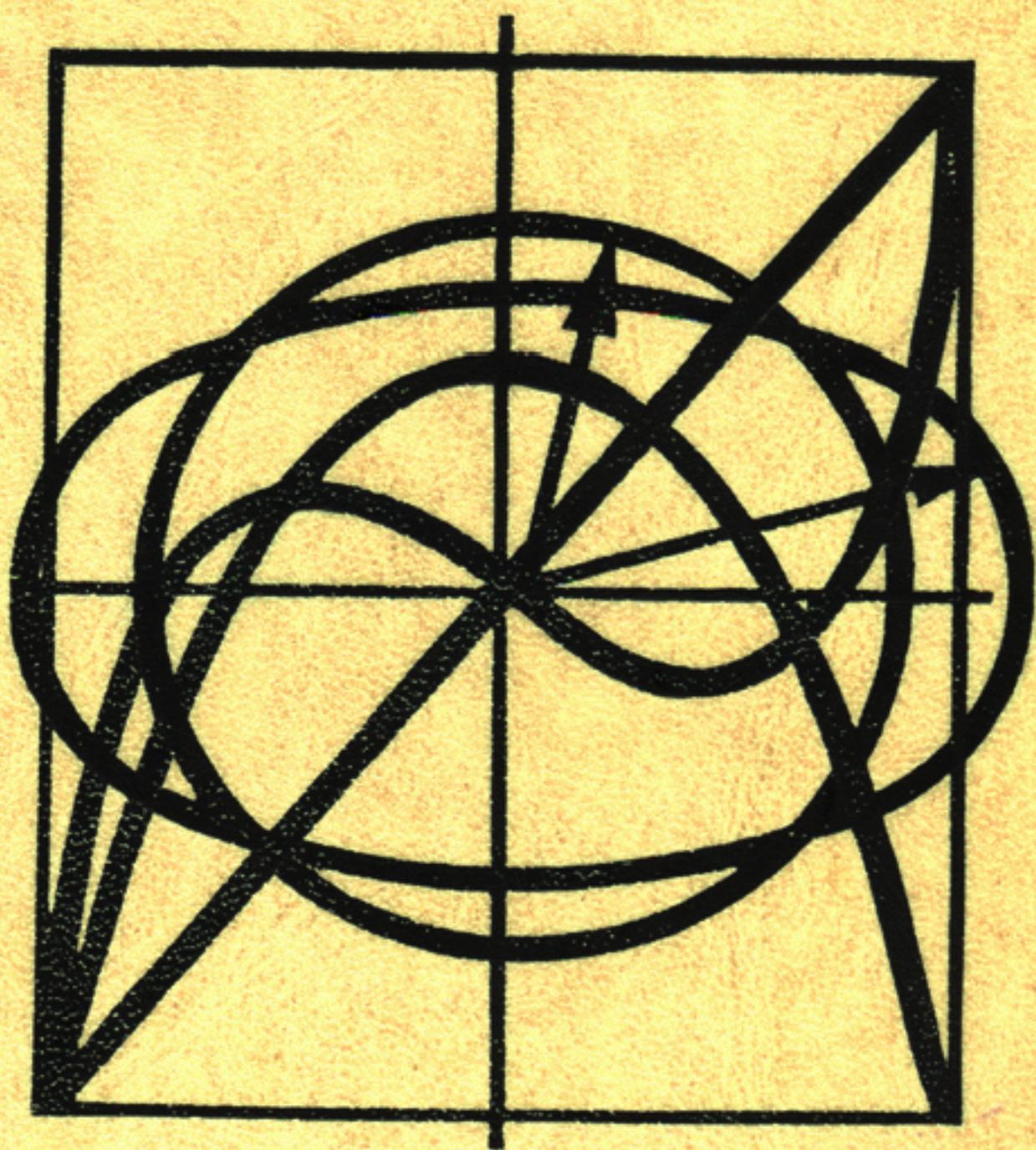


МЕТОДЫ *Е. И. Нечис*
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ



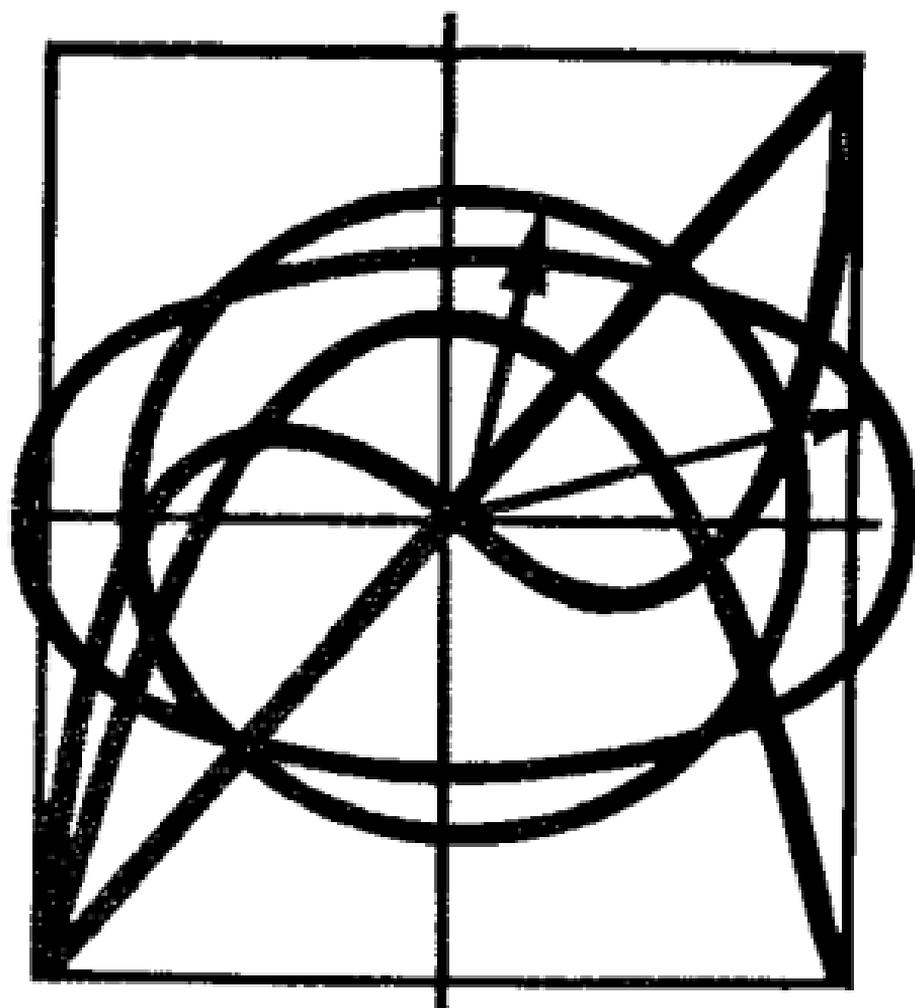
СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Предмет математической физика | 3 |
| Часть первая. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ | |
| Глава I. Скалярные, векторные и тензорные поля на плоскости | 6 |
| § 1. Скалярное поле и векторное поле его градиента | 6 |
| § 2. Аналитическое определение понятия вектора | 13 |
| § 3. Векторные поля и их дифференциальная характеристика | 16 |
| § 4. Тензоры и их свойства | 18 |
| § 5. Тензорная алгебра | 23 |
| § 6. Тензор как аффинор | 26 |
| § 7. Главные направления тензора | 28 |
| § 8. Тензорный эллипс | 32 |
| Глава II. Ортогональные векторы и тензоры в трехмерном и многомерном евклидовых пространствах. Векторный анализ | 34 |
| § 1. Векторы и тензоры в n-мерном пространстве | 34 |
| § 2. Тензор деформации | 37 |
| § 3. Тензор напряжений | 41 |
| § 4. Тензор инерции | 43 |
| § 5. Скалярный и векторный инварианты тензора-производной векторного поля | 49 |
| § 6. Физический и аналитический смысл дивергенции векторного поля | 51 |
| § 7. Физический и аналитический смысл ротора векторного поля | 56 |
| § 8. Оператор Гамильтона ("Набла"-исчисление) | 61 |
| § 9. Формула Грина | 65 |
| § 10. Классификация векторных полей | 66 |
| § 11. Физические векторные и тензорные поля в четырехмерном пространстве-времени | 69 |
| Глава III. Теория поля в криволинейных системах координат | 74 |
| § 1. Криволинейные координаты | 74 |
| § 2. Коэффициенты Лямэ | 77 |
| § 3. Основные дифференциальные операции в криволинейных координатах | 81 |
| Часть вторая. Дифференциальные уравнения в частных производных | |
| Глава I. Вывод основных дифференциальных уравнений математической физики. Общий интеграл этих уравнений | 87 |
| § 1. Поперечные колебания струны. Волновое уравнение | 87 |
| § 2. Уравнение теплопроводности | 90 |

| | |
|--|-----|
| § 3. Основное уравнение электростатики | 95 |
| § 4. Уравнение переменного электромагнитного поля в потенциалах | 96 |
| § 5. Уравнение Шредингера | 99 |
| § 6. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных | 100 |
| § 7. Колебания бесконечной струны | 105 |
| Глава II. Нахождение частных решений уравнений в частных производных путем разделения переменных | 109 |
| § 1. Охлаждение стержня конечной длины | 110 |
| § 2. Колебания струны конечной длины | 114 |
| § 3. Решение задачи Дирихле для круга | 118 |
| § 4. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе | 121 |
| § 5. Охлаждение тонкой пластины | 124 |
| § 6. Охлаждение бесконечного стержня | 127 |
| Глава III. Интегрирование уравнений математической физики в цилиндрической системе координат | 131 |
| § 1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя | 131 |
| § 2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя | 133 |
| § 3. Решение задачи Дирихле для цилиндра | 136 |
| Глава IV. Интегрирование уравнений математической физики в сферической системе координат | 139 |
| § 1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Уравнение Лежандра | 139 |
| § 2. Решение уравнения Лежандра | 141 |
| § 3. Полиномы Лежандра | 143 |
| § 4. Сферические и шаровые функции | 146 |
| § 5. Стационарное распределение температуры в шаре | 147 |
| Глава V. Метод функций Грина | 148 |
| § 1. Метод Грина решения краевых задач | 149 |
| § 2. Функция Грина для шара | 152 |
| § 3. Функция Грина для полупространства | 155 |
| Часть третья. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА | |
| Глава I. Элементы линейной алгебры | 157 |
| § 1. Линейное векторное пространство | 159 |
| § 2. Размерность линейного пространства | 164 |
| § 3. Евклидово пространство | 167 |
| § 4. Комплексное линейное пространство | 171 |
| Глава II. Аффинные преобразования | 172 |

| | |
|---|-----|
| § 1. Линейные операторы и операции над ними | 172 |
| § 2. Матричная алгебра | 177 |
| § 3. Исследование линейных преобразований с помощью матриц. Характеристический многочлен | 181 |
| § 4. Линейные преобразования в унитарном пространстве | 187 |
| § 5. Линейные операторы в действительном евклидовом пространстве | 192 |

МЕТОДЫ *Е. И. Нечис*
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ



Е. И. Несис

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов*

530.1
Н55

Несис Е. И.

Н55 Методы математической физики. Учебн. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1977.

199 с. с ил.

В книге изложен учебный материал по математической теории поля, дифференциальным уравнениям в частных производных и линейной алгебре в объеме, соответствующем учебной программе по курсу «Методы математической физики» для физико-математических факультетов педагогических институтов.

Н $\frac{60602-569}{103(03)-77}$ 29-77

530.1

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Физика в своем историческом развитии постепенно превращалась из науки описательной в науку точную. Для характеристики различных явлений и процессов, происходящих в природе и технике, физики все шире используют математические методы, или, как принято говорить, соответствующий математический аппарат.

Для этой цели пришлось прежде всего ввести меру каждого физического свойства. Пока физики имели дело с простейшими свойствами тел, в качестве меры каждого из них можно было ограничиться *скалярными величинами*, обычно показывающими, во сколько раз мера данного свойства у рассматриваемого тела больше некоторого единичного масштаба. Так были введены такие скалярные величины, как длина, площадь, объем, масса, время, температура, электрический заряд, энергия и т. п.

Со временем выяснилось, что для количественного описания быстроты движения, изменения этой быстроты, взаимодействия тел и т. п. скалярные величины не подходят. В этих случаях оказались пригодными более сложные математические величины — направленные отрезки, или *векторы*.

В конце XIX века физикам стало ясно, что для характеристики деформаций, инерции при вращательном движении, усилий в деформированных твердых телах и т. п. необходимы величины еще более сложной математической природы — *тензоры*.

С другой стороны, развитие количественных методов показало, что одно и то же физическое свойство в разных точках исследуемого объекта может принимать различные значения, и поэтому для математического описания необходимо знать совокупность значений соответствующей величины во всех точках рассматриваемого объекта. Так в

физике постепенно сложилось представление о *математическом поле* — области пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины.

Поля бывают скалярные, векторные и тензорные. Каждое из них, в свою очередь, может быть *стационарным* (если физическая величина в каждой точке области со временем не меняется) или *нестационарным*. Ясно, что стационарное поле есть функция координат x, y, z точек пространства, а нестационарное поле представляет собой функцию четырех переменных: координат x, y, z и времени t .

Введение понятия поля сыграло в физике такую же прогрессивную роль, как в свое время появление в математике понятия переменной величины.

Основная задача математической физики — это аналитическое исследование скалярных, векторных и тензорных полей физических величин.

В математической физике рассматриваются две проблемы — прямая и обратная.

Прямая проблема состоит в следующем. Задано правило определения интересующей нас физической величины в любой точке пространства, т. е. задано поле; требуется установить характер этого поля, т. е. быстроту его изменения от точки к точке. Изучением дифференциальных свойств различных полей занимается *математическая теория поля*.

Обратная проблема состоит в нахождении некоторой физической величины, т. е. конкретного вида математического поля, если известны условия, в которых находится физический объект.

Приведем пример. Пусть сплошной металлический цилиндр касается нижним основанием горячей воды ($T = T_1$), а остальная его поверхность окружена холодным воздухом ($T = T_0$). Физически ясно, что внутри цилиндра вследствие теплопроводности материала установится тепловое равновесие и образуется стационарное скалярное поле температур $T = T(x, y, z)$ (рис. 1). Вид этого поля можно определить аналитически.

В общем случае любое физическое явление или процесс представляет собой изменение каких-либо физических величин (скалярных, векторных, тензорных) в пространстве и во времени. Поэтому математическое поле, вообще говоря, описывается функциями четырех независимых переменных x, y, z, t . И задача состоит в нахождении этих функций.

Для нахождения неизвестных функций нужно, исходя из управляющих данным физическим явлением закономерностей, составить функциональные уравнения, решая которые можно будет найти искомые функции. По причинам, которые мы выясним ниже, эти функциональные уравнения обычно представляют собой своеобразные дифференциальные уравнения, в которых искомая функция зависит от нескольких переменных.

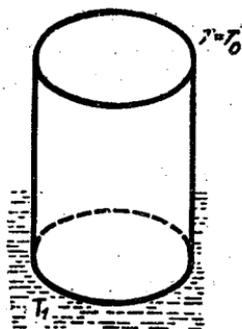


Рис. 1

Изучением методов составления и, главное, интегрирования уравнений такого рода занимается вторая часть математической физики — *теория дифференциальных уравнений в частных производных*.

Совокупность теории поля и теории дифференциальных уравнений в частных производных образует так называемую классическую математическую физику.

Однако за последние несколько десятков лет в связи с успехами теории относительности и открытием качественно новых, квантовых свойств у микрочастиц (молекул, атомов, ядер, электронов и т. п.) задачи математической физики значительно расширились: появилась необходимость в изучении *полей комплексных величин* в комплексном пространстве, в использовании для их исследования не только методов математического анализа, но и сравнительно новой математической науки — *линейной алгебры*, являющейся своеобразным сочетанием алгебраической теории систем уравнений первой степени и аналитической геометрии n -мерных плоских пространств. Этим вопросам посвящена третья часть предлагаемого пособия.

Часть первая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Глава I.

СКАЛЯРНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

Чтобы максимально облегчить изучение математической теории поля, мы в этой главе ограничимся рассмотрением простейших стационарных полей на плоскости и будем пользоваться только прямоугольными декартовыми координатами.

§ 1. Скалярное поле и векторное поле его градиента

Скалярным полем называется область плоскости, каждой точке которой сопоставляется некоторое значение скалярной величины φ .

Так как произвольная точка на плоскости характеризуется координатами x, y или радиус-вектором \vec{r} , то аналитически любое скалярное поле может быть задано либо в виде функции координат $\varphi = \varphi(x, y)$, либо в функции радиус-вектора $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Геометрически двумерное скалярное поле $\varphi = \varphi(x, y)$ можно рассматривать как некоторую поверхность в пространстве трех измерений, где всякой точке (x, y) плоскости соответствует своя высота $z = \varphi(x, y)$ (рис. 2).

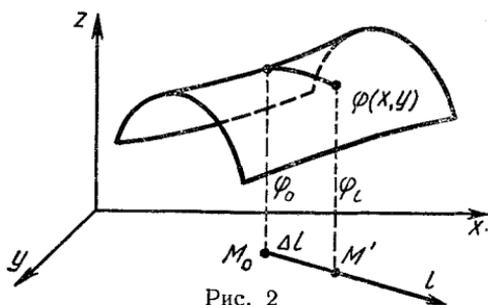


Рис. 2

Как известно из дифференциального исчисления, важнейшей аналитической характеристикой функции одной переменной $S = f(t)$ является ее производная $\frac{dS}{dt}$, определяющая быстроту изменения зависимой переменной S с изменением аргумента t . Какая же величина играет роль производной в случае скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y)$?

Пусть $\varphi(x, y)$ является в заданной области непрерывной, однозначной и дифференцируемой функцией координат x и y . Чтобы дать количественную характеристику быстроты изменения скалярной величины φ в окрестности произвольной точки M поля, введем понятие производной по данному направлению.

Производной скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y)$ по некоторому направлению l называется предел отношения приращения зависимой переменной в этом направлении к перемещению, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi_l - \varphi_0}{\Delta l}, \quad (1)$$

где φ_0 и φ_l — значения скалярной функции φ соответственно в рассматриваемой точке M и соседней точке M' , отстоящей от M на расстоянии Δl вдоль выбранного направления l (см. рис. 2).

Очевидно, что величина $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ зависит от выбора направления l . И поскольку через точку на плоскости можно провести бесчисленное множество различных направлений, то может показаться, что для дифференциальной характеристики скалярного поля необходимо задать в каждой точке (x, y) бесконечное количество производных $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ по всевозможным направлениям, проходящим через эту точку.

Оказывается, однако, что вследствие непрерывности и однозначности функции $\varphi = \varphi(x, y)$ для определения скорости ее изменения вдоль произвольного направления l достаточно знать только две производные по двум взаимно перпендикулярным направлениям, скажем $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Чтобы в этом убедиться, введем представление об *эквипотенциальных линиях* (линии уровня), представляющих собой геометрическое место точек, которым соответствует одно и то же значение скалярной величины φ . Ясно, что уравнение эквипотенциальной линии имеет вид $\varphi(x, y) = \varphi_i = \text{const}$. Меняя значение постоянной φ_i , получим семей-

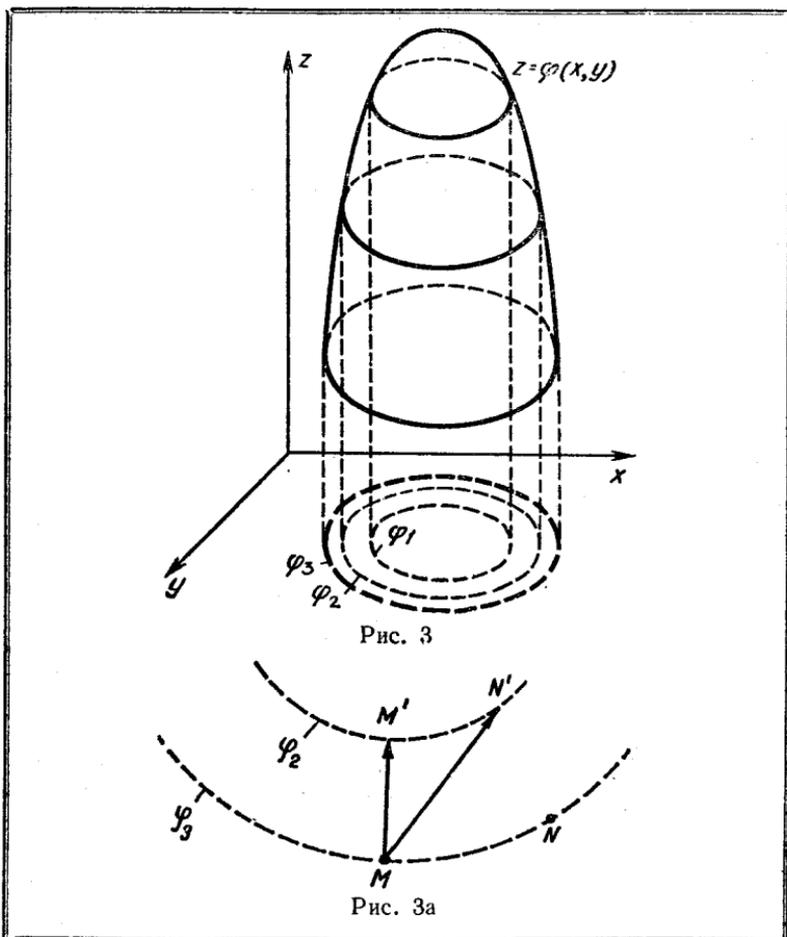


Рис. 3

Рис. 3а

ство линий уровня. Следует иметь в виду, что при геометрической интерпретации поля все эти линии лежат не на поверхности $z = \varphi(x, y)$, а на плоскости XOY , каждая из них представляет собой множество точек, которым соответствуют равные высоты z (рис. 3). У температурного поля линии уровня представляют собой *изотермы*; у электростатического поля — это *линии равного потенциала*.

Если на плоскости изобразить эквипотенциальные линии, соответствующие значениям скалярной функции $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, для которых $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{const}$ (рис. 3), то по виду семейства этих линий можно будет качественно

судить о быстроте изменения поля в любой точке по любому направлению: где гуще расположены линии уровня, там скалярная величина φ изменяется быстрее. Однако для количественной характеристики поля этого недостаточно.

Пусть нас интересует скорость изменения скалярной величины φ в окрестности точки M , в которой $\varphi = \varphi_3$ (рис. 3а). Проведем через M эквипотенциальную линию \overline{MN} . Кроме того, построим близкую к \overline{MN} линию уровня $\overline{M'N'}$, соответствующую несколько большему значению потенциала $\varphi_2 = \varphi_3 + \Delta\varphi$. Пусть вектор $\overrightarrow{MM'} = |\overline{MM'}| \vec{n}$ направлен вдоль нормали к \overline{MN} в сторону возрастания φ , а вектор $\overrightarrow{MN'} = |\overline{MN'}| \vec{l}$ — вдоль произвольного направления (где \vec{n} и \vec{l} — единичные векторы, направленные соответственно вдоль $\overline{MM'}$ и $\overline{MN'}$).

Из рисунков 3 и 3а ясно, что производные от φ по направлениям \vec{n} и \vec{l} соответственно равны:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\overline{MM'}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\overline{MN'}},$$

где пределы берутся при условии, что $\overline{M'N'}$ неограниченно приближается к \overline{MN} , т. е. $|\overline{MM'}| \rightarrow 0$ и $|\overline{MN'}| \rightarrow 0$.

Так как при приближении $\overline{M'N'}$ к \overline{MN} треугольник $\overline{MM'N'}$ можно считать прямоугольным, то $|\overline{MM'}| = |\overline{MN'}| \cos(\widehat{l, n})$, и мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\widehat{l, n}). \quad (2)$$

Отсюда следует, что в любой точке поля производная по нормали к линии уровня больше производной по любому другому направлению. Зная производную $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, можно по формуле (2) вычислить производную по произвольному направлению l , проходящему через рассматриваемую точку.

Поскольку производная функции $\varphi = \varphi(x, y)$ по нормали к эквипотенциальной линии играет особую роль для дифференциальной характеристики скалярного поля, то оказалось полезным ввести понятие *градиента*.

Градиентом скалярного поля $\varphi(x, y)$ в данной точке M называется вектор, направленный по нормали \vec{n} к проходящей через точку M линии уровня (в сторону возра-

стания φ) и численно равный производной от φ по этому направлению:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что производная по любому направлению равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \text{grad}_l \varphi. \quad (4)$$

В частности, производные вдоль осей координат равны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \text{grad}_x \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \text{grad}_y \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Читая равенства (5) справа налево, можно градиент определить по-иному.

Градиентом скалярной функции $\varphi(x, y)$ называется вектор, у которого проекции на оси координат равны соответственно частным производным от φ по x и y :

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}. \quad (6)$$

Отсюда вытекает следующее выражение для абсолютного значения градиента, т. е. длины вектора $\nabla \varphi$:

$$|\text{grad } \varphi| \equiv |\nabla \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (7)$$

Наконец, исходя из равенства (4) можно дать еще одно определение градиента.

Градиент скалярного поля $\varphi(x, y)$ в произвольной точке — это вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания функции в окрестности точки, равный производной от функции φ по этому направлению.

Из всего сказанного следует, что построенный в некоторой точке скалярного поля вектор $\nabla \varphi$ полностью характеризует аналитические свойства функции $\varphi(x, y)$ в окрестности этой точки. Таким образом, для аналитической характеристики всего скалярного поля необходимо знать векторы $\nabla \varphi$ во всех точках этого поля, иными словами, нужно знать векторное поле градиента.

Если каждой точке $\vec{r}(x, y)$ некоторой части плоскости сопоставляется определенная векторная величина \vec{a} , то говорят, что задано векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ или $\vec{a}(x, y)$.

Векторные поля графически изображают направленными отрезками, нанесенными в точках, отстоящих друг от друга на равных расстояниях.

Заметим, что поскольку вектор \vec{a} на плоскости определяется двумя скалярными проекциями a_x и a_y , то задание векторного поля $\vec{a}(x, y)$ эквивалентно заданию двух скалярных полей $a_x(x, y)$ и $a_y(x, y)$. В результате мы приходим к заключению, что дифференциальной характеристикой («производной») скалярного поля $\varphi(x, y)$, заданного в некоторой области плоскости, является векторное поле $\text{grad } \varphi(x, y)$, определенное в той же области.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Задано скалярное поле $\varphi = (x^2 + y^2)^{-1/2} = 1/r$. Определить векторное поле градиента.

Воспользуемся для этой цели формулой (6). Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

то

$$\text{grad } \varphi = -\frac{\vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Выясним смысл полученного решения. Легко видеть, что эквипотенциальные линии рассматриваемого скалярного поля удовлетворяют уравнению типа $x^2 + y^2 = \text{const}$, т. е. представляют собой окружности с центром в начале координат.

Поскольку по условию φ зависит только от расстояния r , то в пространстве трех измерений эта функция геометрически изобразится поверхностью вращения. Сечением этой поверхности плоскостью $y=0$ будет линия $\varphi = 1/x$, представляющая собой равнобочную гиперболу, асимптотами которой являются оси x и y .

Следовательно, поверхность $\varphi(x, y)$ есть гиперболоид вращения (рис. 4, а). Ясно, что в любой точке плоскости XOY направление быстрого возрастания высоты поверхности φ совпадает с направлением к центру. При этом, как ясно из вида этой поверхности, крутизна подъема φ при приближении к центру возрастает все быстрее. Это соответствует тому, что длина вектора $\nabla \varphi$ вдоль направления к началу координат возрастает обратно пропор-

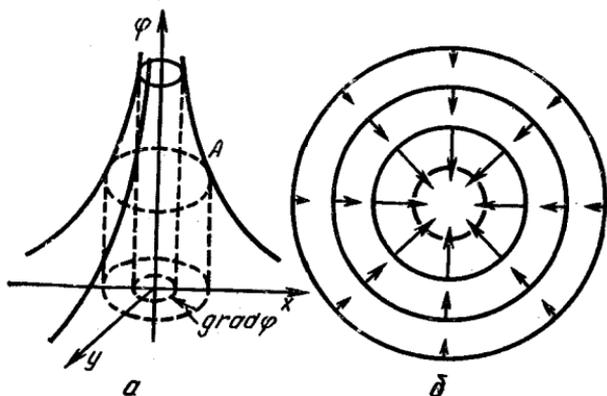


Рис. 4

ционально квадрату радиус-вектора точки:

$$|\nabla\varphi| = \frac{1}{r^2}.$$

Графическое изображение векторного поля $\text{grad}\varphi$ приведено на рис. 4, б.

Теперь рекомендуем читателю самостоятельно решить и проанализировать примеры 2 и 3.

2. Определить и графически изобразить векторные поля градиентов скалярных функций: а) $\varphi = x^2 + y^2$, б) $\varphi = (\vec{c}, \vec{r})$ (\vec{c} — постоянный вектор).

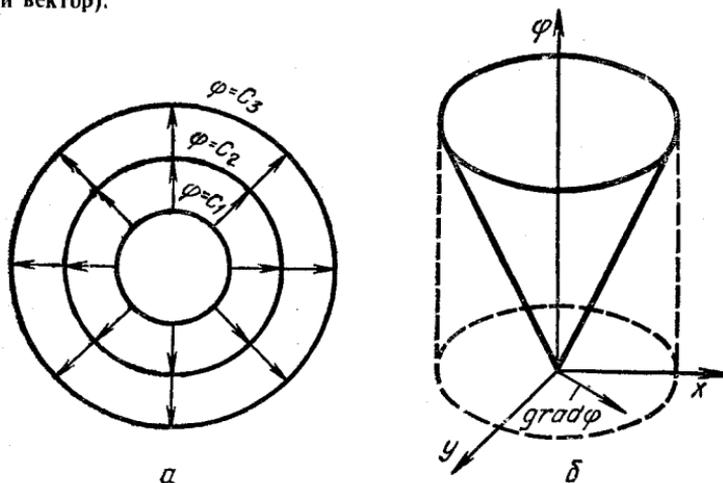


Рис. 5

Ответ: а) $\text{grad } \varphi = 2\vec{r}$, б) $\text{grad } \varphi = \vec{c}$.

3. Определить вид скалярного поля $\varphi(x, y)$ и геометрически изобразить его, если поле его градиента определяется формулой $\nabla\varphi = a\frac{\vec{r}}{r}$ (рис. 5, а).

Ответ: $\varphi = a\sqrt{x^2 + y^2} = ar$; поверхность $\varphi(x, y)$ представляет собой конус с вершиной в начале координат (рис. 5, б).

§ 2. Аналитическое определение понятия вектора

Перейдем к более глубокому знакомству с векторными величинами и векторными полями. Как уже отмечалось, исторически векторное исчисление возникло в связи с потребностью физики количественно описывать быстроту движения, изменения быстроты движения, взаимодействия тел. Соответствующие величины имеют не только модуль, но и направление.

Если бы даже все физические величины обладали скалярным характером, то и в этом случае математическая физика не могла бы обойтись без векторов. Ведь быстрота изменения скалярной функции двух переменных $\varphi(x, y)$ не может быть охарактеризована скалярной функцией; для этого нужна переменная векторная величина $\nabla\varphi(x, y)$, играющая роль производной скалярного поля.

Правда, на первый взгляд представляется, что для указанной цели можно воспользоваться скалярными величинами $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, которые, как может показаться, лишь для удобства объединены в вектор $\nabla\varphi$.

Однако более внимательное рассмотрение показывает, что это не так. Дело в том, что частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, строго говоря, не являются скалярными (иногда их называют *псевдоскалярами*): Ведь значения этих частных производных зависят не только от вида функции $\varphi(x, y)$, но и от выбора осей координат. Выбрав по-иному направления этих осей, мы получим для указанных производных другие значения.

Нетрудно убедиться, что причиной таких свойств скалярных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ является то, что они являются проекциями вектора $\nabla\varphi$ на оси координат.

Непосредственный аналитический смысл, зависящий только от вида скалярного поля $\varphi(x, y)$, имеет в любой точке поля вектор $\nabla\varphi$, в то время как его проекции $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ зависят еще от выбора осей X и Y .

Следовательно, дифференцирование скалярных полей с неизбежностью приводит нас к необходимости выйти из класса скалярных функций в более широкий класс функций — *векторных функций*.

Векторы, т. е. направленные отрезки, представляют собой определенные геометрические объекты. Как известно из аналитической геометрии, векторы можно складывать (по правилу параллелограмма), умножать на числа, умножать друг на друга скалярно и векторно, производить над ними также другие геометрические операции. Последние значительно упрощаются и сводятся к алгебраическим операциям, если воспользоваться методом координат и каждый вектор \vec{a} характеризовать его скалярными проекциями a_x и a_y на оси X и Y . Правда, эти проекции, как мы уже отмечали, не являются истинными скалярами, ибо, выбрав новые оси координат X' и Y' , мы для характеристики того же вектора \vec{a} получим новые проекции a'_x и a'_y , связанные со старыми a_x и a_y известными из аналитической геометрии формулами:

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= a_x \cos(\widehat{x', x}) + a_y \cos(\widehat{x', y}), \\ a'_y &= a_x \cos(\widehat{y', x}) + a_y \cos(\widehat{y', y}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Но так или иначе, выбрав определенную систему координат и сопоставляя каждому вектору \vec{a} пару чисел a_x и a_y , мы получили возможность различные геометрические действия с векторами выполнять с помощью хорошо известных операций над числами. Так, например, суммой двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , проекции которого равны суммам соответствующих проекций слагаемых: $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$; произведением вектора \vec{a} на число λ называется новый вектор, проекции которого равны λa_x и λa_y и т. п.

Однако дальнейшее развитие векторного исчисления показало, что введение скалярных проекций, определяющих произвольный вектор, позволяет сверх этого более глубоко взглянуть на векторные величины, рассматривая их не как геометрические, а как некоторые алгебраические объекты. А именно, можно дать следующее аналитическое (алгебраическое) определение вектора.

Вектором называется некоторая величина \vec{a} , характеризующаяся в каждой системе координат XOY двумя скалярами a_x и a_y , которые при переходе к другой системе

координат $X'OY'$ преобразуются с помощью формул (8) в новые скаляры a'_x и a'_y .

Конечно, это определение векторной величины значительно сложнее геометрического, но оно имеет три важных преимущества.

Во-первых, с его помощью легко обобщить понятие вектора не только на реальное трехмерное пространство, но и на вещественные и комплексные пространства любого числа измерений. Такое обобщение, как мы увидим ниже, оказалось весьма плодотворным для современной физики.

Во-вторых, определив вектор аналитически, мы можем отвлечься от его непосредственного образа, абстрагироваться от наглядных представлений о направленном отрезке и рассматривать его как величину произвольной физической природы. Так, например, известно, что любой цвет можно получить путем смешения в определенных пропорциях трех красок основных цветов (красного, зеленого и синего). Поэтому каждый цвет можно рассматривать как некий пространственный вектор \vec{a} с тремя компонентами $a_{кр}$, $a_{зел}$, $a_{син}$, характеризующими концентрации соответствующих красок.

Наконец, аналитический подход позволяет обобщить понятие вектора и ввести более сложные математические величины — тензоры второго и более высоких рангов, которым вообще не соответствуют наглядные геометрические образы. (С этой точки зрения вектор есть тензор первого ранга.)

Однако наряду с достоинствами, алгебраическое представление вектора \vec{a} в виде проекций a_x и a_y обладает и существенным недостатком: ведь проекции зависят не только от определяемого ими вектора, но и от выбора системы координат.

Говоря словами известного советского геометра П. К. Рашевского, «при координатном методе исследования на изучаемую геометрическую картину накладывается случайный выбор координатной системы, и те аналитические данные, которые мы получаем, отражают не только то, что нас интересует, но и то, что вовсе не интересует и что без надобности усложняет результаты. Возникает потребность в сложных построениях научиться отделять геометрически существенное от случайно привнесенного выбором осей координат».

Последняя задача частично решается путем установления так называемых инвариантных соотношений между скалярными проекциями, определяющими вектор, или скалярными компонентами более сложной математической величины — *тензора*.

Ясно, что хотя значения a_x и a_y и зависят от выбора осей координат, тем не менее они определяют геометрический объект — вектор. Следовательно, между ними должны существовать одна или несколько зависимостей, которые характеризуют внутренние геометрические свойства этого объекта, не зависящие от выбора координатной системы и называемые *инвариантами*:

$$\Phi(a_x, a_y) = \Phi(a'_x, a'_y) = \text{inv.}$$

Каждый инвариант имеет непосредственный геометрический (или физический) смысл. Легко видеть, что в случае плоского вектора \vec{a} , определяемого двумя скалярными компонентами (проекциями) a_x и a_y , инвариантным соотношением является функция $a_x^2 + a_y^2$, равная квадрату длины вектора, это соотношение инвариантно к повороту прямоугольных осей координат, ибо, возведя в квадрат равенства (8) и сложив их, получим:

$$a_x'^2 + a_y'^2 = a_x^2 + a_y^2.$$

§ 3. Векторные поля и их дифференциальная характеристика

Пусть каждой точке $\vec{r}(x, y)$ плоскости (или части ее) соответствует некоторый вектор $\vec{a}(\vec{r})$, т. е. имеется векторная функция координат или векторное поле. Как определить быстроту изменения векторной переменной \vec{a} в окрестности произвольной точки M ? Ясно, что это задача дифференциального исчисления и она сводится к определению производной векторной функции \vec{a} по векторному аргументу \vec{r} .

Как и в случае скалярного поля, начнем с определения производной по данному направлению l :

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\vec{a}_l - \vec{a}_0}{\Delta l}, \quad (9)$$

где \vec{a}_0 и \vec{a}_l — значения векторной функции \vec{a} в точке M и близкой к ней на прямой l точке M_l .

Из (9) следует, что производная $\frac{\vec{\partial a}}{\partial t}$ есть величина векторная. Для другого направления l' , проведенного через точку M , получим другой вектор $\frac{\vec{\partial a}}{\partial l'}$. Но это не значит, что для полной дифференциальной характеристики векторного поля в данной точке необходимо знать бесконечное количество производных от \vec{a} по всем всевозможным направлениям.

Оказывается, что, как и в случае скалярного поля, достаточно знать всего две векторные производные по двум взаимно перпендикулярным направлениям, скажем $\frac{\vec{\partial a}}{\partial x}$ и $\frac{\vec{\partial a}}{\partial y}$. Дело в том, что производная по любому другому направлению весьма просто выражается через $\frac{\vec{\partial a}}{\partial x}$ и $\frac{\vec{\partial a}}{\partial y}$. Действительно, всякий вектор \vec{a} полностью определяется в системе координат XOY двумя скалярными компонентами a_x и a_y . Поэтому любому векторному полю $\vec{a}(x, y)$ всегда в этой системе координат можно сопоставить эквивалентную совокупность двух скалярных полей $a_x(x, y)$ и $a_y(x, y)$. А так как производной скалярного поля является градиент, мы получаем, что пара векторов ∇a_x и ∇a_y , построенных в интересующей нас точке векторного поля, полностью характеризует в ее окрестности поведение функции $\vec{a}(r)$.

Но можно ли отсюда заключить, что производной векторной функции $\vec{a}(x, y)$ является пара векторов ∇a_x и ∇a_y ? Внимательное рассмотрение существа дела показывает, что на этот вопрос следует ответить отрицательно. Подобно тому как в случае скалярного поля $\varphi(x, y)$ частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ представляли собой псевдоскалярные величины (их значения зависели не только от вида функции $\varphi(x, y)$, но и от выбора осей X и Y), в случае векторного поля $\vec{a}(x, y)$ градиенты ∇a_x и ∇a_y являются псевдовекторами, ибо они не имеют инвариантного смысла, а зависят от выбора осей координат. Ведь, выбрав новые оси X' и Y' , мы тому же векторному полю $\vec{a}(x, y)$ сопоставим

два других скалярных поля $a'_x(\vec{r})$ и $a'_y(\vec{r})$ и поведение функции \vec{a} в окрестности рассматриваемой точки будет определяться другой парой векторных величин $\nabla a'_x$ и $\nabla a'_y$.

Все это наводит нас на мысль, что в случае векторного поля имеет место такое же положение, что и в случае скалярного поля. Мы уже знаем, что поведение скалярной функции $\vec{\phi}(r)$ характеризуется в каждой системе координат своей парой скалярных величин $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, которые являются компонентами вектора $\nabla \phi$, имеющего непосредственный, инвариантный, не зависящий от выбора системы координат смысл. Точно так же поведение векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ в любой системе координат характеризуется парой векторных величин ∇a_x и ∇a_y . Поскольку, однако, характеризующая поведение функции $\vec{a}(\vec{r})$ производная должна иметь объективный, инвариантный смысл и не должна зависеть от выбора осей, то следует рассматривать ∇a_x и ∇a_y как векторные составляющие в данной системе координат некоей более сложной величины, называемой *тензором* и обозначаемой в виде $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тензор

$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$ и является производной векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$.

Из всего этого, в частности, следует, что тензор представляет собой инвариантную математическую величину, которая в каждой системе координат определяется парой векторных составляющих, подобно тому как вектор есть инвариантная величина, определяемая в каждой системе своей парой скалярных компонентов.

Перейдем теперь к подробному изучению тензорных величин.

§ 4. Тензоры и их свойства

Тензором называется величина $\hat{\Pi}$, характеризующая в системе координат XOY двумя векторами \vec{p}_x и \vec{p}_y , преобразующимися при переходе к другой системе координат $X'OY'$ в векторы \vec{p}'_x и \vec{p}'_y по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}'_x &= \vec{p}_x \cos(\widehat{x', x}) + \vec{p}_y \cos(\widehat{x', y}), \\ \vec{p}'_y &= \vec{p}_x \cos(\widehat{y', x}) + \vec{p}_y \cos(\widehat{y', y}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Векторы \vec{p}_x и \vec{p}_y называются составляющими тензора $\hat{\Pi}$ по осям X и Y . Подчеркнем, что \vec{p}_x и \vec{p}_y не являются какими-то частями тензора (тензор есть единая величина), а лишь характеризуют эту величину в данной системе координат. В другой системе координат мы получим другие составляющие, причем каждая «новая» составляющая зависит от всех «старых» составляющих.

Подобно выражению вектора через компоненты $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, принято записывать тензор через составляющие $\hat{\Pi} = \vec{p}_x \vec{i} + \vec{p}_y \vec{j}$. (Следует иметь в виду, что эта запись символическая: $\vec{p}_x \cdot \vec{i}$ — не скалярное произведение двух векторов.)

Так как \vec{p}_x и \vec{p}_y — векторы, то их можно разложить на компоненты:

$$\begin{aligned}\vec{p}_x &= p_{xx} \vec{i} + p_{xy} \vec{j}, \\ \vec{p}_y &= p_{yx} \vec{i} + p_{yy} \vec{j}.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что тензор $\hat{\Pi}$ можно также определить четырьмя скалярными величинами, называемыми компонентами тензора, которые записываются в виде таблицы (матрицы):

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{vmatrix}.$$

В тензорном исчислении стремятся к максимальному сокращению математической записи, для чего переименовывают координаты x, y в x_1, x_2 , а орты \vec{i}, \vec{j} в \vec{i}_1, \vec{i}_2 , тогда для каждого вектора можно написать:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^2 \vec{i}_k a_k.$$

Аналогично для тензора получим:

$$\hat{\Pi} = \sum_k \vec{i}_k \cdot \vec{p}_k.$$

Соответственно в матричной форме:

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}.$$

Если обозначить $\cos(\widehat{x_j, x_k}) = \alpha_{jk}$, то формулы преобразования компонентов вектора запишутся так:

$$a'_k = \sum_l \alpha_{kl} a_l.$$

Аналогично запишется формула для преобразования составляющих тензора $\vec{p}'_k = \sum_l \alpha_{kl} \vec{p}_l$. Легко показать, что для компонентов тензора формула, связывающая «старые» компоненты с «новыми», будет выглядеть так:

$$p'_{ki} = \sum_r \sum_s \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что «новые» компоненты тензора являются линейными комбинациями «старых».

Таким образом, можно дать другое определение понятия «тензор».

Тензором называется величина, характеризуемая в системе координат XOY совокупностью четырех чисел p_{ki} , записываемых в виде матрицы:

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}.$$

и преобразующихся при переходе к другой системе координат $X'OY'$ по формулам (11).

Так как мы рассматриваем только прямоугольные декартовы системы координат, то тензоры, о которых мы говорим, называются *ортогональными аффинными тензорами* второго ранга. Обычные векторы представляют собой тензоры первого ранга. А скалярные величины могут быть названы тензорами нулевого ранга.

Еще раз подчеркнем, что каждый тензор $\hat{\Pi}$ имеет непосредственный, инвариантный смысл, хотя в различных системах координат его составляющие \vec{p}_k и компоненты p_{ki} выглядят по-разному.

(Можно сказать, что составляющие тензора \vec{p}_1 и \vec{p}_2 являются «векторными проекциями» тензора $\hat{\Pi}$ на оси координат x_1 и x_2 , а компоненты p_{11} , p_{12} , p_{21} , p_{22} — соответствующими «скалярными проекциями векторных проекций» тензора.) Поэтому для тензорного исчисления значения имеют только те свойства компонентов тензора, которые справедливы в любой системе координат, т. е. являются инвариантными.

Исходя из этого рассмотрим некоторые простейшие типы тензоров.

1. Нулевым тензором $\hat{0}$ называется тензор, все компоненты которого равны нулю:

$$\hat{0} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Единичным тензором \hat{I} называется тензор, составляющими которого являются орты \vec{i} и \vec{j} , а матрица компонентов имеет вид:

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Легко проверить с помощью формулы (11), что у тензоров $\hat{0}$ и \hat{I} их компоненты сохраняют свои значения в любой системе координат.

3. Тензор \hat{S} называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют условию $s_{jk} = s_{kj}$, т. е. его матрица имеет вид:

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

4. Тензор \hat{A} называется антисимметричным, если $a_{jk} = -a_{kj}$, т. е. его компоненты образуют следующую матрицу:

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{vmatrix}.$$

Ясно, что свойства симметричности и антисимметричности — инвариантны.

5. Частным видом тензоров являются *диады* \hat{D} , составляющие которых (в любой системе координат!) суть коллинеарные векторы. Очевидно, что у диады строки и столбцы матрицы компонентов пропорциональны друг другу, а ее определитель равен нулю.

В произвольной системе координат матрица диады имеет вид:

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ ca & cb \end{vmatrix}.$$

Заметим, что два вектора \vec{a} и \vec{b} можно умножать не только скалярно (\vec{a}, \vec{b}) и векторно $[\vec{a}, \vec{b}]$, но и тензорно $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Тензорным произведением векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется тензор, компоненты которого образуют следующую матрицу:

$$\hat{D} = \{\vec{a}, \vec{b}\} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{vmatrix}.$$

Рекомендуем читателю убедиться, что компоненты $a_j b_k$ действительно преобразуются по тензорному закону (11). Поскольку строки и столбцы матрицы отличаются постоянным множителем, то полученный тензор \hat{D} является диадой, составляющие которой равны $\vec{D}_1 = a_1 \vec{b}$ и $\vec{D}_2 = a_2 \vec{b}$, т. е. коллинеарны второму сомножителю \vec{b} . Отсюда вытекает, что при повороте осей координат направление в пространстве составляющих диады не меняется, а их длины меняются совместно с проекциями первого сомножителя \vec{a} . Кроме того, ясно, что тензорное произведение векторов некоммутативно, т. е.

$$\{\vec{a}, \vec{b}\} \neq \{\vec{b}, \vec{a}\}.$$

Только в том частном случае, когда \vec{a} и \vec{b} являются коллинеарными векторами, их тензорное произведение образует симметричную диаду и не зависит от порядка сомножителей.

Упражнение

1. В некоторой системе координат тензор имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

Вычислить его компоненты и графически изобразить его составляющие в новой системе координат, повернутой относительно старой на угол 60° .

Ответ: $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 5/2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$

2. В системе координат XOY математическая величина характеризуется матрицей:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

В другой системе $X'OY'$, повернутой на 45° относительно нештрихованной, эта же величина определяется матрицей:

$$\begin{vmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 3/2 & -7/2 \end{vmatrix}.$$

Выяснить, является ли данная величина тензором.

3. В каком случае матрица тензорного произведения двух векторов содержит только один ненулевой элемент?

4. В какой системе координат одна из составляющих диады $\vec{D} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ обращается в нуль? Чему в этом случае равна длина второй составляющей? Является ли инвариантом суммарная длина составляющих диады $|\vec{D}_1 + \vec{D}_2|$?

§ 5. Тензорная алгебра

Над тензорами как своеобразными математическими величинами, характеризующими определенные физические свойства реальных тел, можно производить ряд алгебраических операций: складывать, умножать на числа, умножать тензор на тензор и др. Поэтому множество тензоров образует алгебру, являющуюся обобщением векторной алгебры.

Поскольку тензор в любой системе координат характеризуется скалярными компонентами p_{jk} , то естественно любое действие над тензорами определять как операцию над компонентами; при этом результат операции должен быть инвариантен относительно преобразования координат.

Перейдем к ознакомлению с простейшими алгебраическими операциями над тензорами.

1. Суммой двух тензоров $\hat{\Pi}'$ и $\hat{\Pi}''$ называется тензор

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}' + \hat{\Pi}'',$$

компоненты которого равны суммам компонентов слагаемых:

$$p_{jk} = p'_{jk} + p''_{jk}.$$

2. Произведением тензора $\hat{\Pi}$ на число λ называется тензор $\hat{\pi} = \lambda \hat{\Pi}$, компоненты которого t_{jk} равны произведению соответствующих компонентов p_{jk} на λ :

$$t_{jk} = \lambda p_{jk}.$$

Обобщением операций 1 и 2 являются линейные комбинации нескольких тензоров. Пусть даны n тензоров

$\hat{\Pi}'$, $\hat{\Pi}''$, ..., $\hat{\Pi}^{(n)}$ и n чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; линейная комбинация

$$\lambda_1 \hat{\Pi}' + \lambda_2 \hat{\Pi}'' + \dots + \lambda_n \hat{\Pi}^{(n)}$$

есть некоторый тензор $\hat{\Pi}$, компоненты которого t_{jk} суть линейные комбинации соответствующих компонентов $\rho_{jk}^{(n)}$:

$$t_{jk} = \lambda_1 \rho'_{jk} + \lambda_2 \rho''_{jk} + \dots + \lambda_n \rho^{(n)}_{jk}.$$

3. Перестановкой индексов (транспонированием) называется операция, превращающая тензор $\hat{\Pi}$ с компонентами ρ_{jk} в транспонированный тензор $\hat{\Pi}$, компоненты которого $\rho_{jk} = \rho_{kj}$. Так, если

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{vmatrix}.$$

В частности, в случае симметричного и антисимметричного тензоров $\hat{S} = \hat{S}$ и $\hat{A} = -\hat{A}$.

Следствием из рассмотренных трех операций является утверждение, что любой тензор $\hat{\Pi}$ всегда можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\hat{\Pi} = \hat{S} + \hat{A}.$$

Действительно, переставляя индексы у каждого из тензоров этого равенства, получим:

$$\hat{\Pi} = \hat{S} - \hat{A}.$$

Складывая и вычитая оба эти тензорных равенства, находим, что

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\Pi}) \text{ и } \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\Pi}). \text{ Таким образом, } \hat{\Pi} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\Pi}) + \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\Pi}).$$

4. Скалярным произведением тензора $\hat{\Pi} = \vec{i}_1 \vec{\rho}_1 + \vec{i}_2 \vec{\rho}_2$ на вектор $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2$ справа называется новый век-

тор $\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \vec{i}_1(\vec{p}, \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}, \vec{a})$. Иными словами, компоненты нового вектора $\vec{a}' = \vec{i}_1 a'_1 + \vec{i}_2 a'_2$ равны:

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= p_{11}a_1 + p_{12}a_2, \\ a'_2 &= p_{21}a_1 + p_{22}a_2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

или (в сокращенной записи):

$$a'_j = \sum_k p_{jk} a_k. \quad (12')$$

5. Скалярным произведением тензора $\hat{\Pi} = \vec{i}_1 \vec{p}_1 + \vec{i}_2 \vec{p}_2$ на вектор $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2$ слева называется вектор $\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi}) = (\vec{a}, \vec{i}_1) p_1 + (\vec{a}, \vec{i}_2) p_2$. Компоненты вектора \vec{a}'' равны

$$\left. \begin{aligned} a''_1 &= a_1 p_{11} + a_2 p_{21}, \\ a''_2 &= a_1 p_{12} + a_2 p_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

или (в сжатой форме):

$$a''_j = \sum_k a_k p_{kj}. \quad (13')$$

Легко видеть, что скалярное произведение тензора $\hat{\Pi}$ на вектор \vec{a} слева равно произведению транспонированного тензора $\hat{\Pi}$ на тот же вектор справа, и наоборот:

$$(\hat{\Pi}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{\Pi}).$$

Отсюда далее вытекает, что в случае симметричного тензора \hat{S} скалярное произведение его на произвольный вектор не зависит от порядка сомножителей (это произведение коммутативно):

$$(\hat{S}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{S}).$$

Произведение же антисимметричного тензора \hat{A} на вектор антикоммутативно:

$$(\hat{A}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \hat{A}).$$

Заметим, что для вычисления компонентов векторов $\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a})$ и $\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi})$ удобно пользоваться известными правилами умножения матриц, рассматривая любой вектор

как некоторую столбцовую или строчную матрицу

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ или } \vec{a} = (a_1, a_2):$$

$$\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi}) = (a_1, a_2) \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = (a_1p_{11} + a_2p_{21}, \dots).$$

В первом случае мы получили вектор \vec{a}' в виде столбцовой матрицы, во втором — вектор \vec{a}'' в виде строчной.

6. Скалярным произведением двух тензоров $\hat{\Pi}$ и $\hat{\mathcal{M}}$ называется тензор $\hat{\Phi}$, матрицы компонентов которого равны произведению матриц тензоров сомножителей, т. е. $\Phi_{ki} = \sum p_{kj}t_{ji}$:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Pi} \cdot \hat{\mathcal{M}} = \begin{vmatrix} p_{11}p_{12} \\ p_{21}p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{11}t_{12} \\ t_{21}t_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}t_{11} + p_{12}t_{21} & p_{11}t_{12} + p_{12}t_{22} \\ p_{21}t_{11} + p_{22}t_{21} & p_{21}t_{12} + p_{22}t_{22} \end{vmatrix}.$$

Кроме перечисленных, существует еще ряд более сложных операций над тензорами, но мы их рассматривать не будем.

§ 6. Тензор как аффинор

Тот факт, что при умножении тензора $\hat{\Pi}$ на вектор \vec{a} получается не зависящий от системы координат новый вектор \vec{a}' , позволяет рассматривать тензор не только как математическую величину, но и как некий *оператор*, превращающий один вектор в другой. Вообще, оператором, или преобразованием, называют правило, сопоставляющее функции $u(x)$ определенную функцию $v(x)$. Операторы, которые прямые линии преобразуют в прямые, называют *аффинорами*.

С различными свойствами операторов мы подробнее познакомимся в ч. III, а сейчас ограничимся тем, что любой тензор можно рассматривать как аффинор и, наоборот, каждому аффинору можно сопоставить некоторый тензор. Поэтому можно дать новое определение тензора.

Если некоторый оператор $\hat{\Pi}$, характеризующийся в каждой системе координат своей четверкой чисел $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$, преобразует произвольный вектор \vec{a} в новый вектор \vec{a}' по линейным формулам (12), то $\hat{\Pi}$ есть аффинор (тензор).

Отсюда получается критерий, с помощью которого можно судить, является ли математический объект $\hat{\Pi}$, определяемый в каждой системе координат своей матрицей чисел:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix},$$

тензором или нет. А именно, пусть некоторый вектор \vec{a} характеризуется (в данной системе координат) определенной столбцевой матрицей $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Ясно, что в результате умножения квадратной матрицы $\|p_{jk}\|$ на матрицу-столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ мы получим новую столбцевую матрицу:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix}.$$

В различных координатных системах элементы b_1 и b_2 будут выглядеть по-разному, но если всегда они характеризуют один и тот же вектор \vec{b} , то матрица $\|p_{jk}\|$ определяет тензор (или аффинор) $\hat{\Pi}$.

Применим теперь этот критерий для получения явного вида тензора как производной векторной функции по векторному аргументу. Пусть дано векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$. При бесконечно малом смещении \vec{dr} из некоторой точки поля в соседнюю точку функция \vec{a} получает приращение $d\vec{a}$. Чтобы связать $d\vec{a}$ и \vec{dr} , выберем какую-нибудь координатную систему с осями X_1 и X_2 . Каждую точку поля будем определять не вектором \vec{r} , а числами x_1 и x_2 , а векторную функцию $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x_1, x_2)$ заменим полностью эквивалентной системой двух скалярных функций координат $a_1(x_1, x_2)$ и $a_2(x_1, x_2)$. Соответственно вектор приращения функции $d\vec{a}$ будет характеризоваться двумя скалярными дифференциалами $da_1(x_1, x_2)$ и $da_2(x_1, x_2)$. По правилам дифференцирования функций нескольких переменных мы вправе записать:

$$\left. \begin{aligned} da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2, \\ da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если бы мы выбрали иную систему координат (X'_1, X'_2) , то рассматриваемые векторы имели бы другие компоненты:

$$\vec{a}(a'_1, a'_2), \vec{da}(da'_1, da'_2), \vec{dr}(dx'_1, dx'_2).$$

Соответственно равенства (14) приняли бы форму:

$$\left. \begin{aligned} da'_1 &= \frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial a'_1}{\partial x'_2} dx'_2, \\ da'_2 &= \frac{\partial a'_2}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial a'_2}{\partial x'_2} dx'_2. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Сопоставляя равенства (14) и (14'), можно убедиться, что в каждой системе координат имеется своя четверка скалярных величин $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$, которая компонентам вектора $\vec{dr}(dx_1, dx_2)$ линейным образом сопоставляет компоненты одного и того же вектора $\vec{da}(da_1, da_2)$.

Следовательно, эта совокупность чисел образует аффинор, называемый *тензором-производной* векторной функции по векторному аргументу и обозначаемый так:

$$\frac{\vec{da}}{\vec{dr}} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{array} \right\|. \quad (15)$$

Этот тензор полностью характеризует быстроту изменения зависимой переменной \vec{a} . Равенства (14) могут быть теперь записаны в тензорном виде:

$$\vec{da} = \left(\frac{\vec{da}}{\vec{dr}}, \vec{dr} \right). \quad (16)$$

§ 7. Главные направления тензора

Мы уже неоднократно отмечали, что при скалярном умножении тензора на вектор получается новый вектор, вообще говоря, отличный от первоначального как по модулю, так и по направлению.

Оказывается, и мы сейчас убедимся в этом, у тензоров существуют некоторые *главные направления* на плоскости, такие, что, воздействуя тензором на вектор \vec{a} , взятый вдоль такого направления, получим новый вектор \vec{a}' , коллинеарный первоначальному. Иными словами, если на-

правление вектора \vec{a} совпадает с главным направлением тензора $\hat{\Pi}$, то $(\hat{\Pi}, \vec{a}) = \lambda \vec{a}$. Скалярная величина λ называется *главным* или *собственным значением тензора*; она показывает, во сколько раз тензор $\hat{\Pi}$ изменяет длину векторов, расположенных вдоль главного направления (поэтому число λ еще называют *коэффициентом растяжения*).

Выясним, сколько главных направлений имеет данный тензор и как они ориентированы на плоскости. Запишем векторное равенство (17) в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 &= \lambda a_1, \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 &= \lambda a_2. \end{aligned} \right\}$$

Эту систему уравнений можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} (p_{11} - \lambda)a_1 + p_{12}a_2 &= 0, \\ p_{21}a_1 + (p_{22} - \lambda)a_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Полученная система однородных линейных уравнений относительно a_1 и a_2 имеет ненулевые решения только в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

В развернутом виде это уравнение, называемое *характеристическим*, имеет вид:

$$\lambda^2 - \lambda(p_{11} + p_{22}) + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (19')$$

Из него находим собственные значения λ . В том случае, когда оба корня λ_I и λ_{II} действительны, мы получим, вообще говоря, два главных направления. Действительно, подставляя в (18) последовательно значения λ_I и λ_{II} , мы для каждого из них получим соответствующие отношения компонентов векторов \vec{a}^I и \vec{a}^{II} . Главные направления определяются углами α_I и α_{II} между векторами \vec{a}^I и \vec{a}^{II} и осью X_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha_I = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_I = \frac{\lambda_I - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_I - p_{22}}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{II} = \frac{\lambda_{II} - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_{II} - p_{22}}. \quad (20')$$

Легко понять, что в случае трехмерного тензора мы с помощью аналогичных рассуждений получили бы кубическое характеристическое уравнение, которое имеет по крайней мере одно действительное значение (остальные два корня могут быть мнимыми). Поэтому у пространственного тензора всегда существует либо одно, либо три главных направления.

В дальнейшем мы будем рассматривать наиболее важный для практики класс симметричных тензоров, у которых, как можно показать, главные значения λ являются действительными числами.

Можно также доказать, что главные направления, или *оси* симметричного тензора в общем случае, когда корни различные ($\lambda_I \neq \lambda_{II}$), взаимно перпендикулярны. И только в случае кратных корней ($\lambda_I = \lambda_{II}$) все направления на плоскости являются главными и в качестве осей тензора можно выбрать любые два взаимно перпендикулярные направления. (Почему так ведут себя тензоры с одинаковыми главными значениями, станет ясно из последующего.)

Задача. В системе XOY тензор \hat{S} характеризуется матрицей:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Найти его главные направления.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Отсюда $\lambda = 2 \pm 1$. Следовательно, главные значения тензора равны $\lambda_I = 3$, $\lambda_{II} = 1$. Подставляя в (20) значение $\lambda_I = 3$, получаем первое главное направление:

$$\operatorname{tg} \alpha_I = \frac{3-2}{-1} = -1, \quad \alpha_I = 135^\circ.$$

Аналогично для второго главного направления:

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{1-2}{-1} = +1, \quad \alpha_{II} = 45^\circ.$$

Таким образом, главные направления пересекаются под прямым углом (рис. 6).

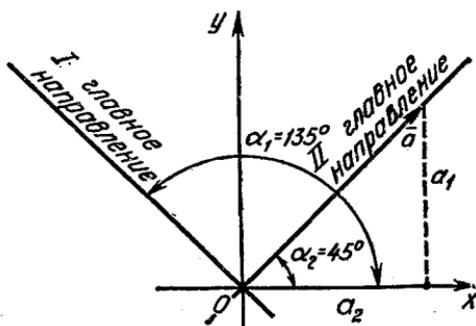


Рис. 6

Поскольку симметричный тензор всегда имеет два взаимно перпендикулярных направления, естественно рассмотреть представление тензора в системе координат, оси которой совпадают с главными осями этого тензора.

Обозначим компоненты тензора \hat{S} в такой координатной системе через s_{ik}° . Умножив скалярно \hat{S} на орты $\vec{i}_1(1, 0)$ и $\vec{i}_2(0, 1)$ главных осей, получим:

$$(\hat{S}, \vec{i}_1) = \lambda_I \vec{i}_1,$$

$$(\hat{S}, \vec{i}_2) = \lambda_{II} \vec{i}_2.$$

Спроектировав каждое из этих равенств на обе оси координат и принимая во внимание формулы (18), мы легко получим, что $s_{11}^{\circ} = \lambda_I$, $s_{22}^{\circ} = \lambda_{II}$, $s_{12}^{\circ} = s_{21}^{\circ} = 0$. Поэтому тензор, приведенный к главным осям, имеет диагональный вид:

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{vmatrix},$$

а его составляющие направлены вдоль координатных осей и соответственно равны: $\vec{s}_1 = \lambda_I \vec{i}_1$, $\vec{s}_2 = \lambda_{II} \vec{i}_2$.

Мы знаем, что, хотя компоненты тензора принимают в разных системах координат различные значения, существуют некоторые инвариантные соотношения между компонентами, верные в любой системе.

Чтобы установить вид этих соотношений, учтем, что у каждого тензора имеются свои главные направления и соответствующие им главные значения λ_I и λ_{II} , которые имеют непосредственный геометрический или физический смысл, не зависящий от выбора осей координат.

С другой стороны, главные значения определяются из характеристического уравнения (19'), коэффициентами которого являются некоторые функции компонентов тензора. Для того чтобы значения корней λ_I и λ_{II} этого уравнения не зависели от выбора системы координат, коэффициенты квадратного уравнения должны быть неизменными. Отсюда мы получаем два инварианта, связанные с главными значениями по теореме Виетта:

$$\begin{aligned} \text{In}v_1 &= p_{11} + p_{22} = \lambda_I + \lambda_{II}, \\ \text{In}v_2 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_I \lambda_{II}. \end{aligned}$$

Сумма диагональных элементов тензора и определитель матрицы его компонентов не зависят от системы координат и являются основными инвариантами двумерного тензора.

§ 8. Тензорный эллипс

Тензору, вообще говоря, нельзя сопоставить определенный геометрический образ (и этим, в частности, объясняется трудность усвоения тензорного исчисления). Однако в случае симметричных тензоров, с которыми обычно имеют дело в физике, такое наглядное представление возможно. А именно, каждому *неособенному* симметричному тензору¹ можно сопоставить на плоскости центральную коническую кривую — эллипс (чаще всего) или гиперболу.

Рассмотрим симметричный тензор

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix},$$

у которого $s_{12} = s_{21}$.

Попытаемся определить геометрическое место точек, описываемое векторным уравнением:

$$(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}) = 1, \quad (21)$$

где $\vec{r} = xi + yj$ — текущий радиус-вектор точек исследуемой линии. Если бы тензор \hat{S} был равен единичному тензору \hat{I} , то уравнение (21) приняло бы, очевидно, форму $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$

¹ *Неособенным* называется тензор, определитель матрицы которого не равен нулю.

или (в координатной записи) $x^2 + y^2 = 1$, т. е. выражало бы собой окружность.

В общем же случае, когда $\hat{S} \neq \hat{I}$, уравнение (21) описывает более сложную кривую. Мы знаем, что $(\hat{S}\vec{r})$ есть некоторый вектор \vec{r}' , определяемый согласно (12) следующим образом:

$$\vec{r}' = (\hat{S}, \vec{r}) = \vec{i}(s_{11}x + s_{12}y) + \vec{j}(s_{21}x + s_{22}y).$$

(Мы временно возвратились к обозначениям координат через x, y вместо x_1, x_2 , чтобы удобнее было сопоставить наши соотношения с обычными формулами аналитической геометрии.) Умножая теперь скалярно \vec{r} на \vec{r}' , получаем уравнение второй степени:

$$s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2 = 1. \quad (22)$$

Поскольку его дискриминант совпадает с определителем тензора \hat{S} , который по предположению не равен нулю, то уравнение (22) описывает центральную кривую второго порядка — эллипс или гиперболу. Связь между симметричным тензором \hat{S} и соответствующей ему линией $(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}) = 1$ становится особенно ясной, если их выразить в системе координат, совпадающей с главными осями тензора. Поскольку в этом случае матрица компонентов тензора \hat{S} принимает диагональный вид:

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} s_{11}^0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 \end{vmatrix},$$

где $s_{11}^0 = \lambda_1$, $s_{22}^0 = \lambda_{II}$, то уравнение кривой $(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}) = 1$ тоже упрощается:

$$\frac{x^2}{1/\lambda_1} + \frac{y^2}{1/\lambda_{II}} = 1. \quad (23)$$

Отсюда сразу вытекает, что в случае, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{II} > 0$, мы имеем эллипс, а при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{II} < 0$ (или наоборот) — гиперболу. Заметим, что если оба главных значения λ_1 и λ_{II} отрицательны, то уравнение (23) описывает мнимый эллипс.

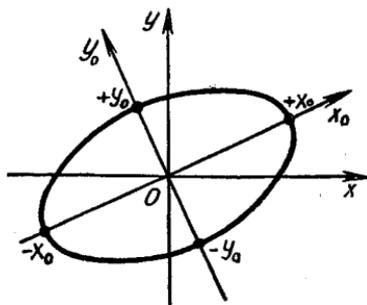


Рис. 7

Определим теперь точки пересечения тензорного эллипса с осями координат. Из уравнения (23) ясно, что на главных осях эллипс отсекает отрезки $x_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_1}$, $y_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{11}}$. Полагая попеременно $y=0$ и $x=0$, мы для всех других направлений осей координат аналогично найдем из уравнения (22), что эллипс пересекает ось абсцисс в точках $x = \pm \frac{1}{\sqrt{s_{11}}}$ и ось ординат в точках $y = \pm \frac{1}{\sqrt{s_{22}}}$.

Таким образом, зная тензорный эллипс, можно графически определить диагональные элементы этого тензора в любой системе координат с помощью соотношений $s_{11} = 1/x^2$, $s_{22} = 1/y^2$ (рис. 7).

Глава II.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ И МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

В предыдущей главе мы познакомились с простейшими двумерными векторами и тензорами. Теперь мы обобщим полученные там соотношения на наиболее важный для практики случай реального трехмерного пространства, а также на пространства более высоких размерностей.

При этом по-прежнему будем пользоваться прямоугольными декартовыми координатами.

§ 1. Векторы и тензоры в n -мерном пространстве

Обобщая понятие двумерного вектора, данное в § 2 предыдущей главы, назовем n -мерным вектором \vec{a} величину, характеризуемую в каждой системе координат n скалярными компонентами a_1, a_2, \dots, a_n , которые при повороте осей координат преобразуются по определенному линейному закону:

$$a'_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} a_k, \quad (1)$$

где коэффициенты β_{ik} характеризуют n -мерный угол поворота координатных осей. (Свойства этих коэффициентов будут подробно рассмотрены в ч. III.)

Всякий n -мерный вектор можно представить в таком виде:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{i}_k a_k, \quad (2)$$

где $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_n$ — орты осей координат.

Длиной вектора \vec{a} называется величина

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \quad (3)$$

не зависящая от выбора координатной системы.

В частности, трехмерный вектор записывается в виде:

$$\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$$

или, что то же самое, в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Аналогично обобщается понятие тензора второго ранга: n -мерным тензором $\hat{\Pi}$ называется величина, характеризуемая в каждой системе координат n векторными составляющими $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, либо n^2 скалярными компонентами $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$, причем и составляющие, и компоненты при повороте осей координат преобразуются по линейным законам (см. ч. III):

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \sum_k \beta_{jk} \vec{p}_k, \\ p_{jk} &= \sum_l \sum_r \beta_{jl} \beta_{kr} p_{lr}. \end{aligned}$$

Всякий n -мерный тензор можно в данной системе координат выразить либо через составляющие —

$$\hat{\Pi} = \sum_k^{n \rightarrow} \vec{i}_k p_k, \quad (4)$$

либо в виде n -рядной матрицы компонентов —

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Компоненты n -мерного тензора образуют n инвариантов, каждый из которых является суммой всевозможных диагональных миноров различных порядков $K = 1, 2, \dots, n$.

В частном случае трехмерного пространства тензор характеризуется тремя составляющими:

$$\hat{\Pi} = (\vec{i}_1, \vec{p}_1) + (\vec{i}_2, \vec{p}_2) + (\vec{i}_3, \vec{p}_3) \text{ или } \hat{\Pi} = (\vec{p}_x, \vec{i}) + (\vec{p}_y, \vec{j}) + (\vec{p}_z, \vec{k})$$

либо девятью скалярными компонентами:

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что у трехмерного тензора имеется, вообще говоря, три взаимно перпендикулярных главных направления и три главных значения $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$. Симметричному неособенному тензору в трехмерном пространстве соответствует центральная поверхность второго порядка (в системе главных осей):

$$\frac{x^2}{1/\lambda_I} + \frac{y^2}{1/\lambda_{II}} + \frac{z^2}{1/\lambda_{III}} = 1. \quad (6)$$

При этом в зависимости от знаков собственных значений $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ эта поверхность принимает следующие формы:

- 1) $\lambda_I > 0, \lambda_{II} > 0, \lambda_{III} > 0$ — эллипсоид,
- 2) $\lambda_I > 0, \lambda_{II} > 0, \lambda_{III} < 0$ — однополостный гиперболоид,
- 3) $\lambda_I > 0, \lambda_{II} < 0, \lambda_{III} < 0$ — двухполостный гиперболоид,
- 4) $\lambda_I < 0, \lambda_{II} < 0, \lambda_{III} < 0$ — мнимый эллипсоид.

На практике чаще всего встречается первый случай. Поэтому принято поверхность (6) называть *тензорным эллипсоидом* (хотя в тех случаях, когда реализуются условия 2) и 3), она будет гиперболоидом).

Инвариантами трехмерного тензора являются:

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_I + \lambda_{II} + \lambda_{III}, \quad (7)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_I \lambda_{II} + \lambda_I \lambda_{III} + \lambda_{II} \lambda_{III}, \quad (7')$$

$$I_3 = \det \hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_I \lambda_{II} \lambda_{III}. \quad (7'')$$

Перейдем теперь к рассмотрению примеров различных физических тензорных полей в реальном трехмерном пространстве.

§ 2. Тензор деформации

Прежде всего подчеркнем, что при деформации различные участки тела, вообще говоря, деформируются неодинаково (*неоднородная деформация*). Поэтому следует говорить о деформации в данной точке, имея в виду изменение объема и формы элемента тела в окрестности этой точки.

Покажем далее, что ни векторные, ни тем более скалярные величины не могут быть использованы в качестве меры деформированности элемента тела, для этого необходимы более сложные, тензорные величины.

Действительно, пусть тело, первоначальная форма которого показана на рисунке 8, а, после деформации приняло форму, показанную на рисунке 8, б. Для математического описания этой деформации сопоставим каждой точке тела вектор смещения $\vec{U} = \vec{r}' - \vec{r}$ (где \vec{r}' и \vec{r} — радиус-векторы точки после и до ее перемещения).

Ясно, что при деформации мы имеем дело с векторным полем $\vec{U}(\vec{r})$, область которого совпадает с первоначальными размерами тела (рис. 9). Зная поле вектора смещения $\vec{U}(\vec{r})$, мы можем полностью определить деформацию тела. Однако каждый отдельно взятый для данной точки вектор \vec{U} никакой деформации характеризовать не может. Ведь

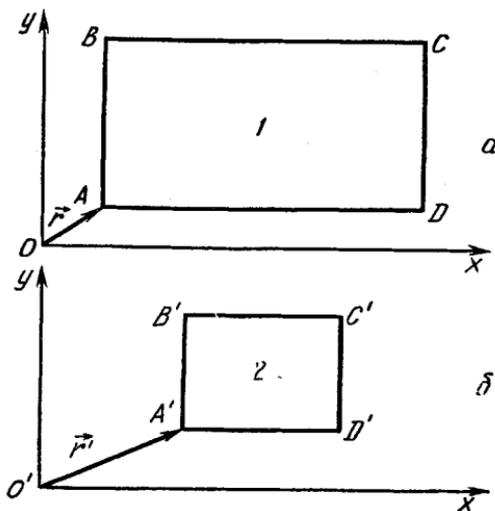


Рис. 8

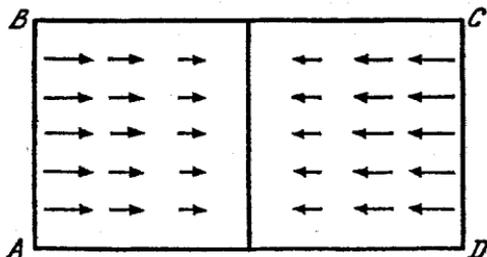


Рис. 9

если и соседние точки сместились на такую же величину \vec{U} , т. е. если в окрестности данной точки $\vec{U} = \text{const}$, то рассматриваемый элемент тела вообще не деформирован, хотя вектор смещения \vec{U} не равен 0.

Отсюда ясно, что степень деформации в каждой точке тела определяется не вектором смещения \vec{U} в данной точке, а относительным изменением этого вектора в ее окрестности. Может поэтому возникнуть предположение, что искомой характеристикой является производная векторной функции $\vec{U}(\vec{r})$, представляющая собой тензор $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$. Легко,

однако, убедиться, что производная $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$ не всегда характеризует деформацию. Действительно, если, например, тело целиком повернулось на некоторый угол, то вектор смещения \vec{U} не равен нулю и изменяется от точки к точке; при этом тензор $\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}}$ заведомо отличен от нуля, хотя никакого изменения объема или формы не произошло. Чтобы стало яснее, в чем дело, разложим тензор-производную на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} = \left(\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} \right)_S + \left(\frac{d\vec{U}}{d\vec{r}} \right)_A.$$

Ниже будет показано, что антисимметричная часть тензора-производной совпадает с так называемым *ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\vec{U}(\vec{r})$ и характеризует поворот

элемента объема в пространстве. Симметричная же часть производной $\frac{d\vec{U}}{dr}$ полностью определяется деформацией тела и называется тензором деформации:

$$\hat{U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Как уже отмечалось, каждому симметричному тензору можно сопоставить определенный эллипсоид.

В главе I был указан общий метод нахождения эллипса, соответствующего двумерному тензору. Оказывается, однако, что для характеристики деформации удобнее геометрически интерпретировать тензор \hat{U} эллипсоидом деформации, который строится иначе. Способ построения последнего мы изложим на примере деформации плоского сечения тела.

Окружим рассматриваемую точку плоскости окружностью единичного радиуса; ее уравнение в координатах, как известно, имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$, или в векторной форме $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$. В результате деформации, характеризуемой тензором \hat{U} , каждый радиус-вектор \vec{r} преобразуется в новый вектор $\vec{r}' = (\hat{U}, \vec{r})$, а указанная окружность — в новую линию, которая представляет собой геометрическое место концов радиус-векторов \vec{r}' . Поскольку \hat{U} является линейным оператором (аффинором), то ясно, что уравнение преобразованной линии также будет второй степени. Окружность деформируется в другую линию второго порядка. Более того, можно заведомо утверждать, что эта линия есть эллипс, ибо, как это ясно из физического смысла, главные значения λ_I и λ_{II} тензора деформации всегда величины положительные (при $\lambda < 0$ тело должно было бы в результате деформации «вывернуться наизнанку»). Естественно назвать эллипс, полученный из окружности в результате деформации *эллипсом деформации*. Определим вид этого эллипса. Полагая как обычно, что симметричный тензор \hat{U} неособенный, можно из равенства $\vec{r}' = (\hat{U}, \vec{r})$ выра-

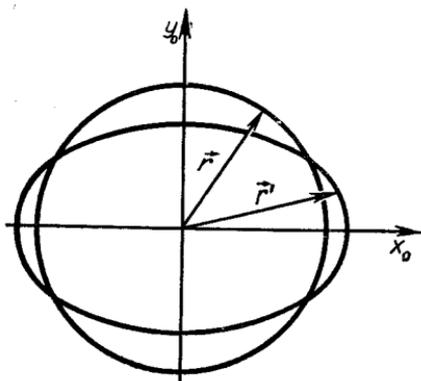


Рис. 10

$(\hat{U}^{-1}, \vec{r}) = (\vec{r}, \hat{U}^{-1})$, то приходим к следующему уравнению для эллипса деформации:

$$(\vec{r}', \hat{U}^{-2} \vec{r}') = 1, \quad (9)$$

где \vec{r}' — текущий радиус-вектор точек кривой. Неоднократно уже отмечалось, что проще всего выглядит уравнение эллипса в системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора. Несложно убедиться из геометрических соображений, что при возведении в степень тензора его главные оси не меняются, а главные значения степени тензора равны степени главных значений тензора. Поэтому приведенный к главным осям тензор \hat{U}^{-2} принимает вид:

$$\hat{U}^{-2} = \begin{vmatrix} 1/\lambda_I^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_{II}^2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в результате скалярного умножения \hat{U}^{-2} на радиус-вектор $\vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j}$ получается новый вектор \vec{r}'' :

$$\vec{r}'' = (\hat{U}^{-2}, \vec{r}') = \frac{x}{\lambda_I^2} \vec{i} + \frac{y}{\lambda_{II}^2} \vec{j}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем слева скалярное произведение векторов (\vec{r}', \vec{r}'') , так что уравнение кривой принимает вид:

$$\frac{x^2}{\lambda_I^2} + \frac{y^2}{\lambda_{II}^2} = 1. \quad (11)$$

Это и есть уравнение эллипса деформации. Его оси совпадают с главными осями тензора \hat{U} , т. е. с направлениями наибольшего и наименьшего растяжений (или сжатий, если

звать \vec{r} через \vec{r}' :

$$\vec{r}(\hat{U}^{-1}, \vec{r}'),$$

где \hat{U}^{-1} — симметричный тензор, обратный \hat{U} , т. е. $\hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{I}$. Подставляя теперь значение \vec{r} в уравнение окружности $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$, получим:

$$(\hat{U}^{-1}, \vec{r}') \cdot (\hat{U}^{-1}, \vec{r}') = 1.$$

Так как для симметричного тензора порядок сомножителей безразличен, т. е.

$\lambda < 1$). Зная эллипс деформации, можно весьма просто определить, в какой вектор \vec{r}' превращается любой вектор \vec{r} (рис. 10). Подчеркнем, что для характеристики деформации всего тела нужно знать множество эллипсов в каждой точке тела (поле тензорных эллипсов).

§ 3. Тензор напряжений

В недеформируемом теле отсутствуют силы взаимодействия между отдельными частями тела. Если же к этому телу приложить внешние силы, то оно будет деформироваться — молекулы тела будут смещаться до тех пор, пока возникшие внутри тела силы упругости, пропорциональные по закону Гука деформации и стремящиеся возвратить тело к первоначальному состоянию, не станут равными внешним силам.

Во всяком деформированном теле между соседними его частями существуют силы, которые действуют только по поверхности раздела, так как они порождены близкоедействующим молекулярным взаимодействием. Если внутри деформированного (например, растянутого) тела провести некоторую площадку PQ (рис. 11, а), то на верхнюю часть I со стороны нижней части II действует некоторая сила \vec{f} , зависящая при данной деформации от площади S этой площадки. Поэтому принято рассматривать отношение силы \vec{f} к площади S . Это отношение σ называют *напряжением*:

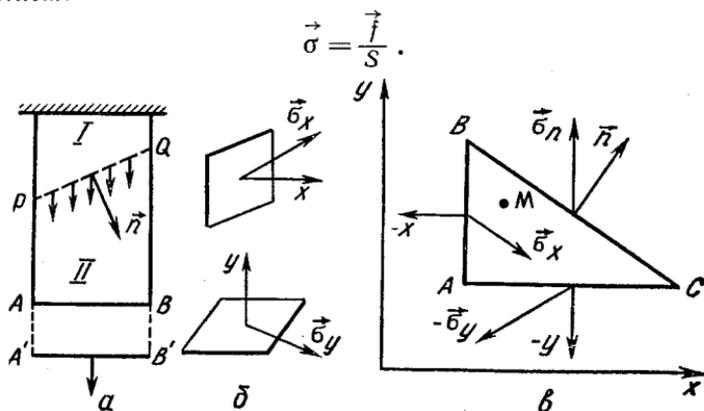


Рис. 11

Ясно, что вектор напряжения $\vec{\sigma}$ не обязательно перпендикулярен площадке и зависит как от точки, выбранной внутри тела, так и от ориентации площадки. Если мы рассматриваем определенную точку, то, говоря о напряжении в ней, необходимо указать направление нормали, характеризующей ориентацию площадки, и отмечать это соответствующим индексом. Так, $\vec{\sigma}_x$ — напряжение для площадки, нормалью которой является ось X , $\vec{\sigma}_y$ — напряжение для площадки, перпендикулярной оси Y и т. д. (рис. 11, б).

Поскольку через точку внутри тела можно провести бесчисленное множество по-разному ориентированных площадок, то может показаться, что для полного знания напряжений в этой точке нужно определить бесконечное количество векторов $\vec{\sigma}$ для всех площадок. Оказывается, однако, что напряжения в каждой точке образуют тензор и поэтому достаточно знать три напряжения $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ по трем взаимно перпендикулярным площадкам, чтобы можно было вычислить напряжение $\vec{\sigma}_n$ для проведенной через эту точку произвольно ориентированной площадки с нормалью n .

Итак, покажем, что напряжение представляет собой тензорную величину. Для простоты рассмотрим плоское деформированное тело. Вырежем мысленно вокруг рассматриваемой точки M внутри тела бесконечно малый треугольник ABC (рис. 11, в). Поскольку этот треугольник, как и все тело, неподвижен, то сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. На грань AB действует сила, равная $-\vec{\sigma}_x \cdot |AB|$. Здесь знак минус объясняется тем, что нормаль к площадке AB направлена в сторону, противоположную оси X . Аналогично на грань AC действует сила $-\vec{\sigma}_y \cdot |AC|$, и, наконец, на грань BC — сила $+\vec{\sigma}_n \cdot |BC|$. Таким образом,

$$\vec{\sigma}_n \cdot |BC| - \vec{\sigma}_x \cdot |AB| - \vec{\sigma}_y \cdot |AC| = 0.$$

Но, как ясно из рисунка, $|AB| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, x)$ и $|AC| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, y)$. Подставляя значения $|AB|$ и $|AC|$ в предыдущее равенство и производя сокращение, получим:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\hat{n}, x) + \vec{\sigma}_y \cos(\hat{n}, y). \quad (12)$$

Так как направление площадки BC и нормали \vec{n} выбрано произвольно, то согласно (12) оказываются выполненными условия того, что $\vec{\sigma}_x$ и $\vec{\sigma}_y$ являются составляющими тензора $\hat{\sigma}$ (см. соотношение 10 в главе I). Не должно смущать то обстоятельство, что векторы $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ и $\vec{\sigma}_n$ построены в разных точках — ведь треугольник ABC бесконечно мал.

Легко доказать, что тензор напряжений $\hat{\sigma}$ является симметричным тензором. Диагональные компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} называются *нормальными*, а недиагональные — σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} — *сдвиговыми*. Если тензор привести к главным осям, то он примет диагональный вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Главные значения тензора $\lambda_I = \sigma_{11}$, $\lambda_{II} = \sigma_{22}$, $\lambda_{III} = \sigma_{33}$ называют главными напряжениями. Уравнение поверхности напряжений имеет вид:

$$\lambda_I x^2 + \lambda_{II} y^2 + \lambda_{III} z^2 = 1.$$

Так как значения λ_I , λ_{II} , λ_{III} могут в этом случае быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность представляет собой либо эллипсоид, либо гиперболоид (одно- или двухполостный).

§ 4. Тензор инерции

Важной характеристикой механических свойств твердого тела по отношению к вращательному движению является его тензор инерции \hat{I} . Известно, что моментом инерции тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс всех точек его на квадрат расстояния их от этой оси:

$$I = \sum_k m_k r_k^2. \quad (14)$$

Момент инерции служит мерой инертности тела при вращательном движении, т. е. играет такую же роль, как масса тела в поступательном движении. Формулы механики вращательного движения аналогичны соответствующим формулам поступательного движения. Так, кинети-

ческая энергия тела при его вращении вокруг некоторой оси с угловой скоростью равна:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (14')$$

Уравнение динамики вращательного движения подобно второму закону Ньютона:

$$\frac{d}{dt} (I\omega) = M,$$

где M — момент силы. Однако, несмотря на такое сходство, между динамикой поступательного движения и динамикой вращательного движения имеется и существенное различие: в то время как масса тела m есть скалярная величина, момент инерции I является величиной значительно более сложной природы. Действительно, для одного и того же тела момент инерции может принимать бесчисленное количество значений в зависимости от выбора оси. Разберем этот вопрос подробнее.

Произвольное движение тела всегда можно представить как сумму поступательного движения некоторой точки, выбираемой за начало координат, и вращения тела вокруг начала координат. При этом выражение для кинетической энергии выглядит наиболее просто, если поместить начало вращающейся системы координат в центр инерции тела.

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о моментах инерции тела относительно осей, проходящих через центр инерции. Но ведь и таких центральных осей можно провести по различным направлениям бесчисленное множество, а значит, существует такое же множество соответствующих (центральных) моментов инерции.

Мы, однако, покажем, что момент инерции представляет собой симметричный тензор и поэтому достаточно знать шесть его скалярных компонентов в некоторой системе координат, чтобы определить его компоненты для любой другой тройки взаимно перпендикулярных осей.

Общее выражение для кинетической энергии системы материальных точек имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2. \quad (15)$$

Абсолютную скорость точки можно представить как сумму скорости центра инерции и скорости, обусловленной вращением тела вокруг него:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_k]. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем:

$$W = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_k m_k + \sum_k m_k (\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2. \quad (15')$$

Так как $\sum_k m_k$ равна массе тела m и по правилам смешанного произведения

$$(\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) = (\vec{r}_k, [\vec{v}_0, \vec{\omega}]),$$

то второе слагаемое в (15') можно представить в следующем виде:

$$[\vec{v}_0, \vec{\omega}] \sum_k m_k \vec{r}_k.$$

Из механики известно, что радиус-вектор центра инерции определяется по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_k m_k \vec{r}_k.$$

Но так как начало координат мы совместили с центром инерции, то $\vec{r}_c = 0$, или $\sum_k m_k \vec{r}_k = 0$. Поэтому второе слагаемое в (15') пропадает.

Итак,

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2.$$

Из векторной алгебры известно, что

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2.$$

Поэтому

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k (\omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_k)^2). \quad (17)$$

Формула (17) показывает, что кинетическая энергия тела состоит из энергии его поступательного движения $W_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_0^2$ и кинетической энергии, зависящей от угловой

скорости ω энергии вращательного движения:

$$W_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \{ \omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega} r_k)^2 \}.$$

Рассмотрим последнее выражение подробнее. Поскольку

$$\omega^2 r_k^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \text{ и } (\vec{\omega} r_k)^2 = (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2,$$

то для кинетической энергии вращательного движения имеем следующее равенство:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \{ (y_k^2 + z_k^2) \omega_x^2 + (x_k^2 + z_k^2) \omega_y^2 + (x_k^2 + y_k^2) \omega_z^2 - 2(x_k y_k \omega_x \omega_y + x_k z_k \omega_x \omega_z + y_k z_k \omega_y \omega_z) \}. \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что в частном случае, когда ось вращения направлена вдоль одной из координатных осей, например вдоль оси X , выражение (18) упрощается и принимает вид:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \omega_x^2 \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2,$$

где I_x — момент инерции относительно X . Это наводит на мысль, что если ввести симметричный тензор, компоненты которого образуют матрицу

$$\hat{I} = \begin{vmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k y_k x_k & \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k z_k x_k & -\sum_k m_k z_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{vmatrix}, \quad (19)$$

то можно будет выражение (18) записать кратко так:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \hat{I} \vec{\omega}). \quad (20)$$

Эта формула является обобщением равенства (14'), и поэтому \hat{I} естественно назвать *тензором инерции*.

Прежде чем перейти к подробному анализу свойств тензора инерции, покажем, что он действительно является тензором. Для этого рассмотрим матрицу:

$$R = \begin{vmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{vmatrix}.$$

Она, очевидно, представляет собой разность двух тензоров: единичного тензора \hat{I} , умноженного на квадрат радиус-вектора $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, и симметричной диады $\{\vec{r}, \vec{r}\}$. Следовательно, по правилам тензорной алгебры величина R представляет собой тензор:

$$\hat{R} = r^2 \hat{I} - \{\vec{r}, \vec{r}\}.$$

Несложно проверить далее, что матрица \hat{I} является суммой произведений масс (скаляров) каждой точки тела на тензоры \hat{R}_k для этих точек, т. е. $\hat{I} = \sum_k m_k \hat{R}_k$. Отсюда вытекает, что I есть тензорная величина.

Перейдем теперь к анализу матрицы компонентов (19), характеризующей тензор инерции \hat{I} . Его диагональные элементы I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} являются моментами относительно осей x , y и z . Недиагональные элементы I_{xy} , I_{xz} и I_{yz} называют полярными или центробежными моментами инерции, однако они не имеют простого физического смысла.

Тензор инерции, как и всякий симметричный тензор, имеет три взаимно перпендикулярные главные оси инерции, которым соответствуют главные моменты инерции I_{11} , I_{22} , I_{33} .

В системе главных осей тензор инерции принимает диагональный вид:

$$\hat{I} = \left\| \begin{array}{ccc} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{array} \right\|.$$

При этом вращательная кинетическая энергия выражается весьма просто:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2).$$

Симметричному тензору \hat{I} сопоставляют эллипсоид инерции $(\vec{r}, \hat{I}\vec{r}) = 1$, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 = 1. \quad (21)$$

(Это уравнение всегда определяет именно эллипсоид, ибо, как ясно из физических соображений, моменты инерции I_{11} , I_{22} и I_{33} не могут быть отрицательными.)

Вид эллипсоида инерции зависит от распределения масс в теле; он отсекает на произвольной оси U отрезки, равные $1/\sqrt{I_{uu}}$ (где I_{uu} — момент инерции относительно оси U).

Если тело обладает определенной симметрией в распределении масс, то такой же симметрией, очевидно, должен обладать и эллипсоид инерции. Это обстоятельство весьма облегчает нахождение вида эллипсоида инерции.

Допустим, что тело обладает плоскостью симметрии, совпадающей с координатной плоскостью YOZ . Тогда ясно, что ось X является одной из главных осей инерции, а две другие лежат в указанной плоскости. Если тело обладает осью симметрии, то она является также осью эллипсоида и, следовательно, главной осью инерции. Легко видеть, что если порядок оси симметрии, скажем оси Z , выше второго, то в качестве остальных двух главных осей можно взять любые два взаимно перпендикулярных направления в плоскости XOY . При этом моменты I_{xx} и I_{yy} равны между собой. Действительно, если порядок симметрии оси равен 4 (рис. 12, а), то при повороте параллелепипеда на угол 90° эллипсоид инерции не должен измениться — он является эллипсоидом вращения. Отсюда следует равенство двух его полуосей (рис. 12, б).

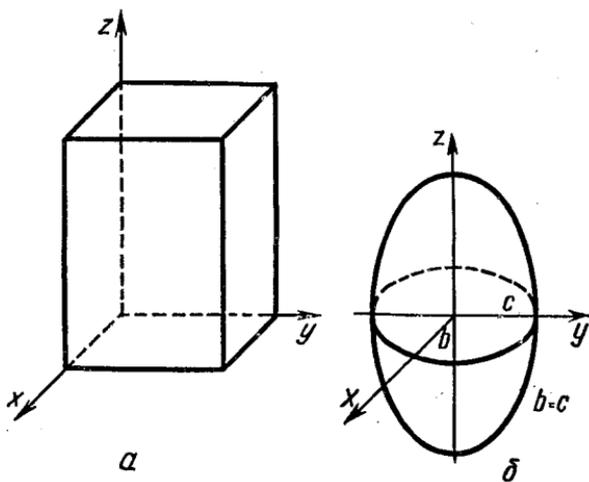


Рис. 12

С помощью таких же рассуждений нетрудно показать, что для куба эллипсоид инерции имеет форму шара (рис. 13).

§ 5. Скалярный и векторный инварианты тензора-производной векторного поля

Как мы знаем, полной дифференциальной характеристикой векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ является тензорное поле $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}(\vec{r})$. Но оказывается, что быстроту изменения векторной функции \vec{a} можно еще определить (хотя и не так строго) с помощью инвариантов тензора $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тем самым можно

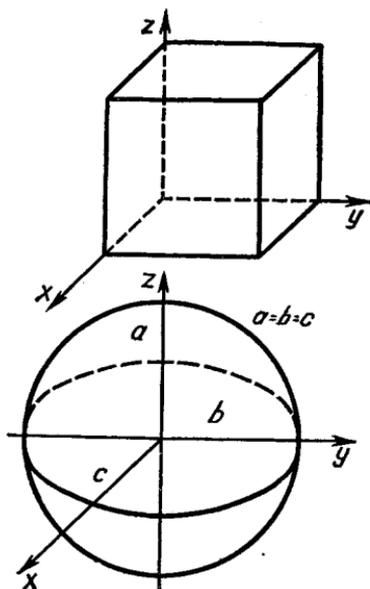


Рис. 13

вместо тензорных использовать более простые величины — скалярные и векторные.

Математический аппарат описания аналитических свойств векторных полей получил название векторного анализа. Запишем матрицу компонентов тензора-производной:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Первый инвариант этого тензора, равный сумме его диагональных элементов, называется *дивергенцией* (расходимостью) векторной функции $\vec{a}_{(x, y, z)}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (22)$$

Чтобы познакомиться со вторым используемым в вектор-

ном анализе инвариантом тензора $\frac{d\vec{a}}{dr}$, разложим этот тензор на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{d\vec{a}}{dr} = \hat{S} + \hat{A}.$$

Выпишем в явном виде матрицу антисимметричного тензора:

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) & 0 & \left(\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) & 0 \end{array} \right\|. \quad (23)$$

Будучи антисимметричным, тензор \hat{A} определяется по существу тремя скалярными компонентами. Поскольку и векторные величины в трехмерном пространстве характеризуются тремя компонентами, то возникает естественный вопрос: нельзя ли антисимметричной части тензора-производной сопоставить некий вектор? Что бы это было возможно, компоненты тензора и компоненты вектора должны при повороте осей координат меняться одинаковым образом. Оказывается, что такое явление действительно имеет место.

Итак, антисимметричному тензору \hat{A} можно сопоставить соответствующий вектор $\vec{\omega}$, называемый *ротором* (или вихрем) векторного поля $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{a}$; его компоненты определяются так:

$$\omega_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (24)$$

При этом матрица \hat{A} принимает вид:

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, вектор

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (25)$$

эквивалентен антисимметричному тензору \vec{A} и представляет собой векторный инвариант тензора-производной. Совокупность двух величин — скаляра $\text{div } \vec{a}$ и вектора $\text{rot } \vec{a}$, —являющихся инвариантами тензора-производной $\frac{d\vec{a}}{dr}$, может служить дифференциальной характеристикой

векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$. Каждая из этих величин имеет непосредственный физический и геометрический смысл, который мы выясним ниже.

Однако сначала необходимо ответить на следующий вопрос: как могут скаляр $\text{div } \vec{a}$ и вектор $\text{rot } \vec{a}$, определяемые в совокупности четырьмя числами, характеризовать векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, т. е. выполнять ту же задачу, что и тензор $\frac{d\vec{a}}{dr}$, определяемый девятью скалярными числами? Конечно, $\text{div } \vec{a}$ и $\text{rot } \vec{a}$, называемые иногда скалярной и векторной «производными» функции $\vec{a}(\vec{r})$, не эквивалентны в точности тензору-производной $\frac{d\vec{a}}{dr}$. В то время как тензор-производная однозначно и полностью характеризует в окрестности рассматриваемой точки пространства быстроту изменения векторной переменной \vec{a} , дивергенция и ротор этой функции описывают ее поведение неполно и неоднозначно. Это значит, что могут существовать две различные векторные функции $\vec{a}(\vec{r})$ и $\vec{b}(\vec{r})$, у которых $\text{div } \vec{a} = \text{div } \vec{b}$ и $\text{rot } \vec{a} = \text{rot } \vec{b}$, хотя $\frac{d\vec{a}}{dr} \neq \frac{d\vec{b}}{dr}$. Однако если $\text{div } \vec{a}$ и $\text{rot } \vec{a}$ известны в каждой точке поля и на его границах, то сама векторная функция $\vec{a}(\vec{r})$ определяется однозначно.

§ 6. Физический и аналитический смысл дивергенции векторного поля

Пусть в некоторой области задано векторное поле скоростей текущей жидкости $\vec{v}(\vec{r})$. Легко видеть, что через произвольную малую площадку dS за одну секунду про-

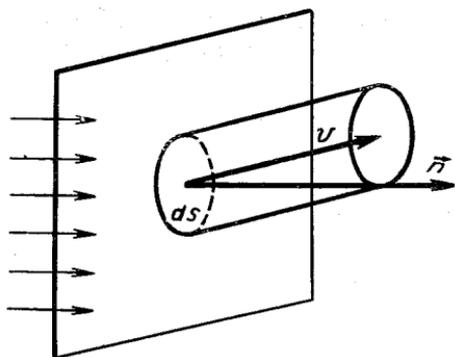


Рис. 14

текает то количество жидкости, которое заполняет объем наклонного цилиндра с основанием dS и образующей v (рис. 14). Поскольку высота цилиндра равна проекции образующей на нормаль \vec{n} к площадке dS , то объем вытекшей жидкости составляет величину

$$dN = v_n dS, \quad (26)$$

называемую потоком вектора \vec{v} через площадку dS . В общем случае потоком произвольной векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ через конечную поверхность S называют двойной интеграл по этой поверхности от dN :

$$N = \iint_S a_n dS.$$

Если поверхность S является замкнутой и ограничивает объем V , то поток вектора \vec{a} через нее

$$N = \oiint_S a_n dS$$

определяет объем жидкости, вытекающей (при $N > 0$) из V в окружающее пространство или, наоборот, втекающей (при $N < 0$) внутрь объема v за единицу времени. Из геометрических соображений ясно, что значение потока через некоторую замкнутую поверхность S связано с тем, как быстро меняется величина вектора \vec{a} вдоль *векторных линий* (или *линий тока*) внутри рассматриваемой области.

Нетрудно доказать следующее утверждение, известное как теорема Гаусса—Остроградского.

Поток N переменного вектора \vec{a} через произвольную замкнутую поверхность S равен (тройному) интегралу от дивергенции этого вектора по объему V , ограниченному этой поверхностью:

$$N \equiv \oiint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (28)$$

Применяя это равенство к небольшому объему ΔV , ограниченному малой поверхностью ΔS , можно приближенно записать:

$$\Delta N = \oiint_{\Delta S} a_n dS \approx \operatorname{div} \vec{a} \cdot \Delta V,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{a} \approx \frac{\Delta N}{\Delta V}.$$

Понятно, что это приближенное равенство выполняется тем точнее, чем меньше рассматриваемый объем ΔV . Исходя из этого, мы приходим к другому определению дивергенции вектора.

Дивергенция векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в данной точке равна пределу отношения потока ΔN через малую поверхность ΔS , окружающую эту точку, к объему ΔV , ограниченному этой поверхностью, при стремлении последнего к нулю:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{dN}{dV}. \quad (29)$$

Если \vec{a} означает скорость жидкости, то $\operatorname{div} \vec{a}$ в данной точке равна отношению объема жидкости dN , вытекшей за единицу времени из бесконечно малого объема dV , к величине dV . Отсюда и произошел термин *дивергенция* (расходимость): жидкость растекается из тех точек (источников), где $\operatorname{div} \vec{a} > 0$, и, наоборот, стекается туда, где $\operatorname{div} \vec{a} < 0$ (стоки).

Величину $\operatorname{div} \vec{a}$ называют поэтому *мощностью источника*. В качестве примера рассмотрим следующие плоские векторные поля (рис. 15):

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \vec{b} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2 + y^2}; \quad \vec{c} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Найдем их дивергенции:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r} > 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{r^3} < 0.$$

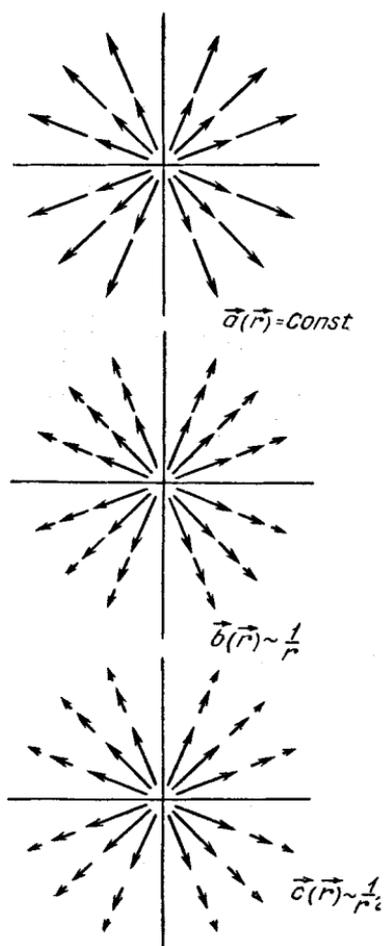


Рис. 15

Следовательно, каждая точка поля $\vec{a}(\vec{r})$ является источником, мощность которого убывает с расстоянием от начала координат пропорционально $1/r$; поле $\vec{b}(\vec{r})$ не имеет источников; а в каждой точке поля $\vec{c}(\vec{r})$ имеется сток, мощность которого убывает пропорционально $1/r^3$.

Чтобы эти выводы стали понятными, примем, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} представляют собой скорости плоского течения воды в бассейне неизменной глубины. Рассмотрим тонкий слой F , ограниченный двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями S_1 и S_2 (рис. 16).

Если объемы жидкости N_2 и N_1 , вытекающие и втекающие из F через S_1 и S_2 , одинаковы, то источников (положительных или отрицательных) в F не существует. Когда же $N_1 \neq N_2$, в слое F существуют либо источники (при $N_2 > N_1$), либо стоки (при $N_2 < N_1$).

Заметим теперь, что площади S_1 и S_2 ограничивающих слой F цилиндрических поверхностей пропорциональны радиусу цилиндра r . Поэтому только у поля $\vec{b}(\vec{r})$, для которого модуль скорости $|\vec{b}| \sim \frac{1}{r}$, объем протекающей через цилиндрическую поверхность жидкости $N = |\vec{b}| \cdot S = \text{const}$.

У поля же $\vec{a}(\vec{r})$ модуль скорости равен единице ($|\vec{a}| = 1$) и поток $N = S$ растет с удалением от центра (через большую поверхность S_2 вытекает воды больше, чем втекает через S_1). Это возможно только в том случае, если в полу бассейна имеются источники, из которых вода поступает в бассейн.

Наоборот, в случае поля $\vec{c}(\vec{r})$ скорость $|\vec{c}|$ с расстоянием убывает пропорционально $\frac{1}{r^2}$, в то время как площадь растет пропорционально r . Поэтому поток жидкости $N = |\vec{c}| \cdot S$ в целом уменьшается. Иными словами, $N_2 < N_1$. Это возможно, если часть воды уходит из бассейна через пол.

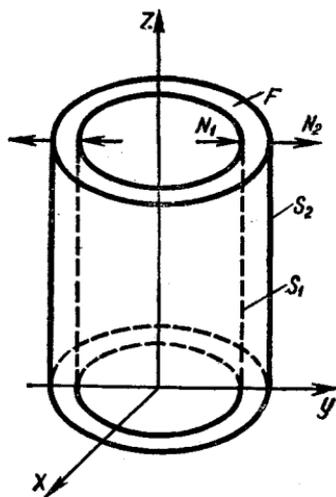


Рис. 16

Перейдем теперь к выяснению аналитического смысла дивергенции как скалярной производной векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$. Для этого прежде всего введем понятие векторной трубки. Векторной линией называется кривая, касательная к которой в каждой точке поля совпадает по направлению с переменным вектором в этой точке. Цилиндрическая криволинейная поверхность, образующие которой являются векторными линиями, называется векторной трубкой (рис. 17).

Пусть теперь рассматриваемое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ таково, что во всех его точках $\text{div} \vec{a} \equiv 0$. Такое поле принято называть вихревым или соленоидальным.

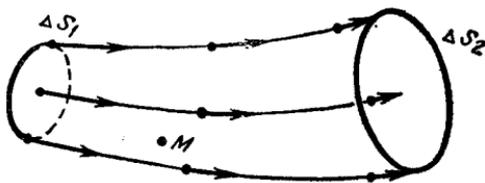


Рис. 17

Легко убедиться с помощью формулы Гаусса — Остроградского, что в таком поле поток вектора \vec{a} через произвольное поперечное сечение трубки есть величина постоянная:

$$\iint_{S_2} a_n dS = \iint_{S_1} a_n dS = \text{const.}$$

Если же поле не является вихревым ($\text{div } \vec{a} \neq 0$), но в окрестности некоторой точки $\text{div } \vec{a} = 0$, тогда для двух близких сечений ΔS_1 и ΔS_2 тонкой трубки, охватывающей эту точку, имеем (с точностью до малых высшего порядка):

$$a_n^{(2)} \cdot \Delta S_2 = a_n^{(1)} \cdot \Delta S_1.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем тоньше векторная трубка и короче расстояние между рассматриваемыми сечениями. Таким образом, если в некоторой точке поля $\text{div } \vec{a} = 0$, то поток вектора через соседние сечения тонкой трубки неизменен: $dN = a_n dS = \text{const.}$ Вблизи же тех точек, где $\text{div } \vec{a} \neq 0$, поток dN вдоль узкой векторной трубки увеличивается (при $\text{div } \vec{a} > 0$) или уменьшается (при $\text{div } \vec{a} < 0$).

Другими словами, если сечение векторной трубки постоянно, то численное значение $\text{div } \vec{a}$ в данной точке M поля характеризует быстроту изменения длины вектора \vec{a} вдоль векторной линии, проходящей через M .

§ 7. Физический и аналитический смысл ротора векторного поля

Прежде всего заметим, что определяемый формулой (25) вектор $\text{rot } \vec{a}$ можно еще представить в виде символического определителя третьего порядка:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Для выяснения физического смысла ротора рассмотрим сперва плоские векторные поля $\vec{v}(x, y)$, где \vec{v} — линейная

скорость частиц сплошной среды. В этом случае v_z и производные по z обращаются в нуль и мы получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (30')$$

Отсюда видно, что ротор в каждой точке направлен перпендикулярно плоскости векторного поля XOY .

Положим вначале, что движение совершает плоское твердое тело (тонкая пластина). Как известно из механики, скорость его перемещения всегда можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

где v_0 — скорость центра инерции тела (скорость поступательного движения тела), $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ — линейная скорость вращения вокруг центра инерции произвольной точки тела, радиус-вектор которой равен \vec{r} , $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, направленный по оси вращения, одинаковый для всех точек тела ($\vec{\omega} = \text{const}$). Так как поступательная скорость у всех точек твердого тела одинакова ($\vec{v}_0 = \text{const}$), то ясно, что $\operatorname{rot} \vec{v}_0 = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Выберем оси координат таким образом, чтобы ось вращения тела совпала с OZ , а плоскость XOY — с плоскостью движения пластины, тогда $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, а точки тела характеризуются только двумя координатами (x, y) . Поэтому согласно правилам векторного умножения векторов:

$$[\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

Подставляя в формулу (30') компоненты вектора $[\vec{\omega}, \vec{r}]$, получим:

$$\operatorname{rot} [\vec{\omega}, \vec{r}] = 2\omega \vec{k},$$

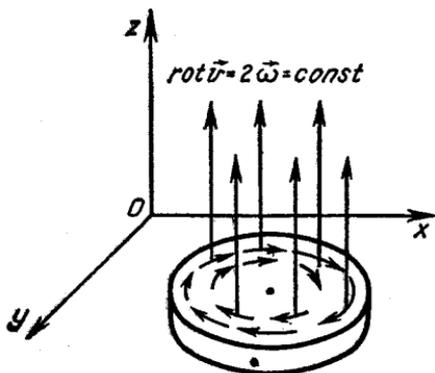


Рис. 18

или

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}. \quad (31)$$

Ротор линейной скорости твердого тела есть вектор, равный удвоенной угловой скорости его вращения.

Поскольку у твердого тела угловая скорость $\vec{\omega}$ постоянна, то векторное поле $\text{rot } \vec{v}$ также является постоянным (рис. 18).

Знание ротора векторного поля весьма важно для определения циркуляции вектора по произвольному замкнутому контуру.

Пусть в поле $\vec{a}(r)$ задана направленная замкнутая линия L (направление обхода линии принято таким, чтобы ограничиваемая этой линией поверхность оставалась слева). Тогда криволинейный интеграл вектора по линии L называется циркуляцией Γ :

$$\Gamma = \oint_L a_t dl = \oint_L \vec{a} d\vec{r} = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (32)$$

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это свойство состоит в следующем. Положим, что контур L , по которому определяется циркуляция Γ , ограничивает поверхность S . Разобьем последнюю на части S_1 и S_2 , ограничиваемые контурами L_1 и L_2 (рис. 19). Поскольку интегралы по внутренним участкам этих контуров одинаковы

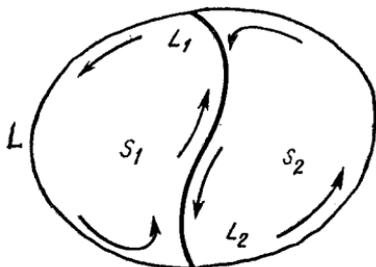


Рис. 19

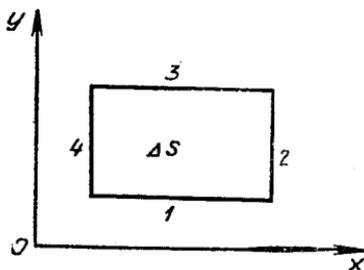


Рис. 20

по модулям, но имеют противоположные знаки, то

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Таким образом, циркуляция, «порожденная» на поверхности S , равна сумме циркуляций Γ_1 и Γ_2 , «порожденных» частями этой поверхности S_1 и S_2 . Учитывая это, можно ввести понятие «плотности порождения циркуляции» $\frac{d\Gamma}{dS}$, отнесенной к единице площади поверхности.

Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(x, y)$. Выберем в нем бесконечно малый прямоугольник (рис. 20) с площадью ΔS и вычислим циркуляцию $\Delta\Gamma$ по его контуру (ΔL). Очевидно,

$$\Delta\Gamma = \int_{\Delta L} (a_x dx + a_y dy) = \int_{(1)} a_x dx + \int_{(2)} a_y dy + \int_{(3)} a_x dx + \int_{(4)} a_y dy.$$

Можно показать, что с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy = \text{rot}_n \vec{a} \cdot \Delta S,$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к площадке ΔS . В общем случае трехмерного поля и произвольно ориентированной площадки циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру определяется такой же формулой, поэтому всегда

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \text{rot}_n \vec{a}, \quad (32)$$

т. е. $\text{rot} \vec{a}$ есть предел отношения циркуляции $\oint_{\Delta L} a_i dl$ по нормальному малому контуру ΔL к величине площадки ΔS , ограниченной этим контуром при $\Delta S \rightarrow 0$.

Если в пространстве задана конечная замкнутая кривая L , ограничивающая поверхность S , то получаем интегральное равенство, называемое *теоремой Стокса*:

$$\oint_L a_i dl = \iint_S \text{rot}_n \vec{a} \cdot dS. \quad (33)$$

Циркуляция переменного вектора \vec{a} по произвольной замкнутой кривой L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S , опирающуюся на контур L .

Для выяснения аналитического смысла ротора как векторной производной векторного поля $\vec{u}(\vec{r})$ (для нагляд-

ности положим, что \vec{u} — вектор смещения точек сплошной среды) поступим следующим образом. Рассмотрим тонкую векторную трубку, внутри которой находится точка M , и проведем через эту точку нормальное сечение ΔS , которое с точностью до малых высшего порядка можно считать плоским. Построим теперь в каждой точке площадки ΔS векторы $\vec{u} \cdot d\tau$ (где $\Delta\tau$ — некая малая величина, которую для краткости назовем «относительным параметром смещения»). Ясно, что геометрическое место концов векторов $\vec{u} \cdot \Delta\tau$ образует новое сечение $\Delta S'$ векторной трубки. Площадка $\Delta S'$ не только смещена относительно ΔS , но и отличается от нее как по форме, так и по ориентации в пространстве. Эти изменения характеризуются тензором-производной $\frac{d\vec{u}}{dr}$, причем его симметричная часть \hat{u}_S определяет деформацию площадки ΔS , а антисимметричная часть $\text{rot } \vec{u}$ определяет величину ее поворота в пространстве. Угол $\Delta\varphi$ поворота площадки, как нетрудно показать, равен

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \cdot \Delta\tau.$$

Это приближенное равенство становится точным в пределе при $\Delta\tau \rightarrow 0$:

$$\text{rot } \vec{u} = 2 \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (34)$$

Понятно, что множитель 2 не имеет принципиального значения, поэтому можно сделать следующий вывод.

Ротор векторной функции характеризует быстроту поворота сечения векторной трубки при перемещении его точек на расстояния, пропорциональные векторам \vec{u} .

В том случае, когда векторная функция $\vec{u} \equiv \vec{v}(\vec{r})$ определяет поле скоростей частиц деформируемого тела, остается справедливой формула (31), полученная нами для твердого тела, т. е.

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

Ротор линейной скорости в каждой точке равномерно движущейся сплошной среды равен удвоенному вектору угловой скорости вращения элемента объема, окружающего данную точку.

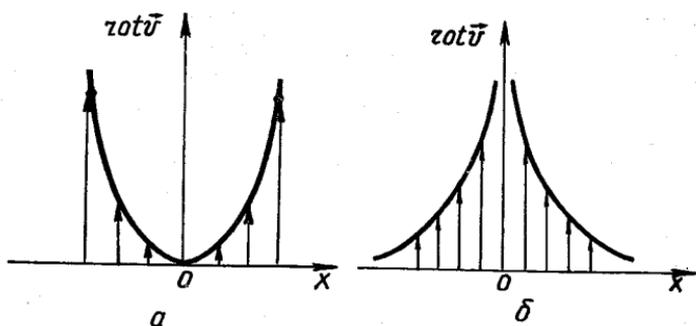


Рис. 21

Точки поля, где $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, называются вихрями потока. Наглядное представление о роторе скорости можно получить с помощью такого примера. Пусть скорости частичек воды на поверхности реки образуют некоторое векторное поле $\vec{v}(x, y)$. Бросим в реку множество небольших полосок фанеры. В тех местах, где полоски плывут поступательно, не вращаясь, $\text{rot } \vec{v} = 0$. Наоборот, на участках потока, где $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, т. е. где существуют вихри, полоски фанеры будут вращаться, и тем быстрее, чем больше по модулю $\text{rot } \vec{v}$.

На рисунке 21, а и б графически представлены векторные поля $\text{rot } \vec{v}$ плоских течений жидкости, для которых скорости заданы формулами:

а) $\vec{v} = r^2 [\vec{\omega}_0, \vec{r}]$, б) $\vec{v} = \frac{1}{r} [\vec{\omega}_0, \vec{r}]$, где $\vec{\omega}_0 = \text{const}$.

§ 8. Оператор Гамильтона

Большинство дифференциальных операций в теории поля упрощается при введении оператора Гамильтона, называемого еще символически вектором «набла» (∇):

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (35)$$

С его помощью основные действия по дифференцированию скалярных и векторных функций сводятся к соответствующему умножению оператора ∇ на эти функции.

Градиент скалярного поля

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

можно представить как произведение вектора ∇ на скаляр φ :

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi. \quad (36)$$

Дивергенцию векторного поля \vec{a}

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

можно рассматривать как скалярное произведение векторов ∇ на вектор \vec{a} :

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}). \quad (37)$$

Ротор векторного поля \vec{a}

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

совпадает с векторным произведением оператора ∇ на \vec{a} :

$$\text{rot } \vec{a} = [\nabla, \vec{a}]. \quad (38)$$

Наконец, тензорное произведение ∇ на вектор \vec{a} представляет собой транспонированный тензор-производную:

$$\left(\frac{\vec{d}\vec{a}}{dz} \right) = \{\nabla, \vec{a}\} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{array} \right\|. \quad (39)$$

Преимущество пользования оператором Гамильтона заключается в том, что, выполняя различные другие дифференциальные действия над скалярными и векторными функциями, можно рассматривать ∇ формально как обычный вектор и применять к нему правила векторной алгебры. Нужно только учитывать, что ∇ есть дифференциальный оператор, обладающий свойствами производной. Отсюда вытекает ряд следствий.

1. Так как оператор ∇ является линейным, то результат его применения к сумме двух функций равен сумме произведений оператора ∇ на каждое слагаемое:

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \psi) &= \nabla\varphi + \nabla\psi, \text{ или } \text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi, \\ (\nabla, \vec{a} + \vec{b}) &= (\nabla, \vec{a}) + (\nabla, \vec{b}), \text{ или } \text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div}\vec{a} + \text{div}\vec{b}, \\ [\nabla, \vec{a} + \vec{b}] &= [\nabla, \vec{a}] + [\nabla, \vec{b}], \text{ или } \text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot}\vec{a} + \text{rot}\vec{b}.\end{aligned}$$

2. Поскольку ∇ — дифференциальный оператор, то в тех случаях, когда функции φ или \vec{a} являются постоянными, $\nabla\varphi = 0$, $(\nabla, \vec{a}) = 0$, $[\nabla, \vec{a}] = 0$.

3. Результат действия дифференциального оператора ∇ на произведение двух скалярных функций или на произведение скалярной и векторной функций равен сумме произведений каждого множителя на результат применения оператора ко второму сомножителю:

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= \psi \cdot \nabla\varphi + \varphi \cdot \nabla\psi, \text{ или } \text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{grad}\varphi + \varphi \text{grad}\psi, \\ (\nabla, \varphi\vec{a}) &= (\vec{a}, \nabla\varphi) + \varphi(\nabla, \vec{a}), \text{ или } \text{div}(\varphi\vec{a}) = (\vec{a}, \text{grad}\varphi) + \\ &\quad + \varphi \text{div}\vec{a}, \quad (40) \\ [\nabla, \varphi\vec{a}] &= \varphi[\nabla, \vec{a}] + [\nabla\varphi, \vec{a}], \text{ или } \text{rot}(\varphi\vec{a}) = \\ &\quad = \varphi \text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\varphi, \vec{a}].\end{aligned}$$

С помощью оператора Гамильтона легко вычисляются различные вторые производные скалярных и векторных функций.

Скалярное поле $\varphi(\vec{r})$ имеет одну производную — вектор $\text{grad}\varphi$. Векторное же поле $\vec{a}(\vec{r})$ характеризуется двумя первыми производными: скалярной $\text{div}\vec{a}$ и векторной $\text{rot}\vec{a}$. Следовательно, в математической теории поля встречаются три первые производные: $\text{grad}\varphi$, $\text{div}\vec{a}$, $\text{rot}\vec{a}$. Легко видеть, что скалярное поле $\text{div}\vec{a}$ и векторные поля $\text{grad}\varphi$ и $\text{rot}\vec{a}$ характеризуются пятью вторыми производными: $\text{div}\text{grad}\varphi$, $\text{rot}\text{grad}\varphi$, $\text{grad}\text{div}\vec{a}$, $\text{div}\text{rot}\vec{a}$, $\text{rot}\text{rot}\vec{a}$. Определим каждую из этих вторых производных с помощью оператора ∇ .

1. Величину $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ мы получаем в результате двухкратного скалярного применения оператора ∇ :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = (\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

По правилам возведения в квадрат вектора получаем для ∇^2 :

$$\nabla^2 = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор ∇^2 широко применяется в математической физике и называется оператором Лапласа или лапласианом. Он обозначается греческой буквой Δ (дельта).

Итак,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi. \quad (41)$$

2. Для получения величины $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$ необходимо применить оператор ∇ сначала скалярно, и затем векторно:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi].$$

Вынося скалярный множитель φ за скобки и учитывая, что векторное произведение двух одинаковых векторов всегда равно нулю, получим:

$$[\nabla, \nabla] \varphi = 0.$$

Следовательно, имеет место тождественное равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (42)$$

означающее, что потенциальное поле не имеет вихрей.

3. Величина $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$ представляет собой смешанное произведение трех сомножителей:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]).$$

Производя циклическую перестановку, получаем:

$$(\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{a}) = 0.$$

Итак, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$ всегда равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0. \quad (43)$$

Физический смысл этого тождества заключается в том, что вихревое поле не имеет источников (векторные линии не имеют ни начала ни конца, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность).

4. Вторая производная $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$ может быть представлена как двойное векторное произведение:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]].$$

По правилам векторного умножения

$$[\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a}.$$

Значит,

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}. \quad (44)$$

5. Из предыдущей формулы получаем выражение для второй производной $\text{grad div } \vec{a}$:

$$\text{grad div } \vec{a} = \text{rot rot } \vec{a} + \Delta \vec{a}. \quad (45)$$

§ 9. Формулы Грина

В качестве приложений полученных в предыдущем параграфе результатов выведем часто применяемые в математической физике так называемые *формулы Грина*.

Для любого векторного поля согласно теореме Гаусса—Остроградского имеет место равенство:

$$\iiint_V \text{div } \vec{a} \cdot dV = \oiint_S a_n ds. \quad (28)$$

Положим теперь, что

$$\vec{a}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) \cdot \vec{b}(\vec{r}), \quad (46)$$

где φ и \vec{b} —некоторые скалярная и векторная функции координат.

Согласно соотношению (40)

$$\text{div}(\varphi \vec{b}) = (\vec{b}, \text{grad } \varphi) + \varphi \text{div } \vec{b}.$$

Сделаем еще предположение, что векторное поле $\vec{b}(\vec{r})$ потенциально, т. е. что

$$\vec{b}(\vec{r}) = \text{grad } \psi(\vec{r}). \quad (46')$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем:

$$\text{div } \vec{a} = \text{div}(\varphi \text{grad } \psi) = (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi) + \varphi \cdot \Delta \psi. \quad (47)$$

Поскольку согласно (46) и (46') $\vec{a} = \varphi \text{grad } \psi$, то

$$a_n = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (48)$$

Следовательно, равенство Остроградского—Гаусса принимает вид:

$$\iiint_V (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi \cdot \Delta\psi) dv = \iint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS. \quad (49)$$

Это первая формула Грина.

Применяя равенство (47) к векторной функции $\vec{a} = \psi \cdot \text{grad } \varphi$, получаем:

$$\iiint_V (\nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \psi \cdot \nabla\varphi) dv = \iint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (50)$$

Вычитая последнее из (49), приходим ко второй формуле Грина:

$$\iiint_V (\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi) dV = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (51)$$

§ 10. Классификация векторных полей

Как мы знаем, любое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ аналитически характеризуется двумя «производными»: скалярной $\text{div } \vec{a}$ и векторной $\text{rot } \vec{a}$. Простейшими классами векторных полей являются такие, у которых в каждой точке одна из производных равна нулю.

1. Поле называется *безвихревым*, если

$$\text{rot } \vec{a} \equiv 0. \quad (52)$$

Несложно убедиться, что безвихревое поле является полем потенциальным, т. е. при выполнении условия (52) всегда можно подобрать такое скалярное поле $\varphi(\vec{r})$, для которого наше векторное поле является полем градиента этого скалярного поля:

$$\vec{a} = \text{grad } \varphi. \quad (52)$$

Основное свойство потенциального поля состоит в равенстве нулю циркуляции вектора по произвольной замкнутой кривой:

$$\Gamma = \oint_L a_i dl = 0. \quad (52')$$

Необходимость этого условия очевидна. Действительно,

в потенциальном поле $a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial l}$, поэтому

$$\oint_L a_i dl = \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \int_L d\varphi = 0.$$

Нетрудно доказать и достаточность этого условия.

Из основного свойства следует, что в потенциальных полях криволинейный интеграл от вектора $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до точки $N(x_2, y_2, z_2)$ зависит не от вида кривой интегрирования, а только от значения потенциала φ в начальной и конечной точках:

$$\int_M^N a_i dl = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1).$$

Примером потенциального векторного поля является поле консервативных сил (гравитационное поле, электростатическое поле и т. п.), в котором работа этих сил при перемещении частиц из одной точки в другую $A = \int_1^2 F \vec{dl}$

не зависит от выбора траектории.

Характерным для потенциальных полей является наличие эквипотенциальных поверхностей, между которыми векторы поля направлены в сторону возрастания потенциала.

Итак, всякое потенциальное поле бесциркуляционно. С другой стороны, по теореме Стокса

$$\oint_L a_i dl = \iint_S \text{rot}_n \vec{a} \cdot dS.$$

Поэтому тождественное обращение в нуль циркуляции вектора приводит к выполнению условия безвихревости $\text{rot } \vec{a} \equiv 0$.

Следовательно, условия потенциальности ($\vec{a} = \text{grad } \varphi$), безвихревости ($\text{rot } \vec{a} \equiv 0$) и бесциркуляционности ($\oint_L a_i dl \equiv 0$) векторного поля полностью эквивалентны.

Возможность представления векторной функции в виде градиента скалярной функции имеет большое значение в математической физике, ибо изучение векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в этом случае сводится к исследованию намного

более простого скалярного поля $\varphi(\vec{r})$. При этом скалярная функция $\varphi(\vec{r})$ называется скалярным потенциалом данного векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$.

2. Векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0, \quad (54)$$

является полем без источников и называется *соленоидальным* или *трубчатым*.

Согласно формуле (43) дивергенция от ротора произвольного вектора всегда равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{b} \equiv 0. \quad (43)$$

Сопоставляя (43) и (54), мы можем векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ представить как ротор некоторого другого векторного поля $\vec{b}(\vec{r})$:

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}. \quad (55)$$

Иными словами, соленоидальное поле является вихревым.

Основным свойством соленоидального поля $\vec{a}(\vec{r})$ является равенство нулю потока вектора \vec{a} через произвольную замкнутую поверхность в пространстве поля:

$$\oint_S a_n dS \equiv 0. \quad (56)$$

Это непосредственно следует из формулы Гаусса—Остроградского (28). В частности, если в качестве S выбрать поверхность некоторой части векторной трубки, то мы придем к установленному еще в § 6 выводу о постоянстве в вихревом поле *напряжения* вдоль векторной трубки.

(Напряжением I векторной трубки в данном сечении S называют поток вектора \vec{a} через это сечение: $I = \iint_S a_n dS$.)

Из основного свойства соленоидальных полей вытекает, что векторные линии у них не имеют ни начала, ни конца, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

3. Поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого и $\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0$, и $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$ не имеют ни источников, ни вихрей. Такое поле одновре-

менно и потенциально и соленоидально (вихревое и безвихревое).

Рассмотрим, какими свойствами обладает такое векторное поле. Поскольку $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, то $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде градиента скалярного поля:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Так как $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, то, взяв дивергенцию от предыдущего равенства, получим, что потенциал φ должен удовлетворять условию

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

или

$$\Delta \varphi = 0. \quad (57)$$

Итак, векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого обе производные тождественно равны нулю ($\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0$, $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$), всегда можно представить в виде градиента скалярной функции φ , удовлетворяющей уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

4. Важность изучения потенциальных и вихревых полей становится особенно ясной, если принять во внимание теорему Гельмгольца.

Всякое однозначное, непрерывное и гладкое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде суммы потенциального и вихревого полей:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) + \operatorname{rot} \vec{b}(\vec{r}). \quad (58)$$

При этом векторный потенциал \vec{b} всегда можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div} \vec{b} = 0$. А поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{b} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi$, то источники исходного поля $\operatorname{div} \vec{a}$ выражаются через лапласиан $\Delta \varphi$ и не зависят от \vec{b} .

§ 11. Физические векторные и тензорные поля в четырехмерном пространстве-времени

В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры четырехмерных векторных и тензорных величин, встречающихся в физике.

Математический аппарат теории относительности пользуется своеобразным пространством четырех измерений, где три измерения x_1, x_2, x_3 берутся по обычным осям координат X, Y, Z (пространственные оси), а четвертым измерением x_4 служит мнимая координата ict (где $i = \sqrt{-1}$, c — скорость света, t — время). Такое пространство называют *псевдоевклидовым* (см. ч. III); оно обладает некоторыми своеобразными свойствами, на которые мы укажем ниже.

Каждая точка характеризуется четырьмя координатами, из которых три — x_1, x_2, x_3 являются действительными числами, а четвертая x_4 — мнимая. Прямолинейный отрезок, соединяющий две точки $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ и $N(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$, представляет собой четырехмерный вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, компоненты которого $a_k = x''_k - x'_k$ (где $k = 1, 2, 3, 4$). Согласно формуле (3) квадрат длины четырехмерного вектора

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

в отличие от евклидова пространства может из-за мнимости a_4 быть не только положительной, но и отрицательной величиной, а также равняться нулю.

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов в псевдоевклидовом пространстве определяется по аналогии с обычным скалярным произведением (в трехмерном пространстве) так:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

При этом, как легко убедиться, стоящая справа сумма произведений компонентов является инвариантом, не меняющимся при повороте четырехмерной системы координат.

Однако в отличие от обычного пространства величина (\vec{a}, \vec{b}) может быть не только положительной, но и отрицательной, а также равняться нулю. В последнем случае векторы \vec{a} и \vec{b} называют взаимно перпендикулярными.

Два четырехмерных вектора \vec{a} и \vec{b} можно перемножить тензорно, в результате чего получается четырех-

мерная диада

$$\hat{D} = \{\vec{a}, \vec{b}\} = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{vmatrix}.$$

Однако векторное произведение четырехмерных векторов существенно отличается от векторного произведения в трехмерном пространстве. Дело в том, что векторное произведение двух векторов любой размерности, по-существу, является антисимметричным тензором, равным удвоенной антисимметричной части диады. В случае трехмерного пространства этот тензор

$$\hat{D}_A = \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

имеет три существенно различные компоненты и ему можно сопоставить трехмерный вектор

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В случае же четырехмерного пространства антисимметричная часть диады содержит 6 компонентов типа $D_{ik} = a_ib_k - a_kb_i$, в то время как вектор в четырехмерном пространстве имеет только 4 компонента. Следовательно, антисимметричному тензору \hat{D}_A никакой вектор сопоставить нельзя. Мы приходим к выводу, что роль векторного произведения двух четырехмерных векторов \vec{a} и \vec{b} играет антисимметричный четырехмерный тензор

$$\hat{D}_A = \begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_4 - a_4b_1 \\ a_2b_1 - a_1b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & a_2b_4 - a_4b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & a_3b_2 - a_2b_3 & 0 & a_3b_4 - a_4b_3 \\ a_4b_1 - a_1b_4 & a_4b_2 - a_2b_4 & a_4b_3 - a_3b_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Легко понять, что из шести его компонентов три являются действительными, а остальные три (содержащие индекс «4») — мнимыми. Подобным же образом обобщаются на случай четырехмерного пространства остальные операции векторной и тензорной алгебры.

Рассмотрим подробнее четырехмерные дифференциальные операции векторного анализа.

Проще всего эти операции обобщаются с помощью четырехмерного векторного оператора набла:

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \vec{i}_4 \frac{\partial}{\partial x_4}. \quad (59)$$

Градиентом скалярной функции в четырехмерном пространстве называется четырехмерный вектор:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \sum_{k=1}^4 \vec{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (60)$$

Четырехмерной дивергенцией векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ назовем инвариантную величину:

$$\text{div } \vec{a} \equiv (\nabla, \vec{a}) = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_k}. \quad (61)$$

В частности, если вектор \vec{a} является четырехмерным градиентом скалярной функции φ , то, подставляя (60) в (61), получаем:

$$\text{div } \vec{a} = \text{div grad } \varphi = \sum_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}. \quad (62)$$

Эту величину обозначают символом $\square \varphi$ (где \square — *четырёхмерный лапласиан*, или *даламбертиан*). С помощью оператора ∇ легко получается выражение и для дифференциальной операции, называемой *четырёхмерным ротором*:

$$\text{rot } \vec{a} = 2 \{ \nabla \cdot \vec{a} \}_A =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) & 0 & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_4} \right) & 0 \end{vmatrix}.$$

Величина $\text{rot } \vec{a}$ представляет собой удвоенную антисимметричную часть тензорного произведения векторов ∇ и \vec{a} (диады).

Наконец, производная четырехмерной векторной функции \vec{a} по радиус-вектору \vec{r} представляет собой тензор:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{r}} = \{ \widetilde{\nabla \cdot \vec{a}} \} = \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right\|. \quad (64)$$

После такого краткого ознакомления с четырехмерным пространством-временем приведем несколько примеров конкретных физических векторных и тензорных полей.

1. С точки зрения теории относительности электрическое и магнитное поля являются различными аспектами *единого электромагнитного поля*. Последнее можно характеризовать четырехмерным вектором $\vec{\Phi}$, называемым *электромагнитным потенциалом*, компонентами которого являются величина $i\varphi$ (где φ — скалярный электрический потенциал, а $i = \sqrt{-1}$) и проекции A_x, A_y, A_z на координатные оси векторного магнитного потенциала \vec{A} .

Потенциал электромагнитного поля образует в четырехмерном *пространстве-времени* векторное поле:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = \vec{\Phi}(A_x, A_y, A_z, i\varphi).$$

2. Как известно из теории электричества, потенциалы φ и \vec{A} являются косвенными характеристиками электрического и магнитного полей. Непосредственно эти поля определяются векторами напряженностей \vec{E} и \vec{H} . В четырехмерном пространстве напряженность электромагнитного поля представляет собой антисимметричный тензор:

$$\hat{F} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{array} \right\|, \quad (65)$$

действительные компоненты которого характеризуют магнитное поле \vec{H} , а мнимые — электрическое поле \vec{E} . Между напряженностью \hat{F} и потенциалом Φ электромагнитного поля существует простая четырехмерная дифференциальная связь

$$\hat{F} = \text{rot } \vec{\Phi},$$

являющаяся обобщением известного из электродинамики соотношения $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$. Таким образом, математически электромагнитное поле в четырехмерном пространстве-времени образует тензорное поле $\hat{F}(\vec{r})$.

3. В классической механике количество движения материи может быть охарактеризовано двумя различными величинами — вектором импульса \vec{P} (с компонентами mv_x, mv_y, mv_z) или скаляром $E = \frac{mv^2}{2}$, выражающим собой кинетическую энергию тела.

Согласно теории относительности обе эти величины объединяются в единый четырехмерный вектор импульса \vec{G} с компонентами $(mv_x, mv_y, mv_z, \frac{i}{c} E)$. Точно так же четырехмерным вектором является в механике теории относительности сила \vec{K} .

Поэтому и основной закон динамики — второй закон Ньютона — записывается в четырехмерной форме так:

$$\frac{d\vec{G}}{d\tau} = \vec{K},$$

где τ — так называемое *собственное время*, измеряемое по часам движущегося тела.

Глава III

ТЕОРИЯ ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

В предыдущих главах мы пользовались только прямоугольными декартовыми координатами. Однако при решении многих задач математической физики удобно применять криволинейные координаты.

§ 1. Криволинейные координаты

Если декартовы координаты x, y, z являются взаимно однозначными функциями других трех переменных q_1, q_2, q_3

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \quad (1)$$

то переменные величины q_1, q_2, q_3 называются *криволинейными координатами*.

Если, сохраняя одну из величин q_i постоянной, остальным двум координатам будем сообщать всевозможные значения, то получим поверхность, называемую *координатной поверхностью*. Ясно, что для каждой системы координат существуют три семейства координатных поверхностей: $q_1 = \text{const}, q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}$.

Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями*; их именуют той координатой, которая вдоль них меняется. За положительное направление координатной линии принято считать то, вдоль которого соответствующая переменная увеличивается.

Очевидно, что через каждую точку пространства проходят по три взаимно пересекающиеся координатные поверхности и по три координатные линии (рис. 22). Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в математической физике криволинейные системы координат.

Цилиндрическая система координат. Криволинейные координаты ρ, φ, z (рис. 23) связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2)$$

Цилиндрические координаты изменяются в пределах:

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Координатными поверхностями $\rho = \text{const}$ являются коаксиальные цилиндры с осью Z . Семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ — это полуплоскости, ограниченные осью Z .

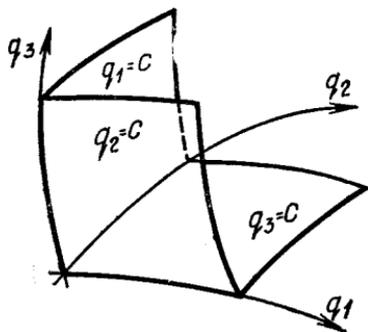


Рис. 22

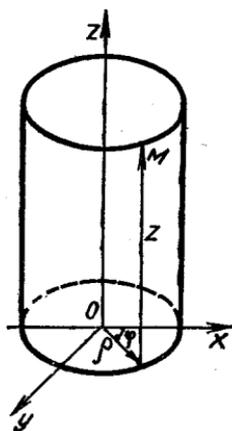


Рис. 23

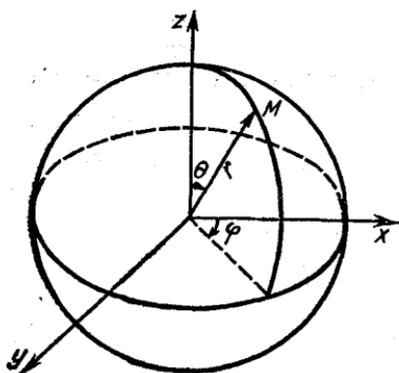


Рис. 24

Семейство поверхностей $z = \text{const}$ — это плоскости, перпендикулярные оси Z .

Координатные линии ρ представляют собой полупрямые, начинающиеся на оси Z ; семейство линий φ — это окружности в плоскостях $z = \text{const}$ с центром на оси Z ; линии z — это прямые, параллельные OZ .

Частным случаем цилиндрической системы является (двумерная) полярная система координат (ρ, φ) .

Сферическая система. Криволинейные координаты r, θ, φ (рис. 24) связаны с декартовыми формулами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (3)$$

и изменяются в пределах $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Координатными поверхностями $r = \text{const}$ являются концентрические сферы; поверхностями $\theta = \text{const}$ — конусы с осью Z ; поверхностями $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, ограниченные осью Z .

Координатные линии r — это радиусы, линии θ — меридианы, линии φ — параллели.

Если криволинейная система координат обладает тем свойством, что в любой точке пространства проходящие через нее три координатные линии взаимно перпендикулярны, то система координат называется *ортогональной*.

Легко убедиться, что и цилиндрическая и сферическая системы принадлежат к классу ортогональных. Ясно, что различные векторные и тензорные соотношения имеют в ортогональных системах координат более простой вид, чем в произвольных (неортогональных) системах криволинейных координат. Поэтому полезно сформулировать условия, которым должны удовлетворять функции $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)$, чтобы координатная система была ортогональной.

Как известно из аналитической геометрии, условие перпендикулярности двух прямых, образующих с осями координат углы α, β, γ и α', β', γ' , сводится к равенству:

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' = 0.$$

Поскольку косинусы углов между касательной к координатной линии q_i с прямоугольными осями координат x, y, z пропорциональны соответствующим частным производным $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$, то мы получим следующие условия взаимной перпендикулярности координатных кривых q_i и q_j :

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0. \quad (4)$$

Чтобы криволинейная система координат q_1, q_2, q_3 была ортогональной, ее координатные линии должны представлять собой три взаимно перпендикулярных семейства кривых и, следовательно, функции $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3)$ и $z(q_1, q_2, q_3)$ должны удовлетворять трем условиям типа (4). В математической физике чаще всего пользуются ортогональными системами координат. Поэтому в дальнейшем, говоря о криволинейных координатах, будем всегда считать их ортогональными.

§ 2. Коэффициенты Лямэ

Выразим прежде всего элемент дуги ds . В прямоугольных декартовых координатах, как известно,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (5)$$

Дифференцируя равенство (1), получим:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3. \end{aligned} \quad (1')$$

Подставляя (1') в (5) и принимая во внимание условие ортогональности (4), найдем, что

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (6)$$

где H_1, H_2, H_3 — так называемые коэффициенты Лямэ, определяемые следующей формулой:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (7)$$

(Обратим внимание на то, что равенство (6) не содержит произведений $dq_i dq_j$. Ясно, что это является следствием ортогональности координат q_1, q_2, q_3 .)

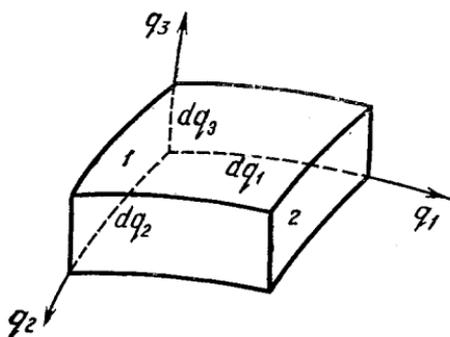


Рис. 25

Коэффициенты Лямэ H_i устанавливают связь между прямоугольными декартовыми и криволинейными ортогональными координатами. Положение криволинейной системы относительно декартовой не влияет на вид этих коэффициентов. Как ясно из самого вывода, коэффициенты Лямэ имеют инвариантный характер и одно-

значно определяют данную криволинейную систему координат.

Из формулы (6) следует, что элемент дуги координатной линии равен

$$ds = H_i dq_i. \quad (8)$$

Отсюда для коэффициента Лямэ получаем выражение

$$H_i = \frac{ds_i}{dq_i}, \quad (9)$$

показывающее, что H_i характеризует быстроту изменения длины дуги координатной линии при варьировании этой координаты. Легко видеть, что площадь элементарного криволинейного квадрата и объем элементарного кубика, стороны которых являются отрезками координатных линий (рис. 25), определяются с точностью до бесконечно малых второго порядка равенствами:

$$d\sigma = H_1 H_2 dq_1 dq_2, \quad (10)$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (11)$$

Легко показать, что коэффициенты Лямэ для прямоугольной декартовой системы координат равны $H_x = H_y = H_z = 1$, для цилиндрической

$$(\rho, \varphi, z) - H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1, \quad (12)$$

для сферической

$$(r, \theta, \varphi) - H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin \theta. \quad (13)$$

Примеры

1. Показать, что плоская эллиптическая система координат (ξ, η) , определяемая соотношениями

$$x = \text{ch } \xi \cdot \cos \eta, \quad y = \text{sh } \xi \cdot \sin \eta, \quad (14)$$

ортогональна, и вычислить коэффициенты Лямэ для этой системы координат.

Чтобы найти вид координатных линий, преобразуем формулы (14) двумя способами:

$$\frac{x}{\operatorname{ch} \xi} = \cos \eta, \quad \frac{y}{\operatorname{sh} \xi} = \sin \eta, \quad (14')$$

$$\frac{x}{\cos \eta} = \operatorname{ch} \xi, \quad \frac{y}{\sin \eta} = \operatorname{sh} \xi. \quad (14'')$$

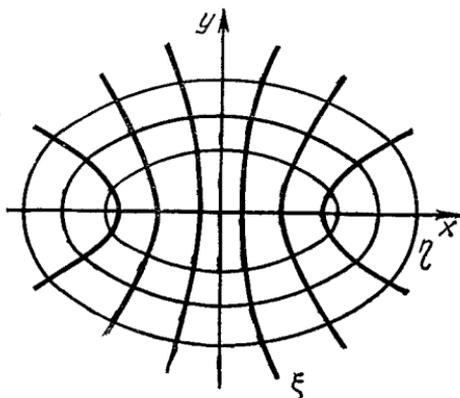


Рис. 26

Одну из переменных можно исключить, если равенства (14') возвести в квадрат и сложить, а возведенные в квадрат равенства (14'') вычесть друг из друга:

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \quad (15)$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 \eta} - \frac{y^2}{\sin^2 \eta} = 1. \quad (16)$$

Из (15) вытекает, что координатные линии η (вдоль которых $\xi = \operatorname{const}$) являются эллипсами, оси которых совпадают с декартовыми осями координат. Более того, поскольку большая и малая полуоси равны соответственно $a = \operatorname{ch} \xi$ и $b = \operatorname{sh} \xi$, то фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, т. е. одинаково для всех ξ . Это значит, что семейство координатных кривых η есть семейство софокусных эллипсов (рис. 26). Характер второго семейства координатных кривых следует из выражения (16). А именно, положив в нем $\eta = \operatorname{const}$, находим, что линии ξ представляют собой семейство гипербол с теми же фокусами, что и у эллипсов. Проверим теперь, выполняется ли условие ортогональности. Для этого вычислим частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \eta \cdot \operatorname{sh} \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin \eta \cdot \operatorname{ch} \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\operatorname{ch} \xi \cdot \sin \eta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{sh} \xi \cdot \operatorname{cosh} \eta.$$

Пользуясь этими выражениями, убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0,$$

т. е. что линии ξ и η взаимно перпендикулярны.

Наконец, вычислим коэффициенты Лямэ. Прежде всего легко убедиться, что коэффициенты H_ξ и H_η равны между собой и выражаются так:

$$H_\xi = H_\eta = \sqrt{\cos^2 \eta \cdot \text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta \cdot \text{ch}^2 \xi}.$$

Учитывая, что $\sin^2 \eta = 1 - \cos^2 \eta$ и $\text{ch}^2 \xi = 1 + \text{sh}^2 \xi$, получаем окончательно:

$$H_\xi = H_\eta = \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}. \quad (17)$$

2. Показать, что *плоская параболическая* система координат (u, v) , связанная с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями

$$x = \frac{1}{2}(u-v), \quad y = \sqrt{uv}, \quad (18)$$

является ортогональной. Определить коэффициенты Лямэ.

Чтобы найти уравнения координатных линий u и v , выразим каждую из этих переменных через x и y :

$$u = x + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = -x + \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (19)$$

Семейство координатных линий u мы определим, положив в (19) $v = c$:

$$c = -x + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y^2 = 2cx + c^2.$$

Это — симметричные относительно оси X софокусные параболы с фокусом в начале координат и вершинами в точках $x = -c/2$ (кривые слева на рисунке 27). Аналогично, общее уравнение координатных кривых v при $u = c'$ имеет вид:

$$y^2 = -2c'x + c'^2,$$

отсюда ясно, что линии v также представляют собой соосные параболы с фокусом в точке O , но повернутые в противоположную сторону (кривые справа на рис. 27).

Взаимная перпендикулярность кривых u и v устанавли-

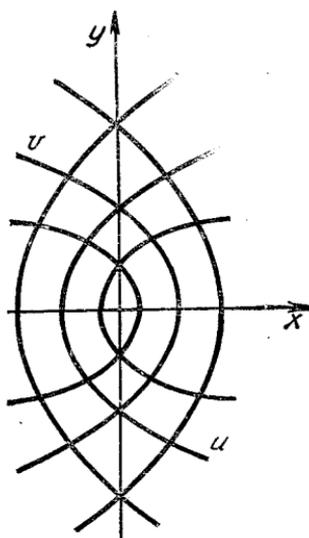


Рис. 27

вается с помощью условий (4) и (18):

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Для коэффициентов Лямэ получаем следующие выражения:

$$H_u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u+v}{u}}, \quad H_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u+v}{v}}. \quad (20)$$

§ 3. Основные дифференциальные операции в криволинейных координатах

1. Градиент скалярной функции. Как было показано в главе I, градиент скалярной функции φ представляет собой вектор $\text{grad } \varphi$, проекция которого на произвольное направление l равна производной от φ по этому направлению:

$$\text{grad}_l \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

где dl — длина отрезка, взятого вдоль направления l .

Пусть вектор $\text{grad } \varphi$ задан в некоторой точке пространства M . Через нее проходят три взаимно перпендикулярные линии q_1, q_2, q_3 . Проведем в точке M касательные к этим линиям и вдоль этих касательных отложим (в направлении возрастания координат) единичные орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 28). Эта тройка ортогональных ортов, называемая *базисом* (или *репером*), образует локальную

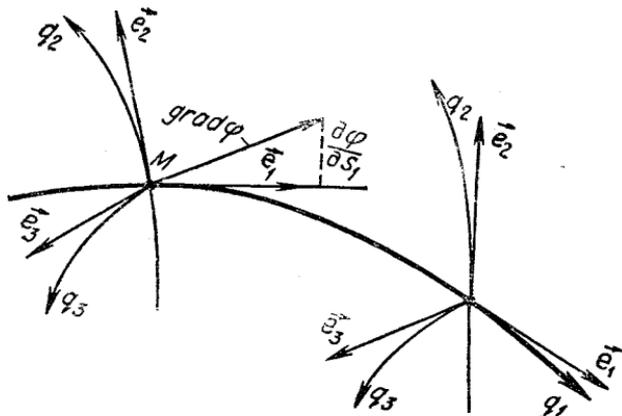


Рис. 28

(местную) прямоугольную систему координат. Ясно, что в характеризующих криволинейными координатами точках пространства реперы будут, вообще говоря, разные. Проекция вектора $\text{grad } \varphi$ на направление координатных линий (т. е. на касательные к этим линиям в точке M) равна:

$$(\text{grad } \varphi)_{q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_i},$$

где ds_i — длина дуги координатной кривой q_i . Но согласно (8) $ds_i = H_i \cdot dq_i$. Поэтому

$$(\text{grad } \varphi)_{q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (21)$$

Следовательно, градиент скалярной функции в некоторой точке пространства определяется в криволинейной системе координат тремя проекциями на координатные линии, проходящие через эту точку:

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \vec{e}_3. \quad (22)$$

Необходимо только иметь в виду, что в отличие от прямоугольных координат компоненты градиента $(\text{grad}_{q_i} \varphi)$ меняются от точки к точке не только вследствие того, что φ — переменная величина, но, вообще говоря, еще из-за непостоянства значения H_i и непостоянства направления в пространстве соответствующего орта \vec{e}_i .

2. **Дивергенция векторной функции.** В главе III была выведена формула, которая может служить инвариантным определением дивергенции:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{dN}{dV}. \quad (23)$$

Здесь dV — элемент объема, выражающийся в криволинейных координатах согласно (11) формулой $dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$, а dN определяет поток вектора через малую замкнутую поверхность $\Delta\sigma$, ограничивающую объем dV :

$$dN = \oiint_{\Delta\sigma} a_n d\sigma.$$

В качестве элементарного объема dV выберем криволинейный кубик, гранями которого являются участки координатных поверхностей (см. рис. 25). Рассмотрим две грани, перпендикулярные q_1 — левую 1 и правую 2.

Площадь грани 1 равна:

$$d\sigma_1 = H_2(q_1) H_3(q_1) dq_2 dq_3.$$

Соответственно площадь грани 2 запишется так:

$$d\sigma_2 = H_2(q_1 + dq_1) H_3(q_1 + dq_1) dq_2 dq_3.$$

Пусть переменный вектор \vec{a} в точках элементарной грани 1 принимает значение $\vec{a}(q_1)$, а в точках грани 2—соответственно $\vec{a}(q_1 + dq_1)$. Так как координатная линия q_1 перпендикулярна к обоим этим граням, то нормальные проекции векторов $\vec{a}(q_1)$ и $\vec{a}(q_1 + dq_1)$ с учетом направлений нормали принимают значения: $-a_{q_1}(q_1)$ и $a_{q_1}(q_1 + dq_1)$. Поэтому результирующий поток вдоль q_1 равен:

$$dN_{q_1} = -a_{q_1} H_2(q_1) H_3(q_1) dq_2 dq_3 + a_{q_1}(q_1 + dq_1) H_2(q_1 + dq_1) \times \\ \times H_3(q_1 + dq_1) dq_2 dq_3,$$

или, пользуясь формулой Тейлора и отбрасывая малые высших порядков,

$$dN_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Полный же поток через все грани кубика определяется равенством:

$$dN = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{q_2}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 a_{q_3}) \right\} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (24)$$

Подставляя это соотношение в (23) и учитывая (11), получаем выражение для дивергенции в криволинейных координатах:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{q_1}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 a_{q_3}) \right\}. \quad (25)$$

3. Оператор Лапласа. В прямоугольных декартовых координатах оператор Лапласа, или *лапласиан*, представляет собой сумму вторых частных производных по координатам:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Чтобы получить выражение лапласиана в криволинейных

координатах воспользуемся соотношением:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi. \quad (26)$$

Обозначим $\operatorname{grad} \varphi = \vec{a}$. Тогда согласно (21)

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad \Delta \varphi = \operatorname{div} \vec{a}.$$

Используя формулу (25), в которую вместо a_{q_i} подставим

$\frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$, приходим к искомому выражению:

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right\}. \quad (27)$$

4. Ротор векторной функции. Для получения выражения ротора в криволинейных координатах будем исходить из инвариантного соотношения (32) главы II:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \frac{d\Gamma}{d\sigma}. \quad (28)$$

Выберем в качестве элементарной площадки $d\sigma$ малый криволинейный четырехугольник $ABCD$, стороны которого являются отрезками координатных линий q_2 и q_3 . Ясно, что нормаль к этой площадке направлена вдоль q_1 (рис. 29). Согласно (10)

$$d\sigma = H_2 H_3 dq_2 dq_3.$$

Что касается циркуляции по периметру четырехугольника

$$d\Gamma = \oint_{\Delta L} a_i dl,$$

то для ее определения необходимо вычислить криволинейный интеграл по каждой из четырех сторон прямоугольника:

$$\oint_{\Delta L} = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A.$$

При этом нужно учесть, во-первых, что длина

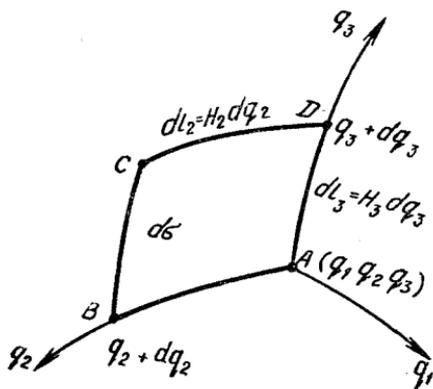


Рис. 29

стороны прямоугольника согласно (8) равна $dl_i = H_i \cdot dq_i$, и, во-вторых, что в данном случае рассматривается двумерное векторное поле в точках координатной поверхности $q_1 = \text{const}$, так что $\vec{a} = \vec{a}(q_2, q_3)$. Следовательно,

$$\int_A^B a_i dl = a_2(q_3) H_2(q_3) dq_3, \text{ где } a_2 = a_{q_2},$$

и

$$\int_D^A a_i dl = -a_3(q_2) H_3(q_2) dq_2.$$

Аналогично для остальных двух сторон:

$$\int_B^C a_i dl = a_3(q_2 + dq_2) H_3(q_2 + dq_2) dq_3,$$

$$\int_C^D a_i dl = -a_2(q_3 + dq_3) H_2(q_3 + dq_3) dq_2.$$

Складывая второй интеграл с третьим и четвертый с первым и пользуясь формулой Тейлора, получаем:

$$d\Gamma = \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right] dq_2 dq_3. \quad (29)$$

Подставляя значения $d\Gamma$ и $d\sigma$ в (28), найдем для проекции ротора на направление q_1 :

$$\text{rot}_{q_1} \vec{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}. \quad (30)$$

Теперь понятно, что полное выражение вихря через его проекции на локальные орты криволинейной системы координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} \right\} \vec{e}_1 + \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_1} \right\} \vec{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_2} \right\} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Примеры.

1. Написать выражения дифференциальных операций $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{a}$, $\text{rot } \vec{a}$ и Δu в цилиндрической системе координат ρ , φ , z .

Как было показано в § 2, коэффициенты Лямэ в рассматриваемом случае имеют следующие значения: $H_\rho = 1$,

$H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$. Поэтому согласно формуле (22)

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_3. \quad (32)$$

Пользуясь формулой (25), получаем выражение для дивергенции:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (33)$$

Точно так же, подставляя в (27) значения коэффициентов Лямэ, получим:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (34)$$

Наконец, написав формулу (30) в применении к цилиндрическим координатам и подставив в нее значения коэффициентов Лямэ, получим выражения для проекций вихря:

$$\begin{aligned} \text{rot}_\rho \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}, \quad \text{rot}_\varphi \vec{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}, \\ \text{rot}_z \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial (\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

2. Написать выражения для $\text{grad } u$, $\text{div } \vec{a}$, $\text{rot } \vec{a}$ и Δu в сферической системе координат r , θ , φ .

Учитывая, что $H_r = 1$, $H_\theta = r$ и $H_\varphi = r \sin \theta$ и поступая так же, как в предыдущем примере, получаем выражения для дифференциальных операций в сферической системе координат.

Градиент скалярной функции выразится формулой:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_3, \quad (36)$$

дивергенция векторной функции — формулой:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (37)$$

Подставляя в (37) вместо a_{q_i} соответствующие проекции $(\text{grad } u)_{q_i}$, получаем лапласиан скалярной функции:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (38)$$

Для проекций вихря получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right], \\ \text{rot}_\theta \vec{a} &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \right], \\ \text{rot}_\varphi \vec{a} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Часть вторая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Глава I.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Поперечные колебания струны. Волновое уравнение

Струна—это тонкая, гибкая натянутая нить, закрепленная в двух точках. Если струну отклонить от положения равновесия (которое на рисунке 30, а совпадает с осью X), то она будет совершать поперечные колебания. Будем обозначать смещение точек струны через u . Ясно, что u является функцией координаты x и времени t :

$$u = u(x, t). \quad (1)$$

Задача состоит в том, чтобы найти положение струны в любой момент времени, т. е. найти явный вид функции (1). Мы сейчас покажем, что при малых отклонениях функция $u(x, t)$ удовлетворяет определенному линейному дифференциальному уравнению в частных производных. Выделим элемент струны ds , который в начальный момент имел длину dx (рис. 30, б). По формуле квадрата длины элемента дуги имеем:

$$ds^2 = dx^2 + du^2$$

или

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, для которых $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, то под корнем можно пренебречь квадратом про-

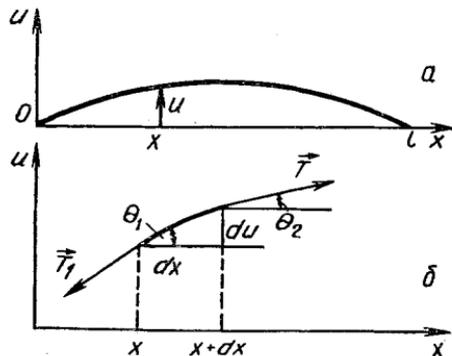


Рис. 30

изводной и в первом приближении считать, что $ds \approx dx$. Поскольку в этом приближении струна не является растяжимой, мы вправе считать натяжение струны T неизменным по величине.

Применим теперь к рассматриваемому элементу струны второй закон Ньютона: произведение массы $dm = \rho \cdot dx$ (ρ — линейная плотность) на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ равно сумме сил, приложенных к элементу. Полагая струну очень тонкой, можно пренебречь весом любого ее элемента и учитывать только силы натяжения \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , действующие с обеих сторон. При этом нужно иметь в виду, что хотя натяжение вдоль струны по модулю постоянно, оно в отклоненной струне меняется по направлению от точки к точке.

Далее, так как колебания являются поперечными (вдоль оси U), то нас интересует только сумма вертикальных проекций сил (сумма горизонтальных составляющих, очевидно, равна нулю):

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_{2u} + T_{1u}. \quad (2)$$

Легко видеть, что

$$T_{1u} = -T \sin \theta_1 \quad \text{и} \quad T_{2u} = T \sin \theta_2.$$

Для малых колебаний углы θ_1 и θ_2 малы и можно приближенно (с точностью до малых второго порядка) принять

$$\sin \theta_1 \approx \operatorname{tg} \theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad \text{и} \quad \sin \theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx}.$$

Следовательно, правая часть уравнения (2) сводится к выражению

$$T_{2u} + T_{1u} = T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right].$$

Разложим теперь в ряд Тейлора $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x \cdot dx + \dots$$

Тогда с точностью до малых второго порядка

$$T_{2u} + T_{1u} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), приходим к равенству

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Введя обозначение

$$\frac{T}{\rho} = v^2, \quad (5)$$

получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (I)$$

Как всегда в механике, одного лишь уравнения движения (I) для определения формы струны в любой момент времени недостаточно. Необходимо еще задать *начальные условия*, т. е. положение ее точек и их скорости в момент $t = 0$:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x). \quad (6)$$

Кроме того, нужно еще указать, что происходит на концах струны, т. е. задать *граничные условия*. Для струны, закрепленной с обоих концов, граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0. \quad u|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, колебания струны описываются *одномерным волновым уравнением* (I). Если поперечные колебания совершает натянутая упругая пленка (мембрана) (рис. 31), то соответствующее волновое уравнение является *двумерным*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (I')$$

При этом начальные условия, определяющие положения и скорости точек мембраны, имеют вид:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Что касается граничного условия, то, поскольку мембрана вдоль контура L обычно закреплена, оно принимает форму:

$$u|_L = 0.$$

Еще более общий случай мы получаем, когда колебания (продольные) совершают частицы сплошной среды.

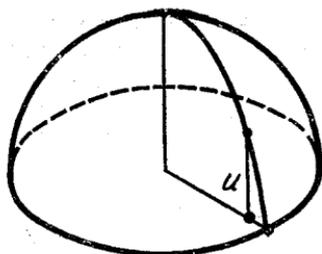


Рис. 31

Это — случай акустических колебаний. Дифференциальное уравнение для таких колебаний становится *трехмерным* волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (I'')$$

или (в сокращенной записи):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u.$$

Здесь $u(x, y, z, t)$ — потенциал скоростей движения точек среды, v — скорость звука в данной среде.

Начальные условия записывают в такой форме:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Граничное же условие обычно выражает тот факт, что на границе с твердой непроницаемой поверхностью S сосуда, в котором находится упругая среда, нормальная составляющая скорости частиц равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0.$$

Следует отметить, что трехмерным волновым уравнением описываются не только акустические, но и электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме. А именно, для напряженностей электрического и магнитного полей имеют место уравнения:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где c — скорость света в вакууме.

§ 2. Уравнение теплопроводности

Если температура в различных точках тела неодинакова, то в нем происходит перераспределение тепла в соответствии с эмпирическим законом Фурье, согласно которому количество тепла dQ , протекающее через малую площадку с площадью dS за короткий промежуток времени, прямо пропорционально площади dS , длительности

промежутка dt и производной от температуры по нормали к площадке:

$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt, \quad (8)$$

где k — коэффициент (внутренней) теплопроводности вещества.

Введем понятие вектора плотности теплового потока \vec{q} , совпадающего по направлению с градиентом температуры, а по модулю равный количеству тепла, протекающего за одну секунду через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к градиенту температуры. Тогда закон теплопроводности принимает векторную форму:

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T. \quad (9)$$

Происхождение знака минус в (8) и (9) понятно: градиент направлен в сторону возрастания температуры, а тепло течет к более холодным точкам тела.

Перейдем теперь к выводу дифференциального уравнения распространения тепла. Пусть имеется однородное тело, температура внутри которого является функцией координат x , y , z и времени t :

$$T = T(x, y, z, t).$$

Для общности предположим, что внутри тела существуют источники тепла, мощность которых равна $Q(x, y, z, t)$. Выделим в теле некоторый малый объем ΔV и составим его тепловой баланс. За время dt в нем выделится количество теплоты:

$$\Delta Q = dt \int_{\Delta V} Q(x, y, z, t) dV. \quad (10)$$

Часть этого тепла $\Delta Q'$ идет на повышение температуры элемента ΔV , а остальная доля $\Delta Q''$ из-за теплопроводности уйдет в окружающие слои тела.

Сначала определим $\Delta Q'$. Количество тепла, необходимое для повышения температуры бесконечно малого элемента dV от $T(t)$ до $T(t + dt)$, равно:

$$dQ' = c \rho dV [T(t + dt) - T(t)] = c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV,$$

где c — удельная теплоемкость тела, ρ — его плотность.

Интегрируя это равенство по объему ΔV , получим:

$$\Delta Q' = dt \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (11)$$

Чтобы определить $\Delta Q''$, учтем, что за одну секунду через поверхность ΔS , ограничивающую объем ΔV , протекает количество теплоты

$$\oint_{\Delta S} q_n dS.$$

Поэтому

$$\Delta Q'' = dt \oint_{\Delta S} q_n dS. \quad (12)$$

Приравнивая ΔQ сумме $\Delta Q'$ и $\Delta Q''$, получаем:

$$\int_{\Delta V} Q dV = \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{\Delta S} q_n dS. \quad (13)$$

В этом равенстве стоят интегралы по разным переменным. Поэтому применим к последнему из них теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint_{\Delta S} q_n dS = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV.$$

Тогда равенство (13) примет вид:

$$\int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV = \int_{\Delta V} Q dV,$$

или

$$\int_{\Delta V} \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right] dV = 0.$$

Поскольку это соотношение справедливо для произвольного объема ΔV , то должно быть равным нулю само подинтегральное выражение:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q = 0.$$

Подставляя сюда значение q из (9), получаем:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) = Q. \quad (14)$$

Так как по предположению тело однородно, то коэффициент теплопроводности k является величиной постоян-

ной. Поэтому

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T.$$

В ч. I было показано, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \Delta T$. Учитывая это, приходим к следующему дифференциальному уравнению распространения тепла:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T + Q(x, y, z, t). \quad (14')$$

Рассмотрим частные случаи этого уравнения.

1. Распространение тепла без тепловыделения. Если внутри рассматриваемой области нет источников тепла, т. е. $Q = 0$, то уравнение (14') принимает более простой вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T, \quad (11)$$

где $a = \frac{k}{c\rho}$ — так называемый коэффициент температуропроводности.

2. Установившийся поток тепла. Для стационарного процесса теплообмена, т. е. когда температура в каждой точке тела не меняется со временем ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), уравнение теплопроводности приобретает форму так называемого уравнения Пуассона:

$$\Delta T = -\rho, \quad (11')$$

где $\rho = \frac{Q}{k}$.

3. Установившийся поток тепла без тепловыделения. В этом случае и $Q = 0$, и $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, поэтому распределение температуры в теле подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta T = 0. \quad (11'')$$

Уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

содержит производные второго порядка по координатам x, y, z и производную первого порядка по времени t . Поэтому для однозначности его решения должны быть заданы одно начальное условие и два граничных условия для каждой координаты.

Стационарные уравнения Пуассона и Лапласа не содержат переменной t , так что в этом случае необходимы только граничные условия.

Начальное условие обычно состоит в том, что температура всех точек тела в момент $t=0$ является определенной функцией координат:

$$T|_{t=0} = f(x, y, z). \quad (15)$$

Что касается граничных, или краевых, условий, то при решении физических задач они бывают трех видов.

В случае краевых условий первого рода задается температура на поверхности S тела в любой момент времени:

$$T|_S = \varphi(x, y, z). \quad (16)$$

(В общем случае функция φ может зависеть и от t , но обычно температура на поверхности постоянна.)

При краевых условиях второго рода температура на поверхности неизвестна, но указывается тепловой поток q , вытекающий или втекающий через поверхность, как функция координат точек поверхности:

$$q_n = \Psi(x, y, z),$$

где \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности.

Так как согласно (9) $q_n = -k \frac{dT}{dn}$, то граничные условия имеют дифференциальный характер:

$$\frac{dT}{dn} = \psi(x, y, z). \quad (16')$$

Наконец, краевые условия третьего рода являются обобщением условий первого и второго рода:

$$\frac{dT}{dn} - hT|_S = F(x, y, z). \quad (16'')$$

Постоянная h называется коэффициентом внешней теплопроводности. Равенство (16'') применяется в случае процесса теплоотдачи (охлаждения), т. е. переноса тепла от тела к окружающей среде. Согласно эмпирическому закону Ньютона количество тепла, отдаваемого элементом поверхности dS с температурой T_1 за время dt в окружающую среду с температурой T_0 , прямо пропорционально разности $T_1 - T_0$ и величинам dS и dt :

$$dQ = \alpha (T_1 - T_0) dS dt.$$

Множитель пропорциональности α называется коэффициентом теплоотдачи.

Таким образом, тепловой поток q , вытекающий из тела наружу, равен:

$$q = \alpha (T_1 - T_0). \quad (17)$$

С другой стороны, такой же тепловой поток должен подводиться изнутри путем теплопроводности. Поэтому согласно (9)

$$q = -k \frac{dT}{dn}. \quad (17')$$

Приравнявая правые части (17) и (17'), получаем:

$$\frac{dT}{dn} = -\frac{\alpha}{k} (T_1 - T_0).$$

Обозначив отношение α/k через h и учитывая, что $T_1 = T|_S$, приведем последнее равенство к виду:

$$\frac{dT}{dn} - hT|_S = hT_0.$$

Температура среды T_0 и коэффициент h в разных точках поверхности раздела сред, вообще говоря, различны. Если известна их зависимость от координат, то произведение hT_0 представляет собой определенную функцию координат $F(x, y, z)$, и мы приходим к граничным условиям третьего рода (16").

§ 3. Основное уравнение электростатики

Основным физическим законом электростатического поля является теорема Гаусса.

Поток напряженности \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность равен (в абсолютной системе единиц) умноженной на 4π алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_S E_n ds = 4\pi \sum_i e_i. \quad (18)$$

В общем случае электрические заряды распределены по объему с некоторой плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Поэтому вместо суммы в правой части (18) появляется интеграл:

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (19)$$

В обеих частях этого равенства интегрирование производится по разным переменным. Поэтому, применив к (19)

теореме Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S E_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV,$$

получаем:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) dV. \quad (20)$$

Так как объем V в (20) является произвольным, то равно нулю само подынтегральное выражение и мы переходим к дифференциальной форме теоремы Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (21)$$

представляющей собой в теории электричества третье уравнение Максвелла. Из электродинамики известно, что электростатическое поле потенциально:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (22)$$

где φ — электрический потенциал. Учитывая это, можно уравнение (22) записать в таком виде:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Это — основное дифференциальное уравнение электростатики — уравнение Пуассона. В системе единиц СИ это уравнение записывается проще:

$$\Delta\varphi = -\rho.$$

С его помощью можно установить вид скалярного поля потенциала φ , если известно распределение зарядов в пространстве $\rho(x, y, z)$.

Если же в некоторой области зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

§ 4. Уравнение переменного электромагнитного поля в потенциалах

Как известно из теории электричества (электродинамики), заряды и токи создают в пространстве электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{H} , между которыми существует сложная функциональная связь. Важнейшей задачей электродинамики является определение вида этих функций $\vec{E}(x, y, z, t)$ и $\vec{H}(x, y, z, t)$ по заданному распределению неподвижных и движущихся зарядов.

Как впервые показал Максвелл, основные опытные законы, описывающие свойства электромагнитного поля, носят дифференциальный характер, т. е. позволяют непосредственно определить вид только производных от векторных полей \vec{E} и \vec{H} . Но так как каждое векторное поле имеет две пространственные производные (скалярную— дивергенцию и векторную— ротор), то для полного описания электромагнитного поля должны быть заданы четыре дифференциальных уравнения, которые называют уравнениями Максвелла.

В вакууме они имеют следующий вид (в абсолютной системе единиц):

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, & \text{в) } \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \text{б) } \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{г) } \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность зарядов, j — плотность токов, c — скорость света.

Разберем вкратце физический смысл каждого уравнения. Уравнение (а) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ означает, что источниками электрического поля являются заряды, причем мощность источника равна $4\pi\rho$.

Уравнение (в) $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ означает, что магнитное поле не имеет источников, т. е. является вихревым векторным полем. Уравнение (б) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ представляет собой закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Наконец, уравнение (г) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ обобщает закон Био—Савара, отличаясь от него членом $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, характеризующим так называемый *ток смещения*.

Последние два уравнения показывают, что причинами возникновения и изменения электромагнитного поля являются не только наличие электрических зарядов, но и движение этих зарядов, а также изменение со временем самого поля. Благодаря этому возможно существование магнитного поля, хотя в природе нет магнитных зарядов, а также существование свободного электромагнитного поля в пространстве, лишенном как зарядов, так и токов.

Интегрируя уравнения Максвелла, можно в принципе определить электрическое и магнитное поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Но как это можно сделать практически? Ведь это сложная система взаимосвязанных векторных дифференциальных уравнений в частных производных.

Оказывается, что задача значительно упрощается введением двух вспомогательных величин — скалярного электрического потенциала φ и векторного магнитного потенциала \vec{A} , определяемых равенствами:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (23)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (24)$$

Накладывая еще дополнительное условие Лоренца

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

и подставляя (23), (24) и (25) в уравнения Максвелла, получаем два аналогичных дифференциальных уравнения для каждого из потенциалов:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho, \quad (26)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (27)$$

Рассмотрим уравнение (26), которое еще можно записать так:

$$\square \varphi = -4\pi \rho, \quad (\text{III})$$

где \square — оператор Даламбера. Это уравнение называют *уравнением Даламбера*. Заметим, что в частном случае стационарного (неизменного во времени) поля даламберриан превращается в обычный лапласиан Δ и уравнение Даламбера переходит в известное нам уже уравнение Пуассона: $\Delta \varphi = -4\pi \rho$.

В другом частном случае, когда в переменном электрическом поле отсутствуют заряды ($\rho = 0$), уравнение Даламбера сводится к трехмерному волновому уравнению $\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, описывающему волны, распространяющиеся со скоростью c .

Наконец, если поле со временем не меняется и в нем отсутствуют заряды, уравнение Даламбера вырождается в уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

§ 5. Уравнение Шредингера

Изучение физических свойств молекул, атомов и составляющих их частиц привело в начале XX века исследователей к убеждению, что в микромире существуют свои законы, качественно отличные от законов макромира. Постепенно сущность этих законов была раскрыта и к концу двадцатых годов в атомной физике сложилась стройная логическая система — *квантовая механика*.

Основное утверждение квантовой механики заключается в том, что поведение любой микрочастицы (скажем, электрона) описывается некоторой (вообще говоря, комплексной) функцией координат и времени $\psi(x, y, z, t)$, причем, квадрат модуля этой функции $|\psi|^2$ характеризует *плотность вероятности*, т. е. вероятность нахождения частицы в единице объема пространства.

В стационарных случаях, т. е. когда функция ψ , которую обычно называют *волновой функцией*, не зависит от времени, ее можно определить, решая так называемое уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0, \quad (IV)$$

где m — масса частицы, \hbar — постоянная Планка, U — потенциальная энергия, которая должна быть задана условиями задачи, E — полная энергия частицы, играющая роль параметра.

Поясним подробнее последнее утверждение. Поскольку квадрат волновой функции $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, то ψ -функция должна еще удовлетворять естественным физическим условиям: она должна быть непрерывной, однозначной и конечной; интеграл же по всему бесконечному пространству от $|\psi|^2$ по самому смыслу этой величины есть вероятность достоверного события, т. е. $\int |\psi|^2 d\tau = 1$ (условие нормировки).

При этом оказывается, что во многих случаях не при любых значениях полной энергии E решение уравнения Шредингера может удовлетворять указанным физическим условиям. Решая это уравнение и накладывая на ψ стан-

дартные условия, мы определяем все значения энергии E , которыми может обладать микрочастица при заданных условиях.

Уравнение Шредингера является основным дифференциальным уравнением квантовой механики и, следовательно, одним из самых распространенных типов уравнений в частных производных математической физики.

Мы познакомились с рядом дифференциальных уравнений математической физики. Прежде чем перейти к рассмотрению их решений, сведём в единую таблицу основные типы этих уравнений:

- 1) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \Delta U$ — волновое уравнение,
- 2) $\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$ — уравнение теплопроводности,
- 3) $\Delta \varphi = 0$ — уравнение Лапласа,
- 4) $\Delta \varphi = -\rho$ — уравнение Пуассона,
- 5) $\square \varphi = -\rho$ — уравнение Даламбера,
- 6) $\Delta \psi + (E - U) \psi = 0$ — уравнение Шредингера.

§ 6. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных

Каждое уравнение в частных производных, как и обыкновенное дифференциальное уравнение, в подавляющем большинстве случаев имеет бесчисленное множество частных решений. Таким образом, любое дифференциальное уравнение (как обыкновенное, так и в частных производных) определяет, вообще говоря, некоторый класс удовлетворяющих этому уравнению функций, совокупность которых образует так называемый общий интеграл (общее решение).

Однако между общими решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и общими решениями уравнений в частных производных имеется существенное различие, из-за чего методы нахождения этих решений в конкретных частных задачах различны.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Его общий интеграл, как известно, представляет собой некоторое семейство функций, зависящее от n произволь-

ных постоянных (параметров):

$$y = F(x, c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Любое частное решение получается из него, если параметрам c_1, c_2, \dots, c_n придать определенные значения. Например, в случае уравнения $y'' + y = 0$ общий интеграл имеет вид:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Если в начальный момент времени $t=0$ искомая функция $y(x)$ должна удовлетворять условиям $y|_{t=0} = 1, y'|_{t=0} = 1$, то мы легко найдем соответствующие значения параметров c_1 и c_2 , подставив в общее решение эти начальные значения для y и y' :

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 1, \\ y'_0 &= -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 1, \end{aligned}$$

откуда $c_1 = 1, c_2 = 1$. Следовательно, соответствующее частное решение запишется так:

$$y = \cos t + \sin t.$$

У дифференциального уравнения в частных производных общий интеграл содержит, как мы сейчас увидим, произвольные функции, количество которых равно порядку уравнения.

Пусть дано уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (28)$$

Найдем его общий интеграл, т. е. функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую (28). Для этого сначала запишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Поскольку производная по x от величины, стоящей в скобках, равна нулю, то последняя является некоторой произвольной функцией от y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Поэтому

$$u(x, y) = \int f(y) dy.$$

Но интегрируя произвольную функцию $f(y)$, получим новую, также произвольную функцию, скажем $F(y)$, плюс

произвольная функция $\Phi(x)$ переменной x (последняя играет роль постоянной интегрирования у обыкновенных дифференциальных уравнений).

Таким образом, общий интеграл уравнения второго порядка (28)

$$u(x, y) = \Phi(x) + F(y)$$

содержит две произвольные функции.

Еще один пример. Найдем общее решение уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (29)$$

Подставим его в форме:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Тогда сразу ясно, что $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$, где $f(x)$ — какая угодно функция. Интегрируя последнее равенство, находим:

$$u(x, y) = \int f(x) dy + \varphi(x),$$

или окончательно:

$$u(x, y) = yf(x) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — тоже произвольная функция от x .

Следовательно, и в этом случае общий интеграл содержит две произвольные функции.

Легко убедиться, что такое положение имеет место и для более сложных уравнений в частных производных. Ниже будет показано, например, что с помощью замены переменных общее уравнение второго порядка

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

сводится к одному из простейших уравнений — (23) или (24). Поэтому его общий интеграл также содержит две произвольные функции, положим $\Phi(x)$ и $F(y)$.

Чтобы теперь из общего интеграла уравнения в частных производных найти определенное частное решение, нужно найти конкретный вид функции $\Phi(x)$ и $F(y)$.

Однако — и в этом состоит причина существенного различия методов решения уравнений обыкновенных и в частных производных — из-за чрезвычайной общности общего интеграла уравнения в частных производных, как

правило, очень трудно из него выделить нужное конкретное решение.

Поэтому в математической физике изучают главным образом методы непосредственного нахождения частных решений, удовлетворяющих определенным начальным и граничным условиям.

Следует тем не менее иметь в виду, что общий интеграл несет важную информацию о процессе, описываемом дифференциальным уравнением в частных производных, и эта информация может во многих случаях оказаться весьма полезной и для получения ответа на данную физическую задачу.

В заключение настоящего параграфа покажем, как можно найти общее решение уравнения (30). Полагая, что коэффициент $c \neq 0$, введем новые независимые переменные:

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y, \quad (31)$$

где λ_1 и λ_2 пока произвольные, но различные (иначе ξ и η не будут взаимно независимы) числа.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

то имеет место соответствие

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ &\quad + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Умножим эти вторые производные соответственно на a , $2b$ и c и затем их сложим. Тогда левая часть уравне-

ния (30) примет вид:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A &= a + 2b\lambda_1 + c\lambda_1^2, \\ B &= a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\lambda_1\lambda_2, \\ C &= a + 2b\lambda_2 + c\lambda_2^2. \end{aligned} \quad (32')$$

Рассмотрим теперь вспомогательное квадратное уравнение

$$c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0. \quad (30')$$

Его корнями являются

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}.$$

В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - ac$ возможны три случая:

- 1) если $D > 0$, то корни λ_1 и λ_2 действительны и различны; уравнение принадлежит к гиперболическому типу;
- 2) если $D < 0$, то корни λ_1 и λ_2 комплексны и различны; уравнение (30) является эллиптическим;
- 3) если $D = 0$, то корни λ_1 и λ_2 действительны и равны между собой; уравнение называется параболическим.

Допустим сначала, что $D \neq 0$. Тогда выберем в качестве параметров λ_1 и λ_2 в (31) следующие значения:

$$\lambda_1 = \frac{-b+D}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{-b-D}{c}.$$

Тогда коэффициенты A и C в (32) обращаются в нуль, в то время как $B \neq 0$. Поэтому уравнение (30) в переменных ξ и η принимает простейшую форму (28):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения нам известно:

$$u = \Phi(\xi) + F(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным x и y , получаем окончательно:

$$u = \Phi(x + \lambda_1 y) + F(x + \lambda_2 y). \quad (33)$$

В том случае, когда уравнение (30) является параболическим

ческим, т. е.

$$D = b^2 - ac = 0,$$

примем $\lambda_1 = -\frac{b}{c}$, а λ_2 — произвольным. Тогда согласно (32') $A = 0$, $C \neq 0$, а коэффициент B равен нулю при любом λ_2 . Таким образом, уравнение (30) сводится к более простому (29):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Его общий интеграл, как показано было выше, имеет вид:

$$u = \eta f(\xi) + \varphi(\xi).$$

Возвращаясь к первоначальным переменным x и y , получаем общий интеграл:

$$u = (x + \lambda_2 y) f(x + \lambda_1 y) + \varphi(x + \lambda_1 y), \quad (34)$$

который также содержит две произвольные функции f и φ .

В следующем параграфе приводится пример, в котором удается получить частное решение из общего.

§ 7. Колебания бесконечной струны

Пусть совершающая колебания упругая струна является столь длинной, что ее можно считать бесконечной. Требуется найти смещение любой точки в произвольный момент времени, начальная форма струны и скорости ее точек заданы.

На языке математической физики эта задача формулируется следующим образом: найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (35)$$

и начальным условиям:

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x). \quad (36)$$

Поскольку струна является бесконечной, то граничные условия не нужны. Такая задача более проста и является частным случаем так называемой задачи Коши.

Начнем с нахождения общего интеграла уравнения (35). Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (35')$$

Следуя методике решения уравнения (30), рассмотренной в предыдущем параграфе, выпишем коэффициенты уравнения (35):

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1/v^2.$$

Дискриминант $D = b^2 - ac = \frac{1}{v^2} > 0$, так что уравнение принадлежит к гиперболическому типу. Подставляя значения этих коэффициентов в квадратное уравнение (30'), получаем:

$$-\frac{1}{v^2} \lambda^2 + 1 = 0,$$

откуда $\lambda = \pm v$. Вводя теперь новые переменные:

$$\xi = x + \lambda_1 t = x + vt; \quad \eta = x + \lambda_2 t = x - vt,$$

приведем уравнение (35) к простейшему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Таким образом, искомая функция $u(x, t)$ согласно (33) предыдущего параграфа равна сумме двух произвольных функций:

$$U = \Phi(x + vt) + F(x - vt). \quad (33')$$

В указанном виде решение волнового уравнения было впервые получено Даламбером. Выясним его физический смысл.

Примем для простоты, что $\Phi = 0$ и смещение колеблющихся точек определяется соотношением:

$$U_1 = F(x - vt). \quad (33'')$$

Возьмем произвольную точку x . В момент времени $t = 0$ смещение этой точки равно $F(x)$. Легко видеть, что точно такое же смещение будет в более поздний момент $t > 0$ у точки с координатой $x + vt$. А это значит, что отклонение u перемещается вдоль струны вправо со скоростью v . Перемещение в пространстве некоторого переменного (чаще всего периодического) процесса с постоянной скоростью представляет собой распространение прямой волны.

Аналогично решение $U_2 = \Phi(x + vt)$ описывает обратную волну, распространяющуюся с той же скоростью вдоль струны влево. Следовательно, решение (33') представляет собой сумму (суперпозицию) прямой и обратной волн.

Попытаемся теперь выбрать произвольные функции Φ и F так, чтобы выполнялись начальные условия (36). Подставляя в (33') значение $t=0$, мы в соответствии с (36) найдем, что

$$\Phi(x) + F(x) = \varphi(x). \quad (37)$$

Если же подставить значение $t=0$ в производную от (33'), то получим:

$$v[\Phi'(x) - F'(x)] = \psi(x). \quad (38)$$

Равенства (37) и (38) образуют систему уравнений с двумя неизвестными функциями $\Phi(x)$ и $F(x)$. Чтобы определить их, продифференцируем (37) и сопоставим с (38):

$$\Phi'(x) + F'(x) = \varphi'(x), \quad (37')$$

$$\Phi'(x) - F'(x) = \frac{1}{v}\psi(x). \quad (38')$$

Отсюда легко находим, что

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi' + \frac{1}{v}\psi \right], \quad F(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi' - \frac{1}{v}\psi \right]. \quad (39)$$

Интегрируя эти равенства, установим явный вид функций $\Phi(x)$ и $F(x)$. Таким образом, решение Даламбера задачи Коши для бесконечной струны принимает следующую форму:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ [\varphi(x+vt) + \varphi(x-vt)] \} + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x) dx. \quad (40)$$

Выясним физический смысл этого решения на двух частных случаях.

1. Пусть начальные скорости точек струны равны нулю ($\psi=0$), а начальное смещение имеют только точки на участке $(-l, l)$, как показано на рисунке 32, а:

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{если } |x| > l.$$

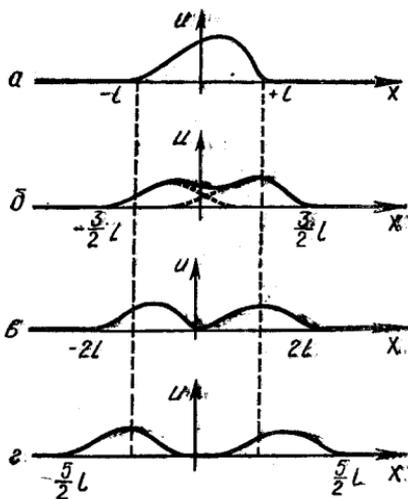


Рис. 32

Решение (40) принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - vt) + \varphi(x + vt)], \quad (41)$$

т. е. представляет собой сумму двух волн, распространяющихся со скоростью v вправо и влево, амплитуды которых равны половине амплитуды начального смещения $\frac{1}{2} \varphi(x)$. Поэтому, чтобы построить форму струны в некоторый момент времени $t > 0$, нужно график половинного смещения сдвинуть вправо и влево на симметричные отрезки vt и графически сложить эти кривые (рис. 32, б).

После момента $t = \frac{l}{v}$ распространяющиеся в противоположные стороны «половинные» волны уже не накладываются друг на друга и расходятся в разные стороны (рис. 32, в, г).

Последим теперь за поведением точки струны, не получившей начального смещения (координата которой $x > l$ или $x < -l$). Ясно, что до тех пор, пока $t < \frac{x-l}{v}$ аргумент функции $\varphi(x - vt)$ будет больше l , так что смещение равно нулю ($u = 0$) и точка находится в покое. Это будет продолжаться до момента $t_1 = \frac{x-l}{v}$, когда *передний фронт* волны достигнет точки x . Затем, в момент $t_2 = \frac{x+l}{v}$, когда *задний фронт* достигнет точки x , эта точка вновь возвращается в состояние покоя и будет далее оставаться в покое все время. Между моментами t_1 и t_2 волна проходит через точку x , заставляя ее отклоняться.

2. Пусть начальное смещение $\varphi = 0$, а функция $\psi(x)$ отлична от нуля в интервале $(-l, l)$. Этот случай реализуется в результате удара по струне молоточка ширины $2l$ (рис. 33, а).

В этом случае решение (41) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(z) dz. \quad (42)$$

Обозначим $\frac{1}{2v} \int_{\delta}^{\xi} \psi(z) dz = \lambda(x)$. Тогда

$$U(x, t) = \lambda(x + vt) - \lambda(x - vt). \quad (43)$$

Таким образом, и в этом случае по струне идут две волны: прямая и обратная. В момент $t=0$ нижний и верхний пределы интегрирования в (42) совпадают. Поэтому $u=0$ (рис. 33, б). С ростом t интервал интегрирования, равный $2vt$, увеличивается, а вместе с ним увеличивается и величина интеграла

$\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(z) dz$ (рис. 33, в). Когда t достигает значения l/v , точка $x=0$ испытывает наибольшее отклонение, равное (рис. 33, г)

$$\frac{1}{2v} \int_{-l}^l \psi(z) dz = h.$$

В дальнейшем с ростом t величина этого отклонения больше не меняется. Все другие точки струны достигают этого максимального смещения в более поздние моменты времени:

$$t = \frac{|x| + l}{v},$$

после чего они как бы «застывают» (рис. 33, д, е).

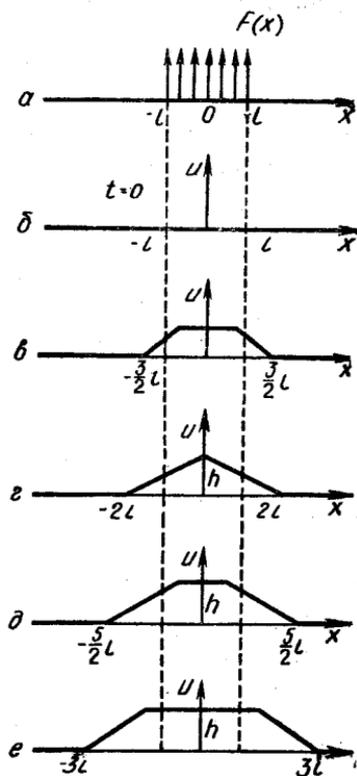


Рис. 33

Глава II.

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПУТЕМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе мы рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих сущность одного из простейших способов решения уравнений в частных производных — *метода Фурье*.

§ 1. Охлаждение стержня конечной длины

Пусть концы тонкого теплопроводного стержня длиной l погружены в тающий лед и температура стержня в начальный момент времени ($t=0$) зависит от его координат по некоторому закону $T=f(x)$. Найдем температуру в любой точке стержня в произвольный момент времени.

Сформулируем проблему аналитически.

Так как в стержне нет тепловыделения и тепло распространяется только вдоль стержня, т. е. по оси X , то уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{cp}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Начальное условие запишется так:

$$T|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

Граничных условий должно быть два, ибо уравнение содержит вторую производную по переменной x ; они, очевидно, сводятся к равенствам:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Итак, нужно найти функцию $T=T(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Прежде чем решать эту задачу, упростим уравнение (1), введя замену переменной t :

$$\frac{k}{cp} t = \tau. \quad (4)$$

Тогда, как легко видеть, уравнение теплопроводности принимает форму:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1')$$

а условие (2) запишется в виде:

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x). \quad (2')$$

Что касается краевых условий (3), то они остаются неизменными. Будем теперь искать функцию $T(x, \tau)$, удовлетворяющую уравнению (1') в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$T(x, \tau) = X(x) Y(\tau). \quad (5)$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = X(x) Y'(\tau) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''(x) Y(\tau).$$

Подставим эти выражения в (1'):

$$X(x) Y'(\tau) = X''(x) Y(\tau).$$

Разделив это равенство на XY , получим:

$$\frac{Y'}{Y(\tau)} = \frac{X''}{X(x)}. \quad (6)$$

В левой части имеем функцию от времени τ , а в правой — функцию от координаты x . Такое равенство возможно тогда и только тогда, когда обе эти функции равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda^2$. Таким образом, уравнение (6) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (7)$$

$$Y' + \lambda^2 Y(\tau) = 0. \quad (8)$$

Интегрирование этих линейных уравнений не представляет труда. Общее решение уравнения (7), как известно, имеет вид:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (9)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Что касается уравнения первого порядка (8), то оно решается элементарно. Запишем его в виде:

$$\frac{dY}{d\tau} = -\lambda^2 Y$$

и разделим переменные:

$$\frac{dY}{Y} = -\lambda^2 d\tau.$$

Беря интегралы от правой и левой частей, находим:

$$\ln Y = -\lambda^2 \tau + \ln C,$$

где C — постоянная интегрирования. Произведя далее потенцирование, получим выражение для функции $Y(\tau)$:

$$Y(\tau) = C e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (10)$$

Ясно, что произведение $X(x)Y(\tau)$ будет удовлетворять уравнению (1'), но необходимо еще выполнить условия (2') и (3). Так как на концах стержня $T|_{x=0} = T|_{x=l} = 0$, то в нуль должна обращаться в этих точках и функция $X(x)$:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3')$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, нужно соответствующим образом выбрать постоянные A , B и λ .

Начнем с первого равенства (3'). Подставляя в (9) значение $x=0$, имеем:

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0, \quad (11)$$

отсюда заключаем, что следует выбрать $A=0$. Таким образом, функция $X(x)$ принимает вид:

$$X = B \sin \lambda x. \quad (9')$$

Потребуем далее, чтобы она удовлетворяла и второму условию (3'):

$$X(l) = B \sin \lambda l = 0.$$

Здесь имеются две возможности: либо $B=0$, либо $\sin \lambda l=0$. Но решение $B=0$ использовать нельзя, так как в этом случае получается так называемое тривиальное решение $X=0$ и $T=0$, не имеющее физического смысла. Остается принять такое значение параметра λ , чтобы $\sin \lambda l=0$. Отсюда $\lambda l = n\pi$ (где $n=1, 2, 3 \dots$; значение $n=0$ исключаем, так как оно также привело бы к тривиальному решению). Следовательно, постоянная λ может принимать ряд дискретных значений:

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l}. \quad (12)$$

Заменяя в (9') λ его значениями, приходим к множеству функций:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (13)$$

где B_n — произвольные постоянные, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям (3'). Аналогично, подставляя (12) в (10), получим множество функций $Y(\tau)$:

$$Y_n(\tau) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau}, \quad (14)$$

где C_n — произвольные постоянные. Произведения функций $X_n(x)$ и $Y_n(\tau)$

$$T_n(x, \tau) = M_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} \quad (15)$$

(где числа $M_n = B_n C_n$) есть функция двух переменных. Ясно, что любая функция $T_n(x, \tau)$ удовлетворяет как уравнению (1'), так и краевым условиям (3).

Чтобы решить задачу, нам остается выбрать коэффициенты M_n таким образом, чтобы удовлетворить еще начальному условию (2'). Анализ этого вопроса, однако, показывает, что поскольку в начальный момент времени ($\tau = 0$) функция T_n обращается в

$$T_n(x, 0) = M_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

то никаким выбором коэффициента M_n нельзя будет, вообще говоря, удовлетворить начальному условию:

$$T_n|_{\tau=0} = \varphi(x).$$

Имеется, однако, другая возможность. Так как любая линейная комбинация частных решений дифференциального уравнения также удовлетворяет ему, то согласно методу Фурье следует из решений (15) составить ряд, сумма которого запишется так:

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau}. \quad (16)$$

Если этот ряд сходится и его можно дифференцировать, то он тоже является решением уравнения (1'), удовлетворяющим крайевым условиям (3).

Выберем теперь значения коэффициентов M_n таким образом, чтобы ряд (16) при $\tau = 0$ удовлетворял начальным условиям (2'), т. е. чтобы имело место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \quad (17)$$

Из теории рядов Фурье известно, что любая непрерывная¹ функция $\varphi(x)$ (а с такими функциями мы только и будем встречаться в математической физике), заданная в интервале $(0, l)$, может быть разложена в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (18)$$

где φ_n — так называемые коэффициенты Фурье, опреде-

¹ Согласно теореме Дирихле функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд Фурье и в том случае, если она имеет конечное число точек разрыва.

ляемые по формуле:

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (19)$$

Сопоставляя равенства (17) и (18), мы должны заключить, что если в качестве постоянных M_n брать коэффициенты Фурье φ_n , то условие (17) выполняется и ряд

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} \quad (20)$$

удовлетворяет не только уравнению (1') и граничным условиям (3'), но и начальным условиям (2'). Следовательно, функциональный ряд (20) представляет собой решение нашей задачи.

В заключение сделаем два замечания.

1. Для того чтобы ряд (20), строго говоря, являлся определенным частным решением дифференциального уравнения (1), он должен сходиться и притом так, чтобы его можно было почленно дифференцировать дважды, функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям Дирихле и пр. Однако в конкретных физических задачах все эти условия обычно выполняются.

2. Хотя решение (20) содержит сумму бесконечно большого числа слагаемых, при решении реальных физических задач в большинстве случаев можно ограничиться несколькими первыми членами.

§ 2. Колебания струны конечной длины

Решим методом Фурье задачу о смещениях точек закрепленной с обеих концов струны, совершающей колебания с заданными начальными условиями. Иными словами, найдем функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (21)$$

а также краевым и начальным условиям:

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \quad (22)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x). \quad (23)$$

Как и в предыдущем параграфе, ищем решение в виде произведения двух функций:

$$U(x, t) = X(x) T(t). \quad (24)$$

Взяв вторые частные производные от U по x и t и подставив их в уравнение (21), получим равенство:

$$XT'' = v^2 X''T.$$

Разделив его на произведение $v^2 XT$, мы отделим переменные:

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T(t)} = \frac{X''}{X(x)}. \quad (25)$$

Как уже говорилось в § 1, равенство (25) возможно только в том случае, если обе части его порознь равны одной и той же постоянной. Обозначив последнюю через $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$X'' + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (26)$$

$$T'' + v^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (27)$$

Общие решения их известны:

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (28)$$

$$T = C \cos v\lambda t + D \sin v\lambda t, \quad (29)$$

где A, B, C, D и λ — произвольные постоянные. Их нужно выбрать такими, чтобы удовлетворить условиям (22) и (23). Начнем с граничных условий. Ясно, что искомое решение будет им удовлетворять, если функция $X(x)$ обратится в нуль при $x=0$ и $x=l$. Наложив сначала требование, чтобы $X(0)=0$, мы согласно равенству (28) получим:

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0,$$

откуда найдем, что $A=0$. Поэтому выражение (28) упростится:

$$X(x) = B \sin \lambda x. \quad (28')$$

Теперь потребуем, чтобы $X(l)=0$, т. е.

$$B \sin \lambda l = 0.$$

Отбрасывая тривиальное решение $B=0$, приходим к трансцендентному уравнению для определения λ :

$$\sin \lambda l = 0.$$

Отсюда

$$\lambda l = n\pi,$$

или

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (28'), получим множество функций от x :

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (31)$$

обращающихся на концах интервала $(0, l)$ в нуль и удовлетворяющих уравнению (26).

Аналогично, подставляя в решение (29) значение λ из (30), получаем семейство функций от t , удовлетворяющих уравнению (27):

$$T_n = C_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{l} t. \quad (32)$$

Умножив (31) и (32), мы получим согласно (24) совокупность функций:

$$U_n(x, t) = \left(M_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + N_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (33)$$

(где $M_n = B_n C_n$ и $N_n = B_n D_n$), каждая из которых удовлетворяет уравнению (21) и крайевым условиям (22). Такими же свойствами, очевидно, будет обладать любая линейная комбинация из частных решений U_n . Чтобы удовлетворить еще начальным условиям (33), составим бесконечный ряд функций U_n , сумма которого запишется так:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_n \left(M_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + N_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (34)$$

Если этот ряд сходится и его можно почленно дважды дифференцировать как по x , так и по t (эти условия обычно выполняются), то сумма (34) будет удовлетворять уравнению (21) и условиям (22). Как ясно уже из предыдущего примера, идея метода Фурье заключается в том, чтобы путем соответствующего выбора коэффициентов M_n и N_n членов этого ряда удовлетворить и начальным условиям (33). Это значит, что нужно потребовать, чтобы при подстановке в (33) значения $t=0$ выполнялось равенство:

$$U \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \quad (35)$$

Аналогично после подстановки $t=0$ в выражение, полученное почленным дифференцированием по времени суммы (34), должно иметь место равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} N_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \quad (36)$$

Ясно, что для выполнения условий (35) и (36) постоянные M_n и $N_n \frac{n\pi v}{l}$ должны быть соответственно равны коэффициентам Фурье φ_n и ψ_n . Иными словами, нужно принять

$$M_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (35')$$

и

$$N_n = \frac{l}{n\pi v} \psi_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (36')$$

Подставляя указанные значения коэффициентов M_n и N_n в ряд (34), получим функцию в виде следующей суммы ряда:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + \frac{l}{n\pi v} \psi_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (37)$$

В предположении, что имеет место сходимость и дифференцируемость ряда, эта функция и является искомым решением. Рассмотрим его физический смысл.

Каждый член ряда можно представить в виде:

$$U_n = A_n \sin \left(\frac{n\pi v}{l} t + \beta_n \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В таком виде он описывает так называемую *стоячую* волну или *собственное колебание*: все точки струны совершают гармонические колебания с собственной циклической частотой $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$, амплитудой $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ и одинаковой начальной фазой β_n ; они одновременно (синфазно) достигают максимальных отклонений или положения равновесия (рис. 34).

Наименьшая собственная частота $\omega_1 = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ называется *частотой основного тона*; тоны кратных частот называются *гармониками* или *обертнами*. Частота ω_1 тем выше, чем короче и легче струна и чем больше ее натяжение T . На рисунке 34 изображены картины колебаний основного тона ($n=1$) и первых двух обертонов ($n=2$ и $n=3$). Таким образом, ряд (37) является суммой или суперпозицией стоячих волн с кратными частотами.

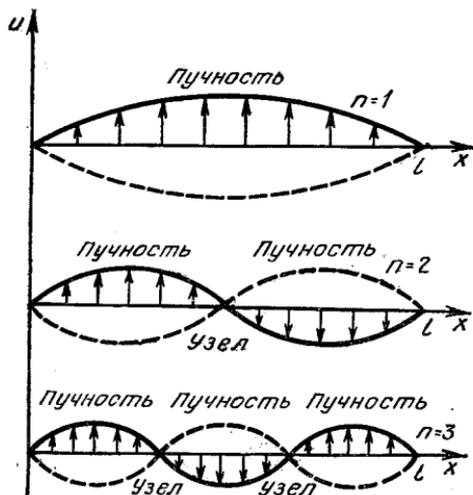


Рис. 34

Как известно, звуки подразделяют на музыкальные, или *ноты*, и немusicalные, или *шумы*; ноты порождаются периодическими, а шумы — непериодическими колебаниями. В излучаемой музыкальным инструментом ноте всегда присутствует несколько тонов — основной тон и обертоны. Обычно амплитуды гармоник быстро убывают с ростом их номера. Поэтому решающий вклад в ноту вносит основной тон. Обертоны придают звуку тот или иной тембр. Следовательно, физически полученное решение, которое мы запишем теперь в виде:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (37')$$

означает, что струна излучает музыкальную ноту, частота которой равна $\frac{\omega_1}{2\pi}$; определяемая начальными условиями совокупность амплитуд A_1, A_2, \dots характеризует спектр (тембр) этой ноты.

§ 3. Решение задачи Дирихле для круга

Мы уже отмечали, что различные физические процессы с математической точки зрения могут быть совершенно подобными. Поэтому в математической физике стремятся разработать единые методы решения задач, объединяющие множество аналогичных проблем.

С таким положением мы уже сталкивались на примере задачи Коши для волнового уравнения. Другой типовой задачей такого рода является задача Дирихле: найти функцию $U(x, y, z)$ (непрерывную вместе со своими производными второго порядка в заданной области), удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ и обращающуюся на поверхности S в заданную функцию координат.

Рассмотрим для простоты и определенности следующий частный случай задачи Дирихле: найти распределение температуры $T(x, y)$ для точек круглой пластинки, если на ограничивающей ее окружности G поддерживается неизменная температура, заданым образом зависящая от координат окружности. Иными словами, необходимо найти регулярную функцию $T(x, y)$, удовлетворяющую в точках круга уравнению $\Delta T = 0$ и краевому условию $T|_G = f(x, y)$.

Ясно, что задачу проще всего решать в полярной (плоской цилиндрической) системе координат (ρ, φ) . Согласно гл. III, ч. I, уравнение Лапласа в полярной системе координат имеет вид (см. гл. III, ч. I):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (38)$$

Соответственно краевое условие принимает вид:

$$T|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (39)$$

Согласно методу Фурье будем искать решение (38) в виде:

$$T(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi). \quad (40)$$

Определяя отсюда $\frac{\partial T}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$ и подставляя их в (38), получим:

$$\left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \Phi(\varphi) + \frac{R}{\rho^2} \Phi''(\varphi) = 0. \quad (40')$$

Умножим последнее равенство на $\rho^2/R\Phi$:

$$\frac{1}{R} (\rho^2 R'' + \rho R') = \Phi''/\Phi(\varphi).$$

Поскольку по обе стороны знака равенства стоят функции от различных независимых переменных, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda^2$. Тогда мы приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0, \quad (41)$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0. \quad (42)$$

Общий интеграл линейного уравнения (42) нам хорошо знаком:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi. \quad (43)$$

Приступим к решению нелинейного уравнения (41). Для этого прежде всего используем так называемое условие цикличности, характерное для криволинейных координат. Оно заключается в том, что и граничная функция $f(\varphi)$, и искомое решение $U(\rho, \varphi)$ должны быть периодическими по переменной φ , т. е.

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$$

и

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi).$$

Отсюда, очевидно, следует, что и функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять условию цикличности:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (44)$$

Но так как $\Phi(\varphi)$ есть линейная комбинация функции $\sin \lambda\varphi$ и $\cos \lambda\varphi$, то для выполнения условия (44) должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda\varphi + \lambda \cdot 2\pi) &= \sin \lambda\varphi, \\ \cos(\lambda\varphi + \lambda \cdot 2\pi) &= \cos \lambda\varphi. \end{aligned}$$

Параметр λ должен, следовательно, быть целым числом n (где $n=0, 1, 2, \dots$). С учетом этого обстоятельства получаем согласно (43) множество функций $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (43')$$

Подставляя теперь в (41) вместо λ^2 его значение n^2 , получаем:

$$\rho^3 R'' + \rho R' - n^2 R = 0. \quad (41')$$

Это — дифференциальное уравнение типа Эйлера, характерным свойством которого является равенство у всех его членов произведения степени независимой переменной на порядок производной.

Уравнение Эйлера решается сравнительно просто. Его частное решение ищут в виде:

$$R = \rho^s,$$

где s — пока произвольная постоянная. Найдя производные $R' = s\rho^{s-1}$ и $R'' = s(s-1)\rho^{s-2}$, подставляем их в (41'). После сокращения на общий множитель ρ^s , приходим к равенству:

$$s(s-1) + s - n^2 = 0$$

или

$$s^2 = n^2.$$

Отсюда

$$s = \pm n.$$

Таким образом, для каждого значения коэффициента n в (41') имеется свое общее решение:

$$R_n(\rho) = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}.$$

Но так как нас интересуют только регулярные функции, то следует положить $D_n = 0$ (в противном случае в точке $\rho = 0$ величина R_n обратится в бесконечность).

Следовательно, удовлетворяющее физическим условиям решение уравнения (41') имеет вид:

$$R_n(\rho) = C_n \rho^n. \quad (45)$$

Перемножая теперь $R_n(\rho)$ и $\Phi_n(\varphi)$, мы согласно (40) получим дискретную совокупность функций:

$$T_n(\rho, \varphi) = (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) \rho^n \quad (46)$$

где $M_n = A_n C_n$, $N_n = B_n C_n$, удовлетворяющих исходному уравнению (38), а также естественным физическим условиям периодичности (однозначности) и регулярности. Чтобы еще удовлетворить граничному условию (39), составим бесконечную сумму:

$$T(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) \rho^n \quad (47)$$

и выберем коэффициенты M_n и N_n таким образом, чтобы при $\rho = a$ этот ряд сходиллся к функции $f(\varphi)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) a^n = f(\varphi). \quad (48)$$

Из теории рядов Фурье известно, что практически любую функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по синусам и косинусам:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi), \quad (49)$$

где $f_n^{(c)}$ и $f_n^{(s)}$ — коэффициенты Фурье при соответствующих косинусах и синусах ряда, причем

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Нулевые коэффициенты определяются следующими формулами:

$$f_0^{(s)} = 0, \quad f_0^{(c)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi.$$

Сопоставляя равенства (48) и (49), заключаем, что для выполнения краевого условия (48) нужно положить:

$$M_n a^n = f_n^{(c)}, \quad N_n a^n = f_n^{(s)}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для круга может быть представлено в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \times \\ \times \left\{ \cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \right\}. \quad (50)$$

§ 4. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брус

Рассматриваемая задача формулируется так: одна из граней длинного прямоугольного бруса (рис. 35) поддерживается при заданной температуре, на остальных гранях $T=0$; найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.

Из симметрии бруса ясно, что температура от Z не зависит и что можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости XOY . Задача состоит в определении функции $T = T(x, y)$, удовлетворяющей

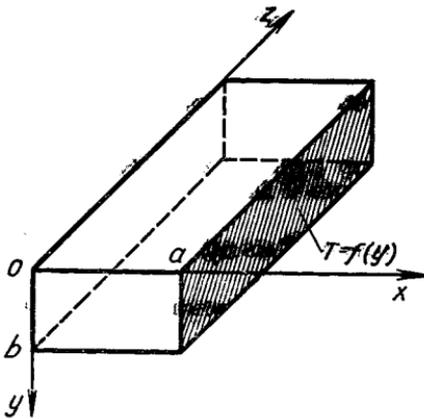


Рис. 35

уравнению стационарной теплопроводности:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (51)$$

и двум парам краевых условий:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=a} = f(y); \quad (52)$$

$$T|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=b} = 0. \quad (53)$$

Как обычно, ищем решение в виде:

$$T(x, y) = X(x)Y(y). \quad (54)$$

Дифференцируя (54) дважды по x и y и подставляя в (51), получаем:

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Умножая последнее равенство на $1/(XY)$, разделяем переменные:

$$X''/X = -Y''/Y.$$

Приравнивая обе части постоянной λ^2 , приходим к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям:

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad (55)$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0. \quad (56)$$

Решение уравнения (56) мы уже неоднократно записывали:

$$Y(y) = C \cos \lambda y + D \sin \lambda y. \quad (56')$$

Что касается уравнения (55), то его решение, как известно, отличается только тем, что вместо тригонометрических оно содержит гиперболические функции:

$$X(x) = A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{sh} \lambda x. \quad (55')$$

Выберем теперь постоянные A , B , C , D и λ так, чтобы удовлетворить граничным условиям (52) и (53). Удобнее начать с (53) как более простых. Итак,

$$Y(0) = C = 0.$$

Следовательно,

$$Y(y) = D \sin \lambda y. \quad (56)$$

Наложив второе граничное условие по y :

$$Y(b) = D \sin \lambda b = 0,$$

приходим к выводу, что

$$\lambda b = n\pi,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{b}.$$

Подставляя эти дискретные значения параметра λ в (55'), получаем множество функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X_n = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b},$$

$$Y_n = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Перемножив теперь $X_n(x)$ на $Y_n(y)$, находим совокупность функций $T_n(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (51) и крайним условиям (53):

$$T_n(x, y) = \left(M_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (57)$$

Теперь осталось удовлетворить условиям (52). Но первому из них, а именно $T|_{x=0} = 0$, мы сразу же удовлетворим, положив $M_n = 0$. Таким образом, совокупность функций:

$$T_n = N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (57')$$

удовлетворяет не только уравнению (51), но и трем (нулевым) крайним условиям. Чтобы удовлетворить последнему граничному условию $T|_{x=a} = f(y)$, составим бесконечную сумму:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (58)$$

и подберем коэффициенты N_n таким образом, чтобы ряд при $x \rightarrow a$ сходиллся к функции $f(y)$:

$$T|_{x=a} = \sum_n N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Отсюда видно, что постоянные множители $N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}$ должны являться коэффициентами f_n разложения в ряд Фурье функции $f(y)$ по синусам:

$$N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} = f_n.$$

Отсюда

$$N_n = \frac{f_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}, \quad (59)$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Подставляя значения коэффициентов N_n в ряд (58), получаем окончательно:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (60)$$

Полагая, как это обычно бывает, что этот ряд сходится достаточно хорошо, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением.

§ 5. Охлаждение тонкой пластины

Пусть в начальный момент у пластины, толщина которой значительно меньше длины и ширины (рис. 36), температура была распределена по закону $T|_{t=0} = F(x)$. Охлаждение пластины происходит по закону Ньютона, т. е. при $x = \pm a$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

Определим температуру произвольной точки в любой последующий момент времени.

Сформулируем задачу аналитически: необходимо найти функцию $T(x, y)$, удовлетворяющую одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (61)$$

и условиям: начальному

$$T|_{t=0} = F(x) \quad (62)$$

и граничному

$$\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=\pm a} = 0. \quad (63)$$

Приступаем к решению задачи.

Прежде всего, как и в § 1, введем новую независимую переменную $\tau = \frac{k}{c\rho} t$. Тогда уравнение (61) упростится:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (61')$$

Ищем его интеграл в виде произведения:

$$T(x, \tau) = X(x)Y(\tau). \quad (64)$$

Подставляя (64) в (61'), получаем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Приравняв обе части одной и той же постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$Y' + \lambda^2 Y = 0.$$

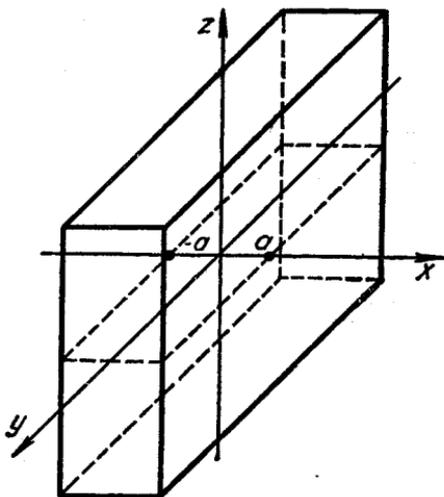


Рис. 36

Решения их нам хорошо известны:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (65)$$

$$Y(\tau) = ce^{-\lambda^2 \tau}. \quad (66)$$

Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия не являются нулевыми, то возникает новая ситуация. Так как условия слева и справа от плоскости $x=0$ совершенно одинаковы, то в начальный момент времени температура должна была быть распределенной симметрично:

$$F(x) = F(-x).$$

Поэтому и в последующем распределение температуры должно оставаться симметричным. Таким образом, функция $X(x)$ должна быть четной, т. е.

$$X(-x) = X(x).$$

Отсюда вытекает далее, что коэффициент B в (65) равен нулю и вид функции $X(x)$ упрощается:

$$X(x) = A \cos \lambda x. \quad (65')$$

Поскольку в краевое условие (63) входит только производная по x и $T(x, \tau) = X(x)Y(\tau)$, то функция $X(x)$ должна удовлетворять условию:

$$X'(a) + hX(a) = 0. \quad (63)$$

Используя (65'), получаем:

$$-A\lambda \sin \lambda a + hA \cos \lambda a = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{h}{\lambda}. \quad (67)$$

Равенство (67) является трансцендентным уравнением для определения λ . Будем решать это уравнение графическим способом, для чего сначала умножим числитель и знаменатель правой части на число a :

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{ha}{\lambda a}. \quad (67')$$

Обозначим временно $\lambda a = z$ и построим в системе координат (z, u) графики кривых $u_1 = \operatorname{tg} z$ и $u_2 = \frac{ha}{z}$ (рис. 37). Ясно, что гиперболы u_2 пересечет семейство тангенсоид бесчисленное множество раз. Это значит, что уравнение (67') имеет бесконечное множество корней, причем с ростом $z = \lambda a$ точки пересечения z_n приближаются к $\lambda_n a = n\pi$ (где $n = 1, 2, \dots$), так как $\operatorname{tg} z_n \rightarrow 0$. Отметим, что λ_n суть корни уравнения (67'). Отсюда получается множество функций $X(x)$, удовлетворяющих граничному условию (63):

$$X_n(x) = A_n \cos \lambda_n x. \quad (65'')$$

Подставляя (65'') и (66) в (64), получаем множество функций:

$$T_n = M_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos \lambda_n x,$$

удовлетворяющих уравнению (61) и граничному условию (63). Чтобы получить решение, удовлетворяющее еще и начальному условию,

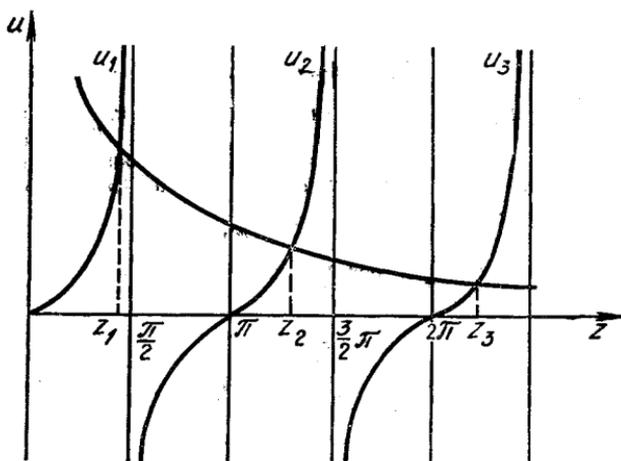


Рис. 37

составляем уже известным нам приемом бесконечную сумму:

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_n M_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos \lambda_n x. \quad (68)$$

Выясним теперь, каковы должны быть коэффициенты M_n , чтобы при $\tau \rightarrow 0$ ряд, получающийся из функции T_n , сходил к заданной функции $F(x)$, т. е. чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x = F(x). \quad (69)$$

Во всех предыдущих примерах мы сталкивались с разложением функции в ряд по синусам и косинусам кратных аргументов, т. е. с рядами Фурье. В левой части же равенства (69) стоит бесконечная сумма косинусов, аргументы которых отличаются нецелочисленными множителями λ_n .

Легко, однако, показать, что функции $\cos \lambda_n x$ являются взаимно ортогональными, т. е.

$$\int_{-a}^a \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x \cdot dx = 0.$$

С другой стороны, они не нормированы, т. е.

$$\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n dx \neq 1.$$

В теории рядов Фурье доказывается, что произвольную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по семейству ортогональных и норми-

равных функций $X_1(x), X_2(x), \dots$:

$$f(x) = \sum_n f_n X_n(x).$$

Но в отличие от обычных рядов Фурье обобщенные коэффициенты Фурье f_n определяются по формуле:

$$f_n = \left[\int_{-a}^a X_n^2 dx \right]^{-1} \int_{-a}^a f(x) X_n(x) dx.$$

Таким образом, для удовлетворения условия (69) необходимо положить произвольные числа M_n равными обобщенным коэффициентам Фурье:

$$M_n = F_n = \frac{\int_{-a}^a F(x) \cos \lambda_n x \cdot dx}{\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n x \cdot dx}.$$

Подставляя теперь значения M_n в (68), получаем окончательное выражение для искомой функции $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (70)$$

§ 6. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T|_{t=0} = f(x). \quad (71)$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t > 0$.

Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $T(x, \tau)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (72)$$

(где $\tau = \frac{k}{c\rho} t$) и начальному условию (71).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в § 1 этой главы с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение уравнения (72) в виде:

$$T(x, \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (73)$$

В случае стержня конечной длины l мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ :

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l},$$

где каждому значку n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n . Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{l}$ и стремится к нулю, когда $l \rightarrow \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞ .

Таким образом, каждому значению λ соответствует частное решение:

$$T_\lambda(x, \tau) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (73)$$

Общее решение получается из частных решений (73'), не суммированием, а интегрированием по параметру λ :

$$T(x, \tau) = \int_0^\infty T_\lambda d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (74)$$

Полагая, что интеграл (74) сходящийся и дифференцируемый по x и τ (это обычно имеет место), можно быть уверенным в том, что функция $T(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению (72). Но решение еще должно удовлетворять начальному условию:

$$T|_{\tau=0} = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (75)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции $f(x)$ в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

может быть представлена в виде интеграла от гармонических функций $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$, частота которых λ пробегает непрерывную совокупность значений:

$$f(x) = \int_0^\infty [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (76)$$

где

$$f_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \quad (77)$$

Подставляя значения Фурье-преобразований $f_c(\lambda)$ и $f_s(\lambda)$ в интеграл (76), получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi) d\xi.$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi. \quad (78)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (74) выбрать соответственно

$$A(\lambda) = f_c(\lambda), \quad B(\lambda) = f_s(\lambda),$$

то интеграл

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (79)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения получается из (78):

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi. \quad (80)$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, меняя порядок интегрирования:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda. \quad (80')$$

Обозначив $\xi - x = q$, можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу:

$$K(\tau, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau \lambda^2} \cos \lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \quad (81)$$

Заменяя обратно q через $\xi - x$ и подставляя (81) в (80'), получаем окончательно:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (82)$$

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени ($\tau=0$) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки $x=0$, где $T=T_0$ (рис. 38). Можно себе представить, что в момент

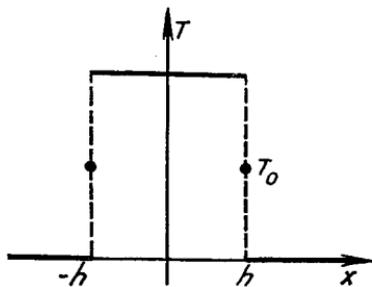


Рис. 38

$\tau=0$ элементу длины $2h$ стержня сообщили некоторое количество тепла $Q_0 = 2hc_p T_0$, которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения T_0 .

Следовательно, формула (82) принимает вид:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-h}^h T_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi\tau}c_p} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать h , устремляя его к нулю, считая количество тепла Q_0 неизменным, т. е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла напряжения Q_0 , помещенного в момент времени $\tau=0$ в точке $x=0$. При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой:

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c_p\sqrt{\pi\tau}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi,$$

или

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c_p\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \quad (83)$$

В частности, если $Q_0 = c_p$, то температура любой точки стержня в произвольный момент времени $t = \frac{\tau}{a}$ (a — коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (84)$$

Графически решение для различных моментов времени представлено на рисунке 39. Заметим, что величина

$$c_p \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx$$

есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t :

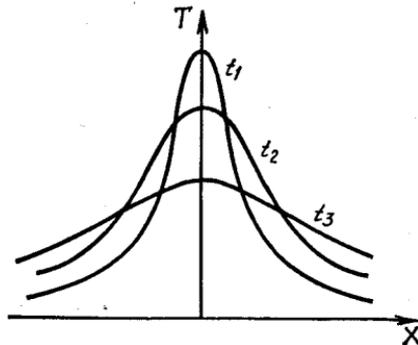


Рис. 39

$$\begin{aligned} Q(t) &= c_p \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = \\ &= \frac{c_p}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx. \end{aligned}$$

Но последний (справа) интеграл есть интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Поэтому получаем, что

$$Q(t) = c\rho = Q_0 = \text{const},$$

что согласуется с законом сохранения энергии.

Глава III.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя

Как показано было в ч. I, уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение этого уравнения методом Фурье, имея в виду, что искомая функция $U(\rho, \varphi, z)$ зависит от трех переменных.

Положим, что

$$U(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z) \Phi(\varphi) \quad (2)$$

и подставим это произведение в (1). Тогда

$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} V \Phi'' + \Phi \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Если полученное равенство умножить на $\frac{\rho^2}{V\Phi}$ и член, зависящий от φ , перенести вправо, то придем к равенству:

$$\frac{\rho}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Но равенство двух функций от различных аргументов возможно тогда и только тогда, когда обе они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через ν^2 , получаем два уравнения:

$$\frac{\rho}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \nu^2 = 0, \quad (3)$$

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0. \quad (4)$$

Поскольку (3) является уравнением в частных производных, то применим к нему метод Фурье с целью разделения переменных. Итак, пусть

$$V(\rho, z) = R(\rho) Z(z), \quad (5)$$

Деля (3) на ρ^2 и подставляя в него (5), приходим опять к равенству:

$$\frac{Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \frac{\nu^2}{\rho^2} RZ + RZ'' = 0.$$

Делим далее на произведение RZ и переносим вправо член, зависящий от z :

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \frac{\nu^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z(z)}.$$

Мы получили равенство двух функций от различных аргументов. Приравнявая обе части этого равенства постоянной λ^2 , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R') + \left[\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (6)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0. \quad (7)$$

Ясно, что совокупность уравнений (4), (6) и (7) эквивалентна исходному уравнению Лапласа (1) и позволяет в принципе определить функции $\Phi(\varphi)$, $R(\rho)$, $Z(z)$, а следовательно, и искомую функцию U , которая согласно (2) и (5) равна:

$$U(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (8)$$

Поскольку дифференциальные уравнения (4) и (7) являются хорошо известными линейными и однородными уравнениями второго порядка, то их общие решения можно сразу же написать:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \nu \varphi + B \sin \nu \varphi, \quad (9)$$

$$Z(z) = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z. \quad (10)$$

Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения (6) с переменными коэффициентами. Его, очевидно, можно представить так:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (6')$$

Если ввести новую независимую переменную $x = \lambda \rho$, то (6') несколько упрощается и принимает форму так называемого уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (11)$$

Интегралы этого уравнения $R_\nu(x)$ называются *цилиндрическими функциями* или *функциями Бесселя*.

Перейдем теперь к рассмотрению методов определения решения уравнения (11),

§ 2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя

Запишем уравнение Бесселя в виде:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (12)$$

и будем искать его решение в форме ряда:

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}. \quad (13)$$

Первая и вторая производные этого ряда запишутся так:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s) x^{k+s-1}, \quad (13')$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}. \quad (13'')$$

Умножим (13) на $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$ и (13') — на $\frac{1}{x}$ и полученные выражения вместе с (13'') подставим в (12):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s-2} [(k+s)(k+s-1) + (k+s) - \nu^2] = 0.$$

Произведя сокращение на x^{s-2} и упрощения в квадратных скобках, преобразуем это тождественное равенство следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} \equiv - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [(k+s)^2 - \nu^2].$$

Ряд слева начинается с x^2 , а ряд справа — с x в нулевой степени. Отсюда следует, что коэффициенты перед x^0 и x^1 равны нулю:

$$a_0 (s^2 - \nu^2) = 0, \quad (14)$$

$$a_1 [(1+s)^2 - \nu^2] = 0. \quad (14')$$

Что касается коэффициентов при более высоких степенях x , то они должны удовлетворять рекуррентному равенству:

$$a_{k-2} = -a_k [(k+s)^2 - \nu^2], \quad (15)$$

где $k = 2, 3, \dots$

Из (14) вытекает, что $s = \pm \nu$ и $a_1 = 0$. Положим сначала, что $s = +\nu$, тогда согласно (15)

$$a_k = - \frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \quad (15')$$

где $k = 2, 3, \dots$. Поскольку $a_1 = 0$, то и все последующие нечетные коэффициенты a_3, a_5, a_7, \dots также

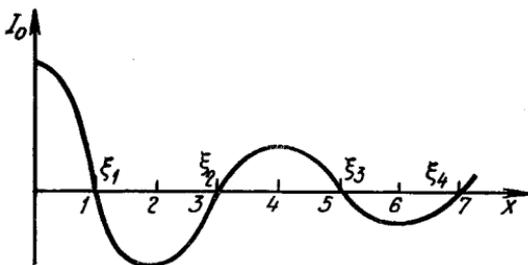


Рис. 40

равны нулю. Что касается четных коэффициентов, то их легко выразить через a_0 по формуле (15'):

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}, \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Подставляя (16) в (13), получаем частное решение уравнения Бесселя (12):

$$y_1(x) = I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)}. \quad (17)$$

С помощью признака сходимости Даламбера можно показать, что ряд (17) сходится при любых значениях x . Характеризуемая им функция $I_\nu(x)$ называется *бесселевой функцией первого рода порядка ν* .

Бесселевы функции первого рода $I_\nu(x)$ хорошо изучены, для них составлены таблицы.

При $x \gg 1$ функцию Бесселя можно заменить ее асимптотической формулой:

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (18)$$

из которой видно, что для больших x кривая $I_\nu(x)$ приблизительно представляет собой затухающую косинусоиду (на рисунке 40 приведен график бесселевой функции нулевого порядка). Ясно, что функции $I_\nu(x)$ имеют бесчисленное множество корней $\xi_k^{(\nu)}$ (где $k = 1, 2, \dots$), для которых $I_\nu(\xi_k^{(\nu)}) = 0$.

Итак, функция Бесселя первого рода $I_\nu(x)$ является одним частным решением $y_1(x)$ уравнения (12). Чтобы написать его общее решение, нужно знать второе линейно-независимое частное решение $y_2(x)$. В теории бесселевых функций показывается, что в том случае, когда параметр ν является не целым числом, это второе частное решение можно получить, положив $s = -\nu$:

$$y_2(x) = I_{-\nu}(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k} k! (1-\nu) \dots (k-\nu)}. \quad (17')$$

Это тоже бесселева функция первого рода, но отрицательного порядка, ее график подобен затухающей косинусоиде.

В случае нецелочисленности ν общий интеграл уравнения Бесселя имеет вид:

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x). \quad (19)$$

Однако, если ν есть целое число ($\nu = n$), то функция $I_{-n}(x)$ отличается от $I_n(x)$ только постоянным множителем (-1) . Иными словами, $I_n(x)$ и $I_{-n}(x)$ линейно-зависимы и из них общий интеграл нельзя составить.

В этом случае в качестве второго независимого частного решения выбирают функцию Бесселя второго рода $Y_n(x)$, которую еще называют *функцией Неймана*.

Мы не будем строго выводить выражение для $Y_n(x)$, а ограничимся ее асимптотической формулой, справедливой при $x \gg 1$:

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (20)$$

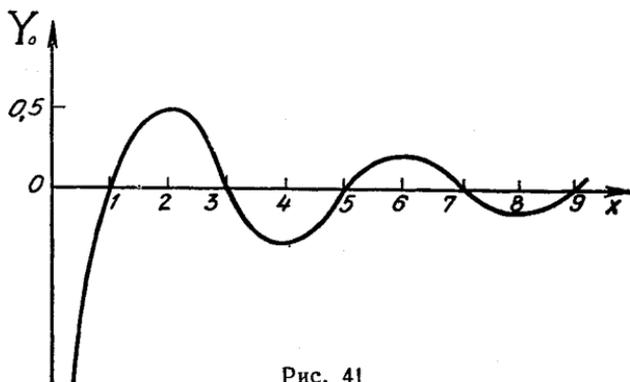


Рис. 41

Наиболее существенное свойство функции Y_n состоит в том, что при $x \rightarrow 0$ функции Неймана любого порядка стремятся к бесконечности:

$$Y_n(0) = -\infty. \quad (20')$$

На рисунке 41 приведен график функции Неймана нулевого порядка. Таким образом, при $\nu = n$ общий интеграл уравнения Бесселя (12) выражается следующей формулой:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x). \quad (21)$$

В следующем параграфе рассматривается конкретный пример, в котором используются функции Бесселя.

§ 3. Решение задачи Дирихле для цилиндра

Пусть дан цилиндр высоты h и радиуса a (рис. 40), на боковой поверхности и верхнем торце которого температура равна нулю, а на нижнем торце поддерживается постоянная температура по закону $T = F(\rho)$. Найдем распределение температуры в таком цилиндре.

Чтобы сформулировать задачу аналитически, примем во внимание, что из ее условий вытекает симметричность распределения температуры по углу φ . Поэтому $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ и уравнение Лапласа упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (22)$$

Граничные условия выражаются так:

$$T|_{\rho=a} = 0, \quad T|_{z=h} = 0, \quad (23)$$

$$T|_{z=0} = F(\rho). \quad (24)$$

Согласно методу Фурье представим искомую функцию в виде произведения:

$$T(\rho, z) = R(\rho) Z(z). \quad (25)$$

Подставив это произведение в исходное уравнение (22), имеем:

$$Z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') + R Z'' = 0.$$

Деля это равенство на RZ и перенося второе слагаемое вправо, получаем:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} (\rho R') = - \frac{Z''}{Z(z)}.$$

Приравнявая, как обычно, обе части равенства постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум

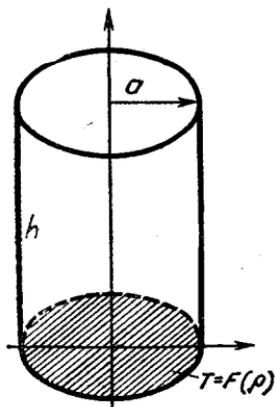


Рис. 42

обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$Z'' - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') + \lambda^2 R = 0 \quad (27)$$

Общий интеграл уравнения (26) записывается сразу:

$$Z(z) = A \operatorname{ch} \lambda z + B \operatorname{sh} \lambda z. \quad (28)$$

Что касается (27), то оно является уравнением Бесселя нулевого порядка от независимой переменной $(\lambda\rho)$:

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda^2 R = 0. \quad (27')$$

Его общее решение согласно (21) имеет вид:

$$R(\rho) = C I_0(\lambda\rho) + D Y_0(\lambda\rho). \quad (29)$$

Из условия конечности решения во всех точках цилиндра следует, что $D=0$. В противном случае для точек на оси z , т. е. при $\rho=0$, мы бы получили $R \rightarrow \infty$ (так как $|Y_0(0)| = \infty$).

Итак,

$$R(\rho) = C I_0(\lambda\rho). \quad (29')$$

Потребуем теперь, чтобы на поверхности цилиндра $R(a) = 0$:

$$I_0(\lambda a) = 0. \quad (30)$$

Отсюда находим параметр λ :

$$\lambda a = \xi_n^0, \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{\xi_n^0}{a}, \quad (31)$$

где ξ_n^0 — корни бesselевой функции нулевого порядка. Подставляя (31) в (29), получаем:

$$R_n(\rho) = C_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \quad (32)$$

Умножая (32) на (28), находим множество функций:

$$T_n(\rho, z) = \left[M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right) \right] I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right), \quad (33)$$

удовлетворяющих уравнению (22) и первому из граничных условий (23).

Чтобы удовлетворить еще второму граничному условию ($T|_{z=h}=0$), необходимо положить

$$M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) = 0. \quad (34)$$

Отсюда

$$N_n = M_n \operatorname{cth}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (33) и учтя формулу для гиперболического синуса

разности двух углов, мы приходим к соотношению:

$$T_n = M_n \frac{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h}{a} \right)} I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right). \quad (36)$$

Нам осталось еще удовлетворить граничному условию (24). Для этого составим из решений T_n бесконечную сумму:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h}{a} \right)} I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right) \quad (37)$$

и потребуем, чтобы при $z=0$ она сходилась к $F(\rho)$:

$$T(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right) = F(\rho). \quad (38)$$

Задача теперь свелась к разложению функции $F(\rho)$ в ряд по бesselевым функциям нулевого порядка.

В теории цилиндрических функций доказывается, что две различные функции одного порядка обобщенно ортогональны, т. е.

$$\int_0^a \rho I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right) I_0 \left(\xi_m^0 \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0$$

при $m \neq n$. Поэтому любую функцию $F(\rho)$ можно разложить в ряд Фурье—Бесселя:

$$F(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right). \quad (39)$$

При этом коэффициенты Фурье—Бесселя F_n вычисляются по формуле

$$F_n = \frac{2}{a^2 [I_1(\xi_n^0)]^2} \int_0^a \rho F(\rho) I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right) d\rho. \quad (40)$$

Таким образом, полагая $M_n = F_n$, получаем окончательное решение задачи в виде суммы ряда:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a} \right)}{\operatorname{sh} \left(\xi_n^0 \frac{h}{a} \right)} I_0 \left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a} \right). \quad (41)$$

Глава IV.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Уравнение Лежандра

Уравнение Лапласа в координатах (r, θ, φ) записывается так:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Следуя методу Фурье, ищем решение этого уравнения в виде произведения:

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi). \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1), получаем:

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{R}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right\} = 0.$$

Умножим это равенство на $r^2/R Y$, приводим его к виду:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') = \frac{1}{Y} \Lambda Y, \quad (3)$$

где Λ — так называемый *оператор Лежандра*, равный

$$\Lambda = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (4)$$

Приравнивая обе части равенства (3) постоянной λ , приходим к двум уравнениям:

$$\frac{d}{dr} (r^2 R') - \lambda R = 0, \quad (5)$$

$$\Lambda Y - \lambda Y = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) в развернутом виде выглядит так:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (6')$$

Как видно, это уравнение в частных производных. Поэтому вновь применим метод Фурье.

Представим $Y(\theta, \varphi)$ в виде произведения:

$$Y = V(\theta) \Phi(\varphi) \quad (7)$$

и подставим это выражение в (6'). Тогда

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \frac{dV}{d\theta} \right) + \frac{V}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \lambda V \Phi = 0.$$

Умножив последнее равенство на $\frac{\sin^2 \theta}{\Phi V}$ и разделив переменные, приходим к равенству:

$$\frac{\sin \theta}{V} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta V') + \lambda \sin^2 \theta = \frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Приравнявая обе части постоянной — ν^2 , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta V') + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (8) нам удобнее представить в показательной форме:

$$\Phi(\varphi) = Ae^{i\nu\varphi} + Be^{-i\nu\varphi}. \quad (10)$$

Так как обычно функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет условию цикличности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

то можно сделать вывод, что значение ν не может быть произвольным, а обязательно является целочисленным:

$$\nu = m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, функция $\Phi(\varphi)$ принимает форму:

$$\Phi = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}, \quad (10')$$

а уравнение (9) соответственно запишется так:

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dV}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) V = 0. \quad (9')$$

Уравнение (9') называют *обобщенным уравнением Лежандра*. Если ввести новую независимую переменную $x = \cos \theta$ (при этом $-1 \leq x \leq 1$) и обозначить $V(\theta) = y(x)$, то обобщенное уравнение Лежандра принимает обычный вид ¹⁾:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y - \frac{m^2}{1-x^2}y = 0. \quad (11)$$

¹⁾ Действительно, $x = \cos \theta$, $dx = -\sin \theta d\theta$. Поэтому

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cdot y',$$

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dV}{d\theta} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{d\theta} \right) \frac{dx}{d\theta} = (1-x^2)y''.$$

Подставляя $\frac{d^2 V}{d\theta^2}$ и $\frac{dV}{d\theta}$ в (9), приходим к (11).

При $m=0$ это уравнение имеет более простую форму уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решений уравнения Лежандра (9') и радиального уравнения (5). Обозначая их интегралы соответственно через $V(\theta)$ и $R(r)$, представим искомую функцию в форме следующего произведения:

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)V(\theta)\Phi(\varphi), \quad (13)$$

где $\Phi(\varphi)$ имеет вид (10').

Перейдем теперь к изучению методов решений уравнений (9') и (5).

§ 2. Решение уравнения Лежандра

Будем искать интеграл уравнения Лежандра (12) с переменными коэффициентами в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (14)$$

Дифференцируя (14), получаем:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad (14')$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \quad (14'')$$

Умножив $y''(x)$ на $(1-x^2)$ и y' на $2x$ и подставив полученные выражения в (12), приходим к равенству:

$$(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Перенесем все члены, содержащие x в k -й степени, вправо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + 2k - \lambda] a_k x^k,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)k - \lambda] a_k x^k. \quad (15)$$

Поскольку согласно (15) должно иметь место равенство коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях равенства, то

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} = [k(k+1) - \lambda] a_k.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad (16)$$

позволяющую выразить все четные коэффициенты ряда (14) через a_0 и все нечетные через a_1 .

Таким образом, ряд (14) с коэффициентами, определяемыми по формуле (16) и с произвольными значениями a_0 и a_1 , является общим решением уравнения Лежандра (12).

Обратим теперь внимание на то, что согласно равенству (16) при $a_1 = 0$ все нечетные коэффициенты ряда (14) обращаются в нуль ($a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$). При этом получим «четный» ряд:

$$y_0(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, \quad (17)$$

являющийся частным решением уравнения (12). Аналогично, положив $a_0 = 0$ (но $a_1 \neq 0$), получим «нечетный» ряд:

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots, \quad (18)$$

представляющий собой второе частное решение уравнения (12). При этом коэффициенты рядов (17) и (18) вычисляются по формуле (16).

Таким образом, общее решение исходного уравнения можно записать так:

$$y(x) = Ay_0(x) + By_1(x). \quad (19)$$

Однако задачу еще нельзя считать решенной. Дело в том, что в математической физике нас интересуют не любые решения, а только такие, которые удовлетворяют условиям однозначности, непрерывности и конечности. Анализ же рядов (17) и (18) показывает, что последнему требованию они, вообще говоря, не удовлетворяют. И только в том частном случае, когда какой-нибудь из этих рядов «обрывается» на некотором члене и содержит конечное число слагаемых, т. е. представляет собой многочлен, условие ограниченности выражаемой им функции выполняется на всем отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Это может иметь место, если согласно формуле (16) обратится в нуль какой-нибудь коэффициент; тогда и все последующие коэффициенты автоматически станут нулевыми.

Остается заметить, что при $a_l \neq 0$ коэффициент a_{l+2} исчезает только в том случае, если постоянная λ равна

произведению двух последовательных целых чисел l и $l+1$:

$$\lambda = l(l+1). \quad (20)$$

Только при выполнении равенства (20) можно получить конечные решения уравнения Лежандра (12). При четном l следует выбрать частное решение $y_0(x)$, которое в этом случае будет представлять собой многочлен l -й степени. Если же l нечетно, то в многочлен l -й степени обратится ряд, определяющий $y_1(x)$.

Таким образом, удовлетворяющее условию (20) уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \quad (12')$$

имеет ограниченное решение, которое представляет собой многочлен l -й степени. При четном l это решение имеет вид:

$$y_0 = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_lx^l, \quad (18')$$

а при нечетном l оно имеет вид:

$$y_1 = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_lx^l. \quad (19')$$

Коэффициенты a_k и в том, и в другом случае определяются через произвольно выбранные a_0 или a_1 по формуле:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k. \quad (16')$$

Многочлены (18') и (19'), у которых соответствующие коэффициенты a_0 или a_1 выбраны таким образом, чтобы в точке $x=1$ значения этих многочленов были равны 1, принято называть *полиномами Лежандра* и обозначить через $P_l(x)$.

Резюмируя, можно сказать, что уравнение Лежандра (12) только при $\lambda = l(l+1)$ имеет ограниченные на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ решения, которые с точностью до постоянного множителя являются полиномами Лежандра $P_l(x)$.

§ 3. Полиномы Лежандра

Познакомимся подробнее со свойствами различных полиномов Лежандра.

Прежде всего найдем полиномы наименьших степеней $l=0, 1, 2, 3$. При $l=0$ мы имеем многочлен нулевой степени, которым является коэффициент a_0 . Но чтобы

$P_0(1) = 1$, нужно принять $a_0 = 1$. Итак,

$$P_0(x) = 1.$$

При $l = 1$ получаем многочлен первой степени, он имеет вид a_1x . Чтобы при $x = 1$ этот многочлен был равен 1, необходимо принять $a_1 = 1$. Следовательно,

$$P_1(x) = x.$$

При $l = 2$ у многочлена второй степени $a_0 + a_2x^2$ коэффициент a_2 согласно (16') должен быть равен $-3a_0$. Поэтому

$$P_2(x) = a_0 - 3a_0x^2.$$

Чтобы при этом $P_2(1) = 1$, постоянную a_0 нужно выбрать равной $-1/2$, так что

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

При $l = 3$ у многочлена третьей степени $a_1x + a_3x^3$ коэффициент a_3 выражается через a_1 по формуле (16') так:

$$a_3 = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{3 \cdot 2} a_1 = -\frac{5}{3} a_1.$$

Таким образом,

$$P_3(x) = a_1 \left(x - \frac{5}{3} x^3 \right).$$

В точке $x = 1$

$$P_3(1) = -\frac{2}{3} a_1.$$

Чтобы $P_3 = 1$, надо принять $a_1 = -3/2$. Следовательно,

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Вычисление полиномов Лежандра более высоких степеней таким методом довольно громоздко. Удобнее для этой цели пользоваться так называемой *формулой Родриго*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (21)$$

(Рекомендуем читателю с помощью этой формулы вычислить $P_l(x)$ для всех l от 0 до 5.)

Графики нескольких низших полиномов Лежандра приведены на рисунке 43.

Полиномы Лежандра обладают важным свойством ортогональности, выражающимся аналитически в том, что интеграл от произведения двух различных полиномов равен нулю:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = 0,$$

если $l' \neq l$.

До сих пор мы говорили о решении простого уравнения Лежандра (12), являющегося частным случаем

обобщенного уравнения Лежандра (11). Оказывается, что конечными решениями (11) являются так называемые присоединенные полиномы Лежандра $P_l^{(m)}(x)$, определяемые следующей формулой Родриго:

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (22)$$

Обратим внимание, что при $m > l$ имеет место тождество $P_l^{(m)}(x) \equiv 0$. Поэтому каждому значению l соответствует $l+1$ присоединенных полиномов Лежандра

$$P_l^{(m)}(x),$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, l$.

В качестве примера найдем все присоединенные полиномы, соответствующие $l=2$.

Параметр m в этом случае может принимать значения 0, 1, 2, т. е. возможны три полинома: $P_2^{(0)}(x) = P_2(x)$, $P_2^{(1)}$ и $P_2^{(2)}(x)$. Найдем каждый из них.

Из предыдущего мы знаем, что $P_2^{(0)} = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Далее, по формуле (22) находим:

$$P_2^{(1)}(x) = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^{(2)}(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] = 3(1-x^2).$$

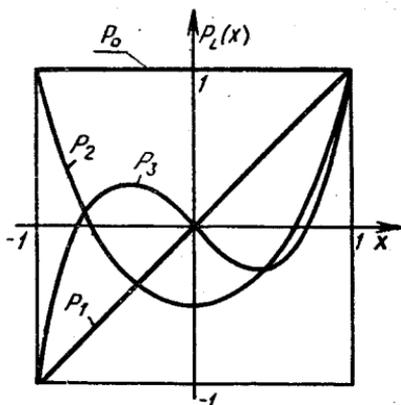


Рис. 43.

§ 4. Сферические и шаровые функции

Вернемся к задаче, сформулированной в § 1. Поскольку уравнение (11) получилось из (9') заменой независимой переменной $\cos \theta = x$, то ясно, что уравнение (9') имеет конечные решения только в том случае, когда $\lambda = l(l+1)$. Это уравнение принимает при этом форму:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dV}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] V = 0. \quad (9'')$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$V(\theta) = P_l^{(m)}(\cos \theta). \quad (23)$$

Таким образом, чтобы найти функцию $U(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot V(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$, осталось еще найти $R(r)$, являющееся решением «радиального» уравнения (5). Раскроем в этом уравнении скобки и заменим λ произведением $l(l+1)$:

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0. \quad (5')$$

Это — дифференциальное уравнение типа Эйлера. Поэтому будем искать его решение в виде:

$$R = r^s. \quad (24)$$

Подставив в (5') R и его производные $R' = sr^{s-1}$ и $R'' = s(s-1)r^{s-2}$, получим:

$$s(s-1)r^s + 2sr^s - l(l+1)r^s = 0.$$

Сокращая на r^s и произведя сложение общих членов, приходим к соотношению:

$$s(s+1) = l(l+1),$$

откуда

$$s_1 = l, \quad s_2 = -(l+1).$$

Следовательно, общее решение уравнения (5') имеет вид:

$$R = C_1 r^l + C_2 r^{-(l+1)}.$$

Так как нас интересуют только конечные решения для всех внутренних точек шара (в том числе и центра, где $r=0$), то необходимо положить $C_2=0$. Тогда

$$R = C_1 r^l. \quad (25)$$

Следовательно, в соответствии с равенством (7), конечными решениями уравнения (6) являются сферические функции:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = V(\theta) \Phi(\varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{\pm im\varphi}. \quad (26)$$

Ясно, что для каждого l имеется $2l+1$ сферических функций, соответствующих $m=0, 1, \dots, l$.

Произведение радиальной функции $R=r^l$ на любую сферическую функцию $Y_l^m(\theta, \varphi)$ согласно (2) является частным ограниченным решением уравнения Лапласа:

$$U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\varphi}. \quad (27)$$

Функции $U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)$ называют шаровыми. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) (Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}). \quad (28)$$

В следующем параграфе рассмотрен пример решения уравнения (1) для конкретной физической задачи.

§ 5. Стационарное распределение температуры в шаре

Пусть на поверхности шара радиуса a температура поддерживается постоянной, равной $f(\theta)$. Найдем установившееся распределение температуры $T(r, \theta, \varphi)$ внутри шара.

Задача сводится к решению уравнения Лапласа:

$$\Delta T = 0 \quad (29)$$

при граничном условии $T|_{r=a} = f(\theta)$.

Приступая к его решению, прежде всего учтем, что вследствие независимости температуры на поверхности от долготного угла φ не может зависеть от этой координаты и температура внутренних точек шара, т. е. $T = T(r, \theta)$. Поэтому уравнение Лапласа (1) упрощается и принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (30)$$

Отсюда следует, что параметр m равен нулю и $T = R(r)V(\theta)$, причем $V(\theta)$ удовлетворяет простому уравнению Лежандра (12).

Следовательно, шаровые функции (27) принимают вид:

$$T_l(r, \theta) = r^l P_l(\cos \theta), \quad (31)$$

и общее решение (28) запишется так:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (32)$$

Дело свелось, следовательно, к такому выбору коэффициентов этого ряда, чтобы при $r \rightarrow a$ последний член сходил к $f(\theta)$:

$$T|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos \theta) = f(\theta). \quad (33)$$

Ранее было отмечено, что полиномы Лежандра образуют ортогональное семейство функций и что поэтому любую функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по этому семейству:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \quad (34)$$

где коэффициенты Фурье—Лежандра определяются по формуле:

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx. \quad (35)$$

Сопоставляя (33) в (34), заключаем, что

$$C_l = \frac{f_l}{a^l}, \quad (36)$$

где

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l(\cos \theta) \cdot \sin \theta d\theta. \quad (35')$$

Подставляя (36) в (33), получаем окончательное решение задачи в виде функционального ряда:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta). \quad (37)$$

Глава V.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

До сих пор мы решали дифференциальные уравнения в частных производных методом разделения переменных. Другим распространенным в математической физике методом решения таких уравнений является метод функций Грина. Он состоит в том, что сначала находят некоторое специальное решение задачи того же типа, а затем через него в квадратурах выражают интеграл исходной задачи.

Ниже мы подробнее ознакомимся с сущностью этого метода на конкретных примерах.

§ 1. Метод Грина решения краевых задач

Пусть нужно найти функцию $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую в области V уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяющую на границе этой области условию:

$$\varphi|_S = f(x', y', z'). \quad (2)$$

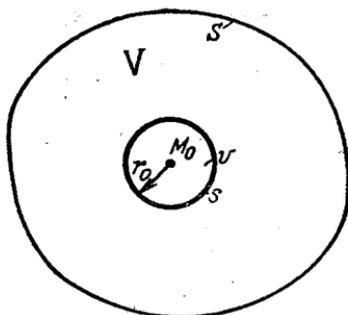


Рис. 44

Возьмем внутри области V некоторую точку M_0 и окружим ее маленькой сферой s объема v и радиуса r_0 (рис. 44). Применим теперь формулу Грина (51, ч. II) к области $V' = V - v$, ограниченной двумя поверхностями S и s :

$$\begin{aligned} \int_{V'} (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) dV &= \oint_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \oint_s \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку эта формула справедлива для произвольных функций φ и ψ , то выберем в качестве φ искомую функцию $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2), а под ψ будем понимать так называемую *функцию Грина* G , которая определяется равенством:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r} + H(x, y, z), \quad (4)$$

где r — расстояние произвольной точки от M_0 . Функция $H(x, y, z)$ удовлетворяет в области V уравнению Лапласа:

$$\Delta H = 0 \quad (5)$$

и принимает на поверхности $S = S(x', y', z')$ значения:

$$H(x', y', z') \equiv H(\vec{r}') = -\frac{1}{r'}, \quad (6)$$

где r' — расстояние точек поверхности S от точки M_0 .

Так как $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, отличных от M_0 ($r=0$), то согласно (4) и (5), функция $\psi = G(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ в области V' , причем на поверхности S в соответствии с (4) и (6):

$$\psi|_S = G(x', y', z') = 0. \quad (7)$$

Поэтому соотношение (3) принимает вид:

$$-\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Поскольку согласно (2) $\varphi|_S = f(x', y', z')$, то это равенство можно записать так:

$$\oint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (8)$$

Вычислим теперь левую часть (8), которую для краткости обозначим через I :

$$I = \oint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (9)$$

Подставляя сюда значение функции Грина G из (4) и вспоминая, что радиус малой сферы s есть r_0 , разобьем I на два интеграла I_1 и I_2 :

$$I = I_1 + I_2 = \oint_S \left\{ \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \right\} ds, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \oint_S \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds, \\ I_2 &= \oint_S \left(H \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

Применим теперь ко второму интегралу I_2 формулу Грина:

$$I_2 = \int_V (H \Delta \varphi - \varphi \cdot \Delta H) dv.$$

Но согласно (1) и (5) функции φ и H удовлетворяют уравнению Лапласа во всей области V , в том числе и v . Поэтому $I_2 = 0$ и в (10) остается одно слагаемое:

$$I = I_1 = \oint_S \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds. \quad (11)$$

Так как r_0 есть радиус сферы s , т. е. является величиной постоянной, то

$$I = \frac{1}{r_0} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (12)$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое:

$$\frac{1}{r_0} \oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (13)$$

По теореме о среднем

$$\oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 4\pi r_0^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle,$$

где $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle$ — значение $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в некоторой точке сферы s . Поэтому выражение (13) обращается в малую величину

$$4\pi r_0 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle,$$

которая при стягивании сферы s к точке M_0 стремится к нулю пропорционально r_0 :

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} 4\pi r_0 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\rangle = 0.$$

Теперь обратимся ко второму слагаемому в (12):

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (14)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{r_0^2},$$

то применение теоремы о среднем к интегралу (14) дает:

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = \frac{1}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 \langle \varphi \rangle = 4\pi \langle \varphi \rangle,$$

где $\langle \varphi \rangle$ — значение функции φ в некоторой точке сферы s . В пределе при $r_0 \rightarrow 0$ величина $\langle \varphi \rangle$ стремится к значению функции φ в точке M_0 . Следовательно,

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = 4\pi \varphi(M_0). \quad (15)$$

Вернемся теперь к исходному равенству (8). Поскольку интеграл в правой части распространяется по поверхности S , он не может зависеть от радиуса малой сферы s . Следовательно, и левая часть не зависит от r_0 . Подставляя (15) в равенство (8), получаем:

$$4\pi \varphi(M_0) = - \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

или

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (16)$$

Так как M_0 — произвольная точка области V , то эта формула представляет собой решение рассматриваемой задачи, если известна функция Грина G . Иными словами, задача свелась к определению функции $H(x, y, z)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6):

$$\Delta H = 0 \text{ и } H|_S = -\frac{1}{r_0}.$$

Ясно, что, вообще говоря, последние не намного проще исходных условий (1) и (2). Однако для некоторых типов областей V и ограничивающих их поверхностей S функция Грина может быть легко построена и в этих случаях искомое решение сводится к вычислению интеграла в правой части (16).

Ниже приводятся два примера, когда удается определить функцию Грина для задачи Дирихле.

§ 2. Функция Грина для шара

Пусть область V является шаром радиуса a , а точка M_0 лежит внутри шара на оси X , имея координаты $(x_0, 0, 0)$. Построим точку $M_0^* \left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0 \right)$, которую назовем сопряженной относительно ограничивающей шар сферы (рис. 45). Нетрудно убедиться, что для каждой точки N , лежащей на сфере, отношение $|NM_0^*|/|NM_0|$ есть величина постоянная. Действительно, треугольники OM_0N и ONM_0^* подобны (это следует из того, что $\frac{|OM_0|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM_0^*|} = \frac{x_0}{a}$). Поэтому отношение длин и оставшихся третьих сторон $|NM_0|$ к $|NM_0^*|$ также равно x_0/a , т. е. не зависит от положения N на сфере.

Теперь можно утверждать, что для произвольной точки M внутри шара функция

$$G(M) = \frac{1}{r} - \frac{a}{x_0} \frac{1}{r^*} \quad (17)$$

(где $r = |MM_0|$, $r^* = |MM_0^*|$) является функцией Грина.

Чтобы проверить это, достаточно показать, что $H(M) = -\frac{a}{x_0} \frac{1}{r^*}$ удовлетворяет внутри шара V уравнению $\Delta H = 0$, а на поверхности шара $H|_S = -\frac{1}{r}$.

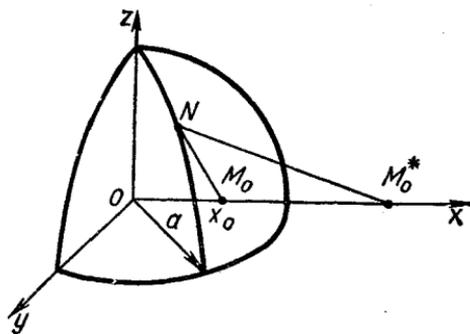


Рис. 45

Так как $r^* = |MM_0^*|$ для любой точки внутри шара есть величина, отличная от нуля, то во всей области V

$$\Delta \left(\frac{1}{r^*} \right) = 0.$$

Что касается второго условия, то ясно, что

$$H|_S = H(N) = -\frac{a}{x_0} \frac{1}{|NM_0^*|}.$$

Но

$$\frac{|NM_0^*|}{|NM_0|} = \frac{a}{x_0}.$$

или

$$\frac{1}{|NM_0^*|} = \frac{x_0}{a} \frac{1}{|NM_0|} = \frac{x_0}{a} \frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$H|_S = -\frac{1}{r}.$$

Таким образом, функция (17) является функцией Грина для рассматриваемой задачи.

Чтобы теперь мы могли воспользоваться общей формулой (16), вычислим еще производную $\frac{\partial G}{\partial n}$ на сфере:

$$\frac{\partial G}{\partial R} \Big|_{R=a} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{1}{r} \right) - \frac{a}{x_0} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]_{R=a},$$

где \vec{R} — радиус-вектор любой точки M шара, отсчитываемый от центра. На рисунке 45 ясно, что $r^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \gamma$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial R} (R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos \gamma)^{-1/2} = -\frac{R - x_0 \cos \gamma}{r^3}.$$

Полагая, что $R = a$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{R=a} = - \frac{a - x_0 \cos \gamma}{(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (18)$$

Если вместо x_0 подставить a^2/x_0 , мы найдем значение производной $\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r^*} \right)_{R=a}$:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r^*} \right)_{R=a} = - \frac{ax_0 - a^2 \cos \gamma}{x_0 \left(a^2 + \frac{a^4}{x_0^2} - 2 \frac{a^3}{x_0} \cos \gamma \right)^{3/2}}.$$

После упрощений, приходим к выражению:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{r^*} \right)_{R=a} = - \frac{x_0^2}{a^2} \frac{x_0 - a \cos \gamma}{(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (19)$$

Объединяя (18) и (19), определяем входящую в (16) производную:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = - \frac{a^2 - x_0^2}{a} (a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma)^{-3/2}. \quad (20)$$

Подставим теперь это выражение в (16), получаем решение задачи Дирихле для шара в виде квадратуры (исконую функцию вместо φ обозначим через U):

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi a} \oint \frac{a^2 - x_0^2}{(a^2 + x_0^2 - 2ax_0 \cos \gamma)^{3/2}} f(R') dS. \quad (21)$$

В общем случае, когда точка M_0 обладает произвольными сферическими координатами r_0 , θ_0 , φ_0 , это решение удобнее представить в сферической системе координат ($dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$):

$$U(M_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 - r_0^2}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \gamma)^{3/2}} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (22)$$

где нетрудно показать,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (23)$$

Интеграл (22) называется интегралом Пуассона для шара.

В том случае, когда задача Дирихле является плоской и область определения функции U представляет собой круг радиуса a , интеграл Пуассона принимает более простой вид:

$$U(M_0) = U(r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\theta_0 - \varphi)} f(\varphi) d\varphi. \quad (24)$$

Интересно заметить, что ранее (гл. II, § 3) мы решили аналогичную задачу методом Фурье и получили решение для круга в виде ряда. Можно легко показать, что эти два решения эквивалентны.

§ 3. Функция Грина для полупространства

Пусть нужно найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в полупространстве $z > 0$ уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ и принимающую на плоскости XOY ($z = 0$) заданное значение:

$$U|_{z=0} = f(x, y).$$

Как и в случае конечной области V , представляем функцию Грина для произвольной точки верхнего полупространства ($z > 0$) в виде двух слагаемых:

$$G(M) = \frac{1}{r} + H(M), \quad (25)$$

где $r = |\overrightarrow{MM}_0|$ есть расстояние произвольной точки M от некоторой фиксированной $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Что касается функции $H(M)$, то она по-прежнему удовлетворяет двум условиям $\Delta H = 0$ и $H|_{z=0} = -\frac{1}{r'}$, здесь $r' = |\overrightarrow{NM}_0|$ — расстояние от M_0 до любой точки $N(x', y')$ на плоскости $z = 0$. Поскольку $G(N) = 0$, то решением задачи является функция:

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S f(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (26)$$

Ясно, что

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_S = -\frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Поэтому

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)_{z=0} dx dy. \quad (27)$$

В качестве функции $H(M) = H(x, y, z)$ выберем величину

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{r^*}, \quad (28)$$

где $r^* = |\overrightarrow{MM}_0^*|$ есть расстояние от текущей точки M до точки $M_0^*(x_0, y_0, z_0)$, сопряженной точке M_0 (рис. 46).

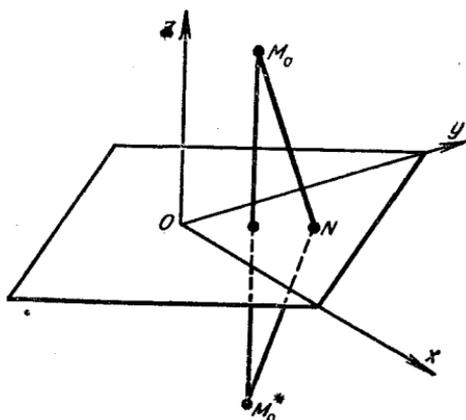


Рис. 46

Несложно убедиться, что функция (28) удовлетворяет и уравнению Лапласа $\Delta H = 0$ и граничному условию

$$\begin{aligned}
 H|_S = H(N) &= \\
 &= H(x, y, 0) = \\
 &= -\frac{1}{r'^*} = -\frac{1}{r'},
 \end{aligned}$$

поскольку $r'^* = |M_0^*N| = |M_0N| = r'$. Подставляя (28) в (26) и записывая полученное выражение в раз-

вернутом виде, находим для функции Грина следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 G(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Дифференцируя эту функцию по z , получаем:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{2z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (27), приходим к окончательному выражению:

$$\begin{aligned}
 U(x_0, y_0, z_0) &= \\
 &= \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{-3/2} dx dy,
 \end{aligned} \tag{31}$$

являющемуся решением рассматриваемой задачи.

Часть третья

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава I.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В физике, как и других науках, часто приходится рассматривать различные совокупности объектов, объединенных некоторым общим признаком. С точки зрения математики такая совокупность образует *множество*, а каждый ее объект называют *элементом множества*. В зависимости от числа содержащихся в них элементов множества бывают конечные и бесконечные.

Множество считается заданным, если о любом предмете можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Обычно множества определяются либо заданием всех их элементов, либо путем указания характеристического свойства, коим обладают только элементы данного множества. Так, точки окружности образуют бесконечное множество, элементы которого (точки) объединены тем свойством, что все они равноудалены от центра. Линейная алгебра рассматривает множества, в которых возможны определенные алгебраические операции.

Если указан закон, по которому каждой паре элементов a и b , взятых в определенном порядке из множества M , однозначным образом ставится в соответствие третий элемент c , также принадлежащий этому множеству, то говорят, что в множестве M определена алгебраическая операция, которую называют *сложением* (или *умножением*):

$$a + b = c \quad (\text{или } ab = c).$$

Обратим внимание на то, что алгебраические операции обладают следующими свойствами:

1) операцию можно осуществить над любой парой элементов данного множества;

2) операция определяется однозначно, т. е. для каждой пары элементов она выполняется единственным способом и результат оказывается также единственным;

3) получающийся в итоге операции над двумя элементами множества новый элемент обязательно принадлежит к тому же множеству.

Если результат алгебраической операции не зависит от порядка участвующих в ней элементов, т. е. $a + b = b + a$ (или $ab = ba$), то операция называется *коммутативной* (перестановочной); в противном случае алгебраическая операция *некоммутативна*. Операции еще подразделяют на *ассоциативные* (сочетательные), если $(a + b) + c = a + (b + c)$, и *неассоциативные*, если результат операции над тремя элементами зависит от последовательности ее выполнения между парами элементов.

Среди множеств, в которых возможны алгебраические операции, современная алгебра изучает прежде всего следующие:

Группы — множества с одной ассоциативной операцией (не обязательно коммутативной).

Кольца — множества с двумя алгебраическими ассоциативными операциями (сложением и умножением), связанные дистрибутивным (распределительным) свойством:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Поля — коммутативные кольца, в котором есть нулевой и единичный элементы 0 и 1, причем для каждого ненулевого элемента a существует обратный элемент a^{-1} , т. е. $aa^{-1} = 1$.

Легко убедиться в том, что каждое из множеств чисел — рациональных, действительных, комплексных — образует поле.

По определению алгебраическая операция есть действие над элементами одного и того же множества. Однако для решения многих практических задач пришлось обобщить понятие операции, применяя ее к элементам из разных множеств.

Так, пусть дано множество векторов, характеризующих электрическое поле, созданное точечным зарядом q , т. е. векторное поле $\vec{E}(r)$. Если величину заряда изменить в α раз (α — любое действительное число), то векторы напряженности \vec{E} в каждой точке также изменят свою длину в α раз.

Следовательно, возникает необходимость ввести операцию умножения элементов векторного множества S на элементы числового поля P . В современной алгебре под понятием *вектор* \vec{a} понимают абстрактную математическую величину, характеризующуюся в n -мерном пространстве n скалярными числами — координатами $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

лишь бы для таких величин была указана операция сложения.

Таким образом, современная алгебра наряду с группами, кольцами и полями изучает также *абстрактные векторные множества*, для которых определена еще операция умножения любого его элемента на произвольное число из некоторого поля P .

В частности, предметом *линейной алгебры* являются такие векторные множества, для которых операции сложения и умножения на число удовлетворяют ряду рассматриваемых ниже условий. В этом случае множество векторов называют *линейным* (или *аффинным*) *векторным пространством*.

Основная задача линейной алгебры—это изучение линейных пространств и аффинных преобразований таких пространств.

§ 1. Линейное векторное пространство

Множество векторов R образует линейное (аффинное) пространство, если для всех элементов из R заданы операции сложения и умножения на числа¹, причем обе эти операции удовлетворяют следующим условиям:

а) *коммутативности*—

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ \lambda \vec{a} &= \vec{a} \lambda \end{aligned} \right\}; \quad (\text{I})$$

б) *ассоциативности*—

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ \lambda (\mu \vec{a}) &= (\lambda \mu) \vec{a} \end{aligned} \right\}; \quad (\text{II})$$

в) *дистрибутивности*—

$$\left. \begin{aligned} \lambda (\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \\ (\lambda + \mu) \vec{a} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \end{aligned} \right\}; \quad (\text{III})$$

г) существует единственный нуль-вектор $\vec{0}$, такой, что для любого вектора \vec{a} имеет место равенство

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}; \quad (\text{IV})$$

¹ Векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \lambda \vec{a}$ принадлежат векторному множеству, если только \vec{a} и \vec{b} —элементы этого множества.

д) для всякого ненулевого вектора \vec{a} существует единственный противоположный вектор $-\vec{a}$, который в сумме с \vec{a} дает нуль:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}; \quad (\text{V})$$

е) при умножении произвольного вектора \vec{a} на число 1 вектор не меняется:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}. \quad (\text{VI})$$

Такое громоздкое определение вызывает обычно у начинающего некоторое недоумение, возникают вопросы: почему рассмотренное множество называют *линейным пространством*? Почему каждый вектор этого множества обязательно должен обладать свойствами (I) — (VI)? и т. п.

Чтобы ответить на эти вопросы и пояснить геометрическую сущность указанного определения, познакомимся немного с методологией современной геометрии.

Геометрия как математическая наука о пространственных соотношениях и формах тел пользуется двумя основными методами: синтетическим (или собственно геометрическим) и аналитическим. Первый был развит еще геометрами древности и прежде всего Евклидом. В этом методе все выводы и рассуждения строятся на чисто геометрической, наглядной основе, с привлечением пространственного опыта; по существу синтетический метод состоит в оперировании самими геометрическими образами и понятиями.

Типичными примерами применения синтетического метода в элементарной математике являются задачи на построение и доказательство теорем о равенстве треугольников путем наложения.

Аналитический метод берет начало с работ известного французского математика Декарта, введшего в первой половине XVII века в геометрию систему координат и сопоставившего каждой точке пространства тройку чисел x, y, z . Это позволило сначала свести простые геометрические понятия и выводы к числам, уравнениям, вычислениям (*аналитическая геометрия*), а затем решать и более тонкие геометрические задачи с помощью аппарата математического анализа (*дифференциальная геометрия*). Этот метод по существу слил в одно целое геометрию, алгебру и анализ. Примерами применения этого метода являются тригонометрические и алгебраические способы решения различных элементарных геометрических задач.

В современных геометрических теориях аналитический метод играет важнейшую роль, он применяется не только для доказательства различных теорем, но и для определения исходных, основных геометрических понятий.

Дальнейшим развитием этого метода в геометрии явились векторное и тензорное исчисления, позволившие аналитически характеризовать геометрические объекты и соотношения инвариантным (не зависящим от выбора системы координат) способом.

Действительно, основному геометрическому субъекту — точке сопоставляется радиус-вектор, так что произвольной области пространства, представляющей собой непрерывное множество точек,

приводится в соответствие векторное множество. Умея оперировать с векторами, мы, очевидно, можем любую геометрическую задачу решить методами векторной алгебры.

Векторное исчисление оказалось наиболее удобным аналитическим аппаратом для исследования геометрии того или иного пространства. Но для того чтобы с помощью векторов можно было изучать геометрические свойства данного пространства, нужно сформулировать основные определения и операции над векторами как направленными отрезками, соединяющими две точки, т. е. построить векторно-алгебраическую аксиоматику, из которой все утверждения и факты указанной геометрии вытекают бы как следствия.

Ясно, что каждой геометрии соответствует своя совокупность аксиом. При пользовании синтетическим методом это — геометрические аксиомы. Когда же исследование пространственных соотношений производится с помощью векторного анализа, используются эквивалентные геометрическим алгебраическим аксиомы. Так, определения понятия вектора и правил действия над векторами будут различными для геометрий на плоскости и сфере, ибо геометрические аксиомы этих геометрий различны (например, кратчайшим расстоянием на сфере является не прямая, а дуга большого круга).

Легко видеть, что условия (I) — (VI), которым должны удовлетворять векторы двумерного линейного пространства, выполняются для обычной плоскости. Точно так же удовлетворяют этим условиям векторы реального трехмерного пространства, поскольку мы считаем его евклидовым или плоским (лишенным кривизны). Заметим, что великий Лобачевский впервые понял, что вопрос об евклидовости нашего пространства не является столь простым, как считалось ранее, что ответить на него может только опыт; иными словами, решить задачу о кривизне реального пространства должны не математики, а физики. В дальнейшем эту замечательную мысль развил немецкий математик Риман, который показал, что плоское, евклидово пространство является простейшим частным случаем пространств различной кривизны. Соответственно, евклидова геометрия представляет собой предельный вид более общей римановой геометрии.

Согласно общей теории относительности четырехмерное пространство-время не является плоским (евклидовым),

его кривизна переменна и определяется наличием гравитирующих масс вблизи рассматриваемой точки.

Ясно, что линейное пространство—это обобщение геометрического понятия плоского пространства, в частности плоскости (когда размерность пространства равна 2).

Отсюда следует, что линейная алгебра—это аналитический аппарат изучения абстрактной геометрии n -мерных плоских пространств.

Но и геометрия простейшего плоского пространства содержит огромное множество геометрических свойств, которые желательно разбить на отдельные классы.

«Первоначально геометрия вообще не расчленялась. Она изучала главным образом метрические—связанные с измерением размеров фигур—свойства пространства. Лишь попутно рассматривались обстоятельства, связанные не с измерением, а с качественным характером взаимного расположения фигур, причем уже давно замечали, что часть таких свойств отличается своеобразной устойчивостью, сохраняясь при довольно существенных искажениях формы и изменениях положения фигур» (А. Д. Александров).

Немецкий математик Клейн сформулировал общий принцип классификации геометрических свойств: рассматривая различные группы преобразований пространства, объединяют в один класс те геометрические свойства фигур, которые сохраняются при тех или иных преобразованиях. Иными словами, пространственные свойства как бы распадаются по их устойчивости.

Представим себе, что на квадратной плоской резиновой пленке нарисован круг с двумя взаимно перпендикулярными диаметрами. Если мы равномерно растянем пленку вдоль одной стороны квадрата, то круг превратится в эллипс и углы между диаметрами уже не будут прямыми (рис. 47). Таким образом, мы видим, что такая равномерная линейная деформация существенно изменила ряд геометрических свойств пространства. Однако некоторые свойства при этом сохранились. Так, не нарушилась прямолинейность диаметров, точка пересечения диаметров делит их пополам (как в круге) и т. д.

Геометрические свойства, которые сохраняются при равномерном растяжении или сжатии пространства в трех взаимно перпендикулярных направлениях (такие преобразования называются *аффинными*), образуют так называемую *аффинную геометрию*. К аффинным свойствам отно-

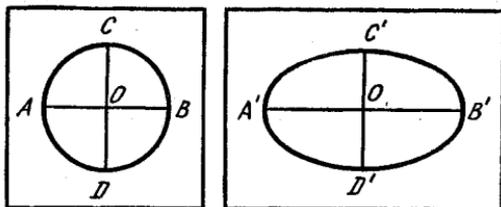


Рис. 47

сятся прямолинейность линий, параллельность прямых, пересечение медиан треугольника в одной точке и др.

Напротив, метрические свойства — длина отрезков, площадь фигур, углы между прямыми и т. п. — сохраняются только при ортогональных преобразованиях, сводящихся к простому повороту (или движению) пространства как целое. Геометрические свойства, остающиеся неизменными при ортогональных преобразованиях образуют *евклидову геометрию*.

Если резиновую пленку закрепить на жестком каркасе, то единственным возможным преобразованием пространства будет его вращение (или движение). При этом неизменными будут как аффинные, так и метрические свойства, которые в совокупности составляют евклидовы свойства пространства. Аналогично свойства, сохраняющиеся при проективных или конформных (сохраняющих углы) преобразованиях, образуют соответственно *проективную и конформную геометрии*.

Если в обычной евклидовой геометрии мы отвлекаемся от реальных свойств тел, кроме геометрических, то при выделении из нее классов как бы совершается дальнейшее абстрагирование от всех других геометрических свойств, кроме тех, которые рассматриваются в данном классе.

Так, изучая аффинные свойства, можно мыслить себе некоторое «воображаемое» пространство, в котором все фигуры не обладают никакими другими геометрическими свойствами, кроме аффинных. Ясно, что аксиоматика геометрии такого абстрактного пространства будет более проста (содержит меньшее число аксиом), чем аксиоматика евклидовой геометрии. Следствия из этой аксиоматики характеризуют аффинные свойства фигур в обычном пространстве.

Из изложенного понятно, что аффинные свойства являются более глубокими, чем метрические. Еще более

глубокими геометрическими свойствами являются *топологические*, сохраняющиеся при самых различных непрерывных (топологических) преобразованиях пространства. Так, при любой непрерывной деформации (без разрывов) резиновой пленки окружность может принять произвольную форму, но будет оставаться замкнутой линией. Изучением таких свойств занимается *топология*, а абстрактное пространство, в котором фигуры обладают только топологическими свойствами, называют *топологическим пространством*.

Вернемся теперь к определению понятия линейного пространства. Легко проверить, что условия (I—VI) описывают не метрические свойства плоского пространства, а только его аффинные свойства. Поэтому можно утверждать, что *линейное пространство — это абстрактное аффинное пространство любого конечного числа измерений*.

§ 2. Размерность линейного пространства

Как известно, пространство как форма существования материи, т. е. наше реальное пространство, имеет три измерения — длину, ширину и высоту. Тем не менее в теоретической физике широко используют как некую математическую абстракцию пространство большего числа измерений. Поэтому изучение линейных пространств любого числа измерений имеет важное значение для математической физики. Чтобы выяснить, как определяется *размерность* пространства, введем понятие *линейной независимости векторов*.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Иными словами, ни один из векторов \vec{a}_i нельзя представить в виде линейной комбинации $(n-1)$ остальных векторов. Если же равенство $\sum_k^n \alpha_k \vec{a}_k = 0$ может быть удов-

летворено хотя бы при одном ненулевом α_i , то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ являются линейно зависимыми. В этом случае всегда можно один из векторов представить в виде линейной комбинации остальных:

$$\vec{a}_i = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1} \vec{a}_{i+1} + \dots + \beta_n \vec{a}_n.$$

Теперь можно перейти к определению размерности пространства.

Рассмотрим прямую (одномерное пространство). Ясно, что любые два вектора \vec{a} и \vec{b} на ней могут отличаться только численным множителем:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}.$$

Это значит, что в одномерном пространстве имеется только один линейно независимый вектор.

Соответственно на плоскости (двумерное пространство) всегда можно выбрать два линейно независимых вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 (для этого достаточно, чтобы они не были коллинеарными). Но любой третий вектор \vec{b} на этой плоскости можно разложить по этим векторам \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , т. е. представить в виде линейной комбинации:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

В трехмерном евклидовом пространстве всегда можно выбрать три некопланарных линейно независимых вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Но любые четыре вектора обязательно линейно зависимы:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3.$$

Приведенные примеры показывают, что максимальное число линейно независимых векторов пространства совпадает с размерностью этого пространства.

Естественно поэтому ввести такое определение.

Линейное пространство называется n -мерным, если в нем существует n и только n линейно независимых векторов.

Совокупность n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ n -мерного пространства называется **базисом** этого пространства.

Нетрудно убедиться в том, что не только в обычном трехмерном, но и пространстве любой размерности справедливо следующее утверждение:

В n -мерном пространстве можно каждый вектор \vec{x} представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса: $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$.

Числа x_1, x_2, \dots, x_n называют координатами вектора \vec{x} в данном базисе.

Наконец, очень просто проверить, что при сложении двух векторов \vec{x} и \vec{y} их координаты складываются, а при умножении вектора \vec{x} на число λ его координаты умножаются на это число.

Важным понятием линейной алгебры является *изоморфизм*.

Линейные пространства R и R' называются *изоморфными*, если между векторами \vec{x} из R и векторами \vec{x}' из R' можно установить такое взаимно однозначное соответствие $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$, что если вектору \vec{x} соответствует вектор \vec{x}' , а вектору $\vec{y} \rightarrow \vec{y}'$, то: а) вектору $\vec{x} + \vec{y}$ соответствует вектор $\vec{x}' + \vec{y}'$ и б) вектору $\lambda \vec{x}$ соответствует вектор $\lambda \vec{x}'$.

Можно показать, что все пространства, имеющие одну и ту же размерность n , изоморфны друг другу и, наоборот, пространства различной размерности заведомо не изоморфны друг другу.

Изоморфизм векторных множеств различной природы позволяет переносить любой результат, вытекающий из свойств линейных операций для данного множества, на произвольное другое изоморфное множество. При этом конкретная природа как самих элементов, так и операций над ними может быть совсем различной.

Существенным свойством линейных пространств является наличие в них *подпространств*.

Подпространством R' пространства R называется такая совокупность элементов из R , которая сама образует линейное пространство относительно определенных в R операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Примером подпространства в множестве векторов обычного трехмерного пространства является произвольное множество компланарных векторов, образующих двумерное векторное пространство, соответствующее плоскости в реальном пространстве. Обратим внимание, что далеко не всякая совокупность элементов линейного пространства образует подпространство. Очевидно, чтобы последнее имело место, необходимо, хотя этого и не достаточно, чтобы указанная совокупность включала нулевой элемент.

Ясно, что размерность любого подпространства не превосходит размерности своего пространства.

Существует весьма простой общий способ выделения из любого линейного пространства R некоторых подпространств. Выберем в R произвольную совокупность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ и составим из них множество всевозможных линейных комбинаций. Легко видеть, что полученное таким образом векторное множество образует определенное подпространство, порожденное векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.

Подпространство n -мерного пространства, порожденное k линейно-независимыми векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$, является k -мерным (векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ образуют базис этого подпространства).

Очевидно, что любое n -мерное пространство содержит подпространства всех меньших измерений.

Простейшее подпространство — это *нулевое*, содержащее один нулевой элемент. Следующим являются *одномерные* пространства, базис каждого одномерного пространства состоит из одного вектора \vec{e}_1 . Ясно, что указанное одномерное подпространство представляет собой множество векторов вида $\alpha \vec{e}_1$, где α — произвольное число. Множество $\alpha \vec{e}_1$ по аналогии с обычным пространством называют *прямой* в линейном пространстве R n -измерений.

Совершенно так же двумерное подпространство с базисными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , представляющие собой множество векторов вида $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$ (где α_1 и α_2 — произвольные числа), можно назвать *плоскостью* в R . Если $n > 3$, то по аналогии можно построить трехмерное подпространство (*гиперплоскость*) $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$.

§ 3. Евклидово пространство

Ранее мы уже отмечали, что рассматривавшиеся до сих пор линейные или аффинные пространства беднее по своим геометрическим свойствам, чем обычное евклидово пространство. Это объясняется тем, что в них не определены метрические понятия — длина вектора, угол между двумя векторами, площадь фигуры и т. п.

Для того чтобы превратить двумерное аффинное пространство в евклидово, нужно, очевидно, резиновую пленку натянуть на жесткий каркас, так чтобы ее более нельзя было подвергнуть такому растяжению или сжатию. Все геометрические свойства фигур, расположенные на такой «затвердевшей» пленке, будут уже относиться к евклидовой геометрии: они будут сохраняться только при вращении плоскости как целого (ортогональное преобразование). На такой «затвердевшей» плоскости метрические понятия принимают однозначный смысл.

Итак, чтобы линейное пространство превратилось в евклидово, нужно сформулировать еще ряд дополнительных аксиом, из которых как следствия будут вытекать все метрические свойства пространства. Ясно, что эти аксиомы можно выбрать различными эквивалентными способами.

Но, оказывается, наиболее удобным для наших целей является введение определения (аксиомы) скалярного произведения векторов.

Линейное пространство R называется *евклидовым*, если каждой паре векторов \vec{x}, \vec{y} из R поставлено в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением (\vec{x}, \vec{y}) , которое обладает следующими свойствами:

- 1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ — (коммутативность),
- 2) $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$ — (λ — действительное число),
- 3) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$ — (дистрибутивность).

4) Скалярный квадрат произвольного вектора (\vec{x}, \vec{x}) является положительной величиной, только $(\vec{0}, \vec{0}) = 0$.

В полученном таким образом евклидовом пространстве легко определяются и другие метрические свойства.

Длиной вектора \vec{x} называют корень из его скалярного квадрата

$$|\vec{x}| = +\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}. \quad (1)$$

Углом между векторами \vec{x} и \vec{y} называют число φ , определяемое формулой:

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}. \quad (2)$$

Ясно, что определения (1) и (2) распространяют свойства скалярного произведения в обычном пространстве на произвольные евклидовы пространства.

В частности, два вектора \vec{x} и \vec{y} называются *ортогональными*, если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Легко убедиться, что для двух ортогональных векторов \vec{x} и \vec{y} имеет место равенство

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2,$$

представляющее собой теорему Пифагора.

Можно также доказать, что для произвольных двух векторов \vec{x} и \vec{y} имеет место неравенство Коши—Буняковского:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}). \quad (3)$$

В отличие от аффинного пространства, где все базисы (косоугольные декартовы координаты) равноправны, в евклидовом пространстве существуют особенно удобные базисы—ортогональные.

Если n ненулевых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ попарно ортогональны, то они образуют ортогональный базис в n -мерном евклидовом пространстве R .

Чтобы это определение имело смысл, нужно доказать, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно независимы. Нетрудно убедиться, что так оно и есть.

Можно еще доказать, что во всяком линейном пространстве существуют ортогональные базисы. При этом векторы ортогонального базиса можно еще нормировать, т. е. выбрать их такими, чтобы каждый имел единичную длину. Следовательно, векторы ортогонального базиса удовлетворяют равенству:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

Благодаря наличию условия (4) очень просто выражается скалярное произведение (\vec{x}, \vec{y}) двух векторов:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad \text{и} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i,$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (5)$$

Если же в евклидовом пространстве базис является аффинным, то выражение будет более сложным:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i^n \sum_k^n g_{ik} x_i y_k, \quad (6)$$

где коэффициенты $g_{ik}(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ можно рассматривать как элементы так называемой *фундаментальной n -рядной симметричной матрицы*

$$\|g\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

(где $g_{ik} = g_{ki}$), характеризующей базис пространства.

В случае ортонормированного базиса фундаментальная матрица принимает простейший вид:

$$\|g\| = \begin{vmatrix} 100 & \dots & 0 \\ 010 & \dots & 0 \\ 001 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 000 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (7')$$

Далее легко проверить, что в ортонормированном базисе координаты любого вектора $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$ суть скалярные произведения этого вектора на соответствующие базисные векторы:

$$x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i). \quad (8)$$

Отсюда ясно, что координаты вектора совпадают с его проекциями на базисные векторы (оси координат). Заметим, что такое утверждение не имеет места в аффинном базисе.

В ортонормированном базисе согласно (5) квадрат вектора равен сумме квадратов его координат:

$$(\vec{x})^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_i^n x_i^2. \quad (5')$$

Отсюда для длины вектора получаем формулу:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (9)$$

§ 4. Комплексное линейное пространство

До сих пор мы имели дело только с пространствами над полем действительных чисел. В квантовой механике особое значение имеют линейные пространства над полем комплексных чисел—*комплексные векторные пространства*.

Все аффинные свойства действительного пространства, рассмотренные в § 1, справедливы и для комплексного пространства. Незначительные изменения появляются только при введении метрических понятий.

Комплексное пространство U называется *евклидовым* (или *унитарным*), если каждой паре векторов \vec{x}, \vec{y} из U поставлено в соответствие комплексное число (\vec{x}, \vec{y}) , называемое *скалярным произведением*, и выполняются следующие аксиомы:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$ (значок * означает комплексное сопряжение),

$$2) (\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}),$$

$$3) (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}),$$

4) (\vec{x}, \vec{x}) есть действительное положительное число.

Легко видеть, что эта система аксиом отличается от системы аксиом действительного евклидова пространства только первой аксиомой, согласно которой при перестановке векторных сомножителей скалярное произведение меняется на комплексно-сопряженное. Это отличие не ведет к глубоким различиям, но некоторые особенности появляются. Так, в то время как в действительном пространстве $(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$, в комплексном евклидовом пространстве $(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda^* (\vec{x}, \vec{y})$.

Основные метрические понятия для унитарного пространства вводятся совершенно аналогично тому, как они вводятся для действительного евклидова пространства. Длиной вектора называют величину

$$|\vec{x}| = + \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Так как скалярное произведение двух векторов, вообще говоря, комплексно, то нет смысла определять угол между векторами: рассматривают только случай, когда векторы ортогональны.

Векторы \vec{x} и \vec{y} называют ортогональными, если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Очевидно, что и $(\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y})^* = 0$.

Вся теория действительного евклидова пространства легко переносится на унитарное пространство. Если, например, векторы \vec{x} и \vec{y} характеризуются в n -мерном унитарном пространстве комплексными координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) , то скалярное произведение этих векторов равно

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i^n x_i y_i^*.$$

В частности, для скалярного квадрата имеем:

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \sum_i^n x_i^2.$$

Глава II.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейные операторы и операции над ними

Ранее мы уже встречались с понятием линейного оператора (аффинора) в обычном евклидовом пространстве. Сейчас приведем общее определение *аффинного преобразования*, или *линейного оператора*, в произвольном (действительном или комплексном) n -мерном пространстве R .

Линейным оператором \hat{A} в пространстве R называют правило или закон, который каждый вектор \vec{x} из R переводит в вектор \vec{y} из этого же пространства

$$\vec{y} = \hat{A}(\vec{x}) \quad (1)$$

и подчиняется условиям:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2), \\ \hat{A}(\lambda \vec{x}) &= \lambda \hat{A}(\vec{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С геометрической точки зрения линейные преобразования замечательны тем, что сохраняют аффинные свойства пространства. Среди линейных преобразований особую роль играют простейшие операторы: а) *единичный*, или

n -рядную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

которая называется *матрицей линейного оператора* \hat{A} .

Таким образом, в заданном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ каждому линейному оператору \hat{A} соответствует определенная матрица $A = \|a_{ik}\|$. И обратно — каждой матрице A отвечает некоторый линейный оператор \hat{A} , определяемый формулами (3) или (3').

Иными словами, аффинные преобразования можно описывать с помощью матриц и матричное исчисление является наиболее удобным алгебраическим аппаратом для изучения линейных операторов в векторных пространствах конечного числа измерений.

Подчеркнем, что линейный оператор имеет инвариантный смысл — он превращает вектор \vec{x} в определенный вектор \vec{y} , независимо от выбора базиса, однако вид соответствующей матрицы при изменении базиса меняется.

Линейные операторы можно складывать и умножать.

Суммой двух операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, результат действия которого на произвольный вектор \vec{x} равен сумме результатов действия на этот вектор операторов \hat{A} и \hat{B} :

$$\hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна. Любой оператор \hat{A} можно умножить на числа λ из поля P .

Произведением оператора \hat{A} на число λ называется оператор $\hat{D} = \lambda\hat{A}$, действие которого на произвольный вектор \vec{x} равно умноженному на число λ результату действия на этот вектор оператора \hat{A} :

$$\hat{D}\vec{x} = \lambda\hat{A}\vec{x}.$$

Таким образом, множество линейных операторов образует линейное пространство.

Оказывается, однако, что для элементов этого линейного пространства имеет смысл еще операция умножения двух операторов.

Оператор \hat{C} называется произведением оператора \hat{B} на оператор \hat{A} , если для любого вектора \vec{x}

$$\hat{C}\vec{x} = \hat{B}(\hat{A}\vec{x}).$$

Произведение линейных операторов \hat{B} и \hat{A} также является линейным оператором $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$.

Легко проверить, что, вообще говоря, произведение операторов некоммутативно: $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{A}\hat{B}$. Можно сказать, что линейное пространство линейных операторов образует *некоммутативную алгебру*. Тем не менее среди множества операторов могут встретиться такие пары *коммутирующих операторов*, произведение которых перестановочно:

$$\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}.$$

В частности, единичный вектор \hat{I} коммутирует с любым другим оператором. Встречаются еще *антикоммутирующие операторы*, которые при перестановке меняют знак произведения:

$$\hat{F}\hat{G} = -\hat{G}\hat{F}.$$

Очевидно, что операторы можно возводить в произвольную целую степень:

$$\underbrace{\hat{A}^n = \hat{A}\hat{A}\dots\hat{A}}_{n \text{ раз}}$$

Умея находить сумму и произведение линейных операторов, можно найти любой полином от оператора \hat{A} . Так, если

$$P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$$

есть некоторый многочлен m -й степени переменной t , то под полиномом $P(\hat{A})$ понимают линейный оператор

$$P(\hat{A}) = a_0 \hat{A}^m + a_1 \hat{A}^{m-1} + \dots + a_m.$$

Оператором, *обратным* к \hat{A} , называют оператор \hat{A}^{-1} , удовлетворяющий условию $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$. Не для всякого оператора существует обратный. Операторы, имеющие соответствующие обратные операторы, называются *невырожденными*. Ясно, что для невырожденных операторов имеет смысл возведение в целую отрицательную степень:

$$\hat{A}^{-n} = (\hat{A}^{-1}) = \underbrace{\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A}^{-1} \dots \hat{A}^{-1}}_{n \text{ раз}}$$

Поскольку каждый линейный оператор \hat{A} характеризуется в некотором базисе \vec{e}_i определенной матрицей A , то матрицы также образуют *некоммутативную алгебру*, в которой сумме, произведению и степени операторов соответствуют суммы, произведения и степени их матриц.

Вырожденным операторам, не имеющим обратных операторов, соответствуют *особые матрицы*, определители которых равны нулю.

Если оператор \hat{A} преобразует вектор \vec{x} в вектор \vec{y} , то \vec{y} называется *образом* вектора \vec{x} , а \vec{x} — прообразом вектора \vec{y} . Совокупность T_A всех образов называется *областью значений линейного оператора \hat{A}* . Она образует некоторое подпространство линейного векторного пространства R . Размерность подпространства T_A называют *рангом* оператора \hat{A} и обозначают Z_A .

Для каждого оператора \hat{A} можно, вообще говоря, выделить из всего множества векторов линейного пространства R некоторое подмножество M_A таких векторов \vec{x} , что $\hat{A}\vec{x} = 0$. Подмножество M_A образует в R подпространство, называемое *ядром оператора \hat{A}* , размерность m_A ядра называется *дефектом* оператора \hat{A} .

Можно показать, что сумма размерностей подпространств T_A и M_A равна размерности линейного пространства R , т. е. сумма ранга и дефекта оператора равна n :

$$r_A + m_A = n.$$

Другими словами, каждый линейный оператор \hat{A} разбивает все множество векторов пространства R на два не-

пересекающихся (т. е. не имеющих общих элементов) подмножества:

$$T_A + M_A = R.$$

В частности, если оператор \hat{A} невырожден, то его дефект равен нулю и $M_A = 0$. В этом случае ранг оператора r_A равен размерности n пространства R .

Пусть, например, линейное пространство R представляет собой множество всевозможных радиус-векторов реального трехмерного пространства, а оператор \hat{A} проецирует эти радиус-векторы на плоскость XOY . Ясно, что векторы, коллинеарные оси Z , образуют одномерное подпространство M_A . Проекции же векторов образуют двумерное множество T_A , так что $r_A + m_A = 3$.

Матричное исчисление широко используется в современной теоретической физике. Поэтому перейдем к более подробному изучению соответствующих операторам матриц и действиям над ними.

§ 2. Матричная алгебра

Матрицей порядка $n \times m$ называют математическую величину A , характеризуемую $n \times m$ числами, расположенными в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов:

$$A \equiv \| a_{ik} \| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

В физике обычно встречаются *квадратные матрицы* порядка $n \times n$:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

столбцовые матрицы порядка $n \times 1$:

$$\Psi \equiv \| \psi_i \| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

и строчные матрицы порядка $1 \times n$:

$$\tilde{\Psi} \equiv \|\tilde{\psi}_i\| = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

Матрицы A и B одинакового порядка равны между собой ($A=B$), если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е. $a_{ik}=b_{ik}$.

Суммой матриц A и B (одинакового порядка) называется матрица $C=A+B$, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов слагаемых матрицы:

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

Произведением матрицы A на число λ называют матрицу $D=\lambda A$, элементы которой $d_{ik}=\lambda a_{ik}$.

Произведением матрицы A порядка $n \times m$ на матрицу B порядка $m \times l$ называют матрицу $C=A \cdot B$, у которой элемент c_{ik} равен сумме произведений всех элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B :

$$c_{ik} = \sum_j^m a_{ij} b_{jk}. \quad (2)$$

Заметим, что произведение матриц определено лишь тогда, когда число столбцов у матрицы A равно числу строк у матрицы B .

Матрицу \bar{A} , получаемую из A заменой строк столбцами и наоборот, называют *транспонированной матрицей* $a_{ik}=a_{ki}$.

Если $\bar{A}=A$, то матрица A называется *симметричной* ($a_{ik}=a_{ki}$). Если же $\bar{A}=-A$, то матрицу A называют *антисимметричной* ($a_{ik}=-a_{ki}$); все ее диагональные элементы равны нулю ($a_{kk}=0$). Отметим, что имеет место тождественное равенство $(\overline{AB}) = \bar{B} \cdot \bar{A}$.

Легко видеть, что матрица \bar{A} , транспонированная по отношению к матрице A порядка $n \times m$, имеет порядок $m \times n$. В частности, строчная матрица $\tilde{\Psi}$ и столбцевая матрица Ψ являются взаимно транспонированными.

Ясно, что квадратную n -рядную матрицу $A \equiv \|a_{ik}\|$ можно умножать на столбцевую матрицу $\Psi \equiv \|\psi_i\|$ порядка $n \times 1$ только справа, а на строчную $\tilde{\Psi} \equiv \|\tilde{\psi}_i\|$ — слева;

при этом в первом случае получается матрица-столбец, а во втором — матрица-строка. Символически это изображают так:

$$\square \times \square = \square,$$

$$\square \times \square = \square.$$

Очевидно, что при умножении матрицы-строки порядка $(1 \times n)$ на матрицу-столбец порядка $(n \times 1)$ получается матрица порядка 1×1 , т. е. попросту число:

$$\tilde{\Psi} \cdot \Psi = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \dots, \tilde{\psi}_n) \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_1 \psi_1 + \tilde{\psi}_2 \psi_2 + \dots + \tilde{\psi}_n \psi_n.$$

При перемножении двух квадратных матриц порядка $n \times n$ получается квадратная матрица того же порядка:

$$\square \times \square = \square.$$

Произведение матриц, как и операторов, вообще говоря, некоммутативно:

$$AB \neq BA.$$

Среди квадратных матриц особую роль играют *диагональные матрицы*, у которых отличны от нуля только элементы с одинаковыми индексами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что соответствующий диагональной матрице оператор \hat{A} «растягивает» векторы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ соответственно в $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ раз:

$$\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i.$$

В частности, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = c$, то такой ска-

лярной матрице

$$A = \begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix}$$

соответствует линейное преобразование подобия \hat{A} , равномерно «растягивающее» в c раз (или «сжимающее» — при $c < 1$) все базисные векторы.

Наконец, единичному и нулевому операторам соответствуют матрицы:

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Важной характеристикой всякой матрицы A является ее определитель $\det A$. Всякая неособенная матрица A (для нее $\det A \neq 0$) имеет обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix},$$

где $d = \det A$, A_{ij} — алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij} . Очевидно, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Легко убедиться, что определитель произведения двух квадратных матриц $C = A \cdot B$ равен произведению определителей сомножителей:

$$\det C = \det A \cdot \det B.$$

Если матрица A содержит комплексные элементы, то вводят понятие *комплексно-сопряженной* по отношению к A матрицы A^* , элементы которой a_{ik}^* отличаются от соответствующих элементов a_{ik} только комплексным сопряжением:

$$a_{ik}^* = (a_{ik})^*.$$

Ясно, что если $A^* = A$, то матрица A является действительной.

Матрица A^+ , получаемая из A путем транспонирования ее и комплексного сопряжения называется *эрмитово-сопряженной* матрицей по отношению к матрице A :

$$a_{ik}^+ = a_{ki}^*.$$

Если $A^+ = A$, то матрица A называется *эрмитовой* или *самосопряженной*. Такие матрицы широко используются в квантовой механике.

Важным понятием матричной алгебры является *ранг матрицы*.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок r отличных от нуля миноров, составленных из элементов A .

Ясно, что в случае квадратных матриц порядка n их ранг может принимать значения от 0 (для нулевой матрицы) до n для неособенных матриц, определитель которых отличен от нуля.

§ 3. Исследование линейных преобразований с помощью матриц. Характеристический многочлен

Выберем в n -мерном линейном пространстве R некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и рассмотрим векторную матрицу-столбец:

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix},$$

компонентами которой являются базисные векторы. Пусть в результате линейного преобразования \hat{A} каждый вектор \vec{e}_i «старого» базиса превратится в соответствующий вектор \vec{e}'_i «нового» базиса: $\hat{A}\vec{e}_i = \vec{e}'_i$. Тогда это преобразование в матричной форме примет следующий вид:

$$A\vec{\Psi} = \vec{\Psi}', \quad (3)$$

где A — матрица линейного оператора \hat{A} , а $\vec{\Psi}'$ — векторная

столбцевая матрица нового базиса:

$$\vec{\Psi}' = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix}.$$

Понятно, что обратное преобразование, превращающее новый базис $\vec{\Psi}'$ в старый $\vec{\Psi}$, записывается аналогично:

$$A^{-1}\vec{\Psi} = \vec{\Psi}'. \quad (3')$$

Будем далее развивать матричную символику с целью изучения линейных преобразований.

Координаты произвольного вектора \vec{x} в n -мерном пространстве можно объединить в единую матрицу-строку:

$$\vec{\Phi} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Поскольку векторы базиса образуют векторную матрицу-столбец $\vec{\Psi}$, то произвольный вектор

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$$

можно рассматривать как произведение строчной матрицы $\vec{\Phi}$ на столбцевую матрицу $\vec{\Psi}$:

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = \vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi}. \quad (4)$$

В ином базисе $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$, связанном с исходным преобразованием \hat{A} , тот же вектор будет определяться матричным равенством:

$$\vec{x} = (x'_1 \dots x'_n) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix} = \vec{\Phi}' \cdot \vec{\Psi}'. \quad (4')$$

Выясним теперь, как связаны координаты x'_i вектора в новом базисе $\vec{\Psi}'$ с координатами x_i того же вектора в старом базисе $\vec{\Psi}$.

Приравняв правые части (4) и (4') и подставив в (4') вместо матрицы $\vec{\Psi}$ ее значение из (3'), получим:

$$\vec{\Phi}' \cdot \vec{\Psi}' = \vec{\Phi} \cdot A^{-1} \cdot \vec{\Psi}'.$$

Отсюда

$$\vec{\Phi}' = \vec{\Phi} \cdot A^{-1}.$$

Транспонируя это матричное равенство, приходим к соотношению:

$$\Phi' = \tilde{A}^{-1} \cdot \Phi,$$

или (в развернутом виде):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = \tilde{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Итак, в то время как базисные векторы \vec{e}_i преобразуются с помощью матрицы A , координаты векторов преобразуются с помощью обратной транспонированной матрицы A^{-1} .

Всякий линейный оператор \hat{A} характеризуется в каждом базисе своей матрицей, поэтому необходимо еще установить аналитическую связь между матрицами, определяющими один и тот же оператор в различных базисах.

Пусть базисы $\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$ и $\vec{\Psi}' = \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}'_n \end{pmatrix}$ связаны между

собой матрицей преобразования C :

$$\vec{\Psi}' = C \vec{\Psi}.$$

Пусть, кроме того, существует некоторый линейный оператор \hat{A} , матрица которого в базисе $\vec{\Psi}$ имеет вид $A = \|a_{ik}\|$, а в базисе $\vec{\Psi}'$ он принимает вид $A' = \|a'_{ik}\|$. Задача сводится к установлению зависимости между A' и A .

Оказывается (доказательство приводить не будем), что

$$A' = C^{-1}AC. \quad (6)$$

Следовательно, каждому линейному оператору в данном линейном пространстве соответствует бесчисленное множество *подобных* матриц A, A', A'', \dots , каждая из которых описывает оператор \hat{A} в своем базисе. Две подобные матрицы связаны друг с другом соотношением $A' = C^{-1}AC$, где неособенная матрица C характеризует линейное преобразование соответствующих базисов. Обратим внимание на то, что определители всех подобных матриц между собой равны. Нетрудно также доказать, что и *следы* подобных матриц одинаковы. (*Следом матрицы* называют сумму всех ее диагональных элементов $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum a_{ii}$.) Иными словами, определитель и след матрицы преобразования являются инвариантами.

Уже при изучении двумерных тензоров мы установили, что обычно существует некоторая преимущественная система координат, в которой матрица компонентов тензора имеет простейший вид.

Перейдем теперь к решению аналогичной задачи в общем случае комплексного линейного пространства n измерений.

Пусть дан оператор \hat{A} , который каждому вектору \vec{x} рассматриваемого пространства ставит в соответствие новый вектор \vec{y} . Если при действии этого оператора на некоторый вектор \vec{x} получается вектор, отличающийся от первоначального численным множителем

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad (7)$$

то ненулевой вектор \vec{x} называется *собственным вектором* оператора \hat{A} , а число λ — *собственным значением*¹.

Каждый линейный оператор может иметь несколько различных собственных векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Понятно, что если \vec{x} — собственный вектор, то и $\alpha\vec{x}$ (где α — любое число) тоже является собственным вектором; но такие два коллинеарных вектора не считаются существенно различными.

¹ Замежим, что в случае действительного векторного пространства собственные числа λ являются действительными.

Чтобы определить собственные векторы оператора \hat{A} , учтем, что при действии \hat{A} на такой вектор \vec{x} должно выполняться равенство (7), т. е.

$$(\hat{A} - \lambda \hat{I})\vec{x} = 0. \quad (7')$$

Поскольку $\vec{x} \neq 0$, то отсюда следует, что матрица $A - \lambda I$ особенная, и ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Это — *характеристическое уравнение* оператора \hat{A} . Его левая часть

$$P(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1\lambda + C_0 \quad (9)$$

называется *характеристическим полиномом*. Его коэффициенты C_{n-1} и C_0 выражаются так:

$$C_{n-1} = \text{Sp } A, \quad C_0 = \det A.$$

Как известно из алгебры, в поле комплексных чисел уравнение n -й степени $P(\lambda) = 0$ имеет n корней, часть из которых могут быть кратными.

Таким образом, любой линейный оператор в n -мерном комплексном пространстве имеет n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Поступая так же, как при нахождении главных направлений плоского тензора (см. гл. I), мы для каждого собственного значения λ_k найдем соответствующий собственный вектор \vec{x}_k . При этом можно доказать, что если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ попарно различны, то соответствующие им собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линейно независимы.

Отсюда следует, что если все n корней характеристического полинома $P(\lambda)$ различны, то оператор в комплексном пространстве имеет n линейно независимых собственных векторов. Такой оператор называют *оператором простой структуры*.

Матрицу оператора простой структуры A всегда можно привести к диагональному виду, для этого следует в качестве базиса n -мерного пространства выбрать его соб-

или канонической (жордановой)¹ форме.) Но соответствующая теория довольно сложна, и мы ограничимся рассмотрением наиболее простых и важных для математической физики классов линейных операторов сначала в комплексном пространстве, а затем — в действительном.

В заключение этого параграфа приведем без доказательства еще два важных свойства матриц:

1. Пусть $P(\lambda)$ есть характеристический полином матрицы A , тогда $P(A) = 0$ (теорема Гамильтона — Кели).

2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A , то собственными значениями некоторого матричного многочлена $P(A)$ являются числа $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)$.

Отсюда вытекает, что след степени матрицы равен сумме степеней собственных значений матрицы-основания:

$$\text{Sp } A^m = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m.$$

§ 4. Линейные преобразования в унитарном пространстве

Пусть в комплексном евклидовом пространстве задан некоторый линейный оператор \hat{A} . Можно доказать, что в этом пространстве всегда существует (и притом только один) сопряженный ему оператор \hat{A}^+ , удовлетворяющий условию

$$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}), \quad (10)$$

где \vec{x} и \vec{y} — произвольные два вектора унитарного пространства. На основании первой аксиомы скалярного произведения в комплексном пространстве можно определение (10) записать в эквивалентном виде:

$$(\vec{y}, A\vec{x}) = (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y})^*. \quad (10')$$

Операция сопряжения, т. е. переход от \hat{A} к \hat{A}^+ , обладает

¹ Канонической называется квадратичная матрица, у которой каждый диагональный блок имеет форму:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{array} \right\|.$$

где размерность подматрицы равна кратности собственного числа λ_k .

Вытекающими из определений (10) или (10') следующими простыми свойствами:

$$\begin{aligned}(\hat{A}^+)^+ &= \hat{A}, \quad (\lambda \hat{A})^+ = \lambda^* \hat{A}^+, \quad (\hat{A}^+)^{-1} = (\hat{A}^{-1})^+, \\(\hat{A} + \hat{B})^+ &= \hat{A}^+ + \hat{B}^+, \quad (\hat{A} \cdot \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \cdot \hat{A}^+.\end{aligned}$$

Рассмотрим матрицы сопряженных операторов в некотором ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Пусть $A = \|a_{ik}\|$ и $A^+ = \|a_{ik}^+\|$. Применяя операторы \hat{A} и \hat{A}^+ к базисным векторам \vec{e}_i , легко убеждаемся, что

$$a_{ik}^+ = a_{ki}^*,$$

т. е. матрицы A и A^+ являются эрмитово-сопряженными: $A^+ = \bar{A}^*$. Операция эрмитового сопряжения в определенной степени напоминает переход от данного числа α к его комплексно-сопряженному α^* .

Среди комплексных чисел те, для которых $\alpha = \alpha^*$, являются действительными. Аналогичное положение имеет место у линейных операторов. Если линейный оператор \hat{S} равен своему сопряженному оператору:

$$\hat{S} = \hat{S}^+, \quad (11)$$

то он называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*). Очевидно, что матрица самосопряженного оператора является эрмитовой, т. е. $a_{ik} = a_{ki}^*$. (В действительном пространстве матрица самосопряженного оператора симметрична.)

Можно доказать следующие утверждения.

1. Любой линейный оператор \hat{A} может быть представлен так:

$$\hat{A} = \hat{S}_1 + i\hat{S}_2,$$

где \hat{S}_1 и \hat{S}_2 — самосопряженные операторы. (Отсюда вытекает, что среди всех линейных операторов самосопряженные операторы играют такую же роль, какую играют действительные числа среди всех комплексных.)

2. Если \hat{S}_1 и \hat{S}_2 — самосопряженные линейные операторы, то их произведение $\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$ будет самосопряженным тогда и только тогда, когда операторы \hat{S}_1 и \hat{S}_2 между собой коммутируют.

3. Если самосопряженные операторы \hat{S}_1 и \hat{S}_2 коммутируют, то все их n собственных векторов совпадают. (Справедлива также обратная теорема.)

Выбрав в качестве базиса единую систему собственных векторов, мы обе самосопряженные матрицы S_1 и S_2 одновременно приведем к диагональному виду.

Поскольку самосопряженные операторы широко используются в квантовой механике, то познакомимся подробнее с их свойствами.

1. Собственные значения самосопряженного оператора действительны.

В самом деле, пусть \vec{x} — собственный вектор, а λ — соответствующее собственное значение эрмитового оператора \hat{S} , т. е. $\hat{S}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Тогда согласно (10) $(\hat{S}\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \hat{S}^+\vec{x})$. Но в силу самосопряженности $\hat{S}^+ = \hat{S}$, поэтому, подставляя вместо $\hat{S}\vec{x}$ равную ему величину $\lambda\vec{x}$, получаем:

$$(\lambda\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, \lambda\vec{x}).$$

Поскольку мы рассматриваем комплексное евклидово пространство, то, вынося λ за скобки, имеем:

$$\lambda(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda^*(\vec{x}, \vec{x}),$$

откуда

$$\lambda = \lambda^*,$$

что и доказывает действительность числа λ .

2. Если \hat{S} — самосопряженный оператор в n -мерном унитарном пространстве, то все его n собственных векторов взаимно ортогональны.

Если выбрать в качестве базиса указанные взаимно ортогональные собственные векторы, то матрица оператора примет диагональный вид.

Итак, в комплексном евклидовом пространстве векторы самосопряженных операторов, являющихся обобщением понятия симметричных преобразований действительного пространства, образуют n -мерную систему ортонормированных векторов.

Аналогичным свойством обладает другой класс комплексных операторов — *унитарные*. Линейный оператор \hat{U}

называется унитарным, если

$$\hat{U} \cdot \hat{U}^* = \hat{I}. \quad (12)$$

Отсюда сразу следует, что $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$.

Чтобы подробнее познакомиться с унитарными операторами, рассмотрим скалярное произведение $(\hat{U}\vec{x}, \hat{U}\vec{y})$. Применяя к нему условие сопряженности (10), приходим к равенству

$$(\hat{U}\vec{x}, \hat{U}\vec{y}) = (\vec{x}, \hat{U}^+ \cdot \hat{U}\vec{y}).$$

Принимая во внимание условие унитарности (12), получаем окончательно:

$$(\hat{U}\vec{x}, \hat{U}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Всякий унитарный оператор \hat{U} в унитарном пространстве сохраняет скалярное произведение для любых двух векторов этого пространства.

В частности, при $\vec{x} = \vec{y}$

$$(\hat{U}\vec{x}, \hat{U}\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}).$$

Унитарный оператор не меняет длин векторов.

Выясним условия, которым удовлетворяют унитарные матрицы U , соответствующие унитарным операторам.

Пусть в некотором ортонормированном базисе в n -мерном унитарном пространстве оператору \hat{U} соответствует матрица

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда сопряженному оператору \hat{U}^+ будет соответствовать матрица

$$U^* = \begin{vmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* & \dots & u_{n1}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* & \dots & u_{n2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1n}^* & u_{2n}^* & \dots & u_{nn}^* \end{vmatrix}.$$

Из условия унитарности следует, что

$$U \cdot U^* = I = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в соответствии с правилом умножения матриц

$$\sum_k U_{ik} U_{jk}^* = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (12')$$

Матрица U является унитарной, если сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие комплексно-сопряженные элементы другой строки (столбца) равны 0, а сумма квадратов модулей элементов любой строки (столбца) равна единице.

Условие (12') имеет простой геометрический смысл. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — некоторый ортонормированный базис. Тогда, как несложно убедиться, векторы $\hat{U}\vec{e}_1, \hat{U}\vec{e}_2, \dots, \hat{U}\vec{e}_n$ также образуют ортонормированный базис, так как

$$(\hat{U}\vec{e}_i, \hat{U}\vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Линейный оператор \hat{U} является унитарным, если он переводит ортонормированный базис в другой, также ортонормированный базис.

Матрицы унитарного оператора \hat{U} , как и самосопряженного оператора, можно привести к простейшему диагональному виду:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Здесь собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ по модулю равны 1.

Итак, мы установили, что самосопряженные и унитарные операторы обладают системой взаимно ортого-

нальных собственных векторов. Оказывается, что и самосопряженные, и унитарные операторы являются частными типами более широкого класса нормальных операторов, обладающих указанным свойством.

Оператор N называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным:

$$\hat{N} \cdot \hat{N}^+ = \hat{N}^+ \cdot \hat{N}. \quad (13)$$

Теорема: Для того чтобы у оператора \hat{N} существовал ортогональный базис, необходимо и достаточно, чтобы \hat{N} был нормальным оператором, т. е. удовлетворял условию (13).

Докажем сначала необходимость. Пусть в некотором ортогональном базисе (который без ограничения общности можно считать нормированным) матрица A имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда в этом базисе сопряженная матрица A^* , очевидно, равна:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & & & \\ & \lambda_2^* & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n^* \end{pmatrix},$$

т. е. она также является диагональной. Но диагональные матрицы между собой всегда перестановочны: $AA^* = A^*A$. Следовательно, оператор A нормальный.

Из основного свойства нормальных операторов вытекает, что их матрицы всегда можно привести к диагональному виду.

§ 5. Линейные операторы в действительном евклидовом пространстве

Хотя вещественное евклидово пространство является частным случаем комплексного евклидова (унитарного) пространства, свойства линейных операторов, действующих в этих пространствах, могут существенно отличаться.

Основная теорема алгебры справедлива только в поле комплексных чисел. Поэтому характеристическое уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ может не иметь ни одного корня в поле действительных чисел (все собственные значения у \hat{A} комплексные). В этом случае у оператора \hat{A} не существует ни одного собственного вектора; так, линейный оператор в реальном пространстве, поворачивающий плоскость XOY вокруг оси Z на любой угол α , отличный от 180° (точнее $\alpha \neq k\pi$, где $k=0, 1, 2, \dots$), не имеет ни одного вектора, который бы после поворота остался коллинеарным первоначальному.

Чтобы глубже изучить свойства линейных операторов в евклидовом пространстве, познакомимся с понятием *инвариантного подпространства*.

Пусть \hat{A} — линейный оператор в линейном n -мерном пространстве R (которое может быть как действительным, так и комплексным). Линейное подпространство R_1 называется **и н в а р и а н т н ы м** относительно \hat{A} , если в результате действия оператора \hat{A} на любой вектор \vec{x} из R_1 получается новый вектор $\hat{A}\vec{x}$, также принадлежащий подпространству R_1 .

Ясно, что инвариантное подпространство является обобщением множества векторов, коллинеарных собственному вектору оператора. В частности, совокупность векторов из R , коллинеарных некоторому собственному вектору \vec{x} оператора \hat{A} , образует одномерное инвариантное подпространство.

Приведем еще пример. Если оператор \hat{A} совершает поворот реального трехмерного пространства вокруг оси Z , то инвариантным подпространством здесь являются: а) множество векторов, расположенных вдоль оси Z (одномерное подпространство) и б) совокупность векторов в плоскости XOY (двумерное подпространство).

Теперь мы можем сформулировать важную теорему о линейных операторах в действительных линейных пространствах.

У всякого линейного оператора \hat{A} в вещественном n -мерном пространстве R существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Мы не будем строго доказывать эту теорему, а приведем

качественные рассуждения, подтверждающие ее справедливость. Выберем в R некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$; пусть оператору \hat{A} в этом базисе соответствует матрица $A = \|a_{ik}\|$. Составим соответствующее характеристическое уравнение n -ой степени:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Обозначим через λ_0 корень этого уравнения. Могут представиться два случая.

1. Корень λ_0 — число действительное. Тогда, как легко видеть, существует n действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , которые можно рассматривать как координаты в выбранном базисе такого вещественного вектора \vec{x} , что

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda_0\vec{x}.$$

Но в этом случае множество векторов $\alpha\vec{x}$ образует одномерное инвариантное подпространство, аналогично тому, что имеет место в случае комплексного пространства.

2. Корень λ_0 — число комплексное ($\lambda_0 = \alpha + \beta i$). Этот случай не имеет аналогии в комплексных пространствах.

Координаты x_k собственного вектора, соответствующего такому λ_0 , являются, очевидно, комплексными. Обозначим их в виде $\xi_1 + \eta_1 i, \xi_2 + \eta_2 i, \dots, \xi_n + \eta_n i$. Тогда можно записать следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} (\xi_k + \eta_k i) = (\alpha + \beta i) (\xi_j + \eta_j i),$$

где $j = 1, 2, \dots, n$. Приравнявая соответственно действительные и мнимые части, получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k &= \alpha \xi_j - \beta \eta_j, \\ \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k &= \alpha \eta_j + \beta \xi_j. \end{aligned}$$

Рассматривая теперь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и соответственно $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ как координаты действительных векторов \vec{x} и \vec{y} , можно предыдущие равенства записать в операторной форме:

$$\begin{aligned} \hat{A}\vec{x} &= \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \\ \hat{A}\vec{y} &= \alpha\vec{y} + \beta\vec{x}. \end{aligned} \tag{14}$$

А это означает, что двумерное подпространство, порожденное векторами \vec{x} и \vec{y} , инвариантно относительно оператора \hat{A} .

Перейдем теперь к рассмотрению самосопряженных операторов в евклидовом (вещественном) пространстве. Поскольку элементы матрицы в этом пространстве действительные числа, то условие самосопряженности операторов ($a_{ik} = a_{ki}^*$) сводится к равенству $a_{ik} = a_{ki}$.

Чтобы линейный оператор был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была симметрична.

Очевидно, что и в действительном евклидовом пространстве справедливо рассмотренное в § 4 свойство самосопряженных операторов.

Существует ортонормированный («собственный») базис, в котором симметричная матрица S , соответствующая самосопряженному оператору \hat{S} , принимает диагональный вид.

Познакомимся теперь с понятием *ортogonalного оператора*.

Линейный оператор \hat{A} действительного евклидова n -мерного пространства R называется ортogonalным, если он сохраняет неизменным скалярное произведение любых двух векторов из R :

$$(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

В частности, полагая $\vec{x} = \vec{y}$, получаем:

$$(\hat{A}\vec{x})^2 = (\vec{x})^2.$$

Это значит, что ортogonalный оператор сохраняет длины векторов. Ясно, что ортogonalный оператор в действительном евклидовом пространстве играет такую же роль, что и унитарный оператор в комплексном евклидовом пространстве.

Так как в евклидовом пространстве угол между векторами определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

и при ортogonalном преобразовании и числитель и знаменатель не меняются, то ортogonalный оператор сохраняет углы между векторами.

Как и унитарный оператор в комплексном евклидовом пространстве, ортогональный оператор в действительном евклидовом пространстве переводит ортонормированный базис в другой ортонормированный базис.

Поскольку в действительном пространстве $U^+ = \bar{U}$, то условие унитарности матрицы $UU^+ = I$ сводится к условию ортогональности

$$A\bar{A} = I, \quad (15)$$

или (что совершенно эквивалентно)

$$A^{-1} = \bar{A}. \quad (15')$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-суммножителей, то из (15) следует, что у ортогональной матрицы

$$(\det A)^2 = 1, \text{ или } \det A = \pm 1.$$

Ортогональные преобразования \hat{A} , определитель которых равен $+1$, называются *собственными*, а те, у которых $\det A = -1$ — *несобственными*.

Рассмотрим сначала ортогональное преобразование \hat{A} в одномерном пространстве, порожденном некоторым вектором \vec{e} . Ясно, что \vec{e} является собственным вектором оператора \hat{A} . Поэтому $\hat{A}\vec{e} = \lambda\vec{e}$.

С другой стороны, по условию ортогональности

$$(\hat{A}\vec{e}, \hat{A}\vec{e}) = (\vec{e}, \vec{e}).$$

Следовательно,

$$\lambda^2 (\vec{e}, \vec{e}) = (\vec{e}, \vec{e}),$$

откуда $\lambda = \pm 1$.

Итак, в одномерном пространстве существует лишь два ортогональных оператора: собственный $\hat{A}_1 \vec{x} = \vec{x}$ и несобственный $\hat{A}_2 \vec{x} = -\vec{x}$.

Перейдем теперь к рассмотрению двумерного пространства с ортонормированным базисом \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Пусть ортогональный оператор \hat{A} в этом базисе имеет матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

причем $\det A = ad - bc = 1$.

Поскольку \hat{A} — ортогональный оператор, то обратная матрица A^{-1} равна транспонированной \hat{A} :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Определяя же обратную матрицу A^{-1} непосредственно и учитывая, что $\det A = 1$, получаем:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}.$$

Приравнивая правые части этих равенств, приходим к выводу, что $a = d$ и $b = -c$. Поэтому матрица A имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix},$$

и $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Заметим, что собственные числа здесь мнимы и матрицу нельзя привести к диагональному виду.

Вводя обозначения $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$, убеждаемся в том, что всякий собственный ортогональный оператор \hat{A} в двумерном пространстве имеет в ортогональном базисе матрицу вида:

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Геометрически это соответствует повороту плоскости как целое на угол φ .

Если же ортогональный оператор \hat{A} несобственный, т. е. $\det A = ad - bc = -1$, то характеристическое уравнение $\lambda^2 - (a+d)\lambda - 1 = 0$ имеет действительные корни $\lambda = \pm 1$ и, следовательно, два взаимно перпендикулярных собственных вектора \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда матрица A может иметь только один из двух видов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Геометрически это означает зеркальное отражение относительно одной из осей координат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|---|
| Предмет математической физики | 3 |
|---|---|

Часть первая.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

| | |
|--|----|
| <i>Глава I.</i> Скалярные, векторные и тензорные поля на плоскости | 6 |
| § 1. Скалярное поле и векторное поле его градиента | — |
| § 2. Аналитическое определение понятия вектора | 13 |
| § 3. Векторные поля и их дифференциальная характеристика | 16 |
| § 4. Тензоры и их свойства | 18 |
| § 5. Тензорная алгебра | 23 |
| § 6. Тензор как аффинор | 26 |
| § 7. Главные направления тензора | 28 |
| § 8. Тензорный эллипс | 32 |
| <i>Глава II.</i> Ортогональные векторы и тензоры в трехмерном и многомерном евклидовых пространствах. Векторный анализ | 34 |
| § 1. Векторы и тензоры в n -мерном пространстве | — |
| § 2. Тензор деформации | 37 |
| § 3. Тензор напряжений | 41 |
| § 4. Тензор инерции | 43 |
| § 5. Скалярный и векторный инварианты тензора-производной векторного поля | 49 |
| § 6. Физический и аналитический смысл дивергенции векторного поля | 51 |
| § 7. Физический и аналитический смысл ротора векторного поля | 56 |
| § 8. Оператор Гамильтона («Набла»-исчисление) | 61 |
| § 9. Формула Грина | 65 |
| § 10. Классификация векторных полей | 66 |
| § 11. Физические векторные и тензорные поля в четырехмерном пространстве-времени | 69 |
| <i>Глава III.</i> Теория поля в криволинейных системах координат | 74 |
| § 1. Криволинейные координаты | — |
| § 2. Коэффициенты Лямэ | 77 |
| § 3. Основные дифференциальные операции в криволинейных координатах | 81 |

Часть вторая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

| | |
|--|-----|
| <i>Глава I.</i> Вывод основных дифференциальных уравнений математической физики. Общий интеграл этих уравнений | 87 |
| § 1. Поперечные колебания струны. Волновое уравнение | — |
| § 2. Уравнение теплопроводности | 90 |
| § 3. Основное уравнение электростатики | 95 |
| § 4. Уравнение переменного электромагнитного поля в потенциалах | 96 |
| § 5. Уравнение Шредингера | 99 |
| § 6. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных | 100 |
| § 7. Колебания бесконечной струны | 105 |
| <i>Глава II.</i> Нахождение частных решений уравнений в частных производных путем разделения переменных | 109 |
| § 1. Охлаждение стержня конечной длины | 110 |

| | |
|---|------------|
| § 2. Колебания струны конечной длины | 114 |
| § 3. Решение задачи Дирихле для круга | 118 |
| § 4. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе | 121 |
| § 5. Охлаждение тонкой пластины | 124 |
| § 6. Охлаждение бесконечного стержня | 127 |
| <i>Глава III. Интегрирование уравнений математической физики в цилиндрической системе координат</i> | <i>131</i> |
| § 1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя | — |
| § 2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя | 133 |
| § 3. Решение задачи Дирихле для цилиндра | 136 |
| <i>Глава IV. Интегрирование уравнений математической физики в сферической системе координат</i> | <i>139</i> |
| § 1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Уравнение Лежандра | — |
| § 2. Решение уравнения Лежандра | 141 |
| § 3. Полиномы Лежандра | 143 |
| § 4. Сферические и шаровые функции | 146 |
| § 5. Стационарное распределение температуры в шаре | 147 |
| <i>Глава V. Метод функций Грина</i> | <i>148</i> |
| § 1. Метод Грина решения краевых задач | 149 |
| § 2. Функция Грина для шара | 152 |
| § 3. Функция Грина для полупространства | 155 |

**Часть третья.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

| | |
|--|------------|
| <i>Глава I. Элементы линейной алгебры</i> | <i>157</i> |
| § 1. Линейное векторное пространство | 159 |
| § 2. Размерность линейного пространства | 164 |
| § 3. Евклидово пространство | 167 |
| § 4. Комплексное линейное пространство | 171 |
| <i>Глава II. Аффинные преобразования</i> | <i>172</i> |
| § 1. Линейные операторы и операции над ними | — |
| § 2. Матричная алгебра | 177 |
| § 3. Исследование линейных преобразований с помощью матриц. Характеристический многочлен | 181 |
| § 4. Линейные преобразования в унитарном пространстве | 187 |
| § 5. Линейные операторы в действительном евклидовом пространстве | 192 |