ_\nu(\lambda_m)J_{\nu+1}(z)\right]}{\left(\lambda_m^2-z^2\right)\left\{\lambda_m^2\left[J'_\nu(\lambda_m)\right]^2+\left(\lambda_m^2-\nu^2\right)\left[J_\nu(\lambda_m)\right]^2\right\}},\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{57}$$

Относительно дальнейших примеров см. п. 7.15.

Разложение в ряды по функциям Бесселя, которые пригодны для положительных конечных отрезков, дано в работе: Titchmarsh (1923a, XIII – XVI) (см также MacRobert, 1931).

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a<x<b$ $(a>0)$. Тогда искомое разложение имеет вид

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\left[J_\nu(\gamma_m x)Y_\nu(\gamma_m b)-Y_\nu(\gamma_m x)J_\nu(\gamma_m b)\right]; \tag{58}$$

здесь $z=\gamma_m$ является m-м положительным корнем уравнения

$$J_\nu(az)Y_\nu(bz)-Y_\nu(az)J_\nu(bz)=0$$

и

$$\left\{\left[J_\nu(\gamma_m a)\right]^2-\left[J_\nu(\gamma_m b)\right]^2\right\}a_m=$$
$$=\frac{\pi^2}{2}\gamma_m^2\left[J_\nu(\gamma_m a)\right]^2\int_a^b\left[J_\nu(\gamma_m t)Y_\nu(\gamma_m b)-Y_\nu(\gamma_m t)J_\nu(\gamma_m b)\right]t f(t)\,dt. \tag{59}$$

Обобщенные ряды Дирихле. Ряды вида

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sqrt{\lambda_n s}\,K_\nu(\lambda_n s)$$

изучал Greenwood (1941). При $\nu=\frac{1}{2}$ они сводятся к рядам Дирихле

$$f(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Относительно различных теорем, касающихся этих рядов, см Greenwood (1941).

7.10.5. Интегральные представления произвольных функций. Теория рядов Шлемильха (см. п. 7.10.3) дает метод для выражения любой произвольной функции в виде ряда по функциям J_ν и $\mathbf{H}_\nu$. Аналогичные методы могут быть применены для того, чтобы получить соответствующие выражения произвольной функции в виде интеграла, содержащего функции Бесселя и связанные с ними функции. Мы будем в дальнейшем предполагать, что $f(t)$ является вещественной функцией вещественного переменного t, имеющей ограниченное изменение в окрестности точки $t=x$. Если функция $f(x)$ имеет разрыв при $t=x$, то в дальнейших формулах надо заменить $f(x)$ на $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. Условия на ν в некоторых из следующих формул разложения были ослаблены Cherry (1949a).

Простейшим типом такого разложения является интегральная формула Ганкеля

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(tx)\,t\,dt\int_0^\infty f(v)\,J_\nu(vt)\,v\,dv, \tag{60}$$

которая справедлива, если $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ и интеграл

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\,|f(t)|\,dt$$

сходится, или если $\nu>-1$ и сходятся интегралы

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\,|f(t)|\,dt,\qquad \int_0^1 t^{\nu+1}|f(t)|\,dt.$$

Теория разложения (60) детально изучена в книгах Ватсона (1949, гл. XIV), Титчмарша (1960, стр. 100) и Трикоми. В случае $\nu=\pm\frac{1}{2}$ разложение (60) сводится соответственно к синус- и косинус-преобразованию Фурье.

Обобщение интеграла Ганкеля было дано Харди (1925), который доказал формулу

$$f(x)=\int_0^\infty G_\nu(xt)\,t\,dt\int_0^\infty F_\nu(vt)\,v\,f(v)\,dv, \tag{61}$$

где

$$F_\nu(z)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2a+2m}}{\Gamma(a+m+1)\,\Gamma(a+m+\nu+1)}=\frac{2^{2-\nu-2a}s_{\nu+2a-1,\,\nu}(z)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\nu+a)}, \tag{62}$$

$$G_\nu(z)=\cos(a\pi)\,J_\nu(z)+\sin(a\pi)\,Y_\nu(z), \tag{63}$$

справедливую при следующих условиях (Cooke, 1925):

I. $a>-1,\ a+\nu>-1,\ \nu+2a<\frac{3}{2},\ |\nu|\leqslant\frac{3}{2}$.

II. $t^\sigma f(t)$ интегрируема на $(0,\delta)$, $\sigma=\min\left(1+\nu+2a,\ \frac{1}{2}\right)$, $\delta>0$.

III. $\sqrt{t}\,f(t)$ интегрируема на (δ,∞).

Теория разложения (61) дана Куком (Cooke, (1925).

Частные случаи формулы Харди Если $a=0$, то мы получаем $F_\nu(z)=J_\nu(z)$, $G_\nu(z)=J_\nu(z)$. Этот случай сводится к формуле Ганкеля (60). Если $a=\frac{1}{2}$, то получаем $F_\nu(z)=\mathbf{H}_\nu(z)$, $G_\nu(z)=Y_\nu(z)$. Это приводит к

$$f(x)=\int_0^\infty Y_\nu(xt)\,t\,dt\int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(vt)\,v\,f(v)\,dv. \tag{64}$$

Если $a = -\frac{1}{2}$, то получаем

$$f(x) = -\int_0^\infty Y_\nu(xt)\, t\, dt \int_0^\infty \left[\frac{(vt)^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} - \mathbf{H}_\nu(vt)\right] v f(v)\, dv \qquad (65)$$

Если $\nu = \frac{1}{2}$, то получаем

$$F_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, C_{2a+1}(z), \qquad G_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - a\pi),$$

где $C_{2a+1}(z)$ — функция Юнга 7.5 (85).

Формула Вебера — Орра

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{J_\nu(tx)\, Y_\nu(at) - J_\nu(at)\, Y_\nu(tx)}{[J_\nu(at)]^2 + [Y_\nu(at)]^2}\, t\, dt \times$$

$$\times \int_a^\infty [J_\nu(vt)\, Y_\nu(at) - Y_\nu(vt)\, J_\nu(at)]\, v f(v)\, dv \qquad (66)$$

справедлива, если ν вещественно и интеграл $\int_a^\infty \sqrt{t}\, |f(t)|\, dt$ сходится. Она сводится при $\nu = \pm\frac{1}{2}$ к синус-преобразованию Фурье (Titchmarsh, 1923; Ватсон, 1949, стр. 516).

Другая формула, принадлежащая Титчмаршу (1925), имеет вид

$$f(x) = \pi \int_0^\infty \Gamma_\nu(xt)\, t\, dt \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}\right) [t\, \Lambda_\nu(vt)]\, v f(v)\, dv, \qquad (67)$$

где

$$\Gamma_\nu(z) = \sin(a\pi)\, \{[J_\nu(z)]^2 - [Y_\nu(z)]^2\} - 2\cos(a\pi)\, J_\nu(z)\, Y_\nu(z), \qquad (68)$$

$$\Lambda_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\, \Gamma\left(\nu + m + a + \frac{1}{2}\right) z^{2\nu+2a+2m}}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(a+m+1)\, \Gamma(\nu+a+m+1)\, \Gamma(2\nu+a+m+1)}. \qquad (69)$$

Она справедлива при следующих условиях (Cooke, 1925).

$$a > -1, \quad a + 2\nu > -1, \quad 1 > a + \nu \geqslant -\frac{1}{2}, \quad |\nu| \leqslant 1,$$

$t^\sigma f(t)$ интегрируема на $(0, \delta)$, $\sigma = \min(1 + 2\nu + 2a, 1)$, $t f(t)$ интегрируема на (δ, ∞), $\delta > 0$. Теория разложения (67) дана Куком (Cooke, 1925).

Частными случаями формул (68) и (69) являются

$$a = 0, \qquad \Gamma_\nu(z) = -2 J_\nu(z)\, Y_\nu(z), \qquad \Lambda_\nu(z) = [J_\nu(z)]^2,$$

$$a = -\nu, \qquad \Lambda_\nu(z) = J_\nu(z)\, J_{-\nu}(z),$$

$$a = -2\nu, \qquad \Lambda_\nu(z) = [J_{-\nu}(z)]^2.$$

Обобщение интеграла Лапласа, содержащее функции Бесселя, дал Meijer (1940, стр. 599, 702):

$$f(x)=\frac{1}{i\pi}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} I_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt\int_0^\infty K_\nu(tv)\sqrt{tv}\,f(v)\,dv. \qquad (70)$$

Так как $K_\nu(z)=K_{-\nu}(z)$ (см. 7.2 (14)), имеем также

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}[I_\nu(xt)+I_{-\nu}(xt)]\sqrt{xt}\,dt\int_0^\infty K_\nu(vt)\sqrt{vt}\,f(v)\,dv \qquad (71)$$

(см. Boas, 1942). В случае $\nu=\pm\frac{1}{2}$ формула (71) сводится к формуле Лапласа.

Другими интегральными представлениями произвольной функции являются

$$f(x)=-\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty} t\,J_t(x)\,dt\int_0^\infty H_t^{(2)}(v)\,f(v)\frac{dv}{v} \qquad (72)$$

(Конторович и Лебедев, 1938),

$$f(x)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(x+t)/2}K_{i(x+t)}(a)\,dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(t+v)/2}K_{i(t+v)}(a)\,f(v)\,dv,\quad a>0 \qquad (73)$$

(Crum, 1940),

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_{it}(e^x)+J_{-it}(e^x)}{\operatorname{sh}(\pi t)}\,t\,dt\int_{-\infty}^{\infty}[J_{it}(e^v)+J_{-it}(e^v)]\,f(v)\,dv \qquad (74)$$

(Титчмарш, 1946, стр. 83),

$$xf(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty K_{it}(x)\,t\operatorname{sh}(\pi t)\,dt\int_0^\infty K_{it}(v)\,f(v)\,dv \qquad (75)$$

(Лебедев, 1946),

$$f(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} tK_t(x)\,dt\int_0^\infty v^{-1}f(v)\,I_t(v)\,dv \qquad (76)$$

(Лебедев 1947). Относительно других примеров см. Hardy (1927) и Hardy и Titchmarsh (1933).

Дуальные интегральные уравнения, содержащие функции Бесселя. В некоторых задачах теории потенциала и теории электромагнитных и акустических волн искомая функция удовлетворяет одному интегральному уравнению на части луча $(0, \infty)$ и иному интегральному уравнению на другой части этого луча (Nicholson, 1924; King, 1935, 1936; Sommerfeld, 1943). Пара уравнений (Титчмарш, 1948, стр. 337; Busbridge, 1938)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y^\alpha f(y)\, J_\nu(xy)\, dy = g(x), \quad 0 < x < 1, \\ &\int_0^\infty f(y)\, J_\nu(xy)\, dy = 0, \qquad\qquad x > 1, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

имеет при $\alpha > 0$ решение

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) f(x) = (2x)^{1-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 t^{1+\frac{\alpha}{2}} J_{\nu+\frac{\alpha}{2}}(xt)\, dt \int_0^1 g(vt)\, v^{\nu+1} (1-v^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} dv. \tag{78}$$

В частном случае $\alpha = 1$, $\nu = 1$, $g(x) = 1$ имеем решение

$$\frac{\pi}{2} f(x) = x^{-2} \sin x - x^{-1} \cos x$$

Пара уравнений (Tranter, 1951)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty y\, \Phi(y)\, J_\nu(xy)\, dy = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ &\int_0^\infty \Phi(y)\, J_\nu(xy)\, dy = F(x), \qquad x > 1, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

имеет решение

$$\Phi(y) = H(y) + \sqrt{\frac{\pi y}{2}} \int_0^1 t^{\nu+\frac{1}{2}} L(t)\, J_{\nu+\frac{1}{2}}(ty)\, dt, \tag{80}$$

где

$$H(y) = F(1)\, J_{\nu+1}(y) + y \int_1^\infty x F(x)\, J_\nu(xy)\, dx, \tag{81}$$

$$L(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right) t^{-2\nu} \int_0^t \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \left[f(x) - \int_0^\infty y H(y)\, J_\nu(xy)\, dy \right] dx. \tag{82}$$

Решением уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \Phi(y)\, J_\nu(xy)\, dy = G(x), \quad 0 < x < 1, \\ &\int_0^\infty y\, \Phi(y)\, J_\nu(xy)\, dy = g(x), \qquad x > 1, \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

является

$$\Phi(y) = K(y) + \sqrt{\frac{\pi y}{2}} \int_0^1 t^{\nu+\frac{1}{2}} \xi(t)\, J_{\nu-\frac{1}{2}}(ty)\, dt, \tag{84}$$

где

$$K(y) = \int_1^\infty x\, g(x)\, J_\nu(xy)\, dx, \tag{85}$$

$$\frac{\pi}{2} t^{2\nu} \xi(t) = M(0) + t \int_0^t (t^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} M'(x)\, dx, \tag{86}$$

$$M(x) = x^\nu G(x) - x^\nu \int_0^\infty K(y)\, J_\nu(xy)\, dy. \tag{87}$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ФОРМУЛЫ

7.11. Элементарные соотношения и различные формулы

Сферические функции Бесселя. В формулах (1) — (13) $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}} (-1)^m \left(n + \frac{1}{2}, 2m\right) (2z)^{-2m} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{m=0}^{<\frac{n-1}{2}} (-1)^m \left(n + \frac{1}{2}, 2m+1\right) (2z)^{-2m-1} \right], \tag{1}$$

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{m=0}^{<\frac{n-1}{2}} (-1)^m \left(n + \frac{1}{2}, 2m+1\right) (2z)^{-2m-1} - \right.$$

$$\left. - \cos\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{m=0}^{<\frac{n}{2}} (-1)^m \left(n + \frac{1}{2}, 2m\right) (2z)^{-2m} \right], \tag{2}$$

$$H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i^{-n-1} e^{iz} \sum_{m=0}^{n} i^m \left(n + \frac{1}{2}, m\right) (2z)^{-m}, \tag{3}$$

$$H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i^{n+1} e^{-iz} \sum_{m=0}^{n} (-i)^m \left(n + \frac{1}{2}, m\right) (2z)^{-m}, \tag{4}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n+1}Y_{n+\frac{1}{2}}(z);\quad Y_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z), \tag{5}$$

$$H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^n H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z);\quad H^{(2)}_{-n-\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z), \tag{6}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{\sin z}{z}, \tag{7}$$

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z)=-(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{\cos z}{z}, \tag{8}$$

$$H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{iz}}{z}, \tag{9}$$

$$H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-iz}}{z}, \tag{10}$$

$$\psi_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n z^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{\sin z}{z}, \tag{11}$$

$$\zeta^{(1)}_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^n z^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{iz}}{z}, \tag{12}$$

$$\zeta^{(2)}_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^n z^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-iz}}{z}. \tag{13}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=Y_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \tag{14}$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(z)=-J_{-\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \tag{15}$$

$$I_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\operatorname{sh} z, \tag{16}$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=-iH^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}, \tag{17}$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=iH^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z)=i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}. \tag{18}$$

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для модифицированных функций Бесселя.

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m[z^\nu I_\nu(z)]=z^{\nu-m}I_{\nu-m}(z), \tag{19}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m[z^{-\nu} I_\nu(z)]=z^{-\nu-m}I_{\nu+m}(z), \tag{20}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^\nu K_\nu(z)] = (-1)^m z^{\nu-m} K_{\nu-m}(z). \tag{21}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^{-\nu} K_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} K_{\nu+m}(z), \tag{22}$$

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1} I_\nu(z), \tag{23}$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \tag{24}$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -2\nu z^{-1} K_\nu(z), \tag{25}$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z). \tag{26}$$

Вронскианы и соответетствующие формулы.

$$W(w_1, w_2) = w_1 w'_2 - w'_1 w_2,$$

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2}{\pi z}\sin(\nu\pi), \tag{27}$$

$$W(J_\nu, Y_\nu) = \frac{2}{\pi z}, \tag{28}$$

$$W\left(J_\nu, H_\nu^{(1),(2)}\right) = \pm\frac{2i}{\pi z}, \tag{29}$$

$$W\left(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\right) = -\frac{4i}{\pi z}, \tag{30}$$

$$W(I_\nu, I_{-\nu}) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}, \tag{31}$$

$$W(I_\nu, K_\nu) = -z^{-1}, \tag{32}$$

$$J_\nu(z) J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}, \tag{33}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) H_{\nu-1}^{(2)}(z) - H_{\nu-1}^{(1)}(z) H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z}, \tag{34}$$

$$J_\nu(z) Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{35}$$

$$J_{\nu-1}(z) H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z) H_{\nu-1}^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi i z}, \tag{36}$$

$$J_\nu(z) H_{\nu-1}^{(2)}(z) - J_{\nu-1}(z) H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi i z}, \tag{37}$$

$$I_\nu(z) I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z) I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}, \tag{38}$$

$$K_{\nu+1}(z) I_\nu(z) + K_\nu(z) I_{\nu+1}(z) = z^{-1}. \tag{39}$$

Функции переменного $ze^{i\pi m}$ (m — целое).

$$J_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\pi\nu} J_\nu(z), \tag{40}$$

$$Y_\nu(ze^{im\pi}) = e^{-im\pi\nu} Y_\nu(z) + 2i\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\nu\pi)}\cos(\pi\nu) J_\nu(z), \tag{41}$$

$$H_\nu^{(1)}(ze^{im\pi}) = -\frac{\sin[(m-1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)} H_\nu^{(1)}(z) - e^{-i\pi\nu}\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} H_\nu^{(2)}(z), \tag{42}$$

$$H_\nu^{(2)}(ze^{im\pi}) = \frac{\sin[(m+1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)} H_\nu^{(2)}(z) + e^{i\pi\nu}\frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} H_\nu^{(1)}(z), \tag{43}$$

$$I_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\pi\nu} I_\nu(z), \tag{44}$$

$$K_\nu(ze^{im\pi}) = e^{-im\pi\nu} K_\nu(z) - i\pi \frac{\sin(m\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} I_\nu(z). \tag{45}$$

Если ν — целое число, равное n, то

$$\lim_{\nu\to n} \frac{\sin(l\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} = l(-1)^{n(l+1)},$$

где l соответственно равно $m-1$, m или $m+1$.

7.12. Интегральные представления

Коэффициенты Бесселя.

$$\pi J_n(z) = \int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi, \tag{1}$$

$$\pi J_n(z) = i^{-n}\int_0^\pi e^{iz\cos\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi, \tag{2}$$

$$\pi J_{2n}(z) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi, \tag{3}$$

$$\pi J_{2n+1}(z) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\varphi)\sin[(2n+1)\varphi]\,d\varphi. \tag{4}$$

В формулах (1) — (4) $n = 0, 1, 2, \ldots$

Интеграл Пуассона.

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{iz\sin\varphi}(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \tag{7}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt, \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \tag{9}$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt. \tag{10}$$

В формулах (5) — (10) $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$.

Формула Гейне.

$$\pi Y_\nu(z) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\left\{ i\int_0^{\pi} e^{-iz\cos t}\cos(\nu t)\,dt - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\infty} e^{iz\operatorname{ch} t}\left[\operatorname{ch}(\nu t - i\nu\pi) + e^{-i\nu\pi}\operatorname{ch}(\nu t)\right]dt \right\}, \qquad 0 < \arg z < \pi. \tag{11}$$

Формулы Мелера — Сонина.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\int_1^{\infty}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin(xt)\,dt, \tag{12}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)Y_\nu(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\int_1^{\infty}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos(xt)\,dt. \tag{13}$$

В обеих формулах $x > 0$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$.

$$\pi J_\nu(x) = 2\int_0^{\infty}\sin\left(x\operatorname{ch} t - \frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt, \tag{14}$$

$$\pi Y_\nu(x) = -2\int_0^{\infty}\cos\left(x\operatorname{ch} t - \frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt. \tag{15}$$

В формулах (14) и (15) $x > 0$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$.

$$\pi J_\nu(x) = \int_0^{\infty} e^{-\nu t}\sin\left(x\operatorname{ch} t - \frac{\nu\pi}{2}\right)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t - \nu t)\,dt, \tag{16}$$

$$x > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Обобщения интегралов Шлефли (Lambe, 1931):

$$\pi\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)=\int_0^\pi e^{y\cos t}\cos(x\sin t-\nu t)\,dt-$$
$$-\sin(\nu\pi)\int_0^\infty e^{-\nu t}e^{-y\operatorname{ch}t-x\operatorname{sh}t}\,dt,\quad \operatorname{Re}(x+y)>0,\tag{17}$$

$$\pi\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\nu}{2}} Y_\nu\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)=\int_0^\pi e^{y\cos t}\sin(x\sin t-\nu t)\,dt-$$
$$-\int_0^\infty\left(e^{\nu t+y\operatorname{ch}t}+e^{-\nu t-y\operatorname{ch}t}\cos\nu\pi\right)e^{-x\operatorname{sh}t}\,dt,\quad \operatorname{Re}x>\operatorname{Re}y>0.\tag{18}$$

Модифицированные функции Ганкеля.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)K_\nu(z)=\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-zt}\left(t^2-1\right)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt,\tag{19}$$
$$\operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)K_\nu(z)=\sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}(\operatorname{sh}t)^{2\nu}\,dt,\tag{20}$$
$$\operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},$$

$$K_\nu(z)=\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}(\nu t)\,dt,\quad \operatorname{Re}z>0,\tag{21}$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,z^\nu e^{-z}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt,\tag{22}$$
$$\operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},$$

$$K_\nu(\alpha z)=\frac{\alpha^\nu}{2}\int_0^\infty\exp\left[-\left(t-\frac{\alpha^2}{t}\right)\Big/2\right]t^{-\nu-1}\,dt,\quad \operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Re}(\alpha^2 z)>0,\tag{23}$$

$$K_\nu(\alpha z)=e^{\frac{i\nu\pi}{2}}\frac{\alpha^\nu}{2}\int_0^\infty\exp\left[\left(t-\frac{\alpha^2}{t}\right)\frac{iz}{2}\right]t^{-\nu-1}\,dt,\tag{24}$$
$$\operatorname{Im}z>0,\quad \operatorname{Im}(\alpha^2 z)>0,$$

$$K_\nu(x)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)=\int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t)\operatorname{ch}(\nu t)\,dt, \tag{25}$$

$$K_\nu(x)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)=\int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} t)\operatorname{sh}(\nu t)\,dt. \tag{26}$$

В формулах (25) и (26) $x>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<1$.

$$K_\nu(z)=\frac{(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty (t^2+z^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos t\,dt, \tag{27}$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}.$$

Функции Ганкеля.

$$i\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)H_\nu^{(1)}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\int_1^\infty e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \tag{28}$$

$$\operatorname{Im} z>0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},$$

$$-i\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)H_\nu^{2}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dt, \tag{29}$$

$$\operatorname{Im} z<0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},$$

$$i\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)H_\nu^{(1)}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\int_0^\infty t^{-2\nu}\frac{e^{iz\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \tag{30}$$

$$\operatorname{Im} z>0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},$$

$$-i\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)H_\nu^{(2)}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu\int_0^\infty t^{-2\nu}\frac{e^{-iz\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \tag{31}$$

$$\operatorname{Im} z<0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}}\int_0^{\infty e^{i\delta}} e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt, \tag{32}$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad |\delta|<\frac{\pi}{2},\quad \delta-\frac{\pi}{2}<\arg z<\delta+\frac{3\pi}{2},$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}}\int_0^{\infty e^{i\delta}} e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt, \tag{33}$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad |\delta|<\frac{\pi}{2},\quad -\frac{3\pi}{2}+\delta<\arg z<\frac{\pi}{2}+\delta.$$

Представления Бернса.

$$2\pi^2 H_\nu^{(1)}(z) = -e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \int\limits_{-C-i\infty}^{-C+i\infty} \Gamma(-\nu-s)\,\Gamma(-s)\left(-\frac{iz}{2}\right)^{\nu+2s} ds, \tag{34}$$

$$|\arg(-iz)| < \frac{\pi}{2},$$

$$2\pi^2 H_\nu^{(2)}(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \int\limits_{-C-i\infty}^{-C+i\infty} \Gamma(-\nu-s)\,\Gamma(-s)\left(\frac{iz}{2}\right)^{\nu+2s} ds, \tag{35}$$

$$|\arg(iz)| < \frac{\pi}{2};$$

C — любое положительное число, большее, чем $\operatorname{Re}\nu$.

$$2\pi i J_\nu(x) = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\,[\Gamma(\nu+s+1)]^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} ds, \quad x>0, \quad \operatorname{Re}\nu>0, \tag{36}$$

$$\sqrt{\pi^5}\, H_\nu^{(1)}(z) = -e^{i(z-\nu\pi)}\cos(\nu\pi)\,(2z)^\nu \times$$
$$\times \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\,\Gamma(-2\nu-s)\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(-2iz)^s\, ds; \tag{37}$$

$|\arg(-iz)| < \frac{3\pi}{2}$, 2ν не является нечетным целым числом.

$$\sqrt{\pi^5}\, H_\nu^{(2)}(z) = e^{-i(z-\nu\pi)}\cos(\nu\pi)\,(2z)^\nu \times$$
$$\times \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\,\Gamma(-2\nu-s)\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(2iz)^s\, ds; \tag{38}$$

$|\arg(iz)| < \frac{3\pi}{2}$, 2ν не является нечетным целым числом.

$$2\pi^2 i K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\cos(\nu\pi) \times$$
$$\times \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-s-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\nu\right)(2z)^s\, ds; \tag{39}$$

$|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$, 2ν не является нечетным целым числом.

Интегралы, выражаемые через функции, связанные с функциями Бесселя.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\, d\varphi = \pi\left[4\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]^{-1}[\mathbf{J}_\nu(z) + \mathbf{J}_{-\nu}(z)] =$$
$$= -\nu\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) s_{-1,\nu}(z) = \pi\left[4\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]^{-1}[\mathbf{E}_\nu(z) - \mathbf{E}_{-\nu}(z)]. \tag{40}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \pi\left[4\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]^{-1}[\mathbf{J}_\nu(z) - \mathbf{J}_{-\nu}(z)] =$$
$$= \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)s_{0,\nu}(z) = -\pi\left[4\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]^{-1}[\mathbf{E}_\nu(z) + \mathbf{E}_{-\nu}(z)], \tag{41}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = -\nu\sin(\nu\pi)\,s_{-1,\nu}(z), \tag{42}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi = -\nu(1-\cos\nu\pi)\,s_{-1,\nu}(z), \tag{43}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(z\sin\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi = \sin(\nu\pi)\,s_{0,\nu}(z), \tag{44}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(z\sin\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = (1+\cos\nu\pi)\,s_{0,\nu}(z), \tag{45}$$

$$\int_0^{\infty} e^{nt - z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt = \frac{1}{2}[S_n(z) - \pi\,\mathbf{E}_n(z) - \pi Y_n(z)], \tag{46}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-nt - z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}[S_n(z) + \pi\,\mathbf{E}_n(z) + \pi Y_n(z)], \tag{47}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$S_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu}\int_0^{\infty} e^{-tz}\,{}_2F_1\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}; \frac{1}{2}; -t^2\right)dt, \tag{48}$$
$$\operatorname{Re} z > 0,$$

$$S_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu+1}\int_0^{\infty} t\,e^{-tz}\,{}_2F_1\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}; \frac{3}{2}; -t^2\right)dt, \tag{49}$$
$$\operatorname{Re} z > 0,$$

$$S_{0,\nu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu t)\,dt, \tag{50}$$

$$\nu S_{0,\nu}(z) = z\int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{sh}(\nu t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt, \tag{51}$$

$$S_{1,\nu}(z) = z\int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt; \tag{52}$$

в формулах (50) — (52) $\operatorname{Re} z > 0$.

7.13. Асимптотические разложения

7.13.1. Большое значение переменного.

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(4z-2\nu\pi-\pi)/4}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,\, m)(-2iz)^{-m}+O(|z|^{-M})\right], \tag{1}$$

$$-\pi<\arg z<2\pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(4z-2\nu\pi-\pi)/4}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu,\, m)(2iz)^{-m}+O(|z|^{-M})\right], \tag{2}$$

$$-2\pi<\arg z<\pi.$$

Относительно оценки M-го остаточного члена для комплексных ν

$$\text{при}\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\ \text{и при}\ -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$$

см. Ватсон (1949, стр 246). Эти результаты были распространены на области $-\pi<\arg z<2\pi$ и $-2\pi<\arg z<\pi$ Мейером (Meijer, 1932, стр. 656, 852, 948, 1079) Относительно асимптотического поведения функций, выражаемых в виде бесконечных рядов функций Ганкеля, см Meixner (1949).

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m)(2z)^{-2m}+O(|z|)^{-2M}\right]-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m+1)(2z)^{-2m-1}+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\}, \tag{3}$$

$$-\pi<\arg z<\pi,$$

$$Y_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m)(2z)^{-2m}+O(|z|^{-2M})\right]+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{4z-2\nu\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu,2m+1)(2z)^{-2m-1}+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\}, \tag{4}$$

$$-\pi<\arg z<\pi.$$

Относительно формулы для M-го остаточного члена см. Ватсон (1949, стр. 229, 233) и в случае комплексного ν — Meijer (1932), ссылка выше.

Дальнейшие формулы имеются в работе Burnett (1929).

$$I_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\left\{e^z\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, m)(2z)^{-m} + O(|z|^{-M})\right] + \right.$$

$$\left. + ie^{-z+i\nu\pi}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu, m)(2z)^{-m} + O(|z|^{-M})\right]\right\}, \tag{5}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2},$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2z\pi^3}}\cos(\pi\nu)\left\{\sum_{m=0}^{M-1}[e^z - i(-1)^m e^{-i\pi\nu-z}]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+\nu\right)}{(2z)^m\, m!} + e^z O(|z|^{-M})\right\}, \tag{6}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2},$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu, m)(2z)^{-m} + O(|z|^{-M})\right], \tag{7}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

В этих формулах положено

$$(\nu, m) = \frac{1}{2^{2m}\, m!}(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2] = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}.$$

7.13.2. Большое значение порядка.

$$2\pi I_p(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p^2+x^2}}\exp\left(\sqrt{p^2+x^2} - p\,\mathrm{Arsh}\,\frac{p}{x}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-2)^m a_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2+x^2)^{-m}} + O(x^{-M})\right], \quad p,\ x > 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1}, \\ &a_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1} + \frac{385}{3456}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{-2}, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Относительно других разложений $I_p(x)$ см. Lehmer (1944); Montroll (1946).

$$K_p(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{4(p^2+x^2)}}\exp\left(-\sqrt{p^2+x^2}+p\operatorname{Arsh}\frac{p}{x}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m a_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2+x^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right],\qquad(10)$$

$p,\ x>0$, a_m определено в (9),

$$\pi H_p^{(1)}x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x^2-p^2}}\exp\left(i\sqrt{x^2-p^2}+ip\arcsin\frac{p}{x}\right)\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(-i)^m\sqrt{(x^2-p^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right],\qquad(11)$$

$x>p>0$,

$$\left.\begin{aligned}b_0=1,\quad b_1&=\frac{1}{8}-\frac{5}{24}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1},\\ b_2=\frac{3}{128}-\frac{77}{576}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^{-1}&+\frac{385}{3456}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right)^{-2}\ \ldots,\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

$$\pi H_p^{(1)}(x)=-i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(p^2-x^2)}}\exp\left(-\sqrt{p^2-x^2}+p\operatorname{Arch}\frac{p}{x}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m 2^m b_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2-x^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right],\qquad(13)$$

$p>x>0$, b_m определено в (12),

$$2\pi J_p(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(p^2-x^2)}}\exp\left(\sqrt{p^2-x^2}-p\operatorname{Arsh}\frac{p}{x}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2-x^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right],\qquad(14)$$

$p>x>0$, b_m определено в (12),

$$\pi H_p^{(1)}(x)\sim-\frac{2}{3}\sum_{m=0}^{\infty}e^{2(m+1)\pi i/3}B_m(\varepsilon x)\sin\left[(m+1)\frac{\pi}{3}\right]\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)\left(\frac{x}{6}\right)^{-(m+1)/3},\qquad(15)$$

$p\approx x,\quad p,\ x>0,\quad \varepsilon=1-\frac{p}{x},\quad \varepsilon=o\left(x^{-\frac{2}{3}}\right),$

$$\left.\begin{aligned} &B_0(\varepsilon x)=1, \quad B_1(\varepsilon x)=\varepsilon x, \quad B_2(\varepsilon x)=\frac{1}{2}(\varepsilon x)^2-\frac{1}{20},\\ &B_3(\varepsilon x)=\frac{1}{6}(\varepsilon x)^3-\frac{1}{15}\varepsilon x, \quad B_4(\varepsilon x)=\frac{1}{24}(\varepsilon x)^4-\frac{1}{24}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{280},\\ &B_5(\varepsilon x)=\frac{1}{120}(\varepsilon x)^5-\frac{1}{60}(\varepsilon x)^3+\frac{43}{8400}\varepsilon x. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Относительно B_6, B_7, B_8 см. Airey (1916, стр. 520).

Чисто мнимый порядок.

$$2\pi J_{ip}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(p^2-x^2)}}\exp\left(i\sqrt{p^2+x^2}-ip\operatorname{Arsh}\frac{p}{x}-\frac{1}{4}i\pi\right)\times$$
$$\times e^{p\pi/2}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(2i)^m a_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2+x^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right], \quad (17)$$

$p,\ x>0$, a_m определено в (9),

$$K_{ip}(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{4(x^2-p^2)}}\exp\left(-\sqrt{x^2-p^2}-p\arcsin\frac{p}{x}\right)\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m 2^m b_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(x^2-p^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right], \quad (18)$$

$x>p>0$, b_m определено в (12),

$$K_{ip}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p^2-x^2}}e^{-\frac{p\pi}{2}}\left[\sum_{m=0}^{M-1}2^m b_m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2-x^2)^{-m}}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{m\pi}{2}+p\operatorname{Arch}\frac{p}{x}-\sqrt{p^2-x^2}+\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-M})\right], \quad (19)$$

$p>x>0$, b_m определено в (12),

$$K_{ip}(x)\sim\frac{\pi}{3}e^{-p\pi/2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_m(\varepsilon x)\sin\left[(m+1)\frac{\pi}{3}\right]\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)\left(\frac{x}{6}\right)^{-(m+1)/3},$$

$p\approx x$, $p,\ x>0$, $\varepsilon=1-\dfrac{p}{x}$, $\varepsilon=o(x^{-2/3})$, (20)

$$\left.\begin{aligned} &C_0(\varepsilon x)=1, \quad C_1(\varepsilon x)=\varepsilon x, \quad C_2(\varepsilon x)=\frac{1}{2}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{20},\\ &C_3(\varepsilon x)=\frac{1}{6}(\varepsilon x)^3+\frac{1}{15}\varepsilon x, \quad C_4(\varepsilon x)=\frac{1}{24}(\varepsilon x)^4+\frac{1}{24}(\varepsilon x)^2+\frac{1}{280},\\ &C_5(\varepsilon x)=\frac{1}{120}(\varepsilon x)^5+\frac{1}{60}(\varepsilon x)^3+\frac{43}{4800}\varepsilon x, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\pi H_{ip}^{(1)}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p^2+x^2}}\exp\left(i\sqrt{p^2+x^2}-ip\operatorname{arcsh}\frac{p}{x}\right)\times$$
$$\times e^{(2p-i)\pi/4}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-i)^m 2^m b_m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(p^2+x^2)^{-m}}+O(x^{-M})\right], \tag{22}$$

$p,\ x>0$, b_m определено в (12).

7.13.3. Переходные области.

Формулы Никольсона ($x\sim n$, n — натуральное).

$$J_n(x)\sim 3^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left[J_{\frac{1}{3}}(\xi)+J_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right], \tag{23}$$

$$Y_n(x)\sim 3^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left[J_{\frac{1}{3}}(\xi)-J_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right], \tag{24}$$

$$x>n,\quad \xi=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(n-x)^3}{x}},$$

$$J_n(x)\sim\pi^{-1}3^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}K_{\frac{1}{3}}(\xi), \tag{25}$$

$$Y_n(x)\sim -3^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left[I_{\frac{1}{3}}(\xi)+I_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right], \tag{26}$$

$$n>x,\quad \xi=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(x-n)^3}{x}},$$

$$e^{\frac{i\pi}{6}}H_n^{(2)}(x)\sim 3^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{3}}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(\xi),\quad \xi=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(x-n)^3}{x}}, \tag{27}$$

где $\arg(x-n)=0$ при $x>n$ и $\arg(x-n)=\pi$ при $x<n$

Формулы Ватсона

$$J_p(x)=\frac{w}{\sqrt{3}}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)\cos\delta-Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)\sin\delta\right]+O(p^{-1}), \tag{28}$$

$$Y_p(x)=\frac{w}{\sqrt{3}}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)\sin\delta+Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)\cos\delta\right]+O(p^{-1}), \tag{29}$$

$$x>p,\quad \delta=pw-\frac{pw^3}{3}-p\operatorname{arctg}w+\frac{\pi}{6},\quad w=\sqrt{\frac{x^2}{p^2}-1},$$

$$J_p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}we^{p\alpha}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)+O(p^{-1}), \tag{30}$$

$$Y_p(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}we^{p\alpha}\left[I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)+I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{pw^3}{3}\right)\right]+O(p^{-1}), \tag{31}$$

$$x<p,\quad \alpha=p\left(w+\frac{w^3}{3}-\operatorname{Arth}w\right),\quad w=\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}}.$$

7.13.4. Равномерные асимптотические разложения. Формулы Лангера.

$$J_p(x)=\sqrt{1-\frac{\operatorname{arctg} w}{w}}\left[J_{\frac{1}{3}}(z)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-Y_{\frac{1}{3}}(z)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+O\left(p^{-\frac{4}{3}}\right), \tag{32}$$

$$Y_p(x)=\sqrt{1-\frac{\operatorname{arctg} w}{w}}\left[J_{\frac{1}{3}}(z)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+Y_{\frac{1}{3}}(z)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+O\left(p^{-\frac{4}{3}}\right), \tag{33}$$

$$x>p,\quad w=\sqrt{\frac{x^2}{p^2}-1},\quad z=p\,(w-\operatorname{arctg} w),$$

$$J_p(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{\operatorname{arctg} w}{w}}\,K_{\frac{1}{3}}(z)+O\left(p^{-\frac{4}{3}}\right), \tag{34}$$

$$Y_p(x)=-\sqrt{\frac{\operatorname{Arth} w}{w}-1}\left[I_{\frac{1}{3}}(z)+I_{-\frac{1}{3}}(z)\right]+O\left(p^{-\frac{4}{3}}\right), \tag{35}$$

$$x<p,\quad w=\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}},\quad z=p\,(\operatorname{Arth} w-w).$$

7.14. Интегральные формулы

7.14.1. Интегралы по конечным отрезкам.

$$\int z^{\nu+1} I_\nu(z)\,dz=z^{\nu+1} I_{\nu+1}(z), \tag{1}$$

$$\int z^{-\nu+1} I_\nu(z)\,dz=z^{-\nu+1} I_{\nu-1}(z), \tag{2}$$

$$\int z^{\nu+1} K_\nu(z)\,dz=-z^{\nu+1} K_{\nu+1}(z), \tag{3}$$

$$\int z^{-\nu+1} K_\nu(z)\,dz=-z^{-\nu+1} K_{\nu-1}(z), \tag{4}$$

$$\int z^{\nu} J_\nu(z)\,dz=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)z\left[J_\nu(z)\,\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-\mathbf{H}_\nu(z)\,J_{\nu-1}(z)\right], \tag{5}$$

$$\int z^{\nu} K_\nu(z)\,dz=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)z\left[K_\nu(z)\,\mathbf{L}_{\nu-1}(z)+\mathbf{L}_\nu(z)\,K_{\nu-1}(z)\right], \tag{6}$$

$$\int z^{\mu} J_\nu(z)\,dz=(\mu+\nu-1)\,z\,J_\nu(z)\,S_{\mu-1,\,\nu-1}(z)-z\,J_{\nu-1}(z)\,S_{\mu,\,\nu}(z) \tag{7}$$

Формулы (5) и (7) сохраняют силу, если заменить в них функции Бесселя первого рода функциями Бесселя второго рода или третьего рода.

Пусть $w_\nu(z)$ и $W_\mu(z)$ — любые функции Бесселя первого, второго или третьего рода порядка ν и μ соответственно; тогда

$$\int \left[(\beta^2-\alpha^2)z+\frac{\nu^2-\mu^2}{z}\right] w_\nu(\alpha z)\, W_\mu(\beta z)\, dz =$$
$$= z\left[\alpha W_\mu(\beta z)\, w'_\nu(\alpha z)-\beta w_\nu(\alpha z)\, W'_\mu(\beta z)\right]=$$
$$=\alpha z W_\mu(\beta z)\, w_{\nu-1}(\alpha z)-\beta z W_{\mu-1}(\beta z)\, w_\nu(\alpha z)+(\mu-\nu) W_\mu(\beta z)\, w_\nu(\alpha z), \quad (8)$$

$$\int z\, w_\nu(\alpha z)\, W_\nu(\beta z)\, dz =$$
$$=\frac{z}{\beta^2-\alpha^2}\left[\beta W_{\nu+1}(\beta z)\, w_\nu(\alpha z)-\alpha W_\nu(\beta z)\, w_{\nu+1}(\alpha z)\right], \quad (9)$$

$$\int z\, w_\nu(\alpha z)\, W_\nu(\alpha z)\, dz =$$
$$=\frac{1}{4} z^2\left[2 w_\nu(\alpha z)\, W_\nu(\alpha z)-w_{\nu+1}(\alpha z)\, W_{\nu-1}(\alpha z)-w_{\nu-1}(\alpha z)\, W_{\nu+1}(\alpha z)\right], \quad (10)$$

$$\int w_\nu(\alpha z)\, W_\nu(\alpha z)\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\nu} w_\nu(\alpha z)\, W_\nu(\alpha z)+$$
$$+\frac{1}{2\nu}\alpha z\left[w_{\nu+1}(\alpha z)\frac{\partial W_\nu(\alpha z)}{\partial\nu}-w_\nu(\alpha z)\frac{\partial W_{\nu+1}(\alpha z)}{\partial\nu}\right]. \quad (11)$$

Пусть $v_\nu(z)$ и $V_\mu(z)$ — любые модифицированные функции Бесселя первого или второго рода, имеющие соответственно порядок ν и μ. Тогда

$$\int \left[(\beta^2-\alpha^2)z+\frac{\mu^2-\nu^2}{z}\right] v_\nu(\alpha z)\, V_\mu(\beta z)\, dz =$$
$$= z\left[-\alpha V_\mu(\beta z)\, v'_\nu(\alpha z)+\beta v_\nu(\alpha z)\, V'_\mu(\beta z)\right], \quad (12)$$

$$\int z\,[v_\nu(\alpha z)]^2 dz=-\frac{z^2}{2}\left\{\left[v'_\nu(\alpha z)\right]^2-[v_\nu(\alpha z)]^2(1+\alpha^{-2}z^{-2}\nu^2)\right\}. \quad (13)$$

Относительно других неопределенных интегралов см. Ватсон (1949, стр. 146—151); Thielmann (1929); McLachlan (1934, стр 115); McLachlan и Meyers (1936; стр. 437); Straubel (1941, 1942); Picht (1949); Horton (1950); Luke (1950).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu\left[z(\sin\theta)^2\right] J_\nu\left[z(\cos\theta)^2\right](\sin\theta\cos\theta)^{-1}\, d\theta=\frac{(\nu^{-1}+\mu^{-1})\, J_{\nu+\mu}(z)}{2z}, \quad (14)$$
$$\operatorname{Re}\nu>0, \quad \operatorname{Re}\mu>0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu\left[z(\sin\theta)^2\right] J_\nu\left[z(\cos\theta)^2\right]\operatorname{ctg}\theta\, d\theta=\frac{J_{\nu+\mu}(z)}{2\mu}, \quad (15)$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1, \quad \operatorname{Re}\mu>0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu [z (\sin\theta)^2] J_\nu [z (\cos\theta)^2] \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{\nu+\mu+2m+1}(z), \tag{16}$$

$\operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\mu > -1,$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu [z (\sin\theta)^2] J_\nu [z (\cos\theta)^2] (\sin\theta)^{2\lambda-1} (\cos\theta)^{2\delta-1} \, d\theta \tag{17}$$

(Bailey, 1930, стр. 419, 1930c. стр. 203; Rutgers, 1931),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\lambda (z \sin\theta) J_\nu (z \sin\theta) (\sin\theta)^{2\delta+1} (\cos\theta)^{2\mu+1} \, d\theta, \tag{18}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\lambda (z \sin\theta) J_\nu (z \cos\theta) (\sin\theta)^{2\delta+1} (\cos\theta)^{2\mu+1} \, d\theta \tag{19}$$

Bailey, 1938, стр. 145),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |J_\nu (z \sin\theta)|^2 (\sin\theta)^{2\delta+1} (\cos\theta)^{2\mu+1} \, d\theta \tag{20}$$

(Bailey, 1938, стр. 141),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |J_\nu (z \sin\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} J_{2\nu+2m+1}(2z) \, z^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\nu > -1 \tag{21}$$

$$\int_0^{z} t^\lambda \sin (z-t) J_\nu(t) \, dt, \tag{22}$$

$$\int_0^{z} t^\lambda \cos (z-t) J_\nu(t) \, dt \tag{23}$$

(Bailey 1930c, стр. 204, 205),

$$\sin [\pi (\nu+\mu)] \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_{\mu+\nu} (2z \cos\theta) \cos [(\mu-\nu)\theta] \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} [I_{-\nu}(z) I_{-\mu}(z) - I_\nu(z) I_\mu(z)], \quad |\operatorname{Re}(\mu+\nu)| < 1. \tag{24}$$

7.14.2. Несобственные интегралы.

Интегралы, содержащие показательную функцию.

$$\int_0^\infty Y_{2\nu}(\alpha t)\, e^{-\gamma^2 t^2}\, dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right) \times$$

$$\times \left[I_\nu\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right) \operatorname{tg}(\nu\pi) + \frac{1}{\pi \cos \nu\pi} K_\nu\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right)\right], \qquad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}, \tag{25}$$

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1} H_\nu^{(1)}\left(\frac{2x^2}{t}\right) dt = 2 K_\nu(2x)\, H_\nu^{(1)}(2x) \tag{26}$$

(Hardy, 1927),

$$\int_0^\infty I_\nu(\alpha t)\, e^{-\gamma^2 t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} \exp\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\gamma^2}\right), \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}\gamma^2 > 0 \tag{27}$$

(см. также 7.14 (60) — 7.14 (79).

Частные случаи интеграла Вебера—Шафхейтлина.

$$\int_0^\infty t^{-1} J_\mu(at) \sin(bt)\, dt = \mu^{-1} \sin\left[\mu \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right] \quad \text{при} \quad b < a,$$

$$= a^\mu \mu^{-1} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right)^{-\mu} \quad \text{при} \quad b > a, \quad \operatorname{Re}\mu > -1, \tag{28}$$

$$\int_0^\infty t^{-1} J_\mu(at) \cos(bt)\, dt = \mu^{-1} \cos\left[\mu \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right] \quad \text{при} \quad b < a,$$

$$= \mu^{-1} a^\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right)^{-\mu} \quad \text{при} \quad b > a, \quad \operatorname{Re}\mu > 0, \tag{29}$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at) \cos(bt)\, dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cos\left[\mu \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right] \quad \text{при} \quad b < a,$$

$$= -a^\mu \frac{\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right)^{-\mu} \quad \text{при} \quad b > a, \quad \operatorname{Re}\mu > -1, \tag{30}$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at) \sin(bt)\, dt = \frac{\sin\left[\mu \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{при} \quad b < a,$$

$$= a^\mu \frac{\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right)^{-\mu} \quad \text{при} \quad b > a, \quad \operatorname{Re}\mu > -2. \tag{31}$$

Относительно соответствующих интегралов для функции Неймана см. Nielsen (1904, стр. 159).

$$\frac{\pi}{2}(\nu^2-\mu^2)\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(at)\frac{dt}{t}=\sin\left[(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}\right], \tag{32}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)>0,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(at)\,t^{-(\nu+\mu)}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu+\mu}\Gamma(\mu+\nu)}{a\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{33}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)>0,$$

$$\Gamma(\nu-\mu)\int_0^\infty J_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,t^{\mu-\nu+1}\,dt=$$

$$\begin{aligned}&=2^{\mu-\nu+1}a^\mu b^{-\nu}(b^2-a^2)^{\nu-\mu-1} && \text{при } b>a,\\ &=0 && \text{при } b<a,\end{aligned} \tag{34}$$

$$\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\mu>-1.$$

Интегралы, родственные интегралу Вебера—Шафхейтлина.

$$2^{\rho+1}\Gamma(\nu+1)\,a^{\nu+1-\rho}\int_0^\infty K_\mu(at)\,I_\nu(bt)\,t^{-\rho}\,dt=$$

$$=b^\nu\Gamma\left(\frac{1-\rho+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho-\mu+\nu}{2}\right)\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1-\rho+\mu+\nu}{2},\ \frac{1-\rho-\mu+\nu}{2};\ \nu+1,\ \frac{b^2}{a^2}\right), \tag{35}$$

$$\operatorname{Re}(\nu-\rho+1\pm\mu)>0,\quad a>b,$$

$$2^{\rho+2}\Gamma(1-\rho)\int_0^\infty K_\mu(\alpha t)\,K_\nu(\beta t)\,t^{-\rho}\,dt=$$

$$=\alpha^{\rho-\nu-1}\beta^\nu\,{}_2F_1\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2},\ \frac{1+\nu-\mu-\rho}{2};\ 1-\rho;\ 1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu-\rho}{2}\right), \tag{36}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,\quad \operatorname{Re}(\rho\pm\mu\pm\nu+1)>0$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty Y_\mu(at)\,J_\nu(bt)\,t^{-\rho}\,dt=\sin\frac{\pi(\nu-\mu-\rho)}{2}\times$$

$$\times\int_0^\infty K_\mu(at)\,I_\nu(bt)\,t^{-\rho}\,dt,\quad a>b,\quad \operatorname{Re}(\nu-\rho+1\pm\mu)>0, \tag{37}$$

$$\int_0^\infty Y_\nu(bt)\, J_\mu(at)\, t^{-\rho}\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left[Y_\mu(at)\, J_\nu(bt) + \left(\frac{4}{\pi^2}\right) \cos\left(\frac{\pi(\rho+\nu+\mu)}{2}\right) K_\mu(at)\, K_\nu(bt)\right] t^{-\rho}\, dt,$$

$$a > b, \quad \operatorname{Re}(\rho+\nu-\mu) > -1, \quad \operatorname{Re}\rho > -1, \tag{38}$$

$$\int_0^\infty J_\nu(\beta t)\, K_\mu(\alpha t)\, t^{\nu+\mu+1}\, dt = (2\beta)^\nu (2\alpha)^\mu\, \Gamma(\nu+\mu+1)\, (\alpha^2+\beta^2)^{-\nu-\mu-1},$$

$$\operatorname{Re}(\nu+1) > |\operatorname{Re}\mu|, \quad \operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|. \tag{39}$$

Относительно других комбинаций см. Dixon и Ferrat (1930).

Интегралы, содержащие произведение трех и более функций Бесселя.

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\mu(at)\, J_\nu(bt)\, J_\lambda(ct)\, dt \tag{40}$$

(Watson, 1934),

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\mu(at)\, J_\nu(bt) \left\{\begin{matrix} J_\lambda(ct) \\ K_\lambda(ct) \end{matrix}\right\} dt, \tag{41}$$

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} I_\mu(at)\, K_\lambda(ct) \left\{\begin{matrix} I_\nu(bt) \\ K_\nu(bt) \end{matrix}\right\} dt, \tag{42}$$

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} K_\mu(at)\, K_\nu(bt)\, K_\rho(ct)\, dt \tag{43}$$

(Bailey, 1935a, 1936),

$$\int_0^\infty [J_\nu(ax)]^2\, [J_\nu(bx)]^2\, x^{1-2\nu}\, dx =$$

$$= \frac{a^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)}{2\pi b\,\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(2\nu+1/2)}\; {}_2F_1\left(\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ 2\nu+\frac{1}{2};\ \frac{a^2}{b^2}\right), \tag{44}$$

$$0 < \operatorname{Re}\nu,$$

$$\int_0^\infty J_\nu(ax)\, Y_\nu(ax)\, J_\nu(bx)\, Y_\nu(bx)\, x^{2\nu+1}\, dx =$$

$$= \frac{a^{2\nu} b^{-2-4\nu}\,\Gamma(3\nu+1)}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right)}\; {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2},\ 3\nu+1;\ 2\nu+\frac{3}{2};\ \frac{a^2}{b^2}\right), \tag{45}$$

$$-\frac{1}{3} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}$$

(относительно других формул см. Nicholson, 1920, 1927; Titchmarsh, 1927; Mitra, 1933; Mayr, 1933; Sinha, 1943).

Интегралы типа Сонина—Гегенбауэра.

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) K_\nu(a\sqrt{t^2+z^2})(t^2+z^2)^{-\nu/2} t^{\mu+1}\,dt =$$
$$= b^\mu a^{-\nu} z^{\mu-\nu+1}(a^2+b^2)^{(\nu-\mu-1)/2} K_{\nu-\mu-1}(z\sqrt{a^2+b^2}), \quad (46)$$
$$\operatorname{Re}\mu > -1, \ \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) K_\nu(a\sqrt{t^2-y^2})(t^2-y^2)^{-\nu/2} t^{\mu+1}\,dt =$$
$$(47)$$
$$= \frac{\pi}{2} e^{-i\pi\left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)} b^\mu a^{-\nu} y^{1+\mu-\nu}(a^2+b^2)^{(\nu-\mu-1)/2} H^{(2)}_{\nu-\mu-1}(y\sqrt{a^2+b^2}),$$

$\operatorname{Re}\nu < 1$, $\operatorname{Re}\mu > -1$, $\arg\sqrt{t^2-y^2} = 0$, если $t > y$,
$\arg(t^2-y^2)^\sigma = \pi\sigma$, если $t < y$,
где $\sigma = \frac{1}{2}$ и $-\nu/2$, соответственно,

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) H_\nu^{(2)}(a\sqrt{t^2+x^2})(t^2+x^2)^{-\nu/2} t^{\mu+1}\,dt =$$
$$= a^{-\nu} b^\mu x^{1+\mu-\nu}(a^2-b^2)^{(\nu-\mu-1)/2} H^{(2)}_{\nu-\mu-1}(x\sqrt{a^2-b^2}) \text{ при } a > b. \quad (48)$$
$$= 2i\pi^{-1} b^\mu a^{-\nu} x^{1+\mu-\nu}(b^2-a^2)^{(\nu-\mu-1)/2} K_{\nu-\mu-1}(x\sqrt{b^2-a^2}) \text{ при } a < b,$$
$$\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > -1, \ x > 0,$$

$$\int_0^\infty H_\nu^{(2)}(a\sqrt{t^2+x^2})(t^2+x^2)^{-\nu/2} t^{2\mu+1}\,dt =$$
$$= 2^\mu a^{-\mu-1} x^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1) H^{(2)}_{\nu-\mu-1}(ax), \ \operatorname{Re}\frac{2\nu-1}{4} > \operatorname{Re}\mu > -1, \quad (49)$$

$$\int_0^\infty K_\nu(a\sqrt{t^2+z^2})(t^2+z^2)^{-\nu/2} t^{2\mu+1}\,dt =$$
$$= 2^\mu a^{-\mu-1} z^{1+\mu-\nu}\Gamma(\mu+1) K_{\nu-\mu-1}(az) \quad a > 0, \ \operatorname{Re}\mu > -1, \quad (50)$$

$$\int_0^\infty J_\mu(bt)(t^2+z^2)^{-\nu} t^{\mu+1}\,dt = \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu-1} z^{1+\mu-\nu}\frac{K_{\nu-\mu-1}(bz)}{\Gamma(\nu)}, \quad (51)$$
$$\operatorname{Re}\left(2\nu-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{Re}\mu > -1, \ \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\int_0^\infty J_0(bt)\frac{e^{-a\sqrt{t^2-y^2}}}{\sqrt{t^2-y^2}}\,t\,dt = \frac{e^{-iy\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \arg\sqrt{t^2-y^2} = \frac{\pi}{2}, \text{ если } t < y, \quad (52)$$

$$\pi\frac{e^{-iy\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\int_0^\infty \cos(bt) K_0(a\sqrt{t^2-y^2})\,dt =$$
$$= -\pi i\int_0^\infty \cos(bt) H_0^{(2)}(a\sqrt{y^2-t^2})\,dt. \quad (53)$$

(Относительно аналогичных формул см. Ватсон, 1949, стр. 455—460; Маут, 1932; Gupta, 1943b.)

$$e^{\frac{i\pi(\rho-\nu)}{2}}\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}J_\mu\left(b\sqrt{t^2+y^2}\right)}{(t^2-\alpha^2)^{m+1}(t^2+y^2)^{\mu/2}}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\pi(\rho-\nu)}{2}\right)J_\nu(at)+\sin\left(\frac{\pi(\rho-\nu)}{2}\right)Y_\nu(at)\right]dt=$$

$$=\frac{\pi i}{m!}2^{-m-1}\left(\frac{d}{\alpha\,d\alpha}\right)^m\left[\alpha^{\rho-2}\frac{J_\mu\left(b\sqrt{\alpha^2+y^2}\right)}{(\alpha^2+y^2)^{\mu/2}}H_\nu^{(1)}(a\alpha)\right], \tag{54}$$

$a>b$, $\operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<2m+4+\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Re}(i\alpha)<0$, $m=0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}J_\mu\left(b\sqrt{t^2+y^2}\right)}{(t^2+\beta^2)^{m+1}(t^2+y^2)^{\mu/2}}\left[\cos\left(\frac{\pi(\rho-\nu)}{2}\right)J_\nu(at)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\pi(\rho-\nu)}{2}\right)Y_\nu(at)\right]dt=$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{2^{-m}}{m!}\left(\frac{d}{\beta\,d\beta}\right)^m\left[\beta^{\rho-2}\frac{J_\mu\left(b\sqrt{y^2-\beta^2}\right)}{(y^2-\beta^2)^{\mu/2}}K_\nu(a\beta)\right], \tag{55}$$

$a>b$, $\operatorname{Re}(\pm\nu)<\operatorname{Re}\rho<2m+4+\operatorname{Re}\mu$, $\operatorname{Re}\beta>0$, $m=0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1}J_\mu\left(b\sqrt{t^2+y^2}\right)}{(t^2+\beta^2)(t^2+y^2)^{\mu/2}}J_\nu(at)\,dt=\beta^\nu\frac{J_\mu\left(b\sqrt{y^2-\beta^2}\right)}{(y^2-\beta^2)^{\mu/2}}K_\nu(a\beta), \tag{56}$$

$$a>b,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<2+\operatorname{Re}\mu,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu-\mu+1}}{t^2+\beta^2}J_\mu(bt)J_\nu(at)\,dt=\beta^{\nu-\mu}I_\mu(b\beta)K_\nu(a\beta), \tag{57}$$

$$a>b,\quad \operatorname{Re}\nu>-1,\quad \operatorname{Re}(\nu-\mu)<2,\quad \operatorname{Re}\beta>0,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1}J_\nu(at)}{t^2+\beta^2}dt=\beta^\nu K_\nu(a\beta),$$

$$a>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}, \tag{58}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu+1}J_\nu(at)}{(t^2+\beta^2)^{\mu+1}}dt=\frac{a^\mu\beta^{\nu-\mu}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}K_{\nu-\mu}(a\beta), \tag{59}$$

$$-1<\operatorname{Re}\nu<2\operatorname{Re}\mu+\frac{3}{2}.$$

Относительно аналогичных интегралов см. Ватсон (1949, стр. 476—479).

Произведения функций Бесселя.

$$K_\mu(Z)K_\nu(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\mu-\nu)t}\left(\frac{Ze^t+ze^{-t}}{Ze^{-t}+ze^t}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}\times$$

$$\times K_{\nu+\mu}\left[(Z^2+z^2+2Zz\operatorname{ch}2t)^{\frac{1}{2}}\right]dt,\qquad \operatorname{Re}Z>0,\quad \operatorname{Re}z>0, \tag{60}$$

$$2\pi J_\mu(X)J_\nu(x)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\nu\theta}\left(\frac{X-xe^{-i\theta}}{X-xe^{i\theta}}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}[\cos\nu\pi\, J_{\mu+\nu}(w)-\sin\nu\pi\, Y_{\nu+\mu}(w)]\,d\theta-$$

$$-2\sin\nu\pi\int_0^{\infty}e^{-\nu t}\left(\frac{X+xe^t}{X+xe^{-t}}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}[\cos\nu\pi\, J_{\mu+\nu}(\Phi)-\sin\nu\pi\, Y_{\mu+\nu}(\Phi)]\,dt, \tag{61}$$

$$X>x>0,\quad \operatorname{Re}(\mu-\nu)<\frac{1}{2},\quad w=\sqrt{X^2+x^2-2xX\cos\theta},$$

$$\Phi=\sqrt{X^2+x^2+2Xx\operatorname{ch}t}$$

(Dixon и Ferrar, 1933, стр. 193, 194),

$$J_\mu(z)J_\nu(z)+Y_\mu(z)Y_\nu(z)=$$

$$=4\pi^{-2}\int_0^{\infty}K_{\mu+\nu}(2z\operatorname{sh}t)\,[e^{(\mu-\nu)t}\cos\nu\pi+e^{-(\mu-\nu)t}\cos\mu\pi]\,dt, \tag{62}$$

$$\operatorname{Re}z>0,\quad |\operatorname{Re}(\nu+\mu)|<1,$$

$$J_\mu(z)J_\nu(z)+Y_\mu(z)Y_\nu(z)=$$

$$=4\pi^{-2}\int_0^{\infty}K_{\mu-\nu}(2z\operatorname{sh}t)\,\{e^{(\mu+\nu)t}+e^{-(\mu+\nu)t}\cos[(\mu-\nu)t]\}\,dt, \tag{63}$$

$$\operatorname{Re}z>0,\quad |\operatorname{Re}(\nu-\mu)|<1,$$

$$J_\mu(x)J_\nu(x)-Y_\mu(x)Y_\nu(x)=4\pi^{-1}\int_0^{\infty}Y_{\mu+\nu}(2x\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt, \tag{64}$$

$$x>0,$$

$$J_\mu(x)Y_\nu(x)+J_\nu(x)Y_\mu(x)=-4\pi^{-1}\int_0^{\infty}J_{\mu+\nu}(2x\operatorname{ch}t)\operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt, \tag{65}$$

$$x>0,$$

$$J_\mu(z)Y_\nu(z)-J_\nu(z)Y_\mu(z)=$$

$$=4\pi^{-2}\int_0^{\infty}K_{\nu+\mu}(2z\operatorname{sh}t)\,[e^{(\nu-\mu)t}\sin(\mu\pi)-e^{(\mu-\nu)t}\sin(\nu\pi)]\,dt, \tag{66}$$

$$\operatorname{Re}z>0,\quad |\operatorname{Re}(\nu+\mu)|<1,$$

$$J_\mu(z)\,Y_\nu(z)-J_\nu(z)\,Y_\mu(z)=$$
$$=4\pi^{-2}\sin[(\mu-\nu)\pi]\int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\operatorname{sh}t)\,e^{-(\nu+\mu)t}\,dt, \tag{67}$$
$$\operatorname{Re}z>0,\quad |\operatorname{Re}(\nu-\mu)|<1,$$

$$K_\nu(x)\,I_\mu(x)=\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\operatorname{sh}t)\,e^{(\nu-\mu)t}\,dt, \tag{68}$$
$$\operatorname{Re}(\nu-\mu)<\frac{3}{2},\quad \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,\quad x>0,$$

$$[K_\nu(x)]^2\sin(\nu\pi)=\pi\int_0^\infty J_0(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(2\nu t)\,dt \tag{69}$$
$$|\operatorname{Re}\nu|<\frac{3}{4},\quad x>0,$$

$$[K_\nu(x)]^2\cos(\nu\pi)=-\pi\int_0^\infty Y_0(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(2\nu t)\,dt, \tag{70}$$
$$|\operatorname{Re}\nu|<\frac{3}{4},\quad x>0,$$

$$I_\nu(x)\,K_\mu(x)+I_\mu(x)\,K_\nu(x)=2\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt, \tag{71}$$
$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,\quad |\operatorname{Re}(\mu-\nu)|<\frac{3}{2},\quad x>0,$$

$$I_\nu(x)\,K_\mu(x)-I_\mu(x)\,K_\nu(x)=2\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}[(\mu-\nu)t]\,dt, \tag{72}$$
$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,\ |\operatorname{Re}(\mu-\nu)|<\frac{3}{2},\quad x>0,$$

$$I_\mu(x)\,K_\nu(x)-\cos[(\nu-\mu)\pi]\,I_\nu(x)\,K_\mu(x)=$$
$$=\sin[\pi(\mu-\nu)]\int_0^\infty Y_{\nu-\mu}(2x\operatorname{sh}t)\,e^{-(\nu+\mu)t}\,dt, \tag{73}$$
$$x>0,\ |\operatorname{Re}(\nu-\mu)|<1,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-\frac{1}{2},$$

$$J_\nu(z)\,\frac{\partial Y_\nu(z)}{\partial\nu}-Y_\nu(z)\,\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}=-4\pi^{-1}\int_0^\infty K_0(2z\operatorname{sh}t)\,e^{-2\nu t}\,dt. \tag{74}$$
$$\operatorname{Re}z>0,$$

$$I_\nu(x)\,\frac{\partial K_\nu(x)}{\partial\nu}-K_\nu(x)\,\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}=$$
$$=\pi\int_0^\infty Y_0(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(2\nu t)\,dt+\cos(\nu\pi)\,[K_\nu(x)]^2, \tag{75}$$
$$x>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{3}{4}.$$

Относительно большинства из этих формул см. Dixon и Ferrar (1930) и Meijer (1936 стр. 519).

$$H_\nu^{(2)}(x)\,H_\mu^{(2)}(y)=$$

$$=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\nu-\mu)t}\left(\frac{xe^{-t}+ye^{t}}{xe^{t}+ye^{-t}}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}H_{\nu+\mu}^{(2)}\left(\sqrt{x^2+y^2+2xy\operatorname{ch}2t}\right)dt \tag{76}$$

$$|\operatorname{Re}(\nu-\mu)|<\frac{3}{2},$$

$$2\pi K_\mu(x)\,I_\nu(y)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\nu\varphi}\left(\frac{x-ye^{i\varphi}}{x-ye^{-i\varphi}}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}K_{\nu+\mu}\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)d\varphi-$$

$$-2\sin(\nu\pi)\int_0^{\infty}e^{\nu t}\left(\frac{x+ye^{-t}}{x+ye^{t}}\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}}K_{\nu+\mu}\left(\sqrt{x^2+y^2+2xy\operatorname{ch}t}\right)dt \tag{77}$$

Dixon и Ferrar (1933), $x>y$

$$I_\nu(z)\,K_\nu(\xi)=\int_0^{\infty}I_{2\nu}\left(2\sqrt{z\xi}\operatorname{sh}t\right)e^{-(\xi-z)\operatorname{ch}t}\,dt, \tag{78}$$

$$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\xi-z)>0,$$

$$K_\nu(z)\,K_\nu(\xi)=\cos(\nu\pi)\int_0^{\infty}K_{2\nu}\left(2\sqrt{z\xi}\operatorname{sh}t\right)e^{-(\xi+z)\operatorname{ch}t}\,dt, \tag{79}$$

$$-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\sqrt{z}+\sqrt{\xi})^2>0;$$

см. также (25) — (27).

Интегралы, содержащие функции Струве.

$$\int_0^{\infty}t^{\mu-\nu-1}\,\mathbf{H}_\nu(t)\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)2^{\mu-\nu-1}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{\mu}{2}+1\right)}, \tag{80}$$

$$-1<\operatorname{Re}\mu<1,\quad \operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\left(\mu-\frac{3}{2}\right),$$

$$\int_0^{\infty}\mathbf{H}_\nu(t)\,\mathbf{H}_\mu(t)\,t^{-\mu-\nu}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)\,2^{-\mu-\nu}}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{81}$$

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu)>0,$$

$$\int_0^{1}\mathbf{H}_\nu(2zt)\,(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,t^{-\nu}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)z^{\nu}\,|J_\nu(z)|^2, \tag{82}$$

$$z>0,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}.$$

Относительно дальнейших интегралов, содержащих функции Струве, см. Mohan (1942), Horton (1950).

7.15. Ряды функций Бесселя

Ряды типа Неймана.

$$z^{\nu} e^{\gamma z} = 2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)C_n^{\nu}(\gamma)I_{\nu+n}(z), \tag{1}$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu-\nu} J_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n)\Gamma(\nu+1-\mu)(\mu+2n)}{n!\,\Gamma(\nu+1-\mu-n)\Gamma(\nu+n+1)}J_{\mu+2n}(z). \tag{2}$$

Если $\nu-\mu$ — неотрицательное целое число, это выражение сводится к конечной сумме.

$$J_{\nu}(z\sin\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\sin\theta)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\nu+\frac{1}{2}+2n\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\nu+1)}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times C_{2n}^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos\theta)J_{\nu+\frac{1}{2}+2n}(z), \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_{\nu}(z)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+1+2n)\Gamma(\nu+1+n)}{n!\,(2n+2\nu+1)(2n+1)}J_{\nu+1+2n}(z), \tag{4}$$

$$\mathbf{J}_{\nu}(z)\pi = \sin\nu\pi\left[\nu^{-1}J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+n}+\frac{(-1)^n}{\nu-n}\right)J_n(z)\right], \tag{5}$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma-\nu-\mu} J_{\mu}(\alpha z)J_{\nu}(\beta z) = \frac{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}(\gamma+2m)J_{\gamma+2m}(z)\times$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\gamma+m+n)\alpha^{2n}}{n!\,(m-n)!\,[\Gamma(n+\mu+1)]^2}F_1\left(-n,\ -n-\mu;\ \nu+1;\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right], \tag{6}$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma-\mu-\nu} J_{\mu}(\alpha z)J_{\nu}(\beta z) = \frac{\alpha^{\mu}\beta^{\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma+2m)\Gamma(\gamma+m)}{m!}F_4(-m,\ \gamma+m,\ \mu+1,\ \nu+1,\ \alpha^2,\ \beta^2)J_{\gamma+2m}(z) \tag{7}$$

(Bailey, 1935).

$$\frac{z}{2}J_{\mu}(z\cos\varphi\cos\Phi)J_{\nu}(z\sin\varphi\sin\Phi) =$$

$$=(\cos\varphi\cos\Phi)^{\mu}(\sin\varphi\sin\Phi)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\mu+\nu+2n+1)J_{\mu+\nu+2n+1}(z)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\mu+\nu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)[\Gamma(\nu+1)]^2}\,{}_2F_1[-n,\ \mu+\nu+n+1,\ \nu+1;\ (\sin\varphi)^2]\times$$

$$\times{}_2F_1[-n,\ \mu+\nu+n+1;\ \nu+1,\ (\sin\Phi)^2], \tag{8}$$

μ и ν не являются отрицательными целыми числами (Ватсон, 1949, стр. 403; Bailey, 1929);

$$z^{\nu} = 2^{\nu}\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+n} J_{\frac{\nu}{2}+n}(z), \tag{9}$$

$$\Gamma(\nu-\mu)\,J_{\nu}(z) = \Gamma(\mu+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-\mu+n)}{\Gamma(\nu+n+1)\,n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-\mu+n} J_{\mu+n}(z), \tag{10}$$

$\nu \neq \mu$, μ не является отрицательным целым числом;

$$J_{\nu}(z\cos\theta)\,J_{\nu}(z\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\sin 2\theta\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\,J_{\nu+2n}(z), \tag{11}$$

ν не является отрицательным целым числом;

$$\sqrt{(z+h)^{\pm\nu}}\,J_{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\pm\frac{h}{2}\right)^{m}}{m!}\,z^{\pm(\nu-m)/2}\,J_{\nu\mp m}(\sqrt{z}), \tag{12}$$

$$|h| < |z|,$$

$$\sqrt{(z+h)^{\pm\nu}}\,Y_{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\pm\frac{h}{2}\right)^{m}}{m!}\,z^{\pm(\nu-m)/2}\,Y_{\nu\mp m}(\sqrt{z}), \tag{13}$$

$$|h| < |z|,$$

$$H_0^{(1)}(z\sqrt{1-a}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)}\,H_{m-\nu}^{(1)}(z), \tag{14}$$

$$H_1^{(1)}(z\sqrt{1-a}) = \sqrt{1-a}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)}\,H_{m-\nu+1}^{(1)}(z), \tag{15}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(\sqrt{z^2-2zt}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{t^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)}\,J_{m-\nu-\frac{1}{2}}(z), \tag{16}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(\sqrt{z^2+2zt}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{t^{m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)}\,J_{-\left(m-\nu-\frac{1}{2}\right)}(z), \tag{17}$$

$$\sqrt{(s^2-r^2)^{-\nu}}\,H_{\nu}^{(1)}\left(z\sqrt{s^2-r^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(zr^2)^{m}}{2^{m}\,m!}\,s^{-\nu-m}H_{\nu+m}^{(1)}(zs), \tag{18}$$

$$\sqrt{(s^2-r^2)^{-\nu}}\,K_{\nu}(z\sqrt{s^2-r^2}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(zr^2)^{m}}{2^{m}\,m!}\,s^{-\nu-m}K_{\nu+m}(zs), \tag{19}$$

$$\frac{\sin(\nu\pi)}{\nu\pi} = J_\nu(z)\,J_{-\nu}(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{n+\nu}(z)\,J_{n-\nu}(z), \tag{20}$$

$$J_\nu(2z\cos\theta) = \left[J_{\frac{\nu}{2}}(z)\right]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{\frac{\nu}{2}-n}(z)\,J_{\frac{\nu}{2}+n}(z)\cos(2n\theta), \tag{21}$$

$$\operatorname{Re}\nu > 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$[J_\nu(z)]^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} J_{\nu+n}(z)\,J_{\nu-n}(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{22}$$

$$J_{2\nu}(2z) = \frac{\pi\sqrt{z}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{J_{\nu+n}(z)\,J_{\nu-\frac{1}{2}+n}(z)}{n!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)}, \tag{23}$$

$$J_0\left(x\sqrt{t-t^{-1}}\right) = J_0(x)\,I_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-t)^n + t^{-n}\right] J_n(x)\,I_n(x), \tag{24}$$

$$J_0\left[x\left(t+t^{-1}\right)\right] = [J_0(x)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(t^{2n}+t^{-2n}\right)[J_n(x)]^2, \tag{25}$$

$$\operatorname{ber}\left(\sqrt{2}x\right) = J_0(x)\,I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)\,I_{2n}(x), \tag{26}$$

$$\operatorname{bei}\left(\sqrt{2}x\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x)\,I_{2n+1}(x). \tag{27}$$

Относительно дальнейших примеров см. Bailey (1935, 235); Wise (1935); Banerjee (1939), Bateman и Rice (1935); Fox (1927), Rice (1944), Rutgers (1942); Nielsen (1904, гл. XIX — XXI).

Теоремы сложения и родственные ряды

$w = \sqrt{z^2 + Z^2 - 2zZ\cos\varphi}$ и $C_n^\nu(z)$ — многочлены Гегенбауэра (см. п. 3.15).

$$w^{-\nu} H_\nu^{(1),(2)}(w) = \left(\frac{zZ}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\,C_n^\nu(\cos\varphi)\,J_{\nu+n}(z)\,H_{\nu+n}^{(1),(2)}(Z), \tag{28}$$

$$\nu \neq 0, -1, -2, \ldots,\ \left|ze^{\pm i\varphi}\right| < |Z|,$$

$$H_0^{(1),(2)}(w) = J_0(z)\,H_0^{(1),(2)}(Z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\,H_n^{(1),(2)}(Z)\cos(n\varphi), \tag{29}$$

$$\left|ze^{\pm i\varphi}\right| < |Z|,$$

$$w^{-\nu} J_\nu(w) = \left(\frac{zZ}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\,C_n^\nu(\cos\varphi)\,J_{\nu+n}(z)\,J_{\nu+n}(Z), \tag{30}$$

$$\nu \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,$$

$$J_0(w) = J_0(z)\,J_0(Z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\,J_n(Z)\cos(n\varphi), \tag{31}$$

$$w^{-\nu}J_{-\nu}(w)=\left(\frac{zZ}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\nu+n)C_n^{\nu}(\cos\varphi)J_{-\nu-n}(z)J_{\nu+n}(Z), \tag{32}$$

$$\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ |ze^{\pm i\varphi}|<|Z|.$$

Пусть $e^{i\psi}=(Z-ze^{-i\varphi})/w$ и $|ze^{\pm i\varphi}|<|Z|$.

$$Y_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y_{\nu+n}(Z)J_n(z)e^{in\varphi}, \tag{33}$$

$$H_\nu^{(1),(2)}(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_{\nu+n}^{(1),(2)}(Z)J_n(z)e^{in\varphi}, \tag{34}$$

$$K_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{\nu+n}(Z)I_n(z)e^{in\varphi}, \tag{35}$$

$$I_\nu(w)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nI_{\nu+n}(Z)I_n(z)e^{in\varphi}, \tag{36}$$

$$\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-\nu}J_\nu\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\left[z^{-\nu}J_{\nu+n}(z)\right]^2C_n^{\nu}(\cos\varphi),\qquad \nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots, \tag{37}$$

$$J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)=[J_0(z)]^2+2\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(z)]^2\cos(n\varphi) \tag{38}$$

или

$$t^\nu J_\nu[z(t+t^{-1})]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^{2n}J_{\nu-n}(z)J_n(z), \tag{39}$$

$$|t|<1\quad \text{для}\quad \nu\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

$$t^\nu I_\nu[z(t^{-1}-t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nt^{2n}J_{\nu-n}(z)J_n(z), \tag{40}$$

$$|t|<1 \text{ для } \nu\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

$$\frac{\exp\left(\pm i\sqrt{z^2+Z^2-2zZ\cos\varphi}\right)}{\sqrt{z^2+Z^2-2zZ\cos\varphi}}=$$

$$=\pm\frac{i\pi}{\sqrt{zZ}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(z)H_{n+\frac{1}{2}}^{(1),(2)}(Z)P_n(\cos\varphi), \tag{41}$$

$$|ze^{\pm i\varphi}|<|Z|,$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}\Gamma(2\nu)=\Gamma(\nu)\Gamma(1+\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)[J_{\nu+n}(z)]^2/n! \tag{42}$$

$$(\sin\alpha\sin\beta)^{\frac{1}{2}-\nu} J_{\nu-\frac{1}{2}}(z\sin\alpha\sin\beta)\,e^{iz\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{2^{2\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi z}}[\Gamma(\nu)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\, n!\,(\nu+n)}{\Gamma(2\nu+n)} J_{\nu+n}(z)\, C_n^{\nu}(\cos\alpha)\, C_n^{\nu}(\cos\beta), \tag{43}$$

$$\cos(z\cos\varphi) = 2^{\nu}\Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)\, z^{-\nu} J_{\nu+2n}(z)\, C_{2n}^{\nu}(\cos\varphi), \tag{44}$$

$$\sin(z\cos\varphi) = 2^{\nu}\Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n+1)\, z^{-\nu} J_{\nu+2n+1}(z)\, C_{2n+1}^{\nu}(\cos\varphi). \tag{45}$$

Ряды типа Каптейна.

$$\nu\pi\, \mathbf{J}_{\nu}(\nu z) = \sin(\nu\pi)\left[1 - 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_n(nz)}{n^2-\nu^2}\right], \tag{46}$$

$$\nu\pi\, \mathbf{E}_{\nu}(\nu z) = 2\left(\sin\frac{\nu\pi}{2}\right)^2 - 4\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2[(\nu+n)\pi/2]}{n^2-\nu^2} J_n(nz), \tag{47}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} [J_n(nz)]^2, \tag{48}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right] J_{n+1}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right], \tag{49}$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - z\sum_{n=1}^{\infty} (4n^2-1)^{-1} [J_n(nz)]^2, \tag{50}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(nz). \tag{51}$$

Ряды Шлемильха и родственные им.

$$\Gamma(\nu+1)\sum_{m=1}^{\infty} \cos(mt)\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(mx) = -\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 < x < t \leqslant \pi,$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x}\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad 0 < t < x < \pi, \tag{52}$$

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} \quad \text{(Cooke, 1928)},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\mu} J_\mu(mx)\left(\frac{my}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(my) = -\frac{1}{2\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{y\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu;\ \frac{1}{2};\ \mu+1;\ \frac{x^2}{y^2}\right), \tag{53}$$

$$\pi > y > x > 0, \quad \mu, \nu > -\frac{1}{2} \quad \text{(Cooke, 1928)},$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\cos(mt)\left(\frac{mx}{2}\right)^{-\nu-1} \mathbf{H}_\nu(mx) = -\frac{\nu+\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$0 < x < t \leqslant \pi, \quad \operatorname{Re}\nu > -1 \quad \text{(Cooke, 1930, стр. 58)},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi}\,x^{-1}\left(1-\frac{t^2}{x^2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ 1-\frac{t^2}{x^2}\right), \tag{54}$$

$$0 < t < x < \pi, \quad \operatorname{Re}\nu > -1 \quad \text{(Cooke, 1930, стр 58)},$$

$$x^\nu = -2\Gamma(\nu+1)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{-\nu} m^{-\nu} J_\nu\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \tag{55}$$

$$0 < x < a, \quad \nu \geqslant 0,$$

$$\pi J_\nu(x) = 2^{3-\nu}\sum_{m=1}^{\infty} m^{1-\nu}(4m^2-1)^{-1}\mathbf{H}_\nu(2mx), \tag{56}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \nu \geqslant -\frac{1}{2},$$

$$x^{\nu-1}\sqrt{\pi} - \pi\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-\nu}\mathbf{H}_\nu(\alpha x) + \pi i\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-\nu} J_\nu(\alpha x) =$$

$$= 2\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty} m(m^2-\alpha^2)^{-1}\left[1-(-1)^m e^{i\alpha\pi}\right]\left(\frac{m}{2}\right)^{1-\nu} J_\nu(mx), \tag{57}$$

$$0 < x < \pi, \quad \nu \geqslant \frac{1}{2}.$$

Относительно (55) — (57) см Pennel (1932).

Разложения типа Фурье—Бесселя. В последующих формулах ν и z произвольны, но $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$ Обозначим через $\pm\gamma_{\nu, n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) нули функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания величины $\operatorname{Re}(\gamma_{\nu, n}) > 0$. Тогда имеют место формулы (Buchholz, 1947)

$$\frac{\pi J_\nu(xz)}{4J_\nu(z)}\left[J_\nu(z)Y_\nu(Xz) - J_\nu(Xz)Y_\nu(z)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_\nu(x\gamma_{\nu, n})\, J_\nu(X\gamma_{\nu, n})\left[J_{\nu+1}(\gamma_{\nu, n})\right]^{-2}\left(z^2-\gamma_{\nu, n}^2\right)^{-1}, \tag{58}$$

$$0 \leqslant x \leqslant X \leqslant 1,$$

$$\frac{J_\nu(xz)}{J_\nu(z)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu,n} J_\nu(x\gamma_{\nu,n})}{\left(\gamma_{\nu,n}^2 - z^2\right) J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})} =$$

$$= x^\nu + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\gamma_{\nu,n} x)}{\gamma_{\nu,n}\left(\gamma_{\nu,n}^2 - z^2\right) J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})}, \quad 0 \leqslant x < 1, \tag{59}$$

$$\frac{J_{\nu+1}(xz)}{J_\nu(z)} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n} x)}{\left(\gamma_{\nu,n}^2 - z^2\right) J_{\nu+1}(\gamma_{\nu,n})}, \tag{60}$$

$$\frac{1}{2}\ln X = -\sum_{n=1}^{\infty} J_0(x\gamma_n) J_0(X\gamma_n)\left[\gamma_n J_1(\gamma_n)\right]^{-2}, \tag{61}$$

$$0 \leqslant x \leqslant X \leqslant 1, \quad \gamma_n = \gamma_{0,n},$$

$$[J_0(z)]^{-1} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_{0,n}\left(z^2 - \gamma_{0,n}^2\right)^{-1} + \gamma_{0,n}^{-1}\right]\left[J_1(\gamma_{0,n})\right]^{-1}, \tag{62}$$

$$[J_0(z)]^{-2} = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_{0,n}^2\left(z^2 - \gamma_{0,n}^2\right)^{-2} + \left(z^2 - \gamma_{0,n}^2\right)^{-1}\right]\left[J_1(\gamma_{0,n})\right]^{-2}, \tag{63}$$

$$[J_1(z)]^{-1} = 2z^{-1} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(z^2 - \gamma_{1,n}^2\right) J_0(\gamma_{1,n})\right]^{-1}, \tag{64}$$

$$[J_1(z)]^{-2} = 4z^{-2} + 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\gamma_{1,n}^2\left(z^2 - \gamma_{1,n}^2\right)^{-2} + \right.$$

$$\left. + \left(z^2 - \gamma_{1,n}^2\right)^{-1}\right]\left[J_0(\gamma_{1,n})\right]^{-2}. \tag{65}$$

Относительно формул (62) — (65) см Forsyth (1921).

ГЛАВА 8
ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА И ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

8.1. Введение

Пусть x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты в трехмерном пространстве. Определим параболические цилиндрические координаты ξ, η, ζ с помощью формул

$$x_1 = \xi\eta, \quad x_2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \quad x_3 = \zeta \tag{1}$$

и координаты параболоида вращения ξ, η, φ с помощью формул

$$x_1 = \xi\eta \cos\varphi, \quad x_2 = \xi\eta \sin\varphi, \quad x_3 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}. \tag{2}$$

Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

— оператор Лапласа, и пусть f — любая функция, зависящая только от x_3. Преобразуя дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Delta u + f(x_3)\, u = 0 \tag{3}$$

к параболическим цилиндрическим координатам, получаем следующее уравнение:

$$(\xi^2 + \eta^2)^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + f(\zeta)\, u = 0. \tag{4}$$

Оно имеет частные решения вида $U(\xi)\, V(\eta)\, W(\zeta)$, где U, V, W удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + (\sigma\xi^2 + \lambda)\, U = 0, \quad \frac{d^2V}{d\eta^2} + (\sigma\eta^2 - \lambda)\, V = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} + [f(\zeta) - \sigma]\, W = 0 \tag{6}$$

с произвольными постоянными σ, λ.

Аналогично, если k^2 постоянно, то дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

преобразованное к координатам параболоида вращения, имеет вид

$$(\xi^2+\eta^2)^{-2}\left[\xi^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right]+(\xi\eta)^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \qquad (7)$$

Оно обладает частными решениями вида $U(\xi)\,V(\eta)\,W(\varphi)$, где U удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\xi^{-1}\frac{dU}{d\xi}+(k^2\xi^2-4\mu^2\xi^{-2}+\lambda)\,U=0. \qquad (8)$$

V удовлетворяет уравнению, аналогичному (8), с той лишь разницей, что знак при λ изменен, а W удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2}+4\mu^2W=0. \qquad (9)$$

Для того чтобы эти решения были однозначны и непрерывны на параболоидах $\xi=\text{const}$ и $\eta=\text{const}$, 2μ должно быть целым числом.

В случае, когда пространство имеет более трех измерений, возможны различные обобщения проведенного исследования уравнения (3). Относительно некоторых из них см Humbert (1920a, b, c, d)

Решения уравнений (5) и (8) можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию. Уравнение (8) содержит две существенно независимые постоянные и, следовательно, обладает той же степенью общности, что и вырожденное гипергеометрическое уравнение 6.1 (2), но для большинства краевых задач важны лишь частные случаи, где 2μ — целое число, а постоянные k и λ вещественны. Здесь будут изучены эти случаи, а также решения уравнения (5).

ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

8.2. Определения и элементарные свойства

Путем простой замены переменной уравнение 8.1 (5) можно преобразовать в

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0. \qquad (1)$$

Решения уравнения (1) называют *функциями параболического цилиндра* или *функциями Вебера — Эрмита*. Их можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию. Если положить

$$D_\nu(z)=2^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}z\Psi\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{2}\right), \qquad (2)$$

$$=2^{\frac{\nu+1/2}{2}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{\nu+1/2}{2},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right), \qquad (3)$$

$$=2^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma[(1-\nu)/2]}\Phi\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{z^2}{2}\right)+$$

$$+\frac{z}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\Phi\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{2}\right) \qquad (4)$$

(относительно обозначений см. 6.1 (1), 6.9 (2) и п. 6.5), то ясно, что функции

$$D_\nu(z),\quad D_\nu(-z),\quad D_{-\nu-1}(iz),\quad D_{-\nu-1}(-iz) \tag{5}$$

удовлетворяют уравнению (1). Равенство (4) позволяет найти значения функции $D_\nu(z)$ и ее производной при $z=0$. Уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, поэтому его частные решения полностью определяются своими значениями и значениями производной при $z=0$. Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$D_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{\nu\pi i}{2}}D_{-\nu-1}(iz)+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}D_{-\nu-1}(-iz)\right], \tag{6}$$

$$=e^{-\nu\pi i}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{-\frac{(\nu+1)\pi i}{2}}D_{-\nu-1}(iz), \tag{7}$$

$$=e^{\nu\pi i}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{\frac{(\nu+1)\pi i}{2}}D_{-\nu-1}(-iz), \tag{8}$$

а также соотношения, которые могут быть получены из них заменой z на $-z$. Пользуясь этими соотношениями, можно установить зависимость между любыми тремя из решений (5).

Функции параболического цилиндра являются целыми функциями от z. Если $\nu=n$ — неотрицательное целое число, то из равенства (4) следует, что

$$e^{\frac{z^2}{4}}D_n(z)=\frac{1}{\sqrt{2^n}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \tag{9}$$

является многочленом; $H_n(x)$ называют *многочленом Эрмита* степени n (см. гл. 10). Если ν не является целым числом, то $D_\nu(z)$ и $D_\nu(-z)$ линейно независимы. Для всех значений ν функции $D_\nu(z)$ и $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ линейно независимы. Определитель Вронского для этих решений дается формулами

$$D_\nu(z)\frac{d}{dz}D_\nu(-z)-D_\nu(-z)\frac{d}{dz}D_\nu(z)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}, \tag{10}$$

$$D_\nu(z)\frac{d}{dz}D_{-\nu-1}(iz)-D_{-\nu-1}(iz)\frac{d}{dz}D_\nu(z)=-i\exp\left(-\frac{\nu\pi i}{2}\right). \tag{11}$$

Если ν и z вещественны, то значения $D_\nu(z)$ тоже вещественны. Если в дифференциальном уравнении 8.1 (5) σ и λ вещественны, то оно имеет вещественные линейно независимые решения, выражаемые через D_ν. Если предположить $\sigma>0$, то уравнение 8.1 (5) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{x^2}{4}-\rho\right)y=0, \tag{12}$$

где $\xi=\frac{x}{\sqrt[4]{4\sigma}}$, $\rho=-\frac{\lambda}{\sqrt{4\sigma}}$, и мы получаем, что вещественные и мнимые части функции

$$D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}x\right) \tag{13}$$

удовлетворяют уравнению (12). Другими решениями уравнения (12), вещественными на вещественной оси, являются

$$\frac{\Gamma[(3-2i\rho)/4]}{2^{\frac{(2i\rho+3)}{4}}\sqrt{\pi}}\left[D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}x\right)+D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(-e^{\frac{i\pi}{4}}x\right)\right]=y_0(x),$$

$$-\frac{\Gamma[(1-2i\rho)/2]}{2^{\frac{(2i\rho+3)}{4}}\sqrt{\pi}(1+i)}\left[D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}x\right)+D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(-e^{\frac{i\pi}{4}}x\right)\right]=y_1(x),$$

$$\operatorname{Re}\left\{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi\rho}{4}}\sqrt{\sqrt{1+e^{-2\pi\rho}}-1}\,e^{-i\left(\frac{\gamma'}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(xe^{\frac{i\pi}{4}}\right)\right\}=y_2(x),$$

$$-\operatorname{Im}\left\{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi\rho}{4}}\sqrt{\sqrt{1+e^{-2\pi\rho}}+1}\,e^{-i\left(\frac{\gamma'}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}D_{i\rho-\frac{1}{2}}\left(xe^{\frac{i\pi}{4}}\right)\right\}=y_3(x),$$

где $\gamma'=\arg\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\rho\right)$; y_0 и y_1 образуют фундаментальную систему в точке $x=0$:

$$y_0(0)=1,\quad y_1(0)=0,\quad y_0'(0)=0,\quad y_1'(0)=1;$$

поведение y_2 и y_3 в окрестности точки $x=\infty$ описывается так:

$$y_2=\sqrt{\frac{2}{x}}\,e^{\frac{\pi\rho}{2}}\sqrt{\sqrt{1+e^{-2\pi\rho}}+1}\,\sin[g(x)][1+O(x^{-1})],$$

$$y_3=\sqrt{\frac{2}{x}}\,e^{\frac{\pi\rho}{2}}\sqrt{\sqrt{1+e^{-2\pi\rho}}-1}\,\cos[g(x)][1+O(x^{-1})],$$

где

$$g(x)=\frac{x^2}{4}-\rho\ln x+\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma'}{2}.$$

Мы имеем также

$$y_3(-x)=y_2(x).$$

J. C. P. Miller использовал y_2 и y_3 для вычисления таблиц значений; y_0 и y_1 были исследованы в работах: Wells, Spence (1945) и Darwin (1949).

Из (2) и 6.6 (6), 6.6 (7) получаем

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0, \tag{14}$$

а из 6.6 (10) находим

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{\frac{z^2}{4}}D_\nu(z)\right]=(-1)^m(-\nu)_m e^{\frac{z^2}{4}}D_{\nu-m}(z), \tag{15}$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{-\frac{z^2}{4}}D_\nu(z)\right]=(-1)^m e^{-\frac{z^2}{4}}D_{\nu+m}(z),\qquad m=1,2,3,\ldots \tag{16}$$

Далее, из (15), (16) и формулы Тейлора вытекает, что

$$D_\nu(x+y)=e^{\frac{2xy+y^2}{4}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-y)^m}{m!}D_{\nu+m}(x)=$$

$$=e^{-\frac{2xy+y^2}{4}}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\nu}{m}y^m D_{\nu-m}(x). \tag{17}$$

Это равенство при $\nu=0$ дает производящую функцию для $D_n(z)$ (то есть для многочленов Эрмита, см. (9) и гл. 10):

$$e^{-\frac{z^2-4zt+2t^2}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D_n(z). \tag{18}$$

Если ν — отрицательное целое число, то $D_\nu(z)$ можно выразить через функцию Гаусса

$$D_{-m-1}(z)=\sqrt{2}\frac{(-1)^m}{m!}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{d^m}{dz^m}\left(e^{\frac{z^2}{2}}\operatorname{Erfc}\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \tag{19}$$

а если $\nu=-\frac{1}{2}$, то через модифицированную функцию Бесселя третьего рода

$$D_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right). \tag{20}$$

8.3. Интегральные представления и интегралы

Интегральные представления функций параболического цилиндра $D_\nu(z)$.

$$D_\nu(z)=\frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_0^\infty e^{-\frac{tz^2}{2}}t^{-1-\frac{\nu}{2}}(1+t)^{\frac{\nu-1}{2}}dt, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\nu<0,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{4},$$

$$=\frac{2^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma[(1-\nu)/2]}ze^{-\frac{z^2}{4}}\int_0^\infty e^{-\frac{tz^2}{2}}t^{\frac{-(1+\nu)}{2}}(1+t)^{\frac{\nu}{2}}dt, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\nu<1,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{4},$$

$$=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-zt-\frac{t^2}{2}}t^{-\nu-1}dt,\quad \operatorname{Re}\nu<0, \tag{3}$$

$$D_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{z^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^\nu \cos\left(zt-\frac{\nu\pi}{2}\right) dt, \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \tag{4}$$

$$D_{-2\nu}\left(\sqrt{\frac{a}{z}}\right)=e^{-\frac{a}{2z}} \frac{z^\nu 2^{\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1} \exp\left[-\sqrt{2at}\right] dt, \tag{5}$$

$$\operatorname{Re}\nu > 0,$$

$$D_\nu(z)=2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \sqrt{z}\, e^{-\frac{3z^2}{4}} (2\pi i)^{-1} \times$$

$$\times \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-s\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{z^2}{2}\right)^s ds, \tag{6}$$

$$|\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad \nu \neq \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{3}{2}, \ \ldots,$$

$$D_\nu(z)\, D_{-\nu-1}(z)=2\int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}(t^2) \cos\left(zt-\frac{\nu\pi}{2}\right) e^{-zt}\, dt, \tag{7}$$

$$\operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1,$$

$$D_\nu\left(z e^{\frac{\pi i}{4}}\right) D_\nu\left(z e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right) e^{-zt}\, dt, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\nu < 0, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{8}{\pi}}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty K_{\nu+\frac{1}{2}}(t^2) \cos\left(zt-\frac{\nu\pi}{2}\right) e^{-zt}\, dt, \quad 0 < -\operatorname{Re}\nu < 1, \tag{9}$$

$$=-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\operatorname{ch} t)^\nu (\operatorname{sh} t)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\operatorname{sh} t\right) dt, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}\nu > 0, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Для доказательства интегральных представлений (1) — (5) достаточно проверить, что их правые части удовлетворяют дифференциальному уравнению 8.2 (1) и принимают нужные начальные значения при $z=0$. Равенства (1) и (2) можно вывести также из 6.5 (2), 6.5 (6) и 8.2 (1). В равенстве (6) путь интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он отделял полюсы функций $\Gamma(s)$ от полюсов двух других гамма-функций в числителе подынтегрального выражения. Эта формула является следствием 6.11 (9).

Интегральные представления (7), (8), (9) доказаны Мейером (Meijer, 1935b, 1937a), а (10) доказано Бейли (Bailey, 1937). Здесь J_ν и K_ν означают функции Бесселя порядка ν, см. 7.2 (2), 7.2 (13).

Существует большое число других интегральных представлений для функций D_ν или для произведений двух функций параболического цилиндра. Относительно произведений D_ν см. Meijer (1934, 1935a, 1938a). Интегральные представления D_ν, содержащие другие вырожденные гипергеометрические функции, были даны в работе Meijer (1941). Относительно других результатов, связанных с (7), (8), (9), см. также Meijer (1937b).

Интегралы, содержащие функции параболического цилиндра:

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{-1+\frac{\beta}{2}} D_{-\nu}(2\sqrt{kt})\,dt =$$
$$= \frac{2^{1-\beta-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\beta+1}{2}\right)}(z+k)^{-\frac{\beta}{2}} F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{\nu+\beta+1}{2}; \frac{z-k}{z+k}\right) \quad (11)$$

$$\operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\frac{z}{k} > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{4}} D_{-\nu}(t)\, t^{2c-1}\Phi\left(a, c; -\frac{pt^2}{2}\right)dt =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{c+\frac{\nu}{2}}}\frac{\Gamma(2c)\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-c+a\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)} F\left(a, c+\frac{1}{2}; a+\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}; 1-p\right), \quad (12)$$

$$|1-p| < 1, \quad \operatorname{Re}c > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 2\operatorname{Re}(c-a),$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{4}} D_{-\nu}(t)\, t^{2c-2}\Phi\left(a, c; -\frac{pt^2}{2}\right)dt =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{c+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(2c-1)\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}-c+a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{\nu}{2}\right)} F\left(a, c-\frac{1}{2}; a+\frac{\nu}{2}; 1-p\right), \quad (13)$$

$$|1-p| < 1, \quad \operatorname{Re}c > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}\nu > 2\operatorname{Re}(c-a)-1,$$

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-\frac{t^2}{4}} D_{2\nu}(t)\, J_{\nu-1}(tz)\,dt =$$
$$= \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} z^{\nu-1} e^{-\frac{z^2}{4}}\Phi\left(-\nu, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right), \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{2\mu}} e^{\frac{y^2}{4}} D_\nu(y)\,dy = (1-\mu)^{\nu/2} e^{x^2/(4-4\mu)} D_\nu\left(\frac{x}{\sqrt{1-\mu}}\right), \quad (15)$$

$$0 < \operatorname{Re}\mu < 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\frac{(1+\lambda)y^2}{4}} D_\nu(y\sqrt{1-\lambda})\,dy = \sqrt{2\pi\lambda^\nu}\, e^{\frac{-(1+\lambda)x^2}{4\lambda}} D_\nu\left(ix\sqrt{\frac{1}{\lambda}-1}\right), \quad (16)$$

$$\operatorname{Re}\lambda > 0,$$

$$\int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, y^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{y^2}{2}} D_{-2\nu}(y)\, dy = x^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} D_{-2\nu}(x), \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \tag{17}$$

$$\int_0^\infty D_\nu(y)\, e^{-\frac{y^2}{4}} \frac{y^\nu}{x^2+y^2}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \Gamma(\nu+1)\, x^{\nu-1} e^{\frac{x^2}{4}} D_{-\nu-1}(x), \tag{18}$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1,$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3t^2}{4}} t^{\nu-1} D_\nu(t)\, dt = 2^{-\frac{\nu}{2}}\, \Gamma(\nu) \cos\left(\frac{\nu\pi}{4}\right), \quad \operatorname{Re}\nu > 0, \tag{19}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4}} t^{\mu-1} D_{-\nu}(t)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-\frac{(\mu+\nu)}{2}}\, \Gamma(\mu)}{\Gamma[(\mu+\nu+1)/2]}, \quad \operatorname{Re}\mu > 0, \tag{20}$$

$$\int_0^\infty D_\mu(\pm t)\, D_\nu(t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi\, 2^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}}{\mu-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \mp \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)} \right]. \tag{21}$$

Здесь $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu$, если выбраны нижние знаки.

$$\int_0^\infty [D_\nu(t)]^2\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \frac{\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right) - \psi\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(-\nu)}, \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^\infty [D_n(t)]^2\, dt = \sqrt{2\pi}\, n!, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

В этих формулах F, Φ, J, ψ означают гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические ряды, функции Бесселя первого рода и логарифмическую производную Γ-функции.

Равенство (11) следует из 6.11 (2) и формулы обращения для преобразования Лапласа. В силу 2.1 (26), 2.1 (2) в случае, когда $\beta = \nu+1$ или $\nu = -2n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, правая часть равенства (11) сводится к элементарным функциям. Относительно доказательств формул (12) и (13) см. Erdélyi (1936). Более общие формулы этого типа, содержащие ${}_pF_q$ (см. п. 4.1) вместо Φ, были даны Mitra (1946). Доказательство формулы (14) провел Meijer (1938). Для того чтобы доказать (15) достаточно подставить вместо D_ν выражение (3) и изменить порядок интегрирования если α стремится к 1, то правая часть (15) стремится к x^ν. Формула (16), по существу, совпадает с (15); формулы (17), (18) принадлежат R. S. Varma (1936, 1937); Watson (1910) доказал (19), а формулы (20), (21) принадлежат Erdélyi (1938), при $\nu = \mu$ из (21) вытекают формулы (22) и (23). Из формулы (21) следует также, что функции $D_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют ортогональную систему функций на оси $(-\infty, \infty)$.

8.4. Асимптотические разложения

Из 8.3 (6) находим, что (см. Уиттекер — Ватсон, 1961) для больших значений $|z|$ и фиксированного значения ν справедливы асимптотические разложения:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)_n}{n!\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + O|z^2|^{-N-1} \right], \tag{1}$$

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)_n}{n!\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + O|z^2|^{-N-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} z^{-\nu-1} e^{\frac{z^2}{4}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)_n}{n!\left(\frac{z^2}{2}\right)^n} + O|z^2|^{-N-1} \right], \tag{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)_n}{n!\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + O|z^2|^{-N-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\nu\pi i} z^{-\nu-1} e^{\frac{z^2}{4}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)_n}{n!\left(\frac{z^2}{2}\right)^n} + O|z^2|^{-N-1} \right], \tag{3}$$

$$-\frac{5\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4},$$

где использовано обозначение

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ \dots\ (\alpha+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

Поведение $D_\nu(z)$ при $|\nu| \to \infty$ и любых значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < \sqrt{|\nu|}$, было полностью изучено в работе: Schwid (1935). Его результаты основаны на методе Лангера (Langer, 1932). В качестве частного случая мы получаем следующий результат, который в приведенной здесь форме был получен Cherry (1949).

Если $|z|$ ограничен и $|\arg(-\nu)| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то при $|\nu| \to \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu}\, z\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right]. \tag{5}$$

8.5. Выражение различных функций через $D_\nu(x)$

8.5.1. Ряды. В частном случае, когда x принимает положительные вещественные значения, из 6.12 (3) следует, что

$$D_\nu(x)=\frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n D_{2n}(x)}{n!\,2^n\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2^{(\nu-1)/2}}{\Gamma[(1-\nu)/2]}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n D_{2n+1}(x)}{n!\,2^n\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}. \tag{1}$$

Эти формулы могут рассматриваться как интерполяционные формулы для функции $D_\nu(x)$ от ν; узлами интерполяции являются неотрицательные четные или нечетные числа. Выражение для $D_\nu(x)\,D_\mu(x)$ через $D_n(\sqrt{2}x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ дал Dhar (1935); Shanker (1939) доказал *теорему сложения*

$$D_\nu(x\cos t+y\sin t)=\exp\left[\frac{(x\sin t-y\cos t)^2}{4}\right]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}(\operatorname{tg}t)^n D_{\nu-n}(x)\,D_n(y)\,(\cos t)^\nu, \tag{2}$$

которая справедлива, если t, x, y вещественны, причем $0<t<\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}\nu>0$.

Erdélyi (1936) доказал разложение (см. 8.4 (4))

$$W_{\varkappa,\mu}\left(\frac{z^2}{2}\right)=2^{-\varkappa}\sqrt{z}\left[\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-1)^l\left(\frac{1}{2}-2\mu\right)_l\left(\frac{1}{2}+2\mu\right)_l}{(2z)^l}D_{2\varkappa-\frac{1}{2}-l}(z)+R_p\right], \tag{3}$$

где через R_p обозначен остаточный член. Этот ряд обрывается, если 2μ равно половине нечетного числа. Во всех остальных случаях ряд, вообще говоря, расходится, но остаточный член допускает оценку. В частности, если $|\arg z|<\frac{\pi}{4}$ и p велико, то разложение имеет асимптотический характер.

Из разложения 6.12 (6) можно вывести разложение $D_\nu(z)$ по функциям Бесселя, причем функции Бесселя в этом случае сводятся к элементарным функциям, поскольку их порядок является полуцелым числом. В частности, мы имеем

$$D_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi 2^\nu}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\varkappa\right)}\left\{\cos\zeta-2^{-6}\varkappa^{-2}\zeta\left[\left(1-\frac{2\zeta^2}{3}\right)\sin\zeta-\zeta\cos\zeta\right]+\ldots\right\}-$$

$$-\frac{\sqrt{\pi 2^\nu}}{\sqrt{\varkappa}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-\varkappa\right)}\left\{\sin\zeta-2^{-6}\varkappa^{-2}\left[(1-\zeta^2)\sin\zeta-\zeta\left(1-\frac{2\zeta^2}{3}\right)\cos\zeta\right]+\ldots\right\},$$

где

$$\varkappa=\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}>0,\quad \zeta=\sqrt{2\varkappa}\,z.$$

и если ζ ограничено, то члены, обозначенные многоточиями, имеют порядок $\varkappa^{-3}$.

Задача Штурма — Лиувилля, связанная с уравнением 8.2 (12), приводит к некоторым ортогональным системам функций на конечном отрезке $(0, x_0)$. Это, по сути дела, функции параболического цилиндра, порядок которых имеет вид $i\rho - \frac{1}{2}$ (ρ вещественно), а переменная имеет аргумент $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{3\pi}{4}$ (см. п. 8.2). Относительно приложений см. Magnus (1941). Относительно задачи Штурма — Лиувилля в общем виде см. гл. X книги Айнса (1941).

8.5.2. Представления в виде интегралов по параметру.

Теорема Черри (Cherry, 1949). *Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на любом конечном отрезке и если она абсолютно интегрируема на оси $(-\infty, \infty)$, то*

$$-4\pi i f(x) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{e^{(\nu+1/2)\pi i/2}}{\sin\nu\pi}\,d\nu \int_{-\infty}^{\infty} [D_\nu(hx)\,D_{-\nu-1}(\bar{h}t) + D_\nu(-hx)\,D_{-\nu-1}(-\bar{h}t)]\,f(t)\,dt, \tag{4}$$

где

$$h = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{h} = e^{-\frac{i\pi}{4}}. \tag{5}$$

Условие абсолютной интегрируемости f можно заменить на

$$f(x) = e^{-\frac{ix^2}{4}}\left(\frac{c_1}{x^\alpha} + \frac{c_2}{x^{\alpha+1}}\right)[1 + O(|x|^{-1})] \tag{6}$$

при $x \to \pm\infty$, где α вещественно и больше $\frac{1}{2}$ и где c_1, c_2 — постоянные (которые могут быть различны для $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Условие (6) нужно в некоторых граничных задачах см. (Magnus, 1940). Равенство (4) аналогично формуле обращения для интеграла Фурье. Оно может быть упрощено, если $f(x)$ является четной или нечетной функцией от x.

Cherry (1949) применил формулу (4) к функции $f(x) = D_\mu(hx)$ при $x > 0$, $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$. В формальном смысле (хотя в этом случае условия (4) и (6) не выполняются) формула Эрдейи для выражения плоской волны в параболических цилиндрических координатах является частным случаем теоремы Черри, а именно:

$$-2i\sqrt{2\pi}\exp\left[-\frac{i}{4}(\xi^2-\eta^2)\cos\varphi - \frac{i}{2}\xi\eta\sin\varphi\right] = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{d\nu}{\sin\nu\pi}\left[\frac{\operatorname{tg}^\nu\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} D_\nu(-h\xi)\,D_{-\nu-1}(h\eta) + \frac{\operatorname{ctg}^\nu\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} D_{-\nu-1}(h\xi)\,D_\nu(-h\eta)\right] \tag{7}$$

(см Erdélyi, 1941) Здесь h определяется формулой (5), а равенство (7) справедливо для всех вещественных значений ξ и η Для задачи о дифракции плоской волны на полуплоскости Cherry (1949) вывел для отраженной волны формулу

$$-2iD_0\left[h\left(\zeta\cos\frac{\varphi}{2}+\eta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]D_{-1}\left[h\left(\eta\cos\frac{\varphi}{2}-\zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]=$$

$$=\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{d\nu}{\sin\nu\pi}\,\frac{\operatorname{tg}^{\nu}\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,D_\nu(-h\zeta)\,D_{-\nu-1}(h\eta) \quad (8)$$

(«волна Зоммерфельда»).

Частным случаем равенства 6.15 (15) является выражение цилиндрической волны через решение уравнения 8.2 (1), а именно:

$$\sqrt{2}\,\pi^2 H_0^{(2)}\left[\frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2}\right]=$$

$$=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}D_\nu\left[\sqrt{k}(1+i)\,\xi\right]D_{-\nu-1}\left[\sqrt{k}(1+i)\,\eta\right]\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)d\nu, \quad (9)$$

где $-1<c<0$, ξ, η вещественны, $\operatorname{Re} ik\geqslant 0$ Другие выражения левой части равенства (9) через интегралы, взятые по параметру функции параболического цилиндра, могут быть получены из теоремы Черри, см также Magnus (1941) Erdélyi (1941) доказал также следующие формулы, которые мо ут рассматриваться как линейные и билинейные континуальные производящие функции для D_ν (см также 6 2 (20)):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}D_\nu(z)\,t^\nu\,\Gamma(-\nu)\,d\nu=e^{-\frac{(z^2+4zt+2t^2)}{4}},\quad c<0,\quad |\arg t|<\frac{\pi}{4}, \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[D_\nu(x)\,D_{-\nu-1}(iy)+D_\nu(-x)\,D_{-\nu-1}(-iy)\right]\frac{t^{-\nu-1}\,d\nu}{\sin(-\nu\pi)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\exp\left[\frac{1}{4}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}(x^2+y^2)+i\frac{txy}{1+t^2}\right],\quad -1<c<0,\ |\arg t|<\frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

8.6. Нули и дескриптивные свойства

При любом фиксированном значении ν формулы 8 4 (1) — 8 4 (3) описывают поведение $D_\nu(z)$ при больших значениях $|z|$; если ν и z вещественны, то $D_\nu(z)$ также вещественно, хотя это, казалось бы, противоречит формулам 8 4 (2) и 8 4 (3) Если ν вещественно, то $D_\nu(z)$ имеет $[\nu+1]$ вещественных нулей, где $[\nu+1]$ означает наибольшее натуральное число, которое меньше, чем $\nu+1$, и равно нулю, если такого натурального числа не существует Это выводится обычным способом из дифференциального уравнения 8 2 (1) Если $\nu=n=0, 1, 2, \ldots$, то $D_n(z)$ имеет ровно n вещественных нулей и не имеет других нулей. Относительно других результатов, касающихся вещественных нулей таких решений уравнения 8.2 (1), которые вещественны на вещественной оси, см Auluck (1941); относительно асимптотических формул для вещественных нулей $D_\nu(x)$ при вещественном ν см Tricomi (1947)

ФУНКЦИИ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

В следующих двух пунктах приведена лишь малая часть формул, полученных при решении граничной задачи для уравнения $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ в координатах параболоида вращения Относящиеся сюда вопросы были весьма подробно изучены Бухгольцем; формулы, приведенные в п 8 7 и 8 8 показывают, какого типа результаты можно найти в работах, на которые сделаны ссылки

8.7. Решения вырожденного гипергеометрического уравнения в некоторых частных случаях

Если в уравнении 8 1 (8) k, μ, λ являются произвольными комплексными числами, то мы получаем дифференциальное уравнение, эквивалентное вырожденному гипергеометрическому уравнению Если же k и λ вещественны, а 2μ — целое число, то уравнение 8 1 (8) сводится к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi^{-1}\frac{du}{d\xi} + (4\xi^2 - p^2\xi^{-2} - 4\tau)\,u = 0, \tag{1}$$

где

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

и τ, ξ вещественны. Решениями уравнения (1) являются

$$\xi^{-1}M_{\pm i\tau,\,\frac{p}{2}}(\pm i\xi^2),\quad \xi^{-1}W_{\pm i\tau,\,\frac{p}{2}}(\pm i\xi^2) \tag{3}$$

(относительно обозначений см. п. 6.9). Эти решения связаны соотношениями

$$e^{-\frac{i\pi(p+1)}{4}}M_{i\tau,\,\frac{p}{2}}(i\xi) = e^{\frac{i\pi(p+1)}{4}}M_{-i\tau,\,\frac{p}{2}}(-i\xi), \tag{4}$$

$$= \frac{p!\exp\left(\pi\tau - \frac{i\pi(p+1)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}-i\tau\right)}W_{-i\tau,\,\frac{p}{2}}(-i\xi) + \frac{p!\exp\left(\pi\tau + \frac{i\pi(p+1)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}+i\tau\right)}W_{i\tau,\,\frac{p}{2}}(i\xi), \tag{5}$$

где ξ обозначает вещественное положительное переменное и $\arg(\pm i\xi) = \pm\frac{\pi}{2}$.

При $\xi \to \infty$ и фиксированных значениях τ, p мы имеем

$$W_{i\tau,\,\frac{p}{2}}(i\xi) = \xi^{i\tau}e^{-(i\xi+\pi\tau)/2}[1 + O(\xi^{-1})], \tag{6}$$

$$W_{-i\tau,\,\frac{p}{2}}(-i\xi) = \xi^{-i\tau}e^{(i\xi-\pi\tau)/2}[1 + O(\xi^{-1})]. \tag{7}$$

Соответствующие выражения для M-функций в (3) могут быть выведены из (4), (5), (6) и (7).

Функции

$$e^{-\frac{i\pi(p+1)}{4}} M_{i\tau,\,\frac{p}{2}}(i\xi) = e^{\frac{i\pi(p+1)}{4}} M_{-i\tau,\,\frac{p}{2}}(-i\xi) \tag{8}$$

вещественны при вещественных положительных значениях ξ (если τ и p вещественны).

Если p и ξ фиксированы и τ велико, то 6.13 (8) приводит к следующим асимптотическим выражениям:

$$W_{\pm i\tau,\,\frac{p}{2}}(\pm i\xi) = \sqrt{2}\, e^{\mp\frac{i\pi}{4}} e^{\mp i\tau} \tau^{\pm i\tau} (\xi\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \times$$
$$\times \operatorname{ch}\left(\tau - 2\sqrt{\tau\xi} \pm \frac{i\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right], \tag{9}$$

$$W_{\mp i\tau,\,\frac{p}{2}}(\pm i\xi) = \sqrt{2}\, e^{\pm i\tau} \tau^{\mp i\tau} (\xi\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\tau}{2}} \times$$
$$\times \cos\left(\mp i\tau - 2\sqrt{\tau\xi} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right], \tag{10}$$

где τ, ξ вещественны и положительны.

Erdélyi (1937) изучил случай, когда $|\tau|$ и $|\xi|$ принимают большие значения такие, что $\frac{\tau}{\xi}$ является фиксированным отрицательным числом. Его результат имеет вид

$$M_{-i\tau,\,\mu}[i\tau(2\operatorname{sh}\beta)^2] =$$
$$= \Gamma(2\mu+1)\, e^{i\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)/2} \tau^{-\mu} \sqrt{\frac{2\operatorname{th}\beta}{\pi}} \times$$
$$\times \sin\left[\tau(\operatorname{sh}2\beta + 2\beta) - \left(\mu - \frac{1}{4}\right)\pi\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right], \tag{11}$$

где τ, β, $\mu + \frac{1}{2}$ вещественны и положительны.

Для решения некоторых граничных задач используются следующие функции. Пусть ζ_0 — фиксированное вещественное положительное число. Тогда существует такая последовательность вещественных чисел τ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, что

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \ldots \quad \text{и} \quad M_{i\tau_n,\,\frac{p}{2}}(i\zeta_0) = 0.$$

Функции

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta_0}}\, M_{i\tau_n,\,\frac{p}{2}}(i\zeta) \tag{12}$$

ортогональны на отрезке $(0, \zeta_0)$. Для того, чтобы вычислить τ_n при фиксированном ζ_0, и для того, чтобы найти нормирующий множитель для функций (12), Buchholz (1943) дал формулу

$$(i\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} M_{i\tau,\,\frac{p}{2}}(i\zeta) =$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(l+1+\frac{p}{2}\right)} \frac{\left(\frac{\zeta}{4}\right)^{l+\frac{1}{2}}}{l!} \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{l}\left[1+\frac{\tau^2}{\left(r+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)^2}\right]\left[J_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{|\zeta|}{2}\right)+\frac{\tau \operatorname{sgn}\zeta}{l+\frac{1}{2}+p} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{|\zeta|}{2}\right)\right], \qquad (13)$$

где τ, ζ вещественны, $\tau > 0$, $\zeta \neq 0$, а также аналогичные формулы для частных производных

$$\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau\, \partial \zeta}$$

функции (13).

8.8. Интегралы и ряды, содержащие функции параболоида вращения

Как следствие из 6.15 (15) получаем

$$\frac{e^{i(x+y)}}{x+y} = \frac{-i}{2\sqrt{xy}} \int_{-i\infty}^{i\infty} W_{-s,\,0}(-2ix)\, W_{s,\,0}(-2iy)\, \frac{ds}{\cos(\pi s)}. \qquad (1)$$

Эта формула дает выражение сферической волны с центром в фокусе параболоида через функции параболоида вращения Формулу (1) впервые доказал Meixner (1933), который также вывел формулу

$$\frac{2\pi\, p!\, p!}{(2p+1)!}\, \Gamma(p+1+2i\alpha)\, \Gamma(p+1-2i\alpha)\, \frac{(xy)^{(p+1)/2}}{(x+y)^{p+1}} M_{-2i\alpha,\,\frac{p}{2}}(x+y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left[\frac{p}{2}+\frac{1}{2}+i(\alpha+\tau)\right] \Gamma\left[\frac{p}{2}+\frac{1}{2}+i(\alpha-\tau)\right] \times$$

$$\times \Gamma\left[\frac{p}{2}+\frac{1}{2}-i(\alpha+\tau)\right] \Gamma\left[\frac{p}{2}+\frac{1}{2}-i(\alpha-\tau)\right] \times$$

$$\times M_{i\alpha+i\tau,\,\frac{p}{2}}(x)\, M_{i\alpha-i\tau,\,p/2}(y)\, d\tau, \qquad (2)$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Интегральные представления для более сложных типов волн, имеющих особенность в фокусе параболоида вращения, были даны в работе: Buchholz (1947). Один из содержащихся там результатов имеет вид

$$\sqrt{xy}\, i^n \sqrt{\frac{\pi}{2(x+y)}}\, H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x+y)\, P_n^p\left(\frac{x-y}{x+y}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi} \frac{(n+p)!}{p!\,p!\,(n-p)!} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-s+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times {}_3F_2 W_{-s,\,\frac{p}{2}}(-2ix)\, W_{-s,\,\frac{p}{2}}(-2iy)\, ds, \qquad (3)$$

где

$$x > y \geqslant 0, \quad \sigma < \frac{1}{2} + \frac{p}{2}$$

и где ${}_3F_2$ определяется как

$${}_3F_2 = {}_3F_2\left(-n+p,\ n+p+1,\ -s+\frac{1}{2}+\frac{p}{2};\ p+1,\ p+1;\ 1\right)$$

(см. 4.1 (1) для определения обобщенного гипергеометрического ряда).

Если $n = p$, то (3) эквивалентно 6.15 (15). Надо отметить, что $H^1_{n+\frac{1}{2}}$ является элементарной функцией; см. 7.2 (6).

Выражение для сферической волны с центром в произвольной точке через функции параболоида вращения дано в той же работе: Buchholz (1947). Если

$$R = \left\{[(x_1 - y_1) - (x_0 - y_0)]^2 + 4x_0y_0 + 4x_1y_1 - 8\sqrt{x_0y_0x_1y_1}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right\}^{1/2},$$

причем x_0, y_0, x_1, y_1 — вещественные положительные числа и $x_0 > x_1$, $y_0 > y_1$, то при вещественном $\sigma < \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x_0y_0x_1y_1}\, \frac{e^{iR}}{iR} = -2 \sum_{p=0}^{\infty} (2 - \delta_{0,\,p}) \frac{\cos[p(\varphi_0 - \varphi_1)]}{p!\,p!} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(-s+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right) \times$$

$$\times \left[M_{-s,\,\frac{p}{2}}(-2ix_1)\, M_{s,\,\frac{p}{2}}(-2iy_1)\, W_{-s,\,\frac{p}{2}}(-2ix_0)\, W_{s,\,\frac{p}{2}}(-2iy_0)\right] ds, \qquad (4)$$

где $\delta_{0,\,0} = 1$ и $\delta_{0,\,p} = 0$, если $p > 0$.

Для плоской волны Buchholz (1947) дал смешанное представление, содержащее как ряды, так и интегралы:

$$\exp\left[i(x-y)\cos\theta+2\sqrt{xy}\sin\theta\cos\varphi\right]=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{xy}\sin\theta}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2-\delta_{0,p}}{p!\,p!}\,i^p\cos(p\varphi)\times$$
$$\times(2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{2s}\times$$
$$\times M_{s,\frac{p}{2}}(-2ix)\,M_{s,\frac{p}{2}}(-2iy)\,ds. \qquad (5)$$

Некоторым интегральным представлениям из этого пункта соответствуют разложения в ряды. В простейшем случае формула, соответствующая (1), имеет вид

$$\frac{e^{i(x+y)}}{x+y}=\frac{1}{\sqrt{xy}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,W_{-n-\frac{1}{2},\,0}(-2ix)\,W_{-n-\frac{1}{2},\,0}(-2iy). \qquad (6)$$

Относительно большого числа других рядов и интегралов см. Buchholz (1943, 1947, 1948, 1949).

ГЛАВА 9

НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. Введение

Мчогие функции, встречающиеся в работах по прикладной математике, могут быть выражены через *неполные гамма-функции*

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x), \tag{2}$$

которые в свою очередь тесно связаны с частным случаем $a = 1$ вырожденных гипергеометрических функций $\Phi(a, c; x)$ и $\Psi(a, c; x)$. В силу 6.5 (1), 6.5 (2) и 6.5 (6) мы имеем

$$\gamma(\alpha, x) = \alpha^{-1} x^{\alpha} e^{-x}\, \Phi(1, 1+\alpha; x) = \alpha^{-1} x^{\alpha}\, \Phi(\alpha, 1+\alpha; -x), \tag{3}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = x^{\alpha} e^{-x}\, \Psi(1, 1+\alpha; x) = e^{-x}\, \Psi(1-\alpha, 1-\alpha; x). \tag{4}$$

При $a = 1$ вырожденное гипергеометрическое уравнение 6.1 (2) имеет элементарное решение

$$e^{x} x^{1-c}.$$

Поэтому частные виды вырожденной гипергеометрической функции, которые будут изучены в этой главе, удовлетворяют простому дифференциальному уравнению *первого порядка.*

Во многих случаях предпочтительнее рассматривать в качестве основной несколько модифицированную функцию

$$\gamma^*(\alpha, x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt =$$
$$= \frac{e^{-x}}{\Gamma(1+\alpha)}\, \Phi(1, 1+\alpha; x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\, \Phi(\alpha, 1+\alpha; -x), \tag{5}$$

поскольку она является однозначной целой функцией как от α, так и от x и вещественна при вещественных значениях α и x.

Через неполные гамма-функции можно выразить следующие функции: интегральную показательную функцию и интегральный логарифм, интегральные синус и косинус, интеграл вероятности, а также интегралы Френеля и обобщения этих функций. Для этих функций существует много различных определений и обозначений. Обозначения, используемые в этой книге, будут введены в пунктах, посвященных соответствующим функциям.

НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ

9.2. Определения и элементарные свойства

Неполные гамма-функции изучались впервые при вещественных значениях x Лежандром (Legendre, 1811, том 1, стр. 339—343 и последующие работы) Значение разложения

$$\Gamma(\alpha)=\gamma(\alpha, x)+\Gamma(\alpha, x) \tag{1}$$

было выяснено Примом (Prym, 1877), который, по-видимому, был первым, изучавшим функциональные свойства этих функций (он обозначал их через P и Q).

Для этих функций применяются различные обозначения. Помимо обозначений, используемых в этой книге, чаще всего применяется в настоящее время используемое в астрофизике и ядерной физике обозначение

$$E_n(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-n}\,du=x^{n-1}\Gamma(1-n, x).$$

Иногда применяется и обозначение $K_n(x)$. Относительно формул в этом обозначении см. Placzek (1946), Le Caine (1948) и Busbridge (1950).

Результаты теории неполных гамма-функций, полученные в XIX веке, изложены в книге: Nielsen (1906a, особенно гл. XV, и 1906b), где приведены также ссылки на литературу. Более современное изложение дано Бемером (Böhmer, 1939).

Принято определять неполные гамма-функции с помощью неполных интегралов Эйлера второго рода 9.1 (1) и 9.1 (2). Однако для того, чтобы избежать трудностей, связанных с расходимостью интеграла 9.1 (1) при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, мы будем определять неполные гамма-функции равенствами 9.1 (3) и 9.1 (4), в которых функции x^α и Ψ однозначно определены условиями из гл. 6. В иных обозначениях определение 9.1 (2) было известно Лежандру. В то время как функция $\gamma^*(\alpha, x)$ является целой функцией относительно α и x, функция $\gamma(\alpha, x)$ не определена при $\alpha=0, -1, -2, \ldots$ Функция $\Gamma(\alpha, x)$ является целой функцией от α, однако, за исключением случая, когда α — целое число, она является многозначной функцией от x с точкой ветвления $x=0$.

Рекуррентные формулы

$$\gamma(\alpha+1, x)=\alpha\,\gamma(\alpha, x)-x^\alpha e^{-x}, \tag{2}$$

$$\Gamma(\alpha+1, x)=\alpha\,\Gamma(\alpha, x)+x^\alpha e^{-x} \tag{3}$$

являются простыми следствиями определений и могут быть выведены из неполного интеграла Эйлера второго рода путем интегрирования по частям. Они могут быть использованы для иного определения рассматриваемых здесь функций.

Имеют место сходящиеся разложения по возрастающим степеням x

$$\gamma(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha)_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)}, \tag{4}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)}, \tag{5}$$

которые справедливы при всех x и $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ Здесь положено

$$(\alpha_0) = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Справедливы также асимптотические разложения по убывающим степеням x

$$\Gamma(\alpha, x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m} + O(|x|^{-M}) \right], \tag{6}$$

$$|x| \to \infty, \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}, \quad M = 1, 2, \ldots,$$

$$\gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - x^{\alpha-1} e^{-x} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m} + O(|x|^{-M}) \right]. \tag{7}$$

Либо пользуясь степенными рядами, либо непосредственно из определения получаем формулы дифференцирования

$$\frac{d\gamma(\alpha, x)}{dx} = -\frac{d\Gamma(\alpha, x)}{dx} = x^{\alpha-1} e^{-x}, \tag{8}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} [x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x)] = (-1)^n x^{-\alpha-n} \gamma(\alpha+n, x), \tag{9}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} [e^x \gamma(\alpha, x)] = (-1)^n (1-\alpha)_n e^x \gamma(\alpha-n, x), \tag{10}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} [x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x)] = (-1)^n x^{-\alpha-n} \Gamma(\alpha+n, x), \tag{11}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} [e^x \Gamma(\alpha, x)] = (-1)^n (1-\alpha)_n e^x \Gamma(\alpha-n, x). \tag{12}$$

Последняя формула справедлива при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Лежандру принадлежит разложение в непрерывную дробь

$$\Gamma(\alpha, x) = \cfrac{e^{-x} x^{\alpha}}{x + \cfrac{1-\alpha}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\alpha}{1+\ldots}}}}, \tag{13}$$

которое может быть выведено из равенства (3). Другие разложения в непрерывные дроби были получены в работах: Schlömilch (1871) и Tannery (1882).

В случае, когда a — натуральное число, вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, c; x)$ и $\Psi(a, c; x)$ могут быть выражены через неполные гамма-функции согласно формулам

$$\Phi(n+1, \alpha+1; x) = \frac{\alpha}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [e^x x^{n-\alpha} \gamma(\alpha, x)], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$\Psi(n+1, \alpha+1; x) = \frac{1}{n!(1-\alpha)_n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [e^x x^{n-\alpha} \Gamma(\alpha, x)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Первая формула теряет смысл при отрицательных целых значениях α; однако если перед тем, как устремить α к такому значению, разделить обе части формулы на $\Gamma(\alpha+1)$, то мы получим формулу, имеющую смысл. Вторая формула теряет смысл, если α — натуральное число.

9.2.1. Случай целого значения α. В этом пункте

$$e_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

является усеченным показательным рядом, а $E_n(x)$ — интегралом, определенным в п. 9.2. Мы имеем

$$\gamma(1+n, x) = n! [1 - e^{-x} e_n(x)], \tag{17}$$

$$\Gamma(1+n, x) = n! e^{-x} e_n(x), \tag{18}$$

$$\Gamma(1-n, x) = x^{1-n} E_n(x). \tag{19}$$

С помощью повторного интегрирования по частям получаем, что

$$\Gamma(-n, x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[E_1(x) - e^{-x} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}} \right], \tag{20}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Функция $\gamma(\alpha, x)$ не существует при $\alpha = -n$, но из 9.1 (5) следует, что

$$\gamma^*(-n, x) = x^n. \tag{21}$$

Следует отметить, что при натуральных значениях a и целых значениях c вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, c; x)$ и $\Psi(a, c; x)$ могут быть выражены через рассматриваемые здесь функции. При $a = 1 + n$ и $c = 2, 3, \ldots$ это вытекает из равенства (14) Для других целых значений c надо разделить равенство (14) на $\Gamma(c+1)$ и выразить правую часть через γ^*, после чего устремить c к целому значению Для функции Ψ при $a = 1 + n$ и $c = 1, 0, -1, -2, \ldots$ имеют место формулы (15) и (19) Случай $c = 2, 3, \ldots$ может быть сведен к разобранному здесь случаю с помощью равенства 6 5 (6).

Если α близко к целому значению, то можно получить полезные приближения для неполной гамма-функции путем использования значений ее производных по α при целых значениях α Используя интегральное представление 9.1 (5), получаем, что

$$\left. \frac{\partial \gamma^*(\alpha, x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\ln x - E_1(x). \tag{22}$$

Значения производных при других целых значениях α получаются путем использования рекуррентных соотношений.

9.3. Интегральные представления и формулы интегрирования

Основными интегральными представлениями являются неполные интегралы Эйлера второго рода 9.1 (1) и 9.1 (2). Первый из них расходится при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$. Его можно заменить контурным интегралом

$$\gamma(\alpha, x) = -(2i \sin \pi\alpha)^{-1} x^{\alpha} \int_{1}^{(0+)} e^{-xu} (-u)^{\alpha-1}\, du, \tag{1}$$

где вдоль пути интегрирования $-\pi \leqslant \arg(-u) \leqslant \pi$, x произвольное $\neq 0$ и α не является целым числом. Если выбрать в качестве пути интегрирования окружность $-u = \cos\theta + i\sin\theta$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то получаем

$$\gamma(\alpha, x) = \frac{x^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \int_{0}^{\pi} e^{x\cos\theta} \cos(\alpha\theta + x\sin\theta)\, d\theta. \tag{2}$$

При $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$, $x \leqslant 0$ из равенства 6.11 (13) может быть получен вещественный интеграл.

Для функции $\Gamma(\alpha, x)$ основными интегральными представлениями являются 9.1 (2) и

$$\Gamma(\alpha, x) = \frac{e^{-x} x^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t} t^{-\alpha}}{x+t}\, dt. \tag{3}$$

Последний интеграл получается, если применить к последней функции Ψ в 9.1 (4) формулу 6.5 (2). Непрерывная дробь Лежандра 9.2 (13) является следствием формулы (3).

Другими интегральными представлениями являются

$$\gamma(\alpha, x) = x^{\alpha/2} \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{(\alpha-2)/2} J_{\alpha}(2\sqrt{xt})\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{4}$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \frac{2x^{\alpha/2} e^{-x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{xt})\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha < 1, \tag{5}$$

$$\Gamma(2-2\alpha)\,\Gamma(\alpha, -ix)\,\Gamma(\alpha, ix) =$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-xt} t^{-2\alpha} \left[\frac{1}{t+2i}\, {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t+2i}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{t-2i}\, {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-\alpha; \frac{t}{t-2i}\right)\right] dt, \quad \operatorname{Re}\alpha < 1, \quad \operatorname{Re}x > 0. \tag{6}$$

Последнее из них принадлежит Tricomi (1950a).

Некоторыми из наиболее важных формул интегрирования являются

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \gamma(\alpha, t)\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\alpha(1+s)^{\alpha+\beta}}\, {}_2F_1\left(1, \alpha+\beta; \alpha+1; \frac{1}{1+s}\right), \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \Gamma(\alpha, t)\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\beta(1+s)^{\alpha+\beta}}\, {}_2F_1\left(1, \alpha+\beta; \beta+1; \frac{s}{1+s}\right), \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0, \quad \operatorname{Re} s > -\frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \gamma(\alpha, t^2)\, dt = 2^{1-\alpha}\Gamma(2\alpha)\, s^{-1} e^{\frac{s^2}{8}} D_{-2\alpha}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > -\frac{1}{2}, \quad \alpha \neq 0, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$\Gamma(\alpha)\, x^{\alpha-\beta} \int_0^1 e^{-xt} t^{\alpha-\beta-1} \gamma(\beta, x - xt)\, dt = \Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta)\,\gamma(\alpha, x), \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}\beta > -1, \quad \alpha\beta \neq 0.$$

Если в формуле (7) $\beta = 1$ или в формуле (8) $\alpha = 1$, то гипергеометрическая функция сводится к элементарной функции; в формуле (9) D является функцией параболического цилиндра. Следует отметить, что интегралы (3) — (9) были выведены Лапласом. Относительно других интегралов см. Nielsen (1906b, c), Le Caine (1948) и Busbridge (1950).

9.4. Ряды

Степенные ряды и разложения в непрерывные дроби были указаны в п. 9.2. Используя в формуле 9.3 (3) разложение

$$\frac{1}{x+t} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)_n}{(x)_{n+1}}, \quad t \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} x > 0,$$

получаем разложение по *обратным факториалам*

$$\Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^\alpha \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{(x)_{n+1}}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \tag{1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} (-t)_n\, dt = (-1)^n \frac{n!}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} \binom{t}{n} dt.$$

Из 9.1 (1) получаем

$$\gamma(\alpha, x+y) - \gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha-1} \int_0^y e^{-u} \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} du.$$

Если $|y| < |x|$, то можно разложить $\left(1+\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}$ в биномиальный ряд, почленно проинтегрировать и использовать формулу 9.2 (17). Таким путем получаем разложение

$$\Gamma(\alpha, x) - \Gamma(\alpha, x+y) = \gamma(\alpha, x+y) - \gamma(\alpha, x) =$$
$$= e^{-x} x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)_n (-x)^{-n} [1 - e^{-y} e_n(y)], \quad |y| < |x|, \tag{2}$$

полезное для вычисления значений $\Gamma(\alpha, x)$.

Неполная гамма-функция допускает большое число разложений в ряды, многие из которых могут быть получены путем выбора частных значений параметра в разложениях гл 6. Мы укажем лишь часть этих разложений. Следует отметить, что при $h = 0$, $a = -1$ коэффициенты в 6.12 (7) могут быть выражены через усеченный показательный ряд; 6.12 (6) дает

$$\gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(-1) x^{\frac{n}{2}} I_{n+\alpha}(2\sqrt{x}). \tag{3}$$

Если α не является отрицательным целым числом, то полученный ряд быстро сходится при всех $x \neq 0$. В разложении 6.12 (11) коэффициенты могут быть выражены через многочлены Лагерра.

Если x, y — положительные числа, причем $x \geqslant y$, то имеем

$$\Gamma(\alpha, x)\,\gamma(\alpha, y) = e^{-x-y} (xy)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)(\alpha)_{n+1}} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y). \tag{4}$$

Предельным случаем этого разложения при $y \to 0$ является

$$\Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n+1}, \quad x > 0. \tag{5}$$

Эта формула совпадает с частным случаем $a = 1$ разложения 6.12 (3) Ψ-функции в ряд по многочленам Лагерра.

Относительно других разложений см. Nielsen (1906a, 82 и 83).

9.5. Асимптотические представления

При $a \to \infty$, $x = o(|\alpha|)$ первый ряд 9.2 (4) является асимптотическим разложением; при $x \to \infty$ и $\alpha = o(|x|)$ получаем разложение 9.2 (6). Если x и α имеют один и тот же порядок, то разложение может быть получено из 6.13 (17); однако в этом случае нелегко найти общую форму такого разложения или установить условия, при которых оно представляет функцию $\gamma(\alpha, x)$, когда и α и x возрастают. Значительные осложнения возникают в случае, когда x и $\alpha+1$ почти равны, более точно, если $\alpha \to \infty$ и $x = \alpha + 1 + o(|\alpha|)$.

Трикоми (Tricomi, 1950) провел изучение этого вопроса. Он ввел параметр

$$z = \frac{\sqrt{\alpha}}{x - \alpha} \tag{1}$$

и рассмотрел два случая, соответствующие тому, мало или велико z.

Если $z \to 0$ и $|\arg z| < \frac{3\pi}{4}$, то он доказал, что $\Gamma(1+\alpha, x)$ асимптотически представляется рядом

$$e^{-x}x^{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} l_n(\alpha)\, n!\,(x-\alpha)^{-n-1}, \tag{2}$$

коэффициенты которого

$$n!\,l_n(\alpha) = \left\{\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{-\alpha t}(1+t)^{\alpha}\right]\right\}_{t=0} = L_n^{(\alpha-n)}(\alpha) \tag{3}$$

являются некоторыми многочленами степени $\left[\frac{n}{2}\right]$ по α. Tricomi (1951) изучил эти многочлены. В частности, имеет место формула

$$\Gamma(1+\alpha, x) = \frac{e^{-x}x^{\alpha+1}}{x-\alpha}\left[1 - \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(x-\alpha)^3} + O(|\alpha|^2|x-\alpha|^{-4})\right]. \tag{4}$$

Если $z \to \infty$ (т. е. x и α почти равны), то следует различать два случая, в зависимости от того, положительно или отрицательно $\operatorname{Re}\alpha$. В последнем случае Tricomi использовал функцию

$$\gamma_1(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)\,x^{\alpha}\gamma^*(\alpha, -x), \quad x > 0. \tag{5}$$

Он показал, что если $\alpha \to +\infty$ и y ограничено, то

$$\gamma(1+\alpha, \alpha+\sqrt{2\alpha}\,y) = \Gamma(1+\alpha)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{Erf}(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right], \tag{6}$$

$$\Gamma(\alpha)\gamma_1(1-\alpha, \alpha+2\sqrt{2\alpha}\,y) = -\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi) + 2\sqrt{\pi}\operatorname{Erfi}(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \tag{7}$$

При $\alpha = n$ имеем, в частности,

$$e_n\left(n + \frac{1}{\sqrt{2n}}\,y\right) = \exp(n+\sqrt{2n}\,y)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{Erf}(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \tag{8}$$

См. также Furch (1939) и Placzek (1946) (добавления, которые сделал Blanch).

9.6. Нули и дескриптивные свойства

Результаты, касающиеся нулей при вещественных α и x, могут быть получены из результатов п. 6.16. Оттуда вытекает, что:

I. Если $\alpha \geqslant 0$, то $\gamma(\alpha, x)$ не имеет нулей (за исключением $x = 0$).

II. Если $1-2n < \alpha < 2-2n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, то $\gamma(\alpha, x)$ имеет один отрицательный нуль x' и не имеет положительных нулей.

III. Если $-2n < \alpha < 1-2n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\gamma(\alpha, x)$ имеет один отрицательный нуль x' и один положительный нуль x''.

Общее поведение этих нулей как функций от α может быть получено из карты рельефа (рис. 5) для γ^*.

Приближенные формулы для нулей, справедливые для больших значений α, были получены Tricomi (1950b); он доказал, что

$$x' = -(1-\alpha)\left[1+\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}\,y^*(\alpha)+O(|\alpha|^{-1})\right], \tag{1}$$

$$x'' = -\tau\alpha - \frac{\tau}{1+\tau}\ln\frac{1+\tau\sqrt{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{\sin(\alpha\pi)} + O[|\alpha|^{-1}(\ln|\alpha|)^2]. \tag{2}$$

Здесь через $y^*(\alpha)$ обозначен единственный положительный корень уравнения

$$\mathrm{Erf}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{ctg}(\alpha y), \tag{3}$$

а через $\tau = 0{,}278463\ldots$ единственный положительный корень уравнения

$$1 + x + \ln x = 0. \tag{4}$$

Зафиксируем значение $\alpha > 0$; тогда $\gamma(\alpha, x)$ при $x > 0$ является монотонно возрастающей функцией от x. Ее значения пробегают полуотрезок

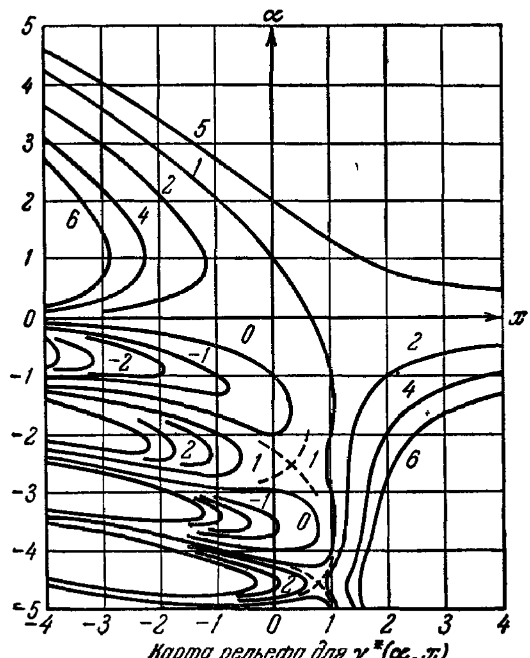


Рис. 5.

от нуля до $\Gamma(\alpha)$, когда x пробегает луч $(0, \infty)$. Можно показать, что при фиксированном значении $x > 0$ функция $\frac{\Gamma(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)}$ является монотонно убывающей функцией от α при $\alpha > 0$. Tricomi (1951) изучил поведение неполных гамма-функций в других квадрантах вещественной плоскости α, x. Он ввел новые функции с помощью равенств

$$\Gamma(\alpha, x) = -\alpha^{-1} e^{-x} x^{\alpha} G(\alpha, x), \quad \alpha \leqslant 0, \; x \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\gamma_1(\alpha, x) = \alpha^{-1} e^{x} x^{\alpha} g_1(\alpha, x), \quad \alpha \geqslant 0, \; x \leqslant 0, \tag{6}$$

$$\gamma^*(-\alpha, -x) = \Gamma(\alpha+1) e^{x} k(\alpha, x), \quad \alpha \geqslant 0, \; x \geqslant 0, \tag{7}$$

и доказал, что в области их определения выполняются неравенства

$$\frac{\partial G}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} > 0, \quad |k| \leqslant 1.$$

Кроме того, он доказал что $|k| \leqslant \frac{1}{2}$ при $\alpha \geqslant 1$, а также что k, рассматриваемое как функция от x, имеет только один максимум или минимум, если $0 < \alpha < 1$, и два экстремума, если $\alpha > 1$.

Карта рельефа (рис. 5) заимствована из работы Трикоми. Она дает линии $\gamma^*(\alpha, x) = \text{const}$.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НЕПОЛНЫХ ГАММА-ФУНКЦИЙ

9.7. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм

Основными функциями, рассматриваемыми здесь, являются

$$E_1(x) = -\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{-1}\, dt = \Gamma(0, x) = e^{-x} \Psi(1, 1, x), \tag{1}$$

$$E^*(x) = -\,\int_{-x}^{\infty} e^{-t} t^{-1}\, dt, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{Ei}(\ln x) = -E_1(-\ln x). \tag{3}$$

В формуле (2) интеграл понимается как главное значение в смысле Коши, то есть

$$\lim \left(\int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon > 0.$$

В книге Янке — Эмде — Лёш (1964) эта функция обозначается через $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$. Мы имеем следующие соотношения между функциями, определенными равенствами (1) и (2):

$$-E_1(x e^{\pm i\pi}) = E^*(x) \pm i\pi, \quad x > 0. \tag{4}$$

Следующие формулы, а также некоторые другие могут быть получены из формул первой части этой главы путем предельного перехода:

$$\mathrm{Ei}(-x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!\,n}=\gamma+\ln x-e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}, \tag{5}$$

$$E^*(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,n}, \tag{6}$$

где γ — постоянная Эйлера, см. п. 1.7.2,

$$E_1(x)=x^{-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{m!}{(-x)^m}+O(|x|^{-M})\right], \tag{7}$$

$$|x|\to\infty,\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg x<\frac{3\pi}{2},\quad M=1,2,\ldots,$$

$$E^*(x)=x^{-1}e^{x}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{m!}{x^m}+O(|x|^{-M})\right], \tag{8}$$

$$x\to\infty,\quad x>0,\quad M=1,2,\ldots,$$

$$\frac{d^n\,\mathrm{Ei}(-x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}e^{-x}e_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$\frac{d^n\,[e^x\,\mathrm{Ei}(-x)]}{dx^n}=e^x\,\mathrm{Ei}(-x)+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m\,m!}{x^{m+1}},\quad n=1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\beta-1}\,\mathrm{Ei}(-t)\,dt=-\frac{\Gamma(\beta)}{\beta(1+s)^{\beta}}\,{}_2F_1\left(1,\beta;\beta+1;\frac{s}{1+s}\right), \tag{11}$$

$$\operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}s>-\frac{1}{2}.$$

К этим соотношениям присоединим еще интегралы Раабе

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{a^2+t^2}\,dt=\frac{1}{2a}\,[e^{ax}E_1(ax)+e^{-ax}E^*(ax)]\quad a>0,\quad x>0, \tag{12}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{t\cos(xt)}{a^2+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\,[e^{ax}E_1(ax)-e^{-ax}E^*(ax)],\quad a>0,\quad x>0, \tag{13}$$

которые могут быть непосредственно выведены из (1) и (2), а также

$$\int_a^\infty (b+t)^{-1} e^{-ct}\,dt = e^{bc}E_1[(a+b)c], \qquad \operatorname{Re} c > 0, \tag{14}$$

$$\int_1^\infty e^{-xt}\ln t\,dt = x^{-1}E_1(x), \qquad \operatorname{Re} x > 0, \tag{15}$$

$$\int_x^\infty t^{\alpha-1}E_1(t)\,dt = \alpha^{-1}[\Gamma(\alpha, x) - x^\alpha E_1(x)] \qquad \operatorname{Re} x > 0,\quad \alpha \neq 0. \tag{16}$$

Относительно других интегралов см. Nielsen (1906, в особенности гл. II и IV), Le Caine (1948), Busbridge (1950).

Из 9.4 (5) мы получаем

$$E_1(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(x)}{n+1}, \tag{17}$$

а из 9.4 (2)

$$E_1(x+y) = E_1(x) + e^{-x}\sum_{n=0}^\infty n!\,(-x)^{-n-1}[1 - e^{-y}e_n(y)], \quad |y| < |x|. \tag{18}$$

Формулы для $\operatorname{li}(x)$ могут быть выведены из формул для $E_1(x)$.

При изучении распространения волн в рассеивающей среде встречаются некоторые обобщения интегральной показательной функции. Типичным примером является

$$\int_0^x e^{-u}u^{-1}\,dt, \text{ где } \qquad u = \sqrt{a^2+t^2}.$$

Относительно этой и родственных функций см. Harvard University (1949b).

9.8. Интегральные синус и косинус

В современных таблицах используются определения

$$\operatorname{si} x = \int_\infty^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2i}[\operatorname{Ei}(ix) - \operatorname{Ei}(-ix)], \tag{1}$$

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si} x, \tag{2}$$

$$\operatorname{Ci} x = \int_\infty^x \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{1}{2}[\operatorname{Ei}(ix) + \operatorname{Ei}(-ix)]. \tag{3}$$

$$\operatorname{Ei}(\pm ix) = \operatorname{Ci} x \pm i \operatorname{si} x. \tag{4}$$

Здесь $\pm i = \exp\left(\pm \frac{i\pi}{2}\right)$. Nielsen (1906) использовал то же самое определение для si и писал ci вместо Ci. Некоторые авторы употребляют символы Ci, Si в несколько ином смысле.

$\operatorname{Si} x$, а также $\operatorname{si} x$ являются целыми функциями от x:

$$\operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x), \quad \operatorname{si}(-x) = -\pi - \operatorname{si} x. \tag{5}$$

$\operatorname{Ci} x$ является многозначной функцией с логарифмической точкой ветвления при $x = 0$. Так как

$$\operatorname{Ci} x = \gamma + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\, dt, \tag{6}$$

то $\operatorname{Ci} x - \ln x$ является четной целой функцией от x. В частности, мы имеем

$$\operatorname{Ci}(xe^{\pm i\pi}) = \operatorname{Ci} x \pm i\pi, \quad x > 0. \tag{7}$$

Следующие формулы, а также многие другие могут быть получены путем непосредственного использования определений или результатов, полученных в этой главе выше:

$$\operatorname{Si} x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}, \tag{8}$$

$$\operatorname{Ci} x = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,(2n)}, \tag{9}$$

$$\operatorname{si} x = -\cos x \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m (2m)!}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1})\right] + \\ + \sin x \left[\sum_{m=1}^{N-1} \frac{(-1)^m (2m-1)!}{x^{2m}} + O(|x|^{-2N})\right], \tag{10}$$

$$-\pi < \arg x < \pi, \quad M, N = 1, 2, \ldots,$$

$$\operatorname{Ci} x = \cos x \left[\sum_{m=1}^{N-1} \frac{(-1)^m (2m-1)!}{x^{2m}} + O(|x|^{-2N})\right] + \\ + \sin x \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m (2m)!}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1})\right], \tag{11}$$

$$-\pi < \arg x < \pi, \quad M, N = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{Ci}(t)\, dt = -\frac{1}{2s} \ln(1+s^2), \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{si}(t)\, dt = -\frac{1}{s} \operatorname{arctg} s, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{13}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{-1}\ln(1+t^2)\,dt=[\mathrm{Ci}(s)]^2+[\mathrm{si}(s)]^2,\quad \operatorname{Re}s>0, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{si}\,x\,dx=\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{Ci}\,x\,dx=-\frac{\pi}{4}, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{si}\,x\,\mathrm{Ci}\,x\,dx=-\ln 2,\quad \int_0^\infty (\mathrm{si}\,x)^2\,dx=\int_0^\infty (\mathrm{Ci}\,x)^2\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Относительно других интегралов см. Nielsen (1906b, в особенности гл. IV). Применяются также обозначения

$$\mathrm{Shi}\,x=\int_0^x \mathrm{sh}\,t\,\frac{dt}{t}=-i\,\mathrm{Si}(ix), \tag{17}$$

$$\mathrm{Chi}\,x=\gamma+\ln x+\int_0^x \frac{\mathrm{ch}\,t-1}{t}\,dt=\mathrm{Ci}(ix)-\frac{i\pi}{2}. \tag{18}$$

В литературе встречалось обобщение

$$\int_0^x \sin u\,\frac{dt}{u},\quad u=\sqrt{a^2+t^2}, \tag{19}$$

а также некоторые аналогичные обобщения (Harvard University, 1949a).

9.9. Интеграл вероятности

Основными функциями этой группы являются

$$\mathrm{Erf}\,x=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2},\,x^2\right)=x\,\Phi\left(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2};\,-x^2\right)=$$
$$=xe^{-x^2}\,\Phi\left(1,\,\frac{3}{2};\,x^2\right), \tag{1}$$

$$\mathrm{Erfc}\,x=\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mathrm{Erf}\,x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2},\,x^2\right)=\frac{1}{2}e^{-x^2}\Psi\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2};\,x^2\right), \tag{2}$$

$$\mathrm{Erfi}\,x=-i\,\mathrm{Erf}(ix)=\int_0^x e^{t^2}\,dt=x\,\Phi\left(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2};\,x^2\right), \tag{3}$$

$$H(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Erf}\,x=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Erf}\,x, \tag{4}$$

$$\alpha(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{5}$$

Первые три чаще всего встречаются в математических работах; функция (2) была впервые введена Крампом (Kramp, 1799) в иных обозначениях Функция (4) более удобна для вычислений, а функция (5) часто используется статистиками. Здесь также имеется большое разнообразие в обозначениях.

Все указанные выше функции являются целыми; $\operatorname{Erf} x$ и $\operatorname{Erfi} x$ являются нечетными функциями x Многие из следующих формул либо непосредственно выводятся из определения, либо получаются как частные случаи ранее полученных результатов:

$$\operatorname{Erf} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}, \tag{6}$$

$$\operatorname{Erfi} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}, \tag{7}$$

$$\operatorname{Erfc} x = \frac{1}{2} e^{-x^2} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1}) \right], \tag{8}$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \quad x \to \infty, \quad M = 1, 2, \ldots,$$

$$\operatorname{Erfi} x = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{2} e^{x^2} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1}) \right], \tag{9}$$

$$x > 0, \quad x \to \infty, \quad M = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2t^2-bt}\,dt = a^{-1} \exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{2a}\right), \qquad \operatorname{Re} a > 0, \tag{10}$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Erf}(at)\, e^{-st}\,dt = s^{-1} \exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{s}{2a}\right), \tag{11}$$

$$|\arg a| < \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Erf}\sqrt{at}\, e^{-st}\,dt = \frac{\sqrt{a\pi}}{2s\sqrt{a+s}}, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re}(a+s) > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) e^{-st}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2s}\, e^{-2a\sqrt{s}}, \tag{13}$$

$$|\arg a| < \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Erfi}(at)\, e^{-a^2t^2-st}\,dt = \frac{-1}{4a} \exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right) \operatorname{Ei}\left(-\frac{s^2}{4a^2}\right), \tag{14}$$

$$\operatorname{Re} s > 0, \quad |\arg a| < \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 e^{-a^2t^2}\frac{dt}{1+t^2}=e^{a^2}\left[\frac{\pi}{4}-(\operatorname{Erf} a)^2\right],\quad \operatorname{Re} a>0, \tag{15}$$

$$\int_0^x \operatorname{Erf} t\,dt = x\operatorname{Erf} x-\frac{1-e^{-x^2}}{2}, \tag{16}$$

$$\frac{d^{n+1}\operatorname{Erf} x}{dx^{n+1}}=(-1)^n e^{-x^2}H_n(x),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{17}$$

где H_n — многочлен Эрмита (см. гл 10).

Следующий ниже ряд является рядом типа Нильсена:

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{x+y})=\operatorname{Erf}(\sqrt{x})+\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\frac{\gamma(n+1,\ y)}{x^n}, \tag{18}$$

$$|y|<|x|.$$

Имеют место следующие разложения в ряды по функциям Бесселя:

$$\operatorname{Erf}(x)=\frac{\sqrt{\pi x}}{2}e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}e_n(-1)\,x^nI_{n+\frac{1}{2}}(2x), \tag{19}$$

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{x})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}I_{n-\frac{1}{2}}(x), \tag{20}$$

$$\operatorname{Erfi}(\sqrt{x})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}I_{n+\frac{1}{2}}(x). \tag{21}$$

Первое из этих разложений является частным случаем разложения 9.4 (3), а два других проверяются с помощью преобразования Лапласа

Наиболее современной монографией, посвященной интегралам вероятности, является книга: Rosser (1948), где изучается двойной интеграл

$$\int_0^z e^{-p^2y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{22}$$

как функция комплексных переменных p и z, а также некоторые родственные интегралы. Повторные интегралы от интегралов вероятности были изучены Hartree (1936), который положил

$$i^0\operatorname{erfc} x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Erfc} x,\quad i^n\operatorname{erfc} x=\int_x^{\infty}i^{n-1}\operatorname{erfc} t\,dt. \tag{23}$$

(Здесь i не является мнимой единицей!)

9.10. Интегралы Френеля и обобщения

Интегралами Френеля называют

$$C(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt,$$

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Вместо них мы будем рассматривать более общие интегралы, которые ввел Bohmer (1939):

$$C(x,\alpha)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}\cos t\,dt=\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(\alpha,ix)+\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(\alpha,-ix), \tag{1}$$

$$S(x,\alpha)=\int_x^\infty t^{\alpha-1}\sin t\,dt=\frac{1}{2i}e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(\alpha,-ix)-\frac{1}{2i}e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}\Gamma(\alpha,ix). \tag{2}$$

Эти же функции в иных обозначениях изучал Bateman (1946). Очевидно, что

$$\Gamma(\alpha,ix)=e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}[C(x,\alpha)-iS(x,\alpha)]. \tag{3}$$

Интегралы Френеля выражаются через эти функции следующим образом:

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}C\left(x,\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{i\pi}{4}}\operatorname{Erf}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{x}\right)+e^{\frac{i\pi}{4}}\operatorname{Erf}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{x}\right)\right], \tag{4}$$

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^2)\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\left(x,\frac{1}{2}\right)=$$
$$=i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{i\pi}{4}}\operatorname{Erf}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{x}\right)-e^{\frac{i\pi}{4}}\operatorname{Erf}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{x}\right)\right]. \tag{5}$$

Приведем список формул, относящихся к рассматриваемым интегралам:

$$C(x,\alpha)=\Gamma(\alpha)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\alpha}}{(2m)!\,(2m+\alpha)}, \tag{6}$$

$$S(x,\alpha)=\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1+\alpha}}{(2m+1)!\,(2m+1+\alpha)}, \tag{7}$$

$$C(x,\alpha)=-x^\alpha[P(x)\sin x+Q(x)\cos x], \tag{8}$$

$$S(x,\alpha)=x^\alpha[P(x)\cos x-Q(x)\sin x], \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m (1-\alpha)_{2m}}{x^{2m+1}} + O(|x|^{-2M-1}) \\ \text{и}\quad Q(x) &= \sum_{m=1}^{M} \frac{(-1)^m (1-\alpha)_{2m-1}}{x^{2m}} + O(|x|^{-2M-2}), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$x \to \infty, \quad -\pi < \arg x < \pi, \quad M = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} C(t, \alpha)\, dt = s^{-1}\Gamma(\alpha)\left[\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{1}{2}(s+i)^{-\alpha} - \frac{1}{2}(s-i)^{-\alpha}\right], \tag{11}$$

$$\operatorname{Re} s > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\alpha,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} S(t, \alpha)\, dt = s^{-1}\Gamma(\alpha)\left[\sin\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{i}{2}(s+i)^{-\alpha} + \frac{i}{2}(s-i)^{-\alpha}\right], \tag{12}$$

$$\operatorname{Re} s > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\alpha,$$

$$\int_0^\infty t^{\beta-1} C(t, \alpha)\, dt = \beta^{-1}\Gamma(\alpha+\beta)\cos\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}, \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\beta > 0, \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1,$$

$$\int_0^\infty t^{\beta-1} S(t, \alpha)\, dt = \beta^{-1}\Gamma(\alpha+\beta)\sin\frac{(\alpha+\beta)\pi}{2}, \tag{14}$$

$$\operatorname{Re}\beta > 0, \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1,$$

$$C(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{5}{2}}(x) + J_{\frac{9}{2}}(x) + \ldots, \tag{15}$$

$$S(x) = J_{\frac{3}{2}}(x) + J_{\frac{7}{2}}(x) + J_{\frac{11}{2}}(x) + \ldots \tag{16}$$

Интегральное представление для

$$[C(x, \alpha)]^2 + [S(x, \alpha)]^2$$

вытекает из 9.3 (6).

Кривая с параметрическими уравнениями

$$\xi = C(t, \alpha), \quad \eta = S(t, \alpha), \quad t \geqslant 0, \tag{17}$$

при фиксированном α, $0 < \alpha < 1$, имеет форму спирали; ее изучал Böhmer (1939) При $\alpha = \frac{1}{2}$ она сводится к спирали Корню. Интересно отметить, что эта спираль имеет простое «натуральное уравнение»

$$\rho = (\alpha s)^{1-\frac{1}{\alpha}}, \tag{18}$$

где ρ — радиус кривизны и s — длина дуги.

ГЛАВА 10

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Основной монографией по этому вопросу является книга Сеге (1962), на которую мы будем часто ссылаться. Shohat, Hille и Walsh (1940) составили систематическую библиографию работ до 1938 года. Хотя эта глава посвящена лишь ортогональным *многочленам*, во вводном пункте мы рассматриваем более общие ортогональные системы функций. Дальнейшие сведения по этому вопросу читатель может найти в книгах Качмажа и Штейнгауза (1958), Tricomi (1948) и Vitali и Sansone (1946).

10.1. Системы ортогональных функций

Пусть задан отрезок (a, b) и на нем *неотрицательная весовая функция* $w(x)$. Мы можем сопоставить тогда им скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_a^b w(x)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, dx, \tag{1}$$

которое определено для функций φ таких, что $\sqrt{w}\varphi$ имеет интегрируемый квадрат на (a, b). Более общее скалярное произведение можно определить с помощью интеграла Стилтьеса

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_a^b \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, d\alpha(x), \tag{2}$$

где $\alpha(x)$ — неубывающая функция. Если функция $\alpha(x)$ абсолютно непрерывна, то (2) сводится к (1), где $w(x) = \alpha'(x)$ С другой стороны, если $\alpha(x)$ является функцией скачков, то есть если она кусочно постоянна и имеет скачки величины w_i в точках $x = x_i$, то интеграл (2) сводится к сумме

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_i w_i \varphi_1(x_i)\, \varphi_2(x_i), \tag{3}$$

которая задает скалярное произведение функций дискретного переменного.

Приведенное выше определение относится к вещественным функциям вещественного переменного, и на протяжении этой главы мы ограничимся лишь этим случаем Если рассматриваемые функции принимают комплексные значения либо если область интегрирования является дугой в комплексной плоскости, отличной от отрезка вещественной оси, то функцию $\varphi_2(x)$ во всех указанных определениях надо заменить комплексно сопряженным выражением.

За исключением нескольких последних пунктов (где будет использовано определение (3)) мы ограничимся определением (1) и будем предполагать, кроме того что функция $w(x)$ почти всюду положительна и интегрируема Следует, однако отметить, что многие из результатов вводных пунктов сохраняют силу и при определении (2), а следовательно, и (3), для скалярного произведения

Две функции называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю Семейство функций называют *ортогональной системой* на отрезке (a, b) относительно веса $w(x)$ (или распределения $\alpha(x)$), если для любых двух различных элементов этого семейства имеем $(\varphi_1\ \varphi_2) = 0$. Так как пространство функций с интегрируемым квадратом сепарабельно, то ортогональная система может содержать либо конечное число функций, либо счетное множество элементов Таким образом, любая ортогональная система может быть записана в виде (конечной или бесконечной) *последовательности* $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... либо более кратко, $\{\varphi_n(x)\}$, а свойство ортогональности может быть выражено следующим образом.

$$(\varphi_h, \varphi_k) = 0, \quad h \neq k. \tag{4}$$

Мы будем предполагать, что ситема $\{\varphi_n(x)\}$ не содержит функций, почти всюду равных нулю, то есть что при всех h скалярное произведение (φ_h, φ_h) положительно Легко видеть, что функции, принадлежащие любому конечному подмножеству ортогональной системы, линейно независимы, то есть что соотношение вида

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_k\varphi_k(x) = 0 \tag{5}$$

может выполняться почти всюду на отрезке $[a, b]$ лишь в случае, когда $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = 0$ (Достаточно скалярно умножить обе части равенства на $\varphi_h(x)$ при $h = 0, 1, \ldots, k$)

Функции $\{\varphi_n(x)\}$ образуют *ортонормированную систему*, если

$$(\varphi_h, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad h \neq k, \\ 1, & \text{если} \quad h = k. \end{cases} \tag{6}$$

Каждую ортогональную систему можно нормировать, заменив $\varphi_h(x)$ на

$$(\varphi_h\ \varphi_h)^{-\frac{1}{2}} \varphi_h(x).$$

Конечную или бесконечную последовательность $\{\psi_n(x)\}$ линейно независимых функций можно *ортогонализовать* относительно скалярного произведения (2), заменяя каждую из функций соответствующей линейной комбинацией Например, мы можем положить рекуррентно

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \psi_0(x), \\ &\varphi_1(x) = \mu_{10}\varphi_0(x) + \psi_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_n(x) = \mu_{n0}\varphi_0(x) + \mu_{n1}\varphi_1(x) + \ldots + \mu_{n,\,n-1}\varphi_{n-1}(x) + \psi_n(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Если положить

$$\mu_{nm} = -\frac{(\psi_n, \varphi_m)}{(\varphi_m, \varphi_m)}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

то функции $\{\varphi_n(x)\}$ образуют ортогональную последовательность.

Эту задачу можно решить иначе положив

$$\varphi_n(x) = \lambda_{n0}\psi_0(x) + \lambda_{n1}\psi_1(x) + \ldots + \lambda_{nn}\psi_n(x), \quad \lambda_{nn} \neq 0, \tag{9}$$

и определив коэффициенты λ так, чтобы $\{\varphi_n(x)\}$ образовали ортогональную систему. Одно из таких определений приводит к

$$\phi_n(x) = \begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \ldots & (\psi_0, \psi_n) \\ (\psi_1, \psi_0) & (\psi_1, \psi_1) & \ldots & (\psi_1, \psi_n) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & (\psi_{n-1}, \psi_1) & \ldots & (\psi_{n-1}, \psi_n) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Очевидно, что функции $\{\phi_n(x)\}$ образуют ортогональную систему, поскольку функция (10) ортогональна функциям $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$, а следовательно, функциям $\phi_m(x)$ при всех $m < n$. Кроме того, любая ортогональная система вида (9) отличается от $\{\phi_n(x)\}$ лишь постоянными множителями. Для того чтобы нормировать систему (9), введем *определитель Грама* G_n, который является алгебраическим дополнением функции $\psi_{n+1}(x)$ в выражении (10) для $\phi_{n+1}(x)$ Определитель G_n является в то же время дискриминантом положительно определенной квадратичной формы

$$\int_a^b [\xi_0\psi_0(x) + \ldots + \xi_n\psi_n(x)]^2\, w(x)\, dx$$

относительно $\xi_0, \ldots, \xi_n$ и, следовательно, положителен Мы положим также $G_{-1} = 1$. Ортонормированная система вида (9), для которой $\lambda_{nn} > 0$, однозначно определяется формулой

$$\varphi_n(x) = \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{G_{n-1}G_n}}. \tag{11}$$

Далее можно установить следующее интегральное представление:

$$\phi_n(x) = [(n-1)!]^{-1} \int^{(n)} \Psi_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})\, \Psi_n(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, x) \times$$
$$\times\, w(\xi_0) \ldots w(\xi_{n-1})\, d\xi_0 \ldots d\xi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где интеграл является n-кратным интегралом по параллелепипеду

$$a \leqslant \xi_k \leqslant b, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

и

$$\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \ldots & \psi_n(x_0) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \psi_0(x_n) & \psi_1(x_n) & \ldots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{13}$$

(см. Сеге, 1962, п. 2.1).

В этой главе мы будем рассматривать системы функций, получаемые ортогонализацией по формулам (9) функций $\psi_n(x) = x^n$ Таким образом, мы получим последовательность *ортогональных многочленов* $\{p_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $p_k(x)$ является многочленом от x, степень которого в точности равна k, и $(p_h, p_k) = 0$ при $h, k = 0, 1, 2, \ldots$ и $h \neq k$.

Задание отрезка и весовой функции (или распределения) определяет систему ортогональных многочленов с точностью до произвольного постоянного множителя для каждого $p_n(x)$. Путем выбора этого множителя можно привести систему к одной из стандартных форм. Чаще всего встречаются следующие три дополнительных ограничения: I. Функции $\{p_n(x)\}$ образуют ортонормированную систему, причем коэффициент при x^n в $p_n(x)$ положителен. II. Коэффициент при x^n в $p_n(x)$ принимает предписанное значение, обычно равное единице. III. Для заданного значения x_0 (например, $x_0 = a$) $p_n(x_0)$ имеет заданное значение.

10.2. Проблема аппроксимации

Обозначим через L_w^2 класс функций $f(x)$, для которых (лебеговский) интеграл

$$\int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx,$$

принимает конечные значения, и пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система в L_w^2. Мы будем рассматривать приближение функций $f(x)$ из L_w^2 с помощью линейных комбинаций

$$c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

При этом как меру точности приближения мы используем

$$I_n(c_h) = \int_a^b w(x)\,[f(x) - c_0\varphi_0(x) - \ldots - c_n\varphi_n(x)]^2\,dx. \tag{1}$$

Легко показать, что наилучшим возможным выбором коэффициентов c_k являются коэффициенты Фурье

$$a_h = (f, \varphi_h). \tag{2}$$

В самом деле, разлагая $[\ldots]^2$ в выражении (1), мы получаем

$$I_n(c_h) = \int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx + \sum_{h=0}^{n} c_h^2 - 2\sum_{h=0}^{n} a_h c_h =$$

$$= \int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx - \sum_{h=0}^{n} a_h^2 + \sum_{h=0}^{n} (c_h - a_h)^2.$$

Отсюда видно, что наилучшим приближением является $(n+1)$-я частичная сумма (обобщенного) ряда Фурье

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots \tag{3}$$

функции $f(x)$ и что мерой точности приближения является

$$I_n(a_h) = \int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx - \sum_{h=0}^{n} a_h^2. \tag{4}$$

Так как $I_n(a_h) \geqslant 0$, то мы получаем отсюда, что ряд $\sum a_h^2$ сходится, причем выполняется *неравенство Бесселя*

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h^2 \leqslant \int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx. \tag{5}$$

Может случиться, что для любой функции $f(x)$ из L_w^2 справедлива *формула Парсеваля*

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h^2 = \int_a^b w(x)\,[f(x)]^2\,dx. \tag{6}$$

Тогда ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ называют *замкнутой* в L_w^2. В этом случае имеем, очевидно,

$$\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{h=1}^{n} a_h\varphi_h(x)\right]^2 dx \to 0, \quad \text{когда} \quad n\to\infty, \tag{7}$$

то есть частичные суммы ряда Фурье (3) *сходятся в среднем* к $f(x)$. В пространстве L_w^2 каждая замкнутая ортогональная система является *полной*: если $(f, \varphi_h) = 0$ для всех h, то функция $f(x)$ почти всюду равна нулю. Это является следствием теоремы Рисса — Фишера (см., например, Качмаж и Штейнгауз, 1958 или Tricomi, 1948, п. 3.3)

Для конечного отрезка $[a, b]$ каждая функция из пространства L_w^2 может быть с любой степенью точности приближена в среднем непрерывной функцией, а в силу теоремы Вейерштрасса непрерывную функцию можно аппроксимировать многочленом. Таким образом, если $[a, b]$ — конечный отрезок и $\psi_n(x) = x^n$ или $\varphi_n(x) = p_n(x)$, то мы можем сделать $I_n(a_h)$ сколь угодно малым, выбирая n достаточно большим. Другими словами, любая система ортогональных многочленов *на конечном отрезке замкнута*. Это утверждение, вообще говоря, перестает быть верным для бесконечного промежутка (a, b) (Сеге, 1962, п. 3.1).

10.3. Общие свойства ортогональных многочленов

Весовая функция $w(x)$ на отрезке $[a, b]$ однозначно определяет систему ортогональных многочленов $\{p_n(x)\}$ с точностью до постоянного множителя для каждого многочлена. Числа

$$c_n = \int_a^b w(x)\,x^n\,dx \tag{1}$$

являются моментами весовой функции, и при $\psi_n(x) = x^n$ имеем

$$(\psi_m, \psi_n) = c_{m+n}. \tag{2}$$

В обозначениях п. 10.1 имеем:

$$G_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{r>s} (x_r - x_s). \tag{3}$$

Если обозначить (неопределенный) коэффициент при x^n в $p_n(x)$ через k_n, то

$$p_n(x) = \frac{k_n}{G_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$p_n(x) = \frac{k_n}{n!\, G_{n-1}} \int^{(n)} \prod_{r>s} (\xi_r - \xi_s)^2 \prod_{\nu=1}^{n} [(x - \xi_\nu)\, w(\xi_\nu)\, d\xi_\nu]. \tag{5}$$

Так как функции $1, x, \dots, x^{n-1}$ ортогональны $p_n(x)$, то

$$h_n = (p_n, p_n) = k_n^2 \frac{G_n}{G_{n-1}}. \tag{6}$$

Для нормированных многочленов коэффициент k_n имеет вид $k_n = \sqrt{\dfrac{G_{n-1}}{G_n}}$, но мы не будем на этом этапе стандартизировать наши многочлены.

Любой многочлен степени $m < n$ является линейной комбинацией многочленов $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ и, следовательно, ортогонален к $p_n(x)$. Это приводит к простому доказательству следующей теоремы о нулях ортогональных многочленов: *все нули $p_n(x)$ являются простыми и расположены внутри отрезка* $[a, b]$. В самом деле, если $p_n(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$ лишь в $m < n$ точках, то мы можем построить многочлен $\pi_m(x)$ такой, что $p_n(x)\,\pi_m(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$. Но это противоречит тому, что $(p_n, \pi_m) = 0$. Можно показать также, что *между двумя последовательными нулями функции $p_n(x)$ расположен в точности один нуль функции $p_{n+1}(x)$ и по крайней мере один нуль $p_m(x)$, для которого $m > n$* (Сеге, 1962, п. 3.3).

Любые три последовательных многочлена связаны линейным соотношением Мы будем использовать следующие обозначения: k_n — коэффициент при x^n, а k_n' — коэффициент при x^{n-1} в $p_n(x)$; $r_n = \dfrac{k_n'}{k_n}$ и $h_n = (p_n, p_n)$ Мы докажем, что имеет место *рекуррентная формула*

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)\, p_n(x) - C_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n = A_n (r_{n+1} - r_n), \\ C_n &= \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}} = \frac{k_{n+1} k_{n-1} h_n}{k_n^2 h_{n-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для того чтобы доказать формулу (7), заметим, что при значении (8) для A_n выражение $p_{n+1}(x) - A_n x p_n(x)$ является многочленом, степень которого равна или меньше чем n, и, следовательно, этот многочлен имеет вид

$$\gamma_0 p_n(x) + \gamma_1 p_{n-1}(x) + \ldots + \gamma_n p_0(x).$$

Из ортогональности семейства $p_n(x)$ получаем, что $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_n = 0$, и потому

$$-A_n(p_n, xp'_{n-1}) = \gamma_1(p_{n-1}, p_{n-1}).$$

Но $x p_{n-1}(x) - \frac{k_{n-1}}{k_n} p_n(x)$ является многочленом, степень которого не превосходит $n-1$, и, следовательно,

$$-A_n h_n \frac{k_{n-1}}{k_n} = \gamma_1 h_{n-1},$$

или $\gamma_1 = C_n$. Наконец, сравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях равенства (7), получаем значения для B_n. Рекуррентная формула (7) остается справедливой для $n = 0$, если положить

$$p_{-1}(x) = 0. \tag{9}$$

Это условие будет применяться на протяжении всей этой главы.

Отметим, что, и обратно, система многочленов, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (7) с положительными A_n и C_n, образует ортогональную систему.

Из (7) легко получить *формулу Кристоффеля — Дарбу*

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1} p_\nu(x) p_\nu(y) = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \frac{p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)}{x - y}, \tag{10}$$

и, переходя к пределу, когда $y \to x$, получим

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1} [p_\nu(x)]^2 = \frac{k_n}{k_{n+1} h_n} \left[p_n(x) p'_{n+1}(x) - p'_n(x) p_{n+1}(x)\right]. \tag{11}$$

Пусть $\{p_n(x)\}$ — система ортогональных многочленов с весовой функцией $w(x)$, и пусть $\rho(x)$ — многочлен степени l, неотрицательный на отрезке $[a, b]$ и имеющий простые нули в точках $x_1, x_2, \ldots, x_l$. Ортогональные многочлены $q_n(x)$, соответствующие весовой функции $\rho(x) w(x)$, задаются *формулой Кристоффеля*

$$c_n \rho(x) q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \ldots & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \ldots & p_{n+l}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & \ldots & p_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

в которой c_n являются произвольными постоянными множителями (Сеге, 1962, п. 2.5). Если некоторые из нулей функции $\rho(x)$ являются кратными, то формулу (12) надо заменить вырожденной.

Ортогональные многочлены обладают некоторыми важными экстремальными свойствами. Первое из них может быть выведено из результатов, указанных в начале п. 10.2. Оно гласит: *интеграл*

$$\int_a^b |\pi_n(x)|^2 w(x)\,dx, \tag{13}$$

в котором через $\pi_n(x)$ *обозначен любой многочлен степени* n *со старшим членом* x^n, *принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда* $\pi_n(x) = \varepsilon k_n^{-1} p_n(x)$, *где* ε — *постоянная величина, такая, что* $|\varepsilon| = 1$

Второе свойство связано с многочленами

$$K_n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} h_m^{-1} p_m(\bar{x})\, p_m(y), \tag{14}$$

которые определены для комплексных x, y ($\bar{x}$ — комплексно сопряженное x). Отметим, что для конечных значений x_0 и a, таких, что $x_0 \leqslant a$, многочлены $K_n(x_0, x)$ ортогональны относительно веса $(x - x_0)\, w(x)$ (см. (10) и (11)). Упомянутое экстремальное свойство может быть сформулировано следующим образом (Сеге, 1962, теорема 3.1.3):

Пусть $\pi_n(x)$ *является любым многочленом степени* n *с комплексными коэффициентами, таким, что интеграл* (13) *равен единице. Для любого фиксированного (возможно, комплексного) значения* x_0 *максимум* $|\pi_n(x_0)|^2$ *достигается тогда и только тогда, когда*

$$\pi_n(x) = \varepsilon \frac{K_n(x_0, x)}{\sqrt{K_n(x_0, x_0)}},$$

где $|\varepsilon| = 1$. *Этот максимум равен* $K_n(x_0, x_0)$.

10.4. Механические квадратуры

Ряд интересных свойств ортогональных многочленов связан с задачами об интерполяции и о механических квадратурах. В этом пункте мы дадим краткое описание некоторых основных результатов и отошлем читателя к книге Сеге (1962, п. 3.4, гл. XIV, XV), где имеется дальнейшая информация.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n различных точек на отрезке $[a, b]$, и пусть

$$\left.\begin{aligned} &\pi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \\ &l_\nu(x) = (x - x_\nu)^{-1} \frac{\pi_n(x)}{\pi_n'(x_\nu)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $l_\nu(x)$ являются фундаментальными многочленами, связанными с абсциссами $x_1, \ldots, x_n$ в интерполяционной формуле Лагранжа

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\, l_\nu(x) \tag{2}$$

для функции $f(x)$.

Пусть надо вычислить интеграл

$$I = \int_a^b w(x) f(x)\,dx, \tag{3}$$

причем заданы лишь значения функции $f(x)$ в точках x_ν. Для решения этой задачи представляется естественным использовать выражение (2) и принять

$$J = \int_a^b w(x) L(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \int_a^b w(x) l_\nu(x)\, dx, \tag{4}$$

за приближенное значение I Разумеется при произвольных $x_1, \ldots, x_n$ равенство $I = J$ выполняется для всех многочленов $f(x)$ степени $\leqslant n-1$. Однако если выбрать в качестве x_ν n нулей функции $p_n(x)$, то есть n нулей ортогонального многочлена степени n связанного с весовой функцией $w(x)$, то равенство $I = J$ будет справедливо уже для всех многочленов $f(x)$, степень которых $\leqslant 2n-1$ Именно, в этом случае $f(x) - L(x)$ является многочленом степени $\leqslant 2n-1$, который обращается в нуль во всех нулях функции $p_n(x)$ и, следовательно, имеет вид $p_n(x)\pi_{n-1}(x)$, где $\pi_{n-1}(x)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$ Тогда

$$I - J = \int_a^b w(x)\,[f(x) - L(x)]\, dx = (p_n, \pi_{n-1}) = 0.$$

Принято писать

$$J = \int_a^b w(x) L(x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} f(x_\nu), \tag{5}$$

где $\lambda_{\nu n}$ называют *числами Кристоффеля*. Они связаны с моментами функции $w(x)$ соотношениями

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^h \lambda_{\nu n} = c_h, \quad h = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

получаемыми, если положить $f(x) = x^h$. Числа Кристоффеля положительны, и имеют место следующие формулы:

$$\lambda_{\nu n} = \int_a^b \frac{w(x)\, p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x - x_\nu)}\, dx = \int_a^b w(x) \left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x_\nu)(x - x_\nu)}\right]^2 dx, \tag{7}$$

$$\lambda_{\nu n} = -\frac{k_{n+1} h_n}{k_n\, p_n'(x_\nu)\, p_{n+1}(x_\nu)} = \frac{1}{K(x_\nu, x_\nu)}. \tag{8}$$

Если обозначить n нулей функции $p_n(x)$ через $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$, а через $y_{1n}, y_{2n}, \ldots, y_{nn}$ обозначить n чисел на отрезке $[a, b]$, определяемых формулами

$$\int_a^{y_{\nu n}} w(x)\, dx = \lambda_{1n} + \ldots + \lambda_{\nu n} = \Lambda_{\nu n}, \tag{9}$$

то имеют место теоремы разделения

$$x_{\nu-1,\, n} < x_{\nu,\, n+1} < x_{\nu,\, n}, \tag{10}$$

$$y_{\nu-1,\, n} < y_{\nu,\, n+1} < y_{\nu,\, n}, \tag{11}$$

$$x_{\nu,\, n} < y_{\nu,\, n} < x_{\nu+1,\, n}, \tag{12}$$

$$\Lambda_{\nu-1,\, n} < \Lambda_{\nu,\, n+1} < \Lambda_{\nu,\, n}. \tag{13}$$

10.5. Непрерывные дроби

Рекуррентная формула 10.3 (7) приводит к рассмотрению *непрерывной дроби*

$$\cfrac{1}{A_0x+B_0-\cfrac{C_1}{A_1x+B_1-\cfrac{C_2}{A_2x+B_2-\ldots}}}, \tag{1}$$

где A_n, B_n, C_n задаются формулами 10.3 (8); *n-я подходящая дробь* $\frac{R_n}{S_n}$ определяется как конечная дробь, получающаяся, если мы останавливаемся в (1) на члене $A_{n-1}x+B_{n-1}$. Таким образом,

$$R_0=0,\quad S_0=1;\quad R_1=1,\quad S_1=A_0x+B_0=\frac{p_1(x)}{p_0(x)}. \tag{2}$$

Как R_n, так и S_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$X_{n+1}=(A_nx+B_n)X_n-C_nX_{n-1}. \tag{3}$$

Начальные условия:

$$\text{для } R_n\colon X_0=0\quad X_1=1;\quad \text{для } S_n\colon X_0=1\quad X_1=\frac{p_1(x)}{p_0(x)}. \tag{4}$$

Принимая во внимание 10.3 (7), видим, что

$$S_n=\frac{p_n(x)}{p_0(x)}=k_0^{-1}p_n(x). \tag{5}$$

Для того чтобы выразить так же и R_n, введем ассоциированный многочлен

$$q_n(x)=\int_a^b\frac{p_n(x)-p_n(t)}{x-t}w(t)\,dt, \tag{6}$$

имеющий степень $n-1$. Из 10.3 (7) следует, что

$$q_{n+1}(x)-(A_nx+B_n)q_n(x)+C_nq_{n-1}(x)=$$
$$=-A_n\int_a^b p_n(t)w(t)\,dt=0,\quad n=1,2,\ldots$$

Кроме того, $q_0(x)=0$, $q_1(x)=\int_a^b k_1w(t)\,dt=k_1c_0$, и, следовательно,

$$R_n=(k_1c_0)^{-1}q_n(x). \tag{7}$$

Мы видим, таким образом, что $\frac{R_n}{S_n}$ является рациональной функцией от x, имеющей простые полюсы при $x=x_{\nu n}$. Вычеты в этих полюсах могут быть вычислены с помощью формулы

$$\lim_{x\to x_{\nu n}}(x-x_\nu)\frac{q_n(x)}{p_n(x)}=\frac{1}{p_n'(x_\nu)}\int_a^b\frac{p_n(t)}{t-x_{\nu n}}w(t)\,dt=\lambda_{\nu n}.$$

см. 10.4 (7) Мы получаем, таким образом, следующее разложение на элементарные дроби:

$$\frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu n}}{x-x_{\nu n}}. \tag{8}$$

Разложим правую часть этого соотношения в ряд по убывающим степеням x и используем формулу 10.4 (6). Мы получим, что первыми $2n$ коэффициентами являются моменты c_h. Следовательно, получаем формально

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{c_h}{x^{h+1}}. \tag{9}$$

Марков доказал, что если отрезок $[a, b]$ конечен и x — любая точка комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[a, b]$ вещественной оси, то $\lim \frac{R_n}{S_n}$ существует и имеет место формула (9). Кроме того, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{S_n}=\frac{k_0}{k_1c_0}\int_a^b\frac{w(t)}{x-t}\,dt \tag{10}$$

(Сеге, 1962, п. 3.5). Случай бесконечного промежутка представляет весьма значительные трудности, которые изучаются в *проблеме моментов* (Stieltjes и Hamburger). Относительно этой теории см. Shohat и Tamarkin (1943), Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн (1938).

10.6. Классические многочлены

Особенно часто встречаются и хорошо изучены ортогональные многочлены, соответствующие интервалам и весам, указанным в следующей таблице. Они известны как *классические ортогональные многочлены*.

Классические ортогональные многочлены

a	b	$w(x)$	Название
-1	1	1	Многочлены Лежандра или сферические
-1	1	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	Многочлены Гегенбауэра или ультрасферические
-1	1	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	Многочлены Якоби или гипергеометрические
$-\infty$	∞	$\exp(-x^2)$	Многочлены Эрмита
0	∞	$x^{\alpha}e^{-x}$	Обобщенные многочлены Лагерра

Все эти многочлены обладают целым рядом общих свойств, наиболее важными из которых являются следующие три:

I. Функции $\{p'_n(x)\}$ образуют ортогональную систему многочленов.

II. $p_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$A(x)\,y''+B(x)\,y'+\lambda_n y=0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ не зависят от n, а λ_n не зависит от x.

III. Имеет место обобщенная формула Родрига

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) X^n], \tag{1}$$

где K_n — постоянная и X — многочлен, коэффициенты которого не зависят от n.

Обратно, любое из этих трех свойств характеризует классические ортогональные многочлены в том смысле, что любая система ортогональных многочленов, обладающая одним из этих трех свойств, может быть приведена к классической системе Для I это доказали Hahn (1935) и Krall (1936), для II Bochner (1939) (в этом случае встречаются некоторые тривиальные исключения) и для III Tricomi (1948a). Мы укажем кратко рассуждения в этом последнем случае.

Пусть $\{p_n(x)\}$ — последовательность многочленов, причем $p_n(x)$ является многочленом, степень которого в точности равна n, равенство (1) справедливо для всех n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и степень многочлена X равна k Заметим, что нет необходимости предполагать, что многочлены $p_n(x)$ ортогональны или что $w(x)$ является весом. При $n = 1$ из равенства (1) получаем

$$K_1 p_1(x) = X' + \frac{X w'(x)}{w(x)}. \tag{2}$$

Положим сначала $k = 0$. Тогда X является постоянным и $\frac{w'}{w}$ является линейной функцией от x. С помощью линейной замены независимого переменного можно сделать так, что $\frac{w'}{w} = -2x$ и, следовательно, $w = \exp(-x^2)$. В этом случае рассматриваемые многочлены являются многочленами Эрмита, см. 10.13 (7). Далее, пусть $k = 1$. Тогда линейная замена x преобразует

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{K_1 p_1(x) - X'}{X} \tag{3}$$

к виду $\frac{w'}{w} = -1 + \frac{\alpha}{x}$, так что $X = x$, $w = x^\alpha e^{-x}$, и мы получаем многочлены Лагерра, см. 10.12 (5).

Рассмотрим теперь случай $k \geqslant 2$. В этом случае мы можем положить

$$X = \prod_{r=1}^{k} (x - a_r). \tag{4}$$

Предположим сначала, что все корни a_r попарно различны. Из формулы (3) имеем

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_r}{x - a_r}.$$

Отсюда, в силу формулы (1), получаем

$$p_n(x) = K_n \prod_{r=1}^{k} (x - a_r)^{-\alpha_r} \frac{d^n}{dx^n} \left[\prod_{r=1}^{k} (x - a_r)^{n+\alpha_r} \right].$$

Но этот многочлен при $n = 2$ может иметь вторую степень лишь в случае, когда $k = 2$ Случай совпадающих множителей в (4) может быть исключен с помощью аналогичных рассмотрений, так что в (4) мы должны иметь $k=2$, $a_1 \neq a_2$. Путем линейной замены переменного x можно сделать $a_1=-1$, $a_2=1$ и положить

$$X=1-x^2, \quad w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Этот случай приводит к многочленам Якоби, см. 10.8 (10).

Следует отметить, что Хан (Hahn, 1949) существенно обобщил эти результаты Он заменил дифференциальный оператор $\frac{df(x)}{dx}$ более общим линейным оператором

$$L\,f(x)=\frac{f(qx+\omega)-f(x)}{(q-1)\,x+\omega}$$

и показал, что в этом более общем случае каждое из условий I, II, III, а также каждое из двух других условий определяет одно и то же семейство ортогональных многочленов Классические многочлены являются предельным случаем многочленов Хана, к ним же относятся и многочлены из п. 22—25.

10.7. Общие свойства классических ортогональных многочленов

Многие важные свойства классических ортогональных многочленов легко следуют из обобщенной формулы Родрига 10.6 (1) Мы предположим, что в случае многочленов Лагерра $\alpha>-1$, а в случае многочленов Якоби $\alpha>-1$, $\beta>-1$.

Во всех случаях в 10.6 (1) функция $w(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Кроме того, так как все производные функции $w(x)X^n$ до $(n-1)$-й включительно обращаются в нуль в точках a и b, мы можем n раз проинтегрировать по частям выражение

$$(f, p_n)=K_n^{-1}\int_a^b f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\,[w(x)\,X^n]\,dx.$$

Это приводит к

$$(f, p_n)=(-1)^n K_n^{-1}\int_a^b f^{(n)}(x)\,w(x)\,X^n\,dx.$$

Поэтому, если f является многочленом степени меньшей n, то $(f, p_n)=0$. Иными словами, многочлены 10.6 (1) образуют ортогональную систему на отрезке $[a, b]$ относительно веса $w(x)$, а потому все результаты предыдущих пунктов справедливы для этих функций. В частности, мы имеем рекуррентную формулу 10.3 (7) с обозначениями 10.3 (8), которую мы еще используем в этом пункте.

При выводе из 10.6 (1) дифференциального уравнения мы будем писать D вместо $\frac{d}{dx}$. Из 10.6 (1) и формулы Лейбница для дифференцирования произведения имеем

$$D^{n+1}[X\,D\,(wX^n)]=$$
$$=K_n\left[X\,D^2(wp_n)+(n+1)\,X'\,D\,(wp_n)+\frac{n}{2}(n+1)\,X''wp_n\right].$$

С другой стороны, используя 10.6 (3), получаем

$$D^{n+1}[X D(wX^n)] = D^{n+1}\{[K_1p_1+(n-1)X'] wX^n\} =$$
$$= K_n\left\{[K_1p_1+(n-1)X'] D(wp_n)+(n+1)\left[K_1p_1'+(n-1)X''\right] wp_n\right\},$$

так как $K_1p_1+(n-1)X'$ является многочленом от x не выше чем первой степени Сравнивая эти два результата, получаем для $y=p_n(x)$ дифференциальное уравнение

$$X\frac{d^2y}{dx^2}+K_1p_1(x)\frac{dy}{dx}+\lambda_n y=0, \tag{1}$$

где

$$\lambda_n=-n\left[k_1K_1+\frac{1}{2}(n-1)X''\right]. \tag{2}$$

Самосопряженная форма этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[X w(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda_n w(x)y=0. \tag{3}$$

Относительно деталей доказательства см. Tricomi (1948a, стр. 210—212). Так как X является многочленом не выше чем второй степени, а $p_1(x)$ — линейным многочленом, то дифференциальное уравнение (1) может быть сведено к гипергеометрическому уравнению или к одному из его частных или предельных случаев.

Для классических многочленов имеем также *формулу дифференцирования*

$$X\frac{dp_n(x)}{dx}=\left(\alpha_n+\frac{n}{2}X''x\right)p_n(x)+\beta_n p_{n-1}(x), \tag{4}$$

где

$$\alpha_n=nX'(0)-\frac{1}{2}X''r_n, \qquad A_n\beta_n=-C_n\left[k_1K_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)X''\right] \tag{5}$$

и A_n, C_n, k_n, r_n имеют тот же самый смысл что и в п. 10.3. С помощью равенства 10.3 (7) правая часть формулы (4) может быть выражена через p_n и p_{n+1}.

Доказательство формулы (4) у Tricomi (1948a, стр. 212—215) основано на том факте, что

$$Xp_n'(x)-\frac{n}{2}X''x\,p_n(x)$$

является многочленом степени не выше чем n и, следовательно, имеет вид

$$\alpha_n p_n(x)+\beta_n p_{n-1}(x)+\gamma_2 p_{n-2}(x)+\ldots+\gamma_n p_0(x).$$

Коэффициенты $\alpha_n, \ldots, \gamma_n$ определяются из свойства ортогональности. При вычислении β_n используется также дифференциальное уравнение (3).

Наконец, заметим, что путем n-кратного интегрирования по частям, как описано в начале главы, получаем

$$h_n=(p_n, p_n)=(-1)^n k_n n!\,K_n^{-1}\int_a^b X^n w(x)\,dx. \tag{6}$$

Далее, из 10.4 (8), 10.3 (7) и (4) следует, что

$$\lambda_{\nu,n} = A_{n-1}h_{n-1}\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n}\left[p_{n-1}(x_{\nu,n})\right]^{-2} = \\ = A_{n-1}h_{n-1}\frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n})}\left[p_n'(x_{\nu,n})\right]^{-2}, \tag{7}$$

а из (6) что

$$(-1)^n k_n K_n > 0. \tag{8}$$

Каждый из последующих шести пунктов посвящен одному из основных семейств классических ортогональных многочленов. Каждый из этих шести пунктов строится по следующему плану:

I. Стандартизация многочленов.

II. Вычисление постоянных

$$h_n,\ k_n,\ r_n,\ A_n,\ B_n,\ C_n,\ K_n,\ \lambda_n,\ \alpha_n,\ \beta_n, \tag{9}$$

заданных формулами 10.7 (6), 10.3 (8), 10.7 (2), 10.7 (5).

III. Вывод рекуррентных формул, дифференциальных уравнений и других соотношений. При этом мы исключаем слишком громоздкие соотношения, а также те, которые читатель легко может получить, подставляя значения постоянных (9) в общие формулы этого и предыдущих пунктов.

IV. Связь с функциями гипергеометрического типа и полное интегрирование дифференциального уравнения

V. Производящая функция или производящие функции.

VI. Интегральные представления.

VII. Теоремы сложения, разложения в ряды и различные результаты.

Асимптотические свойства, нули и задачи разложения будут рассмотрены в дальнейших пунктах.

Мы будем пользоваться обозначением

$$D = \frac{d}{dx} \tag{10}$$

и положим

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1), \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha-n+1)_n}{n!}. \tag{11}$$

Теория классических ортогональных многочленов изложена в работах, упомянутых во введении, а также в книге Magnus, Oberhettinger (1948, гл. V).

10.8. Многочлены Якоби

Мы будем использовать обозначение Сеге $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ для соответствующим образом нормированных ортогональных многочленов, отвечающих значениям

$$a = -1,\quad b = 1,\quad w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\quad X = 1-x^2. \tag{1}$$

Для того чтобы вес был неотрицателен и интегрируем, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\alpha > -1,\quad \beta > -1. \tag{2}$$

Многие из формальных соотношений остаются справедливыми и без этих ограничений.

I. *Стандартизация.*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}. \qquad (3)$$

II. *Постоянные.*

$$(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,h_n=2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1), \qquad (4)$$

$$k_n=2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n},\quad r_n=\frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}, \qquad (5)$$

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)\,A_n=(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2), \qquad (6)$$

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)\,B_n=(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta+1), \qquad (7)$$

$$(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)\,C_n=(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2), \qquad (8)$$

$$K_n=(-2)^n n!,\quad \lambda_n=n(n+\alpha+\beta+1),\quad \alpha_n=r_n, \qquad (9)$$

$$(2n+\alpha+\beta)\,\beta_n=2(n+\alpha)(n+\beta).$$

III. *Формула Родрига.*

$$2^n n!\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}D^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]. \qquad (10)$$

Рекуррентная формула:

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=(2n+\alpha+\beta+1)\left[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)\,x+\alpha^2-\beta^2\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-$$
$$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \qquad (11)$$

Из (10) получаем явное выражение:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m, \qquad (12)$$

которое показывает, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x). \qquad (13)$$

Дифференциальное уравнение

$$(1-x^2)\,y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x]\,y'+n(n+\alpha+\beta+1)\,y=0. \qquad (14)$$

Формула дифференцирования:

$$(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=n\left[(\alpha-\beta)-(2n+\alpha+\beta)\,x\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2(n+\alpha)(n+\beta)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \qquad (15)$$

IV. *Гипергеометрические функции.* Уравнение (14) можно свести к гипергеометрическому дифференциальному уравнению 2.1 (1). Многочлены

Якоби — это решения уравнения (14), которые регулярны и принимают значение (3) при $x=1$. Из формул п. 2.9 следует, что

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= (-1)^n \binom{n+\beta}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1;\ \beta+1;\ \frac{1+x}{2}\right) = \\ &= \binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n F\left(-n,\ -n-\beta;\ \alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1}\right) = \\ &= \binom{n+\beta}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n F\left(-n,\ -n-\alpha;\ \beta+1;\ \frac{x+1}{x-1}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда вытекает формула дифференцирования

$$2^m D^m P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (n+\alpha+\beta+1)_m P_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x), \quad m=1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

которая находится в соответствии с утверждением I п. 10.6.

Из 2.9 (14) вытекает, что функции $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, определяемые равенством

$$\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\, Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^{n+\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(x-1)^{n+\alpha+1}(x+1)^\beta} \times$$
$$\times F\left[n+1,\ n+\alpha+1;\ 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-x}\right], \tag{18}$$

дают второе решение уравнения (14). Они известны как *функции Якоби второго рода* Эти функции не являются многочленами, однако они удовлетворяют той же рекуррентной формуле (11) и формуле дифференцирования (15), что и многочлены Якоби, за исключением того, что при $n=0$ эти соотношения неприменимы для Q; при $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -n-1$ эти функции обращаются в нуль на бесконечности. Относительно различных преобразований гипергеометрических рядов в (18) и их аналитического продолжения см. п. 2.1.4.

Многочлены Якоби и функции Якоби второго рода связаны многими соотношениями. Из соотношения между различными решениями гипергеометрического уравнения, см. п. 2.9, мы имеем

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + 2^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \times$$
$$\times (x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} F\left(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{19}$$

Имеет место также интегральное соотношение

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2(x-1)^\alpha (x+1)^\beta}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta}{x-t} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt, \tag{20}$$

которое справедливо для всех точек комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$. При этом функция $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка x к точке ξ разреза из верхней полуплоскости ($\xi+i0$) или из нижней полуплоскости ($\xi-i0$). Значения $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi \pm i0)$ можно вычислить с помощью формулы (19), положив

$\arg(x-1)=\pi$ для $x=\xi+i0$ и $\arg(x-1)=-\pi$ для $x=\xi-i0$. В частности,

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi+i0)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi-i0)=$$
$$=-i2^{\alpha+\beta}\sin(\alpha\pi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^{-\beta}\times$$
$$\times F\left(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha,\ \frac{1-\xi}{2}\right),\quad -1<\xi<1. \tag{21}$$

На самом разрезе можно использовать функцию

$$\mathrm{Q}_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)=\frac{1}{2}\left[Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi+i0)+Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi-i0)\right],\quad -1<\xi<1, \tag{22}$$

принимающую вещественные значения, если α и β вещественные. Из (19) следует, что

$$\mathrm{Q}_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)=-\frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)}P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)+$$
$$+2^{\alpha+\beta-1}\cos(\alpha\pi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^{-\beta}\times$$
$$\times F\left(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{1-\xi}{2}\right),\quad -1<\xi<1. \tag{23}$$

Функции Якоби второго рода связаны также с многочленами

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{t-x}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(t)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]dt, \tag{24}$$

ассоциированными с многочленами Якоби в силу 10.5 (6); именно, равенство (20) можно переписать в виде

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=-\frac{1}{2(x-1)^\alpha(x+1)^\beta}q_n^{(\alpha,\beta)}(x)+Q_0^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{25}$$

Другие соотношения, связывающие P и Q, имеют вид

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=2^{\alpha+\beta-1}(2n+\alpha+\beta)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}, \tag{26}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d}{dx}Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=-2^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}(x-1)^{-\alpha-1}(x+1)^{-\beta-1}. \tag{27}$$

Они показывают, что $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ удовлетворяет той же формуле дифференцирования (15), что и $P_n^{(\alpha,\beta)}$

Из теории гипергеометрических функций получаем *интегральные представления* для $Q_n^{(\alpha,\beta)}$. Простейшим из них является представление

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n-1}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{1}(x-t)^{-n-1}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}\,dt, \tag{28}$$

справедливое, если x лежит в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$.

V. *Производящая функция.* Имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,z^n=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta},\quad |z|<1, \tag{29}$$

где

$$R=\sqrt{1-2xz+z^2} \tag{30}$$

и $R=1$ при $z=0$. Относительно различных способов доказательства равенства (29) см. Сеге (1962, п. 4.4). При частных значениях α, β существуют другие производящие функции.

VI. *Интегральные представления.* Из формулы Родрига (10) имеем

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(x+)}\left(\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t-x}\right)^n\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}dt, \tag{31}$$

где $x\neq\pm1$, а интегрирование ведется по простому замкнутому контуру, охватывающему в положительном направлении $t=x$. Точки $t=\pm1$ лежат внутри контура, и функции $\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}$ и $\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}$ выбираются так, чтобы при $t=x$ их значения равнялись единице.

Дальнейшие интегральные представления могут быть получены из интегралов, выражающих гипергеометрическую функцию с помощью формулы (16).

VII. *Различные результаты.* Применим формулу Кристоффеля 10.3 (12) к случаю $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\rho(x)=1-x$. В силу (3) получаем

$$\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)(1-x)\,P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)=$$
$$=(n+\alpha+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(n+1)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{32}$$

и аналогично

$$\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)(1+x)\,P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)=$$
$$=(n+\beta+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(n+1)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{33}$$

Эти соотношения являются примерами соотношений между смежными гипергеометрическими функциями (см. 2.8 (31) — 2.8 (45)); другими соотношениями той же природы являются

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\,\beta)}(x)+(1+x)P_n^{(\alpha,\,\beta+1)}(x)=2P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x), \tag{34}$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha-1,\,\beta)}(x)=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)-(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x), \tag{35}$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta-1)}(x)=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)+(n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x), \tag{36}$$

$$P_n^{(\alpha,\,\beta-1)}(x)-P_n^{(\alpha-1,\,\beta)}(x)=P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x). \tag{37}$$

Повторное применение этих формул позволяет выразить $P_n^{(\alpha+h,\,\beta+k)}(x)$ для любых целых h и k через $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$.

Из формулы Родрига (10) имеем

$$2n\int\limits_0^x(1-y)^\alpha(1+y)^\beta P_n^{(\alpha,\,\beta)}(y)\,dy=$$
$$=P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(0)-(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(x). \tag{38}$$

Тоскано (Toscano, 1949) нашел аналог формулы Родрига в терминах конечных разностей. Определим разностные операторы формулами

$$\Delta_\alpha F(\alpha)=F(\alpha+1)-F(\alpha),\quad \Delta_\alpha^n F=\Delta_\alpha\left(\Delta_\alpha^{n-1}F\right). \tag{39}$$

Результат Тоскано можно записать в виде

$$n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{[(1-x)/2]^{\alpha+1}}\Delta_\alpha^n\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+1}\right]. \tag{40}$$

Наконец, имеет место важное предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha\,\,\beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)\right]=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(z), \tag{41}$$

где J_α — функция Бесселя первого рода. Эта формула справедлива для любых α и β равномерно в любой ограниченной области комплексной плоскости z.

10.9. Многочлены Гегенбауэра

Мы будем использовать обозначение Гегенбауэра $C_n^\lambda(x)$ для соответственно стандартизированных многочленов, связанных с

$$a=-1,\quad b=1,\quad w(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}},\quad X=1-x^2. \tag{1}$$

Эти многочлены называют также *ультрасферическими* многочленами и часто обозначают через $P_n^{(\lambda)}(x)$ Очевидно, что многочлены Гегенбауэра отличаются от многочленов Якоби при $\alpha=\beta=\lambda-\dfrac{1}{2}$ лишь постоянным множителем Для того чтобы весовая функция была вещественной и интегрируемой, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\lambda > -\frac{1}{2}, \tag{2}$$

хотя многие из формальных соотношений остаются справедливыми и без этого ограничения Относительно этих многочленов см. также п. 3.15.

I. *Стандартизация.*

$$C_n^\lambda(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n} = \frac{(2\lambda)_n}{n!}. \tag{3}$$

Сравнивая с 10.8 (3), получаем

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n C_n^\lambda(x) = (2\lambda)_n P_n^{(\alpha,\,\alpha)}(x),\quad \alpha = \lambda - \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Выбранная стандартизация (3) утрачивает силу, если 2λ есть нуль или отрицательное целое число. Единственным исключением в области (2) является точка $\lambda = 0$. При $\lambda = 0$ введем стандартизацию условием

$$C_0^0(1) = 1,\quad C_n^0(1) = \frac{2}{n},\quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Тогда имеет место соотношение

$$C_n^0(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} C_n^\lambda(x) - 2\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{6}$$

Во многих формулах этого пункта значение $\lambda = 0$ должно быть исключено. Этот случай будет отдельно рассмотрен в п. 10.10.

II. *Постоянные.*

$$(n+\lambda)\, n!\, \Gamma(\lambda)\, h_n = \sqrt{\pi}\,(2\lambda)_n \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right), \tag{7}$$

$$n!\, k_n = 2^n (\lambda)_n,\quad r_n = 0,\quad (2\lambda)_n K_n = (-2)^n \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n, \tag{8}$$

$$(n+1) A_n = 2(n+\lambda),\quad B_n = 0,\quad (n+1) C_n = n + 2\lambda - 1, \tag{9}$$

$$\lambda_n = n(n+2\lambda),\quad \alpha_n = 0,\quad \beta_n = n + 2\lambda - 1. \tag{10}$$

III. *Формула Родрига.*

$$2^n n! \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) = (-1)^n (2\lambda)_n D^n\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right], \tag{11}$$

$$C_0^\lambda(x) = 1,\quad C_1^\lambda(x) = 2\lambda x. \tag{12}$$

Рекуррентная формула:

$$(n+1) C_{n+1}^\lambda(x) = 2(n+\lambda)\, x\, C_n^\lambda(x) - (n+2\lambda-1) C_{n-1}^\lambda(x). \tag{13}$$

Дифференциальное уравнение

$$(1-x^2) y'' - (2\lambda+1) xy' + n(n+2\lambda) y = 0. \tag{14}$$

Формула дифференцирования:

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}C_n^\lambda(x)=-nx\,C_n^\lambda(x)+(n+2\lambda-1)\,C_{n-1}^\lambda(x)=$$
$$=(n+2\lambda)\,x\,C_n^\lambda(x)-(n+1)\,C_{n+1}^\lambda(x). \qquad (15)$$

Четность:

$$C_n^\lambda(-x)=(-1)^n C_n^\lambda(x). \qquad (16)$$

Явные выражения:

$$C_n^\lambda(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(\lambda)_m(\lambda)_{n-m}}{m!\,(n-m)!}\cos[(n-2m)\theta], \qquad (17)$$

$$C_n^\lambda(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m(\lambda)_{n-m}}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}, \qquad (18)$$

$$C_n^\lambda(0)=\begin{cases}0, & \text{если } n\text{ — нечетное},\\ \dfrac{(-1)^m(\lambda)_m}{m!}, & \text{если } n=2m\text{ — четное}.\end{cases} \qquad (19)$$

IV. *Гипергеометрические функции* Дифференциальное уравнение (14) можно свести к гипергеометрическому уравнению. Функция $C_n^\lambda(x)$ является его решением, регулярным в точке $x=1$ и принимающим в этой точке значение (3). Кроме того, в случае многочленов Гегенбауэра соответствующие гипергеометрические ряды допускают квадратичное преобразование, см. п. 2.1.5. Отсюда вытекают следующие представления.

$$n!\,C_n^\lambda(x)=(2\lambda)_n F\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)=$$
$$=(-1)^n(2\lambda)_n F\left(-n,\ n+2\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1+x}{2}\right)=$$
$$=2^n(\lambda)_n(x-1)^n F\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ -2n-2\lambda+1;\ \frac{2}{1-x}\right)=$$
$$=(2\lambda)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)^n F\left(-n,\ -n-\lambda+\frac{1}{2};\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right), \qquad (20)$$

$$C_{2m}^\lambda(x)=(-1)^m\frac{(\lambda)_m}{m!}F\left(-m,\ m+\lambda;\ \frac{1}{2};\ x^2\right)=$$
$$=\frac{(2\lambda)_{2m}}{(2m)!}F\left(-m,\ m+\lambda;\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^2\right)=$$
$$=\frac{(\lambda)_m}{\left(\frac{1}{2}\right)_m}P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1), \qquad (21)$$

$$C_{2m+1}^\lambda(x)=(-1)^m\frac{(\lambda)_{m+1}}{m!}2x\,F\left(-m,\ m+\lambda+1,\ \frac{3}{2};\ x^2\right)=$$
$$=\frac{(2\lambda)_{2m+1}}{(2m+1)!}x\,F\left(-m,\ m+\lambda+1,\ \lambda+\frac{1}{2};\ 1-x^2\right)=$$
$$=\frac{(\lambda)_{m+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{m+1}}x\,P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}(2x^2-1). \qquad (22)$$

Используя эти представления и формулы (13) и (19), получаем:

$$D^m C_n^\lambda(x) = 2^m (\lambda)_m C_{n-m}^{\lambda+m}(x), \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

$$D C_{n-1}^\lambda(x) = x D C_n^\lambda(x) - n C_n^\lambda(x), \tag{24}$$

$$D C_{n+1}^\lambda(x) = x D C_n^\lambda(x) + (n + 2\lambda) C_n^\lambda(x), \tag{25}$$

$$2(n+\lambda) \int C_n^\lambda(x)\,dx = C_{n+1}^\lambda(x) - C_{n-1}^\lambda(x), \tag{26}$$

$$D C_n^\lambda(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное}, \\ 2(-1)^m (\lambda)_{m+1}/m!, & \text{если } n = 2m+1 \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{27}$$

Второе решение дифференциального уравнения (14) может быть получено с помощью результатов п. 10.8 (IV) путем использования связей (4), (6), (21) или (22) между многочленами Гегенбауэра и Якоби. В этом случае отсутствуют общепринятые обозначения или стандартизация.

V. *Производящая функция.* Из 10.8 (29) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n}{(2\lambda)_n} C_n^\lambda(x) z^n = 2^{\lambda - \frac{1}{2}} R^{-1} (1 - xz + R)^{1/2 - \lambda}, \tag{28}$$

$$|z| < 1, \quad R = \sqrt{1 - 2xz + z^2}, \quad R = 1 \text{ при } z = 0.$$

Однако в этом случае есть более простая производящая функция, а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda} \quad |z| < 1. \tag{29}$$

Для доказательства этого равенства надо положить $x = \cos\theta$, записать правую часть равенства в виде $(1 - e^{i\theta} z)^{-\lambda} (1 - e^{-i\theta} z)^{-\lambda}$, разложить по биному Ньютона и использовать равенство (17). Третьей производящей функцией является

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) \frac{z^n}{(2\lambda)_n} = \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) e^{z\cos\theta} \left(\frac{z}{2}\sin\theta\right)^{\frac{1}{2} - \lambda} J_{\lambda - \frac{1}{2}}(z \sin\theta). \tag{30}$$

Она связана с (29) с помощью преобразования Лапласа.

VI. *Интегральные представления.* Каждая из производящих функций приводит к представлению многочленов Гегенбауэра в виде контурных интегралов. Кроме того, мы имеем вещественные интегралы

$$C_n^\lambda(x) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda + n)}{n! [\Gamma(\lambda)]^2} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi\right)^n (\sin\varphi)^{2\lambda - 1} d\varphi, \tag{31}$$

$$C_n^\lambda(\cos\theta) = \frac{2^\lambda \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(2\lambda)_n}{\sqrt{\pi}\, n!\, \Gamma(\lambda)} (\sin\theta)^{1-2\lambda} \int_0^\theta \frac{\cos[(n+\lambda)\varphi]}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1-\lambda}} d\varphi, \tag{32}$$

справедливые при $\lambda > 0$. Относительно формулы (31) см. 3.15 (22), а также Seidel и Szász (1950). Равенство (32) является *интегралом Мелера* 3.15 (23);

существует второй интеграл, получаемый путем замены φ и θ на $\pi-\varphi$ и $\pi-\theta$ соответственно. Интеграл Мелера связан с функциональным преобразованием, которое преобразует ультрасферические многочлены в степени.

VII. *Различные результаты.* Из связи с функциями Лежандра

$$n!\,C_n^\lambda(x)=\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(2\lambda)_n\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{1-2\lambda}{4}}P_{n+\lambda-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(x) \tag{33}$$

получаем теорему сложения

$$C_n^\lambda(\cos\theta\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}2^m(2\lambda+2m-1)(n-m)!\,\frac{[(\lambda)_m]^2}{(2\lambda-1)_{n+m+1}}\times$$
$$\times(\sin\theta)^m C_{n-m}^{\lambda+m}(\cos\theta)(\sin\psi)^m C_{n-m}^{\lambda+m}(\cos\psi)\,C_m^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi). \tag{34}$$

Соотношения между смежными гипергеометрическими функциями имеют вид

$$2\lambda(1-x^2)\,C_{n-1}^{\lambda+1}(x)=(2\lambda+n-1)\,C_{n-1}^\lambda(x)-nx\,C_n^\lambda(x)=$$
$$=(n+2\lambda)\,x\,C_n^\lambda(x)-(n+1)\,C_{n+1}^\lambda(x), \tag{35}$$
$$(n+\lambda)\,C_{n+1}^{\lambda-1}(x)=(\lambda-1)\left[C_{n+1}^\lambda(x)-C_{n-1}^\lambda(x)\right]. \tag{36}$$

Из равенства (11) и линейных преобразований гипергеометрических рядов в (21) и (22) вытекает формула дифференцирования

$$(x^2-1)^{\lambda+\frac{n}{2}}D^n\left[(x^2-1)^{-\lambda}\right]=(-1)^n n!\,C_n^\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right), \tag{37}$$

принадлежащая Трикоми (Tricomi, 1949). Отметим также интеграл Гегенбауэра

$$n!\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}C_n^\lambda(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda}\,d\theta=$$
$$=2^\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(2\lambda)_n\,i^n z^{-\lambda}J_{\lambda+n}(z) \tag{38}$$

и разложение в тригонометрический ряд

$$\Gamma(\lambda)\,C_n^\lambda(\cos\theta)=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_m}{m!}\,\frac{\Gamma(n+m+2\lambda)}{\Gamma(n+m+\lambda+1)}\cos[(n+2m+2\lambda)\theta-\lambda\pi],$$
$$0<\lambda<1,\quad 0<\theta<\pi \tag{39}$$

(Сеге, 1962, стр. 106).

10.10. Многочлены Лежандра

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ являются соответственно стандартизированными многочленами, связанными с

$$a=-1,\quad b=1,\quad w(x)=1,\quad X=1-x^2. \tag{1}$$

Эти многочлены называют также *сферическими многочленами*. Очевидно, они являются частным случаем многочленов Якоби при $\alpha=\beta=0$, а также частным случаем многочленов Гегенбауэра при $\lambda=\frac{1}{2}$. Многочлены Лежандра и более общие функции Лежандра были уже подробно изучены (см. гл. 3).

I. *Стандартизация.*

$$P_n(1)=1. \tag{2}$$

Следовательно,

$$P_n(x)=C_n^{\frac{1}{2}}(x)=P_n^{(0,\,0)}(x). \tag{3}$$

II. *Постоянные.*

$$h_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1},\quad k_n=2^n g_n=2^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!},\quad r_n=0, \tag{4}$$

$$K_n=(-2)^n n!,\quad (n+1)A_n=2n+1,\quad B_n=0,\quad (n+1)C_n=-n, \tag{5}$$

$$\lambda_n=n(n+1),\quad \alpha_n=0,\quad \beta_n=n. \tag{6}$$

III *Формула Родрига.*

$$2^n n!\,P_n(x)=D^n\left[(x^2-1)^n\right], \tag{7}$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Рекуррентная формула:

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)\,x\,P_n(x)-n\,P_{n-1}(x). \tag{9}$$

Формула Кристоффеля — Дарбу:

$$\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(x)P_m(y)=\frac{n+1}{x-y}\left[P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\right]. \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \tag{11}$$

Формулы дифференцирования и интегрирования:

$$(1-x^2)P_n'(x)=n\left[P_{n-1}(x)-x\,P_n(x)\right]=(n+1)\left[x\,P_n(x)-P_{n+1}(x)\right]. \tag{12}$$

$$x\,P_n'(x)-P_{n-1}'(x)=n\,P_n(x), \tag{13}$$

$$P_{n+1}'(x)-x\,P_n'(x)=(n+1)P_n(x), \tag{14}$$

$$(2n+1)\int P_n(x)\,dx=P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x). \tag{15}$$

В этих формулах $P_n'(x)=\dfrac{dP_n(x)}{dx}$.

Явные выражения, четность, частные значения:

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}, \tag{16}$$

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} g_m g_{n-m} \cos[(n-2m)\theta], \tag{17}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \tag{18}$$

$$P_{2m}(0) = (-1)^m g_m, \quad P_{2m+1}(0) = 0, \tag{19}$$

$$P'_{2m}(0) = 0, \quad P'_{2m+1}(0) = (-1)^m (2m+1) g_m. \tag{20}$$

Здесь

$$g_m = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m}{m!} = 2^{-2m} \binom{2m}{n}. \tag{21}$$

IV. *Гипергеометрические функции.* **См. также 10.9 (IV).**

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) = \\ = 2^n g_n x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2}; x^{-2}\right), \tag{22}$$

$$P_n(\cos\theta) = F\left(-n, n+1; 1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \\ = (-1)^n F\left(-n; n+1; 1; \cos^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{23}$$

$$P_{2m}(x) = (-1)^m g_m F\left(-m, m+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right), \tag{24}$$

$$P_{2m+1}(x) = (-1)^m (2m+1) g_m x F\left(-m, m+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right), \tag{25}$$

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = 2^m m! \, g_m C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(x), \quad n \geqslant m. \tag{26}$$

Информация относительно второго решения дифференциального уравнения Лежандра (11) может быть получена из 10.8 (IV). Этим вторым решением является *функция Лежандра второго рода*

$$Q_n(x) = Q_n^{(0,\,0)}(x). \tag{27}$$

В комплексной x**-плоскости, разрезанной вдоль отрезка** $[-1, 1]$**, имеем**

$$2^{-n}(2n+1)!\,(n!)^{-2} Q_n(x) = \\ = (x-1)^{-n-1} F\left(n+1, n+1; 2n+2; \frac{2}{1-x}\right) = \\ = (x+1)^{-n-1} F\left(n+1, n+1; 2n+2, \frac{2}{1+x}\right) = \\ = x^{-n-1} F\left(\frac{1+n}{2}, 1+\frac{n}{2}; \frac{3}{2}+n; x^{-2}\right). \tag{28}$$

Функция Лежандра второго рода не является многочленом; она удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению (9) и тем же самым формулам дифференцирования (12) — (15), что и многочлены Лежандра, за исключением того, что значение $n=0$ в этих формулах недопустимо для Q.

$$Q_n(-x)=(-1)^{n+1}Q_n(x), \tag{29}$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad Q_1(x)=\frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1}-1, \tag{30}$$

$$Q_n(x)=2^{-n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(x-t)^{-n-1}\,dt, \tag{31}$$

$$Q_n(x)=\int_0^\infty\left(x+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch}t\right)^{-n-1}dt, \tag{32}$$

$$Q_n(\operatorname{ch}\zeta)=\int_\zeta^\infty\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)z}\,dz}{\sqrt{2(\operatorname{ch}z-\operatorname{ch}\zeta)}},\quad \operatorname{Re}z>\operatorname{Re}\zeta,\quad \operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\zeta, \tag{33}$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x-t)^{-1}P_n(t)\,dt, \tag{34}$$

$$Q_n(x)=Q_0(x)P_n(x)-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x). \tag{35}$$

Последняя формула эквивалентна частному случаю $\alpha=\beta=0$ формулы 10.8 (25) относительно доказательства в форме (35) см. Гобсон (1952, стр. 56). Бесконечно удаленная точка является для функции $Q_n(x)$ нулем кратности $n+1$ эта функция не имеет других нулей в разрезанной x-плоскости.

Отрезок вещественной оси от -1 до 1 является разрезом ветвления для $Q_n(x)$, при этом

$$Q_n(\xi+i0)-Q_n(\xi-i0)=-\pi i P_n(\xi),\quad -1<\xi<1. \tag{36}$$

На этом разрезе можно определить второе решение уравнения Лежандра формулой

$$\mathrm{Q}_n(\xi)=\frac{1}{2}Q_n(\xi+i0)+\frac{1}{2}Q_n(\xi-i0),\quad -1<\xi<1. \tag{37}$$

Мы имеем тогда

$$\mathrm{Q}_n(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\xi-t)^{-1}P_n(t)\,dt,\qquad -1<\xi<1, \tag{38}$$

где интеграл понимается как главное значение в смысле Коши, то есть как

$$\lim\left(\int_{-1}^{\xi-\varepsilon}+\int_{\xi+\varepsilon}^{1}\right)\quad\text{при}\quad \varepsilon>0,\quad \varepsilon\to 0.$$

V. *Производящие функции.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad |z| < 1, \tag{39}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(\cos\theta) z^n = e^{z\cos\theta} J_0(z\sin\theta), \tag{40}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) x^{2n+1} = F\left(\sin\frac{\theta}{2}, \varphi\right), \tag{41}$$

$$x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Первые две формулы являются частными случаями формул 10.9 (29) и 10.9 (30). Последняя формула может быть выведена из (39). Здесь $F(k, \varphi)$ означает неполный эллиптический интеграл Лежандра первого рода с модулем k.

VI. *Интегральные представления.*

$$P_n(\cos\theta) = \pi^{-1}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n\, d\varphi =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^{-n-1}\, d\varphi, \tag{42}$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}\, d\varphi, \quad 0 < \theta < \pi, \tag{43}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} \frac{z^{-n-1}\, dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}}, \tag{44}$$

$$P_n(x) = (-2)^{-n}(2\pi i)^{-1}\int^{(x+)} (1-z^2)^n (z-x)^{-n-1}\, dz. \tag{45}$$

Равенство (44) вытекает из (39), а (45) — из формулы Родрига. Интеграл в (45) называют интегралом Шлефли. Первый и второй интегралы Лапласа в (42) могут быть выведены из (45), если преобразовать контур интегрирования в окружность

$$z = x + \sqrt{x^2-1}\, e^{i\varphi}, \quad -\pi \leqslant \varphi < \pi,$$

а интеграл Мелера (43) можно вывести из интеграла Лапласа (Уиттекер и Ватсон, 1963, п. 15.23 и 15.231).

VII. *Различные результаты.* Функцию

$$P_n^m(\cos\theta) = (-2)^m\, m!\, g_m (\sin\theta)^m \cdot C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(\cos\theta) \tag{46}$$

называют *присоединенной функцией Лежандра первого рода* (см. 3.4 (1) и 3.15 (4)). Из формулы 10.9 (34) вытекает *теорема сложения* для многочленов Лежандра

$$P_n(\cos\theta\cos\psi+\sin\theta\sin\psi\cos\varphi)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\psi)+$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\psi)\cos n\varphi. \quad (47)$$

Отметим также разложение в тригонометрический ряд

$$P_{n-1}(\cos\theta)=\frac{2}{\pi n g_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n)_m g_m}{\left(n+\frac{1}{2}\right)_m}\sin[(n+2m)\theta],\quad n=2,3,\ldots, \quad (48)$$

формулы интегрирования

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}}dx=\frac{\sqrt{8}}{2n+1}, \quad (49)$$

$$\int_0^{\pi}P_{2m}(\cos\theta)\,d\theta=\pi g_m^2,\quad \int_0^{\pi}P_{2m+1}(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta=\pi g_m g_{m+1}, \quad (50)$$

$$\int_0^1 x^{\lambda}P_{2m}(x)\,dx=\frac{(-1)^m\left(-\frac{\lambda}{2}\right)_m}{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)_{m+1}},\quad \operatorname{Re}\lambda>-1, \quad (51)$$

$$\int_0^1 x^{\lambda}P_{2m+1}(x)\,dx=\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)_m}{2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)_{m+1}},\quad \operatorname{Re}\lambda>-2, \quad (52)$$

и билинейное разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x)P_n(y)=2\ln 2-1-\ln[(1-x)(1+y)],$$
$$-1<x<y<1. \quad (53)$$

10.11. Многочлены Чебышева

Часто (особенно в русской и французской литературе) ортогональные многочлены вообще называют многочленами Чебышева. Имеется также много частных систем ортогональных многочленов, называемых многочленами Чебышева. В этой главе мы сохраним названия многочленов Чебышева первого и второго рода для соответственно стандартизированных ортогональных многочленов, связанных с

$$a=-1,\quad b=1,\quad w(x)=(1-x^2)^{\mp\frac{1}{2}},\quad X=1-x^2. \quad (1)$$

Очевидно, что многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$ отличаются лишь постоянным множителем от многочленов Якоби таких, что $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$, и многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ — от многочленов Якоби, для которых $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$. Эти многочлены Якоби являются ультрасферическими многочленами ($\lambda=0$ для многочленов первого рода и $\lambda=1$ для много членов второго рода)

Соотношение ортогональности для многочленов Чебышева первого рода имеет вид

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad m\neq n.$$

Подставим $x=\cos\theta$ и заметим, что $\cos n\theta$ является многочленом степени n от $\cos\theta$. Мы видим, что $T_n(x)$ отличается лишь постоянным множителем от $\cos(n\theta)$ Таким же образом можно показать, что $U_n(x)$ отличается лишь постоянным множителем от $\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$. Мы стандартизируем наши многочлены, положив

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta),\quad U_n(\cos\theta)=\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}. \tag{2}$$

Многие соотношения, содержащие многочлены Чебышева, являются парафразами хорошо известных тригонометрических тождеств. Например, мы имеем соотношение между двумя видами многочленов Чебышева

$$T_n(x)=U_n(x)-x\,U_{n-1}(x), \tag{3}$$

$$(1-x^2)\,U_{n-1}(x)=x\,T_n(x)-T_{n+1}(x). \tag{4}$$

Многочлены Чебышева являются ультрасферическими многочленами, для которых $\lambda=0, 1$. Из 10.9 (23) видно, что $C_n^\lambda(x)$ при натуральном λ можно выразить как производную соответствующего порядка от многочленов Чебышева.

I. *Стандартизация*. Она дается формулой (2). Из нее следует, что

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\,C_n^0(x)=(g_n)^{-1}\,P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x,\quad n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$U_n(x)=C_n^1(x)=(2g_{n+1})^{-1}\,P_n^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(x),\qquad n=0,1,\ldots, \tag{6}$$

где C_n^0 определено формулой 10.9 (6) и g_n — формулой 10.10 (21).

II. *Постоянные*. Для $T_n(x)$

$$h_0=\pi,\quad h_n=\frac{\pi}{2},\quad n=1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$k_n=2^{n-1},\quad r_n=0,\quad K_n=(-1)^n\,2^n\,n!\,g_n, \tag{8}$$

$$A_n=2,\quad B_n=0,\quad C_n=1, \tag{9}$$

$$\lambda_n=n^2,\quad \alpha_n=0,\quad \beta_n=n. \tag{10}$$

Для $U_n(x)$

$$h_n=\frac{\pi}{2},\quad k_n=2^n,\quad r_n=0,\quad K_n=(-1)^n\,2^{n+1}\,n!\,g_{n+1}, \tag{11}$$

$$A_n=2,\quad B_n=0,\quad C_n=1, \tag{12}$$

$$\lambda_n=n(n+2),\quad \alpha_n=0,\quad \beta_n=n+1. \tag{13}$$

III. *Формулы Родрига.*

$$2^n \left(\frac{1}{2}\right)_n T_n(x) = (-1)^n \sqrt{1-x^2}\, D^n \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right], \tag{14}$$

$$2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1} U_n(x) = (-1)^n (n+1) \frac{D^n\left[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\right]}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{15}$$

Рекуррентная формула ($z_n(x)$ является либо $T_n(x)$, либо $U_n(x)$):

$$z_{n+1}(x) = 2x\, z_n(x) - z_{n-1}(x). \tag{16}$$

Формула Кристоффеля — Дарбу:

$$\sum_{m=0}^{n}{}' z_m(x)\, z_m(y) = (x-y)^{-1}[z_{m+1}(x)\, z_m(y) - z_m(x)\, z_{m+1}(y)], \tag{17}$$

где z_n является либо T_n, либо U_n. В случае T_n первый член ($m=0$) нашей суммы надо разделить пополам.

Дифференциальные уравнения:

$$(1-x)\, y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad \text{для} \quad y = T_n(x), \tag{18}$$

$$(1-x)\, y'' - 3xy' + n(n+2)\, y = 0 \quad \text{для} \quad y = U_n(x). \tag{19}$$

Формулы дифференцирования (штрих означает дифференцирование по x):

$$(1-x^2)\, T_n'(x) = n\,[T_{n-1}(x) - x\, T_n(x)], \tag{20}$$

$$(1-x^2)\, U_n'(x) = (n+1)\, U_{n-1}(x) - nx\, U_n(x). \tag{21}$$

Явные выражения:

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (n-m)!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \tag{23}$$

VI. *Гипергеометрические функции.*

$$T_n(x) = F\left(-n,\, n;\, \frac{1}{2};\, \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right), \tag{24}$$

$$U_n(x) = (n+1)\, F\left(-n,\, n+1;\, \frac{3}{2};\, \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right). \tag{25}$$

Из этих соотношений и 10.9 (IV) следует

$$D^m T_n(x) = 2^{m-1}(m-1)!\, n\, C_{n-m}^m(x), \quad n \geqslant m, \tag{26}$$

$$D^m U_n(x) = 2^m m!\, C_{n-m}^{m+1}(x), \quad n \geqslant m, \tag{27}$$

$$T_n'(x) = n\, U_{n-1}(x). \tag{28}$$

V. *Производящие функции.*

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\,z^n = \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}, \tag{29}$$

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} T_n(x)\,z^n = -\ln(1-2xz+z^2), \tag{30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,z^n = (1-2xz+z^2)^{-1}, \tag{31}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(x)\,z^n = \frac{1}{R\sqrt{2}}\sqrt{1-xz+R}, \tag{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1} U_n(x)\,z^n = \frac{1}{R\sqrt{2(1-xz+R)}}. \tag{33}$$

Во всех этих пяти формулах

$$-1<x<1,\quad |z|<1.$$

В последних двух формулах

$$R=\sqrt{1-2xz+z^2}.$$

Равенство (31) является частным случаем равенства 10.9 (29), а (30) — предельным случаем этого соотношения. Равенство (29) можно вывести из (30). При этом $R=1$ и $\ln R^2=0$ при $z=0$. Формулы (32) и (33) являются частными случаями 10.9 (28).

VI. *Интегральные представления.* Контурные интегралы, выражающие многочлены Чебышева, могут быть получены с помощью любой из производящих функций.

VII. *Различные результаты*

$$2T_m(x)\,T_n(x) = T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x),\qquad n\geqslant m, \tag{34}$$

$$2(x^2-1)\,U_{m-1}(x)\,U_{n-1}(x) = T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x),\quad n\geqslant m, \tag{35}$$

$$2T_m(x)\,U_{n-1}(x) = U_{n+m-1}(x) + U_{n-m-1}(x),\quad n>m, \tag{36}$$

$$2T_n(x)\,U_{m-1}(x) = U_{n+m-1}(x) - U_{n-m-1}(x),\quad n>m, \tag{37}$$

$$2[T_n(x)]^2 = 1+2T_{2n}(x),\qquad 2T_n(x)\,U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x), \tag{38}$$

$$2(1-x^2)\,[U_{n-1}(x)]^2 = 1-2T_{2n}(x), \tag{39}$$

$$\sum_{m=0}^{n} T_{2m}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}U_{2n}(x),\qquad \sum_{m=0}^{n-1} T_{2m+1}(x) = \frac{1}{2}U_{2n-1}(x), \tag{40}$$

$$2(1-x^2)\sum_{m=0}^{n} U_{2m}(x) = 1-T_{2n+2}(x), \tag{41}$$

$$2(1-x^2)\sum_{m=0}^{n-1} U_{2m+1}(x) = x-T_{2n+1}(x). \tag{42}$$

Все эти формулы являются парафразами тригонометрических тождеств.

Интеграл Мелера 10.10(43) можно интерпретировать как связь между многочленами Лежандра и Чебышева. Обращая это соотношение, Трикоми (Tricomi, 1935) нашел, что

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x}\int_{-1}^{x}\frac{P_n(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}=T_n(x)+T_{n+1}(x), \tag{43}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x}\int_{x}^{1}\frac{P_n(t)\,dt}{\sqrt{t-x}}=T_n(x)-T_{n+1}(x). \tag{44}$$

Из 10.9(21) и 10.9(22) получаем

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1)=g_n U_{2n}(x), \tag{45}$$

$$x\,P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(2x^2-1)=g_n T_{2n+1}(x). \tag{46}$$

Наконец, отметим интегралы, понимаемые в смысле главного значения:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}=\pi U_{n-1}(x), \tag{47}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}=-\pi T_n(x), \quad n=1,\,2,\,\ldots, \tag{48}$$

которые являются парафразами тригонометрических интегралов и важны в теории интегральных уравнений, называемых иногда уравнениями профиля крыла.

10.12. Многочлены Лагерра

Многочлены $L_n^{\alpha}(x)$ являются соответственно стандартизированными ортогональными многочленами, связанными с

$$a=0, \quad b=\infty, \; w(x)=e^{-x}x^{\alpha}, \quad X=x, \quad \alpha>-1. \tag{1}$$

Вместо $L_n^0(x)$ часто пишут $L_n(x)$. Эти многочлены были введены Лагерром. Многочлены $L_n^{\alpha}(x)$ часто называют *обобщенными многочленами Лагерра*, но мы будем называть их просто многочленами Лагерра. Эквивалентные многочлены были также изучены Сониным (1954, стр. 68).

I. *Стандартизация.* Мы будем употреблять стандартизацию $k_n=\frac{(-1)^n}{n!}$. Иногда используется также стандартизация $k_n=(-1)^n$ и менее часто $k_n=1$.

II. *Постоянные.*

$$n!\,h_n=\Gamma(\alpha+n+1), \quad n!\,k_n=(-1)^n,$$

$$nr_n=-(n+\alpha), \quad K_n=n!, \tag{2}$$

$$(n+1)A_n=-1, \quad (n+1)B_n=2n+\alpha+1, \quad (n+1)C_n=n+\alpha, \tag{3}$$

$$\lambda_n=n, \quad a_n=n, \quad \beta_n=-(n+\alpha). \tag{4}$$

III. *Соотношения.*

$$n!\,L_n^\alpha(x) = e^x x^{-\alpha} D^n\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right), \tag{5}$$

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x, \tag{6}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-x)^m}{m!}, \tag{7}$$

$$(n+1)\,L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+\alpha+1-x)\,L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)\,L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)} L_m^\alpha(x)\,L_m^\alpha(y) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{1}{x-y} \left[L_n^\alpha(x)\,L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x)\,L_n^\alpha(y)\right], \tag{9}$$

$$xy'' + (\alpha+1-x)\,y' + ny = 0, \quad y = L_n^\alpha(x), \tag{10}$$

$$(xz')' + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right) z = 0, \quad z = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x), \tag{11}$$

$$x \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = n\,L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)\,L_{n-1}^\alpha(x) =$$

$$= (n+1)\,L_{n+1}^\alpha(x) - (n+\alpha+1-x)\,L_n^\alpha(x), \tag{12}$$

$$L_n^\alpha(0) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}. \tag{13}$$

IV. *Гипергеометрические функции.* Многочлены Лагерра связаны с вырожденными гипергеометрическими функциями гл. 6. Из явного выражения (7) вытекает, что

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n+\alpha}{n} \Phi(-n,\ \alpha+1;\ x) = \frac{(-1)^n}{n!} \Psi(-n-\alpha,\ 1-\alpha,\ x). \tag{14}$$

Отсюда мы имеем равенство

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{15}$$

согласующееся с утверждением (1) п. 10.6,

$$\frac{d}{dx}\left[L_n^\alpha(x) - L_{n+1}^\alpha(x)\right] = L_n^\alpha(x) \tag{16}$$

и многие другие формулы, вытекающие из соотношений между смежными вырожденными гипергеометрическими функциями.

Общее решение дифференциального уравнения Лагерра (10) может быть получено из теории вырожденных гипергеометрических функций.

V. *Производящие функции.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) z^n = (1-z)^{-\alpha-1} \exp \frac{xz}{z-1}, \quad |z| < 1, \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x) z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = (xz)^{-\frac{\alpha}{2}} e^z J_{\alpha}(2\sqrt{xz}), \tag{18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha-n}(x) z^n = e^{-xz}(1+z)^{\alpha}, \quad |z| < 1, \tag{19}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y) z^n =$$

$$= (1-z)^{-1} \exp\left(-z\frac{x+y}{1-z}\right)(xyz)^{-\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha}\left(2\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \quad |z| < 1. \tag{20}$$

Функция в правой части равенства (17) является наиболее обычной производящей функцией и может быть выведена с помощью равенства (7). Равенство (18) принадлежит Дечу и получается из (17) с помощью преобразования Лапласа. Равенство (19) вытекает из (7), оно принадлежит Эрдейи. Равенство (20) является билинейной производящей функцией и известно как формула Хилле — Харди (см также Myller-Lebedeff, 1907)

VI *Интегральные представления.* Контурные интегралы, выражающие многочлены Лагерра, могут быть очевидным образом получены из формулы Родрига (5) и из любой из производящих функций Кроме того, можно использовать связь (14) с вырожденными гипергеометрическими функциями (см. п 6.11). Мы отметим только следующие интегралы:

$$n!\, L_n^{\alpha}(x) = e^x x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{tx})\, dt, \tag{21}$$

$$2\pi i\, 2^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) = (-1)^n e^{\frac{x}{2}} \int^{(1+)} e^{-\frac{xz}{2}} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^k (1-z^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} dz, \quad k = n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Первый из них является следствием 6.11 (5) второй принадлежит Трикоми.

VII. *Различные результаты.* Число относящихся сюда результатов громадно. Многие из них были многократно переоткрыты Мы дадим лишь небольшую выборку из этих результатов без указания на то, кому они принадлежат.

Смежные многочлены. Помимо рекуррентной формулы (8) мы имеем

$$x L_n^{\alpha+1}(x) = (n+\alpha+1) L_n^{\alpha}(x) - (n+1) L_{n+1}^{\alpha}(x) =$$
$$= (n+\alpha) L_{n-1}^{\alpha}(x) - (n-x) L_n^{\alpha}(x), \tag{23}$$

$$L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^{\alpha}(x) - L_{n-1}^{\alpha}(x), \tag{24}$$

$$(n+\alpha) L_n^{\alpha-1}(x) = (n+1) L_{n+1}^{\alpha}(x) - (n+1-x) L_n^{\alpha}(x). \tag{25}$$

Формулы дифференцирования и неопределенные интегралы. Кроме (5) и (12) имеем

$$D^n\left[x^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=(-1)^n n!\, x^{-\alpha-n-1} L_n^\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right), \tag{26}$$

$$D^m\left[x^\alpha L_n^\alpha(x)\right]=(n-m+\alpha+1)_m x^{\alpha-m} L_n^{\alpha-m}(x), \tag{27}$$

$$n!\, D^m\left[e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)\right]=(m+n)!\, e^{-x}x^{\alpha-m} L_{m+n}^{\alpha-m}(x), \tag{28}$$

$$\int_x^\infty e^{-y} L_n^\alpha(y)\,dy=e^{-x}\left[L_n^\alpha(x)-L_{n-1}^\alpha(x)\right], \tag{29}$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\int_0^x (x-y)^{\beta-1} y^\alpha L_n^\alpha(y)\,dy=$$

$$=\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta)\,x^{\alpha+\beta}L_n^{\alpha+\beta}(x),\quad \operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}\beta>0, \tag{30}$$

$$\int_0^x L_m(y)\,L_n(x-y)\,dy=\int_0^x L_{m+n}(y)\,dy=L_{m+n}(x)-L_{m+n+1}(x). \tag{31}$$

Дальнейшие неопределенные интегралы можно получить из теоремы о преобразовании Лапласа для произведения

Интегралы Лапласа. Мы будем применять обозначение

$$\mathscr{L}[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt.$$

Имеем

$$\mathscr{L}\left[t^\alpha L_n^\alpha(t)\right]=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n!\, s^{\alpha+n+1}},\quad \operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}s>0, \tag{32}$$

$$n!\,\Gamma(\alpha+1)\,\mathscr{L}\left[t^\beta L_n^\alpha(t)\right]=$$

$$=\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)\,s^{-\beta-1}F(-n,\ \beta+1,\ \alpha+1,\ s^{-1}), \tag{33}$$

$$\operatorname{Re}\beta>-1,\quad \operatorname{Re}s>0,$$

$$\mathscr{L}\left[t^{\frac{\alpha}{2}+n}J_\alpha(2\sqrt{kt})\right]=n!\,k^{\frac{\alpha}{2}}s^{-\alpha-n-1}e^{-\frac{k}{s}}L_n^\alpha\left(\frac{k}{s}\right). \tag{34}$$

Предельные формулы.

$$L_n^\alpha(x)=\lim_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right), \tag{35}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}L_n^\alpha\left(\frac{x}{n}\right)\right]=x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x}). \tag{36}$$

Выражение через конечные разности. Справедлива формула

$$\Delta_\alpha^n f(\alpha)=\sum_{m=0}^n(-1)^{n-m}\binom{n}{m}f(\alpha+m),\quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

где положено

$$\Delta_\alpha f(\alpha) = f(\alpha+1) - f(\alpha), \quad \Delta_\alpha^{n+1} f(\alpha) = \Delta_\alpha\left(\Delta_\alpha^n f(\alpha)\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, имеет место равенство

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\, x^\alpha} \Delta_\alpha^n \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{37}$$

Конечные суммы. Помимо указанных выше, имеем

$$\sum_{m=0}^{n} L_m^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) = x^{-1}\left[(x-n) L_n^\alpha(x) + (\alpha+n) L_{n-1}^\alpha(x)\right], \tag{38}$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} (m!)^{-1} (\alpha-\beta)_m L_{n-m}^\beta(x), \tag{39}$$

$$L_n^\alpha(\lambda x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m} \lambda^{n-m} (1-\lambda)^m L_{n-m}^\alpha(x), \tag{40}$$

$$\sum_{m=0}^{n} L_m^\alpha(x) L_{n-m}^\beta(y) = L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y), \tag{41}$$

$$n!\, L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) = \Gamma(\alpha+n+1) \sum_{m=0}^{n} [m!\,\Gamma(\alpha+m+1)]^{-1} (xy)^m L_{n-m}^{\alpha+2m}(x+y). \tag{42}$$

Бесконечные ряды. Производящие функции указаны выше ((17) — (20)). Разложения бесселевых функций см. в п. 10.15, а другие примеры бесконечных рядов, содержащих многочлены Лагерра, см. в п. 10.20.

10.13. Многочлены Эрмита

Многочлены Эрмита являются ортогональными многочленами, связанными с вещественной осью $(-\infty, \infty)$ и экспоненциальной весовой функцией. К сожалению, обозначения, применяемые различными авторами, весьма разнообразны. Простейшей формой экспоненциальной весовой функции является $\exp(-x^2)$, но для приложений к математической статистике более удобно выбрать $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. В наиболее важных книгах, посвященных этому вопросу (Курант — Гильберт, Деч, Сансоне, Сеге), использовано $\exp(-x^2)$. Однако Аппель и Кампе де Ферье, Янке — Эмде — Лёш, Магнус — Оберхетингер, Полиа и Сеге и Трикоми применяют весовую функцию $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Мы будем пользоваться в этой главе обозначением Сеге (1962) и рассматривать многочлены Эрмита $H_n(x)$ как соответственно стандартизированные ортогональные многочлены, связанные с

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad w(x) = \exp(-x^2), \quad X = 1. \tag{1}$$

Ортогональные многочлены, связанные с весовой функцией $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, будут обозначаться $\mathrm{He}_n(x)$. Эти многочлены можно также выразить через функции параболического цилиндра (см. 8.2 (9)).

I *Стандартизация.* Мы будем употреблять стандартизацию $K_n=(-1)^n$. Она совпадает с стандартизацией, применяемой, в частности, в книгах: Курант — Гильберт, Фельдгейм — Хилл и Сеге. Стандартизация $K_n=1$ применялась Дечем, Эрдейи, Сансоне и другими.

Так стандартизированные многочлены Эрмита могут быть выражены, согласно Сеге и Кошмидеру, через многочлены Лагерра

$$H_{2m}(x)=(-1)^m 2^{2m} m!\, L_m^{-\frac{1}{2}}(x^2), \tag{2}$$

$$H_{2m+1}(x)=(-1)^m 2^{2m+1} m!\, x\, L_m^{\frac{1}{2}}(x^2). \tag{3}$$

Эти выражения показывают, что $H_n(x)$ является нечетной или четной функцией от x, в зависимости от того, нечетно или четно n. Эти формулы аналогичны (точнее, являются предельными случаями) формулам 10.9 (21) и 10.9 (22).

II. *Постоянные.*

$$h_n=\sqrt{\pi}\, 2^n n!, \quad k_n=2^n, \quad r_n=0, \tag{4}$$

$$K_n=(-1)^n, \quad A_n=2, \quad B_n=0, \quad C_n=2n, \tag{5}$$

$$\lambda_n=2n, \quad \alpha_n=0, \quad \beta_n=2n. \tag{6}$$

III. *Соотношения.*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}, \tag{7}$$

$$H_0(x)=1, \quad H_1(x)=2x, \tag{8}$$

$$H_n(x)=n!\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!}. \tag{9}$$

Здесь $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, в зависимости от того, является ли n четным или нечетным.

$$H_{n+1}(x)-2x H_n(x)+2n H_{n-1}(x)=0, \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{H_m(x) H_m(y)}{2^m m!}=\frac{H_{n+1}(x) H_n(y)-H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n!\,(x-y)}, \tag{11}$$

$$y''-2xy'+2ny=0, \quad y=H_n(x), \tag{12}$$

$$z''+(2n+1-x^2)z=0, \quad z=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x), \tag{13}$$

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x), \quad H_n'(x)=2n H_{n-1}(x), \tag{14}$$

$$H_{2m}(0)=(-1)^m\frac{(2m)!}{m!}, \quad H_{2m+1}(0)=0. \tag{15}$$

IV. *Гипергеометрические функции* Многочлены Эрмита связаны с функциями параболического цилиндра, которые являются частными случаями вырожденных гипергеометрических функций

$$H_n(x)=\sqrt{2^n}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)D_n(\sqrt{2}\,x)=2^n\Psi\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right), \tag{16}$$

$$m!\,H_{2m}(x)=(-1)^m(2m)!\,\Phi\left(-m,\ \frac{1}{2};\ x^2\right), \tag{17}$$

$$m!\,H_{2m+1}(x)=(-1)^m(2m+1)!\,2x\,\Phi\left(-m,\ \frac{3}{2};\ x^2\right). \tag{18}$$

Общее решение дифференциального уравнения Эрмита (12) или его самосопряженной формы (13) (которая, по-видимому, принадлежит Веберу) может быть получено из теории функций параболического цилиндра.

V. *Производящие функции.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!}=\exp(2xz-z^2), \tag{19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m H_{2m}(x)\frac{z^{2m}}{(2m)!}=\exp(z^2)\cos(\sqrt{2}\,xz), \tag{20}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}H_{2m+1}(x)\,z^{2m+1}=\exp(z^2)\sin(\sqrt{2}\,xz), \tag{21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!}H_n(x)H_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left\{\frac{2xyz-(x^2+y^2)z^2}{1-z^2}\right\}. \tag{22}$$

Равенство (19) является хорошо известной производящей функцией (20) и (21) могут быть выведены из (19), а (22) является формулой Мелера.

VI. *Интегральные представления* Контурные интегралы получаются обычным образом из равенства (7) или из любой производящей функции. Кроме того, можно использовать связь с функциями параболического цилиндра (см. п. 8.3). Мы имеем, например,

$$e^{-x^2}H_n(x)=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^n\cos\left(2xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt. \tag{23}$$

VII. *Различные результаты.* См. замечания к 10.12 (VII).

Пределы

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m\sqrt{m}}{2^{2m}m!}H_{2m}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right)\right]=\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \tag{24}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!}H_{2m+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right)\right]=\frac{2\sin x}{\sqrt{\pi}}. \tag{25}$$

Интегралы:

$$\int_0^x e^{-y^2} H_n(y)\,dy = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x), \tag{26}$$

$$\int_0^x H_n(y)\,dy = [2(n+1)]^{-1}\,[H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)], \tag{27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{2m}(xy)\,dy = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{m!}(x^2-1)^m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y\,H_{2m+1}(xy)\,dy = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m+1)!}{m!}\,x\,(x^2-1)^m, \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^n H_n(xy)\,dy = \sqrt{\pi}\;n!\,P_n(x). \tag{29}$$

Здесь $P_n(x)$ — многочлены Лежандра.

Преобразования Гаусса. Формула

$$\mathfrak{G}_x^u[F(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2u}\right]dy$$

определяет преобразование Гаусса (с параметром u). Мы имеем

$$\mathfrak{G}_x^u[H_n(y)] = \sqrt{(1-2u)^n}\,H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1-2u}}\right), \quad 0 \leqslant u < \frac{1}{2}, \tag{30}$$

$$\mathfrak{G}_x^{\frac{1}{2}}[H_n(y)] = (2x)^n, \quad \mathfrak{G}_x^{\frac{1}{2}}[y^n] = (2i)^{-n} H_n(ix). \tag{31}$$

Связь с многочленами Лагерра. Помимо формул (2) и (3) мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} H_{2k}(x)\,H_{2n-2k}(y) = (-1)^n n!\,L_n(x^2+y^2), \tag{32}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}[H_n(y)]^2\cos(\sqrt{2}\,xy)\,dy = \sqrt{\pi}\;2^{n-1} n!\,L_n(x^2), \tag{33}$$

$$\Gamma(n+\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(\sqrt{x}\,t)\,dt =$$
$$= (-1)^n\sqrt{\pi}\;(2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)L_n^{\alpha}(x), \quad \operatorname{Re}\alpha > -\frac{1}{2}. \tag{34}$$

Первые две формулы принадлежат Фельдгейму, последние — Успенскому (1927).

Конечные суммы. Помимо указанных выше формул справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{m=0}^{n}(2^m m!)^{-1}[H_m(x)]^2=(2^{n+1}n!)^{-1}\{[H_{n+1}(x)]^2-H_n(x)H_{n+2}(x)\}, \tag{35}$$

$$\sum_{k=0}^{\min(m,\,n)}(-2)^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m-k}(x)H_{n-k}(x)=H_{m+n}(x), \tag{36}$$

$$\sum_{k=0}^{\min(m,\,n)}2^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m+n-2k}(x)=H_m(x)H_n(x), \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}H_k(\sqrt{2}\,x)H_{m-k}(\sqrt{2}\,y)=\sqrt{2^m}\,H_m(x+y), \tag{38}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}H_{2k}(\sqrt{2}\,x)H_{2m-2k}(\sqrt{2}\,y)=$$

$$=2^{m-1}[H_{2m}(x+y)+H_{2m}(x-y)], \tag{39}$$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_r=n}\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{a_r^{m_r}}{m_r!}H_{m_1}(x_1)\ldots H_{m_r}(x_r)=$$

$$=\frac{\sqrt{(a_1^2+\ldots+a_r^2)^n}}{n!}H_n\left(\frac{a_1x_1+\ldots+a_rx_r}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_r^2}}\right). \tag{40}$$

Равенство (35) принадлежит Демиру (Demir) и Хсу (Hsü). Последние три формулы являются теоремами сложения и легко могут быть доказаны с помощью производящей функции (19). В равенстве (40) сумма распространена на все неотрицательные целые значения $m_1, \ldots, m_r$, сумма которых равна n.

Бесконечные ряды. Производящие функции указаны выше ((19) — (22)). Относительно разложений по сферическим функциям Бесселя см. п. 10.15, а относительно других бесконечных рядов, содержащих многочлены Эрмита, см. п 10.20.

10.14. Асимптотическое поведение многочленов Якоби, Гегенбауэра и Лежандра

Поведение многочленов Якоби, когда $n\to\infty$ и в то же время определенным образом $x\to 1$, дается формулой 10.8 (41). Соответствующее поведение, когда $x\to -1$, вытекает из 10.8 (13), а поведение многочленов Гегенбауэра и Лежандра может быть получено с помощью 10.9 (4) и 10.10 (3). Поведение многочленов Якоби, когда $\beta\to\infty$, а x стремится определенным образом к единице, дается формулой 10.12 (35).

Для изучения вопроса о сходимости бесконечных рядов содержащих многочлены Якоби, и для многих других целей полезно изучить поведение многочленов Якоби, когда α, β, x фиксированы и $n \to \infty$. Пример многочлена Чебышева

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad x = \cos\theta,$$

подсказывает, что это асимптотическое поведение будет различным в зависимости от того, лежит ли x на отрезке $[-1, 1]$ (θ — вещественное) или вне этого отрезка (θ — комплексное). Следует также отдельно рассмотреть концы указанного отрезка. В этом пункте мы полностью опускаем случай, когда x лежит вне отрезка $[-1, 1]$, отсылая читателя по этому поводу к книге Сеге (1962, гл. VIII). Мы укажем некоторые результаты для промежутка $-1 < x < 1$; все оценки, данные в этом пункте, выполняются равномерно на любом отрезке $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Мы укажем также некоторые важные результаты для случая, когда x находится в окрестности точек ± 1.

Доказательства приводимых здесь результатов основаны либо на явных выражениях соответствующих многочленов или на их интегральных представлениях (в случае интегральных представлений часто применяется метод наискорейшего спуска), либо проводятся с помощью производящих функций (метод Дарбу) или с помощью дифференциальных уравнений (метод Лиувилля и его дальнейшие обобщения).

Дарбу доказал (исходя из производящей функции), что

$$P_n(\cos\theta) = 2g_n \sum_{m=0}^{M-1} \frac{g_m\left(\frac{1}{2}\right)_m}{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)_m} \frac{\cos\left[\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\theta - \left(\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right]}{(2\sin\theta)^{m+\frac{1}{2}}} + O\left(n^{-M-\frac{1}{2}}\right), \quad 0<\theta<\pi, \tag{1}$$

где g_n определяется равенством 10.10 (21).

Подобная формула была получена Стилтьесом, способ которого позволяет дать оценку остаточного члена

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{n!\, g_m}{\left(m+\frac{1}{2}\right)_{n+1}} \frac{\cos\left[\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\theta - \left(\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right]}{(2\sin\theta)^{m+\frac{1}{2}}} + R_M(\theta), \quad 0<\theta<\pi, \tag{2}$$

где

$$|R_M(\theta)| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{n!\, g_M}{\left(M+\frac{1}{2}\right)_{n+1}} \frac{A}{(2\sin\theta)^{M+\frac{1}{2}}}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\sin\theta, && \text{если} \quad \sin^2\theta > \frac{1}{2}, \\ A &= |\cos\theta|^{-1}, && \text{если} \quad \sin^2\theta \leqslant \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

так что во всех случаях $1 \leqslant A \leqslant 2$.

Если $2\sin\theta > 1$, то есть если $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$, то в равенствах (1) и (2) можно перейти к пределу, когда $M \to \infty$, и получить тем самым сходящиеся тригонометрические разложения многочленов Лежандра.

В окрестности точки $x=1$ имеем формулу Хилба

$$P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\cos\theta}}\,J_0\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{5}$$

которая справедлива равномерно при $0\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Относительно более точной оценки остаточного члена см. Сеге (1962, стр. 203) Относительно разложений многочленов Лежандра в ряды по функциям Бесселя см Szegö (1933) Если взять частный случай формулы 10 14 (11) при $\alpha=\beta=0$ и выразить вырожденную гипергеометрическую функцию в виде ряда по функциям Бесселя с помощью 6.12 (6), то получим следующий результат:

$$P_n(x)=\left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+1}e^{-\frac{\xi}{(2n+1)}}\left[J_0(2\sqrt{\xi})+\frac{\xi}{8n^2}J_2(2\sqrt{\xi})+O(n^{-3})\right], \tag{6}$$

где

$$2(x+3)\,\xi=(1-x)(2n+1)^2.$$

Некоторые из этих результатов могут быть распространены на многочлены Гегенбауэра, а часть — даже на многочлены Якоби.

$$C_n^\lambda(\cos\theta)=$$
$$=2\frac{(\lambda)_n}{n!}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\lambda)_m(1-\lambda)_m}{(n-m+\lambda)_m\,m!}\,\frac{\cos[(n-m+\lambda)\theta-(m+\lambda)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+m}}+O\left(n^{-M-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\lambda\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\qquad 0<\theta<\pi, \tag{7}$$

$$C_n^\lambda(\cos\theta)=$$
$$=2\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(1-\lambda)_m}{(m+\lambda)_{n+1}\,m!}\,\frac{\cos[(n+m+\lambda)\theta-(m+\lambda)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+m}}+R_M(\theta),$$

$$0<\lambda<1,\quad 0<\theta<\pi, \tag{8}$$

$$|R_M(\theta)|\leqslant 2\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\,\frac{(1-\lambda)_M}{(M+\lambda)_{n+1}\,M!}\,\frac{A}{(2\sin\theta)^{\lambda+M}}, \tag{9}$$

где A определяется равенством (4),

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\,\theta-(2\alpha+1)\,\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{10}$$

$$\alpha,\ \beta \text{ — вещественные},\quad 0<\theta<\pi.$$

Формула типа Хилба для многочленов Якоби была дана Szegö и Rau; см. Сеге (1962, стр. 205). Tricomi (1950a) получил разложение

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=e^{-z}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-N}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(N+m)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(N)\,\Gamma(\alpha+m+1)}\times$$

$$\times A_m\left(k,\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{z}{2k}\right)^m\Phi(-n-\beta,\,\alpha+m+1;\,z), \qquad (11)$$

где

$$k=n+\frac{\alpha+1}{2},\quad N=n+\alpha+\beta+1,\quad x=1-\frac{4z}{2k+z},\quad |z|<2|k|. \qquad (12)$$

Здесь Φ является вырожденным гипергеометрическим рядом и A_m — коэффициентами, определенными в п. 6.12. Используя разложение (6.12) (6), можно получить разложение многочленов Якоби по функциям Бесселя. В частном случае $\alpha=\beta=0$ оно приводит к формуле (6).

10.15. Асимптотическое поведение многочленов Лагерра и Эрмита

Общие замечания, сделанные в начале предыдущего пункта, применимы и в этом случае, однако ситуация является более запутанной из-за того, что промежуток бесконечен. Многочлены колеблются на части промежутка и монотонны вне этой части.

Асимптотическое поведение многочленов Лагерра и Эрмита, когда $n\to\infty$ и в то же время x определенным образом стремится к нулю, даются формулами 10.12 (36), 10.13 (24) и 10.13 (25).

При вещественном α и фиксированном $x>0$, или же равномерно в $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant\omega<\infty$, мы имеем формулу

$$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right). \qquad (1)$$

Эта формула была обобщена Перроном (см. Сеге, 1962, стр. 206). Sansone (1950) дал двучленную аппроксимацию с оценкой ошибки. Его формула перестает быть верной при малых значениях x, однако в этом случае справедлива формула типа Хилба

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^\alpha(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\alpha/2}n!}J_\alpha(\sqrt{\nu x})+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right), \qquad (2)$$

которая имеет место при $\alpha>-1$ равномерно на отрезке $0<x\leqslant\omega<\infty$. В формуле (2) использовано обозначение

$$\nu=4n+2\alpha+2. \qquad (3)$$

Это обозначение будет применяться на протяжении данного пункта.

Поведение многочленов Лагерра, когда $n\to\infty$, а x принимает любые значения, было изучено многими авторами (см п. 6 13) Мы ограничимся кратким изложением этих результатов, основанным на мемуаре Tricomi (1949). Трикоми различает четыре случая в зависимости от того, будет ли x близко к нулю, лежит в области колебаний, близко к ν или лежит в области монотонности

Разложение

$$n!\, e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = \Gamma(\alpha+n+1)\left(\frac{\nu x}{4}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\alpha+m}(\sqrt{\nu x}), \tag{4}$$

являющееся частным случаем 6.12 (11), в котором положено

$$\left.\begin{aligned} &A_0^* = 1, \quad A_1^* = 0, \quad A_2^* = \frac{\alpha+1}{2}, \\ &(m+2) A_{m+2}^* = (m+\alpha+1) A_m^* - \frac{\nu}{2} A_{m-1}^*, \quad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

равномерно сходится в любой ограниченной области комплексной плоскости x. Рассматривая величины последовательных членов, усматриваем, что если $x = O(n^\lambda)$, где $\lambda < \frac{1}{3}$, то разложение (4) имеет при $n \to \infty$ асимптотический характер. Это описывает поведение функции $L_n^\alpha(x)$ около начала.

Аналогичное разложение

$$n!\,(ux)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-hx} L_n^\alpha(x) = \Gamma(\alpha+n+1) \sum_{m=0}^{\infty} A_m(h) \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\alpha+m}(2\sqrt{ux}) \tag{6}$$

с соответствующими коэффициентами было дано Toscano (1949), а в случае $u = n$ — Tricomi (1941).

В области колебаний $0 < x < \nu$ Трикоми положил

$$x = \nu\cos^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 4\vartheta = \nu(2\theta - \sin 2\theta) + \pi \tag{7}$$

и доказал, что при фиксированном θ имеем

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = 2(-1)^n (2\cos\theta)^{-\alpha} (\pi\nu\sin 2\theta)^{-1/2} \times$$
$$\times \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m^{(\alpha)}(\theta)\left(\frac{\nu}{4}\sin 2\theta\right)^{-m} \sin\left(\vartheta + \frac{3m\pi}{2}\right) + O(n^{-M})\right], \tag{8}$$

где

$$A_0^{(\alpha)}(\theta) = 1, \quad A_1^{(\alpha)}(\theta) = \frac{1}{12}\left[\frac{5}{4\sin^2\theta} - (1-3\alpha^2)\sin^2\theta - 1\right]. \tag{9}$$

Относительно общего выражения для $A_m^{(\alpha)}$ см. Tricomi (1949).

Вблизи точки перехода ν имеем

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = \gamma_1 \left\{ A(t) + \left(\frac{4}{3\nu^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{t^2}{5} A'(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3+5\alpha}{10}\left(t - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right) A(t)\right] + O\left(n^{-\frac{5}{3}}\right)\right\}, \tag{10}$$

где

$$t=\left(\frac{4\nu}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}(\nu-x), \tag{11}$$

$$\pi\gamma_1=(-1)^n 2^{-\alpha}\left[6^{\frac{1}{3}}\nu^{-\frac{1}{3}}+\frac{3+5\alpha}{10}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\nu^{-1}+O\left(n^{-\frac{5}{3}}\right)\right], \tag{12}$$

$$A(t)=\left(\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{t}{3}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^3}\right)+J_{\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^3}\right)\right] \tag{13}$$

является функцией Эйри и $A'(t)$ означает производную функции $A(t)$.

Наконец, в области монотонности имеем

$$x=\nu\,\mathrm{ch}^2\theta,\quad \theta>0,\quad 4\theta=\nu(\mathrm{sh}\,2\theta-2\theta), \tag{14}$$

$$e^{-\frac{x}{2}}L_n^{\alpha}(x)=(-1)^n e^{-\theta}(2\,\mathrm{ch}\,\theta)^{-\alpha}(\pi\nu\,\mathrm{sh}\,2\theta)^{-1/2}\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m A_m^{[\alpha]}(\theta)\left(\frac{\nu}{4}\,\mathrm{sh}\,2\theta\right)^{-m}+O(n^{-M})\right], \tag{15}$$

где

$$A_0^{[\alpha]}(\theta)=1,\quad A_1^{[\alpha]}(\theta)=\frac{1}{12}\left[\frac{5}{4\,\mathrm{sh}\,\theta}-(1-3\alpha^2)\,\mathrm{sh}^2\theta+1\right]. \tag{16}$$

В нижеследующем изложении соответствующих результатов для многочленов Эрмита мы будем пользоваться сокращенными обозначениями

$$N=2n+1,\quad m=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ — четное},\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ — нечетное}.\end{cases} \tag{17}$$

При фиксированном вещественном x (или равномерно на любом ограниченном отрезке) имеем

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x)=$$
$$=\Gamma(n+1)\left[\cos\left(\sqrt{N}x-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]. \tag{18}$$

Сеге (1962, стр. 207) дает явное выражение второго слагаемого, а также общую форму асимптотического разложения.

Для оценки поведения многочленов Эрмита, когда $n\to\infty$, а x принимает любое значение, мы имеем формулу順 Планшереля — Роташа (Сеге, 1962, стр. 208). Из формул 10.13 (2) и 10.13 (3) видно, что этот случай охватывается упомянутой выше работой Трикоми. Если $\alpha=\pm\frac{1}{2}$, то функции Бесселя, входящие в формулу (4), являются так называемыми сферическими функциями Бесселя и могут быть выражены в замкнутой форме.

Если при некотором $\lambda < \frac{1}{3}$ величина $n^{-\lambda}x$ ограничена, когда $n \to \infty$, то эта формула является асимптотическим разложением.

Областью колебаний является $0 < |x| < 2\sqrt{m}$. Здесь может быть использовано разложение (8), где $\alpha = \pm\frac{1}{2}$. В окрестности переходных точек $x = \pm 2\sqrt{m}$ имеет место равенство (10), а в области монотонности $|x| > 2\sqrt{m}$ — равенство (15).

Основные разложения в ряды по сферическим функциям Бесселя являются частными случаями более общих разложений, принадлежащих Tricomi (1941):

$$e^{-hx^2}H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)_m x^2 \sum_{r=0}^{\infty} (2m)^{1-r} C'_r \mathcal{J}_{r-1}(2\sqrt{m}\,x), \tag{19}$$

$$e^{-hx^2}H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1}\left(\frac{3}{2}\right)_m x \sum_{r=0}^{\infty} (2m)^{-r} C''_r \mathcal{J}_r(2\sqrt{m}\,x), \tag{20}$$

где

$$\mathcal{J}_0(z) = z^{-1}\sin z, \quad \mathcal{J}_{-1}(z) = z^{-2}\cos z, \tag{21}$$

$$\mathcal{J}_{r+1}(z) = (2r+1)\mathcal{J}_r(z) - z^2\mathcal{J}_{r-1}(z), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

и коэффициенты C_r также удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям. Разложения (19) и (20) сходятся. Они могут быть также использованы как асимптотические представления при $m \to \infty$. Для этой цели удобно положить $h = 1/2$.

10.16. Нули многочленов Якоби и связанных с ними многочленов

Определим многочлены Якоби для всех значений α, β, x формулой 10.8 (12) и обозначим через $N_1(\alpha, \beta)$ число нулей $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Если $\alpha > -1$ и $\beta > -1$, то многочлены Якоби являются ортогональными многочленами с соответствующей весовой функцией 10.8 (1). Поэтому, в силу п. 10.3, все их нули являются простыми и лежат на отрезке $[-1, 1]$. Для других вещественных значений α и β число нулей, лежащих на отрезке $[-1, 1]$, указано на рис. 6.

Мы видим из 10.8 (12), что при отрицательных целых значениях α функция $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеет нуль порядка $|\alpha|$ в точке $x = 1$, а при отрицательном целом β — нуль порядка $|\beta|$ в точке $x = -1$. На луче $(-\infty, -1)$ лежат $N_1(1-\alpha-\beta-2n, \beta)$ нулей, а на луче $(1, \infty)$ расположены $N_1(1-\alpha-\beta-2n\ \alpha)$ нулей. Все нули, не указанные в этом перечислении, встречаются в виде комплексно сопряженных пар.

Многочлены Гегенбауэра были определены для всех значений λ, x формулой 10.9 (18). Если $\lambda > -\frac{1}{2}$, то эти многочлены ортогональны, а потому все их нули являются простыми и лежат на отрезке $[-1, 1]$. Для остальных вещественных значений λ число нулей может быть выведено из результатов о многочленах Якоби с помощью формулы 10.9 (4).

Расположение нулей ортогональных многочленов Якоби и их частных случаев на отрезке $[-1, 1]$ было изучено многими авторами. Мы отсылаем читателя к книге Сеге (1962, гл. VI) и к более современным работам, в частности работам: Gatteschi, Геронимус, Lowan, Davids и Levenson, Tricomi, перечисленным в библиографии к этой главе.

Положим

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1,$$
$$\lambda > -\frac{1}{2}, \quad x = \cos\theta,$$
$$0 < \theta < \pi, \tag{1}$$

и расположим нули в порядке возрастания:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta_m) = 0,$$
$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \pi, \tag{2}$$
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x_m) = 0,$$
$$-1 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < 1,$$
$$x_m = \cos\theta_m. \tag{3}$$

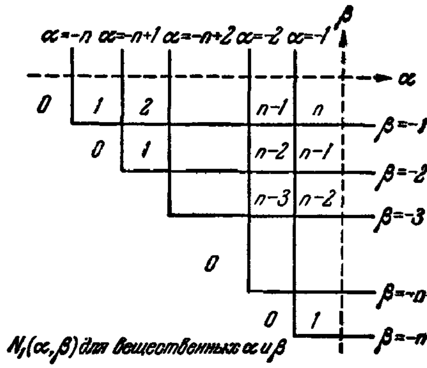


Рис. 6.

Для ультрасферических многочленов имеем

$$x_m + x_{n-m} = 0, \tag{4}$$

и, следовательно, достаточно изучить положительные нули $\left(1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}\right)$.

Для многочленов Якоби

$$x_m = x_m(\alpha, \beta, n)$$

и для многочленов Гегенбауэра

$$x_m = x_m(\lambda, n) = x_m\left(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}, n\right).$$

Если m и n (а в случае многочленов Якоби также один из параметров α, β) фиксированы, то имеем следующие свойства монотонности:

$$x_m(\alpha, \beta, n) \downarrow -1 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty, \quad \uparrow 1 \quad \text{при} \quad \beta \to \infty, \quad m = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$x_m(\lambda, n) \downarrow 0 \qquad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \qquad m = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{6}$$

Последнее из этих соотношений означает, например, что m-й положительный нуль многочлена Гегенбауэра является строго убывающей функцией λ $\left(\text{при } \lambda > -\frac{1}{2}\right)$ и стремится к нулю, когда $\lambda \to \infty$. Из (5) и (6) вытекают соответствующие утверждения для θ_m. Так как формулы 10.11 (5) и 10.11 (6) позволяют найти значения $\theta_m\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, n\right)$, то имеем следующие неравенства:

$$(2m-1)\pi \leqslant (2n+1)\,\theta_m(\alpha, \beta, n) \leqslant 2m\pi, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{7}$$

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} < \theta_m(\lambda, n) \leqslant \frac{m\pi}{n+1}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}. \tag{8}$$

О дальнейших результатах см. Сеге (1962, гл. VI). Tricomi (1947) заметил, что асимптотическое поведение нулей любой функции может быть выведено из асимптотического поведения самой функции, и применил этот принцип ко многим функциям, в частности, к ортогональным многочленам (см. Tricomi, 1960; Gatteschi, 1949, 1949a). Оказалось, что асимптотическое распределение нулей около середины отрезка зависит от нулей тригонометрических функций (см. 1.14 (5)), а нули около конечных точек зависят от нулей функций Бесселя (см. замечание, следующее за формулой 10.14 (12)).

Асимптотические формулы для чисел Кристоффеля могут быть выражены из асимптотических формул для нулей с помощью формулы 10.7 (7).

Относительно числовых значений нулей и чисел Кристоффеля для многочленов Лежандра см. Lowan, Davids и Levenson (1942, 1943).

10.17. Нули многочленов Лагерра и Эрмита

Многочлены, определяемые для всех значений α и x формулой 10.12 (7), имеют при $\alpha > -1$ n положительных нулей, при $-n < \alpha \leqslant -1$ $[n+\alpha]$ положительных нулей и не имеют положительных нулей, если $\alpha \leqslant -n$; они имеют нуль порядка k в точке $x=0$, если $\alpha = -k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и имеют один отрицательный нуль, если $(\alpha+1)_n < 0$. Все нули, не перечисленные в этом списке, распадаются на комплексно сопряженные пары. Многочлены Эрмита степени n имеют n вещественных нулей, которые расположены симметрично относительно начала координат.

Детальная информация о расположении нулей ортогональных многочленов Лагерра (то есть при $\alpha > -1$) и многочленов Эрмита имеется в книге Сеге (1962, гл. VI) и в работах: Greenwood и Miller (1948); W. Hahn (1934); Salzer и Zucker (1949); Spencer (1937) и Tricomi.

Положим

$$\alpha > -1, \quad x > 0 \tag{1}$$

и расположим нули многочлена $L_n^\alpha(x)$ в порядке возрастания так, что

$$L_n^\alpha(x_m) = 0, \quad 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad x_m = x_m(\alpha, n). \tag{2}$$

При фиксированных m и n мы снова получаем, что x_m является возрастающей функцией от α. Относительно границ для нулей см. Сеге (1962, гл. VI) и W. Hahn (1934). Асимптотические представления многочленов Лагерра и Эрмита могут быть использованы для того, чтобы найти приближенные значения нулей (Tricomi, 1949). Из п. 10.15 ясно, что надо различать три случая. «Первые» нули — это такие, для которых m остается ограниченным, когда $n\to\infty$; они изучаются с помощью формулы 10.15 (2). «Средние» нули — это такие, для которых $\left|m-\frac{n}{2}\right|$ остается ограниченным, когда $n\to\infty$; их можно вывести из 10.15 (8). «Последние» нули, для которых $n-m$ остается ограниченным, когда $n\to\infty$, выводятся из формулы 10.15 (10). Получающиеся приближения дают удовлетворительные численные результаты уже при сравнительно небольших значениях n, например $n = 10$.

Асимптотические формулы для чисел Кристоффеля могут быть выведены из 10.7 (7).

Относительно числовых значений нулей и чисел Кристоффеля для многочленов Лагерра $L_n(x)$ см. Salzer и Zucker (1949).

10.18. Неравенства для классических многочленов

Относительно неравенств для общих ортогональных многочленов и их приложений к классическим многочленам см. Сеге (1962, гл. VII).

В обозначениях п. 10.3 справедлив следующий результат для монотонной весовой функции (Сеге, 1962, теорема 7.2). Если функция $w(x)$ не убывает (не возрастает) и b [a] конечно, то функция $\sqrt{w(x)}\,|p_n(x)|$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a, b]$ в точке b [a].

Применяя это утверждение к классическим ортогональным многочленам, весовая функция которых монотонна, получаем неравенства

$$|P_n(x)| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \left|P_n^{\alpha,0}(x)\right| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad \alpha \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$e^{-\frac{x}{2}} |L_n(x)| \leqslant 1, \qquad x \geqslant 0. \tag{3}$$

Другой плодотворный путь вывода неравенств связан с теоремой Сонина — Пойа (Сеге, 1962, теорема 7.31.1 и сноска). Если в дифференциальном уравнении

$$[k(x)\,y']' + \varphi(x)\,y = 0 \tag{4}$$

функции $k(x)$ и $\varphi(x)$ положительны и имеют непрерывные производные и если $k(x)\,\varphi(x)$ монотонно, то последовательные (относительные) максимумы $|y|$ образуют возрастающую или убывающую последовательность в зависимости от того, убывает или возрастает функция $k(x)\,\varphi(x)$.

Следующие ниже результаты могут быть получены путем конструирования дифференциального уравнения, которому удовлетворяют рассматриваемые функции, и последующего применения теоремы Сонина — Пойа.

Последовательные максимумы для $|P_n(x)|$, $n \geqslant 2$, при возрастании x от 0 до 1 образуют возрастающую последовательность. (Это соответствует неравенствам (1).) Последовательные максимумы $\sqrt{\sin\theta}\,|P_n(\cos\theta)|$, $n \geqslant 2$, когда θ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, образуют возрастающую последовательность. В качестве приложения можно доказать, что

$$\sqrt{\sin\theta}\,|P_n(\cos\theta)| < \frac{2}{\pi n}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{5}$$

Далее,

$$\left|P_n'(x)\right| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{6}$$

Для многочленов Гегенбауэра

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|C_n^\lambda(x)\right| = C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!}, \quad \lambda > 0, \tag{7}$$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|C_{2m}^\lambda(x)\right| = \left|C_{2m}^\lambda(0)\right| = \left|\frac{(\lambda)_m}{m!}\right|, \tag{8}$$

$$-m < \lambda < 0, \quad \lambda \text{ — не целое},$$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|C_{2m+1}^\lambda(x)\right| < \frac{2\,|(\lambda)_{m+1}|}{m!\sqrt{(2m+1)(2\lambda+2m+1)}}, \tag{9}$$

$$-m - \frac{1}{2} < \lambda < 0, \quad \lambda \text{ — не целое},$$

$$(\sin\theta)^\lambda \left|C_n^\lambda(\cos\theta)\right| < \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda-1} [\Gamma(\lambda)]^{-1}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{10}$$

Для многочленов Якоби положим

$$q = \max(\alpha, \beta) \tag{11}$$

и получим

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right| = \max P_n^{(\alpha, \beta)}(\pm 1) = \binom{n+q-1}{n}, \tag{12}$$

$$\alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad q \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Если $-1 < \alpha, \beta < -\frac{1}{2}$, то абсцисса точки наибольшего максимума для $\left|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right|$ является одной из двух ближайших к $x_0 = \frac{(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta+1)}$ абсцисс точек максимума, и этот максимум имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{n}}$, когда $n \to \infty$. Из оценок при больших значениях n мы отметим лишь

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = O(n^q), \quad q = \max\left(2m+\alpha, 2m+\beta, m-\frac{1}{2}\right), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Для частного случая многочленов Лагерра L_n^0 мы уже имели оценку (3) Границы для L_n^α могут быть получены отсюда путем использования соотношения 10.12 (39) при $\beta = 0$. В результате получаем

$$\left|L_n^\alpha(x)\right| \leqslant (\alpha+1)_n (n!)^{-1} e^{\frac{x}{2}}, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{14}$$

$$\left|L_n^\alpha(x)\right| \leqslant \left[2-(\alpha+1)_n (n!)^{-1}\right] e^{\frac{x}{2}}, \quad -1 < \alpha < 0. \tag{15}$$

Следующие результаты могут быть доказаны путем применения теоремы Сонина — Пойа к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют соответствующие функции.

При любом вещественном α последовательные максимумы функции

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} \left|L_n^\alpha(x)\right|$$

образуют возрастающую последовательность, если $2n+\alpha+1 > 1$ и

$$x > \max\left(0, \frac{\alpha^2-1}{2n+\alpha+1}\right).$$

Последовательные максимумы функции

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \left|L_n^\alpha(x)\right|$$

образуют возрастающую последовательность при условии, что $x > 0$ и

$$x^2 > \max\left(0, \alpha^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Последовательные максимумы функции

$$e^{-\frac{x}{2}}\,|L_n^\alpha(x)|$$

образуют убывающую последовательность, когда $\alpha > -1$ и

$$0 \leqslant x < \frac{(2\alpha+1)(2n+\alpha+1)}{\alpha+1},$$

и возрастающую последовательность, когда $\alpha > -1$ и

$$x > \frac{(2\alpha+1)(2n+\alpha+1)}{\alpha+1}.$$

Последовательные максимумы функции

$$e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{\alpha}{2}}\,L_n^\alpha(x)$$

образуют убывающую последовательность, если

$$0 < x < 2n+\alpha+1,$$

и возрастающую последовательность, если

$$x > 2n+\alpha+1 > 0.$$

Все эти утверждения содержатся в следующих более общих результатах. При вещественных α и β последовательные максимумы при $x > 0$ функции

$$e^{-\frac{x}{2}}\,x^\beta\,|L_n^\alpha(x)|$$

образуют возрастающую или убывающую последовательность в зависимости от того, имеет ли выражение

$$4\beta(\beta-\alpha)(\alpha-2\beta)+(2n+\alpha+1)(2\alpha-4\beta+1)\,x-(\alpha-2\beta+1)\,x^2$$

отрицательные или положительные значения.

Относительно асимптотических оценок см. Сеге (1962, теорема 7.6.4); улучшение этих оценок может быть выведено из разложения Трикоми 10.15 (4).

Границы для многочленов Эрмита можно вывести из (14) и (15) с помощью соотношений 10.13 (2) и 10.13 (4). См. также Sansone (1950a).

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)|H_{2m}(x)| \leqslant 2^{2m}m!\,(2-g_m), \tag{16}$$

$$x^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)|H_{2m+1}(x)| \leqslant 2^{2m+2}(m+1)!\,g_{m+1}, \tag{17}$$

где

$$g_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{18}$$

Крамер (H. Cramér) доказал, что

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)|H_n(x)| < k\sqrt{2^n n!}, \tag{19}$$

где k — постоянная, для которой Charlier (1931) дал приближенное значение 1,086435. Sansone (1950) дал границы, справедливые при комплексных значениях переменных.

С помощью теоремы Сонина — Пойа можно доказать, что при $x \geqslant 0$ последовательные максимумы функции $|H_n(x)|$, равно как и максимумы $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)|H_n(x)|$, образуют возрастающую последовательность.

Пусть $\mu_{r,n}$ есть r-й относительный максимум функции $f(x)|p_n(x)|$, где $f(x)$ — фиксированная неотрицательная функция и $\{p_n(x)\}$ — последовательность ортогональных многочленов. С помощью теоремы Сонина — Пойа можно доказать свойство монотонности $\mu_{r,n}$, когда r возрастает и n фиксировано. Изучение числовых таблиц привело Джона Тодда к некоторым предположениям относительно свойств монотонности $\mu_{r,n}$ при фиксированном r и возрастающем n. Эти результаты были позже доказаны. Пусть

$$f(x)=1, \quad p_n(x)=P_n(x)$$

и максимумы нумеруются от точки $x=1$ (влево). Cooper (1950) доказал, что $\mu_{r,n}$ является убывающей функцией от n при достаточно больших значениях n Szegő (1950) доказал, что это справедливо для всех $n \geqslant r+1$. При

$$f(x)=1, \quad p_n(x)=C_n^\lambda(x)$$

Szász (1950) доказал, что $\dfrac{n!\,\mu_{r,n}}{\Gamma(n+2\lambda)}$ является убывающей функцией от n. Для

$$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}, \quad p_n(x)=L_n(x).$$

J. Todd (1950) доказал, что $\mu_{r,n}$ является возрастающей или убывающей функцией от n, в зависимости от того, нечетно или четно r.

P. Turán заметил, что

$$u_n=P_n(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

удовлетворяет неравенству

$$u_n^2-u_{n-1}u_{n+1} \geqslant 0. \tag{20}$$

Szegő (1948) привел много доказательств этого неравенства и показал, что оно удовлетворяется также для функций

$$u_n=\frac{C_n^\lambda(x)}{C_n^\lambda(1)}=\frac{n!\,C_n^\lambda(x)}{(2\lambda)_n}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u_n=\frac{L_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(0)}=\frac{n!\,L_n^\alpha(x)}{(\alpha+1)_n}, \qquad x \geqslant 0,$$

$$u_n=H_n(x).$$

Эти результаты были передоказаны, уточнены и обобщены. Рассматривались определители, элементами которых являются ортогональные многочлены, а также были проведены относящиеся сюда исследования Их выполняли Madhava Rao и Thiruvenkatachar (1949), Sonsone (1949), Szász (1950a, 1951), Beckenbach, Seidel и Szász (1951), Forsythe (1951). См. также J. L. Burchnall (1951, 1952).

10.19. Задачи разложения

Разложение заданной «произвольной» или аналитической функции в ряд по ортогональным многочленам весьма детально изучалось многими авторами. Этот вопрос не относится в полном объеме к содержанию настоящего руководства, и поэтому будет достаточно дать краткие указания на наиболее важные результаты. Дальнейшую информацию можно найти у Сеге (1962, особенно гл. IX), Качмажа и Штейнгауза (1958).

Пусть функции $\{p_n(x)\}$ образуют систему ортогональных многочленов относительно весовой функции $w(x)$ и промежутка $[a, b]$. Предположим, что выполнены предположения п. 10.1 и 10.2, и обозначим через L_w^p, $p \geqslant 1$, класс функций, для которых существует и конечен интеграл Лебега

$$\int_a^b |f(x)|^p w(x)\,dx.$$

Положим

$$h_n = \int_a^b [p_n(x)]^2 w(x)\,dx \tag{1}$$

и назовем

$$a_n = h_n^{-1} \int_a^b f(x)\,p_n(x)\,dx \tag{2}$$

коэффициентами Фурье,

$$\sum a_n p_n(x) \tag{3}$$

(обобщенным) рядом Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{p_n(x)\}$ ортогональных многочленов. Мы будем говорить, что ряд (3) *сходится в пространстве* L_w^2 функций $f(x)$, если имеет место соотношение

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^p w(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{4}$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (3).

Приближения в L_w^2 были изучены в п. 10.2, и из полученных там результатов следует, что в случае *конечного* промежутка $[a, b]$ ряд (3) сходится в L_w^2 к $f(x)$ для любой функции $f(x)$ из L_w^2. Сходимость в L_w^p была изучена в работах Pollard (1946, 1947, 1948, 1949) и Wing (1950). Для многочленов Якоби, определяемых формулой 10.8 (1), Поллард доказал сходимость в L_w^p при условиях

$$\alpha \geqslant -\frac{1}{2}, \quad \beta \geqslant -\frac{1}{2} \tag{5}$$

и

$$4\max\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}, \frac{\beta+1}{2\beta+3}\right) < p < 4\min\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}, \frac{\beta+1}{2\beta+1}\right). \tag{6}$$

Для многочленов Гегенбауэра имеем 10.9 (1) и сходимость в L_w^p при

$$\lambda > 0, \quad \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} < p < \frac{2\lambda+1}{\lambda}. \tag{7}$$

Наконец, для многочленов Лежандра $w(x) = 1$, и мы имеем сходимость в L_w^p при

$$\frac{4}{3} < p < 4. \qquad (8)$$

В п. 10.2 было отмечено, что случай бесконечного промежутка приводит к дополнительным затруднениям. Тем не менее при $p = 2$ сходимость в L_w^p была доказана для многочленов Лагерра при $\alpha > -1$ и для многочленов Эрмита.

Будем говорить, что ряд (3) сходится к $f(x)$ при фиксированном значении x или на заданном отрезке, если для данного x или для всех x из данного отрезка выполняется равенство

$$s_n(x) \to f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где через $s_n(x)$ снова обозначена n-я частичная сумма ряда (3). Этот тип сходимости (называемый иногда «поточечной сходимостью») налагает гораздо более строгие ограничения на функцию $f(x)$, чем сходимость в L_w^p.

Rau (1950) изучил сходимость разложений функции $f(x)$ в ряд по многочленам Якоби, таким, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Он доказал, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, если разложение равномерно сходится к $f(x)$ на любом отрезке вида $-1 + \varepsilon \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Caton и Hille (1945) с помощью интеграла Лапласа изучили суммируемость по Абелю рядов по многочленам Лагерра.

Асимптотические формулы, такие, как 10.14 (1), 10.14 (7), 10.14 (10) и 10.15 (1), 10.15 (18), позволяют установить связь между сходимостью ортогональных разложений и сходимостью некоторых связанных с ними рядов Фурье. Это является предметом так называемых теорем равносходимости. В качестве примера приведем теорему равносходимости для многочленов Лежандра (Haar, 1918). Она формулируется следующим образом:

Пусть функция $|f(x)|^2$ интегрируема на отрезке $[-1, 1]$, и пусть $s_n(x)$ является n-й частичной суммой разложения $f(x)$ по многочленам Лежандра, а $\sigma_n(\theta)$ — n-й частичной суммой разложения функции $f(\cos\theta)$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг. Тогда имеет место соотношение

$$s_n(\cos\theta) - \sigma_n(\theta) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \ 0 < \theta < \pi.$$

Такие теоремы равносходимости в сочетании с условиями сходимости рядов Фурье позволяют исследовать сходимость ортогональных разложений Теоремы равносходимости для многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита даны Сеге (1962, гл. IX). Сеге принадлежат также некоторые результаты, касающиеся поведения таких рядов в конечных точках основных промежутков.

Рассмотрим теперь разложения аналитических функций. Областью сходимости рядов по многочленам Якоби являются эллипсы с фокусами в точках ± 1. Любая функция, аналитическая внутри такого эллипса, может быть разложена в нем в ряд по многочленам Якоби $(\alpha, \beta > -1)$. Если функция аналитична вне такого эллипса и обращается в нуль на бесконечности, то ее можно разложить в этой области в ряд по функциям Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha, \beta)}$ $(\alpha, \beta > -1)$ (см. Сеге, 1962, п. 9.2).

В случае многочленов Лагерра область сходимости ограничена параболой, симметричной относительно вещественной оси, с фокусом в начале координат и обращенной вершиной влево. В случае многочленов Эрмита областью сходимости является полоса, симметричная относительно вещественной оси. В обоих случаях область сходимости не ограничена. Поэтому для того, чтобы функцию можно было разложить в ряд по многочленам Лагерра или Эрмита, она, кроме условия аналитичности в соответствующей области, должна удовлетворять некоторым условиям на рост в бесконечности. Разложение в ряды по многочленам Лагерра изучал Pollard (1947a), а в ряды по многочленам Эрмита — Giuliotto (1939) и Hille (1939, 1939a, 1940).

10.20. Примеры разложений

В этом пункте мы перечислим некоторые ряды по ортогональным многочленам, суммы которых могут быть даны в замкнутой форме. Число известных в настоящее время таких рядов невелико, за исключением рядов по многочленам Лежандра, Эрмита и Лагерра Многие из рядов, приведенных здесь, были вычислены Трикоми. Вычисление коэффициентов таких разложений основывается на формуле 10.19 (2). При этом для того, чтобы упростить полученный интеграл, часто используется формула Родрига (или ее обобщение) с последующим интегрированием по частям (ср. второй абзац п. 10.7).

В следующих ниже формулах мы будем часто использовать введенные в гл. 6, 8, 9 обозначения для вырожденной гипергеометрической функции и некоторых связанных с ней функций.

Ряды по многочленам Якоби. Обозначения п. 10.8. Мы предполагаем всюду, что α, $\beta > -1$, а h_n определено равенством 10.8 (4).

$$\operatorname{sgn} x = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nh_n} P_{n-1}^{(\alpha+1,\ \beta+1)}(0)\, P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x), \qquad -1 < x < 1. \tag{1}$$

Здесь

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

и

$$c_0 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} 2^{-\alpha-\beta-1} \int_0^1 [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta - (1+x)^\alpha (1-x)^\beta]\, dx.$$

Заметим, что в разложение (1) на самом деле входят лишь члены, соответствующие нечетным значениям n.

$$(1-x)^\rho = 2^\rho\, \Gamma(\alpha+\rho+1) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,(-\rho)_n}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+\rho+2)} P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x), \tag{3}$$
$$-\rho < \min\left(\alpha+1,\ \frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right), \qquad -1 < x < 1,$$

$$e^{ixy} = (2iy)^{-(\alpha+\beta)/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} M_{k,\,m}(2iy)\, P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x), \tag{4}$$
$$-1 < x < 1,$$

где

$$k = \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad m = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}.$$

О производящей функции см. 10.8 (29), о билинейной производящей функции см. Watson (1934), Erdélyi (1937a) и Bailey; о некоторых разложениях в произведения многочленов Якоби см. Bateman (1904, 1905).

Ряды многочленов Гегенбауэра. Обозначения п. 10.9. Постоянные h_n определяются формулой 10.9 (7).

$$\operatorname{sgn} x = 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\lambda)_{m+1}}{(2m+1)(2m+2\lambda+1)\,m!\,h_{2m+1}}C_{2m+1}^{\lambda}(x), \tag{5}$$

$$\lambda > -\frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$(1-x)^{\rho} = \frac{2^{2\lambda+\rho}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\rho+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\lambda)(-\rho)_n}{\Gamma(n+2\lambda+\rho+1)}C_n^{\lambda}(x), \tag{6}$$

$$-1 < x < 1, \quad -\rho < \frac{\lambda+1}{2}, \quad \text{если} \quad \lambda \geqslant 0,$$

$$-\rho < \frac{1}{2}+\lambda, \quad \text{если} \quad -\frac{1}{2} < \lambda \leqslant 0,$$

$$e^{ixy} = \Gamma(\lambda)\left(\frac{y}{2}\right)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}i^n(n+\lambda)J_{n+\lambda}(y)C_n^{\lambda}(x), \quad -1 < x < 1, \quad \lambda > 0, \tag{7}$$

$$(y\sin\varphi\sin\theta)^{\frac{1}{2}-\lambda}J_{\lambda-\frac{1}{2}}(y\sin\varphi\sin\theta)\,e^{iy\cos\varphi\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{2}\,y^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{n!\,(n+\lambda)}{(2\lambda)_n\Gamma(2n+\lambda)}\times$$

$$\times J_{n+\lambda}(y)C_n^{\lambda}(\cos\varphi)C_n^{\lambda}(\cos\theta), \; 0 < \varphi, \; \theta < \pi, \quad \lambda > 0, \tag{8}$$

$$\omega^{-\lambda}\mathscr{C}_{\lambda}(\omega) = 2^{\lambda}\Gamma(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)z^{-\lambda}Z^{-\lambda}J_{n+\lambda}(z)\mathscr{C}_{n+\lambda}(Z)C_n^{\lambda}(\cos\varphi), \tag{9}$$

где

$$|ze^{\pm i\varphi}| < |Z|, \quad \omega^2 = z^2+Z^2-2zZ\cos\varphi$$

и

$$\mathscr{C}_{\lambda}(\omega) = c_1J_{\lambda}(\omega)+c_2J_{-\lambda}(\omega)$$

является произвольной цилиндрической функцией в смысле Сонина и Ватсона (Ватсон, 1949, п. 3 9). В случае $c_2 = 0$ ограничения на z, Z могут быть опущены.

Некоторые разложения в ряды по многочленам Гегенбауэра были указаны в п. 10.9, о билинейной производящей функции см. Watson (1933b).

Ряды по многочленам Лежандра Обозначения п. 10.10. Постоянные g_n определяются формулой 10.10 (4). Все разложения справедливы при $-1 < x < 1$ или $0 < \theta < \pi$, за исключением особо отмеченных случаев.

$$|x|^\rho = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(2m+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\rho}{2}\right)_m}{\left(\frac{\rho}{2}+\frac{1}{2}\right)_{m+1}} P_{2m}(x), \quad \rho > -1, \tag{10}$$

$$|x|^\rho \operatorname{sgn} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(2m+\frac{3}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}\right)_m}{\left(1+\frac{\rho}{2}\right)_{m+1}} P_{2m+1}(x), \ \rho > -1, \tag{11}$$

$$(1-x)^\rho = 2^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+\rho+1} \frac{(-\rho)_n}{(1+\rho)_n} P_n(x), \quad \rho > -\frac{3}{4}, \tag{12}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m+1}{(2m-1)(2m+2)} g_m^2 P_{2m}(x)\right], \tag{13}$$

$$\frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}}{2\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} P_n(\cos\theta), \quad 0 \leqslant \varphi < \theta < \pi, \tag{14}$$

$$\ln\left[1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} P_n(\cos\theta). \tag{15}$$

Полагая в формулах (7), (8) и (9) $\lambda = \frac{1}{2}$, получаем ряды, содержащие функции Бесселя. Производящие функции даны в формулах 10.10 (V) и 10.10 (VIII).

Ряды многочленов Лагерра. Обозначения п. 10.12. Мы предполагаем повсюду $\alpha > -1$, $x > 0$.

$$x^\rho = \Gamma(\alpha+\rho+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\rho)_n}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^\alpha(x), \quad -\rho < 1 + \min\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right), \tag{16}$$

$$\psi(\alpha+1) - \ln x = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^\alpha(x), \tag{17}$$

$$-e^{x+y} \operatorname{Ei}[-\max(x, y)] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} L_n(x) L_n(y), \qquad x, y > 0, \tag{18}$$

$$e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} L_n^\alpha(x), \tag{19}$$

$$e^{x+y}(xy)^{-\alpha} \Gamma[\alpha, \max(x, y)]\, \gamma[\alpha, \min(x, y)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)(\alpha)_{n+1}} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y), \tag{20}$$

$$(xy)^{-\alpha} e^{x+y} \left\{ \Gamma[\alpha, \max(x, y)] - \frac{\Gamma(\alpha, x)\,\Gamma(\alpha, y)}{\Gamma(\alpha)} \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x)\, L_n^{\alpha}(y), \qquad x, y > 0, \tag{21}$$

$$e^{\min(x, y)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)]\,[L_n(y) - L_{n-1}(y)], \tag{22}$$

$$(xy)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{(x+y)}{2}} e^{-\alpha\pi i} \gamma\,[\alpha, e^{i\pi}\min(x, y)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)\,\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x)\, L_n^{\alpha}(y), \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{23}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1, x)}{\Gamma(\alpha+1)} - H(x-y) = y^{\alpha+1} e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_{n-1}^{\alpha+1}(y)\, L_n^{\alpha}(x), \tag{24}$$

$$0 < x, y.$$

В формуле (24) $x, y > 0$; $H(z) = 0,\ 1/2,\ 1$, в зависимости от того, имеем ли мы $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$.

$$x^{\frac{(\alpha-\beta)}{2}} y^{-\frac{(\alpha+\beta)}{2}} e^{y} J_{\alpha+\beta}(\sqrt{xy}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^{\alpha}(x)\, L_n^{\beta-n}(y), \tag{25}$$

$$\Gamma(a)\,\Psi(a, \alpha+1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-1} L_n^{\alpha}(x), \qquad \alpha < \frac{1}{2}, \tag{26}$$

$$(1-y)^{-a}\,\Phi\left(a, c; \frac{xy}{y-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} y^n L_n^{c-1}(x), \quad x > 0,\ |y| < 1,\ c > 0. \tag{27}$$

Другие ряды многочленов Лагерра см. в 10.12 (V) и 10.12 (VII). Разложения 10.14 (11) в случае, когда β является целым числом $\geqslant -n$, превращаются в разложения по многочленам Лагерра.

Ряды многочленов Эрмита. Обозначения п. 10.13.

$$|x|^{\rho} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(-\frac{\rho}{2}\right)_m}{(2m)!} H_{2m}(x), \qquad \rho > -1, \tag{28}$$

$$|x|^{\rho}\operatorname{sgn} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\rho}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2}\right)_m}{(2m+1)!} H_{2m+1}(x), \qquad \rho > -1, \tag{29}$$

$$\sqrt{\pi}\,\operatorname{Erfi}[\min(x, y)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m+1}(x)\, H_{2m+1}(y)}{2^{2m+1}(2m+1)\,(2m+1)!}, \qquad x, y \geqslant 0, \tag{30}$$

$$\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu}(x) = \frac{2^\nu}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_{2m}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{(m-\nu)\, 2^{2m}\, m!}, \tag{31}$$

$$\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) D_{2\nu+1}(x) = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m H_{2m+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{(m-\nu)\, 2^{2m+1} m!}, \tag{32}$$

$$(1+y)^{-a}\, \Phi\left(a, \frac{1}{2}; \frac{x^2 y}{1+y}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(2m)!} y^m H_m(x), \quad |y| < 1, \tag{33}$$

$$2x(1+y)^{-a}\, \Phi\left(a, \frac{3}{2}; \frac{x^2 y}{1+y}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(2m+1)!} y^m H_{2m+1}(x). \tag{34}$$

Другие ряды по многочленам Эрмита см. в 10.13 (V).

Ниже приводится список, указывающий методы вывода этих разложений; здесь даны также ссылки на дальнейший материал, касающийся бесконечных рядов классических многочленов.

Ряды многочленов Якоби. Коэффициенты были вычислены с помощью интегрирования по частям. Относительно других примеров см. Brafman (1951). Ниже указано, как получены соответствующие формулы.

(5) Из (1) с помощью 10.9 (4).
(6) Из (3) с помощью 10.9 (4).
(7) Из (4) с помощью 10.9 (4); Ватсон (1949, стр. 401).
(8) Ватсон (1949, стр. 403).
(9) Ватсон (1949, стр. 398).

Ряды многочленов Лежандра. Многие примеры получаются из рядов для многочленов Якоби или рядов по многочленам Гегенбауэра с помощью 10.10 (3). Много других примеров содержится в книгах о функциях Лежандра. Некоторые примеры см. у Tricomi (1936, 1939—1940).

(16) Tricomi (1948, стр. 332).
(17) Toscano (1949).
(18) Neumann (1912).
(19) 9.4 (5).
(20) 9.4 (4).
(21) Watson (1938).
(22) Tricomi (1935), Doetsch (1935).
(23) Erdélyi (1936).
(24) Tricomi (1948).
(25) Toscano (1949).
(26) 6.12 (3).
(27) 6.12 (5).

Некоторые примеры рядов по многочленам Лагерра см. у Erdélyi (1937, 1938).

(28), (29) Из (16) с помощью 10.13 (2) и 10.13 (3).
(30) Из (3) с помощью 10.13 (2) и 10.13 (3).
(31), (32) Tricomi (1950a).
(33), (34) Из (27) с помощью 10.13 (2) и 10.13 (3).

10.21. Некоторые классы ортогональных многочленов

Помимо классических ортогональных многочленов существуют иные классы специальных ортогональных многочленов, теория которых детально изучена Мы опишем некоторые из них, ограничившись лишь кратким упоминанием для многочленов, изученных в книге Сеге, и приводя детали для многочленов, изложение теории которых менее доступно

Многочлены С. Бернштейна и Г Сеге Эти многочлены соответствуют отрезку $[-1, 1]$ Их весовая функция $w(x)$ имеет одну из следующих форм

$$\frac{1}{\rho(x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\rho(x)}, \quad \frac{1}{\rho(x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

где $\rho(x)$ — многочлен степени l, положительный на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Формула Кристоффеля 10.3(12) указывает на наличие связи между этими многочленами, с одной стороны, и некоторыми многочленами Якоби, с другой стороны.

Эти многочлены были введены Szegő (1921) и изучены Бернштейном (1930, 1932). См. Сеге (1962, п. 2 6)

Многочлены Гейне и Ахиезера. Многочлены Гейне соответствуют отрезку $[0, a]$ и весовой функции

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x(a-x)(b-x)}}, \quad 0 < a < b. \tag{1}$$

Они связаны с эллиптическими функциями Якоби.

Heine (1878—1881, том 1, стр. 294—296) показал, что многочлены степени n удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$2\psi(x)(x-\gamma)\frac{d^2y}{dx^2} + [(x-\gamma)\psi'(x) - 2\psi(x)]\frac{dy}{dx} + \\ + [\alpha + \beta x - n(2n-1)x^2]\,y = 0, \tag{2}$$

где

$$\psi(x) = x(a-x)(b-x)$$

и α, β, γ — некоторые постоянные. Это дифференциальное уравнение имеет четыре особые точки регулярного типа и, следовательно, относится к уравнениям типа Гейне

Ахиезер (1934) изучил ортогональные многочлены, связанные с отрезком $(-1, 1)$ и весом

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{|c-x|}{\sqrt{(1-x^2)(a-x)(b-x)}}, & -1 < x < a \text{ или } b < x < 1, \\ 0, & a < x < b. \end{cases}$$

Здесь $-1 < a < b < 1$ и c зависит от a и b. Эти многочлены также связаны с эллиптическими функциями

Многочлены Полачека Недавно Полачек определил некоторые семейства ортогональных многочленов, которые являются обобщениями классических ортогональных многочленов Весовые функции, связанные с многочленами Полачека, не удовлетворяют некоторым условиям, которые обычно налагаются в общей теории (Грубо говоря, они слишком быстро убывают в окрестности концов промежутка) Таким образом, эти многочлены важны, как легко получающийся пример некоторых «нерегулярных» феноменов в общей теории ортогональных многочленов.

Конечный отрезок. Пусть a, b, λ — вещественные параметры, $a \geqslant |b|$, $\lambda > -1$. Положим

$$-1 \leqslant x = \cos\theta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{3}$$

и введем сокращенные обозначения

$$t = \frac{a\cos\theta + b}{\sin\theta} = \frac{ax+b}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

Многочлены $P_n^\lambda(x, a, b)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$P_{-1}^\lambda = 0, \quad P_0^\lambda = 1, \tag{5}$$

$$nP_n^\lambda - 2[(n-1+\lambda+a)x+b]P_{n-1}^\lambda + (n+2\lambda-2)P_{n-2}^\lambda = 0, \tag{6}$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Эти многочлены были введены в статьях Pollaczek (1949a) для $\lambda = \frac{1}{2}$ и (1949c) для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и изучены Szegő (1950a). Некоторые связанные с ними многочлены также были изучены в работах. Pollaczek (1949b, 1950a).

Умножая равенства (6) на z^n и суммируя, получаем простое дифференциальное уравнение первого порядка для производящей функции. Отсюда выводим что

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(x; a, b)\, z^n = (1-ze^{i\theta})^{-\lambda+it}(1-ze^{-i\theta})^{-\lambda-it}, \quad |z| < 1. \tag{7}$$

Сравнение с 10.9 (29) и 10.10 (39) показывает следующие связи с многочленами Лежандра и Гегенбауэра:

$$P_n^\lambda(x; 0, 0) = C_n^\lambda(x), \quad P_n^{\frac{1}{2}}(x; 0, 0) = P_n(x) \tag{8}$$

Эти многочлены ортогональны на отрезке (4), весовая функция имеет вид

$$w^{(\lambda)}(x; a, b) = \frac{1}{\pi} 2^{2\lambda-1} e^{(2\theta-\pi)t} (\sin\theta)^{2\lambda-1} |\Gamma(\lambda+it)|^2. \tag{9}$$

Сеге изучил асимптотическое поведение многочленов $P_n^{\frac{1}{2}}(x; a, b)$, когда x — фиксированное число, лежащее между -1 и 1, и $n \to \infty$.

Используя производящую функцию (7) или рекуррентное соотношение (6), можно доказать что

$$n!\,P_n^\lambda(x; a, b) = (2\lambda)_n e^{in\theta}\,{}_2F_1(-n, \lambda+it, 2\lambda; 1-e^{-2i\theta}). \tag{10}$$

Это выражение через гипергеометрические многочлены приводит к многим дальнейшим формулам для многочленов Полачека Следует отметить, что t зависит от x, а потому P_n^λ не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению. Формулы связывающие P_n^λ с различными значениями λ, вытекают из (10), как следствия формул, связывающих смежные гипергеометрические ряды.

В работе Pollaczek (1950c) введена более общая система многочленов, зависящих от вещественных параметров a, b, c, λ, где

$$\left.\begin{array}{l} \text{либо}\quad a>|b|,\quad 2\lambda+c>0,\quad c\geqslant 0, \\ \text{либо}\quad a>|b|,\quad 2\lambda+c\geqslant 1,\quad c>-1. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Многочлены $P_n^\lambda(x;\ a,\ b,\ c)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$P_{-1}^\lambda=0,\qquad P_0^\lambda=1, \tag{12}$$

$$(n+c)P_n^\lambda-2[(n-1+\lambda+a+c)x+b]P_{n-1}^\lambda+(n+2\lambda+c-2)P_{n-2}^\lambda=0,$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots \tag{13}$$

(Здесь использованы для краткости обозначения (3) и (4).)

Полачек вывел производящую функцию для этих многочленов и доказал, что они ортогональны на отрезке (4) относительно весовой функции вида

$$w^{(\lambda)}(x;\ a,\ b,\ c)=$$
$$=\frac{(2\sin\theta)^{2\lambda-1}e^{(2\theta-\pi)t}}{2\pi\,\Gamma(2\lambda+c)\,\Gamma(c+1)}\,|\Gamma(\lambda+c+it)|^2\,|{}_2F_1(1-\lambda+it,c;\,c+\lambda+it;\,e^{2i\theta})|^{-2}. \tag{14}$$

Рекуррентное соотношение (13) является уравнением в конечных разностях для P, рассматриваемого как функция от n. Это равенство позволяет выразить $P_n^\lambda(x,\ a,\ b\ \ c)$ через гипергеометрические функции. Это выражение слишком сложно, и входящие в него гипергеометрические ряды не являются многочленами Полагая

$$A_n=\frac{\Gamma(2\lambda+c+n)}{\Gamma(c+n+1)\,\Gamma(2\lambda)}\,e^{i(c+n)\theta}\,{}_2F_1(-c-n,\ \lambda+it;\ 2\lambda;\ 1-e^{-2i\theta}),$$

$$B_n=\frac{\Gamma(1-\lambda+it)\,\Gamma(1-\lambda-it)}{\Gamma(2-2\lambda)}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,e^{i(2\lambda+c+n-1)\theta}\times$$
$$\times\,{}_2F_1(1-2\lambda-c-n,\ 1-\lambda+it;\ 2-2\lambda;\ 1-e^{-2i\theta}),$$

получаем выражение

$$P_n^\lambda(x;\ a,\ b,\ c)=\frac{A_{-1}B_n-A_nB_{-1}}{A_{-1}B_0-A_0B_{-1}}. \tag{15}$$

Это выражение справедливо, если 2λ не является целым числом Существует другая форма записи, справедливая и при целых значениях 2λ Если $c=0$, то $A_{-1}=0$ В этом случае равенство (15) сводится к (10).

Бесконечный промежуток. Для бесконечного промежутка $-\infty<x<\infty$ Pollaczek (1950b) ввел систему многочленов $P_n^\lambda(x;\ \varphi)$, где

$$\lambda>0,\qquad 0<\varphi<\pi \tag{16}$$

являются параметрами и

$$P_{-1}^\lambda=0,\qquad P_0^\lambda=1, \tag{17}$$

$$nP_n^\lambda-2[(n-1+\lambda)\cos\varphi+x\sin\varphi]P_{n-1}^\lambda+(n-2+2\lambda)P_{n-2}^\lambda=0, \tag{18}$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Очевидно, что эти многочлены могут быть получены из многочленов, определенных формулой (6), путем замены θ на φ и t на x. Производящая функция имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\lambda}(x;\varphi)\,z^n = (1-ze^{i\varphi})^{-\lambda+ix}(1-ze^{-i\varphi})^{-\lambda-ix}, \quad |z|<1, \tag{19}$$

а весовая функция

$$w^{(\lambda)}(x;\varphi) = \frac{1}{\pi}(2\sin\varphi)^{2\lambda-1}e^{-(\pi-2\varphi)x}\,|\Gamma(\lambda+ix)|^2. \tag{20}$$

Эти многочлены могут быть выражены через гипергеометрические ряды в виде

$$n!\,P_n^{\lambda}(x;\varphi) = (2\lambda)_n\,e^{in\varphi}\,{}_2F_1(-n,\ \lambda+ix;\ 2\lambda;\ 1-e^{-2i\varphi}). \tag{21}$$

Их ввели Meixner (1934) и W. Hahn (1949). Для этих многочленов существуют представления с помощью конечных разностей, аналогичные формуле Родрига (Toscano, 1949). Полагая

$$\delta F(x) = F\left(x+\frac{i}{2}\right) - F\left(x-\frac{i}{2}\right),$$

$$\delta^k F(x) = \delta\,[\delta^{k-1}F(x)], \quad k=2,\ 3,\ \ldots,$$

мы имеем

$$P_n^{\lambda}(x;\varphi) = \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\delta^n G\left(\lambda+\frac{n}{2},\ x\right)}{G(\lambda,\ x)}, \tag{22}$$

где

$$G(\lambda,\ x) = \frac{\Gamma(\lambda+ix)}{\Gamma(1-\lambda+ix)}\,e^{2\varphi x}.$$

10.22. Ортогональные многочлены дискретного переменного

Конец этой главы мы посвятим краткому рассмотрению некоторых систем ортогональных многочленов, для которых функция распределения $\alpha(x)$ в п 10.1 является функцией скачков и соответствующее определение скалярного произведения имеет вид 10 1 (3) Точками, в которых функция $\alpha(x)$ разрывна, являются x_i, и мы будем использовать *функцию скачков* $j(x)$: скачок $\alpha(x)$ в точке $x=x_i$ равен $j(x_i)$ Таким образом, соответствующее определение скалярного произведения имеет вид

$$(\varphi_1,\ \varphi_2) = \sum_i j(x_i)\,\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i), \tag{1}$$

и функция скачков соответствует весовой функции, использованной в предыдущих пунктах. Мы будем предполагать, что функция скачков положительна, причем сумма $\sum_i j(x_i)$ конечна. Многие результаты вводных пунктов этой главы остаются справедливыми для скалярного произведения вида 10.1 (2), и, следовательно, они справедливы и при определении скалярного произведения (1).

Мы будем выбирать точки x_i целыми, $a \leqslant x_i \leqslant b$ Чаще всего встречаются промежутки и функции скачков, указанные в приводимой ниже таблице. Связанные с ними ортогональные многочлены соответствуют классическим ортогональным многочленам дискретного переменного и, как правило, детально изучены.

Многочлены дискретного переменного

a	b	$j(x)$	Название Многочлены
0	$N-1$	1	Чебышева
0	N	$p^x q^{N-x}\binom{N}{x}$	Кравчука
0	∞	$\dfrac{e^{-a}a^x}{\Gamma(x+1)}$	Шарлье
0	∞	$c^x \dfrac{(\beta)_x}{x!}$	Мейкснера
0	∞	$\dfrac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!\,(\delta)_x}$	В. Гана

Все эти многочлены имеют много общих свойств, среди которых мы отметим лишь конечно-разностный аналог формулы Родрига

$$p_n(x) = \frac{\Delta^n [j(x-n) X(x) X(x-1) \ldots X(x-n+1)]}{K_n j(x)}, \tag{2}$$

где K_n — постоянные, $X(x)$ — многочлен от x, коэффициенты которого не зависят от n, и Δ — разностный оператор вида

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \Delta^{n+1} f(x) = \Delta [\Delta^n f(x)], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Обратно, это свойство *характеризует* перечисленные выше ортогональные многочлены в том смысле, что любая система ортогональных многочленов, для которых справедлива формула Родрига, может быть сведена к одной из перечисленных выше систем (Hahn, 1949, Weber и Erdélyi, 1952). Доказательство аналогично проведенному в п. 10.6 и потому опущено.

Доказательство свойства ортогональности этих многочленов может быть основано на формуле (2) и «суммировании по частям» (то есть на преобразовании Абеля). С другой стороны, может быть использован метод производящих функций.

10.23. Многочлены Чебышева дискретного переменного и их обобщения

Многочлены Чебышева $t_n(x)$ применяются для уравновешивания наблюдений по способу наименьших квадратов. О свойствах этих многочленов см. в работах: Сеге (1962, п. 2.8), Jordan (1921 и 1947, гл. VIII), а также сделанные там ссылки.

Определение и свойство ортогональности:

$$t_n(x) = n!\,\Delta^n \left[\binom{x}{n}\binom{x-N}{n}\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

$$\sum_{x=0}^{N-1} t_m(x)\, t_n(x) = \frac{N(N^2-1^2)(N^2-2^2)\ldots(N^2-n^2)\,\delta_{mn}}{2n+1}, \tag{2}$$

$$m, n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Симметрия и «центральные значения»:

$$t_n(N-1-x) = (-1)^n t_n(x), \tag{3}$$

$$t_{2m}\left(\frac{N-1}{2}\right) = (-1)^m (2m)! \binom{2m}{m} \binom{\frac{N-1}{2}+m}{m}, \tag{4}$$

$$t_{2m+1}\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0.$$

Разностное уравнение:

$$(x+2)(x-N+2)\Delta^2 t_n(x) + \\ + [2x-N+3-n(n+1)]\Delta t_n(x) - n(n+1)t_n(x) = 0. \tag{5}$$

Рекуррентная формула:

$$(n+1)t_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-N+1)t_n(x) + n(N^2-n^2)t_{n-1}(x) = 0, \tag{6}$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Связь с многочленами Лежандра:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-n} t_n(Nx) = P_n(2x-1). \tag{7}$$

Обобщение многочленов Чебышева может быть получено с помощью следующего определения:

$$p_n(x;\ \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{n!}\frac{x!(\delta)_x}{(\beta)_x(\gamma)_x}\Delta^n\left[\frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{(x-n)!(\delta)_{x-n}}\right]. \tag{8}$$

В частности,

$$p_n(x;\ 1, \alpha+1, \alpha+1) = \frac{1}{n!}\Delta^n\left[\binom{x}{n}\binom{x+\alpha}{n}\right]. \tag{9}$$

Из этой записи непосредственно видно, что

$$p_n(x;\ 1, 1-N, 1-N) = t_n(x). \tag{10}$$

Некоторые многочлены, которые ввел Bateman (1933), также являются частным случаем (8). Многочлены (8) ввел Hahn (1949). Они связаны с функцией скачков

$$j(x;\ \beta, \gamma, \delta) = \frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!(\delta)_x}. \tag{11}$$

Явную формулу

$$p_n(x;\ \beta, \gamma, \delta) = \frac{(\beta)_n(\gamma)_n}{n!}\,{}_3F_2(-n, -x, \beta+\gamma-\delta+n;\ \beta, \gamma;\ 1), \tag{12}$$

и рекуррентные соотношения дали Weber и Erdélyi (1952).

Имеется связь с многочленами Якоби

$$\lim_{\gamma\to\infty} \gamma^{-n} p_n(\gamma x;\ \alpha+1, \gamma, \gamma-\beta) = \binom{n+\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}(2x+1). \tag{13}$$

10.24. Многочлены Кравчука и аналогичные им многочлены

Многочлены, связанные с биномиальным распределением в теории вероятности, были введены Кравчуком (1929). Их изучали Aitken и Gonin (1935), перечень их свойств можно найти в книге Сеге (1962, п. 2.8.2).

Положим

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1, \quad N \text{ — положительное целое}. \tag{1}$$

Определение, функция скачков, свойство ортогональности:

$$k_n(x) = \frac{(-1)^n x!\,(N-x)!}{n!\,p^x q^{N-x}} \Delta^n \left[\frac{p^x q^{N-x+n}}{(x-n)!\,(N-x)!} \right], \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{2}$$

$$j(x) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \tag{3}$$

$$\sum_{x=0}^{N} j(x)\, k_n(x)\, k_m(x) = \binom{N}{n} p^n q^n \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Явное выражение, производящая функция:

$$k_n(x) = q^n \binom{x}{n} F\left(-n, x-N; x-n; -\frac{p}{q}\right), \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{N} k_n(x)\, z^n = (1+qz)^x (1-pz)^{N-x}. \tag{6}$$

Явное выражение указывает на связь с многочленами Якоби, Сеге (1962, стр. 48) показал (предельные) связи с многочленами Эрмита и многочленами Шарлье.

Частный случай $p = q = \frac{1}{2}$ изучали Gram (1882) и Greenleaf (1932). Многочлены

$$m_n(x; \beta, c) = \frac{x!}{(\beta)_x} c^{-x-n} \Delta^n \left[\frac{c^x (\beta)_x}{(x-n)!} \right] \tag{7}$$

изучены в работах: Meixner (1934), Gottlieb (1938, $\beta = 1$) и других (см. ссылки в работе: Hahn, 1949, стр. 32) Существуют обобщения многочлена Кравчука

$$p^n m_n\left(x; -N, -\frac{p}{q}\right) = n!\, k_n(x). \tag{8}$$

Явное выражение, функция скачков, свойство ортогональности:

$$m_n(x; \beta, c) = (\beta + x)_n F\left(-n, -x; 1-\beta-n-x; \frac{1}{c}\right) =$$
$$= (\beta)_n F\left(-n, -x; \beta; 1-\frac{1}{c}\right), \tag{9}$$

$$j(x) = \frac{c^x (\beta)_x}{x!}, \tag{10}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} j(x)\, m_n(x; \beta, c)\, m_l(x; \beta, c) = n!\,(\beta)_n c^{-n} (1-c)^{-\beta} \delta_{nl}, \quad \beta > 0,\ 0 < c < 1. \tag{11}$$

Симметрия, производящая функция:

$$(\beta)_x m_n(x;\ \beta,\ c) = (\beta)_n m_x(n;\ \beta,\ c), \tag{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n(x;\ \beta,\ c)\frac{z^n}{n!} = \left(1-\frac{z}{c}\right)^x (1-z)^{-x-\beta}, \quad |z| < \min(1,\ |c|). \tag{13}$$

Явное выражение (9) приводит к следующим связям с многочленами Якоби, Лагерра и Шарлье:

$$m_n(x;\ \beta,\ c) = n!\, P_n^{(\beta-1,\ -\beta-n-x)}\left(\frac{2}{c}-1\right), \tag{14}$$

$$\lim_{c\to 1} m_n\left(\frac{cx}{c-1};\ \beta,\ c\right) = n!\, L_n^{\beta-1}(x), \tag{15}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\left[\left(-\frac{\beta}{a}\right)^n m_n\left(x;\ \beta,\ \frac{a}{\beta}\right)\right] = n!\, L_n^{x-n}(a) = (-a)^n c_n(x;\ a). \tag{16}$$

Рекуррентные соотношения и уравнения в конечных разностях привел Meixner (1934).

10.25. Многочлены Шарлье

Многочлены, введенные Шарлье, являются ортогональными много членами, связанными с распределением Пуассона в теории вероятностей Они были изучены многими авторами, среди которых упомянем Мейкснера (Meixner, 1934, 1938) и Деча (Doetsch, 1933). Относительно перечисления их свойств см. Сеге (1962, п. 2.8 1) и Jordan (1947, п. 148)

Функция скачков, определение, свойство ортогональности:

$$j(x) = e^{-a}\frac{a^x}{x!}, \quad a > 0, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

$$c_n(x;\ a) = \frac{x!}{a^x}\Delta^n\left[\frac{a^{x-n}}{(x-n)!}\right], \tag{2}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} j(x)\, c_m(x;\ a)\, c_n(x\ \ a) = a^{-n} n!\, \delta_{mn}. \tag{3}$$

Явные выражения, производящая функция

$$c_n(x,\ a) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{x}{r}\frac{r!}{a^r}, \tag{4}$$

$$c_n(x;\ a) = \frac{x!\,(-a)^{-n}}{(x-n)!}\,\Phi(-n,\ x-n+1;\ a), \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,\ a)\frac{z^n}{n!} = e^z\left(1-\frac{z}{a}\right)^x, \quad |z| < a. \tag{6}$$

Билинейная производящая функция была указана в работе: Meixner (1938).

Симметрия, рекуррентные соотношения, конечные разности:

$$c_n(x;\ a) = c_x(n;\ a), \tag{7}$$

$$ac_{n+1}(x;\ a) + (x - n - a)\,c_n(x;\ a) + nc_{n-1}(x;\ a) = 0, \tag{8}$$

$$ac_n(x+1;\ a) + (n - x - a)\,c_n(x;\ a) + xc_n(x-1,\ a) = 0. \tag{9}$$

Из явного выражения (5) вытекает связь с многочленами Лагерра

$$c_n(x;\ a) = (-a)^{-n}\,n!\,L_n^{x-n}(a). \tag{10}$$

Связь с многочленами Мейкснера указана выше, в 10.24 (16).

ГЛАВА 11

СФЕРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ *)

11.1. Предварительные замечания

11.1.1. Векторы. Точки в $(p+2)$-мерном евклидовом пространстве ($p=1, 2, 3, \ldots$) мы будем задавать с помощью векторов

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}) \tag{1}$$

и будем писать $u(\mathfrak{x})$ для функции u, зависящей от $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$. Длину вектора $\mathfrak{x}$ обозначим через $\|\mathfrak{x}\|$ или r. В явном виде она записывается так:

$$\|\mathfrak{x}\| = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p+2}^2}.$$

В п. 11.7 нам встретятся как векторы с тремя, так и векторы с четырьмя компонентами. Мы будем их записывать в виде $\|\mathfrak{x}\|_3$, $\|\mathfrak{y}\|_4$, указывая число компонент векторов $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ соответственно.

Точки единичной гиперсферы Ω, то есть гиперсферы $r=1$ в $(p+2)$-мерном пространстве, задаются единичными векторами

$$\xi = r^{-1}\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+2}). \tag{2}$$

Мы будем использовать буквы ξ, η, ζ для единичных векторов, имеющих $p+2$ компоненты.

Если $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{p+2})$ является вторым вектором, то определим скалярное произведение $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ формулой

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{p+2}y_{p+2}. \tag{3}$$

Если единичные векторы ξ, η образуют угол θ, то имеем $(\xi, \eta) = \cos\theta$.

В дальнейшем мы будем пользоваться матрицами (то есть линейными операторами, применяемыми к векторам). С теорией матриц можно познакомиться, например, по книгам: И. М. Гельфанд (1951), А. И. Мальцев (1956) и Ф. Р. Гантмахер (1954). Мы будем пользоваться лишь квадратными матрицами. Если M — матрица с общим элементом μ_{jk} ($j, k = 1, 2, \ldots, p+2$), то обозначим определитель матрицы M следующим образом:

$$\det M = \det \mu_{jk}.$$

---

*) При подготовке этой главы были использованы неопубликованные записи курса, прочитанного Герглотцем (G. Herglotz). Идеи и разработка многих доказательств также принадлежат ему.

Единичная матрица будет обозначаться через I; матрицу O называют *ортогональной*, если

$$O'O = I, \tag{4}$$

где через O' обозначена транспонированная матрица O. Отсюда легко следует, что OO' также является единичной матрицей. Вектор, получающийся при применении матрицы O или M к вектору $\mathfrak{x}$, будет обозначаться соответственно $O\mathfrak{x}$, $M\mathfrak{x}$. Матрица O ортогональна тогда и только тогда, когда для всех $\mathfrak{x}$ выполняется равенство

$$(O\mathfrak{x}, O\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}). \tag{5}$$

Матрицу I можно определить тем свойством, что $I\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ для всех $\mathfrak{x}$.

Функция, зависящая от $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$, будет называться функцией от $\mathfrak{x}$ и обозначаться через $f(\mathfrak{x})$. (Функции, зависящие от двух или большего числа векторов, определяются аналогичным образом.)

Функция $f(\mathfrak{x})$ называется *ортогонально-инвариантной*, если для всех $\mathfrak{x}$ и всех ортогональных матриц O имеем

$$f(O\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}). \tag{6}$$

Аналогично функция, зависящая от двух векторов, называется ортогонально-инвариантной, если для всех $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ и всех ортогональных матриц O выполняется условие $f(O\mathfrak{x}, O\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

В дальнейшем мы будем использовать гиперсферические полярные координаты

$$r, \theta_1, \ldots, \theta_p, \varphi,$$

определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_p &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{p-1}\cos\theta_p, \\ x_{p+1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_p\cos\varphi, \\ x_{p+2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_p\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $r > 0$ и

$$0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{8}$$

$(p+2)$-мерный элемент объема задается в этих координатах формулой

$$dV = r^{p+1}(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\ldots(\sin\theta_p)\,dr\,d\theta_1\ldots d\theta_p\,d\varphi, \tag{9}$$

а элемент поверхности единичной сферы $d\Omega$ — формулой

$$d\Omega = (\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\ldots(\sin\theta_p)\,d\theta_1\ldots d\theta_p\,d\varphi. \tag{10}$$

Полная поверхность ω единичной сферы Ω может быть вычислена с помощью этой формулы или из того замечания, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x_1^2-\ldots-x_{p+2}^2)\,dx_1\ldots dx_{p+2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^{p+2} =$$

$$= \int\int_V\int\exp(-r^2)\,dV = \omega\int_0^\infty r^{p+1}e^{-r^2}\,dr.$$

В результате вычисления получаем

$$\omega = \frac{2\pi^{1+\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}. \tag{11}$$

Здесь, равно как и далее в этой главе, мы использовали знаки тройного, двойного или простого интеграла, чтобы обозначить интегралы, взятые по $(p+2)$-мерным, $(p+1)$-мерным или p-мерным многообразиям соответственно.

Функции, определенные на единичной сфере Ω, можно рассматривать как функции $F(\xi)$ от компонент единичного вектора ξ. Выражение

$$\int_{\Omega}\int_{(\xi)} F(\xi)\, d\Omega(\xi) \tag{12}$$

означает $(p+1)$-кратный интеграл, который получается, если заменить компоненты вектора ξ их выражениями через $\theta_1, \ldots, \theta_p$, φ и $d\Omega(\xi)$ — соответствующим выражением по формуле (10).

Если $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ являются определенными на единичной сфере функциями, такими, что интеграл

$$\int_{\Omega}\int F_1(\xi) F_2(\xi)\, d\Omega(\xi)$$

существует и равен нулю, то функции $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ называют *ортогональными на* $\Omega(\xi)$. Мы будем писать Ω вместо $\Omega(\xi)$, если переменный вектор очевиден из контекста

Если явно не будет указано иное, то оператор Лапласа Δ берется относительно компонент $\mathfrak{x}$, то есть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2}. \tag{13}$$

Имеет место формула

$$\Delta\,[r^l (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^m] = \left[\frac{m(m-1)(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}{(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^2} + \frac{l(l+p+2m)}{r^2}\right] r^l (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^m \tag{14}$$

Оператор Δ инвариантен относительно ортогональных преобразований, то есть

$$\sum_{k=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}, \qquad \mathfrak{y} = O\mathfrak{x},$$

где O — ортогональная матрица.

В полярных координатах (3) мы имеем

$$\begin{aligned}
\Delta u = {} & r^{-p-1} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} u\right) + r^{-2} (\sin\theta_1)^{-p} \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left[(\sin\theta_1)^p \frac{\partial}{\partial\theta_1} u\right] + \\
& + r^{-2} (\sin\theta_1)^{-2} (\sin\theta_2)^{1-p} \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left[(\sin\theta_2)^{p-1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} u\right] + \\
& + r^{-2} (\sin\theta_1 \sin\theta_2)^{-2} (\sin\theta_3)^{2-p} \frac{\partial}{\partial\theta_3}\left[(\sin\theta_3)^{p-2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} u\right] + \ldots + \\
& + r^{-2} (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{p-1})^{-2} (\sin\theta_p)^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta_p}\left[\sin\theta_p \frac{\partial}{\partial\theta_p} u\right] + \\
& + r^{-2} (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_p)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} u.
\end{aligned} \tag{15}$$

11.1.2. Многочлены Гегенбауэра. Многочлены $C_n^\nu(x)$, определяемые с помощью производящей функции

$$(1-2xt+t^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,t^n, \quad \nu\neq 0, \tag{16}$$

называют *многочленами Гегенбауэра* или ультрасферическими многочленами степени n и порядка ν. Сеге (1962) обозначает их через $P_n^{(\nu)}(x)$. Гегенбауэр (1877, 1884, 1890, 1891, 1893) изучил эти многочлены для произвольных значений ν. Очерк их теории дан в п. 3.15. Мы будем рассматривать здесь лишь случай, когда 2ν является целым числом, $2\nu=p=1, 2, \ldots$ В этом случае имеем

$$C_n^{l+\frac{1}{2}}(x)=\frac{2^l l!}{(2l)!}\frac{d^l}{dx^l}P_{n+l}(x)=\frac{2^{-n}l!}{(n+l)\,(2l)!}\frac{d^{n+2l}}{dx^{n+2l}}(x^2-1)^{n+l}, \tag{17}$$

$$C_n^{l+1}(x)=\frac{2^{-l}}{l!\,(n+l+1)}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}T_{n+l+1}(x), \tag{18}$$

где $l=0, 1, 2, \ldots,$

$$P_n(x)=\frac{2^{-n}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n={}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \tag{19}$$

является многочленом Лежандра степени n, и

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n+\left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]= \tag{20}$$

$$={}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right)= \tag{21}$$

$$=\cos(n\arccos x) \tag{22}$$

— многочлены Чебышева степени n. При $\nu=0$ место ультрасферических многочленов занимают многочлены Чебышева. Их производящей функцией является

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}T_{n+1}(x)\,t^{n+1}. \tag{23}$$

Из (20) получаем при $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}=T_{n+1}(x)+i\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\frac{d}{dx}T_{n+1}(x). \tag{24}$$

Для любого значения $\nu\neq 0$ имеем также

$$C_n^\nu(x)=(-2)^{-n}(1-x^2)^{-\nu+\frac{1}{2}}\frac{(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Здесь

$$(a)_0=1, \quad (a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad n=1, 2, \ldots$$

Равенство (25) вытекает из 3.15 (3) и 2.8 (23).

Между числами ω в (6), $h(n, p)$ в 11.2 (22), квадратом нормирующего множителя для многочленов Гегенбауэра

$$N = \int_{-1}^{+1} \left[C_n^{\frac{p}{2}}(x) \right]^2 (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} dx = \frac{2^{2-p}\pi \Gamma(n+p)}{n!(p+2n)\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}, \tag{26}$$

полной поверхностью единичной сферы в $(p+1)$-мерном пространстве

$$\omega' = \frac{2\pi^{\frac{1+p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)} \tag{27}$$

и значением

$$C_n^{\frac{p}{2}}(1) = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} = \frac{(p)_n}{n!} = (-1)^n \binom{-p}{n} \tag{28}$$

существует соотношение

$$\frac{\omega' N}{C_n^{\frac{p}{2}}(1)} = \frac{\omega C_n^{\frac{p}{2}}(1)}{h(n, p)} = \frac{4\pi^{1+\frac{p}{2}}}{(2n+p)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \tag{29}$$

Доказательства формул этого пункта приведены в книге Аппель — Кампе де Ферье (1926).

Функции $C^{\frac{p}{2}}$ можно изучать, исходя из рассмотрения частных решений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ (к которому сводится волновое уравнение в $(p+2)$-мерном пространстве); относительно этого см. А. Зоммерфельд (1956) и W. Magnus (1949).

11.2. Гармонические многочлены

Назовем многочлен $H_n(\mathfrak{x})$ *гармоническим многочленом степени n*, если он является однородным многочленом степени n от $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$, так что $H_n(\lambda\mathfrak{x}) = \lambda^n H_n(\mathfrak{x})$, и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta H_n(\mathfrak{x}) = 0$. Очевидно, что многочлен $r^{-n} H_n(\mathfrak{x}) = H_n(\xi)$ является однозначной непрерывной функцией на гиперсфере Ω $(r=1)$ и может быть выражен в виде тригонометрического многочлена от $\theta_1, \ldots, \theta_p, \varphi$. Обозначения те же, что и в п. 11.1.

Дифференциальное уравнение в частных производных вида $\Delta u + f(r) u = 0$, где $f(r)$ является заданной аналитической функцией, зависящей только от r, а $u = u(\mathfrak{x})$, имеет решение вида $u = R_n(r) H_n(\xi)$, где $H_n(\mathfrak{x})$ — произвольный гармонический многочлен степени n и $R_n(r)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{p+1}{r}\frac{dR}{dr} + [f(r) - n(n+p)r^{-2}] R = 0. \tag{1}$$

Мы докажем сейчас, что существует

$$h(n, p) = (2n+p)\frac{(n+p-1)!}{p!\,n!} \tag{2}$$

линейно независимых гармонических многочленов степени n, зависящих от $p+2$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{p+2}$.

Чтобы доказать это, вычислим сначала число $g(n, p)$ линейно независимых однородных многочленов степени n от $p+2$ переменных. Очевидно, что

$$g(n, p) = g(n, p-1) + g(n-1, p-1) + \ldots + g(0, p-1), \tag{3}$$

$$g(n, 0) = n+1, \tag{4}$$

и соотношения (3) и (4) однозначно определяют выражение $g(n, p)$:

$$g(n, p) = \frac{(n+p+1)!}{n!\,(p+1)!} = \binom{p+n+1}{n}. \tag{5}$$

Но уравнение Лапласа налагает некоторые условия на коэффициенты многочлена H_n, причем, поскольку ΔH_n является однородным многочленом степени $n-2$, мы имеем не более чем $g(n-2, p)$ независимых условий, а потому

$$h(n, p) \geqslant g(n, p) - g(n-2, p). \tag{6}$$

С другой стороны, следующие $g(n-2, p)$ линейно независимых многочленов

$$x_1^2 P(x_1, \ldots, x_{p+2}),$$

где P обозначает любой однородный многочлен степени $n-2$, не удовлетворяют уравнению Лапласа, а потому

$$h(n, p) \leqslant g(n, p) - g(n-2, p). \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) вытекает (2).

За исключением случая $n=0$, не существует гармонических многочленов, инвариантных относительно всех ортогональных преобразований *). Но существует многочлен $H_n(\mathfrak{x})$, инвариантный относительно всех ортогональных преобразований, при которых одна из точек единичной сферы остается неподвижной. Поскольку для ортогональных преобразований, оставляющих неподвижной точку η, имеем $(O\mathfrak{x}, \eta) = (\mathfrak{x}, \eta)$, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Для каждого единичного вектора η существует один и только один гармонический многочлен $H_n(\mathfrak{x})$, такой, что*

I. $H_n(\mathfrak{x})$ *зависит лишь от r и $(\mathfrak{x}, \eta)$;*

II. $H_n(\eta) = 1$.

Этот многочлен определяется формулой

$$H_n(\mathfrak{x}) = r^n \frac{C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]}{C_n^{\frac{p}{2}}(1)}, \tag{8}$$

где $\xi = \dfrac{\mathfrak{x}}{r}$, *а* $C_n^{\frac{p}{2}}$ *определяется формулой* 11.1 (16).

---

*) G. Polya и B. Meyer (1950) изучили ортогональные многочлены от трех переменных, инвариантные относительно любой данной конечной подгруппы ортогональной группы.

Так как $C_n^{\frac{p}{2}}(x)$ может быть выражено через четные или нечетные степени от x, в зависимости от того, четно или нечетно n, правая часть равенства (8) является многочленом от $x_1, \ldots, x_{p+2}$, хотя r^n может и не являться многочленом. Так как $C_n^{\frac{p}{2}}(1) \neq 0$, то многочлен (8) удовлетворяет условию II. Следовательно, нам осталось показать, что условие I определяет многочлен $H_n(\mathfrak{x})$ с точностью до постоянного множителя. Поскольку многочлен $H_n(\mathfrak{x})$ однороден и имеет степень n, то он имеет вид

$$c_0(\mathfrak{x}, \eta)^n + c_1 r(\mathfrak{x}, n)^{n-1} + \ldots + c_n r^n,$$

где $c_0, \ldots, c_n$ — постоянные.

Так как $\Delta H_n = 0$, то из 11.1 (14) получаем соотношения

$$(n-m)(n-m-1)c_m + (m+2)(2n-m-2+p)c_{m+2} = 0, \tag{9}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$c_1 = 0. \tag{10}$$

Таким образом, H_n однозначно определяется значением c_0, причем $c_1 = c_3 = \ldots \ldots = 0$. Чтобы построить многочлен H_n, заметим, что из 11.1 (14) мы имеем $\Delta r^{-p} = 0$ и, следовательно, для всех значений r справедливо равенство

$$\Delta \|\tau\eta - \mathfrak{x}\|^{-p} = \Delta \left[\sum_{k=0}^{p+2} (\tau\eta_k - x_k)^2\right]^{-\frac{p}{2}} = 0. \tag{11}$$

При $\tau = t^{-1}$ мы получаем, что коэффициент при t^n в разложении

$$[1 - 2(\xi, \eta)rt + r^2t^2]^{-\frac{p}{2}} \tag{12}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа. Это завершает доказательство леммы 1 при $p = 1, 2, \ldots$ В случае $p = 0$ будем исходить из соотношения 11.1 (23) вместо 11.1 (16). Мы получим вместо (8), что при $p = 0$ многочленом, существование которого утверждается в лемме 1, является

$$r^n T_n[(\xi, \eta)]. \tag{13}$$

Теперь можно построить полную систему линейно независимых гармонических многочленов степени n. Пусть

$$H_{m,k}(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{p+2}) \tag{14}$$

обозначает любой однородный гармонический многочлен степени m, который не зависит от $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Можно проверить, что для всех значений параметра t выполняется соотношение

$$\Delta \left[(1 - 2x_1 t + r^2t^2)^{-m-\frac{p}{2}} H_{m,2}\right] = 0. \tag{15}$$

Это позволяет найти все однородные гармонические многочлены, зависящие от $p+2$ переменных, если уже известны многочлены от $p+1$ переменных. Из $h(m, p-1)$ линейно независимых многочленов $H_{m,2}$ мы получаем

$h(m, p-1)$ линейно независимых многочленов $H_n(\mathfrak{x})$, степень которых относительно $n-m$ равна x_1, а именно:

$$r^{n-m} C_{n-m}^{m+\frac{p}{2}} \left(\frac{x_1}{r}\right) H_{m,2}, \tag{16}$$

где $m = 0, 1, \ldots, n$. Поскольку из равенства (3) и

$$h(n, p) = g(n, p) - g(n-2, p)$$

следует, что

$$h(n, p) = h(n, p-1) + h(n-1, p-1) + \ldots + h(0, p-1), \tag{17}$$

то мы получаем из (16) все многочлены $H_n(\mathfrak{x})$.

Поскольку

$$(x_{p+1} \pm i x_{p+2})^m \tag{18}$$

образуют полную систему линейно независимых многочленов $H_{m,p}$, получаем по индукции следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $m_0, \ldots, m_p$ — такие целые числа, что*

$$n = m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_p \geqslant 0, \tag{19}$$

и пусть r_k определяется формулой

$$r_k = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_{p+2}^2}, \tag{20}$$

где $k = 0, 1, \ldots, p$ и $r_0 = r$. Тогда функции

$$H(m_k, \pm; \mathfrak{x}) \equiv H(n, m_1, \ldots, m_{p-1}, \pm m_p; x_1, \ldots, x_{p+2}) =$$

$$= \left(\frac{x_{p+1}}{r_p} + i \frac{x_{p+2}}{r_p}\right)^{\pm m_p} r_p^{m_p} \prod_{k=0}^{p-1} r_k^{m_k - m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + \frac{p}{2} - \frac{k}{2}} \left(\frac{x_{k+1}}{r_k}\right) \tag{21}$$

образуют полную систему $h(n, p)$ линейно независимых гармонических многочленов степени n. Разумеется, $H(m_k, +; \mathfrak{x}) = H(m_k, -; \mathfrak{x})$, если $m_p = 0$.

Следствие. *В гиперсферических полярных координатах* 11.1 (7) *имеем*

$$H(m_k, +; \mathfrak{x}) = r^n Y(m_k; \theta_k, \pm\varphi), \tag{22}$$

где

$$Y(m_k; \theta_k, \pm\varphi) = e^{\pm i m_p \varphi} \prod_{k=0}^{p-1} (\sin\theta_{k+1})^{m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + \frac{p}{2} - \frac{k}{2}} (\cos\theta_{k+1}). \tag{23}$$

11.3. Сферические гармоники

Если $H_n(\mathfrak{x})$ является однородным гармоническим многочленом степени n, то будем называть функцию

$$r^{-n} H_n(\mathfrak{x}) = H_n(\xi) = Y_n(\theta, \varphi) \tag{1}$$

сферической гармоникой степени n. Здесь мы пишем θ вместо $\theta_1, \ldots, \theta_p$, а через ξ вновь обозначаем $\frac{\mathfrak{x}}{r}$. Сферические гармоники являются однозначными непрерывными функциями на Ω (единичной гиперсфере $r=1$). В частности, из 11.2 (22) и 11.2 (23) вытекает, что сферические гармоники степени $n=m_0$ имеют вид

$$r^{-n} H(n, m_1, \ldots, \pm m_p; x_1, \ldots, x_{p+2}) = r^{-n} H(m_k, \pm; x) =$$
$$= H(n, m_1, \ldots, \pm m_p; \xi_1, \ldots, \xi_{p+2}) = H(m_k, \pm; \xi), \tag{2}$$
$$= Y(n, m_1, \ldots, m_p; \theta_1, \ldots, \theta_p, \pm\varphi) = Y(m_k; \theta, \pm\varphi). \tag{3}$$

Мы установим сейчас свойства ортогональности для функций (2), (3) (определения см. в п. 11.1). Положим для любых целых l и m, таких, что $l \geqslant m \geqslant 0$,

$$E_k(l, m) = \frac{\pi 2^{k-2m-p}\Gamma(l+m+p+1-k)}{\left(l+\frac{p-k+1}{2}\right)(l-m)!\left[\Gamma\left(m+\frac{p-k+1}{2}\right)\right]^2} \tag{4}$$

и для любых четных $m_0, m_1, \ldots, m_p$, удовлетворяющих 11.2 (19),

$$N(m_0, m_1, \ldots, m_p) = 2\pi \prod_{k=1}^{p} E_k(m_{k-1}, m_k). \tag{5}$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Любые две различные функции* (2) *или* (3) *ортогональны на сфере Ω, за исключением случая, когда они комплексно сопряжены. В случае комплексно сопряженных функций (или в случае квадрата вещественных функций* (2) *или* (3)) *имеем*

$$\int_\Omega \int |H(m_k, \pm; \xi)|^2 d\Omega = \int_\Omega \int |Y(m_k, \theta, \pm\varphi)|^2 d\Omega =$$
$$= N(m_0, m_1, \ldots, m_p) = N(m_k). \tag{6}$$

В частности, любые две сферические гармоники различных степеней ортогональны на единичной гиперсфере.

Функции (2) или (3) образуют *полную* систему ортогональных функций на сфере Ω. Докажем следующее утверждение:

Теорема 3 *Если функция $f(\xi)$ всюду непрерывна на сфере Ω и ортогональна на этой сфере ко всем функциям $H(m_k, \pm; \xi)$, то она тождественно обращается в нуль на Ω.*

Для доказательства предположим, что $f(\eta) = 2a > 0$, где η — фиксированный единичный вектор (то есть точка сферы Ω). Так как $f(\xi)$ непрерывна, то найдется такое положительное число δ, что $f(\xi) \geqslant a$ для всех ξ, лежащих в окрестности $\|\xi - \eta\| \leqslant \delta$, то есть $f(\xi) \geqslant a$, если $1-(\xi, \eta) \leqslant \frac{\delta^2}{2}$. Применим к функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2(1-x)}{\delta^2} & \text{при } 1-x \leqslant \frac{\delta^2}{2}, \\ 0 & \text{при } 1-x \geqslant \frac{\delta^2}{2} \end{cases}$$

теорему Вейерштрасса о приближении многочленами (см. Натансон, 1949, стр. 19). Мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное число n и многочлен $F_n(x)$ степени n такие, что

$$|F_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Тогда

$$\int_\Omega\int f(\xi)\,\varphi\,[(\xi,\ \eta)]\,d\Omega \geqslant a^* > 0,$$

где a^* — положительное число, зависящее от a и δ, но не зависящее от n и ε, и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\int f(\xi)\,F_n\,[(\xi,\ \eta)]\,d\Omega = a^*. \qquad (7)$$

Так как функция $f(\xi)$ ортогональна ко всем функциям (2) или (3) и, в силу теоремы 1, $C_k^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]$ является линейной комбинацией этих функций, то $f(\xi)$ должно быть при всех k ортогонально к $C_k^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]$. Кроме того, поскольку степень $C_k^{\frac{p}{2}}(z)$ относительно z в точности равна k, то $F_n(z)$ должно быть линейной комбинацией функций $C_k^{\frac{p}{2}}(z)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Следовательно, функция $f(\xi)$ ортогональна к $F_n\,[(\xi,\ \eta)]$, что противоречит равенству (7). Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Из доказательства теоремы 3 вытекает утверждение, касающееся приближения некоторых классов непрерывных функций с помощью сферических гармоник. Мы имеем следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $F(x)$ — функция вещественного переменного x, непрерывная на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Положим при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$*

$$\varphi_n\,[(\xi,\ \eta)] = \sum_{m=0}^{n} a_m C_m^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)], \qquad (8)$$

где

$$C_n^{\frac{p}{2}}(1)\,A(n,\ p)\,a_n = \int_\Omega\int C_n^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]\,F\,[(\xi,\ \eta)]\,d\Omega(\xi) \qquad (9)$$

и

$$A(n,\ p)\,C_n^{\frac{p}{2}}(1) = \int_\Omega\int \left\{C_n^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]\right\}^2 d\Omega(\xi). \qquad (10)$$

Тогда функция $F\,[(\xi,\ \eta)]$ является непрерывной функцией от ξ на Ω и может быть приближена функциями φ_n в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\int |F\,[(\xi,\ \eta)] - \varphi_n\,[(\xi,\ \eta)]|^2\,d\Omega = 0. \qquad (11)$$

Отметим, что $A(n,\ p)$ не зависит от фиксированного единичного вектора η, значение этой постоянной определяется равенством 11.4 (13).

Для того чтобы доказать эту лемму, выберем в (8) коэффициенты a_n так, чтобы минимизировать интеграл (11). Так как $C_k^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]$ и $C_m^{\frac{p}{2}}\,[(\xi,\ \eta)]$ при $k\neq m$ ортогональны на сфере Ω (см. замечания после теоремы 2), то мы получаем именно значения (9) для a_n. С другой стороны, из теоремы Вейерштрасса о приближении функций многочленами мы знаем, что при соответствующем выборе a_n и достаточно большом n подынтегральная функция в (11) может быть сделана произвольно малой; следовательно, минимум интеграла в (11) стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Задача разложения функций, заданных на Ω, в ряды по сферическим гармоникам изучалась многими авторами При $p=1$ см Гобсон (1952), где имеется много ссылок Случай $p=2$ был изучен в работах Kogbetlianz (1924) и Koschmieder (1929), а случай любого p в работе Koschmieder (1931). Разложения функций в ряды по сферическим гармоникам называют иногда рядами Лапласа Вообще мало известно относительно сходимости рядов Лапласа непрерывных функций. Однако доказана их суммируемость по Чезаро (достаточно большого порядка).

11.4. Теорема сложения

При фиксированном η сферическая гармоника $C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]$ может быть выражена через $S(m_k, \pm; \xi)$, где $m_0 = n$. Имеет место более общее утверждение

Теорема 4. *Пусть $S_n^l(\xi)$, $l = 1, 2, \ldots, h$, — система, состоящая из $h = h(n, p)$ линейно независимых вещественных сферических гармоник степени n, и пусть система S_n^l ортонормальна на Ω, то есть при l, $m = 1, 2, \ldots, h$ выполняется соотношение*

$$\int_\Omega \int S_n^l(\xi)\, S_n^m(\xi)\, d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad n = m. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда для любого фиксированного единичного вектора η имеет

$$\frac{C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]}{C_p^{\frac{p}{2}}(1)} = \left(\frac{\omega}{h}\right) \sum_{l=1}^{h} S_n^l(\xi)\, S_n^l(\eta). \tag{2}$$

Обозначения те же, что и в 11.1 (11), 11.1 (12), 11.2 (2), 11.1 (16).

В качестве частного случая разложения (2) получаем из теоремы 2

$$C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)] = \frac{1}{2} \frac{p\omega}{(2n+p)} \sum \frac{\varepsilon(m_p)}{N(m_k)} [H(m_k, +; \xi) H(m_k, -; \eta) + \\ + H(m_k, -; \xi) H(m_k, +, \eta)], \tag{3}$$

где сумма берется по всем целым значениям m_k, таким, что $n = m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_p \geqslant 0$, и где

$$\varepsilon(0) = 1, \quad \varepsilon(m) = 2, \quad m > 0. \tag{4}$$

Из 11.2 (21) получаем, что $S(m_k, \pm; \xi)$ обращается в нуль, если последние $p+2-l$ компонент вектора ξ равны нулю, то есть если

$$\xi_{l+1} = \xi_{l+2} = \ldots = \xi_{p+2} = 0,$$

за исключением случая, когда

$$m_l = m_{l+1} = \ldots = m_p = 0.$$

Следовательно, если положить в формуле (3)

$$\xi = (\cos\rho,\ \sin\rho,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\eta = (\cos\sigma,\ \sin\sigma,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

то получим, что при $p > 1$

$$C_n^{\frac{p}{2}}(\cos\rho\cos\sigma + \sin\rho\sin\sigma) = C_n^{\frac{p}{2}}[\cos(\rho-\sigma)] = \frac{\Gamma(p-1)\,C_n^{(p-1)/2}(1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{n} B_{n,m}(\sin\rho)^m C_{n-m}^{m+\frac{p}{2}}(\cos\rho)(\sin\sigma)^m C_{n-m}^{m+\frac{p}{2}}(\cos\sigma), \tag{5}$$

где

$$B_{n,m} = 2^{2m}(n-m)!\,(p+2m-1)\frac{\left[\Gamma\left(m+\frac{p}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p+n+m)}. \tag{6}$$

Если положить в (3)

$$\xi = (\cos\alpha,\ \sin\alpha\cos\rho,\ \sin\alpha\sin\rho,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\eta = (\cos\beta,\ \sin\beta\cos\sigma,\ \sin\beta\sin\sigma,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

то получим из (5) при $p > 1$ и $\rho - \sigma = \varphi$

$$C_n^{\frac{p}{2}}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi) = \frac{\Gamma(p-1)}{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{n} B_{n,m}(\sin\alpha)^m C_{n-m}^{m+\frac{p}{2}}(\cos\alpha)(\sin\beta)^m C_{n-m}^{m+\frac{p}{2}}(\sin\beta)\,C_m^{(p-1)/2}(\cos\varphi), \tag{7}$$

где $B_{n,m}$ задается формулой (6). При $p = 1$ имеем

$$P_n(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi) = P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta) +$$
$$+ 2\sum_{m=0}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{P}_n^m(\cos\alpha)\,\mathrm{P}_n^m(\cos\beta)\cos m\varphi, \tag{8}$$

где

$$P_n(x) = C_n^{\frac{1}{2}}(x) \tag{9}$$

являются многочленами Лежандра и

$$\mathrm{P}_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)2^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(x) \tag{10}$$

— *присоединенные функции Лежандра*.

Обычно формулу (7) или в случае $p=1$ формулу (8) называют *теоремой сложения для ультрасферических многочленов*. Мы можем получить равенство (3) (но не теорему 4 во всей общности) путем последовательного применения равенств (7) и (8). В модифицированной форме соотношения (7) и (8) остаются справедливыми и для общих функций C_n^ν, где 2ν уже не является обязательно целым числом (относительно этого см. 3.15 (19) и 3.11 (2)).

Доказательство теоремы 4 основано на том, что $C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]$ является ортогональным инвариантом от ξ и η (определения см. в п. 11.1.1). Мы докажем сначала, что с точностью до постоянного множителя $C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]$ является единственным инвариантом среди сферических гармоник степени n. Для этого нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ — многочлен от компонент $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, и пусть*

$$F(O\mathfrak{x}, O\mathfrak{y}) = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{11}$$

для всех ортогональных преобразований O (см. п. 11.1.1). *Тогда существует многочлен $\Phi(u, v, w)$ от трех переменных u, v, w такой, что*

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \Phi[(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}), (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), (\mathfrak{y}, \mathfrak{y})] \tag{12}$$

тождественно относительно компонент $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ фиксированы, то можно выбрать такую ортогональную систему координат, что

$$\mathfrak{x} = (\alpha, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathfrak{y} = (\beta, \gamma, 0, \ldots, 0),$$
$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \alpha^2, \quad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \alpha\beta, \quad (\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) = \beta^2 + \gamma^2$$

и, следовательно,

$$\alpha = \sqrt{u}, \quad \beta = \frac{v}{\sqrt{u}}, \quad \gamma = \frac{1}{u}\sqrt{uw - v^2}.$$

Так как F является ортогональным инвариантом, то его можно записать как многочлен

$$F = F^*(\alpha, \beta, \gamma) = F^*\left(\sqrt{u}, \quad \frac{v}{\sqrt{u}}, \quad \frac{1}{u}\sqrt{uw - v^2}\right)$$

от α, β, γ. Из существования ортогональных преобразований, при которых

$$\alpha \to -\alpha, \quad \beta \to -\beta, \quad \gamma \to \gamma$$

или

$$\alpha \to \alpha, \quad \beta \to \beta, \quad \gamma \to -\gamma,$$

вытекает, что F^* является многочленом от $\gamma^2, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta$, и потому можно записать F^* в виде

$$F^* = u^{-m}\Phi^*(u, v, w), \tag{13}$$

где m — целое число и Φ^* — многочлен от u, v, w.

Меняя ролями $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, получаем, что

$$w^{-k}\Psi(u, v, w) = u^{-m}\Phi^*(u, v, w), \tag{14}$$

где k — целое число и Ψ — многочлен. Так как u, v, w алгебраически независимы, из (14) следует, что $u^{-m}\Phi^*$ является многочленом Это завершает доказательство леммы 3.

Лемма 4 *Пусть* ξ, η, ζ — *любые единичные векторы в* $(p+2)$-*мерном пространстве Тогда*

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{(\eta)} C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]\, C_n^{\frac{p}{2}}[(\eta, \xi)]\, d\Omega(\eta) = A(n, p)\, C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \zeta)], \tag{15}$$

где

$$A(n, p) = C_n^{\frac{p}{2}}(1)\frac{\omega}{h(n, p)} = \frac{2\pi^{1+\frac{p}{2}}}{\left(n+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \tag{16}$$

Лемма 4 имеет характер теоремы о свертке для основных сферических гармоник $C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]$.

Чтобы доказать эту лемму, возьмем любые два вектора $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{z}$ и положим $\xi = \frac{\mathfrak{x}}{\|\mathfrak{x}\|}$, $\zeta = \frac{\mathfrak{z}}{\|\mathfrak{z}\|}$. Так как функции

$$\|\mathfrak{x}\|^n C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)], \quad \|\mathfrak{z}\|^n C_n^{\frac{p}{2}}[(\eta, \zeta)]$$

являются гармоническими многочленами, зависящими соответственно от компонент $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{z}$, то произведение левой части равенства (15) на норму $\|\mathfrak{x}\|^n\|\mathfrak{z}\|^n$ является гармоническим многочленом как от $\mathfrak{x}$ так и от $\mathfrak{z}$, имеющим по каждому множеству переменных степень n Кроме того этот гармонический многочлен является ортогональным инвариантом от $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{z}$, поскольку он остается неизменным при одновременном ортогональном преобразовании $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ и η (и, следовательно, ξ, ζ и η), а интеграл остается неизменным при любом ортогональном преобразовании переменной η Таким образом, в силу леммы 3 наш гармонический многочлен является многочленом от $\|\mathfrak{x}\|^2$, $\|\mathfrak{z}\|^2$ и $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \|\mathfrak{x}\|\,\|\mathfrak{z}\|\,(\xi, \zeta)$. Таким образом, в силу леммы 1 это выражение является кратным

$$\|\mathfrak{x}\|^n\|\mathfrak{z}\|^n C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \zeta)].$$

Отсюда следует лемма 4. Мы можем определить множитель $A(n, p)$, положив

$$\xi = \zeta = (1, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда получаем

$$A(n, p)\, C_n^{\frac{p}{2}}(1) = \omega' \int\limits_{-1}^{+1}\left[C_n^{\frac{p}{2}}(x)\right]^2 (1-x^2)^{(p-1)/2}\, dx, \tag{17}$$

где через ω' обозначена площадь поверхности гиперсферы в $(p+1)$-мерном пространстве. Из 3.15 (17), 11 1 (26), 11.1 (29) и 11.2 (2) получаем (16)

Мы можем теперь выяснить, как действуют на сферические гармоники ортогональные преобразования переменной ξ.

Лемма 5. *Пусть $S_n^l(\xi)$, $l=1, 2, \ldots, h$, образуют полную систему ортогональных сферических гармоник степени n, для которых выполняется условие* (1), *и пусть O — некоторое ортогональное преобразование в $(p+2)$-мерном пространстве. Тогда имеет место равенство*

$$S_n^l(O\xi)=\sum_{k=1}^{h} g_{lk}S_n^k(\xi), \tag{18}$$

где матрица G с h^2 элементами g_{lk} является ортогональной матрицей, содержащей $h=h(n, p)$ столбцов, то есть

$$G'G=GG'=I. \tag{19}$$

Здесь G' — транспонированная матрица G и I — единичная матрица порядка $h(n, p)$.

Доказательство. Так как оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований (см. п. 11.1), то $S_n^l(O\xi)$ является сферической гармоникой степени n и, следовательно, может быть, в силу (15), выражено через полную систему $S_n^k(\xi)$.

Так как интеграл в левой части равенства (1) остается инвариантным при замене ξ через $O\xi$, то функции $S_n^l(O\xi)$ также образуют ортонормированную систему, а потому $GG'=I$. Но хорошо известно, что тогда мы имеем также $G'G=I$.

Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что

$$\sum_{l=1}^{h} S_n^l(\xi)\,S_n^l(\eta)=\sum_{l=1}^{h} S_n^l(O\xi)\,S_n^l(O\eta) \tag{20}$$

является ортогональным инвариантом от ξ и η. Это вытекает из леммы 5, в частности из равенства $GG'=I$. Из доказательства леммы 4 видно, что выражение (20) отличается от $C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]$ лишь постоянным множителем. Этот множитель можно вычислить, интегрируя квадрат выражения (20) по η по всей единичной сфере Ω. Принимая во внимание равенство (1), получаем, что результат интегрирования равен

$$\sum_{l=1}^{h}[S_n^l(\xi)]^2. \tag{21}$$

С другой стороны, полагая в равенстве (12) $\xi=\eta$, убеждаемся, что этот интеграл равен $C_n^{\frac{p}{2}}(1)$, умноженному на некоторый постоянный множитель. Интегрируя (21) по $\Omega(\xi)$ и принимая во внимание (1), получаем значение h. Это в силу (2) приводит к теореме 4.

Из теоремы 4 мы получаем, что для любой сферической гармоники $S_m(\xi)$ степени m имеет место равенство

$$\int_{\Omega(\xi)}\!\!\int C_n^{\frac{p}{2}}[(\xi, \eta)]\,S_m(\xi)\,d\Omega(\xi)=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \left(\dfrac{\omega}{h}\right)C_n^{\frac{p}{2}}(1)\,S_p(\eta), & n=m.\end{cases} \tag{22}$$

Из леммы 2, в частности из равенств 11.3 (8), 11.3 (11), получаем в силу неравенства Шварца, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{(\xi)}\{F[(\xi,\eta)]-\varphi_n[(\xi,\eta)]\}\,S_n(\xi)\,d\Omega(\xi)=0,$$

где F и φ_n определены в п. 11.3, 11.3 (8). Комбинируя это соотношение с равенством (22), получаем (ср. Funk, Hecke, 1916, 1918):

Теорема Функа—Гекке. *Пусть $F(x)$ — функция вещественного переменного x, непрерывная на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$, и пусть $S_n(\xi)$ — любая сферическая гармоника степени n. Тогда для любого единичного вектора η имеет место равенство*

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{(\xi)}F[(\xi,\eta)]\,S_n(\xi)\,d\Omega(\xi)=\lambda_n S_n(\eta), \tag{23}$$

где интеграл в формуле (23) берется вдоль всей поверхности единичной гиперсферы Ω, и где

$$\lambda_n=\frac{\omega'}{C_n^{\frac{p}{2}}(1)}\int\limits_{-1}^{1}F(x)\,C_n^{\frac{p}{2}}(x)\,(1-x^2)^{\frac{p-1}{2}}\,dx. \tag{24}$$

Здесь через ω' обозначена полная площадь поверхности единичной гиперсферы в $(p+1)$-мерном пространстве:

$$\omega'=\frac{2\pi^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)},\qquad \frac{\omega'}{C_n^{\frac{p}{2}}(1)}=\frac{(4\pi)^{\frac{p}{2}}\,n!\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{(n+p-1)!}.$$

Erdélyi (1938) доказал также, что достаточно предполагать интегрируемость по Лебегу функций $|F(x)|$ и $|F(x)|^2$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$, и показал, что

$$\lambda_n=i^n(2\pi)^{1+\frac{p}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{-\frac{p}{2}}J_{n+\frac{p}{2}}(t)\,f(t)\,dt,$$

где

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}e^{-ixt}F(x)\,dx.$$

Здесь через J обозначена функция Бесселя. Заметим, что

$$t^{-\frac{p}{2}}J_{n+\frac{p}{2}}(t)=t^n2^{-n-\frac{p}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{t^2}{4}\right)^m}{m!\,\Gamma\left(n+m+1+\frac{p}{2}\right)}$$

является однозначно определенной функцией от t.

11.5. Случай $p=1$, $h(n, p)=2n+1$

11.5.1. Производящая функция для сферических гармоник в трехмерном случае. Обозначим через

$$\mathfrak{x}=(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

вектор с тремя компонентами. Определим многочлены $H_n^m(\mathfrak{x})$ формулой

$$\left[x_2+ix_3-2x_1t-(x_2-ix_3)t^2\right]^n=t^n\sum_{m=-n}^{n}H_n^m(\mathfrak{x})\,t^m. \tag{2}$$

Подстановка $t=-1/\tau$ показывает, что

$$\overline{H}_n^m=(-1)^m H_n^{-m}, \tag{3}$$

где черта обозначает комплексно сопряженный многочлен. Левую часть равенства (2) можно записать в виде $(\mathfrak{u}, \mathfrak{x})^n$, где

$$\mathfrak{u}=(-2t,\ 1-t^2,\ i+it^2). \tag{4}$$

Так как $(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})=0$, то получаем из 11.1 (14), что обе части равенства (2) при всех значениях t удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому $H_n^m(\mathfrak{x})$ является однородным гармоническим многочленом степени n. Линейная независимость многочленов H_n^m вытекает из алгебраической независимости

$$x_2+ix_3,\ -2x_1,\ -(x_2-ix_3).$$

Положим $r=\|\mathfrak{x}\|$, $\xi=\dfrac{\mathfrak{x}}{r}$. Тогда функции

$$r^{-n}H_n^m(\mathfrak{x})=S_n^m(\xi),\qquad m=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n, \tag{5}$$

образуют полную систему линейно независимых сферических гармоник степени n. Из равенства (3) имеем

$$S_n^{-m}(\xi)=(-1)^m\,\overline{S}_n^m(\xi). \tag{6}$$

Справедливо соотношение ортогональности

$$\iint_{\Omega} S_n^m(\xi)\,\overline{S}_n^{m'}(\xi)\,d\Omega=\begin{cases}0, & m\neq m',\\[2mm] 2\pi\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\dbinom{2n}{m+n}, & m=m',\end{cases} \tag{7}$$

$$m,\ m'=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n,$$

где интеграл берется по всей поверхности единичной сферы Ω. Оно может быть доказано следующим образом. Введем вектор

$$\mathfrak{v}=(-2s,\ 1-s^2,\ i+is^2) \tag{8}$$

и рассмотрим интеграл

$$\iint_{\Omega}(\mathfrak{u}, \xi)^n\,(\overline{\mathfrak{v}}, \xi)^n\,d\Omega(\xi). \tag{9}$$

Этот интеграл является ортогональным инвариантом от $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ (см. доказательство леммы 4 в п. 11.4). В силу леммы 2 этот интеграл является многочленом от $(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})$, $(\overline{\mathfrak{v}}, \overline{\mathfrak{v}})$ и $(\mathfrak{u}, \overline{\mathfrak{v}})$, и, поскольку $(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = (\overline{\mathfrak{v}}, \overline{\mathfrak{v}}) = 0$, интеграл (9) отличается лишь постоянным множителем от $(\mathfrak{u}, \overline{\mathfrak{v}})^n$. Подставляя в интеграл (9) разложение (2) для $(\mathfrak{u}, \xi)^n$ и соответствующее разложение для $(\overline{\mathfrak{v}}, \xi)^n$, получаем, что

$$(ts)^n \sum_{l, m=-n}^{n} t^l s^m \int\int_{\Omega} S_n^l(\xi)\, \overline{S}_n^m(\xi)\, d\Omega = \mu(\mathfrak{u}, \overline{\mathfrak{v}})^n = \mu 2^n (1+st)^{2n}. \tag{10}$$

Значение постоянной μ можно вычислить, положив $s = t = 0$ и

$$\xi = (\cos\theta,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi), \quad d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{11}$$

Это дает

$$2^n\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, (\sin\theta)^{2n+1} = \frac{2\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) n!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \tag{12}$$

Сравнивая коэффициенты при $t^l s^m$ в обеих частях равенства (10), получаем (7).

Для того чтобы получить явное выражение для $S_n^m(\xi)$, применим к (2) формулу Коши Мы получим

$$H_n^m(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} (\mathfrak{u}, \mathfrak{x})^n t^{-n-m-1}\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i} (x_2 - ix_3)^n \int^{(0+)} \left[\left(t + \frac{x_1}{x_2 - ix_3}\right)^2 - r^2 (x_2 - ix_3)^{-2}\right]^n t^{-n-m-1}\, dt. \tag{13}$$

Если положить

$$t + \frac{x_1}{x_2 - ix_3} = \tau, \quad \frac{x_1}{x_2 - ix_3} = \sigma,$$

то получим

$$H_n^m(\mathfrak{x}) = (2\pi i)^{-1} (ix_3 - x_2)^n \int^{(\sigma+)} \left[\tau^2 - r^2 (x_2 - ix_3)^{-2}\right]^n (\tau - \sigma)^{-n-m-1}\, d\tau = \tag{14}$$

$$= \frac{(-1)^m}{(n+m)!} (x_2 - ix_3)^n \frac{d^{n+m}}{d\tau^{n+m}} \left[\tau^2 - \left(\frac{\tau\sigma}{x_1}\right)^2\right]^n = \tag{15}$$

$$= \frac{r^n}{(n+m)!} \left(\frac{x_2 - ix_3}{r}\right)^m \frac{d^{n+m}}{d\xi_1^{n+m}} (1 - \xi_1^2)^n, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{r}. \tag{16}$$

Если определить присоединенные функции Лежандра $\mathrm{P}_n^m(x)$ равенством

$$\mathrm{P}_n^m(x) = (-1)^{n+m} 2^{-n} (n!)^{-1} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n, \tag{17}$$
$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

то получаем, что

$$S_n^m(\xi) = r^{-n} H_n^m(\mathfrak{x}) = (-1)^{n+m} \frac{2^n n!}{(n+m)!} (\xi_2 - i\xi_2)^m (1 - \xi_1^2)^{-\frac{m}{2}} \mathrm{P}_n^m(\xi_1). \tag{18}$$

Для соответствующих функций в сферических полярных координатах (см. п. 11.3) имеем

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = S_n^m(\xi) = (-1)^{n+m} \frac{2^n n!}{(n+m)!} e^{-im\varphi} P_n^m(\cos\theta). \qquad (19)$$

В силу (3) и (18) получаем

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x).$$

Теорема сложения для функций $P_n^m(x)$ дается равенством 11.4 (8).

Соотношение ортогональности (7) дает

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad (20)$$

Из (2) получаем производящую функцию

$$\left[1 - st\cos\theta - \frac{1}{2}(1-t^2)\sin\theta\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n!}{k!} P_n^{k-n}(\cos\theta) s^n t^k. \qquad (21)$$

Другие свойства функции P_n^m см. в п. 3.6.1.

11.5.2. Теория полюсов Максвелла. Пусть x_1, x_2, x_3 — независимые переменные, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, и пусть дифференциальный оператор D_k определяется равенством

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (22)$$

Так как

$$\Delta r^{-1} = \left(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2\right) r^{-1} = 0, \qquad (23)$$

то очевидно, что $D_1^a D_2^b D_3^c r^{-1}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, ясно, что это выражение имеет вид однородного многочлена степени $n = a + b + c$, умноженного на r^{-2n-1}. Наконец, можно проверить, что для любого однородного многочлена H_n степени n утверждения

$$\Delta H_n = 0 \quad \text{и} \quad \Delta H_n r^{-2n-1} = 0$$

эквивалентны. Таким образом, мы получили, что

$$D_1^a D_2^b D_3^c r^{-1} = H_n(x_1, x_2, x_3) r^{-2n-1}, \quad n = a + b + c. \qquad (24)$$

Из этого замечания вытекает, что каждому однородному многочлену степени n от трех переменных D_1, D_2, D_3 таких, что

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = 0, \qquad (25)$$

соответствует гармонический многочлен от x_1, x_2, x_3 степени n. Если сравнить это утверждение с замечанием, сделанным после формулы 11.7 (12), то представляется весьма правдоподобным, что все гармонические многочлены можно представить в виде (24) В самом деле, можно показать, что (см. Гобсон, 1952, гл. 4)

$$D_1^{n-m}(D_2 \pm iD_3)^m \frac{1}{r} = \frac{(-1)^{n-m}(n-m)!}{r^{n+1}} e^{\pm im\varphi} P_n^m(\cos\theta), \qquad (26)$$

$$m = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_3 = r\sin\theta\sin\varphi. \qquad (27)$$

В силу (19) это показывает, что все сферические гармоники могут быть представлены в форме (24).

В силу геометрических соображений сферические гармоники в (26) называют *зональными*, если $m=0$, секториальными, если $m=n$, и *тессеральными*, если $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Относительно этого и дальнейших замечаний о результатах Максвелла см Гобсон (1952) и Максвелл (1873, 1892).

Пусть

$$\eta_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

являются единичными векторами, которые, таким образом, определяют точки на единичной сфере. Эти точки мы будем называть *полюсами*. Тогда сферическая гармоника степени n с полюсами η_k определяется равенством

$$S_n(\eta_k) = (-1)^n r^{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (\alpha_k D_1 + \beta_k D_2 + \gamma_k D_3) \right] r^{-1}. \tag{29}$$

Вводя n параметров $t_1, \ldots, t_n$, находим, что это выражение является коэффициентом при $t_1 \ldots t_n$ в разложении функции

$$\frac{1}{n!} T^n \mathrm{P}_n \left[\frac{\sum t_k (\xi, \eta_k)}{T} \right], \tag{30}$$

где

$$T^2 = \sum_{k,\, l=1}^{n} t_k t_l (\eta_k, \eta_l), \qquad \xi = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r} \right), \tag{31}$$

причем сумма в (30) берется по $k = 1, 2, \ldots, n$. Это выражение является функцией от косинусов углов между векторами $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_k$ Стандартные сферические гармоники (26) получаются, если векторы η_k совпадают с координатными осями.

Van der Pol (1936) и Erdélyi (1937) распространили выражение (26) на решения волнового уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$. Они показали, что

$$i^{n-m} \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\, \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} =$$
$$= k^{-m} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^m \mathrm{P}_n^{(m)} \left(\frac{-i}{k} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \frac{\sin kr}{kr}, \tag{32}$$

где $\mathrm{P}_n^{(m)}$ обозначает m-ю производную многочлена Лежандра P_n, а P_n^m определяется формулой (17), $J_{n+\frac{1}{2}}$ обозначает функцию Бесселя первого рода порядка $n + \frac{1}{2}$, а r, θ, φ, x_1, x_2, x_3 связаны соотношениями (27).

11.6. Случай $p = 2$, $h(n, p) = (n+1)^2$

В этом пункте мы будем обозначать через $\mathfrak{y}$ четырехмерный вектор

$$\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \tag{1}$$

и положим

$$\eta = \frac{\mathfrak{y}}{\rho}, \quad \rho = \| \mathfrak{y} \|. \tag{2}$$

Введем векторы

$$\mathfrak{u}=(i-its,\ -it-is,\ -t+s,\ 1+ts), \tag{3}$$

$$\mathfrak{v}=(i-i\tau\sigma,\ -i\tau-i\sigma,\ -\tau+\sigma,\ 1+\tau\sigma), \tag{4}$$

для которых выполняются соотношения

$$(\mathfrak{u},\ \mathfrak{u})=(\mathfrak{v},\ \mathfrak{v})=0,\quad (\mathfrak{u},\ \bar{\mathfrak{v}})=2(1+t\tau)(1+s\sigma) \tag{5}$$

Из соотношений (5) находим, так же как это было сделано в п. 11.5.1, что $(n+1)^2$ многочленов $H_n^{k,l}(\mathfrak{y})$, определяемых равенством

$$(\mathfrak{u},\ \mathfrak{y})^n=\sum_{k,\ l=0}^{n}\binom{n}{k}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})\,t^k s^l, \tag{6}$$

являются гармоническими многочленами степени n.

Те же рассуждения, что и в п. 11.5.2, показывают, что

$$\int_{\Omega}\int_{(\eta)}(\mathfrak{u},\ \eta)^n(\bar{\mathfrak{v}},\ \eta)^n\,d\Omega(\eta)=\frac{2^{1-n}\pi^2}{n+1}(\mathfrak{u},\ \bar{\mathfrak{v}})^n. \tag{7}$$

Таким образом, сферические гармоники

$$S_n^{k,l}(\eta)=\rho^{-n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y}) \tag{8}$$

образуют ортогональное множество, состоящее из $h(n, 2)=(n+1)^2$ линейно независимых сферических гармоник, удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{\Omega}\int S_n^{k,l}(\eta)\,\bar{S}_n^{k',l'}(\eta)\,d\Omega=\begin{cases}0, & k\neq k' \ \text{или}\ l\neq l',\\ \dfrac{2\pi^2}{n+1}\binom{n}{l}\Big/\binom{n}{k}, & k=k',\ l=l'.\end{cases} \tag{9}$$

Из соотношения (6) вытекает также, что

$$\bar{S}_n^{k,l}(\eta)=(-1)^{k+l}S_n^{n-k,\,n-l}(\eta). \tag{10}$$

Для того чтобы найти явное выражение для $S_n^{k,l}$, введем числа a, b, c, d:

$$a=y_4+iy_1,\quad b=y_3-iy_2,\quad c=-y_3-iy_2,\quad d=y_4-iy_1. \tag{11}$$

Тогда

$$\rho=\|\mathfrak{y}\|=\sqrt{ad-bc},\quad (\mathfrak{u},\ \mathfrak{y})=a+bs+(c+ds)t, \tag{12}$$

и мы получаем из (6), что

$$\sum_{l=0}^{n}H_n^{k,l}(\mathfrak{y})\,s^l=(a+bs)^{n-k}(c+ds)^k, \tag{13}$$

$$H_n^{k,l}(\mathfrak{y})=\frac{1}{2\pi i}\int^{(+)}(a+bs)^{n-k}(c+ds)^k s^{-l-1}\,ds. \tag{14}$$

Полагая

$$\sigma = -\frac{s(bc-ad)}{bd}, \tag{15}$$

$$\sigma_0 = \frac{ad}{ad-bc} = \frac{y_1^2+y_4^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2} \tag{16}$$

и выражая a, b, c, d через y_i, получаем

$$H_n^{k,l}(y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\rho^n\left(\frac{d}{\rho}\right)^{k+l-n}\left(\frac{b}{\rho}\right)^{l-k}\int^{(\sigma_0+)}\sigma^{n-k}(1-\sigma)^k\frac{d\sigma}{(\sigma-\sigma_0)^{l+1}}, \tag{17}$$

$$= \frac{(-1)^k}{l!}\rho^n\left(\frac{y_4-iy_1}{\rho}\right)^{k+l-n}\left(\frac{y_3-iy_2}{\rho}\right)^{l-k}\frac{d^l}{d\sigma_0^l}\sigma_0^{n-k}(1-\sigma_0)^k, \tag{18}$$

где σ_0 определяется равенством (16) В полученном равенстве можно выразить l-ю производную через гипергеометрическую функцию (в данном случае являющуюся многочленом Якоби), и окончательный результат принимает следующий вид (см. 2.8 (27), 2 1 (2), (1) и (2)).

Если $n \geqslant k+l$, то

$$S_n^{k,l}(\eta) = \rho^{-n}H_n^{k,l}(y) = (-1)^k\binom{n-k}{l}(\eta_4+i\eta_1)^{n-k-l}(\eta_3+i\eta_2)^{k-l}\times$$
$$\times {}_2F_1(-l,\ n-l+1,\ n-k-l+1;\ \eta_4^2+\eta_1^2), \tag{19}$$

$$= (-1)^k(\eta_4+i\eta_1)^{n-k-l}(\eta_3+i\eta_2)^{k-l}\times$$
$$\times P_l^{(n-k-l,\ k-l)}(\eta_3^2+\eta_2^2-\eta_4^2-\eta_1^2). \tag{20}$$

Если $n < k+l$, то

$$S_n^{k,l}(\eta) = \rho^{-n}H_n^{k,l}(y) = (-1)^{n-l}\binom{k}{n-l}(\eta_4-i\eta_1)^{k+l-n}(\eta_3-i\eta_2)^{l-k}\times$$
$$\times {}_2F_1(l-n,\ l+1;\ l+k-n+1,\ \eta_4^2+\eta_1^2), \tag{21}$$

$$= \rho^{-n}H_n^{k,l}(y) = (-1)^{n-l}(\eta_4-i\eta_1)^{k+l-n}(\eta_3-i\eta_2)^{l-k}\times$$
$$\times P_{n-l}^{(l+k-n,\ l-k)}(\eta_3^2+\eta_2^2-\eta_4^2-\eta_1^2), \tag{22}$$

где $P_m^{(\alpha,\beta)}$ обозначает многочлен Якоби (см. гл. 10)

В полярных координатах выражения (20) (22) для $S_n^{k,l}$ принимают довольно сложный вид, и в этих координатах лучше использовать функции 11.2 (23) для частного случая $p=2$ Но для преобразования сферических гармоник весьма удобны функции $S_n^{k,l}$ (при четных значениях n) эти функции, кроме того, удовлетворяют некоторым соотношениям, не имеющим аналогов в случаях, когда $p \neq 2$. Эти соотношения (которые будут доказаны в п. 11 7) имеют следующий вид (мы записываем их для функций $H_{2n}^{k,l}$ вместо $S_{2n}^{k,l}$).

Пусть $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ — два четырехмерных вектора, и пусть $\mathfrak{w}$ — вектор с координатами

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= y_1z_4 + y_4z_1 - y_2z_3 + y_3z_2, \\ w_2 &= y_2z_4 + y_4z_2 - y_3z_1 + y_1z_3, \\ w_3 &= y_3z_4 + y_4z_3 - y_1z_2 + y_2z_1, \\ w_4 &= y_4z_4 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если использовать кватернионы (см. Курош А. Г., 1965, гл. 4), то вектор можно представить в виде

$$w_4 + iw_2 + jw_3 + kw_1 = (z_4 + iz_2 + jz_3 + kz_1)(y_4 + iy_2 + jy_3 + ky_1), \tag{24}$$

где 1, i, j, k — основные единицы. Тогда имеет место теорема сложения

$$H_{2n}^{k,\,l}(\mathfrak{w}) = \sum_{m=0}^{2n} H_{2n}^{k,\,m}(\mathfrak{z})\, H_{2n}^{m,\,l}(\mathfrak{y}). \tag{25}$$

Определитель матрицы

$$\left[H_{2n}^{k,\,l}(\mathfrak{y})\right], \qquad k,\ l = 0,\ 1, \ldots, 2n, \tag{26}$$

где k — индекс строки, а l — столбца, равен

$$\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right)^{n\,(2n+1)}. \tag{27}$$

Характеристические числа этой матрицы имеют вид

$$\lambda_1^m \lambda_2^{2n-m}, \qquad m = 0,\ 1, \ldots, 2n, \tag{28}$$

где λ_1, λ_2 являются корнями уравнения (см. (4))

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

След этой матрицы равен

$$\sum_{l=0}^{2n} H_{2n}^{l,\,l}(\mathfrak{y}) = \frac{\rho^{2n}}{2n+1}\, T'_{2n+1}\left(\frac{y_4}{\rho}\right), \tag{30}$$

где T'_{2n+1} означает производную многочлена Чебышева 11.1 (20).

11.7. Формула преобразования для сферических гармоник

Пусть $\mathfrak{x}$ — трехмерный вектор, а $\mathfrak{y}$ — четырехмерный вектор. Мы будем применять обозначения

$$\|\mathfrak{x}\|_3 = r, \quad \|\mathfrak{y}\|_4 = \rho, \quad \xi = \frac{\mathfrak{x}}{r}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{\rho}. \tag{1}$$

Покажем, что любое ортогональное преобразование O в трехмерном пространстве векторов $\mathfrak{x}$, определитель которого равен $+1$, можно однозначно описать с помощью единичного вектора η. Если $\det O = +1$, то существует такой вектор $\mathfrak{x}_0 \neq 0$ (ось вращения), что

$$\mathfrak{x}_0 = O\mathfrak{x}_0. \tag{2}$$

Преобразование O однозначно определяется заданием вектора $\mathfrak{x}_0$ и угла вращения ψ. Так как $-\mathfrak{x}_0$ также является осью вращения, то можно выбрать $\mathfrak{x}_0$ так, чтобы выполнялось неравенство $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$. Если ψ равно нулю, то любой вектор $\mathfrak{x}_0$ является осью вращения, и в этом случае мы положим $\mathfrak{x}_0 = 0$. Поскольку вектор $\mathfrak{x}_0$ определен только по направлению, мы можем, не теряя общности, положить, что

$$\|\mathfrak{x}_0\|_3 = \sin\frac{\psi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \pi. \tag{3}$$

Тогда компонентами $x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}$ вектора $\mathfrak{x}_0$ будут

$$x_{0,l} = \cos\alpha_l \sin\frac{\psi}{2}, \quad l = 1, 2, 3,$$

где через α_l обозначен угол между осью вращения и осью x_l.

Определим теперь четырехмерный единичный вектор

$$\eta = \left(\cos\alpha_1 \sin\frac{\psi}{2},\ \cos\alpha_2 \sin\frac{\psi}{2},\ \cos\alpha_3 \sin\frac{\psi}{2},\ \cos\frac{\psi}{2}\right) \tag{4}$$

и положим $\mathfrak{y} = \rho\eta$. Тогда ортогональную матрицу O можно записать в виде

$$O = (y_4 I - A)(y_4 I + A)^{-1} = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 I - 2y_4 A + 2A^2) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\begin{Vmatrix} y_4^2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 & 2y_1y_2 - 2y_3y_4 & 2y_1y_3 + 2y_2y_4 \\ 2y_1y_2 + 2y_3y_4 & y_4^2 + y_2^2 - y_1^2 - y_3^2 & 2y_2y_3 - 2y_1y_4 \\ 2y_1y_3 - 2y_2y_4 & 2y_2y_3 + 2y_1y_4 & y_4^2 + y_3^2 - y_1^2 - y_2^2 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Эти формулы определяют представление Кели ортогональной группы (см. Г. Вейль, 1947, стр. 84 и след.). Представление в виде (6) справедливо во всех случаях, в том числе и тогда, когда определитель матрицы $y_4 I + A$ обращается в нуль.

Используя обозначения (1), (2), (4), (5), 11.5 (18), 11.5 (19), 11.6 (8), мы получаем следующий результат:

Ф о р м у л а   п р е о б р а з о в а н и я   с ф е р и ч е с к и х   г а р м о н и к.

$$S_n^k(O\xi) = \sum_{l=-n}^{n} (-1)^{k+l} \binom{2n}{n+k} \Big/ \binom{2n}{n+l} S_{2n}^{n+k,\, n+l}(\eta)\, S_n^l(\xi). \tag{8}$$

Эта формула показывает действие ортогонального преобразования O в трехмерном пространстве на сферические гармоники и задает коэффициенты линейного преобразования функций S_n^k через сферические гармоники в четырехмерном пространстве. При этом переменными являются параметры Кели преобразования O.

Формула, эквивалентная формуле (8), была доказана в работе: A. Schmidt (1899) (см. также Hoenl, 1934). В неопубликованной заметке Бейтмена показано, что коэффициенты при S_n^l в (8) можно выразить через гипергеометрический ряд. В форме (8) это равенство дано Герглотцем, доказательство которого приведено выше.

Для того чтобы доказать равенство (8), заметим следующее:

I. Гармонические многочлены $H_n^m(\mathfrak{x})$ можно отобразить на произведение степеней переменных w_1, w_2, полагая

$$x_1 = w_1 w_2, \quad x_2 + ix_3 = w_1^2, \quad -x_2 + ix_3 = w_2^2. \tag{9}$$

В самом деле, в силу 11.5 (2) получаем

$$\left(w_1^2 - 2w_1w_2t + w_2^2t^2\right)^n = \sum_{m=-n}^{n} H_n^m(\mathfrak{x})\, t^{n+m} \tag{10}$$

и следовательно,

$$H_n^m(\mathfrak{x}) = (-1)^m \binom{2n}{n+m} w_1^{n-m} w_2^{n+m}. \tag{11}$$

Несмотря на то, что соотношение (9) налагает условия на координаты x_1, x_2, x_3, а именно:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{12}$$

(см. 11.5 (25)), мы видим из равенства (11), что полное множество $H_n^m(\mathfrak{x})$ линейно независимых гармонических многочленов отображается на множество линейно независимых произведений степеней w_1 и w_2.

II. Если определить a, b, c, d равенствами 11.6 (11), то линейное преобразование

$$w_1' = aw_1 + bw_2, \quad w_2' = cw_1 + dw_2 \tag{13}$$

индуцирует линейное преобразование переменных w_1, w_2, w_1^2, w_2^2, определяемое формулами

$$\left.\begin{aligned} w_1'w_2' &= (ad + bc)\, w_1w_2 + acw_1^2 + bdw_2^2, \\ w_1'^2 &= 2abw_1w_2 + a^2w_1^2 + b^2w_2^2, \\ w_2'^2 &= 2cdw_1w_2 + c^2w_1^2 + d^2w_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если положить $w_1'w_2' = x_1'$, $w_1'^2 = x_2' + ix_3'$, $w_2'^2 = -x_2' + ix_3'$ и предположить, что

$$ad - bc = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1,$$

то (14) является линейным преобразованием

$$\mathfrak{x}' = O\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}' = (x_1', x_2', x_3'), \tag{15}$$

где O задается формулой (6). Мы получили, таким образом, представление трехмерной ортогональной группы линейными унитарными преобразованиями в двумерном комплексном пространстве (см. Гельфанд, Минлос и Шапиро, 1958, стр. 14).

III. Подставляя в 11.6(13) выражение 11.6(11) для a, b, c, d и полагая $s=\frac{w_2}{w_1}$, получаем

$$\sum_{l=0}^{2n} H_{2n}^{k,\,l}(\mathfrak{y})\, w_1^{2n-l} w_2^l = (aw_1+bw_2)^{2n-k}(cw_1+dw_2)^k. \tag{16}$$

Если $\|\mathfrak{y}\|=1$, то из (11), (13), (14), (15), (16) и (6) вытекает формула преобразования (8).

Формулы 11.6(25) — 11.6(30) являются следствиями того, что равенство (8) можно рассматривать как представление трехмерной ортогональной группы (относительно используемых здесь понятий см. Гельфанд, Минлос и Шапиро, 1958). В частности, 11.6(30) вытекает из того факта, что характеристические числа ортогональной матрицы O, для которой $O=1$, однозначно определяются углом вращения, то есть числом $\frac{y_4}{\rho}$. Поскольку характеристические числа матрицы U, соответствующей O при представлении ортогональной группы унитарными матрицами, зависят лишь от характеристических чисел самой матрицы O, то след матрицы U (который равен сумме характеристических чисел матрицы U) зависит лишь от $\frac{y_4}{\rho}$. В соответствии с леммой 1 единственной сферической гармоникой, удовлетворяющей этим условиям, является, с точностью до постоянного множителя, правая часть равенства 11.6(30).

Y. Satô (1950) выразил преобразование O в виде произведения трех простых преобразований, доказал равенство (8) для этих преобразований и дал таблицу коэффициентов (8) для $n\leqslant 7$.

11.8. Многочлены Эрмита — Кампе де Ферье

Иной подход к изучению сферических гармоник принадлежит Эрмиту, Дидону и Кампе де Ферье. Далеко развитая и важная теория, построенная этими авторами, весьма полно изложена во второй части книги: Appell и Kampé de Fériet (1926). Мы не будем давать детальное изложение полученных ими результатов и ограничимся кратким указанием на то, что содержится в этой книге, отсылая читателя к самой книге для полного знакомства с теорией.

Обобщая конструкцию Максвелла сферических гармоник в трехмерном пространстве, определим следующие функции, зависящие от $p+2$ компонент вектора $\mathfrak{x}$:

$$w_{m_1,\ldots,m_p}(\mathfrak{x}) = \frac{(-1)^n}{m_1!\ldots m_p!}\,\frac{\partial^n}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}(r^{-p}), \tag{1}$$

где $r=\|\mathfrak{x}\|$ и неотрицательные целые числа $m_1,\ldots,m_p$ удовлетворяют условию

$$m_1+m_2+\ldots+m_p=n. \tag{2}$$

Функция в левой части равенства (1) удовлетворяет уравнению Лапласа. Она является коэффициентом при

$$a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_p^{m_p} \tag{3}$$

в разложении функции

$$\left[(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_p-a_p)^2+x_{p+1}^2+x_{p+2}^2\right]^{-\frac{p}{2}} \tag{4}$$

в степенной ряд по степеням переменных $a_1, \ldots, a_p$.

Тогда

$$V_{m_1, \ldots, m_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = r^{n+p} w_{m_1, \ldots, m_p}(\xi) \tag{5}$$

является сферической гармоникой степени n, которая зависит лишь от первых p компонент вектора $\frac{\xi}{r}$. Производящей функцией для этих гармоник является

$$\left(1-2a_1\xi_1-\ldots-2a_p\xi_p+a_1^2+\ldots+a_p^2\right)^{-\frac{p}{2}} = \sum a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p} V_{m_1, \ldots, m_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p), \tag{6}$$

где сумма распространена на все неотрицательные целые значения $m_1, \ldots, m_p$. Явное выражение, а также выражение через гипергеометрические функции p переменных для функции V были получены Аппелем и Кампе де Ферье. Связь с ультрасферическими многочленами дается формулой

$$\sum a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p} V_{m_1, \ldots, m_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \left(a_1^2+\ldots+a_p^2\right)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{p}{2}}\left(\frac{a_1\xi_1+\ldots+a_p\xi_p}{\sqrt{a_1^2+\ldots+a_p^2}}\right), \tag{7}$$

где сумма берется по всем неотрицательным целым числам $m_1, \ldots, m_p$, удовлетворяющим условию (2). Отсюда могут быть получены рекуррентные формулы.

Введем обозначения

$$V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_q}(\xi_1, \ldots, \xi_q) = V_{m_1, \ldots, m_q, 0, \ldots, 0}(\xi_1, \ldots, \xi_q, \ldots, \xi_{q+s-1}), \tag{8}$$

где $s, q = 1, 2, 3, \ldots$ Можно показать, что в качестве полной системы линейно независимых сферических гармоник степени n можно выбрать функции

$$\left(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_p^2\right)^{\frac{l}{2}} e^{\pm il\varphi} V^{(2l+1)}_{l_1, \ldots, l_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p), \tag{9}$$

где неотрицательные целые числа $l, l_1, \ldots, l_p$ удовлетворяют условию

$$l+l_1+\ldots+l_p=n \tag{10}$$

и

$$e^{i\varphi} = \frac{\xi_{p+1}+i\xi_{p+2}}{\sqrt{1-\xi_1^2-\ldots-\xi_p^2}} = \frac{\xi_{p+1}+i\xi_{p+2}}{\sqrt{\xi_{p+1}^2+\xi_{p+2}^2}}. \tag{11}$$

Однако функции системы (9) не образуют ортогональной системы на единичной сфере, интеграл

$$\int_\Omega\int\left(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_p^2\right) V^{(2l+1)}_{l_1, \ldots, l_p} V^{(2l+1)}_{m_1, \ldots, m_p}\, d\Omega$$

обращается в нуль лишь в случаях, когда либо

$$l_1+\ldots+l_p\neq m_1+\ldots+m_p,$$

либо все разности $l_1-m_1, \ldots, l_p-m_p$ являются нечетными числами. Поэтому было введено второе множество функций U, определяемых с помощью производящей функции

$$\sum a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}U^{(l)}_{m_1,\ldots,m_p}(\xi_1,\ldots,\xi_p)=$$

$$=\left[(a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_p^2)(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_p^2)\right]^{\frac{l}{2}} \qquad (12)$$

Эти функции являются сферическими гармониками в $(p+l+1)$-мерном пространстве. Функции U и V образуют *биортогональную систему*, так что имеет место равенство

$$\int_{\Omega}\int(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_p^2)^{(l-1)/2}V^{(l)}_{l_1,\ldots,l_p}U^{(l)}_{m_1,\ldots,m_p}\,d\Omega=0,$$

за исключением случая когда $m_1=l_1,\ m_2=l_2, \ldots, m_p=l_p$. Таким образом, функции U можно использовать для того, чтобы найти коэффициенты разложения функции на гиперсфере и, в частности, выразить через функции (9) все сферические гармоники данной степени.

Многие другие результаты, касающиеся функций U и V, в частности дифференциальные уравнения в частных производных, выражения через обобщенные гипергеометрические ряды Лауричелла и разложения в ряды функций по функциям U и V, см в книге Appell, Kampé de Fériet (1926). Обобщение функций $V^{(l)}_{m_1,\ldots,m_p}$ на значения l, отличные от натуральных чисел, см. в книге A. Angelescu (1916).

Обобщение сферических гармоник, связанное с операторами, отличными от оператора Лапласа, было изучено в работе: M. Protter (1949).

ГЛАВА 12

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Введение

Пусть R — область в n-мерном евклидовом пространстве и $x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в этом пространстве. Обозначим через $w(x) = w(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательную весовую функцию, определенную в R. Для любых двух функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ положим

$$(f, g) = \int_R \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n)\, w(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (1)$$

и назовем это выражение *скалярным произведением* функций f и g. Оно заведомо определено, если функции f и g определены в R и интеграл (1) существует. Две функции называют *ортогональными* (относительно веса w), если их скалярное произведение равно нулю

Пусть задана весовая функция и любая последовательность линейно независимых функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$, таких, что определены все скалярные произведения (ψ_i, ψ_j) Тогда к этим функциям можно применить описанный в п. 10.1 процесс *ортогонализации* относительно скалярного произведения (1) Этот процесс приводит к ортогональной системе функции, каждая из которых однозначно определена с точностью до *постоянного множителя* Если функции занумерованы несколькими индексами, то процесс ортогонализации должен быть несколько изменен Прежде чем применять его в этом случае, необходимо преобразовать множество функций в обычную последовательность. Каждому возможному упорядочению соответствует ортогональная система, причем, вообще говоря, различные упорядочения приводят к различным ортогональным системам Таким образом, если множество функций занумеровано несколькими индексами, то мы не можем, вообще говоря, однозначно определить ортогональную систему Кроме того, во многих случаях преобразование в обычную последовательность нарушает симметрию существующую в исходной системе функций По этим причинам часто предпочитают для заданной системы линейно независимых функций

$$\left\{\psi_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\right\},$$

занумерованных несколькими индексами, построить две системы

$$\left\{\varphi_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\chi_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\right\},$$

биортогональные друг другу, то есть такие, что интеграл

$$\left(\varphi_{m_1, \ldots, m_n}, \chi_{m'_1, \ldots, m'_n}\right)$$

обращается в нуль, за исключением случая $m_1 = m'_1$, $m_2 = m'_2, \ldots, m_n = m'_n$. Биортогональные системы дают большую свободу выбора, которую можно использовать для сохранения симметрии.

Мы применим эти замечания к *ортогональным многочленам* от нескольких переменных. Для того чтобы ортогонализовать множество *одночленов*

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \quad m_1, m_2, \ldots, m_n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

необходимо *упорядочить* эти одночлены. За исключением случая, когда области и весовые функции имеют весьма частный вид, не существует (единственной) системы ортогональных многочленов, и любая система ортогональных многочленов, получаемая с помощью упорядочения одночленов (2), необходимо несимметрична по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Однако, используя биортогональную систему многочленов, можно обойти эти затруднения.

По-видимому, не существует развернутой общей теории ортогональных многочленов от нескольких переменных. Однако хорошо известны и детально изучены некоторые частные виды биортогональных систем, соответствующие классическим ортогональным многочленам одного переменного. Изложению этой теории посвящена книга: Appell, Kampé de Fériet, содержащая обширную библиографию по исследованиям, проведенным до 1925 года.

В этой главе мы дадим краткий очерк общих свойств ортогональных многочленов двух переменных и изучим несколько детальнее все системы биортогональных многочленов от двух и большего числа переменных, которые соответствуют классическим системам ортогональных многочленов одного переменного или являются их обобщениями. Есть много точек соприкосновения между материалами этой главы и глав 10 и 11.

12.2. Общие свойства ортогональных многочленов от двух переменных

Общие свойства ортогональных многочленов от двух переменных были изучены Джексоном (Jackson, 1937), который рассматривал также ортогональные многочлены от трех и от двух комплексных переменных (Jackson, 1938, 1938a). В этом пункте и в п. 12.3 мы ограничимся случаем двух вещественных переменных. Соответствующие свойства ортогональных многочленов от n переменных легко могут быть сформулированы по аналогии читателем.

Пусть задана область R в x, y-плоскости и неотрицательная весовая функция $w(x, y)$. Если область R ограничена, то будем предполагать, что w интегрируема по области R, а в случае, когда область R не ограничена — что сходятся все интегралы

$$\iint_R w(x, y)\, x^m y^n\, dx\, dy, \quad m, n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Свойства ортогональности, нормированности и т. д. будут пониматься относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_R \int f(x, y)\, g(x, y)\, w(x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Так как f и g являются многочленами, то интеграл (2) всегда существует.

Упорядочим одночлены $x^m y^n$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} x^m y^n \text{ выше, чем } x^k y^l, \text{ если} \\ \text{либо } m+n > k+l, \\ \text{либо } m+n = k+l \text{ и } l > n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Упорядоченная последовательность одночленов имеет вид

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ x^2y,\ \ldots \tag{4}$$

Упорядочение (3) индуцирует частичную упорядоченность многочленов от x и y. Мы будем говорить, что многочлен $q(x, y)$ выше, чем $p(x, y)$, если старший член (с ненулевым коэффициентом) в q выше, чем любой член (с ненулевым коэффициентом) в p.

Следует отметить, что упорядочение (3) выбрано произвольно и несимметрично относительно x и y. Мы будем рассматривать ортогональные многочлены, связанные с упорядочением (3), вообще говоря, иное упорядочение приводит к другим системам ортогональных многочленов.

Применяя процесс ортогонализации, описанный в п. 10.1, к последовательности (4) и к скалярному произведению, определяемому равенством (2), получаем систему ортогональных многочленов. Мы будем записывать ее в виде

$$q_{00},\ q_{10},\ q_{11},\ q_{20},\ q_{21},\ q_{22},\ q_{30},\ q_{31},\ \ldots, \tag{5}$$

так что $q_{nm}(x, y)$ имеет степень n по совокупности переменных x и y и степень m по переменному y, $n = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, \ldots, n$. Свойство ортогональности имеет вид

$$(q_{nm}, q_{kl}) = \delta_{kn}\delta_{lm}, \tag{6}$$

где $\delta_{rs} = 0$, если $r \neq s$, и $\delta_{rs} = 1$, если $r = s$. При этом q_{nm} выше, чем q_{kl}, если либо $n > k$, либо $n = k$ и $m > l$.

Существует $n+1$ многочленов степени n по совокупности переменных x и y, а именно:

$$q_{n0},\ q_{n1},\ \ldots,\ q_{nn}.$$

Любой многочлен степени n, ортогональный ко всем многочленам меньшей степени, является линейной комбинацией $q_{n0}, \ldots, q_{nn}$. Заметим, что такой многочлен не обязательно является ортогональным ко всем многочленам, которые ниже его (разумеется, «ниже» в смысле, определенном в (3)).

Для любой вещественной ортогональной постоянной матрицы (c_{ij}), то есть такой, что

$$\sum_{j=0}^{n} c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik}, \quad i, k = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

многочлены

$$p_{ni}(x, y) = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} q_{nj}(x, y), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{8}$$

попарно ортогональны, нормированы и ортогональны ко всем многочленам меньшей степени (но не обязательно ко всем более низким многочленам). Обратно, любые $n+1$ попарно ортогональных нормированных многочленов, которые ортогональны ко всем многочленам меньшей степени, могут быть представлены в виде (8), где коэффициенты c_{ij} удовлетворяют соотношениям (7). Заметим, что в $p_{nl}(x, y)$ индекс n указывает на степень по совокупности переменных x и y, в то время как индекс l уже не указывает на степень по y.

Предположим, что существует аффинное преобразование

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{9}$$

отображающее область R на себя и оставляющее инвариантной весовую функцию. Тогда для любого n

$$p_{n0}(x', y'), \quad p_{n1}(x', y'), \ldots, p_{nn}(x', y')$$

образуют систему, состоящую из $n+1$ попарно ортогональных и нормированных многочленов, которые ортогональны ко всем многочленам меньшей степени. Таким образом, многочлен $p_{nl}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ может быть получен с помощью вещественного ортогонального преобразования, примененного к многочленам $q_{nl}(x, y)$ и, следовательно, к $p_{nl}(x, y)$. *Любое аффинное преобразование* (9), *оставляющее инвариантным R и w, задает для любого n ортогональное преобразование системы многочленов* $p_{n0}, \ldots, p_{nn}$. Различные системы p_{nl} (для тех же самых R, w, n и α, β, γ, δ) преобразуются подобным образом. Группе аффинных преобразований (9), сохраняющих R и w инвариантными, соответствует для каждого n группа ортогональных преобразований. Дальнейшие детали и ссылки на работу A. Sobczyk имеются в книге: Jackson (1937).

Если R — прямоугольник

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d \tag{10}$$

и $w(x, y) = u(x)v(y)$, то можно положить

$$p_{nl}(x, y) = p_{n-l}(x)\, q_l(y), \quad l = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\{p_n\}$ — система ортогональных многочленов, связанная с весовой функцией u на отрезке (a, b) и, $\{q_n\}$ — система ортогональных многочленов, связанная с весовой функцией v на отрезке (c, d).

12.3. Дальнейшие свойства ортогональных многочленов от двух переменных

Пусть $\{p_{nl}(x, y)\}$ является системой многочленов, ортонормальных относительно весовой функции w и области R и имеющих вид 12.2 (8) Для каждого l $p_{nl}(x, y)$ является многочленом степени n относительно совокупности переменных x и y, и любой многочлен степени n может быть выражен в виде линейной комбинации многочленов $p_{ml}(x, y)$, $0 \leqslant l \leqslant m$, $0 \leqslant m \leqslant n$. Многие из общих свойств ортогональных многочленов одного переменного (см. п. 10.3) имеют аналоги для случая двух переменных, хотя соответствующие формулы становятся менее простыми

В первую очередь докажем существование *рекуррентного соотношения*, позволяющего выразить $(ax + by)\, p_{nl}(x, y)$ в виде линейной комбинации многочленов степеней $n+1$, n и $n-1$ Доказательство аналогично доказательству в 10.3 (7). Для фиксированных n, l произведение

$$(ax + by)\, p_{nl}(x, y)$$

является многочленом степени $n+1$ и, следовательно, имеет вид

$$(ax+by)\,p_{nl}(x, y) = \sum_{m=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m} \gamma_{mj} p_{mj}(x, y), \tag{1}$$

$$\gamma_{mj} = \int_R\int (ax+by)\,p_{nl}(x, y)\,p_{mj}(x, y)\,w(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

Так как $(ax+by)\,p_{mj}(x, y)$ является многочленом степени $m+1$, а p_{nl} ортогонально ко всем многочленам, степень которых меньше степени n, мы получаем, что

$$\gamma_{mj} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-2. \tag{3}$$

Таким образом, в разложение (1) входят лишь члены, соответствующие значениям $m = n-1, n, n+1$.

По-видимому, неизвестно, какими должны быть многочлены p_{nl}, то есть коэффициенты c_{ij} в 12.2 (8), чтобы полученный результат приводил к простому рекуррентному соотношению; неизвестно также, при каких условиях система многочленов, удовлетворяющая рекуррентному соотношению описанного выше вида, является системой ортогональных многочленов, соответствующих неотрицательной весовой функции (см. замечания, следующие за 10.3 (9)).

Как и в случае одного переменного, рекуррентное соотношение можно использовать, чтобы вывести соотношение, соответствующее формуле Кристоффеля — Дарбу. Если p_{nl} имеют вид 12.2 (8), то положим

$$K_n(x, y, u, v) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} p_{kl}(x, y)\,p_{kl}(u, v), \tag{4}$$

$$L_n(x, y, u, v) = K_n(x, y, u, v) - K_{n-1}(x, y, u, v) = \sum_{l=0}^{n} p_{nl}(x, y)\,p_{nl}(u, v), \tag{5}$$

$$M_n(x, y, u, v, r, s) = L_{n+1}(u, v, r, s)\,L_n(x, y, r, s) - L_n(u, v, r, s)\,L_{n+1}(x, y, r, s). \tag{6}$$

Хотя многочлены p_{nl} определены лишь с точностью до ортогонального преобразования, многочлены (4) — (6) однозначно определяются весовой функцией $w(x, y)$ и областью R. «Формула Кристоффеля — Дарбу» имеет вид

$$[(au+bv)-(ax+by)]\,K_n(x, y, u, v) = \int_R\int (ar+bs)\,M_n(x, y, u, v, r, s)\,w(r, s)\,dr\,ds. \tag{7}$$

Доказательство см. в книге: Jackson (1937).

Относительно минимальных свойств ортогональных многочленов двух переменных см. Gröbner (1948).

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

12.4. Многочлены Аппеля

Пусть T — треугольник

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1 \tag{1}$$

и

$$t(x) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} \tag{2}$$

— соответствующая весовая функция Эта весовая функция интегрируема, если имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}\gamma > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma' > 0, \quad \operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}(\gamma + \gamma') - 1. \tag{3}$$

Однако многие из формальных результатов сохраняют силу и без этого ограничения.

Аппель (Appell, 1881) ввел многочлены

$$\mathcal{F}_{mn}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \times$$
$$\times \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}], \tag{4}$$

которые являются аналогами многочленов Якоби (см 10.8 (10)). Здесь, как и далее в этой главе, положено

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{5}$$
$$(\alpha)_\nu = \frac{\Gamma(\alpha + \nu)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Относительно детального изучения этих многочленов и ссылок на литературу см Appell, Kampe de Feriet (1926, гл VI и библиография)

Из равенства (4) видно что $\mathcal{F}_{mn}$ является многочленом степени $m + n$ относительно совокупности переменных x и y Выражение $\mathcal{F}_{mn}$ через гипергеометрический ряд Аппеля F_2 дано в 5 13 (1)

Используя область (1) и весовую функцию (2) в определении скалярного произведения 12 1 (1), получаем что

$$(\gamma)_m (\gamma')_n (P, \mathcal{F}_{mn}) =$$
$$= \int_T \int P(x, y) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1 - x - y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}] \, dx \, dy.$$

Последовательное интегрирование по частям показывает, что $\mathcal{F}_{mn}$ ортогонально ко всем многочленам степень которых меньше $m + n$. В частности,

$$(\mathcal{F}_{mn}, \mathcal{F}_{kl}) = 0, \quad m + n \neq k + l. \tag{6}$$

С другой стороны, путем последовательного интегрирования по частям получаем, что

$$(\mathcal{F}_{mn}, \mathcal{F}_{kl}) = \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n} \mathcal{F}_{kl}}{\partial x^m \partial y^n} \times$$

$$\times \int_T\int x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'} \, dx\, dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n+1-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2m+2n+1)} (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} \mathcal{F}_{kl}}{\partial x^m \partial y^n}, \tag{7}$$

$$m+n=k+l,$$

и так как это выражение, вообще говоря, отлично от нуля, то многочлены $\mathcal{F}_{mn}$ не образуют ортогональной системы По-видимому, неизвестно ни одной ортогональной или биортогональной системы многочленов, связанных с весовой функцией (2)

Из 5 13 (1), 5 11 (8) и 5 9 (10) можно вывести систему дифференциальных уравнений в частных производных одним из решений которой является функция

$$(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} \mathcal{F}_{mn}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y).$$

Используя обозначения

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{8}$$

эту систему можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &x(1-x)r - xys + [\gamma - (2\gamma+\gamma'-\alpha-n+1)x]p - \\ &\quad -(\gamma+m)yq - (\gamma+m)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)z = 0, \\ &y(1-y)t - xys + [\gamma' - (\gamma+2\gamma'-\alpha-m+1)y]q - \\ &\quad -(\gamma'+n)xp - (\gamma'+n)(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $\alpha = \gamma+\gamma'$, то выражение весовой функции (2) упрощается и принимает вид

$$t_0(x) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1}, \qquad \operatorname{Re}\gamma,\ \operatorname{Re}\gamma' > 0 \tag{10}$$

Для этой весовой функции Appell (1882) рассмотрел две системы многочленов:

$$F_{mn}(\gamma, \gamma', x, y) = \mathcal{F}_{mn}(\gamma+\gamma', \gamma, \gamma', x, y) =$$

$$= \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{m+n}] =$$

$$= F_2(-m-n, \gamma+m, \gamma'+n, \gamma, \gamma'; x, y), \tag{11}$$

$$E_{mn}(\gamma, \gamma', x, y) = F_2(\gamma+\gamma'+m+n, -m, -n, \gamma, \gamma'; x, y), \tag{12}$$

где F_2 — ряды, определенные в 5.7 (7). Из 5.9 (10) можно вывести дифференциальные уравнения в частных производных, которым удовлетворяют функции F_{mn} и E_{mn}. Они имеют вид

для F_{mn}:

$$\left.\begin{aligned} &x(1-x)r-xys+[\gamma-(\gamma-n+1)x]p-(\gamma+m)yq+\\ &\qquad\qquad+(m+n)(\gamma+m)z=0,\\ &y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\gamma'-m+1)y]q-(\gamma'+n)xp+\\ &\qquad\qquad+(m+n)(\gamma'+n)z=0,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

для E_{mn}:

$$\left.\begin{aligned} &x(1-x)r-xys+[\gamma-(\gamma+\gamma'+n+1)x]p+\\ &\qquad\qquad+myq+m(\gamma+\gamma'+m+n)z=0,\\ &y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\gamma+\gamma'+m+1)y]q+\\ &\qquad\qquad+nxp+n(\gamma+\gamma'+m+n)z=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Складывая каждую из этих пар уравнений, видим, что как F_{mn}, так и E_{mn} удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} &x(1-x)r-2xys+y(1-y)t+[\gamma-(\gamma+\gamma'+1)x]p+\\ &\qquad+[\gamma'-(\gamma+\gamma'+1)y]q+(m+n)(\gamma+\gamma'+m+n)z=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Это дифференциальное уравнение можно использовать для того, чтобы доказать, что интеграл

$$\iint\limits_T x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)\,E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy \tag{16}$$

обращается в нуль, за исключением случая, когда $m=k$ и $n=l$. Это показывает, что две системы многочленов (11) и (12) образуют *биортогональную систему* в области (1) относительно весовой функции (10).

Формула

$$\begin{aligned} &\iint\limits_T x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)\,E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y)\,dx\,dy=\\ &\qquad=\frac{\delta_{mk}\,\delta_{nl}}{\gamma+\gamma'+2m+2n}\,\frac{m!\,n!\,(m+n)!\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma')}{(\gamma)_m(\gamma')_n\,\Gamma(\gamma+\gamma'+m+n)} \end{aligned} \tag{17}$$

доказана в книге: Appell, Kampé de Fériet (1926, стр. 110, 111). Ее можно использовать, чтобы вычислить коэффициенты в разложении любой функции в ряд по системе F_{mn} или в ряд по системе E_{mn}. Двумя примерами таких разложений являются

$$F_{mn}(\gamma,\gamma',x,y)=\sum_{k+l=m+n}\frac{(k+l)!\,(\gamma+m)_k(\gamma'+n)_l}{k!\,l!\,(\gamma+\gamma'+k+l)_{k+l}}E_{kl}(\gamma,\gamma',x,y), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &(1-x-y)^{\lambda-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}(\gamma+\gamma'+2m+2n)\times\\ &\qquad\times\frac{(1-\lambda)_{m+n}(\gamma)_m(\gamma')_n\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\gamma+\gamma'+m+n)}{m!\,n!\,(m+n)!\,\Gamma(\gamma+\gamma'+\lambda+m+n)}E_{mn}(\gamma,\gamma',x,y) \end{aligned} \tag{19}$$

(Appell, Kampé de Fériet, 1926, стр 112, 113) В формуле (18) суммирование распространено на все неотрицательные целые k и l, для которых $k+l=m+n$.

Относительно случая $\gamma=\gamma'=1$, $\alpha=2$, когда весовая функция постоянна, см. Gröbner (1948, п. 5).

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НА КРУГЕ И ШАРЕ

12.5. Многочлены V

В этом и следующих пунктах мы будем использовать обозначения, аналогичные обозначениям гл. 11. Через

$$\mathfrak{x}=(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

будем обозначать вектор с (вещественными) компонентами $x_1, \ldots, x_n$ в n-мерном (вещественном) пространстве и через

$$\|\mathfrak{x}\|=r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} \tag{2}$$

— длину этого вектора. Двум векторам

$$\mathfrak{a}=(a_1, \ldots, a_n), \qquad \mathfrak{x}=(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

сопоставим скалярное произведение

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})=a_1x_1+\ldots+a_nx_n \tag{4}$$

и угол θ, где

$$\cos\theta=\frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{\|\mathfrak{a}\|\,\|\mathfrak{x}\|}.$$

(Скалярное произведение (4) двух векторов следует отличать от скалярного произведения двух функций встречающегося в 12.4 (17), 12.6 (4) и аналогичных соотношениях.) Через S мы будем обозначать единичный шар $\|\mathfrak{x}\|<1$ в нашем пространстве, а через dx — элемент объема Таким образом,

$$\int\limits_S f(\mathfrak{x})\,dx$$

является сокращенным обозначением для

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2<1}\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Будем рассматривать ортогональные многочлены в области S относительно весовой функции

$$\left(1-r^2\right)^{(s-1)/2}=\left(1-x_1^2-\ldots-x_n^2\right)^{(s-1)/2}. \tag{5}$$

При $n=2$ область является кругом на плоскости, при $n=3$ — шаром в трехмерном пространстве и при $n>3$ — гипершаром

Многочлены

$$V_m^s(\mathfrak{x})=V_{m_1, m_2, \ldots, m_n}^s\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{6}$$

определяются с помощью *производящей функции*

$$[1-2(\mathfrak{a},\mathfrak{x})+\|\mathfrak{a}\|^2]^{-(n+s-1)/2}=\sum a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}V^s_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n). \tag{7}$$

В этой сумме, как и в аналогичных суммах, суммирование ведется по всем неотрицательным целым значениям $m_1, \dots, m_n$ Очевидно, что $V^s_m(\mathfrak{x})$ является многочленом степени m_k от x_k, причем этот многочлен четный или нечетный по x_k в зависимости от того, четно или нечетно m_k; при этом

$$m=m_1+\dots+m_n \tag{8}$$

является *степенью* многочлена $V^s_m(x)$.

При $n=1$ сравнение с формулой (7) и 10.9 (29) показывает, что

$$V^s_m(x)=C_m^{\frac{s}{2}}(x),\quad n=1. \tag{9}$$

При $n=2$ и $s=0$, 2 многочлены (6) были введены Эрмитом (Hermit, 1865, 1865a), а при любом n — Дидоном (Didon, 1868). Эти многочлены и связанные с ними вопросы весьма детально изучены во второй части книги: Appell Kampé de Fériet (1926), где содержится также подробная библиография. Дополнительные ссылки даны в библиографии к этой главе, см. Angelescu, Appell, Brinkman и Zernike Caccioppoli Chen, Dinghas, Erdélyi, Koschmieder, Орлов, Schmeidler.

Разлагая производящую функцию (7) по степеням $a_1, \dots, a_m$, получаем явное выражение

$$V^s_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{n+s-1}{2}\right)_m\frac{2^m x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}}{m_1!\dots m_n!}\times$$
$$\times F_B\left(-\frac{m_1}{2},\dots,-\frac{m_n}{2},\frac{1-m_1}{2},\dots,\frac{1-m_n}{2},-m-\frac{n+s-3}{2};\frac{1}{x_1^2},\dots,\frac{1}{x_n^2}\right), \tag{10}$$

где

$$F_B(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n,\gamma;z_1,\dots,z_n)=$$
$$=\sum\frac{(\alpha_1)_{m_1}\dots(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}\dots(\beta_n)_{m_n}}{m_1!\dots m_n!(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n} \tag{11}$$

является одним из гипергеометрических рядов Лауричеллы от n переменных (Appell, Kampé de Fériet, 1926, гл. VII). Существуют также представления V^s_m через гипергеометрические ряды по возрастающим степеням x_k (иногда по убывающим степеням). Эти представления имеют различный вид в зависимости от четности m_k (см также 10.9 (21) и 10.9 (22)).

Если положить в (7) $a_k=tb_k$ и сравнить коэффициенты при t^m в обеих частях, то получим соотношение

$$\|\mathfrak{b}\|^m C_m^{\frac{n+s-1}{2}}\left[\frac{(\mathfrak{b},\mathfrak{x})}{\|\mathfrak{b}\|}\right]=\sum_{m_1+\dots+m_n=m}b_1^{m_1}\dots b_n^{m_n}V^s_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n) \tag{12}$$

С помощью явной формулы можно проверить, что многочлен, определяемый равенством (10), удовлетворяет следующей гипергеометрической системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j}-x_j\left[(m+n+s-1)V+\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\right\}+$$
$$+(m_j+1)\left[(m+n+s-1)V+\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right]=0,\qquad j=1,\ldots,n, \tag{13}$$

где m — степень, определяемая формулой (8) Складывая эти n уравнений, мы видим, что все многочлены степени m удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$(m+n)(m+s-1)V+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j}-x_j\left[(s-1)V+\sum_{k=1}^{n}x_k\frac{\partial V}{\partial x_k}\right]\right\}=0. \tag{14}$$

Существует замечательное символическое представление наших многочленов

$$V_m^s(\mathfrak{x})=\frac{2^m\left(\frac{n+s-1}{2}\right)_m}{m_1!\ldots m_n!}\,{}_0F_1\left(\frac{-n-s+3}{2}+m\quad\frac{\Delta^2}{4}\right)\left(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\right), \tag{15}$$

где ${}_0F_1$ — обобщенный гипергеометрический ряд (см. 4.1 (1)) и

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{16}$$

— оператор Лапласа. Это представление можно вывести с помощью связи между многочленами V_m^s и гиперсферическими гармониками (см. п. 11.8). Эту же связь можно использовать для того, чтобы доказать, что интеграл

$$\int\limits_S (1-r^2)^{\frac{(s-1)}{2}}\,V_m^s(\mathfrak{x})\,V_{m'}^s(\mathfrak{x})\,dx \tag{17}$$

обращается в нуль, если $m\neq m'$, а также если $m=m'$ и некоторые из разностей m_i-m_i' являются нечетными числами Так как этот интеграл не обращается в нуль, если $m=m'$ и все разности m_i-m_i' четные, то функции V_m^s не образуют ортогональной системы многочленов

Формула, соответствующая формуле Родрига (равенство 10.9 (11)), имеет вид

$$m_1!\ \ldots m_n!\,(1-r^2)^{\frac{m+n+s-1}{2}}\,V^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial y_1^{m_1}\ldots\partial y_n^{m_n}}(1-r^2)^{\frac{n+s-1}{2}}, \tag{18}$$

где в правой части

$$y_l = \frac{x_l}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad l = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

являются независимыми переменными и

$$1 - r^2 = (1 + \| \mathfrak{y} \|^2)^{-1}. \tag{20}$$

Эта формула может быть выведена из производящей функции (7) путем подстановки (19) и замены a_l на $a_l \sqrt{1-r^2}$.

Производящая функция лежит также в основе вывода соотношения

$$\sqrt{\pi^n}\, m_1! \ldots m_n!\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) V_m^s(\mathfrak{z}) = i^m (n+s-1)_m \Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right) \times$$

$$\times \int\limits_S x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} (1-r^2)^{\frac{s}{2}-1} [\|\mathfrak{z}\| + i(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})]^{-m-n-s+1}\, dx. \tag{21}$$

Относительно других интегралов см. Dinghas (1950).

Рекуррентные соотношения, формулы дифференцирования и аналогичные соотношения также вытекают из производящей функции; они собраны в книге: Appell, Kampé de Fériet (1926, п. LXXVI).

12.6. Многочлены U

Вторая система многочленов

$$U_m^s(\mathfrak{x}) = U_{m_1, \ldots, m_n}^s (x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

определяется с помощью производящей функции

$$\{[(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) - 1]^2 + \|\mathfrak{a}\|^2 (1 - \|\mathfrak{x}\|^2)\}^{-\frac{s}{2}} = \sum a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} U_{m_1, \ldots, m_n}^s (x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

При $n = 1$ мы имеем

$$U_m^s(x) = C_m^{\frac{s}{2}}(x), \quad n = 1. \tag{3}$$

При $n = 2$, $s = 1$, 2 эти многочлены были введены Эрмитом; для произвольного n см. литературу, указанную в п. 12.5.

Наиболее важным свойством этих многочленов является то, что они образуют систему, *биортогональную* к системе V_n^s. Интеграл

$$\int\limits_S (1-r^2)^{(s-1)/2}\, V_m^s(\mathfrak{x})\, U_l^s(\mathfrak{x})\, dx \tag{4}$$

обращается в нуль, за исключением случая, когда $m_1 = l_1, \ldots, m_n = l_n$ и

$$\int\limits_S (1-r^2)^{(s-1)/2}\, V_m^s(\mathfrak{x})\, U_m^s(\mathfrak{x})\, dx = h_m^s =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}}{2m+n+s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma[(n+s-1)/2]} \frac{(s)_m}{m_1! \ldots m_n!}. \tag{5}$$

Это свойство биортогональности может быть доказано путем использования производящей функции (см. соответствующее доказательство для многочленов Эрмита в п. 12.9). Обратно, Кампе де Ферье (Kampé de Fériet, 1915) постулировал биортогональное свойство и вывел отсюда производящую функцию.

Теория многочленов U напоминает теорию многочленов V, и мы ограничимся лишь перечислением относящихся сюда формул.

Явное выражение

$$U^s_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(s)_m\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} \times$$
$$\times F_B\left(-\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, 1-\frac{m_1}{2}, \ldots, 1-\frac{m_n}{2}, \frac{s+1}{2}; -\frac{1-r^2}{x_1^2}, \ldots, -\frac{1-r^2}{x_n^2}\right), \tag{6}$$

с соответствующими рядами по возрастающим степеням $x_1, \ldots, x_n$.

$$[(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})^2 + \|\mathfrak{b}\|^2 (1-r^2)]^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{s}{2}}\left(\frac{(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{b}, \mathfrak{x})^2 + \|\mathfrak{b}\|^2 (1-r^2)}}\right) =$$
$$= \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n} U^s_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n). \tag{7}$$

Многочлены U^s_m удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$(1-r^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U}{\partial x_j} + x_j\left(mU - \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right)\right] +$$
$$+ m_j(1-r^2)\left(mU - \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) -$$
$$-(s-1)\left[x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + x_j^2\left(mU - \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right) - m_j U\right] = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Все многочлены степени m удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$(m+n)(m+s-1)U + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j\left[(s-1)U + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\right]\right\} = 0, \tag{9}$$

которое получается путем сложения n уравнений (8) и идентично соответствующему уравнению 12.5 (14) для V^s_n.

Символическое представление может быть записано в виде

$$U^s_m(\mathfrak{x}) = \frac{(s)_m}{m_1! \ldots m_n!}\, {}_0F_1\left[\frac{s+1}{2}; -\frac{1}{4}(1-r^2)\Delta^2\right]\left(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}\right), \tag{10}$$

где k-я степень $(1-r^2)\Delta^2$ понимается как $(1-r^2)^k\Delta^{2k}$. Существует также соотношение, соответствующее равенству 12.5 (17), но оно менее важно.

Аналог формулы Родрига в этом случае проще, чем в случае многочленов V_m^s.

$$2^m\left(\frac{s+1}{2}\right)_m m_1!\ldots m_n!(1-r^2)^{\frac{s-1}{2}} U^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=(-1)^m(s)_m\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}(1-r^2)^{m+(s-1)/2}. \quad (11)$$

Кошмидер (Koschmieder, 1925) получил выражение для U_m^s через частные производные по x_l^2.

Интегральное представление, соответствующее 12.5 (21), имеет вид

$$\sqrt{\pi^n}\,m_1!\ldots m_n!\,\Gamma\left(\frac{s-n+1}{2}\right)U_m^s(\mathfrak{z})=(s)_m\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\int\limits_S(1-r^2)^{\frac{s-n-1}{2}}\times$$
$$\times\left[z_1+ix_1\sqrt{1-\|\mathfrak{z}\|^2}\right]^{m_1}\ldots\left[z_n+ix_n\sqrt{1-\|\mathfrak{z}\|^2}\right]^{m_n}dx. \quad (12)$$

Две системы многочленов U_m^s и V_m^s связаны друг с другом. Эта связь может быть выражена в следующих двух эквивалентных формулах:

$$(2-2m-n-s)_m(r^2-1)^{\frac{m}{2}}V_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{r^2-1}}\right)=2^m\left(\frac{n+s-1}{2}\right)_m U_m^{2-2m-n-s}(\mathfrak{x}), \quad (13)$$

$$2^m\left(-m-\frac{s-1}{2}\right)_m(r^2-1)^{\frac{m}{2}}U_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{r^2-1}}\right)=(s)_m V_m^{2-2m-n-s}(\mathfrak{x}). \quad (14)$$

Свойство биортогональности было установлено в (4) и (5). Из соотношения биортогональности вытекает также следующая связь между рассматриваемыми функциями. Определим функции $R_m^s(\mathfrak{x})$ формулой

$$R_m^s(\mathfrak{x})=(1-r^2)^{\frac{s-1}{2}}U_m^s(\mathfrak{x}).$$

Эти функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial R}{\partial x_j}+x_j\left[(m+s-1)R-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right]\right\}+$$
$$+m_j\left[(m+s-1)R-\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial R}{\partial x_k}\right]=0,\qquad j=1,2,\ldots,n, \quad (15)$$

которая может быть выведена из (8). Легко видеть, что эта система *сопряжена* с системой 12.5 (13) дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяют функции $V_m^s(\mathfrak{x})$.

12.7. Проблема разложения и дальнейшие исследования

Свойство биортогональности систем U и V делает вероятным предположение, что произвольную функцию $f(\mathfrak{x})$ можно разложить как в ряд вида

$$\sum a_m^s U_m^s(\mathfrak{x}), \tag{1}$$

так и в ряд вида

$$\sum b_m^s V_m^s(\mathfrak{x}). \tag{2}$$

Из 12.6 (4) и (5) получаем выражение для коэффициентов этих разложений:

$$h_m^s a_m^s = \int\limits_S (1-r^2)^{\frac{s-1}{2}} f(\mathfrak{x}) V_m^s(\mathfrak{x})\, dx, \tag{3}$$

$$h_m^s b_m^s = \int\limits_S (1-r^2)^{\frac{s-1}{2}} f(\mathfrak{x}) U_m^s(\mathfrak{x})\, dx. \tag{4}$$

Общие исследования этих разложений содержатся в книге: Appell: Kampé de Fériet (1926, ч. II, гл. V) Более точные результаты были получены позднейшими авторами

При изучении проблемы разложения обычно предполагают, что в формулах (1) и (2) s является положительным целым числом. Кошмидер называет ряды (1) и (2) рядами Аппеля, если $s \geqslant 2$, рядами Дидона, если $s=1$. Он показал, что ряд Аппеля для n переменных можно свести к ряду Дидона от $n+s-1$ переменных. Кроме того, кратные ряды (1) и (2) сводят к обычным рядам, группируя все члены одинаковой степени. Таким образом, ряд (1) интерпретируют как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} a^s_{m_1,\ldots,m_n} U^s_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) \right]; \tag{5}$$

аналогичную интерпретацию допускает ряд (2). Ряды с переставленными членами можно связать с разложением Лапласа функций на единичной гиперсфере в пространстве $n+s+1$ измерений; эта связь часто используется.

Сходимость рядов (1) и (2), расположенных, как указано выше, была изучена при $n=2$, $s=1$ в работах: Caccioppoli (1932) и Koschmieder (1933). Каччиополи суммировал ряды и изучал их сходимость с помощью сингулярного интеграла. Он доказал сходимость для функций, имеющих непрерывные производные. Кошмидер использовал теорию интегральных уравнений и доказал абсолютную сходимость для функций, обладающих непрерывными вторыми производными.

Случай произвольного n и (натурального) s изучил Koschmieder (1934). Используя интерпретацию (5) ряда (1) и соответствующую интерпретацию ряда (2), Кошмидер показал, что эти ряды являются равносходящимися с некоторыми разложениями по многочленам Гегенбауэра. Koschmieder (1934a) также получил теорему равносходимости разложения Лапласа с рядом Фурье как рядом сравнения.

Суммируемость по Чезаро рядов Лапласа была изучена Ченом (Chen, 1928) и Кошмидером (Koschmieder, 1929). Результаты были применены к рядам Аппеля в работе: Koschmieder (1931).

Если выполняется условие

$$\delta \geqslant n+s-1, \tag{6}$$

а функция $f(\mathfrak{x})$ интегрируема в S, то ее ряд Аппеля (C, δ)-суммируется в $f(\mathfrak{x})$ почти всюду в S и во всяком случае в точках Лебега функции f в S. Если выполняется условие

$$\frac{n+s-1}{2} < \delta < n+s-1, \tag{7}$$

то ряд Аппеля (C, δ)-суммируем во всех точках $\mathfrak{y}$ таких, что

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|^{-\frac{n+s-1}{2}} |f(\mathfrak{x})|$$

является интегрируемой функцией от $\mathfrak{x}$ в S.

Следующие примеры разложения взяты из книги: Appell, Kampé de Fériet (1926, п. LXXXVIII и XCI).

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})^k = \sum \frac{(-1)^m (-k)_m \left(\frac{1}{2}\right)_{(k-m)/2}}{\left(\frac{n+s+1}{2}\right)_{(k+m)/2}} a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \|\mathfrak{a}\|^{k-m} V_m^s(\mathfrak{x}), \tag{8}$$

где k — натуральное число и суммирование ведется по всем значениям $m_1, \ldots, m_n$ таким, что $k-m$ является положительным четным числом;

$$\exp[i(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})] = 2^{\frac{n+s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) \times$$

$$\times \sum i^m \left(m+\frac{n+s-1}{2}\right) a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \|\mathfrak{a}\|^{-m-\frac{n+s-1}{2}} J_{m+\frac{n+s-1}{2}}(\|\mathfrak{a}\|) V_m^s(\mathfrak{x}), \tag{9}$$

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \exp(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) J_{(s-1)/2}[\|\mathfrak{a}\|(1-r^2)] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\|\mathfrak{a}\|(1-r^2)\right]^{(s-1)/2} \sum \frac{1}{(s)_m} a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} U_m^s(\mathfrak{x}). \tag{10}$$

В последних двух разложениях суммирование производится по всем неотрицательным целым $m_1, \ldots, m_n$.

Случай $n=2$ был детально изучен (см. Appell, Kampé de Fériet, 1926, ч. II, гл VII и работы, упомянутые в п. 12 5—12.7 этой главы). Другой подход к ортогональным многочленам в шаровых областях был использован в работах: Brinkman, Zernike (1935) и Gröbner (1948) Многочлены, связанные с дифференциальным уравнением в частных производных $\Delta^q F = 0$ в шаровой области, были изучены Ciulotto (1939), который получил для этого случая биортогональную систему Devisme (1932) ввел многочлены, определяемые с помощью производящих функций

$$(1-3ax+3a^2y-a^3)^{-\nu}, \quad [1-3ax+3(a^2-b)y-a^3]^{-\nu}, \tag{11}$$

и использовав их для изучения дифференциального уравнения в частных производных

$$\Delta_3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0. \tag{12}$$

Многочлены U_m^s, V_m^s можно обобщить, использовав фиксированную квадратичную форму $\varphi(\mathfrak{x})$, взаимную форму $\psi(\mathfrak{x})$ и билинейную форму $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ (см. 12.8 (6)—(8)). В этом случае производящая функция имеет вид

$$\{[\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) - 1]^2 + \varphi(\mathfrak{a})\,[1 - \varphi(\mathfrak{x})]\}^{-\frac{s}{2}} = \sum a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \mathcal{U}_m^s(\mathfrak{x}), \tag{13}$$

$$[1 - 2(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) + \psi(\mathfrak{a})]^{-\frac{n+s-1}{2}} = \sum a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \mathcal{V}_m^s(\mathfrak{x}). \tag{14}$$

Эти многочлены были введены Эрмитом и изучены в работе: Angelescu (1916). Если $\varphi(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{x})$, то многочлены, определяемые равенствами (13) и (14), совпадают соответственно с U_m^s и V_m^s

МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.8. Определение многочленов Эрмита

Как и в предыдущих пунктах,

$$\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

означает (вещественный) вектор,

$$\|\mathfrak{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{2}$$

длину вектора $\mathfrak{x}$ и

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \tag{3}$$

скалярное произведение двух таких векторов. Через C мы будем обозначать фиксированную положительно определенную симметричную квадратную матрицу с вещественными элементами, то есть

$$C = [c_{ij}], \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$c_{ij} = c_{ji} \text{ — вещественные}, \qquad \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j > 0, \qquad \mathfrak{x} \neq 0.$$

Обратная матрица будет обозначаться через C^{-1}. Ее элементами являются $\frac{\gamma_{ij}}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det c_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

определитель матрицы C и γ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента c_{ji} в Δ. С матрицей C связана положительно определенная квадратичная форма

$$\varphi(\mathfrak{x}) = (C\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, C\mathfrak{x}) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

и симметричная билинейная форма

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (C\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, C\mathfrak{y}) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij}x_i y_j. \tag{7}$$

Мы имеем также взаимную форму

$$\psi(\mathfrak{x}) = \varphi(C^{-1}\mathfrak{x}) = (C^{-1}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, C^{-1}\mathfrak{x}), \tag{8}$$

которая также является положительно определенной квадратичной формой, и взаимную симметричную билинейную форму

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (C^{-1}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, C^{-1}\mathfrak{y}). \tag{9}$$

Эти формы связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) &= \varphi(\mathfrak{x}) + 2\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \varphi(\mathfrak{y}), \\ \psi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) &= \psi(\mathfrak{x}) + 2\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \psi(\mathfrak{y}), \\ \varphi(\mathfrak{x}) = \psi(C\mathfrak{x}), &\quad \psi(\mathfrak{x}) = \varphi(C^{-1}\mathfrak{x}), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\varphi(\mathfrak{x} + C^{-1}\mathfrak{y}) = \varphi(\mathfrak{x}) + 2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \psi(\mathfrak{y}), \tag{11}$$

$$\psi(\mathfrak{x} + C\mathfrak{y}) = \psi(\mathfrak{x}) + 2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \varphi(\mathfrak{y}). \tag{12}$$

Наконец, упомянем интегральную формулу

$$\int \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{x})\right] dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\psi(\mathfrak{a})}{2}\right], \tag{13}$$

где интегрирование ведется по всему пространству, dx означает $dx_1 \ldots dx_n$ и $\mathfrak{a}$ — постоянный вектор. Эта формула может быть доказана путем применения формулы (11) и преобразования квадратичной формы $\varphi(\mathfrak{x} + C^{-1}\mathfrak{a})$ в сумму квадратов.

Введенные здесь обозначения будут использованы на всем протяжении этого и последующих пунктов.

Многочлены Эрмита от многих переменных являются биортогональной системой многочленов, связанной с весовой функцией

$$w(\mathfrak{x}) = \Delta^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\varphi(\mathfrak{x})}{2}\right], \tag{14}$$

причем областью определения является все n-мерное пространство. Из равенства (13) вытекает соотношение

$$\int w(\mathfrak{x})\, dx = 1. \tag{15}$$

Эти многочлены являются, очевидно, n-мерным обобщением ортогональных многочленов, определенных равенством 10.13(1). Они были введены Эрмитом (Hermite, 1864) и изучены далее многими авторами. Аппель и Кампе де Ферье (Appell, Kampé de Fériet, 1926, ч. III) дают детальное изложение этой теории вплоть до 1926 года и библиографию. Дополнительные ссылки указаны в библиографии, см. работы: Caccioppoli, Erdélyi, Feldheim, Grad, Koschmieder, Mazza, Picone, Thijssen и Tortrat. Обобщение на бесконечномерное пространство дали Cameron и Martin (1947) и Friedrichs (1951, см., в частности, стр. 212 и след.).

Определим две системы многочленов

$$\left.\begin{aligned} G_m(\mathfrak{x}) &= G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n), \\ H_m(\mathfrak{x}) &= H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

с помощью *производящих функций*

$$\exp\left[(C\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{a})\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\right] = \sum \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_m(\mathfrak{x}), \tag{17}$$

$$\exp\left[(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{a})\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x} - C^{-1}\mathfrak{a})\right] = \sum \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} G_m(\mathfrak{x}); \tag{18}$$

эти производящие функции являются многомерным обобщением производящей функции 10.13 (19). Во всех суммах $m_1, \ldots, m_n$ пробегают все неотрицательные целые числа, за исключением случая, когда явно указана другая область суммирования. Многочлены, определяемые равенствами (17) и (18), имеют степень m_i по переменному x_i, и их (полная) *степень* равна

$$m = m_1 + \ldots + m_n. \tag{19}$$

Мы следовали в этих определениях книге: Appell, Kampé de Fériet (1926, п. CXVIII). При $n = 1$ и $c_{11} = 2$ мы получаем многочлены Эрмита, определенные в п. 10.13.

Если вычислить коэффициенты при $a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$ в производящих функциях (17) и (18) с помощью теоремы Тейлора, то получим формулы

$$H_m(\mathfrak{x}) = (-1)^m \exp\left[\frac{1}{2}\varphi(x)\right] \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x})\right], \tag{20}$$

$$G_m(C^{-1}\mathfrak{x}) = (-1)^m \exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x})\right] \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x})\right], \tag{21}$$

соответствующие 10.13 (7). Кошмидер (Koschmieder, 1925) дал другое выражение для некоторых многочленов Эрмита от двух переменных в терминах частных производных. Либо (17) и (18), либо (20) и (21) можно рассматривать как определение многочленов Эрмита от многих переменных

Другие обозначения в случае квадратичных форм частного вида были использованы Градом (H. Grad, 1949).

12.9. Основные свойства многочленов Эрмита

Наиболее важным свойством многочленов Эрмита является *свойство биортогональности*

$$\int w(\mathfrak{x})\, G_l(\mathfrak{x})\, H_m(\mathfrak{x})\, dx = \delta_{l_1 m_1} \ldots \delta_{l_n m_n} m_1! \ldots m_n!, \tag{1}$$

где $w(\mathfrak{x})$ — определенная формулой 12.8 (14) весовая функция, δ_{pq} определено в п. 12.2 и

$$l = l_1 + \ldots + l_n.$$

Для того чтобы доказать свойство биортогональности, заметим, что в силу 12.8 (14), (17), (18) интеграл в левой части равенства (1) является коэффициентом при

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \cdots \frac{a_n^{l_n}}{l_n!} \frac{b_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{b_n^{m_n}}{m_n!} \tag{2}$$

в выражении

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \int \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{a}) + (C\mathfrak{b}, \mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{b})\right] dx. \tag{3}$$

В силу 12.8 (13) выражение (3) равно

$$\exp\left[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{a} + C\mathfrak{b}) - \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{a}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{b})\right], \tag{4}$$

и в силу 12.8 (12) это выражение имеет вид

$$\exp[(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})] = \sum \frac{(a_1 b_1)^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{(a_n b_n)^{m_n}}{m_n!}. \tag{5}$$

Коэффициент при (2) в ряду (5) и дает правую часть равенства (1).

Билинейная производящая функция, соответствующая формуле Мелера 10.13 (22), может быть получена аналогичным образом. Для этого нужно вычислить двумя различными способами интеграл

$$(\pi^n t_1 \ldots t_n)^{-1} \int \int \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} (u_j^2 + v_j^2)/t_j + \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{u} - i\mathfrak{v}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{y}) - \frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{y} - \mathfrak{u} + i\mathfrak{v})\right] du\, dv, \tag{6}$$

при достаточно малых положительных значениях $t_1, \ldots, t_n$, а именно, в первый раз используя 12.8 (13), а во второй — используя 12.8 (17) и 12.8 (18) и непосредственно интегрируя. Полагая

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\mathfrak{x}) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{t_j} + \varphi(\mathfrak{x}), \\ \varphi_2(\mathfrak{x}) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{t_j} - \varphi(\mathfrak{x}), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

заметим, что при достаточно малых положительных $t_1, \ldots, t_n$ квадратичные формы $\varphi_k(\mathfrak{x})$, $k = 1, 2$, положительно определены. Обозначим определитель формы φ_k через Δ_k и взаимную квадратичную форму через $\psi_k(\mathfrak{x})$. Мы получим тогда, что

$$\sum \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{t_n^{m_n}}{m_n!} H_m(\mathfrak{x}) H_m(\mathfrak{y}) =$$
$$= (t_1 \ldots t_n)^{-1} (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{4} \psi_1(C\mathfrak{x} + C\mathfrak{y}) - \frac{1}{4} \psi_2(C\mathfrak{x} - C\mathfrak{y})\right]. \qquad (8)$$

В этой форме результат был получен Эрдейи (Erdélyi, 1938a) вместе с соответствующим результатом относительно производящей функции для $H_m(\mathfrak{x}) G_m(\mathfrak{y})$. Таким образом, был обобщен результат, содержащийся в работе: Koschmieder (1938, 1938a), в которой дана явная формула при $n=2$. Билинейная производящая функция изучалась также в работах: Tortrat (1948, 1948a).

Система дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяют функции $H_m(\mathfrak{x})$, также может быть выведена из производящей функции. Функция в левой части равенства 12.8 (17) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \Delta a_i \frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ — определитель матрицы c_{ij} и γ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента c_{ji} в Δ. Разлагая по степеням a_i, мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных для $H_m(\mathfrak{x})$:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k \frac{\partial H}{\partial x_j}\right] - m_i \Delta H = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial H}{\partial x_k} - m \Delta H = 0 \qquad (10)$$

может быть получено путем сложения n уравнений (9). Оно удовлетворяется всеми многочленами рассматриваемого вида, имеющими одинаковую степень m.

Доказательство того, что система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + m_i \Delta G = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial G}{\partial x_k} + m \Delta G = 0 \qquad (12)$$

удовлетворяется многочленами $G_m(\mathfrak{x})$, проводится точно так же.

Рекуррентные формулы и формулы дифференцирования также могут быть получены из производящих функций. При $n=2$ соответствующие результаты указаны в книге: Appell, Kampé de Fériet (1926, п. CXXII).

Существует много связей между многочленами Эрмита от одного и от многих переменных. Заменяя в формулах 12.8 (17) и (18) $\mathfrak{a}$ на $t\mathfrak{a}$ и разлагая по степеням t с помощью формулы 10.13 (19), получаем, что

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{[\varphi(\mathfrak{a})/2]^{\frac{m}{2}}}{m!} H_m\left(\frac{\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{\sqrt{2\varphi(\mathfrak{a})}}\right), \tag{13}$$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{[\psi(\mathfrak{a})/2]^{\frac{m}{2}}}{m!} H_m\left(\frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{\sqrt{2\psi(\mathfrak{a})}}\right). \tag{14}$$

Относительно других связей между многочленами Эрмита от одного и от многих переменных см. книгу: Appell, Kampé de Fériet и работы Фельдгейма (Feldheim), указанные в библиографии. Заметим, что обозначения Фельдгейма отличаются от наших обозначений.

Теорема сложения для многочленов Эрмита от двух переменных была получена в работе: Koschmieder (1930a).

12.10. Дальнейшие исследования

Путем сравнения производящих функций легко показать, что многочлены Эрмита от многих переменных являются предельным случаем многочленов, определенных равенствами 12.7 (13) и (14).

$$\lim_{s\to\infty} s^{-\frac{m}{2}} \mathcal{U}_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} H_m(\mathfrak{x}), \tag{1}$$

$$\lim_{s\to\infty} s^{-\frac{m}{2}} \mathcal{V}_m^s\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{m_1! \ldots m_n!} G_m(\mathfrak{x}). \tag{2}$$

Для дальнейшего изучения многочленов Эрмита можно использовать *многомерное преобразование Гаусса*

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{x}}^u [F(\mathfrak{y})] = \sqrt{\frac{\Delta}{(2\pi u)^n}} \int F(\mathfrak{y}) \exp\left[-\frac{1}{2u}\varphi(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\right] d\mathfrak{y} \tag{3}$$

(см. равенство 10.13 (30), (31)). Первая из формул

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{u}[H_m(\lambda\mathfrak{y})] = (1-\lambda^2 u)^{\frac{m}{2}} H_m\left(\frac{\lambda\mathfrak{x}}{\sqrt{1-\lambda^2 u}}\right), \tag{4}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{1}[H_m(\mathfrak{y})] = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right), \tag{5}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{1}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_j\right)\right] = i^{-m}H_m(i\mathfrak{x}) \tag{6}$$

может быть доказана с помощью производящей функции 12.8 (17) и интегрального уравнения, которому удовлетворяют многочлены Эрмита. Вторая является предельным случаем первой, а третья, которая также является предельным случаем $(\lambda\to\infty)$ первой формулы, дает интегральное представление многочленов Эрмита. Соответствующие формулы для G_m имеют вид

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{u}[G_m(\lambda\mathfrak{y})] = (1-\lambda^2 u)^{\frac{m}{2}} G_m\left(\frac{\lambda\mathfrak{x}}{\sqrt{1-\lambda^2 u}}\right), \tag{7}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{1}[G_m(\mathfrak{y})] = \prod_{j=1}^{n} x_j, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{1}\left[\prod_{j=1}^{n} y_j\right] = i^{-m}G_m(i\mathfrak{x}). \tag{9}$$

Фельдгейм (Feldheim, 1942) использовал более общее определение

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}^{u}[F(\mathfrak{y})] = \sqrt{\frac{\Delta}{(2\pi)^n u_1\ldots u_n}}\int F(\mathfrak{y})\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\frac{x_i-y_i}{\sqrt{u_i}}\frac{x_j-y_j}{\sqrt{u_j}}\right)dy \tag{10}$$

и изучил поведение многочленов Эрмита при функциональном преобразовании, определяемом равенством (10).

Биортогональное свойство 12.9 (1) показывает, что любую функцию $f(\mathfrak{x})$ можно разложить в ряды по многочленам Эрмита как вида

$$\sum a_m G_m(\mathfrak{x}), \tag{11}$$

так и вида

$$\sum b_m H_m(\mathfrak{x}). \tag{12}$$

При этом

$$m_1!\ldots m_n!\,a_m = \int w(\mathfrak{x})\,f(\mathfrak{x})\,H_m(\mathfrak{x})\,dx, \tag{13}$$

$$m_1!\ldots m_n!\,b_m = \int w(\mathfrak{x})\,f(\mathfrak{x})\,G_m(\mathfrak{x})\,dx. \tag{14}$$

Сходимость таких разложений была изучена в работах: Thijssen (1926, 1927) для случая $n=2$ при условии, что функция $f(\mathfrak{x})$ финитна (то есть тождественно обращается в нуль вне некоторой ограниченной области) и удовлетворяет некоторым условиям непрерывности в этой области. Задача приближения в среднем квадратичном (см. п. 10.2) была изучена Каччиополи (Caccioppoli, 1932a) для функций класса $L^2_{\mathfrak{w}}$, то есть для таких функций, что интеграл

$$\int |f(\mathfrak{x})|^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(\mathfrak{x})\right] dx$$

сходится. Приближение произвольных функций в неограниченных областях было изучено Picone (1935). Mazza (1940) также изучал многочлены Эрмита и построил ортогональную систему. Devisme (1932) определил систему многочленов, которая в некоторых отношениях аналогична многочленам Эрмита. Для них производящими функциями являются

$$\exp\left(ax - a^2 y + \frac{a^3}{3}\right), \quad \exp\left[ax - (a^2 - b)\,y + \frac{a^3}{3}\right]. \tag{15}$$

Многочлены, порождаемые производящими функциями (15), связаны с некоторыми дифференциальными уравнениями в частных производных, содержащими дифференциальный оператор 12.7 (12).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

К главе 7

Airey J. R., 1916: Philos. Mag. 31, 520—528, 32, 7—14, 237—238.
Airey J. R., 1935: Philos. Mag. 19, 230—235.
Airey J. R., 1935a: Philos. Mag. 19, 236—243.
Airey J. R., 1937: Philos. Mag. 24, 521—552.
Bailey W. N., 1929: Proc. Cambridge Philos. Soc. 25, 48—49.
Bailey W. N., 1929a: Proc. Cambridge Philos. Soc. 26, 82—87.
Bailey W. N., 1930: Proc. London Math. Soc. (2) 30, 415—421.
Bailey W. N., 1930a: Proc. London Math. Soc. (2) 30, 422—424.
Bailey W. N., 1930b: J. London Math. Soc. 5, 258—265.
Bailey W. N., 1930c: Proc. London Math. Soc. (2) 31, 200—208.
Bailey W. N., 1932: Proc. London Math. Soc. 33, 154—159.
Bailey W. N., 1935: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 233—238.
Bailey W. N., 1935a: Proc. London Math. Soc. (2) 40, 37—48.
Bailey W. N., 1936: J. London Math. Soc. 11, 16—20.
Bailey W. N., 1937: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 241—248.
Bailey W. N., 1938: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 9, 141—147.
Banerjee D. P., 1935: J. Indian Math. Soc., N. S., 1, 266—268.
Banerjee D. P., 1936: J. Indian Math. Soc., N. S., 2, 211—212.
Banerjee D. P., 1939: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 10, 261—265.
Basu K., 1923: Bull. Calcutta Math. Soc. 14, 25—30.
Bateman Harry and S. O. Rice, 1935: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 173—179.
Baudoux P., 1945: Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. (31), 471—478.
Baudoux P., 1945a: Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. (31), 669—681.
Baudoux P., 1946: Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. (32), 127—131.
Bell E. T., 1926: Philos. Mag. 1, 304—312.
Bennet W. R., 1932: Bull. Amer. Math. Soc. 38, 843—848.
Bickley W. G., 1943: Philos. Mag. 34, 37—49.
Bickley W. G. and J. C. P. Miller, 1945: Philos. Mag. 36, 121—133, 200—210.
Bijl Jan, 1937: Dissertation Groningen.
Birkhoff G. D., 1908: Trans. Amer. Math. Soc. 9, 219—231.
Blumenthal Otto, 1912: Arch. der Math. und Phys. 19, 136—152.
Boas R. P., 1942: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 28, 21—27.
Boas R. P., 1942a: Bull. Amer. Math. Soc. 48, 286—294.
Bose B. N., 1944: Bull. Calcutta Math. Soc. 36, 126.
Bose B. N., 1945: Bull. Calcutta Math. Soc. 37, 77.
Bose B. N., 1948: Bull. Calcutta Math. Soc. 40, 8—14.
Bose S. K., 1946: Bull. Calcutta Math. Soc. 38, 177—180.
Bose S. K., 1946a: Bull. Calcutta Math. Soc. 38, 181—184.
Bradley W. F., 1936: Proc. London Math. Soc. 31, 209—214.
Bruijn N. G., 1948: Philos. Mag. 39, 134—140.
Bruijn N. G., 1950: Duke Math. J. 17, 197—225.

Buchholz Herbert, 1939. Philos. Mag. 27, 407—420.
Buchholz Herbert, 1947: Z. angew. Math. Mech. 25/27, 245—252.
Budden R. F., 1926: Proc. London Math. Soc. 24, 471—478.
Burchnall J. L., 1951: Canadian J. Math. 3, 62—68.
Burnett B H., 1929: Proc. Cambridge Phil. Soc. 26, 145—151.
Busbridge I. W., 1938: Proc. London Math. Soc. (2) 44, 115—129.
Carslaw H. S and J. C. Jaeger, 1940· Proc. London Math. Soc. 46, 361—388.
Chaundy T. W., 1931: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, 144—154.
Cherry T. M., 1949: J. London Math. Soc. 24, 121—130.
Cherry T. M., 1949a: Proc. London Math. Soc. 51, 14—45.
Cherry T. M., 1950: Trans. Amer. Math. Soc. 68, 224—257.
Cooke R. G., 1925: Proc. London Math. Soc. 24, 381—420.
Cooke R. G., 1927: Proc. London Math. Soc. 27, 171—192.
Cooke R. G., 1928: Proc. London Math. Soc. 28, 207—241.
Cooke R. G., 1929: J. London Math. Soc. 4, 18—21.
Cooke R. G., 1930: J. London Math. Soc. 5, 54—58.
Cooke R. G., 1930a: J. London Math. Soc. 5, 58—61.
Cooke R G., 1930b: Proc. London Math. Soc. 30, 144—164.
Cooke R. G., 1932: J. London Math. Soc. 7, 281—283.
Cooke R. G., 1936: Proc. London Math. Soc. 41, 176—190.
Cooke R. G., 1937: J. London Math. Soc. 12, 180—185.
Copson E. T., 1932: Proc. London Math. Soc. (2) 33, 145—153.
Copson E. T., 1933: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 4, 134—139.
Copson E. T., 1935: Functions of a complex variable, Oxford.
Copson E. T. and W. L. Ferrar, 1937: Proc. Edinburgh Math. Soc. 5, 160—168.
Corput Van der, J. G., 1934: Compositio Math. 1, 15—38.
Corput Van der, J. G., 1936: Compositio Math. 3, 328—372.
Costello J. C., 1936: Philos. Mag 2, 308—318.
Coulomb M. J., 1936: Bull. Sci. Math. 60, 297—302.
Crum M. M., 1940: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 11, 49—52.
Dalzell D. P., 1945: J. London Math. Soc. 20, 213—218.
Davis H. T., 1924: Amer. J. Math. 46, 95—109.
Debye Peter, 1909: Math. Ann. 67, 535—558.
Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1930: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 1, 122—145.
Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1930a: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 1, 236—238.
Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1933: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 4, 193—208; 297—304.
Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1935: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 166—174.
Dixon A. L. and W. L. Ferrar, 1937: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 8, 66—74.
Doetsch Gustav, 1935· Compositio Math. 1, 85—87.
Doetsch Gustav, 1937: Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, J. Springer, Berlin.
Dougall John, 1919: Proc. Edinburgh Math. Soc. 37, 33—47.
Emde Fritz and Rudolf Rühle, 1934: Jber. Deutsch. Verein 43.
Emde Fritz, 1937: Z. angew. Math. Mech. 17, 324—346.
Emde Fritz, 1939: Z. angew. Math. Mech. 19, 101—118.
Erdélyi Arthur, 1937: Compositio Math. 4, 406—423.
Erdélyi Arthur, 1939· Proc. Edinburgh Math. Soc. 6, 94—104.
Erdélyi Arthur and W. O. Kermack, 1945: Proc. Cambridge Philos. Soc. 41, 74—75.
Falkenberg Hans, 1932: Math. Z. 35, 457—463.
Falkenberg Hans and Ernst Hilb, 1916· Goettingener Nachrichten, p. 190—196.
Ferrar W. L., 1937: Compositio Math. 4, 394—405.
Forsyth A. R., 1921: Messenger of Math. 50, 129—149.
Fox Cyril, 1926: Proc. London Math. Soc. 24, 479—493.
Fox Cyril, 1927· Proc. London Math. Soc. 26, 35—87, 201—210.
Fox Cyril, 1929: Proc. Cambridge Philos. Soc. 25, 130, 131.

Gatteschi L., 1950 Revista di Mathematica della Universita di Parma 1, 347—362.
Greenwood R. E., 1941. Ann. of Math. 42, 778—805.
Gupta H. C., 1943· Proc. Nat. Acad Sci. India, ›ect. A, 13, 225—231.
Gupta H. C., 1943a· Proc. Benares Math. Soc. 5, 1—16
Gupta H. C., 1943b. Bull. Calcutta Math. Soc. 35, 7—11.
Hardy G. H., 1921. Messenger of Math. 50, 165—171.
Hardy G. H., 1925 Proc. London Math. Soc. 23, IX.
Hardy G. H., 1926. Messenger of Math. 55, 140—144
Hardy G. H., 1927· Messenger of Math. 56, 186—192.
Hardy G. H., 1927a: Messenger of Math. 57, 113—120.
Hardy G. H. and E. C. Titchmarsh, 1936: Proc. London Math. Soc. 35, 116—155.
Hilb Ernst, 1922: Math. Z. 15, 274—279.
Hille Einar and Gábor Szegö, 1943: Bull. Amer. Math. Soc. 49, 605—610.
Hillmann Abraham, 1949; Bull. Amer. Math. Soc. 55, 198—200.
Horn Jakob, 1899: Math. Ann. 52, 271—292.
Horton C. W., 1950: J. Math. Physics 29, 31—37.
Infield L., Smith V. G. and W. Z. Chien, 1947· J. of Math. and Phys. 26, 22—28.
Jeffreys Harold, 1925: Proc. London Math. Soc. 23, 428—436.
Jesmanowicz L., 1938. C. R. Soc. Sci. Varsovie 31, 43—59.
Jordan Henri, 1930. J. reine angew. Math. 162, 17—59.
King L. V., 1935: Proc. Roy. Soc. A, 153, 1—16.
King L. V. 1936: Philos. Mag. (7) 21, 118—144.
Kishore Raj, 1929· Bull. Calcutta Math. Soc. 21, 187—198.
Klein Felix 1933. Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, J. R. Springer, Berlin.
Kline Morris, 1948. J. Math. Phys. 27, 37—48.
Kline Morris, 1950: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 543—552.
Kober Hermann, 1935: Math. Z. 39, 609—624.
Kober Hermann, 1937: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 8, 186—199.
Korn Arthur, 1931: S. B. Preuss. Akad. Wissensch., Phys. Math. Kl., H. 22/23, 437—449.
Koshliakov N. S., 1926: Messenger of Math. 55, 152—160.
Krall H. L. and O. Frink, 1949: Trans. Amer. Math Soc. 65, 100—115.
Lambe C. G., 1931; J. London Math. Soc. 6, 257—259.
Langer R. E., 1931: Trans. Amer. Math. Soc. 33, 23—64.
Langer R. E., 1932. Trans. Amer. Math. Soc. 34, 447—480.
Langer R E., 1934: Bull. Amer. Math. Soc. 40, 545—582.
Lehmer D. H., 1944 Math. tables and other aids to computati⌒n 1, 133—134.
Lense Josef, 1933· Jber. Deutsch. Math. Verein 43, 146—153.
Luke Y. L., 1950 J. Math. Physics 29, 27—30.
McLachlan N. W., 1934: Bessel functions for engineers, Oxford.
McLachlan N. W. and A. L. Meyers, 1936: Philos. Mag. 21, 425—436, 437—448.
McLachlan N. W. and A. L. Meyers, 1937 Philos. Mag. 23, 762—774.
McLachlan N. W., 1938 Philos. Mag 26, 394—408, 457—473.
MacRobert T. M., 1930: Proc. Edinburgh Math. Soc., Ser. II, 1, 38.
MacRobert T. M., 1931 Proc. Roy. Soc. Edinburgh 51, 116—126.
MacRobert T. M., 1936 Philos. Mag 21, 697—703.
MacRobert T. M., 1937. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 57, 19—25.
MacRobert T. M., 1940: Quart. J. Math. Oxford, Ser. II, 95—99.
MacRobert T. M., 1947: Functions of a complex variable, Macmillan & Co., Ltd., London.
Magnus Wilhelm and Fritz Oberhettinger, 1948: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, second edition, Springer.
Mayr K., 1932. Akad. Wiss. Wien. S. B. 141, 227—265.
Mayr K., 1933: Akad. Wiss. Wien. S. B. 142, 1—17.
Mayr K., 1935: Akad. Wiss. Wien. S. B. 144, 277—292.

Mcdonald J. H., 1926: Trans. Amer. Math. Soc. 28, 384—390.
Meijer C. S., 1932. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 35, 656—667, 852—866, 948—958. 1079—1096.
Meijer C. S., 1933: Math. Ann. 108, 321.
Meijer C. S., 1933a: Dissertation, Groningen.
Meijer C. S., 1934: Nederl. Akad. Wetensch Proc. 37, 805—812.
Meijer C. S., 1935: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 241—248, 528—535.
Meijer C. S., 1935a· Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 38, 628—634, 744—749
Meijer C. S., 1935b: Proc. London Math. Soc. 40, 1—22.
Meijer C. S., 1936: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 39, 394—403, 519—527.
Meijer C. S., 1936a: Math. Ann. 112, 469—489
Meijer C. S., 1938: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 41, 151—154.
Meijer C. S., 1939: Compositio Math. 6, 348—367.
Meijer C. S., 1939a: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 42, 355—369, 872—879, 938—947.
Meijer C. S., 1940: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 43, 198—210, 366—378, 599—608, 702—711.
Meixner Josef, 1949: Math. Nach. 3, 9—13.
Mitra Subodchandra, 1925: Bull. Calcutta Math. Soc. 15, 83—85.
Mitra Subodchandra, 1933. Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 81—98.
Mitra Subodchandra, 1936: Math. Z. 41, 680—685.
Mohan Brij, 1942: Bull. Calcutta Math Soc. 34, 55—59, 171—175
Mohan Brij, 1942a: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 13, 40—47.
Mohan Brij, 1942b: Proc. Nat. Acad. Sci India 12, 231—235
Montroll E. W., 1946: J. Math. Physics 25, 37—49.
Moore C. N., 1920. Trans. Amer. Math. Soc. 21, 107—156.
Moore C. N., 1926: Trans. Amer. Math. Soc. 12, 181—206.
Moore C. N., 1930. Trans. Amer. Math. Soc. 32, 408—416.
Mordell L. J., 1930: J. London Math. Soc. 5, 203—208.
Müller R., 1940 Z. angew. Math. Mech. 20, 61—62.
Newson C. V. and A. Frank, 1940: Bull. Mat. 13, 11—14.
Nicholson J. W., 1920: Quart. J. Math. 48, 321—329.
Nicholson J. W., 1924: Philos. Trans. Roy. Soc. A, 224, 303—369.
Nicholson J. W., 1927: Quart. J. Math. 50, 297—314.
Nielsen Niels, 1904: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, B. G. Teubner.
Obreschkoff Nikolai, 1929: Jber. Deutsch Math. Verein 38, 156—161.
Olver F. W. J., 1950: Proc. Cambridge Philos Soc. 46, 570—580.
Pennel W. O., 1932: Bull. Amer. Math. Soc. 38, 115—122.
Picht Johannes, 1949: Z. angew. Math. Mech. 29, 155—157.
Pol Balthasar van der and K F. Niessen, 1932: Philos Mag 13, 537—572.
Pólya Georg, 1926: J. London Math. Soc. 1, 98—99.
Pólya Georg, 1929: Jber. Deutsch. Math. Verein 38, 161—168.
Poole E C., 1934: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 5, 186—194.
Rayleigh J. W., 1945: The theory of sound, Dover, New York.
Ramanujan Srinivasa, 1920: Quart. J. Math. 48, 294—310.
Ramanujan Srinivasa, 1927: Collected papers, Cambridge.
Rice S. O., 1935 Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 52—64.
Rice S. O., 1944: Philos. Mag 35, 686—693.
Rosen Joseph, 1939: Tohoku Math. J. 45, 230—238.
Rutgers J. G., 1931: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 34, 148—159, 239—256, 427—437.
Rutgers J. G., 1941: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 44, 464—474, 636—647, 744—753, 840—851, 978—988, 1092—1098.
Rutgers J. G., 1942: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 45, 929—936, 987—993.
Schlesinger Ludwig, 1907: Math. Ann. 63, 277—300.
Schöbe Waldemar, 1948: Arch. Math. 1, 230—232.
Shabde N. G., 1935. Bull. Calcutta Math. Soc. 27, 165—170.

Shabde N. G., 1938: Bull. Calcutta Math. Soc. 30, 29, 30.
Shabde N. G., 1939 Proc. Benares Math. Soc. 1, 55—59.
Shastri N. A., 1938: Philos. Mag. 25, 930—950.
Siegel C. L., 1929: Abh. Preuss. Akad. Wiss., Nr. 1.
Sinha S., 1942—43: Bull. Calcutta Math. Soc. 34, 35, 37—42, 67—77.
Sircar H., 1945: Bull. Calcutta Math. Soc. 37, 1—4.
Sommerfeld Arnold, 1943: Ann Phys. 42, 389—420.
Stevenson Georg, 1928: Amer. J. Math. 50, 569—590.
Stone M. H., 1927: Ann. Math. (2) 28, 271—290.
Straubel Rudolph, 1941: Ing. Arch. 12, 325—336.
Straubel Rudolph, 1942: Ing. Arch. 13, 14—20.
Szász Otto, 1950: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 256—267.
Szegö Gábor, 1933. Proc. London Math. Soc. 36, 427.
Szymanski Piotr, 1935: Proc. London Math. Soc. 40, 71—82.
Temple G., 1927: Proc. London Math. Soc. 26, 518—530.
Thielmann H. P., 1929 Proc. U. S. A. Acad. 15, 731—733.
Thielmann H. P., 1934: Bull. Amer. Math. Soc. 40, 695—698.
Titchmarsh E. C., 1923: Proc. London Math Soc. 22, 15—28.
Titchmarsh E. C., 1923a: Proc. London Math. Soc. 22, xiii—xvi.
Titchmarsh E. C., 1925: Proc. London Math. Soc. 23, xii.
Titchmarsh E. C., 1927: J. London Math. Soc. 2, 97—99.
Titchmarsh E. C., 1948: Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford.
Tranter C. J., 1951: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, 60—66.
Tricomi Francesco, 1935: Rend. Lincei (6) 22, 564—576.
Tricomi Francesco, 1949: Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 83, 3—20.
Truesdell C A., 1947: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 33, 82—93.
Truesdell C. A., 1948: A unified theory of special functions, Princeton University Press, Princeton, N. J.
Varma D. S., 1936: Proc. London Math. Soc. 42, 9—17.
Varma D. S., 1936a: Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 209—211.
Veen S. C., 1927: Math. Ann. 97, 696—710.
Watson G N., 1928 J. London Math. Soc. 3, 22—27.
Watson G N., 1931. Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, 298—309.
Watson G N., 1934: J. London Math Soc. 9, 16—22.
Watson G. N., 1938: J. London Math. Soc. 13, 41—44.
Weinstein Alexander, 1948: Trans. Amer. Math. Soc. 63, 342—354.
Weyrich Rudolf, 1937: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig, B. G. Teubner.
Widder D. V., 1941: The Laplace transform, University Press, Princeton, N. J.
Wilkins J. E., 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 54, 232—234.
Wilkins J. E., 1948a: Trans. Amer. Math. Soc. 64, 359—385.
Wilkins J. E., 1950: Trans. Amer. Math. Soc. 69, 55—65.
Wilkins J. E., 1950a: Amer. J. Math. 75, 187—191.
Wilson R., 1939. Proc. Edinburgh Math. Soc. 6, 17—18.
Wilton J. R., 1925: Proc. London Math. Soc. 23, VIII.
Wilton J. R., 1927: Messenger of Math. 56, 175—181.
Wilton J. R., 1928: Proc. London Math. Soc. 27, 81—104.
Wilton J. R., 1928a: J. Math. 159, 144—153.
Wise W H., 1935: Bull. Amer. Math. Soc. 41, 700—706.
Wright E. M., 1934: Proc. London Math. Soc. 28, 257—270.
Wright E. M., 1940 Philos. Trans. Royal Soc. (A) 238, 423—451.
Wright E. M., 1940a: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 11, 36—48.
Young L. C., 1941: Proc. London Math. Soc. 47, 290—308.
Young W. H., 1912: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 43, 161—177.
Young W. H., 1920: Proc. London Math. Soc. 18, 163—200.

Айнс И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1941.
Ватсон Г., Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, 1949.
Грей А., Метьюз Г., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
Камке Е., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1965.
Конторович М. И., Лебедев Н. Н., 1938; Журнал экспер. и теор. физ 8, 1192—1206.
Лебедев Н. Н., 1946: Доклады АН СССР, Н. С., 52, 655—658.
Лебедев Н. Н., 1947: Доклады АН СССР, Н. С., 58, 1007—1010.
Светлов А., 1934: Доклады АН СССР, Н. С., 2, 445—448.
Титчмарш Э., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I, 1960; т. II, ИЛ, 1961.
Уиттекер Э., Ватсон Г., Курс современного анализа, т. I, 1962; т. II, Физматгиз, 1963.
Фок В., 1934: Доклады АН СССР, Н. С., 1, 99—102.
Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции, Физматгиз, 1964.

К главе 8

Appell Paul and M. J. Kampé de Fériet, 1926: Fonctions hypérgeométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Gauthier-Villars.
Auluck F. C., 1941: Proc. Nat. Inst. Sci. India 7, 133—140.
Bailey W. N., 1937: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 8, 51—53.
Buchholz Herbert, 1943: Z. angew. Math. Mech. 23, 47—58, 101—118
Buchholz Herbert, 1947: Z. Physik 124, 196—218.
Buchholz Herbert, 1948: Ann. Physik (6) 2, 185—210.
Buchholz Herbert, 1949: Math. Z. 52, 355—383.
Cherry T. M., 1949 Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 8, 50—65.
Darwin C. G., 1949: Quart. J Mech Appl. Math. 2, 311—320.
Dhar S. C., 1935. J. Indian Math. Soc. (N. S.) 1, 105—108.
Erdélyi Arthur, 1936 Math. Ann. 113, 347—356.
Erdélyi Arthur, 1937 Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 146, 589—604.
Erdélyi Arthur, 1938: J. Indian Math. Soc. (N. S.) 3, 169—181.
Erdélyi Arthur, 1941: Proc. Royal Soc. Edinburgh 61, 61—70.
Humbert Pierre, 1920a C. R. Acad. Sci. Paris 170, 564.
Humbert Pierre, 1920b: C. R. Acad. Sci. Paris 170, 832.
Humbert Pierre, 1920c: C. R. Acad. Sci. Paris 170, 1482.
Humbert Pierre, 1920d: C. R. Acad. Sci. Paris 171, 428.
Langer R E., 1932. Trans. Amer. Math. Soc. 34, 447—480.
Magnus Wilhelm, 1940: Jber. Deutsch Math. Verein 50, 140—161.
Magnus Wilhelm, 1941: Z. Physik 118, 343—356
Meijer C. S., 1934: N. Archiv. V. Wiskunde (2) 18, 35—57.
Meijer C. S., 1935a: Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 38, 528—535.
Meijer C. S., 1935b: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 6, 241—248.
Meijer C. S., 1937a: Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 40, 259—262.
Meijer C. S., 1937b: Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 40, 871—879.
Meijer C. S., 1938: Kon. Akad. Nederl. Wetensch. 41, 744—755.
Meijer C. S., 1938a: Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam 41, 42—44
Meijer C. S., 1941: Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 44, 590—598.
Meixner Joseph, 1933: Math. Z. 36, 677—707.
Mitra S. C., 1927: Proc. Benares Math. Soc. 9, 21—23.
Mitra S. C., 1946: Proc. Edinburgh Math. Soc. 7 (2), 171—173.
Schwid N., 1935: Trans. Amer. Math. Soc. 37, 339—362.
Shanker Hari, 1939: J. Indian Math. Soc. (N. S.) 3, 226—228.
Shanker Hari, 1939: J. Indian Math. Soc. (N. S.) 3, 228—230.
Taylor W. C., 1939: J. Math. Physics 18, 34—49.

Tricomi Francesco, 1947: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 26, 283—300.
Varma R. S., 1927: Proc. Benares Math. Soc. 9, 31—42.
Varma R. S., 1936: Proc. London Math. Soc. (2) 42, 9—17.
Varma R. S., 1937 J. Indian Math. Soc. (N. S.) 2, 269—275.
Watson G. N., 1910: Proc. London Math. Soc. 8, 393—421.
Wells C. P. and R. D. Spence, 1945: J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 24, 51—64.

Айнс Н., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1941.
Уиттекер Э., Ватсон Г., Курс современного анализа т. I, 1962; т. II, Физматгиз, 1963.

К главе 9

Bateman Harry, 1946: Proc. Nat. Acad. Sci. 32, 70—72.
Böhmer Eugen, 1939: Differenzengleichungen und bestimmte Integrale, Leipzig.
Busbridge I. W., 1950: Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, 1, 176—184.
Furch R., 1939: Z. Physik 112, 92—95.
Hartree D. R., 1936: Manchester Memoirs 80, 85—102.
Harvard University, 1949a: Annals of the Computation Laboratory, Vols. XVIII and XIX Generalized sine- and cosine-integral functions. Parts I and II. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
Harvard University, 1949b: Annals of the Computation Laboratory, Vol. XXI. Tables of the generalized exponential-integral functions, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
Kramp Christian, 1799: Analyse des Réfractions, Strasbourg and Leipzig.
Le Caine J., 1948: National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy, Document No MT-131 (NRC 1553), 45 pp.
Legendre A. M., 1811: Exercises de calcul intégral, Paris.
Nielsen Niels, 1906a: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 326 pp.
Nielsen Niels, 1906b: Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten, 106 pp., B. G. Teubner, Leipzig.
Nielsen Niels, 1906c: Monatsch. Math. Phys. 17, 47—58.
Placzek George, 1946: National Research Council of Canada, Division of Atomic Energy, Document No. MT-1, 39 pp.
Prym F. E., 1877: J. Math. 82, 165—172.
Rosser J. B., 1948: Theory and application of

$$\int_0^z e^{-x^2}\,dx \quad \text{and} \quad \int_0^z e^{-p^2y^2}\,dy \int_0^y e^{-x^2}\,dx,$$

Mapleton House, Brooklyn, New York.
Schlömilch Oskar, 1871: Z. Math. Phys. 16, 261—262.
Tannery Jules, 1882: Comptes Rendus 94, 1698—1701.
Tricomi F. G., 1950a: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 4, 341—344.
Tricomi F. G., 1950b: Z. Math 53, 136—148.
Tricomi F. G., 1951: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 28, 263—289.
Tricomi F. G, 1951: J. d'Analyse Math. 1, 209—231.
Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции, Физматгиз, 1964.

К главе 10

Achyeser N., 1934: Comm. Inst. Sci. Math. Méc. Univ. Kharkoff (Zapiski Inst. Mat. Mech.) (4) 9, 3—8.
Aitken A. C. and H. T. Gonin, 1935: Proc. Roy. Soc. Edinburgh 55, 114—125.
Bateman Harry, 1904: Messenger of Math. 33, 182—188.
Bateman Harry, 1905: Proc. London Math. Soc. (2) 3, 111—123.

Bateman Harry, 1933: Tohoku Math. J. 37, 24—38.

Beckenbach E. F., Wladimir Seidel and Otto Szász, 1951: Duke J. 18, 1—10.

Bernstein S., 1930: Comm. Soc. Math. Kharkoff (4) 4, 79—93.

Bernstein S., 1932: Comm. Soc. Math. Kharkoff (4) 5, 59—60.

Bochner Salomon, 1929: Math. Z. 29, 730—736.

Brafman Fred, 1951: Proc. Amer. Math. Soc. 2, 942—949.

Burchnall J. L., 1951: Proc. London Math. Soc. (3) 1, 232—240.

Burchnall J. L., 1952: Quart. J. Math. Oxford (2) 3, 151—157.

Caton W. B. and Einar Hille, 1945: Duke Math. J. 12, 217—242.

Charlier C. V. L., 1931: Application de la théorie des probabilités a l'astronomie, Gauthier-Villars.

Cooper R., 1950: Proc. Cambridge Philos. Soc. 46, 549—554.

Doetsch Gustav, 1933. Math. Ann. 109, 257—266.

Doetsch Gustav, 1935: Atti Accad. Naz. Lincei Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 22, 300—324.

Erdélyi Arthur, 1936: Atti Accad. Naz. Lincei Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 24, 347—350.

Erdélyi Arthur, 1937: Math. Z. 42, 641—670.

Erdélyi Arthur, 1937a J. London Math. Soc. 12, 56—57.

Erdélyi Arthur, 1938· Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 147, 513—520.

Forsythe G. E., 1951: Duke J. 18, 361—371.

Gatteschi Luigi, 1949: Boll. Un. Mat. Ital. (3), 4, 240—250.

Gatteschi Luigi, 1949a: Rend. Mat. e applicazioni Roma (5) 8, 399—411.

Giuliotto Virgilio, 1939: Ist. Lombardo Rend. 72, 37—57.

Gottlieb M. J., 1938: Amer. J. Math. 60, 453—458.

Gram J. P., 1882: J. Math. 114, 41—73.

Greenleaf H. E. H., 1932: Ann. Math Statistics 3, 204—255.

Greenwood R. E. and J. J. Miller, 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 54, 765—769.

Haar Alfred, 1918: Math. Ann. 78, 121—136.

Hahn Wolfgang, 1934: Jber. Deutsch. Math. Verein 44, 215—236.

Hahn Wolfgang, 1935. Math. Z. 39, 634—638.

Hahn Wolfgang, 1949: Math. Nachr. 2, 4—34.

Heine Emil, 1878—1881: Handbuch der Kugelfunktionen, second edition, Riemer, Berlin.

Hille Einar, 1939: C. R. Acad. Sci. Paris 209, 714—716.

Hille Einar, 1939a: Duke Math J. 5, 875—936.

Hille Einar, 1940: Trans. Amer Math Soc. 47, 80—94.

Jordan Charles, 1921: Proc. London Math. Soc. 20, 297—325.

Jordan Charles, 1947: Calculus of finite differences, Chelsea Publishing Co.

Krawtchouk M., 1929. C. R. Acad. Sci. Paris 189, 620—622.

Krall H. L., 1936· Bull. Amer. Math. Soc. 42, 423—428.

Lowan A. N, Norman Davids and Arthur Levenson, 1942: Bull. Amer. Math. Soc. 48, 739—743.

Lowan A. N., Norman Davids and Arthur Levenson, 1943: Bull. Amer. Math. Soc. 49, 939.

Madhava Rao B. S. and V. R. Thiruvenkatachar, 1949: Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A, 29, 391—393.

Magnus Wilhelm and Fritz Oberhettinger, 1948: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer, Berlin.

Meixner Joseph, 1934: J. London Math. Soc. 9, 6—13.

Meixner Joseph, 1938: Math. Z. 44, 531—535.

Myller-Lebedeff Wera, 1907: Math. Ann. 64, 388—416.

Neumann Richard, 1912: Die Entwicklung willkürlicher Funktionen noch den Hermiteschen ·und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen, Breslau.

Pollaczek Felix, 1949a: C. R. Acad. Sci. Paris 228, 1363—1365.
Pollaczek Felix 1949b: C. R. Acad. Sci., Paris 228, 1553—1556.
Pollaczek Felix, 1949c: C. R. Acad. Sci. Paris 228, 1998—2000.
Pollaczek Felix, 1950a: C. R. Acad. Sci. Paris 230, 36—37.
Pollaczek Felix, 1950b C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1563—1565.
Pollaczek Felix, 1950c: C. R. Acad. Sci. Paris 230, 2254—2256.
Pollard Harry, 1946: Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 32, 8—10.
Pollard Harry, 1947: Trans. Amer. Math. Soc. 62, 387—403.
Pollard Harry, 1947a: Ann. of Math. (2) 48, 358—365.
Pollard Harry, 1948: Trans. Amer. Math. Soc. 63, 355—367.
Pollard Harry, 1949. Duke Math. J. 16, 189—191.
Rau Heinz, 1950: Arch. Math. 2, 251—257.
Salzer H E. and Ruth Zucker, 1949: Bull. Amer. Math. Soc. 55, 1004—1012.
Sansone Giovanni, 1949: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 4, 221—223 and 339—341.
Sansone Giovanni, 1950: Math. Z. 53, 97—105.
Sansone Giovanni, 1950a: Math. Z. 52, 593—598.
Seidel Wladimir and Otto Szász, 1951: J. London Math. Soc. 26, 36—41.
Shohat J. A, Einar Hille and J. L. Walsh, 1940: A bibliography on orthogonal polynomials, Washington.
Shohat J. A and J. D. Tamarkin, 1943: The problem of moments, Mathematical Surveys 1, New York.
Spencer V. E., 1937: Duke Math. J. 3, 667—675.
Szász Otto, 1950: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 125—127.
Szász Otto, 1950a: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 256—267.
Szász Otto, 1951: J. d'Analyse Math. 1, 116—134.
Szegő Gábor, 1921: Math. Z. 12, 61—94.
Szegő Gábor, 1933: Proc. London Math. Soc. (2) 36, 427—450.
Szegő Gábor, 1948: Bull. Amer. Math. Soc. 54, 401—405.
Szegő Gábor, 1950: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 120—121.
Szegő Gábor, 1950a: Proc. Amer. Math. Soc. 1, 731—737.
Todd John, 1950: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 122—125.
Toscano Letterio, 1949: Boll. Un. Mat. Ital. (3) 4, 398—409.
Tricomi Francesco, 1935: Boll. Un. Mat. Ital. 14, 213—218; 277—282.
Tricomi Francesco, 1935a: Atti Accad. Naz. Lincei Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6), 21, 332—335.
Tricomi Francesco, 1936: Boll. Un. Mat. Ital. 15, 102—105.
Tricomi Francesco, 1939—40: Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 75, 369—390.
Tricomi Francesco, 1941: Giorn. Ist. Ital. Attuari 12, 14—33.
Tricomi Francesco, 1947: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 26, 283—300.
Tricomi Francesco, 1948: Serie Ortogonali di Funzioni, Torino.
Tricomi Francesco, 1949: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 28, 263—289.
Tricomi Francesco, 1950: Ann. Mat. Pura Appl. (4) 31, 93—97.
Uspensky J. V., 1927: Ann. of Math. (2) 28, 593—619.
Vitali Guiseppe and Giovanni Sansone, 1946: Moderna Teoria delle Funzioni di Variabile Reale, parte seconda, Bologna.
Watson G N., 1933: J. London Math. Soc. 8, 189—192.
Watson G N., 1933a: J. London Math. Soc. 8, 194—199.
Watson G. N., 1933b: J. London Math. Soc. 8, 289—292.
Watson G. N., 1934: J. London Math. Soc. 9, 22—28.
Watson G. N., 1938: Akad. Wiss. Wien, S.-B. IIa, 147, 151—159.
Weber Maria and Arthur Erdélyi, 1952: Amer. Math. Monthly 59, 163—168.
Wing G. Milton, 1950: Amer. J. Math. 72, 792—808.

Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.
Ватсон Г., Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ, 1949.

Геронимус Я., 1944: Доклады АН СССР, Н. С., 44, 355—359.
Гобсон Е., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
Сеге Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
Уиттекер Э., Ватсон Г., Курс современного анализа, т. I, 1962; т. II, 1963.

К главе 11

Angelescu Aurel, 1916: Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des integrales multiples. Thèse no. 1579, Paris.
Appell Paul and J. Kampé de Fériet, 1926: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars.
Birkhoff Garett and Saunders MacLane, 1947. A survey of modern algebra, New York.
Erdélyi Arthur, 1937: Physica 4, 107—120.
Erdélyi Arthur, 1938: Math. Ann. 115, 456—465.
Funk Paul, 1916: Math. Ann. 77, 136—152.
Gegenbauer Leopold, 1877: Akad. Wiss. Wien., S.-B. IIa, 75, 891—905.
Gegenbauer Leopold, 1884: Denkschriften Akad. Wiss. Wien., Math. Naturw. Kl., 48, 293—316.
Gegenbauer Leopold, 1888: Akad. Wiss. Wien., S.-B. IIa, 97, 259—270.
Gegenbauer Leopold, 1890: Denkschriften Akad. Wiss. Wien., Math. Naturw. Kl., 57, 425—480.
Gegenbauer Leopold, 1891: Akad. Wiss. Wien., S.-B. IIa, 100, 225—244.
Gegenbauer Leopold, 1893: Akad. Wiss. Wien., S.-B. IIa, 102, 942—950.
Hecke Erich, 1918: Math. Ann. 78, 398—404.
Hoenl H., 1934: Z. Physik 89, 244—253.
Kogbetliantz Ervand, 1924: J. Math. Pures Appli., IX, Ser. 3, 107—187.
Koschmieder Lothar, 1929: Math. Ann. 101, 120—125.
Koschmieder Lothar, 1931: Math. Ann. 104, 387—402.
Magnus Wilhélm, 1949: Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16, 77—94.
Maxwell J. C., 1873, 1892: A treatise on electricity and magnetism, Vol. 1, Chapter 9, Oxford, third edition, 1892.
Nielsen Niels, 1911: Théorie des fonctions métasphériques, Gauthier-Villars.
Pólya George and Burnett Meyer, 1950: C. R. Acad. Sci. Paris 228, 28—30, 1083—1084.
Protter M. H., 1949: Trans. Amer. Math. Soc. 63, 314—341.
Satô Yasuo, 1950: Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 28, 1—22, 175—217.
Schmidt Adam, 1899: Z. Math. Phys. 44, 327—338.
Sommerfeld Arnold, 1943. Math. Ann. 119, 1—20.
Van der Pol Balthasar, 1936: Physica 3, 385—392.
Van der Waerden B. L., 1932: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin.
Widder D. V., 1947: Advanced calculus, New York.
Гельфанд И. М., Минлос Р. А. и Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, Физматгиз, 1958.
Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.

К главе 12

Angelescu Aurel, 1915: C. R. Acad. Sci. Paris 161, 490—492.
Angelescu Aurel, 1915—16: Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. 4, 30—35.

Angelescu Aurel, 1916: Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des integrales multiples. Thesis, Paris, 140 pp

Appell Paul, 1881. Arch. Math. Physik (1) 66, 238—245.

Appell Paul, 1882: J. Math. Pures Appl. (3) 8, 173—216.

Appell Paul, 1901: Arch Math. Physik (3) 1, 69—71.

Appell Paul, 1903 Arch. Math. Physik (3) 4, 20—21.

Appell Paul and Joseph Kampé de Fériet, 1926 Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris.

Brinkman H. C. and Frits Zernike, 1935: Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 38, 161—170.

Caccioppoli Renato, 1932· Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 3, 163—182.

Caccioppoli Renato, 1932a: Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 364—375.

Cameron R H. and W. T. Martin, 1947: Ann. of Math 48, 385—389.

Chen K K. 1928 Sci. Rep. Tohoku Imp Univ. Ser I 17, 1073—1086.

Devisme Jaçques, 1932: C. R. Acad. Sci Paris 195, 437—439, 936—938.

Didon Francois, 1868 Ann Sci. École Norm. Sup. (1) 5, 229—310.

Dinghas Alexander, 1950: Math. Z. 53, 76—83.

Erdélyi Arthur, 1938 Math. Ann. 11, 456—465.

Erdélyi Arthur, 1938a Math. Z. 44, 301—311

Feldheim Ervin, 1940: Ann. Scuola Norm Super. Pisa (2) 9, 225—252.

Feldheim Ervin, 1941: C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) 31, 534—537.

Feldheim Ervin, 1942: Pont. Acad. Sci. Comment. 6, 1—25.

Friedrichs K. O., 1951: Comm. Pure Appl. Math. 4, 161—224.

Giulotto Virgilio, 1939: Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. Mat. Nat., 72, 37—57.

Grad Harold, 1949: Comm. Pure Appl. Math 2, 325—330.

Gröbner Wolfgang, 1948: Monatsh. Math. 52, 38—54.

Hermite Charles, 1864: C. R. Acad. Sci. Paris 58, 93—100, 266—273.

Hermite Charles, 1865. J. reine angew. Math 64, 294—296.

Hermite Charles, 1865a: C. R. Acad. Sci. Paris 60, 370—377, 432, 440, 461—466, 512—518.

Jackson Dunham, 1937: Duke Math. J. 2, 423—434.

Jackson Dunham, 1938 Duke Math. J. 4, 441—454.

Jackson Dunham, 1938a: Ann of Math. (2) 39, 262—268.

Kampé de Fériet Joseph. 1915: Sur les fonctions hypersphériques, Thesis, Paris, 111 pp.

Koschmieder Lothar, 1924: Math. Ann. 91, 62—81.

Koschmieder Lothar, 1925 Jber. Deutsch. Math. Verein 34, 57—64.

Koschmieder Lothar, 1926 Revista Mat. Hisp-Amer. (2) 1, 97—107.

Koschmieder Lothar, 1929 Math Ann 101, 120—125

Koschmieder Lothar, 1930: Revista Soc. Mat Espanola (2) 5, 1—14.

Koschmieder Lothar 1930a: Revista Soc Mat. Espanola (2) 5, 274—280

Koschmieder Lothar, 1931: Math. Ann 104, 387—402.

Koschmieder Lothar, 1933· Monatsh. Math Phys. 40, 223—232.

Koschmieder Lothar, 1934 Math. Ann. 110, 734—738

Koschmieder Lothar, 1934a: Monatsh. Math. Phys. 41, 58—63.

Koschmieder Lothar, 1938 Math. Z 43, 248—254.

Koschmieder Lothar, 1939a Math Z 43, 783—792.

Koschmieder Lothar, 1940: Anz. Akad. Wiss. Wien., Math.-Nat. Kl. 41—43.

Mazza S C., 1940 An. Soc. Ci. Argentina 130, 137—148.

Orloff G. A., 1881: On some polynomials in one or several variables. Thesis, St. Petersburg, 124 pp.

Orlow G. A., 1881a Nouv. Ann (2) 40, 481—489.

Picone Mauro, 1935. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 155—195.

Schmeidler Werner, 1941: J. reine angew. Math. 183, 175—182.
Thijssen W P., 1926. Verslagen Amsterdam (2) 35 1100—1111.
Thijssen W. P., 1927: Nederl. Akad Wetensch. Proc. (1) 30, 69—80.
Tortrat Albert, 1948 C R. Acad. Sci. Paris 226, 298—300.
Tortrat Albert, 1948a: C. R. Acad. Sci. Paris 226, 543—545, errata 758—759.

Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
Гельфанд И М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
Гобсон Е, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, Гостехиздат, 1956.
Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ВАЖНЕЙШИХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинский алфавит

Греческий алфавит

Г. Бейтмен и А. Эрдейи

Высшие трансцендентные функции.

Функции Бесселя,

функции параболического цилиндра,

ортогональные многочлены.

(Серия: «Справочная математическая библиотека»)

М., 1974 г., 296 стр. с илл.

Редактор *М. Я. Ворновицкий*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Печать с матриц. Подписано к печати 11/VII 1974 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 1.
Физ. печ. л. 18,5. Условн. печ. л. 18,5.
Уч.-изд. л. 22,51. Тираж 13500 экз.
Цена книги 1 р. 35 к. Заказ № 987

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.

Отпечатано во 2-й типографии
издательства «Наука», Москва,
Шубинский пер., 10