МФТИ

В.С. ВЛАДИМИРОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В.С. ВЛАДИМИРОВ

Академия наук СССР

СОВРЕМЕННЫЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ

*

*Серия выпускается
под общим руководством*

РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА
МОСКОВСКОГО
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

В. С. ВЛАДИМИРОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1979

22.161.1
В 57
УДК 517.5

Обобщенные функции в математической физике. Владимиров В. С. Изд. 2-е, испр. и дополн. Серия: «Современные физико-технические проблемы», Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1979, 320 стр.

Кроме общей теории обобщенных функций, включающей преобразования Фурье и Лапласа, а также другие интегральные преобразования, в книге содержится ряд приложений к дифференциальным уравнениям в частных производных, голоморфным функциям многих комплексных переменных и математической физике, вплоть до некоторых последних достижений в этих областях.

Книга представляет собой расширенное изложение курсов лекций, читанных автором в течение ряда лет студентам, аспирантам и сотрудникам Московского физико-технического института и Математического интитута им. В. А. Стеклова, и предназначена для лиц, интересующихся приложениями обобщенных функций.

Илл. 43. Библ. 92 назв.

В $\frac{20203-037}{053(02)-79}$ 33-79. 1702050000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 8
ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 11

Глава I

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. Основные и обобщенные функции 15

1. Введение (15). 2. Пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ (17). 3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (21). 4. Полнота пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (23). 5. Носитель обобщенной функции (25). 6. Регулярные обобщенные функции (27). 7. Меры (29). 8. Формулы Сохоцкого (33). 9. Замены переменных в обобщенных функциях (35). 10. Умножение обобщенных функций (37).

§ 2. Дифференцирование обобщенных функций 38

1. Производные обобщенных функций (38). 2. Первообразная обобщенной функции (40). 3. Примеры (42). 4. Локальная структура обобщеннных функций (48). 5. Обобщенные функции с компактным носителем (50). 6. Обобщенные функции с точечным носителем (51).

§ 3. Прямое произведение обобщенных функций 53

1. Определение прямого произведения (53). 2. Свойства прямого произведения (56). 3. Некоторые применения (59). 4. Обобщенные функции, гладкие по части переменных (61).

§ 4. Свертка обобщенных функций 64

1. Определение свертки (64). 2. Свойства свертки (67). 3. Существование свертки (70). 4. Конусы в $\mathbb{R}^n$ (73). 5. Сверточные алгебры $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (78). 6. Регуляризация обобщенных функций (79). 7. Свертка-линейный непрерывный трансляционно-инвариантный оператор (81). 8. Некоторые применения (83).

§ 5. Обобщенные функции медленного роста 90

1. Пространство основных функций $\mathcal{S}$ (быстро убывающих) (90). 2. Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'$ (медленного роста) (93). 3. Примеры обобщенных функций медленного роста и простейшие операции в $\mathcal{S}'$ (94). 4. Структура обобщенных функций медленного роста (96). 5. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста (98). 6. Свертка обобщенных функций медленного роста (99).

Глава II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 6. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста . . . 103
1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathscr{S}$ (103). 2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$ (104). 3. Свойства преобразования Фурье (106). 4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем (107). 5. Преобразование Фурье свертки (108). 6. Примеры (109).

§ 7. Ряды Фурье периодических обобщенных функций 120
1. Определение и простейшие свойства периодических обобщенных функций (120). 2. Ряды Фурье периодических обобщенных функций (123). 3. Сверточная алгебра $\mathscr{D}'_T$ (124). 4. Примеры (126).

§ 8. Положительно определенные обобщенные функции 128
1. Определение и простейшие свойства положительно определенных обобщенных функций (128). 2. Теорема Бохнера — Шварца (130). 3. Примеры (132).

§ 9. Преобразование Лапласа обобщенных функций медленного роста . . 133
1. Определение преобразования Лапласа (133). 2. Свойства преобразования Лапласа (136). 3. Примеры (137).

§ 10. Ядро Коши и преобразования Коши — Бохнера и Гильберта 140
1. Пространство $\mathscr{H}_s$ (140). 2. Ядро Коши $\mathscr{K}_C$ (z) (145). 3. Преобразование Коши — Бохнера (152). 4. Преобразование Гильберта (153). 5. Голоморфные функции класса $H_a^{(s)}$ (C) (154). 6. Обобщенное представление Коши — Бохнера (158).

§ 11. Ядро Пуассона и преобразование Пуассона 160
1. Определение и свойства ядра Пуассона (160). 2. Преобразование и представление Пуассона (162). 3. Граничные значения интеграла Пуассона (165).

§ 12. Алгебры голоморфных функций 168
1. Определение алгебр H_+ (C) и H (C) (168). 2. Изоморфизм алгебр $\mathscr{S}'(\overset{*}{C}+) \sim H_+(C)$ и $\mathscr{S}'(\overset{*}{C}) \sim H(C)$ (168). 3. Теорема Пейли — Винера — Шварца и ее обобщения (174). 4. Пространство H_a (C) — проективный предел пространств $H_{a'}$ (C') (175). 5. Представление Шварца (177). 6. Одно обобщение теоремы Фрагмена — Линделёфа (179).

§ 13. Уравнения в сверточных алгебрах 180
1. Делители единицы в алгебрах H_+ (C) и H (C) (180). 2. О делении на полином в алгебре H (C) (181). 3. Оценки для голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью в T^C (183). 4. Делители единицы в алгебре W (C) (186). 5. Пример (187).

Глава III

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 14. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами . . . 190
1. Фундаментальные решения из $\mathscr{D}'$ (190). 2. Фундаментальные решения медленного роста (194). 3. Метод спуска (195). 4. Примеры (199). 5. Сравнение дифференциальных операторов (207)

6. Эллиптические и гипоэллиптические операторы (210). 7. Гиперболические операторы (212).

§ 15. Задача Коши 213
1. Обобщенная задача Коши для гиперболического уравнения (213). 2. Волновой потенциал (216). 3. Поверхностные волновые потенциалы (220). 4. Задача Коши для волнового уравнения (223). 5. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности (225). 6. Тепловой потенциал (225). 7. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (229).

§ 16. Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в T^C . . . 230
1. Предварительные замечания (230). 2. Оценки роста функций класса $\mathscr{P}_+(T^C)$ (233). 3. Оценки роста функций класса $H_+(T^C)$ (241). 4. Гладкость спектральной функции (242). 5. Индикатриса роста функций класса $\mathscr{P}_+(T^C)$ (244). 6. Интегральное представление функций класса $H_+(T^C)$ (248).

§ 17. Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в T^n . . . 252
1. Леммы (252). 2. Функции классов H_+ (T^1) и $\mathscr{P}_+$ (T^1) (257). 3. Функции класса $\mathscr{P}_+$ (T^n) (262). 4. Функции класса H_+ (T^n) (267).

§ 18. Положительно вещественные матрицы-функции в T^C 271
1. Положительно вещественные функции в T^C (272). 2. Положительно вещественные матрицы-функции в T^C (274).

§ 19. Линейные пассивные системы 277
1. Введение (277). 2. Следствия из условия пассивности (280). 3. Необходимые и достаточные условия пассивности (283). 4. Многомерные дисперсионные соотношения (288). 5. Фундаментальное решение и задача Коши (292). 6. Какие дифференциальные и разностные операторы являются пассивными операторами? (295). 7. Примеры (298).

§ 20. Абстрактный оператор рассеяния 302
1. Определение и свойства абстрактной матрицы рассеяния (302). 2. Описание абстрактных матриц рассеяния (305). 3. Связь между пассивными операторами и операторами рассеяния (306).

ЛИТЕРАТУРА 310

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 315

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прогресс физики требует для ее теоретической формулировки все более и более «высокой» математики. По этому поводу приведем одну фразу, высказанную английским физико-теоретиком П. Дираком в 1930 г. в известной статье (П. Дирак [1]), в которой он теоретически предсказывал существование античастиц:

«Кажется вероятным, что этот процесс непрерывного абстрагирования будет продолжаться и в будущем и что успех физики должен в большей степени опираться на непрерывные модификации и обобщения аксиом на математической основе, чем на логическое развитие какой-либо одной ветви математики в фиксированных рамках».

Последующее развитие теоретической физики, особенно квантовой теории поля, полностью подтвердило это высказывание Дирака. В связи с этим уместно вспомнить слова Н. Н. Боголюбова, сказанные им в 1963 г.: «Основные понятия и методы квантовой теории поля становятся все более математическими».

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет математической физики.

Со времен Ньютона поиски и изучение математических моделей физических явлений — задач математической физики — требовали привлечения широкого арсенала математических средств и тем самым стимулировали развитие ряда разделов математики. *Традиционная* (*классическая*) *математическая физика* имеет дело с задачами классической физики: механики, гидродинамики, акустики, диффузии, теплопередачи, теории потенциала, электродинамики, оптики и т. д., сводящимися к краевым задачам для дифференциальных уравнений (уравнениям математической физики). Основным математическим средством исследования таких задач служит теория дифференциальных уравнений, а также родственные области математики: интегральные уравнения, вариационное исчисление, приближенные и численные методы. С появлением квантовой физики множество используемых математических средств значительно расширилось: наряду с традиционными областями математики стали широко применять теорию операторов, теорию обобщенных функций,

теорию функций комплексных переменных, топологические и алгебраические методы, вычислительную математику и технику. В этом интенсивном взаимодействии теоретической физики и математики постепенно оформляется новая область — *современная математическая физика.*

Таким образом, в современной математической физике широко используются достижения современной математики. Одним из таких достижений является теория обобщенных функций. Эта монография и посвящена краткому изложению основ этой теории и некоторым применениям ее в математической физике.

В конце 20-х годов П. Дирак в своих квантовомеханических исследованиях (см. П. Дирак [2, 3]) впервые ввел в науку так называемую δ-функцию, обладающую следующими свойствами:

$$\delta(x)=0, \quad x\neq 0; \quad \int \delta(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0), \quad \varphi\in C. \qquad (*)$$

Вскоре математиками было указано, что с математической точки зрения это определение бессмысленно. Конечно, и самому Дираку было ясно, что δ-функция не есть функция в классическом смысле понимаемая, и, что важно, она действует как оператор (точнее, как функционал), сопоставляющий по формуле (*) каждой непрерывной функции φ число $\varphi(0)$ — ее значение в точке 0. Потребовались ряд лет и усилия многих математиков *), чтобы найти математически корректное определение δ-функции, ее производных и вообще обобщенной функции.

Основы математической теории обобщенных функций были заложены советским математиком С. Л. Соболевым в 1936 г. в работе [1], где он успешно применил обобщенные функции к исследованию задачи Коши для гиперболических уравнений. В послевоенные годы французский математик Л. Шварц, опираясь на предварительно созданную теорию линейных локально-выпуклых топологических пространств **), предпринял систематическое построение теории обобщенных функций и указал ряд важных приложений этой теории. Он изложил ее в своей известной монографии «Theorie des distributions» [1] (1950—1951 гг.). В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. Бурное развитие теории обобщенных функций стимулировалось главным образом потребностями математической и теоретической физики, в особенности теории дифференциальных уравнений и квантовой физики. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед, имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход физика,

*) См. пионерские работы Ж. Адамара [1], С. Бохнера [1] и М. Рисса [1].
**) См. Ж. Дьедонне, Л. Шварц [1].

математика и инженера *). Обобщенные функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности классического математического анализа, например: любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой (в обобщенном смысле), сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз, преобразование Фурье обобщенной функции всегда существует и т. д. Поэтому использование техники обобщенных функций существенно расширяет круг рассматриваемых задач и к тому же приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции.

Эта монография является расширенным изложением курсов лекций, читанных мною в течение ряда лет студентам, аспирантам и сотрудникам Московского физико-технического института и Математического института им. В. А. Стеклова.

Пользуясь случаем, благодарю всех лиц, чья конструктивная критика способствовала улучшению изложения. В особенности я благодарен моим ученикам Ю. Н. Дрожжинову, В. В. Жаринову и Р. Х. Галееву.

Первое издание этой книги быстро разошлось. При подготовке 2-го издания был учтен ряд замечаний, исправлены неточности и опечатки; часть материала была переработана и дополнена. Особенно большой переработке подвергся раздел, относящийся к теории голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью в трубчатых областях над острыми конусами (§§ 16—18). В этот раздел включены новые результаты.

Январь 1978 г.

В. С. Владимиров

---

*) См. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Широков [1], Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев и М. К. Поливанов [1], Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и И. Т. Тодоров [1], С. Л. Соболев [1, 2], В. С. Владимиров [1, 2], И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов [1], И. М Гельфанд и Н. Я. Виленкин [1], Р. Стритер, А. Вайтман [1], Р. Йост [1], Г. Бремерман [1], Л. Шварц [1, 2], Л. Гординг [1], Л. Хёрмандер [1], Б. Мальгранж [1], Ж. Трев [1], Ж. Гарсу [1], А. Земанян [1], Е. Бельтрами и М. Волерс [1], Ж. Арсак [1], Л. Эренпрайс [1], В. П. Паламодов [1], М. Рид и Б. Саймон [1] и др. В последние годы все большие применения находят более общие, чем обобщенные функции, объекты — так называемые гиперфункции в смысле М. Сато [1].

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 0.1. Точки n-мерного вещественного пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаем $x, y, \xi, \ldots$; $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точки n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ обозначаем $z, \zeta, \ldots$; $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = x + iy$; $x = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z, $\bar z = x - iy$ — комплексно сопряженная с z. Обычным способом введем в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ скалярные произведения

$$(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \quad \langle z, \zeta\rangle = z_1\bar\zeta_1 + \ldots + z_n\bar\zeta_n$$

и нормы (длины)

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2},$$

$$|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle} = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}.$$

§ 0.2. Открытые множества в $\mathbb{R}^n$ обозначаем $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, ...; $\partial\mathcal{O}$ — граница $\mathcal{O}$, т. е. $\partial\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$. Будем говорить, что множество A *компактно в открытом множестве* $\mathcal{O}$ (или *строго содержится в* $\mathcal{O}$), если A ограничено и его замыкание $\bar A$ содержится в $\mathcal{O}$; при этом пишем $A \Subset \mathcal{O}$.

Обозначаем: $U(x_0; R)$ — открытый шар радиуса R с центром в точке x_0; $S(x_0; R) = \partial U(x_0; R)$ — сфера радиуса R с центром в точке x_0; $U_R = U(0; R)$, $S_R = S(0; R)$.

Обозначим $\Delta(A, B)$ расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\Delta(A, B) = \inf_{x\in A,\ y\in B} |x - y|.$$

Обозначим через A^ε *ε-окрестность* множества A, $A^\varepsilon = A + U_\varepsilon$ (рис. 1, *а*). Если $\mathcal{O}$ — открытое множество, то через $\mathcal{O}_\varepsilon$ обозначаем совокупность тех точек $\mathcal{O}$, которые лежат от $\partial\mathcal{O}$ на расстоянии, большем ε (рис. 1, *б*):

$$\mathcal{O}_\varepsilon = [x\colon\ x \in \mathcal{O},\ \Delta(x, \partial\mathcal{O}) > \varepsilon].$$

Обозначим через $\operatorname{int} A$ множество внутренних точек множества A.

Характеристической функцией множества A называется функция $\theta_A(x)$, равная 1 при $x \in A$ и равная 0 при $x \overline{\in} A$. Характеристическая функция $\theta_{[0,\infty)}(x)$ полуоси $x \geqslant 0$ называется

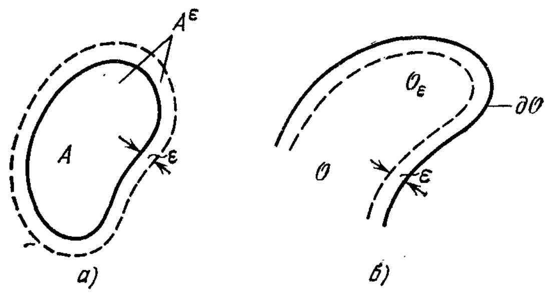

Рис. 1.

функцией Хевисайда (единичной ступенькой) и обозначается $\theta(x)$ (рис. 2):

$$\theta(x) = 1, \ x \geqslant 0, \ \theta(x) = 0, \ x < 0.$$

Обозначаем $\theta_n(x) = \theta(x_1) \ldots \theta(x_n)$.

Множество A называется *выпуклым*, если для любых точек x' и x'' из A соединяющий их отрезок $tx' + (1-t)x''$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, целиком содержится в A.

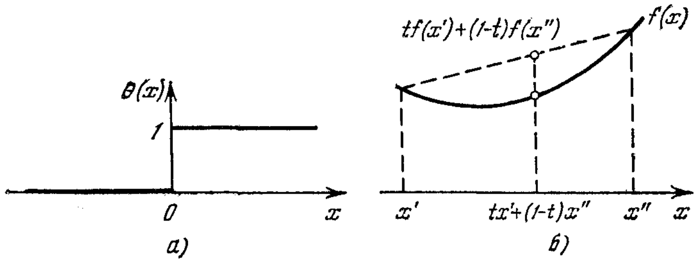

Рис. 2.

Обозначаем через $\mathrm{ch}\, A$ выпуклую оболочку множества A.

Вещественная функция $f(x) < +\infty$ называется *выпуклой* на множестве A, если для любых точек x' и x'' из A таких, что соединяющий их отрезок $tx' + (1-t)x''$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, целиком содержится в A, справедливо неравенство (рис. 2, *б*)

$$f(tx' + (1-t)x'') \leqslant tf(x') + (1-t)f(x'').$$

Функция $f(x)$ называется *вогнутой*, если функция $-f(x)$ выпуклая.

§ 0.3. Интеграл Лебега функции f по открытому множеству $\mathcal{O}$ обозначаем

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\,dx, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Совокупность всех (комплекснозначных, измеримых) функций f, заданных на $\mathcal{O}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p(\mathcal{O})} = \begin{cases} \left[\int_{\mathcal{O}} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathcal{O}} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

обозначим через $\mathscr{L}^q(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; обозначим $\|\ \ \| = \|\ \ \|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)}$, $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) = \mathscr{L}^p$.

Если $f \in \mathscr{L}^p(\mathcal{O}')$ для любого $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$, то f называется *p-локально суммируемой в* $\mathcal{O}$ (при $p = 1$ — *локально суммируемой в* $\mathcal{O}$). Совокупность p-локально суммируемых в $\mathcal{O}$ функций обозначим $\mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$, $\mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}}$.

Измеримая функция называется *финитной* в $\mathcal{O}$, если она обращается в нуль почти везде вне некоторого $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$. Совокупность всех финитных в $\mathcal{O}$ функций из $\mathscr{L}^p(\mathcal{O})$ обозначим через $\mathscr{L}^p_0(\mathcal{O})$.

§ 0.4. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т. е. его компоненты α_j — целые неотрицательные числа. Обозначим

$$\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2} \ldots \binom{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Пусть $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и тогда

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Иногда $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ будет обозначать также мультииндекс с компонентами любого знака: $\alpha_j \gtreqless 0$.

§ 0.5. Обозначим через $C^k(\mathcal{O})$ совокупность всех функций $f(x)$, непрерывных в $\mathcal{O}$ вместе со всеми производными $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant k$; $C^\infty(\mathcal{O})$ — совокупность всех бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций. Совокупность всех функций $f(x)$ из $C^k(\mathcal{O})$ для которых все производные $D^\alpha f(x)$, $|\alpha| \leqslant k$ допускают непрерывное продолжение на $\bar{\mathcal{O}}$, обозначим через $C^k(\bar{\mathcal{O}})$. Норму в $C^k(\bar{\mathcal{O}})$ при $k<\infty$ введем по формуле

$$\|f\|_{C^k(\bar{\mathcal{O}})}=\sup_{\substack{x\in\bar{\mathcal{O}}\\|\alpha|\leqslant k}}|D^\alpha f(x)|.$$

Обозначим $C(\mathcal{O})=C^0(\mathcal{O})$, $C(\bar{\mathcal{O}})=C^0(\bar{\mathcal{O}})$.

Носителем непрерывной в $\mathcal{O}$ функции $f(x)$ называется замыкание в $\mathcal{O}$ тех точек, где $f(x)\neq 0$; носитель f обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f \Subset \mathcal{O}$, то f финитна в $\mathcal{O}$ (ср. с § 0.3).

Совокупность финитных в $\mathcal{O}$ функций класса $C^k(\mathcal{O})$ обозначаем через $C_0^k(\mathcal{O})$; $C_0(\mathcal{O})=C_0^0(\mathcal{O})$. Наконец, совокупность всех функций класса $C^k(\bar{\mathcal{O}})$, обращающихся в нуль на $\partial\mathcal{O}$ вместе со всеми производными до порядка k включительно, обозначим через $C_0^k(\bar{\mathcal{O}})$; $C_0(\bar{\mathcal{O}})=C_0^0(\bar{\mathcal{O}})$. Обозначаем: $C^k(\mathbb{R}^n)=C^k$; $C_0^k(\mathbb{R}^n)=C_0^k$; $C_0^k(\bar{\mathbb{R}}^n)=\bar{C}_0^k$, $\bar{C}_0=\bar{C}_0^0$ ($\bar{C}_0^k$ — совокупность функций из C^k, обращающихся в нуль на бесконечности вместе со всеми своими производными до порядка k включительно).

§ 0.6. Обозначаем: (a, b) — билинейная форма (линейная по a и b в отдельности); $\langle a, b\rangle$ — полуторалинейная форма (линейная по a и антилинейная по b):

$$\langle\alpha a_1+\beta a_2, \lambda b_1+\mu b_2\rangle=$$
$$=\alpha\bar{\lambda}\langle a_1, b_1\rangle+\alpha\bar{\mu}\langle a_1, b_2\rangle+\beta\bar{\lambda}\langle a_2, b_1\rangle+\beta\bar{\mu}\langle a_2, b_2\rangle;$$

$\sigma_n=\int\limits_{|s|=1} ds=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$; A^T — матрица, транспонированная к матрице A.

Равномерную сходимость последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$ к функции $\varphi(x)$ на множестве A будем обозначать так:

$$\varphi_n(x)\overset{x\in A}{\rightrightarrows}\varphi(x),\qquad n\to\infty;$$

если $A=\mathbb{R}^n$, то вместо $\overset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}$ пишем $\overset{x}{\rightrightarrows}$.

Нумерация параграфов — сквозная. Каждый параграф разбит на пункты, ссылки на которые содержат номер соответствующего параграфа. Формулы занумерованы отдельно в каждом пункте с указанием номера этого пункта. При ссылке на формулу из другого параграфа указывается также номер этого параграфа.

Глава I
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

В этой главе дается изложение теории обобщенных функций, рассчитанное на приложения в теоретической и математической физике.

§ 1. Основные и обобщенные функции

1. Введение. Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, пространственную плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность мгновенной силы, приложенной в точке, и т. д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки и объявить предел последовательности этих средних значений значением рассматриваемой физической величины в данной точке.

Чтобы пояснить сказанное, попытаемся определить плотность, создаваемую материальной точкой массы 1. Считаем, что эта точка есть начало координат. Чтобы определить эту плотность, распределим (или, как говорят, «размажем») единичную массу равномерно внутри шара радиуса ε с центром в 0. В результате получим среднюю плотность $f_\varepsilon(x)$, равную (рис. 3)

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}, & \text{если } |x|<\varepsilon,\\ 0, & \text{если } |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

Но нас интересует плотность при $\varepsilon=+0$. Примем сначала в качестве искомой плотности (мы ее обозначим через $\delta(x)$)

поточечный предел последовательности средних плотностей $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$, т. е. функцию

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

От плотности δ естественно требовать, чтобы интеграл от нее по всему пространству давал бы полную массу вещества, т. е.

$$\int \delta(x)\, dx = 1. \tag{1.2}$$

Но для функции $\delta(x)$, определенной формулой (1.1), $\int \delta(x)\, dx = 0$. Это значит, что эта функция не восстанавливает массу (не удовлетворяет требованию (1.2)) и потому не может быть принята в качестве искомой плотности. Итак, поточечный предел последовательности средних плотностей $f_\varepsilon(x)$ не подходит для наших целей. Каков же выход?

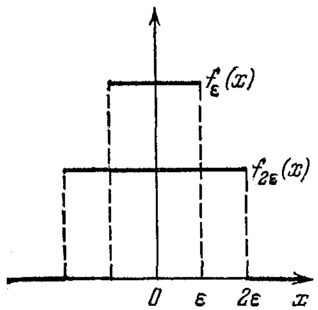

Рис. 3.

Найдем теперь несколько иной предел последовательности средних плотностей $f_\varepsilon(x)$, так называемый *слабый предел*. Нетрудно убедиться, что для любой непрерывной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) обозначает, что слабым пределом последовательности функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$, является функционал $\varphi(0)$ (а не функция!), сопоставляющий каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$ — ее значение в точке $x = 0$. Вот этот-то функционал мы и примем в качестве искомой плотности $\delta(x)$; это и есть известная δ-функция Дирака. Итак, мы можем написать

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\text{сл.}} \delta(x), \quad \varepsilon \to +0,$$

понимая под этим предельное соотношение (1.3). Значение функционала δ на функции φ — число $\varphi(0)$ — будем обозначать так:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \tag{1.4}$$

Это равенство и дает точный смысл формулы (*) (см. предисловие). Роль «интеграла» $\int \delta(x)\varphi(x)\, dx$ здесь играет величина (δ, φ) — значение функционала δ на функции φ.

Проверим теперь, что функционал δ восстанавливает полную массу. Действительно, как только что было сказано, роль

«интеграла» $\int \delta(x)\, dx$ играет величина $(\delta, 1)$, равная, в силу (1.4), значению функции, тождественно равной 1, в точке $x = 0$, т. е. $(\delta, 1) = 1$.

И вообще, если в различных точках x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, сосредоточены массы μ_k, то плотность, соответствующая этому распределению масс, следует считать равной

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \mu_k \delta(x - x_k). \tag{1.5}$$

Выражение (1.5) есть линейный функционал, сопоставляющий каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ число

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} \mu_k \varphi(x_k).$$

Таким образом, плотность, соответствующая точечному распределению масс, не может быть описана в рамках классического понятия функции, и для ее описания следует привлекать объекты более общей математической природы — линейные (непрерывные) функционалы.

2. Пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Уже на примере δ-функции мы видели, что она определяется посредством непрерывных функций как линейный (непрерывный) функционал на этих функциях. Непрерывные функции, как говорят, являются *основными функциями* для δ-функции. Эта точка зрения и берется за основу определения произвольной обобщенной функции как линейного непрерывного функционала на совокупности достаточно «хороших» так называемых основных функций. Ясно, что чем меньше совокупность основных функций, тем больше существует линейных непрерывных функционалов на ней. С другой стороны, запас основных функций должен быть достаточно велик. В этом пункте мы введем важное пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ для любого открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Отнесем к множеству *основных функций* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ все *финитные бесконечно дифференцируемые в $\mathcal{O}$ функции*; $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = C_0^\infty(\mathcal{O})$ (см. § 0.5). *Сходимость* в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ определим следующим образом. Последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ сходится к функции φ (из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$), если существует такое множество $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{O}'$ и при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in \mathcal{O}}{\rightrightarrows} \mathcal{D}^\alpha \varphi(x), \quad k \to \infty.$$

В этом случае будем писать: $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Линейное множество $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Обозначаем: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}((a, b))$.

Очевидно: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то и $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$, и из сходимости в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ следует сходимость в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$.

Примером основной функции, отличной от нулевой, является «шапочка» (рис. 4)

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

В дальнейшем функция ω_ε будет играть роль функции усреднения; поэтому постоянную C_ε будем считать такой, что

$$\int \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1, \quad \text{т. е.} \quad C_\varepsilon \varepsilon^n \int\limits_{|\xi|<1} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}}\, d\xi = 1.$$

Следующая лемма дает другие примеры основных функций.

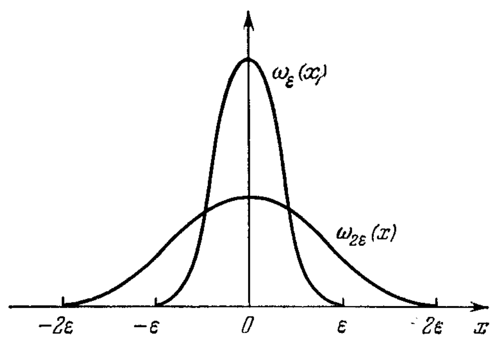

Рис. 4.

Лемма. *Для любого множества A и любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ такая, что*

$$\eta_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in A^\varepsilon; \quad \eta_\varepsilon(x) = 0, \quad x \,\overline{\in}\, A^{3\varepsilon};$$
$$0 \leqslant \eta_\varepsilon(x) \leqslant 1, \quad |\mathcal{D}^\alpha \eta_\varepsilon(x)| \leqslant K_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Доказательство. Пусть $\theta_{A^{2\varepsilon}}$ — характеристическая функция множества $A^{2\varepsilon}$ (см. § 0.2). Тогда функция

$$\eta_\varepsilon(x) = \int \theta_{A^{2\varepsilon}}(y)\, \omega_\varepsilon(x-y)\, dy = \int\limits_{A^{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)\, dy,$$

где ω_ε — «шапочка», обладает требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество. Тогда для любого $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ существует функция $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ такая, что $\eta(x) = 1$, $x \in \mathcal{O}'$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$.*

Вытекает из леммы при $A = \mathcal{O}'$ и $\varepsilon = \frac{1}{4}\Delta(\mathcal{O}', \partial\mathcal{O}) > 0$.

Пусть $\mathcal{O}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — счетная система открытых множеств. Говорят, что эта система образует *локально конечное покрытие* открытого множества $\mathcal{O}$, если $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_k \Subset \mathcal{O}$ и любой компакт $K \Subset \mathcal{O}$ пересекается лишь с конечным числом множеств $\{\mathcal{O}_k\}$.

Теорема I (разложение единицы). *Пусть $\{\mathcal{O}_k\}$ — локально конечное покрытие $\mathcal{O}$. Тогда существует система функций $\{e_k\}$ такая, что*

$$e_k \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_k), \quad 0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1, \quad \sum_{k \geqslant 1} e_k(x) = 1, \quad x \in \mathcal{O}.$$

Замечание. При каждом $x \in \mathcal{O}$ в сумме отлично от 0 лишь конечное число слагаемых $e_k(x)$; система функций $\{e_k\}$ называется *разложением единицы соответствующим данному локально конечному покрытию $\{\mathcal{O}_k\}$ открытого множества $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Докажем, что существует другое локально конечное покрытие $\{\mathcal{O}'_k\}$ множества $\mathcal{O}$ такое, что $\mathcal{O}'_k \Subset \mathcal{O}_k$. Построим $\mathcal{O}'_1$. Обозначим

$$K_1 = \mathcal{O} \setminus \bigcup_{k \geqslant 2} \mathcal{O}_k.$$

Тогда $K_1 \subset \mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}$ и K_1 замкнуто в $\mathcal{O}$. Следовательно, $K_1 \Subset \mathcal{O}_1$, в качестве $\mathcal{O}'_1$ возьмем открытое множество такое, что $K_1 \Subset \mathcal{O}'_1 \Subset \mathcal{O}_1$. При этом множества $\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ образуют локально конечное покрытие $\mathcal{O}$. Аналогичным способом построим и открытое множество $\mathcal{O}'_2 \Subset \mathcal{O}_2$, и т. д. В результате получим требуемое покрытие $\{\mathcal{O}'_k\}$.

По следствию из леммы существуют функции $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_k)$ такие, что

$$\eta_k(x) = 1, \quad x \in \mathcal{O}'_k, \quad 0 \leqslant \eta_k(x) \leqslant 1.$$

Полагая

$$e_k(x) = \frac{\eta_k(x)}{\sum\limits_{k \geqslant 1} \eta_k(x)} \quad \left(\sum_{k \geqslant 1} \eta_k(x) \geqslant 1\right),$$

получим требуемое разложение единицы. Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что существуют различные функции из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Сейчас мы убедимся, что таких функций достаточно много.

Пусть f — локально суммируемая функция в $\mathcal{O}$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$. Свертка f с «шапочкой» ω_ε,

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy = \int \omega_\varepsilon(y)\,f(x-y)\,dy$$

(там, где она определена), называется *средней функцией* f (или *регуляризацией* f).

Пусть $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($f(x)$ считаем равной нулю вне $\mathcal{O}$). Тогда $f_\varepsilon \in C^\infty$ и справедливо неравенство

$$\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})}. \tag{2.1}$$

Действительно, то, что $f_\varepsilon \in C^\infty$, следует из свойств функции f и из определения средней функции. Неравенство (2.1) при $1 \leqslant p < \infty$ вытекает из неравенства Гёльдера

$$\|f_\varepsilon\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} = \int\limits_{\mathcal{O}} |f_\varepsilon(x)|^p\,dx = \int\limits_{\mathcal{O}} \left| \int f(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{O}} \int\limits_{\mathcal{O}} |f(y)|^p \omega_\varepsilon(x-y)\,dy \left[\int \omega_\varepsilon(x-y)\,dy\right]^{p-1} dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{O}} \int\limits_{\mathcal{O}} |f(y)|^p \omega_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx \leqslant \int\limits_{\mathcal{O}} |f(y)|^p\,dy = \|f\|^p_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})}.$$

Аналогично рассматривается и случай $p = \infty$.

Теорема II. *Пусть $f \in \mathcal{L}^1_0(\mathcal{O})$ и $f(x) = 0$ почти везде вне $K \Subset \mathcal{O}$. Тогда при всех $\varepsilon < \Delta(K, \partial\mathcal{O})$ средняя функция $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, причем**)

$$f_\varepsilon \to f, \varepsilon \to +0 \begin{cases} \text{в } C(\overline{\mathcal{O}}), \text{ если } f \in C_0(\mathcal{O}), \\ \text{в } \mathcal{L}^p(\mathcal{O}), \text{ если } f \in \mathcal{L}^p_0(\mathcal{O}),\ 1 \leqslant p < \infty, \\ \text{почти везде в } \mathcal{O}, \text{ если } f \in \mathcal{L}^\infty_0(\mathcal{O}). \end{cases}$$

Доказательство. Если $\varepsilon < \Delta(K, \partial\mathcal{O})$, то $f_\varepsilon(x)$ финитна в $\mathcal{O}$, и так как $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{O})$, то $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Пусть $f \in C_0(\mathcal{O})$. Тогда из оценки

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int [f(y) - f(x)]\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|x-y| \leqslant \varepsilon} |f(x) - f(y)| \int \omega_\varepsilon(x-y)\,dy = \max_{|x-y| \leqslant \varepsilon} |f(x) - f(y)|,$$

$$x \in \mathcal{O},$$

и из равномерной непрерывности функции f следует равномерная сходимость на $\mathcal{O}$ $f_\varepsilon(x)$ к $f(x)$ при $\varepsilon \to +0$.

*) По поводу обозначений см. § 0.3 и § 0.5.

Пусть $f \in \mathcal{L}^p_0(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p < \infty$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Существует функция $g \in C_0(\mathcal{O})$ такая, что

$$\|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} < \frac{\delta}{3}.$$

По доказанному найдется такое ε_0, что

$$\|g - g_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} < \frac{\delta}{3} \text{ при всех } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (2.1), при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ получаем

$$\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} \leqslant \|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} + \|(g - f)_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f - g\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{O})} < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Это и значит, что $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$.

Если же $f \in \mathcal{L}^\infty_0(\mathcal{O})$, то можно указать последовательность функций из $C_0(\mathcal{O})$, сходящуюся к $f(x)$ почти везде в $\mathcal{O}$. Отсюда и из доказанного следует, что $f_\varepsilon(x) \to f(x)$, $\varepsilon \to +0$ почти везде в $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ плотно в $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Следствие 2. *$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ плотно в $C^k_0(\overline{\mathcal{O}})$ (в норме $C^k(\overline{\mathcal{O}})$), если $\mathcal{O}$ ограничено или $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$.*

3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. *Обобщенной функцией, заданной в открытом множестве $\mathcal{O}$, называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.*

Значение функционала (обобщенной функции) f на основной функции φ будем записывать в виде (f, φ). По аналогии с обычными функциями иногда формально вместо f пишут $f(x)$, подразумевая под x аргумент у основных функций, на которые действует функционал f.

Расшифруем определение обобщенной функции.

1) Обобщенная функция f есть *функционал* на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. каждой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ сопоставляется (комплексное) число (f, φ).

2) Обобщенная функция f есть *линейный* функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. если φ и ψ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ и λ и μ — комплексные числа, то

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3) Обобщенная функция f есть *непрерывный* функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. если $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, то

$$(f, \varphi_k) \to (f, \varphi), \quad k \to \infty.$$

Обобщенные функции f и g, заданные в $\mathcal{O}$, называются *равными* в $\mathcal{O}$, если они равны как функционалы на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. если для любой φ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ $(f, \varphi) = (g, \varphi)$. При этом будем писать: $f = g$ в $\mathcal{O}$ или $f(x) = g(x)$, $x \in \mathcal{O}$.

Обозначим через $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ совокупность всех обобщенных функций, заданных в $\mathcal{O}$. Множество $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ — линейное, если линейную комбинацию $\lambda f + \mu g$ обобщенных функций f и g из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ определить как функционал, действующий по формуле*)

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda (f, \varphi) + \mu (g, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}).$$

Пусть $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$. Определим обобщенную функцию $\bar{f}$ из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$, комплексно сопряженную с f, по правилу

$$(\bar{f}, \varphi) = \overline{(f, \bar{\varphi})}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}).$$

Обобщенные функции

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

называются *вещественной* и *мнимой частями* f соответственно, так что

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \quad \bar{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f.$$

Если $\operatorname{Im} f = 0$, то f называется *вещественной* обобщенной функцией.

Пример. δ-функция вещественна.

Определим *сходимость* в $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$. Последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$ $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to \infty$. В этом случае будем писать

$$f_k \to f, \quad k \to \infty \text{ в } \mathscr{D}'(\mathcal{O}).$$

Введенная сходимость называется *слабой сходимостью*. Линейное множество $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций* $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$. Обозначаем $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}'(a, b) = \mathscr{D}'((a, b))$.

Очевидно: если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2) \subset \mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$ и из сходимости в $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2)$ следует сходимость в $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$.

Поэтому для всякой обобщенной функции f из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ существует (единственное) сужение на любое открытое множество $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ такое, что $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O}')$.

Замечание. Линейные функционалы на $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ не обязаны быть непрерывными на $\mathscr{D}(\mathcal{O})$. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathscr{D}(\mathcal{O})$; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Теорема. *Для того чтобы линейный функционал f на $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ принадлежал $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$, т. е. был обобщенной функцией в $\mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ существовали числа $K = K(\mathcal{O}')$ и $m = m(\mathcal{O}')$ такие, что*

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_{C^m(\bar{\mathcal{O}}')}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}'). \tag{3.1}$$

*) Таким образом, форма (f, φ) — билинейная (см. § 0.6).

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$. Если неравенство (3.1) несправедливо, то найдется последовательность φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $\mathscr{D}(\mathcal{O}')$ такая, что

$$|(f, \varphi_k)| \geqslant k \|\varphi_k\|_{C^k(\bar{\mathcal{O}}')}. \tag{3.2}$$

Но последовательность

$$\psi_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{C^k(\bar{\mathcal{O}}')}} \to 0, \qquad k \to \infty \quad \text{в} \quad \mathscr{D}(\mathcal{O}),$$

поскольку $\operatorname{supp} \psi_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$, и при $k \geqslant |\beta|$ имеем

$$|D^\beta \psi_k(x)| = \left| D^\beta \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{C^k(\bar{\mathcal{O}}')}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому $(f, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$. С другой стороны, в силу (3.2), получаем

$$|(f, \psi_k)| = \frac{|(f, \varphi_k)|}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_{C^k(\bar{\mathcal{O}}')}} \geqslant \sqrt{k} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Пусть $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$. Если в неравенстве (3.1) целое число m можно выбрать не зависящим от $\mathcal{O}'$, то говорят, что обобщенная функция f имеет *конечный порядок*; наименьшее такое m называется *порядком* f в $\mathcal{O}$. Например, порядок δ-функции равен 0; порядок обобщенной функции

$$(f, \varphi) = \sum_{k \geqslant 1} \varphi^{(k)}(k)$$

в $(0, \infty)$ бесконечен.

Замечание. Доказанная теорема означает, что если в пространстве $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ ввести топологию индуктивного предела (объединения) возрастающей последовательности счетно-нормированных пространств $C_0^\infty(\bar{\mathcal{O}}_k)$, где $\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}_2 \Subset \ldots, \bigcup_{k \geqslant 1} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}$, с нормами

$$\|\varphi\|_{C^\nu(\bar{\mathcal{O}}_k)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \quad \varphi \in C_0^\infty(\bar{\mathcal{O}}_k),$$

то $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ становится пространством, сопряженным к пространству $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ (см. Ж. Дьедонне и Л. Шварц [1], Н. Бурбаки [1]). Неравенство (3.1) при этом сохраняется для всех функций φ из $C_0^m(\bar{\mathcal{O}}')$ (см. следствие 2 из теоремы 2 § 1.2).

4. Полнота пространства обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$. Весьма важным является свойство полноты пространства $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$.

Теорема. *Пусть последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ такова, что для каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$*

числовая последовательность (f_k, φ) *сходится при* $k \to \infty$. *Тогда функционал* f *на* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, *определяемый равенством*

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi),$$

также является линейным и непрерывным на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, *т. е.* $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Доказательство. Линейность предельного функционала f очевидна. Докажем его непрерывность на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Пусть $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$; нам нужно доказать, что $(f, \varphi_\nu) \to 0$, $\nu \to \infty$. Допуская противное и переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что при всех $\nu = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $|(f, \varphi_\nu)| \geqslant 2a$ при некотором $a > 0$. Так как

$$(f, \varphi_\nu) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi_\nu),$$

то для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$ найдется такой номер k_ν, что $|(f_{k_\nu}, \varphi_\nu)| \geqslant a$. Но это невозможно, в силу леммы, следующей ниже. Полученное противоречие и доказывает непрерывность f. Теорема доказана.

Лемма. *Пусть дана последовательность функционалов* $f_1, f_2, \ldots$ *из слабо ограниченного множества* $M' \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, *т. е.* $|(f, \varphi)| < C_\varphi$, $f \in M'$ *для всех* φ *из* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, *и последовательность основных функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *из* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ *стремится к* 0 *в* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. *Тогда* $(f_k, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда, перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $|(f_k, \varphi_k)| \geqslant c > 0$. Сходимость φ_k к 0 в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ означает, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ и при каждом α

$$D^\alpha \varphi_k(x) \underset{x \in \mathcal{O}}{\rightrightarrows} 0, \qquad k \to \infty.$$

Поэтому, переходя, если нужно, опять к подпоследовательности, можем считать, что

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{4^k}, \qquad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots$$

Положим $\psi_k = 2^k \varphi_k$; тогда

$$\operatorname{supp} \psi_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O} \text{ и } |D^\alpha \psi_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad |\alpha| \leqslant k = 0, 1, \ldots, \tag{4.1}$$

так что

$$|(f_k, \psi_k)| = 2^k |(f_k, \varphi_k)| \geqslant 2^k c \to \infty, \qquad k \to \infty. \tag{4.2}$$

Теперь построим подпоследовательности $\{f_{k_\nu}\}$ и $\{\psi_{k_\nu}\}$ следующим образом. Выберем f_{k_1} и ψ_{k_1} такими, чтобы $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geqslant 2$. Пусть f_{k_j} и ψ_{k_j}, $j = 1, \ldots, \nu - 1$, уже построены; построим f_{k_ν} и ψ_{k_ν}. Так как $\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, то $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$, и поэтому найдется такой номер N, что при всех $k \geqslant N$

$$|(f_{k_j}, \psi_k)| \leqslant \frac{1}{2^{\nu - j}}, \qquad j = 1, \ldots, \nu - 1. \tag{4.3}$$

Теперь заметим, что $|(f_k, \psi_{k_j})| \leqslant c_{k_j}$, $j = 1, \ldots, \nu - 1$. Наконец, в силу (4.2), выберем такой номер $k_\nu \geqslant N_1$, что

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu - 1} c_{k_j} + \nu + 1. \tag{4.4}$$

Таким образом, в силу (4.3) — (4.4), построенные (обобщенные) функции f_{k_ν} и ψ_{k_ν} таковы, что

$$|(f_{k_j}, \psi_{k_\nu})| \leqslant \frac{1}{2^{\nu - j}}, \qquad j = 1, \ldots, \nu - 1, \tag{4.5}$$

$$|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu - 1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| + \nu + 1. \tag{4.6}$$

Положим $\psi = \sum_{j \geqslant 1} \psi_{k_j}$. В силу (4.1) этот ряд сходится в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ и, следовательно, $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ и

$$(f_{k_\nu}, \psi) = (f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu}) + \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ j \neq \nu}} (f_{k_\nu}, \psi_{k_j}). \tag{4.7}$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства (4.5) и (4.6), получаем

$$|(f_{k_\nu}, \psi)| \geqslant$$
$$\geqslant |(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})| - \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu - 1} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| - \sum_{j \geqslant \nu + 1}^{\infty} |(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})| \geqslant$$
$$\geqslant \nu + 1 - \sum_{j \geqslant \nu + 1} \frac{1}{2^{j - \nu}} = \nu,$$

т. е. $(f_{k_\nu}, \psi) \to \infty$, $\nu \to \infty$. Но это противоречит ограниченности последовательности (f_k, ψ), $k \to \infty$ ($f_k \in M'$), что и доказывает лемму.

Следствие. *Если множество* $M' \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ *слабо ограничено, то для любого* $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ *существуют числа* K *и* m *такие, что неравенство* (3.1) *сохраняется для всех* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ *и* $f \in M'$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы § 1.3 с использованием леммы.

5. Носитель обобщенной функции. Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в открытом множестве. Говорят, что обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ *обращается в нуль* в открытом множестве

$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, если ее сужение на $\mathcal{O}'$ (см. § 1.3) есть нулевой функционал из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}')$, т. е. $(f, \varphi) = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$. При этом будем писать: $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}'$.

Пусть обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ обращается в нуль в $\mathcal{O}$. Тогда она, очевидно, обращается в нуль и в окрестности каждой точки множества $\mathcal{O}$.

Обратно, пусть f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ обращается в нуль в некоторой окрестности $U(y) \subset \mathcal{O}$ каждой точки y открытого множества $\mathcal{O}$.

Построим по покрытию $\{U(y),\ y \in \mathcal{O}\}$ множества $\mathcal{O}$ его локально конечное покрытие $\{\mathcal{O}_k\}$ такое, что каждое $\mathcal{O}_k$ содержится в некоторой $U(y)$. Пусть $\mathcal{O}_1' \Subset \mathcal{O}_2' \Subset \ldots, \bigcup\limits_{\nu \geqslant 1} \mathcal{O}_\nu' = \mathcal{O}$. По лемме Гейне — Бореля компакт $\bar{\mathcal{O}}_2'$ покрывается конечным числом окрестностей $U(y)$: $U(y_1), \ldots, U(y_{N_1})$; компакт $\bar{\mathcal{O}}_3' \setminus \mathcal{O}_1'$ покрывается также конечным числом таких окрестностей: $U(y_{N_1+1}), \ldots$ $\ldots, U(y_{N_1+N_2})$ и т. д. Положив $\mathcal{O}_k = U(y_k) \cap \mathcal{O}_2'$, $k = 1, \ldots, N_1$, $\mathcal{O}_k = U(y_k) \cap (\mathcal{O}_3' \setminus \bar{\mathcal{O}}_1')$, $k = N_1 + 1, \ldots, N_1 + N_2$, и т. д., получим требуемое покрытие $\{\mathcal{O}_k\}$.

Пусть $\{e_k\}$ — разложение единицы, соответствующее построенному покрытию $\{\mathcal{O}_k\}$ множества $\mathcal{O}$ (см. § 1.2). Тогда для любой φ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ $\operatorname{supp}(\varphi e_k) \subset U(y)$ при некотором y и потому $(f, \varphi e_k) = 0$; следовательно,

$$(f, \varphi) = \Big(f, \sum_{k \geqslant 1} e_k \varphi\Big) = \sum_{k \geqslant 1} (f, \varphi e_k) = 0.$$

Итак, мы убедились, что справедлива следующая

Лемма. *Если обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ обращается в нуль в некоторой окрестности каждой точки открытого множества $\mathcal{O}$, то она обращается в нуль и во всем множестве $\mathcal{O}$.*

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Объединение всех окрестностей, где $f = 0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$, которое называется *нулевым множеством* обобщенной функции f. По лемме $f = 0$ в $\mathcal{O}_f$; далее, $\mathcal{O}_f$ есть наибольшее открытое множество, в котором f обращается в нуль.

Носителем обобщенной функции f называется дополнение $\mathcal{O}_f$ до $\mathcal{O}$; носитель f обозначается $\operatorname{supp} f$, так что $\operatorname{supp} f = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_f$; $\operatorname{supp} f$ — замкнутое множество в $\mathcal{O}$. Если $\operatorname{supp} f \Subset \mathcal{O}$, то f называется *финитной* в $\mathcal{O}$.

Из сказанного вытекают такие утверждения:

а) *Если носители $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ не имеют общих точек, то $(f, \varphi) = 0$.*

б) *Для того чтобы $x \in \operatorname{supp} f$, необходимо и достаточно, чтобы f не обращалась в нуль ни в какой окрестности точки x.*

Пусть A — замкнутое множество в $\mathcal{O}$. Обозначим через $\mathcal{D}'(\mathcal{O}, A)$ совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, носители которых содержатся в A, и со сходимостью: $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O}, A)$, если $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\operatorname{supp} f_k \subset A$. Обозначаем $\mathcal{D}'(A) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, A)$.

Аналогичный смысл будут иметь и другие пространства обобщенных функций, например $\mathcal{S}'(A)$, $\mathcal{L}_s^2(A)$ и т. д. (см. ниже, § 5 и § 7).

Доказанная в этом пункте лемма допускает обобщение. Мы видели в § 1.3, что всякая обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ индуцирует в каждом $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ свой локальный элемент $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}')$. Справедливо и обратное: из всякой совокупности согласованных локальных элементов можно «склеить» единую обобщенную функцию. Точнее, справедлива следующая

Теорема «о кусочном склеивании». *Пусть для каждой точки $y \in \mathcal{O}$ существует окрестность $U(y) \Subset \mathcal{O}$ и в ней задана обобщенная функция f_y, причем $f_{y_1}(x) = f_{y_2}(x)$, если $x \in U(y_1) \cap U(y_2) \neq \varnothing$. Тогда существует единственная обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, совпадающая с f_y в $U(y)$ при всех $y \in \mathcal{O}$.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы, по покрытию $\{U(y),\ y \in \mathcal{O}\}$ построим локально конечное покрытие $\{\mathcal{O}_k\}$, $\mathcal{O}_k \subset U(y_k)$ множества $\mathcal{O}$ и соответствующее разбиение единицы $\{e_k\}$. Положим

$$(f, \varphi) = \sum_{k \geqslant 1} (f_{y_k}, \varphi e_k), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{5.1}$$

Так как число слагаемых в правой части равенства (5.1) всегда конечно и не зависит от $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ при любом $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$, то определяемый ею функционал f — линейный и непрерывный на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Далее, если $\varphi \in \mathcal{D}(U(y))$, то $\varphi e_k \in \mathcal{D}(U(y_k))$ и, стало быть, $(f_y, \varphi e_k) = (f_{y_k}, \varphi e_k)$, так что в силу (5.1)

$$(f, \varphi) = \sum_{k \geqslant 1} (f_{y_k}, \varphi e_k) = \Big(f_y, \varphi \sum_{k \geqslant 1} e_k\Big) = (f_y, \varphi),$$

т. е. $f = f_y$ в $U(y)$. Единственность построенной обобщенной функции f вытекает из леммы. Теорема доказана.

6. Регулярные обобщенные функции. Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально суммируемой в $\mathcal{O}$ функцией $f(x)$:

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{6.1}$$

Из свойств линейности интеграла и из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла следует, что функционал, стоящий в правой части равенства (6.1), — линейный и непрерывный на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Обобщенные функции, определяемые локально суммируемыми в $\mathcal{O}$ функциями по формуле (6.1), называются *регулярными* обобщенными функциями в $\mathcal{O}$. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными* в $\mathcal{O}$.

Лемма (дю Буа-Реймонд). *Для того чтобы локально суммируемая в $\mathcal{O}$ функция $f(x)$ обращалась в нуль почти всюду в $\mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы порождаемая ею регулярная обобщенная функция f обращалась в нуль в $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{6.2}$$

Возьмем произвольное $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$; пусть $\chi_{\mathcal{O}'}$ — характеристическая функция $\mathcal{O}'$. По теореме II § 1.2 существует последовательность $\varphi_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, сходящаяся к функции $e^{-i\arg f(x)}\chi_{\mathcal{O}'}(x)$ почти везде в $\mathcal{O}$, причем $|\varphi_k(x)| \leqslant 1$ почти везде в $\mathcal{O}$. Отсюда, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, заключаем с учетом (6.2), что

$$\int_{\mathcal{O}'} |f(x)|\,dx = \int f(x) e^{-i\arg f(x)}\chi_{\mathcal{O}'}(x)\,dx =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\int f(x)\varphi_k(x)\,dx + \int f(x)\left[e^{-i\arg f(x)}\chi_{\mathcal{O}'}(x) - \varphi_k(x)\right]dx\right\} =$$
$$= \int_{\mathcal{O}'} \lim_{k\to\infty} f(x)\left[e^{-i\arg f(x)} - \varphi_k(x)\right]dx = 0,$$

так что $f(x)=0$ почти везде в $\mathcal{O}'$. Ввиду произвольности множества $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ заключаем поэтому, что $f(x)=0$ почти везде в $\mathcal{O}$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что всякая регулярная обобщенная функция в $\mathcal{O}$ определяется единственной (с точностью до значений на множестве меры нуль) локально суммируемой в $\mathcal{O}$ функцией. Следовательно, между локально суммируемыми в $\mathcal{O}$ функциями и регулярными обобщенными функциями в $\mathcal{O}$ существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому мы будем впредь отождествлять локально суммируемую в $\mathcal{O}$ функцию $f(x)$ и порождаемую ею по формуле (6.1) обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. В этом смысле «обычные», т. е. локально суммирумые в $\mathcal{O}$ функции, являются (регулярными) обобщенными функциями из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Из леммы дю Буа-Реймонда вытекает также, что оба определения носителя непрерывной функции в $\mathcal{O}$, данные в § 0.5 и в § 1.5, совпадают.

Отметим еще, что если последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, локально суммируемых в $\mathcal{O}$ функций сходится равномерно к функции $f(x)$ на каждом компакте $K \Subset \mathcal{O}$, то и $f_k \to f$, $k\to\infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. Будем говорить, что обобщенная функция f *принадлежит классу* $C^k(\mathcal{O}_1)$, если в $\mathcal{O}_1$ она совпадает с функцией f_1 класса $C^k(\mathcal{O}_1)$, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$

$$(f, \varphi) = \int f_1(x)\varphi(x)\,dx.$$

Если к тому же $f_1 \in C^k(\bar{\mathcal{O}}_1)$, то будем говорить, что f *принадлежит классу* $C^k(\bar{\mathcal{O}}_1)$.

7. Меры. Более общий класс обобщенных функций, содержащий регулярные обобщенные функции, порождается мерами. *Мерой* на борелевском множестве A называется вполне аддитивная (комплекснозначная) функция множества

$$\mu(E) = \int_E \mu(dx),$$

заданная и конечная на всех ограниченных борелевских подмножествах E множества A, $|\mu(E)| < \infty$.

По поводу теории меры и интегрирования см. А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [1].

Мера $\mu(E)$ на A однозначно представляется через 4 неотрицательные меры $\mu_j(E) \geqslant 0$ на A по формуле $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$; при этом

$$\int_E \mu(dx) = \int_E \mu_1(dx) - \int_E \mu_2(dx) + i\int_E \mu_3(dx) - i\int_E \mu_4(dx). \tag{7.1}$$

Мера $\mu(E)$ на открытом множестве $\mathcal{O}$ определяет обобщенную функцию μ в $\mathcal{O}$ по формуле

$$(\mu, \varphi) = \int \varphi(x)\mu(dx), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \tag{7.2}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса. Из свойств этого интеграла следует, что действительно $\mu \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Замечание. Для абсолютно непрерывных относительно меры Лебега мер μ на $\mathcal{O}$, т. е. $\mu(dx) = f(x)\,dx$, где $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$, формула (7.2) определяет регулярные обобщенные функции f (см. § 1.6).

Имеет место утверждение, аналогичное лемме дю Буа-Реймонда (см. § 1.6).

Лемма. *Для того чтобы мера $\mu(E)$ на $\mathcal{O}$ была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы определяемая ею обобщенная функция μ обращалась в нуль в $\mathcal{O}$.*

Доказательство основывается на утверждении: для того чтобы мера $\mu(E)$ на $\mathcal{O}$ была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \varphi(x)\,\mu(dx) = 0, \qquad \varphi \in C_0(\mathcal{O}). \tag{7.3}$$

Отсюда сразу следует необходимость. Докажем достаточность. Предполагая, что равенство (7.3) выполнено для всех φ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, докажем, что оно выполнено и для произвольной φ из $C_0(\mathcal{O})$. Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$. По теореме II § 1.2 существует последовательность функций φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ и $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $C(\overline{\mathcal{O}'})$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \varphi(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathcal{O}'} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)\,\mu(dx) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathcal{O}} \varphi_k(x)\,\mu(dx) = 0,$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Из леммы следует, что между мерами на $\mathcal{O}$ и порождаемыми ими по формуле (7.2) обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому впредь мы будем отождествлять меру $\mu(E)$ на $\mathcal{O}$ и порождаемую ею обобщенную функцию μ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Теорема I. *Для того чтобы обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ была мерой на $\mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы ее порядок в $\mathcal{O}$ был равен* 0.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ есть мера μ на $\mathcal{O}$. Тогда для любого $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$ в любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ имеем

$$|(f, \varphi)| = \left|\int \varphi(x)\,\mu(dx)\right| \leqslant \int\limits_{\mathcal{O}'} |\mu(dx)| \max_{x\in\overline{\mathcal{O}'}} |\varphi(x)|,$$

откуда заключаем, что порядок f в $\mathcal{O}$ равен 0 (см. § 1.3).

Достаточность. Пусть порядок $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ в $\mathcal{O}$ равен 0, т. е. при всех $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$

$$|(f, \varphi)| \leqslant K(\mathcal{O}')\,\|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}'). \tag{7.4}$$

Пусть $\mathcal{O}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — строго возрастающая последовательность открытых множеств, исчерпывающая $\mathcal{O}$: $\mathcal{O}_k \Subset \mathcal{O}_{k+1}$, $\bigcup\limits_k \mathcal{O}_k = \mathcal{O}$. Так как множество $\mathcal{D}(\mathcal{O}_k)$ плотно в $C_0(\overline{\mathcal{O}}_k)$ в норме $C(\overline{\mathcal{O}}_k)$ (см. следствие 2 из теоремы II § 1.2), то из неравенства (7.4) следует, что функционал f допускает (линейное) непрерывное продолжение на $C_0(\overline{\mathcal{O}}_k)$. По теореме Рисса—Радона существует мера μ_k на $\overline{\mathcal{O}}_k$ такая, что

$$(f, \varphi) = \int \varphi(x)\,\mu_k(dx), \quad \varphi \in C_0(\overline{\mathcal{O}}_k).$$

Отсюда следует, что меры μ_k и μ_{k+1} совпадают на Q_k; поэтому существует единая мера μ на $\mathcal{O}$, совпадающая с мерой μ_k в $\mathcal{O}_k$ и с обобщенной функцией f в $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

Обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ называется *неотрицательной в* $\mathcal{O}$, если $(f, \varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\varphi(x) \geqslant 0$, $x \in \mathcal{O}$.

Теорема II. *Для того чтобы обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ была неотрицательной мерой на $\mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательной в $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ неотрицательна в $\mathcal{O}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$, $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$. По следствию из леммы § 1.2 существует функция $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\eta(x) = 1$, $x \in \mathcal{O}'$. Поэтому

$$-\|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})}\,\eta(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})}\,\eta(x), \quad x \in \mathcal{O}.$$

Отсюда, пользуясь неотрицательностью функционала f в $\mathcal{O}$, получаем

$$-(f, \eta)\,\|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})} \leqslant (f, \varphi) \leqslant (f, \eta)\,\|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})},$$

т. е.

$$|(f, \varphi)| \leqslant (f, \eta)\,\|\varphi\|_{C(\overline{\mathcal{O}'})}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}').$$

Полученное неравенство показывает, что порядок обобщенной функции f равен 0. По теореме I f есть (неотрицательная) мера на $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

Простейшим примером меры и к тому же сингулярной обобщенной функции является δ-функция Дирака (см. § 1.1), действующая по правилу

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $\delta \in \mathcal{D}'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, так что $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$.

Докажем, что $\delta(x)$ — *сингулярная* обобщенная функция. Пусть, напротив, существует функция $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = (\delta, \varphi) = \varphi(0). \tag{7.5}$$

Так как $|x|^2\varphi \in \mathcal{D}$, то из (7.5) вытекает

$$\int f(x)\,|x|^2\,\varphi(x)\,dx = |x|^2\varphi(x)\big|_{x=0} = 0 = (|x|^2 f, \varphi)$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Таким образом, локально суммируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $|x|^2 f(x)$ равна нулю в смысле обобщенных функций. По лемме дю Буа-Реймонда (см. § 1.6) $|x|^2 f(x) = 0$ почти везде и, стало быть, $f(x) = 0$ почти везде в $\mathbb{R}^n$. Но это противоречит равенству (7.5). Полученное противоречие и доказывает сингулярность δ-функции.

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 1.2). Докажем, что

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathscr{D}'. \tag{7.6}$$

Последовательность $\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \to +0$ изображена на рис. 4.

Действительно, по определению сходимости в $\mathscr{D}'$ соотношение (7.6) эквивалентно равенству

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Это равенство вытекает из оценки

$$\left|\int \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \int \omega_\varepsilon(x)\,|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|x|\leqslant\varepsilon} |\varphi(x)-\varphi(0)| \int \omega_\varepsilon(x)\,dx = \max_{|x|\leqslant\varepsilon} |\varphi(x)-\varphi(0)|$$

и из непрерывности функции φ.

Обобщением точечной δ-функции является поверхностная δ-функция. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ и μ — непрерывная функция на S. Введем обобщенную функцию $\mu\delta_S$, действующую по правилу

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x)\,dS, \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Очевидно, $\mu\delta \in \mathscr{D}'$; $\mu\delta_S(x) = 0$, $x \overline{\in} S$, так что $\operatorname{supp}\mu\delta_S \subset S$; $\mu\delta_S$ — сингулярная мера, если $\mu \not\equiv 0$.

Обобщенная функция $\mu\delta_S(x)$ называется *простым слоем* на поверхности S. Она описывает пространственную плотность масс или зарядов, сосредоточенных на поверхности S с поверхностной плотностью μ. (Здесь плотность простого слоя определяется как слабый предел плотностей, соответствующих дискретному распределению на поверхности S,

$$\sum_k \mu(x_k)\,\Delta S_k \delta(x - x_k), \quad x_k \in S,$$

при неограниченном измельчении поверхности S; ср. § 1.1.)

Замечание. Локально суммируемые функции и δ-функции описывают распределения плотности масс, зарядов, сил и т. п. (см. § 1.1). Поэтому обобщенные функции называются также *распределениями* (distributions; см. Л. Шварц [1, 2]). Если, например, обобщенная функция f есть плотность масс или зарядов, то выражение $(f, 1)$ есть полная масса или заряд (в предположении, что f имеет смысл на функции, тождественно равной 1, ибо 1 не финитна!). В частности, $(\delta, 1) = 1$; $(f, 1) = \int f(x)\,dx$, если $f \in \mathscr{L}^1$.

8. Формулы Сохоцкого. Введем еще одну важную сингулярную обобщенную функцию $\mathscr{P}\frac{1}{x}$, действующую по формуле

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Функционал $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ — линейный. Его непрерывность на $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$ вытекает из равенства

$$\left|\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right)\right| = \left|\mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right| = \left|\mathrm{Vp}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0) + x\varphi'(x')}{x}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-R}^{R} |\varphi'(x')|\,dx \leqslant 2R\max_x |\varphi'(x)|, \quad \varphi \in \mathscr{D}(-R, R); \tag{8.1}$$

здесь x' — некоторая точка из интервала $(-R, R)$. Таким образом, $\mathscr{P}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'$.

Обобщенная функция $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ совпадает с функцией $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ (в смысле § 1.6); она называется *конечной частью* или *главным значением* интеграла от функции $\frac{1}{x}$. Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{8.2}$$

Действительно, если $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx =$$
$$= -2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx =$$
$$= -i\pi\varphi(0) + \mathrm{Vp}\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Соотношение (8.2) означает, что существует предел последовательности $\frac{1}{x + i\varepsilon}$ при $\varepsilon \to +0$ в $\mathscr{D}'$, который мы обозначим

$\frac{1}{x+i0}$, и этот предел равен $-i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}$. Итак,

$$\frac{1}{x+i0}=-i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}. \tag{8.3}$$

Аналогично

$$\frac{1}{x-i0}=i\pi\delta(x)+\mathscr{P}\frac{1}{x}. \tag{8.3'}$$

Формулы (8.3) и (8.3′) в «интегральной» форме типа (8.2) по существу впервые были получены еще в 1873 г. русским математиком Ю. В. Сохоцким (см. Ю. В. Сохоцкий [1]). В настоящее время эти формулы широко используются в квантовой физике.

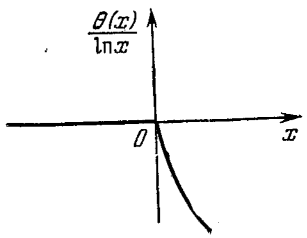

Рис. 5.

Докажем, что *порядок* $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ *в* $\mathbb{R}^1$ *равен* 1.

Действительно, из неравенства (8.1) следует, что порядок ее в $\mathbb{R}^1$ не превосходит 1. Если бы ее порядок в $\mathbb{R}^1$ был равен 0, то по теореме 1 § 1.7 $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ была бы мерой на $\mathbb{R}^1$. Но тогда интеграл $\mathrm{Vp}\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ был бы определен на всех непрерывных финитных в $\mathbb{R}^1$ функциях, что, как известно, неверно (например, он не определен на функциях, равных $\frac{\theta(x)}{\ln x}$ в окрестности 0; рис. 5).

Отметим попутно, что порядок $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ в $\{x\neq 0\}$ равен 0, ибо $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ совпадает с локально суммируемой функцией $\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$.

Обобщенная функция $\mathscr{P}\frac{1}{x}$ есть продолжение регулярной обобщенной функции $\frac{1}{x}$ с множества $\{x\neq 0\}$ на всю ось $\mathbb{R}^1$. Спрашивается, любая ли локально суммируемая в $\mathcal{O}\neq\mathbb{R}^n$ функция допускает продолжение на все пространство $\mathbb{R}^n$ как обобщенная функция из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$? Ответ отрицательный, как показывает следующий пример: $e^{1/x}\in\mathscr{D}'$ $(x\neq 0)$. Если бы существовала $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$, совпадающая с $e^{1/x}$ при $x\neq 0$, то мы имели бы

$$(f,\varphi)=\int e^{\frac{1}{x}}\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in\mathscr{D}(x\neq 0). \tag{8.4}$$

Пусть $\varphi_0\in\mathscr{D}$, $\varphi_0(x)=0$ при $x<1$ и $x>2$, $\varphi_0(x)\geqslant 0$, $\int\varphi_0(x)\,dx=1$.

Тогда

$$\varphi_k(x)=e^{-\frac{k}{2}}k\varphi_0(kx)\to 0,\qquad k\to\infty \text{ в } \mathscr{D},$$

$$\int e^{\frac{1}{x}}\varphi_k(x)\,dx=\int e^{\frac{1}{x}-\frac{k}{2}}k\varphi_0(kx)\,dx=$$

$$=\int_1^2 e^{k\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)}\varphi_0(y)\,dy\geqslant\int_1^2\varphi_0(y)\,dy=1,\qquad \varphi_k\in\mathscr{D}\ \ (x\neq 0),$$

что противоречит равенству (8.4):

$$1\leqslant\int e^{\frac{1}{x}}\varphi_k(x)\,dx=(f,\varphi_k)\to 0,\qquad k\to\infty.$$

9. Замены переменных в обобщенных функциях. Пусть $f\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ и $x=Ay+b$ — неособенное линейное преобразование $\mathcal{O}$ на $\mathcal{O}_1$. Тогда для любой $\varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathcal{O}_1} f(Ay+b)\varphi(y)\,dy=\frac{1}{|\det A|}\int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi\left[A^{-1}(x-b)\right]dx.$$

Это равенство мы и примем за определение обобщенной функции $f(Ay+b)$ для любой $f(x)$ из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$:

$$(f(Ay+b),\ \varphi(y))=\left(f(x),\frac{\varphi\left[A^{-1}(x-b)\right]}{|\det A|}\right),\qquad \varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1). \tag{9.1}$$

Так как операция $\varphi(x)\to\varphi\left[A^{-1}(x-b)\right]$ линейна и непрерывна из $\mathscr{D}(\mathcal{O}_1)$ в $\mathscr{D}(\mathcal{O})$, то функционал $f(Ay+b)$, определяемый правой частью равенства (9.1), принадлежит $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$.

В частности, если A — вращение, т. е. $A^T=A^{-1}$ и $b=0$, то $(f(Ay),\varphi)=(f,\varphi(A^Tx))$; если A — подобие (с отражением), т. е. $A=cI$, $c\neq 0$ и $b=0$, то

$$(f(cy),\varphi)=\frac{1}{|c|^n}\left(f,\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right);$$

если $A=I$, то (сдвиг на b)

$$(f(y+b),\varphi)=(f,\varphi(x-b)).$$

Изложенное позволяет определить трансляционно-инвариантные, сферически-симметричные, центрально-симметричные, однородные, периодические, лоренцинвариантные и т. д. обобщенные функции.

Примеры. а) $\delta(-x)=\delta(x)$; б) $(\delta(x-x_0),\varphi)=\varphi(x_0)$.

Пусть $a\in C^1$. Определим обобщенную функцию $\delta(a(x))$ по формуле

$$\delta(a(x))=\lim_{\varepsilon\to+0}\omega_\varepsilon(a(x)) \text{ в } \mathscr{D}'(c,d), \tag{9.2}$$

где ω_ε — «шапочка».

Пусть функция $a(x)$ имеет изолированные и простые нули, которые мы обозначим через x_k, $k=1, 2, \ldots$ (рис. 6). В этом случае $\delta(a(x))$ существует в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$ и представляется суммой

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}. \qquad (9.3)$$

В силу теоремы «о кусочном склеивании» (см. § 1.5), формулу (9.3) достаточно доказать локально, в достаточно малой окрестности каждой точки. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(x_k-\varepsilon_k, x_k+\varepsilon_k)$, причем число ε_k настолько мало, что в интервале $(x_k-\varepsilon_k, x_k+\varepsilon_k)$

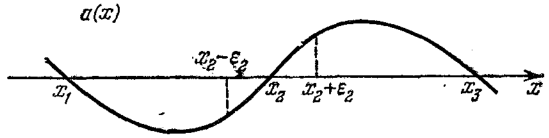

Рис. 6.

функция $a(x)$ монотонна. Пользуясь предельным соотношением (7.6), имеем цепочку равенств

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k} \omega_\varepsilon[a(x)]\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a(x_k-\varepsilon_k)}^{a(x_k+\varepsilon_k)} \omega_\varepsilon(y)\varphi(a^{-1}(y)]\frac{dy}{a'[a^{-1}(y)]} =$$

$$= \frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|} = \left(\frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}, \varphi\right).$$

Если же $\varphi \in \mathscr{D}(\alpha, \beta)$, где интервал (α, β) не содержит ни одного нуля x_k, то

$$(\delta(a(x)), \varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\alpha^\beta \omega_\varepsilon[a(x)]\varphi(x)\,dx = 0.$$

Ясно, что локальные элементы $\dfrac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}$ в $(x_k-\varepsilon_k, x_k+\varepsilon_k)$ и 0 в (α, β) согласованы. Формула (9.3) доказана.

Примеры. а) $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$;

б) $\delta(\sin x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$.

10. Умножение обобщенных функций. Пусть $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ и $a \in C^\infty(\mathcal{O})$. Тогда для любой φ из $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ справедливо равенство

$$(af, \varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x)\,dx = (f, a\varphi).$$

Это равенство мы и примем за определение произведения af обобщенной функции f из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ на бесконечно дифференцируемую в $\mathcal{O}$ функцию a:

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}). \qquad (10.1)$$

Так как операция $\varphi \to a\varphi$, $a \in C^\infty(\mathcal{O})$ линейна и непрерывна из $\mathscr{D}(\mathcal{O})$ в $\mathscr{D}(\mathcal{O})$, то функционал af, определяемый правой частью равенства (10.1), представляет обобщенную функцию из $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$.

Справедливо включение

$$\operatorname{supp}(af) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} f,$$

ибо $\mathcal{O}_{af} \supset \mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_f$ (см. § 1.5) *и*

$$\operatorname{supp}(af) = \mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_{af} \subset \mathcal{O}\setminus(\mathcal{O}_a\cup\mathcal{O}_f) = \\ = (\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_a)\cap(\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_f) = \operatorname{supp} a\cap\operatorname{supp} f.$$

Если $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$, *то справедливо равенство*

$$f = \eta f, \qquad (10.2)$$

где η — *любая функция класса* C^∞, *равная* 1 *в окрестности носителя* f.

Действительно, для любой $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$ носители f и $(1-\eta)\varphi$ не имеют общих точек, а потому (см. § 1.5)

$$(f, (1-\eta)\varphi) = 0 = (f(1-\eta), \varphi),$$

что и эквивалентно равенству (10.2).

Примеры. а) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, так как при всех $\varphi \in \mathscr{D}$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi);$$

б) $x\mathscr{P}\frac{1}{x} = 1$, поскольку

$$\left(x\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \int\varphi(x)\,dx = (1, \varphi).$$

Возникает вопрос: нельзя ли определить в классе обобщенных функций умножение любых обобщенных функций, притом так, чтобы это умножение было ассоциативно и коммутативно и совпадало с определенным выше умножением на бесконечно дифференцируемую функцию? Л. Шварцем показано, что такое умножение определить нельзя. Действительно, если бы оно существовало, то, пользуясь примерами а) и б), мы имели бы противоречивую цепочку равенств:

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Чтобы определить произведение двух обобщенных функций f и g, нужно, чтобы они обладали, грубо говоря, свойствами: насколько f «нерегулярна» в окрестности (произвольной) точки, настолько g должна быть «регулярной» в этой окрестности, и наоборот.

§ 2. Дифференцирование обобщенных функций

1. Производные обобщенных функций. Пусть $f \in C^k(\mathcal{O})$. Тогда при всех α, $|\alpha| \leqslant k$, и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ справедлива формула интегрирования по частям

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int D^\alpha f(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int f(x)\,D^\alpha\varphi(x)\,dx = \\ = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi).$$

Это равенство мы и примем за определение (*обобщенной*) *производной* $D^\alpha f$ обобщенной функции f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{1.1}$$

Так как операция $\varphi \to (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, то функционал $D^\alpha f$, определяемый правой частью равенства (1.1), представляет собой обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

В частности, при $f = \delta$ равенство (1.1) принимает вид

$$(D^\alpha\delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Из этого определения вытекает, что если обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ принадлежит классу $C^k(\mathcal{O}_1)$ в $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ (см. § 1.6), то ее классические и обобщенные производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant k$ совпадают в $\mathcal{O}_1$.

Справедливы следующие свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

а) *Операция дифференцирования* $f \to D^\alpha f$ (*линейна и*) *непрерывна из* $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ *в* $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Линейность очевидна. Докажем непрерывность. Пусть $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Тогда при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ имеем

$$(D^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_k, D^\alpha\varphi) \to 0, \quad k \to \infty,$$

что и означает $D^\alpha f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Например:

$$D^\alpha\omega_\varepsilon(x) \to D^\alpha\delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathcal{D}'. \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) вытекает из соотношения (7.6) § 1. Последовательность $\omega_\varepsilon'(x)$, $\varepsilon \to +0$ изображена на рис. 7.

В частности, если ряд

$$\sum_{k\geqslant 1} u_k(x) = S(x),$$
$$u_k \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathcal{O}),$$

сходится равномерно на каждом компакте $K \Subset \mathcal{O}$, то его можно дифференцировать почленно любое число раз и полученные ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$,

$$\sum_{k\geqslant 1} D^\alpha u_k(x) = D^\alpha S(x).$$

Действительно, последовательность частных сумм этого ряда сходится к $S(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (см. § 1.6).

б) *Любая обобщенная функция* $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (*в частности, любая локально суммируемая в* $\mathcal{O}$ *функция*) *бесконечно дифференцируема* (*в обобщенном смысле*).

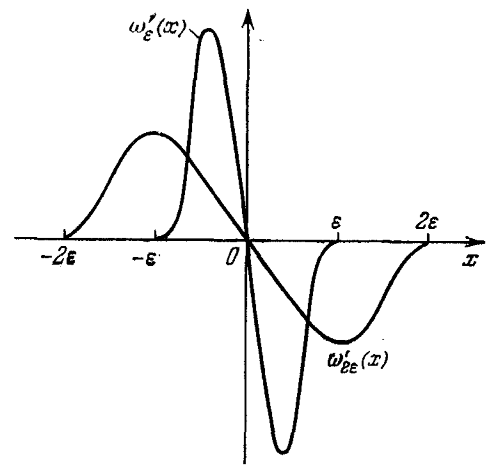

Рис. 7.

Действительно, поскольку $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, то $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$; в свою очередь $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и т. д.

в) *Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования*

$$D^{\alpha+\beta}f = D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f). \tag{1.3}$$

Действительно,

$$(D^{\alpha+\beta}f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}(f, D^{\alpha+\beta}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\beta f, D^\alpha\varphi) = \\ = (D^\alpha(D^\beta f), \varphi) = (-1)^{|\beta|}(D^\alpha f, D^\beta\varphi) = (D^\beta(D^\alpha f), \varphi),$$

откуда и вытекают равенства (1.3).

г) *Если* $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$ *и* $a \in C^\infty(\mathcal{O})$, *то справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения* af,

$$D^\alpha(af) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\beta}{\alpha} D^\beta a D^{\alpha-\beta} f. \tag{1.4}$$

Действительно, если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O})$, то

$$\left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi\right) = -\left(af, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = -\left(f, a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) =$$
$$= -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1}\right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right),$$

откуда и вытекает равенство (1.4) при $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$.

д) $$\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f. \tag{1.5}$$

Действительно, если $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{O})$, то при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}_f)$ имеем $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}_f)$ и

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) = 0,$$

так что $\mathcal{O}_{D^\alpha f} \supset \mathcal{O}_f$, откуда и вытекает включение (1.5).

2. Первообразная обобщенной функции. Всякая непрерывная в интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет в (a, b) (единственную с точностью до аддитивной постоянной) первообразную $f^{(-1)}(x)$,

$$f^{(-1)}(x) = \int^x f(\xi)\,d\xi + C, \quad f^{(-1)\prime}(x) = f(x).$$

Последнее равенство мы и примем за исходное для определения первообразной произвольной обобщенной функции f (одной переменной).

Пусть $f \in \mathscr{D}'(a, b)$. Обобщенная функция $f^{(-1)}$ из $\mathscr{D}'(a, b)$ называется *первообразной* обобщенной функции f в (a, b), если $f^{(-1)\prime} = f$, т. е.

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(a, b). \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) показывает, что функционал $f^{(-1)}$ задан не на всех основных функциях из $\mathscr{D}(a, b)$, а только на их первых производных. Наша задача — продолжить этот функционал на все пространство $\mathscr{D}(a, b)$, причем так, чтобы продолженный функционал $f^{(-1)}$ был линейным и непрерывным на $\mathscr{D}(a, b)$, и выяснить степень произвола при таком продолжении.

Предположим сперва, что $f^{(-1)}$ — первообразная f — *существует* в $\mathscr{D}'(a, b)$. Построим ее. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(a, b)$. (Считаем

функцию φ продолженной нулем на всю ось $\mathbb{R}^1$). Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Тогда

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x - x_0)\int \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.2}$$

где ω_ε — «шапочка» при $\varepsilon < \min(x_0 - a, b - x_0)$ (см. § 1.2) и

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x' - x_0)\int \varphi(\xi)\,d\xi\right] dx'. \tag{2.3}$$

Докажем, что $\psi \in \mathscr{D}(a, b)$. Действительно, $\psi \in C^\infty$ и $\psi(x) = 0$ при $x < a'' = \min(a', x_0 - \varepsilon) > a$, если $\operatorname{supp}\varphi \subset [a', b'] \subset (a, b)$. Далее, при $x > b'' = \max(b', x_0 + \varepsilon) < b$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\,dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x' - x_0)\,dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

Итак, $\operatorname{supp}\psi \subset [a'', b''] \subset (a, b)$ (рис. 8). Следовательно, $\psi \in \mathscr{D}(a, b)$.

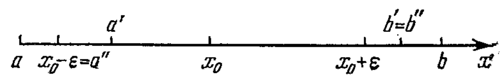

Рис. 8.

Применяя функционал $f^{(-1)}$ к равенству (2.2), получим

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon(x - x_0))\int \varphi(\xi)\,d\xi,$$

т. е., учитывая (2.1),

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C\int \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{2.4}$$

где обозначено $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon(x - x_0))$. Итак, если $f^{(-1)}$ существует, то она выражается равенством (2.4), где ψ определена формулой (2.3).

Теперь докажем обратное: при *произвольной* постоянной C функционал $f^{(-1)}$, определенный равенствами (2.4) и (2.3), определяет первообразную f в (a, b).

Действительно, функционал $f^{(-1)}$, очевидно, линеен. Докажем его непрерывность на $\mathscr{D}(a, b)$. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathscr{D}(a, b)$, т. е. $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [a', b'] \subset (a, b)$ и $\varphi_k^{(\alpha)}(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0$, $k \to \infty$. А тогда, по доказанному,

$$\psi_k(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi_k(x') - \omega_\varepsilon(x'-x_0)\int \varphi_k(\xi)\,d\xi\right] dx' = 0$$

$$\text{вне } [a'', b''] \subset [a, b]$$

и, очевидно, $\psi_k^{(\alpha)}(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0$, $k\to\infty$, т. е. $\psi_k \to 0$, $k\to\infty$ в $\mathcal{D}(a, b)$. Поэтому в силу непрерывности f на $\mathcal{D}(a, b)$ имеем

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \psi_k) + C\int \varphi_k(\xi)\,d\xi \to 0, \quad k\to\infty,$$

что и утверждалось. Следовательно, $f^{(-1)} \in \mathcal{D}'(a, b)$. Осталось проверить, что $f^{(-1)}$ является первообразной f в (a, b). В самом деле, заменяя в (2.3) φ на φ' и учитывая, что $\int \varphi'(\xi)\,d\xi = 0$, получим $\psi = \varphi$, и тогда из (2.4) вытекает равенство (2.1), что и требовалось. Таким образом, доказана следующая

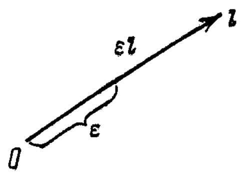

Рис. 9

Теорема. *Любая обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(a, b)$ имеет в (a, b) первообразную $f^{(-1)}$, и всякая ее первообразная выражается по формуле* (2.4), *где ψ определяется равенством* (2.3) *и C — произвольная постоянная.*

Доказанная теорема утверждает, что решение дифференциального уравнения

$$u' = f, \quad f \in \mathcal{D}'(a, b), \tag{2.5}$$

существует в $\mathcal{D}'(a, b)$ и его общее решение имеет вид $u = f^{(-1)} + C$, где $f^{(-1)}$ — некоторая первообразная f в (a, b) и C — произвольная постоянная. В частности, если $f \in C(a, b)$, то всякое решение в $\mathcal{D}'(a, b)$ уравнения (2.5) — классическое. Например, общее решение уравнения $u' = 0$ в $\mathcal{D}'(a, b)$ есть произвольная постоянная.

Аналогично определяется и первообразная $f^{(-n)}$ *порядка* n в (a, b) обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(a, b)$, $f^{(-n)(n)} = f$. Применяя доказанную теорему к рекуррентной цепочке для $f^{(-k)}$ — первообразных f порядка k —

$$f^{(-1)'} = f, \quad f^{(-2)'} = f^{(-1)}, \; \ldots, \; f^{(-n)'} = f^{(-n+1)},$$

заключаем, что $f^{(-n)}$ существует в $\mathcal{D}'(a, b)$ и единственна с точностью до аддитивного произвольного полинома степени $n-1$.

3. Примеры. а) Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю момента $+1$, расположенному в точке $x = 0$ и ориентированному вдоль заданного направления $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $|\boldsymbol{l}| = 1$ (рис. 9).

Этому диполю приближенно соответствует плотность зарядов (см. § 1.1 и § 1.7)

$$\frac{1}{\varepsilon}\delta(x - \varepsilon\boldsymbol{l}) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x - \varepsilon\boldsymbol{l}) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x), \varphi\right) = \\ = \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(\varepsilon\boldsymbol{l}) - \varphi(0)] \to \frac{\partial\varphi(0)}{\partial\boldsymbol{l}} = \left(\delta, \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{l}}\right) = -\left(\frac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{l}}, \varphi\right),$$

заключаем, что искомая плотность равна

$$-\frac{\partial\delta(x)}{\partial\boldsymbol{l}} = -(\boldsymbol{l}, D\delta(x)).$$

Проверим, что полный заряд диполя равен 0:

$$\left(-\frac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{l}}, 1\right) = \left(\delta, \frac{\partial 1}{\partial\boldsymbol{l}}\right) = (\delta, 0) = 0$$

и его момент равен 1:

$$\left(-\frac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{l}}, (x, \boldsymbol{l})\right) = \left(\delta, \frac{\partial(x, \boldsymbol{l})}{\partial\boldsymbol{l}}\right) = (\delta, |\boldsymbol{l}|) = (\delta, 1) = 1.$$

б) Обобщением $-\dfrac{\partial\delta(x)}{\partial\boldsymbol{l}}$ является двойной слой на поверхности. Пусть S — кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S (рис. 10) и ν — непрерывная функция на S. Введем обобщенную функцию $-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(\nu\delta_S)$, действующую по правилу

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(\nu\delta_S), \varphi\right) = \\ = \int_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\boldsymbol{n}}\,dS, \; \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно,

$$-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(\nu\delta_S) \in \mathcal{D}', \quad \operatorname{supp}\left[-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(\nu\delta_S)\right] \subset S.$$

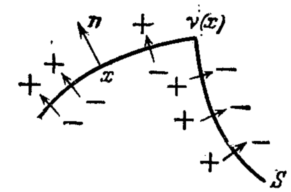

Рис. 10.

Обобщенная функция $-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(\nu\delta_S)$ называется *двойным слоем* на поверхности S. Она описывает пространственную плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента $\nu(x)$ и ориентированных вдоль заданного направления нормали $\boldsymbol{n}$ на S. (Здесь плотность двойного слоя определяется как слабый предел плотностей, соответствующих дискретному расположению диполей на поверхности S,

$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial n_k}\left[\nu(x_k)\,\Delta S_k \delta(x-x_k)\right], \quad x_k \in S,$$

при неограниченном измельчении поверхности S; ср. § 1.7.)

в) Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема в (a, b) и пусть $\{x_k\}$ — точки из (a, b), в которых она или ее

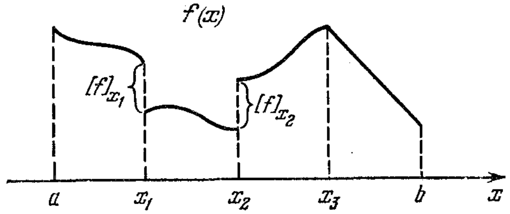

Рис. 11.

производная имеют разрывы 1-го рода (рис. 11). Тогда

$$f' = f'_{\text{кл}}(x) + \sum_k [f]_{x_k}\,\delta(x-x_k), \tag{3.1}$$

где $f'_{\text{кл}}(x)$ — классическая производная функции $f(x)$, равная $f'(x)$ при $x \neq x_k$, и не определена в точках $\{x_k\}$, $[f]_{x_k}$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_k,

$$[f]_{x_k} = f(x_k+0) - f(x_k-0).$$

Действительно, для любой $\varphi \in \mathscr{D}(a, b)$ имеем

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'_{\text{кл}}(x)\,\varphi(x)\,dx - \sum_k [f(x_{k+1}-0)\,\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\,\varphi(x_k)] =$$

$$= \int f'_{\text{кл}}(x)\,\varphi(x)\,dx + \sum_k [f(x_k+0) - f(x_k-0)]\,\varphi(x_k) =$$

$$= (f'_{\text{кл}}, \varphi) + \sum_k [f]_{x_k}\,(\delta(x-x_k), \varphi),$$

что и доказывает формулу (3.1).

В частности, если θ — функция Хевисайда (см. § 0.2), то

$$\theta'(x) = \delta(x). \tag{3.2}$$

В теории электрических цепей функция Хевисайда называется «единичной ступенькой» или функцией включения, δ-функция — «единичным импульсом». Формула (3.2) утверждает, что «единичный импульс» есть производная от «единичной ступеньки».

г) Справедливы формулы

$$x^m \delta^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ (-1)^m m! \binom{m}{k} \delta^{(k-m)}(x), & k \geqslant m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Действительно,

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (x^m \varphi)^{(k)}\big|_{x=0} =$$

$$= (-1)^k \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \binom{j}{k} (x^m)^{(j)}\, \varphi^{(k-j)}(x)\big|_{x=0} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ (-1)^k m! \binom{m}{k} \varphi^{(k-m)}(0) = (-1)^m m! \binom{m}{k} (\delta^{(k-m)}, \varphi), & k \geqslant m. \end{cases}$$

д) Тригонометрический ряд

$$\sum_k a_k e^{ikx}, \quad |a_k| \leqslant A(1+|k|)^m \tag{3.4}$$

сходится в $\mathscr{D}'$.

Действительно, ряд

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

сходится равномерно в $\mathbb{R}^1$; следовательно, ряд, представляющий его производную порядка $m+2$, сходится в $\mathscr{D}'$ и его сумма определяет сумму ряда (3.4) (см. § 2.1, а)).

е) Докажем формулу

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ikx} = \sum_k \delta(x - 2k\pi). \tag{3.5}$$

Для этого разложим 2π-периодическую функцию (рис. 12)

$$f_0(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad 0 \leqslant x < 2\pi,$$

в равномерно сходящейся в $\mathbb{R}^1$ ряд Фурье

$$f_0(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}. \tag{3.6}$$

В силу д), ряд (3.5) можно дифференцировать почленно в $\mathscr{D}'$ любое число раз. В результате получим

$$f_0'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}=-\frac{i}{2\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}e^{ikx},\quad 0\leqslant x<2\pi,$$

$$f_0''(x)=-\frac{1}{2\pi}+\sum_k\delta(x-2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq 0}e^{ikx},$$

откуда и вытекает формула (3.5). При дифференцировании функции $f_0'(x)$ (рис. 13) мы воспользовались формулой (3.1).

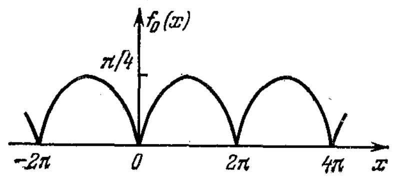

Рис. 12.

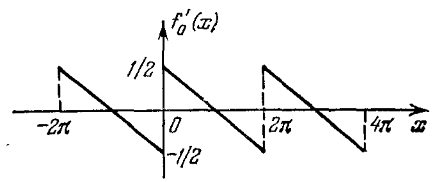

Рис. 13.

Отметим, что левая часть равенства (3.5) есть не что иное, как ряд Фурье 2π-периодической обобщенной функции $\sum\limits_k\delta(x-2k\pi)$, график которой символически изображен на рис. 14 (подробнее см. § 7.2).

ж) Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S и $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_x$ — внешняя нормаль к S в точке $x\in S$ (рис. 15). Пусть $f\in C^2(G)\bigcap C^1(\overline{G})$ и $f(x)=0$ вне $\overline{G}$. Тогда для любой $\varphi\in\mathscr{D}$ справедлива следующая формула Грина:

$$\int_G(f\Delta\varphi-\varphi\Delta f)\,dx=\int_S\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}-\varphi\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right)dS. \tag{3.7}$$

В терминах обобщенных функций, простого и двойного слоев, введенных в § 1.7 и § 2.3, б), формулу Грина (3.7) можно

переписать следующим образом:

$$\Delta f=\Delta_{\text{кл}}f-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\delta_S-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}(f\delta_S), \tag{3.7'}$$

где $\Delta_{\text{кл}}f$ — классический лапласиан f:

$$\Delta_{\text{кл}}f(x)=\begin{cases}\Delta f(x), & x\in G,\\ 0, & x\in\overline{\overline{G}},\\ \text{не определен}, & x\in S;\end{cases}$$

под f и $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$ на S понимаются граничные значения f и $\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$ на S изнутри области G.

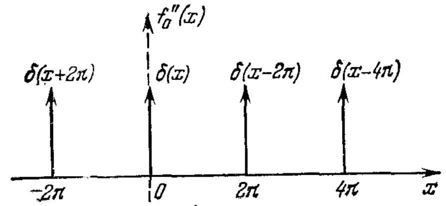

Рис. 14.

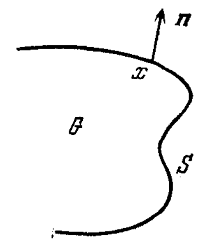

Рис. 15.

з) Проверим, что функция $\frac{1}{|x|}$ в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\frac{1}{|x|}=-4\pi\delta(x). \tag{3.8}$$

Действительно, функция $\frac{1}{|x|}$ локально интегрируема в $\mathbb{R}^3$ и

$$\Delta\frac{1}{|x|}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right)=0,\quad x\neq 0. \tag{3.9}$$

Пусть $\varphi\in\mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U_R$. Тогда

$$\left(\Delta\frac{1}{|x|},\varphi\right)=\left(\frac{1}{|x|},\Delta\varphi\right)=\int_{U_R}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon<|x|<R}\frac{1}{|x|}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

Применяя формулу Грина (3.7) при $f=\frac{1}{|x|}$ и $G=[x\colon \varepsilon<|x|<R]$ (рис. 16) и учитывая (3.9), получим формулу (3.8):

$$\left(\Delta\frac{1}{|x|},\ \varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{\varepsilon<|x|<R}\Delta\frac{1}{|x|}\varphi(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\left(\int\limits_{S_\varepsilon}+\int\limits_{S_R}\right)\left(\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}-\varphi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|x|}\right)dS\right]=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial|x|}-\varphi\frac{1}{|x|^2}\right)dS=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,dS=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}[\varphi(0)-\varphi(x)]\,dS-4\pi\varphi(0)\right\}=-4\pi(\delta,\varphi).$$

Равенство (3.8) можно интерпретировать следующим образом: функция $\frac{1}{|x|}$ есть ньютонов (кулонов) потенциал, порождаемый зарядом $+1$ в точке $x=0$.

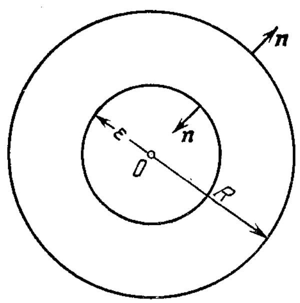

Рис. 16

Аналогично

$$\Delta\ln|x|=2\pi\delta(x),\qquad n=2,$$
$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\,\sigma_n\delta(x),\quad n\geqslant 3,\tag{3.10}$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ (см. § 0.6).

Функция $\mathscr{E}_n(x)$, равная

$$-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n|x|^{n-2}}\ (n\geqslant 3),$$
$$\frac{1}{2\pi}\ln|x|\,(n=2),\quad \frac{1}{2}|x|\,(n=1),$$

называется *фундаментальным решением* оператора Лапласа.

4. Локальная структура обобщенных функций. Сейчас мы докажем, что локально пространство $\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ является таким (наименьшим) расширением пространства $\mathscr{L}^\infty(\mathcal{O})$, в котором всегда возможно дифференцирование.

Теорема. *Пусть $f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O})$ и открытое множество $\mathcal{O}'\Subset\mathcal{O}$. Тогда существуют функция $g\in\mathscr{L}^\infty(\mathcal{O}')$ и целое число $m=m(\mathcal{O}')\geqslant 0$ такие, что* *)

$$f(x)=D_1^m\ldots D_n^m g(x),\quad x\in\mathcal{O}'.\tag{4.1}$$

*) Производная в (4.1) понимается в смысле обобщенных функций.

Доказательство. По теореме § 1.3 существуют числа K и k такие, что выполнено неравенство

$$|(f,\varphi)|\leqslant K\|\varphi\|_{C^k(\overline{\mathcal{O}'})},\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}').\tag{4.2}$$

Так как для $\psi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}')$ $\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}D_j\psi\,dx_j'$, то

$$\max_{x\in\overline{\mathcal{O}'}}|\psi(x)|\leqslant d\max_{x\in\overline{\mathcal{O}'}}|D_j\psi(x)|,$$

где d — диаметр $\mathcal{O}'$. Поэтому, применяя это неравенство достаточное число раз, из (4.2) получаем неравенство

$$|(f,\varphi)|\leqslant C\max_{x\in\overline{\mathcal{O}'}}\left|D_1^k\ldots D_n^k\varphi(x)\right|,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}').\tag{4.3}$$

Далее, для $\psi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}')$

$$\psi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^n\psi(y)}{\partial y_1\ldots\partial y_n}\,dy_1\ldots dy_n$$

и потому

$$|\psi(x)|\leqslant\int\limits_{\mathcal{O}'}|D_1\ldots D_n\psi(y)|\,dy.$$

Отсюда и из (4.3) вытекает неравенство (при $m=k+1$)

$$|(f,\varphi)|\leqslant C\int\limits_{\mathcal{O}'}|D_1^m\ldots D_n^m\varphi(x)|\,dx,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}').\tag{4.4}$$

Из теоремы Хана — Банаха следует, что линейный непрерывный функционал f^*:

$$\chi(x)=(-1)^{mn}D_1^m\ldots D_n^m\varphi(x)\to(f^*,\chi)=(f,\varphi),\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}'),\tag{4.5}$$

допускает расширение до линейного непрерывного функционала на $\mathscr{L}^1(\mathcal{O}')$ с нормой $\leqslant C$, в силу неравенства (4.4):

$$|(f^*,\chi)|=|(f,\varphi)|\leqslant C\|\chi\|_{\mathscr{L}^1(\mathcal{O}')}.$$

По теореме Ф. Рисса существует функция $g\in\mathscr{L}^\infty(\mathcal{O}')$ с нормой $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty(\mathcal{O}')}\leqslant C$ такая, что

$$(f^*,\chi)=(-1)^{mn}\int\limits_{\mathcal{O}'}g(x)\,\chi(x)\,dx,$$

Отсюда и из (4.5) при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ выводим

$$(f, \varphi) = (-1)^{mn} \int_{\mathcal{O}'} g(x) D_1^m \ldots D_n^m \varphi(x)\, dx = (D_1^m \ldots D_n^m g, \varphi),$$

что и эквивалентно равенству (4.1). Теорема доказана.

Следствие. *В условиях теоремы*

$$f(x) = D_1^{m+1} \ldots D_n^{m+1} g_1(x) \quad \text{в} \quad \mathcal{O}', \quad g_1 \in C(\overline{\mathcal{O}}'). \tag{4.6}$$

Представление (4.6) следует из представления (4.1), если продолжить функцию $g(x)$ нулем на все $\mathbb{R}^n$ и положить

$$g_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} g(y)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

5. Обобщенные функции с компактным носителем. На множестве функций $C^\infty(\mathcal{O})$ введем сходимость:

$$\varphi_k \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{в} \ C^\infty(\mathcal{O}), \ \text{если}$$

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in \mathcal{O}'}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty \ \text{для всех} \ \alpha \ \text{и} \ \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}.$$

Из этого определения следует, что из сходимости в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ следует сходимость в $C^\infty(\mathcal{O})$, но не наоборот.

Пусть обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ имеет компактный носитель в $\mathcal{O}$, $\operatorname{supp} f = K \Subset \mathcal{O}$. Пусть $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\eta(x) = 1$ в окрестности K (см. § 1.2). Построим функционал $\tilde{f}$ на $C^\infty(\mathcal{O})$ по правилу

$$(\tilde{f}, \varphi) = (f, \eta\varphi), \qquad \varphi \in C^\infty(\mathcal{O}). \tag{5.1}$$

Очевидно, $\tilde{f}$ — *линейный* функционал на $C^\infty(\mathcal{O})$. Далее, поскольку операция $\varphi \to \eta\varphi$ непрерывна из $C^\infty(\mathcal{O})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, то $\tilde{f}$ — *непрерывный* функционал на $C^\infty(\mathcal{O})$. Функционал $\tilde{f}$ является *продолжением* функционала f с $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ на $C^\infty(\mathcal{O})$, так как при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$

$$(\tilde{f}, \varphi) = (f, \eta\varphi) = (\eta f, \varphi) = (f, \varphi),$$

в силу равенства (10.2) § 1.

Покажем, что существует *единственное*, линейное и непрерывное продолжение f на $C^\infty(\mathcal{O})$ (в частности, продолжение (5.1) не зависит от вспомогательной функции η). Пусть $\tilde{\tilde{f}}$ — другое такое продолжение f. Введем последовательность функций $\{\eta_k\}$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ таких, что $\eta_k(x) = 1$, $x \in \mathcal{O}_k$ $(\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}_2 \Subset \ldots, \mathcal{O} = \bigcup_k \mathcal{O}_k)$, так что $\eta_k \to 1$, $k \to \infty$ в $C^\infty(\mathcal{O})$. Поэтому для любой $\varphi \in C^\infty(\mathcal{O})$ будем иметь $\eta_k\varphi \to \varphi$, $k \to \infty$ в $C^\infty(\mathcal{O})$. Следовательно,

$$(\tilde{f}, \varphi) = (\tilde{f}, \lim_{k\to\infty} \eta_k\varphi) = \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}, \eta_k\varphi) = \lim_{k\to\infty} (f, \eta_k\varphi) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{\tilde{f}}, \eta_k\varphi) = (\tilde{\tilde{f}}, \lim_{k\to\infty} \eta_k\varphi) = (\tilde{\tilde{f}}, \varphi), \qquad \varphi \in C^\infty(\mathcal{O}),$$

так что $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$.

Итак, мы доказали необходимость условий в следующей теореме.

Теорема. *Для того чтобы обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ имела компактный носитель в $\mathcal{O}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала линейное и непрерывное продолжение на $C^\infty(\mathcal{O})$.*

Доказательство достаточности. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ допускает линейное и непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на $C^\infty(\mathcal{O})$. Если бы f не обладала компактным носителем в $\mathcal{O}$, то можно было бы указать последовательность функций $\{\varphi_k\}$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}}_k$ $\left(\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}_2 \Subset \ldots, \bigcup_k \mathcal{O}_k = \mathcal{O}\right)$ и $(f, \varphi_k) = 1$. С другой стороны, $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $C^\infty(\mathcal{O})$, а потому $(\tilde{f}, \varphi_k) \to 0$, $k \to \infty$. Но $(\tilde{f}, \varphi_k) = (f, \varphi_k) = 1$, что противоречиво. Теорема доказана.

Пусть f — обобщенная функция с компактным носителем в $\mathcal{O}$. Тогда, в силу (5.1), имеем

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Так как $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ и $\operatorname{supp} \eta \Subset \mathcal{O}$, то $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ при некотором $\mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}$. Поэтому $\eta\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}')$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. По теореме § 1.3 существуют числа $K = K(\mathcal{O}')$ и $m = m(\mathcal{O}')$ такие, что справедливо неравенство

$$|(f, \varphi)| = |(f, \eta\varphi)| \leqslant K \|\eta\varphi\|_{C^m(\overline{\mathcal{O}}')}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

откуда сразу же вытекает неравенство

$$|(f, \varphi)| \leqslant C \|\varphi\|_{C^m(\overline{\mathcal{O}}')}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{5.2}$$

Из неравенства (5.2) вытекает утверждение: всякая обобщенная *функция с компактным носителем в $\mathcal{O}$ имеет конечный порядок в $\mathcal{O}$* (см. § 1.3).

Совокупность обобщенных функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{E}'$. Таким образом, доказано, что $\mathcal{E}' = C^\infty(\mathbb{R}^n)'$.

6. Обобщенные функции с точечным носителем. Обобщенные функции, носители которых состоят из изолированных точек, допускают явное описание. Это дается следующей теоремой.

Теорема. *Если носитель обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$ состоит из единственной точки $x=0$, то она единственным способом представляется в виде*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha D^\alpha \delta(x), \tag{6.1}$$

где N — порядок f и c_α — некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $\eta \in \mathcal{D}(U_1)$, $\eta(x)=1$, $|x| \leqslant 1/2$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ имеем $f = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f$ и, стало быть, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ получим

$$(f, \varphi) = \left(\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f, \varphi\right) = \left(f, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi - \varphi_N)\right) + \left(f, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi_N\right), \tag{6.2}$$

где

$$\varphi_N(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Так как $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi - \varphi_N) \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$, то, применяя неравенство (5.2), получим

$$\left|\left(f, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi - \varphi_N)\right)\right| \leqslant C \left\|\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi - \varphi_N)\right\|_{C^N(\overline{U}_\varepsilon)} =$$
$$= C \max_{\substack{|x| \leqslant \varepsilon \\ |\alpha| \leqslant N}} \left|D^\alpha \left\{\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)[\varphi(x) - \varphi_N(x)]\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{\substack{|x| \leqslant \varepsilon \\ |\alpha| \leqslant N}} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\beta}{\alpha} \left|D^\beta \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^{\alpha-\beta}[\varphi(x) - \varphi_N(x)]\right| \leqslant$$
$$\leqslant C' \max_{|\alpha| \leqslant N} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \varepsilon^{-|\beta|} \varepsilon^{N-|\alpha-\beta|} \varepsilon \leqslant C' \max_{|\alpha| \leqslant N} \varepsilon^{N-|\alpha|+1} = C''\varepsilon.$$

Устремим в правой части равенства (6.2) $\varepsilon \to +0$. В силу полученной оценки, первое слагаемое будет стремиться к нулю. Второе же слагаемое вообще не зависит от ε и равно $(\tilde{f}, \varphi_N)$, где $\tilde{f}$ — продолжение f на $C^\infty(\mathcal{O})$ (см. § 2.5). Поэтому равенство (6.2) принимает вид

$$(f, \varphi) = (\tilde{f}, \varphi_N) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} (\tilde{f}, x^\alpha).$$

Обозначая теперь

$$c_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\tilde{f}, x^\alpha),$$

получим представление (6.1):

$$(f, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha \varphi(0) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha (D^\alpha \delta, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Докажем единственность представления (6.1). Если имеется другое такое представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c'_\alpha D^\alpha \delta(x),$$

то, вычитая, получим

$$0 = \sum_{|\alpha| \leqslant N} (c'_\alpha - c_\alpha) D^\alpha \delta(x),$$

откуда

$$0 = \sum_{|\alpha| \leqslant N} (c'_\alpha - c_\alpha)(D^\alpha \delta, x^k) =$$
$$= \sum_{|\alpha| \leqslant N} (c'_\alpha - c_\alpha)(-1)^{|\alpha|} D^\alpha x^k|_{x=0} = (-1)^{|k|} k! (c'_k - c_k),$$

т. е. $c'_k = c_k$. Теорема доказана.

Пример. *Общее решение уравнения*

$$x^m u(x) = 0 \tag{6.3}$$

в классе $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ дается формулой

$$u(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \tag{6.4}$$

где c_k — произвольные постоянные.

Действительно, если $u \in \mathcal{D}'$ есть решение уравнения (6.3), то либо $u=0$, либо $\operatorname{supp} u$ совпадает с точкой $x=0$. По доказанной теореме

$$u(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant N} c_k \delta^{(k)}(x) \tag{6.5}$$

при некоторых числах c_k и целом $N \geqslant 0$. Принимая во внимание равенства (3.3) и подставляя (6.5) в уравнение (6.3), мы имеем

$$0 = (-1)^m m! \sum_{m \leqslant k \leqslant N} \binom{m}{k} c_k \delta^{(k-m)}(x);$$

отсюда следует, что $c_k = 0$, $k \geqslant m$. Таким образом, в представлении (6.5) можно считать $N = m-1$ и формула (6.4) доказана. Осталось заметить, что правая часть (6.4) удовлетворяет уравнению (6.3) при произвольных постоянных c_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

§ 3. Прямое произведение обобщенных функций

1. Определение прямого произведения. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — локально суммируемые функции в открытых множествах $\mathcal{O}_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^m$ соответственно. Функция $f(x)\, g(y)$ будет локально суммируемой в $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Она определяет (регулярную) обобщенную функцию $f(x)\,g(y)=g(y)\,f(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$, действующую на основные функции $\varphi(x, y)$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$ по формулам

$$(f(x)\,g(y), \varphi)=\int\limits_{\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2} f(x)\,g(y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{O}_1} f(x)\int\limits_{\mathcal{O}_2} g(y)\,\varphi(x, y)\,dy\,dx=\int\limits_{\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2} g(y)f(x)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{O}_2} g(y)\int\limits_{\mathcal{O}_1} f(x)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

т. е.

$$(f(x)\,g(y), \varphi)=(f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \tag{1.1}$$

$$(g(y)\,f(x), \varphi)=(g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \tag{1.1'}$$

Эти равенства выражают теорему Фубини о совпадении повторных интегралов с кратным.

Равенства (1.1) и (1.1′) мы примем за исходные для определения *прямого произведения* $f(x)\times g(y)$ и $g(y)\times f(x)$ обобщенных функций $f\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ и $g\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$:

$$(f(x)\times g(y), \varphi)=(f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2), \tag{1.2}$$

$$(g(y)\times f(x), \varphi)=(g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2). \tag{1.2'}$$

Проверим, что это определение корректно, т. е. что правая часть равенства (1.2) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$.

Так как при каждом $x\in\mathcal{O}_1$ функция $\varphi(x, y)\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$, а $g\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$, то функция

$$\psi(x)=(g(y), \varphi(x, y)), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2), \tag{1.3}$$

определена в $\mathcal{O}_1$. Теперь докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\mathcal{O}'\Subset\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$ и $g\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$. Тогда существуют открытое множество $\tilde{\mathcal{O}}_1=\tilde{\mathcal{O}}_1(\mathcal{O}')\Subset\mathcal{O}_1$ и числа $C=C(\mathcal{O}', g)\geqslant 0$, $m=m(\mathcal{O}', g)\geqslant 0$ — целое, такие, что*

$$\psi\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{O}}_1), \quad \text{если} \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}'); \tag{1.4}$$

$$D^\alpha\psi(x)=\left(g(y), D_x^\alpha\varphi(x, y)\right), \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2); \tag{1.5}$$

$$\left|D^\alpha\psi(x)\right|\leqslant C\max_{\substack{(x,y)\in\bar{\mathcal{O}}'\\ |\beta|\leqslant m}}\left|D_x^\alpha D_y^\beta\varphi(x, y)\right|, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}'), \quad x\in\mathcal{O}_1. \tag{1.6}$$

Доказательство. Докажем, что функция $\psi(x)$, определенная равенством (1.3), финитна в $\mathcal{O}_1$. Так как $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathcal{O}'\Subset\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$, то найдутся такие открытые множества $\mathcal{O}_1'\Subset\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2'\Subset\mathcal{O}_2$, что $\mathcal{O}'\Subset\mathcal{O}_1'\times\mathcal{O}_2'$ (рис. 17). Поэтому, если $x\in\mathcal{O}_1\setminus\mathcal{O}_1'$, то $\varphi(x, y)=0$ при всех $y\in\mathcal{O}_2$ и потому $\psi(x)=(g, 0)=0$, так что $\psi(x)=0$ вне $\mathcal{O}_1'$. Выбирая открытое множество $\tilde{\mathcal{O}}_1$ такое, что $\mathcal{O}_1'\Subset\tilde{\mathcal{O}}_1\Subset\mathcal{O}_1$, заключаем: $\operatorname{supp}\psi\subset\tilde{\mathcal{O}}_1$.

Докажем, что ψ непрерывна в $\mathcal{O}_1$. Фиксируем произвольную точку $x\in\mathcal{O}_1$ и пусть $x_k\to x$, $x_k\in\mathcal{O}_1$. Тогда

$$\varphi(x_k, y)\to\varphi(x, y),$$

$$x_k\to x \quad \text{в} \quad \mathcal{D}(\mathcal{O}_2). \tag{1.7}$$

Действительно, $\operatorname{supp}\varphi(x_k, y)\subset\subset\mathcal{O}_2'\Subset\mathcal{O}_2$ и

$$D_y^\alpha\varphi(x_k, y)\overset{y\in\mathcal{O}_2}{\rightrightarrows}D_y^\alpha\varphi(x, y),$$

$$x_k\to x.$$

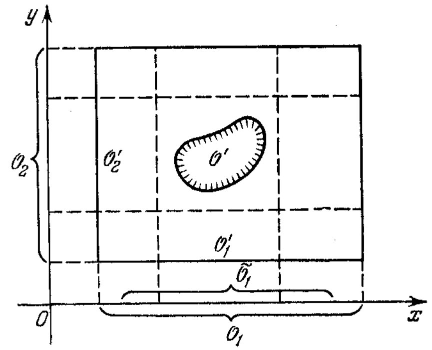

Рис. 17.

Пользуясь непрерывностью функционала g, из (1.3) и (1.7) получаем при $x_k\to x$

$$\psi(x_k)=(g(y), \varphi(x_k, y))\to(g(y), \varphi(x, y))=\psi(x),$$

т. е. функция ψ непрерывна в (произвольной) точке x. Таким образом, $\psi\in C(\mathcal{O}_1)$.

Докажем, что $\psi\in C^\infty(\mathcal{O}_1)$ и справедлива формула дифференцирования (1.5). Пусть $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$. Тогда при каждом $x\in\mathcal{O}_1$

$$\chi_h(y)=\frac{1}{h}[\varphi(x+he_1, y)-\varphi(x, y)]\to\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_1}, \tag{1.8}$$

$$h\to 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}(\mathcal{O}_2).$$

Действительно, $\operatorname{supp}\chi_h\subset\mathcal{O}_2'\Subset\mathcal{O}_2$ при достаточно малых h и

$$D^\alpha\chi_h(y)\overset{y\in\mathcal{O}_2}{\rightrightarrows}D_y^\alpha\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_1}, \qquad h\to 0.$$

Поскольку $g\in\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$, то, пользуясь (1.3) и (1.8), получаем

$$\frac{\psi(x+he_1)-\psi(x)}{h}=\frac{1}{h}[(g(y), \varphi(x+he_1, y))-(g(y), \varphi(x, y))]=$$

$$=\left(g(y), \frac{\varphi(x+he_1, y)-\varphi(x, y)}{h}\right)=(g, \chi_h)\to\left(g(y), \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_1}\right),$$

откуда и вытекает справедливость формулы (1.5) при $\alpha=(1, 0, \ldots, 0)$, и, значит, для всех первых производных

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}=\left(g(y), \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x_j}\right), \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Применяя к этой формуле снова такие же рассуждения, убеждаемся в справедливости формулы (1.5) для всех вторых производных и т. д. и, стало быть, для всех производных. Так как функция $D^\alpha\varphi(x, y)$ также принадлежит $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, то из формулы (1.5) заключаем, по доказанному, что $D^\alpha\psi(x)$ — непрерывная функция в $\mathcal{O}_1$ при всех α, так что $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}_1)$.

Отсюда и из того факта, что $\operatorname{supp}\psi \subset \tilde{\mathcal{O}}_1$, заключаем, что $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ и (1.4) доказано.

Докажем неравенство (1.6). Пусть $x \in \mathcal{O}_1$. Тогда, по доказанному, $D_x^\alpha\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2')$, $\mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_2$. По теореме § 1.3 существуют числа $C \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$ — целое, зависящие только от g и $\mathcal{O}_2'$, такие, что

$$|D^\alpha\psi(x)| = |(g(y), D_x^\alpha\varphi(x, y))| \leqslant C \max_{\substack{y \in \bar{\mathcal{O}}_2' \\ |\beta| \leqslant m}} |D_y^\beta D_x^\alpha \varphi(x, y)|, \qquad x \in \mathcal{O}_1,$$

откуда и вытекает неравенство (1.6). Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Операция*

$$\varphi(x, y) \to \psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$$

линейна и непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ *в* $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$.

Действительно, линейность этой операции очевидна. Далее, если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, то по лемме $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$, так что эта операция переводит $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$. Докажем ее непрерывность. Пусть $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Тогда

$$\operatorname{supp}\varphi_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2, \quad D_x^\alpha D_y^\beta \varphi_k(x, y) \overset{(x, y)}{\rightrightarrows} 0, \qquad k \to \infty.$$

Отсюда и из (1.4) и (1.6) для последовательности $\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y))$, $k = 1, 2, \ldots$ выводим

$$\operatorname{supp}\psi_k \subset \tilde{\mathcal{O}}_1 \Subset \mathcal{O}_1, \quad D^\alpha\psi_k(x) \overset{x}{\rightrightarrows} 0, \qquad k \to \infty,$$

так что $\psi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$.

Вернемся к формуле (1.2) определения прямого произведения $f(x) \times g(y)$. По следствию из только что доказанной леммы операция $\varphi \to \psi$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ и, следовательно, правая часть равенства (1.2), равная (f, ψ), определяет линейный и непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, так что $f(x) \times g(y) \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$.

Аналогично, используя (1.2′), докажем, что $g(y) \times f(x) \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$.

2. Свойства прямого произведения.

а) К о м м у т а т и в н о с т ь п р я м о г о п р о и з в е д е н и я.

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x), \qquad f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1), \qquad g \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2). \tag{2.1}$$

Действительно, на основных функциях $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} u_i(x) v_i(y), \quad u_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1), \quad v_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2), \tag{2.2}$$

равенство (2.1) вытекает из определений (1.2) и (1.2′):

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} (f, u_i)(g, v_i) = (g(y) \times f(x), \varphi).$$

Чтобы распространить равенство (2.1) на любые основные функции из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, докажем лемму о том, что множество основных функций вида (2.2) плотно в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$.

Л е м м а. *Для любой* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ *существует последовательность основных функций из* $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N_k} u_{ik}(x) v_{ik}(y),$$

$$u_{ik} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1), \quad v_{ik} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

сходящаяся к φ *в* $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\operatorname{supp}\varphi \Subset \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2 \Subset \mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность полиномов $P_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$|D^\alpha\varphi(x, y) - D^\alpha P_k(x, y)| < \frac{1}{k}, \quad |\alpha| \leqslant k, \quad (x, y) \in \bar{\mathcal{O}}_1' \times \bar{\mathcal{O}}_2'. \tag{2.3}$$

Пусть $\xi(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1')$, $\xi(x) = 1$, $x \in \tilde{\mathcal{O}}_1$; $\eta(y) \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2')$, $\eta(y) = 1$, $y \in \tilde{\mathcal{O}}_2$. Тогда последовательность функций

$$\varphi_k(x, y) = \xi(x)\eta(y)P_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

— требуемая. Действительно, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ и при всех $k \geqslant |\alpha|$, в силу (2.3), имеем

$$|D^\alpha\varphi(x, y) - D^\alpha\varphi_k(x, y)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{если } (x, y) \in \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2, \\ \dfrac{c_\alpha}{k}, & \text{если } (x, y) \in \mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2' \setminus (\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2), \end{cases}$$

при некоторых c_α, оцениваемых через $\max|D^\beta\xi|$ и $\max|D^\beta\eta|$, $\beta \leqslant \alpha$. Это и значит, что $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Лемма доказана.

Пусть φ — произвольная основная функция из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. По лемме существует последовательность $\{\varphi_k\}$ функций вида (2.2), сходящаяся к φ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Отсюда, пользуясь непрерывностью на $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ функционалов $f(x) \times g(y)$ и $g(y) \times f(x)$ (см. § 3.1) и доказанным равенством (2.1) на функциях вида (2.2), получим равенство (2.1) и в общем случае:

$$(f(x)\times g(y),\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\varphi_k)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(g(y)\times f(x),\varphi_k)=(g(y)\times f(x),\varphi).$$

б) Ассоциативность прямого произведения. *Если* $f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$, $g\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2)$ *и* $h\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_3)$, *то*

$$[f(x)\times g(y)]\times h(z)=f(x)\times[g(y)\times h(z)]. \qquad (2.4)$$

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\mathcal{O}_3)$, то

$$([f(x)\times g(y)]\times h(z),\varphi)=(f(x)\times g(y),(h(z),\varphi(x,y,z)))=$$
$$=(f(x),(g(y),(h(z),\varphi(x,y,z))))=(f(x),(g(y)\times h(z),\varphi(x,y,z)))=$$
$$=(f(x)\times[g(y)\times h(z)],\varphi).$$

Впредь, учитывая коммутативность и ассоциативность операции прямого произведения, мы будем писать:

$$(f\times g)\times h=f\times g\times h.$$

Пример. $\delta(x)=\delta(x_1)\times\delta(x_2)\times\ldots\times\delta(x_n)$.

в) *Операция* $f\to f\times g$, *если* $g\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2)$, *линейна и непрерывна из* $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$ *в* $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$.

Действительно, линейность этой операции очевидна. Докажем ее непрерывность. Пусть $f_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$. Тогда при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$

$$(f_k(x)\times g(y),\varphi)=(f_k(x),(g(y),\varphi(x,y)))=(f_k,\psi)\to 0,\quad k\to\infty,$$

т. е. $f_k(x)\times g(y)\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$. Здесь мы воспользовались тем, что $\psi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1)$, в силу леммы § 3.1.

г) *Справедлива формула*

$$\operatorname{supp}(f\times g)=\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g,\quad f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1),\quad g\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2). \qquad (2.5)$$

Следствие. *Если* $f(x)\times 1(y)=0$ *в* $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$, *то* $f(x)=0$ *в* $\mathcal{O}_1$.

Действительно, пусть $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g$ и $U(x_0,y_0)$ — окрестность точки (x_0,y_0), содержащаяся в $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$. Существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_0 и y_0 соответственно такие, что $U_1\times U_2\subset U(x_0,y_0)$. Из определения носителя обобщенной функции (см. § 1.5, б)) следует, что найдутся функции $\varphi_1\in\mathscr{D}(U_1)$ и $\varphi_2\in\mathscr{D}(U_2)$ такие, что $(f,\varphi_1)\neq 0$ и $(g,\varphi_2)\neq 0$. А тогда $(f\times g,\varphi_1\varphi_2)=(f,\varphi_1)(g,\varphi_2)\neq 0$. Отсюда, ввиду произвольности окрестности $U(x_0,y_0)$, следует, что $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}(f\times g)$, так что

$$\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g\subset\operatorname{supp}(f\times g). \qquad (2.6)$$

Докажем обратное включение. Возьмем основную функцию φ из $\mathscr{D}(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$ такую, что

$$\operatorname{supp}\varphi\subset(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)\setminus(\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g)$$

(рис. 18). Тогда найдется такая окрестность U множества $\operatorname{supp}f$, что при каждом $x\in U$ $\operatorname{supp}\varphi(x,y)\subset\mathcal{O}_2\setminus\operatorname{supp}g$. Поэтому (см. § 1.5, а))

$$\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))=0,\quad x\in U,$$

и, стало быть, $\operatorname{supp}\psi\cap\operatorname{supp}f=\varnothing$, а потому

$$(f\times g,\varphi)=(f,\psi)=0.$$

Таким образом, нулевое множество $\mathcal{O}_{f\times g}$ содержит $(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)\setminus(\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g)$, а значит, справедливо включение

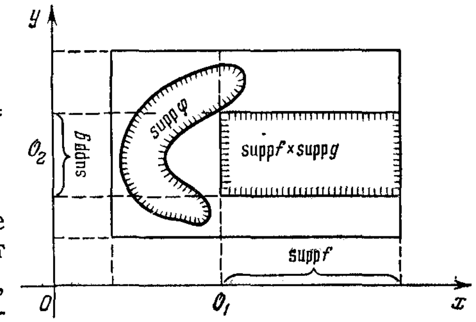

Рис. 18.

$$\operatorname{supp}(f\times g)\subset\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g,$$

которое вместе с обратным включением (2.6) и доказывает равенство (2.5).

д) Справедливы следующие, легко проверяемые формулы: *если* $f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$ *и* $g\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_2)$, *то*

$$D_x^\alpha D_y^\beta[f(x)\times g(y)]=D^\alpha f(x)\times D^\beta g(y), \qquad (2.7)$$
$$a(x)b(y)[f(x)\times g(y)]=[a(x)f(x)]\times[b(y)g(y)], \qquad (2.8)$$
$$(f\times g)(x+x_0,y+y_0)=f(x+x_0)\times g(y+y_0). \qquad (2.9)$$

3. Некоторые применения. Будем говорить, что обобщенная функция $F(x,y)$ из $\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)$ *не зависит от переменных* y, если она представима в виде

$$F(x,y)=f(x)\times 1(y),\quad f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1) \qquad (3.1)$$

(и тогда $F\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}^m)$). Обобщенная функция $f(x)\times 1(y)=1(y)\times f(x)$ действует на основные функции φ из $\mathscr{D}(\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}^m)$ по правилу

$$(f(x)\times 1(y),\varphi)=\left(f(x),\int\varphi(x,y)\,dy\right)=$$
$$=(1(y)\times f(x),\varphi)=\int(f(x),\varphi(x,y))\,dy.$$

Таким образом, мы получили равенство

$$\left(f(x),\int\varphi(x,y)\,dy\right)=\int(f(x),\varphi(x,y))\,dy, \qquad (3.2)$$

справедливое для всех $f\in\mathscr{D}'(\mathcal{O}_1)$ и $\varphi\in\mathscr{D}(\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}^m)$.

Формулу (3.2) можно рассматривать как своеобразное обобщение теоремы Фубини.

Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathcal{O} \times (a, b))$. Следующие три утверждения эквивалентны:

1) *$F(x, y)$ не зависит от переменной y;*
2) *$F(x, y)$ инвариантна в $\mathcal{O} \times (a, b)$ относительно трансляций по y, т. е.*

$$F(x, y+h) = F(x, y); \quad a < y, \; y+h < b; \tag{3.3}$$

3) *$F(x, y)$ удовлетворяет в $\mathcal{O} \times (a, b)$* уравнению

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0. \tag{3.4}$$

Следствие. *Если $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, в $\mathcal{O}$, то $f = \mathrm{const}$ в $\mathcal{O}$; если f инвариантна относительно трансляций по всем аргументам в $\mathcal{O}$, то $f = \mathrm{const}$ в $\mathcal{O}$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2). Вытекает из (3.1), в силу (2.9).

2) $\to$ 3). Переходя в равенстве $\frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{h} = 0$ к пределу при $h \to 0$ в $\mathcal{D}'(\mathcal{O} \times (a, b))$, заключаем, что F удовлетворяет уравнению (3.4).

3) $\to$ 1). Пусть F удовлетворяет в $\mathcal{O} \times (a, b)$ уравнению (3.4). Тогда, действуя как в § 2.2, для любой φ из $\mathcal{D}(\mathcal{O} \times (a, b))$ получим представление

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \omega_\varepsilon(y - y_0) \int \varphi(x, \xi)\, d\xi, \tag{3.5}$$

где $y_0 \in (a, b)$, $\varepsilon < \min(y_0 - a, b - y_0)$ и

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\varphi(x, y') - \omega_\varepsilon(y' - y_0) \int \varphi(x, \xi)\, d\xi\right] dy' \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \times (a, b)).$$

Вводя обобщенную функцию $f(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, действующую на основные функции χ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ по правилу

$$(f, \chi) = (F(x, y), \omega_\varepsilon(y - y_0)\chi(x)),$$

и учитывая (3.4), из (3.5) получаем

$$(F, \varphi) = \left(F(x, y), \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \omega_\varepsilon(y - y_0) \int \varphi(x, \xi)\, d\xi\right) = \\ = \left(f(x), \int \varphi(x, \xi)\, d\xi\right),$$

т. е. $F(x, y) = f(x) \times 1(y)$, что и требовалось.

Аналогично доказывается такое утверждение (ср. § 2.6):

Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$. Уравнение

$$yu(x, y) = F(x, y) \tag{3.6}$$

всегда разрешимо и его общее решение имеет вид

$$(u, \varphi) = (F, \psi) + (f(x) \times \delta(y), \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1), \tag{3.7}$$

где f — произвольная обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$,

$$\psi(x, y) = \frac{1}{y}[\varphi(x, y) - \eta(y)\varphi(x, 0)], \tag{3.8}$$

$\eta(y)$ — произвольная функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, равная 1 в окрестности $y = 0$.

Действительно, так как операция $\varphi \to \psi$, задаваемая равенством (3.8), линейна и непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$, то правая часть равенства (3.7) есть обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$, причем первое слагаемое (F, ψ) удовлетворяет уравнению (3.6), а второе слагаемое — обобщенная функция $f(x) \times \delta(y)$ — удовлетворяет однородному уравнению

$$yu(x, y) = 0, \tag{3.9}$$

соответствующему уравнению (3.6).

Осталось доказать, что $f(x) \times \delta(y)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, есть общее решение уравнения (3.9) в $\mathcal{D}'(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$. Пусть $u(x, y)$ есть решение уравнения (3.9) в $\mathcal{D}'(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1)$. Тогда, в силу (3.8),

$$\varphi(x, y) = y\psi(x, y) + \eta(y)\varphi(x, 0), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1),$$

и потому

$$(u, \varphi) = (u, y\psi) + (u, \eta(y)\varphi(x, 0)) = (u, \eta(y)\varphi(x, 0)). \tag{3.10}$$

Вводя обобщенную функцию $f(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, действующую на основные функции χ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ по правилу

$$(f, \chi) = (u(x, y), \eta(y)\chi(x)),$$

из (3.10) получаем

$$(u, \varphi) = (f, \varphi(x, 0)) = (f(x) \times \delta(y), \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^1),$$

т. е. $u(x, y) = f(x) \times \delta(y)$, что и требовалось.

4. Обобщенные функции, гладкие по части переменных. Пусть $f(x, y)$ — обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ и $\varphi(x)$ — основная функция из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$. Введем обобщенную функцию $f_\varphi(y)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ по формуле

$$(f_\varphi, \psi) = (f, \varphi(x)\psi(y)), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2).$$

Из этого определения вытекает формула дифференцирования

$$D^\alpha f_\varphi(y) = (D_y^\alpha f)_\varphi(y). \tag{4.1}$$

Действительно,

$$((D_y^\alpha f)_\varphi, \psi) = (D_y^\alpha f, \psi\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \varphi D^\alpha \psi) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(f_\varphi, D^\alpha\psi) = (D^\alpha f_\varphi, \psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2).$$

Будем говорить, что обобщенная функция $f(x, y)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ *принадлежит классу* $C^p(\mathcal{O}_2)$ по y, $p = 0, 1, \ldots$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ обобщенная функция $f_\varphi \in C^p(\mathcal{O}_2)$; если же $f_\varphi \in C^p(\overline{\mathcal{O}}_2)$, то говорим: $f \in C^p(\overline{\mathcal{O}}_2)$ по y (ср. § 1.6).

Пусть $f \in C(\mathcal{O}_2)$ по y. Отсюда следует, что *при каждом* $y \in \mathcal{O}_2$ *существует сужение* $f_y(x)$ *из* $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ *обобщенной функции* $f(x, y)$, *причем*

$$f_\varphi(y) = (f_y, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1), \quad y \in \mathcal{O}_2. \tag{4.2}$$

Действительно, при фиксированном $y_0 \in \mathcal{O}_2$ $\varphi \to f_\varphi(y_0)$ есть линейный функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$. Докажем его непрерывность. Для этого отметим, что при всех достаточно больших $k \geqslant N(y_0)$ функционал

$$\varphi \to (f_\varphi(y), \omega_{1/k}(y - y_0)),$$

где $\omega_{1/k}$ — «шапочка» (см. § 1.2), принадлежит $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$. Но в силу (7.6) § 1,

$$(f_\varphi(y), \omega_{1/k}(y - y_0)) \to (f_\varphi(y), \delta(y - y_0)) = f_\varphi(y_0), \quad k \to \infty.$$

По теореме о полноте пространства $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ (см. § 1.4) заключаем отсюда, что функционал $f_\varphi(y_0)$ принадлежит $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$. Обозначая его через f_{y_0}, получим (4.2).

Учитывая формулу (4.1), из (4.2) получаем

$$D^\alpha(f_y, \varphi) = ((D_y^\alpha f)_y, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1), \quad y \in \mathcal{O}_2. \tag{4.3}$$

Пример. Пусть обобщенная функция F не зависит от переменной y, $F(x, y) = f(x) \times 1(y)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ (см. § 3.3). Тогда $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ по y и $F_y(x) = f(x)$.

Напомним, что класс $C_0(\mathcal{O})$, определенный в § 0.5, состоит из непрерывных и финитных в $\mathcal{O}$ функций; сходимость в нем введем так: $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $C_0(\mathcal{O})$, если

$$\operatorname{supp} f_k \subset \mathcal{O}' \Subset \mathcal{O} \quad \text{и} \quad f_k(x) \overset{x \in \mathcal{O}}{\rightrightarrows} 0, \quad k \to \infty.$$

Лемма. *Если* $f \in C(\mathcal{O}_2)$ *по* y, *то операция*

$$\chi \to (f_y, \chi(x, y))$$

непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ *в* $C_0(\mathcal{O}_2)$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Тогда $\operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2'$, где $\mathcal{O}_1' \Subset \mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_2$. Обозначим $\psi(y) \in (f_y, \chi(x, y))$.

Имеем $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_2$. Докажем, что $\psi \in C(\mathcal{O}_2)$. Пусть y_0 — произвольная точка из O_2 и $y_k \to y_0$, $k \to \infty$. Тогда

$$|\psi(y_k) - \psi(y_0)| \leqslant |(f_{y_k}, \chi(x, y_0)) - (f_{y_0}, \chi(x, y_0))| +$$
$$+ |(f_{y_k}, \chi(x, y_k) - \chi(x, y_0))|. \tag{4.4}$$

Первое слагаемое справа в (4.4) стремится к 0 при $k \to \infty$ в силу непрерывности функции $(f_y, \chi(x, y_0))$, а второе слагаемое — в силу слабой ограниченности множества $\{f_{y_k}\} \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ и в силу

$$\chi(x, y_k) - \chi(x, y_0) \to 0, \quad k \to \infty \text{ в } \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$$

по лемме § 1.4. Таким образом, $\psi \in C(\mathcal{O}_2)$ и потому $\psi \in C_0(\mathcal{O}_2)$.

Пусть $\chi_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Тогда $\operatorname{supp}\chi_k \subset \mathcal{O}_1' \times \mathcal{O}_2'$, где $\mathcal{O}_1' \Subset \mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_2$. Обозначая $\psi_k(y) = (f_y, \chi_k(x, y))$, имеем $\operatorname{supp}\psi_k \subset \mathcal{O}_2' \Subset \mathcal{O}_2$. Далее, множество обобщенных функций $\{f_y, y \in \mathcal{O}_2'\}$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_1)$ слабо ограничено. Поэтому, применяя неравенство (3.1) § 1 (см. также следствие из леммы § 1.4), при некоторых $K > 0$, $m \geqslant 0$ и при всех $y \in \mathcal{O}_2$ получим

$$|\psi_k(y)| = |(f_y, \chi_k(x, y))| \leqslant K\|\chi_k(x, y)\|_{C^m(\overline{\mathcal{O}}_1')} \leqslant$$
$$\leqslant K\|\chi_k\|_{C^m(\overline{\mathcal{O}}_1' \times \overline{\mathcal{O}}_2')} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем формулу: *если* $f \in C(\mathcal{O}_2)$ *по* y, *то*

$$(f, \chi) = \int (f_y, \chi(x, y))\,dy, \qquad \chi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2), \tag{4.5}$$

т. е. $f(x, y) = f_y(x)$.

Действительно, в силу (4.2) равенство (4.5) справедливо на основных функциях χ вида $\sum \varphi(x)\psi(y)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$:

$$\left(f, \sum \varphi(x)\psi(y)\right) = \sum \int f_\varphi(y)\psi(y)\,dy =$$
$$= \sum \int (f_y, \varphi)\psi(y)\,dy = \int \left(f_y, \sum \varphi(x)\psi(y)\right)dy. \tag{4.6}$$

Но множество таких функций плотно в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ (см. § 3.2, а)) и, кроме того, по лемме

$$\left(f_y, \sum \varphi(x)\psi(y)\right) \to (f_y, \chi(x, y)) \text{ в } C_0(\mathcal{O}_2),$$

если $\sum \varphi(x)\psi(y) \to \chi(x, y)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$. Отсюда и из (4.6) и следует формула (4.5).

§ 4. Свертка обобщенных функций

1. Определение свертки. Пусть f и g — локально суммируемые функции в $\mathbb{R}^n$. Если интеграл $\int f(y)\,g(x-y)\,dy$ существует для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ и определяет локально суммируемую функцию в $\mathbb{R}^n$, то он называется *сверткой* функций f и g и обозначается $f*g$, так что

$$(f*g)(x)=\int f(y)\,g(x-y)\,dy=$$
$$=\int g(y)\,f(x-y)\,dy=(g*f)(x). \qquad (1.1)$$

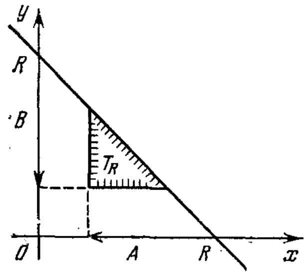

Рис. 19.

Отметим два случая, когда свертка $f*g$ заведомо существует.

а) Пусть $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $g\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $\operatorname{supp} f\subset A$, $\operatorname{supp} g\subset B$, причем множества A и B таковы, что для любого $R>0$ множество

$$T_R=[(x,y)\colon\ x\in A,\ y\in B,\ |x+y|\leqslant R]$$

ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$ (рис. 19). Тогда $f*g\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$.

Действительно, пользуясь теоремой Фубини, при всех $R>0$ имеем

$$\int\limits_{|x|<R}|f*g|\,dx\leqslant\iint\limits_{|x|<R}|f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{T_R}|f(y)|\,|g(\xi)|\,dy\,d\xi<\infty.$$

В частности, если f или g финитна, то T_R ограничено.

б) Пусть $f\in\mathcal{L}^p$ и $g\in\mathcal{L}^q$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$. Тогда $f*g\in\mathcal{L}^r$, где $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$.

Действительно, выбирая числа $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $s\geqslant 1$ и $t\geqslant 1$ такими, что

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1,\quad \alpha r=p=(1-\alpha)s,\quad \beta r=q=(1-\beta)t,$$

и тогда

$$p+\frac{pr}{s}=r=q+\frac{qr}{t},$$

и пользуясь неравенством Гёльдера и теоремой Фубини, получим

$$\|f*g\|^r_{\mathcal{L}^r}=\int\left|\int f(y)\,g(x-y)\,dy\right|^r dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\left[\int|f(y)|^{\alpha}|g(x-y)|^{\beta}|f(y)|^{1-\alpha}|g(x-y)|^{1-\beta}\,dy\right]^r dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\int|f(y)|^{\alpha r}|g(x-y)|^{\beta r}\,dy\left[\int|f(y)|^{(1-\alpha)s}\,dy\right]^{\frac{r}{s}}\times$$
$$\times\left[\int|g(x-y)|^{(1-\beta)t}\,dy\right]^{\frac{r}{t}}dx\leqslant\|f\|^r_{\mathcal{L}^p}\|g\|^r_{\mathcal{L}^q},$$

т. е.

$$\|f*g\|_{\mathcal{L}^r}\leqslant\|f\|_{\mathcal{L}^p}\|g\|_{\mathcal{L}^q}.$$

Эта оценка называется *неравенством Юнга*.

Свертка $f*g$ определяет регулярный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(f*g,\varphi)=\int(f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx=\int\varphi(x)\int f(y)\,g(x-y)\,dy\,dx=$$
$$=\int f(y)\int g(x-y)\,\varphi(x)\,dx\,dy=\int f(y)\int g(\xi)\,\varphi(y+\xi)\,d\xi\,dy,$$

т. е.

$$(f*g,\varphi)=\int f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy,\qquad \varphi\in\mathcal{D}. \qquad (1.2)$$

(При выводе (1.2) неоднократно использовалась теорема Фубини.)

Будем говорить, что последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *сходится к* 1 в $\mathbb{R}^n$, если: а) для любого компакта K найдется такой номер $N=N(K)$, что $\eta_k(x)=1$, $x\in K$, $k\geqslant N$; б) функции $\{\eta_k\}$ равномерно ограничены вместе со всеми производными, $|D^{\alpha}\eta_k(x)|<c_{\alpha}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots$

Отметим, что такие последовательности всегда существуют, например: $\eta_k(x)=\eta\left(\frac{x}{k}\right)$, где $\eta\in\mathcal{D}$, $\eta(x)=1$, $|x|<1$.

Докажем теперь, что (1.2) можно переписать в виде

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)*g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)),\quad \varphi\in\mathcal{D}, \qquad (1.3)$$

где $\{\eta_k\}$ — любая последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Действительно, функция $c_0|f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)|$ суммируема на $\mathbb{R}^{2n}$ и мажорирует последовательность функций $f(x)\,g(y)\,\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)$, $k=1,2,\ldots$, сходящуюся почти везде в $\mathbb{R}^{2n}$ к функции $f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)$. Отсюда, применяя теорему Лебега, получаем равенство

$$\int f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy=\lim_{k\to\infty}\int f(x)\,g(y)\,\eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy,$$

эквивалентное, в силу (1.2), равенству (1.3).

Исходя из равенств (1.3) и (1.2), примем следующее определение свертки обобщенных функций. Пусть f и g из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ таковы, что их прямое произведение $f(x)\times g(y)$ допускает продолжение $(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y))$ на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ — любая функция из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y))$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$. Отметим, что при каждом k функция $\eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, так что наша числовая последовательность определена.

Сверткой $f*g$ называется функционал

$$(f*g,\ \varphi)=(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)),\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Докажем, что функционал $f*g$ принадлежит $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, т. е. является обобщенной функцией. Для этого, в силу теоремы о полноте пространства $\mathscr{D}'$ (см. § 1.4), достаточно установить непрерывность линейных функционалов

$$(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)),\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{1.5}$$

на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi_\nu\to 0$, $\nu\to\infty$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\eta_k(x;\ y)\,\varphi_\nu(x+y)\to 0,\quad \nu\to\infty \text{ в } \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}),$$

поскольку $\eta_k\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Отсюда, в силу непрерывности функционала $f(x)\times g(y)$ на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ (см. § 3.1), получаем

$$(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi_\nu(x+y))\to 0,\quad \nu\to\infty,$$

что и доказывает непрерывность функционалов (1.5) на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что поскольку $\varphi(x+y)$ не принадлежит $\mathscr{D}(\mathbb{R}_2{}^n)$ (она не финитна в $\mathbb{R}^{2n}$), правая часть равенства (1.4) существует не для любых пар обобщенных функций f и g и, таким образом, свертка существует не всегда.

Аналогично определяется свертка и любого числа обобщенных функций. Например, пусть f, g и h — обобщенные функции из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{3n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{3n}$. Сверткой $f*g*h$ называется функционал

$$(f*g*h,\ \varphi)=(f(x)\times g(y)\times h(z),\ \varphi(x+y+z))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y)\times h(z),\ \eta_k(x;\ y;\ z)\,\varphi(x+y+z)),\ \varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.6}$$

если он существует.

2. Свойства свертки.

а) Коммутативность свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $g*f$ и они равны:*

$$f*g=g*f.$$

Это утверждение вытекает из определения свертки (см. § 4.1) и из коммутативности прямого произведения (см. § 3.2, а)):

$$(f*g,\ \varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(g(y)\times f(x),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=(g*f,\ \varphi),\quad \varphi\in\mathscr{D}.$$

Аналогично, из определения (1.6) получаем

$$f*g*h=f*h*g=h*f*g=\ \ldots\quad \text{и т. д.}$$

б) Свертка с δ-функцией. *Свертка любой обобщенной функции f из $\mathscr{D}'$ с δ-функцией существует и равна f:*

$$f*\delta=\delta*f=f. \tag{2.1}$$

Действительно, пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$\eta_k(x;\ 0)\,\varphi(x)\to\varphi,\quad k\to\infty \text{ в } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

и потому

$$(f*\delta,\ \varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times\delta(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(f(x),\ \eta_k(x;\ 0)\,\varphi(x))=(f,\ \varphi),$$

что и требовалось.

Замечание. Смысл формулы $f=f*\delta$ состоит в том, что всякую обобщенную функцию f можно разложить по δ-функциям, что формально записывают так:

$$f(x)=\int f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi.$$

Именно эту формулу и имеют в виду, когда говорят, что всякое материальное тело состоит из точечных масс, всякий источник состоит из точечных источников и т.д. (ср. § 1.1).

в) Сдвиг свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $f(x+h)*g(x)$ при всех $h\in\mathbb{R}^n$, причем*

$$f(x+h)*g(x)=(f*g)(x+h), \tag{2.2}$$

т. е. операции сдвига и свертки коммутируют; другими словами, сверточный оператор $f\to f*g$ — трансляционно-инвариантный оператор.

Действительно, пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда при любом $h \in \mathbb{R}^n$

$$\eta_k(x-h;\ y) \to 1, \quad k \to \infty \text{ в } \mathbb{R}^{2n}.$$

Теперь, пользуясь определением сдвига (см. § 1.9) и свертки (см. § 4.1), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$((f*g)(x+h), \varphi) = (f*g, \varphi(x-h)) = \\ = \lim_{k\to\infty} (f(x)\times g(y), \eta_k(x-h;\ y)\,\varphi(x-h+y)) = \\ = \lim_{k\to\infty} (f(x+h)\times g(y), \eta_k(x;\ y)\,\varphi(x+y)) = (f(x+h)*g, \varphi),$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались формулой (2.9) § 3 для сдвига прямого произведения.

г) Отражение свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $f(-x)*g(-x)$, причем*

$$f(-x)*g(-x) = (f*g)(-x). \tag{2.3}$$

Доказательство аналогично в).

д) Дифференцирование свертки. *Если свертка $f*g$ существует, то существуют свертки $D^\alpha f*g$ и $f*D^\alpha g$, причем*

$$D^\alpha f*g = D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g. \tag{2.4}$$

Это утверждение достаточно доказать для первых производных D_j, $j=1, \ldots, n$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда последовательность $\{\eta_k + D_j\eta_k\}$ также сходится к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Отсюда, пользуясь существованием свертки $f*g$ (см. § 4.1), получаем следующую цепочку равенств:

$$(D_j(f*g), \varphi) = -(f*g,\ D_j\varphi) = \\ = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\,\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j}\right) = \\ = -\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\ \frac{\partial}{\partial x_j}[\eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)] - \varphi(x+y)\frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\right) = \\ = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}[f(x)\times g(y)],\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)\right) + \\ + \lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y), \left[\eta_k(x;y) + \frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\right]\varphi(x+y)\right) - \\ - \lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)) = \\ = \lim_{k\to\infty}(D_jf(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)) + \\ + (f*g, \varphi) - (f*g, \varphi) = (D_jf*g, \varphi),$$

откуда и следует первое равенство (2.4) для D_j. Второе из равенств (2.4) следует из первого и из коммутативности свертки:

$$D_j(f*g) = D_j(g*f) = D_jg*f = f*D_jg.$$

Из равенств (2.1) и (2.4) вытекают равенства

$$D^\alpha f = D^\alpha\delta * f = \delta * D^\alpha f, \quad f \in \mathcal{D}'.$$

Отметим, что существование сверток $D^\alpha f*g$ и $f*D^\alpha g$ при $|\alpha| \geqslant 1$ еще недостаточно для существования свертки $f*g$ и справедливости равенств (2.4). Например, $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$, но $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$.

е) *Операция $f \to f*g$ линейна на множестве тех обобщенных функций f, для которых свертка с g существует.*

Это свойство свертки непосредственно следует из определения свертки (1.4) и из линейности операции $f \to f\times g$ (см. § 3.2, в)).

Отметим попутно, что операция $f \to f*g$, вообще говоря, не является непрерывной из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$, как показывает пример:

$$\delta(x-k) \to 0, \quad k\to\infty \text{ в } \mathcal{D}', \text{ однако } 1*\delta(x-k) = 1.$$

ж) *Если свертка $f*g$ существует, то*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}. \tag{2.5}$$

Действительно, пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такова, что

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \varnothing. \tag{2.6}$$

Поскольку $\operatorname{supp}(f\times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$ (см. § 3.2, г)), заключаем:

$$\operatorname{supp}[f(x)\times g(y)] \cap \operatorname{supp}[\eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)] \subset \\ \subset [\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g] \cap [(x, y):\ x+y \subset \operatorname{supp}\varphi] = \varnothing.$$

Поэтому, в силу § 1.5, а), имеем

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y)) = 0$$

для всех основных функций φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию (2.6). Это и значит, что справедливо включение (2.5).

Замечание. Множество $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ может быть и незамкнутым. Равенство во включении (2.5), вообще говоря, не имеет места; например, для свертки $\delta' * \theta = \delta$ (2.5) принимает вид $\{0\} \subset \{x \geqslant 0\}$.

з) Ассоциативность свертки. Вообще говоря, операция свертки не ассоциативна, например:

$$(1*\delta')*\theta = 1'*\theta = 0*\theta = 0, \text{ но } 1*(\delta'*\theta) = 1*\delta = 1.$$

Однако эти неприятности не возникают, если свертка $f*g*h$ существует. Точнее, справедливо утверждение:

Если свертки $f*g$ *и* $f*g*h$ *существуют, то существует и свертка* $(f*g)*h$, *причем*

$$(f*g)*h=f*g*h. \tag{2.7}$$

Действительно, пусть $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$ — последовательности функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящиеся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда последовательность

$$\eta_i(x;y)\,\xi_k(x+y;z),\qquad i\to\infty,\ k\to\infty$$

функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n})$ сходится к 1 в $\mathbb{R}^{3n}$. Отсюда и из существования свертки $f*g*h$ (см. § 4.1) следует существование двойного предела

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}}(f(x)\times g(y)\times h(z),\ \eta_i(x;y)\,\xi_k(x+y;z)\,\varphi(x+y+z))=$$
$$=(f*g*h,\ \varphi),\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

и, стало быть, — повторного предела

$$(f*g*h,\varphi)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty}(f(x)\times g(y)\times h(z),\ \eta_i(x;y)\,\xi_k(x+y;z)\,\varphi(x+y+z))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_i(x;y)\,(h(z),\ \xi_k(x+y;z)\,\varphi(x+y+z)))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}((f*g)(t),\ (h(z),\ \xi_k(t;z)\,\varphi(t+z)))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}((f*g)(t)\times h(z),\ \xi_k(t;z)\,\varphi(t+z))=((f*g)*h,\ \varphi),$$

что и доказывает существование свертки $(f*g)*h$ (см. § 4.1) и равенство (2.7).

Следствие. *Если существуют свертки* $f*g*h$, $f*g$, $g*h$ *и* $f*h$, *то существуют и свертки* $(f*g)*h$, $f*(g*h)$ *и* $(f*h)*g$, *причем*

$$f*g*h=(f*g)*h=f*(g*h)=(f*h)*g,$$

т. е. в этом случае имеет место ассоциативность свертки.

3. Существование свертки. Установим некоторые достаточные условия (помимо указанных в § 4.1), при которых свертка заведомо существует в $\mathcal{D}'$. Напомним (рис. 19), что

$$T_R=[(x,y):\ x\in A,\ y\in B,\ |x+y|\leqslant R];$$

определение пространства $\mathcal{D}'(A)$ см. в § 1.5.

Теорема. *Пусть* $f\in\mathcal{D}'(A)$, $g\in\mathcal{D}'(B)$ *и при любом* $R>0$ *множество* T_R *ограничено в* $\mathbb{R}^{2n}$. *Тогда свертка* $f*g$ *существует в* $\mathcal{D}'(\overline{A+B})$ *и представляется в виде*

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\ \xi(x)\,\eta(y)\,\varphi(x+y)),\qquad \varphi\in\mathcal{D}, \tag{3.1}$$

где ξ *и* η — *любые функции из* C^∞, *равные* 1 *в* A^ε *и* B^ε *и рав-*

ные 0 *вне* $A^{2\varepsilon}$ *и* $B^{2\varepsilon}$ *соответственно* (ε — *любое* >0). *При этом операция* $f\to f*g$ *непрерывна из* $\mathcal{D}'(A)$ *в* $\mathcal{D}'(\overline{A+B})$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(U_R)$ и $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Так как

$$\operatorname{supp}(f\times g)=\operatorname{supp}f\times\operatorname{supp}g\subset A\times B$$

(см. § 3.2, г)), то

$$\operatorname{supp}\{[f(x)\times g(y)]\,\varphi(x+y)\}\subset$$
$$\subset[(x,y):\ x\in A,\ y\in B,\ |x+y|\leqslant R]=T_R.$$

Далее, поскольку T_R — ограниченное множество, то найдется такой номер $N=N(R)$, что $\eta_k(x;y)=1$ в окрестности T_R при всех $k\geqslant N$. Поэтому

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}([f(x)\times g(y)]\,\varphi(x+y),\ \eta_k(x;y))=$$
$$=(f(x)\times g(y),\ \eta_N(x;y)\,\varphi(x+y))$$

и представление

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\ \eta_N(x;y)\,\varphi(x+y)),\qquad \varphi\in\mathcal{D}(U_R), \tag{3.2}$$

доказано. Очевидно, представление (3.2) не зависит от вспомогательной функции $\eta_N(x;y)$. Ее можно заменить функцией $\xi(x)\,\eta(y)$. Действительно, функция $\xi(x)\,\eta(y)\,\varphi(x+y)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, поскольку множество

$$T_{R,\varepsilon}=[(x,y):\ x\in A^{2\varepsilon},\ y\in B^{2\varepsilon},\ |x+y|\leqslant R]\subset T_R^{4\varepsilon}$$

при любых $R>0$ и $\varepsilon>0$ ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$; далее, функция $[\eta_N(x;y)-\xi(x)\,\eta(y)]\,\varphi(x+y)$, $\varphi\in\mathcal{D}(U_R)$, обращается в нуль в окрестности множества T_R. Этим представление (3.1) доказано.

Из формулы (2.5) следует, что

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{A+B},$$

так что операция $f\to f*g$ переводит $\mathcal{D}'(A)$ в $\mathcal{D}'(\overline{A+B})$. Ее непрерывность вытекает из непрерывности прямого произведения $f\times g$ относительно f (см. § 3.2, в)) и из представления (3.1): если $f_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathcal{D}'(A)$, то

$$(f_k*g,\varphi)=(f_k(x)\times g(y),\ \xi(x)\,\eta(y)\,\varphi(x+y))\to 0$$

для всех $\varphi\in\mathcal{D}$, т. е. $f_k*g\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathcal{D}'(\overline{A+B})$.

Теорема доказана.

Заметим, что непрерывность свертки $f*g$ относительно совокупности f и g может и не иметь места, как показывает следующий простой пример:

$$\delta(x+k)\to 0,\quad k\to+\infty,\quad \delta(x-k)\to 0,\quad k\to+\infty,$$

однако

$$\delta(x+k)*\delta(x-k)=\delta*\delta=\delta.$$

Отметим важный частный случай этой теоремы.

Если $f\in\mathcal{D}'$ и $g\in\mathcal{E}'$, то свертка $f*g$ существует и представляется в виде

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)),\qquad \varphi\in\mathcal{D},\tag{3.3}$$

где η — любая основная функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности носителя g.

Действительно, в этом случае условие ограниченности множества T_R выполнено при всех $R>0$ (рис. 20): если $\operatorname{supp} g\subset\bar U_{R'}$, то $T_R=[(x,y)\colon x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\operatorname{supp} g,\ |x+y|\leqslant R]\subset\bar U_{R+R'}\times\bar U_{R'}$.

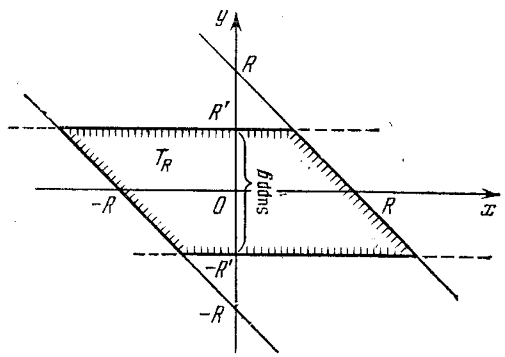

Рис. 20.

Аналогично, *если $f\in\mathcal{D}'$ и $g_1,\ldots,g_m\in\mathcal{E}'$, то существует свертка $f*g_1*\ldots*g_m$* (см. § 4.1) — *ассоциативная и коммутативная* (см. § 4.2, а), з)) — *и формула* (3.3) *обобщается так:*

$$(f*g_1*\ldots*g_m,\varphi)=$$
$$=(f(x)\times g_1(y)\times\ldots\times g_m(z),\ \eta_1(y)\ldots\eta_m(z)\times\varphi(x+y+\ldots+z)),$$
$$\varphi\in\mathcal{D}.\tag{3.4}$$

Если же $f\in C^\infty$ и $g\in\mathcal{E}'$, то свертка $f*g\in C^\infty$, а формула (3.3) *принимает вид*

$$(f*g)(x)=(\tilde g(y),\ f(x-y)),\tag{3.5}$$

где $\tilde g$ — продолжение g на $C^\infty=C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. § 2.5).

Действительно, как и при доказательстве леммы § 3.1 устанавливается, что функция

$$(\tilde g(y),f(x-y))=(g(y),\eta(y)f(x-y))\in C^\infty.$$

Далее из представления (3.3) при всех $\varphi\in\mathcal{D}$ имеем

$$(f*g,\varphi)=\left(g(y),\ \eta(y)\int f(\xi)\varphi(\xi+y)\,d\xi\right)=$$
$$=\left(g(y),\ \int\eta(y)f(x-y)\varphi(x)\,dx\right).$$

Замечая теперь, что $\eta(y)f(x-y)\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, и пользуясь формулой (3.2) § 3, получаем

$$(f*g,\varphi)=\int(g(y),\ \eta(y)f(x-y))\varphi(x)\,dx,$$

откуда и следует формула (3.5).

Аналогично, *если $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ и $g\in\mathcal{E}'$, то свертка $f*g$ в $\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{supp} g$ выражается формулой* (3.5); *в частности, $f*g\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\operatorname{supp} g)$.*

4. Конусы в $\mathbb{R}^n$. *Конусом в* $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в 0) называется множество Γ, обладающее тем свойством, что если $x\in\Gamma$, то и $\lambda x\in\Gamma$ при всех $\lambda>0$. Обозначим через $\operatorname{pr}\Gamma$ пересечение Γ

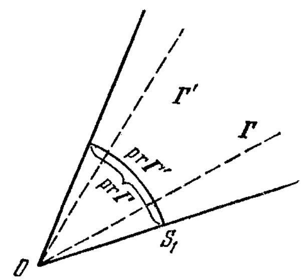

Рис. 21.

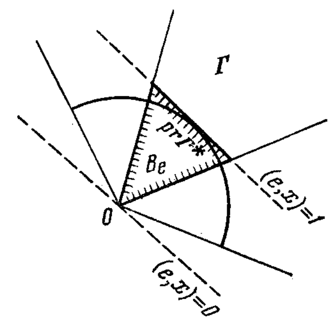

Рис. 22.

с единичной сферой (рис. 21). Конус Γ' называется *компактным* в конусе Γ, если $\operatorname{pr}\bar\Gamma'\subset\operatorname{pr}\Gamma$ (рис. 21); при этом пишем $\Gamma'\Subset\Gamma$.

Конус

$$\Gamma^*=[\xi\colon (\xi,x)\geqslant 0,\ \forall x\in\Gamma]$$

называется *сопряженным* к конусу Γ. Очевидно, Γ^* — замкнутый выпуклый конус с вершиной в 0 (рис. 22) и $(\Gamma^*)^*=\overline{\operatorname{ch}\Gamma}$; здесь $\operatorname{ch}\Gamma$ — выпуклая оболочка Γ (см. § 0.2).

Конус Γ называется *острым*, если существует опорная плоскость к $\overline{\operatorname{ch}\Gamma}$, имеющая с $\overline{\operatorname{ch}\Gamma}$ единственную общую точку 0 (рис. 22).

Примеры выпуклых острых конусов. а) *n-гранный конус в* $\mathbb{R}^n$

$$C=[x\colon (e_1,x)>0,\ \ldots,(e_n,x)>0]$$

— острый (выпуклый и открытый) тогда, и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. При этом

$$C^* = [\xi: \ \xi = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k e_k, \ \lambda_k \geqslant 0].$$

В частности, *положительный координатный угол*

$$\mathbb{R}^n_+ = [x: \ x_1 > 0, \ \ldots, \ x_n > 0], \ (\mathbb{R}^n_+)^* = \overline{\mathbb{R}^n_+}.$$

б) *Световой конус будущего в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$V^+ = [x: (x_0, \boldsymbol{x}): \ x_0 > |\boldsymbol{x}|], \ (V^+)^* = \overline{V}^+.$$

в) *Начало координат* $\{0\}$, $\{0\}^* = \mathbb{R}^n$.

Отметим, однако, что конус $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = [x: \ x_1 > 0]$ не является острым.

г) Конус $P_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$ положительных (эрмитовых) $n \times n$-матриц $X = (x_{pq})$, $P_n^* = \overline{P}_n$, где $\overline{P}_n$ — конус неотрицательных матриц. Это вытекает из следующего утверждения: для того чтобы $X \in P_n$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\Xi \in \overline{P}_n$, $\Xi \neq 0$

$$(X, \Xi) = \mathrm{sp}\,(X\,\Xi) = \sum_{p,\,q} x_{pq} \xi_{qp} > 0.$$

Лемма 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *конус* Γ — *острый;*

2) *конус* $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$ *не содержит целой прямой;*

3) $\mathrm{int}\,\Gamma^* \neq \varnothing$;

4) *для любого* $C' \Subset \mathrm{int}\,\Gamma^*$ *существует число* $\sigma = \sigma(C') > 0$ *такое, что*

$$(\xi, x) \geqslant \sigma |\xi| |x|, \qquad \xi \in C', \quad x \in \overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}; \tag{4.1}$$

5) *для любого* $e \in \mathrm{pr}\,\mathrm{int}\,\Gamma^*$ *множество*

$$B_e = [x: \ 0 \leqslant (e, x) \leqslant 1, \ x \in \overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}]$$

ограничено (рис. 22).

Доказательство. 1)→2). Если конус $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$ содержит целую прямую $x = x^0 + te$, $-\infty < t < \infty$ ($|e| = 1$), то он содержит и прямую $x = te$, $-\infty < t < \infty$. Следовательно, любая опорная плоскость к $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$ должна содержать эту прямую, что противоречит 1).

2)→3). Если $\mathrm{int}\,\Gamma^* = \varnothing$, то, поскольку Γ^* — выпуклый конус с вершиной в 0, он лежит в некоторой $(n-1)$-мерной плоскости $(e, x) = 0$ ($|e| = 1$). Поэтому $\pm e \in \Gamma^{**} = \overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$. А тогда и целая прямая $y = te$, $-\infty < t < \infty$, лежит в $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$, что противоречит 2).

3)→4). Поскольку все точки конуса C', отличные от 0, являются внутренними для Γ^*, то $(\xi, x) > 0$ при всех $\xi \in C'$ и $x \in \overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$. Отсюда, а также из непрерывности и однородности формы (ξ, x) следует существование числа $\sigma > 0$, при котором справедливо неравенство (4.1).

4)→5). Возьмем произвольное $e \in \mathrm{pr}\,\mathrm{int}\,\Gamma^*$. Тогда, применяя неравенство (4.1), $(e, x) \geqslant \sigma |x|$, $x \in \overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$, заключаем, что множество B_e ограничено: $|x| \leqslant \frac{(e,\,x)}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sigma}$.

5)→1). Если для некоторого $e \in \mathrm{pr}\,\mathrm{int}\,\Gamma^*$ множество B_e ограничено, то плоскость $(e, x) = 0$ не может иметь других общих точек с $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma}$, кроме 0.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *выпуклый конус. Тогда* $\Gamma = \Gamma + \Gamma$.

Доказательство. Включение $\Gamma \subset \Gamma + \Gamma$ очевидно. Пусть $x \in \Gamma + \Gamma$, так что $x = y + z$, где $y \in \Gamma$ и $z \in \Gamma$. Тогда при всех $\lambda \in (0, 1)$ $x = \lambda \frac{y}{\lambda} + (1 - \lambda) \frac{z}{1 - \lambda} \in \Gamma$ и поэтому $\Gamma + \Gamma \subset \Gamma$. Лемма доказана.

Индикатрисой конуса Γ называется функция

$$\mu_\Gamma(\xi) = -\inf_{x \in \mathrm{pr}\,\Gamma} (\xi, x).$$

Из определения индикатрисы следует, что $\mu_\Gamma(\xi)$ — выпуклая (см. § 0. 2,) и, стало быть, непрерывная (см., например, В. С. Владимиров [1], гл. II) и однородная первой степени функция, определенная на всем $\mathbb{R}^n$. Кроме того,

$$\mu_\Gamma(\xi) \leqslant \mu_{\mathrm{ch}\,\Gamma}(\xi),$$

$$\mu_\Gamma(\xi) = -\Delta(\xi, \partial\Gamma^*), \qquad \xi \in \Gamma^*,$$

и $\mu_\Gamma(\xi) > 0$ при $\xi \overline{\in} \Gamma^*$. Таким образом,

$$\Gamma^* = [\xi: \ \mu_\Gamma(\xi) \leqslant 0],$$

так что индикатриса конуса полностью определяет только замыкание его выпуклой оболочки, в силу $\overline{\mathrm{ch}\,\Gamma} = \Gamma^{**}$.

Пример.

$$\mu_{V^+}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\xi| - \xi_0), & \xi \overline{\in} -V^+, \\ |\xi|, & \xi \in -V^+. \end{cases}$$

Лемма 3. *Если* Γ — *выпуклый конус, то при любом* $a \geqslant 0$

$$[\xi: \ \mu_\Gamma(\xi) \leqslant a] = \Gamma^* + \overline{U}_a. \tag{4.2}$$

Доказательство. Включение

$$\Gamma^* + \overline{U}_a \subset [\xi\colon\ \mu_\Gamma(\xi) \leqslant a] \tag{4.3}$$

тривиально: если $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in \Gamma^*$, $|\xi_2| \leqslant a$, то

$$\mu_\Gamma(\xi) = -\inf_{x \in \operatorname{pr}\Gamma}(\xi, x) = -\inf_{x \in \operatorname{pr}\Gamma}[(\xi_1, x) + (\xi_2, x)] \leqslant$$
$$\leqslant -\inf_{x \in \operatorname{pr}\Gamma}(\xi_2, x) \leqslant a,$$

поскольку $(\xi_1, x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma$.

Докажем включение, обратное к (4.3). Пусть точка ξ_0 такова, что $\mu_\Gamma(\xi_0) \leqslant a$. Если $\xi_0 \in \Gamma^*$ или $|\xi_0| \leqslant a$, то $\xi_0 \in \Gamma^* + \overline{U}_a$. Пусть теперь $\xi_0 \overline{\in} \Gamma^*$ и $|\xi_0| > a$. Пусть точка $\xi_1 \in \Gamma^*$ реализует расстояние от ξ_0 до Γ^*, $\Delta(\xi_0, \Gamma^*) = |\xi_0 - \xi_1|$. Тогда, поскольку Γ^* — выпуклый конус (рис. 23), то

а) $(\xi_1 - \xi_0, \xi) \geqslant 0, \quad \xi \in \Gamma^*$;

б) $(\xi_1 - \xi_0, \xi_1) = 0$.

Из неравенства а) следует, что $\xi_1 - \xi_0 \in \Gamma^{**} = \overline{\Gamma}$, и поэтому

$$a \geqslant \mu_\Gamma(\xi_0) = -\inf_{x \in \operatorname{pr}\overline{\Gamma}}(\xi_0, x) \geqslant$$
$$\geqslant -\left(\xi_0, \frac{\xi_1 - \xi_0}{|\xi_1 - \xi_0|}\right).$$

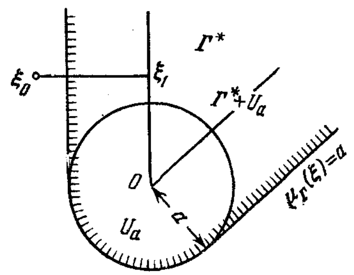

Рис. 23.

Последнее же неравенство в силу равенства б) эквивалентно неравенству $|\xi_1 - \xi_0| \leqslant a$. Итак, точка $\xi_0 = \xi_1 + (\xi_0 - \xi_1)$ представлена в виде суммы двух слагаемых $\xi_1 \in \Gamma^*$ и $\xi_0 - \xi_1 \in \overline{U}_a$, т. е $\xi_0 \in \Gamma^* + \overline{U}_a$. Этим доказано обратное включение (4.3), а с ним — и равенство (4.2). Лемма 3 доказана.

Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус. Обозначим $C = \operatorname{int}\Gamma^*$ (по лемме 1 $C \neq \varnothing$). Гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S без края называется *C-подобной*, если каждая прямая $x = x_0 + te$, $-\infty < t < \infty$, $e \in \operatorname{pr}\Gamma$, пересекает ее в единственной точке; другими словами: для любой $x \in S$ конус $\Gamma + x$ пересекает S в единственной точке x (рис. 24). Таким образом, C-подобная поверхность S разрезает $\mathbb{R}^n$ на две бесконечные области S_+ и S_-: S_+ лежит над S и S_- лежит под S; $S_+ \cup S_- \cup S = \mathbb{R}^n$. Далее, нормаль $\boldsymbol{n}_x$ в каждой точке x поверхности S содержится в конусе $\Gamma^* + x$ (рис 24).

Пример. Поверхность S в $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемая уравнением

$$x_0 = f(\boldsymbol{x}), \quad |\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})| \leqslant \sigma < 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1,$$

V^+-подобна (пространственно-подобна).

Лемма 4. Если *S — C-подобная поверхность*, то

$$\overline{S}_+ = S + \Gamma. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{S}_+$. Прямая $x = x_0 + te$, $|t| < \infty$, $e \in \operatorname{pr}\Gamma$, пересекает S в некоторой точке $x_1 = x_0 - t_1 e$, $t_1 \geqslant 0$ (рис. 24), так что $x_0 = x_1 + t_1 e$, $x_1 \in S$, $t_1 e \in \Gamma$, и включение $\overline{S}_+ \subset S + \Gamma$ доказано. Включение $S + \Gamma \subset \overline{S}_+$ очевидно; вместе с обратным включением оно приводит к равенству (4.4). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть S — C-подобная поверхность. Тогда для любого $R > 0$ существует такое число $R'(R) > 0$, что множество*

$$T_R = [(x, y)\colon\ x \in S,$$
$$y \in \Gamma,\ |x + y| \leqslant R]$$

содержится в шаре $U_{R'} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

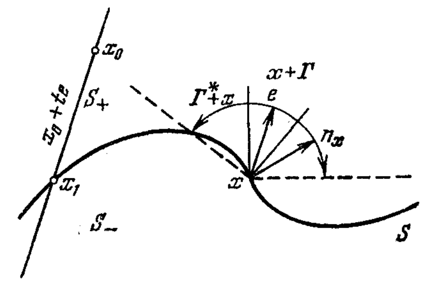

Рис. 24.

Доказательство. Так как S — C-подобная поверхность, то всякая точка $x \in S$, которая представима в виде $\xi - y$, $y \in \Gamma$, $|\xi| \leqslant R$, имеет вид $x = \xi - eT$, $e \in \operatorname{pr}\Gamma$, где число $T = T(e, \xi)$ однозначно определяется e и ξ и представляет собой непрерывную функцию аргумента (e, ξ) на компакте $e \in \operatorname{pr}\Gamma$, $|\xi| \leqslant R$. Следовательно,

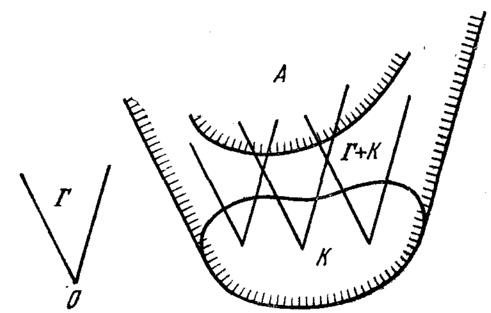

Рис. 25.

множество $[(y, \xi)\colon\ y = eT(e, \xi),\ e \in \operatorname{pr}\Gamma,\ |\xi| \leqslant R]$ ограничено, а с ним ограничено и множество T_R. Лемма доказана.

C-подобную поверхность S назовем *строго C-подобной* поверхностью, если в условиях леммы 5

$$R'(R) \leqslant a(1 + R)^\nu, \quad \nu \geqslant 1, \quad a > 0. \tag{4.5}$$

Пример. Плоскость $(e, x) = 0$, $e \in \operatorname{pr} C$ строго C-подобна с $\nu = 1$ (в силу леммы 1).

5. Сверточные алгебры $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Будем говорить, что множество A *ограничено со стороны конуса* Γ, если $A \subset \Gamma + K$, где K — некоторый компакт (рис. 25). Ясно, что множества, ограниченные со стороны конуса $\{0\}$, — это компакты в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Γ — замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$. Совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, носители которых ограничены со стороны конуса Γ, обозначим через $\mathcal{D}'(\Gamma+)$. *Сходимость в* $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ определим следующим образом: $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$, если $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} f_k \subset \Gamma + K$, где компакт K не зависит от k*). Обозначим $\mathcal{D}'(\{0\}+) = \mathcal{E}'$; $\mathcal{E}'$ — пространство обобщенных функций с компактными носителями (ср. § 2.5).

Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус, $C = \operatorname{int} \Gamma^*$, S — C-подобная поверхность, S_+ — область, лежащая над S (см. § 4.4).

Если $f \in \mathcal{D}'(\Gamma+)$ и $g \in \mathcal{D}'(\overline{S}_+)$, то свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y),\ \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)), \qquad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{5.1}$$

где ξ и η — любые функции из C^∞, равные 1 в $(\operatorname{supp} f)^\varepsilon$ и $(\operatorname{supp} g)^\varepsilon$ и равные 0 вне $(\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ и $(\operatorname{supp} g)^{2\varepsilon}$ соответственно (ε — любое > 0). *При этом, если $\operatorname{supp} f \subset \Gamma + K$, где K — компакт, то $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{S}_+ + K$ и соответствующие операции $f \to f * g$ и $g \to f * g$ непрерывны.*

Это утверждение вытекает из теоремы § 4.3 при $A = \Gamma + K$ и $B = \overline{S}_+$, если заметить, что по леммам 2, 4 и 5 § 4.4 множество

$$T_R = [(x, y)\colon\ x \in \Gamma + K,\ y \in \overline{S}_+,\ |x+y| \leqslant R] = \\ = [(x, y)\colon\ x \in \Gamma + K,\ y \in S + \Gamma,\ |x+y| \leqslant R]$$

ограничено при всех $R > 0$ и

$$\overline{\Gamma + K + \overline{S}_+} = \overline{\Gamma + K + \Gamma + S} = \overline{\Gamma + S + K} = \overline{S}_+ + K.$$

Отметим важный частный случай последнего критерия существования свертки.

Теорема. *Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус. Если $f \in \mathcal{D}'(\Gamma+)$ и $g \in \mathcal{D}'(\Gamma+)$, то свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ и представляется в виде* (5.1); *при этом операция $f \to f * g$ непрерывна из $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$.*

Доказательство. Поскольку $\Gamma + K$, где K — компакт, содержится в $\overline{S}_+$ для некоторой C-подобной поверхности S

*) Аналогичный смысл будут иметь и другие пространства обобщенных функций, например $\mathcal{S}'(\Gamma+)$, $\mathcal{L}^2_s(\Gamma+)$, и т. д. (см. ниже, § 5 и § 7).

(зависящей от K), то по предыдущему критерию свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$ и представляется формулой (5.1). Докажем, что $f * g \in \mathcal{D}'(\Gamma+)$. Пусть $\operatorname{supp} f \subset \Gamma + K_1$ и $\operatorname{supp} g \subset \Gamma + K_2$, где K_1 и K_2 — некоторые компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда, пользуясь включением (2.5) и леммой 2 § 4.4, получим

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\Gamma + K_1 + \Gamma + K_2} = \Gamma + K_1 + K_2,$$

так что $f * g \in \mathcal{D}'(\Gamma+)$. Непрерывность операции $f \to f * g$ из $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ также следует из этого включения. Теорема доказана.

Аналогично доказывается, что свертка любого числа обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ (см. § 4.1) существует в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ и выражается формулой, аналогичной формуле (5.1).

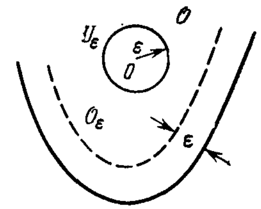

Рис. 26.

Отсюда и из результатов § 4.2, з) вытекает, что свертка обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ *ассоциативна*.

Линейное множество называется *алгеброй*, если на нем определена операция умножения, линейная относительно каждого множителя в отдельности. Алгебра называется *ассоциативной*, если $x(yz) = (xy)z$ и *коммутативной*, если $xy = yx$.

Установленные в этом пункте результаты позволяют утверждать, что *множество обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ образует алгебру, ассоциативную и коммутативную, если в качестве умножения взять операцию свертки* $*$. Такие алгебры называются *сверточными алгебрами*; единицей в них является δ-функция (см. § 4.2, б)).

Наконец, отметим, что *множество обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$ также образует сверточную алгебру, подалгебру алгебры $\mathcal{D}'(\Gamma+)$.* Действительно, если $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ и $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, то $\operatorname{supp}(f * g) \subset \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g \subset \Gamma + \Gamma = \Gamma$, так что $f * g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$. (Здесь мы опять воспользовались включением (2.5) и леммой 2 § 4.4.)

6. Регуляризация обобщенных функций. Распространим понятие свертки $f * g$, когда f и g — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, причем g — с компактным достаточно малым носителем в $\mathcal{O}$: $\operatorname{supp} g \subset U_\varepsilon$ и $\mathcal{O}_\varepsilon \neq \varnothing$ (см. § 0.2 и рис. 26). В соответствии с формулой (3.3) положим по определению

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)), \\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\varepsilon), \tag{6.1}$$

где $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\varepsilon)$, $\eta(y) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} g$.

По построению операция $\varphi \to \eta(y)\varphi(x+y)$ линейна и непрерывна из $\mathcal{D}(\mathcal{O}_\varepsilon)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})$. Отсюда следует, что правая часть равенства (6.1) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathcal{O}_\varepsilon)$, так что $f * g \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_\varepsilon)$. Далее, нетрудно убедиться (ср. § 4.3), что правая часть равенства (6.1) не зависит от вспомогательной функции η. Наконец, как и в § 4.2, устанавливается, что свертка $f * g$ коммутативна, непрерывна относительно f и g в отдельности и $f * \delta = f$.

В частности, если $\alpha \in \mathcal{D}(U_\varepsilon)$, то, пользуясь представлением (6.1) и действуя аналогично § 4.3 при выводе формулы (3.5), получим представление для свертки $f * \alpha$:

$$(f * \alpha)(x) = (f(y), \alpha(x-y)), \quad x \in \mathcal{O}_\varepsilon, \tag{6.2}$$

откуда следует $f * \alpha \in C^\infty(\mathcal{O}_\varepsilon)$ и

$$(f * \alpha)(0) = (f(y), \alpha(-y)) = (\delta, f * \alpha). \tag{6.3}$$

Формула (6.1) в силу (6.2) принимает вид

$$(f * g, \varphi) = (f, g(-y) * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\varepsilon). \tag{6.4}$$

Заметим, что при $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ формула (6.4) вытекает также из формул (3.3) и (6.2).

Пусть $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка» (см. § 1.2) и f — обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Свертка

$$f_\varepsilon(x) = (f * \omega_\varepsilon)(x) = (f(y), \omega_\varepsilon(x-y))$$

называется *регуляризацией* f (ср. с определением средней функции для случая $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$, см. § 1.2). По доказанному, регуляризация $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{O}_\varepsilon)$.

Докажем, что

$$f_\varepsilon \to f, \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathcal{O}). \tag{6.5}$$

Действительно, предельное соотношение (6.5) вытекает из соотношения $\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$ (см. § 1.7) и из непрерывности свертки, в силу

$$f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon \to f * \delta = f, \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathcal{O}).$$

Итак, *всякая обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ есть слабый предел своих регуляризаций.*

Пользуясь этим утверждением, установим более сильный результат.

Теорема. *Всякая обобщенная функция f из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ есть слабый предел основных функций из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, т. е. $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ плотно в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.*

Доказательство. Пусть $f_\varepsilon(x)$ — регуляризация f. Пусть, далее, $\mathcal{O}_1 \Subset \mathcal{O}_2 \Subset \ldots$, $\bigcup_k \mathcal{O}_k = \mathcal{O}$, $\varepsilon_k = \Delta(\mathcal{O}_k, \partial\mathcal{O}) > 0$ и $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_k)$, $\eta_k(x) = 1$, $x \in \mathcal{O}_{k-1}$. Докажем, что последовательность $\eta_k(x) f_{\varepsilon_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, основных функций из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ к f. Действительно, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$ и в силу (6.5) при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} (\eta_k f_{\varepsilon_k}, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_{\varepsilon_k}, \eta_k\varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_{\varepsilon_k}, \varphi) = (f, \varphi),$$

что и требовалось.

Замечание. Из полноты пространства $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (см. § 1.4) вытекает обратное к только что доказанной теореме утверждение: всякий слабый предел локально суммируемых функций в $\mathcal{O}$ есть обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Поэтому теорию обобщенных функций можно строить, исходя из слабо сходящихся последовательностей обычных, локально суммируемых, функций. По поводу этого подхода см. П. Антосик, Я. Микусинский и Р. Сикорский [1].

Здесь уместно отметить следующую аналогию. Обобщенные функции по отношению к основным функциям напоминают в некотором смысле иррациональные числа по отношению к рациональным числам: пополняя множество рациональных чисел всевозможными пределами последовательностей из рациональных чисел, получим вещественные числа; пополняя множество основных функций всеми слабыми пределами последовательностей из основных функций, получим обобщенные функции.

7. Свертка — линейный непрерывный трансляционно-инвариантный оператор. Оператор L, действующий из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$, называется трансляционно-инвариантным, если $Lf(x+h) = (Lf)(x+h)$ при всех $f \in \mathcal{D}'$ и при всех сдвигах $h \in \mathbb{R}^n$.

Напомним, что определение сходимости в пространстве $C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ дано в § 2.5 и в пространстве $\mathcal{E}'$ — в § 4.5; $\mathcal{E}'$ — совокупность линейных непрерывных функционалов на C^∞ (см. § 2.5).

Теорема. *Для того чтобы оператор L был линейным, непрерывным и трансляционно-инвариантным из $\mathcal{E}'$ в $\mathcal{D}'$, необходимо и достаточно, чтобы он был сверточным оператором, т. е. представлялся в виде $L = f_0 *$, где f_0 — некоторая обобщенная функция из $\mathcal{D}'$; при этом f_0 — ядро оператора L — единственно и выражается формулой $f_0 = L\delta$.*

Доказательство. Достаточность следует из результатов § 4.3 и § 4.2, согласно которым сверточный оператор $f \to f_0 * f$, $f_0 \in \mathcal{D}'$, — линейный, непрерывный и трансляционно-инвариантный из $\mathcal{E}'$ в $\mathcal{D}'$, причем $f_0 * \delta = f_0$.

Для доказательства необходимости предварительно установим следующую лемму.

Лемма. *Для того чтобы оператор L был линейным, непрерывным и трансляционно-инвариантным из $\mathcal{D}$ в C^∞, необходимо и достаточно, чтобы он был сверточным оператором $L = f_0 *$, $f_0 \in \mathcal{D}'$; при этом ядро f_0 единственно.*

Доказательство. Для доказательства достаточности осталось установить непрерывность операции

$$\varphi \to f_0 * \varphi = (f_0(y), \varphi(x-y))$$

(см. (6.2)) из $\mathscr{D}$ в C^∞. Но это вытекает из неравенства (см. теорему § 1.3)

$$|D^\alpha(f_0*\varphi)(x)| = |(f_0(y), D^\alpha\varphi(x-y))| \leqslant K\|\varphi\|_{C^{m+|\alpha|}}, \tag{7.1}$$

справедливого для всех $\varphi\in\mathscr{D}(U_R)$ и $|x|\leqslant R_1$ (числа K и m в неравенстве (7.1) зависит от R и R_1).

Необходимость. Из предположенных условий вытекает, что функционал $(L\varphi)(0)$ — линейный и непрерывный на $\mathscr{D}$. Поэтому существует такая, очевидно, единственная, обобщенная функция $f_0\in\mathscr{D}'$, что $(L\varphi)(0)=(f_0(-x),\varphi)$. Отсюда, в силу свойства трансляционной инвариантности оператора L, при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$ выводим

$$(L\varphi(x+x_0))(0) = (L\varphi)(x_0) = (f_0(-x), \varphi(x+x_0)) = \\ = (f_0(x), \varphi(x_0-x)) = (f_0*\varphi)(x_0),$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство необходимости условий теоремы. Оператор $L_1=L-L\delta*$ — линейный, непрерывный и трансляционно-инвариантный из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ (см. доказательство достаточности). Кроме того, при всех $x_0\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$L_1\delta(x+x_0) = (L\delta - L\delta*\delta)(x+x_0) = (L\delta-L\delta)(x+x_0)=0,$$

так что L_1 обращается в нуль на всех сдвигах δ-функции. Пусть теперь φ — произвольная основная функция из $\mathscr{D}$. Тогда

$$\frac{1}{N^n}\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\delta\left(x-\frac{k}{N}\right)\to\varphi(x),\quad N\to\infty \text{ в } \mathscr{E}',$$

ибо для любой $\psi\in C^\infty$

$$\frac{1}{N^n}\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\psi\left(\frac{k}{N}\right)\to\int\varphi(x)\psi(x)\,dx,\quad N\to\infty.$$

Поэтому, в силу линейности и непрерывности из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ оператора L_1,

$$L_1\varphi = \lim_{N\to\infty} L_1\left[\frac{1}{N^n}\sum_{0\leqslant|k|\leqslant N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\delta\left(x-\frac{k}{N}\right)\right]=0,\quad \varphi\in\mathscr{D}.$$

Пусть теперь f — любая обобщенная функция из $\mathscr{E}'$. Существует последовательность $\{f_k\}$ функций из $\mathscr{D}$, сходящаяся к f в $\mathscr{E}'$ (см. § 4.6). Отсюда и из непрерывности из $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{D}'$ оператора L_1 выводим: $L_1f=\lim\limits_{k\to\infty}L_1f_k=0$ при всех $f\in\mathscr{E}'$, так что $L_1=0$ и, стало быть, $L=L\delta*=f_0*$.

Единственность ядра f_0 оператора L вытекает из следующего рассуждения: если $f_1\in\mathscr{D}'$ такова, что $f_1*f=0$ при всех $f\in\mathscr{E}'$ и, значит, при всех $f\in\mathscr{D}$, то, в силу только что доказанной леммы, $f_1=0$. Теорема доказана.

8. Некоторые применения. а) Ньютонов потенциал. Пусть $f\in\mathscr{D}'$. Свертки

$$V_n=\frac{1}{|x|^{n-2}}*f,\quad n\geqslant3;\qquad V_2=\ln\frac{1}{|x|}*f,\quad n=2$$

(если они существуют), называются *ньютоновым* (при $n=2$ — *логарифмическим*) *потенциалом* с плотностью f.

Потенциал V_n удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_n = -(n-2)\sigma_n f,\quad n\geqslant3;\qquad \Delta V_2=-2\pi f.$$

Действительно, пользуясь формулами (3.10) § 2 и (2.4), при $n\geqslant3$ получаем

$$\Delta V_n = \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}*f\right) = \Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}*f = \\ = -(n-2)\sigma_n\delta*f = -(n-2)\sigma_n f;$$

аналогично поступаем и в случае $n=2$.

Если $f=\rho(x)$ — финитная суммируемая на $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant3$, функция, то соответствующий ньютонов потенциал V_n называется *объемным потенциалом*. В этом случае V_n — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}^n$ и выражается интегралом

$$V_n(x)=\int\frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|^{n-2}} \tag{8.1}$$

в соответствии с формулой (1.1) для свертки финитной суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции $\rho(x)$ с локально суммируемой в $\mathbb{R}^n$ функцией $|x|^{-n+2}$.

Пусть $f=\mu\delta_S$ и $f=-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ — простой и двойной слои на кусочно-гладкой поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant3$, с поверхностными плотностями μ и ν (см. § 1.7 и § 2.3). Соответствующие ньютоновы потенциалы

$$V_n^{(0)}=\frac{1}{|x|^{n-2}}*\mu\delta_S,\quad V_n^{(1)}=-\frac{1}{|x|^{n-2}}*\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$$

называются соответственно поверхностными *потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями μ и ν.

Если S — ограниченная поверхность, то поверхностные потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ — локально-суммируемые функции в $\mathbb{R}^n$ и представляются интегралами

$$V_n^{(0)}(x)=\int_S\frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}dS_y,\quad V_n^{(1)}(x)=\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dS_y. \tag{8.2}$$

Докажем для определенности представление (8.2) для потенциала $V_n^{(1)}$. Пользуясь представлением (3.3) и определением двойного слоя (см. § 2.3), при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ получаем цепочку равенств (функция $\eta \in \mathcal{D}$ и $\eta(x) \equiv 1$ в окрестности S)

$$\begin{aligned}
(V_n^{(1)}, \varphi) &= -\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi\right) = \\
&= -\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} \times \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(y), \eta(y)\varphi(y+\xi)\right) = \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \eta(y)\int \frac{\varphi(y+\xi)}{|\xi|^{n-2}}\,d\xi\right) = \\
&= \int \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\left[\eta(y)\int \frac{\varphi(y+\xi)}{|\xi|^{n-2}}\,d\xi\right] dS_y = \\
&= \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\int \frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}}\,dx\,dS_y = \\
&= \int_S \nu(y)\int \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dx\,dS_y = \\
&= \int \varphi(x)\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dS_y\,dx,
\end{aligned}$$

откуда и следует требуемая формула (8.2) для $V_n^{(1)}$. Перемена порядка интегрирования обеспечивается теоремой Фубини, в силу существования повторного интеграла

$$\int_S |\nu(y)| \int |\varphi(x)| \left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right| dx\,dS_y.$$

б) Формула Грина. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, ограничена кусочно-гладкой границей S и функция $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. Тогда она представляется в виде суммы трех ньютоновых потенциалов по *формуле Грина* ($\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S):

$$-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy + \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right] dS_y = \begin{cases} u(x), & x \in G, \\ 0, & x \,\overline{\in}\, \overline{G}. \end{cases} \tag{8.3}$$

Действительно, считая функцию $u(x)$ продолженной нулем при $x \,\overline{\in}\, \overline{G}$ и пользуясь формулами (3.7′) и (3.10) § 2, заключаем, что

$$\begin{aligned}
u = \delta * u &= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} * u = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}} * \Delta u = \\
&= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}} * \left[\Delta_{\text{кл}} u - \frac{\partial u}{\partial n}\delta_S - \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S)\right].
\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь формулами (8.1) и (8.2), убеждаемся в справедливости представления (8.3).

В частности, если функция $u(x)$ — гармоническая в области G, то представление (8.3) превращается в *формулу Грина для гармонических функций*

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right] dS_y = \begin{cases} u(x), & x \in G, \\ 0, & x \,\overline{\in}\, \overline{G}. \end{cases} \tag{8.4}$$

Формулы, аналогичные (8.3) и (8.4), имеют место и при $n=2$. При этом фундаментальное решение $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}$ должно быть заменено на $\frac{1}{2\pi}\ln|x|$.

Замечание. Формула Грина (8.4) выражает значения гармонической функции в области через ее значения и значения ее нормальной производной на границе этой области. В этом смысле она аналогична формуле Коши для аналитических функций.

в) Уравнение в свертках имеет вид

$$a * u = f, \tag{8.5}$$

где a и f — заданные обобщенные функции из $\mathcal{D}'$, а u — неизвестная обобщенная функция из $\mathcal{D}'$. Среди уравнений в свертках содержатся все линейные дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$a(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha \delta(x), \quad a * u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u(x);$$

линейные разностные уравнения:

$$a(x) = \sum_\alpha a_\alpha \delta(x - x_\alpha), \quad a * u = \sum_\alpha a_\alpha u(x - x_\alpha);$$

линейные интегральные уравнения I рода:

$$a \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}, \quad a * u = \int u(y)\, a(x-y)\,dy;$$

линейные интегральные уравнения II рода:

$$a=\delta+\mathscr{K},\quad \mathscr{K}\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}},\quad a*u=u(x)+\int u(y)\mathscr{K}(x-y)\,dy;$$

линейные интегродифференциальные уравнения и т. д.

Фундаментальным решением сверточного оператора $a*$ называется обобщенная функция $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'$, удовлетворяющая уравнению (8.5) при $f=\delta$,

$$a*\mathscr{E}=\delta. \tag{8.6}$$

Фундаментальное решение $\mathscr{E}$, вообще говоря, не единственно; оно определяется с точностью до слагаемого $\mathscr{E}_0$, являющегося произвольным решением в $\mathscr{D}'$ однородного уравнения $a*\mathscr{E}_0=0$. Действительно,

$$a*(\mathscr{E}+\mathscr{E}_0)=a*\mathscr{E}+a*\mathscr{E}_0=\delta.$$

Примеры. 1) Функция $\mathscr{E}_n(x)$, определенная в § 2.3, з), есть фундаментальное решение оператора Лапласа, $\Delta\mathscr{E}_n=\delta$.

2) Формула $\theta(x)+C$ дает общий вид фундаментального решения в $\mathscr{D}'$ оператора $\frac{d}{dx}=\delta'*$ (см. § 2.2 и § 2.3, в)).

Пусть фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $a*$ существует в $\mathscr{D}'$. Обозначим через $A(a,\mathscr{E})$ совокупность тех обобщенных функций f из $\mathscr{D}'$, для которых свертки $\mathscr{E}*f$ и $a*\mathscr{E}*f$ существуют в $\mathscr{D}'$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $f\in A(a,\mathscr{E})$. *Тогда решение* u *уравнения* (8.5) *существует и выражается формулой*

$$u=\mathscr{E}*f. \tag{8.7}$$

Решение уравнения (8.5) *единственно в классе* $A(a,\mathscr{E})$.

Доказательство. Обобщенная функция $u=\mathscr{E}*f$ удовлетворяет уравнению (8.5), так как в силу коммутативности и ассоциативности свертки (см. § 4.2, з)) (свертки $\mathscr{E}*f$ и $a*\mathscr{E}=\delta$ существуют):

$$a*u=a*(\mathscr{E}*f)=a*\mathscr{E}*f=(a*\mathscr{E})*f=\delta*f=f.$$

Единственность: если $a*u=0$ и $u\in A(a,\mathscr{E})$, то

$$u=u*\delta=u*(a*\mathscr{E})=u*a*\mathscr{E}=(u*a)*\mathscr{E}=0*\mathscr{E}=0,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Замечание. Можно дать следующую физическую интерпретацию решения (8.7): $u=\mathscr{E}*f$. Представим источник $f(x)$ в виде «суммы» точечных источников $f(\xi)\delta(x-\xi)$ (см § 4.2, б)):

$$f(x)=f*\delta=\int f(\xi)\delta(x-\xi)\,d\xi.$$

Фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ есть возмущение от точечного источника $\delta(x)$. Отсюда, в силу свойств линейности и трансляционной инвариантности сверточного оператора $a*$ (см. § 4.7), следует, что каждый точечный источник $f(\xi)\delta(x-\xi)$ порождает возмущение $f(\xi)\mathscr{E}(x-\xi)$. Поэтому естественно ожидать, что «сумма» (наложение) этих возмущений

$$\int f(\xi)\mathscr{E}(x-\xi)\,d\xi=\mathscr{E}*f$$

даст суммарное возмущение от источника f, т. е. решение u уравнения (8.5). Доказанная теорема и дает оформление этим нестрогим соображениям.

г) Уравнения в сверточных алгебрах. Пусть A — сверточная алгебра, например $\mathscr{D}'(\Gamma+)$, $\mathscr{D}'(\Gamma)$ (см. § 4.5). Рассмотрим уравнение (8.5) в алгебре A, т. е. будем предполагать, что $a\in A$ и $f\in A$; решение u также будем искать в A. Доказанная выше теорема в алгебре A принимает следующий вид: *если фундаментальное решение* $\mathscr{E}$ *оператора* $a*$ *существует в* A, *то решение* u *уравнения* (8.5) *единственно в* A, *существует при любой* f *из* A *и выражается формулой* $u=\mathscr{E}*f$.

Фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $a*$ в алгебре A удобно обозначать a^{-1}, так что, в силу (8.6),

$$a^{-1}*a=\delta. \tag{8.8}$$

Другими словами, a^{-1} — *обратный элемент к* a в алгебре A.

Следующее предложение весьма полезно при построении фундаментальных решений в алгебре A:

если a_1^{-1} *и* a_2^{-1} *существуют в* A, *то*

$$(a_1*a_2)^{-1}=a_1^{-1}*a_2^{-1}. \tag{8.9}$$

Действительно,

$$(a_1*a_2)*(a_1^{-1}*a_2^{-1})=(a_2*a_1)*(a_1^{-1}*a_2^{-1})=$$
$$=a_2*((a_1*a_1^{-1})*a_2^{-1})=a_2*(\delta*a_2^{-1})=a_2*a_2^{-1}=\delta.$$

Формула (8.9) составляет основу операционного исчисления.

д) Дробное дифференцирование и интегрирование. Обозначим через $\mathscr{D}'_+$ алгебру $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+)$.

Введем обобщенную функцию f_α из $\mathscr{D}'_+$, зависящую от вещественного параметра, α, $-\infty<\alpha<\infty$, по формуле

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0,\\ f^{(N)}_{\alpha+N}, & \alpha\leqslant 0,\ \alpha+N>0,\ N\text{ — целое.}\end{cases}$$

Проверим, что

$$f_\alpha*f_\beta=f_{\alpha+\beta}. \tag{8.10}$$

Действительно, если $\alpha>0$ и $\beta>0$, то (см. § 4.1)

$$f_\alpha * f_\beta = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}\,dy =$$

$$= \frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{\theta(x)\,x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}.$$

Если же $\alpha\leqslant 0$ или $\beta\leqslant 0$ то, подбирая целые числа $m>-\alpha$ и $n>-\beta$, получим

$$f_\alpha * f_\beta = f^{(m)}_{\alpha+m} * f^{(n)}_{\beta+n} = (f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)} = f^{(m+n)}_{\alpha+\beta+m+n} = f_{\alpha+\beta},$$

что и требовалось.

Рассмотрим сверточный оператор $f_\alpha *$ в алгебре $\mathscr{D}'_+$. Так как $f_0=\theta'=\delta$, то из (8.10) вытекает, что фундаментальное решение f_α^{-1} оператора $f_\alpha *$ существует и равно $f_{-\alpha}$: $f_\alpha^{-1}=f_{-\alpha}$. Далее, при целых $n<0$ $f_n=\delta^{(n)}$ и потому $f_n*u=\delta^{(n)}*u=u^{(n)}$, т. е. оператор f_n* есть оператор n-кратного дифференцирования. Наконец, при целых $n>0$

$$(f_n*u)^{(n)} = f_{-n}*(f_n*u) = (f_{-n}*f_n)*u = \delta*u = u,$$

т. е. f_n*u есть первообразная порядка n обобщенной функции u (см. § 2.2).

В силу сказанного, оператор $f_\alpha *$ называют *оператором дробного дифференцирования порядка* α *при* $\alpha<0$ *и оператором дробного интегрирования порядка* α *при* $\alpha>0$ (а также *оператором Римана — Лиувилля*).

Пример. Пусть $f\in\mathscr{D}'_+$. Тогда

$$D^{1/2}f = D(f_{1/2}*f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}}.$$

е) Операционное исчисление Хевисайда есть не что иное, как анализ в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$. Для примера вычислим в алгебре $\mathscr{D}'_+$ фундаментальное решение $\mathscr{E}(t)$ дифференциального оператора

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^m}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m, \quad a_j \text{ — постоянные.}$$

В алгебре $\mathscr{D}'_+$ соответствующее уравнение принимает вид

$$P(\delta)*\mathscr{E} = \delta, \quad P(\delta)(t) = \delta^{(m)}(t) + a_1\delta^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m\delta(t).$$

Разлагая в алгебре $\mathscr{D}'_+$ «полином» $P(\delta)$ на множители *),

$$P(\delta) = *\prod_j (\delta' - \lambda_j\delta)^{k_j},$$

и пользуясь формулой (8.9), получим

$$P^{-1}(\delta)(t) = \mathscr{E}(t) = \Big[*\prod_j (\delta'-\lambda_j\delta)^{k_j}\Big]^{-1} = *\prod_j (\delta'-\lambda_j\delta)^{-k_j}. \tag{8.11}$$

Но легко проверить, что

$$*\,(\delta'-\lambda\delta)^{-k} = *\,[(\delta'-\lambda\delta)^{-1}]^k = \frac{\theta(t)\,t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}. \tag{8.12}$$

Отсюда, продолжая равенства (8.11), выводим

$$\mathscr{E}(t) = *\prod_j \frac{\theta(t)\,t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}e^{\lambda_j t}. \tag{8.13}$$

Свертка (8.13) допускает вычисление в явном виде. Разлагая правую часть (8.11) на простейшие дроби в алгебре $\mathscr{D}'_+$, получим

$$\mathscr{E}(t) = *\prod_j (\delta'-\lambda_j\delta)^{-k_j} =$$

$$= \sum_j \big[c_{j,k_j}*(\delta'-\lambda_j\delta)^{-k_j} + \ldots + c_{j,1}*(\delta'-\lambda_j\delta)^{-1}\big],$$

откуда, пользуясь формулой (8.12), выводим окончательно

$$\theta(t)\sum_j\left[c_{j,k_j}\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} + \ldots + c_{j,1}\right]e^{\lambda_j t}.$$

Таким образом, для нахождения фундаментального решения оператора $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ получаем следующее правило: заменяя $\frac{d}{dt}$ на p, составляем полином $P(p)$, выражение $\frac{1}{P(p)}$ разлагаем на простейшие дроби

$$\frac{1}{P(p)} = \prod_j (p-\lambda_j)^{-k_j} = \sum_j \big[c_{j,k_j}(p-\lambda_j)^{-k_j} + \ldots + c_{j,1}(p-\lambda_j)^{-1}\big]$$

и каждой простейшей дроби $(p-\lambda)^{-k}$ сопоставляем правую часть формулы (8.12).

Пример. Найти $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}''+\omega^2\mathscr{E}=\delta$.

*) Символ $*\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant l} a_j$ означает $a_1*a_2*\ldots*a_l$.

Имеем

$$\frac{1}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2\omega i}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)\leftrightarrow\frac{\theta(t)}{2\omega i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=$$

$$=\theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}=\mathscr{E}(t).$$

§ 5. Обобщенные функции медленного роста

1. Пространство основных функций $\mathscr{S}$ (быстро убывающих). Отнесем к пространству основных функций $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ все бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n$ функции, убывающие при $|x|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Введем в $\mathscr{S}$ счетное число норм по формуле

$$\|\varphi\|_p=\sup_{\substack{x\\|\alpha|\leqslant p}}(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|,\quad \varphi\in\mathscr{S},\ p=0,1,\ldots$$

Очевидно, что

$$\|\varphi\|_0\leqslant\|\varphi\|_1\leqslant\|\varphi\|_2\leqslant\ldots,\ \varphi\in\mathscr{S}. \tag{1.1}$$

Сходимость в $\mathscr{S}$ определим следующим образом: последовательность функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ из $\mathscr{S}$ сходится к 0, $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$, если для всех $p=0,1,\ldots$ $\|\varphi_k\|_p\to 0$, $k\to\infty$. Другими словами: $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$, если для всех α и β

$$x^\alpha D^\beta\varphi_k(x)\ \rightrightarrows\ 0,\quad k\to\infty.$$

Ясно, что $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$, и если $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{D}$, то $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$.

Однако $\mathscr{S}$ не совпадает с $\mathscr{D}$; например, функция $e^{-|x|^2}$ принадлежит $\mathscr{S}$, но не принадлежит $\mathscr{D}$ (она не финитна).

Тем не менее $\mathscr{D}$ *плотно в* $\mathscr{S}$, т. е. для любой $\varphi\in\mathscr{S}$ существует последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathscr{D}$ такая, что $\varphi_k\to\varphi$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$.

Действительно, последовательность функций из $\mathscr{D}$

$$\varphi_k(x)=\varphi(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $\eta\in\mathscr{D}$, $\eta(x)=1$, $|x|<1$, сходится к φ в $\mathscr{S}$.

Обозначим через $\mathscr{S}_p$ пополнение $\mathscr{S}$ по p-й норме; $\mathscr{S}_p$ — банахово пространство.

Справедливы вложения

$$\mathscr{S}_0\supset\mathscr{S}_1\supset\mathscr{S}_2\supset\ldots \tag{1.2}$$

Каждое вложение

$$\mathscr{S}_{p+1}\subset\mathscr{S}_p,\quad p=0,1,\ldots,$$

непрерывно, в силу (1.1). Докажем, что это вложение *вполне непрерывно* (*компактно*), т. е. из всякого бесконечного ограниченного множества в $\mathscr{S}_{p+1}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся в $\mathscr{S}_p$.

Действительно, пусть M — бесконечное множество, ограниченное в $\mathscr{S}_{p+1}$, $\|\varphi\|_{p+1}<C$, $\varphi\in M$. Отсюда для всех $\varphi\in M$ и $|\alpha|\leqslant p$ получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}D^\alpha\varphi(x)\right|<C,\quad j=1,\ldots,n;$$

$$(1+|x|^2)^{p/2}D^\alpha\varphi(x)\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

Пусть R_k, $k=1,2,\ldots$, — такая (возрастающая) последовательность положительных чисел, что

$$(1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|<\frac{1}{k},\quad |x|>R_k,\quad |\alpha|\leqslant p. \tag{1.3}$$

По лемме Асколи существует последовательность $\{\varphi_j^{(1)}\}$ функций из M, сходящаяся в $C^p(\bar U_{R_1})$; далее, по той же лемме существует подпоследовательность $\{\varphi_j^{(2)}\}$ последовательности $\{\varphi_j^{(1)}\}$, сходящаяся в $C^p(\bar U_{R_2})$, и т. д. Осталось заметить, что в силу (1.3) диагональная последовательность $\{\varphi_k^{(k)}\}$ сходится в $\mathscr{S}_p$.

Следующая лемма дает точную характеристику функций из пространства $\mathscr{S}_p$.

Лемма. *Для того чтобы $\varphi\in\mathscr{S}_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi\in C^p$ и $|x|^pD^\alpha\varphi(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ и $|\alpha|\leqslant p$, т. е. $\varphi\in\bar C_0^p$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\varphi\in\bar C_0^p$ и $\varphi_\varepsilon=\varphi*\omega_\varepsilon$ — регуляризация φ (см. § 4.6). Пусть, далее, $\{\eta_k\}$ — последовательность функций из $\mathscr{D}$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^n$ (см. § 4.1). Тогда последовательность $\{\varphi_{1/k}\eta_k\}$ функций из $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$ сходится к φ в $\mathscr{S}_p$. Действительно, пусть $\varepsilon>0$; существует такое число $R=R(\varepsilon)$, что

$$(1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|<\varepsilon,\quad |x|>R,\quad |\alpha|\leqslant p. \tag{1.4}$$

Пусть N_1 такой номер, что $\eta_k(x)=1$, $|x|\leqslant R+1$, $k\geqslant N_1$. Наконец, из теоремы 2 § 1.2 следует существование такого номера $N\geqslant N_1$, что при всех $k\geqslant N$, $|x|\leqslant R+1$ и $|\alpha|\leqslant p$ будет справедливо неравенство

$$(1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\alpha\varphi(x)-D^\alpha\varphi_{1/k}(x)\right|<\varepsilon. \tag{1.5}$$

Теперь, пользуясь оценками (1.4) и (1.5) при $k \geqslant N$, получаем

$$\|\varphi-\varphi_{1/k}\eta_k\|_p = \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant p} (1+|x|^2)^{p/2} \left|D^\alpha[\varphi(x)-\varphi_{1/k}(x)\eta_k(x)]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \sup_{\substack{|x|>R+1\\ |\alpha|\leqslant p}} (1+|x|^2)^{p/2}\Big[\left|D^\alpha\varphi(x)\right| +$$
$$+\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\left|D^\beta\varphi_{1/k}(x)\,D^{\alpha-\beta}\eta_k(x)\right|\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon + C_p' \sup_{\substack{|x|>R+1\\ |\beta|\leqslant p}} (1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\beta\int\omega_{1/k}(y)\,\varphi(x-y)\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon + C_p' \sup_{\substack{|x|>R+1\\ |\beta|\leqslant p}} \int\omega_{1/k}(y)(1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\beta\varphi(x-y)\right|dy \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon + C_p \sup_{\substack{|x|>R+1\\ |\beta|\leqslant p}} \int\omega_{1/k}(y)\left[(1+|x-y|^2)^{p/2}+|y|^p\right]\left|D^\beta\varphi(x-y)\right|dy \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon + C_p\varepsilon + C_p\varepsilon\int\omega_{1/k}(y)(1+|y|^2)\,dy \leqslant (2+3C_p)\,\varepsilon,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что $\mathscr{S}$ — полное пространство и

$$\mathscr{S} = \bigcap_{p\geqslant 0}\mathscr{S}_p. \tag{1.6}$$

Операции дифференцирования $\varphi\to D^\alpha\varphi$ *и неособенной линейной замены переменных* $\varphi(x)\to\varphi(Ax+b)$ — *линейные и непрерывные из* $\mathscr{S}$ *в* $\mathscr{S}$. Это утверждение непосредственно вытекает из определения сходимости в пространстве $\mathscr{S}$.

С другой стороны, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию может вывести за пределы $\mathscr{S}$, например $e^{-|x|^2}e^{|x|^2}=1\,\overline{\in}\,\mathscr{S}$.

Пусть функция $a\in C^\infty$ растет на бесконечности вместе со всеми производными не быстрее полинома

$$\left|D^\alpha a(x)\right| \leqslant C_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}. \tag{1.7}$$

Множество таких функций обозначим через θ_M; оно называется множеством *мультипликаторов в* $\mathscr{S}$.

Операция $\varphi\to a\varphi$, *где* $a\in\theta_M$, *непрерывна* (*и, очевидно, линейна*) *из* $\mathscr{S}$ *в* $\mathscr{S}$.

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{S}$, то $a\varphi\in C^\infty$ и, в силу (1.7),

$$\|a\varphi\|_p = \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant p}(1+|x|^2)^{p/2}\left|D^\alpha(a\varphi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant p}(1+|x|^2)^{p/2}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\left|D^\beta\varphi(x)\,D^{\alpha-\beta}a(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant K_p \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant p}(1+|x|^2)^{p/2+N_p/2}\left|D^\alpha\varphi(x)\right| = K_p\|\varphi\|_{p+N_p}, \qquad p=0,\,1,\,\ldots,$$

где N_p — наименьшее целое число, не меньшее $\max\limits_{|\alpha|\leqslant p} m_\alpha$. Полученные неравенства означают, что $a\varphi\in\mathscr{S}$ и операция $\varphi\to a\varphi$ непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.

2. Пространство обобщенных функций $\mathscr{S}'$ (медленного роста). *Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций* $\mathscr{S}$. Обозначим через $\mathscr{S}'=\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ множество всех обобщенных функций медленного роста. Очевидно, $\mathscr{S}'$ — линейное множество и $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$.

Сходимость в $\mathscr{S}'$ определим как *слабую* сходимость последовательности функционалов: последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ из $\mathscr{S}'$ сходится к обобщенной функции $f\in\mathscr{S}'$, $f_k\to f$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}'$, если для любой $\varphi\in\mathscr{S}$ $(f_k,\varphi)\to(f,\varphi)$, $k\to\infty$. Линейное множество $\mathscr{S}'$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций медленного роста* $\mathscr{S}'$.

Из этого определения следует, что *из сходимости в* $\mathscr{S}'$ *следует сходимость в* $\mathscr{D}'$.

Теорема (Л. Шварц). *Пусть M' — слабо ограниченное множество функционалов из $\mathscr{S}'$, т. е. $|(f,\varphi)|<C_\varphi$ для всех $f\in M'$ и $\varphi\in\mathscr{S}$. Тогда существуют числа $K\geqslant 0$ и $m\geqslant 0$ такие, что*

$$|(f,\varphi)| \leqslant K\|\varphi\|_m, \quad f\in M', \quad \varphi\in\mathscr{S}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Если неравенство (2.1) несправедливо, то найдутся последовательности $\{f_k\}$ — функционалов из M' и $\{\varphi_k\}$ — функций из $\mathscr{S}$ такие, что

$$|(f_k,\varphi_k)| \geqslant k\|\varphi_k\|_k, \qquad k=1,\,2,\,\ldots \tag{2.2}$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k}, \qquad k=1,\,2,\,\ldots,$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k\geqslant p$

$$\|\psi_k\|_p = \frac{\|\varphi_k\|_p}{\sqrt{k}\,\|\varphi_k\|_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Последовательность функционалов $\{f_k\}$ ограничена на каждой основной функции φ из $\mathscr{S}$. Поэтому для нее имеет место аналог леммы § 1.4, согласно которому $(f_k, \psi_k) \to 0$, $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (2.2) дает

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}|(f, \varphi_k)| \geqslant \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из доказанной теоремы Л. Шварца вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Всякая обобщенная функция медленного роста имеет конечный порядок* (ср. § 1.3), т. е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал из некоторого (наименьшего) сопряженного пространства $\mathscr{S}'_m$; при этом неравенство (2.1) для f принимает вид

$$|(f, \varphi)| \leqslant \|f\|_{-m}\|\varphi\|_m, \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{2.3}$$

где $\|f\|_{-m}$ — норма функционала f в $\mathscr{S}'_m$, m — *порядок* f.

Таким образом, справедливы соотношения

$$\mathscr{S}'_0 \subset \mathscr{S}'_1 \subset \mathscr{S}'_2 \subset \ldots, \quad \mathscr{S}' = \bigcup_{p \geqslant 0} \mathscr{S}'_p, \tag{2.4}$$

двойственные к соотношениям (1.2) и (1.6).

Заметим еще, что каждое включение

$$\mathscr{S}'_p \subset \mathscr{S}'_{p+1}, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

вполне непрерывно (см. § 5.1); в частности, *всякая слабо сходящаяся последовательность функционалов из $\mathscr{S}'_p$ сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$.*

Следствие 2. *Всякая (слабо) сходящаяся последовательность обобщенных функций медленного роста слабо сходится в некотором пространстве $\mathscr{S}'_p$ и, значит, сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$.*

Вытекает из теоремы Л. Шварца, поскольку всякая (слабо) сходящаяся последовательность функционалов из $\mathscr{S}'$ есть слабо ограниченное множество в $\mathscr{S}'$, и из замечания к следствию 1.

Следствие 3. *Пространство обобщенных функций медленного роста полно.*

Вытекает из слабой полноты сопряженных пространств $\mathscr{S}'_p$ и из следствия 2.

3. Примеры обобщенных функций медленного роста и простейшие операции в $\mathscr{S}'$. Если $f(x)$ — функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$, т. е. при некотором $m \geqslant 0$

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m}\,dx < \infty,$$

то она определяет регулярный функционал f из $\mathscr{S}'$ по формуле (6.1) § 1,

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Не всякая локально суммируемая функция определяет обобщенную функцию медленного роста, например $e^x \overline{\in} \mathscr{S}'$. С другой стороны, не всякая локально суммируемая функция из $\mathscr{S}'$ имеет медленный рост. Например, функция $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ не является функцией медленного роста, но тем не менее она определяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ по формуле

$$((\cos e^x)', \varphi) = -\int \cos e^x \varphi'(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Однако для неотрицательных функций (и даже для мер) таких неприятностей быть не может, как мы сейчас в этом и убедимся.

Мера μ, заданная на $\mathbb{R}^n$ (см. § 1.7), называется мерой *медленного роста*, если при некотором $m \geqslant 0$

$$\int (1+|x|)^{-m}\mu(dx) < \infty.$$

Она определяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ по формуле (7.2) § 1,

$$(\mu, \varphi) = \int \varphi(x)\mu(dx), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Если неотрицательная мера μ определяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$, то μ медленного роста.

Действительно, так как $\mu \in \mathscr{S}'$, то по теореме Л. Шварца она имеет конечный порядок m, так что

$$\left|\int \varphi(x)\mu(dx)\right| \leqslant K\|\varphi\|_m, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{3.1}$$

Пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность неотрицательных функций из $\mathscr{D}$, стремящаяся к 1 в $\mathbb{R}^n$ (см. § 4.1). Подставляя в (3.1)

$$\varphi(x) = \eta_k(x)(1+|x|^2)^{-m/2}$$

и пользуясь неотрицательностью меры μ, получим

$$\int \eta_k(x)(1+|x|^2)^{-m/2}\mu(dx) \leqslant C,$$

где C не зависит от k. Отсюда в силу леммы Фату следует, что мера μ медленного роста.

Если $f \in \mathscr{E}'$, то $f \in \mathscr{S}'$, причем

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{3.2}$$

где $\eta \in \mathscr{D}$ и $\eta = 1$ в окрестности носителя f (ср. (10.2) § 1).

Действительно, поскольку операция $\varphi\to\eta\varphi$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{D}$, то функционал $(f, \eta\varphi)$, стоящий в правой части равенства (3.2), линейный и непрерывный на $\mathscr{S}$, так что $f\in\mathscr{S}'$. Единственность продолжения следует из плотности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 5.1): в частности, оно не зависит от вспомогательной функции η.

Если $f\in\mathscr{S}'$, то и каждая производная $D^\alpha f\in\mathscr{S}'$; при этом операция $f\to D^\alpha f$ непрерывна (и линейна) из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

Действительно, поскольку операция $\varphi\to D^\alpha\varphi$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 5.1), то правая часть равенства

$$(D^\alpha f, \varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi), \quad \varphi\in\mathscr{S},$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 2.1).

Если $f\in\mathscr{S}'$ и $\det A\neq 0$, то $f(Ax+b)\in\mathscr{S}'$, причем операция $f(x)\to f(Ax+b)$ непрерывна (и линейна) из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

В самом деле, поскольку операция $\varphi(x)\to\varphi[A^{-1}(x-b)]$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 5.1), то правая часть равенства

$$(f(Ay+b), \varphi)=\left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right), \quad \varphi\in\mathscr{S},$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 1.9).

Если $f\in\mathscr{S}'$ и $a\in\theta_M$, то $af\in\mathscr{S}'$, причем операция $f\to af$ непрерывна (и линейна) из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

Действительно, поскольку операция $\varphi\to a\varphi$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 1.5), то правая часть равенства

$$(af, \varphi)=(f, a\varphi), \quad \varphi\in S,$$

есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$ (ср. § 1.10).

Таким образом, множество θ_M содержит все мультипликаторы в $\mathscr{S}'$ (на самом деле оно состоит из них; докажите это).

Пример. Если $|a_k|\leqslant C(1+|k|)^N$, то

$$\sum_k a_k\delta(x-k)\in\mathscr{S}'.$$

4. Структура обобщенных функций медленного роста. Сейчас мы докажем, что пространство $\mathscr{S}'$ является таким (наименьшим) расширением совокупности функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$, в котором всегда возможно дифференцирование (ср. § 2.4). Этим объясняется название $\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

Теорема. *Если $f\in\mathscr{S}'$, то существуют непрерывная функция g медленного роста в $\mathbb{R}^n$ и целое число $m\geqslant 0$ такие, что*

$$f(x)=D_1^m\ \dots\ D_n^m g(x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть $f\in\mathscr{S}'$. По теореме Л. Шварца (см. § 5.2) существуют числа K и p такие, что при всех $\varphi\in\mathscr{S}$

$$|(f, \varphi)|\leqslant K\|\varphi\|_p\leqslant K\max_{|\alpha|\leqslant p}\int|D_1\ \dots\ D_n[(1+|x|^2)^{p/2}D^\alpha\varphi(x)]|\,dx,$$

т. е.

$$|(f, \varphi)|\leqslant K\max_{|\alpha|\leqslant p}\|D_1\ \dots\ D_n[(1+|x|^2)^{p/2}D^\alpha\varphi]\|_{\mathscr{L}^1}, \quad \varphi\in\mathscr{S}. \tag{4.2}$$

Сопоставим каждой функции φ из $\mathscr{S}$ вектор-функцию $\{\psi_\alpha\}$ с компонентами

$$\psi_\alpha(x)=D_1\ \dots\ D_n[(1+|x|^2)^{p/2}D^\alpha\varphi(x)], \quad |\alpha|\leqslant p. \tag{4.3}$$

Этим мы определим взаимно однозначное отображение $\varphi\to\{\psi_\alpha\}$ пространства $\mathscr{S}$ в прямую сумму $\bigoplus_{|\alpha|\leqslant p}\mathscr{L}^1$ с нормой

$$\|\{f_\alpha\}\|=\max_{|\alpha|\leqslant p}\|f_\alpha\|_{\mathscr{L}^1}.$$

На линейном подмножестве $[\{\psi_\alpha\}, \varphi\in\mathscr{S}]$ пространства $\bigoplus_{|\alpha|\leqslant p}\mathscr{L}^1$, в котором компоненты ψ_α определяются формулой (4.3), введем линейный функционал f^*:

$$(f^*, \{\psi_\alpha\})=(f, \varphi). \tag{4.4}$$

В силу оценки (4.2),

$$|(f^*, \{\psi_\alpha\})|=|(f, \varphi)|\leqslant K\max_{|\alpha|\leqslant p}\|\psi_\alpha\|_{\mathscr{L}^1}=K\|\{\psi_\alpha\}\|,$$

функционал f^* — непрерывный. По теоремам Хана — Банаха и Ф. Рисса существует вектор-функция $\{\chi_\alpha\}\in\bigoplus_{|\alpha|\leqslant p}\mathscr{L}^\infty$ такая, что

$$(f^*, \{\psi_\alpha\})=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int\chi_\alpha(x)\psi_\alpha(x)\,dx,$$

т. е., в силу (4.3) и (4.4),

$$(f, \varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant p}\int\chi_\alpha(x)D_1\ \dots\ D_n[(1+|x|^2)^{p/2}D^\alpha\varphi(x)]\,dx, \quad \varphi\in\mathscr{S}.$$

Интегрируя правую часть полученного равенства по частям, убеждаемся в существовании непрерывных функций g_α, $|\alpha|\leqslant p+2$, медленного роста таких, что

$$(f, \varphi)=(-1)^{pn}\int\sum_{|\alpha|\leqslant(p+2)n}g_\alpha(x)D_1^{p+2}\ \dots\ D_n^{p+2}\varphi(x)\,dx,$$

откуда и следует представление (4.1) при $m=p+2$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $f\in\mathscr{S}'$, то существует такое целое число $p\geqslant 0$, что для любого $\varepsilon>0$ существуют функции $g_{\alpha,\varepsilon}$, $|\alpha|\leqslant p$,* *непрерывные, медленного роста в* $\mathbb{R}^n$ *и обращающиеся в нуль вне* ε*-окрестности носителя* f, *такие, что*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} D^\alpha g_{\alpha, \varepsilon}(x). \tag{4.5}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и $\eta \in \theta_M$, $\eta(x) = 1$, $x \in (\operatorname{supp} f)^{\varepsilon/3}$ и $\eta(x) = 0$, $x \,\overline{\in}\, (\operatorname{supp} f)^\varepsilon$. (По лемме § 1.2 такие функции существуют.) Тогда, принимая во внимание представление (4.1) и пользуясь формулой Лейбница (см. § 2.1), имеем

$$f(x) = \eta(x) f(x) = \eta(x) D_1^m \ldots D_n^m g(x) =$$
$$= D_1^m \ldots D_n^m [\eta(x) g(x)] + \sum_{|\alpha| \leqslant mn-1} \eta_\alpha(x) D^\alpha g(x),$$

где $\eta_\alpha \in \theta_M$ и $\eta_\alpha(x) = 0$, $x \,\overline{\in}\, (\operatorname{supp} f)^\varepsilon$. Каждое слагаемое в последней сумме опять преобразуем подобным образом, и т. д. В результате через конечное число шагов придем к представлению (4.5) с $p = mn$ и $g_{\alpha, \varepsilon} = \chi_\alpha g$, где χ_α — некоторые функции из θ_M с носителем в $(\operatorname{supp} f)^\varepsilon$.

5. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $g(y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$, то прямое произведение $f(x) \times g(y)$ есть обобщенная функция из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ (см. § 3.1).

Докажем, что $f(x) \times g(y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

По определению функционала $f(x) \times g(y)$ (см. § 3.1)

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))). \tag{5.1}$$

Докажем, что правая часть равенства (5.1) есть *линейный непрерывный функционал на* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Для этого установим следующую лемму, аналогичную лемме § 3.1.

Лемма. *Если* $g \in \mathscr{S}'$, *то при всех* α

$$D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m}), \tag{5.2}$$

и существует целое число $q \geqslant 0$ *такое, что*

$$\|\psi\|_p \leqslant \|g\|_{-q} \|\varphi\|_{p+q}, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{5.3}$$

так что операция $\varphi \to \psi = (g(y), \varphi(x, y))$ *непрерывна (и линейна) из* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ *в* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы § 3.1, устанавливается справедливость равенств (5.2) при всех α и непрерывность его правой части. Следовательно, $\psi \in C^\infty$. Пусть q — порядок g. Применяя неравенство (2.3) к правой части равенства (5.2), при всех $x \in \mathbb{R}^n$ получим оценку

$$|D^\alpha \psi(x)| \leqslant \|g\|_{-q} \sup_{\substack{y \\ |\beta| \leqslant q}} (1 + |y|^2)^{q/2} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y)|,$$

откуда и вытекает оценка (5.3):

$$\|\psi\|_p = \sup_{\substack{x \\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x|^2)^{p/2} |D^\alpha \psi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|_{-q} \sup_{\substack{(x, y) \\ |\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant q}} (1 + |x|^2)^{p/2} (1 + |y|^2)^{q/2} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|_{-q} \|\varphi\|_{p+q}, \quad p = 0, 1, \ldots$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что правая часть равенства (5.1), равная (f, ψ), есть линейный и непрерывный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, так что $f(x) \times g(y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ (ср. § 3.1).

Все свойства прямого произведения, перечисленные в § 3.2 для пространства $\mathscr{D}'$, остаются справедливыми и для пространства $\mathscr{S}'$. Это утверждение следует из плотности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{S}$ (см. § 5.1). В частности, операция $f(x) \to f(x) \times g(y)$ непрерывна из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Наконец, формула (3.2) § 3 остается справедливой и при $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\left(f(x), \int \varphi(x, y)\, dy\right) = \int (f(x), \varphi(x, y))\, dy. \tag{5.4}$$

6. Свертка обобщенных функций медленного роста. Пусть $f \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{S}'$ и их свертка $f * g$ существует в $\mathscr{D}'$. Спрашивается, когда $f * g \in \mathscr{S}'$ и операция $f \to f * g$ непрерывна из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$? Отметим три достаточных признака существования свертки в $\mathscr{S}'$.

а) *Пусть* $f \in \mathscr{S}'$ *и* $g \in \mathscr{E}'$. *Тогда свертка* $f * g$ *принадлежит* $\mathscr{S}'$ *и представляется в виде*

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \eta(y) \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6.1}$$

где η — *любая функция из* $\mathscr{D}$, *равная* 1 *в окрестности носителя* g; *при этом операция* $f \to f * g$ *непрерывна из* $\mathscr{S}'$ *в* $\mathscr{S}'$, *а операция* $g \to f * g$ *непрерывна из* $\mathscr{E}'$ *в* $\mathscr{S}'$.

Действительно, свертка $f * g \in \mathscr{D}'$ и на основных функциях из $\mathscr{D}$ справедливо представление (3.3) § 4. Поскольку $f(x) \times g(y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ (см. § 5.5), а операция $\varphi \to \eta(y) \varphi(x + y)$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\|\eta(y) \varphi(x + y)\|_p \leqslant \sup_{\substack{(x, y) \\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x|^2 + |y|^2)^{p/2} |D^\alpha [\eta(y) \varphi(x + y)]| \leqslant$$
$$\leqslant C_p \sup_{\substack{(x, y) \\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x + y|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(x + y)| = C_p \|\varphi\|_p,$$

то правая часть равенства (6.1) определяет линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$, так что $f * g \in \mathscr{S}'$.

б) Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0, $C = \operatorname{int} \Gamma^*$, S — строго C-подобная поверхность и S_+ — область, лежащая над S (см. § 4.4).

Если $f \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$, и $g \in \mathscr{S}'(\bar{S}_+)$ то свертка $f * g$ существует в $\mathscr{S}'$ и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y),\ \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6.2}$$

*где ξ и η — любые C^∞-функции, $|D^\alpha \xi(x)| \leqslant c_\alpha$, $|D^\alpha \eta(y)| \leqslant c_\alpha$, равные 1 в $(\operatorname{supp} f)^\varepsilon$ и $(\operatorname{supp} g)^\varepsilon$ и равные 0 вне $(\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ и $(\operatorname{supp} g)^{2\varepsilon}$ соответственно (ε — любое > 0) *). При этом, если $\operatorname{supp} f \subset \Gamma + K$, где K — компакт, то операция $f \to f * g$ непрерывна из $\mathscr{S}'(\Gamma + K)$ в $\mathscr{S}'(\bar{S}_+ + K)$.*

Для доказательства этого утверждения, пользуясь представлением (5.1) § 4 и рассуждая, как и в § 5.6, а), осталось установить непрерывность операции $\varphi \to \chi = \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)$ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. При всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$\|\chi\|_p = \sup_{\substack{(x,y)\\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x|^2 + |y|^2)^{p/2} |D^\alpha_{(x,y)} [\xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)]| \leqslant$$
$$\leqslant C'_p \sup_{\substack{x \in \Gamma + K + \bar{U}_{2\varepsilon},\ y \in \bar{S}_+\\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x|^2 + |y|^2)^{p/2} |D^\alpha_{(x,y)} \varphi(x+y)| \leqslant$$
$$\leqslant 2^p C'_p \sup_{\substack{x \in T(\xi)\\ |\alpha| \leqslant p}} (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(\xi)|,$$

где

$$T(\xi) = [x\colon\ x \in \Gamma + K + \bar{U}_{2\varepsilon},\ x = \xi - y,\ y \in \bar{S}_+].$$

Так как S предполагается строго C-подобной поверхностью, то множество $T(\xi)$ содержится в шаре радиуса $a(1 + |\xi|)^\nu$, $\nu \geqslant 1$ (см. § 4.4). Поэтому, продолжая наши оценки, получим

$$\|\chi\|_p \leqslant C''_p \sup_{\substack{\xi\\ |\alpha| \leqslant p}} [1 + |\xi|^2 + a^2(1 + |\xi|)^{2\nu}]^{p/2} |D^\alpha \varphi(\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant C_p \|\varphi\|_{p([\nu]+1)}, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

что и требовалось.

Из полученного критерия вытекает, в частности, что *множество обобщенных функций $\mathscr{S}'(\Gamma +)$ образует сверточную алгебру — подалгебру алгебры $\mathscr{D}'(\Gamma +)$; равным образом $\mathscr{S}'(\Gamma)$ также образует сверточную алгебру — подалгебру алгебры $\mathscr{S}'(\Gamma +)$.*

---

*) По лемме § 1.2 такие функции существуют.

в) *Пусть $f \in \mathscr{S}'$ и $\eta \in \mathscr{S}$. Тогда свертка $f * \eta$ существует в θ_M и представляется в виде* (ср. (6.2) § 4)

$$(f * \eta, \varphi) = (f,\ \eta * \varphi(-x)), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6.3}$$

$$f * \eta = (f(y),\ \eta(x - y)); \tag{6.3'}$$

при этом существует такое целое число $m \geqslant 0$ (порядок f), что

$$|D^\alpha (f * \eta)(x)| \leqslant \|f\|_{-m} (1 + |x|^2)^{m/2} \|\eta\|_{m + |\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

Действительно, пусть $\{\eta_k(x; y)\}$ — последовательность функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, и $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int \eta(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y)\,dy \to \int \eta(y)\varphi(x+y)\,dy, \quad k \to \infty \text{ в } \mathscr{S}.$$

Отсюда, пользуясь определениями свертки (см. § 4.1) и прямого произведения (см. § 3.1), при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получаем представление (6.3):

$$(f * \eta, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f(x) \times \eta(y),\ \eta_k(x; y)\varphi(x+y)) =$$
$$= \lim_{k \to \infty} \Bigl(f(x),\ \int \eta(y)\eta_k(x; y)\varphi(x+y)\,dy\Bigr) =$$
$$= \Bigl(f(x),\ \int \eta(y)\varphi(x+y)\,dy\Bigr) =$$
$$= \Bigl(f(x),\ \int \varphi(\xi)\eta(\xi - x)\,d\xi\Bigr) = (f,\ \eta * \varphi(-x)).$$

Замечая, что $\varphi(\xi)\eta(\xi - x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ и пользуясь формулой (5.4), продолжаем нашу цепочку равенств

$$(f * \eta, \varphi) = \int (f(x),\ \eta(\xi - x))\varphi(\xi)\,d\xi,$$

откуда и следует представление (6.3′).

Как и при доказательстве леммы § 3.1, из представления (6.3) заключаем, что $f * \eta \in C^\infty$ и справедлива формула

$$D^\alpha (f * \eta)(x) = \bigl(f(y),\ D^\alpha_x \eta(x - y)\bigr). \tag{6.5}$$

Пусть m — порядок f. Применяя неравенство (2.3) к правой части (6.5), получаем неравенство (6.4):

$$|D^\alpha(f*\eta)(x)| \leqslant \|f\|_{-m} \|D_x^\alpha \eta(x-y)\|_m =$$
$$= \|f\|_{-m} \sup_{\substack{y \\ |\beta|\leqslant m}} (1+|y|^2)^{m/2} |D_x^\alpha D_y^\beta \eta(x-y)| =$$
$$= \|f\|_{-m} \sup_{\substack{\xi \\ |\beta|\leqslant m}} (1+|x-\xi|^2)^{m/2} |D^{\alpha+\beta}\eta(\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{-m} (1+|x|^2)^{m/2} \sup_{\substack{\xi \\ |\beta|\leqslant m}} (1+|\xi|^2)^{m/2} |D^{\alpha+\beta}\eta(\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{-m} (1+|x|^2)^{m/2} \|\eta\|_{m+|\alpha|}.$$

Следствие. *$\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}'$.*

Действительно, по доказанному, если $f \in \mathscr{S}'$, то ее регуляризация $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon \in \theta_M$ и $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathscr{S}'$ (см. § 5.6, а)). Поэтому θ_M плотно в $\mathscr{S}'$. Но $\mathscr{S}$ плотно в θ_M, ибо если $a \in \theta_M$, то

$$\mathscr{S} \ni e^{-\varepsilon|x|^2} a \to a, \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } \mathscr{S}'.$$

Глава II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из мощных средств исследования задач математической физики является метод интегральных преобразований. В этой главе будут изложены элементы теории преобразования Фурье и тесно связанного с ним преобразования Лапласа, а также преобразований Коши — Бохнера, Гильберта и Пуассона для класса обобщенных функций медленного роста.

§ 6. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Замечательное свойство класса обобщенных функций медленного роста состоит в том, что операция преобразования Фурье не выводит за пределы этого класса.

1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathscr{S}$. Поскольку основные функции $\varphi(x)$ из $\mathscr{S}$ суммируемы на $\mathbb{R}^n$, то на них определена операция (классического) преобразования Фурье $F[\varphi]$:

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx, \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

При этом функция $F[\varphi](\xi)$ — *преобразование Фурье функции* $\varphi(x)$ — ограничена и непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Основная функция $\varphi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Поэтому ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{1.1}$$

откуда следует, что $F[\varphi] \in C^\infty$. Далее, такими же свойствами обладает и каждая производная $D^\alpha\varphi(x)$, а потому

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int D^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)}\, dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi). \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, в частности, что $F[\varphi](\xi)$ — суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$.

Из общей теории преобразования Фурье следует, что функция $\varphi(x)$ выражается через ее преобразование Фурье $F[\varphi](\xi)$ с помощью операции обратного преобразования Фурье F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{1.3}$$

где

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(-\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)]. \tag{1.4}$$

Лемма. *Операция преобразования Фурье F переводит $\mathscr{S}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно на себя* *).

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$. Тогда, пользуясь формулами (1.1) и (1.2), при всех $p = 0, 1, \ldots$ и всех α получим

$$(1+|\xi|^2)^{p/2}|D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leqslant (1+|\xi|^2)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}|D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int (1-\Delta)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}[(ix)^\alpha \varphi(x)]\, e^{i(\xi,x)}\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_x (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \left|(1-\Delta)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}[x^\alpha \varphi(x)]\right|,$$

откуда выводим оценки (см. § 5.1)

$$\|F[\varphi]\|_p \leqslant C_p \|\varphi\|_{p+n+1}, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{1.5}$$

при некоторых C_p, не зависящих от φ. (Здесь $[x]$ — целая часть числа $x \geqslant 0$.) Оценка (1.5) показывает, что операция $\varphi \to F[\varphi]$ преобразует $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ и непрерывна. Далее, из формул (1.3) и (1.4) следует, что всякая функция φ из $\mathscr{S}$ есть преобразование Фурье функции $\psi = F^{-1}[\varphi]$ из $\mathscr{S}$, $\varphi = F[\psi]$, и если $F[\varphi] = 0$, то и $\varphi = 0$. Это значит, что отображение $\varphi \to F[\varphi]$ взаимно однозначно переводит $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$. Аналогичными свойствами обладает и операция обратного преобразования Фурье F^{-1}. Лемма доказана.

2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$. Пусть сперва $f(x)$ — суммируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда ее преобразование Фурье

$$F[f](\xi) = \int f(x)\, e^{i(\xi,x)}\, dx, \qquad |F[f](\xi)| \leqslant \int |f(x)|\, dx < \infty$$

*) Как говорят, отображение F есть (линейный) *изоморфизм $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$*.

является (непрерывной) ограниченной в $\mathbb{R}^n$ функцией и, следовательно, определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста по формуле (см. § 5.3)

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Пользуясь теоремой Фубини о перемене порядка интегрирования, преобразуем последний интеграл

$$\int F[f](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int\left[\int f(x)\, e^{i(\xi,x)}\, dx\right]\varphi(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int f(x) \int \varphi(\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, d\xi\, dx = \int f(x)\, F[\varphi](x)\, dx,$$

т. е.

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Это равенство мы и примем за определение *преобразования Фурье* $F[f]$ любой обобщенной функции f медленного роста:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathscr{S}', \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{2.1}$$

Так как по лемме § 6.1 операция $\varphi \to F[\varphi]$ линейна и непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, то функционал $F[f]$, определяемый правой частью равенства (2.1), представляет собой обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$ и, более того, операция $f \to F[f]$ — *линейная и непрерывная из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$*.

Введем в $\mathscr{S}'$ еще одну операцию преобразования Фурье, которую обозначим через F^{-1}, по формуле (ср. с (1.4))

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathscr{S}', \tag{2.2}$$

где $f(-x)$ — отражение $f(x)$ (см. § 1.9). Очевидно, F^{-1} — линейная и непрерывная операция из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$.

Докажем, что F^{-1} является обратной операцией к операции F, т. е.

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathscr{S}'. \tag{2.3}$$

Действительно, в силу (1.3) и (1.4), формулы (2.3) справедливы на множестве $\mathscr{S}$, плотном в $\mathscr{S}'$ (см. § 5.6); операции же F и F^{-1} непрерывны из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$. Следовательно, формулы (2.3) остаются справедливыми и для всех f из $\mathscr{S}'$.

Из формул (2.3) следует, что всякая f из $\mathscr{S}'$ есть преобразование Фурье некоторой $g = F^{-1}[f]$ из $\mathscr{S}'$, $f = F[g]$, и если $F[f] = 0$, то и $f = 0$. Таким образом, мы доказали, что *операция $f \to F[f]$ преобразует $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т. е. есть (линейный) изоморфизм $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$*, Пусть $f(x, y) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$. Введем преобразование Фурье $F_x[f]$ по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, положив для любой основной функции $\varphi(\xi, y)$ из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{2.4}$$

Как и в § 6.1, устанавливается, что операция

$$\varphi(\xi, y) \to F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(x, \xi)} d\xi$$

осуществляет (линейный) изоморфизм $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, так что формула (2.4) действительно определяет обобщенную функцию $F_x[f](\xi, y)$ из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Аналогично (2.2) определяется и операция обратного преобразования Фурье

$$F_\xi^{-1}[g] = \frac{1}{(2\pi)^n} F_\xi[g(-\xi, y)](x, y), \quad g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m}). \tag{2.5}$$

Операция $f \to F_x[f]$ есть (линейный) изоморфизм $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Пример.

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$(F[\delta(x - x_0)], \varphi) = (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) =$$
$$= \int \varphi(\xi) e^{i(x_0, \xi)} d\xi = (e^{i(x_0, \xi)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Полагая в (2.6) $x_0 = 0$, получим

$$F[\delta] = 1, \tag{2.7}$$

откуда, в силу (2.2), выводим

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

так что

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{2.8}$$

3. Свойства преобразования Фурье. Перечисленные в этом пункте формулы для преобразования Фурье справедливы на основных функциях из $\mathscr{S}$. Но $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}'$. Поэтому эти формулы остаются справедливыми и для всех обобщенных функций из $\mathscr{S}'$.

а) Дифференцирование преобразования Фурье:

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \tag{3.1}$$

В частности, полагая в (3.1) $f = 1$ и пользуясь формулой (2.8), получим

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \tag{3.2}$$

б) Преобразование Фурье производной:

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \tag{3.3}$$

Полагая в (3.3) $f = \delta$ и пользуясь формулой (2.7), получим

$$F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha F[\delta] = (-i\xi)^\alpha. \tag{3.4}$$

в) Преобразование Фурье сдвига:

$$F[f(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)} F[f]. \tag{3.5}$$

г) Сдвиг преобразования Фурье:

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \tag{3.6}$$

д) Преобразование Фурье при линейном преобразовании аргумента (см. § 5.3):

$$F[f(Ax)](\xi) = \frac{1}{|\det A|} F[f](A^{-1T}\xi), \quad \det A \neq 0; \tag{3.7}$$

здесь $A \to A^T$ обозначает операцию транспонирования матрицы A.

е) Преобразование Фурье прямого произведения:

$$F[f(x) \times g(y)] = F_x[f(x) \times F[g](\eta)] =$$
$$= F_y[F[f](\xi) \times g(y)] = F[f](\xi) \times F[g](\eta). \tag{3.8}$$

ж) Аналогичные формулы справедливы и для преобразования Фурье F_x (см. § 6.2), например:

$$D_x^\alpha D_y^\beta F_x[f] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f], \qquad F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_y^\beta F_x[f]. \tag{3.9}$$

4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Если f — обобщенная функция с компактным носителем, $f \in \mathscr{E}'$, то она — медленного роста, $f \in \mathscr{S}'$ (см. § 5.3), и поэтому ее преобразование Фурье существует. Более того, справедлива следующая

Теорема. *Если $f \in \mathscr{E}'$, то преобразование Фурье $F[f]$ существует в θ_M и представляется в виде*

$$F[f](\xi) = (f(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)}), \tag{4.1}$$

где η — любая функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности носителя f. При этом существуют такие числа $C_\alpha \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$, что

$$|D^\alpha F[f](\xi)| \leqslant \|f\|_{-m} C_\alpha (1 + |\xi|^2)^{m/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Доказательство. Учитывая равенства (3.2) § 5 и (3.3), при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получим

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha \varphi]) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}(f, \eta(x)(-ix)^\alpha F[\varphi]) = \left(f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi\right).$$

Замечая теперь, что

$$\eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x,\xi)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}),$$

и пользуясь формулой (5.4) § 5:

$$\left(f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi\right) = \int \left(f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)}\right) \varphi(\xi)\, d\xi,$$

из предыдущих равенств выводим равенство

$$(D^\alpha F[f], \varphi) = \int \left(f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)}\right) \varphi(\xi)\, d\xi,$$

из которого вытекает, что

$$D^\alpha F[f](\xi) = \left(f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)}\right). \tag{4.3}$$

Из (4.3) при $\alpha = 0$ следует формула (4.1).

Из представления (4.3), как и при доказательстве леммы § 5.5, выводим, что $F[f] \in C^\infty$. Пусть m — порядок f. Применяя к правой части (4.3) неравенство (2.3) § 5, при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ получим оценку (4.2):

$$|D^\alpha F[f](\xi)| = |(f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)})| \leqslant \|f\|_{-m} \|\eta(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)}\|_m =$$
$$= \|f\|_{-m} \sup_{\substack{x\\ |\beta| \leqslant m}} (1+|x|^2)^{m/2} |D_x^\beta[\eta(x) x^\alpha e^{i(x,\xi)}]| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{-m} C_\alpha (1+|\xi|^2)^{m/2}$$

при некоторых $C_\alpha \geqslant 0$. Таким образом, $F[f] \in \theta_M$. Теорема доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, числа C_α, фигурирующие в неравенстве (4.2), можно выбрать не зависящими от семейства обобщенных функций f, если все носители этого семейства равномерно ограничены.

5. Преобразование Фурье свертки. *Пусть* $f \in \mathscr{S}'$ *и* $g \in \mathscr{E}'$. *Тогда их свертка* $f * g \in \mathscr{S}'$ (см. § 5.6, а)) *и ее преобразование Фурье вычисляется по формуле*

$$F[f * g] = F[f]\, F[g]. \tag{5.1}$$

Действительно, в силу (6.1) § 5, свертка $f * g \in \mathscr{S}'$ представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x+y))), \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

где $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta(y) = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} g$. Учитывая это представление и пользуясь определением преобразования Фурье (см. § 6.2), получаем

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = \left(f(x), \left(g(y), \eta(y) \int \varphi(\xi) e^{i(x+y,\xi)} d\xi\right)\right).$$

Пользуясь формулами (5.4) § 5 и (4.1) и принимая во внимание, что $F[g] \in \theta_M$, преобразуем полученное равенство

$$(F[f * g], \varphi) = \left(f(x), \int \left(g(y), \eta(y) e^{i(\xi,y)}\right) e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi\right) =$$
$$= \left(f(x), \int F[g](\xi) e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi\right) = (f, F[F[g]\varphi]) =$$
$$= (F[f], F[g]\varphi) = (F[g]F[f], \varphi),$$

откуда и вытекает равенство (5.1).

Отметим другие случаи, когда справедлива формула (5.1).

а) *Пусть* $f \in \mathscr{S}'$, $g \in \mathscr{S}$. *Тогда* $f * g \in \theta_M$.

Вытекает из § 5.6, в).

б) *Пусть* f *и* $g \in \mathscr{L}^2$. *Тогда* $f * g \in C$ *и* $(f * g)(x) = o(1)$, $|x| \to \infty$, *т. е.* $f * g \in \overline{C}_0$ (см. § 0.5).

Действительно, в этом случае $F[f]$ и $F[g] \in \mathscr{L}^2$ и, стало быть, $F[f]F[g] \in \mathscr{L}^1$. Кроме того, $f(y)g(x-y)\varphi(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ в силу неравенства Коши — Буняковского:

$$\left[\int |f(y)\, g(x-y)|\, |\varphi(x)|\, dx\, dy\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int |f(y)|^2 |\varphi(x)|\, dx\, dy\right]\left[\int |g(x-y)|^2 |\varphi(x)|\, dx\, dy\right] =$$
$$\leqslant \|f\|^2 \|g\|^2 \left[\int |\varphi(x)|\, dx\right]^2 < \infty.$$

Поэтому, пользуясь формулой (1.1) для свертки $f * g$ (см. § 4.1, б)), с помощью теоремы Фубини при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ получим равенства

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = \int F[\varphi](x) \int f(y)\, g(x-y)\, dy\, dx =$$
$$= \int f(y) \int g(x-y)\, F[\varphi](x)\, dx\, dy =$$
$$= \int f(y) \int F[g(x-y)](\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\, dy =$$
$$= \int f(y) \int F[g](\xi)\, \varphi(\xi) e^{i(y,\xi)}\, d\xi\, dy = \int F[g]\, F[f]\, \varphi\, d\xi,$$

из которых и следует формула (5.1). Поэтому

$$f * g = F^{-1}[F[f]\, F[g]] \in C$$

и по теореме Римана — Лебега $(f * g)(x) \to 0$, $|x| \to \infty$.

Замечание. Если известно, что свертка $f * g$ существует в $\mathscr{S}'$ (например, при $f \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$ и $g \in \mathscr{S}'(\overline{S}_+)$ (см. § 5.6, б)), то равенство (5.1) может служить определением произведения обобщенных функций $F[f]$ и $F[g]$ (ср. § 1.10).

6. Примеры.

а) $$F[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}, \quad n = 1. \tag{6.1}$$

Действительно, функция $e^{-\alpha^2x^2}$ суммируема на $\mathbb{R}^1$ а поэтому

$$F[e^{-\alpha^2x^2}] = \int e^{-\alpha^2x^2+i\xi x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{-\sigma^2+i\frac{\xi}{\alpha}\sigma}\,d\sigma =$$
$$= \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}\int e^{-\left(\sigma+\frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2}\,d\sigma = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}\int\limits_{\operatorname{Im}\zeta=\frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\zeta^2}\,d\zeta.$$

Линия интегрирования в последнем интеграле может быть сдвинута на вещественную ось и поэтому

$$F[e^{-\alpha^2x^2}] = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}.$$

б) Многомерным аналогом формулы (6.1) является формула

$$F[e^{-(Ax,\,x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(A^{-1}\xi,\,\xi)}, \tag{6.2}$$

где A — вещественная положительно определенная матрица.

Для получения формулы (6.2) с помощью неособенного вещественного линейного преобразования $x = By$ приведем квадратичную форму (Ax, x) к сумме квадратов

$$(Ax,\,x) = (ABy,\,By) = (B^TABy,\,y) = |y|^2,$$

причем

$$A^{-1} = BB^T, \qquad \det A\,|\det B|^2 = 1.$$

Отсюда, пользуясь формулой (6.1), получаем

$$F[e^{-(Ax,\,x)}] = \int e^{-(Ax,\,x)+i(\xi,\,x)}\,dx =$$
$$= |\det B|\int e^{-(ABy,\,By)+i(\xi,\,By)}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int e^{-|y|^2+i(B^T\xi,\,y)}\,dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\int e^{-y_j^2+i(B^T\xi)_jy_j}\,dy_j = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}|B^T\xi|^2} =$$
$$= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,\,BB^T\xi)} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,\,A^{-1}\xi)}.$$

в) Пусть функция $f(x)$ медленного роста в $\mathbb{R}^n$ (см. § 5.3). Тогда

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{|x|<R} f(x)e^{i(\xi,\,x)}\,dx \quad \text{в} \quad \mathscr{S}'. \tag{6.3}$$

Действительно,

$$\theta(R-|x|)f(x)\to f(x), \quad R\to\infty \quad \text{в} \quad \mathscr{S}',$$

откуда, в силу непрерывности в $\mathscr{S}'$ операции преобразования Фурье F, и вытекает равенство (6.3).

В частности, при $f\in\mathscr{L}^2$ справедлива следующая теорема Планшереля: *преобразование Фурье $F[f]$ выражается равенством*

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{|x|<R} f(x)e^{i(\xi,\,x)}\,dx \quad \text{в } \mathscr{L}^2;$$

оно отображает $\mathscr{L}^2$ на $\mathscr{L}^2$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, причем справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n\langle f,\,\varphi\rangle = \langle F[f],\,F[\varphi]\rangle, \qquad f,\,\varphi\in\mathscr{L}^2,$$

так что

$$(2\pi)^n\|f\|^2 = \|F[f]\|^2, \qquad f\in\mathscr{L}^2$$

(скалярное произведение $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ определено в § 0.5).

г) Пусть f — произвольная обобщенная функция медленного роста. По теореме § 5.4 существует функция $g(x)$, непрерывная и медленного роста в $\mathbb{R}^n$, и целое число $m\geqslant 0$ такие, что

$$f(x) = D_1^m\ldots D_n^m g(x).$$

Отсюда, пользуясь формулой (3.3), получаем

$$F[f] = (-i)^{mn}\xi_1^m\ldots\xi_n^m F[g], \tag{6.4}$$

причем преобразование Фурье $F[g]$ можно вычислить по формуле (6.3).

д)
$$F[e^{ix^2}] = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}, \quad n=1. \tag{6.5}$$

Действительно, из сходимости несобственного интеграла (интеграла Френеля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2}\,dy = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$$

следует, что последовательность преобразований Фурье

$$\int_{-R}^{R} e^{ix^2+i\xi x}\,dx = e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int_{-R+\frac{\xi}{2}}^{R+\frac{\xi}{2}} e^{iy^2}\,dy, \qquad R\to\infty,$$

сходится равномерно по ξ на каждом конечном интервале к функции

$$e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2}\,dy = \sqrt{\pi}e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}.$$

Отсюда, в силу в), заключаем, что равенство (6.5) справедливо на всех основных функциях из $\mathscr{D}$. Но $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{S}$ (см. § 6.1), и поэтому равенство (6.5) справедливо в $\mathscr{S}'$.

е) Многомерным аналогом равенства (6.5) служит равенство (ср. б))

$$F[e^{i(Ax,x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{i\frac{\pi n}{4} - \frac{i}{4}(A^{-1}\xi,\xi)}, \tag{6.6}$$

где A — вещественная положительно определенная матрица.

ж)
$$F\left[\frac{1}{|x^2|}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \qquad n=3. \tag{6.7}$$

Имеем

$$\int\limits_{|x|<R} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|x|^2}\,dx = \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2}\rho^2\,d\psi\sin\theta\,d\theta\,d\rho =$$
$$= 2\pi\int\limits_0^R \int\limits_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho\mu}\,d\mu\,d\rho = \frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^R \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\,d\rho.$$

Так как

$$\left|\int\limits_R^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\,d\rho\right| = \left|\frac{\cos(|\xi|R)}{|\xi|R} - \frac{1}{|\xi|}\int\limits_R^\infty \frac{\cos(|\xi|\rho)}{\rho^2}\,d\rho\right| \leqslant \frac{2}{|\xi|R},$$
$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\,d\rho = \frac{\pi}{2}, \qquad |\xi| \neq 0,$$

то

$$\frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^R \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}\,d\rho \to \frac{2\pi^2}{|\xi|}, \qquad R\to\infty \text{ в } \mathscr{S}'$$

и, в силу в), справедливо равенство (6.7).

з) Пусть $n=2$. Введем обобщенную функцию $\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}$ из $\mathscr{S}'$, действующую по правилу

$$\left(\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}, \varphi\right) = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}\,dx.$$

Очевидно, $\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{|x^2|}$ при $x \neq 0$. Докажем формулу

$$F\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi\ln|\xi| - 2\pi c_0, \tag{6.8}$$

где

$$c_0 = \int\limits_0^1 \frac{1-J_0(u)}{u}\,du - \int\limits_1^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du.$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ справедлива цепочка равенств

$$\left(F\left[\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi\right) = \left(\mathrm{Pf}\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]\right) =$$
$$= \int\limits_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|^2}\,dx =$$
$$= \int\limits_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2}\int \varphi(\xi)[e^{i(x,\xi)} - 1]\,d\xi\,dx +$$
$$+ \int\limits_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2}\int \varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}\,d\xi\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{r}\int \varphi(\xi)\int\limits_0^{2\pi}(e^{ir|\xi|\cos\theta} - 1)\,d\theta\,d\xi\,dr +$$
$$+ \int\limits_1^\infty \frac{1}{r}\int \varphi(\xi)\int\limits_0^{2\pi} e^{ir|\xi|\cos\theta}\,d\theta\,d\xi\,dr =$$
$$= 2\pi\int\limits_0^1 \frac{1}{r}\int \varphi(\xi)[J_0(r|\xi|) - 1]\,d\xi\,dr + 2\pi\int\limits_1^\infty \frac{1}{r}\int \varphi(\xi)J_0(r|\xi|)\,d\xi\,dr =$$
$$= 2\pi\int \varphi(\xi)\left[\int\limits_0^1 \frac{J_0(r|\xi|)-1}{r}\,dr + \int\limits_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r}\,dr\right]d\xi =$$
$$= 2\pi\int \varphi(\xi)\left[\int\limits_0^{|\xi|} \frac{J_0(u)-1}{u}\,du + \int\limits_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du\right] =$$
$$= -2\pi\int \varphi(\xi)(\ln|\xi| + c_0)\,d\xi,$$

из которой и следует формула (6.8).

и) Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в 0) и $f \in \mathscr{S}'(\Gamma+)$ (см. § 5.6, б)). Тогда справедлива в смысле сходимости в $\mathscr{S}'$ формула

$$F[f](\xi) = \lim_{\substack{\xi'\to 0\\ \xi'\in \operatorname{int}\Gamma^*}} (f(x), \eta(x)e^{i(x,\xi)-(x,\xi')}), \tag{6.9}$$

где η — любая C^∞-функция со свойствами:

$$|D^\alpha \eta(x)| \leqslant C_\alpha; \quad \eta(x)=1, \quad x \in (\operatorname{supp} f)^\varepsilon; \quad \eta(x)=0, \quad x \overline{\in} (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$$

(ε — любое >0).

Для доказательства формулы (6.9) отметим сперва, что

$$\eta(x) e^{-(x,\,\xi')} \in \mathscr{S} \quad \text{при всех} \quad \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^*, \tag{6.10}$$

$$\eta(x) f(x) e^{-(x,\,\xi')} \to f(x), \quad \xi' \to 0, \quad \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^* \quad \text{в} \quad \mathscr{S}'. \tag{6.11}$$

Действительно, если $x \overline{\in} (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$, то $\eta(x)=0$; если же $x \in (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$, то $x = x' + x''$, где $x' \in \Gamma$, $|x''| \leqslant R$ при некотором $R>0$. Пусть $\xi' \in C' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*$. Тогда по лемме 1 § 4.4 существует такое число $\sigma = \sigma(C') > 0$, что $(x', \xi') \geqslant \sigma |x'|\,|\xi'|$, и поэтому

$$-(x, \xi') = -(x', \xi') - (x'', \xi') \leqslant -\sigma |x'|\,|\xi'| + R|\xi'| \leqslant$$
$$\leqslant (-\sigma|x| + \sigma R + R)|\xi'|.$$

Из полученной оценки и из свойств функции $\eta(x)$ вытекают соотношения (6.10) и (6.11).

Теперь при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем цепочку равенств

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) = \lim_{\substack{\xi' \to 0 \\ \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^*}} (\eta(x) f(x) e^{-(x,\,\xi')},$$

$$\int \varphi(\xi) e^{i(x,\,\xi)}\, d\xi = \lim_{\substack{\xi' \to 0 \\ \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^*}} \int (f(x),\ \eta(x) e^{i(x,\,\xi)-(x,\,\xi')})\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

откуда и следует формула (6.9). Здесь мы воспользовались формулой (5.4) § 5, поскольку

$$\eta(x)\varphi(\xi) e^{i(x,\,\xi)-(x,\,\xi')} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}) \quad \text{при всех} \quad \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^*.$$

к)
$$F[\theta(x)] = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}, \tag{6.12}$$

$$F[\theta(-x)] = \frac{-i}{\xi - i0} = \pi\delta(\xi) - i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}. \tag{6.12$'$}$$

Эти формулы вытекают из формулы (6.9) и из формул Сохоцкого (8.3) и (8.3′) § 1, например:

$$F[\theta] = \lim_{\xi' \to +0} \int_0^\infty e^{ix(\xi + i\xi')}\, dx = \lim_{\xi' \to +0} \frac{i}{\xi + i\xi'} = \frac{i}{\xi + i0}.$$

л)
$$F[\operatorname{sign} x] = F[\theta(x)] - F[\theta(-x)] = 2i\mathscr{P}\frac{1}{\xi}. \tag{6.13}$$

м)
$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{x}\right] = -2\pi F^{-1}\left[\mathscr{P}\frac{1}{x}\right] = \pi i \operatorname{sign}\xi. \tag{6.14}$$

н) Пусть V^+ — световой конус будущего в $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. § 4.4) и $\theta_{V^+}(x)$ — характеристическая функция его. Тогда, в силу и),

$$F[\theta_{V^+}] = \lim_{\xi_0' \to +0} \int_{V^+} e^{i(x,\,\xi) - x_0\xi_0'}\, dx =$$

$$= 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) [-(\xi_0 + i0)^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2]^{-\frac{n+1}{2}} \tag{6.15}$$

(простой способ вычисления этого интеграла см. в § 10.2).

о) Полиномы и функции Эрмита. Определения:

$$H_n(x) = (-1)^n (n!)^{-1/2} \pi^{-1/4} 2^{-n/2} e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

— *полиномы Эрмита*;

$$\mathscr{H}_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

— *функции Эрмита* (волновые функции гармонического осциллятора).

Дифференциальные уравнения:

$$L^- \mathscr{H}_n = \sqrt{n}\, \mathscr{H}_{n-1}, \quad L^+ \mathscr{H}_n = \sqrt{n+1}\, \mathscr{H}_{n+1}, \quad L^+L^- \mathscr{H}_n = n\mathscr{H}_n, \tag{6.16}$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = \sqrt{2n}\, H_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots \quad (\mathscr{H}_{-1} = H_{-1} = 0), \tag{6.17}$$

где

$$L^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x \mp \frac{d}{dx}\right), \quad L^-L^+ - L^+L^- = 1. \tag{6.18}$$

Рекуррентное соотношение:

$$\sqrt{n+1}\, H_{n+1}(x) = \sqrt{2}\, x H_n(x) - \sqrt{n}\, H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.19}$$

Ортонормальность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{H}_n(x) \mathscr{H}_m(x)\, dx = \delta_{nm}. \tag{6.20}$$

Преобразование Фурье:

$$F[\mathscr{H}_n] = \sqrt{2\pi}\, i^n \mathscr{H}_n(\xi). \tag{6.21}$$

Докажем равенство (6.21). Оно вытекает из равенства

$$H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right) e^{-\xi^2/2} = i^n \mathscr{H}_n(\xi) \tag{6.22}$$

в силу (см. (6.1))

$$F[e^{-x^2/2} H_n(x)] = H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right) F[e^{-x^2/2}] = \sqrt{2\pi}\, H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right) e^{-\xi^2/2} =$$
$$= \sqrt{2\pi}\, i^n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) = \sqrt{2\pi}\, i^n \mathscr{H}_n(\xi).$$

Равенство (6.22) справедливо при $n=0$. Справедливость его при $n>0$ следует из рекуррентных соотношений (6.19) и (6.17)

$$H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\xi^2/2}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{d}{i\,d\xi}H_{n-1}\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\xi^2/2}-\sqrt{\frac{n-1}{n}}H_{n-2}\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\xi^2/2}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{d}{i\,d\xi}\left[i^{n-1}H_{n-1}(\xi)e^{-\xi^2/2}\right]-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,i^{n-2}H_{n-2}(\xi)e^{-\xi^2/2}=$$
$$=\frac{i^{n-2}}{\sqrt{n}}e^{-\xi^2/2}\left[-\sqrt{2}\,\xi H_{n-1}(\xi)+\sqrt{2}\,H'_{n-1}(\xi)-\sqrt{n-1}\,H_{n-2}(\xi)\right]=$$
$$=\frac{-i^n}{\sqrt{n}}e^{-\xi^2/2}\left[-\sqrt{2}\,\xi H_{n-1}(\xi)+2\sqrt{n-1}\,H_{n-2}(\xi)-\sqrt{n-1}\,H_{n-2}(\xi)\right]=$$
$$=i^n e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)=i^n\mathscr{H}_n(\xi).$$

Гладкость: $\mathscr{H}_n\in\mathscr{S}$, причем

$$\|\mathscr{H}_n\|_p\leqslant c_p(1+n)^{p+2},\qquad p=0,\ 1,\ \ldots,\ n=0,\ 1,\ \ldots \tag{6.23}$$

Оценка (6.23) следует из уравнений (6.16) и из формул (6.20) и (6.21). Считая p четным, имеем

$$\|\mathscr{H}_n\|_p=\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant p}\sup_x\left|(1+x^2)^{p/2}\mathscr{H}_n^{(\alpha)}(x)\right|=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant p}\sup_x\left|\int\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^{p/2}\left[\xi^\alpha\mathscr{H}_n(\xi)\right](1+\xi^2)e^{ix\xi}\frac{d\xi}{1+\xi^2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant p}\sup_x\left|\sum_{\ldots+\alpha_s+\ldots+\alpha_m+\ldots\leqslant 2p+2}\int c_{\ldots\alpha_s\ldots\alpha_m\ldots}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots(L^+)^{\alpha_s}\ldots(L^-)^{\alpha_m}\ldots\mathscr{H}_n(\xi)\frac{e^{ix\xi}\,d\xi}{1+\xi^2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant c'_p(1+n)^{p+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant 2p+2}\int|\mathscr{H}_k(\xi)|\frac{d\xi}{1+\xi^2}\leqslant$$
$$\leqslant c'_p(1+n)^{p+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant 2p+2}\|\mathscr{H}_k\|\sqrt{\int\frac{d\xi}{1+\xi^2}}\leqslant c_p(1+n)^{p+2}.$$

Для нечетных p оценка (6.23) следует отсюда и из (1.1) § 5.

Пусть $f\in\mathscr{S}'$. Числа

$$a_n(f)=(f,\ \mathscr{H}_n),\qquad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{6.24}$$

назовем *коэффициентами Фурье*, а формальный ряд

$$\sum_{0\leqslant n<\infty}a_n(f)\,\mathscr{H}_n(x) \tag{6.25}$$

— *рядом Фурье* обобщенной функции f по ортонормальной системе функций Эрмита $\{\mathscr{H}_n\}$.

Полнота в $\mathscr{L}^2$; если $f\in\mathscr{L}^2$, то ее ряд Фурье (6.25) единствен, сходится в $\mathscr{L}^2$ к f и справедливо равенство Парсеваля — Стеклова

$$\|f\|^2=\sum_{0\leqslant n<\infty}|a_n(f)|^2. \tag{6.26}$$

Для того чтобы функция φ принадлежала $\mathscr{S}$, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли условию

$$\|(L^-L^+)^m\varphi\|^2=\sum_{0\leqslant n<\infty}|a_n(\varphi)|^2n^{2m}<\infty,\qquad m=0,\ 1,\ \ldots \tag{6.27}$$

При этом ряд Фурье φ сходится к φ в $\mathscr{S}$.

Действительно, если $\varphi\in\mathscr{S}$, то и $(L^-L^+)^m\varphi\in\mathscr{L}^2$ при всех $m\geqslant 0$. Поэтому в силу (6.16) и (6.24)

$$a_n\left((L^-L^+)^m\varphi\right)=\int(L^-L^+)^m\varphi(x)\,\mathscr{H}_n(x)\,dx=$$
$$=\int\varphi(x)\,(L^+L^-)^m\,\mathscr{H}_n(x)\,dx=n^m\int\varphi(x)\,\mathscr{H}_n(x)\,dx=n^m a_n(\varphi),$$

откуда в силу равенства Парсеваля — Стеклова (6.26) следует равенство (6.27).

Обратно, если коэффициенты $\{a_n\}$ удовлетворяют условию $\sum_{0\leqslant n<\infty}|a_n|^2n^{2m}<\infty$ при всех $m\geqslant 0$, то в силу оценки (6.23) ряд $\sum_{0\leqslant n<\infty}a_n\mathscr{H}_n(x)$ сходится в $\mathscr{S}$ к некоторой $\varphi\in\mathscr{S}$ такой, что $a_n=a_n(\varphi)$.

Для того чтобы f принадлежала $\mathscr{S}'$, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли условию: существуют числа $p\geqslant 0$ и C такие, что

$$|a_n(f)|\leqslant C(1+n)^p,\qquad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{6.28}$$

При этом ряд Фурье f единственен, сходится к f в $\mathscr{S}'$ и справедливо равенство Парсеваля — Стеклова

$$(f,\ \varphi)=\sum_{0\leqslant n<\infty}a_n(f)\,a_n(\varphi),\qquad\varphi\in\mathscr{S}. \tag{6.29}$$

Действительно, если $f\in\mathscr{S}'$ и m — порядок f (см. § 5.2), то в силу (6.24) и (6.23) справедлива оценка (6.29)

$$|a_n(f)|=|(f,\ \mathscr{H}_n)|\leqslant\|f\|_{-m}\|\mathscr{H}_n\|_m\leqslant c_m\|f\|_{-m}(1+n)^{m+2}.$$

Обратно, если коэффициенты $\{a_n\}$ удовлетворяют условию (6.28): $|a_n|\leqslant C(1+n)^p$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, то в силу оценки (6.27) ряд $\sum_{0\leqslant n<\infty}a_n\mathscr{H}_n(x)$ сходится в $\mathscr{S}'$ к некоторой $f\in\mathscr{S}'$ и справедливо равенство

$$(f, \varphi) = \sum_{0 \leqslant n < \infty} a_n \alpha_n(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{6.30}$$

поскольку

$$\Big(\sum_{0 \leqslant n \leqslant N} a_n \mathscr{H}_n, \varphi\Big) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} a_n \alpha_n(\varphi) \to (f, \varphi), \qquad N \to \infty,$$

в силу полноты пространства $\mathscr{S}'$ (см. § 5.2). Полагая в (6.30) $\varphi = \mathscr{H}_m$ и учитывая, что в силу (6.20) $\alpha_n(\mathscr{H}_m) = \delta_{nm}$, получим $a_n = a_n(f)$.

Осталось доказать единственность ряда Фурье: если $f \in \mathscr{S}'$ и $a_n(f) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, то $f = 0$. Но это вытекает из равенства (6.30).

Замечание. Введем два пространства последовательностей: сходимость в них определим естественным образом в соответствии с оценками (6.27) и (6.28). Доказанные результаты означают, что операция $f \to \{a_n(f), n = 0, 1, \ldots\}$ есть линейный изоморфизм $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ на пространства последовательностей, удовлетворяющих условиям (6.27) и (6.28) соответственно. (Непрерывность этих операций следует из равенств (6.27) и (6.29) соответственно.)

п) Интегральное представление функции Бесселя:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{ix\xi} (1 - \xi^2)^{\nu - 1/2} d\xi, \ \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \tag{6.31}$$

Функция Бесселя

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

есть единственное (с точностью до множителя) ограниченное в нуле решение уравнения Бесселя

$$(xu')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0.$$

В силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\nu - 1/2} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{0}^{1} (1 - \mu)^{-1/2} \mu^{\nu - 1/2} d\mu =$$

$$= \frac{B(1/2, \nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)\,\Gamma(\nu + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}$$

асимптотическое поведение при $x \to +0$ обеих частей равенства (6.31) одинаково. Поэтому для доказательства равенства (6.31) осталось доказать, что правая часть (6.31) удовлетворяет уравнению Бесселя. Но это устанавливается непосредственной проверкой

$$\int_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\nu - 1/2} [\nu^2 x^{\nu - 1} + (2\nu + 1) x^\nu i\xi - x^{\nu+1}\xi^2 + x^{\nu+1} - \nu^2 x^{\nu-1}] e^{ix\xi} d\xi =$$

$$= x^{\nu+1} \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\nu + 1/2} e^{ix\xi} d\xi + (2\nu + 1) i x^\nu \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\nu - 1/2} e^{ix\xi} \xi \, d\xi = 0.$$

р) Преобразование Ганкеля. Пусть $f(|x|) \in \mathscr{L}^2$, т. е. $'\|f\|^2 = \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{n-1} dr < \infty$. Функция

$$g(\rho) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty f(r)\, r^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\, dr \tag{6.32}$$

называется *преобразованием Ганкеля порядка* $\frac{n-2}{2}$ функции $f(r)$; интеграл здесь сходится по норме $'\|\ \|$.

Справедлива формула обращения

$$f(r) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(\rho)\, \rho^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\, d\rho, \tag{6.32$'$}$$

причем справедливо равенство Парсеваля

$$(2\pi)^n\, '\|f\|^2 = '\|g\|^2.$$

Частные случаи:

$$n = 1, \quad g(\rho) = 2 \int_0^\infty f(r) \cos r\rho \, dr,$$

$$n = 2, \quad g(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(r)\, r J_0(r\rho)\, dr,$$

$$n = 3, \quad g(\rho) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty f(r)\, r \sin r\rho \, dr.$$

Для доказательства формул обращения (6.32) и (6.32′) и равенства Парсеваля достаточно показать, в силу теоремы Планшереля (см. § 6.6, в)), что правые части формул (6.32) и (6.32′) являются прямым и обратным преобразованием Фурье функций $f(|x|)$ и $g(|\xi|)$ соответственно. Действительно, пользуясь (6.31), имеем

$$F[f(|x|)] = \int f(|x|)\, e^{i(\xi,x)}\, dx = \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} \int_{|s|=1} e^{ir(\xi,s)}\, ds\, dr =$$

$$= \sigma_{n-1} \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} \int_0^\pi e^{ir\rho\cos\theta} \sin^{n-2}\theta\, d\theta\, dr =$$

$$= \sigma_{n-1} \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} \int_{-1}^1 e^{ir\rho\mu} (1-\mu^2)^{\frac{n-3}{2}}\, d\mu\, dr =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty f(r)\, r^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)\, dr,$$

что и требовалось; здесь σ_{n-1} — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$ (см. § 0.6).

§ 7. Ряды Фурье периодических обобщенных функций

1. Определение и простейшие свойства периодических обобщенных функций. Обобщенная функция $f(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *периодической с n-периодом* $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, $T_j > 0$, если она является периодической по каждому аргументу x_j с периодом T_j, т. е. удовлетворяет условиям (см. § 1.9)

$$f(x_1, \ldots, x_j + T_j, \ldots, x_n) = f(x), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Совокупность всех периодических обобщенных функций n-периода T обозначим через $\mathcal{D}'_T$.

Докажем, что для каждого n-периода T существует следующее специальное разложение единицы в $\mathbb{R}^n$ (см. § 1.2):

$$\sum_{|k|\geqslant 0} e_T(x+kT) = 1, \quad e_T \geqslant 0, \quad e_T \in \mathcal{D},$$

$$\operatorname{supp} e_T \subset \left(-\tfrac{3}{4}T_1, \tfrac{3}{4}T_1\right) \times \ldots \times \left(-\tfrac{3}{4}T_n, \tfrac{3}{4}T_n\right); \tag{1.1}$$

$e_T(x)$ — четная функция по каждому переменному; здесь обозначено $kT = (k_1T_1, \ldots, k_nT_n)$.

Пусть $T > 0$. Обозначим через $e_T(x)$ четную функцию из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ со свойствами: $\operatorname{supp} e_T \subset \left(-\frac{3}{4}T, \frac{3}{4}T\right)$, $e_T(x) = 1$ в окрестности отрезка $\left[-\frac{1}{4}T, \frac{1}{4}T\right]$, $e_T(x) = 1 - e_T(x+T)$, $x \in \left[-\frac{3}{4}T, -\frac{1}{4}T\right]$ (рис. 27) (легко убедиться, что такие функции существуют). Очевидно, функция e_T удовлетворяет равенству

$$\sum_{|k|\geqslant 0} e_T(x+kT) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{1.2}$$

Положив

$$e_T(x) = e_{T_1}(x) \ldots e_{T_n}(x), \tag{1.3}$$

убедимся в существовании требуемого разложения единицы.

Введем обобщенную функцию

$$\delta_T(x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \delta(x-kT).$$

Очевидно, $\delta_T \in \mathcal{D}'_T \cap \mathcal{S}'$ (см. § 5.3).

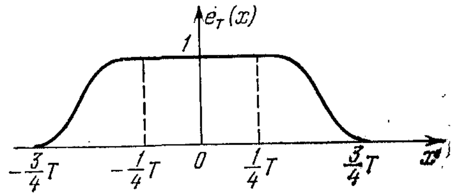

Рис. 27.

Докажем представление: если $f \in \mathcal{D}'_T$, то

$$f = (e_T f) * \delta_T. \tag{1.4}$$

Действительно, пользуясь (1.1) и периодичностью $f(x)$, имеем

$$f(x) = f(x) \sum_{|k|\geqslant 0} e_T(x+kT) = \sum_{|k|\geqslant 0} f(x)\, e_T(x+kT) =$$

$$= \sum_{|k|\geqslant 0} f(x+kT)\, e_T(x+kT) = \sum_{|k|\geqslant 0} (e_T f) * \delta(x+kT),$$

откуда, пользуясь непрерывностью в $\mathcal{S}'$ свертки (см. § 5.6, а)), получим представление (1.4).

Из представления (1.4) вытекает, в частности, что $\mathcal{D}'_T \subset \mathcal{S}'$; кроме того, полагая в (1.4) $f = \delta_T$, получим

$$\delta_T = (e_T \delta_T) * \delta_T. \tag{1.5}$$

Пусть $f \in \mathcal{D}'_T$ и $\varphi \in C^\infty \cap \mathcal{D}'_T$. Введем скалярное произведение $(f, \varphi)_T$ по правилу

$$(f, \varphi)_T = (f, e_T \varphi).$$

Для того чтобы это определение было корректным, необходимо показать, что правая часть этого равенства не зависит от выбора вспомогательной функции $e_T(x)$ со свойствами (1.1).

Действительно, пусть $e'_T(x)$ — другая такая функция. Тогда, пользуясь представлением (1.4) и формулой (6.1) § 5, получим

$$(f, e'_T\varphi) = ((e_T f) * \delta_T, e'_T\varphi) = (e_T(x) f(x) \times \delta_T(y), e'_T(x+y)\varphi(x+y)) =$$
$$= (f(x), (\delta_T(y), e_T(x) e'_T(x+y)\varphi(x+y))) =$$
$$= \Big(f(x), e_T(x) \sum_{|k|\geqslant 0} e'_T(x-kT)\varphi(x-kT)\Big) = (f, e_T\varphi),$$

что и требовалось.

Если $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}} \cap \mathscr{D}'_T$, то

$$(f, \varphi)_T = \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.6}$$

Действительно, так как скалярное произведение $(\,,)_T$ не зависит от выбора функции e_T, то его достаточно вычислить для конкретной функции (1.3):

$$(f, \varphi)_T = \int e_T(x) f(x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \left[\int_{-\frac{3}{4}T_1}^{-\frac{1}{4}T_1} e_{T_1}(x_1) + \int_{-\frac{1}{4}T_1}^{\frac{1}{4}T_1} + \int_{\frac{1}{4}T_1}^{\frac{3}{4}T_1} e_{T_1}(x_1)\right] \int e_{T_2}(x_2) \dots$$
$$\dots e_{T_n}(x_n) f(x)\varphi(x)\,dx_2 \dots dx_n\,dx_1 =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1} \int e_{T_2}(x_2) \dots e_{T_n}(x_n) f(x)\varphi(x)\,dx_2 \dots dx_n\,dx_1 +$$
$$+ \left[\int_{\frac{1}{4}T_1}^{\frac{3}{4}T_1} e_{T_1}(x_1) - \int_{-\frac{3}{4}T_1}^{-\frac{1}{4}T_1} e_{T_1}(x_1+T_1)\right] \int e_{T_2}(x_2) \dots$$
$$\dots e_{T_n}(x_n) f(x)\varphi(x)\,dx_2 \dots dx_n\,dx_1 =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1} \int_{-\frac{1}{2}T_2}^{\frac{1}{2}T_2} \int e_{T_3}(x_3) \dots e_{T_n}(x_n) f(x)\varphi(x)\,dx_3 \dots dx_n\,dx_2\,dx_1 = \dots$$
$$\dots = \int_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1} \int_{-\frac{1}{2}T_2}^{\frac{1}{2}T_2} \dots \int_{-\frac{1}{2}T_n}^{\frac{1}{2}T_n} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

В частности, тригонометрические функции

$$e^{i(k\omega, x)}, \quad \omega = \left(\frac{2\pi}{T_1}, \dots, \frac{2\pi}{T_n}\right),$$

периодические с n-периодом T и для них

$$(e^{i(k\omega, x)}, e^{-i(k'\omega, x)})_T = \delta_{kk'} T_1 \dots T_n. \tag{1.7}$$

2. Ряды Фурье периодических обобщенных функций. Пусть $f = \mathscr{D}'_T$. Формальный ряд

$$f(x) \sim \sum_{|k|\geqslant 0} c_k(f) e^{i(k\omega, x)}, \quad c_k(f) = \frac{(f, e^{-i(k\omega, x)})_T}{T_1 \dots T_n} \tag{2.1}$$

называется *рядом Фурье*, а числа $c_k(f)$ — *коэффициентами Фурье* обобщенной функции f.

Пример 1. Если $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}} \cap \mathscr{D}'_T$, то ее ряд Фурье (2.1) в силу (1.6) превращается в классический ряд Фурье.

Пример 2. Справедливо равенство в $\mathscr{S}'$

$$\sum_{|k|\geqslant 0} \delta(x+kT) = \frac{1}{T_1 \dots T_n} \sum_{|k|\geqslant 0} e^{i(k\omega, x)}, \tag{2.2}$$

вытекающее из одномерной формулы (3.5) § 2 и из непрерывности в $\mathscr{S}'$ прямого произведения (см. § 5.5).

Фиксируем $m \geqslant 0$. Пусть $f \in \mathscr{D}'_T$ и m — порядок f. Тогда существует такое число $C_m \geqslant 0$, не зависящее от f и k, что

$$|c_k(f)| \leqslant C_m \|f\|_{-m} (1+|k|)^m. \tag{2.3}$$

Действительно, используя определение скалярного произведения $(\,,)_T$ и фиксируя вспомогательную функцию $e_T(x)$, получим оценку (2.3):

$$|c_k(f)| = \frac{1}{T_1 \dots T_n} |(f, e^{-i(k\omega, x)})_T| = \frac{1}{T_1 \dots T_n} |(f, e_T e^{-i(k\omega, x)})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|f\|_{-m}}{T_1 \dots T_n} \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant m} (1+|x|^2)^{m/2} |D^\alpha [e_T(x) e^{-i(k\omega, x)}]| \leqslant$$
$$\leqslant C' \|f\|_{-m} \sup_{x,\ |\alpha|\leqslant m} \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\beta}{\alpha} |D^{\alpha-\beta} e_T(x)| |(-ik\omega)^\beta| \leqslant$$
$$\leqslant C \|f\|_{-m} (1+|k|)^m.$$

Теорема. *Ряд Фурье любой обобщенной функции f из $\mathscr{D}'_T$ сходится в $\mathscr{S}'$ к f,*

$$f(x) = \sum_{|k|\geqslant 0} c_k(f) e^{i(k\omega, x)}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Подставляя равенство (2.2) в правую часть (1.4),

$$f = (e_T f) * \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{1}{T_1 \dots T_n} e^{i(k\omega, x)} = \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{1}{T_1 \dots T_n} (e_T f) * e^{i(k\omega, x)},$$

и пользуясь формулой (3.3) § 4 для свертки,

$$(e_T f) * e^{i(k\omega,\,x)} = (f(y),\, e_T(y)\, e^{i(k\omega,\,x-y)}) = T_1 \ldots T_n c_k(f)\, e^{i(k\omega,\,x)},$$

получим разложение f в виде ряда Фурье (2.4), сходящегося в $\mathscr{S}'$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Обобщенная функция f из $\mathscr{D}'_T$ полностью определяется набором своих коэффициентов Фурье* $\{c_k(f)\}$.

Следствие 2. *Если $f \in \mathscr{D}'_T$ и $\varphi \in C^\infty \cap \mathscr{D}'_T$, то справедливо обобщенное равенство Парсеваля — Стеклова*

$$(f, \varphi)_T = \sum_{|k| \geqslant 0} c_k(f)\, c_k(\varphi). \tag{2.5}$$

Следствие 3. *Ряд Фурье обобщенной функции f из $\mathscr{D}'_T$ можно дифференцировать почленно бесконечное число раз:*

$$D^\alpha f(x) = \sum_{|k| \geqslant 0} c_k(f)\, (ik\omega)^\alpha\, e^{i(k\omega,\,x)}, \tag{2.6}$$

так что

$$c_k(D^\alpha f) = (ik\omega)^\alpha\, c_k(f). \tag{2.7}$$

3. Сверточная алгебра $\mathscr{D}'_T$. На множестве $\mathscr{D}'_T$ введем операцию свертки $\circledast$ по правилу

$$f \circledast g = (e_T f) * g, \quad f, g \in \mathscr{D}'_T. \tag{3.1}$$

Свертка $f \circledast g$ не зависит от вспомогательной функции e_T и коммутативна.

Это утверждение следует из равенства

$$(e_T f) * g = (e'_T g) * f, \tag{3.2}$$

вытекающего из тождества (1.4) и из свойств непрерывности, ассоциативности и коммутативности свертки $*$ (см. § 4.2):

$$(e_T f) * g = (e_T f) * ((e'_T g) * \delta_T) = ((e_T f) * \delta_T) * (e'_T g) =$$
$$= f * (e'_T g) = (e'_T g) * f.$$

Операция $f \to f \circledast g$ линейна и непрерывна из $\mathscr{D}'_T$ в $\mathscr{S}'$ (см. § 5.6, а)).

Наконец, $f \circledast g \in \mathscr{D}'_T$.

Это вытекает из свойства сдвига свертки (см. § 4.2, в)):

$$(f \circledast g)(x + kT) = (e_T f) * g(x + kT) = (e_T f) * g = (f \circledast g)(x).$$

Свертка любого числа обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ из $\mathscr{D}'_T$ определяется аналогично по правилу

$$f_1 \circledast f_2 \circledast \ldots \circledast f_m = (e'_T f_1) * (e''_T f_2) * \ldots * (e''^{\cdots\prime}_T f_m). \tag{3.3}$$

Эта свертка будет ассоциативной и коммутативной (см. § 4.2).

Пример 1. Если f и $g \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}} \cap \mathscr{D}'_T$, то

$$(f \circledast g)(x) = \int_0^{T_1} \ldots \int_0^{T_n} f(x-y)\, g(y)\, dy =$$
$$= \int_0^{T_1} \ldots \int_0^{T_n} f(y)\, g(x-y)\, dy = (g \circledast f)(x). \tag{3.4}$$

Пример 2.

$$f \circledast e^{i(k\omega,\,x)} = T_1 \ldots T_n c_k(f)\, e^{i(k\omega,\,x)}. \tag{3.5}$$

Действительно,

$$(f \circledast e^{i(k\omega,\,x)},\ \varphi) = ((e_T f) * e^{i(k\omega,\,x)},\ \varphi) =$$
$$= (e_T(\xi) f(\xi) \times e^{i(k\omega,\,y)},\ \varphi(\xi+y)) = \left(f(\xi),\ e_T(\xi) \int e^{i(k\omega,\,y)} \varphi(\xi+y)\, dy\right) =$$
$$= \left(f(\xi),\ e_T(\xi)\, e^{-i(k\omega,\,\xi)} \int e^{i(k\omega,\,x)} \varphi(x)\, dx\right) =$$
$$= T_1 \ldots T_n c_k(f) \int e^{i(k\omega,\,x)} \varphi(x)\, dx.$$

В частности, в силу (1.7),

$$e^{i(k\omega,\,x)} \circledast e^{i(k'\omega,\,x)} = T_1 \ldots T_n \delta_{kk'} e^{i(k\omega,\,x)}. \tag{3.6}$$

Пример 3. Формула (1.4) принимает вид

$$f = f \circledast \delta_T, \quad D^\alpha f = f \circledast D^\alpha \delta_T, \quad f \in \mathscr{D}'_T, \tag{3.7}$$

и вообще: *если f и $g \in \mathscr{D}'_T$, то*

$$c_k(f \circledast g) = T_1 \ldots T_n c_k(f)\, c_k(g). \tag{3.8}$$

Действительно, пользуясь (3.5), имеем

$$c_k(f \circledast g) = \frac{1}{T_1 \ldots T_n} e^{-i(k\omega,\,x)} (f \circledast g) \circledast e^{i(k\omega,\,x)} =$$
$$= \frac{1}{T_1 \ldots T_n} e^{-i(k\omega,\,x)} (f \circledast (g \circledast e^{i(k\omega,\,x)})) =$$
$$= c_k(g)\, e^{-i(k\omega,\,x)} (f \circledast e^{i(k\omega,\,x)}) = T_1 \ldots T_n c_k(f)\, c_k(g).$$

Из сказанного следует, что $\mathscr{D}'_T$ образует сверточную алгебру относительно операции свертки $\circledast$ (см. § 4.5). Алгебра $\mathscr{D}'_T$ ассоциативна и коммутативна; ее единицей является δ_T (см. (3.7)); она содержит делители нуля (см. (3.6)).

Для уравнений $a \circledast u = f$ в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_T$ справедливо сказанное в § 4.8, г). Но здесь имеют место более точные утверждения.

Теорема. *Для того чтобы оператор $a\circledast$, $a\in\mathscr{D}'_T$ имел обратный $\mathscr{E}\circledast$ в $\mathscr{D}'_T$, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых $L>0$ и m было выполнено неравенство*

$$|c_k(a)|\geqslant L(1+|k|)^{-m}. \tag{3.9}$$

При этом фундаментальное решение $\mathscr{E}$ единственно и выражается рядом Фурье

$$\mathscr{E}(x)=\frac{1}{T_1^2\ldots T_n^2}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{c_k(a)}e^{i(k\omega,\,x)}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Достаточность. В силу оценки (3.9) ряд (3.10) сходится в $\mathscr{S}'$ и его сумма $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'_T$. Докажем, что $\mathscr{E}$ удовлетворяет уравнению $a\circledast\mathscr{E}=\delta_T$. По теореме § 7.2 для этого достаточно доказать равенство коэффициентов Фурье

$$c_k(a\circledast\mathscr{E})=c_k(\delta_T)=\frac{1}{T_1\ldots T_n}.$$

Но последнее выполнено в силу (3.8) и (3.10).

Необходимость. Пусть существует в $\mathscr{D}'_T$ фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $a\circledast$, $a\circledast\mathscr{E}=\delta_T$. Тогда оно единственно (см. § 4.8, г)) и из равенств

$$c_k(a\circledast\mathscr{E})=c_k(a)\,c_k(\mathscr{E})\,T_1\ldots T_n=c_k(\delta_T)=\frac{1}{T_1\ldots T_n}$$

выводим

$$c_k(\mathscr{E})=\frac{1}{T_1^2\ldots T_n^2c_k(a)}. \tag{3.11}$$

Поэтому справедливо разложение (3.10). Далее, обозначая через m порядок $\mathscr{E}$ и применяя оценки (2.3), и (3.11) получим оценку (3.9):

$$|c_k(\mathscr{E})|=\frac{1}{T_1^2\ldots T_n^2}\,\frac{1}{|c_k(a)|}\leqslant C\,\|\mathscr{E}\|_{-m}(1+|k|)^m.$$

Теорема доказана.

4. Примеры. а) Решить «квадратное» уравнение в $\mathscr{D}'_T$:

$$u\circledast u=\delta_T. \tag{4.1}$$

Имеем

$$c_k^2(u)=\frac{1}{T_1^2\ldots T_n^2},\quad c_k(u)=\pm\frac{1}{T_1\ldots T_n}.$$

Поэтому уравнение (4.1) имеет континуум решений

$$u(x)=\frac{1}{T_1\ldots T_n}\sum_{|k|\geqslant 0}\varepsilon_k e^{i(k\omega,\,x)},\quad \varepsilon_k=\pm 1. \tag{4.2}$$

б) $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\mathscr{E}=\delta_T,\quad n=1,\quad \lambda\neq ik\omega,\quad k=0,\ \pm1,\ \ldots$

Переписывая

$$(\delta'_T-\lambda\delta_T)\circledast\mathscr{E}=\delta_T,$$

получим

$$T\,\frac{ik\omega-\lambda}{T}\,c_k(\mathscr{E})=\frac{1}{T},$$

так что

$$\mathscr{E}(x)=\frac{1}{T}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{ik\omega-\lambda}e^{ik\omega x}. \tag{4.3}$$

в) Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\begin{gathered}\delta'_T\circledast u=\lambda u,\quad u\in\mathscr{D}'_T,\\ \lambda_k=ik\omega,\quad u_k(x)=e^{ik\omega x},\quad k=0,\ \pm1,\ \ldots,\end{gathered} \tag{4.4}$$

— собственные значения и соответствующие собственные функции оператора $\delta'_T\circledast$.

г) Пусть $f\in\mathscr{D}'_T$, $n=1$. Рассмотрим задачу на отыскание первообразной $f^{(-1)}$ в $\mathscr{D}'_T$ (см. § 2.2),

$$\frac{df^{(-1)}}{dx}=f,\quad \delta'_T\circledast f^{(-1)}=f.$$

Из равенства

$$\frac{ik\omega}{T}\,c_k\big(f^{(-1)}\big)=c_k(f)$$

следует, что первообразная $f^{(-1)}$ существует в $\mathscr{D}'_T$ тогда и только тогда, когда $c_0(f)=0$, и выражается рядом Фурье

$$f^{(-1)}(x)=\sum_{|k|>0}\frac{c_k(f)}{ik\omega}e^{ik\omega x}+C, \tag{4.5}$$

где C — произвольная постоянная.

д) Полиномы Бернулли. Положим $f_0=T\delta_T-1$. Так как $c_0(f_0)=Tc_0(\delta_T)-c_0(1)=0$, то существует $f_0^{(-1)}$ в $\mathscr{D}'_T$; выбираем $c_0\big(f_0^{(-1)}\big)=0$ и т. д. В результате получим последовательность первообразных $f_0^{(-m)}(x)$ из $\mathscr{D}'_T$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, являющихся полиномами на основном периоде $(0,T)$. Эти полиномы называются *полиномами Бернулли*. Найдем их разложение в ряд Фурье. Имеем

$$\big(f_0^{(-m)}\big)^{(m)}=\delta_T^{(m)}\circledast f_0^{(-m)}=f_0=T\delta_T-1$$

и потому

$$c_k\big(\delta_T^{(m)}\circledast f_0^{(-m)}\big)=(ik\omega)^m\,c_k\big(f_0^{(-m)}\big)=1,\qquad k\neq 0.$$

Следовательно,

$$f_0^{(-m)}(x)=\sum_{|k|>0}\frac{1}{(ik\omega)^m}e^{ik\omega x}. \tag{4.6}$$

Например:

$$f_0^{(-1)}(x)=\frac{T}{2}-x,\quad 0<x<T.$$

§ 8. Положительно определенные обобщенные функции

1. Определение и простейшие свойства положительно определенных обобщенных функций. Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; обобщенная функция $f^*(x)=\bar f(-x)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *$*$-эрмитово сопряженной* к f; если $f=f^*$, то f называется *$*$-эрмитовой* (обобщенной) функцией.

Функция $f(x)$, непрерывная в $\mathbb{R}^n$, называется *положительно определенной*, $f\gg 0$, если для любых точек $x_1,\ldots,x_l$ из $\mathbb{R}^n$ и комплексных чисел $z_1,\ldots,z_l$ выполнено неравенство

$$\sum_{1\leqslant j,\,k\leqslant l} f(x_j-x_k)\,z_j\bar z_k\geqslant 0.$$

Из этого определения следуют свойства: полагая $l=1$, получаем $f(0)\geqslant 0$; далее, полагая $l=2$, $x_1=x$, $x_2=0$, имеем

$$f(0)(|z_1|^2+|z_2|^2)+f(x)z_1\bar z_2+f(-x)\bar z_1 z_2\geqslant 0,$$

откуда следует, что f — $*$-эрмитово ограниченная функция:

$$f=f^*,\qquad |f(x)|\leqslant f(0);\tag{1.1}$$

наконец, заменяя интеграл пределом последовательности сумм Римана, получаем неравенство

$$\int f(x-\xi)\,\varphi(x)\,\bar\varphi(\xi)\,dx\,d\xi\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D},$$

т. е.

$$(f,\varphi*\varphi^*)\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D}.\tag{1.2}$$

Свойство (1.2) мы примем за исходное для определения положительно определенных обобщенных функций. Обобщенная функция $f\in\mathcal{D}'$ называется *положительно определенной*, $f\gg 0$, если она удовлетворяет условию

$$(f,\varphi*\varphi^*)\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D}.\tag{1.3}$$

Из этого определения сразу следует: если $f\gg 0$, то и $f(-x)\gg 0$ и $\bar f\gg 0$.

Далее, *для того чтобы обобщенная функция f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f*\alpha*\alpha^*\gg 0,\qquad \alpha\in\mathcal{E}'.\tag{1.4}$$

Действительно, если $f\gg 0$, то, пользуясь формулой (6.4) § 4 и свойствами коммутативности и ассоциативности свертки

(см. § 4.2), при всех $\alpha\in\mathcal{E}'$ и $\varphi\in\mathcal{D}$ имеем

$$\begin{aligned}(f*\alpha*\alpha^*,\ \varphi*\varphi^*)&=(f,\ (\alpha*\alpha^*)(-x)*(\varphi*\varphi^*))=\\&=(f,\ [\alpha(-x)*\varphi]*[\alpha^*(-x)*\varphi^*])=\\&=(f,\ [\alpha(-x)*\varphi]*[\alpha(-x)*\varphi]^*)\geqslant 0,\end{aligned}$$

поскольку $\alpha*\varphi\in\mathcal{D}$, если $\alpha\in\mathcal{E}'$ и $\varphi\in\mathcal{D}$ (ср. § 4.2, ж) и § 4.6). Таким образом, условие (1.4) выполнено. Обратно, пусть условие (1.4) выполнено, так что если $\alpha\in\mathcal{D}$, то $f*\alpha*\alpha^*$ — непрерывная положительно определенная функция и потому в силу (1.1) $(f*\alpha*\alpha^*)(0)\geqslant 0$. Пользуясь теперь формулой (6.3) § 4, при всех $\alpha\in\mathcal{D}$ имеем

$$(f(-y),\alpha*\alpha^*)=(f,(\alpha*\alpha^*)(-y))=(f*\alpha*\alpha^*)(0)\geqslant 0,$$

так что $f(-x)\gg 0$ и потому $f\gg 0$.

Если $f\gg 0$, то $f=f^*$.

Действительно, по доказанному при всех $\alpha\in\mathcal{D}$

$$(f*\alpha*\alpha^*)^*=f^**(\alpha*\alpha^*)=f*(\alpha*\alpha^*).$$

Устремляя в последнем равенстве $\alpha\to\delta$ в $\mathcal{E}'$ (и тогда $\alpha^*\to\delta$ в $\mathcal{E}'$, а из формулы (5.1) § 4 следует, что и $\alpha*\alpha^*\to\delta$ в $\mathcal{E}'$) и пользуясь свойством непрерывности свертки (см. § 4.3), получим $f=f^*$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Для каждого целого $p\geqslant 0$ существует функция $\omega(x)$ со свойствами:*

$$\omega\in C^{2p};\quad \omega(x)=0,\ \ |x|>1;\qquad F[\omega](\xi)\geqslant\frac{A}{(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}.\tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\chi\in\mathcal{D}$, причем $\chi(x)=0$ при $|x|>1/2$ и

$$\gamma(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-i(x,\,\xi)}\,d\xi}{(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}=F^{-1}\left[\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}\right].$$

Проверим, что функция $\omega=\gamma(\chi*\chi^*)$ обладает свойствами (1.5). Так как $\gamma\in C^{2p}$, а $\chi*\chi^*\in C^\infty$, то $\omega\in C^{2p}$. Далее, в силу § 4.2, ж), $\operatorname{supp}\omega\subset\operatorname{supp}\chi+\operatorname{supp}\chi^*\subset U_{1/2}+U_{1/2}=U_1$. Наконец, пользуясь формулой преобразования Фурье свертки (см. § 6.5), имеем

$$\begin{aligned}F[\omega](\xi)&=F[\gamma(\chi*\chi^*)]=\\&=F\left[F^{-1}\left[\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}\right]F^{-1}[F[\chi]\,F[\chi^*]]\right]=\\&=\frac{1}{(2\pi)^n(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}*|F[\chi]|^2=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{|F[\chi]|^2(y)\,dy}{(1+|\xi-y|^2)^{p+n+1}}\end{aligned}$$

и поэтому

$$F[\omega](\xi) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{|y|<1} \frac{|F[\chi]|^2(y)\,dy}{(1+|\xi-y|^2)^{p+n+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(2\pi)^n[1+(|\xi|+1)^2]^{p+n+1}} \int\limits_{|y|<1} |F[\chi]|^2(y)\,dy \geqslant \frac{A}{(1+|\xi|^2)^{p+n+1}}.$$

Лемма доказана.

2. Теорема Бохнера — Шварца. Пусть $f \in \mathscr{D}'$ и $f \gg 0$. Тогда в шаре $U_3 = [x: |x| < 3]$ f имеет конечный порядок $m \geqslant 0$ (см. § 1.3),

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_{C^m(\bar{U}_3)}, \qquad \varphi \in C_0^m(U_3).$$

Возьмем целое число $p \geqslant 0$ такое, что $2p \geqslant m$, и пусть ω — функция со свойствами (1.5). Тогда функция $\omega * \omega^* \in C_0^m(U_2)$ и, следовательно, обобщенная функция $g = f * \omega * \omega^* = f * (\omega * \omega^*) \gg 0$ непрерывна в шаре $\bar{U}_1$.

Докажем, что g ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\alpha_n \in \mathscr{D}$, $\operatorname{supp}\alpha_n \subset U_{1/n}$, $\alpha_n \geqslant 0$, $\int \alpha_n\,dx = 1$, $\alpha_n \to \delta$, $n \to \infty$. Последовательность функций $g * \alpha_n * \alpha_n^*$, $n = 2, 3, \ldots$, равномерно ограничена,

$$|(g * \alpha_n * \alpha_n^*)(x)| \leqslant \max_{|x| \leqslant 2/n} |g(x)| \|\alpha_n * \alpha_n^*\|_{\mathscr{L}^1} \leqslant \max_{|x| \leqslant 1} |g(x)|$$

(см. § 4.1), и слабо сходится на множестве $\mathscr{D}$, плотном в $\mathscr{L}^1$ (см. § 1.2). В таком случае предельную обобщенную функцию g можно отождествить с функцией $g(x)$ из $\mathscr{L}^\infty$.

Докажем, что $g(x)$ есть преобразование Фурье неотрицательной конечной на $\mathbb{R}^n$ меры. Так как g ограничена, а $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{S}$ (см. § 5.1), то неравенство $(g, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0$ справедливо при всех $\varphi \in \mathscr{S}$ и, стало быть,

$$(F^{-1}[g], F[\varphi * \varphi^*]) = (F^{-1}[g], |F[\varphi]|^2) \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{2.1}$$

Но операция F — изоморфизм $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$ (см. § 6.1). Поэтому неравенство (2.1) эквивалентно неравенству

$$(F^{-1}[g], |\psi|^2) \geqslant 0, \qquad \psi \in \mathscr{S}. \tag{2.2}$$

Пусть теперь φ — любая неотрицательная основная функция из $\mathscr{S}$ и $\{\eta_k\}$ — последовательность неотрицательных функций из $\mathscr{D}$, стремящихся к 1 в $\mathbb{R}^n$ (см. § 4.1). Тогда

$$\left(\eta_k \sqrt{\varphi + 1/k}\right)^2 = \eta_k^2(\varphi + 1/k) \to \varphi, \qquad k \to \infty \text{ в } \mathscr{S}$$

и, следовательно, в силу (2.2),

$$(F^{-1}[g], \varphi) = \lim_{k \to \infty} \left(F^{-1}[g], (\eta_k \sqrt{\varphi + 1/k})^2\right) \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

По теореме II § 1.7 $F^{-1}[g] = \nu$ — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^n$ и $g = F[\nu]$. Но $\nu = F^{-1}[g] \in \mathscr{S}'$. Поэтому ν — мера медленного роста (см. § 5.3), так что для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$(F^{-1}[g], \varphi) = \int \varphi(\xi)\,\nu(d\xi) = (g, F^{-1}[\varphi]). \tag{2.3}$$

Пусть $\{\eta_k\}$ — неубывающая последовательность неотрицательных функций из $\mathscr{D}$, стремящаяся к 1 в $\mathbb{R}^n$. Тогда $F^{-1}[\eta_k] \to \delta$, $k \to \infty$ на всех ограничениях в $\mathbb{R}^n$ и непрерывных в окрестности нуля функциях. Полагая в (2.3) $\varphi = \eta_k$,

$$\int \eta_k(\xi)\,\nu(d\xi) = (g, F^{-1}[\eta_k]),$$

переходя к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь теоремой Б. Леви, получим

$$\int \nu(d\xi) = g(0),$$

что и утверждалось.

Теперь докажем, что уравнение

$$u * \omega * \omega^* = g \tag{2.4}$$

имеет единственное решение в классе положительно определенных обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ и это решение дается формулой

$$u = F^{-1}\left[\frac{\nu}{|F[\omega]|^2}\right]. \tag{2.5}$$

Действительно, в силу неравенства (1.5) обобщенная функция u, задаваемая равенством (2.5), действительно является единственным решением уравнения (2.4) в классе $\mathscr{S}'$, в силу теоремы о преобразовании Фурье свертки (см. § 6.5)

$$F[u]\,|F[\omega]|^2 = F[g] = \nu. \tag{2.6}$$

Осталось доказать, что решение однородного уравнения $u * \omega * \omega^* = 0$ в классе обобщенных функций u, представимых в виде разности $u_1 - u_2$, где $u_j \gg 0$, $u_j \in \mathscr{D}'$, тривиально: $u = 0$. Пусть такая функция u удовлетворяет этому уравнению. Тогда при всех $\alpha \in \mathscr{D}$ функция $u * \alpha * \alpha^*$ также удовлетворяет этому уравнению:

$$(u * \omega * \omega^*) * \alpha * \alpha^* = 0 = (u * \alpha * \alpha^*) * \omega * \omega^*.$$

Но функция

$$u * \alpha * \alpha^* = u_1 * \alpha * \alpha^* - u_2 * \alpha * \alpha^*$$

есть разность непрерывных положительно определенных функций и, стало быть, ограничена в $\mathbb{R}^n$ (и тем более из $\mathscr{S}'$). По доказанному $u * \alpha * \alpha^* = 0$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\alpha \to \delta$ в $\mathscr{E}'$ и пользуясь непрерывностью свертки, получим $u = 0$, что и требовалось.

Обобщенная функция $f \gg 0$ также удовлетворяет уравнению (2.4). В силу единственности решения этого уравнения f совпадает с обобщенной функцией u, задаваемой равенством (2.5). Следовательно, f есть обратное преобразование Фурье меры $\mu = \nu |F[\omega]|^{-2}$ медленного роста, в силу неравенства (1.5).

Итак, мы доказали необходимость условия в следующей теореме.

Теорема (Бохнер — Шварц). *Для того чтобы обобщенная функция f из $\mathscr{D}'$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она являлась преобразованием Фурье неотрицательной меры медленного роста, $f = F[\mu]$, $\mu \in \mathscr{S}'$, $\mu \geqslant 0$.*

Достаточность. Если $f = F[\mu]$, $\mu \geqslant 0$, $\mu \in \mathscr{S}'$, то $(\mu, |\varphi|^2) \geqslant 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{S}$. Отсюда (ср. (2.1))

$$(\mu, |F[\varphi]|^2) = (F[\mu], F^{-1}[|F[\varphi]|^2]) = (f, \varphi * \varphi^*) \geqslant 0, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

так что $f \gg 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $f \in \mathscr{D}'$, $f \gg 0$, то $f \in \mathscr{S}'$.*

Следствие 2 (Бохнер). *Для того чтобы непрерывная в окрестности нуля обобщенная функция f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она была преобразованием Фурье положительной меры ν, конечной на $\mathbb{R}^n$:*

$$f(x) = \int e^{i(x, \xi)} \nu(d\xi), \quad \nu \geqslant 0, \quad \int \nu(d\xi) = f(0); \tag{2.7}$$

при этом $f(x)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

Следствие 3. *Для того чтобы обобщенная функция f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы при некотором целом $m \geqslant 0$ она представлялась (единственным образом) в виде*

$$f(x) = (1 - \Delta)^m f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — непрерывная положительно определенная функция.

Вытекает из следующей цепочки равенств:

$$f = F[\mu] = F\left[(1 + |\xi|^2)^m \frac{\mu}{(1 + |\xi|^2)^m}\right] = (1 - \Delta)^m F[\nu],$$

где мера $\nu = \mu(1 + |\xi|^2)^{-m} \geqslant 0$ при достаточно большом m может быть сделана конечной на $\mathbb{R}^n$.

3. Примеры. а) Пусть полином $P(\xi) \geqslant 0$. Тогда

$$P(-iD)\delta \gg 0.$$

В частности, $\delta \gg 0$.

б) Если $f \gg 0$ и $g \in \mathscr{E}'$, $g \gg 0$, то $f * g \gg 0$.

Действительно, мера $F[g] \geqslant 0$, $F[g] \in \theta_M$ (см. § 6.4) и поэтому мера $F[f * g] = F[f] F[g] \geqslant 0$ медленного роста.

в) Если $f \gg 0$ и $F[g] \in \mathscr{E}'$, $g \gg 0$, то $gf \gg 0$.

Действительно, $g \in \theta_M$, $gf \in \mathscr{S}'$ и

$$F^{-1}[gf] = F^{-1}[g] * F^{-1}[f]$$

есть неотрицательная мера из $\mathscr{S}'$ и, стало быть, медленного роста (см. § 5.3).

г) $e^{-(Ax, x)} \gg 0$, где A — вещественная положительно определенная матрица (см. § 6.6, б)).

д) $\frac{1}{|x|} \gg 0$, $n = 3$ (см. § 6.6, ж)).

е) $\pi\delta(x) \pm i\mathscr{P}\frac{1}{x} \gg 0$, $n = 1$ (см. § 6.6, к)).

ж) *Для того чтобы $f \in \mathscr{D}'_T$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье $c_k(f)$ были неотрицательны. При этом для всех $\varphi \in C^\infty \cap \mathscr{D}'_T$ справедливо неравенство*

$$(f, \varphi \circledast \varphi^*)_T \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Это вытекает из теоремы § 7.2, согласно которой

$$F^{-1}[f] = \sum_{|k| \geqslant 0} c_k(f)\,\delta(\xi - k\omega), \tag{3.2}$$

и из теоремы Бохнера — Шварца. Для доказательства неравенства (3.1) воспользуемся техникой, развитой в § 7. Пользуясь (3.1) § 7 и (3.3) § 7, имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}(f, \varphi \circledast \varphi^*)_T &= (e_T f, \varphi \circledast \varphi^*) = (f * \delta, e_T(\varphi \circledast \varphi^*)) = \\ &= (\delta, f(-x) * e_T(\varphi \circledast \varphi^*)) = (\delta, f(-x) \circledast (\varphi \circledast \varphi^*)) = \\ &= (\delta, f(-x) \circledast \varphi \circledast \varphi^*) = (\delta, f(-x) * (e_T\varphi) * (e_T\varphi^*)) = \\ &= (\delta, f(-x) * [(e_T\varphi) * (e_T\varphi)^*]) = (f, (e_T\varphi) * (e_T\varphi)^*),\end{aligned}$$

так что

$$(f, \varphi \circledast \varphi^*)_T = (f, (e_T\varphi) * (e_T\varphi)^*), \tag{3.3}$$

откуда и следует неравенство (3.1).

§ 9. Преобразование Лапласа обобщенных функций медленного роста

Основы общей теории преобразования Лапласа обобщенных функций заложены Л. Шварцем [3] и Лионсом [1]. Однако наиболее полно эта теория развита для важного в приложениях в математической физике случая обобщенных функций медленного роста.

1. Определение преобразования Лапласа. Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0 (см. § 4.4); обозначим $C = \operatorname{int} \Gamma^*$ (по лемме 1 § 4.4 конус $C \neq \varnothing$; C —

открытый и выпуклый конус). Обозначим через T^C трубчатую область в $\mathbb{C}^n$ с основанием C:

$$T^C = \mathbb{R}^n + iC = [z = x + iy:\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in C].$$

Пусть $g \in \mathcal{S}'(\Gamma+)$ (см. § 5.6 и § 4.5). *Преобразованием Лапласа* $L[g]$ обобщенной функции g назовем выражение

$$L[g] = F[g(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)}](x), \tag{1.1}$$

где F — преобразование Фурье.

Пример.

$$L[\delta(\xi - \xi_0)] = e^{i(z,\,\xi_0)}. \tag{1.2}$$

Вытекает из формулы (2.6) § 6.

Докажем, что при всех $y \in C$

$$g(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} \in \mathcal{S}',$$

так что преобразование Лапласа $L[g]$ есть *обобщенная функция медленного роста по* x *при всех* $y \in C$.

Действительно, пусть η — любая функция класса C^∞ со свойствами:

$$|D^\alpha \eta(\xi)| \leqslant c_\alpha;\quad \eta(\xi) = 1,\quad \xi \in (\operatorname{supp} g)^\varepsilon;\quad \eta(\xi) = 0,\quad \xi \overline{\in} (\operatorname{supp} g)^{2\varepsilon}$$

($\varepsilon > 0$ — любое). Тогда, по доказанному в § 6.6, и),

$$\eta(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при всех} \quad y \in C \tag{1.3}$$

и поэтому, в силу (10.2) § 1,

$$g(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} = g(\xi)\, \eta(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} \in \mathcal{S}',$$

что и утверждалось.

Преобразование Лапласа L есть *линейная и взаимно однозначная операция*. Это утверждение вытекает из соответствующих свойств преобразования Фурье (см. § 6.2).

Докажем теперь представление

$$L[g] = (g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}),\quad z \in T^C; \tag{1.4}$$

это представление не зависит от вспомогательной функции η с указанными выше свойствами.

Действительно, пусть $y \in C$ и $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда (ср. § 6.6, и))

$$(L[g],\ \varphi) = (F[g(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)}],\ \varphi) = (g(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)},\ F[\varphi]) =$$

$$= \left(g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} \int \varphi(x)\, e^{i(x,\,\xi)}\, dx\right) = \int \varphi(x)\, (g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)})\, dx,$$

откуда и следует равенство (1.4); здесь мы воспользовались формулой (5.4) § 5, поскольку, в силу (1.3),

$$\eta(\xi)\, e^{-(y,\,\xi)} \varphi(x)\, e^{i(x,\,\xi)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Обозначим $f(z) = L[g]$. Докажем, что функция $f(z)$ *голоморфна в* T^C *и справедлива формула дифференцирования*

$$D^\alpha f(z) = \left((i\xi)^\alpha g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}\right). \tag{1.5}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы § 3.1. Непрерывность функции $f(z)$ в T^C вытекает из представления (1.4), из непрерывности функции $\eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}$ по z в T^C в смысле сходимости в $\mathcal{S}$,

$$\eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)} \to \eta(\xi)\, e^{i(z_0,\,\xi)},\quad z \to z_0 \text{ в } \mathcal{S},\quad z \in T^C,\quad z_0 \in T^C$$

(см. оценки в § 6.6, и)), и из непрерывности функционала g на $\mathcal{S}$,

$$f(z) = (g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}) \to (g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z_0,\,\xi)}) = f(z_0),\quad z \to z_0.$$

Для доказательства голоморфности функции $f(z)$ в T^C достаточно установить, в силу известной теоремы Гартогса, существование всех первых производных $\frac{\partial f}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда при каждом $z \in T^C$

$$\chi_h(\xi) = \frac{1}{h}[\eta(\xi)\, e^{i(z+he_1,\,\xi)} - \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}] \to$$

$$\to \eta(\xi)\, i\xi_1 e^{i(z,\,\xi)},\quad h \to 0 \quad \text{в } \mathcal{S}.$$

Поэтому из представления (1.4) и из линейности и непрерывности функционала g на $\mathcal{S}$ при $h \to 0$ имеем

$$\frac{f(z + he_1) - f(z)}{h} = \frac{1}{h}[(g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z+he_1,\,\xi)}) - (g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)})] =$$

$$= (g(\xi),\ \chi_h(\xi)) \to (g(\xi),\ \eta(\xi)\, i\xi_1 e^{i(z,\,\xi)}) = (i\xi_1 g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)})$$

так что производная $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ существует и формула дифференцирования (1.5) справедлива при $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$, а значит, и для всех первых производных

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = (i\xi_j g(\xi),\ \eta(\xi)\, e^{i(z,\,\xi)}),\quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Применяя приведенные рассуждения к равенствам (1.6), убедимся в справедливости формулы (1.5) для всех вторых производных и т. д.

Утверждение доказано.

Наша задача — полностью охарактеризовать голоморфные функции, являющиеся преобразованием Лапласа обобщенных функций из алгебр $\mathcal{S}'(\Gamma+)$ и $\mathcal{S}'(\Gamma)$.

Обобщенную функцию $g(\xi)$ из $\mathcal{S}'(\Gamma^+)$, для которой $f = L[g]$ будем называть *спектральной функцией* функции $f(z)$. Спектральная функция единственна (если существует), причем в силу (1.1)

$$g(\xi) = e^{(y,\xi)} F_x^{-1}[f(x+iy)](\xi) \tag{1.7}$$

и правая часть равенства (1.7) не зависит от $y \in C = \operatorname{int} \Gamma^*$.

2. Свойства преобразования Лапласа. Вытекают из соответствующих свойств преобразования Фурье (см. § 6.3).

а) Дифференцирование преобразования Лапласа:

$$D^\alpha L[g] = L[(i\xi)^\alpha g]. \tag{2.1}$$

Это есть формула (1.5).

б) Преобразование Лапласа производной:

$$L[D^\alpha g] = (-iz)^\alpha L[g]. \tag{2.2}$$

Формулу (2.2) достаточно доказать для первых производных. Имеем

$$L\left[\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right] = F\left[\frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_j} e^{-(y,\xi)}\right] =$$
$$= F\left[\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(g(\xi) e^{-(y,\xi)}\right)\right] + y_j F\left[g(\xi) e^{-(y,\xi)}\right] =$$
$$= (-ix_j + y_j) F\left[g(\xi) e^{-(y,\xi)}\right] = -iz_j L[g].$$

В частности, полагая в (2.2) $g = \delta(\xi - \xi_0)$ и пользуясь формулой (1.2), получим

$$L[D^\alpha \delta(\xi - \xi_0)] = (-iz)^\alpha e^{i(z,\xi_0)}. \tag{2.3}$$

в) Сдвиг преобразования Лапласа: *если* $\operatorname{Im} a \in C$, *то*

$$L[g(\xi) e^{i(a,\xi)}] = L[g](z+a). \tag{2.4}$$

Действительно,

$$L[g(\xi) e^{i(a,\xi)}] = F[g(\xi) e^{i(\operatorname{Re} a,\xi)} e^{-(y+\operatorname{Im} a,\xi)}] =$$
$$= L[g](x + \operatorname{Re} a + iy + i \operatorname{Im} a) = L[g](z+a).$$

г) Преобразование Лапласа сдвига:

$$L[g(\xi - \xi_0)] = e^{i(z,\xi_0)} L[g](z). \tag{2.5}$$

д) Преобразование Лапласа при линейном преобразовании аргумента:

$$L[g(A\xi)] = \frac{1}{|\det A|} L[g](A^{-1T} z), \quad z \in T^{A^T C}. \tag{2.6}$$

е) Преобразование Лапласа прямого произведения: *если* $g_1(\xi) \in \mathscr{S}'(\Gamma_1 +)$ *и* $g_2(\eta) \in \mathscr{S}'(\Gamma_2 +)$, *то*

$$L[g_1 \times g_2](z,\zeta) = L[g_1](z) L[g_2](\zeta), \quad (z,\zeta) \in T^{C_1 \times C_2}. \tag{2.7}$$

ж) Преобразование Лапласа свертки: *если* $g \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$ *и* $g_1 \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$, *то* $g * g_1 \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$ (см. § 5.6, б)) *и*

$$L[g * g_1] = L[g] L[g_1]. \tag{2.8}$$

Предварительно докажем формулу: если $g \in \mathscr{D}'(\Gamma +)$ и $g_1 \in \mathscr{D}'(\Gamma +)$, то при всех $y \in C$

$$(ge^{-(y,\xi)}) * (g_1 e^{-(y,\xi)}) = (g * g_1) e^{-(y,\xi)}. \tag{2.9}$$

Действительно, пользуясь формулой (5.1) § 4, при всех $\varphi \in \mathscr{D}$ имеем

$$((ge^{-(y,\xi)}) * (g_1 e^{-(y,\xi)}), \varphi) = (g(\xi) e^{-(y,\xi)} \times g_1(\xi') e^{-(y,\xi')},$$
$$\eta_1(\xi)\eta_2(\xi')\varphi(\xi+\xi')) = (g(\xi) \times g_1(\xi'), \eta_1(\xi)\eta_2(\xi') e^{-(y,\xi+\xi')}\varphi(\xi+\xi')) =$$
$$= (g * g_1, \varphi e^{-(y,\xi)}) = (e^{-(y,\xi)}(g * g_1), \varphi),$$

что и требовалось. Из формулы (2.9) при g и $g_1 \in \mathscr{S}'(\Gamma +)$ и из формулы преобразования Фурье свертки (см. (5.1) § 6) сразу следует формула (2.8):

$$L[g * g_1] = F[(g * g_1) e^{-(y,\xi)}] = F[(ge^{-(y,\xi)}) * (g_1 e^{-(y,\xi)})] =$$
$$= F[ge^{-(y,\xi)}] F[g_1 e^{-(y,\xi)}] = L[g] L[g_1].$$

Замечание. В случае одной переменной в операционном исчислении (Хевисайда) преобразование Лапласа определяется по-другому: если оригинал $g \in \mathscr{S}'([0,\infty)+)$, то его изображением (преобразованием Лапласа) называется функция

$$F[g(t) e^{-\sigma t}](-\omega),$$

голоморфная в правой полуплоскости $\sigma > 0$ комплексной плоскости $p = \sigma + i\omega$. В частности,

$$\theta(t) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}.$$

Мы, однако, будем придерживаться определения (1.1) и в случае $n = 1$.

3. Примеры.

а) $$L[f_\alpha] = \frac{1}{(-iz)^\alpha}, \quad y > 0, \tag{3.1}$$

где f_α — обобщенная функция из $\mathscr{S}'_+ = \mathscr{S}' \cap \mathscr{D}'_+$, введенная в 4.8, д). Ветвь функции $(-iz)^\alpha$ в полуплоскости $y > 0$ выбирается так, чтобы она была положительной при $z = iy$, $y > 0$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$L[f_\alpha](iy) = \int_0^\infty \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-y\xi}\, d\xi = \frac{1}{y^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du = \frac{1}{y^\alpha},$$

так что голоморфные в верхней полуплоскости функции $L[f_\alpha](z)$ и $(-iz)^{-\alpha}$ совпадают на линии $z=iy$, $y>0$. В силу принципа аналитического продолжения равенство (3.1) справедливо при $\alpha>0$. Если же $\alpha\leqslant 0$, то $\alpha+m>0$ при некотором целом m. Поэтому $f_\alpha=f^{(m)}_{\alpha+m}$ и, по доказанному,

$$L[f_\alpha]=L[f^{(m)}_{\alpha+m}]=(-iz)^m L[f_{\alpha+m}]=$$
$$=(-iz)^m(-iz)^{-\alpha-m}=(-iz)^{-\alpha}.$$

б) $$L[\theta(\xi)\sin\omega\xi]=\frac{\omega}{\omega^2-z^2},\qquad L[\theta(\xi)\cos\omega\xi]=\frac{-iz}{\omega^2-z^2}. \tag{3.2}$$

Вытекают из равенств (см. а) при $\alpha=1$)

$$L[\theta(\xi)e^{i\omega\xi}]=\frac{i}{z+\omega},\qquad L[\theta(\xi)e^{-i\omega\xi}]=\frac{i}{z-\omega}.$$

в) Докажем равенство

$$L\left[\frac{\theta(\xi)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu J_\nu(\xi)\right]=(1-z^2)^{-\nu-1/2},\qquad \nu>-1/2. \tag{3.3}$$

В силу а) имеем равенства

$$L[e^{i\xi}f_{\nu-1/2}(\xi)]=\left(\frac{i}{z+1}\right)^{\nu+1/2},\qquad L[e^{-i\xi}f_{\nu-1/2}(\xi)]=\left(\frac{i}{z-1}\right)^{\nu+1/2}.$$

Поэтому, пользуясь формулой преобразования Лапласа свертки, имеем

$$L[(e^{i\xi}f_{\nu-1/2})*(e^{-i\xi}f_{\nu-1/2})]=(1-z^2)^{-\nu-1/2}.$$

Но

$$(e^{i\xi}f_{\nu-1/2})*(e^{-i\xi}f_{\nu-1/2})=$$
$$=\frac{\theta(\xi)}{\Gamma^2(\nu+1/2)}\int_0^\xi e^{i(\xi-t)}e^{-it}(\xi-t)^{\nu-1/2}t^{\nu-1/2}\,dt=$$
$$=\frac{\theta(\xi)e^{i\xi}\xi^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu+1/2)}\int_0^1 e^{-2i\xi u}[(1-u)u]^{\nu-1/2}\,du=$$
$$=\frac{\theta(\xi)\xi^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu+1/2)}\int_{-1}^1 e^{-i\xi v}\left(\frac{1-v^2}{4}\right)^{\nu-1/2}\frac{dv}{2}=\frac{\theta(\xi)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu J_\nu(\xi)$$
$$u=\frac{v+1}{2}$$

и формула (3.3) доказана. Здесь мы воспользовались формулой (6.20) § 6.

г) Докажем формулу

$$\sin\xi=\int_0^\xi J_0(\xi-t)J_0(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Ввиду нечетности правых и левых частей (3.4) эту формулу достаточно доказать при $\xi>0$. Поэтому достаточно доказать сверточное равенство

$$\theta\sin\xi=(\theta J_0)*(\theta J_0),$$

эквивалентное в силу б) и в) тривиальному равенству

$$\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\qquad y>0.$$

д) Найдем фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $(\theta J_0)*$ в алгебре $\mathscr{S}'_+$. В силу в) имеем

$$L[\theta J_0]=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\neq 0,\quad y>0.$$

Следовательно,

$$L[\mathscr{E}]=\sqrt{1-z^2}=\frac{1-z^2}{\sqrt{1-z^2}},$$

откуда

$$\mathscr{E}(\xi)=\theta(\xi)J_0(\xi)+[\theta(\xi)J_0(\xi)]''=\theta(\xi)J_0(\xi)+\delta'(\xi)J_0(\xi)+$$
$$+2\delta(\xi)J_0'(\xi)+\theta(\xi)J_0''(\xi)=-\frac{\theta(\xi)J_0'(\xi)}{\xi}+\delta'(\xi),$$

т. е.

$$\mathscr{E}(\xi)=\theta(\xi)\frac{J_1(\xi)}{\xi}+\delta'(\xi). \tag{3.5}$$

е) Пусть $f\in\mathscr{L}^1_{\text{loc}}\cap\mathscr{D}'_T$ (см. § 7), $n=1$. Тогда

$$L[\theta f]=\frac{1}{1-e^{izT}}\int_0^T f(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi. \tag{3.6}$$

Действительно,

$$L[\theta f](z)=\int_0^\infty f(\xi)e^{iz\xi}\,d\xi=\int_0^\infty e^{iz(t+T)}f(t+T)\,dt+$$
$$+\int_0^T e^{iz\xi}f(\xi)\,d\xi=e^{izT}L[\theta f]+\int_0^T e^{iz\xi}f(\xi)\,d\xi,$$

откуда и следует формула (3.6).

§ 10. Ядро Коши и преобразования Коши — Бохнера и Гильберта

1. Пространство $\mathcal{H}_s$. Обозначим через $\mathcal{L}_s^2$ гильбертово пространство, состоящее из всех функций $g(\xi)$ с конечной нормой

$$\|g\|_{(s)}=\left[\int |g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi\right]^{1/2}=\|g(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\|.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_s$ совокупность всех (обобщенных) функций $f(x)$, являющихся преобразованием Фурье функций из $\mathcal{L}_s^2$, $f=F[g]$, с нормой

$$\|f\|_s=\|F^{-1}[f]\|_{(s)}=\|g\|_{(s)}. \tag{1.1}$$

Параметр s может принимать любые вещественные значения.

Очевидно, $\mathcal{H}_0=\mathcal{L}^2=\mathcal{L}_0^2$ и

$$\|g\|_{(0)}=\|g\|=(2\pi)^{-n/2}\|f\|=\|f\|_0,$$

в силу равенства Парсеваля (см. § 6.6, в)).

Из определения пространства $\mathcal{H}_s$ имеем: *для того чтобы $f\in\mathcal{H}_s$, необходимо, чтобы она представлялась в виде*

$$f(x)=(1-\Delta)^m f_1(x),\quad f_1\in\mathcal{L}^2,\quad m=0,\quad \text{если}\quad s\geqslant 0;$$
$$m=1+\left[-\frac{s}{2}\right],\quad \text{если}\quad s<0. \tag{1.2}$$

Пространство $\mathcal{H}_s$ гильбертово, изоморфное $\mathcal{L}_s^2$. При этом

$$\mathcal{S}\subset\mathcal{H}_s\subset\mathcal{H}_{s'}\subset\mathcal{S}',\qquad s'<s,$$

где под включением понимается вложение вместе с соответствующей топологией $\|f\|_{s'}\leqslant\|f\|_s$, $f\in\mathcal{H}_s$.

Докажем, что *$\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{H}_s$*.

В силу (1.1) достаточно доказать, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{L}_s^2$. Пусть $g\in\mathcal{L}_s^2$ и $\varepsilon>0$. Тогда

$$\psi(\xi)=g(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\in\mathcal{L}^2.$$

Но $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{L}^2$ (см. § 1.2, следствие 1 из теоремы II). Поэтому существует функция ψ_1 из $\mathcal{D}$ такая, что $\|\psi-\psi_1\|<\varepsilon$. Положив

$$g_1(\xi)=\psi_1(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\in\mathcal{D},$$

получим

$$\|g-g_1\|_{(s)}^2=\int|g(\xi)-g_1(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi=\|\psi-\psi_1\|^2<\varepsilon^2,$$

что и утверждалось. Докажем:

$$\mathcal{H}_s\subset\overline{C}_0^l,\quad \text{если}\quad l - \text{целое},\ l<s-n/2.$$

Замечание. Это утверждение представляет собой простой частный случай теорем вложения Соболева [2].

Для доказательства заметим, что если $f\in\mathcal{H}_s$, то при всех $|\alpha|\leqslant l<s-n/2$

$$\xi^\alpha F^{-1}[f]\in\mathcal{L}^1,$$

в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\|\xi^\alpha F^{-1}[f]\|_{\mathcal{L}^1}=\int|\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}F^{-1}[f](\xi)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int|\xi|^{2|\alpha|}(1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi\right]^{1/2}\|(1+|\xi|^2)^{s/2}F^{-1}[f]\|=$$
$$=K\|F^{-1}[f]\|_{(s)}=K\|f\|_s<\infty.$$

Следовательно,

$$D^\alpha f(x)=D^\alpha F[F^{-1}[f]]=\int(-i\xi)^\alpha F^{-1}[f](\xi)\,e^{i(x,\xi)}\,d\xi\in C$$

и в силу теоремы Римана — Лебега $D^\alpha f(x)=o(1)$, $|x|\to\infty$ при всех $|\alpha|\leqslant l$. Это и значит, что $f\in\overline{C}_0^l$ (обозначения см. в § 0.5).

Пусть $s\geqslant 0$ — целое число. В этом случае пространство $\mathcal{L}_s^2$ состоит из тех и только тех функций $g(\xi)$, для которых $\xi^\alpha g\in\mathcal{L}^2$ при всех $|\alpha|\leqslant s$. Поэтому пространство $\mathcal{H}_s$ состоит из тех и только тех функций f, для которых обобщенные производные $D^\alpha f\in\mathcal{L}^2$ при всех $|\alpha|\leqslant s$ (по теореме Планшереля). Далее, как это вытекает из легко проверяемого тождества

$$\|f\|_s^2=\|f\|_{s-1}^2+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\|D_jf\|_{s-1}^2,$$

пространство $\mathcal{H}_s$ состоит из таких функций f из $\mathcal{H}_{s-1}$, для которых $D_jf\in\mathcal{H}_{s-1}$, $j=1,\ldots,n$.

Опишем теперь пространство, сопряженное к пространству $\mathcal{H}_s$. Поскольку $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{H}_s$, то всякая непрерывная линейная форма на $\mathcal{H}_s$ однозначно определяется своим сужением на $\mathcal{S}$.

Лемма. *Если $L(f)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathcal{H}_s$, то для некоторой f_0 из $\mathcal{H}_{-s}$*

$$L(f)=(f_0,f),\qquad f\in\mathcal{S}, \tag{1.3}$$

и норма этой формы равна $\|f_0\|_{-s}$. Таким образом, $\mathcal{H}_{-s}$ является сопряженным к пространству $\mathcal{H}_s$.

Доказательство. По условию линейная форма

$$L_1(\chi)=L\left(F^{-1}\left[\chi(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\right]\right)$$

непрерывна на $\mathcal{L}^2$ и совпадает с формой $L(f)$ при

$$\chi(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}F[f]. \tag{1.4}$$

Далее, поскольку отображение $f \to \chi$, задаваемое равенством (1.4), взаимно однозначно и взаимно непрерывно из $\mathscr{H}_s$ на $\mathscr{L}^2$, то $\|L_1\| = \|L\|$. По теореме Ф. Рисса существует функция $g_1 \in \mathscr{L}^2$ такая, что

$$L_1(\chi) = \int g_1(\xi)\chi(\xi)\,d\xi, \quad \|g_1\| = \|L_1\|.$$

Отсюда, вводя функцию

$$g(\xi) = g_1(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2}$$

из $\mathscr{L}^2_{-s}$ и обозначая $f_0 = F[g]$, при всех f из $\mathscr{S}$ получаем представление (1.3):

$$L(f) = L_1\big((1 + |\xi|^2)^{s/2} F[f]\big) =$$
$$= \int g_1(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2} F[f](\xi)\,d\xi = \int g(\xi) F[f](\xi)\,d\xi =$$
$$= (F[g], f) = (f_0, f)$$

и, кроме того,

$$\|L\| = \|g_1\| = \|g(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\| = \|f_0\|_{-s},$$

что и требовалось установить. Лемма доказана.

Для того чтобы $f \in \mathscr{H}_s$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f = g * L_s, \quad g \in \mathscr{L}^2, \tag{1.5}$$

где ядро L_s выражается формулой

$$L_s(x) = F^{-1}\big[(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\big]. \tag{1.6}$$

При этом отображение $g \to f = g * L_s$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно из $\mathscr{L}^2$ на $\mathscr{H}_s$.

Действительно, равенство (1.5) эквивалентно равенству (см. § 6.5, замечание)

$$F[f] = F[g](1 + |\xi|^2)^{-s/2},$$

которое и устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между $\mathscr{L}^2$ и $\mathscr{H}_s$.

Ядро L_s в силу (1.6) обладает очевидным свойством

$$L_s * L_\sigma = L_{s+\sigma}.$$

Приведем его явное выражение

$$L_s(x) = \begin{cases} (1 - \Delta)^{-s/2}\delta(x), & \text{если} \quad -s \geqslant 0 \text{ — четное}, \\ \dfrac{2}{(2\pi)^{n/2} 2^{s/4}\Gamma(s/4)} |x|^{s/4 - n/2} K_{n/2 - s/4}(|x|), & \text{если} \quad s > n, \end{cases}$$

где K_ν — функция Бесселя мнимого аргумента.

Замечание. Свертка (1.5) называется *бесселевым потенциалом.*

Пусть $f \in \mathscr{H}_s$ и $f_0 \in \mathscr{H}_\sigma$. Тогда свертка $f * f_0$ существует в $\mathscr{S}'$, выражается формулой

$$f * f_0 = F^{-1}[F[f]F[f_0]] \tag{1.7}$$

и непрерывна по совокупности f и f_0: если $f \to 0$ в $\mathscr{H}_s$ и $f_0 \to 0$ в $\mathscr{H}_\sigma$, то $f * f_0 \to 0$ в $\mathscr{S}'$.

Действительно, представим f и f_0 в виде (1.2):

$$f = (1 - \Delta)^m f_1, \quad f_1 \in \mathscr{L}^2, \quad f_0 = (1 - \Delta)^l f_{01}, \quad f_{01} \in \mathscr{L}^2.$$

В силу доказанной формулы (1.7) для свертки $f_1 * f_{01}$ (см. § 6.5, б)), правила дифференцирования свертки (см. § 4.2, д)) и свойств преобразования Фурье (см. § 6.3), убеждаемся в справедливости формулы (1.7):

$$(1 - \Delta)^{m+l}(f_1 * f_{01}) = (1 - \Delta)^m f_1 * (1 - \Delta)^l f_{01} = f * f_0 =$$
$$= (1 - \Delta)^{m+l} F^{-1}[F[f]F[f_0]] = F^{-1}\big[(1 + |\xi|^2)^{m+l} F[f_1]F[f_{01}]\big] =$$
$$= F^{-1}\big[F\big[(1 - \Delta)^m f_1\big]F\big[(1 - \Delta)^l f_{01}\big]\big] = F^{-1}[F[f]F[f_0]].$$

Из представления (1.7) вытекает непрерывность свертки $f * f_0$ по совокупности f и f_0.

Пример. $\mathscr{P}\dfrac{1}{x} * \mathscr{P}\dfrac{1}{x} = -\pi^2\delta(x)$.

Вытекает из формулы (6.14) § 6:

$$\mathscr{P}\frac{1}{x} * \mathscr{P}\frac{1}{x} = F^{-1}\big[(\pi i \operatorname{sign}\xi)^2\big] = -\pi^2 F^{-1}[1] = -\pi^2\delta(x).$$

Обобщая, получаем: *если $f \in \mathscr{H}_s$, $f_0 \in \mathscr{H}_\sigma$ и $F[f_1], \ldots, F[f_m]$ принадлежат $\mathscr{L}^\infty$, то их свертка существует в $\mathscr{S}'$ и представляется формулой*

$$f * f_0 * f_1 * \ldots * f_m = F^{-1}[F[f]F[f_0]F[f_1] \ldots F[f_m]]. \tag{1.8}$$

Аналогично, если $f \in \mathscr{H}_s$, а $F[f_1], \ldots, F[f_m]$ принадлежат $\mathscr{L}^\infty$, то их свертка существует в $\mathscr{H}_s$, представляется в виде

$$f * f_1 * \ldots * f_m = F^{-1}[F[f]F[f_1] \ldots F[f_m]] \tag{1.9}$$

и непрерывна по f из $\mathscr{H}_s$ в $\mathscr{H}_s$.

Если $f_0 \in \mathscr{H}_{-s}$ и $f \in \mathscr{H}_s$, $s \geqslant 0$, то справедлива формула

$$f_0 * f = (f_0(x'), f(x - x')). \tag{1.10}$$

Действительно, в силу представления (1.7), при всех φ из $\mathscr{S}$ имеем

$$(f_0 * f, \varphi) = \big(F^{-1}[F[f_0]F[f]], \varphi\big) =$$
$$= \Big(F[f_0]F[f], \frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(x) e^{-i(x,\xi)}\,dx\Big) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \varphi(x)\big(F[f_0]F[f], e^{-i(x,\xi)}\big)\,dx,$$

так как $F[f_0]F[f] \in \mathscr{L}^1$. Поэтому

$$(f_0 * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f_0]F[f], e^{-i(x,\xi)}) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f_0], F[f]e^{-i(x,\xi)}) = \frac{1}{(2\pi)^n}(f_0, F[F[f]e^{-i(x,\xi)}]) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(f_0(x'), \int F[f](\xi)e^{-i(x-x',\xi)}d\xi\right) =$$
$$= (f_0(x'), F^{-1}[F[f]](x-x')) = (f_0(x'), f(x-x')).$$

Обозначим через $\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2}$ индуктивный предел (объединение) возрастающей последовательности пространств $\mathscr{H}_{-s}$, $s=0, 1, \ldots$,

$$\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2} = \bigcup_{s \geqslant 0} \mathscr{H}_{-s}.$$

В силу леммы, $\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2}$ есть совокупность линейных непрерывных функционалов на счетно-нормированном пространстве $\mathscr{D}_{\mathscr{L}^2}$ — проективном пределе (пересечении) убывающей последовательности пространств $\mathscr{H}_s$, $s=0, 1, \ldots$,

$$\mathscr{D}_{\mathscr{L}^2} = \bigcap_{s=0}^{\infty} \mathscr{H}_s.$$

Пространство $\mathscr{D}_{\mathscr{L}^2}$ есть алгебра относительно операции обычного умножения (*ассоциативная, коммутативная без единицы*, см. § 4.5), *причем при всех f и g из $\mathscr{D}_{\mathscr{L}^2}$*

$$\|fg\|_s \leqslant c_{p-s}\|f\|_p\|g\|_s, \quad s \geqslant 0, \quad p > s + \frac{n}{2}. \tag{1.11}$$

Действительно, поскольку $f \in \mathscr{H}_s$ и $g \in \mathscr{H}_s$ при всех s, то, в частности, $f \in \mathscr{L}^2$ и $g \in \mathscr{L}^2$. Обозначим $\tilde{f} = F^{-1}[f]$ и $\tilde{g} = F^{-1}[g]$. Пользуясь определением (1.1) нормы в $\mathscr{H}_s$, формулой преобразования Фурье свертки (см. § 6.5), теоремой Фубини и неравенствами Коши — Буняковского и

$$1 + |\xi + \xi'|^2 \leqslant (1 + |\xi|^2)(1 + |\xi'|^2),$$

при всех $s \geqslant 0$ и $p > s + \frac{n}{2}$ получим неравенство (1.11):

$$\|fg\|_s^2 = \int |F^{-1}[fg](\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi =$$
$$= \int (1+|\xi|^2)^s \left|\int \tilde{f}(\xi')(1+|\xi'|^2)^{p/2}\tilde{g}(\xi-\xi')(1+|\xi'|^2)^{-p/2}d\xi'\right|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \int |\tilde{f}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^p d\xi' \int (1+|\xi|^2)^s \int |\tilde{g}(\xi-\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{-p}d\xi' d\xi =$$

$$= \|f\|_p^2 \int |\tilde{g}(\eta)|^2(1+|\xi'+\eta|^2)^s(1+|\xi'|^2)^{-p}d\eta\, d\xi' \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_p^2 \int |\tilde{g}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^s d\eta \int (1+|\xi'|^2)^{s-p}d\xi' =$$
$$= \int \frac{d\xi'}{(1+|\xi'|^2)^{p-s}}\|f\|_p^2\|g\|_s^2.$$

Обозначим

$$S'_0 = \bigcup_{s \geqslant 0} \mathscr{L}^2_{-s} = F[\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2}]$$

индуктивный предел (объединение) пространств $\mathscr{L}^2_{-s}$, $s=0, 1, \ldots$

Для того чтобы $f \in \mathscr{S}'$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$f(x) = x^\alpha f_0(x), \quad f_0 \in \mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2}. \tag{1.12}$$

Достаточность очевидна, а необходимость вытекает из представления

$$F[f] = (iD)^\alpha g(\xi),$$

где g — непрерывная функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$ (см. § 5.4), т. е. $f_0 = F^{-1}[g] \in \mathscr{H}_s$ при некотором s, откуда и следует требуемое представление (1.12).

Пусть обобщенная функция f_σ из $\mathscr{S}'$ *непрерывно зависит в $\mathscr{S}'$ от параметра σ на компакте K*, т. е. для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ $(f_\sigma, \varphi) \in C(K)$, и пусть μ — конечная мера на K. Введем обобщенную функцию $\int_K f_\sigma \mu(d\sigma)$ из $\mathscr{S}'$ равенством

$$\left(\int_K f_\sigma \mu(d\sigma), \varphi\right) = \int_K (f_\sigma, \varphi)\mu(d\sigma), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$F\left[\int_K f_\sigma \mu(d\sigma)\right] = \int_K F[f_\sigma]\mu(d\sigma). \tag{1.13}$$

2. Ядро Коши $\mathscr{K}_C(z)$. Пусть C — связный открытый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0 и C^* — сопряженный конус к C (см. § 4.4). Функция

$$\mathscr{K}_C(z) = \int_{C^*} e^{i(z,\xi)}d\xi \equiv L[\theta_{C^*}] = F[\theta_{C^*}e^{-(y,\xi)}] \tag{2.1}$$

называется *ядром Коши трубчатой области* T^C; здесь $\theta_{C^*}(\xi)$ — характеристическая функция конуса C^*.

Если конус C не является острым, то в силу леммы 1 § 4.4 $\operatorname{mes} C^* = 0$ и, стало быть, $\mathscr{K}_C(z) \equiv 0$. Далее, поскольку $C^* =$

$=(\operatorname{ch} C)^*$, то $\mathscr{K}_C(z) \equiv \mathscr{K}_{\operatorname{ch} C}(z)$. Поэтому без ограничения общности конус C можно считать *острым* и *выпуклым*.

По доказанному (см. § 9.1) ядро $\mathscr{K}_C(z)$ — голоморфная функция в T^C; более того, интеграл в (2.1) сходится равномерно по z во всякой трубчатой области T^K, $K \Subset C$ ($\bar{K}$ — компакт).

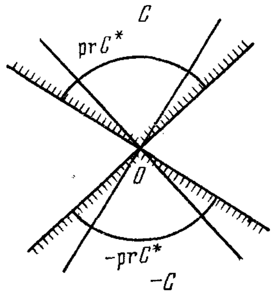

Рис. 28.

Покажем, что *ядро* $\mathscr{K}_C(z)$ *представляется интегралом*

$$\mathscr{K}_C(z) = i^n \Gamma(n) \int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{d\sigma}{(z, \sigma)^n}, \qquad z \in T^C. \tag{2.2}$$

Действительно, так как $(y, \sigma) > 0$ при всех $y \in C$, $\sigma \in \operatorname{pr} C^*$, то знаменатель подынтегральной функции справа в (2.2), равный $[(x, \sigma) + i(y, \sigma)]^n$, не обращается в нуль в T^C и, следовательно, правая часть (2.2) есть голоморфная функция в T^C. Поскольку ядро $\mathscr{K}_C(z)$ также голоморфная функция в T^C, то равенство (2.2) достаточно доказать на многообразии $z = iy$, $y \in C$. Но при $x = 0$ формула (2.2) легко следует из (2.1):

$$\mathscr{K}_C(iy) = \int_{C^*} e^{-(y, \xi)}\, d\xi = \int_{\operatorname{pr} C^*} \int_0^\infty e^{-\rho(y, \sigma)} \rho^{n-1}\, d\rho\, d\sigma =$$

$$= \int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{d\sigma}{(y, \sigma)^n} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1}\, du = i^n \Gamma(n) \int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{d\sigma}{(iy, \sigma)^n}.$$

Из представления (2.2) следует, что *ядро* $\mathscr{K}_C(z)$, *а также и ядро* $\mathscr{K}_{-C}(z)$ *голоморфны в области*

$$D = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\sigma \in \operatorname{pr} C^*} [z\colon (z, \sigma) = 0].$$

Нетрудно убедиться, что область D содержит трубчатые области T^C и T^{-C}, а также вещественные точки конусов C и $-C$.

Ядра $\mathscr{K}_C$ *и* $\mathscr{K}_{-C}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\mathscr{K}_{-C}(z) = (-1)^n \mathscr{K}_C(z) = \overline{\mathscr{K}_C(\bar{z})} = \mathscr{K}_C(-z), \quad z \in T^C \cup T^{-C}. \tag{2.3}$$

$$\mathscr{K}_C(\lambda z) = \lambda^{-n} \mathscr{K}_C(z), \qquad \lambda \in \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}.$$

Докажем оценку

$$|D^\alpha \mathscr{K}_C(z)| \leqslant M_\alpha \Delta^{-n-|\alpha|}(y), \quad z \in T^C \cup T^{-C}, \tag{2.4}$$

где $\Delta(y) = \Delta(y, -\partial C \cup \partial C)$ — расстояние от y до границы конуса $-C \cup C$: $\Delta(y) = \inf\limits_{\sigma \in \operatorname{pr} C^*} (\sigma, y)$, $y \in C$ (см. § 0.2 и рис. 28).

Действительно, пользуясь представлением (2.2), при $z \in T^C$ имеем оценку (2.4):

$$|D^\alpha \mathscr{K}_C(z)| \leqslant M_\alpha \int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{|\sigma^\alpha|\, d\sigma}{|(z, \sigma)|^{n+|\alpha|}} \leqslant$$

$$\leqslant M_\alpha \sup_{\sigma \in \operatorname{pr} C^*} (y, \sigma)^{-n-|\alpha|} = M_\alpha \Delta^{-n-|\alpha|}(y).$$

Оценка (2.4) при $z \in T^{-C}$ следует из доказанной оценки (2.4) при $z \in T^C$ и из свойств (2.3). Уточняя эти рассуждения, получим более точную оценку

$$|D^\alpha \mathscr{K}_C(z)| \leqslant M'_\alpha \Delta^{-n+1-|\alpha|}(y) \left[|x|^2 + \Delta^2(y)\right]^{-1/2}, \quad z \in T^C \cup T^{-C}. \tag{2.4'}$$

Докажем оценку при всех s

$$\|D^\alpha \mathscr{K}_C(x+iy)\|_s \leqslant K_{s,\alpha}[1 + \Delta^{-s}(y)] \Delta^{-n/2-|\alpha|}(y), \tag{2.5}$$
$$y \in -C \cup C.$$

Действительно, в силу (2.1) и (2.2) при $y \in C$ имеем оценку (2.5):

$$\|D^\alpha \mathscr{K}_C(x+iy)\|_s^2 = \|F^{-1}[D^\alpha \mathscr{K}_C(x+iy)]\|_{(s)}^2 =$$

$$= \|(-i\xi)^\alpha \theta_{C^*}(\xi) e^{-(y, \xi)}\|_{(s)}^2 = \int_{C^*} e^{-2(y, \xi)} (1 + |\xi|^2)^s |\xi^\alpha|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty (1 + \rho^2)^s \rho^{n-1+2|\alpha|} \int_{\operatorname{pr} C^*} e^{-2\rho(y, \sigma)}\, d\sigma\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_n}{2} \int_0^\infty e^{-2\rho\Delta(y)} (1 + \rho^2)^s \rho^{n-1+2|\alpha|}\, d\rho =$$

$$= \frac{\sigma_n}{2^{n+1+2|\alpha|} \Delta^{n+2|\alpha|}(y)} \int_0^\infty e^{-u} \left[1 + \frac{u^2}{4\Delta^2(y)}\right]^s u^{n-1+2|\alpha|}\, du \leqslant$$

$$\leqslant K_{s,\alpha}^2 [1 + \Delta^{-s}(y)]^2 \Delta^{-n-2|\alpha|}(y);$$

здесь σ_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Случай $y \in -C$ рассматривается с использованием соотношений (2.3).

Ядро $\mathscr{K}_C(z)$ *принимает при* $y \to 0$, $y \in \pm C$ *по норме в* $\mathscr{H}_s$ *при любом* $s < -n/2$ *граничное значение, равное* $(\pm 1)^n F[\theta_{\pm C^*}]$ *соответственно*,

$$\mathscr{K}_C(x+iy) \to (\pm 1)^n \mathscr{K}_C(\pm x) = (\pm 1)^n F[\theta_{\pm C^*}], \tag{2.6}$$
$$y \to 0, \quad y \in \pm C.$$

Действительно, по доказанному, $\mathscr{K}_C(x+iy)\in\mathscr{H}_s$ при $y\in -C\cup C$ и при любом s, а обобщенные функции $F[\theta_{\pm C^*}]\in\mathscr{H}_s$ при всех $s<-n/2$ (так как $\theta_{\pm C^*}\in\mathscr{L}^2_s$ при $s<-n/2$). Поэтому при $s<-n/2$ и $y\in C$, $y\to 0$ имеем

$$\|\mathscr{K}_C(x+iy)-F[\theta_{C^*}]\|_s^2=\|\theta_{C^*}e^{-(y,\xi)}-\theta_{C^*}\|_{(s)}^2=$$
$$=\int_{C^*}[e^{-(y,\xi)}-1]^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi\to 0.$$

Если же $y\in -C$, $y\to 0$, то

$$\mathscr{K}_C(x+iy)=(-1)^n\mathscr{K}_C(-x-iy)\to(-1)^n\mathscr{K}_C(-x)=(-1)^nF[\theta_{-C^*}],$$

и формула (2.6) доказана.

Из формул (2.3) и (2.6) для граничных значений ядер $\mathscr{K}_C(z)$ и $\mathscr{K}_{-C}(z)$ вытекают следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{K}_{-C}(x)=\overline{\mathscr{K}_C(x)}=\mathscr{K}_C(-x), && x\in\mathbb{R}^n,\\ &\mathscr{K}_{-C}(x)=(-1)^n\mathscr{K}_C(x), && x\in C\cup(-C);\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}\mathscr{K}_C(x)=\frac{1}{2}F[\theta_{C^*}+\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2}[\mathscr{K}_C(x)+\mathscr{K}_C(-x)],\\ &\operatorname{Im}\mathscr{K}_C(x)=\frac{1}{2i}F[\theta_{C^*}-\theta_{-C^*}]=\frac{1}{2i}[\mathscr{K}_C(x)-\mathscr{K}_C(-x)].\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

Отсюда, учитывая тривиальные равенства

$$(\theta_{C^*}-\theta_{-C^*})^2=(\theta_{C^*}+\theta_{-C^*})^2=\theta_{C^*}+\theta_{-C^*},$$
$$(\theta_{C^*}-\theta_{-C^*})(\theta_{C^*}+\theta_{-C^*})=\theta_{C^*}-\theta_{-C^*}$$

и пользуясь представлением (1.9) свертки, между обобщенными функциями $\operatorname{Re}\mathscr{K}_C(x)$ и $\operatorname{Im}\mathscr{K}_C(x)$ получаем следующие соотношения:

$$-\operatorname{Im}\mathscr{K}_C*\operatorname{Im}\mathscr{K}_C=\operatorname{Re}\mathscr{K}_C*\operatorname{Re}\mathscr{K}_C=\frac{1}{2}(2\pi)^n\operatorname{Re}\mathscr{K}_C,\tag{2.9}$$
$$\operatorname{Im}\mathscr{K}_C*\operatorname{Re}\mathscr{K}_C=\frac{1}{2}(2\pi)^n\operatorname{Im}\mathscr{K}_C.\tag{2.10}$$

Вычислим теперь вещественную и мнимую части ядра $\mathscr{K}_C(x)$. Для этого при $k=0,1,\dots$ введем обобщенные функции

$$\delta^{(k)}[(x,\sigma)]\quad\text{и}\quad\mathscr{P}^{(k)}\frac{1}{(x,\sigma)},$$

действующие на основные функции φ из $\mathscr{S}$ по правилам

$$(\delta^{(k)}[(x,\sigma)],\varphi)=(-1)^k\int_{(x,\sigma)=0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^k\varphi(x)\,dS_x,$$

$$\left(\mathscr{P}^{(k)}\frac{1}{(x,\sigma)},\ \varphi\right)=(-1)^k\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{(x,\sigma)=0}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS_x\,d\lambda.$$

Введенные обобщенные функции непрерывно зависят в $\mathscr{S}'$ от параметра σ на единичной сфере S_1 (в смысле § 10.1).

Докажем равенство

$$\mathscr{K}_C(x)=\pi(-i)^{n-1}\int_{\mathrm{pr}\,C^*}\delta^{(n-1)}[(x,\sigma)]\,d\sigma-$$
$$-(-i)^n\int_{\mathrm{pr}\,C^*}\mathscr{P}^{(n-1)}\frac{1}{(x,\sigma)}\,d\sigma.\tag{2.11}$$

Пользуясь представлением (2.2), при всех $y\in C$ и $\varphi\in\mathscr{S}$ получаем

$$\int\mathscr{K}_C(x+iy)\varphi(x)\,dx=i^n\Gamma(n)\int\int_{\mathrm{pr}\,C^*}\frac{d\sigma}{[(x,\sigma)+i(y,\sigma)]^n}\varphi(x)\,dx=$$
$$=i^n\Gamma(n)\int_{\mathrm{pr}\,C^*}\int\frac{\varphi(x)\,dx}{[(x,\sigma)+i(y,\sigma)]^n}\,d\sigma.\tag{2.12}$$

Пусть теперь $y\to 0$, $y\in C$. Тогда $0<\varepsilon=(y,\sigma)\to 0$ при $\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*$ и интеграл

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{[(x,\sigma)+i\varepsilon]^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+i\varepsilon)^n}\int_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS_x\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda+i\varepsilon}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\int_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS_x\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\ln(\lambda+i\varepsilon)\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\int_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS_x\,d\lambda$$

равномерно ограничен по (ε,σ) при всех $0<\varepsilon\leqslant 1$ и $\sigma\in\mathrm{pr}\,C^*$; далее, в силу формулы Сохоцкого (см. (8.3) § 1), этот интеграл стремится при $\varepsilon\to+0$ к пределу

$$-\frac{i\pi}{\Gamma(n)}\int_{(x,\sigma)=0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{n-1}\varphi(x)\,dS_x+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(n)}\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\int_{(x,\sigma)=0}\varphi(x+\lambda\sigma)\,dS_x\,d\lambda,$$

т. е. если воспользоваться введенными обозначениями, — к пределу

$$\left(\frac{(-1)^n i\pi}{\Gamma(n)}\delta^{(n-1)}[(x,\sigma)]+\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\mathscr{P}^{(n-1)}\frac{1}{(x,\sigma)},\ \varphi\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{[(x,\sigma)+i0]^n},\ \varphi\right).$$

Поэтому, переходя в интеграле (2.12) к пределу при $y \to 0$, $y \in C$ и пользуясь теоремой Лебега и предельным соотношением (2.6), получим равенство (2.11). При этом мы попутно получили равенства

$$\mathcal{K}_C(x) = i^n \Gamma(n) \int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{d\sigma}{[(x, \sigma) + i0]^n}, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{[(x, \sigma) + i0]^n} = \\ = \frac{(-1)^n i\pi}{\Gamma(n)} \delta^{(n-1)}[(x, \sigma)] + \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \mathcal{P}^{(n-1)} \frac{1}{(x, \sigma)}, \quad \sigma \in \operatorname{pr} C^*.$$

Наконец, отделяя в (2.11) вещественную и мнимую части, получим следующие полезные формулы:

$$\operatorname{Re} \mathcal{K}_C(x) = \begin{cases} \pi(-1)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{\operatorname{pr} C^*} \delta^{(n-1)}[(x, \sigma)]\, d\sigma, & n \text{ — нечетное}, \\ (-1)^{n/2-1} \int\limits_{\operatorname{pr} C^*} \mathcal{P}^{(n-1)} \frac{1}{(x, \sigma)}\, d\sigma, & n \text{ — четное}; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{K}_C(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{\operatorname{pr} C^*} \mathcal{P}^{(n-1)} \frac{1}{(x, \sigma)}\, d\sigma, & n \text{ — нечетное}, \\ \pi(-1)^{n/2} \int\limits_{\operatorname{pr} C^*} \delta^{(n-1)}[(x, \sigma)]\, d\sigma, & n \text{ — четное}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Пример 1.

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}^n_+}(z) = \frac{i^n}{z_1 \ldots z_n} = \mathcal{K}_n(z), \quad z \in T^{\mathbb{R}^n_+} = T^n, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{K}_n(x) = \left[\pi\delta(x_1) + i\mathcal{P}\frac{1}{x_1}\right] \times \ldots \times \left[\pi\delta(x_n) + i\mathcal{P}\frac{1}{x_n}\right].$$

Пример 2.

$$\mathcal{K}_{V^+}(z) = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-z^2)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad z \in T^{V^+}, \tag{2.17}$$

где обозначено $z^2 = z_0^2 - z_1^2 - \ldots - z_n^2$. Вычислим ядро Коши $\mathcal{K}_{V^+}(z)$. Как было сказано выше, его достаточно вычислить при $x = 0$; поскольку $(V^+)^* = \bar{V}^+$ (см. § 4.4), то

$$\mathcal{K}_{V^+}(iy) = \int\limits_{V^+} e^{-(y, \xi)}\, d\xi, \quad y \in V^+.$$

Далее, в силу инвариантности этого интеграла относительно собственной ортохронной группы Лоренца $L_+^\uparrow$, достаточно вы-

числить его при $y = (y_0, \mathbf{0})$, $y_0 > 0$. Имеем

$$\mathcal{K}_{V^+}(iy_0, \mathbf{0}) = \int\limits_{V^+} e^{-y_0\xi_0}\, d\xi = \int\limits_0^\infty e^{-y_0\xi_0} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| < \xi_0} d\boldsymbol{\xi}\, d\xi_0 = \\ = \frac{\sigma_n}{n} \int\limits_0^\infty e^{-y_0\xi_0} \xi_0^n\, d\xi_0 = \frac{\sigma_n}{n y_0^{n+1}} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^n\, du = \\ = \Gamma(n)\, \sigma_n y_0^{-n-1} = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)[-(iy_0)^2]^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Распространяя полученное равенство на все $y \in V^+$ и далее на все $z \in T^{V^+}$, получим формулу (2.17).

Пример 3.

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(Z) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}} i^{n^2} \frac{1! \ldots (n-1)!}{(\det Z)^n}, \quad Z \in T^{\mathcal{P}_n}, \tag{2.18}$$

где $\mathcal{P}_n$ — конус положительных $n \times n$-матриц (см. § 4.4) и $T^{\mathcal{P}_n} = [Z = X + iY,\ Y = \operatorname{Im} Z > 0]$. Для вычисления ядра Коши $\mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(Z)$ заметим, что $\mathcal{P}_n^* = \bar{\mathcal{P}}_n$ и поэтому, в силу (2.1),

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(iY) = \int\limits_{\mathcal{P}_n} e^{-\operatorname{sp}(Y\Xi)}\, d\Xi,$$

где $d\Xi$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{n^2}$,

$$d\Xi = d\xi_{11} \ldots d\xi_{nn} \prod_{p<q} d \operatorname{Re} \xi_{pq}\, d \operatorname{Im} \xi_{pq}.$$

В силу инвариантности последнего интеграла относительно преобразований $Y \to U^{-1}YU$, где U — любая унитарная матрица, этот интеграл достаточно вычислить для диагональных матриц Y вида $Y_0 = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(iY_0) = \int\limits_{\mathcal{P}_n} e^{-\sum\limits_{p=1}^n \lambda_p \xi_{pp}}\, d\Xi.$$

Далее преобразование $\xi_{pq} \to \frac{\xi_{pq}}{\sqrt{\lambda_p \lambda_q}}$ переводит $\mathcal{P}_n$ на себя, а его якобиан равен $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^n = (\det Y_0)^n = (\det Y)^n$. Следовательно,

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(iY_0) = \mathcal{K}_{\mathcal{P}_n}(iY) = (\det Y)^{-n} \int\limits_{\mathcal{P}_n} e^{-\operatorname{sp}\Xi}\, d\Xi.$$

Последняя постоянная вычислена (см., например, С. Бохнер [2]),

$$\int_{\mathscr{P}_n} e^{-\operatorname{sp}\Xi}\,d\Xi = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\,1!\,\ldots\,(n-1)!.$$

Поэтому

$$\mathscr{K}_{\mathscr{P}_n}(iY) = i^{n^2}\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\,1!\,\ldots\,(n-1)!\,[\det(iY)]^{-n},\qquad Y\in\mathscr{P}_n.$$

Распространяя полученное равенство на все $Z\in T^{\mathscr{P}_n}$, получим формулу (2.18).

3. Преобразование Коши — Бохнера. Пусть $f\in\mathscr{H}_s$. Функция

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\,(f(x'),\ \mathscr{K}_C(z-x')),\qquad z\in T^C\cup T^{-C}\tag{3.1}$$

называется *преобразованием* (*интегралом*) *Коши — Бохнера*; здесь конус C предполагается выпуклым и острым.

Так как $\mathscr{K}_C(x+iy)\in\mathscr{H}_s$ при всех s и $y\in -C\cup C$ (см. § 10.2), то в силу (1.10) правую часть (3.1) можно переписать в виде свертки

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\,f(x') * \mathscr{K}_C(x'+iy),\qquad z\in T^C\cup T^{-C}.\tag{3.2}$$

Пример. При $n=1$, $C=(0,\infty)$ и $f\in\mathscr{L}^2$ интеграл Коши — Бохнера (3.1) превращается в классический интеграл Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')}{x'-z}\,dx'.$$

Функция $f(z)$ голоморфна в $T^C\cup T^{-C}$, причем

$$D^\alpha f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(f(x'),\ D^\alpha\mathscr{K}_C(z-x')\right),\tag{3.3}$$

$$|D^\alpha f(z)| \leqslant \frac{K_{-s,\alpha}}{(2\pi)^n}\,\|f\|_s\left[1+\Delta^s(y)\right]\Delta^{-n/2-|\alpha|}(y),\tag{3.4}$$

где числа $K_{-s,\alpha}$ те же, что и в оценке (2.5).

Голоморфность функции $f(z)$ в $T^C\cup T^{-C}$ и формула дифференцирования (3.3) непосредственно вытекают из тех фактов, что ядро Коши $\mathscr{K}_C(z)$ — голоморфная функция в $T^C\cup T^{-C}$ и $\mathscr{K}_C(x+iy)\in\mathscr{H}_s$ при всех s и $y\in -C\cup C$ (см. § 10.2). Оценка (3.4) следует из (3.3), а также из леммы § 10.1 и из оценки (2.5):

$$|D^\alpha f(z)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\,\|f\|_s\left\|D^\alpha\mathscr{K}_C(z-x')\right\|_{-s} =$$

$$= \frac{\|f\|_s}{(2\pi)^n}\left\|D^\alpha\mathscr{K}_C(x+iy)\right\|_{-s} \leqslant \frac{K_{-s,\alpha}}{(2\pi)^n}\,\|f\|_s\left[1+\Delta^s(y)\right]\Delta^{-n/2-|\alpha|}(y).$$

Докажем при всех s и $y\in -C\cup C$ оценки

$$\left\|D^\alpha f(x+iy)\right\|_s \leqslant N_\alpha\|f\|_s\,\Delta^{-|\alpha|}(y),\tag{3.5}$$

$$\left\|D^\alpha f(x+iy)\right\|_{s-|\alpha|} \leqslant \|f\|_s.\tag{3.6}$$

Действительно, из представления (3.2) и из определения ядра $\mathscr{K}_C(z)$ следует, что

$$F^{-1}\left[D^\alpha f(x+iy)\right] = \frac{1}{(2\pi)^n}F^{-1}\left[f * D^\alpha\mathscr{K}_C\right] = F^{-1}[f]\,F^{-1}\left[D^\alpha\mathscr{K}_C\right] =$$

$$= F^{-1}[f]\,(i\xi)^\alpha F^{-1}[\mathscr{K}_C] = (i\xi)^\alpha F^{-1}[f](\xi)\,e^{-(y,\xi)}\theta_{C^*}(\xi).\tag{3.7}$$

Поэтому

$$\left\|D^\alpha f(x+iy)\right\|_s^2 = \int_{C^*}\left|F^{-1}[f](\xi)\right|^2|\xi^\alpha|^2e^{-2(y,\xi)}\left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_s^2\sup_{\xi\in C^*}|\xi|^{2|\alpha|}e^{-2(y,\xi)} = \|f\|_s^2\sup_{\rho\geqslant 0}\rho^{2|\alpha|}\sup_{\sigma\in\operatorname{pr}C^*}e^{-2\rho(y,\sigma)} =$$

$$= \|f\|_s^2\sup_{\rho\geqslant 0}\rho^{2|\alpha|}e^{-2\rho\Delta(y)} = \|f\|_s^2\,2^{-2|\alpha|}\Delta^{-2|\alpha|}(y)\sup_{u\geqslant 0}u^{2|\alpha|}e^{-u},$$

что и даст оценку (3.5). Аналогично, проще, выводится оценка (3.6).

Функция $f(z)$ при $y\to 0$, $y\in\pm C$ принимает по норме в $\mathscr{H}_s$ граничные значения $f_\pm(x)$, равные соответственно

$$f_+ = \frac{1}{(2\pi)^n}\,f * \mathscr{K}_C,\qquad f_- = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}\,f * \overline{\mathscr{K}}_C.\tag{3.8}$$

Действительно, учитывая формулу (3.7), при $y\in C$ имеем

$$F^{-1}\left[f(x+iy) - f_+\right] = F^{-1}[f](\xi)\left[e^{-(y,\xi)} - 1\right]\theta_{C^*}(\xi).$$

Поэтому при $y\to 0$, $y\in C$ получаем

$$\left\|f(x+iy) - f_+(x)\right\|_s^2 = \int_{C^*}\left|F^{-1}[f](\xi)\right|^2\left[e^{-(y,\xi)} - 1\right]^2\left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi \to 0,$$

что и требовалось. Случай $y\to 0$, $y\in -C$ рассматривается аналогично с использованием формул (2.6) и (2.7).

4. Преобразование Гильберта. Пусть $f\in\mathscr{H}_s$ при некотором s. *Преобразованием Гильберта* f_1 обобщенной функции f назовем свертку

$$f_1 = -\frac{2}{(2\pi)^n}\,f * \operatorname{Im}\mathscr{K}_C.\tag{4.1}$$

Применяя преобразование Фурье к (4.1) и пользуясь (2.8), получим

$$F[f_1] = -i\left(\theta_{C^*} - \theta_{-C^*}\right)F[f],\tag{4.2}$$

откуда следует, что

$$f_1 \in \mathscr{H}_s \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} F[f_1] \subset -C^* \cup C^*. \tag{4.3}$$

Если $f \in \mathscr{H}_s$, *то условия*

$$1)\ \operatorname{supp} F[f] \subset -C^* \cup C^*, \tag{4.4}$$

$$2)\ f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C, \tag{4.5}$$

$$3)\ f = \frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Re} \mathscr{K}_C \tag{4.6}$$

эквивалентны.

Действительно, из 1) → 2) в силу (4.2) и (2.8)

$$F[f] = i(\theta_{C^*} - \theta_{-C^*}) F[f_1].$$

Из 2) → 3) в силу (4.1) и (2.9)

$$f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C = -\frac{4}{(2\pi)^{2n}} (f * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C) * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C =$$

$$= -\frac{4}{(2\pi)^{2n}} f * (\operatorname{Im} \mathscr{K}_C * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C) = \frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Re} \mathscr{K}_C$$

и из ассоциативности свертки (см. § 10.1). Наконец, из 3) → 1) в силу (2.8)

$$F[f] = (\theta_{C^*} + \theta_{-C^*}) F[f].$$

Будем говорить, что обобщенные функции f и f_1 из $\mathscr{H}_s$ образуют пару *преобразований Гильберта*, если они удовлетворяют соотношениям (4.1) и (4.5):

$$f_1 = -\frac{2}{(2\pi)^n} f * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C, \quad f = \frac{2}{(2\pi)^n} f_1 * \operatorname{Im} \mathscr{K}_C. \tag{4.7}$$

Пример. При $n = 1$ (см. § 10.2)

$$\mathscr{K}_C(z) = \frac{i}{z}, \quad \operatorname{Re} \mathscr{K}_C(x) = \pi\delta(x), \quad \operatorname{Im} \mathscr{K}_C(x) = \mathscr{P}\frac{1}{x}$$

и формулы (4.7) принимают вид

$$f_1 = -\frac{1}{\pi} f * \mathscr{P}\frac{1}{x}, \quad f = \frac{1}{\pi} f_1 * \mathscr{P}\frac{1}{x}, \tag{4.8}$$

а соотношение (4.6) превращается в тождество $f = f$. При $f \in \mathscr{L}^2$, формулы (4.8) превращаются в классические формулы преобразований Гильберта.

Замечание 1. Отметим разницу между случаями $n = 1$ и $n \geqslant 2$: при $n = 1$ условие (4.4) выпадает, ибо $-C^* \cup C^* = \mathbb{R}^1$, в то время как при $n \geqslant 2$ это условие существенно.

Замечание 2. Результаты этого пункта получены Е. Бельтрами и М. Волерсом [1] ($n = 1$) и В. С. Владимировым [3] ($n \geqslant 2$).

5. Голоморфные функции класса $H_a^{(s)}(C)$. Пусть C — выпуклый острый открытый конус, $a \geqslant 0$ и s — вещественное число.

Обозначим через $H_a^{(s)}(C)$ банахово пространство, состоящее из функций $f(z)$, голоморфных в T^C, с нормой (см. § 10.1)

$$\|f\|_a^{(s)} = \sup_{y \in C} e^{-a|y|} \|f(x+iy)\|_s. \tag{5.1}$$

Обозначаем $H_0^{(s)}(C) = H^{(s)}(C)$, $\| \ \|_0^{(s)} = \| \ \|^{(s)}$.

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет следующему условию роста: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что*

$$\|f(x+iy)\|_s \leqslant M(\varepsilon) e^{(a+\varepsilon)|y|} [1 + \Delta^{-\gamma}(y)], \quad y \in C, \tag{5.2}$$

при некоторых s, $a \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$ (зависящих только от f). Тогда $f(z)$ есть преобразование Лапласа функции g из $\mathscr{L}_{s'}^2(C^* + \bar{U}_a)$, где $s' = s$, если $\gamma = 0$, $s' < s - \gamma$, если $\gamma > 0$; при этом справедлива оценка

$$\|g\|_{(s')} \leqslant \sqrt{\frac{1+\gamma}{s - s' - \gamma}}\, e^{2+a} \inf_{0<\varepsilon\leqslant 1} M(\varepsilon) \inf_{\sigma \in \operatorname{pr} C} [1 + \Delta^{-\gamma}(\sigma)]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Введем обобщенную функцию $g_y(\xi)$ из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times C)$ по формуле

$$g_y(\xi) = e^{(y,\xi)} F_x^{-1}[f(x+iy)](\xi, y); \tag{5.4}$$

здесь F_x^{-1} означает преобразование Фурье по переменным x (см. § 6.2). Докажем, что $g_y(\xi)$ не зависит от $y \in C$. Действительно, дифференцируя равенство (5.4) по y_j и пользуясь условиями Коши — Римана, имеем

$$\frac{\partial g_y(\xi)}{\partial y_j} = \xi_j e^{(y,\xi)} F_x^{-1}[f(x+iy)] + e^{(y,\xi)} F_x^{-1}\left[\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y_j}\right] =$$

$$= e^{(\xi,y)} \left\{ \xi_j F_x^{-1}[f(x+iy)] + i F_x^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(x+iy)\right]\right\} =$$

$$= e^{(y,\xi)} F_x^{-1}[f(x+iy)](\xi_j + i^2 \xi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

откуда, в силу критерия § 3.3, и заключаем, что $g_y(\xi)$ не зависит от $y \in C$, $g_y(\xi) = g(\xi)$. А тогда из (5.4) следует, что $g(\xi) e^{-(y,\xi)} \in \mathscr{S}'$ при всех $y \in C$ и

$$f(x+iy) = F[g(\xi) e^{-(y,\xi)}], \quad z \in T^C. \tag{5.5}$$

Далее, по условию $f(x+iy) \in \mathscr{H}_s$ при каждом $y \in C$, так что в силу (5.5) $g(\xi) e^{-(y,\xi)}$ есть функция из $\mathscr{L}_s^2$ и

$$\|g(\xi) e^{-(y,\xi)}\|_{(s)}^2 = \|f(x+iy)\|_s^2 \quad y \in C.$$

Отсюда, в силу (5.2), при всех $\varepsilon > 0$ выводим неравенство

$$\int |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi \leqslant$$
$$\leqslant M^2(\varepsilon)e^{2(a+\varepsilon)|y|}[1+\Delta^{-\gamma}(y)]^2, \quad y \in C. \tag{5.6}$$

Докажем, что $g(\xi)=0$ почти везде вне $C^*+\bar{U}_a$. Пусть $\xi_0 \,\overline{\in}\, C^*+\bar{U}_a$. По лемме 3 § 4.4

$$C^*+\bar{U}_a=[\xi\colon\ \mu_C(\xi)\leqslant a],$$

так что

$$\mu_C(\xi_0)=-\inf_{y\in \operatorname{pr} C}(\xi_0, y)>a.$$

Поэтому найдется такая точка $y_0 \in \operatorname{pr} C$, что $(\xi_0, y_0) < -a-\varkappa$ при некотором $\varkappa > 0$ (см. рис. 23). По непрерывности это неравенство сохранится и в достаточно малой окрестности $|\xi-\xi_0|<\delta$. Поэтому, полагая в неравенстве (5.6) $y=ty_0$, при всех $t>0$ получим неравенство

$$e^{2t(a+\varkappa)}\int\limits_{|\xi-\xi_0|<\delta}|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|\xi-\xi_0|<\delta}|g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi \leqslant$$
$$\leqslant M^2(\varepsilon)e^{2t(a+\varepsilon)}[1+t^{-\gamma}\Delta^{-\gamma}(y_0)]^2,$$

которое возможно (считая $\varepsilon<\varkappa$) лишь при условии, что $g(\xi)=0$ почти везде в $|\xi-\xi_0|<\delta$. Поскольку ξ_0 — произвольная точка вне $C^*+\bar{U}_a$, то $g(\xi)=0$ почти везде вне $C^*+\bar{U}_a$, так что $\operatorname{supp} g \subset C^*+\bar{U}_a$.

Положим в неравенстве (5.6) $y=t\sigma$, $t>0$, $\sigma\in\operatorname{pr} C$. В результате получим

$$t^{2\gamma}\int\limits_{C^*+\bar{U}_a}|g(\xi)|^2 e^{-2t(\sigma,\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi \leqslant$$
$$\leqslant M^2(\varepsilon)e^{2t(a+\varepsilon)}\left[t^\gamma+\frac{1}{\Delta^\gamma(\sigma)}\right]^2, \quad t>0. \tag{5.7}$$

Пусть $\gamma=0$. Переходя в неравенстве (5.7) к пределу при $t\to+0$ и пользуясь леммой Фату, получим

$$\int\limits_{C^*+\bar{U}_a}|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \leqslant 4M^2(\varepsilon), \quad \varepsilon>0,$$

откуда и следует неравенство (5.3).

Пусть теперь $\gamma>0$. Примем во внимание неравенство $(\sigma,\xi)\leqslant$ $\leqslant|\xi|$, поделим неравенство (5.7) на $t^{1-2\delta}$, где δ — произвольное

число $0<\delta\leqslant 1$, проинтегрируем полученное неравенство по t на $(0, 1)$ и воспользуемся теоремой Фубини. В результате, считая $0<\varepsilon\leqslant 1$, получим неравенство

$$\int\limits_{C^*+\bar{U}_a}|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\int\limits_0^1 t^{2(\gamma+\delta)-1}e^{-2t|\xi|}dt\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}e^{2(a+1)}M^2(\varepsilon)[1+\Delta^{-\gamma}(\sigma)]^2. \tag{5.8}$$

Далее, учитывая оценку

$$\int\limits_0^1 t^{2(\gamma+\delta)-1}e^{-2t|\xi|}dt \geqslant \min\left(1, |\xi|^{-2(\gamma+\delta)}\right)\int\limits_0^1 u^{2\gamma+1}e^{-2u}du \geqslant$$
$$\geqslant \frac{e^{-2}}{2(\gamma+1)}(1+|\xi|^2)^{-\gamma-\delta},$$

из (5.8) выводим оценку

$$\int\limits_{C^*+\bar{U}_a}|g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s-\gamma-\delta}d\xi \leqslant e^{2(a+2)}\frac{(\gamma+1)}{\delta}M^2(\varepsilon)[1+\Delta^{-\gamma}(\sigma)]^2,$$

откуда и следует, что $g\in\mathscr{L}^2_{s'}(C^*+\bar{U}_a)$ при всех $s'=s-\gamma-$ $-\delta<s-\gamma$ и справедлива оценка (5.3). Наконец, из (5.4) следует, что $f=L[g]$. Лемма доказана.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $H_a^{(s)}(C)$, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция $g(\xi)$ принадлежала классу $\mathscr{L}^2_s(C^*+\bar{U}_a)$.*

При этом справедливы равенства

$$\|f\|_a^{(s)}=\|f_+\|_s=\|g\|_{(s)}, \tag{5.9}$$

где $f_+(x)$ — граничное значение в $\mathscr{H}_s$ функции $f(z)$ при $y\to 0$, $y\in C$, причем $f_+=F[g]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in H_a^{(s)}(C)$. Тогда из леммы (при $\gamma=0$ и $M(\varepsilon)$, не зависящем от ε) следует, что $f(z)=L[g]$, где $g\in\mathscr{L}^2_s(C^*+\bar{U}_a)$.

Достаточность. Пусть $f(z)=L[g]$, где $g\in\mathscr{L}^2_s(C^*+\bar{U}_a)$. По доказанному (см. § 9.1), функция $f(z)$ голоморфна в $T^{\operatorname{int} C^{**}}=T^C$ и представляется интегралом

$$f(z)=\int\limits_{C^*+\bar{U}_a}g(\xi)e^{i(z,\xi)}d\xi=F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}], \quad z\in T^C. \tag{5.10}$$

Докажем, что $f \in H_a^{(s)}(C)$. Пользуясь определениями норм в пространствах $H_a^{(s)}(C)$, $\mathscr{H}_s$ и $\mathscr{L}_s^2$, из (5.10) имеем

$$\|f\|_a^{(s)^2} = \sup_{y\in C} e^{-2a|y|}\|f(x+iy)\|_s^2 = \sup_{y\in C} e^{-2a|y|}\|g(\xi)e^{-(y,\xi)}\|_{(s)}^2 =$$
$$= \sup_{y\in C} e^{-2a|y|}\int_{C^*+\bar U_a} |g(\xi)|^2 e^{-2(y,\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi =$$
$$= \int |g(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi = \|g\|_{(s)}^2,$$

т. е.

$$\|f\|_a^{(s)} = \|g\|_{(s)}. \tag{5.11}$$

Докажем, что функция $f(z)$ принимает при $y\to 0$, $y\in C$ (единственное) граничное значение в $\mathscr{H}_s$, равное $f_+ = F[g]$. Это утверждение следует из предельного соотношения

$$\|f(x+iy) - F[g]\|_s^2 = \|L[g](x+iy) - F[g](x)\|_s^2 =$$
$$= \int_{C^*+\bar U_a} |g(\xi)|^2[e^{-(y,\xi)} - 1]^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \to 0, \quad y\to 0, \quad y\in C.$$

Таким образом, $\|g\|_{(s)} = \|f_+\|_s$, что вместе с равенством (5.11) и даст равенства (5.9). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пространства $H_a^{(s)}(C)$ и $\mathscr{L}_s^2(C^*+\bar U_a)$ (линейно) изоморфны и изометричны, и изоморфизм реализуется преобразованием Лапласа $g\to L[g]=f$.*

Следствие 2. *Всякая функция $f(z)$ из $H_a^{(s)}(C)$ обладает при $y\to 0$, $y\in C$ (единственным) граничным значением $f_+(x)$ в $\mathscr{H}_s$, и соответствие $f\to f_+$ изометрично.*

Замечание. Теорема о существовании граничных значений в $\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^p}$ была доказана другим методом Х. Г. Тильманом [2] и З. Лужским и З. Жилезным [1] ($n=1$).

Следствие 3 (аналог теоремы Лиувилля). *Если конус C не острый и $f\in H_0^{(s)}(C)$, то $f(z)\equiv 0$.*

Действительно, по лемме 1 § 4.4 $\operatorname{mes} C^* = 0$. В таком случае, как это следует из доказательства леммы, функция $g(\xi)=0$ почти везде в $\mathbb{R}^n$, так что $f(z) = L[g]\equiv 0$.

6. Обобщенное представление Коши — Бохнера. В этом пункте мы продолжим исследования предыдущего пункта при $a=0$.

Теорема I. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала $H^{(s)}(C)$, необходимо и достаточно, чтобы она обладала обобщенным интегральным представлением Коши — Бохнера*

$$\frac{1}{(2\pi^n)}(f_+(x'), \mathscr{K}_C(z-x')) = \begin{cases} f(z), & z\in T^C, \\ 0, & z\in T^{-C}, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $f_+(x)$ — граничное значение в $\mathscr{H}_s$ функции $f(z)$ при $y\to 0$, $y\in C$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in H^{(s)}(C)$. По теореме § 10.5 $f(z)$ есть преобразование Лапласа функции g из $\mathscr{L}_s^2(C^*)$, так что

$$f(z) = F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}\theta_{C^*}(\xi)], \qquad z\in T^C,$$
$$0 = F[g(\xi)e^{-(y,\xi)}\theta_{-C^*}(\xi)], \qquad z\in T^{-C}.$$

Отсюда, пользуясь определением ядра $\mathscr{K}_C(z)$ (см. (2.1)) и применяя формулы (1.7) и (1.9) для свертки, получим представление (6.1):

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}F[g]*\mathscr{K}_C = \frac{1}{(2\pi)^n}(f_+(x'), \mathscr{K}_C(z-x')), \qquad z\in T^C,$$
$$0 = \frac{1}{(2\pi)^n}F[g]*\mathscr{K}_{-C} = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n}(f_+(x'), \mathscr{K}_C(z-x')), \qquad z\in T^{-C};$$

здесь мы воспользовались одним из равенств (2.3): $\mathscr{K}_{-C}(z) = (-1)^n\mathscr{K}_C(z)$, а также соотношением $f_+ = F[g]$.

Достаточность. Пусть функция $f(z)$ обладает представлением (6.1). Тогда $f\in H^{(s)}(C)$ (см. § 10.3). Теорема I доказана.

Замечание. При $s=0$ теорема I превращается в теорему С. Бохнера [2]; при $n=1$ теорема I получена Е. Бельтрами и М. Волерсом [1]; при любых n и s — см. В. С. Владимиров [3].

Теорема II. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *f_+ есть граничное значение в $\mathscr{H}_s$ некоторой функции из $H^{(s)}(C)$;*

2) *f_+ принадлежит $\mathscr{H}_s$ и удовлетворяет соотношениям*

$$\operatorname{Re} f_+ = -\frac{2}{(2\pi)^n}\operatorname{Im} f_+ * \operatorname{Im}\mathscr{K}_C, \quad \operatorname{Im} f_+ = \frac{2}{(2\pi)^n}\operatorname{Re} f_+ * \operatorname{Im}\mathscr{K}_C, \tag{6.2}$$

т. е. $\operatorname{Re} f_+$ и $\operatorname{Im} f_+$ образуют пару преобразований Гильберта;

3) *f_+ принадлежит $\mathscr{H}_s$ и $\operatorname{supp} F^{-1}[f_+]\subset C^*$.*

Доказательство. 1)$\to$2). Пусть $f_+(x)$ есть граничное значение в $\mathscr{H}_s$ функции $f(z)$ из $H^{(s)}(C)$. Тогда по теореме I $f_+\in\mathscr{H}_s$ и для $f(z)$ справедливо обобщенное представление Коши — Бохнера (6.1), из которого в силу формул (3.8) следуют соотношения

$$f_+ = \frac{1}{(2\pi)^n}f_+ * \mathscr{K}_C, \qquad 0 = \frac{1}{(2\pi)^n}f_+ * \bar{\mathscr{K}}_C. \tag{6.3}$$

Отсюда, отделяя вещественную и мнимую части, получаем соотношения (6.2).

2)$\to$3). Пусть f_+ из $\mathscr{H}_s$ удовлетворяет соотношениям (6.2). Тогда она будет удовлетворять и соотношениям (6.3). Применяя к первому из соотношений (6.3) обратное преобразование Фурье и пользуясь (2.6), получаем

$$F^{-1}[f_+]=F^{-1}[f_+]F^{-1}[\mathscr{K}_C]=F^{-1}[f_+]\theta_{C^*}(\xi),$$

откуда и следует, что $\operatorname{supp} F^{-1}[f_+]\subset C^*$.

3) $\to$ 1). Если $f_+\in\mathscr{H}_s$ и $\operatorname{supp} F^{-1}[f_+]\subset C^*$, то $F^{-1}[f_+]\in\mathscr{L}^2_s(C^*)$. По теореме § 10.5 функция $f(z)=L[g]\in H^{(s)}(C)$ и граничное значение ее в $\mathscr{H}_s$ равно $F[g]=f_+$.

Теорема II доказана.

Замечание. При $n=1$, $C=(0,\infty)=\mathbb{R}^1_+$ формулы (6.2) принимают следующий вид:

$$\operatorname{Re} f_+=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} f_+*\mathscr{P}\frac{1}{x},\quad \operatorname{Im} f_+=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re} f_+*\mathscr{P}\frac{1}{x}. \tag{6.4}$$

Формулы (6.4) в физике называются дисперсионными соотношениями (без вычитаний). Формулы (6.2) естественно рассматривать как обобщение дисперсионных соотношений на многомерный случай с причинностью относительно произвольного выпуклого острого замкнутого конуса C^*.

§ 11. Ядро Пуассона и преобразование Пуассона

1. Определение и свойства ядра Пуассона. Пусть C — выпуклый открытый острый конус в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в 0). Функция

$$\mathscr{P}_C(x,y)=\frac{|\mathscr{K}_C(x+iy)|^2}{(2\pi)^n\mathscr{K}_C(2iy)},\quad (x,y)\in T^C, \tag{1.1}$$

называется *ядром Пуассона* трубчатой области T^C; здесь $\mathscr{K}_C$ — ядро Коши (см. § 10.2).

Пример 1 (см. (2.16) § 10).

$$\mathscr{P}_{\mathbb{R}^n_+}(x,y)=\frac{y_1\ldots y_n}{\pi^n|z_1|^2\ldots|z_n|^2}\equiv\mathscr{P}_n(x,y). \tag{1.2}$$

Пример 2 (см. (2.17) § 10).

$$\mathscr{P}_{V^+}(x,y)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+3}{2}}}\frac{(y^2)^{\frac{n+1}{2}}}{|(x+iy)^2|^{n+1}}. \tag{1.3}$$

Перечислим свойства ядра Пуассона $\mathscr{P}_C$, вытекающие из соответствующих свойств ядра Коши $\mathscr{K}_C$ (см. § 10.2):

а) $$0\leqslant\mathscr{P}_C(x,y)=\mathscr{P}_C(-x,y)\in C^\infty(T^C); \tag{1.4}$$

вытекает из голоморфности ядра $\mathscr{K}_C(z)$ в T^C и из того факта, что $\mathscr{K}_C(2iy)>0$, $y\in C$;

б) $$\int\mathscr{P}_C(x,y)\,dx=1,\quad y\in C; \tag{1.5}$$

вытекает из равенства Парсеваля, примененного к равенству (2.1) § 10:

$$\int|\mathscr{K}_C(x+iy)|^2dx=(2\pi)^n\int_{C^*}e^{-2(y,\xi)}d\xi=(2\pi)^nK_C(2iy),\quad y\in C;$$

в) $$\mathscr{P}_C(x,y)\leqslant\frac{\mathscr{K}_C^2(iy)}{(2\pi)^n\mathscr{K}_C(2iy)},\quad (x,y)\in T^C; \tag{1.6}$$

вытекает из оценки

$$|\mathscr{K}_C(x+iy)|\leqslant\int_{C^*}e^{-(y,\xi)}d\xi=\mathscr{K}_C(iy);$$

г) $\|\mathscr{P}_C(x,y)\|_{\mathscr{L}^p}\leqslant$

$$\leqslant\frac{\mathscr{K}_C^{2-\frac{2}{p}}(iy)}{(2\pi)^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\mathscr{K}_C^{1-\frac{1}{p}}(2iy)},\quad y\in C,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty; \tag{1.7}$$

вытекает из (1.4) — (1.6) в силу

$$\|\mathscr{P}_C(x,y)\|^p_{\mathscr{L}^p}=\int\mathscr{P}^p_C(x,y)\,dx\leqslant\sup_x\mathscr{P}_C^{p-1}(x,y)\int\mathscr{P}_C(x,y)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mathscr{K}_C^{2p-2}(iy)}{(2\pi)^{n(p-1)}\mathscr{K}_C^{p-1}(2iy)};$$

д) $0<F_x[\mathscr{P}_C(x,y)](\xi)=$

$$=\frac{[\theta_{C^*}(\xi)e^{-(y,\xi)}]*[\theta_{C^*}(-\xi)e^{(y,\xi)}]}{\mathscr{K}_C(2iy)}\leqslant1,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad y\in C; \tag{1.8}$$

вытекает из формулы для преобразования Фурье свертки и из того, что

$$F_x^{-1}[\mathscr{K}_C(z)]=\theta_{C^*}(\xi)e^{-(y,\xi)}\in\mathscr{L}^1,$$
$$F_x^{-1}[\bar{\mathscr{K}}_C(z)]=\theta_{C^*}(-\xi)e^{(y,\xi)}\in\mathscr{L}^1;$$

е) $$\mathscr{P}_C(x,y)\gg0$$

— непрерывная положительно определенная функция при всех $y\in C$ (см. § 8.2); вытекает из (1.8) и того факта, что

$$[\theta_{C^*}(\xi)e^{-(y,\xi)}]*[\theta_{C^*}(-\xi)e^{(y,\xi)}]\in\mathscr{L}^1,\quad y\in C;$$

ж) $$[\theta_{C^*}(\xi)e^{-(y,\xi)}]*[\theta_{C^*}(-\xi)e^{(y,\xi)}]\gg0 \tag{1.9}$$

— непрерывная положительно определенная функция при всех $y\in C$; вытекает из (1.4) и (1.8);

з) $$F_x[\mathscr{P}_C(x,y)](\xi)=e^{-|(y,\xi)|},\quad \xi\in-C^*\cup C^*,\quad y\in C; \tag{1.10}$$

вытекает из (1.8) в силу следующих выкладок для $\xi \in C^*$:

$$F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi) = \frac{1}{\mathscr{K}_C(2iy)} \int\limits_{\substack{-\xi' \in C^* \\ \xi-\xi' \in C^*}} e^{-(y, \xi-\xi')+(y, \xi')}\, d\xi' =$$

$$= \frac{1}{\mathscr{K}_C(2iy)} e^{-(y, \xi)} \int\limits_{-C^*} e^{2(y, \xi')}\, d\xi' = e^{-(y, \xi)};$$

если же $\xi \in -C^*$, то доказываемое равенство остается справедливым в силу четности ядра $\mathscr{P}_C(x, y)$ по x;

и) $$\left|D_x^\alpha \mathscr{P}_C(x, y)\right| \leqslant M'_\alpha |y|^n \Delta^{-2n-|\alpha|}(y), \quad (x, y) \in T^C; \tag{1.11}$$

вытекает из оценок (2.4) § 10 и из оценки

$$\mathscr{K}_C(2iy) = \int\limits_{C^*} e^{-2(y, \xi)}\, d\xi \geqslant \int\limits_{C^*} e^{-2|y||\xi|}\, d\xi = \frac{\varkappa}{|y|^n}, \quad \varkappa > 0. \tag{1.12}$$

к) $$\|D_x^\alpha \mathscr{P}_C(x, y)\|_s \leqslant$$
$$\leqslant K_{s, \alpha, p}\left[1 + \Delta^{-s}(y)\right]\left[1 + \Delta^{-p}(y)\right]\Delta^{-n-|\alpha|}(y)|y|^n,$$
$$y \in C, \quad s \geqslant 0, \quad p > s + \frac{n}{2}, \tag{1.13}$$

так что $\mathscr{P}_C(x, y) \in \mathscr{H}_s$ при всех s и $y \in C$.

Вытекает из неравенств (1.11) § 10 и (2.5) § 10 и из оценки (1.12):

$$\|D_x^\alpha \mathscr{P}_C(x, y)\|_s = \frac{1}{(2\pi)^n \mathscr{K}_C(2iy)} \left\|D_x^\alpha\left[\mathscr{K}_C(x+iy)\overline{\mathscr{K}_C(x+iy)}\right]\right\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|y|^n}{(2\pi)^n \varkappa} \left\|\sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \mathscr{K}_C(x+iy)\overline{D^{\alpha-\beta}\mathscr{K}_C(x+iy)}\right\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|y|^n}{(2\pi)^n \varkappa} c_{p-s} \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta \mathscr{K}_C(x+iy)\|_s \|D^{\alpha-\beta}\mathscr{K}_C(x+iy)\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{p-s}}{(2\pi)^n \varkappa} \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} K_{s,\beta} K_{p,\alpha-\beta}\left[1+\Delta^{-s}(y)\right]\left[1+\Delta^{-p}(y)\right]\Delta^{-n-|\alpha|}(y)|y|^n.$$

2. Преобразование и представление Пуассона. Пусть $f \in \mathscr{H}_s$, $-\infty < s < \infty$. Свертку (см. (1.10) § 10)

$$\mathscr{F}(x, y) = f(x) * \mathscr{P}_C(x, y) = (f(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)) \tag{2.1}$$

назовем *преобразованием* (*интегралом*) *Пуассона*.

В силу к) § 11.1 интеграл Пуассона существует при каждом $y \in C$ и является непрерывной операцией из $\mathscr{H}_s$ в $\mathscr{H}_s$.

Пример. Если $f \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{H}_0$, то интеграл Пуассона превращается в классический интеграл Пуассона:

$$\mathscr{F}(x, y) = \int f(x') \mathscr{P}_C(x - x', y)\, dx'.$$

Перечислим некоторые свойства интеграла Пуассона.

а) $$\mathscr{F}(x, y) \in C^\infty(T^C); \tag{2.2}$$

вытекает из (1.4) и из (1.13).

б) $$\|\mathscr{F}(x, y)\|_s^2 \leqslant \|f\|_s^2, \quad y \in C; \tag{2.3}$$

вытекает из (1.8) в силу следующих выкладок:

$$\|\mathscr{F}(x, y)\|_s^2 = \|F_x^{-1}[\mathscr{F}(x, y)]\|_{(s)}^2 = \|F^{-1}[f]\, F_x[\mathscr{P}_C(x, y)]\|_{(s)}^2 \leqslant \|f\|_s^2.$$

в) Теорема (обобщенное представление Пуассона). *Для того чтобы $f(z)$ принадлежала $H^{(s)}(C)$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась единственным образом в виде интеграла Пуассона*

$$f(z) = (\chi(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)), \quad z \in T^C, \tag{2.4}$$

где $\chi \in \mathscr{H}_s$ *и* $\operatorname{supp} F^{-1}[\chi] \subset C^*$; *при этом* $\chi = f_+$, *где* $f_+(x)$ — *граничное значение в* $\mathscr{H}_s$ *функции* $f(z)$ *при* $y \to 0$, $y \in C$.

Доказательство. Необходимость. Так как $f \in H^{(s)}(C)$, то по теореме § 10.5 существует функция $g \in \mathscr{L}_s^2(C^*)$ такая, что $f_+ = F[g] \in \mathscr{H}_s$

$$f(z) = F[g(\xi) e^{-(y, \xi)}](x), \quad z \in T^C. \tag{2.5}$$

Отсюда, пользуясь равенством (1.10), для функции $f(z)$ получим обобщенное представление Пуассона (2.4):

$$f(z) = F[g(\xi) F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi)] =$$
$$= F[g](x) * \mathscr{P}_C(x, y) = (f_+(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)), \quad z \in T^C.$$

Обобщенное представление Пуассона (2.4) единственно, так как в силу (1.8) $F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$.

Достаточность. Пусть обобщенная функция χ такова, что $g = F^{-1}[\chi] \in \mathscr{L}_s^2(C^*)$. Тогда по теореме § 10.5 функция $f(z)$, определяемая формулой (2.5), принадлежит $H^{(s)}(C)$ и, по доказанному, представляется интегралом (2.4) с $\chi = F[g] = f_+$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы*

$$\operatorname{Re} f(z) = (\operatorname{Re} f_+(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)),$$
$$\operatorname{Im} f(z) = (\operatorname{Im} f_+(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)). \tag{2.6}$$

Следствие 2. *Если $f(x)$ — вещественная обобщенная функция из $\mathscr{H}_s$ и $\operatorname{supp} F[f] \subset -C^* \cup C^*$, то функция*

$$u(x, y) = (f(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)) \tag{2.7}$$

есть вещественная часть некоторой функции класса $H^{(s)}(C)$ и принимает в смысле $\mathscr{H}_s$ при $y \to 0$, $y \in C$ значение $f(x)$.

Действительно, обозначая

$$f_+(x) = F\left[\theta_{C^*}(\xi) F^{-1}[f](\xi)\right](x),$$

получим $f_+ \in \mathscr{H}_s$, $\operatorname{supp} F^{-1}[f_+] \subset C^*$ и $f = 2\operatorname{Re} f_+$, так что

$$u(x, y) = 2\operatorname{Re}\left(f_+(x'), \mathscr{P}_C(x - x', y)\right).$$

Отсюда и из теоремы вытекают требуемые утверждения.

Пример. Функция $\mathscr{K}_C(z + iy')$ принадлежит классу $H^{(s)}(C)$ при всех $y' \in C$ и s (см. оценку (2.5) § 10, в которой $\Delta(y + y') \geqslant \Delta(y')$, $y \in C$). Пусть C' — произвольный (выпуклый открытый) подконус конуса C, $C' \subset C$. Применяя формулу (2.4) к функции $\mathscr{K}_C(z + iy')$ класса $H^{(s)}(C')$, получим

$$\mathscr{K}_C(z + iy') = \int \mathscr{K}_C(x' + iy') \mathscr{P}_{C'}(x - x', y)\, dx',$$

$$(x, y) \in T^{C'}, \quad y' \subset C. \tag{2.8}$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши — Буняковского и равенством (1.5), получаем такое неравенство

$$|\mathscr{K}_C(z + iy')|^2 \leqslant \int |\mathscr{K}_C(x' + iy')|^2 \mathscr{P}_{C'}(x - x', y)\, dx' \times$$

$$\times \int \mathscr{P}_{C'}(x - x', y)\, dx' = \int \mathscr{P}_{C'}(x - x', y) |\mathscr{K}_C(x' + iy')|^2\, dx'. \tag{2.9}$$

В терминах ядра Пуассона (1.1) неравенство (2.9) принимает вид

$$\mathscr{P}_C(x, y + y') \leqslant \frac{\mathscr{K}_C(iy')}{\mathscr{K}_C(iy + iy')} \int \mathscr{P}_{C'}(x - x', y) \mathscr{P}_C(x', y')\, dx',$$

$$(x, y) \in T^{C'}, \quad y' \in C. \tag{2.10}$$

В частности, при $C' = C$, $y' = y$ формула (2.10) принимает вид

$$\mathscr{P}_C(x, 2y) \leqslant 2^n \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \mathscr{P}_C(x', y)\, dx', \quad (x, y) \in T^C. \tag{2.11}$$

Здесь мы воспользовались свойством однородности (степени $-n$) ядра $\mathscr{K}_C$ (см. (2.3) § 10).

3. Граничные значения интеграла Пуассона.

а) $$\int \mathscr{P}_C(x, y) \varphi(x)\, dx \to \varphi(0), \quad y \to 0, \quad y \in C \tag{3.1}$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{L}^\infty$, непрерывной в 0.

Для доказательства этого утверждения, в силу (1.5), достаточно установить следующее предельное соотношение: для любого $\delta > 0$

$$\int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_C(x, y)\, dx \to 0, \quad y \to 0, \quad y \in C. \tag{3.2}$$

Построим вспомогательную функцию $\omega(x)$ со свойствами:

1) ω — вещественная непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$, $\omega(x) \to 0$, $|x| \to \infty$;

2) $\omega(0) = 1$, $|\omega(x)| < 1$, $x \neq 0$;

3) $\int \mathscr{P}_C(x, y) \omega(x)\, dx \to 1$, $y \to 0$, $y \in C$.

Пусть $\eta \in \mathscr{D}(\operatorname{int} C^*)$, $\eta \geqslant 0$, $\int \eta(\xi)\, d\xi = 1$ ($\operatorname{int} C^* \neq \varnothing$, так как C — острый конус; см. § 4.4). Функция

$$\omega(x) = \operatorname{Re} \int \eta(\xi) e^{i(x, \xi)}\, d\xi = \int \eta(\xi) \cos(x, \xi)\, d\xi$$

обладает требуемыми свойствами 1) — 3). Действительно, свойство 1) вытекает из теоремы Римана — Лебега. Докажем свойство 2). Ясно, что $\omega(0) = 1$ и $|\omega(x)| \leqslant 1$. Пусть $\omega(x_0) = \pm 1$, $x_0 \neq 0$, т. е. $1 = \pm \int \eta(\xi) \cos(x_0, \xi)\, d\xi$, что противоречит условию $\int \eta(\xi)\, d\xi = 1$. Свойство 3) вытекает из следствия теоремы § 11.2, в силу которого

$$\operatorname{Re} \int \eta(\xi) e^{i(z, \xi)}\, d\xi = \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \omega(x')\, dx', \quad z \in T^C.$$

Полагая здесь $x = 0$, учитывая (1.4) и переходя к пределу при $y \to 0$, $y \in C$, получим соотношение 3).

Пусть $\delta > 0$. В силу свойств 1) и 2) существует такое число $\varepsilon > 0$, что $|\omega(x)| \leqslant 1 - \varepsilon$, $|x| \geqslant \delta$. Отсюда, принимая во внимание свойство 3), получим

$$1 = \lim_{y \to 0,\, y \in C} \left[\int_{|x| \leqslant \delta} \mathscr{P}_C(x, y) \omega(x)\, dx + \int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_C(x, y) \omega(x)\, dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{y \to 0,\, y \in C} \left[\int_{|x| \leqslant \delta} \mathscr{P}_C(x, y)\, dx + (1 - \varepsilon) \int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_C(x, y)\, dx\right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{y \to 0,\, y \in C} \left[1 - \varepsilon \int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_C(x, y)\, dx\right],$$

что и доказывает соотношение (3.2).

б) *Если $f \in \mathscr{H}_s$, то ее интеграл Пуассона*

$$\mathscr{F}(x, y) \to f(x), \quad y \to 0, \quad y \in C \text{ в } \mathscr{H}_s. \tag{3.3}$$

Действительно, в силу (1.8) и (3.1)

$$|F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi) - 1|^2 \leqslant 4, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad y \in C;$$

$$|F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi) - 1|^2 = \left|\int \mathscr{P}_C(x, y) e^{-i(x, \xi)} dx - 1\right|^2 \to 0, \quad y \to 0, \quad y \in C.$$

Поэтому (ср. (2.3)) в силу теоремы Лебега при $y \to 0$, $y \in C$ имеем

$$\|\mathscr{F}(x, y) - f(x)\|_s^2 = \|F_x^{-1}[\mathscr{F}(x, y) - f(x)]\|_{(s)}^2 = \int |F_x[\mathscr{P}_C(x, y)](\xi) - 1|^2 |F^{-1}[f](\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \to 0,$$

что и требовалось доказать.

в) $\mathscr{P}_C(x, y) \to \delta(x)$, $y \to 0$, $y \in C$ *в* $\mathscr{H}_s$, $s < -n/2$; вытекает из (3.3), так как $\delta \in \mathscr{H}_s$ при всех $s < -n/2$ и

$$\mathscr{P}_C(x, y) = \delta(x) * \mathscr{P}_C(x, y) \to \delta(x), \quad y \to 0, \quad y \in C \text{ в } \mathscr{H}_s.$$

г) Предельное соотношение (3.1) в случае n-гранного конуса

$$C = [y\colon (y, e_1) > 0, \ldots, (y, e_n) > 0] \quad (\text{см. § 4.4})$$

допускает расширение на более общий класс функций $\varphi(x)$, а именно: *если $\varphi(x)$ непрерывна в 0 и такова, что ограничен интеграл*

$$\int \mathscr{P}_C(x, y) |\varphi(x)| dx \leqslant K, \quad y \in C, \quad |y| < a, \tag{3.4}$$

то

$$\int \mathscr{P}_C(x, y) \varphi(x) dx \to \varphi(0), \quad y \to 0, \quad y \in C. \tag{3.5}$$

Действительно, так как (неособенное) линейное отображение

$$z \to Tz = [(z, e_1), \ldots, (z, e_n)]$$

переводит область T^C на область T^n (см. (2.16) § 10), то это утверждение достаточно доказать для конуса $\mathbb{R}_+^n$ и ядра

$$\mathscr{P}_n(x, y) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{y_j}{\pi} \frac{1}{x_j^2 + y_j^2} \quad (\text{см. (1.2)}).$$

В силу (1.5) для этого достаточно доказать, что при всех $\delta > 0$ $(\delta < \sqrt{n})$

$$\int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_n(x, y) |\varphi(x)| dx \to 0, \quad y \to 0, \quad y \in \mathbb{R}_+^n. \tag{3.6}$$

Но предельное соотношение (3.6) вытекает из оценки

$$\frac{1}{x_k^2 + y_k^2} \leqslant \frac{2}{x_k^2 + (\delta^2 a^2)/n}, \quad |x_k| > \frac{\delta a}{\sqrt{n}}$$

и из оценки (3.4) в силу следующей цепочки неравенств при

$$|y| < a\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{n}}, \quad y \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\int_{|x| > \delta} \mathscr{P}_n(x, y) |\varphi(x)| dx \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{y_1 \ldots y_n}{\pi^n} \int_{|x_k| > \frac{\delta a}{\sqrt{n}}} \frac{|\varphi(x)| dx}{(x_1^2 + y_1^2) \ldots (x_n^2 + y_n^2)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{y_1 \ldots y_n}{\pi^n} \int \frac{|\varphi(x)| dx}{(x_1^2 + y_1^2) \ldots (x_k^2 + (\delta^2 a^2)/n) \ldots (x_n^2 + y_n^2)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \frac{\sqrt{n}}{\delta a} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k \int \mathscr{P}_n\left(x, y_1, \ldots, \frac{\delta a}{\sqrt{n}}, \ldots, y_n\right) |\varphi(x)| dx \leqslant 2 \frac{\sqrt{n}}{\delta a} K \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k.$$

д) Для n-гранного конуса C (см. г)) справедливо следующее утверждение: *если $P(x)$ — полином и интеграл*

$$\int |P(x)| \mathscr{P}_C(x, y) dx < \infty$$

для некоторого $y \in C$, то $P(x) \equiv \mathrm{const}$.

Действительно, как и в г), это утверждение достаточно доказать для конуса $\mathbb{R}_+^n$ и ядра $\mathscr{P}_n(x, y)$. При $n = 1$ оно просто доказывается по индукции по степени полинома P. Далее, применяем индукцию по n: пусть

$$P(x) = x_n^m P_m(\tilde{x}) + \ldots + x_n P_1(\tilde{x}) + P_0(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1});$$

тогда по теореме Фубини интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_n^m P_m(\tilde{x}) + \ldots + P_0(\tilde{x})| \mathscr{P}_1(x_n, y_n) dx_n < \infty$$

при почти всех $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, и поэтому по доказанному $P(x) = P_0(\tilde{x})$ и т. д.

Замечание 1. Возникает вопрос: справедливы ли утверждения пунктов г) и д) для произвольного острого (выпуклого) конуса C. Утверждение д) для конуса V^+ $(n = 3)$ доказано В. С. Владимировым [10], II.

Замечание 2. При $s = 0$, т. е. в $\mathscr{H}_0 = \mathscr{L}^2$ (и в $\mathscr{L}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$), эта теория (другим методом) изложена в книге Е. Стейна и Г. Вейса [1].

§ 12. Алгебры голоморфных функций

В этом параграфе мы дадим внутреннее описание преобразования Лапласа обобщенных функций из алгебр $\mathscr{S}'(C^*+)$ и $\mathscr{S}'(C^*)$, подобно тому, как это сделано в § 10.5 для функций из $\mathscr{L}_s^2(C^*+\bar{U}_a)$.

1. Определение алгебр $H_+(C)$ и $H(C)$. Пусть C — связный открытый конус с вершиной в 0. Обозначим через $H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $a\geqslant 0$, совокупность всех функций $f(z)$, голоморфных в T^C и удовлетворяющих следующему условию роста:

$$|f(z)|\leqslant Me^{a|y|}\left(1+|z|^2\right)^{\alpha/2}\left[1+\Delta^{-\beta}(y)\right],\quad z\in T^C. \qquad (1.1)$$

Сходимость (топологию) в $H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$ введем в соответствии с оценкой (1.1) с помощью нормы

$$\|f\|_a^{(\alpha,\beta)}=\sup_{z\in T^C}\frac{|f(z)|e^{-a|y|}}{\left(1+|z|^2\right)^{\alpha/2}\left[1+\Delta^{-\beta}(y)\right]}.$$

Пространства $H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$ — банаховы и

$$H_a^{(\alpha,\beta)}(C)\subset H_{a'}^{(\alpha',\beta')}(C),\quad \alpha'\geqslant\alpha,\quad \beta'\geqslant\beta,\quad a'\geqslant a, \qquad (1.2)$$

причем включение (1.2) понимается вместе с соответствующей топологией, в силу очевидного неравенства

$$\|f\|_a^{(\alpha,\beta)}\leqslant\|f\|_{a'}^{(\alpha',\beta')}. \qquad (1.3)$$

Обозначим

$$H_a(C)=\bigcup_{\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0}H_a^{(\alpha,\beta)}(C),\qquad H_+(C)=\bigcup_{a\geqslant 0}H_a(C),$$

$$H_a^0(C)=\bigcup_s H_a^{(s)}(C),\qquad H_+^0(C)=\bigcup_{a\geqslant 0}H_a^0(C).$$

Совокупность $H_+(C)$ образует алгебру функций, голоморфных в T^C и удовлетворяющих оценке (1.1) при некоторых $a\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$ и $\beta\geqslant 0$, относительно операции обычного умножения. Эта алгебра — ассоциативная, коммутативная, содержит единицу и не содержит делителей нуля. Далее, $H_0(C)=H(C)$ — подалгебра алгебры $H_+(C)$, содержащая единицу. Пространства $H_a(C)$, $H_+(C)$, $H_a^0(C)$ и $H_+^0(C)$ мы наделяем топологией индуктивного предела (объединения) возрастающей последовательности пространств $H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$, $H_a(C)$, $H_a^{(s)}(C)$ и $H_a^0(C)$ соответственно (см. Ж. Дьедонне и Л. Шварц [1], Н. Бурбаки [1]). В дальнейшем при $a=0$ соответствующий индекс 0 мы будем опускать.

2. Изоморфизм алгебр $\mathscr{S}'(C^*+)\sim H_+(C)$ и $\mathscr{S}'(C^*)\sim H(C)$. Пусть C — острый выпуклый конус. По лемме 1 § 4.4 $\operatorname{int}C^*\neq\varnothing$.

Выберем (произвольный) базис $e_1,\ldots,e_n$ в $\mathbb{R}^n$ такой, что $e_j\in\operatorname{print}C^*$, $j=1,\ldots,n$. Построим полином

$$l(z)=(e_1,z)\ldots(e_n,z).$$

Полином $l(z)$ назовем *допустимым для конуса* C. Так как $(e_j,y)>0$ при всех $y\in C$, то

$$l(z)=[(e_1,x)+i(e_1,y)]\ldots[(e_n,x)+i(e_n,y)]\neq 0,\quad z\in T^C. \qquad (2.1)$$

Теперь убедимся, что справедлива следующая

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет следующему условию роста: для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что*

$$|f(x+iy)|\leqslant M(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|z|^2)^{\alpha/2}\left[1+\Delta^{-\beta}(y)\right],\quad z\in T^C, \qquad (2.2)$$

при некоторых $a\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$ и $\beta\geqslant 0$ (зависящих только от f). Тогда $f(z)$ при $\delta>\alpha+n/2$ представляется в виде

$$f(z)=l^\delta(z)f_\delta(z),\quad f_\delta\in H_a^{(s)}(C),\quad s<-\beta-n(\delta-1/2), \qquad (2.3)$$

$$\|f_\delta\|_a^{(s)}\leqslant K_{s,\delta}\inf_{0<\varepsilon\leqslant 1}M(\varepsilon)\inf_{\sigma\in\operatorname{pr}C}\left[1+\Delta^{-\beta-n(\delta-1/2)}(\sigma)\right]; \qquad (2.4)$$

здесь $l(z)$ — любой допустимый полином для конуса C.

Доказательство. В силу (2.1) функция

$$f_\delta(z)=f(z)\,l^{-\delta}(z)$$

голоморфна в T^C. Так как $(e_j,y)\geqslant\sigma|y|$, $j=1,\ldots,n$, $y\in C$, при некотором $\sigma>0$ (см. (4.1) § 4), то

$$\begin{aligned}|(l,z)|^2&=[(e_1,x)^2+(e_1,y)^2]\ldots[(e_n,x)^2+(e_n,y)^2]\geqslant\\&\geqslant[(e_1,x)^2+\sigma^2|y|^2]\ldots[(e_n,x)^2+\sigma^2|y|^2]\geqslant\\&\geqslant(\sigma|y|)^{2n-2}\left[(e_1,x)^2+\ldots+(e_n,x)^2+\sigma^2|y|^2\right],\quad z\in T^C. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Так как векторы $e_1,\ldots,e_n$ линейно независимы, то существует такое число $b>0$, что

$$(e_1,x)^2+\ldots+(e_n,x)^2\geqslant b^2|x|^2.$$

Отсюда, продолжая оценки (2.5), получим

$$|l(x+iy)|^2\geqslant(\sigma|y|)^{2n-2}\left[b^2|x|^2+\sigma^2|y|^2\right],\quad z\in T^C,$$

Учитывая полученную оценку и оценку (2.2), при всех $z \in T^C$ имеем

$$|f_\delta(x+iy)|^2 = |f(x+iy)|^2 |l(x+iy)|^{-2\delta} \leqslant$$
$$\leqslant M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} \frac{(1+|x+iy|^2)^\alpha [1+\Delta^{-\beta}(y)]^2}{(\sigma|y|)^{2\delta(n-1)} [b^2|x|^2+\sigma^2|y|^2]^\delta} \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} \frac{[1+\Delta^\beta(y)]^2 (1+|x|^2+|y|^2)^\alpha}{\Delta^{2\beta}(y)|y|^{2\delta(n-1)}(|x|^2+|y|^2)^\delta} \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} \frac{[1+\Delta^\beta(y)]^2 [1+|x|^2+\Delta^2(y)]^\alpha}{\Delta^{2\beta+2\delta(n-1)}(y)[|x|^2+\Delta^2(y)]^\delta};$$

здесь мы учли также, что $\Delta(y) \leqslant |y|$ и $\delta > \alpha$. Поэтому

$$\|f_\delta(x+iy)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} \frac{[1+\Delta^\beta(y)]^2}{\Delta^{2\beta+2\delta(n-1)}(y)} \int \frac{[1+|x|^2+\Delta^2(y)]^\alpha}{[|x|^2+\Delta^2(y)]^\delta} dx \leqslant$$
$$\leqslant K_1^2 M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} \frac{[1+\Delta^\beta(y)]^2}{\Delta^{2\beta+n(2\delta-1)}(y)} \int \frac{[1+\Delta^2(y)(1+|\xi|^2)]^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\delta} d\xi.$$

В силу выбора числа δ, $2\delta - 2\alpha > n$, а тогда $2\alpha \leqslant n(2\delta-1)$ и, продолжая наши оценки, получаем

$$\|f_\delta(x+iy)\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant K_2^2 M^2(\varepsilon) e^{2(a+\varepsilon)|y|} [1+\Delta^{-\beta-n(\delta-1/2)}(y)]^2, \quad y \in C, \tag{2.6}$$

где число K_2 зависит лишь от α, β, δ и от допустимого полинома l. Оценка (2.6) показывает, что функция f_δ удовлетворяет условиям леммы § 10.5 при $s=0$ и $\gamma=\beta+n(\delta-1/2)$. Поэтому $f_\delta = L[g_\delta]$, где $g_\delta \in \mathscr{L}_s^2(C^*+\bar{U}_a)$, $s < -\beta - n(\delta-1/2)$, и удовлетворяет оценке

$$\|g_\delta\|_{(s)} \leqslant K_2 \sqrt{\frac{\beta+n(\delta-1/2)+1}{-s-\beta-n(\delta-1/2)}} \inf_{0<\varepsilon\leqslant 1} M(\varepsilon) \inf_{\sigma \in \operatorname{pr} C} [1+\Delta^{-\gamma}(\sigma)].$$

По теореме § 10.5 $f_\delta = L[g_\delta] \in H_a^{(s)}(C)$ и удовлетворяет оценке (2.4) с некоторым $K_{s,\delta}$. Лемма доказана.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) f *принадлежит* $H_a(C)$;

2) f *представима в виде*

$$f(z) = l^\delta(z) f_\delta(z), \quad f_\delta = L[g_\delta] \in H_a^{(s)}(C) \tag{2.7}$$

при всех допустимых полиномах $l(z)$ *для конуса* C *при всех* $s < s_0$ *и при всех* $\delta > \delta_0 \geqslant n/2$ (s_0 *и* δ_0 *зависят только от* f);

3) f *обладает спектральной функцией* g *из* $\mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$.

При этом непрерывны операции $f \to f_\delta \to g_\delta \to g \to f$.

Доказательство. 1) $\to$ 2). Пусть $f \in H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$. Из леммы (при $M(\varepsilon) = \|f\|_a^{(\alpha,\beta)}$) следует, что при $\delta > \alpha + n/2$ $f(z)$ представима в виде (2.7), причем функция $f_\delta \in H_a^{(s)}(C)$, $s < -\beta - n(\delta-1/2)$, и удовлетворяет оценке

$$\|f_\delta\|_a^{(s)} \leqslant K \|f\|_a^{(\alpha,\beta)} \inf_{\sigma \in \operatorname{pr} C} [1+\Delta^{-\beta-n(\delta-1/2)}(\sigma)]. \tag{2.8}$$

Оценка (2.8) и означает, что операция $f \to f_\delta$ непрерывна из $H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$ в $H_a^{(s)}(C)$.

2) $\to$ 3). Пусть $f(z)$ представима в виде (2.7). Считая $\delta > \delta_0 \geqslant n/2$ целым и пользуясь теоремой § 10.5 и свойством б) § 9.2, заключаем, что спектральная функция g функции f представима в виде

$$g(\xi) = l^\delta(-iD) g_\delta(\xi), \quad g_\delta \in \mathscr{L}_s^2(C^*+\bar{U}_a), \tag{2.9}$$

т. е. $g \in \mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$.

3) $\to$ 1). Пусть $f = L[g]$, где $g \in \mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$. Тогда $f(z)$ — голоморфная функция в $T^{\operatorname{int} C^{**}} = T^C$ и представляется в виде (см. § 9.1)

$$f(z) = (g(\xi), \eta(\xi) e^{i(z,\xi)}), \quad z \in T^C,$$

где $\eta \in C^\infty$; $\eta(\xi) = 1$, $\xi \in (C^*+\bar{U}_a)^{\varepsilon/2}$, $\eta(\xi) = 0$, $\xi \,\bar{\in}\, (C^*+\bar{U}_a)^\varepsilon$; $|D^\alpha \eta(\xi)| \leqslant c_\alpha(\varepsilon)$; ε — любое, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Так как $g \in \mathscr{S}'$, то по теореме Л. Шварца (см. § 5.2) она имеет конечный порядок m; далее, по доказанному в § 9.1, $\eta(\xi) e^{i(z,\xi)} \in \mathscr{S}$ при всех $z \in T^C$. Поэтому при всех $z \in T^C$ справедливы следующие оценки:

$$|f(z)| \leqslant \|g\|_{-m} \|\eta(\xi) e^{i(z,\xi)}\|_m =$$
$$= \|g\|_{-m} \sup_{\xi,\, |\alpha| \leqslant m} (1+|\xi|^2)^{m/2} |D^\alpha [\eta(\xi) e^{i(z,\xi)}]| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|_{-m} \sup_{\xi,\, |\alpha| \leqslant m} (1+|\xi|^2)^{m/2} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\beta}{\alpha} e^{-(y,\xi)} |z^\beta| |D^{\alpha-\beta}\eta(\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant K_m'(\varepsilon) \|g\|_{-m} (1+|z|^2)^{m/2} \sup_{\xi \in (C^*+\bar{U}_a)^\varepsilon} (1+|\xi|^2)^{m/2} e^{-(y,\xi)} \leqslant$$
$$\leqslant K_m'(\varepsilon) \|g\|_{-m} (1+|z|^2)^{m/2} \times$$
$$\times \sup_{\xi_1 \in C^*,\, |\xi_2| \leqslant a+\varepsilon} (1+|\xi_1+\xi_2|^2)^{m/2} e^{-(y,\xi_1)-(y,\xi_2)} \leqslant$$
$$\leqslant K_m''(\varepsilon) \|g\|_{-m} e^{(a+\varepsilon)|y|} (1+|z|^2)^{m/2} \sup_{\xi_1 \in C^*} (1+|\xi_1|^2)^{m/2} e^{-(y,\xi_1)} \leqslant$$
$$\leqslant K_m''(\varepsilon) \|g\|_{-m} e^{(a+\varepsilon)|y|} (1+|z|^2)^{m/2} \sup_{\rho \geqslant 0} (1+\rho^2)^{m/2} e^{-\Delta(y)\rho} \leqslant$$
$$\leqslant K_m''(\varepsilon) \|g\|_{-m} e^{(a+\varepsilon)|y|} (1+|z|^2)^{m/2} \sup_{t \geqslant 0} \left[1+\frac{t^2}{\Delta^2(y)}\right]^{m/2} e^{-t},$$

т. е.

$$|f(z)| \leqslant K_m(\varepsilon)\|g\|_{-m} e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|z|^2)^{m/2}[1+\Delta^{-m}(y)], \quad z \in T^C.$$

Таким образом, функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы с $\alpha=\beta=m$ и $M(\varepsilon)=K_m(\varepsilon)\|g\|_{-m}$. В таком случае при $\delta > m+n/2$ она представима в виде (2.7), где $f_\delta \in H_a^{(s)}(C)$ при $s < -m-n(\delta-1/2) < 0$, и удовлетворяет оценке

$$\|f_\delta\|_a^{(s)} \leqslant K'_{s,\delta}\|g\|_{-m} \inf_{0<\varepsilon\leqslant 1} K_m(\varepsilon) \inf_{\sigma\in \operatorname{pr} C}[1+\Delta^{-m-n(\delta-1/2)}(\sigma)] = \\ = K_{s,\delta}\|g\|_{-m}. \quad (2.10)$$

По теореме § 10.5 функция $f_\delta(z)$ есть преобразование Лапласа функции g_δ из $\mathscr{L}_s^2(C^*+\bar{U}_a)$,

$$f_\delta(z) = \int_{C^*+U_a} g_\delta(\xi) e^{i(z,\xi)}\,d\xi, \quad z \in T^C, \quad (2.11)$$

удовлетворяющей в силу (2.10) неравенству

$$\|g_\delta\|_{(s)} = \|f\|_a^{(s)} \leqslant K_{s,\delta}\|g\|_{-m}. \quad (2.12)$$

Применяя к интегралу (2.11) неравенство Коши — Буняковского и пользуясь определением нормы в пространстве $\mathscr{L}_s^2$, при всех $z\in T^C$ будем иметь

$$|f_\delta(z)| \leqslant \int_{C^*+U_a} |g_\delta(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2} e^{-(y,\xi)}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,d\xi \leqslant \\ \leqslant \|g_\delta\|_{(s)}\left[\int_{C^*+U_a}(1+|\xi|^2)^{-s} e^{-2(y,\xi)}\,d\xi\right]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Прежде чем продолжать оценку (2.13), отметим неравенство

$$-(y,\xi) \leqslant -\Delta(y)(|\xi|-a)\theta(|\xi|-a)+a|y|, \\ y\in C, \quad \xi \in C^*+\bar{U}_a. \quad (2.14)$$

Действительно, если $\xi=\xi_1+\xi_2$, $\xi_1\in C^*$, $|\xi_2|\leqslant a$, то

$$-(y,\xi) = -(y,\xi_1)-(y,\xi_2) \leqslant -\Delta(y)|\xi_1|+a|y| \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} a|y|, & \text{если } |\xi|<a, \\ \Delta(y)(|\xi|-a)+a|y|, & \text{если } |\xi|\geqslant a. \end{cases}$$

Учитывая неравенство (2.14), продолжим оценку (2.13):

$$|f_\delta(z)|^2 \leqslant \\ \leqslant \|g_\delta\|_{(s)}^2 \int_{C^*+U_a}(1+|\xi|^2)^{-s} e^{-2\Delta(y)(|\xi|-a)\theta(|\xi|-a)+2a|y|}\,d\xi \leqslant \\ \leqslant \|g_\delta\|_{(s)}^2 e^{2a|y|}\left[\int_{|\xi|<a}(1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi + \right. \\ \left. + \int_{|\xi|>a}(1+|\xi|^2)^{-s} e^{-2\Delta(y)(|\xi|-a)}\,d\xi\right] = \\ = \|g_\delta\|_{(s)}^2 e^{2a|y|}\left\{M'_s(a)+\sigma_n\int_0^\infty[1+(r+a)^2]^{-s}(r+a)^{n-1}e^{-2\Delta(y)r}\,dr\right\} = \\ = \|g_\delta\|_{(s)}^2 e^{2a|y|}\left\{M'_s(a)+\sigma_n\int_0^\infty\left[1+\left(\frac{u}{\Delta(y)}+a\right)^2\right]^{-s}\times\right. \\ \left.\times\left(\frac{u}{\Delta(y)}+a\right)^{n-1}e^{-2u}\frac{du}{\Delta(y)}\right\},$$

т. е. при некотором $M_s(a)$

$$|f_\delta(z)| \leqslant M_s(a)\|g_\delta\|_{(s)} e^{a|y|}[1+\Delta^{s-n/2}(y)], \quad z\in T^C.$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (2.12), из представления (2.7) получаем

$$|f(z)| = |l^\delta(z)||f_\delta(z)| \leqslant M_s(a)|z|^{n\delta}\|g_\delta\|_{(s)} e^{a|y|}[1+\Delta^{s-n/2}(y)] \leqslant \\ \leqslant M_s(a)K_{s,\delta}\|g\|_{-m} e^{a|y|}(1+|z|^2)^{\frac{n\delta}{2}}[1+\Delta^{s-n/2}(y)], \quad z\in T^C,$$

так что $f\in H_a^{(n\delta,\, s-n/2)}(C)$ и операция $g\to f$ непрерывна из $\mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$ в $H_a(C)$.

Осталось заметить, что операция $f_\delta \to g_\delta$ непрерывна из $H_a^0(C)$ в $S'_0(C^*+\bar{U}_a)$ (по теореме § 10.5), а операция $g_\delta\to g$ непрерывна из $S'_0(C^*+\bar{U}_a)$ в $\mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$, в силу (2.9). Теорема доказана.

Следствие 1. *Алгебры $H_+(C)$ и $\mathscr{S}'(C^*+)$, а также их подалгебры $H(C)$ и $\mathscr{S}'(C^*)$ изоморфны, и этот изоморфизм осуществляется преобразованием Лапласа.*

Следствие 2. *Для того чтобы $g\in\mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого допустимого полинома для конуса C и для любого целого числа $\delta\geqslant\delta_0(g)$ она представлялась в виде*

$$g(\xi) = l^\delta(-iD)g_\delta(\xi), \quad g_\delta\in S'_0(C^*+\bar{U}_a), \quad (2.15)$$

причем операция $g\to g_\delta$ непрерывна из $\mathscr{S}'(C^*+\bar{U}_a)$ в $S'_0(C^*+\bar{U}_a)$.

Следствие 3. *Операция $f \to D^\alpha f$ непрерывна в $H_a(C)$.*
Это следует из непрерывности операций

$$f \to g \to (i\xi)^\alpha g \to D^\alpha f,$$

Замечание. Эти результаты другим методом были доказаны В. С. Владимировым [4].

Следствие 4. *Всякая функция $f(z)$ из $H_+(C)$ имеет (единственное) граничное значение $f_+(x)$ при $y \to 0$ $y \in C$ в $\mathcal{S}'$, равное $F[g] = f_+$, причем операция $f \to f_+$ непрерывна из $H_+(C)$ в $\mathcal{S}'$.*

Замечание. Теорема о существовании в $\mathcal{S}'$ граничных значений у функций из алгебры $H(C)$ была доказана В. С. Владимировым [8, 5] и Х. Г. Тильманом [1]. Приведенное здесь доказательство содержится в работе В. С. Владимирова [6]. Более общие концепции граничных значений голоморфных функций рассматривались в работах Г. Кёте [1] ($\mathcal{D}'$), М. Сато [1] (гиперфункции), Х. Коматсу [1] (ультрараспределения) и А. Мартино [1].

3. Теорема Пейли — Винера — Шварца и ее обобщения.

Теорема Пейли — Винера — Шварца. *Для того чтобы функция $f(z)$ была целой и удовлетворяла условию роста: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что*

$$|f(z)| \leqslant M(\varepsilon)\, e^{(a+\varepsilon)|y|}(1+|z|^2)^{\alpha/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{3.1}$$

при некоторых $a \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 0$ (зависящих от f), необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция g принадлежала $\mathcal{E}'(\bar{U}_a)$. При этом $f(z)$ удовлетворяет условию роста

$$|f(z)| \leqslant M e^{a|y|}(1+|z|^2)^{\alpha'/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{3.2}$$

при некоторых M и $\alpha' \geqslant \alpha$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию роста (3.1). Тогда по теореме § 12.2 $f(z)$ есть преобразование Лапласа обобщенной функции g из $\mathcal{S}'(C^* + \bar{U}_a)$ для любого выпуклого острого конуса C. Следовательно,

$$\operatorname{supp} g \subset \bigcap_C (C^* + \bar{U}_a) = \bar{U}_a,$$

так что $g \in \mathcal{E}'(\bar{U}_a)$.

Достаточность. Пусть $f(z)$ есть преобразование Лапласа обобщенной функции g из $\mathcal{E}'(\bar{U}_a)$. Покроем $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ конечным числом выпуклых острых открытых конусов C_j, $j = 1, \ldots, N$. Тогда $g \in \mathcal{S}'(C_j^* + \bar{U}_a)$, $j = 1, \ldots, N$. По теореме § 12.2 в каждой области T^{C_j} $f(z)$ удовлетворяет оценке типа (3.2),

$$|f(z)| \leqslant M_j e^{a|y|}(1+|z|^2)^{\alpha_j/2}, \quad z \in T^{C_j}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{3.3}$$

Обозначая $M = \max\limits_j M_j$ и $\alpha' = \max\limits_j \alpha_j$, из (3.3) получим оценку (3.2) в $\mathbb{C}^n$. Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы функция $f(z)$ была целой и удовлетворяла условию роста*

$$|f(z)| \leqslant K_N e^{a|y|}(1+|z|^2)^{-N}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{3.4}$$

при всех $N \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция φ принадлежала $\mathcal{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \bar{U}_a$. При этом

$$K_N = \int\limits_{|\xi|<a} |(1-\Delta)^N \varphi(\xi)|\, d\xi. \tag{3.5}$$

Вытекает из теоремы Пейли — Винера — Шварца и из оценки

$$|L[\varphi](z)| = (1+|z|^2)^{-N} \left| \int\limits_{|\xi|<a} e^{i(z,\xi)}(1-\Delta)^N \varphi(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+|z|^2)^{-N} e^{a|y|} \int\limits_{|\xi|<a} |(1-\Delta)^N \varphi(\xi)|\, d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \bar{U}_a,$$

N — целое $\geqslant 0$.

4. Пространство $H_a(C)$ — проективный предел пространств $H_{a'}(C')$. Пусть C' — выпуклый открытый конус, компактный в конусе C, и $a' > a \geqslant 0$. Обозначим через $\Delta'(y)$ расстояние от точки y до границы конуса C'. Тогда $\Delta'(y) < \Delta(y)$, $y \in C'$, и поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{z \in T^{C'}} e^{-(a+\varepsilon)|y|} \frac{|f(z)|}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}[1+\Delta'^{-\beta}(y)]} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z \in T^C} e^{-a|y|} \frac{|f(z)|}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}[1+\Delta^{-\beta}(y)]},$$

т. е. (норма $\|\ \|'$ соответствует конусу C')

$$\|f\|'^{(\alpha,\beta)}_{a+\varepsilon} \leqslant \|f\|^{(\alpha,\beta)}_a, \tag{4.1}$$

откуда заключаем, что

$$H_a(C) \subset H_{a'}(C'), \tag{4.2}$$

причем это вложение непрерывно.

Введем пересечение пространств

$$\bigcap_{C' \Subset C,\ a' > a} H_{a'}(C')$$

со сходимостью $f_k \to 0$, $k \to \infty$, если $f_k \to 0$, $k \to \infty$ в каждом из пространств $H_{a'}(C')$. Другими словами, снабдим это пересечение топологией проективного предела (пересечения) убывающей последовательности пространств $H_{a'}(C')$, $a' \to a+0$, $C' \to C$, $C' \Subset C$. *Имеет место равенство*

$$H_a(C) = \bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} H_{a'}(C'), \tag{4.3}$$

справедливое вместе с соответствующей топологией.

Действительно, справедливость вложения

$$H_a(C) \subset \bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} H_{a'}(C') \tag{4.4}$$

в силу (4.2) уже доказана. Докажем обратное вложение

$$\bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} H_{a'}(C') \subset H_a(C). \tag{4.5}$$

Пусть $f \in H_{a'}(C')$ при всех $C' \Subset C$ и $a' > a$. По теореме § 12.2 $f = L[g]$, где $g \in \mathscr{S}'(C'^* + \bar{U}_{a'})$. Замечая, что

$$\bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} (C'^* + \bar{U}_{a'}) = C^* + \bar{U}_a,$$

заключаем, что $g \in \mathscr{S}'(C^* + \bar{U}_a)$ и, следовательно, $f(z) \in H_a(C)$. Далее, операция $f \to g$ непрерывна из $H_{a'}(C')$ в $\mathscr{S}'(C'^* + \bar{U}_{a'})$. Но

$$\bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} \mathscr{S}'(C'^* + \bar{U}_{a'}) = \mathscr{S}'(C^* + \bar{U}_a)$$

и это равенство непрерывно в обе стороны. Наконец, операция $g \to f$ непрерывна из $\mathscr{S}'(C^* + U_a)$ в $H_a(C)$. Это и значит, что вложение $f \to f$ непрерывно из $\bigcap_{C' \Subset C,\ a'>a} H_{a'}(C')$ в $H_a(C)$. Вложение (4.5) вместе с вложением (4.4) и дает равенство (4.3), что и требовалось.

Равенство (4.3) дает другое определение функциям класса $H_a(C)$, удобное для приложений.

Для того чтобы функция $f(z)$, голоморфная в T^C, принадлежала $H_a(C)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых конуса $C' \Subset C$ и числа $\varepsilon > 0$ существовали числа $\alpha' \geqslant 0$, $\beta' \geqslant 0$ и $M' > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leqslant M' e^{(a+\varepsilon)|y|} \frac{(1+|z|^2)^{\alpha'/2}}{|y|^{\beta'}}, \qquad z \in T^{C'}. \tag{4.6}$$

Действительно, если $f \in H_a(C)$, то $f \in H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$ при некоторых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, так что f удовлетворяет неравенству (1.1). Пусть $C' \Subset C$. По лемме 1 § 4.4 существует такое число $\varkappa > 0$, что

$$\Delta(y) = \inf_{\sigma \in \operatorname{pr} C^*} (\sigma, y) \geqslant \varkappa |y|, \qquad y \in C'.$$

Отсюда и из неравенства (1.1) следует неравенство (4.6) при $\varepsilon = 0$, $\beta' = \beta$ и некоторых $\alpha' \geqslant \alpha$ и $M'(C') \geqslant M$.

Обратно, если $f(z)$ голоморфна в T^C и при любых $C' \Subset C$ и $\varepsilon > 0$ удовлетворяет оценке (4.6), то, учитывая, что $\Delta'(y) \leqslant |y|$, где $\Delta'(y)$ — расстояние от y до $\partial C'$, получим $f \in H_{a+\varepsilon}(C')$. Отсюда, в силу (4.3), следует, что $f \in H_a(C)$.

5. Представления Шварца. Пусть острый (выпуклый открытый) конус C таков, что его ядро Коши $\mathscr{K}_C(z)$ есть делитель единицы в алгебре $H(C)$, т. е. $\frac{1}{\mathscr{K}_C(z)} \in H(C)$. Такие конусы C назовем *регулярными* *). Например, конусы $\mathbb{R}_+^n$ и V^+ регулярны (см. ниже, § 13.5).

Ядром Шварца области T^C, где C — регулярный конус, относительно точки $z^0 = x^0 + iy^0 \in T^C$ называется функция

$$\mathscr{S}_C(z; z^0) = \frac{2\mathscr{K}_C(z)\,\mathscr{K}_C(-\bar{z}^0)}{(2\pi)^n \mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)} - \mathscr{P}_C(x^0, y^0), \qquad z \in T^C. \tag{5.1}$$

Отметим некоторые свойства ядра Шварца.

а) $$\mathscr{S}_C(z; z) = \mathscr{P}_C(x, y), \qquad z \in T^C. \tag{5.2}$$

Вытекает из (5.1) при $z^0 = z$, из определения ядра Пуассона (1.1) § 11 и свойства (2.3) § 10 ядра Коши.

б) $$\int \mathscr{S}_C(z - x'; z^0 - x')\, dx' = 1, \qquad z \in T^C, \quad z^0 \in T^C. \tag{5.3}$$

Вытекает из равенства Парсеваля, примененному к равенству (2.1) § 10,

$$\int \mathscr{K}_C(z-x')\,\mathscr{K}_C(-\bar{z}^0+x')\,dx' = \int \mathscr{K}_C(z-x')\,\overline{\mathscr{K}_C(z^0-x')}\,dx' =$$
$$= (2\pi)^n \int_{C^*} e^{i(z-\bar{z}^0,\,\xi)}\,d\xi = (2\pi)^n \mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0),$$

и из свойства (1.5) § 11 ядра Пуассона.

в) $$|\mathscr{S}_C(z; z^0)| \leqslant \frac{\mathscr{K}_C(2iy)}{|\mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)|}\,\mathscr{P}_C(x, y) + \left[\frac{\mathscr{K}_C(2iy^0)}{|\mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)|} + 1\right]\mathscr{P}_C(x^0, y^0), \qquad z \in T^C, \quad z^0 \in T^C. \tag{5.4}$$

Вытекает из определений ядер Шварца и Пуассона и из оценки $2|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$.

*) По-видимому все острые конусы регулярные; для однородных конусов положительности доказано, что $\mathscr{K}_C(z) \neq 0$, $z \in T^C$ (Ротхаус [1]).

Пример 1 (см. (2.16) § 10 и (1.2) § 11).

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n_+}(z; z^0) = \mathcal{P}_n(z; z^0) = \\ = \frac{2i^n}{(2\pi)^n}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\bar{z}_1^0}\right) \cdots \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\bar{z}_n^0}\right) - \mathcal{P}_n(x^0, y^0).$$

В частности, при $n = 1$, $C = (0, \infty)$

$$\mathcal{P}_1(z; z^0) = \frac{i}{\pi}\left(\frac{1}{z} - \frac{x^0}{|z^0|^2}\right), \quad \operatorname{Re}\mathcal{P}_1(z; z^0) = \mathcal{P}_1(x, y).$$

Пример 2 (см. (2.17) § 10 и (1.3) § 11).

$$\mathcal{P}_{V^+}(z; z^0) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)[-(z - \bar{z}^0)^2]^{\frac{n+1}{2}}}{\pi^{\frac{n+3}{2}}(-z^2)^{\frac{n+1}{2}}[-(\bar{z}^0)^2]^{\frac{n+1}{2}}} - \mathcal{P}_{V^+}(x^0, y^0).$$

Пусть граничное значение $f_+(x)$ функции $f(z)$ класса $H(C)$ (см. § 12.2) удовлетворяет условию

$$f_+(x)\mathcal{K}_C(x - \bar{z}^0) \in \mathcal{H}_s \tag{5.5}$$

при некотором s и при всех $z^0 \in T^C$. Тогда обобщенная функция (5.5) есть граничное значение в $\mathcal{S}'$ функции $f(z)\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0)$ класса $H(C)$, и поэтому носитель ее обратного преобразования Фурье содержится в конусе C^*. По теореме II § 10.6 функция $f(z)\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0)$ принадлежит классу $H^{(s)}(C)$ и ее граничное значение в $\mathcal{H}_s$ равно $f_+(x)\mathcal{K}_C(x - \bar{z}^0)$, поскольку $\mathcal{K}_C(x + iy) \in \theta_M$ при всех $y \in C$ (см. §§ 5.3 и 10.2, оценка (2.4)). Применяя теорему I § 10.6 к функции $f(z)\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0)$, получим равенство

$$f(z)\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(f_+(x')\mathcal{K}_C(x' - \bar{z}^0),\ \mathcal{K}_C(z - x')\right), \quad z \in T^C, \quad z^0 \in T^C. \tag{5.6}$$

Полагая в (5.6) $z^0 = z$ и принимая во внимание равенство (5.2) для функции $f(z)$ выводим обобщенное представление Пуассона

$$f(z) = \left(f_+(x'), \mathcal{P}_C(x - x', y)\right), \quad z \in T^C. \tag{5.7}$$

Далее, меняя ролями z и z^0 в формуле (5.6), получим равенство

$$f(z^0)\mathcal{K}_C(z^0 - \bar{z}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(f_+(x')\mathcal{K}_C(x' - \bar{z}), \mathcal{K}_C(z^0 - x')\right),$$

откуда, переходя к комплексному сопряжению, выводим

$$\bar{f}(z^0)\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\bar{f}_+(x')\mathcal{K}_C(z - x'), \mathcal{K}_C(x' - \bar{z}^0)\right). \tag{5.8}$$

Вычитая из равенства (5.6) равенство (5.8), имеем соотношение

$$\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0)[f(z) - \bar{f}(z^0)] = \\ = \frac{2i}{(2\pi)^n}\left(\operatorname{Im} f_+(x'),\ \mathcal{K}_C(z - x')\mathcal{K}_C(x' - \bar{z}^0)\right), \quad z \in T^C, \quad z^0 \in T^C. \tag{5.9}$$

Пусть C — регулярный конус, так что $\mathcal{K}_C(z) \neq 0$, $z \in T^C$. Разделим равенство (5.9) на $\mathcal{K}_C(z - \bar{z}^0)$ и заменим в (5.9) $\operatorname{Im} f(z^0)$ в соответствии с формулой (5.7)

$$\operatorname{Im} f(z^0) = \left(\operatorname{Im} f_+(x'), \mathcal{P}_C(x^0 - x', y^0)\right), \quad z^0 \in T^C. \tag{5.10}$$

В результате получим представление

$$f(z) = i\Big(\operatorname{Im} f_+(x'), \frac{2}{(2\pi^n)}\mathcal{K}_C(z - x')\mathcal{K}_C(x' - \bar{z}^0) - \\ - \mathcal{P}_C(x^0 - x', y^0)\Big) + \operatorname{Re} f(z^0)$$

или, пользуясь определением (5.1) ядра Шварца,

$$f(z) = i\left(\operatorname{Im} f_+(x'), \mathcal{S}_C(z - x'; z^0 - x')\right) + \operatorname{Re} f(z^0), \tag{5.11}$$
$$z \in T^C, \quad z^0 \in T^C.$$

Формула (5.11) называется *обобщенным представлением Шварца.*

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Если C — острый конус, то всякая функция $f(z)$ класса $H(C)$, удовлетворяющая условию* (5.5), *представима через ее граничное значение f_+ интегралом Пуассона* (5.7), *а также представима через мнимую часть ее граничного значения формулой* (5.9). *Если к тому же конус C регулярный, то для всякой такой функции $f(z)$ справедливо обобщенное представление Шварца* (5.11).

6. Одно обобщение теоремы Фрагмена — Линделёфа. Теоремой Фрагмена — Линделёфа в теории голоморфных функций называется всякое обобщение принципа максимума на случай неограниченных областей или на более общие, чем непрерывные, граничные значения. Здесь мы дадим одно такое обобщение принципа максимума, которое будет использовано ниже в § 20.1.

Теорема. *Если граничное значение $f_+(x)$ функции $f(z)$ класса $H(C)$, где C — острый конус, ограничено: $|f_+(x)| \leqslant M$, $x \in \mathbb{R}^n$, то и $|f(z)| \leqslant M$, $z \in T^C$; более того, для $f(z)$ имеет место обобщенное представление Пуассона*

$$f(z) = \int \mathcal{P}_C(x - x', y) f_+(x')\,dx', \quad z \in T^C. \tag{6.1}$$

Замечание. При $n = 1$ эта теорема доказана Р. Неванлинной [1].

Доказательство. Так как $\mathcal{K}_C(x + iy) \in \mathcal{L}^2$ при всех $y \in C$ (см. § 10.2), то $f_+(x)\mathcal{K}_C(x - \bar{z}^0) \in \mathcal{L}^2$ при всех $z^0 \in T^C$

и, стало быть, условие (5.5) выполнено при $s=0$. По теореме § 12.5 для функции $f(z)$ справедливо представление Пуассона (6.1), из которого и из свойства (1.5) § 11.1 ядра $\mathscr{P}_C$ следует оценка

$$|f(z)| \leqslant M \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\, dx' = M, \qquad z \in T^C.$$

Теорема доказана.

§ 13. Уравнения в сверточных алгебрах

Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в 0). Тогда множества обобщенных функций медленного роста $\mathscr{S}'(\Gamma+)$ и $\mathscr{S}'(\Gamma)$ образуют сверточные алгебры ($\mathscr{S}'(\Gamma)$ — подалгебра $\mathscr{S}'(\Gamma+)$) (см. § 5.6, б)), изоморфные алгебрам голоморфных функций $H_+(C)$ и $H(C)$ соответственно, где $C = \operatorname{int}\Gamma^*$, причем изоморфизм реализуется операцией преобразования Лапласа (см. § 12.2).

1. Делители единицы в алгебрах $H_+(C)$ и $H(C)$. Как было показано в § 4.8, г), разрешимость уравнения

$$a * u = f, \quad a \quad \text{и} \quad f \in \mathscr{S}'(\Gamma+)$$

в сверточной алгебре $\mathscr{S}'(\Gamma+)$ сводится к существованию фундаментального решения $\mathscr{E}$ (ядра обратного оператора $a^{-1}*$) у сверточного оператора $a*$,

$$a * \mathscr{E} = \delta \tag{1.1}$$

в той же алгебре $\mathscr{S}'(\Gamma+)$. Уравнение (1.1) эквивалентно алгебраическому уравнению

$$L[a] f = 1 \tag{1.2}$$

в алгебре $H_+(C)$ относительно неизвестной функции $f(z) = L[\mathscr{E}]$. Поэтому вопрос о существовании фундаментального решения оператора $a*$ в алгебре $\mathscr{S}'(\Gamma+)$ сводится к вопросу о возможности деления единицы на функцию $f_0(z) = L(a)$ в алгебре $H_+(C)$. Другими словами, вопрос сводится к изучению *делителей единицы* в алгебре $H_+(C)$: если $f \in H_+(C)$, спрашивается, при каких условиях $\frac{1}{f} \in H_+(C)$?

Необходимое условие для этого $f(z) \neq 0$, $z \in T^C$, не является достаточным, как показывает следующий простой пример: $f(z) = e^{-i/z} \in H(0, \infty)$, так как $|f(z)| = e^{-y/|z|^2} \leqslant 1$; однако $\frac{1}{f} \,\overline{\in}\, H_+(0, \infty)$, так как

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| = e^{\frac{y}{|z|^2}} > e^{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)}.$$

Сперва заметим, что изучение делителей единицы в алгебре $H_+(C)$ сводится к изучению делителей единицы в ее подалгебре — алгебре $H(C)$. Действительно, всякая функция $f(z)$ из $H_+(C)$ (т. е. $f \in H_a^{(\alpha,\beta)}(C)$ при некоторых $a \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$) представима в виде

$$f(z) = e^{-i(z, e)} f_e(z), \qquad f_e \in H(C), \tag{1.3}$$

где e — произвольная точка из $\operatorname{int}\Gamma$ такая, что $(y, e) \geqslant a|y|$ при всех $y \in C$ (по лемме 1 § 4.4 такие точки существуют). Действительно,

$$|f_e(z)| = |e^{i(z, e)} f(z)| \leqslant \|f\|_a^{(\alpha,\beta)} (1+|z|^2)^{\alpha} [1 + \Delta^{-\beta}(y)], \quad z \in T^C,$$

так что $f_e \in H^{(\alpha,\beta)}(C)$.

Из результатов § 12.4 следует

Теорема. *Для того чтобы $f \in H(C)$ была делителем единицы в алгебре $H(C)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых конуса $C' \Subset C$ и числа $\varepsilon > 0$ существовали числа $\alpha' \geqslant 0$, $\beta' \geqslant 0$ и $M' > 0$ такие, что*

$$|f(z)| \geqslant M' e^{-\varepsilon|y|} (1+|z|^2)^{-\alpha'/2} |y|^{\beta'}, \quad z \in T^{C'}. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) — трудно проверяемое. Укажем несколько достаточных признаков делимости единицы в алгебре $H(C)$, вытекающих из доказанной теоремы.

2. О делении на полином в алгебре $H(C)$.

Теорема. *Пусть $P(z) \not\equiv 0$ — полином, функция $f(z)$ голоморфна в T^C и $Pf \in H(C)$. Тогда $f \in H(C)$ и операция $f \to Pf$ имеет непрерывную обратную в $H(C)$.*

Следствие. *Если полином $P(z)$ не обращается в нуль в T^C, то $\frac{1}{P} \in H(C)$.*

Действительно, в этом случае $\frac{1}{P(z)}$ — голоморфная функция в T^C и $P\frac{1}{P} = 1 \in H(C)$.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим результатом Хёрмандера (см. неравенство (2.3) § 14 при $p=0$): *Для данного полинома $P(z) \not\equiv 0$ найдутся числа $m \geqslant 0$ — целое и $K > 0$ такие, что для любой $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^{2n})$ справедливо*

$$|\varphi(x, y)| \leqslant K \sup_{\substack{(x, y) \\ |\gamma| \leqslant m}} (1+|z|^2)^{m/2} |D^{\gamma}_{(x, y)} [P(z)\varphi(x, y)]|. \tag{2.1}$$

По условию $Pf \in H(C)$. По следствию 3 (см. § 12.2) $D^{\gamma}(Pf) \in H(C)$. Поэтому найдутся такие числа $\alpha_0 \geqslant 0$ и $\beta_0 \geqslant 1$, что $D^{\gamma}(Pf) \in H^{(\alpha,\beta)}(C)$, $|\gamma| \leqslant m$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$ (β — четное).

Пусть C' — открытый выпуклый корпус, $C' \Subset C$. Тогда найдется (открытый выпуклый) конус C'' такой, что $C' \Subset C'' \Subset C$.

Построим функцию $\eta(\sigma)$ класса $C^\infty(S_1)$, равную 1 на $\operatorname{pr} C'$ и равную 0 вне $\operatorname{pr} C''$. (Из леммы § 1.2 вытекает, что такие функции существуют.) Полагая в неравенстве (2.1)

$$\varphi(x, y) = \frac{f(z)\,\eta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^m}{(1+|z|^2)^{m+\alpha/2}(1+|y|^{-\beta})} \in C^m(\mathbb{R}^{2n}),$$

при всех $z \in T^{C'}$ получим

$$\frac{|f(z)|\,|y|^m}{(1+|z|^2)^{m+\alpha/2}(1+|y|^{-\beta})} \leqslant$$

$$\leqslant K \sup_{\substack{(x,y)\\ |\gamma|\leqslant m}} (1+|z|^2)^{m/2} \left| D^\gamma_{(x,y)} \left[\frac{P(z)\,f(z)\,\eta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{\beta+m}}{(1+|z|^2)^{m+\alpha/2}(1+|y|^\beta)} \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1(C') \sup_{\substack{(x,y)\in T^{C''}\\ |\gamma|\leqslant m}} \frac{(|y|^\beta + |y|^{\beta+m})\,|D^\gamma[P(z)\,f(z)]|}{(1+|z|^2)^{\frac{m+\alpha}{2}}(1+|y|^\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant K_2(C') \sup_{\substack{(x,y)\in T^{C''}\\ |\gamma|\leqslant m}} \frac{|D^\gamma[P(z)\,f(z)]|}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}(1+|y|^{-\beta})}.$$

Учитывая теперь, что

$$\Delta'(y) \leqslant |y|, \quad y \leqslant C'; \quad \Delta(y) \geqslant \sigma|y|, \quad y \in C'', \tag{2.2}$$

где $\Delta(y)$ и $\Delta'(y)$ — расстояния от точки y до ∂C и $\partial C'$ соответственно, продолжим наши оценки

$$\frac{|f(z)|}{(1+|z|^2)^{m+\alpha/2}[1+(\Delta')^{-\beta-m}(y)]} \leqslant$$

$$\leqslant K_3(C') \sup_{\substack{(x,y)\in T^C\\ |\gamma|\leqslant m}} \left| \frac{D^\gamma[P(z)\,f(z)]}{(1+|z|^2)^{\alpha/2}[1+\Delta^{-\beta}(y)]} \right|,$$

откуда в силу (2.2) (норма $\|\ \|'$ соответствует конусу C')

$$\|f\|'^{(2m+\alpha,\, m+\beta)} \leqslant K_3(C') \max_{|\gamma|\leqslant m} \|D^\gamma(Pf)\|^{(\alpha,\beta)}. \tag{2.3}$$

Далее, по следствию 3 (см. § 12.2) операция $Pf \to D^\alpha(Pf)$ непрерывна в $H(C)$, так что при некоторых $M_1 > 0$, $\alpha' \geqslant 0$ и $\beta' \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\|D^\gamma(Pf)\|^{(\alpha,\beta)} \leqslant M_1 \|Pf\|^{(\alpha',\beta')}, \quad |\gamma| \leqslant m.$$

Учитывая эти оценки, перепишем неравенство (2.3) в виде

$$\|f\|'^{(2m+\alpha,\, m+\beta)} \leqslant M(C')\, \|Pf\|^{(\alpha',\beta')}. \tag{2.4}$$

Оценка (2.4) показывает (см. § 12.4), что $f \in H(C)$ и операция $f \to Pf$ имеет непрерывную обратную в $H(C)$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема была доказана в работе Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова [1]. Она напоминает теорему Хёрмандера [2] о делении обобщенной функции медленного роста на полином.

3. Оценки для голоморфных функций с неотрицательной мнимой частью в T^C.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в T^C и $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$, $z \in T^C$. Тогда она удовлетворяет оценке: для любого конуса $C' \Subset C$ существует число $M(C')$ такое, что*

$$|f(z)| \leqslant M(C')\, \frac{1+|z|^2}{|y|}, \quad z \in T^{C'}, \tag{3.1}$$

т. е. $f \in H^{(2,1)}(C')$ при всех $C' \Subset C$, так что $f \in H(C)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы $f(z) \not\equiv 0$ в T^C, то $\frac{1}{f} \in H(C)$.*

Докажем следствие. Если $\operatorname{Im} f(z) > 0$ в T^C, то функция $\frac{1}{f(z)}$ голоморфна в T^C и

$$\operatorname{Im} \frac{1}{f(z)} = \frac{-\operatorname{Im} f(z)}{|f|^2} < 0;$$

по теореме $\frac{1}{f} \in H(C)$. Если же $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ обращается в 0 в какой-либо точке области T^C, то, в силу принципа максимума для гармонических функций, $\operatorname{Im} f(z) \equiv 0$ в T^C, так что $f(z) = \text{const} \neq 0$ и потому тривиально $\frac{1}{f} \in H(C)$.

Замечание. Оценка (3.1) получена в работе В. С. Владимирова [7].

Для доказательства теоремы предварительно докажем 3 леммы.

Лемма 1. *Если функция $f(z)$ голоморфна и $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ в единичном поликруге $S^n = [z\colon |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1]$, то*

$$\operatorname{Im} f(0)\, \frac{1 - \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|}{1 + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|} \leqslant$$

$$\leqslant |f(z) - \operatorname{Re} f(0)| \leqslant \operatorname{Im} f(0)\, \frac{1 + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|}{1 - \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|}, \quad z \in S^n; \tag{3.2}$$

в частности,

$$|f(z)| \leqslant \frac{2|f(0)|}{1 - \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|}, \quad z \in S^n. \tag{3.3}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Im} f(z) \equiv 0$, то, как мы видели, $f(z) = \text{const}$ и оценка (3.2) тривиально выполнена. Поэтому можно считать, что $\operatorname{Im} f(z) > 0$, $z \in S^n$. Фиксируем произвольную точку $z \in S^n$ и обозначим $\rho = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|$, так что $0 \leqslant \rho < 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = f\left(\lambda \frac{z}{\rho}\right)$, голоморфную и $\operatorname{Im} \varphi(\lambda) \geqslant 0$ в круге $|\lambda| < 1$. Функция

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda) - \operatorname{Re}\varphi(0) - i \operatorname{Im}\varphi(0)}{\varphi(\lambda) - \operatorname{Re}\varphi(0) + i \operatorname{Im}\varphi(0)}$$

голоморфна и $|\psi(\lambda)| < 1$ в круге $|\lambda| < 1$, причем $\psi(0) = 0$. По лемме Шварца $|\psi(\lambda)| \leqslant |\lambda|$ и поэтому

$$\operatorname{Im}\varphi(0) \frac{1 - |\lambda|}{1 + |\lambda|} \leqslant |\varphi(\lambda) - \operatorname{Re}\varphi(0)| = \left| i \operatorname{Im}\varphi(0) \frac{1 + \psi(\lambda)}{1 - \psi(\lambda)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Im}\varphi(0) \frac{1 + |\lambda|}{1 - |\lambda|}, \quad |\lambda| < 1, \tag{3.4}$$

и, стало быть,

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant |\operatorname{Re}\varphi(0)| + \operatorname{Im}\varphi(0) \frac{1 + |\lambda|}{1 - |\lambda|} \leqslant \frac{2|\varphi(0)|}{1 - |\lambda|}, \quad |\lambda| < 1. \tag{3.5}$$

Полагая в оценках (3.4) и (3.5) $\lambda = \rho < 1$, получим оценки (3.2) и (3.3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функция $f(z)$ гомоморфна и $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ в $T^n = [z\colon y_1 > 0, \ldots, y_n > 0]$, то*

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{2} |f(\boldsymbol{i})| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1 + |z_j|^2}{y_j}, \quad z \in T^{C+}, \tag{3.6}$$

где обозначено $\boldsymbol{i} = (i, i, \ldots, i)$.

Доказательство. Биголоморфное отображение

$$w_j = \frac{z_j - i}{z_j + i}, \quad z_j = i \frac{1 + w_j}{1 - w_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

преобразует трубчатую область T^n на S^n, а функцию $f(z)$ — в функцию

$$\varphi(w) = f\left(i \frac{1 + w_1}{1 - w_1}, \ldots, i \frac{1 + w_n}{1 - w_n}\right),$$

голоморфную и $\operatorname{Im}\varphi(w) \geqslant 0$ в S^n. Применяя к функции $\varphi(w)$ оценку (3.3), получим

$$|\varphi(w)| \leqslant \frac{2|\varphi(0)|}{1 - \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |w_j|}, \quad w \in S^n.$$

Отсюда, переходя к старым переменным, получаем такую оценку:

$$|f(z)| \leqslant \frac{2|f(\boldsymbol{i})|}{1 - \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \frac{z_j - i}{z_j + i} \right|}, \quad z \in T^n. \tag{3.7}$$

Докажем неравенство

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| < 1 - \frac{\sqrt{2} y}{1 + |z|^2}, \quad y > 0. \tag{3.8}$$

Полагая

$$\alpha = \frac{1 + x^2}{y} + y \geqslant 2,$$

приведем неравенство (3.8) к эквивалентному неравенству

$$2\alpha^2 - (\alpha + 2)\left(\sqrt{2}\alpha - 1\right) > 0, \quad \alpha \geqslant 2.$$

Последнее же неравенство действительно имеет место: оно справедливо при $\alpha = 2$, а производная левой части

$$\left(4 - 2\sqrt{2}\right)\alpha + 1 - 2\sqrt{2} > 0, \ \alpha \geqslant 2.$$

Принимая во внимание неравенство (3.8), из неравенства (3.7) получаем неравенство (3.6). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ в T^C, где C — n-гранный острый конус,*

$$C = [y\colon (e_j, y) > 0, \ j = 1, \ldots, n] \quad (|e_j| = 1).$$

Тогда $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{2} \left| f\left(T^{-1}\boldsymbol{i}\right) \right| \frac{1 + |z|^2}{\Delta(y)}, \quad z \in T^C, \tag{3.9}$$

где T — линейное преобразование

$$y \to Ty = [(e_1, y), \ldots, (e_n, y)].$$

Доказательство. Так как конус C не пуст, то векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы и, стало быть, матрица T^{-1} существует. Биголоморфное отображение

$$w = Tz, \quad z = T^{-1}w$$

преобразует область T^C на область T^n, а функцию $f(z)$ в функцию $f\left(T^{-1}w\right)$, голоморфную и $\operatorname{Im} f\left(T^{-1}w\right) \geqslant 0$ в T^n. Применяя к этой функции оценку (3.6), получим

$$\left| f\left(T^{-1}w\right) \right| \leqslant \sqrt{2} \left| f\left(T^{-1}\boldsymbol{i}\right) \right| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1 + |w_j|^2}{\operatorname{Im} w_j}, \quad w \in T^n.$$

Отсюда, переходя к переменным z, выводим оценку

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{2} \left| f\left(T^{-1}\boldsymbol{i}\right) \right| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1 + |(e_j, z)|^2}{(e_j, y)}, \quad z \in T^C,$$

из которой, а также из соотношений

$$|(e_j, z)|^2 \leqslant |e_j|^2 |z|^2 = |z|^2; \qquad \Delta(y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (e_j, y), \qquad y \in C,$$

вытекает неравенство (3.9). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $C' \Subset C$. Покроем конус $\bar{C}'$ конечным числом n-гранных открытых конусов $C_k \Subset C$, $k=1, \ldots, N$, а в каждом конусе C_k выберем конус $C'_k \Subset C_k$ так, чтобы конусы $C'_1, \ldots, C'_N$ все еще покрывали конус C'. В каждой области T^{C_k} справедлива оценка (3.9):

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{2} |f(T_k^{-1} i)| \frac{1+|z|^2}{\Delta_k(y)}, \qquad k=1, \ldots, N, \qquad (3.10)$$

где $\Delta_k(y)$ и T_k имеют тот же смысл для конуса C_k, что и $\Delta(y)$ и T для конуса C. Далее, поскольку $C'_k \Subset C_k$, то существуют такие числа σ_k, что $\Delta_k(y) \geqslant \sigma_k |y|$ при всех $y \in C'_k$ (см. лемму 1 § 4.4). Принимая во внимание это неравенство, из (3.10) получаем оценки

$$|f(z)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k} |f(T_k^{-1} i)| \frac{1+|z|^2}{|y|}, \quad z \in T^{C'_k}, \quad k=1, \ldots, N,$$

откуда и вытекает оценка (3.1) в $T^{C'}$ при

$$M(C') = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_k} |f(T_k^{-1} i)|.$$

Теорема доказана.

4. Делители единицы в алгебре $W(C)$. Обозначим через $\dot{\mathbb{R}}^n$ пополнение $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленной точкой. Обозначим через $W(C)$ банахову алгебру, состоящую из голоморфных в T^C функций, являющихся преобразованиями Лапласа обобщенных функций вида $\lambda\delta(\xi) + g(\xi)$, где λ — произвольное число и g — произвольная функция из $\mathscr{L}^1(C^*)$. (Множество таких обобщенных функций образует сверточную алгебру; см. § 4.1.) Алгебра $W(C)$ называется *винеровской алгеброй*. Таким образом, любой элемент $f \in W(C)$ представляется в виде

$$f(z) = \lambda + \int_{C^*} g(\xi) e^{i(z, \xi)} d\xi,$$

$$\|f\|_{W(C)} = |\lambda| + \int_{C^*} |g(\xi)| d\xi.$$

При этом функция $f(z)$ непрерывна в $\dot{\bar{T}}^C$ — замыкании T^C в $\dot{\mathbb{R}}^{2n}$ — и справедливо неравенство

$$\|f\|^{(0,0)} = \frac{1}{4} \sup_{z \in T^C} |f(z)| \leqslant \frac{1}{4} \|f\|_{W(C)},$$

так что *алгебра $W(C)$ — подалгебра алгебры $H(C)$ и вложение $W(C)$ в $H(C)$ непрерывно.*

Если $f \in W(C)$ и $f(z) \neq 0$ в $T^C \cup \dot{\mathbb{R}}^n$, то $\frac{1}{f} \in W(C)$.

Действительно, в этом случае

$$f^+(x) = \lambda + \int_{C^*} g(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \neq 0, \quad g \in \mathscr{L}^1.$$

По теореме Винера (см. Н. Винер [1])

$$\frac{1}{f^+(x)} = \frac{1}{\lambda} + \int g_1(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \qquad g_1 \in \mathscr{L}^1. \qquad (4.1)$$

Далее, поскольку $f(z) \neq 0$, $z \in T^C \cup \dot{\mathbb{R}}^n$, то при всех $C' \Subset C$

$$\inf_{z \in T^{C'}} |f(z)| > 0.$$

По теореме § 13.1 (при $\alpha' = \beta' = \varepsilon = 0$) $\frac{1}{f} \in H(C)$, так что $\frac{1}{f} = L[g]$, $g \in \mathscr{S}'(C^*)$. Поэтому $\frac{1}{f^+} = F[g]$. Сравнивая это равенство с равенством (4.1), получаем

$$g(\xi) = \frac{1}{\lambda}\delta(\xi) + g_1(\xi),$$

так что $\operatorname{supp} g_1 \subset C^*$ и потому $g_1 \in \mathscr{L}^1(C^*)$. Но тогда, в силу (4.1),

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\lambda} + \int_{C^*} g_1(\xi) e^{i(z, \xi)} d\xi \in W(C).$$

5. Пример. Ядро Коши $\mathscr{K}_{V^+}(z)$ (см. (2.17) § 10) есть делитель единицы в алгебре $H(V^+)$,

$$\frac{1}{\mathscr{K}_{V^+}(z)} = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-z^2)^{\frac{n+1}{2}} \in H(V^+).$$

Это утверждение следует из следствия к теореме § 13.2 и из того факта, что полином

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i(x, y) \neq 0, \qquad z \in T^{V^+}.$$

Действительно, в противном случае мы имели бы

$$x^2 = y^2, \quad x_0 y_0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad y^2 > 0, \quad y_0 > 0,$$

т. е.

$$0 < y^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{y_0^2} - |\boldsymbol{x}|^2 \leqslant \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{y_0^2}(|\boldsymbol{y}|^2 - y_0^2) = -\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{y_0^2} y^2 < 0,$$

что противоречиво.

Таким образом, в алгебре $\mathscr{S}'(\overline{V}^+)$ существует обратный оператор к оператору $\theta_{\overline{V}^+} *$. Более того, можно определить любые вещественные степени $(\theta_{V^+})^\alpha *$ этого сверточного оператора, полагая

$$L[\theta^\alpha_{\overline{V}^+}] = \mathscr{K}^\alpha_{V^+}(z), \quad z \in T^{V^+}. \tag{5.1}$$

Для определенности выбираем ту ветвь голоморфной функции $\mathscr{K}^\alpha_{V^+}(z)$, которая положительна при $z = iy$ (см. (2.2) § 10). Из (5.1) следует, что

$$\theta^\alpha_{\overline{V}^+} * \theta^\beta_{\overline{V}^+} = \theta^{\alpha+\beta}_{\overline{V}^+}, \ \alpha, \ \beta \text{ — любые.} \tag{5.2}$$

Аналогично определяются степени $\Box^\alpha$ оператора Даламбера

$$\Box = \Box\delta * = \frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial\xi_n^2} = \frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2} - \Delta.$$

Имеем

$$L[\Box] = -z^2 = c_n \mathscr{K}^{-\frac{2}{n+1}}_{V^+}(z), \quad c_n = 2^{\frac{2n}{n+1}} \pi^{\frac{n-1}{n+1}} \Gamma^{\frac{2}{n+1}}\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Поэтому, полагая

$$L[\Box^\alpha] = c_n^\alpha \mathscr{K}^{-\frac{2\alpha}{n+1}}_{V^+}(z),$$

получим в силу (5.1)

$$\Box^\alpha = c_n^\alpha \theta^{-\frac{2\alpha}{n+1}}_{\overline{V}^+} *, \quad \Box = c_n \theta^{-\frac{2}{n+1}}_{\overline{V}^+} *. \tag{5.3}$$

В силу (5.2) справедливо соотношение

$$\Box^\alpha \Box^\beta = \Box^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \ \beta \text{ — любые.} \tag{5.4}$$

В частности, при $\alpha = -1$ из (5.3) имеем

$$\Box^{-1} = \frac{1}{c_n} \theta^{\frac{2}{n+1}}_{\overline{V}^+} * = \frac{1}{c_n}\left(\theta^{-\frac{n-1}{n+1}}_{\overline{V}^+} * \theta_{\overline{V}^+}\right) * = \frac{1}{c_n^{\frac{n+1}{2}}} \Box^{\frac{n-1}{2}} \theta_{\overline{V}^+} *,$$

т. е.

$$\mathscr{E}(\xi) = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Box^{\frac{n-1}{2}} \theta_{\overline{V}^+}(\xi). \tag{5.5}$$

Отсюда при $n = 3$ получаем известный результат:

$$\mathscr{E}(\xi) = \frac{1}{8\pi} \Box \theta_{\overline{V}^+}(\xi) \tag{5.6}$$

для фундаментального решения трехмерного волнового оператора.

Замечание 1. Дробные степени оператора $\Box$ иным способом вводились М. Риссом [1].

Замечание 2. Аналогично вводятся дробные и отрицательные степени оператора $\theta_{C^*} *$ в алгебре $H(C)$ для любого регулярного конуса C (см. § 13.5):

$$L[\theta^\alpha_{C^*}] = \mathscr{K}^\alpha_C(z), \quad z \in T^C, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Глава III

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 14. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

Теория обобщенных функций оказала сильное влияние на развитие теории линейных дифференциальных уравнений. Здесь следует в первую очередь отметить фундаментальные работы пятидесятых годов Л. Гординга, Л. Хёрмандера, Б. Мальгранжа, И. М. Гельфанда, Л. Эренпрайса и др., посвященные общей теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных вне зависимости от их типа. Результаты этих исследований подытожены в книге Л. Хёрмандера «Линейные дифференциальные операторы с частными производными» [1], вышедшей в свет в 1963 г. В последние годы большой прогресс был сделан в теории так называемых псевдодифференциальных операторов (обобщение дифференциальных и интегральных (сингулярных) операторов) *).

1. Фундаментальные решения из $\mathcal{D}'$. Один из основных и наиболее глубоких результатов — это доказательство существования фундаментального решения $\mathscr{E}(x)$ из $\mathcal{D}'$ у любого линейного дифференциального оператора $P(D)\not\equiv 0$ с постоянными коэффициентами (см. § 4.8, в)), т. е.

$$P(D)\,\mathscr{E}(x)=\delta(x), \tag{1.1}$$

где

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}{}' a_\alpha D^\alpha, \qquad \sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|\neq 0 \tag{1.2}$$

— дифференциальный оператор m-го порядка.

*) См. «Псевдодифференциальные операторы», Сб. переводов статей Дж. Кона, Л. Ниренберга и Л. Хёрмандера, «Мир», 1967.

Этот результат впервые был получен независимо Б. Мальгранжем [2] (1953 г.) и Л. Эренпрайсом [2] (1954 г.).

Прежде чем доказывать существование фундаментального решения, докажем 2 леммы о полиномах.

Лемма 1. *Если*

$$P(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\xi^\alpha, \qquad \sum_{|\alpha|=m}|a_\alpha|\neq 0,$$

— произвольный полином степени $m\geqslant 1$, то существует неособенное линейное вещественное преобразование координат

$$\xi=C\xi', \quad \det C\neq 0, \quad C=(c_{kl}),$$

преобразующее полином P к виду

$$\tilde P(\xi')=a\xi_1'^m+\sum_{0\leqslant k\leqslant m-1}\tilde P_k(\xi_2',\ldots,\xi_n')\,\xi_1'^k, \qquad a\neq 0.$$

Доказательство. Коэффициент при $\xi_1'^m$ в полиноме $\tilde P(\xi')=P(C\xi')$ равен

$$\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha c_{11}^{\alpha_1}c_{21}^{\alpha_2}\ldots c_{n1}^{\alpha_n}. \tag{1.3}$$

Так как $\sum\limits_{|\alpha|=m}|a_\alpha|\neq 0$, то можно выбрать n вещественных чисел $c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1}$ так, чтобы выражение (1.3) было не равно 0; при этом будет $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|c_{k1}|\neq 0$. Остальные числа c_{kl} выбираем произвольными вещественными так, чтобы $\det C\neq 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$P(\xi)=a\xi_1^m+\sum_{0\leqslant k\leqslant m-1}P_k(\xi_2,\ldots,\xi_n)\,\xi_1^k, \qquad a\neq 0, \tag{1.4}$$

— полином. Тогда существует постоянная $\varkappa$, зависящая лишь от m, такая, что для каждой точки $\xi\in\mathbb{R}^n$ найдется целое число k, $0\leqslant k\leqslant m$, такое, что справедливо неравенство

$$\left|P\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ldots,\xi_n\right)\right|\geqslant a\varkappa, \qquad |\tau|=1. \tag{1.5}$$

Доказательство. Фиксируем $\xi\in\mathbb{R}^n$. Разложим полином $P(z,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ на множители по z:

$$P(z,\xi_2,\ldots,\xi_n)=a(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_m),$$

так что $\lambda_j=\lambda_j(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, и

$$P\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\right)=a\left(\xi_1-\lambda_1+i\tau\frac{k}{m}\right)\ldots\\ \ldots\left(\xi_1-\lambda_m+i\tau\frac{k}{m}\right). \qquad (1.6)$$

Пользуясь принципом «ящичков», заключаем, что среди $m+1$ окружностей $|\tau'|=\frac{j}{m}$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, найдется по крайней мере одна $|\tau|=\frac{k}{m}$, которая отстоит от m точек $\lambda_1-\xi_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \lambda_m-\xi_1$ не меньше чем на $\frac{1}{2m}$ (рис. 29). Отсюда и из (1.6) следует неравенство (1.5) при $\varkappa=\left(\frac{1}{2m}\right)^m$. Лемма 2 доказана.

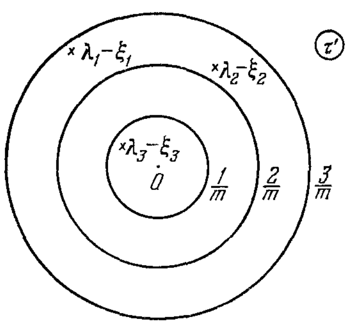

Рис. 29.

Теорема (Мальгранж — Эренпрайс). *Всякий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)\not\equiv 0$ имеет фундаментальное решение из $\mathscr{D}'$.*

Доказательство. Так как неособенное линейное вещественное преобразование переводит $\mathscr{D}'$ на $\mathscr{D}'$ (см. § 1.10), то в силу леммы 1 эту теорему достаточно доказать для того случая, когда полином $P(i\xi)$ имеет вид (1.4).

Пусть $f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_m$ — измеримые неотрицательные функции, заданные на $\mathbb{R}^n$, и такие, что $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant m} f_k(\xi)\equiv 1$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $f_k(\xi)=0$ для тех ξ, для которых

$$\min_{|\tau|=1}\left|P\left(i\xi_1-\tau\frac{k}{m},\ i\xi_2,\ \ldots,\ i\xi_n\right)\right|<a\varkappa \qquad (1.7)$$

(по лемме 2 такие функции и такое $\varkappa>0$ существуют).

Определим обобщенную функцию $\mathscr{E}$, положив для всех $\varphi\in\mathscr{D}$

$$(\mathscr{E},\ \varphi)=\\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\int f_k(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{L[\varphi]\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\right)}{P\left(i\xi_1-\tau\frac{k}{m},\ i\xi_2,\ \ldots,\ i\xi_n\right)}\frac{d\tau}{\tau}\,d\xi, \qquad (1.8)$$

где $L[\varphi]$ — преобразование Лапласа функции φ (см. § 9.1). Докажем, что выражение справа в (1.8) существует и определяет (линейный) и непрерывный функционал на $\mathscr{D}$, т. е. $\mathscr{E}\in\mathscr{D}'$.

Но это утверждение вытекает из следующих оценок:

$$|(\mathscr{E},\ \varphi)|\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\int f_k(\xi)\frac{\max\limits_{|\tau|=1}\left|L[\varphi]\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\right)\right|}{\min\limits_{|\tau|=1}\left|P\left(i\xi_1-\tau\frac{k}{m},\ i\xi_2,\ \ldots,\ i\xi_n\right)\right|}\,d\xi\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{(2\pi)^n a\varkappa}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\max e^{|\operatorname{Re}\tau|\frac{k}{m}}\int\left(1+\left|\xi_1+i\tau\frac{k}{m}\right|^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{-N}d\xi\times\\ \times\int\limits_{|x|<R}|(1-\Delta)^N\varphi(x)|\,dx,$$

т. е. из оценки

$$|(\mathscr{E},\ \varphi)|\leqslant K_N\int\limits_{|x|<R}|(1-\Delta)^N\varphi(x)|\,dx, \qquad (1.9)$$

справедливой при всех целых $N>n/2$ и при всех $\varphi\in\mathscr{D}(U_R)$. При выводе оценки (1.9) мы воспользовались оценками (3.4) — (3.5) § 12 для целой функции $L[\varphi](\zeta)$, а также оценкой (1.7) и свойствами функций $\{f_k\}$.

Осталось проверить, что построенная обобщенная функция $\mathscr{E}$ из $\mathscr{D}'$ удовлетворяет уравнению (1.1). Пользуясь (1.8), при всех $\varphi\in\mathscr{D}$ имеем

$$(P(D)\mathscr{E},\ \varphi)=(\mathscr{E},\ P(-D)\varphi)=\\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\int f_k(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{L[P(-D)\varphi]\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\right)}{P\left(i\xi_1-\tau\frac{k}{m},\ i\xi_2,\ \ldots,\ i\xi_n\right)}\frac{d\tau}{\tau}\,d\xi=\\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\int f_k(\xi)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}L[\varphi]\left(\xi_1+i\tau\frac{k}{m},\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\right)\frac{d\tau}{\tau}\,d\xi=\\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\int f_k(\xi)F[\varphi](\xi)\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int F[\varphi](\xi)\,d\xi=\varphi(0)=(\delta,\ \varphi),$$

что и требовалось установить. Теорема доказана.

Имея фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $P(D)$, мы можем построить решение u из $\mathscr{D}'$ уравнения

$$P(D)u=f,\qquad f\in\mathscr{D}', \qquad (1.10)$$

в виде свертки

$$u=\mathscr{E}*f \qquad (1.11)$$

для тех f из $\mathscr{D}'$, для которых эта свертка существует в $\mathscr{D}'$ (см. § 4.8, в)). Таким путем, выбирая различные фундаментальные решения, можно получать различные классы правых частей, для которых уравнение (1.10) разрешимо в виде свертки (1.11).

2. Фундаментальные решения медленного роста. В предыдущем пункте мы установили, что всякий ненулевой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет по крайней мере одно фундаментальное решение из $\mathscr{D}'$. Возникает важный для приложений вопрос, как найти фундаментальное решение с нужными свойствами роста, носителя, гладкости и т. д. Удобным средством для этого является метод преобразования Фурье. Но техника преобразования Фурье, развитая в § 6, применима к обобщенным функциям медленного роста. Поэтому при построении фундаментального решения методом преобразования Фурье мы заранее ограничиваемся классом $\mathscr{S}'$.

Уравнение (1.1) в классе $\mathscr{S}'$ эквивалентно алгебраическому уравнению (см. § 6.3, б))

$$P(-i\xi)\,\tilde{\mathscr{E}}(\xi)=1 \tag{2.1}$$

относительно преобразования Фурье $F[\mathscr{E}]=\tilde{\mathscr{E}}$. Таким образом, задача об отыскании фундаментального решения медленного роста оказывается частным случаем более общей задачи о «делении» обобщенной функции медленного роста на полином, т. е. задачи о нахождении решения u из $\mathscr{S}'$ уравнения

$$P(\xi)\,u=f, \tag{2.2}$$

где $P\not\equiv 0$ — полином и f — заданная обобщенная функция из $\mathscr{S}'$. Разрешимость задачи о «делении» была доказана в 1958 г. независимо Л. Хёрмандером [2] и С. Лоясевичем [1].

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма. *Отображение*

$$\varphi\to P\varphi,\quad \varphi\in\mathscr{S}$$

имеет непрерывное обратное в $\mathscr{S}$; *другими словами, для каждого целого* $p\geqslant 0$ *существуют такие числа* $K_p>0$ *и* $p'=p'(p)\geqslant 0$ — *целое, что выполнено неравенство*

$$\|\varphi\|_p\leqslant K_p\|P\varphi\|_{p'},\quad \varphi\in C^{p'}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Существующие доказательства этой леммы весьма сложны. Мы ограничимся здесь доказательством ее лишь для случая $n=1$.

Докажем неравенство (2.3) сперва для случая $P(\xi)=\xi$. Обозначая $\psi=\xi\varphi$, имеем

$$\varphi=\frac{\psi}{\xi},\qquad |\varphi(\xi)|\leqslant\begin{cases}\max\limits_{|\xi|\leqslant 1}|\psi'(\xi)|, & |\xi|\leqslant 1,\\ |\psi(\xi)|, & |\xi|>1;\end{cases}$$

$$\varphi'=\frac{\psi'}{\xi}-\frac{\psi}{\xi^2},\quad |\varphi'(\xi)|\leqslant\begin{cases}\frac{3}{2}\max\limits_{|\xi|\leqslant 1}|\psi''(\xi)|, & |\xi|\leqslant 1,\\ |\psi'(\xi)|+|\psi(\xi)|, & |\xi|>1;\end{cases}$$

и т. д. Следовательно,

$$\|\varphi\|_p=\sup_{\substack{\xi\\|\alpha|\leqslant p}}(1+|\xi|^2)^{p/2}|\varphi^{(\alpha)}(\xi)|\leqslant$$
$$\leqslant K_p\sup_{\substack{\xi\\|\alpha|\leqslant p+1}}(1+|\xi|^2)^{p/2}|\psi^{(\alpha)}(\xi)|\leqslant K_p\|\xi\varphi\|_{p+1},$$

что и требовалось ($p'=p+1$).

Из справедливости неравенства (2.3) для $P=\xi$ следует справедливость его и для $P=\xi-\xi_0$, а значит, и для всех многочленов $P=a\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(\xi-\xi_k)$:

$$\|\varphi\|_p\leqslant K_p^{(1)}\|(\xi-\xi_1)\varphi\|_{p+1}\leqslant K_p^{(2)}\|(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\varphi\|_{p+2}\leqslant\ldots$$
$$\ldots\leqslant K_p^{(m)}\|(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\ldots(\xi-\xi_m)\varphi\|_{p+m}=K_p\|P\varphi\|_{p+m}.$$

Пользуясь леммой Хёрмандера, докажем, что *уравнение* (2.2) *всегда разрешимо в* $\mathscr{S}'$.

Действительно, рассмотрим линейный функционал

$$P\varphi\to(f,\varphi),$$

определенный на линейном подмножестве $[\psi\colon \psi=P\varphi,\ \varphi\in\mathscr{S}]$ пространства $\mathscr{S}$. По лемме Хёрмандера этот функционал непрерывен: если $P\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$, то $\varphi_k\to 0$, $k\to\infty$ в $\mathscr{S}$ и потому $(f,\varphi_k)\to 0$, $k\to\infty$. По теореме Хана — Банаха существует (линейное) непрерывное продолжение u: $\varphi\to(u,\varphi)$ этого функционала на все $\mathscr{S}$, так что $u\in\mathscr{S}'$ и $(u,P\varphi)=(f,\varphi)$. Это и значит, что функционал u удовлетворяет уравнению (2.2).

Переходя к преобразованию Фурье, убеждаемся, что справедлива следующая

Теорема (Хёрмандер — Лоясевич). *Уравнение*

$$P(D)\,u=f, \tag{2.4}$$

где $P(D)\not\equiv 0$, *разрешимо в* $\mathscr{S}'$ *при всех* $f\in\mathscr{S}'$.

Следствие. *Всякий ненулевой линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение медленного роста.*

3. Метод спуска. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x,t)=(x_1,\ldots,x_n,t)$,

$$P(D,D_0)\,u=f(x)\times\delta(t),\qquad f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \tag{3.1}$$

где $D_0=\frac{\partial}{\partial t}$, $P(D,D_0)=\sum\limits_{1\leqslant q\leqslant p}P_q(D)D_0^q+P_0(D)$ и $P_a(D)$ — дифференциальные операторы по переменным x.

Будем говорить, что обобщенная функция $u(x, t)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ *допускает продолжение на функции вида* $\varphi(x)1(t)$, где $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если какова бы ни была последовательность основных функций $\eta_k(x, t)$, $k=1, 2, \ldots$, из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. § 4.1), существует предел

$$\lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(x, t))=(u, \varphi(x)1(t)), \qquad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$.

Обозначим функционал (3.2) через u_0,

$$(u_0, \varphi)=(u, \varphi(x)1(t))=\lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(x, t)), \qquad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{3.3}$$

Очевидно, при всяком k функционал $(u, \varphi(x)\eta_k(x, t))$ — линейный и непрерывный на $\mathcal{D}$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$. Поэтому по теореме о полноте пространства $\mathcal{D}'$ (см. § 1.4) и предельный функционал $u_0\in\mathcal{D}'$.

Обобщенную функцию $u_0(x)$ назовем *обобщенным интегралом по t* обобщенной функции $u(x, t)$.

Приведем критерий существования обобщенного интеграла по t.

Теорема I. *Для того чтобы для u из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ существовал u_0 — обобщенный интеграл по t — необходимо и достаточно, чтобы существовала свертка $u*[\delta(x)\times 1(t)]$; при этом справедливо равенство*

$$u*[\delta(x)\times 1(t)]=u_0(x)\times 1(t). \tag{3.4}$$

Докажем достаточность. Пусть существует свертка $u*[\delta(x)\times 1(t)]$. Тогда существует обобщенная функция u_0 из $\mathcal{D}'$ такая, что выполнено равенство (3.4) (см. § 4.2, в) и § 3.3).

Докажем, что u_0 есть обобщенный интеграл по t для $u(x, t)$. Пусть $\{\xi_k(x)\}$, $\{\eta_k(x, t)\}$ и $\{\chi_i(t)\}$ — последовательности основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, сходящиеся к 1 в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{R}^1$ соответственно. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдется такой номер N, что $\xi_k\varphi=\varphi$ при всех $k\geqslant N$. Далее, для каждого k найдется такой номер i_k, что

$$\eta_k(x, t)\int\chi_{i_k}(t')\omega_\varepsilon(t+t')\,dt'=\eta_k(x, t), \tag{3.5}$$

где ω_ε — «шапочка» (см. § 1.2). Действительно, если $(x, t)\in\in\operatorname{supp}\eta_k\subset[(x, t)\colon |t|<R_k]$, то выбирая номер i_k таким, чтобы было $\chi_{i_k}(t)=1$ при $|t|\leqslant R_k+\varepsilon$, получим

$$\int\chi_{i_k}(t')\omega_\varepsilon(t+t')\,dt'=\int\limits_{|t'|<\varepsilon}\omega_\varepsilon(t')\chi_{i_k}(t'-t)\,dt'=\int\omega_\varepsilon(t')\,dt'=1.$$

Пользуясь теперь равенствами (3.4) и (3.5) и определениями обобщенного интеграла по t (3.3) и свертки (см. § 4.1), а также замечая, что последовательность

$$\xi_k(x)\xi_k(x')\eta_k(x, t)\chi_{i_k}(t'), \quad k=1, 2, \ldots,$$

основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ сходится к 1 в $\mathbb{R}^{2n+2}$, при всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}(u, \varphi(x)\eta_k(x, t))=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(u(x, t), \xi_k(x)\varphi(x)\eta_k(x, t)\int\chi_{i_k}(t')\omega_\varepsilon(t+t')\,dt'\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\big(u(x, t)\times\delta(x')\times 1(t'),$$
$$\xi_k(x)\xi_k(x')\eta_k(x, t)\chi_{i_k}(t')\varphi(x+x')\omega_\varepsilon(t+t')\big)=$$
$$=(u*[\delta(x)\times 1(t)], \varphi(x)\omega_\varepsilon(t))=(u_0(x)\times 1(t), \varphi(x)\omega_\varepsilon(t))=$$
$$=\left(u_0(x), \varphi(x)\int\omega_\varepsilon(t)\,dt\right)=(u_0, \varphi),$$

что и требовалось.

Докажем необходимость. Пусть для u существует u_0 — обобщенный интеграл по t. Пусть $\xi_k(x, t; x', t')$, $k=1, 2, \ldots$, — последовательность основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда для каждого компакта $K\subset\mathbb{R}^{n+1}$ найдется такое число N, что при всех $k\geqslant N$

$$\int\xi_k(x, t;\ 0, t')\varphi(x, t+t')\,dt'=\int\varphi(x, t+t')\,dt'=\int\varphi(x, t')\,dt',$$
$$(x, t)\in K.$$

Следовательно, существует последовательность $\eta_k(x, t)$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$, и такая, что последовательность функций

$$\chi_k(x, t)=\int\xi_k(x, t;\ 0, t')\varphi(x, t+t')\,dt'-$$
$$-\eta_k(x, t)\int\varphi(x, t')\,dt'+\eta_k(x, t), \qquad k=1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ сходятся к 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\varphi_0(x)$ — функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равная 1 на $\operatorname{supp}\varphi(x, t)$, так что $\varphi=\varphi_0\varphi$. Тогда, пользуясь (3.6) и определениями обобщенного интеграла по t и свертки, имеем

$$(u_0(x)\times 1(t),\ \varphi)=\left(u_0,\ \int\varphi(x,\ t)\,dt\right)=(u_0(x),\ \varphi_0(x)\int\varphi(x,\ t)\,dt)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(u(x,\ t),\ \varphi_0(x)\,\eta_k(x,\ t)\int\varphi(x,\ t)\,dt\right)=$$

$$=-\lim_{k\to\infty}(u(x,\ t),\ \varphi_0(x)\,\chi_k(x,\ t))+\lim_{k\to\infty}(u(x,\ t),\ \varphi_0(x)\,\eta_k(x,\ t))+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left(u(x,\ t),\ \varphi_0(x)\int\xi_k(x,\ t;\ 0,\ t')\,\varphi(x,\ t+t')\,dt'\right)=$$

$$=-(u_0,\ \varphi_0)+(u_0,\ \varphi_0)+$$

$$+\lim_{k\to\infty}(u(x,t)\times[\delta(x')\times 1(t')],\ \xi_k(x,t;\ x',t')\,\varphi_0(x+x')\,\varphi(x+x',t+t'))=$$

$$=(u*[\delta(x)\times 1(t)],\ \varphi_0\varphi)=(u*[\delta(x)\times 1(t)],\ \varphi),$$

что и требовалось.

С л е д с т в и е 1. *Пусть функция $u(x,\ t)$ измерима и $\int|u(x,\ t)|\,dt\in\mathscr{L}^1_{\text{loc}}$. Тогда ее обобщенный интеграл по t существует в $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}$ и представляется классическим интегралом*

$$u_0(x)=\int u(x,\ t)\,dt. \tag{3.7}$$

З а м е ч а н и е. Формула (3.7) показывает, что обобщенный интеграл по t есть расширение классического понятия интеграла по t на обобщенные функции.

С л е д с т в и е 2. *Если $u=f(x)\times\delta(t)$, где $f\in\mathscr{D}'$,* то $u_0=f$.

Т е о р е м а II. *Если решение u из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ уравнения* (3.1) *обладает u_0 (обобщенным интегралом по t), то u_0 удовлетворяет уравнению*

$$P_0(D)\,u_0=f(x). \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta_k(x,\ t)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ — последовательность функций из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда при $q=1,\ 2,\ \ldots$ последовательность функций $\eta_k+D_0^q\eta_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ также сходится к 1 в $\mathbb{R}^{n+1}$ и, следовательно, при всех φ из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k\to\infty}\left(u,\ \varphi(x)\,D_0^q\eta_k(x,\ t)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(u,\ \varphi(x)\left[\eta_k(x,\ t)+D_0^q\eta_k(x,\ t)\right]\right)-\lim_{k\to\infty}(u,\ \varphi(x)\,\eta_k(x,\ t))=$$

$$=(u_0,\ \varphi)-(u_0,\ \varphi)=0.$$

Учитывая полученное равенство, проверим, что u_0 удовлетворяет уравнению (3.8):

$$(P_0(D)\,u_0,\ \varphi)=(u_0,\ P_0(-D)\,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(u,\ P_0(-D)\,\varphi(x)\,\eta_k(x,\ t))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\Big(u,\ P_0(-D)\,\varphi(x)\,\eta_k(x,\ t)+$$

$$+\sum_{1\leqslant q\leqslant p}(-1)^q P_q(-D)\,\varphi(x)\,D_0^q\eta_k(x,\ t)\Big)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(u,\ P(-D,\ -D_0)\,\varphi(x)\,\eta_k(x,\ t))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(P(D,\ D_0)\,u,\ \varphi(x)\,\eta_k(x,\ t))=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times\delta(t),\ \varphi(x)\,\eta_k(x,\ t))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(f(x),\ \varphi(x)\,\eta_k(x,\ 0))=(f,\ \varphi).$$

Теорема доказана.

Изложенный метод получения решения $u_0(x)$ уравнения (3.8) с n переменными через решение $u(x,\ t)$ уравнения (3.1) с $n+1$ переменными называется *методом спуска по переменной t.*

Метод спуска особенно удобен для построения фундаментальных решений. Применяя теорему II при $f=\delta(x)$, получаем такое

С л е д с т в и е. *Если фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,\ t)$ оператора $P(D,\ D_0)$ обладает $\mathscr{E}_0(x)$ (обобщенным интегралом по t), то $\mathscr{E}_0$ есть фундаментальное решение оператора $P_0(D)$.*

Фундаментальное решение $\mathscr{E}_0$ удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{E}_0(x)\times 1(t)=\mathscr{E}*[\delta(x)\times 1(t)]. \tag{3.9}$$

Физический смысл формулы (3.9) состоит в том, что $\mathscr{E}_0(x)$ есть (не зависящее от t) возмущение от источника $\delta(x)\times 1(t)$, сосредоточенного на оси t (ср. § 4.8, в)).

4. Примеры. а) Частными решениями уравнения $\xi u=1$ являются обобщенные функции

$$\frac{1}{\xi+i0},\quad \frac{1}{\xi-i0},\quad \mathscr{P}\frac{1}{\xi},$$

отличающиеся в силу формул Сохоцкого (8.3) и (8.3′) § 1 на выражение $\text{const}\,\delta(\xi)$ — общее решение однородного уравнения $\xi u=0$ (см. § 2.6).

б) *Если полином $P(\xi)$ не имеет вещественных нулей, то функция $\frac{1}{P(\xi)}$ принадлежит θ_M и является единственным решением уравнения $P(\xi)\,u=1$.*

Это утверждение вытекает из следующей леммы.

Л е м м а. *Если полином $P(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, то найдутся такие постоянные $C>0$ и ν, что справедливо неравенство*

$$|P(\xi)|\geqslant C(1+|\xi|^2)^{-\nu},\qquad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Доказательство. Оценку (4.1) достаточно доказать при $|\xi|>1$. Для этого совершим преобразование инверсии (рис. 30)

$$\xi^*=\frac{\xi}{|\xi|^2},\qquad \xi=\frac{\xi^*}{|\xi^*|^2},\qquad |\xi||\xi^*|=1.$$

Пусть m — степень P. Полином

$$P^*(\xi^*)=|\xi^*|^{2m}P\left(\frac{\xi^*}{|\xi^*|^2}\right) \tag{4.2}$$

имеет единственный нуль в $\mathbb{R}^n$: $\xi^*=0$. Поэтому существуют

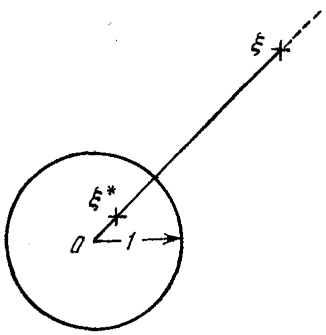

Рис. 30.

такие числа $C_1>0$ и $\mu>0$, что

$$|P^*(\xi^*)|\geqslant C_1|\xi^*|^{\mu},\quad |\xi^*|<1,$$

и поэтому, в силу (4.2),

$$|P(\xi)|\geqslant C_1|\xi^*|^{\mu-2m}=C_1|\xi|^{2m-\mu},\ <|\xi|1.$$

Лемма доказана.

в) Уравнение

$$\xi_1 u(\xi)=f(\xi)$$

разрешимо в $\mathscr{S}'$ при любой f из $\mathscr{S}'$ и его общее решение имеет вид

$$(u,\varphi)=(f,\psi)+(\delta(\xi_1)\times u_1(\xi_2,\ldots,\xi_n),\varphi),\qquad \varphi\in\mathscr{S}, \tag{4.3}$$

где u_1 — произвольная обобщенная функция из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$,

$$\psi(\xi)=\frac{1}{\xi_1}[\varphi(\xi)-\eta(\xi_1)\varphi(0,\xi_2,\ldots,\xi_n)],$$

$\eta(\xi_1)$ — произвольная функция из $\mathscr{D}$, равная 1 в окрестности 0.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству для пространства $\mathscr{D}'$ (см. § 3.3).

г) Функция $\mathscr{E}(t)=\theta(t)Z(t)$, где $Z(t)$ есть решение однородного дифференциального уравнения (ср. § 4.8, е))

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)Z\equiv Z^{(m)}+a_1Z^{(m-1)}+\ldots+a_mZ=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0,\quad Z^{(m-1)}(0)=1,$$

есть фундаментальное решение оператора $P\left(\frac{d}{dt}\right)$.

Действительно, пользуясь формулой (3.1) § 2, получаем

$$\mathscr{E}'(t)=\theta(t)Z'(t),\ \ldots,\ \mathscr{E}^{(m-1)}(t)=\theta(t)Z^{(m-1)}(t),$$
$$\mathscr{E}^{(m)}(t)=\delta(t)+\theta(t)Z^{(m)}(t),$$

откуда

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\mathscr{E}(t)=\theta(t)P\left(\frac{d}{dt}\right)Z(t)+\delta(t)=\delta(t),$$

что и утверждалось.

В частности, функция

$$\mathscr{E}(t)=\theta(t)e^{-at} \tag{4.4}$$

есть фундаментальное решение оператора $\frac{d}{dt}+a$.

д) Фундаментальное решение оператора теплопроводности,

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}-a^2\Delta\mathscr{E}=\delta(x,t). \tag{4.5}$$

Применяя преобразование Фурье F_x (см. § 6.2) к равенству (4.5) и пользуясь формулами (3.8) и (3.9) § 6,

$$F_x[\delta(x,t)]=F_x[\delta(x)\times\delta(t)]=F[\delta](\xi)\times\delta(t)=1(\xi)\times\delta(t),$$
$$F_x\left[\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}F_x[\mathscr{E}],\quad F_x[\Delta\mathscr{E}]=-|\xi|^2F_x[\mathscr{E}],$$

для обобщенной функции $\tilde{\mathscr{E}}(\xi,t)=F_x[\mathscr{E}]$ получим уравнение

$$\frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}}{\partial t}+a^2|\xi|^2\tilde{\mathscr{E}}=1(\xi)\times\delta(t). \tag{4.6}$$

Принимая во внимание формулу (4.4) с заменой a на $a^2|\xi|^2$, заключаем, что решением в $\mathscr{S}'$ уравнения (4.6) является функция

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi,t)=\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2t}.$$

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и пользуясь формулой (6.2) § 6, получаем

$$F_\xi^{-1}[\tilde{\mathscr{E}}]=\frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int e^{-a^2|\xi|^2t-i(\xi,x)}\,d\xi=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

т. е.

$$\mathscr{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}. \tag{4.7}$$

е) **Фундаментальное решение волнового оператора** $\square$. В § 13.5 было показано, что (обобщенная) функция

$$\mathscr{E}_n(x) = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \square^{\frac{n-1}{2}} [\theta(x_0)\theta(x^2)], \qquad x = (x_0, \boldsymbol{x}), \tag{4.8}$$

где $\theta(x_0)\theta(x^2) = \theta_{\bar{V}^+}(x)$ — характеристическая функция светового конуса будущего $\bar{V}^+ = [x\colon x_0 \geqslant |\boldsymbol{x}|]$, есть фундаментальное решение волнового оператора $\square$. Полагая в (4.8) $n = 1$, имеем

$$\mathscr{E}_1(x) = \frac{1}{2}\theta(x_0)\theta(x^2). \tag{4.9}$$

Докажем при $n \geqslant 2$ равенство

$$\square[\theta(x_0)\theta(x^2)] = 2(n-1)\theta(x_0)\delta(x^2), \tag{4.10}$$

где обобщенная функция $\theta(x_0)\delta(x^2)$ определяется равенством

$$(\theta(x_0)\delta(x^2), \varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x_0} \int_{|\boldsymbol{x}|=x_0} \varphi\, dS_{\boldsymbol{x}}\, dx_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x},$$

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{4.11}$$

Пользуясь техникой дифференциальных форм и теоремой Стокса (см., например, В. С. Владимиров [1]), при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(\square[\theta(x_0)\theta(x^2)], \varphi) = (\theta(x_0)\theta(x^2), \square\varphi) =$$

$$= \int_{V^+} \square\varphi(x)\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \int_{V^+} d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_0 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}\right) =$$

$$= \int_{\partial V^+} \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_0 \wedge dx_2 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dx_n - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots dx_{n-1}.$$

Но на $\partial V^+ \setminus \{0\}$, в силу уравнения $x_0^2 = |\boldsymbol{x}|^2$, имеет место соотношение

$$x_0\, dx_0 = x_1\, dx_1 + \ldots + x_n\, dx_n.$$

Поэтому, продолжая нашу цепочку равенств, получаем

$$(\square[\theta(x_0)\theta(x^2)], \varphi) = \int_{\partial V^+} d\left\{\frac{\varphi}{x_0}[x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{n-1} x_n\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}]\right\} - 2(n-1)\int_{\partial V^+} \varphi \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{2x_0}. \tag{4.12}$$

По теореме Стокса и в силу финитности φ первый интеграл в правой части (4.12) равен нулю. Во втором интеграле интегрирование производится по внешней стороне поверхности ∂V^+ (рис. 31), так что $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = -d\boldsymbol{x}$, и поэтому

$$(\square[\theta(x_0)\theta(x^2)], \varphi) = 2(n-1)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x},$$

откуда в силу (4.11) и следует формула (4.10).

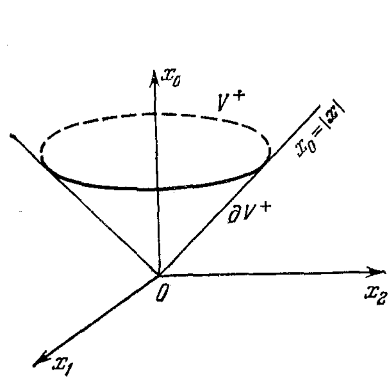

Рис. 31.

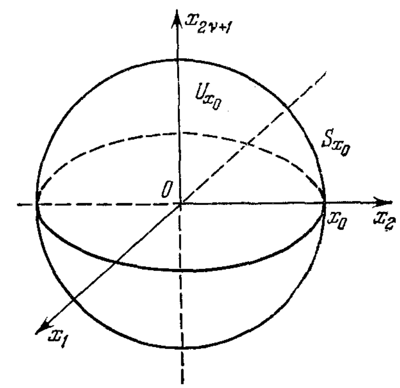

Рис. 32.

Полагая в (4.8) $n = 2\nu + 1$ и пользуясь формулой (4.10), получаем

$$\mathscr{E}_{2\nu+1}(x) = \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu \Gamma(\nu)} \square^{\nu-1}[\theta(x_0)\delta(x^2)]. \tag{4.13}$$

В частности, при $\nu = 1$ из (4.13) выводим:

$$\mathscr{E}_3(x) = \frac{1}{2\pi}[\theta(x_0)\delta(x^2)]. \tag{4.14}$$

Для получения формулы, аналогичной (4.13), для четных $n = 2\nu$ воспользуемся методом спуска по переменной x_{n+1} (см. § 14.3). Для этого нужно показать, что $\mathscr{E}_{2\nu+1}(x, x_{2\nu+1})$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{2\nu})$, обладает обобщенным интегралом по $x_{2\nu+1}$. Пусть последовательность $\eta_k(x, x_{2\nu+1})$, $k=1, 2, \ldots$, основных функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+2})$ сходится к 1 в $\mathbb{R}^{n+2}$. Тогда, пользуясь (4.13) и (4.11), при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+2})$ будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} (\mathcal{E}_{2\nu+1}(x, x_{2\nu+1}), \varphi(x)\eta_k(x, x_{2\nu+1})) = \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu\Gamma(\nu)} \times$$

$$\times \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x_0} \int\limits_{|x|^2+x_{2\nu+1}^2=x_0^2} \Box^{\nu-1}[\varphi(x)\eta_k(x, x_{2\nu+1})]\, dS_{(x, x_{2\nu+1})}\, dx_0 =$$

$$= \frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{1}{x_0} \int\limits_{|x|^2+x_{2\nu+1}^2=x_0^2} \Box^{\nu-1}\varphi(x)\, dS_{(x, x_{2\nu+1})}\, dx_0.$$

Преобразуем последний интеграл. Так как $\Box^{\nu-1}\varphi(x)$ не зависит от $x_{2\nu+1}$, то, заменяя поверхностный интеграл по сфере $S_{x_0} = [(x, x_{2\nu+1}) \colon |x|^2 + x_{2\nu+1}^2 = x_0^2]$ на удвоенный интеграл по шару $|x| < x_0$ (рис. 32), получим

$$(\mathcal{E}_{2\nu}, \varphi) = \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \int\limits_{|x|<x_0} \frac{\Box^{\nu-1}\varphi(x)}{\sqrt{x^2}}\, dx\, dx_0,$$

т. е.

$$\mathcal{E}_{2\nu}(x) = \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu\Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1}[\theta(x_0)x_+^2]^{-1/2}, \tag{4.15}$$

где

$$[\theta(x_0)x_+^2]^{-1/2} = \begin{cases} (x^2)^{-1/2}, & \text{если } x_0 \geqslant |x|, \\ 0, & \text{если } x_0 < |x|. \end{cases} \tag{4.16}$$

Полагая в (4.15) $\nu = 1$, имеем

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\theta(x_0)x_+^2}}. \tag{4.17}$$

ж) Фундаментальное решение оператора Лапласа Δ. В § 2.3, з) было показано, что функция

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, \quad n \geqslant 3; \quad \mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x| \tag{4.18}$$

есть фундаментальное решение оператора Лапласа.

Вычислим $\mathcal{E}_n$ методом преобразования Фурье. Имеем

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n] = 1.$$

Пусть $n=2$. Обобщенная функция $-\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}$, определенная в § 6.6, з), удовлетворяет этому уравнению, а ее преобразо-

вание Фурье равно $2\pi\ln|x| + 2\pi C_0$, где C_0 — некоторая постоянная. Поэтому

$$F^{-1}\left[-\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right] = \frac{1}{4\pi^2} F\left[-\mathcal{P}\frac{1}{|\xi|^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\ln|x| + \frac{C_0}{2\pi}.$$

Так как постоянная удовлетворяет однородному уравнению Лапласа, то, отбрасывая слагаемое $\frac{C_0}{2\pi}$, убеждаемся, что $\mathcal{E}_2$ можно выбрать равным $\frac{1}{2\pi}\ln|x|$. Пусть теперь $n=3$. В этом случае функция $-|\xi|^{-2}$ локально суммируема в $\mathbb{R}^n$ и медленного роста, а потому в соответствии с § 14.2

$$\mathcal{E}_n(x) = -F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -\frac{1}{(2\pi)^n} F\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right].$$

Отсюда, пользуясь формулой (6.6) § 6, получаем формулу (4.18) при $n=3$. Аналогично вычисляется $\mathcal{E}_n(x)$ и при $n>3$.

Особенно просто $\mathcal{E}_n(x)$ при $n \geqslant 3$ строится методом спуска по переменной t (см. § 14.3) из фундаментальных решений оператора теплопроводности или волнового оператора. Например, пользуясь формулой (3.7), из (4.7) при $a=1$ получаем формулу (4.18) при $n \geqslant 3$:

$$\mathcal{E}_n(x) = -\int \mathcal{E}(x, t)\, dt = -\int_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dt =$$

$$= \frac{-|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-u}u^{n/2-2}\, du =$$

$$= -\Gamma(n/2-1)\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}.$$

Аналогично вычисляется фундаментальное решение $\mathcal{E}_{n,k}(x)$ итерированного оператора Лапласа Δ^k при $2k<n$:

$$\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k\Gamma(n/2-k)}{2^{2k}\pi^{n/2}(k-1)!}|x|^{2k-n}. \tag{4.19}$$

з) Фундаментальное решение оператора Коши — Римана,

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\mathcal{E} = \delta(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4.20}$$

Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (4.20), получим

$$\frac{1}{2}\Delta\mathcal{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta,$$

откуда, пользуясь формулами (1.11) и (4.18), при $n=2$ имеем

$$\mathscr{E}=2\mathscr{E}_2*\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

т. е.

$$\mathscr{E}(x, y)=\frac{1}{\pi z}, \quad z=x+iy. \tag{4.21}$$

и) Фундаментальное решение оператора переноса,

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\mathscr{E}_s}{\partial t}+(s, \operatorname{grad}\mathscr{E}_s)+\alpha\mathscr{E}_s=\delta(x, t), \quad |s|=1, \quad v>0, \quad \alpha\geqslant 0. \tag{4.22}$$

Применяя к равенству (4.22) преобразование Фурье F_x, для обобщенной функции $F_x[\mathscr{E}_s]=\tilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}_s}{\partial t}+[\alpha-i(s, \xi)]\tilde{\mathscr{E}}_s=1(\xi)\times\delta(t). \tag{4.23}$$

Отсюда, пользуясь формулой (4.4), заключаем, что решением из $\mathscr{S}'$ уравнения (4.23) является функция $\tilde{\mathscr{E}}_s(\xi, t)=v\theta(t)e^{[i(s, \xi)-\alpha]vt}$. Применяя теперь обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и пользуясь формулой (2.6) § 6, при $x_0=vts$ получаем фундаментальное решение оператора переноса

$$\mathscr{E}_s(x, t)=v\theta(t)e^{-\alpha vt}\delta(x-vts). \tag{4.24}$$

Для вычисления фундаментального решения $\mathscr{E}_s^0(x)$ стационарного оператора переноса

$$(s, \operatorname{grad}\mathscr{E}_s^0)+\alpha\mathscr{E}_s^0=\delta(x) \tag{4.25}$$

воспользуемся методом спуска по переменной t (см. § 14.3):

$$(\mathscr{E}_s, \varphi(x)1(t))=v\int_0^\infty e^{-\alpha vt}(\delta(x-vts), \varphi)dt=$$

$$=v\int_0^\infty e^{-\alpha vt}\varphi(vts)\,dt=\int_0^\infty e^{-\alpha u}\varphi(us)\,du=\left(\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\delta\left(s-\frac{x}{|x|}\right), \varphi\right),$$

так что

$$\mathscr{E}_s^0(x)=\frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^2}\delta\left(s-\frac{x}{|x|}\right). \tag{4.26}$$

к) Фундаментальное решение оператора Шредингера,

$$i\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\frac{1}{2m}\Delta\mathscr{E}=\delta(x, t). \tag{4.27}$$

Применяя преобразование Фурье F_x к уравнению (4.27), для обобщенной функции $F_x[\mathscr{E}]=\tilde{\mathscr{E}}(\xi, t)$ получим уравнение (ср. д))

$$i\frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}}{\partial t}-\frac{1}{2m}|\xi|^2\tilde{\mathscr{E}}=1(\xi)\times\delta(t),$$

откуда по формуле (4.4) имеем

$$\tilde{\mathscr{E}}(\xi, t)=-i\theta(t)e^{-\frac{i}{2m}|\xi|^2t}=$$

$$=-i\lim_{\varepsilon\to+0}\theta(t)\left(\frac{m}{m+i\varepsilon}\right)^{n/2}e^{-\frac{i}{2(m+i\varepsilon)}|\xi|^2t}.$$

Пользуясь непрерывностью в $\mathscr{S}'$ операции преобразования Фурье F_ξ^{-1} и применяя формулу (4.7) при $a^2=\frac{i}{2(m+i\varepsilon)}$, получаем

$$\mathscr{E}(x, t)=-i\theta(t)\left(\frac{m}{2\pi t}\right)^{n/2}e^{i\left[\frac{|x|^2}{2t}(m+i0)-\frac{\pi n}{4}\right]}. \tag{4.28}$$

В частности, при $n=1$ имеем

$$\mathscr{E}(x, t)=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\theta(t)\sqrt{\frac{m}{2\pi t}}e^{i\frac{m}{2t}x^2}. \tag{4.29}$$

5. Сравнение дифференциальных операторов. Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка m, определенный формулой (1.2). Обозначим

$$\tilde{P}(\xi)^2=\sum_{|\beta|\leqslant m}|P^{(\beta)}(i\xi)|^2, \quad P^{(\beta)}(\xi)=D^\beta P(\xi)=\beta!\sum_{\beta\leqslant\alpha}a_\alpha\binom{\beta}{\alpha}\xi^{\alpha-\beta}.$$

Формула Лейбница принимает вид

$$P(D)(fg)=\sum_{|\beta|\leqslant m}\frac{D^\beta f}{\beta!}P^{(\beta)}(D)g; \tag{5.1}$$

она проверяется непосредственно:

$$P(D)(fg)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha(fg)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\beta}{\alpha}D^\beta fD^{\alpha-\beta}g=$$

$$=\sum_{|\beta|\leqslant m}D^\beta f\sum_{\beta\leqslant\alpha}a_\alpha\binom{\beta}{\alpha}D^{\alpha-\beta}g=\sum_{|\beta|\leqslant m}\frac{D^\beta f}{\beta!}P^{(\beta)}(D)g.$$

Докажем неравенство Хёрмандера; *если $\mathscr{O}$ — ограниченное открытое множество, то для любого α существует число $C_\alpha=C_\alpha(P, \mathscr{O})$ такое, что*

$$\|P^{(\alpha)}(D)\varphi\|\leqslant C_\alpha\|P(D)\varphi\|, \quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathscr{O}); \tag{5.2}$$

здесь $\|\quad\|=\|\quad\|_{\mathscr{L}^2(\mathscr{O})}$ (см. § 0.3).

Доказательство. Неравенство (5.2) достаточно доказать для $|\alpha|=1$ и применить рекуррентный процесс. Докажем его для $\alpha=(1, 0, \ldots, 0)$. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Тогда в силу (5.1)

$$P(D)(x_1\varphi)=x_1P(D)\varphi+P^{(1)}(D)\varphi,\quad P^{(1)}(\xi)=\frac{\partial P(\xi)}{\partial\xi_1}. \tag{5.3}$$

Умножая равенство (5.3) скалярно справа на $P^{(1)*}(D)=\overline{P^{(1)}(-D)}$ (ср. § 8.1) и учитывая, что операторы $P(D)$ и $P^{(1)}(D)$ коммутируют, получим

$$\langle P^{(1)}(D)(x_1\varphi), P^*(D)\varphi\rangle=\langle x_1P(D)\varphi,\ P^{(1)*}(D)\varphi\rangle+\|P^{(1)}(D)\varphi\|^2. \tag{5.4}$$

Но, в силу (5.3),

$$P^{(1)}(D)(x_1\varphi)=x_1P^{(1)}(D)\varphi+P^{(2)}(D)\varphi,\quad P^{(2)}(\xi)=\frac{\partial P^{(1)}(\xi)}{\partial\xi_1}.$$

Подставляя полученное выражение в (5.4), имеем

$$\|P^{(1)}(D)\varphi\|^2=\langle x_1P^{(1)}(D)\varphi,\ P^*(D)\varphi\rangle+\langle P^{(2)}(D)\varphi,\ P^*(D)\varphi\rangle-$$
$$-\langle x_1P(D)\varphi,\ P^{(1)*}(D)\varphi\rangle\leqslant\|x_1P^{(1)}(D)\varphi\|\,\|P^*(D)\varphi\|+$$
$$+\|P^{(2)}(D)\varphi\|\,\|P^*(D)\varphi\|+\|x_1P(D)\varphi\|\,\|P^{(1)*}(D)\varphi\|.$$

Отсюда, обозначая $R_1=\sup\limits_{x\in\mathcal{O}}[|x_1|, 1]$ и замечая, что

$$\|P(D)\varphi\|=\|P^*(D)\varphi\|,$$

получаем неравенство

$$\|P^{(1)}(D)\varphi\|^2\leqslant 2R_1[\|P^{(1)}(D)\varphi\|+\|P^{(2)}(D)\varphi\|]\,\|P(D)\varphi\|. \tag{5.5}$$

Пусть неравенство (5.2) доказано для всех полиномов степени $<m$. (Если степень P равна 0, то оно тривиально.) Тогда существует такое число C_1, что $\|P^{(2)}(D)\varphi\|\leqslant C_1\|P^{(1)}(D)\varphi\|$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Подставляя это неравенство в неравенство (5.5) и сокращая его на $\|P^{(1)}(D)\varphi\|$, убедимся в справедливости неравенства (5.2) при $\alpha=(1, 0, \ldots, 0)$ с $C_\alpha=2R_1(1+C_1)$.

Из неравенства Хёрмандера вытекает такое следствие: *если $\mathcal{O}$ — открытое ограниченное множество и $P(D)\not\equiv 0$, то*

$$P(D)\mathcal{L}^2(\mathcal{O})\supset\mathcal{L}^2(\mathcal{O}). \tag{5.6}$$

Для доказательства включения (5.6) нужно установить существование в $\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$ решения уравнения

$$P(D)u=f,\quad f\in\mathcal{L}^2(\mathcal{O}),$$

т. е. уравнения

$$\langle u,\ P^*(D)\varphi\rangle=\langle f,\ \varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) определяет полуторалинейную форму на функциях $P^*(D)\mathcal{D}(\mathcal{O})$, непрерывную, в силу неравенства (5.2),

$$\|\varphi\|\leqslant C\|P^*(D)\varphi\|,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

по норме $\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$. По теореме Хана — Банаха эта форма продолжается полуторалинейно и непрерывно на все $\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$, которая по теореме Рисса и определяет искомое решение $u(x)$ из $\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$.

Заметим, что мы опять получили существование фундаментального решения оператора $P(D)\not\equiv 0$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ для любого открытого ограниченного множества $\mathcal{O}$. Для доказательства достаточно представить $\delta=D^\alpha f$, $f\in\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$, воспользоваться включением (5.6).

Будем говорить, что оператор $P(D)$ *сильнее оператора* $Q(D)$ в открытом ограниченном множестве $\mathcal{O}$, и писать: $Q<P$ в $\mathcal{O}$, если существует такая постоянная $K=K(P, Q, \mathcal{O})$, что

$$\|Q(D)\varphi\|\leqslant K\|P(D)\varphi\|,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{5.8}$$

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор P сильнее оператора Q в $\mathcal{O}$;*
2) *существует такая постоянная C, что*

$$|Q(i\xi)|\leqslant C\widetilde{P}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{5.9}$$

Доказательство. 1)→2). Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\varphi\not\equiv 0$. Применяя неравенство (5.8) с заменой $\varphi(x)$ на $e^{i(x,\xi)}\varphi(x)$, получим

$$\|Q(D)e^{i(x,\xi)}\varphi\|^2\leqslant K^2\|P(D)e^{i(x,\xi)}\varphi\|^2,\quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{5.10}$$

где K не зависит от ξ. Замечая, что

$$P(D)e^{i(x,\xi)}=P(i\xi)e^{i(x,\xi)},$$

и пользуясь формулой Лейбница (5.1), из (5.10) получаем

$$\left\|\sum_\alpha Q^{(\alpha)}(i\xi)\frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!}\right\|^2\leqslant K^2\left\|\sum_\alpha P^{(\alpha)}(i\xi)\frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!}\right\|^2. \tag{5.11}$$

Пусть m — наибольший из порядков операторов Q и P. Докажем, что квадратичная форма

$$\left\|\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!}\lambda_\alpha\right\|^2$$

переменных $\{\lambda_\alpha\}$ положительно определенная. Действительно, если при $\{\lambda_\alpha\}\neq 0$ эта форма обращается в нуль, то

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{\lambda_\alpha}{\alpha!}D^\alpha\varphi(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Применяя к полученному равенству преобразование Лапласа:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{\lambda_\alpha}{\alpha!}(-iz)^\alpha L[\varphi](z)=0, \quad z\in\mathbb{C}^n,$$

и учитывая, что $L[\varphi](z)$ — целая функция (см. § 12.3), выводим: $L[\varphi]\equiv 0$, откуда $\varphi\equiv 0$, что исключено.

Таким образом, существует постоянная $\sigma>0$, не зависящая от $\{\lambda_\alpha\}$, и такая, что

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\lambda_\alpha|^2\leqslant\Big\|\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{D^\alpha\varphi}{\alpha!}\lambda_\alpha\Big\|^2\leqslant\sigma\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\lambda_\alpha|^2. \tag{5.12}$$

Применяя первое из неравенств (5.12) к $\lambda_\alpha=Q^{(\alpha)}(i\xi)$, а второе — к $\lambda_\alpha=P^{(\alpha)}(i\xi)$ и учитывая неравенство (5.11), получим неравенство

$$\tilde{Q}(\xi)^2\leqslant(\sigma K)^2\tilde{P}(\xi)^2, \tag{5.13}$$

откуда и следует неравенство (5.9) при $C=\sigma K$.

2) $\to$ 1). Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Умножая неравенство (5.9) на $|F^{-1}[\varphi](\xi)|$ и применяя равенство Парсеваля (см. § 6.6, в)), получим

$$\|Q(i\xi)F^{-1}[\varphi](\xi)\|^2=\|F^{-1}[Q(D)\varphi]\|^2=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\|Q(D)\varphi\|^2\leqslant\frac{C^2}{(2\pi)^n}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|P^{(\alpha)}(D)\varphi\|^2. \tag{5.14}$$

Применяя к правой части (5.14) неравенство Хёрмандера (5.2), убеждаемся в справедливости неравенства (5.8) при некотором K (зависящем от $\mathcal{O}$). Это и значит, что $Q<P$ в $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $Q<P$ в каком-либо $\mathcal{O}$, то $Q<P$ в любом открытом ограниченном множестве.*

Следствие 2. *Неравенство* (5.9) *эквивалентно неравенству*

$$\tilde{Q}(\xi)\leqslant C_1\tilde{P}(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

6. Эллиптические и гипоэллиптические операторы. Оператор $P(D)$ называется *эллиптическим* (соответственно *гипоэллиптическим*), если он обладает (вещественно) аналитическим (соответственно C^∞) при $x\neq 0$ фундаментальным решением $\mathcal{E}(x)$. Всякий эллиптический оператор гипоэллиптичен.

Примеры. Операторы Лапласа и Коши — Римана — эллиптические (см. § 14.4, ж) и з)); оператор теплопроводности гипоэллиптичен (см. § 14.4, д)).

Теорема I. *Для того чтобы оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $\mathcal{O}$ всякое решение $u(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ уравнения $P(D)u=f$, где $f\in C^\infty(\mathcal{O})$, принадлежало $C^\infty(\mathcal{O})$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение класса $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ оператора $P(D)$ и $u\in\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ — решение в $\mathcal{O}$ уравнения $P(D)u=f$. Пусть $\mathcal{O}'$ — произвольное открытое множество, компактное в $\mathcal{O}$, и $\eta\in\mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\eta(x)=1$, $x\in\mathcal{O}'$. Обобщенная функция ηu финитна в $\mathcal{O}$ и удовлетворяет уравнению (см. (5.1))

$$P(D)(\eta u)=\eta f+f_1,$$

где $\eta f\in C^\infty$, ηf финитна в $\mathcal{O}$, $f_1\in\mathcal{D}'$ и $\operatorname{supp} f_1\subset\operatorname{supp}\eta\setminus\mathcal{O}'$. Поэтому (см. § 14.1)

$$\eta u=\mathcal{E}*(\eta f)+\mathcal{E}*f_1,$$

откуда следует, что $u\in C^\infty(\mathcal{O}')$ (см. § 4.3). Так как $\mathcal{O}'\Subset\mathcal{O}$ произвольно, то $u\in C^\infty(\mathcal{O})$. Теорема I доказана.

Можно указать алгебраические условия гипоэллиптичности: *для того чтобы оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы при всех α, $|\alpha|\geqslant 1$,*

$$\frac{P^{(\alpha)}(-i\xi)}{P(-i\xi)}\to 0, \quad |\xi|\to\infty. \tag{6.1}$$

Этот результат принадлежит Л. Хёрмандеру [1].

Аналогично теореме I доказывается

Теорема I′. *Для того чтобы оператор $P(D)$ был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathcal{O}$ всякое решение $u(x)$ из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ уравнения $P(D)u=0$ было (вещественно) аналитическим в $\mathcal{O}$.*

Алгебраическое условие эллиптичности: *для того чтобы оператор $P(D)$ был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы его главная часть*

$$P_m(D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha D^\alpha$$

удовлетворяет условию $P_m(\xi)\neq 0$, $\xi\neq 0$.

Этот результат был установлен И. Г. Петровским [1] (1939 г.) для классических решений, Г. Вейлем [1] (1940 г.) для обобщенных решений для оператора Лапласа и Л. Хёрмандером (1955 г.) (см. [1]) — в общем случае.

Теперь докажем теорему о стирании изолированных особенностей гармонических функций.

Обобщенная функция $u(x)$ из $\mathcal{D}'(G)$ называется *гармонической* в области G, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$ в G (и тогда $u\in C^\infty(G)$ по теореме I).

Теорема II. *Если функция u — гармоническая в области $G\setminus\{0\}$ и*

$$u(x)=o\left(|x|^{-n+2}\right),\ n\geqslant 3;\quad u(x)=o(\ln|x|),\ n=2,\quad |x|\to 0, \tag{6.2}$$

то и гармоническая в G.

Доказательство. Пусть $U_R \Subset G$. Введем функцию $\tilde{u}(x)$, равную $u(x)$ в $\bar{U}_R$ и 0 вне $\bar{U}_R$. Эта функция суммируема на $\mathbb{R}^n$ и в силу (3.7′) § 2 обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta\tilde{u} + \frac{\partial u}{\partial n}\delta_{S_R} + \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_{S_R}) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Отсюда по теореме § 2.6 имеем

$$\Delta\tilde{u} = -\frac{\partial u}{\partial n}\delta_{S_R} - \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha \delta \text{ в } \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

Так как $\tilde{u}$ финитна, то, применяя формулу (1.11), из (6.3) получаем

$$\tilde{u} = \mathscr{E}_n * \Delta\tilde{u} =$$
$$= -\mathscr{E}_n * \frac{\partial u}{\partial n}\delta_{S_R} - \mathscr{E}_n * \frac{\partial}{\partial n}(u\delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \mathscr{E}_n * D^\alpha\delta =$$
$$= V_n^{(0)} + V_n^{(1)} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha \mathscr{E}_n, \tag{6.4}$$

где

$$\mathscr{E}_n(x) = k_n |x|^{-n+2}, \quad n \geqslant 3; \quad \mathscr{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

— фундаментальное решение оператора Лапласа, а $V_n^{(0)}(x)$ и $V_n^{(1)}(x)$ — поверхностные потенциалы простого и двойного слоя на сфере S_R. Из представления (6.4) при $|x| < R$ и из условия (6.2) вытекает, что $c_\alpha = 0$, так что

$$u(x) = V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x), \quad |x| < R,$$

откуда следует, что $u(x)$ — гармоническая функция в шаре U_R. Теорема доказана.

7. Гиперболические операторы. Пусть C — выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0. Оператор $P(D)$ называется *гиперболическим относительно конуса* C, если он удовлетворяет условию: существует точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$P(y_0 - iz) \neq 0 \text{ при всех } z \in T^C. \tag{7.1}$$

Теорема. *Для того чтобы оператор $P(D)$ был гиперболическим относительно конуса C, необходимо и достаточно, чтобы он имел (единственное) фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ в алгебре $\mathcal{D}'(C^*)$, представимое в виде*

$$\mathscr{E}(x) = e^{(y_0, x)}\mathscr{E}_0(x), \quad \mathscr{E}_0 \in \mathscr{S}'(C^*), \tag{7.2}$$

где точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$ определена в (7.1).

Доказательство. Необходимость. Если оператор $P(D)$ гиперболичен относительно конуса C, то полином $P(y_0 - iz)$ не обращается в нуль в трубчатой области T^C. Поэтому $1/P(y_0 - iz) \in H(C)$ (см. § 13.2), так что

$$\frac{1}{P[-i(iy_0 + z)]} = L[\mathscr{E}_0](z), \quad \mathscr{E}_0 \in \mathscr{S}'(C^*). \tag{7.3}$$

Обозначая $\zeta = z + iy_0$, получим (см. § 9.2, в))

$$\frac{1}{P(-i\zeta)} = L[\mathscr{E}_0](\zeta - iy_0) = L[\mathscr{E}_0(x)e^{(y_0, x)}],$$

откуда и следует представление (7.2).

Достаточность. Если оператор $P(D)$ имеет фундаментальное решение вида (7.2), то функция $L[\mathscr{E}_0](z)$ голоморфна в T^C и, следовательно, в силу (7.3) полином $P(y_0 - iz)$ не обращается в нуль в T^C, так что оператор $P(D)$ гиперболичен относительно конуса C.

Единственность фундаментального решения в алгебре $\mathcal{D}'(C^*)$ доказана в § 4.8, г).

Теорема доказана.

Пример 1. Волновой оператор $\Box$ гиперболичен относительно светового конуса будущего V^+, причем (см. § 13.5) $\Box(-iz) = -z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2 \neq 0$ в T^{V^+}.

Пример 2. Дифференциальный оператор $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ (см. § 14.4, г)) гиперболичен относительно $(0, \infty)$.

Замечание. Конус C является связной компонентой открытого множества (см. Л. Хёрмандер [1])

$$[y\colon P_m(y) \neq 0].$$

§ 15. Задача Коши

1. Обобщенная задача Коши для гиперболического уравнения. Пусть S — C-подобная поверхность класса C^∞ и S_+ область, лежащая над S (см. § 4.5); $P(D)$ — гиперболический оператор относительно конуса C порядка m.

Рассмотрим *классическую задачу Коши*

$$P(D)u = f(x), \quad x \in S_+, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_S = u_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.2}$$

т. е. задачу об отыскании функции $u \in C^m(S_+) \cap C^{m-1}(\bar{S}_+)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в S_+ и условиям (1.2) на S. Для разрешимости задачи Коши (1.1) — (1.2) необходимо, чтобы $f \in C(S_+)$ и $u_k \in C^{m-k-1}(S)$.

Предположим, что классическое решение u задачи (1.1) — (1.2) существует и $f \in C(\overline{S}_+)$. Продолжим функции f и u нулем на S_- и обозначим соответственно через $\tilde{f}$ и $\tilde{u}$ продолженные функции. Тогда во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ функция $\tilde{u}(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$P(D)\tilde{u} = \tilde{f}(x) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \frac{\partial^k}{\partial n^k}(v_k \delta_S)(x), \tag{1.3}$$

где $v_k\delta_S$ — плотность простого слоя на S с поверхностной плотностью v_k (см. § 1.7), однозначно определяемой функциями $\{u_j\}$, поверхностью S и оператором $P(D)$. Обобщенная функция $\frac{\partial^k}{\partial n^k}(v_k\delta_S)$ действует на основные функции φ по правилу (ср. § 2.3, б))

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial n^k}(v_k\delta_S),\ \varphi\right) = (-1)^k \int_S v_k(x) \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial n^k}\, dS.$$

Докажем равенство (1.3). Пользуясь уравнением (1.1) и условиями (1.2), при всех $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$(P(D)\tilde{u}, \varphi) = (\tilde{u}, P(-D)\varphi) = \int_{S_+} u(x) P(-D)\varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_{S_+} P(D)u(x)\varphi(x)\, dx + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} (-1)^k \int_S v_k(x) \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial n^k}\, dS =$$
$$= \int \tilde{f}(x)\varphi(x)\, dx + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \left(\frac{\partial^k}{\partial n^k}(v_k\delta_S),\ \varphi\right),$$

что и эквивалентно (1.3).

Пример 1. Для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) u \equiv u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \ldots + a_m u = f(t), \tag{1.4}$$
$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.5}$$

уравнение (1.3) принимает вид (см. § 2.3, в))

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde{u} = \tilde{f}(t) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k \delta^{(k)}(t), \tag{1.6}$$

где

$$v_k = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m-1-k} a_{m-1-j} u_j \quad (a_0 = 1). \tag{1.7}$$

Действительно, пользуясь формулой (3.1) § 2 и начальными условиями (1.5), имеем

$$\tilde{u}^{(k)} = u^{(k)}_{\text{кл}}(t) + \sum_{0 \leqslant j \leqslant k-1} u_j \delta^{(k-j-1)}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда и из уравнения (1.4) следует уравнение (1.6):

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde{u} = P_{\text{кл}}\left(\frac{d}{dt}\right)\tilde{u}(t) + u_0\delta^{(m-1)}(t) + (a_1u_0 + u_1)\delta^{(m-2)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{m-1}u_0 + \ldots + a_1 u_{m-2} + u_{m-1})\delta(t) =$$
$$= \tilde{f}(t) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k \delta^{(k)}(t),$$

где числа v_k определяются равенствами (1.7).

Пример 2. Для задачи Коши для волнового уравнения

$$\Box u = f(x), \quad x = (x_0, \boldsymbol{x}), \tag{1.8}$$
$$u|_{x_0=0} = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = u_1(\boldsymbol{x}) \tag{1.9}$$

уравнение (1.3) принимает вид

$$\Box \tilde{u} = \tilde{f}(x) + u_0(\boldsymbol{x}) \times \delta'(x_0) + u_1(\boldsymbol{x}) \times \delta(x_0). \tag{1.10}$$

Таким образом, классическое решение $u(x)$ задачи Коши (1.1) — (1.2), будучи продолженное нулем на S_-, удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ уравнению (1.3). При этом начальные условия (1.2) играют роль источников, сосредоточенных на поверхности S (как сумма плотностей слоев различных порядков). Например, для волнового уравнения, в силу (1.10), это есть сумма плотностей простого и двойного слоев на плоскости $x_0 = 0$, т. е. мгновенно действующий источник (при $x_0 = 0$).

Теперь классическую задачу Коши для гиперболического оператора $P(D)$ мы можем обобщить следующим образом. Пусть обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(\overline{S}_+)$. *Обобщенной задачей Коши* для оператора $P(D)$ с источником F назовем задачу о нахождении в $\mathbb{R}^n$ обобщенного решения u из $\mathcal{D}'(\overline{S}_+)$ уравнения

$$P(D)u = F(x). \tag{1.11}$$

В силу сказанного, все решения классической задачи Коши содержатся среди решений обобщенной задачи Коши.

Справедлива следующая

Теорема. *Решение обобщенной задачи Коши существует единственно и выражается формулой*

$$u = \mathcal{E} * F, \tag{1.12}$$

где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора $P(D)$ из $\mathcal{D}'(C^*)$. Это решение непрерывно зависит от F в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\overline{S}_+)$.

Для доказательства теоремы необходимо воспользоваться результатами § 4.5 при $\Gamma = C^*$ и $K = \varnothing$, а также — § 4.8, г). При этом операция $F \to \mathscr{E} * F$ непрерывна из $\mathscr{D}'(\bar{S}_+)$ в $\mathscr{D}'(\bar{S}_+)$.

З а м е ч а н и е. Изложенное очевидным образом переносится и на гиперболические системы. Пусть A — $N \times N$-матрица, элементы которой суть дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Оператор $A(D)$ называется гиперболическим относительно конуса C, если оператор $\det A(D)$ гиперболичен относительно C.

П р и м е р 1′. Формула (1.12) для решения классической задачи Коши (1.4) — (1.5) принимает вид

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) Z(t-\tau)\,d\tau + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k Z^{(k)}(t), \tag{1.13}$$

где $Z(t)$ — решение однородного уравнения $P\left(\frac{d}{dt}\right) Z = 0$, удовлетворяющее условиям $Z^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$, $Z^{(m-1)}(0) = 1$, а числа v_k определены равенствами (1.7).

Для получения формулы (1.13) вычислим свертку фундаментального решения $\mathscr{E}(t) = \theta(t) Z(t)$ оператора $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ (см. § 14.4, г)) с правой частью уравнения (1.6):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{f} * \mathscr{E} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k \delta^{(k)} * \mathscr{E} = \\ &= \int \tilde{f}(\tau) \mathscr{E}(t-\tau)\,d\tau + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k \mathscr{E}^{(k)}(t) = \\ &= \int_0^t f(\tau) Z(t-\tau)\,d\tau + \theta(t) \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} v_k Z^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Здесь мы учли равенства (см. § 14.4, г))

$$\mathscr{E}^{(k)}(t) = [\theta(t) Z(t)]^{(k)} = \theta(t) Z^{(k)}(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

2. Волновой потенциал. Фундаментальным решением волнового оператора являются (обобщенные) функции, определяемые равенствами (4.9), (4.13) и (4.15) § 14:

$$\mathscr{E}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu \Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1} \theta[(x_0)\delta(x^2)], & n = 2\nu+1,\ \nu \geqslant 1; \\ \dfrac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu \Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1} \left[\theta(x_0) x_+^2\right]^{-1/2}, & n = 2\nu; \\ \dfrac{1}{2}\theta(x_0)\theta(x^2), & n = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Носители $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_{2\nu}$ совпадают с $\bar{V}^+$, а носитель $\mathscr{E}_{2\nu+1}$, $\nu \geqslant 1$, — с $\partial \bar{V}^+$. Эти особенности структуры носителя фундаментального решения и определяют различия в характере распространения волн в нечетномерном ($n \geqslant 3$) и четномерном пространствах и на прямой. На рис. 33—35 схематически изображены графики фундаментальных решений $\mathscr{E}_n(x)$ по $|x|$ при фиксированном $x_0 > 0$.

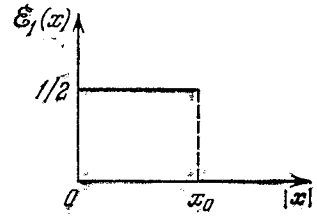

Рис. 33.

Л е м м а. *Фундаментальное решение $\mathscr{E}_n(x)$ принадлежит классу $C^\infty([0, \infty))$ по x_0, и его сужение $\mathscr{E}_{nx_0}(x)$ при $x_0 > 0$ обладает носителем S_{x_0} (при нечетном $n \geqslant 3$), $\bar{U}_{x_0}$ (при четном n или $n = 1$) и удовлетворяет предельным соотношениям при $x_0 \to +0$*

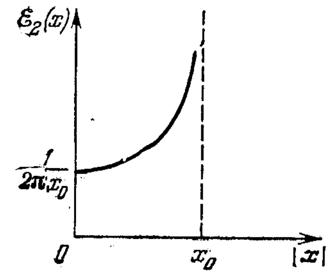

Рис. 34.

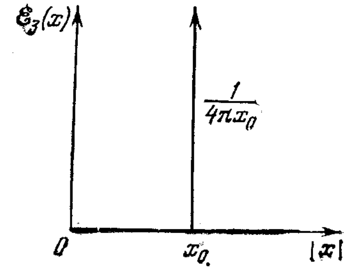

Рис. 35.

$$\mathscr{E}_{nx_0}(x) \to 0, \quad \frac{\partial \mathscr{E}_{nx_0}(x)}{\partial x_0} \to \delta(x), \quad \frac{\partial^2 \mathscr{E}_{nx_0}(x)}{\partial x_0^2} \to 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(R^n). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 2\nu + 1 \geqslant 3$ — нечетное. Докажем, что при $x_0 > 0$

$$\mathscr{E}_{n\varphi}(x_0) = \frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu \Gamma(\nu)} \sum_{0 \leqslant \alpha \leqslant \nu-1} (-1)^{\nu-1-\alpha} \binom{\alpha}{\nu-1} \times$$

$$\times \frac{d^{2\alpha}}{dx_0^{2\alpha}} \left[x_0^{2\nu-1} \int_{|s|=1} (\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi)(x_0 s)\,ds \right], \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

Действительно, при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathscr{D}(x_0 > 0)$ в силу (2.1) и (4.11) § 14 имеем

$$(\mathscr{E}_{n\varphi}, \psi) = (\mathscr{E}_n, \varphi(x)\psi(x_0)) =$$

$$= \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu \Gamma(\nu)} (\Box^{\nu-1}[\theta(x_0)\delta(x^2)], \ \varphi(x)\psi(x_0)) =$$

$$=\frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\left(\theta(x_0)\delta(x^2), \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\nu-1}(-1)^{\nu-1-\alpha}\binom{\alpha}{\nu-1}\psi^{(2\alpha)}(x_0)\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\nu-1}(-1)^{\nu-1-\alpha}\binom{\alpha}{\nu-1}\int_0^\infty\frac{\psi^{(2\alpha)}(x_0)}{x_0}\times$$

$$\times\int_{|x|=x_0}\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi(x)\,dS_x\,dx_0=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\nu-1}(-1)^{\nu-1-\alpha}\binom{\alpha}{\nu-1}\times$$

$$\times\int_0^\infty\psi^{(2\alpha)}(x_0)\,x_0^{2\nu-1}\int_{|s|=1}\left(\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi\right)(x_0s)\,ds\,dx_0,$$

откуда и следует формула (2.3) (см. обозначения и технику, развитую в § 3.4). Из (2.3) вытекает, что $\mathscr{E}_n\in C^\infty([0,\infty))$ по x_0, $\operatorname{supp}\mathscr{E}_{nx_0}=S_{x_0}$ и при $x_0\to+0$

$$(\mathscr{E}_{nx_0}, \varphi)=\mathscr{E}_{n\varphi}(x_0)\to 0,$$

$$\left(\frac{\partial\mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0}, \varphi\right)=\mathscr{E}'_{n\varphi}(x_0)=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\nu-1}(-1)^{\nu-1-\alpha}\binom{\alpha}{\nu-1}\times$$

$$\times\frac{d^{2\alpha+1}}{dx_0^{2\alpha+1}}\left[x_0^{2\nu-1}\int_{|s|=1}\left(\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi\right)(x_0s)\,ds\right]\to$$

$$\to\frac{(2\nu-1)!}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\int_{|s|=1}\varphi(0)\,ds=\frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\sigma_{2\nu+1}\varphi(0)=$$

$$=\frac{2\Gamma(2\nu)\pi^{\nu+1/2}}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1/2)}\varphi(0)=\varphi(0)=(\delta,\varphi),$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0^2}, \varphi\right)=\mathscr{E}''_{n\varphi}(x_0)=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\nu-1}(-1)^{\nu-1-\alpha}\binom{\alpha}{\nu-1}\times$$

$$\times\frac{d^{2\alpha+2}}{dx_0^{2\alpha+2}}\left[x_0^{2\nu-1}\int_{|s|=1}\left(\Delta^{\nu-1-\alpha}\varphi\right)(x_0s)\,ds\right]\to 0.$$

В последнем соотношении мы воспользовались тем, что функция

$$\int_{|s|=1}\varphi(x_0s)\,ds=\int_{|s|=1}\varphi(-x_0s)\,ds$$

— четная, бесконечно дифференцируемая, а потому ее первая производная по x_0 в нуле равна нулю.

Таким образом, предельные соотношения (2.3) доказаны для нечетных $n\geqslant 3$. Для четных $n=2\nu$ доказательство аналогично; проще воспользоваться методом спуска по переменной $x_{2\nu+1}$

(см. § 14.4, е)). При $n=1$ доказательство тривиально. Лемма доказана.

Пример.

$$\mathscr{E}_{2\nu+1\,x_0}(x)=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\,\square^{\nu-1}\frac{1}{x_0}\delta_{S_{x_0}}(x),\qquad x_0>0,\tag{2.4}$$

где $\delta_{S_{x_0}}(x)$ — простой слой на сфере $|x|=x_0$ (см. § 1.7).

Пусть $F\in\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+\times\mathbb{R}^n)$. Свертка $V_n=F*\mathscr{E}_n$, существующая в $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+\times\mathbb{R}^n)$ (см. § 4.5), называется *волновым потенциалом* с плотностью F. Волновой потенциал V_n непрерывно зависит от F в смысле сходимости в $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+\times\mathbb{R}^n)$. Наконец, этот потенциал удовлетворяет волновому уравнению $\square V_n=F$ (см. § 14.1).

Дальнейшие свойства потенциала V_n существенно зависят от свойств плотности F.

Если $F=f\in\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^1_+\times\mathbb{R}^n)$, *то потенциал* V_n *выражается формулами*

$$V_{2\nu+1}(x)=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\,\square^{\nu-1}\int_{|x-\xi|<x_0}\frac{f(x_0-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi,\qquad \nu\geqslant 1,$$

$$V_{2\nu}(x)=\frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^\nu\Gamma(\nu)}\,\square^{\nu-1}\int_0^{x_0}\int_{|x-\xi|<x_0-\xi_0}\frac{f(\xi)\,d\xi\,d\xi_0}{\sqrt{(x-\xi)^2}},\tag{2.5}$$

$$V_1(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x_0}\int_{x_1-x_0+\xi_0}^{x_1+x_0-\xi_0}f(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_0.$$

Пусть $n=2\nu+1\geqslant 3$. Пользуясь представлением (5.1) § 4 для свертки $f*\mathscr{E}_n$, из (2.1) и (4.11) § 14 при всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеем

$$(V_n,\varphi)=(f*\mathscr{E}_n,\varphi)=c_\nu\left(f*\square^{\nu-1}[\theta(x_0)\delta(x^2)],\varphi\right)=$$

$$=c_\nu\left(\square^{\nu-1}(f*\theta(x_0)\delta(x^2)),\varphi\right)=c_\nu\left(f*\theta(x_0)\delta(x^2),\square^{\nu-1}\varphi\right)=$$

$$=c_\nu\left(f(\xi)\times\theta(y_0)\delta(y^2),\ \eta(\xi)\eta_1(y)\,\square^{\nu-1}\varphi(\xi+y)\right)=$$

$$=c_\nu\left(\theta(y_0)\delta(y^2),\ \eta_1(y)\int f(\xi)\,\square^{\nu-1}\varphi(\xi+y)\,d\xi\right)=$$

$$=c_\nu\left(\theta(y_0)\delta(y^2),\ \eta_1(y)\int f(x-y)\,\square^{\nu-1}\varphi(x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{c_\nu}{2}\int\left[\int f(x_0-|y|,\ x-y)\,\square^{\nu-1}\varphi(x)\,dx\right]\frac{dy}{|y|}=$$

$$=\frac{c_\nu}{2}\int\square^{\nu-1}\varphi(x)\int\frac{f(x_0-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi\,dx,$$

откуда и следует первая из формул (2.5); здесь $c_\nu 2^{2\nu-1}\pi^\nu \Gamma(\nu) = 1$. Аналогично, проще, доказываются и остальные формулы (2.5).

Замечание. Из формулы (2.5) при $n = 2\nu + 1 \geqslant 3$ следует, что потенциал $V_{2\nu+1}(x)$ в точке x в момент времени $t = x_0 > 0$ полностью определяется значениями источника $f(\xi)$ на боковой поверхности конуса

$$\Gamma(x) = [\xi\colon\ \xi_0 - x_0 \leqslant -|x - \xi|,\ \xi_0 \geqslant 0]$$

(рис. 36),

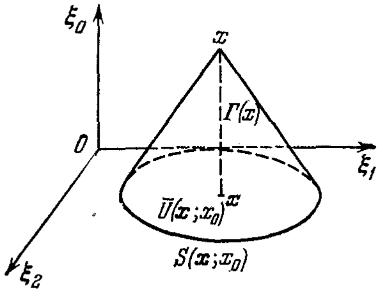

Рис. 36.

т. е. значениями источника $f(x_0 - |x - \xi|, \xi)$ в шаре $\bar U(x;\ x_0)$, взятыми в ранние моменты времени $\xi_0 = x_0 - |x - \xi|$, причем время запаздывания $|x - \xi|$ — это то время, которое необходимо для прихода возмущения из точки ξ в точку x *). С другой стороны, из формулы (2.5) при $n = 2\nu$ следует, что значение потенциала $V_{2\nu}(x)$ полностью определяется значениями источника $f(\xi)$ на самом конусе $\Gamma(x)$.

Пусть источник f сосредоточен на замкнутом множестве $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$. В силу сказанного при нечетном $n \geqslant 3$ возмущение от T распространится на множество $M(T)$ — объединение границ световых конусов будущего $V^+ + \xi$, когда

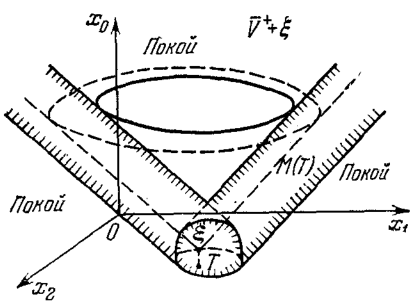

Рис. 37.

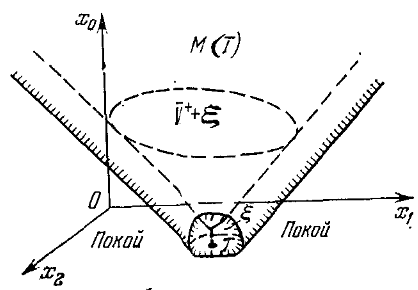

Рис. 38.

их вершины ξ пробегают T (рис. 37); при четном n возмущение распространится на объединение самих замкнутых конусов $\bar V^+ + \xi$, $\xi \in T$ (рис. 38). Полученное таким путем множество $M(T)$ называется областью влияния множества T. Ясно, что вне $M(T)$ будет покой.

3. Поверхностные волновые потенциалы. Пусть плотность $F = u_1(\boldsymbol{x}) \times \delta(x_0)$ или $F = u_0(\boldsymbol{x}) \times \delta'(x_0)$, где u_0 и u_1 — произвольные обобщенные функции из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Волновые потенциалы

$$V_n^{(0)} = [u_1(\boldsymbol{x}) \times \delta(x_0)] * \mathscr{E}_n, \quad V_n^{(1)} = [u_0(\boldsymbol{x}) \times \delta'(x_0)] * \mathscr{E}_n$$

*) Поэтому волновые потенциалы $V_{2\nu+1}$ называются также *запаздывающими* потенциалами.

называются *поверхностными волновыми потенциалами* (типа *простого и двойного слоя* с плотностями u_1 и u_0 соответственно). Запаздывающий потенциал $V_n^{(1)}$ есть производная по x_0 от $V_n^{(0)}$ с той же плотностью:

$$V_n^{(1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_0}\{[u_0(\boldsymbol{x}) \times \delta(x_0)] * \mathscr{E}_n\}. \tag{3.1}$$

Поверхностные волновые потенциалы $V_n^{(0)}$ и $V_n^{(1)}$ принадлежат классу $C^\infty([0, \infty))$ по x_0, причем при $x_0 > 0$ и $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_0^k} V_{nx_0}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = u_1 * \frac{\partial^k \mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0^k}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_0^k} V_{nx_0}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = u_0 * \frac{\partial^{k+1} \mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0^{k+1}}. \tag{3.3}$$

Действительно, пользуясь леммой § 15.2, при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathscr{D}(x_0 > 0)$ будем иметь (см. также § 3.4)

$$\left(\frac{d^k V_{n\varphi}^{(0)}}{dx_0^k},\ \psi\right) = (-1)^k \left(V_{n\varphi}^{(0)},\ \psi^{(k)}\right) =$$

$$= (-1)^k \left(V_n^{(0)},\ \varphi\psi^{(k)}\right) = (-1)^k \left([u_1 \times \delta] * \mathscr{E}_n,\ \varphi\psi^{(k)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_n(x)}{\partial x_0^k} \times u_1(\xi) \times \delta(\xi_0),\ \eta(x)\eta_1(\xi)\varphi(\boldsymbol{x} + \xi)\psi(x_0 + \xi_0)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_n(x)}{\partial x_0^k},\ \eta(x)\psi(x_0)(u_1(\xi),\ \varphi(\boldsymbol{x} + \xi))\right) =$$

$$= \int \left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_{nx_0}(x)}{\partial x_0^k},\ \eta(x)(u_1(\xi),\ \varphi(\boldsymbol{x} + \xi))\right)\psi(x_0)\,dx_0 =$$

$$= \int \left(u_1 * \frac{\partial^k \mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0^k},\ \varphi\right)\psi(x_0)\,dx_0,$$

так что

$$\frac{d^k V_{n\varphi}^{(0)}(x_0)}{dx_0^k} = \left(\frac{\partial^k \mathscr{E}_{nx_0}}{\partial x_0^k} * u_1,\ \varphi\right). \tag{3.4}$$

Отсюда, пользуясь теоремой о непрерывности свертки (см. § 4.3) и леммой § 15.2, заключаем, что $V_{n\varphi}^{(0)} \in C^\infty([0, \infty))$ и потому $V_n^{(0)} \in C^\infty([0, \infty))$ по x_0. Формула (3.2) вытекает из

(3.4), так как в силу (4.1) и (4.3) § 3

$$\frac{d^k V^{(0)}_{n\varphi}(x_0)}{dx_0^k} = \frac{d^k}{dx_0^k}\left(V^{(0)}_{nx_0}, \varphi\right) = \left(\frac{\partial^k V^{(0)}_{nx_0}}{\partial x_0^k}, \varphi\right).$$

Из доказанного для потенциала $V_n^{(0)}$ следуют все утверждения относительно потенциала $V_n^{(1)}$; при этом нужно воспользоваться формулой (3.1).

Имеют место следующие предельные соотношения при $x_0 \to +0$ *для потенциалов* $V_n^{(0)}$ *и* $V_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} &V^{(0)}_{nx_0}(x) \to 0, \qquad \frac{\partial V^{(0)}_{nx_0}(x)}{\partial x_0} \to u_1(x) \text{ в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \\ &V^{(1)}_{nx_0}(x) \to u_0(x), \quad \frac{\partial V^{(1)}_{nx_0}(x)}{\partial x_0} \to 0 \text{ в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Вытекают из (2.2), (3.2) и (3.3) и из непрерывности свертки (см. 4.3).

Если $u_1 \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}$, *то при* $x_0 > 0$

$$\begin{aligned} V^{(0)}_{2\nu+1}(x) &= \frac{1}{2^{2\nu}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1} \frac{1}{x_0} \int\limits_{|x-\xi|=x_0} u_1(\xi)\, dS_\xi, \qquad \nu \geqslant 1, \\ V^{(0)}_{2\nu}(x) &= \frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1} \int\limits_{|x-\xi|<x_0} \frac{u_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{x_0^2 - |x-\xi|^2}}, \\ V^{(0)}_1(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{x_1-x_0}^{x_1+x_0} u_1(\xi_1)\, d\xi_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для доказательства формул (3.6) при $n = 2\nu + 1 \geqslant 3$ воспользуемся равенствами (3.2) (при $k = 0$) и (2.4):

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(x) = V^{(0)}_{nx_0}(x) = u_1 * \mathscr{E}_{nx_0} &= \frac{1}{2^{2\nu}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)} u_1 * \Box^{\nu-1}\frac{1}{x_0}\delta_{S_{x_0}} = \\ &= \frac{1}{2^{2\nu}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)} \Box^{\nu-1}\frac{1}{x_0}\left(u_1 * \delta_{S_{x_0}}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Покажем, что

$$u_1 * \delta_{S_{x_0}} = \int\limits_{|x-\xi|=x_0} u_1(\xi)\, dS_\xi. \tag{3.8}$$

(По теореме Фубини интеграл в (3.8) при каждом $x_0 > 0$ существует для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.)

Действительно, пользуясь формулой (3.3) § 4, при всех φ из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$\begin{aligned} &(u_1 * \delta_{S_{x_0}}, \varphi) = (u_1(\xi) \times \delta_{S_{x_0}}(y),\ \eta(y)\varphi(\xi + y)) = \\ &= \int\limits_{|y|=x_0}\int u_1(\xi)\,\varphi(\xi+y)\, d\xi\, dS_y = \int\limits_{|y|=x_0}\int u_1(x-y)\,\varphi(x)\, dx\, dS_y = \\ &\qquad = \int \varphi(x) \int\limits_{|y|=x_0} u(x-y)\, dS_y\, dx = \int \varphi(x) \int\limits_{|x-\xi|=x_0} u(\xi)\, dS_\xi\, dx, \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (3.8).

Из (3.8) и (3.7) и следует формула (3.6) для $n = 2\nu + 1 \geqslant 3$. В остальных случаях доказательство аналогично, проще.

4. Задача Коши для волнового уравнения. В соответствии с общей теорией (см. § 15.1) *решение обобщенной задачи Коши для волнового уравнения*

$$\Box u = F(x), \quad F \in \mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n), \tag{4.1}$$

существует и единственно в $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$ *и представляется в виде волнового потенциала*

$$u = V_n = F * \mathscr{E}_n$$

с плотностью F. В частности, если

$$F(x) = u_1(x) \times \delta(x_0) + u_0(x) \times \delta'(x_0),$$

то соответствующее решение $u \in C^\infty([0, \infty))$ по x_0, при $x_0 > 0$ оно представляется в виде суммы двух поверхностных волновых потенциалов:

$$u(x) = u_{x_0}(x) = u_1 * \mathscr{E}_{nx_0} + \frac{\partial}{\partial x_0}(u_0 * \mathscr{E}_{nx_0}) \tag{4.2}$$

и, в силу (3.5), удовлетворяет начальным условиям при $x_0 \to +0$

$$u_{x_0}(x) \to u_0(x), \quad \frac{\partial u_{x_0}(x)}{\partial x_0} \to u_1(x) \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{4.3}$$

Возникает вопрос, когда решение обобщенной задачи Коши является классическим.

Теорема. *Если* $f \in C^{p_n}(\overline{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in C^{p_n+1}(\mathbb{R}^n)$ *и* $u_1 \in C^{p_n}(\mathbb{R}^n)$, *где* $p_n = 2\left[\frac{n}{2}\right]$, $n \geqslant 2$ *и* $p_1 = 1$, *то решение классической задачи Коши* (1.8) — (1.9) *существует и оно представляется в виде суммы трех волновых потенциалов (формула*

Кирхгофа — Пуассона — Даламбера):

$$u(x)=\frac{1}{2^{2\nu}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)}\Box^{\nu-1}\left[\int\limits_{|x-\xi|<x_0}\frac{f(x_0-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}d\xi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x_0}\int\limits_{|x-\xi|=x_0}u_1(\xi)\,dS_\xi+\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{1}{x_0}\int\limits_{|x-\xi|=x_0}u_0(\xi)\,dS_\xi\right],$$
$$n=2\nu+1\geqslant 3; \quad (4.4)$$

$$u(x)=\frac{1}{2^{2\nu-1}\pi^{\nu}\Gamma(\nu)}\Box^{\nu-1}\left[\int\limits_0^{x_0}\int\limits_{|x-\xi|<x_0-\xi_0}\frac{f(\xi)\,d\xi d\xi_0}{\sqrt{(x-\xi)^2}}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{|x-\xi|<x_0}\frac{u_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x_0^2-|x-\xi|^2}}+\frac{\partial}{\partial x_0}\int\limits_{|x-\xi|<x_0}\frac{u_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x_0^2-|x-\xi|^2}}\right],\ n=2\nu;$$

$$u(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_0}\int\limits_{x_1-x_0+\xi_0}^{x_1+x_0-\xi_0}f(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_0+\frac{1}{2}\int\limits_{x_1-x_0}^{x_1+x_0}u_1(\xi_1)\,d\xi_1+$$
$$+\frac{u_0(x_1+x_0)+u_0(x_1-x_0)}{2},\quad n=1.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось установить в силу (4.3), что все волновые потенциалы принадлежат классу $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n)$. Сделаем это для $n=2\nu+1\geqslant 3$. Имеем

$$\int\limits_{|x-\xi|<x_0}\frac{f(x_0-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}d\xi=$$
$$=x_0^{n-1}\int\limits_{|y|<1}f[x_0(1-|y|),\,x+x_0y]\frac{dy}{|y|}\in C^{2\nu}(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n),$$

подстановка $\xi=x+x_0y,\ d\xi=x_0^n\,dy$;

$$\frac{1}{x_0}\int\limits_{|x-\xi|=x_0}u_1(\xi)\,dS_\xi=x_0^{n-2}\int\limits_{|s|=1}u_1(x+x_0s)\,ds\in C^{2\nu}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

подстановка $\xi=x+x_0s,\ dS_\xi=x_0^{n-1}\,ds$;

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{1}{x_0}\int\limits_{|x-\xi|=x_0}u_0(\xi)\,dS_\xi=\frac{\partial}{\partial x_0}x_0^{n-2}\int\limits_{|s|=1}u_0(x+x_0s)\,ds\in C^{2\nu}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

откуда и следуют требуемые свойства гладкости волновых потенциалов для $n=2\nu+1\geqslant 3$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи. Теорема доказана.

5. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности изучается методом, аналогичным методу, изложенному в §§ 15.1—15.4 для волнового уравнения.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(x,t),\quad u|_{t=0}=u_0(x), \quad (5.1)$$

где $f\in C(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n)$, $u_0\in C(\mathbb{R}^n)$. Считая, что классическое решение $u(x,t)$ задачи Коши (5.1) существует, продолжая его и функцию f нулем на $t<0$, как и в § 15.1, убедимся, что продолженные функции $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ удовлетворяют в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнению

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\Delta\tilde{u}+\tilde{f}(x,t)+u_0(x)\times\delta(t). \quad (5.2)$$

Это замечание дает возможность обобщить постановку задачи Коши для уравнения теплопроводности в следующем направлении. Пусть $F\in\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n)$. *Обобщенной задачей Коши* для уравнения теплопроводности с источником F назовем задачу о нахождении в $\mathbb{R}^{n+1}$ обобщенного решения u из $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+F(x,t). \quad (5.3)$$

6. Тепловой потенциал. Прежде всего изучим свойства фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ оператора теплопроводности. В § 14.4, д) было показано, что

$$\mathscr{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Эта функция неотрицательна, обращается в нуль при $t<0$, бесконечно дифференцируема при $(x,t)\neq 0$ и локально интегрируема в $\mathbb{R}^{n+1}$. Более того,

$$\int\mathscr{E}(x,t)\,dx=1,\quad t>0, \quad (6.1)$$

в силу

$$\int\mathscr{E}(x,t)\,dx=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int e^{-|u|^2}du=1.$$

График функции $\mathscr{E}(x,t)$ при различных t $(t_1<t_2<t_3)$ изображен на рис. 39.

Пусть $F\in\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+^1\times\mathbb{R}^n)$. Свертка $V=F*\mathscr{E}$ называется *тепловым потенциалом* с плотностью F. Если тепловой потенциал V существует в $\mathscr{D}'$, то он обращается в нуль при $t<0$, в силу

(см. § 4.2, ж))

$$\operatorname{supp} V \subset \overline{\operatorname{supp} F + \operatorname{supp} \mathscr{E}} \subset [(x, t): t \geqslant 0],$$

так что $V \in \mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$, и удовлетворяет уравнению теплопроводности (5.3).

Выделим классы плотностей F, для которых тепловой потенциал заведомо существует.

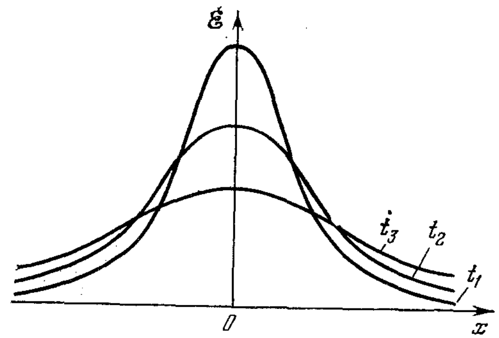

Рис. 39.

Обозначим через $\mathscr{M}$ класс измеримых в $\mathbb{R}^{n+1}$ функций $\{f(x, t)\}$, обращающихся в нуль при $t<0$ и удовлетворяющих в каждой полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$ оценке

$$|f(x, t)| \leqslant C_{T,\varepsilon}(f)\, e^{\varepsilon |x|^2} \tag{6.2}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Аналогично, через $\mathscr{M}_0$ обозначим класс измеримых в $\mathbb{R}^n$ функций $\{f(x)\}$, удовлетворяющих при любом $\varepsilon > 0$ оценке

$$|f(x)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

В (6.2) можно считать, что величина $C_{T,\varepsilon}$ не убывает по T.

Если $f \in \mathscr{M}$, то тепловой потенциал V существует в $\mathscr{M}$, выражается интегралом

$$V(x, t) = \int_0^t \int \frac{f(\xi, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi\, d\tau \tag{6.4}$$

и удовлетворяет оценке: для любого $\varepsilon > 0$

$$|V(x, t)| \leqslant \frac{t C_{t,\varepsilon}(f)}{(1-8t\varepsilon)^{n/2}} e^{2\varepsilon |x|^2}, \quad 0 < t < \frac{1}{8\varepsilon}, \tag{6.5}$$

и начальному условию: для любого $R > 0$

$$V(x, t) \overset{|x|<R}{\rightrightarrows} 0, \quad t \to +0. \tag{6.6}$$

Действительно, так как функции $\mathscr{E}$ и f локально суммируемы в $\mathbb{R}^{n+1}$, то их свертка $V = f * \mathscr{E}$ существует, выражается формулой (6.4) и является локально суммируемой функцией в $\mathbb{R}^{n+1}$, если функция

$$h(x, t) = \int_0^t \int |f(\xi, \tau)|\, \mathscr{E}(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau$$

локально суммируема в $\mathbb{R}^{n+1}$ (см. § 4.1). Докажем, что функция h удовлетворяет оценке (6.5). Эта оценка следует из оценки (6.2), в силу теоремы Фубини

$$h(x, t) \leqslant C_{t,\varepsilon} \int_0^t \int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} + \varepsilon |\xi|^2} \frac{d\xi\, d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}} =$$

$$= C_{t,\varepsilon} \int_0^t \int e^{-\frac{|y|^2}{4s} + \varepsilon |y-x|^2} \frac{dy\, ds}{(4\pi s)^{n/2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{t,\varepsilon} e^{2\varepsilon |x|^2} \int_0^t \int e^{-|y|^2 \left(\frac{1}{4s} - 2\varepsilon\right)} \frac{dy\, ds}{(4\pi s)^{n/2}};$$

здесь мы воспользовались неравенством $|y-x|^2 \leqslant 2|y|^2 + 2|x|^2$. Совершая во внутреннем интеграле подстановку

$$u = y\sqrt{\frac{1}{4s} - 2\varepsilon}, \quad du = \left(\frac{1}{4s} - 2\varepsilon\right)^{n/2} dy,$$

продолжим наши оценки:

$$h(x, t) \leqslant C_{t,\varepsilon} e^{2\varepsilon |x|^2} \int_0^t \int \frac{e^{-u^2}\, du}{\pi^{n/2}} \frac{ds}{(1-8\varepsilon s)^{n/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t C_{t,\varepsilon}}{(1-8\varepsilon t)^{n/2}} e^{2\varepsilon |x|^2}, \quad 0 < t < \frac{1}{8\varepsilon},$$

что и требовалось. Так как $|V| \leqslant h$, то потенциал V также удовлетворяет оценке (6.5). Далее, $V = h = 0$ при $t < 0$, так что $V \in \mathscr{M}$. Из оценки (6.5) следует, что V удовлетворяет начальному условию (6.6).

Пусть плотность $F(x, t) = u_0(x) \times \delta(t)$, где $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тепловой потенциал

$$V^{(0)} = [u_0(x) \times \delta(t)] * \mathcal{E}$$

называется *поверхностным тепловым потенциалом* (типа простого слоя с плотностью u_0).

Если $u_0 \in \mathcal{M}_0$, то поверхностный тепловой потенциал $V^{(0)}$ существует в $\mathcal{M} \cap C^\infty(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$, выражается интегралом

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \int u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} d\xi \tag{6.7}$$

и удовлетворяет оценке: для любого $\varepsilon > 0$

$$|V^{(0)}(x, t)| \leqslant \frac{C_\varepsilon(u_0)}{(1 - 8\varepsilon t)^{n/2}} e^{2\varepsilon |x|^2}, \quad 0 < t < \frac{1}{8\varepsilon}. \tag{6.8}$$

Если к тому же $u_0 \in C$, то $V^{(0)} \in C(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет начальному условию

$$V^{(0)}|_{t=+0} = u_0(x). \tag{6.9}$$

Следствие. *Из* (6.9) *вытекает, что*

$$\mathcal{E}(x, t) \to \delta(x), \quad t \to +0. \tag{6.10}$$

Представление (6.7) и оценка (6.8) доказываются так же, как и для потенциала V. При этом нужно использовать оценку (6.3). Из представления (6.7) следует, что $V^{(0)} \in \mathcal{M}$ и, кроме того, $V^{(0)} \in C^\infty$ при $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$, последнее — опять в силу (6.3).

Осталось доказать, что $V^{(0)}$ — непрерывная функция при $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет начальному условию (6.9), если $u_0 \in \mathcal{M}_0 \cap C$. Пусть $(x, t) \to (x_0, 0)$, $t > 0$, и $\eta > 0$ — произвольное число. В силу непрерывности функции $u_0(x)$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$|u_0(\xi) - u_0(x_0)| < \eta \quad \text{при} \quad |\xi - x_0| < 2\delta.$$

Поэтому, если $|x - x_0| < \delta$ (тогда и $|x - y - x_0| < 2\delta$ при $|y| < \delta$), в силу (6.1) и (6.3) при $\varepsilon = 1$ будем иметь

$$|V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| \leqslant \int |u_0(\xi) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(x - \xi, t) d\xi =$$

$$= \int\limits_{|y|<\delta} |u_0(x - y) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(y, t) dy +$$

$$+ \int\limits_{|y|>\delta} |u_0(x - y) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(y, t) dy \leqslant \eta \int \mathcal{E}(y, t) dy +$$

$$+ |u_0(x_0)| \int\limits_{|y|>\delta} \mathcal{E}(y, t) dy + C_1 \int\limits_{|y|>\delta} \mathcal{E}(y, t) e^{|x-y|^2} dy \leqslant$$

$$\leqslant \eta + \frac{|u_0(x_0)|}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{|y|>\delta} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy + C_1 \frac{e^{2|x|^2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{|y|>\delta} e^{-|y|^2\left(\frac{1}{4t} - 2\right)} dy \leqslant$$

$$\leqslant \eta + \frac{|u_0(x_0)|}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|u|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|u|^2} du + \frac{C_1 e^{|x|^2}}{[\pi(1 - 8t)]^{n/2}} \int\limits_{|u|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}\sqrt{1-8t}} e^{-|u|^2} du. \tag{6.11}$$

Второе и третье слагаемые в (6.11) также можно сделать $< \eta$ при всех достаточно малых $t > 0$, $t < \delta_1$. Итак,

$$|V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| < 3\eta, \quad |x - x_0| < \delta, \quad 0 < t < \delta_1,$$

что и требовалось.

7. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Теорема. *Если $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \times \delta(t)$, где $f \in \mathcal{M}$ и $u_0 \in \mathcal{M}_0$, то решение обобщенной задачи Коши* (5.3) *существует и единственно в классе $\mathcal{M}$ и представляется в виде суммы двух тепловых потенциалов* (*формула Пуассона*):

$$u(x, t) = V(x, t) + V^{(0)}(x, t) =$$

$$= \int\limits_0^t \int \frac{f(\xi, \tau)}{[4\pi(t - \tau)]^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} d\xi\, d\tau + \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \int u_0(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} d\xi. \tag{7.1}$$

Если, сверх того, $f \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in \mathcal{M}$, $|\alpha| \leqslant 2$, $u_0 \in \mathcal{M}_0 \cap C$, то формула (7.1) *дает классическое решение задачи Коши* (5.1).

Доказательство. По доказанному и в соответствии с общей теорией, развитой в § 4.8, в), решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \times \delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

существует и единственно в классе $\mathcal{M}$ и представляется в виде суммы двух тепловых потенциалов:

$$u = (f + u_0 \times \delta) * \mathcal{E} = f * \mathcal{E} + (u_0 \times \delta) * \mathcal{E} = V + V^{(0)},$$

откуда и из (6.4) и (6.7) следует формула (7.1).

Совершая в формуле (6.4) замену переменных интегрирования

$$\xi = x - 2\sqrt{s}\, y, \quad \tau = t - s,$$

представим потенциал V в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int f(x - 2\sqrt{s}\, y,\ t - s)\, e^{-|y|^2}\, dy\, ds. \qquad (7.2)$$

Пусть $f \in C^2(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$ и $D^\alpha f \in \mathscr{M}$, $|\alpha| \leqslant 2$. Пользуясь теоремами о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра, из формулы (7.2) и из равенства

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int \frac{\partial f(x - 2\sqrt{s}\, y,\ t - s)}{\partial t} e^{-|y|^2}\, dy\, ds + \\ + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int f(x - 2\sqrt{t}\, y,\ +0)\, e^{-|y|^2}\, dy$$

выводим, что все функции $D^\alpha V$, $|\alpha| \leqslant 2$, кроме $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, непрерывны при $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, а функция $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ непрерывна при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $V \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Наконец, если $u_0 \in \mathscr{M}_0 \cap C$, то, по доказанному, потенциал $V^{(0)} \in C(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Таким образом, обобщенное решение $u(x, t)$, определяемое формулой (7.1), принадлежит классу $C(\bar{\mathbb{R}}^1_+ \times \mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n)$ и потому является классическим решением уравнения теплопроводности (5.1) при $t > 0$. Кроме того, в силу (6.6) и (6.9) это решение удовлетворяет и начальному условию (5.1). Это и значит, что формула (7.1) дает решение классической задачи Коши. Теорема доказана.

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности можно установить в более широком классе, а именно — в классе функций, удовлетворяющих в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$ оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C e^{a|x|^2}.$$

Этот результат принадлежит А. Н. Тихонову [1].

§ 16. Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в T^C

1. Предварительные замечания. Класс функций, голоморфных и с неотрицательной мнимой частью в области G, обозначим через $H_+(G)$.

Функция $u(x, y)$ $2n$ переменных (x, y) называется *плюрисубгармонической* в области $G \subset \mathbb{C}^n$, если она полунепрерывна сверху в G и ее след на каждой компоненте каждого открытого множества $[\lambda\colon z^0 + \lambda a \subset G]$, $z^0 \in G$, $a \in \mathbb{C}^n$, $a \neq 0$, есть субгармоническая функция по λ. Функция $u(x, y)$ называется плюригармонической в области G, если она является вещественной (или мнимой) частью некоторой функции, голоморфной в G. Здесь $z = x + iy$.

По поводу плюрисубгармонических и выпуклых функций см., например, В. С. Владимиров [1], гл. II.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) *Функция $u(x, y)$ плюригармоническая в G.*

2) *Вещественная обобщенная функция $u(x, y)$ из $\mathscr{D}'(G)$ удовлетворяет в G системе уравнений*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0, \quad 1 \leqslant j, \quad k \leqslant n, \quad z_j = x_j + iy_j.$$

3) *Функции $u(x, y)$ и $-u(x, y)$ плюрисубгармонические в G.* Здесь

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Отсюда следует, что всякая плюригармоническая функция u в области G — гармоническая по каждой паре переменных (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, n$ в отдельности и, стало быть, гармоническая в G,

$$\Delta u = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right) = 4 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0.$$

Поэтому $u \in C^\infty(G)$ (см. § 14.6).

Обозначим через $\mathscr{P}_+(G)$ класс неотрицательных плюригармонических функций в области G.

Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $H_+(T^C)$, так что $\operatorname{Im} f \in \mathscr{P}_+(T^C)$. Без ограничения общности конус C можно считать выпуклым. Действительно, по теореме Бохнера функция $f(z)$ голоморфна (и однозначна) в оболочке голоморфности $T^{\operatorname{ch} C}$ области T^C и принимает те же значения в $T^{\operatorname{ch} C}$, что и в T^C (см., например, В. С. Владимиров [1], §§ 17 и 20).

Далее, конус C можно считать отличным от всего пространства $\mathbb{R}^n$. В противном случае, $f(z)$ — целая функция, и условие $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ в $\mathbb{C}^n$ приводит по теореме Лиувилля для гармонических функций к равенству $\operatorname{Im} f(z) = \mathrm{const}$ в $\mathbb{C}^n$ и, стало быть, $f(z) = \mathrm{const}$ в $\mathbb{C}^n$. Наконец, можно считать, что $\operatorname{Im} f(z) > 0$ в T^C. Действительно, если $\operatorname{Im} f(z^0) = 0$ в некоторой точке $z^0 \in T^C$, то в силу принципа максимума для гармонических функций $\operatorname{Im} f(z) \equiv 0$ в T^C, и тогда $f(z) = \mathrm{const}$ в T^C.

Функция $f(z)$ класса $H_+(T^C)$ удовлетворяет оценке (см. § 13.3): *для любого конуса $C' \Subset C$ существует число $M(C')$*

такое, что

$$|f(z)| \leqslant M(C') \frac{1+|z|^2}{|y|}, \qquad z \in T^{C'}. \tag{1.1}$$

Следовательно, $f \in H(C)$ (см. § 12.1).

Пусть теперь C — (выпуклый) острый конус (см. § 4.4) и $f \in H_+(T^C)$. В силу оценки (1.1) $f(z)$ обладает спектральной функцией $g(\xi)$ из $\mathcal{S}'(C^*)$ (см. § 12.2), $f(z) = L[g]$. Отсюда, пользуясь определением преобразования Лапласа (см. § 9.1) при всех $z \in T^C$ имеем

$$\operatorname{Im} f(x+iy) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2i} = F\left[\frac{g(\xi)\, e^{-(y,\xi)} - g^*(\xi)\, e^{(y,\xi)}}{2i}\right](x), \tag{1.2}$$

где $g(\xi) \to g^*(\xi) = \overline{g(-\xi)}$. Из (1.2) выводим равенство

$$\frac{1}{2i}\left[g(\xi)\, e^{-(y,\xi)} - g^*(\xi)\, e^{(y,\xi)}\right] = F_x^{-1}[\operatorname{Im} f(x+iy)](\xi), \quad y \in C. \tag{1.3}$$

Пусть $f_+(x)$ — граничное значение $f(z)$ в $\mathcal{S}'$, т. е.

$$\int f(x+iy)\,\varphi(x)\,dx \to (f_+, \varphi) \quad y \to 0, \ y \in C, \ \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.4}$$

Тогда $g = F^{-1}[f_+]$ и $\operatorname{Im} f_+$ — неотрицательная мера медленного роста (см. § 5.3). Обозначим ее через $\mu = \operatorname{Im} f_+$.

Переходя в равенстве (1.3) к пределу при $y \to 0$, $y \in C$ в $\mathcal{S}'$ (см. § 12.2) и пользуясь (1.4), получим

$$\frac{g - g^*}{2i} = F^{-1}[\operatorname{Im} f_+] = F^{-1}[\mu], \tag{1.5}$$

так что $-ig(\xi) + ig^*(\xi)$ — положительно определенная обобщенная функция в силу теоремы Бохнера — Шварца (см. § 8.2).

Докажем теперь следующую теорему единственности для функций класса $H_+(T^C)$ (и класса $\mathcal{P}_+(T^C)$).

Теорема. *Если* $f \in H_+(T^C)$ *и* $\mu = \operatorname{Im} f_+ = 0$, *то* $f(z) = (a, z) + b$, *где* $a \in C^*$ *и* $\operatorname{Im} b = 0$.

Следствие. *Если* $u \in \mathcal{P}_+(T^C)$ *и ее граничное значение* $\mu = 0$, *то* $u(x, y) = (a, y)$, *где* $a \in C^*$.

Доказательство. Так как $\mu = 0$, то в силу (1.5) спектральная функция g (из $\mathcal{S}'(C^*)$) функции f удовлетворяет условию $g = g^*$, и, стало быть, поскольку $-C^* \cap C^* = \{0\}$ (конус C^* — острый!), то $\operatorname{supp} g = \{0\}$. По теореме § 2.6

$$g(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} C_\alpha D^\alpha \delta(\xi),$$

так что $f(z)$ — полином. Но $f \in H_+(T^C)$ и оценка (1.1) показывает, что степень этого полинома не может быть выше первой,

так что $f(z) = (a, z) + b$, $z \in T^C$. Но

$$\operatorname{Im} f(z) = (\operatorname{Re} a, y) + (\operatorname{Im} a, x) + \operatorname{Im} b \geqslant 0, \quad z \in T^C,$$

и потому $\operatorname{Re} a \in C^*$ и $\operatorname{Im} a = 0$. Далее, из $\operatorname{Im} f_+(x) = 0$ следует, что $\operatorname{Im} b = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема есть простейший вариант теоремы об «острие клина» Боголюбова (см., например, В. С. Владимиров [1], § 27).

Примеры функций класса $H_+(G)$. 1. Если $f \in H_+(G)$, то $-\frac{1}{f} \in H_+(G)$ (см. § 13.3).

2. Если C — острый конус, μ — неотрицательная мера на единичной сфере, $\operatorname{supp} \mu \subset \operatorname{pr} C^*$, то

$$\left[\int_{\operatorname{pr} C^*} \frac{\mu(d\sigma)}{(z, \sigma)}\right]^{-1} \in H_+(T^{\operatorname{ch} C}).$$

3. $\sqrt{z^2} \in H_+(T^{V^+})$ (см. пример 2 § 10.2).

2. Оценки роста функций класса $\mathcal{P}_+(T^C)$. Всякая функция $u(x, y)$ класса $\mathcal{P}_+(T^C)$ является мнимой частью некоторой функции $f(z)$ класса $H_+(T^C)$. Поэтому она удовлетворяет оценке (1.1), а ее граничное значение в $\mathcal{S}'$ есть неотрицательная мера $\mu = \operatorname{Im} f_+ = u(x, +0)$ медленного роста, так что в силу (1.4)

$$\int u(x, y)\,\varphi(x)\,dx \to \int \varphi(x)\,\mu(dx), \quad y \to 0, \ y \in C, \ \varphi \in \mathcal{S}. \tag{2.1}$$

Однако для функций класса $\mathcal{P}_+(T^C)$ можно указать более точные оценки роста и граничного поведения в терминах соответствующего интеграла Пуассона, а именно: справедлива следующая

Теорема. *Если* $u \in \mathcal{P}_+(T^C)$, *где* C — *острый (выпуклый) конус, то имеет место оценка*

$$\int \mathcal{P}_C(x - x', y)\, u(x', y')\, dx' \leqslant u(x, y + y'), \quad (x, y) \in T^C, \quad y' \in C, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{P}_C$ — *ядро Пуассона области* T^C. *В частности, для граничного значения функции* $u(x, y)$ — *меры* $\mu = u(x, +0)$, — оценка (2.2) принимает вид

$$\int \mathcal{P}_C(x - x', y)\, \mu(dx') \leqslant u(x, y), \quad (x, y) \in T^C. \tag{2.2'}$$

Функция $u(x, y)$ *принимает граничное значение* μ *в следующем смысле: для любой* $\varphi \in C \cap \mathcal{L}^\infty$

$$\int u(x, y')\, \mathcal{P}_C(x, y)\, \varphi(x)\, dx \to \int \varphi(x)\, \mathcal{P}_C(x, y)\, \mu(dx),$$
$$y' \to 0, \quad y' \in C', \quad \forall C' \Subset C, \quad y \in C. \tag{2.3}$$

Следствия. *В условиях теоремы справедливы следующие утверждения:*

1) *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и компакта* $K \Subset T^C$ *существует число* $R > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_{|x'|>R} \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') < \varepsilon, \qquad (x, y) \in K. \tag{2.4}$$

2) *Если* $f \in C \cap \mathscr{L}^\infty$, *то интеграл*

$$\int f(x-x')\,\mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') \tag{2.5}$$

— непрерывная функция в T^C.

3) *Для интеграла Пуассона*

$$\int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') = \mu * \mathscr{P}_C$$

справедлива формула преобразования Фурье

$$F[\mu * \mathscr{P}_C] = F[\mu]F[\mathscr{P}_C]. \tag{2.6}$$

4) *Справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') \to \mu, \quad y \to 0, \quad y \in C \text{ в } \mathscr{S}', \tag{2.7}$$

$$\int \mathscr{P}_C(x-x', y')\,u(x', y)\,dx' \to u(x, y),$$
$$y' \to 0, \quad y' \in C, \quad \forall (x, y) \in T^C. \tag{2.8}$$

5) *Для любого (открытого) выпуклого конуса* $C' \Subset C$ *существует функция* $v_{C'}(y)$ *со свойствами:*

а) $v_{C'}(y)$ неотрицательна и непрерывна в C';

б) $v_{C'}(y) \to 0$, $y \to 0$, $y \in C'$,

в) $$u(x, y) = \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') + v_{C'}(y), \quad (x, y) \in T^{C'}. \tag{2.9}$$

6) *Если* C *— регулярный конус, то*

$$\int u(x', y')\,\mathscr{P}_C(z-x';\, z^0-x')\,dx' \to \int \mathscr{P}_C(z-x';\, z^0-x')\,\mu(dx'),$$
$$y' \to 0, \quad y' \in C', \quad \forall C' \Subset C, \quad z \in T^C, \quad z^0 \in T^C, \tag{2.10}$$

где $\mathscr{P}_C$ *— ядро Шварца области* T^C (см. § 12.5).

Замечание 1. Так как из $u \in \mathscr{P}_+(T^C)$ следует, что $u \in \mathscr{P}_+(T^{C_1})$, $C_1 \subset C$, то все перечисленные утверждения остаются справедливыми и для произвольного (открытого) выпуклого конуса $C_1 \subset C$.

Замечание 2. Предельное соотношение (2.7) справедливо также и на функциях вида

$$\varphi(x) = \psi(x)\,\mathscr{P}_{C_1}(x, y'), \ \forall \psi \in C \cap \mathscr{L}^\infty, \quad y' \in C_1, \quad C_1 \subset C, \tag{2.11}$$

при условии, что $y \to 0$, $y \in C'$, $\forall C' \Subset C$.

Замечание 3. Оценки (2.2) и (2.2′) при $n = 1$, $C = (0, \infty)$ (верхняя полуплоскость) вытекают из представления Герглотца — Неванлинны (см. ниже, § 17.2). В общем случае они доказаны В. С. Владимировым (в [7] для $C = \mathbb{R}^n_+$); в [10], II для $C = V^+$, $n = 4$; в [12] для общего случая).

Замечание 4. Возникает вопрос: справедливо ли представление (2.9) при $C = C'$, т. е. возможен ли перехода к пределу под знаком интеграла в интеграле Пуассона (2.9) при $C' \to C$, $C' \Subset C$? Положительный ответ на этот вопрос в двух частных случаях дан В. С. Владимировым в [7] $(C = \mathbb{R}^n_+)$ и в [10], IV ($C = V^+$, $n = 4$).

Для доказательства теоремы фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$f_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{1 - i\varepsilon f(z)}, \tag{2.12}$$

где $f \in H_+(T^C)$ такова, что $\operatorname{Im} f = u$. Обозначим $\operatorname{Re} f = v$, так что $f = v + iu$. Функция $f_\varepsilon(z)$ обладает следующими свойствами:

а) принадлежит классу $H_+(T^C)$, поскольку

$$\operatorname{Re}(1 - i\varepsilon f) = 1 + \varepsilon u \geqslant 1, \quad \operatorname{Im} f_\varepsilon = \frac{u + \varepsilon(v^2 + u^2)}{(1 + \varepsilon u)^2 + \varepsilon^2 v^2} \geqslant 0;$$

б) ограничена в T^C,

$$|f_\varepsilon(z)| \leqslant \min\left[\frac{1}{\varepsilon}, |f(z)|\right],$$

так как

$$|f_\varepsilon|^2 = \frac{v^2 + u^2}{1 + 2\varepsilon u + \varepsilon^2(v^2 + u^2)};$$

в) $f_\varepsilon(z) \overset{z \in K}{\rightrightarrows} f(z)$, $\varepsilon \to 0$ $\forall K \Subset T^C$.

Пусть y' — произвольная фиксированная точка из C. Функция $f_\varepsilon(z + iy')$ ограничена и непрерывна по z на $\overline{T^C}$. Поэтому при всех $z^0 \in T^C$

$$f_\varepsilon(x + iy')\,\mathscr{K}_C(x - \bar z^0) \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{H}_0,$$

так что выполнено условие (5.5) § 12. По теореме § 12.5 функция $f_\varepsilon(z + iy')$ представима интегралом Пуассона, так что

$$\operatorname{Im} f_\varepsilon(z + iy') = \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x' + iy')\,\mathscr{P}_C(x - x', y)\,dx', \quad z \in T^C, \quad y' \in C. \tag{2.13}$$

Переходя в равенстве (2.13) к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая свойство в) и пользуясь леммой Фату, получаем неравенство (2.2).

Теперь докажем оценку (2.2′). Пусть последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к 1 в $\mathbb{R}^n$ (см. § 4.1), причем $0 \leqslant \eta_k(x) \leqslant 1$, $\eta_k(x) \leqslant \eta_{k+1}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда из неравенства (2.2) следует неравенство

$$\int \mathscr{P}_C(x - x', y)\, \eta_k(x')\, u(x', y')\, dx' \leqslant u(x, y + y'), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

откуда и из предельного соотношения (2.1) при $y' \to 0$, $y' \in C$ выводим неравенство

$$\int \mathscr{P}_C(x - x', y)\, \eta_k(x')\, \mu(dx') \leqslant u(x, y), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$ и пользуясь теоремой Б. Леви, получим неравенство (2.2′).

Теперь докажем предельное соотношение (2.3) на функциях $\varphi \in C$, $\varphi(\infty) = 0$, т. е. $\varphi \in \overline{C}_0$ (см. § 0.5). Так как $\mathcal{D}$ плотно в $\overline{C}_0$ по норме в C (см. § 1.2), то для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \psi \in \mathcal{D}$ такое, что $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда, а также из неравенств (2.2) и (2.2′) выводим неравенство

$$\left| \int u(x, y')\, \mathscr{P}_C(x, y)\, \varphi(x)\, dx - \int \varphi(x)\, \mathscr{P}_C(x, y)\, \mu(dx) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int u(x, y')\, \mathscr{P}_C(x, y)\, \psi(x)\, dx - \int \psi(x)\, \mathscr{P}_C(x, y)\, \mu(dx) \right| +$$
$$+ \varepsilon\, [u(0, y + y') + u(0, y)],$$

из которого и из (2.1) заключаем о справедливости (2.3) на функциях $\varphi \in \overline{C}_0$ (если $y' \to 0$, $y' \in C$).

Теперь докажем следствие 1). Его достаточно доказать для любого достаточно малого шара K. Пусть $U(z_0; 2r_0) \Subset T^C$. В силу (2.2′) и (1.1) § 11 имеет место неравенство

$$\int \left| \mathscr{K}_C(x - x' + iy) \right|^2 \mu(dx') \leqslant (2\pi)^n\, \mathscr{K}_C(2iy)\, u(x, y). \quad (2.14)$$

Так как функция $|\mathscr{K}_C(z)|^2$ плюрисубгармоническая в T^C, то по теореме о шаровом среднем при всех $x' \in \mathbb{R}^n$ и $z \in U(z_0; r_0)$ справедливо неравенство (см., например, В. С. Владимиров [1], § 10)

$$|\mathscr{K}_C(z - x')|^2 \leqslant C_0 \int\limits_{U(z;\, r_0)} |\mathscr{K}_C(x'' - x' + iy'')|^2\, dx''\, dy'' \leqslant$$
$$\leqslant C_0 \int\limits_{U(z_0;\, 2r_0)} |\mathscr{K}_C(x'' - x' + iy'')|^2\, dx''\, dy'', \quad (2.15)$$

где $\dfrac{1}{C_0} = \operatorname{mes} U(0; r_0)$.

Из неравенства (2.14) по теореме Фубини следует существование интеграла

$$\int \int\limits_{U(z_0;\, 2r_0)} |\mathscr{K}_C(x'' - x' + iy'')|^2 dx''\, dy''\, \mu(dx') =$$
$$= \int\limits_{U(z_0;\, 2r_0)} \int |\mathscr{K}_C(x'' - x' + iy'')|^2\, \mu(dx')\, dx''\, dy'' \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^n \int\limits_{U(z_0;\, 2r_0)} \mathscr{K}_C(2iy'')\, u(x'', y'')\, dx''\, dy'' < \infty.$$

Отсюда в силу теоремы Б. Леви

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{|x'| > R} \int\limits_{U(z_0;\, 2r_0)} |\mathscr{K}_C(x'' - x + iy'')|^2\, dx''\, dy''\, \mu(dx') = 0. \quad (2.16)$$

Интегрируя неравенство (2.15) по области $|x'| > R$ по мере μ, из (2.16) выводим

$$\int\limits_{|x'| > R} |\mathscr{K}_C(z - x')|^2\, \mu(dx') \xRightarrow{z \in U(z_0;\, r_0)} 0, \qquad R \to \infty,$$

откуда и следует (2.4).

Докажем следствие 2). По следствию 1) интеграл (2.5) в окрестности каждой точки области T^C представляется в виде суммы двух интегралов: непрерывной функции (при $|x'| \leqslant R$) и сколь угодно малой функции (при $|x'| > R$).

Докажем следствие 3). Формула (2.6) вытекает из оценки (2.2′) и из теоремы Фубини в силу выкладок:

$$(\mu * \mathscr{P}_C, \varphi) = \iint \mathscr{P}_C(x - x', y)\, \mu(dx')\, \varphi(x)\, dx =$$
$$= \iint \mathscr{P}_C(x' - x, y)\, \varphi(x)\, dx\, \mu(dx') = (\mu, \mathscr{P}_C * \varphi) =$$
$$= (F[\mu], F^{-1}[\mathscr{P}_C * \varphi]) = (F[\mu], F[\mathscr{P}_C]\, F^{-1}[\varphi]) =$$
$$= (F[\mu]\, F[\mathscr{P}_C], F^{-1}[\varphi]) = (F^{-1}[F[\mu]\, F[\mathscr{P}_C]], \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Теперь докажем предельное соотношение (2.7) на функциях $\varphi(x)$ вида (2.11), в которых дополнительно предполагается, что $\psi(\infty) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi \geqslant 0$. Обозначим

$$\chi(x) = \int \varphi(x + x')\, \mu(dx') = \int \psi(x + x')\, \mathscr{P}_{C_1}(x + x', y')\, \mu(dx'). \quad (2.17)$$

Принимая во внимание замечание 1, заключаем, что функция $\chi \geqslant 0$, непрерывна в $\mathbb{R}^n$ (следствие 2)) и удовлетворяет в силу (2.2′) оценкам

$$\chi(x) \leqslant \|\psi\|_{\mathscr{L}^\infty} \int \mathscr{P}_{C_1}(x+x', y')\,\mu(dx') \leqslant \|\psi\|_{\mathscr{L}^\infty} u(-x, y'), \qquad (2.18)$$

$$\int \chi(x)\,\mathscr{P}_C(x, y)\,dx \leqslant \|\psi\|_{\mathscr{L}^\infty} \int u(-x, y')\,\mathscr{P}_C(x, y)\,dx \leqslant \leqslant \|\psi\|_{\mathscr{L}^\infty} u(0, y+y'). \qquad (2.19)$$

Оценка (2.19) дает возможность применять теорему Фубини в следующей цепочке равенств:

$$\int \varphi(x) \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx')\,dx = \int \mathscr{P}_C(\xi, y) \int \varphi(x'+\xi)\,\mu(dx')\,d\xi = \int \mathscr{P}_C(\xi, y)\,\chi(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, переходя к пределу при $y \to 0$, $y \in C$ и пользуясь свойством а) § 11.3 ядра Пуассона $\mathscr{P}_C$, получаем неравенство

$$\underline{\lim} \int \varphi(x) \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx')\,dx \geqslant \geqslant \lim \int\limits_{|\xi|<1} \mathscr{P}_C(\xi, y)\,\chi(\xi)\,d\xi = \chi(o) = \int \varphi(x')\,\mu(dx'). \qquad (2.20)$$

С другой стороны, в силу оценки (2.2′) для конуса C' и предельного соотношения (2.3) при $y \to 0$, $y \in C$ имеем

$$\overline{\lim} \int \varphi(x) \int \mathscr{P}_{C'}(x-x', y)\,\mu(dx')\,dx \leqslant \lim \int \varphi(x)\,u(x, y)\,dx = = \lim \int \psi(x)\,\mathscr{P}_{C'}(x, y')\,u(x, y)\,dx = \int \psi(x)\,\mathscr{P}_{C'}(x, y')\,\mu(dx) = = \int \varphi(x)\,\mu(dx). \qquad (2.21)$$

Неравенство (2.21) вместе с противоположным неравенством (2.20) дает предельное соотношение (2.7) на функциях φ рассматриваемого вида.

Случай $\varphi \in \mathscr{S}$ рассматривается аналогично, проще.

Таким же методом доказывается и предельное соотношение (2.8) (ср. (2.20) и (2.21)): если $y' \to 0$, $y' \in C$, то

$$\overline{\lim} \int \mathscr{P}_C(x-x', y')\,u(x', y)\,dx' \leqslant \lim u(x, y+y') = u(x, y) = = \lim \int\limits_{|x-x'|<1} \mathscr{P}_C(x-x', y')\,u(x', y)\,dx' \leqslant \leqslant \underline{\lim} \int \mathscr{P}_C(x-x', y')\,u(x', y)\,dx.$$

Здесь мы опять воспользовались (2.2) и § 11.3,а).

Докажем следствие 5). Пусть $C' \Subset C$. По доказанному (см. замечание 1) функция

$$v_{C'}(x, y) = u(x, y) - \int \mathscr{P}_{C'}(x-x', y)\,\mu(dx'), \qquad (x, y) \in T^{C'} \qquad (2.22)$$

неотрицательна (см. (2.2′)), непрерывна в $T^{C'}$ (см. следствие 2)) и удовлетворяет оценке (см. (2.2))

$$\int v_{C'}(x, y)\,\mathscr{P}_{C''}(x, y')\,dx \leqslant \int u(x, y)\,\mathscr{P}_{C''}(x, y')\,dx \leqslant u(0, y+y'), \quad \forall C'' \subset C',\ y \in C',\ y' \in C''. \qquad (2.23)$$

Применяя к (2.22) преобразование Фурье F_x^{-1} и пользуясь формулами (1.3), (1.5) и (2.6), при всех $y \in C'$ получим равенство

$$2iF_x^{-1}[v_{C'}](\xi) = g(\xi)\,e^{-(y,\,\xi)} - g^*(\xi)\,e^{(y,\,\xi)} - - [g(\xi) - g^*(\xi)]\,F_x[\mathscr{P}_{C'}](\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (2.24)$$

где $g(\xi)$ — спектральная функция функции $f(z)$, $\operatorname{Im} f(z) = u(x, y)$, $g \in \mathscr{S}'(C^*)$ (см. § 16.1). Принимая во внимание равенство (1.10) § 11:

$$F_x[\mathscr{P}_{C'}](\xi) = e^{-|(y,\,\xi)|}, \qquad \xi \in -C'^* \cup C'^*$$

и учитывая, что $\operatorname{supp} g \subset C^*$, $\operatorname{supp} g^* \subset -C^*$ и $C^* \Subset \operatorname{int} C'^*$ из (2.24) выводим $\operatorname{supp} F_x^{-1}[v_{C'}] = \{0\}$. Отсюда по теореме § 2.6 следует, что

$$F_x^{-1}[v_{C'}](\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant N(y)} C_\alpha(y)\,D^\alpha\delta(\xi),$$

так что $v_{C'}(x, y)$ есть полином по x. Считая в оценке (2.23) C'' n-гранным конусом, заключаем, что $v_{C'}(x, y) = v_{C'}(y)$ не зависит от x (см. § 11.3, д)). Таким образом, свойства а) и в) доказаны. Осталось доказать свойство б). Пусть $\omega \in \mathscr{D}$, $\int \omega(x)\,dx = 1$. Принимая во внимание предельные соотношения (2.1) и (2.7), из (2.9) получаем

$$v_{C'}(y) = \int v_{C'}(y)\,\omega(x)\,dx = \int u(x, y)\,\omega(x)\,dx - - \int \omega(x) \int \mathscr{P}_{C'}(x-x', y)\,\mu(dx')\,dx \to \int \omega(x)\,\mu(dx) - - \int \omega(x)\,\mu(dx) = 0, \qquad y \to 0,\ y \in C',$$

что и требовалось.

Теперь распространим предельное соотношение (2.3) на функции $\varphi \in C \cap \mathscr{L}^{\infty}$. Пусть $C' \Subset C$. Так как каждый конус $C' \Subset C$ можно покрыть конечным числом n-гранных конусов, компактных в C, то (2.3) достаточно установить для n-гранного конуса C'. Пользуясь представлением (2.9),

$$u(x, y') = \int \mathscr{P}_{C'}(x - x', y') \mu(dx') + v_{C'}(y'), \qquad (x, y') \in T^{C'},$$

где $v_{C'}(y') \to 0$, $y' \to 0$, $y' \in C'$, имеем равенство

$$\int u(x, y') \mathscr{P}_C(x, y) \varphi(x)\, dx = \int \mathscr{P}_{C'}(x, y') \psi(x, y)\, dx + \\ + v_{C'}(y') \int \mathscr{P}_C(x, y) \varphi(x)\, dx, \qquad y \in C,\ y' \in C', \tag{2.25}$$

где обозначено

$$\psi(x, y) = \int \varphi(x + x') \mathscr{P}_C(x + x', y) \mu(dx').$$

Перемена порядка интегрирования в интеграле справа в (2.25) возможна в силу теоремы Фубини и оценок (2.2) и (2.2′), обеспечивающих существование повторного интеграла

$$\int \mathscr{P}_{C'}(x, y') |\psi(x, y)|\, dx \leqslant \int \mathscr{P}_{C'}(x, y') \int |\varphi(x + x')| \mathscr{P}_C(x + \\ + x', y) \mu(dx')\, dx \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\infty} \int \mathscr{P}_{C'}(x, y') u(-x, y)\, dx \leqslant \\ \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^\infty} u(0, y + y'), \qquad y \in C,\ y' \in C.$$

Далее, последняя оценка вместе с непрерывностью функции $\psi(x, y)$ в T^C (см. следствие 2)) дает возможность применить результат § 11.3,г) к интегралу справа в равенстве (2.25). В результате при $y' \to 0$, $y' \in C'$ получаем (2.3)

$$\int u(x, y') \mathscr{P}_C(x, y) \varphi(x)\, dx \to \psi(0, y) = \int \varphi(x') \mathscr{P}_C(x', y) \mu(dx').$$

Из доказанного следует справедливость предельного соотношения (2.7) на функциях вида (2.11) при условии, что $y \to 0$, $y \in C'$, $\forall C' \Subset C$ (замечание 2)).

Докажем следствие 6). В силу оценок (5.4) § 12 и (2.2) интеграл (2.10) существует. Обозначая

$$\varphi(x') = \frac{\mathscr{P}_C(z - x';\ z^0 - x') |\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)|}{\mathscr{K}_C(2iy) \mathscr{P}_C(x - x', y) + [\mathscr{K}_C(2iy^0) + |\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)|] \mathscr{P}_C(x^0 - x', y^0)},$$

имеем: $|\varphi(x')| \leqslant 1$ (см. (5.4) § 12), $\varphi \in C^\infty$ и

$$\int \mathscr{P}_C(z - x';\ z^0 - x') u(x', y')\, dx' = \\ = \int \left\{ \frac{\mathscr{K}_C(2iy)}{|\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)|} \mathscr{P}_C(x - x', y) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\mathscr{K}_C(2iy^0)}{|\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)|} + 1 \right] \mathscr{P}_C(x^0 - x', y^0) \right\} \times \\ \times \varphi(x') u(x', y')\, dx'.$$

Отсюда и из (2.3) следует предельное соотношение (2.10).

Доказательство теоремы и ее следствий закончено.

3. Оценки роста функций класса $H_+(T^C)$. Здесь мы установим, что наряду с оценкой (1.1) всякая функция класса $H_+(T^C)$ оценивается через ее мнимую часть, оценки роста и граничного поведения которой изложены в § 16.2.

Теорема. *Если $f \in H_+(T^C)$, то*

$$|\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)[f(z) - \bar{f}(z^0)]|^2 \leqslant \\ \leqslant 4\mathscr{K}_C(2iy^0) \mathscr{K}_C(2iy) \operatorname{Im} f(z^0) \operatorname{Im} f(z), \qquad z \in T^C,\ z^0 \in T^C. \tag{3.1}$$

Следствие. *Если $f \in H_+(T^C)$, то*

$$\int |\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)|^4 |f(z) - \bar{f}(z^0)|^2\, dx \leqslant \\ \leqslant 4(2\pi)^n \mathscr{K}_C(2iy^0) \mathscr{K}_C(2iy) \mathscr{K}_C(2iy_0 + 2iy) \operatorname{Im} f(z^0) \operatorname{Im} f(z^0 + 2iy), \\ y \in C,\ z^0 \in T^C. \tag{3.2}$$

Для доказательства построим по формуле (2.12) функцию $f_\varepsilon(z)$, $\varepsilon > 0$ и применим к функции $f_\varepsilon(z + iy')$, $y' \in C$ представление (5.9) § 12

$$\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)[f_\varepsilon(z + iy') - \bar{f}_\varepsilon(z^0 + iy')] = \\ = \frac{2i}{(2\pi)^n} \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x' + iy') \mathscr{K}_C(z - x') \mathscr{K}_C(x' - \bar{z}^0)\, dx', \\ z^0 \in T^C, \quad z \in T^C, \quad y' \in C.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши — Буняковского выводим неравенство

$$|\mathscr{K}_C(z - \bar{z}^0)[f_\varepsilon(z + iy') - \bar{f}_\varepsilon(z^0 + iy')]|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{4}{(2\pi)^{2n}} \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x' + iy') |\mathscr{K}_C(z - x')|^2\, dx' \times \\ \times \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x'' + iy') |\mathscr{K}_C(x'' - \bar{z}^0)|^2\, dx'' = \\ = 4\mathscr{K}_C(2iy) \mathscr{K}_C(2iy^0) \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x' + iy') \mathscr{P}_C(x - x', y)\, dx' \times \\ \times \int \operatorname{Im} f_\varepsilon(x'' + iy') \mathscr{P}_C(x^0 - x'', y^0)\, dx''.$$

Применяя теперь два раза оценку (2.2), получаем

$$|\mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)[f_\varepsilon(z+iy')-\bar{f}_\varepsilon(z^0+iy')]|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\mathscr{K}_C(2iy^0)\mathscr{K}_C(2iy)\operatorname{Im} f_\varepsilon(z+iy')\operatorname{Im} f_\varepsilon(z^0+iy'),$$
$$z^0 \in T^C, \quad z \in T^C, \quad y' \in C.$$

Устремляя здесь $y' \to 0$, $y' \in C$ и затем $\varepsilon \to 0$, получим требуемую оценку (3.1).

Для доказательства неравенства (3.2) умножим неравенство (3.1) на $|\mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)|^2$, проинтегрируем по x и воспользуемся неравенством (2.2):

$$\int |\mathscr{K}_C(z-\bar{z}^0)|^4 |f(z)-\bar{f}(z^0)|^2\,dx \leqslant 4(2\pi)^n \mathscr{K}_C(2iy^0)\mathscr{K}_C(2iy) \times$$
$$\times \mathscr{K}_C(2iy_0+2iy)\operatorname{Im} f(z^0)\int \mathscr{P}_C(x-x^0, y+y^0)\operatorname{Im} f(x+iy)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 4(2\pi)^n \mathscr{K}_C(2iy^0)\mathscr{K}_C(2iy)\mathscr{K}_C(2iy_0+2iy) \times$$
$$\times \operatorname{Im} f(z^0)\operatorname{Im} f(z^0+2iy).$$

4. Гладкость спектральной функции. Оценки (3.1) и (3.2) влекут определенную гладкость спектральных функций функций класса $H_+(T^C)$, а именно:

Теорема. *Если $f \in H_+(T^C)$, то ее спектральная функция $g(\xi)$ обладает свойством*

$$\theta^2_{C^*} * g \in \mathscr{L}^2_s(C^*), \quad s < -\frac{3}{2}n-1. \tag{4.1}$$

Следствие. *Если $f \in H_+(T^C)$, где C — регулярный конус, то ее спектральная функция g однозначно представляется в виде*

$$g = \theta^{-2}_{C^*} * g_1, \quad g_1 \in \mathscr{L}^2_s(C^*), \quad s < -\frac{3}{2}n-1. \tag{4.2}$$

Замечание. Операторы $\theta^\alpha_{C^*}*$ введены в § 13.5.

Пример 1 (см. (2.16) § 10).

$$\theta^{-2}_{\bar{R}^*_+} = \frac{\partial^{2n}}{\partial\xi_1^2 \ldots \partial\xi_n^2}.$$

Пример 2 (см. § 13.5).

$$\theta^{-2}_{\bar{V}^*_+} = 4^{-n}\pi^{-n+1}\Gamma^{-2}\left(\frac{n+1}{2}\right)\Box^{n+1}.$$

Для доказательства теоремы заменим в неравенстве (3.2) $f(z)$ на $f(z+iy^0)$ и, далее, положим $x^0=0$, $y^0=y$. В результате после несложных преобразований, получим

$$\int |\mathscr{K}_C(x+2iy)|^4 |f(x+2iy)|^2\,dx \leqslant 2|f(2iy)|^2\int |\mathscr{K}_C(x+2iy)|^4\,dx +$$
$$+8\pi^n\mathscr{K}^3_C(2iy)\operatorname{Im} f(2iy)\operatorname{Im} f(4iy), \quad y \in C. \tag{4.3}$$

Но в силу (1.7) § 11 при $p=2$ имеем оценку:

$$\int |\mathscr{K}_C(x+2iy)|^4\,dx = (2\pi)^{2n}\mathscr{K}^2_C(4iy)\int \mathscr{P}^2_C(x, 2y)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{2n}\mathscr{K}^2_C(4iy)\frac{\mathscr{K}^2_C(2iy)}{(2\pi)^n\mathscr{K}_C(4iy)} = \pi^n\mathscr{K}^3_C(2iy).$$

Поэтому неравенство (4.3) принимает вид

$$\|\mathscr{K}^2_C(x+2iy)f(x+2iy)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 8\pi^n\mathscr{K}^3_C(2iy)|f(2iy)|(|f(2iy)|+|f(4iy)|), \quad y \in C. \tag{4.4}$$

Пусть теперь произвольный конус $C' \Subset C$. Принимая во внимание оценку (1.1)

$$|f(iy)| \leqslant M(C')\frac{1+|y|^2}{|y|}, \quad y \in C'$$

и оценку (2.4) § 10

$$0 < \mathscr{K}_C(iy) \leqslant M_0\Delta^{-n}(y), \quad y \in C,$$

из (4.4) выводим такую оценку:

$$\|\mathscr{K}^2_C(x+2iy)f(x+2iy)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_1(C')\Delta^{-3n}(y)\frac{1+4|y|^2}{2|y|}\left(\frac{1+4|y|^2}{2|y|}+\frac{1+16|y|^2}{4|y|}\right), \quad y \in C'. \tag{4.5}$$

Но $|y| \geqslant \Delta(y) \geqslant \sigma|y|$, $y \in C'$ при некотором $\sigma > 0$ (см. лемму 1 § 4.4). Поэтому оценку (4.5) можно переписать в виде

$$\|\mathscr{K}^2_C(x+2iy)f(x+2iy)\|^2 \leqslant M_2(C')[1+\Delta^{-3n-2}(y)], \quad y \in C'. \tag{4.6}$$

Оценка (4.6) остается справедливой, если расстояние $\Delta(y)$ заменить на меньшее расстояние $\Delta'(y)$ (от y до $\partial C'$). Применяя лемму § 10.5 $\left(\text{при } a=\varepsilon=0,\ s=0,\ \gamma=\frac{3}{2}n+1\right.$ и $\left.C=C'\right)$, заключаем, что функция $\mathscr{K}^2_C(z)f(z)$ есть преобразование Лапласа функции

$$g_1(\xi) = \theta^2_{C^*} * g \equiv \theta_{C^*} * \theta_{C^*} * g$$

(см. § 9.2, ж)) из $\mathscr{L}^2_{s'}(C'^*)$ при всех $s' < -\frac{3}{2}n - 1$ и $C' \Subset C$, где g — спектральная функция функции f, $f(z) = L[g]$. Следовательно, $g_1 \in \mathscr{L}^2_s(C^*)$ при всех $s < -\frac{3}{2}n - 1$. Теорема доказана.

Для доказательства следствия обозначим $g_1 = \theta^2_{C^*} * g \in \mathscr{L}^2_s(C^*)$, $s < -\frac{3}{2}n - 1$. Тогда в сверточной алгебре $\mathscr{S}'(C^*)$ в случае регулярного конуса C имеем (см. §§ 4.8, г) и 13.1)

$$\theta^{-2}_{C^*} * g_1 = \theta^{-2}_{C^*} * (\theta^2_C * g) = (\theta^{-2}_{C^*} * \theta^2_{C^*}) * g = \delta * g = g.$$

Функция g_1 с указанными свойствами единственна.

5. Индикатриса роста функций класса $\mathscr{P}_+(T^C)$. В § 16.2 изучался рост функций класса $\mathscr{P}_+(T^C)$ при $y \to 0$, $y \in C$ и при $|x| \to \infty$. Здесь мы изучим рост таких функций при $|y| \to \infty$, $y \in C$. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если $u \in \mathscr{P}_+(T^C)$, где C — выпуклый конус, то для каждых ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ и точки $y \in C$ найдется такое число $t_0 \geqslant 0$, что при всех $(x^0, y^0) \in T^D$ функция $u(x^0, y^0 + ty)(t - t_0)^{-1}$ не возрастает по t на (t_0, ∞).*

Доказательство. Фиксируем $z^0 = x^0 + iy^0 \in \mathbb{C}^n$ и $y \in C$. Так как конус C — открытый и выпуклый, то найдется такое число $t_0 = t_0(y^0, y)$, что $y^0 + ty \in C$ при всех $t > t_0$. Поэтому функция $u(x^0 + \sigma y, y^0 + (\tau + t_0)y)$ принадлежит классу $\mathscr{P}_+(T^1)$ (по переменным (σ, τ)). А тогда она представима формулой (см. § 17.1)

$$u(x^0 + \sigma y, y^0 + (\tau + t_0)y) = \frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(x^0, y^0, y; d\sigma')}{(\sigma - \sigma')^2 + \tau^2} + a(x^0, y^0, y)\tau, \tag{5.1}$$

где $a \geqslant 0$ и мера $\mu \geqslant 0$ удовлетворяет условию роста (см. (2.2'))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(x^0, y^0, y; d\sigma')}{1 + \sigma'^2} < \infty.$$

Полагая в (5.1) $\sigma = 0$, деля на τ и полагая $\tau = t - t_0 > 0$, получаем

$$\frac{u(x^0, y^0 + ty)}{t - t_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(x^0, y^0, y; d\sigma')}{\sigma'^2 + (t - t_0)^2} + a(x^0, y^0, y),$$

откуда в силу теоремы Б. Леви заключаем о справедливости леммы 1.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x)$ выпуклая на множестве A. Тогда при всех $x^0 \in A$ и $x \in \mathbb{R}^n$ функция*

$$\frac{1}{t}[f(x^0 + tx) - f(x^0)]$$

не убывает по t на отрезке $[0, t_0]$ при условии, что все точки $x^0 + tx$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, содержатся в A.

Доказательство. По определению выпуклой функции (см. § 0.2) функция $f(x^0 + tx)$ выпуклая по t на $[0, t_0]$, и, стало быть, для любых $0 \leqslant t < t' \leqslant t_0$

$$f(x^0 + tx) = f\left[\frac{t}{t'}(t'x + x^0) + \left(1 - \frac{t}{t'}\right)x^0\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{t}{t'} f(x^0 + t'x) + \left(1 - \frac{t}{t'}\right) f(x^0),$$

т. е.

$$\frac{1}{t}[f(x^0 + tx) - f(x^0)] \leqslant \frac{1}{t'}[f(x^0 + t'x) - f(x^0)],$$

что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Если функция $u(x, y)$ плюрисубгармоническая в трубчатой области $T^D = \mathbb{R}^n + iD$ и ограничена сверху на каждой подобласти $T^{D'}$, $D' \Subset D$, то функция*

$$M(y) = \sup_x u(x, y) \tag{5.2}$$

выпукла и, стало быть, непрерывна в D.

Доказательство. Пусть точки y' и y'' из D таковы, что $\tau y' + (1 - \tau)y'' \in D$ при всех $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Тогда функция

$$v(\sigma, \tau) = u(x + \sigma(y' - y''), y'' + \tau(y' - y'')), \tag{5.3}$$

субгармоническая в окрестности полосы $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, ограничена сверху и в силу (5.3)

$$v(\sigma, 0) = u(x + \sigma(y' - y''), y'') \leqslant M(y''),$$
$$v(\sigma, 1) = u(x + \sigma(y' - y''), y') \leqslant M(y').$$

Но тогда функция

$$\chi(\sigma, \tau) = v(\sigma, \tau) - \tau M(y') - (1 - \tau) M(y''), \tag{5.4}$$

субгармоническая в окрестности полосы $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, ограничена сверху и неположительна на границе полосы. По теореме Фрагмена — Линделёфа для субгармонических функций $\chi(\sigma, \tau) \leqslant 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, так что в силу (5.4) и (5.3) (при $\sigma = 0$)

$$u(x, \tau y' + (1 - \tau) y'') \leqslant \tau M(y') + (1 - \tau) M(y'').$$

Отсюда в силу (5.2) выводим неравенство

$$M(\tau y' + (1-\tau) y'') \leqslant \tau M(y') + (1-\tau) M(y''),$$

которое и доказывает лемму 3.

Пусть $u \in \mathscr{P}_+(T^C)$, где C — выпуклый конус. Введем индикатрису роста $h(u; y)$ функции u по формуле

$$h(u; y) = \lim_{t \to +\infty} \frac{u(0, ty)}{t}, \quad y \in C. \tag{5.5}$$

По лемме 1 предел в (5.5) существует и неотрицателен.

Введем функцию

$$\lambda(u; y) = \lim_{t \to +\infty} \frac{m(ty)}{t}, \tag{5.6}$$

где величина $m(y)$ определяется формулой

$$m(y) = \inf_x u(x, y), \quad y \in C.$$

По лемме 3 функция $m(y)$ неотрицательная вогнутая (см. § 0.2) в C и, стало быть, такова же и функция $\frac{m(ty)}{t}$ при всех $t > 0$. По лемме 2 при всех $\varepsilon > 0$ и $y \in C$ функция

$$\frac{1}{t}[m(\varepsilon y + ty) - m(\varepsilon y)]$$

не возрастает по t. Поэтому предел в (5.6) существует и определяет (неотрицательную) вогнутую функцию $\lambda(u; y)$ в C, удовлетворяющую оценке

$$\lambda(u; y) \leqslant \frac{1}{t}[m(\varepsilon y + ty) - m(\varepsilon y)] \leqslant \frac{m(\varepsilon y + ty)}{t}, \quad y \in C, \ t > 0.$$

Полагая здесь $t = 1$ и устремляя $\varepsilon \to 0$, получим оценку

$$\lambda(u; y) \leqslant m(y) \leqslant u(x, y), \quad (x, y) \in T^C. \tag{5.7}$$

Наконец, отметим, что функции h и λ — однородные степени однородности 1, например:

$$\lambda(u; ry) = \lim_{t \to \infty} \frac{m(try)}{t} = r \lim_{t \to \infty} \frac{m(try)}{tr} = \\ = r \lim_{t' \to \infty} \frac{m(t' y)}{t'} = r\lambda(u; y), \quad r > 0.$$

Отсюда, а также из (5.7) и (5.5) следует неравенство

$$\lambda(u; y) \leqslant h(u; y), \quad y \in C. \tag{5.8}$$

Теперь мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Если $u \in \mathscr{P}_+(T^C)$, где C — выпуклый конус, то индикатриса роста $h(u; y)$ неотрицательная, вогнутая однородная степени однородности 1 функция в C, причем*

$$\lambda(u; y) = h(u; y) = \lim_{t \to \infty} \frac{u(x^0, y^0 + ty)}{t}, \tag{5.9}$$

$$(x^0, y^0) \in \mathbb{C}^n, \quad y \in C.$$

При $(x^0, y^0) \in T^C$ функция $\frac{1}{t} u(x^0, y^0 + ty)$ не возрастает по $t \in (0, \infty)$ и справедливо неравенство

$$h(u; y) \leqslant u(x^0, y^0 + y), \quad (x^0, y^0) \in T^C, \quad y \in C. \tag{5.10}$$

Доказательство. Докажем, что при каждом $y \in C$ функция

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u(x^0, y^0 + ty)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{u(x^0, y^0 + ty)}{t - t_0} \tag{5.11}$$

не зависит от (x^0, y^0). Для этого достаточно доказать, в силу теоремы Лиувилля, что при каждом $y \in C$ неотрицательная функция (5.11) — плюригармоническая по (x^0, y^0) в $\mathbb{C}^n$, т. е. плюригармоническая в любой трубчатой области, $T^D = \mathbb{R}^n + iD$, где $D \Subset \mathbb{R}^n$. По лемме 1 функция (5.11) в области T^D есть предел невозрастающей последовательности функций $u(x^0, y^0 + ty) \times (t - t_0)^{-1}$, $t \to \infty$, $t > t_0$, класса $\mathscr{P}_+(T^D)$ и потому сама является плюригармонической в T^D функцией (см. § 16.1). Итак, в силу (5.5) справедливо второе из равенств (5.9), причем по лемме 1 функция $\frac{1}{t} u(x^0, y^0 + ty)$ не возрастает по t при $t > 0$, если $y^0 \in C$. Поэтому

$$h(u; y) \leqslant \frac{1}{t} u(x^0, y^0 + ty), \quad (x^0, y^0) \in T^C, \ y \in C, \ t > 0.$$

Полагая здесь $t = 1$, получим оценку (5.10). Из этой оценки выводим

$$h(u; y) \leqslant m(y), \quad y \in C,$$

так что в силу (5.6)

$$h(u; y) \leqslant \lambda(u; y), \quad y \in C.$$

Это неравенство вместе с обратным неравенством (5.8) и дает первое из равенств (5.9), из которого следует, что индикатриса $h(u; y)$ — вогнутая функция в C. Все утверждения теоремы доказаны.

Замечание. Более общая теория роста плюрисубгармонических функций в трубчатых областях над выпуклыми конусами развита в работе В. С. Владимирова [13].

6. Интегральное представление функций класса $H_+(T^C)$. В этом пункте мы установим, что функция класса $H_+(T^C)$, где C — острый конус, представима в виде суммы интеграла Шварца и линейного члена тогда и только тогда, когда соответствующий интеграл Пуассона — плюригармоническая функция в T^C. Предварительно докажем лемму, обобщающую теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (см. В. С. Владимиров [10], IV).

Лемма. *Пусть последовательности $u_k(x)$ и $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $\mathscr{L}^1$ обладают свойствами:*

1) $|u_k(x)| \leqslant v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, *почти везде в* $\mathbb{R}^n$.

2) $u_k(x) \to u(x)$, $v_k(x) \to v(x) \in \mathscr{L}^1$, $k \to \infty$, *почти везде в* $\mathbb{R}^n$.

3) $\int v_k(x)\,dx \to \int v(x)\,dx$, $k \to \infty$.

Тогда $u \in \mathscr{L}^1$ *и*

$$\int u_k(x)\,dx \to \int u(x)\,dx, \quad k \to \infty. \tag{6.1}$$

Доказательство. Из 1) и 2) следует, что $u \in \mathscr{L}^1$ и $v_k(x) \pm u_k(x) \geqslant 0$, $k=1, 2, \ldots$, почти везде в $\mathbb{R}^n$. Применяя к последовательностям функций $v_k \pm u_k$, $k \to \infty$, лемму Фату и пользуясь 3), выводим цепочку неравенств

$$\int [v(x) \pm u(x)]\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int [v_k(x) \pm u_k(x)]\,dx =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int v_k(x)\,dx + \varliminf_{k\to\infty} \int \pm u_k(x)\,dx =$$
$$= \int v(x)\,dx + \varliminf_{k\to\infty} \int \pm u_k(x)\,dx,$$

откуда выводим

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int u_k(x)\,dx \leqslant \int u(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int u_k(x)\,dx,$$

что эквивалентно предельному соотношению (6.1).

Теорема. *Пусть $f \in H_+(T^C)$, где C — острый (выпуклый) конус. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Интеграл Пуассона*

$$\int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx'), \qquad \mu = \operatorname{Im} f_+ \tag{6.2}$$

— плюригармоническая функция в T^C.

2) *Функция* $\operatorname{Im} f(z)$ *представима в виде*

$$\operatorname{Im} f(z) = \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') + (a, y), \quad z \in T^C \tag{6.3}$$

при некотором $a \in C^*$.

3) *При всех* $y' \in C$ *справедливо представление*

$$\operatorname{Im} f(z+iy') = \int \mathscr{P}_C(x-x', y) \operatorname{Im} f(x'+iy')\,dx' + (a, y), \quad z \in T^C. \tag{6.4}$$

4) *Если C — регулярный конус, то при любом $z^0 \in T^C$ функция $f(z)$ представима в виде*

$$f(z) = i\int \mathscr{P}_C(z-x';\ z^0-x')\,\mu(dx') + (a, z) + b(z^0), \ z \in T^C, \tag{6.5}$$

где $b(z^0)$ — вещественное число.

При этом $b(z^0) = \operatorname{Re} f(z^0) - (a, x^0)$ и (a, y) — наилучшая линейная миноранта индикатрисы роста $h(\operatorname{Im} f;\ y)$ в конусе C.

Замечание. В условиях теоремы наилучшая линейная миноранта неотрицательной вогнутой однородной степени 1 функции $h(\operatorname{Im} f;\ y)$ в конусе C (см. § 16.5) существует. Например: $h(\operatorname{Im}\sqrt{z^2};\ y) = \sqrt{y^2}$ и $(a, y) = 0$ в V^+.

Доказательство. Пусть $f \in H_+(T^C)$. 1)$\to$2). Функция

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) - \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx')$$

принадлежит классу $\mathscr{P}_+(T^C)$ и ее граничное значение при $y \to 0$, $y \in C$ равно 0 (см. § 16.2). По следствию из теоремы § 16.1 $v(x, y) = (a, y)$ при некотором $a \in C^*$. Представление (6.3) доказано.

Докажем, что (a, y) — наилучшая линейная миноранта функции $h(\operatorname{Im} f;\ y)$ в конусе C. Из (6.3) и (5.5) следует, что (a, y) — линейная миноранта h в C. Пусть (a', y) — другая линейная миноранта h в C, т. е.

$$(a', y) \leqslant h(\operatorname{Im} f;\ y), \qquad y \in C. \tag{6.6}$$

Функция

$$f_1(z) = f(z) - (a', z), \quad \operatorname{Im} f_1(z) = \operatorname{Im} f(z) - (a', y)$$

принадлежит классу $H_+(T^C)$, поскольку

$$\operatorname{Im} f(z) \geqslant h(\operatorname{Im} f;\ y) \geqslant (a', y), \qquad z \in T^C$$

по теореме § 16.5 и в силу (6.6). Далее, так как $\operatorname{Im} f_{1+} = \operatorname{Im} f_+ = \mu$, то для $f_1(z)$ выполнено условие 1). Применяя к $\operatorname{Im} f_1(z)$ представление (6.3), получим

$$\operatorname{Im} f_1(z) = \operatorname{Im} f(z) - (a', y) = \int \mathscr{P}_C(x-x', y)\,\mu(dx') + (a'', y), \ z \in T^C$$

при некотором $a'' \in C^*$. Сравнивая это с равенством (6.3), выводим

$$(a, y) = (a', y) + (a'', y) \geqslant (a', y), \quad y \in C,$$

что и требовалось.

2) $\to$ 3). Функция

$$\varphi(z) = f(z) - (a, z), \quad \operatorname{Im}\varphi(z) = \operatorname{Im} f(z) - (a, y) \tag{6.7}$$

принадлежит классу $H_+(T^C)$. Поэтому функция

$$v(x, y, y') = \\ = \operatorname{Im}\varphi(x + iy + iy') - \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \operatorname{Im}\varphi(x' + iy')\,dx' = \\ = \operatorname{Im} f(x + iy + iy') - \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \operatorname{Im} f(x' + iy')\,dx' - (a, y), \\ (x, y) \in T^C, \quad y' \in C \tag{6.8}$$

— неотрицательная (см. (2.2)), плюригармоническая по (x, y') в T^C и в силу (2.3) (при $\varphi = 1$) и (6.3)

$$v(x, y, y') \to \operatorname{Im} f(x + iy) - \int \mathscr{P}_C(x - x', y)\,\mu(dx') - (a, y) = 0, \\ y \to 0, \quad y \in C' \Subset C.$$

По следствию из теоремы § 16.1 $v(x, y, y') = (A_y, y')$, $(x, y') \in T^C$, $A_y \in C^*$ при каждом $y \in C$. Поэтому равенство (6.8) принимает вид

$$\operatorname{Im} f(x + iy + iy') - \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \operatorname{Im} f(x' + iy')\,dx' - \\ - (a, y) - (A_y, y') = 0, \quad (x, y) \in T^C, \ y' \in C. \tag{6.9}$$

Заменим здесь y' на ty', $t > 0$, разделим на t и устремим t к ∞. В результате, пользуясь теоремой § 16.5 и теоремой Б. Леви, получим равенство

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Im} f(x + iy + ity') - \\ - \lim_{t\to\infty} \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \frac{\operatorname{Im} f(x' + ity')}{t}\,dx' - \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(a, y)}{t} + (A_y, y')\right] = \\ = h(\operatorname{Im} f; y') - \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x' + ity')}{t}\,dx' - (A_y, y') = \\ = h(\operatorname{Im} f; y') - h(\operatorname{Im} f; y') \int \mathscr{P}_C(x - x', y)\,dx' - (A_y, y') = (A_y, y'),$$

из которого и из (6.9) следует представление (6.4).

3) $\to$ 4). По формуле (6.7) введем функцию $\varphi(z)$ и, далее, по формуле (2.12) построим функцию $\varphi_\varepsilon(z)$, $\varepsilon > 0$, со свойствами а) — в). Пусть $y' \in C$. К функциям $\operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(z + iy')$ и $\varphi_\varepsilon(z + iy')$ применим представления Пуассона и Шварца соответственно (см. § 12.5)

$$\operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(z + iy') = \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(x' + iy')\,dx', \quad z \in T^C, \tag{6.10}$$

$$\varphi_\varepsilon(z + iy') = i \int \mathscr{P}_C(z - x'; z^0 - x') \operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(x' + iy')\,dx' + \\ + \operatorname{Re}\varphi_\varepsilon(z^0 + iy'), \quad z \in T^C, \ z^0 \in T^C. \tag{6.11}$$

Представление (6.4) показывает, что возможен переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла в равенстве (6.10), поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(z + iy') = \operatorname{Im}\varphi(z + iy') = \operatorname{Im} f(z + iy') - (a, y + y') = \\ = \int \mathscr{P}_C(x - x', y)[\operatorname{Im} f(x' + iy') - (a, y')]\,dx' = \\ = \int \mathscr{P}_C(x - x', y) \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(x' + iy')\,dx'.$$

Но тогда в силу неравенства (5.4) § 12 применима лемма о возможности перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла в равенстве (6.11). В результате, пользуясь формулой (5.3) § 12, получим равенства

$$\varphi(z + iy') = f(z + iy') - (a, z + iy') = \\ = i \int \mathscr{P}_C(z - x'; z^0 - x') \operatorname{Im}\varphi(x' + iy')\,dx' + \operatorname{Re}\varphi(z^0 + iy') = \\ = i \int \mathscr{P}_C(z - x'; z^0 - x')[\operatorname{Im} f(x' + iy') - (a, y')]\,dx' + \\ + \operatorname{Re} f(z^0 + iy') - (a, x^0) = i \int \mathscr{P}_C(z - x'; z^0 - x') \times \\ \times \operatorname{Im} f(x' + iy')\,dx' - i(a, y') + \operatorname{Re} f(z^0 + iy') - (a, x^0),$$

т. е.

$$f(z + iy') = i \int \mathscr{P}_C(z - x'; z^0 - x') \operatorname{Im} f(x' + iy')\,dx' + (a, z) + \\ + \operatorname{Re} f(z^0 + iy') - (a, x^0), \quad z \in T^C, \ z^0 \in T^C, \ y' \in C.$$

Переходя здесь к пределу при $y' \to 0$, $y' \in C' \Subset C$ и пользуясь предельным соотношением (2.10), получим представление (6.5).

4) $\to$ 1). Полагая в представлении (6.5) $z^0 = z$, используя формулу (5.2) § 12 и отделяя мнимую часть, получим представление (6.3), из которого и следует плюригармоничность в T^C интеграла Пуассона (6.2).

Теорема доказана.

§ 17. Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в T^n

В случае конуса $C=\mathbb{R}^n_+$ результаты § 16 допускают усиление. Здесь мы получим интегральные представления для всех функций классов $H_+(T^n)$ и $\mathscr{P}_+(T^n)$. Предварительно докажем леммы.

1. Леммы. Обозначим

$$\mathscr{E}_n(\xi)=\theta_n(\xi)\,\xi_1\,\ldots\,\xi_n$$

фундаментальное решение оператора $D_1^2\,\ldots\,D_n^2$ (здесь $\theta_n(\xi)$ — характеристическая функция конуса $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, см. § 0.2).

Пусть $f\in C^{2n}$. Тогда справедливо равенство

$$e^{-(y,\,\xi^+)}D_1^2\,\ldots\,D_n^2f(\xi)=T_1\,\ldots\,T_n\big[e^{-(y,\,\xi^+)}f(\xi)\big],\tag{1.1}$$

где $\xi\to\xi^+=(|\xi_1|,\,\ldots,\,|\xi_n|)$ и

$$T_j=D_j^2+y_j^2+2y_jD_j\operatorname{sign}\xi_j-2y_j\delta(\xi_j),\qquad j=1,\,\ldots,\,n.$$

Правая часть равенства (1.1) имеет смысл в $\mathscr{D}'$ и при $f\in C$, и мы примем ее за определение обобщенной функции, стоящей в левой части равенства (1.1).

Отметим, что если $f\in C$ и $\operatorname{supp}f\subset\bar{\mathbb{R}}^n_+$, то

$$e^{-(y,\,\xi)}D_1^2\,\ldots\,D_n^2f(\xi)=e^{-(y,\,\xi^+)}D_1^2\,\ldots\,D_n^2f(\xi).\tag{1.2}$$

Действительно, для любой $\varphi\in\mathscr{D}$ в силу (1.1) имеем

$$\big(e^{-(y,\,\xi^+)}D_1^2\,\ldots\,D_n^2f,\,\varphi\big)=\big(T_1\,\ldots\,T_n\big[e^{-(y,\,\xi^+)}f\big],\,\varphi\big)=$$
$$=\int e^{-(y,\,\xi^+)}f(\xi)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\big(D_j^2+y_j^2-2y_j\operatorname{sign}\xi_jD_j\big)\varphi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int e^{-(y,\,\xi)}f(\xi)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\big(D_j^2+y_j^2-2y_jD_j\big)\varphi(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int f(\xi)\,D_1^2\,\ldots\,D_n^2\big[e^{-(y,\,\xi)}\varphi(\xi)\big]\,d\xi=\big(e^{-(y,\,\xi)}D_1^2\,\ldots\,D_n^2f,\,\varphi\big),$$

что и эквивалентно равенству (1.2).

Лемма 1. *Пусть $f(\xi)$ — непрерывная положительно определенная функция в $\mathbb{R}^n$. Тогда при всех $y\in\mathbb{R}^n_+$ обобщенная функция*

$$e^{-(y,\,\xi^+)}\big(1-D_1^2\big)\,\ldots\,\big(1-D_n^2\big)f(\xi)$$

положительно определенная и справедливо равенство

$$F\big[e^{-(y,\,\xi^+)}\big(1-D_1^2\big)\,\ldots\,\big(1-D_n^2\big)f\big]=$$
$$=\int\mathscr{P}_n(x-x',\,y)\big(1+x_1'^2\big)\,\ldots\,\big(1+x_n'^2\big)\,\sigma(dx'),\tag{1.3}$$

где мера $\sigma=F[f]$ и $\mathscr{P}_n(x,\,y)$ — ядро Пуассона области T^n (см. (1.2) § 11).

Доказательство. Отметим, что по теореме Бохнера (см. § 8.2) $\sigma=F[f]$ есть неотрицательная и конечная на $\mathbb{R}^n$ мера, причем справедливы равенства типа

$$f(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_k,\;0,\,\ldots,\,0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ix_1\xi_1-\,\ldots\,-ix_k\xi_k}\sigma(dx).\tag{1.4}$$

Докажем формулу (1.3) при $n=1$. Из (1.1) при всех $y>0$ имеем

$$F\big[e^{-y|\xi|}(1-D^2)f\big]=F\big[(1-T)(e^{-y|\xi|}f)\big]=$$
$$=F\big[(1-D^2-y^2-2yD\operatorname{sign}\xi+2y\delta(\xi))(e^{-y|\xi|}f(\xi))\big]=$$
$$=(1+x^2-y^2)F\big[e^{-y|\xi|}f(\xi)\big]+2ixyF\big[\operatorname{sign}\xi e^{-y|\xi|}f(\xi)\big]+2yf(0).\tag{1.5}$$

Принимая во внимание равенства

$$F\big[e^{-y|\xi|}\big](x)=2\int_0^\infty e^{-y\xi}\cos x\xi\,d\xi=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$F\big[\operatorname{sign}\xi e^{-y|\xi|}\big](x)=2i\int_0^\infty e^{-y\xi}\sin x\,d\xi=\frac{2xi}{x^2+y^2},$$

получаем

$$F\big[f(\xi)\,e^{-y|\xi|}\big]=\frac{1}{2\pi}\,F[f]*F\big[e^{-y|\xi|}\big]=\frac{y}{\pi}\int\frac{\sigma(dx')}{(x-x')^2+y^2},$$

$$F\big[f(\xi)\operatorname{sign}\xi e^{-y|\xi|}\big]=\frac{1}{2\pi}\,F[f]*F\big[\operatorname{sign}\xi e^{-y|\xi|}\big]=\frac{i}{\pi}\int\frac{(x-x')\,\sigma(dx')}{(x-x')^2+y^2}.$$

Подставляя полученные выражения в (1.5) и учитывая равенство (1.4) при $k=0$, получим формулу (1.3) при $n=1$.

Случай $n>1$ рассматривается аналогично, если заметить, что каждый оператор T_j действует только на свою переменную ξ_j, применить технику преобразований Фурье по части переменных (см. §§ 6.2 и 6.3) и воспользоваться равенствами типа (1.4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция $v(\xi)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, причем $\operatorname{supp}v\subset\bar{\mathbb{R}}^n_+$. Тогда решение уравнения*

$$D_1^2\,\ldots\,D_n^2u(\xi)=\big(1-D_1^2\big)\,\ldots\,\big(1-D_n^2\big)\,v(\xi)\tag{1.6}$$

существует и единственно в классе непрерывных функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, удовлетворяющих оценке

$$|u(\xi)|\leqslant C\big(1+\xi_1^2\big)\,\ldots\,\big(1+\xi_n^2\big).\tag{1.7}$$

Доказательство. Решение уравнения (1.6) единственно даже в алгебре $\mathscr{D}'(\bar{R}^n_+)$ и представляется в виде (см. § 4.8, г))

$$u=\mathscr{E}_n*(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,v. \tag{1.8}$$

Представим правую часть равенства (1.8) в виде

$$\begin{aligned}u(\xi)&=(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,\mathscr{E}_n*v=\\&=\{[\theta(\xi_1)\,\xi_1-\delta(\xi_1)]\times\ \dots\ \times[\theta(\xi_n)\,\xi_n-\delta(\xi_n)]\}*v=\\&=(-1)^n v(\xi)+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ j_1<\dots<j_k}}(-1)^{n-k}\int_0^{\xi_{j_1}}\dots\int_0^{\xi_{j_k}}v(\dots,\xi'_{j_1},\dots,\xi'_{j_k},\dots)\times\\&\qquad\times(\xi_{j_1}-\xi'_{j_1})\ \dots\ (\xi_{j_k}-\xi'_{j_k})\,d\xi'_{j_1}\ \dots\ d\xi'_{j_k}.\end{aligned}$$

Осталось заметить, что каждое слагаемое в последней сумме есть непрерывная функция, удовлетворяющая оценке (1.7). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $u(\xi)$ — непрерывная функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$. Тогда решение уравнения*

$$(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,v(\xi)=D_1^2\ \dots\ D_n^2\,u(\xi) \tag{1.9}$$

существует и единственно в классе непрерывных функций медленного роста.

Доказательство. Решение уравнения (1.9) единственно даже в классе $\mathscr{S}'$, так как преобразование Фурье обобщенной функции $(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,\delta(\xi)$, равное $(1+x_1^2)\ \dots\ (1+x_n^2)$, нигде в $\mathbb{R}^n$ в нуль не обращается. Докажем его существование.

$$\mathscr{E}(\xi)=\frac{1}{2}\exp(-|\xi_1|-\ \dots\ -|\xi_n|)$$

есть фундаментальное решение оператора $(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)$. Поскольку $u(\xi)$ — медленного роста, то свертка $\mathscr{E}*u$ существует (см. § 4.1). Поэтому решение v уравнения (1.9) выражается в виде свертки:

$$\begin{aligned}v&=\mathscr{E}*D_1^2\ \dots\ D_1^2u=D_1^2\ \dots\ D_n^2\mathscr{E}*u=\\&=\left\{\left[-\delta(\xi_1)+\frac{1}{2}e^{-|\xi_1|}\right]\times\ \dots\ \times\left[-\delta(\xi_n)+\frac{1}{2}e^{-|\xi_n|}\right]\right\}*u=\\&=(-1)^n u(\xi)+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ j_1<\dots<j_k}}\frac{(-1)^{n-k}}{2^k}\int_{\mathbb{R}^k}u(\dots,\xi'_{j_1},\dots,\xi'_{j_k},\dots)\times\\&\qquad\times\exp\left(-|\xi_{j_1}-\xi'_{j_1}|-\ \dots\ -|\xi_{j_k}-\xi'_{j_k}|\right)d\xi'_{j_1}\ \dots\ d\xi'_{j_k}.\end{aligned}$$

Осталось заметить, что каждое слагаемое в последней сумме есть непрерывная функция медленного роста. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если функция $v(\xi)$ непрерывна, ограничена в $\bar{\mathbb{R}}^2_+\times\mathbb{R}^{n-2}$, $n\geqslant 2$, и удовлетворяет уравнению*

$$(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,v(\xi)=0,\qquad \xi\in\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^{n-2}, \tag{1.10}$$

то она представляется в виде

$$v(\xi)=e^{-\xi_1}v(0,\xi_2,\tilde{\xi})+e^{-\xi_2}v(\xi_1,0,\tilde{\xi})-e^{-\xi_1-\xi_2}v(0,0,\tilde{\xi}), \tag{1.11}$$

где $\tilde{\xi}=(\xi_3,\dots,\xi_n)$.

Доказательство. Продолжим функцию $v(\xi)$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$ и построим для нее среднюю функцию

$$v_\varepsilon(\xi)=\int v(\xi')\,\omega_\varepsilon(\xi-\xi')\,d\xi'=v*\omega_\varepsilon$$

со свойствами (см. §§ 1.2 и 4.6)

$$D^\alpha v_\varepsilon\in C^\infty\cap\mathscr{L}^\infty,\ \forall\alpha;\quad v_\varepsilon(\xi)\to v(\xi),\quad \varepsilon\to 0,\quad \xi\in\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^{n-2},$$
$$(1-D_1^2)\ \dots\ (1-D_n^2)\,v_\varepsilon(\xi)=0,\quad \xi_1>2\varepsilon,\quad \xi_2>2\varepsilon,\quad \tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{n-2}.$$

Положим

$$\chi_\varepsilon(\xi)=(1-D_3^2)\dots(1-D_n^2)\,v_\varepsilon(\xi). \tag{1.12}$$

Тогда $D^\alpha\chi_\varepsilon\in C^\infty\cap\mathscr{L}^\infty$, $\forall\alpha$ и χ_ε удовлетворяют уравнению

$$(1-D_1^2)(1-D_2^2)\,\chi_\varepsilon(\xi)=0,\quad \xi_1>2\varepsilon,\quad \xi_2>2\varepsilon,\quad \tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{n-2}. \tag{1.13}$$

Фиксируем $\delta>0$, и пусть $2\varepsilon<\delta$. Из уравнения (1.13) и из ограниченности функции $(1-D_2^2)\,\chi_\varepsilon(\xi)$ выводим соотношение

$$(1-D_2^2)\,\chi_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\tilde{\xi})=(1-D_2^2)\,\chi_\varepsilon(\delta,\xi_2,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1-\delta)},$$

т. е.

$$(1-D_2^2)[\chi_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\tilde{\xi})-\chi_\varepsilon(\delta,\xi_2,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_2-\delta)}]=0, \tag{1.14}$$
$$\xi_1\geqslant\delta,\quad \xi_2\geqslant\delta.$$

Аналогично из уравнения (1.14) выводим соотношение

$$\chi_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\tilde{\xi})-\chi_\varepsilon(\delta,\xi_2,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_2-\delta)}=$$
$$=[\chi_\varepsilon(\xi_1,\delta,\tilde{\xi})-\chi_\varepsilon(\delta,\delta,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1-\delta)}]\,e^{-(\xi_2-\delta)},$$

т. е. в силу (1.12)

$$\begin{aligned}(1-D_3^2)\dots(1-D_n^2)\,[v_\varepsilon(\xi_1,\xi_2,\tilde{\xi})-v_\varepsilon(\delta,\xi_2,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1-\delta)}-\\-v_\varepsilon(\xi_1,\delta,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_2-\delta)}+v_\varepsilon(\delta,\delta,\tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1+\xi_2-2\delta)}]=0,\\ \xi_1\geqslant\delta,\quad \xi_2\geqslant\delta,\quad \tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{n-2}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу единственности решения последнего уравнения (по лемме 3) вытекает равенство

$$v_\varepsilon(\xi)=v_\varepsilon(\delta,\ \xi_2,\ \tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1-\delta)}+v_\varepsilon(\xi_1,\ \delta,\ \tilde{\xi})\,e^{-(\xi_2-\delta)}-$$
$$-v_\varepsilon(\delta,\ \delta,\ \tilde{\xi})\,e^{-(\xi_1+\xi_2-2\delta)},\quad \xi_1\geqslant\delta,\quad \xi_2\geqslant\delta,\quad \tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{n-2}.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to 0$ и, далее, при $\delta\to 0$, получим представление (1.10). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Равенство*

$$D_1^2\ldots D_n^2u(\xi)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}a_\alpha D^\alpha\delta(\xi)=0 \qquad (1.15)$$

при условии, что $u\in C$, $\operatorname{supp}u\subset\overline{\mathbb{R}}_+^n$, *возможно лишь при* $u(\xi)=0$ *и* $a_\alpha=0$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant N$.

Доказательство. В алгебре $\mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ равенство (1.15) эквивалентно равенству (см. § 4.8, г))

$$u(\xi)=-\mathscr{E}_n*\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}a_\alpha D^\alpha\delta=-\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}a_\alpha D^\alpha\mathscr{E}_n(\xi)=$$
$$=-\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\ \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant n}a_{j_1\ldots j_k}\xi_{j_1}\theta(\xi_{j_1})\ldots$$
$$\ldots\xi_{j_k}\theta(\xi_{j_k})\theta(\xi_{j_{k+1}})\ldots\theta(\xi_{j_n})-\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{\substack{\alpha_j\geqslant 2\\ 2\leqslant|\alpha|\leqslant N}}a_\alpha D^\alpha\mathscr{E}_n(\xi). \qquad (1.16)$$

Каждое слагаемое во второй сумме в (1.16) содержит по крайней мере одну δ-функцию относительно какой-либо из переменных ξ_j, $1\leqslant j\leqslant n$, и комбинации δ-функций во всех слагаемых различны. Остальные слагаемые в (1.16) — локально интегрируемые функции. Отсюда заключаем, что $a_\alpha=0$, если существует j такое, что $\alpha_j\geqslant 2$, и равенство (1.16) принимает вид

$$u(\xi)=-\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\ \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}a_{j_1\ldots j_k}\xi_{j_1}\theta(\xi_{j_1})\ldots$$
$$\ldots\xi_{j_k}\theta(\xi_{j_k})\theta(\xi_{j_{k+1}})\ldots\theta(\xi_{j_n}).$$

Отсюда, учитывая свойства функции u, легко выводим по индукции по n, что все $a_{j_1\ldots j_k}=0$ и $u(\xi)=0$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Общее решение уравнения*

$$D_1^2\ldots D_n^2u(\xi)=0 \qquad (1.17)$$

в классе непрерывных функций с носителем в $-\overline{\mathbb{R}}_+^n\cup\overline{\mathbb{R}}_+^n$ *выражается формулой*

$$u(x)=C\,[\mathscr{E}_n(x)-\mathscr{E}_n(-x)], \qquad (1.18)$$

где C — *произвольная постоянная.*

Доказательство. Функция (1.18) удовлетворяет уравнению (1.17), так как $D_1^2\ldots D_n^2\mathscr{E}_n(\pm\xi)=\delta(\xi)$. Пусть $u(\xi)$ — произвольное решение уравнения (1.17) из рассматриваемого класса. Тогда функция $u^+(\xi)=\theta_n(\xi)\,u(\xi)$ удовлетворяет уравнению (1.17) в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и, стало быть (см. § 2.6),

$$D_1^2\ldots D_n^2u^+(\xi)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant N}c_\alpha D^\alpha\delta(\xi)=$$
$$=c_0D_1^2\ldots D_n^2\mathscr{E}_n(\xi)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}c_\alpha D^\alpha\delta(\xi) \qquad (1.19)$$

при некоторых N и c_α. По лемме 5 равенство (1.19) возможно лишь при $c_\alpha=0$, $|\alpha|\geqslant 1$, и $u^+(\xi)=c_0\mathscr{E}_n(\xi)$. Аналогично выводим $u^-(\xi)=\theta_n(-\xi)\,u(\xi)=c_0'\mathscr{E}_n(-\xi)$, так что $u(\xi)=u^+(\xi)+u^-(\xi)=c_0\mathscr{E}_n(\xi)+c_0'\mathscr{E}_n(-\xi)$. Но в силу (1.17)

$$D_1^2\ldots D_n^2u(\xi)=c_0D_1^2\ldots D_n^2\mathscr{E}_n(\xi)+c_0'D_1^2\ldots D_n^2\mathscr{E}_n(-\xi)=$$
$$=(c_0+c_0')\,\delta(\xi)=0,$$

так что $c_0'=-c_0$, и представление (1.18) доказано. Лемма 6 доказана.

2. Функции классов $H_+(T^1)$ и $\mathscr{P}_+(T^1)$. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Пусть функция $f\in H_+(T^1)$, т. е. $f(z)$ голоморфна и $\operatorname{Im}f(z)=u(x,\ y)\geqslant 0$ в верхней полуплоскости T^1, так что $\operatorname{Im}f\in\mathscr{P}_+(T^1)$.

Напомним, что функция $f(z)$ удовлетворяет оценке (см. § 13.3)

$$|f(z)|\leqslant M\frac{1+|z|^2}{y},\qquad y>0, \qquad (2.1)$$

а мера $\mu=\operatorname{Im}f_+=u(x,\ +0)$ — условию (см. § 16.2)

$$\int\frac{\mu(dx)}{1+x^2}<\infty. \qquad (2.2)$$

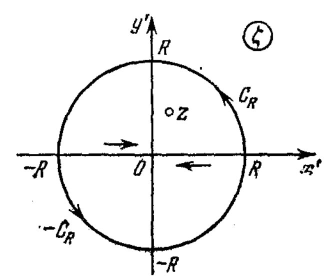

Рис. 40.

Пусть $\varepsilon>0$ и $R>1$, и обозначим через C_R и $-C_R$ полуокружности радиуса R с центром в 0, изображенные на рис. 40. По теореме о вычетах имеем

$$\frac{f(z+i\varepsilon)}{1+z^2}=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-R}^{R}+\int_{C_R}\right)\frac{f(\zeta+i\varepsilon)\,d\zeta}{(1+\zeta^2)(\zeta-z)}+$$
$$+\frac{f(i+i\varepsilon)}{2i(z-i)},\qquad y>0,\qquad |z|<R. \qquad (2.3)$$

Аналогично для функции $\frac{\bar{f}(\bar{z}+i\varepsilon)}{1+z^2}$, мероморфной в нижней полуплоскости $y<0$ с единственным простым полюсом $-i$, имеем

$$0=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-R}^{R}+\int_{-C_R}\right)\frac{\bar{f}(\bar{\zeta}+i\varepsilon)\,d\zeta}{(1+\zeta^2)(\zeta-z)}-\frac{\bar{f}(i+i\varepsilon)}{2i(z+i)},\quad y>0,\ |z|<R. \quad (2.4)$$

Устремляя в равенствах (2.3) и (2.4) R к ∞ и пользуясь оценкой (2.1), согласно которой

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(\zeta+i\varepsilon)\,d\zeta}{(1+\zeta^2)(\zeta-z)}\right|=\left|\int_0^{\pi}\frac{f(Re^{i\varphi}+i\varepsilon)\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi}{(1+R^2e^{2i\varphi})(Re^{i\varphi}-z)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^{\pi}\frac{(1+|Re^{i\varphi}+i\varepsilon|^2)\,R\,d\varphi}{(R\sin\varphi+\varepsilon)\,|1+R^2e^{2i\varphi}|\,|Re^{i\varphi}-z|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{MR[1+(R+\varepsilon)^2]}{(R^2-1)(R-|z|)}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{R\sin\varphi+\varepsilon}\to 0,\quad R\to\infty$$

(и аналогично для контура $-C_R$), выводим

$$f(z+i\varepsilon)=\frac{1+z^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x'+i\varepsilon)\,dx'}{(1+x'^2)(x'-z)}+\frac{f(i+i\varepsilon)}{2i}(z+i),\quad y>0,$$

$$0=-\frac{1+z^2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}(x'+i\varepsilon)\,dx'}{(1+x'^2)(x'-z)}-\frac{\bar{f}(i+i\varepsilon)}{2i}(z-i),\quad y>0.$$

Складывая полученные равенства, выводим интегральное представление для функции $f(z+i\varepsilon)$:

$$f(z+i\varepsilon)=\frac{1+z^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x',\varepsilon)\,dx'}{(1+x'^2)(x'-z)}+zu(0,\,1+\varepsilon)+$$
$$+\operatorname{Re}f(i+i\varepsilon),\quad y>0. \quad (2.5)$$

Отделяя в (2.5) мнимую часть, получим интегральное представление для функции $u(x,\,y+\varepsilon)$

$$u(x,\,y+\varepsilon)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x',\,\varepsilon)\left[\frac{1}{(x-x')^2+y^2}-\frac{1}{1+x'^2}\right]dx'+$$
$$+yu(0,\,1+\varepsilon),\quad y>0. \quad (2.6)$$

Переходя в равенствах (2.5) и (2.6) к пределу при $\varepsilon\to 0$ и пользуясь предельным соотношением (2.3) § 16, получим необходимость условий в теореме Герглотца — Неванлинны (см. Р. Неванлинна [1]).

Теорема I. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $H_+(T^1)$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+x'z)\,\mu(dx')}{(1+x'^2)(x'-z)}+az+b=$$
$$=i\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}_1(z-x';\,i-x')\,\mu(dx')+az+b,\quad y>0,\quad (2.7)$$

где мера μ неотрицательна и удовлетворяет условию (2.2), $a\geqslant 0$ и b — вещественное число. Представление (2.7) единственно, причем $\mu=\operatorname{Im}f_+$, $b=\operatorname{Re}f(i)$,

$$a=\operatorname{Im}f(i)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(dx)}{1+x^2}=\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{Im}f(iy)}{y}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{Im}f(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(dx')}{(x-x')^2+y^2}+ay,\quad y>0. \quad (2.9)$$

Достаточность условий теоремы 1 проверяется непосредственно.

Следствие. *Для того чтобы функция $u(x,\,y)$ принадлежала классу $\mathscr{P}_+(T^1)$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$u(x,\,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(dx')}{(x-x')^2+y^2}+ay,\quad y>0,\quad (2.9)$$

где $a\geqslant 0$ и мера μ неотрицательна и удовлетворяет условию (2.2); при этом

$$\mu=u(x,\,+0)\quad и\quad a=\lim_{y\to\infty}\frac{u(0,\,y)}{y}.$$

Замечание. Из представления (2.9) следует, что интеграл Пуассона — гармоническая функция в T^1. По теореме § 16.6 представление с ядром Шварца справедливо относительно любой точки $z^0\in T^1$ (формула (2.7) — для $z^0=i$).

В терминах спектральной функции $g(\xi)$ функции $f(z)$ (см. § 16.1) класс $H_+(T^1)$ характеризуется следующей теоремой (Х. Кениг и А. Земанян [1]).

Теорема II. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $H_+(T^1)$, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция $g(\xi)$ обладала свойствами:*

а) $$-ig(\xi)+ig^*(\xi)\gg 0;$$

б) $$g(\xi)=iu''(\xi)+ia\delta'(\xi),$$

где $a\geqslant 0$ и $u(\xi)$ — непрерывная функция с носителем в $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию роста

$$|u(\xi)|\leqslant C(1+\xi^2). \tag{2.10}$$

При этом разложение б) единственно, число a определяется формулами (2.8), а $\operatorname{Im} f(z)$ — формулой (2.9).

Следствие. *Для того чтобы мера μ была граничным значением функции $u(x, y)$ класса $\mathscr{P}_+(T^1)$, $\mu=u(x, +0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu=F[v'']$, где $v''\gg 0$, v — непрерывная $*$-эрмитова функция, удовлетворяющая условию роста (2.10) и $v(0)=0$. При этом функция v с указанными свойствами единственна с точностью до слагаемого $ic\xi$, где c — произвольное вещественное число.*

Вытекает из теоремы II при $v=u+u^*$ (необходимость) и при $u=\theta v$ (достаточность), если воспользоваться формулой (1.5) § 16 $\mu=\frac{1}{2}F[-ig+ig^*]$.

Доказательство теоремы II. Необходимость. Пусть $f\in H_+(T^1)$. Условие а) доказано в § 16.1. Для доказательства условия б) перепишем представление (2.7) в виде (ср. с (2.5))

$$f(z)=\frac{1+z^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(dx')}{(1+x'^2)(x'-z)}+\operatorname{Im} f(i)z+b=$$

$$=i(1+z^2)(\sigma*\mathscr{K}_1(x'+iy))+\operatorname{Im} f(i)z+b,\quad \sigma=\frac{\mu}{\pi(1+x^2)}. \tag{2.11}$$

Так как $\mathscr{K}_1(x+iy)\in\mathscr{H}_s$ (при всех s и $y>0$) (см. (2.5) § 11) и $\int\sigma(dx')<\infty$ (см. 2.2)), то справедлива формула преобразования Фурье свертки $\sigma*\mathscr{K}_1$:

$$F^{-1}[\sigma*\mathscr{K}_1]=F[\sigma](-\xi)F^{-1}[\mathscr{K}_1](\xi)=e^{-y\xi}\theta(\xi)v(\xi), \tag{2.12}$$

где $v(\xi)=F[\sigma](-\xi)$ — непрерывная положительно определенная (и, стало быть, ограниченная) функция (см. § 8). Теперь, пользуясь формулами (2.11) и (2.12), вычисляем спектральную функцию $g(\xi)$ (см. § 9):

$$g(\xi)=i(1-D^2)[\theta(\xi)v(\xi)]+i\operatorname{Im} f(i)\delta'(\xi)+b\delta(\xi). \tag{2.13}$$

По лемме 2 § 17.1 существует непрерывная фуннкция $u_1(\xi)$ с носителем в $[0, \infty)$, удовлетворяющая оценке (2.10) и такая, что

$$(1-D^2)\{\theta(\xi)[v(\xi)-v(0)]\}=D^2u_1(\xi).$$

Поэтому формула (2.13) принимает вид

$$g(\xi)=iD^2\left[u_1(\xi)+\frac{v(0)}{2}\xi^2\theta(\xi)-ib\xi\theta(\xi)\right]-$$
$$-i[\operatorname{Im} f(i)-v(0)]\delta'(\xi). \tag{2.14}$$

Обозначая

$$u(\xi)=u_1(\xi)+\frac{v(0)}{2}\xi^2\theta(\xi)-ib\xi\theta(\xi)$$

и учитывая, что в силу (2.8)

$$\operatorname{Im} f(i)-v(0)=\operatorname{Im} f(i)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(dx)}{1+x^2}=a,$$

из (2.14) получаем представление б). Единственность разложения б) следует из единственности спектральной функции g и из леммы 5 § 17.1.

Достаточность. Пусть обобщенная функция $g(\xi)$ удовлетворяет условиям а) и б). Тогда $g\in\mathscr{S}'(\overline{\mathbb{R}}^1_+)$ и ее преобразование Лапласа $f(z)=L[g]$ есть функция класса $H(\mathbb{R}^1_+)$ (см. § 12.2). Осталось доказать, что $\operatorname{Im} f(z)\geqslant 0$, $y>0$.

Пользуясь формулами (1.2) и (1.5) § 16.1, имеем

$$\operatorname{Im} f(z)=\frac{1}{2i}F\left[g(\xi)e^{-y\xi}-g^*(\xi)e^{y\xi}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}F[u''(\xi)e^{-y\xi}+u^{*\prime\prime}(\xi)e^{y\xi}]+$$
$$+\frac{a}{2}F[\delta'(\xi)e^{-y\xi}+\delta'(-\xi)e^{y\xi}],\qquad y>0, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{Im} f_+=\frac{1}{2}F[-ig+ig^*]=\frac{1}{2}F[u''+u^{*\prime\prime}]. \tag{2.16}$$

Равенства (2.16) показывают в силу теоремы Бохнера — Шварца (см. § 8.2), что $\mu=\operatorname{Im} f_+$ есть неотрицательная мера и $(u+u^*)''\gg 0$. По лемме 3 § 17.1 существует непрерывная функция v медленного роста такая, что

$$(1-D^2)v(\xi)=\frac{1}{2}[u(\xi)+u^*(\xi)]''. \tag{2.17}$$

Из (2.17) вытекает, что $v(\xi)$ — непрерывная положительно определенная функция, причем в силу (2.16)

$$(1+x^2)F[v]=\operatorname{Im} f_+=\mu. \tag{2.18}$$

Пользуясь теперь формулами (1.2), (1.3) и (2.17), получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{2}F\left[u''(\xi)e^{-y\xi}+u^{*\prime\prime}(\xi)e^{y\xi}\right]=\frac{1}{2}F\left[e^{-y|\xi|}(u+u^*)''\right]=$$

$$=F\left[e^{-y|\xi|}(1-D^2)v\right]=\frac{y}{\pi}\int\frac{\mu(dx')}{(x-x')^2+y^2}. \quad (2.19)$$

Наконец, учитывая равенства

$$a(\xi)\delta'(\xi)=-a'(0)\delta(\xi)+a(0)\delta'(\xi), \qquad \delta'(-\xi)=-\delta'(\xi),$$

получаем

$$\delta'(\xi)e^{-y\xi}+\delta'(-\xi)e^{y\xi}=\delta'(\xi)(e^{-y\xi}-e^{y\xi})=2y\delta(\xi). \quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.19) и (2.20) в (2.15), получим представление (2.9) для $\operatorname{Im} f(z)$, из которого следует, что $\operatorname{Im} f(z)\geqslant 0$, $y>0$. Теорема II доказана.

3. Функции класса $\mathscr{P}_+(T^n)$. Случай $n>1$ может быть рассмотрен аналогично § 17.2 с использованием теоремы о вычетах (см. Владимиров [7]). Однако мы применим здесь другой метод, использующий лемму 4 § 17.1 об общем виде ограниченного непрерывного решения дифференциального уравнения (1.10).

Пусть функция $u(x, y)$ принадлежит классу $\mathscr{P}_+(T^n)$ и мера $\mu=u(x,+0)\geqslant 0$ — ее граничное значение (см. § 16.2).

По теореме § 16.2 мера μ обладает свойствами:

$$\frac{1}{\pi^n}\int\frac{\mu(dx)}{\left(1+x_1^2\right)\dots\left(1+x_n^2\right)}\leqslant u(0, \mathbf{1}), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$; для любой $\varphi\in C\cap\mathscr{L}^\infty$

$$\int\frac{u(x,y)\varphi(x)\,dx}{\left(1+x_1^2\right)\dots\left(1+x_n^2\right)}\to\int\frac{\varphi(x)\mu(dx)}{\left(1+x_1^2\right)\dots\left(1+x_n^2\right)},$$

$$y\to 0,\ y\in\forall C'\Subset\mathbb{R}^n_+. \quad (3.2)$$

Для меры μ построим 2^n-2 мер $\mu_{j_1\dots j_k}$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, $1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n$, переменных $x_{j_1\dots j_k}=\left(x_{j_1},\dots,x_{j_k}\right)\in\mathbb{R}^k$ по формуле: для любой $\varphi\in C\cap\mathscr{L}^\infty$

$$\int\frac{\varphi\left(x_{j_1\dots j_k}\right)\mu_{j_1\dots j_k}\left(dx_{j_1\dots j_k}\right)}{\left(1+x_{j_1}^2\right)\dots\left(1+x_{j_k}^2\right)}=\int\frac{\varphi\left(x_{j_1\dots j_k}\right)\mu(dx)}{\left(1+x_1^2\right)\dots\left(1+x_n^2\right)}. \quad (3.3)$$

Из этого определения (при $\varphi\equiv 1$) и из (3.1) следует в силу теоремы Фубини, что меры $\mu_{j_1\dots j_k}$ неотрицательны и удовлетво-

ряют условию

$$\frac{1}{\pi^n}\int\frac{\mu_{j_1\dots j_k}\left(dx_{j_1\dots j_k}\right)}{\left(1+x_{j_1}^2\right)\dots\left(1+x_{j_k}^2\right)}\leqslant u(0, \mathbf{1}). \quad (3.4)$$

Положим

$$\sigma_{j_1\dots j_k}=\frac{\mu_{j_1\dots j_k}}{\left(1+x_{j_1}^2\right)\dots\left(1+x_{j_k}^2\right)}, \quad (3.5)$$

$$\chi_{j_1\dots j_k}\left(\xi_{j_1\dots j_k}\right)=(2\pi)^{n-k}F^{-1}\left[\sigma_{j_1\dots j_k}\right], \quad (3.6)$$

$$\mu_{1\dots n}=\mu,\quad \sigma_{1\dots n}=\sigma,\quad \chi_{1\dots n}=\chi. \quad (3.7)$$

В силу (3.4) — (3.7) функции $\chi_{j_1\dots j_k}$ — непрерывные положительно определенные в $\mathbb{R}^k$ и, стало быть, ограниченные в $\mathbb{R}^k$ (см. § 8). Далее, справедливы равенства

$$\chi_{j_1\dots j_k}\left(\xi_{j_1\dots j_k}\right)=\chi(\xi)\big|_{\xi_{j_{k+1}}=\dots=\xi_{j_n}=0}. \quad (3.8)$$

Действительно, пользуясь (3.4) — (3.7), выводим (3.8):

$$\chi(\xi)\big|_{\xi_{j_{k+1}}=\dots=\xi_{j_n}=0}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{\exp\left(-i\xi_{j_1}x_{j_1}-\dots-i\xi_{j_k}x_{j_k}\right)\mu(dx)}{\left(1+x_1^2\right)\dots\left(1+x_n^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{\exp\left(-i\xi_{j_1}x_{j_1}-\dots-i\xi_{j_k}x_{j_k}\right)\mu_{j_1\dots j_k}\left(dx_{j_1\dots j_k}\right)}{\left(1+x_{j_1}^2\right)\dots\left(1+x_{j_k}^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\exp\left(-i\xi_{j_1}x_{j_1}-\dots-i\xi_{j_k}x_{j_k}\right)\sigma_{j_1\dots j_k}\left(dx_{j_1\dots j_k}\right)=$$

$$=\chi_{j_1\dots j_k}\left(\xi_{j_1\dots j_k}\right).$$

Теперь докажем, что

$$F_k^{-1}\left[\mu_{j_1\dots j_k}\right]\left(\xi_{j_1\dots j_k}\right)=0,\qquad \xi_{j_1\dots j_k}\Subset-\overline{\mathbb{R}}^k_+\cup\overline{\mathbb{R}}^k_+, \quad (3.9)$$

где F_k — операция преобразования Фурье по k переменным $\left(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k}\right)=\xi_{j_1\dots j_k}$.

Для меры $\mu=\mu_{1\dots n}$ равенство (3.9) следует из формулы (1.5) § 16, где $g\in\mathscr{S}'\left(\overline{\mathbb{R}}^n_+\right)$ (g — спектральная функция функции f из $H_+(T^n)$, для которой $\operatorname{Im} f=u$).

Пусть теперь

$$\varphi\left(x_{j_1\dots j_k}\right)=\left(1+x_{j_1}^2\right)\dots\left(1+x_{j_k}^2\right)F_k^{-1}[\alpha], \quad (3.10)$$

где $\alpha\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right)$ — произвольная функция из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^k)$ с носителем вне $-\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+$. Подставляя выражение (3.10) в равенство (3.3) и переписывая его в терминах преобразований Фурье, получим

$$\left(\mu_{j_1 \ldots j_k}, F_k^{-1}[\alpha]\right) = \left(F_k^{-1}\left[\mu_{j_1 \ldots j_k}\right], \alpha\right) =$$
$$= \left(F^{-1}[\mu], F\left[F_k^{-1}[\alpha] \frac{1}{\left(1+x^2_{j_{k+1}}\right) \ldots \left(1+x^2_{j_n}\right)}\right]\right) =$$
$$= \left(F^{-1}[\mu], \alpha\left(\xi_{j_1, \ldots, j_k}\right) F_{n-k}\left[\frac{1}{\left(1+x^2_{k+1}\right) \ldots \left(1+x^2_{j_n}\right)}\right]\right).$$

Пользуясь формулой
$$F\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \pi e^{-|\xi|},$$
перепишем последние равенства в виде
$$\left(F_k^{-1}\left[\mu_{j_1 \ldots j_k}\right], \alpha\right) =$$
$$= \pi^{n-k}\left(F^{-1}[\mu], \alpha\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right) \exp\left(-\left|\xi_{j_{k+1}}\right| \ldots -\left|\xi_{j_n}\right|\right)\right).$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль, так как носитель функции
$$\alpha\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right) \exp\left(-\left|\xi_{j_{k+1}}\right| - \ldots - \left|\xi_{j_n}\right|\right)$$
содержится вне $\left(-\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+\right) \times \mathbb{R}^{n-k}$, а $\cdot F^{-1}[\mu]$, по доказанному, обращается в нуль вне $-\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Это и доказывает равенства (3.9).

Из равенств (3.9), (3.5) — (3.7) вытекают дифференциальные уравнения для функции $\chi_{j_1 \ldots j_k}$:
$$\left(1-D^2_{j_1}\right) \ldots \left(1-D^2_{j_k}\right) \chi_{j_1 \ldots j_k}\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right) = 0, \qquad (3.11)$$
$$\xi_{j_1 \ldots j_k} \in -\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+.$$

Теорема I. *Если $u \in \mathscr{P}_+(T^n)$, $n \geqslant 2$, то функция*
$$\chi(\xi) = F^{-1}\left[\frac{\mu}{\left(1+x_1^2\right) \ldots \left(1+x_n^2\right)}\right], \qquad \mu = u(x, +0), \quad (3.12)$$
единственным образом представляется в виде
$$\chi(\xi) = \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \exp\left(-\left|\xi_{j_{k+1}}\right| - \ldots - \left|\xi_n\right|\right) \times$$
$$\times \Phi_{j_1 \ldots j_k}\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right) + \exp\left(-|\xi_2| - \ldots - |\xi_n|\right) \chi(\xi_1, 0, \ldots, 0) + \ldots$$
$$\ldots + \exp\left(-|\xi_1| - \ldots - |\xi_{n-1}|\right) \chi(0, \ldots, 0, \xi_n) -$$
$$-(n-1) \exp\left(-|\xi_1| - \ldots - |\xi_n|\right) \chi(0), \quad \xi \in R^n, \qquad (3.13)$$

где $\Phi_{j_1 \ldots j_k}$ — непрерывные ограниченные функции в $\mathbb{R}^k$ с носителями в $-\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+$.

Доказательство. Единственность представления (3.13) в каждом октанте вытекает из свойств непрерывности и носителя функций $\Phi_{j_1 \ldots j_k}$. Доказательство существования представления (3.13) проведем по индукции по n. Функция $\chi(\xi) = \chi_{1 \ldots n}(\xi)$, равно как и все функции $\chi_{j_1 \ldots j_k}\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right)$, в силу (3.8) — непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}^k$ и удовлетворяют уравнению (3.11) вне $-\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+$. Поэтому при $n=2$ теорема I справедлива в силу леммы 4 § 17.1, если в представлении (3.13) положить
$$\Phi_{12}(\xi) = \chi(\xi) - e^{-|\xi_1|}\chi(0, \xi_2) - e^{-|\xi_2|}\chi(\xi_1, 0) + e^{-|\xi_1| - |\xi_2|}\chi(0).$$

Пусть представление (3.13) справедливо для всех размерностей $k < n$, так что функции $\chi_{j_1 \ldots j_k}$ в $\mathbb{R}^k$ представимы в виде соответствующих формул (3.13). Докажем представление (3.13) в области
$$G_{+-} = [\xi\colon \xi_1 > 0,\ \xi_2 < 0,\ \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-2}].$$
По лемме 4 § 17.1 функция $\chi(\xi)$ представима в виде
$$\chi(\xi) = e^{-|\xi_1|}\chi(0, \xi_2, \tilde{\xi}) + e^{-|\xi_2|}\chi(\xi_1, 0, \tilde{\xi}) -$$
$$- e^{-|\xi_1| - |\xi_2|}\chi(0, 0, \tilde{\xi}), \qquad \xi \in G_{+-}. \qquad (3.14)$$
В соответствии с индуктивным предположением, для функций
$$\chi(0, \xi_2, \tilde{\xi}) = \chi_{2 \ldots n}(\xi_2, \tilde{\xi}),\ \chi(\xi_1, 0, \tilde{\xi}) = \chi_{1, 3 \ldots n}(\xi_1, \tilde{\xi}),$$
$$\chi(0, 0, \tilde{\xi}) = \chi_{3 \ldots n}(\tilde{\xi})$$
справедливы соответствующие представления (3.13). Подставляя их в (3.14), получим представление (3.13) в области G_{+-}. Представление (3.13) имеет место и в остальных областях типа G_{+-}, не содержащих $-\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_+$. Из единственности представления (3.13) в указанных областях типа G_{+-} следует, что в пересечениях этих областей соответствующие представления (3.13) совпадают. Таким образом, представление (3.13) справедливо всюду вне $-\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_+$. Вводя функцию
$$\Phi_{1 \ldots n}(\xi) = \chi(\xi) - \sum_{2 \leqslant k \leqslant n-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \exp\left(-\left|\xi_{j_{k+1}}\right| - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - \left|\xi_{j_n}\right|\right) \Phi_{j_1 \ldots j_k}\left(\xi_{j_1 \ldots j_k}\right) - \exp\left(-|\xi_2| - \ldots - |\xi_n|\right) \times$$
$$\times \chi(\xi_1, 0, \ldots, 0) - \ldots - \exp\left(-|\xi_1| - \ldots - |\xi_{n-1}|\right) \times$$
$$\times \chi(0, \ldots, 0, \xi_n) + (n-1) \exp\left(-|\xi_1| - \ldots - |\xi_n|\right) \chi(0),$$

— непрерывную и ограниченную в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $-\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$, — убедимся в справедливости представления (3.13) во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Теорема I доказана.

Теорема II. *Для того чтобы мера μ была граничным значением функции $u(x, y)$ класса $\mathscr{P}_+(T^n)$, $\mu = u(x, +0)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mu = F[D_1^2 \ldots D_n^2 v], \tag{3.15}$$

где $D_1^2 \ldots D_n^2 v \gg 0$, v — непрерывная $*$-эрмитова функция, удовлетворяющая условию роста (1.7) и $\operatorname{supp} v \subset -\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$.

При этом функция v с указанными свойствами единственна с точностью до слагаемого $iC[\mathscr{E}_n(\xi) - \mathscr{E}_n(-\xi)]$, где C — произвольное вещественное число.

Доказательство. При $n = 1$ теорема II уже доказана в § 17.2. Достаточность при $n \geqslant 2$ вытекает из теоремы § 17.4.

Необходимость при $n \geqslant 2$. Пусть $u \in \mathscr{P}_+(T^n)$ и $\mu = u(x, +0)$. Из равенств (3.5) — (3.7) выводим:

$$F^{-1}[\mu] = F^{-1}[(1 + x_1^2) \ldots (1 + x_n^2)\,\sigma] = (1 - D_1^2) \ldots (1 - D_n^2)\,\chi(\xi). \tag{3.16}$$

Замечая, что

$$(1 - D^2)\, e^{-|\xi|} = 2\delta(\xi)$$

и пользуясь представлением (3.13), продолжим равенства (3.16)

$$\begin{aligned} F^{-1}[\mu] = \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} 2^{n-k} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} &\delta(\xi_{j_{k+1}}) \times \ldots \times \delta(\xi_{j_n}) \times \\ &\times (1 - D_{j_1}^2) \ldots (1 - D_{j_k}^2)\, \Phi_{j_1 \ldots j_k}(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k}) + \\ + 2^{n-1}\delta(\xi_2) \times \ldots \times \delta(\xi_n) \times (1 - D_1^2)&[\chi(\xi_1, 0, \ldots, 0) - \chi(0)\, e^{-|\xi_1|}] + \ldots \\ \ldots + 2^{n-1}&\delta(\xi_1) \times \ldots \times \delta(\xi_{n-1}) \times \\ \times (1 - D_n^2)[\chi(0, \ldots, 0, \xi_n) &- \chi(0)\, e^{-|\xi_n|}] + 2^n \chi(0)\, \delta(\xi), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\Phi_{j_1 \ldots j_k}$ — непрерывные ограниченные функции в $\mathbb{R}^k$ с носителем в $-\overline{\mathbb{R}}^k_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^k_+$. Каждое слагаемое под знаком суммы справа в (3.17) представимо по лемме 2 § 17.1 в виде

$$\begin{aligned} &2^{n-k} D_{j_{k+1}}^2 \ldots D_{j_n}^2 [\theta(\xi_{j_{k+1}})\, \xi_{j_{k+1}} \ldots \theta(\xi_{j_n})\, \xi_{j_n}] \times \\ &\times (1 - D_{j_1}^2) \ldots (1 - D_{j_k}^2) [\theta(\xi_{j_1}) \ldots \theta(\xi_{j_k})\, \Phi_{j_1 \ldots j_k}(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})] + \\ &\quad + (-2)^{n-k} D_{j_{k+1}}^2 \ldots D_{j_n}^2 [\theta(-\xi_{j_{k+1}})\, \xi_{j_{k+1}} \ldots \theta(-\xi_{j_n})\, \xi_{j_n}] \times \\ &\times (1 - D_{j_1}^2) \ldots (1 - D_{j_k}^2) [\theta(-\xi_{j_1}) \ldots \theta(-\xi_{j_k})\, \Phi(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k})] = \\ &\qquad = D_1^2 \ldots D_n^2 v_{j_1 \ldots j_k}(\xi), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $v_{j_1 \ldots j_k}$ — непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $-\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$, удовлетворяющая (1.7). Остальные слагаемые справа в (3.17) в силу тех же соображений также представляются в виде (3.18):

$$\begin{aligned} &2^{n-1} D_{j_2}^2 \ldots D_{j_n}^2 [\theta(\xi_{j_2})\, \xi_{j_2} \ldots \theta(\xi_{j_n})\, \xi_{j_n}] \times \\ &\quad \times (1 - D_{j_1}^2) \{\theta(\xi_{j_1}) [\chi(0, \ldots, \xi_{j_1}, \ldots, 0) - \chi(0)\, e^{-|\xi_{j_1}|}]\} + \\ &\quad + (-2)^{n-1} D_{j_2}^2 \ldots D_{j_n}^2 [\theta(-\xi_{j_2})\, \xi_{j_2} \ldots \theta(-\xi_{j_n})\, \xi_{j_n}] \times \\ &\quad \times (1 - D_{j_1}^2) \{\theta(-\xi_{j_1}) [\chi(0, \ldots, \xi_{j_1}, \ldots, 0) - \chi(0)\, e^{-|\xi_{j_1}|}]\} = \\ &\qquad = D_1^2 \ldots D_n^2 v_{j_1}(\xi); \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$2^n \chi(0)\, \delta(\xi) = 2^n \chi(0)\, D_1^2 \ldots D_n^2 [\theta_n(\xi)\, \xi_1 \ldots \xi_n] = D_1^2 \ldots D_n^2 v_0(\xi). \tag{3.20}$$

Обозначая

$$v(\xi) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} v_{j_1 \ldots j_k}(\xi),$$

в силу (3.17) — (3.20) получаем представление (3.15), где функция v непрерывна с носителем в $-\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и удовлетворяет (1.7). Если v не $*$-эрмитова, то ее можно заменить на $\frac{1}{2}(v + v^*)$ в силу вещественности меры μ.

Заключение о единственности функции v вытекает из леммы 6 § 17.1. Теорема II доказана.

4. Функции класса $H_+(T^n)$. Напомним, что ядра Пуассона $\mathscr{P}_n(x, y)$ и Шварца $\mathscr{S}_n(z; z^0)$ для области T^n выписаны в §§ 11.1 и 12.5 соответственно.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Функция $f(z)$ принадлежит классу $H_+(T^n)$.*

2. *Ее спектральная функция $g(\xi)$ обладает свойствами:*

а) $$-ig(\xi) + ig^*(\xi) \gg 0,$$

б) $$g(\xi) = iD_1^2 \ldots D_n^2\, u(\xi) + i(a, D)\,\delta(\xi),$$

где $a \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $u(\xi)$ — непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, удовлетворяющая условию роста (1.7). Разложение б) единственно.

3) *Справедливо представление*

$$\operatorname{Im} f(z) = \int \mathscr{P}_n(x - x', y)\, \mu(dx') + (a, y), \quad z \in T^n. \tag{4.1}$$

4) *При всех* $z^0 \in T^n$ *справедливо представление*

$$f(z) = i\int \mathscr{P}_n(z-x';\ z^0-x')\,\mu(dx') + (a, z) + b(z^0), \quad z \in T^n. \quad (4.2)$$

При этом $\mu = \operatorname{Im} f_+$, $b(z^0) = \operatorname{Re} f(z^0) - (a, x^0)$,

$$a_j = \lim_{y_j \to \infty} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \quad (4.3)$$

(a, y) — *наилучшая линейная миноранта индикатрисы* $h(\operatorname{Im} f;\ y)$ *в конусе* R^n_+.

Доказательство. Для $n=1$ теорема уже доказана в § 17.2. Пусть $n \geqslant 2$.

1) $\to$ 2) Пусть $f \in H_+(T^n)$. Тогда $f(z) = L[g]$, $g \in \mathscr{S}'(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$, $f_+ = F[g]$, $\mu = \operatorname{Im} f_+$ и

$$F^{-1}[\mu] = \frac{g - g^*}{2i} \quad (4.4)$$

(см. § 16.2). Из (4.4) следует условие а) (см. § 8).

Для доказательства условия б) воспользуемся теоремой II § 17.3 (необходимость ее условий уже доказана). В силу (3.15) равенство (4.4) принимает вид

$$\frac{1}{2i}[g(\xi) - g^*(\xi)] = D_1^2 \ldots D_n^2 v(\xi), \quad (4.5)$$

где $v = v^* \in C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} v \subset -\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и v удовлетворяет условию роста (1.7). Обобщенная функция

$$g_0(\xi) = 2iD_1^2 \ldots D_n^2[\theta_n(\xi)\,v(\xi)] \quad (4.6)$$

удовлетворяет уравнению (4.5) в $\mathbb{R}^n$. Общее же решение однородного уравнения (4.5), $g - g^* = 0$, в классе $\mathscr{S}'(-\overline{\mathbb{R}}^n_+ \cup \overline{\mathbb{R}}^n_+)$ имеет носитель 0 и, следовательно, представимо в виде (см. § 2.6)

$$a_0\delta(\xi) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant N} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta(\xi),$$

где a_α — произвольные вещественные постоянные. Отсюда и из (4.6) следует, что спектральная функция g представима в виде

$$g(\xi) = iD_1^2 \ldots D_n^2[2\theta_n(\xi)\,v(\xi) - ia_0\mathscr{E}_n(\xi)] + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant N} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta(\xi). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$u(\xi) = 2\theta_n(\xi)\,v(\xi) - ia_0\mathscr{E}_n(\xi).$$

Функция $u(\xi)$ удовлетворяет условиям б) теоремы. При этом равенство (4.7) принимает вид

$$g(\xi) = iD_1^2 \ldots D_n^2 u(\xi) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant N} i^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \delta(\xi). \quad (4.8)$$

Таким образом (см. § 9.2),

$$f(z) = L[g] = i(-1)^n z_1^2 \ldots z_n^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\xi)\,e^{i(z,\xi)}\,d\xi + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant N} a_\alpha z^\alpha, \quad z \in T^n. \quad (4.9)$$

Полагая в (4.9) $z = iy$, $y \in \mathbb{R}^n_+$, получим

$$f(iy) = iy_1^2 \ldots y_n^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\xi)\,e^{-(y,\xi)}\,d\xi + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant N} i^{|\alpha|} a_\alpha y^\alpha. \quad (4.10)$$

Докажем, что при каждом $j = 1, \ldots, n$

$$\lim_{y_j \to \infty} y_1 \ldots y_n \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\xi)\,e^{-(y,\xi)}\,d\xi = 0. \quad (4.11)$$

Действительно, из свойств функции $u(\xi)$ вытекает, в силу теоремы Лебега, законность перехода к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{y_j \to \infty} y_1 \ldots y_n \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty |u(\xi)|\,e^{-(y,\xi)}\,d\xi = \lim_{y_j \to \infty} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left|u\left(\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right)\right| e^{-x_1 - \ldots - x_n}\,dx = 0.$$

Принимая во внимание оценку (3.1) § 13, из (4.10) получаем неравенство

$$\left| iy_1^2 \ldots y_n^2 \int_{\mathbb{R}^n_+} u(\xi)\,e^{-(y,\xi)}\,d\xi + i(a, y) + \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant N} i^{|\alpha|} a_\alpha y^\alpha \right| \leqslant M(C')\frac{1+|y|^2}{|y|}, \quad y \in C' \Subset \mathbb{R}^n_+,$$

из которого и из предельных соотношений (4.11) выводим, что $a_\alpha = 0$, $|\alpha| \geqslant 2$, а для чисел a_j справедлива формула (4.3), так что $a_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, т. е. $a \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Этим в силу (4.8) доказано представление б). Единственность его вытекает из леммы 5 § 17.1.

2) $\to$ 3). Доказательство проводится дословно так же, как и в одномерном случае при доказательстве достаточности в теореме II § 17.2. При этом используются леммы 1 и 3 § 17.1.

3) $\to$ 4) $\to$ 1). Из представления (4.1) следует, что соответствующий интеграл Пуассона — плюригармоническая функция в T^n. Отсюда и из теоремы § 16.6 следуют все остальные утверждения теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *Если $f \in H_+(T^n)$, то наилучшая линейная миноранта (a, y) индикатрисы $h(\operatorname{Im} f; y)$ в конусе $\mathbb{R}^n_+$ определяется равенствами*

$$a_j = \lim_{y \to e_j,\ y \in \mathbb{R}^n_+} h(\operatorname{Im} f, y), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.12}$$

где e_j — единичные орты в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, из неравенства

$$(a, y) \leqslant h(\operatorname{Im} f; y)$$

следует, что

$$a_j \leqslant \varliminf_{y \to e_j,\ y \in \mathbb{R}^n_+} h(\operatorname{Im} f; y). \tag{4.13}$$

Функция

$$\frac{1}{t}\operatorname{Im} f(\boldsymbol{i} + ity), \qquad y \in \mathbb{R}^n_+ \cup \{e_1, \ldots, e_n\}, \qquad t > 0$$

непрерывна по y, не возрастает по $t > 0$ и стремится при $t \to \infty$ к (полунепрерывной сверху) функции

$$\hbar(y) = \begin{cases} h(\operatorname{Im} f; y), & y \in \mathbb{R}^n_+, \\ a_j, & y = e_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{4.14}$$

При $y \in \mathbb{R}^n_+$ это утверждение доказано (теорема § 16.5). При $y = e_j$ оно вытекает из представления (4.1)

$$\frac{1}{t}\operatorname{Im} f(\boldsymbol{i} + ite_j) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\int \frac{1}{x_j^2 + (1+t)^2} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \frac{1}{1 + x_k^2}\mu(dx) + \frac{1}{t}\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k + a_j, \tag{4.15}$$

поскольку в силу теоремы Б. Леви каждое слагаемое в правой части равенства (4.15) не возрастает по $t > 0$. Из полунепрерывности сверху функции $\hbar(y)$ на множестве $\mathbb{R}^n_+ \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$

и из (4.14) следует неравенство

$$\varlimsup_{y \to e_j,\ y \in \mathbb{R}^n_+} h(\operatorname{Im} f; y) \leqslant \varlimsup_{y \to e_j,\ y \in \mathbb{R}^n_+ \cup \{e_j\}} \hbar(y) = \hbar(e_j) = a_j,$$

которое вместе с неравенством (4.13) влечет равенство (4.12).

Замечание 1. Представление б) усиливает результаты § 16.4 о гладкости спектральной функции и ухудшает оценку ее роста в случае конуса $\mathbb{R}^n_+$:

$$g(\xi) = D_1^2 \ldots D_n^2 g_1(\xi), \quad g_1(\xi) = iu(\xi) + i\theta_n(\xi) \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j \xi_1 \ldots \xi_{j-1}\xi_{j+1} \ldots \xi_n,$$

$$g_1 \in \mathscr{L}^2_s(\overline{\mathbb{R}}^n_+), \quad s < -\frac{5}{2} \quad \left(\text{в § 16.4 } s < -\frac{3}{2}n - 1\right).$$

Замечание 2. Описание функций класса $H_+(G)$ в поликруге дано А. Кораньи и Дж. Пуканским [1] и В. С. Владимировым и Ю. Н. Дрожжиновым [1]; в «обобщенном единичном круге» (множестве комплексных 2×2-матриц ϖ, удовлетворяющих условию $\varpi\varpi^* < I$) — В. С. Владимировым [10]; в ограниченных строго звездных областях, в частности, в классических симметричных областях, — Л. А. Айзенбергом и Ш. А. Даутовым [1]; в «трубе будущего» $\tau^+ = T^{V^+}$ ($n = 3$, см. § 4.4) — В. С. Владимировым [10]. В последнем случае установлено, что интеграл Пуассона для $f \in H_+(\tau^+)$ есть плюригармоническая функция (и, значит, справедлива теорема § 16.6) тогда и только тогда, когда индикатриса $h(\operatorname{Im} f; y)$ обладает свойствами

$$h(\operatorname{Im} f; y) = h_0(y) + (a, y), \quad h_0(y) \geqslant 0, \quad a \in \overline{V}^+, \quad y \in V^+;$$

$$\lim_{|y| \to 1-0} \int_{|s|=1} h_0(1, s|y|)\, ds = 0.$$

§ 18. Положительно вещественные матрицы-функции в T^C

Пусть $A(x) = (A_{kj}(x))$ — квадратная матрица с элементами A_{kj} из $\mathscr{D}'$. Назовем матрицы: $A^*(x) = \overline{A}^T(-x)$ — *$*$-эрмитово-сопряженной к A*, $A^+(x) = \overline{A}^T(x)$ — *$+$-эрмитово-сопряженной к A*,

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^+), \quad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^+)$$

— *вещественной и мнимой частями* A (ср. § 1.3).

Если $A = A^*$ или $A = A^+$, то A будем называть $*$-эрмитовой (ср. § 8.1) или *$+$-эрмитовой* соответственно. Для постоянных матриц оба понятия эрмитовости совпадают, и в этом случае будем говорить просто *эрмитовы* или *эрмитово-сопряженные* матрицы.

Очевидно, если $A(x)$ — матрица медленного роста (т. е. $A_{kj} \in \mathscr{S}'$), то

$$F[A^+] = F[A]^*, \quad F[A^*] = F[A]^+,$$

где преобразование Фурье $F[A]$ матрицы A означает матрицу с компонентами $F[A_{kj}]$.

Матрица-функция $A(z)$, голоморфная в трубчатой области T^C, называется *положительно вещественной в* T^C, если она удовлетворяет условиям: а) $\operatorname{Re} A(z) \geqslant 0$, $z \in T^C$; б) $A(iy)$ вещественна при всех $y \in C$ (и тогда $A(z) = \bar{A}(-\bar{z})$, $z \in T^C$ в силу принципа симметрии Шварца). Ясно, если $A(z)$ положительно вещественна в T^C, то $A(z)$ положительно вещественна и в любой $T^{C'}$, $C' \subset C$.

Матрицу $Z(\xi)$, $Z_{kj} \in \mathscr{D}'$, для которой $A(z) = L[Z]$, назовем *спектральной матрицей-функцией* матрицы $A(z)$.

Наша задача — дать описание положительно вещественных матриц-функций в T^C, где C — острый выпуклый конус. Сначала рассмотрим скалярный случай, т. е. положительно вещественные функции в T^C.

1. Положительно вещественные функции в T^C. Функция $f(z)$ положительно вещественна в T^C тогда, и только тогда, когда $if \in H_+(T^C)$ и ее спектральная функция g вещественна. Последнее утверждение — в силу равенств

$$f(z) = L[g] = F[g(\xi) e^{-(y, \xi)}] = \bar{f}(-\bar{z}) = F[\bar{g}(\xi) e^{-(y, \xi)}].$$

Пусть $C' = [y\colon (e_1, y) > 0, \ldots, (e_n, y) > 0]$ — n-гранный острый конус. Тогда (см. § 4.4)

$$C'^* = \Big[\xi\colon \xi = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j e_j,\ \lambda_j \geqslant 0\Big].$$

Обозначим через A неособенное линейное преобразование

$$z \to \zeta = (\zeta_1 = (e_1, z), \ldots, \zeta_n = (e_n, z)) = Az. \tag{1.1}$$

Преобразование $\zeta = Az$ биголоморфно отображает область $T^{C'}$ на область T^n, а преобразование $\xi' = A^{-1T}\xi$ — конус C'^* на конус $\bar{\mathbb{R}}^n_+$. При этом производные $D = (D_1, \ldots, D_n)$ перейдут в производные $D' = (D'_1, \ldots, D'_n)$, $D'_j = \dfrac{\partial}{\partial x'_j}$, по формулам

$$D'_j = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi'_j} D_k = (e_j, D) = (AD)_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

т. е. $D' = AD$.

Далее (см. § 1.9),

$$\delta(\xi) = \delta(A^T\xi') = \frac{\delta(\xi')}{|\det A|}. \tag{1.3}$$

Лемма. *Если векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то равенство*

$$(e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 u(\xi) + (a, D)\,\delta(\xi) = 0, \tag{1.4}$$

где $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u \subset C'^*$, возможно лишь при $u(\xi) = 0$ и $a = 0$.

Доказательство. В переменных $\xi' = A^{-1T}\xi$ равенство (1.4) в силу (1.2) и (1.3) примет вид

$$D'^2_1 \ldots D'^2_n \tilde{u}(\xi') + (\tilde{a}, D')\,\delta(\xi') = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\tilde{u}(\xi') = |\det A|\, u(A^T\xi'), \qquad \tilde{a} = A^{-1T}a, \tag{1.6}$$

причем $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \bar{\mathbb{R}}^n_+$. По лемме 5 § 17.1: $\tilde{u}(\xi') = 0$ и $\tilde{a} = 0$, откуда в силу (1.6) выводим: $u(\xi) = 0$ и $a = 0$. Лемма доказана.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z)$ была положительно вещественной в T^C, где C — острый (выпуклый) конус в R^n, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная функция $g(\xi)$ обладала свойствами:*

а) $g(\xi) + g^*(\xi) \gg 0$;

б) *для любого n-гранного конуса $C' = [y\colon (e_1, y) > 0, \ldots, (e_n, y) > 0]$, содержащегося в конусе C, (единственным образом) представима в виде*

$$g(\xi) = (e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 u_{C'}(\xi) + (a_{C'}, D)\,\delta(\xi), \tag{1.7}$$

где $a_{C'} \in C'^*$ и $u_{C'}(\xi)$ — вещественная непрерывная функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в конусе C'^*.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ положительно вещественна в T^C, так что $-if \in H_+(T^C)$ и $f(z) = L[g]$, причем спектральная функция $g(\xi)$ вещественна из $\mathscr{S}'(C^*)$. Отсюда и из (1.5) § 16 следует условие а). Для доказательства представления (1.7) для n-гранного конуса C' совершим биголоморфное отображение $\zeta = Az$ (см. (1.1)) области $T^{C'}$ на T^n; при этом функция $f(z)$ перейдет в положительно вещественную функцию $f(A^{-1}\zeta)$ в T^n. По теореме § 16.4 заключаем, что существуют вектор $a_1 \in \bar{\mathbb{R}}^n_+$ и непрерывная функция $u_1(\xi')$ медленного роста с носителем в $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ такие, что спектральная функция $g_1(\xi')$ функции $f(A^{-1}\bar{\zeta})$ представима в виде

$$g_1(\xi') = D'^2_1 \ldots D'^2_n u_1(\xi') + (a_1, D')\,\delta(\xi'). \tag{1.8}$$

Перейдем к старым переменным $z = A^{-1}\zeta$ и $\xi = A^T\xi'$. Спектральные функции $g(\xi)$ и $g_1(\xi')$ связаны соотношением (см. § 9.2, д))

$$|\det A|\, g(\xi) = g_1(\xi') = g_1(A^{-1T}\xi). \tag{1.9}$$

Пользуясь формулами (1.2) и (1.3), из (1.8) и (1.9) выводим представление (1.7) для $g(\xi)$, в котором

$$u_{C'}(\xi) = \frac{1}{|\det A|} u_1(A^{-1T}\xi) \qquad a_{C'} = A^T a_1. \tag{1.10}$$

Учитывая, что преобразование A^T переводит конус $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ на конус C'^* из (1.10) заключаем, что $a_{C'} \in C'^*$ и $u_{C'} \in C(\mathbb{R}^n)$ медленного роста, $\operatorname{supp} u_{C'} \subset C'^*$.

Единственность разложения (1.7) и вещественность функции $u_{C'}$ следует из вещественности спектральной функции g и вектора a в силу леммы § 17.1.

Достаточность. Пусть обобщенная функция $g(\xi)$ обладает свойствами а) и б). Тогда из представления (1.7) следует, что g вещественна и $g \in \mathcal{S}'(C'^*)$ для всех n-гранных конусов $C' \subset C$, так что $g \in \mathcal{S}'(C^*)$. Поэтому функция $f(z) = L[g]$ голоморфна в T^C и $f(iy)$ вещественна в C. Осталось доказать, что $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0, z \in T^C$. Возьмем произвольный n-гранный конус $C' \subset C$ и перейдем к новым переменным $\zeta = Az$ и $\xi' = A^{-1T}\xi$. В результате, как и при доказательстве необходимости, заключаем, что спектральные функции $g(\xi)$ и $g_1(\xi')$ функций $f(z)$ и $f(A^{-1}\zeta)$ связаны соотношением (1.9), и поэтому функция $g_1(\xi')$ представима в виде (1.8), где $u_1(\xi')$ и a_1 выражаются через $u_{C'}(\xi)$ и $a_{C'}$ по формулам (1.10), так что $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ медленного роста, $\operatorname{supp} u_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Кроме того, в силу (1.9)

$$g_1(\xi') + g_1^*(\xi') = |\det A| [g(\xi) + g^*(\xi)] \gg 0.$$

Отсюда по теореме § 16.4 заключаем, что $if(A^{-1}\zeta) \in H_+(T^n)$, т. е. $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$ в $T^{C'}$, откуда в силу произвольности $C' \subset C$ следует $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$ в T^C, что и требовалось. Теорема доказана.

2. Положительно вещественные матрицы-функции в T^C.

Теорема. *Для того чтобы $N \times N$-матрица-функция $A(z)$ была положительно вещественной в T^C, где C — острый (выпуклый) конус в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы ее спектральная матрица-функция $Z(\xi)$ обладала свойствами:*

$$\text{а)} \qquad \langle Z(\xi) a + Z^*(\xi) a, a \rangle \gg 0, \quad a \in C^N; \tag{2.1}$$

б) *для любого n-гранного конуса $C' = [y\colon (e_1, y) > 0, \ldots, (e_n, y) > 0]$, содержащегося в конусе C (единственным образом) представима в виде*

$$Z(\xi) = (e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 Z_{C'}(\xi) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)}_{C'} D_j \delta(\xi), \tag{2.2}$$

где матрица-функция $Z_{C'}(\xi)$ — непрерывная вещественная медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, матрицы $Z^{(j)}_{C'}$, $j = 1, \ldots, n$ — вещественные симметричные и такие, что

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j Z^{(j)}_{C'} \geqslant 0, \quad y \in \overline{C}'. \tag{2.3}$$

При этом справедливо неравенство

$$\text{а}') \qquad \operatorname{Re} \int \langle Z * \varphi, \varphi \rangle d\xi \geqslant 0, \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \mathcal{S}^{\times N}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Достаточность. Из условий б) теоремы вытекает, что спектральная матрица-функция $Z(\xi)$ вещественна и ее элементы $Z_{kj} \in \mathcal{S}'(C^*)$, так что матрица-функция $A(z) = L[Z]$ голоморфна в области T^C, где $C = \operatorname{int} C^{**}$ (см. § 12.2), и удовлетворяет условию вещественности $A(z) = \overline{A}(-\bar{z})$.

Проверим, что обобщенная функция $g_a(\xi) = \langle Z(\xi) a, a \rangle$ при всех $a \in \mathbb{C}^N$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы § 17.1. Действительно, условие а) выполнено в силу (2.1):

$$g_a(\xi) + g_a^*(\xi) = \langle Z(\xi) a + Z^*(\xi) a, a \rangle \gg 0.$$

Условия б) выполнены в силу (2.2) и (2.3):

$$g_a(\xi) = (e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 \langle Z_{C'}(\xi) a, a \rangle + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \langle Z^{(j)}_{C'} a, a \rangle D_j \delta(\xi),$$

где $\langle Z_{C'}(\xi) a, a \rangle$ — непрерывная функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в C'^*, причем

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j \langle Z^{(j)}_{C'} a, a \rangle \geqslant 0, \quad y \in \overline{C}',$$

т. е. вектор

$$\left(\langle Z^{(1)}_{C'} a, a \rangle, \ldots, \langle Z^{(n)}_{C'} a, a \rangle\right) \in C'^*.$$

Замечая, что $g_a(\xi)$ есть спектральная функция функции $\langle A(z) a, a \rangle$, из теоремы § 17.1 выводим

$$\operatorname{Re} \langle A(z) a, a \rangle \geqslant 0, \quad z \in T^C, \quad a \in \mathbb{C}^N,$$

т. е. $\operatorname{Re} A(z) \geqslant 0$, $z \in T^C$. Таким образом, матрица-функция $A(z)$ положительно вещественна в T^C.

Необходимость. Пусть $A(z)$ — положительно вещественная матрица-функция в T^C. Тогда для любого вектора $a \in \mathbb{C}^N$ функция $\langle A(z) a, a \rangle$ положительно вещественна в T^C. По теореме § 17.1 ее спектральная функция $g_a(\xi)$ из $\mathcal{S}'(C^*)$ обладает свойствами:

$$\text{а}') \qquad g_a(\xi) + g_a^*(\xi) \gg 0;$$

б′) для любого n-гранного конуса $C' \subset C$ представляется в виде

$$g_a(\xi) = (e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 U_{C'}(\xi; a) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} A^{(j)}_{C'}(a) D_j \delta(\xi), \tag{2.5}$$

где функция $U_{C'}(\xi; a)$ — непрерывная медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в конусе C'^* и вектор

$$\left(A^{(1)}_{C'}(a), \ldots, A^{(n)}_{C'}(a)\right) \in C'^*. \tag{2.6}$$

Далее, поскольку $g_a(\xi)$ — спектральная функция квадратичной формы $\langle A(z)a, a\rangle$, $a\in\mathbb{C}^N$, то и $g_a(\xi)$ есть квадратичная форма относительно вектора a, так что существует $N\times N$-матрица $Z(\xi)$ (спектральная матрица-функция матрицы $A(z)$) такая, что

$$\langle Z(\xi)a, a\rangle = g_a(\xi), \qquad Z_{kj}\in\mathcal{S}'(C^*). \tag{2.7}$$

Отсюда и из условия а′) следует, что матрица $Z(\xi)$ удовлетворяет условию а). Далее, из равенства $A(z)=\bar{A}(-\bar{z})$ вытекает вещественность матрицы $Z(\xi)$.

Теперь, пользуясь равенством

$$\langle Z(\xi)a, b\rangle = \frac{1}{4}\langle Z(\xi)(a+b), a+b\rangle - \frac{1}{4}\langle Z(\xi)(a-b), a-b\rangle + \frac{i}{4}\langle Z(\xi)(a+ib), a+ib\rangle - \frac{i}{4}\langle Z(\xi)(a-ib), a-ib\rangle, \quad a, b\in\mathbb{C}^N,$$

из (2.5) и (2.6) выводим

$$\langle Z(\xi)a, b\rangle = \frac{1}{4}(e_1, D)^2\ldots(e_n, D)^2\left[U_{C'}(\xi; a+b) + U_{C'}(\xi; a-b) + iU_{C'}(\xi; a+ib) - iU_{C'}(\xi; a-ib)\right] + \frac{1}{4}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left[A_{C'}^{(j)}(a+b) + A_{C'}^{(j)}(a-b) + iA_{C'}^{(j)}(a+ib) - iA_{C'}^{(j)}(a-ib)\right]D_j\delta(\xi).$$

Отсюда следует существование $N\times N$-матрицы-функции $Z_{C'}(\xi)$, — непрерывной, медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в конусе C'^*, и $N\times N$-матриц $Z_{C'}^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$, таких, что справедливо представление (2.2). Из леммы § 17.1 следует единственность представления (2.2), вещественность матриц $Z_{C'}(\xi)$ и $Z_{C'}^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$ (в силу вещественности матрицы $Z(\xi)$), и равенства (в силу (2.5) и (2.7))

$$U_{C'}(\xi; a) = \langle Z_{C'}(\xi)a, a\rangle, \quad A_{C'}^{(j)}(a) = \langle Z_{C'}^{(j)}a, a\rangle, \quad j=1, \ldots, n, \quad a\in\mathbb{C}^N.$$

Отсюда и из (2.6) вытекает, что матрицы $Z_{C'}^{(j)}$ симметричны и удовлетворяют условию (2.3):

$$\Big\langle \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j Z_{C'}^{(j)}a, a\Big\rangle = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j\langle Z_{C'}^{(j)}a, a\rangle = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j A_{C'}^{(j)}(a)\geqslant 0.$$

Таким образом, спектральная матрица-функция $Z(\xi)$ удовлетворяет и условиям б).

Осталось доказать неравенство (2.4). Пусть $\varphi\in\mathcal{S}^{\times N}$; обозначим $\psi = F[\varphi]\in\mathcal{S}^{\times N}$. Принимая во внимание равенства

$$A_+(x) = F[Z], \quad \operatorname{Re}A_+(x) = \lim_{y\to 0,\, y\in C}\operatorname{Re}A(x+iy) \text{ в } \mathcal{S}'$$

и пользуясь свойствами преобразования Фурье (см. §§ 6.3 и 6.5), имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int\langle Z*\varphi, \varphi\rangle d\xi &= \operatorname{Re}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}(Z_{kj}*\varphi_j, \bar\varphi_k)\,d\xi = \\ &= \operatorname{Re}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}\left(Z_{kj}(-\xi), \varphi_j*\varphi_k^*\right) = \\ &= \operatorname{Re}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}\left(F[Z_{kj}], F^{-1}\left[(\varphi_j*\varphi_k^*)(-\xi)\right]\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\operatorname{Re}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}(A_{+kj}, \psi_j\bar\psi_k) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^n}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}(A_{+kj}+\bar{A}_{+jk}, \psi_j\bar\psi_k) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^n}\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in C}}\sum_{1\leqslant k, j\leqslant N}\int\left[A_{kj}(x+iy)+\bar{A}_{jk}(x+iy)\right]\psi_j(x)\bar\psi_k(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{y\to 0,\, y\in C}\int\langle\operatorname{Re}A(x+iy)\psi(x), \psi(x)\rangle dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. При $n=1$ эта теорема доказана X. Кенигом и А. Земаняном [1]; при $n\geqslant 2$ — В. С. Владимировым [9].

Замечание 2. В $\mathbb{R}^2$ любой выпуклый открытый конус C — двугранный, т. е. $C=[y: (e_1, y)>0, (e_2, y)>0]$, и поэтому в качестве конуса C' в представлении (2.2) можно взять сам конус C.

§ 19. Линейные пассивные системы

1. Введение. Рассмотрим физическую систему, подчиняющуюся следующей схеме. Пусть исходное in-возмущение $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ действует на эту систему, в результате чего возникает ответное out-возмущение (отклик системы) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$; здесь под $x=(x_1, \ldots, x_n)$ понимаются временные, пространственные и другие переменные. Предположим, что выполнены следующие условия.

а) Линейность: если исходным возмущениям u_1 и u_2 отвечают возмущения f_1 и f_2, то их линейной комбинации $\alpha u_1 + \beta u_2$ отвечает возмущение $\alpha f_1 + \beta f_2$.

б) Вещественность: если исходное возмущение u вещественно, то и ответное возмущение f вещественно.

в) Непрерывность: если все компоненты исходного возмущения $u(x)$ стремятся к 0 в $\mathscr{E}'$, то и все компоненты ответного возмущения $f(x)$ стремятся к 0 в $\mathscr{D}'$.

г) Трансляционная инвариантность: если исходному возмущению $u(x)$ отвечает возмущение $f(x)$, то для любого сдвига $h \in \mathbb{R}^n$ исходному возмущению $u(x+h)$ отвечает возмущение $f(x+h)$.

Условия а) — г) эквивалентны существованию единственной $N \times N$-матрицы $Z(x) = (Z_{kj}(x))$, $Z_{kj} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, которая связывает исходное $u(x)$ и ответное $f(x)$ возмущения по формуле (см. § 4.7)

$$Z * u = f. \tag{1.1}$$

Наложим на систему (1.1) еще одно требование, так называемое условие *пассивности относительно конуса* Γ. Пусть Γ — замкнутый, выпуклый, телесный конус в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в 0).

д) Пассивность относительно конуса Γ: для любой вектор-функции $\varphi(x)$ из $\mathscr{D}^{\times N}$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \int_{-\Gamma} \langle Z * \varphi, \varphi \rangle \, dx \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Заметим, что функция $\langle Z * \varphi, \varphi \rangle \in \mathscr{D}$ (см. § 4.6), так что интеграл в (1.2) всегда существует. Далее, в силу вещественности матрицы $Z(x)$ условие пассивности (1.2) эквивалентно условию

$$\int_{-\Gamma} \langle Z * \varphi, \varphi \rangle \, dx \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{D}_r^{\times N}, \tag{1.2$'$}$$

где $\mathscr{D}_r^{\times N}$ состоит из вещественных N-векторов с составляющими из $\mathscr{D}$.

Неравенство (1.2′) энергетического типа: оно отражает способность физической системы поглощать энергию, но не генерировать ее; при этом учитывается причинность относительно конуса Γ (см. ниже § 19.2).

Сверточный оператор $Z *$ называется *пассивным оператором относительно конуса* Γ, а соответствующая матрица-функция $\tilde{Z}(\zeta)$ — преобразование Лапласа матрицы $Z(x)$ — *импедансом* физической системы.

Для иллюстрации изложенной схемы рассмотрим пример одномерной пассивной системы ($n = N = 1$): простейшую электрическую цепь, состоящую из сопротивления R, самоиндукции L, емкости C и источника э. д. с. $e(t)$, включаемого в момент времени $t = 0$ (рис. 41). Тогда, в соответствии с законом Кирхгофа, сила тока $i(t)$ в цепи удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) \, d\tau = e(t),$$

т. е.

$$Z * i = e,$$

где

$$Z(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C} \theta(t)$$

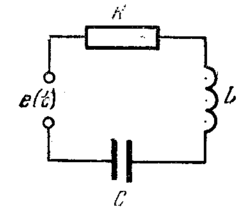

Рис. 41.

— обобщенное «сопротивление» цепи. Проверим, что оператор $Z *$ удовлетворяет условию пассивности (1.2′) относительно конуса $\Gamma = [0, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^0 (Z * \varphi) \varphi \, dt = \int_{-\infty}^0 \left[L\varphi'(t) + R\varphi(t) + \frac{1}{C} \int_0^t \varphi(\tau) \, d\tau \right] \varphi(t) \, dt =$$

$$= \frac{L}{2} \varphi^2(0) + R \int_{-\infty}^0 \varphi^2(t) \, dt + \frac{1}{2C} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi(t) \, dt \right]^2 \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{D}_r.$$

Одномерные ($n = 1$) линейные пассивные системы описывают связь между токами и напряжениями в сложных электрических цепях; они описывают также линейные термодинамические системы, рассеяние электромагнитных волн и элементарных частиц (см. Х. Кёниг и Т. Мейкснер [1], Д. Юола, Л. Кастриота и Г. Карлин [1], Т. Ву [1], А. Земанян [1], Е. Бельтрами и М. Волерс [1], В. Гюттингер [1]). Одномерные пассивные операторы изучались многими авторами и результаты их исследований подытожены в двух монографиях 1965—1966 гг. А. Земаняна [1] и Е. Бельтрами и М. Волерса [1]. Эта теория распространена В. Хакенброхом [1] и А. Земаняном [2] с матричного случая на случай операторов в гильбертовом пространстве.

Многомерные ($n \geqslant 2$) линейные пассивные системы часто встречаются в математической физике: они описывают физические процессы с учетом их пространственно-временной динамики (некоторые примеры таких систем приведены ниже, в § 19.7). Теория многомерных линейных пассивных систем разработана В. С. Владимировым [9, 11] на основе теории положительно-вещественных матриц-функций (см. § 18).

2. Следствия из условия пассивности.

а) Условие пассивности (1.2) выполнено в усиленной форме:

$$\operatorname{Re}\int_{-\Gamma+x_0}\langle Z*\varphi,\ \varphi\rangle\,dx\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D}^{\times N},\quad x_0\in\mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Действительно, если $\varphi\in\mathcal{D}^{\times N}$, то при каждом $x_0\in\mathbb{R}^n$ вектор-функция $\varphi_{x_0}(x)=\varphi(x+x_0)\in\mathcal{D}^{\times N}$, и потому в силу свойства трансляционной инвариантности свертки (см. § 4.2, в)) из неравенства (1.2) вытекает неравенство (2.1):

$$0\leqslant\operatorname{Re}\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi_{x_0},\ \varphi_{x_0}\rangle\,dx=\operatorname{Re}\int_{-\Gamma}\langle (Z*\varphi)(x+x_0),\ \varphi(x+x_0)\rangle\,dx=$$
$$=\operatorname{Re}\int_{-\Gamma+x_0}\langle Z*\varphi,\ \varphi\rangle\,dx',\qquad x'=x+x_0.$$

б) Диссипативность:

$$\operatorname{Re}\int\langle Z*\varphi,\ \varphi\rangle\,dx\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D}^{\times N}. \tag{2.2}$$

Действительно, полагая в (2.1) $x_0=\lambda e$, $e\in\operatorname{int}\Gamma$, и переходя к пределу при $\lambda\to+\infty$ (так что $-\Gamma+\lambda e\to\mathbb{R}^n$; рис. 42), из (2.1) получим неравенство (2.2).

в) Причинность относительно конуса Γ:

$$\operatorname{supp} Z(x)\subset\Gamma. \tag{2.3}$$

Действительно, пусть φ и $\psi\in\mathcal{D}_r^{\times N}$ и λ — вещественное число. Заменяя в неравенстве (1.2′) φ на $\varphi+\lambda\psi$, получим неравенство

$$\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi,\ \varphi\rangle\,dx+\lambda\int_{-\Gamma}[\langle Z*\psi,\ \varphi\rangle+\langle Z*\varphi,\ \psi\rangle]\,dx+$$
$$+\lambda^2\int_{-\Gamma}\langle Z*\psi,\ \psi\rangle\,dx\geqslant 0,$$

справедливое при всех вещественных λ. Поэтому имеет место неравенство

$$\left[\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi,\ \psi\rangle\,dx+\int_{-\Gamma}\langle Z*\psi,\ \varphi\rangle dx\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant 4\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi,\ \varphi\rangle\,dx\int_{-\Gamma}\langle Z*\psi,\ \psi\rangle\,dx. \tag{2.4}$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{R}^n\setminus(-\Gamma)$. Тогда из неравенства (2.4) вытекает, что

$$\int_{-\Gamma}\langle Z*\varphi,\ \psi\rangle\,dx=0$$

при всех $\psi\in\mathcal{D}_r^{\times N}$. По лемме дю Буа-Реймонда (см. § 1.6) заключаем отсюда, что $Z*\varphi=0$, $x\in-\Gamma$, и потому (см. § 4.6)

$$(Z_{kj}*\varphi_0)(x)=(Z_{kj}(x'),\ \varphi_0(x-x'))=0,\qquad x\in-\Gamma,$$

при всех $\varphi_0\in\mathcal{D}_r(\mathbb{R}^n\setminus(-\Gamma))$. Полагая в последнем равенстве $x=0$, получим $(Z_{kj}(-x'),\ \varphi_0(x'))=0$, так что $Z_{kj}(-x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n\setminus(-\Gamma)$, и потому $\operatorname{supp} Z_{kj}\subset\Gamma$ (см. § 1.5). Включение (2.3) доказано.

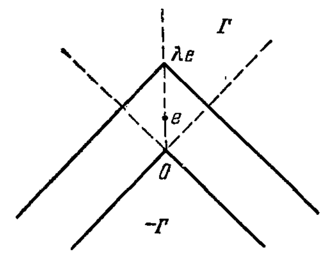

Рис. 42.

г) Положительная определенность:

$$\langle Za+Z^*a,\ a\rangle\gg 0,\qquad a\in\mathbb{C}^N, \tag{2.5}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\operatorname{Re}(\langle Za,\ a\rangle,\ \varphi*\varphi^*)\geqslant 0,\qquad a\in\mathbb{C}^N,\quad \varphi\in\mathcal{D}. \tag{2.5′}$$

Вытекает из неравенства (2.2) при $\varphi=a\varphi_0(-x)$, где $a\in\mathbb{C}^N$ и $\varphi_0\in\mathcal{D}$:

$$0\leqslant\operatorname{Re}\int\langle Z*a\varphi_0(-x),\ a\varphi_0(-x)\rangle\,dx=$$
$$=\operatorname{Re}\int[\langle Za,\ a\rangle*\varphi_0(-x)]\,\varphi_0^*(x)\,dx=\operatorname{Re}(\langle Za,\ a\rangle,\ \varphi_0*\varphi_0^*)=$$
$$=\frac{1}{2}(\langle Z(x)a,\ a\rangle,\ \varphi_0*\varphi_0^*)+\frac{1}{2}(\overline{\langle Z(x)a,\ a\rangle},\ \overline{\varphi_0*\varphi_0^*})=$$
$$=\frac{1}{2}(\langle Z(x)a+Z^T(-x)a,\ a\rangle,\ \varphi_0*\varphi_0^*),$$

что и доказывает неравенства (2.5) и (2.5′) (см. § 8.1). Здесь мы воспользовались свойством свертки (6.4) § 4.

В дальнейшем будем предполагать, что конус Γ — острый.

д) Ограничение на рост: $Z\in(\mathcal{S}')^{\times N^2}$.

Действительно, по теореме Бохнера — Шварца (см. § 8.2) обобщенная функция $\langle Z(x)a+Z^*(x)a,\ a\rangle$ принадлежит $\mathcal{S}'$ при всех $a\in\mathbb{C}^N$. Отсюда следует, что обобщенная функция $\langle Z(x)a+Z^*(x)a,\ b\rangle\in\mathcal{S}'$ при всех a и b из $\mathbb{C}^N$, так что

$$f_{kj}(x)=Z_{kj}(x)+Z_{jk}(-x)\in\mathcal{S}',\qquad 1\leqslant k,\quad j\leqslant N.$$

Из условия причинности (2.3), $\operatorname{supp} Z_{kj} \subset \Gamma$, следует, что $\operatorname{supp} f_{kj} \subset -\Gamma \cup \Gamma$. Пусть $\eta \in C^\infty$, $\eta(t)=1$, $t>1$, $\eta(t)=0$, $t<0$ и $e \in \operatorname{int}\Gamma^*$. Тогда функция $\eta((e,x)) \in \theta_M$ и поэтому $\eta((e,x)) f_{kj} \in \mathscr{S}'$ (см. § 5.3). Далее, носитель обобщенной функции

$$s_{kj}(x) = Z_{kj}(x) - \eta((e,x)) f_{kj}(x)$$

— компакт, в силу леммы 1 § 4.4 (см. рис. 22; конус Γ предполагается острым!), так что $s_{kj} \in \mathscr{S}'$ (см. § 5.3). Вывод: $Z_{kj} \in \mathscr{S}'$.

е) Условие пассивности (1.2) выполнено в усиленной форме:

$$\operatorname{Re} \int_{-\Gamma} \langle Z * \varphi, \varphi \rangle \, dx \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{S}^{\times N}. \tag{2.6}$$

Действительно, фиксируем φ из $\mathscr{S}^{\times N}$ и пусть $\varphi_\nu \in \mathscr{D}^{\times N}$, $\varphi_\nu \to \varphi$, $\nu \to \infty$ в $\mathscr{S}^{\times N}$ (см. § 5.1). Тогда в силу (1.2)

$$\operatorname{Re} \int_{-\Gamma} \langle Z * \varphi_\nu, \varphi_\nu \rangle \, dx \geqslant 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

В силу д), $Z_{kj} \in \mathscr{S}'$, $1 \leqslant k, j \leqslant N$, и поэтому конечного порядка (см. § 5.2). Обозначая через m наибольший из их порядков и пользуясь оценкой (6.4) § 5, при $k=1, \ldots, N$ получаем:

$$\alpha)\ |(Z * \varphi_\nu)_k(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^{m/2} \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|\varphi_{\nu j}\|_m, \qquad \nu = 1, 2, \ldots;$$

$$\beta)\ (Z * \varphi_\nu)_k(x) \xrightarrow{|x| \leqslant R} (Z * \varphi)_k(x), \qquad \nu \to \infty \text{ при любом } R > 0,$$

откуда заключаем о возможности перехода к пределу при $\nu \to \infty$ под знаком интеграла в неравенстве (2.7), в результате получаем неравенство (2.6).

ж) Существование импеданса:

$$\tilde Z(\zeta) = L[Z] = F[Z(x) e^{-(q,x)}](p), \qquad \zeta = p + iq,$$

есть голоморфная матрица-функция в области $T^C = \mathbb{R}^n + iC$, где $C = \operatorname{int}\Gamma^*$.

Вытекает из свойств в) и д): $Z_{kj} \in \mathscr{S}'(\Gamma)$ (см. § 9.1).

з) Условие вещественности импеданса:

$$\tilde Z(\zeta) = \bar{\tilde Z}(-\bar\zeta), \qquad \zeta \in T^C. \tag{2.8}$$

Вытекает из вещественности матрицы $Z(x)$.

и) Свойство положительности импеданса:

$$\operatorname{Re} \tilde Z(\zeta) \geqslant 0, \qquad \zeta \in T^C. \tag{2.9}$$

Действительно, пусть функция $\eta_\varepsilon(x)$ такова, что $\eta_\varepsilon \in C^\infty$; $\eta_\varepsilon(x) = 1$, $x \in \Gamma^{\varepsilon/2}$; $\eta_\varepsilon(x) = 0$, $x \,\overline{\in}\, \Gamma^\varepsilon$; $|D^\alpha \eta_\varepsilon(x)| \leqslant C_{\alpha\varepsilon}$. Тогда при всех $\zeta \in T^C$ (см. § 9.1)

$$\varphi(\zeta; x) = \eta_\varepsilon(-x) e^{-i(\zeta, x)} \in \mathscr{S},$$

а при всех $a \in \mathbb{C}^N$ вектор-функция $a\varphi \in \mathscr{S}^{\times N}$; поэтому, пользуясь формулой (6.4) § 4, имеем

$$\begin{aligned}\langle Z * (a\varphi), a\varphi \rangle &= [\langle Za, a \rangle * \varphi](x) \bar\varphi(\zeta; x) = \\ &= (\langle Z(x')a, a \rangle, \varphi(\zeta; x-x')) \bar\varphi(\zeta; x) = \\ &= e^{2(q,x)} \eta_\varepsilon(-x) (\langle Z(x')a, a \rangle, \eta_\varepsilon(x'-x) e^{i(\zeta, x')}).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Но $\eta_\varepsilon(x'-x) = 1$ при $x' \in \Gamma^{\varepsilon/2}$ и $x \in -\Gamma$, ибо по лемме 2 § 4.4 $x'-x \in \Gamma + U_{\varepsilon/2} + \Gamma = \Gamma + U_{\varepsilon/2} = \Gamma^{\varepsilon/2}$. Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{supp} Z(x') \subset \Gamma$, и пользуясь формулой (10.2) § 1, продолжим цепочку равенств (2.10) при $x \in -\Gamma$;

$$\langle Z * (a\varphi), a\varphi \rangle = e^{2(q,x)} (\langle Z(x')a, a \rangle, \eta_\varepsilon(x') e^{i(\zeta, x')}). \tag{2.11}$$

Воспользуемся теперь формулой (1.4) § 9 для преобразования Лапласа и проинтегрируем равенство (2.11) по конусу $-\Gamma$. В результате, пользуясь свойством е), получим неравенство

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \int_{-\Gamma} \langle Z * (a\varphi), a\varphi \rangle \, dx = \operatorname{Re} \langle \tilde Z(\zeta) a, a \rangle \int_{-\Gamma} e^{2(q,x)} \, dx. \tag{2.12}$$

Замечая, что при всех $q \in C$ последний интеграл существует и положителен (см. § 10.2), из (2.12) заключаем:

$$\operatorname{Re} \langle \tilde Z(\zeta) a, a \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde Z(\zeta) a + \tilde Z^+(\zeta) a, a \rangle \geqslant 0,$$

что эквивалентно (2.9).

Из свойств ж), з) и и) вытекает, что *импеданс $\tilde Z(\zeta)$ относится к классу положительно вещественных матриц-функций в T^C*, описание которых дано в § 18.2 (конус Γ предполагается острым).

Замечание. Немного модифицируя предыдущие рассуждения, можно убедиться, что следствия в), г), д), ж), з), и) остаются справедливыми и при выполнении ослабленного условия пассивности относительно конуса Γ:

$$\operatorname{Re} \int_{-\Gamma} [\langle Z(x) a, a \rangle * \varphi] \bar\varphi \, dx \geqslant 0, \qquad \varphi \in \mathscr{D}, \quad a \in \mathbb{C}^N. \tag{2.13}$$

3. Необходимые и достаточные условия пассивности.

Теорема I. *Для того чтобы матрица $Z(x)$ определяла пассивный оператор относительно острого конуса Γ, необходимо и достаточно, чтобы ее импеданс $\tilde Z(\zeta)$ был положительно вещественной матрицей-функцией в области T^C, где $C = \operatorname{int}\Gamma^*$.*

Следствие. *Если система пассивна относительно острого конуса* Γ, *то она пассивна и относительно любого острого конуса, содержащего* Γ.

Замечание. При $n=1$ теорема I была доказана А. Земаняном [3], а при $n\geqslant 2$ — В. С. Владимировым [9].

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $N\times N$*-матрица* $Z(x)$ *обладает свойствами:*

а) *определяет пассивный оператор относительно некоторого конуса* Γ_0, *содержащего конус* C^*; *граница* Γ_0 *предполагается кусочно-гладкой*;

б) *для любого* n*-гранного конуса* $C'=[q\colon (e_1, q)>0, \ldots, (e_n, q)>0]$, *содержащегося в выпуклом остром конусе* C, *представляется в виде*

$$Z(x)=(e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2 Z_{C'}(x)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n} Z_{C'}^{(j)}D_j\delta(x), \qquad (3.1)$$

где матрица-функция $Z_{C'}(x)$ — *непрерывная, вещественная, медленного роста в* $\mathbb{R}^n$ *с носителем в конусе* C'^*; *матрицы* $Z_{C'}^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$, — *вещественные, симметричные и такие, что*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_{C'}^{(j)}\geqslant 0, \qquad q\in\bar{C}'. \qquad (3.2)$$

Тогда матрица $Z(x)$ *определяет пассивный оператор относительно конусов* $\Gamma_e=[x\colon (e, x)\geqslant 0, x\in\Gamma_0]$, *где* e — *любой единичный вектор из конуса* $\bar{C}$.

Доказательство. Из условий б) следует, что матрица $Z(x)$ вещественна, медленного роста с носителем в конусе C^*.

Лемма нетривиальна, если конус

$$\Gamma'_e=\Gamma_0\setminus\Gamma_e=[x\colon (e, x)<0, x\in\Gamma_0]$$

— телесный. Ясно, что $\Gamma_0=\Gamma_e\cup\Gamma'_e$ (рис. 43).

Пусть $\eta\in C^\infty$; $0\leqslant\eta(t)\leqslant 1$; $\eta(t)=1$, $t<\frac{1}{2}$; $\eta(t)=0$, $t>1$. Обозначим

$$\eta_\varepsilon(x)=\eta\left[\frac{(e, x)}{\varepsilon}\right].$$

Тогда при всех $\varphi\in\mathcal{D}_r^{\times N}$ будем иметь

$$\int_{-\Gamma_e}\langle Z*\varphi, \varphi\rangle\,dx=\int_{-\Gamma_0}\langle Z*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle\,dx+$$
$$+\int_{-\Gamma_e}[\langle Z*\varphi, \varphi\rangle-\langle Z*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle]\,dx-\int_{-\Gamma'_e}\langle Z*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle\,dx. \qquad (3.3)$$

Первое слагаемое в правой части (3.3) в силу условия а) неотрицательно при всех $\varepsilon>0$. Далее, поскольку $\operatorname{supp} Z(x')\subset C^*$ и $\eta_\varepsilon(x-x')=1$, $x\in-\Gamma_e$, $x'\in(C^*)^{\varepsilon/2}$ (так как $(e, x-x')\leqslant-(e, x')=-(e, x_1)-(e, x_2)\leqslant|(e, x_2)|\leqslant\varepsilon/2$, где $x'=x_1+x_2$, $x_1\in C^*$, $|x_2|<\varepsilon/2$), то

$$(Z*(\varphi\eta_\varepsilon))_k(x)=\sum_{1\leqslant j\leqslant N}(Z_{kj}(x'), \varphi_j(x-x')\eta_\varepsilon(x-x'))=$$
$$=\sum_{1\leqslant j\leqslant N}(Z_{kj}(x'), \varphi_j(x-x'))=(Z*\varphi)_k(x), \qquad x\in-\Gamma_e,$$

и, стало быть, второе слагаемое в правой части (3.3) равно нулю. Таким образом, при всех $\varepsilon>0$ имеет место неравенство

$$\int_{-\Gamma_e}\langle Z*\varphi, \varphi\rangle\,dx\geqslant$$
$$\geqslant-\int_{-\Gamma'_e}\langle Z*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle\,dx, \quad \varphi\in\mathcal{D}_r^{\times N}. \qquad (3.4)$$

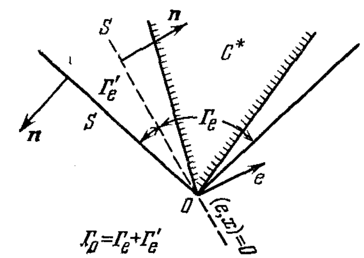

Рис. 43.

Выберем линейно независимые векторы $e'_1=e$, $e'_2, \ldots, e'_n$ из конуса $\bar{C}$ и пусть $\{e_k\}$ — система векторов, биортогональная к системе $\{e'_j\}$, $(e_k, e'_j)=\delta_{kj}$. Обозначим $C'=[q\colon (e_1, q)>0, \ldots, (e_n, q)>0]$. Тогда $C'\subset C$, $e\in\bar{C}'$ и $C'^*=[x\colon (e, x)\geqslant 0, \ldots, (e'_n, x)\geqslant 0]$. Для конуса C' справедливо представление (3.1).

Учитывая это представление, преобразуем правую часть неравенства (3.4) к следующему виду:

$$-\int_{-\Gamma'_e}\langle Z*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle\,dx=$$
$$=-\int_{-\Gamma'_e}(e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2\langle Z_{C'}*(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\rangle\,dx-$$
$$-\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\int_{-\Gamma'_e}\left\langle Z_{C'}^{(j)}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\eta_\varepsilon), \varphi\eta_\varepsilon\right\rangle dx=I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon). \qquad (3.5)$$

Для величины $I_1(\varepsilon)$ имеем оценку

$$|I_1(\varepsilon)|\leqslant c_1\sum_{1\leqslant k,\, j\leqslant N}\ \int\limits_{\substack{|x|<R\\ 0<(e, x)<\varepsilon}}\left|(e_1, D)^2 \ldots (e_n, D)^2\int_{C'^*}Z_{C', kj}(x')\times\right.$$
$$\left.\times\varphi_j(x-x')\eta\left[\frac{(e, x-x')}{\varepsilon}\right]dx'\right|dx, \qquad (3.6)$$

где $c_1 = \max\limits_{x,\ 1\leqslant k\leqslant N} |\varphi_k(x)|$ и число $R>0$ таково, что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$. Во внешнем и внутреннем интегралах в (3.6) сделаем замены переменных интегрирования соответственно по формулам

$$x \to Bx = y = [y_1 = (e, x), \ldots, y_n = (e'_n, x)], \qquad x' \to Bx' = y'.$$

При этом конус C'^* перейдет в конус $\overline{\mathbb{R}}^n_+ = [y': y'_1 \geqslant 0, \ldots, y'_n \geqslant 0]$, шар U_R — в ограниченную область, содержащуюся в некотором шаре U_{R_1}, полоса $0 < (x, e) < \varepsilon$ — в полосу $0 < y_1 < \varepsilon$ и производная (e_k, D) — в производную D_k (см. § 18.1).

Обозначая

$$Z_{C',\,kj}(B^{-1}y') = v_{kj}(y'), \qquad \varphi_j(B^{-1}y) = \psi_j(y),$$
$$D_2^2 \ldots D_n^2 \psi_j(y) = u_j(y),$$

из (3.6) получим оценку

$$|I_1(\varepsilon)| \leqslant \frac{c_1}{(\det B)^2} \sum_{1\leqslant k,\, j\leqslant N} \int\limits_{\substack{|y|<R_1\\ 0<y_1<\varepsilon}} \left| D_1^2 \int\limits_{\substack{R^n_+\\ |y-y'|<R_1}} v_{kj}(y') u_j(y-y') \times \right.$$
$$\left. \times \eta\left(\frac{y_1 - y'_1}{\varepsilon}\right) dy' \right| dy = \frac{c_1}{(\det B)^2} \sum_{1\leqslant k,\, j\leqslant N} \int\limits_{\substack{|y|<R_1\\ 0<y_1<\varepsilon}} \int\limits_{\substack{|y'|<2R_1\\ y'\in \mathbb{R}^n_+}} |v_{kj}(y')| \times$$
$$\times \left| \eta\left(\frac{y_1 - y'_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u_j(y-y')}{\partial y_1^2} + \frac{2}{\varepsilon}\eta'\left(\frac{y_1 - y'_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_j(y-y')}{\partial y_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^2}\eta''\left(\frac{y_1 - y'_1}{\varepsilon}\right) u_j(y-y') \right| dy'\, dy.$$

Обозначим

$$\chi(y'_1) = \sum_{1\leqslant k,\, j\leqslant N} \int\limits_{\substack{y'_2>0,\ \ldots,\ y'_n>0\\ y_2'^2 + \ldots + y_n'^2 < 4R_1^2}} |v_{kj}(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)|\, dy'_2 \ldots dy'_n.$$

Так как функции v_{kj} непрерывны в $\mathbb{R}^n$ с носителями в $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, то функция $\chi(y'_1)$ непрерывна в $\mathbb{R}^1$ и равна 0 при $y'_1 < 0$. Пользуясь введенным обозначением, продолжим нашу оценку:

$$|I_1(\varepsilon)| \leqslant c_2 \int_0^\varepsilon \left[\int_0^{2R_1} \chi(y'_1)\, dy'_1\right] dy_1 +$$
$$+ \left(\frac{c_3}{\varepsilon} + \frac{c_4}{\varepsilon^2}\right) \int_0^\varepsilon \left[\int_0^{y_1+\varepsilon/2} \chi(y'_1)\, dy'_1\right] dy_1 \leqslant c_5\varepsilon + \frac{c_4}{\varepsilon}\int_0^{3\varepsilon/2} \chi(y'_1)\, dy'_1,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_1(\varepsilon) = 0. \tag{3.7}$$

Теперь рассмотрим величину $I_2(\varepsilon)$. Принимая во внимание, что матрицы $Z^{(j)}_{C'}$, $j = 1, \ldots, n$, — вещественные и симметричные, имеем

$$I_2(\varepsilon) = -\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \int\limits_{-\Gamma'_e} \left\langle Z^{(j)}_{C'} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\eta_\varepsilon),\ \varphi\eta_\varepsilon \right\rangle dx =$$
$$= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{1\leqslant k,\, s\leqslant N} Z^{(j)}_{C',\,ks} \int\limits_{-\Gamma'_e} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_s\eta_\varepsilon)\varphi_k\eta_\varepsilon\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{1\leqslant k,\, s\leqslant N} Z^{(j)}_{C',\,ks} \int\limits_{-\Gamma'_e} \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_s\varphi_k\eta_\varepsilon^2)\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{-\Gamma'_e} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\langle Z^{(j)}_{C'}\varphi, \varphi\rangle \eta_\varepsilon^2\right] dx. \tag{3.8}$$

Конус $-\Gamma'_e$ имеет кусочно-гладкую границу, которую обозначим через S; пусть $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S (см. рис. 43). Применяя к интегралу в (3.8) формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$I_2(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_S \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \langle Z^{(j)}_{C'}\varphi, \varphi\rangle \eta_\varepsilon^2 \cos(\widehat{\boldsymbol{n}x_j})\, dS.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$ и учитывая, что

$$\eta_\varepsilon(x) = \eta\left[\frac{(e, x)}{\varepsilon}\right] \to \theta[-(e, x)], \qquad 0 \leqslant \eta_\varepsilon(x) \leqslant 1,$$

получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int\limits_{S\cap[(e,\, x)\leqslant 0]} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \langle Z^{(j)}_{C'}\varphi, \varphi\rangle \cos(\widehat{\boldsymbol{n}x_j})\, dS. \tag{3.9}$$

Но $(e, x) < 0$ во внутренних точках конуса Γ'_e (см. рис. 43) поэтому $(e, x) \leqslant 0$ на $\partial\Gamma'_e$ и тогда $(e, x) \geqslant 0$ на S. Поэтому в интеграле в (3.9) фактически остается лишь та часть границы S, где $(e, x) = 0$ (и там $e = -\boldsymbol{n} = (-\cos(\widehat{\boldsymbol{n}x_1}), \ldots, -\cos(\widehat{\boldsymbol{n}x_n}))$ (см. рис. 43), так что равенство (3.9) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int\limits_{S\cap[(e,\, x)=0]} \left\langle \sum_{i\leqslant j\leqslant n} e_j Z^{(j)}_{C'}\varphi,\ \varphi \right\rangle dS.$$

Последняя же величина, в силу условия (3.2), неотрицательна. Отсюда, а также из (3.7), (3.5) и (3.4) следует условие пассивности относительно конуса Γ_e. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. Необходимость доказана в § 19.2. Докажем достаточность. Пусть матрица-функция $\tilde{Z}(\zeta)$ положительно вещественна в T^C. Тогда по теореме § 18.2 она является преобразованием Лапласа матрицы $Z(x)$, удовлетворяющей условиям леммы при $\Gamma_0=\mathbb{R}^n$. Поэтому матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно полуплоскости $\Gamma_1=[x\colon (e_1, x)\geqslant 0]$, где e_1 — любой единичный вектор из $\bar{C}$. Применяя опять лемму к конусу Γ_1 и к любому вектору $e_2\in\bar{C}$, $|e_2|=1$, получим пассивность $Z(x)$ относительно конуса $\Gamma_2=[x\colon (e_1, x)\geqslant 0, (e_2, x)\geqslant 0]$ и т. д. В результате m-кратного повторения этого процесса получим, что матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса $\Gamma_m=[x\colon (e_1, x)\geqslant 0, \ldots$ $\ldots, (e_m, x)\geqslant 0]$,

$$\int\limits_{-\Gamma_m}\langle Z*\varphi, \varphi\rangle\,dx\geqslant 0,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_r^{\times N}. \tag{3.10}$$

Но выпуклый конус $C^*=[x\colon (x, q)\geqslant 0,\ q\in\bar{C}]$ может быть приближен сверху сколь угодно близко m-гранными конусами Γ_m при $m\to\infty$. Поэтому, переходя в условии пассивности (3.10) к пределу при $\Gamma_m\to C^*$, получим условие пассивности для конуса $C^*=(\operatorname{int}\Gamma^*)^*=\Gamma$, что и требовалось доказать.

Комбинируя теорему I, теорему § 18.2 и замечание § 19.2, получим следующую теорему II.

Теорема II. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *Матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно острого конуса Γ.*

б) *Матрица $Z(x)$ удовлетворяет ослабленному условию пассивности* (2.13) *относительно конуса Γ.*

в) *Матрица $Z(x)$ удовлетворяет условию* (2.5) *и условиям* б) *леммы.*

г) *Матрица $Z(x)$ удовлетворяет условию диссипативности* (2.2) *и условиям* б) *леммы.*

4. Многомерные дисперсионные соотношения. Результаты, полученные в § 19. 3, позволяют вывести (многомерные) дисперсионные соотношения (см. § 10.6), связывающие вещественную и мнимую части матрицы $\tilde{Z}(p)$ — граничного значения импеданса $\tilde{Z}(\zeta)$. Для простоты изложения ограничимся случаем конуса $C=\mathbb{R}_+^n$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Общее решение матричного уравнения*

$$D_1^2\ldots D_n^2 Z(x)=0 \tag{4.1}$$

в классе вещественных непрерывных $*$-эрмитовых матриц-функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cap\bar{\mathbb{R}}_+^n$ выражается формулой

$$Z(x)=[\mathcal{E}_n(x)-\mathcal{E}_n(-x)]\,Z_0, \tag{4.2}$$

где Z_0 — произвольная вещественная кососимметричная матрица.

Доказательство. По лемме 6 § 17.1 имеем

$$Z_{kj}(x)=Z_{0,kj}[\mathcal{E}_n(x)-\mathcal{E}_n(-x)],\qquad 1\leqslant k,\quad j\leqslant N,$$

где $Z_{0,kj}$ — произвольные вещественные числа. Отсюда и из условий $Z_{jk}(x)=Z_{kj}(-x)$ следует, что $Z_{0,kj}=-Z_{0,jk}$, т. е. $Z_0=-Z_0^T$. Представление (4.2) доказано. Лемма доказана.

Обозначим через $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cup\bar{\mathbb{R}}_+^n)$ класс $+$-эрмитовых матриц, являющихся преобразованиями Фурье вещественных непрерывных матриц-функций медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в $-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cup\bar{\mathbb{R}}_+^n$.

Для матрицы класса $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cup\bar{\mathbb{R}}_+^n)$ все матричные элементы принадлежат пространству обобщенных функций $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ (см. § 10.1).

Из доказанной леммы следует, что *общее решение матричного уравнения*

$$p_1^2\ldots p_n^2 M(p)=0$$

в классе $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cup\bar{\mathbb{R}}_+^n)$ дается формулой

$$M(p)=iZ^{(0)}D_1\ldots D_n\operatorname{Im}[i^n\mathcal{K}_n(p)], \tag{4.3}$$

где $Z^{(0)}$ — произвольная вещественная кососимметричная матрица.

Действительно, переходя в формуле (4.2) к преобразованиям Фурье и пользуясь определением ядра $\mathcal{K}_n(p)$ (см. § 10.2), имеем

$$\begin{aligned}M(p)&=Z_0\{F[\mathcal{E}_n]-\bar{F}[\mathcal{E}_n]\}=2iZ_0\operatorname{Im}F[\mathcal{E}_n](p)=\\&=2iZ_0\operatorname{Im}F[\theta_n(x)x_1\ldots x_n]=iZ^{(0)}D_1\ldots D_n\operatorname{Im}[i^n\mathcal{K}_n(p)],\end{aligned} \tag{4.4}$$

где обозначено $Z^{(0)}=2(-1)^n Z_0$.

Теорема. *Для того чтобы матрица $Z(x)$ определяла пассивный оператор относительно конуса $\bar{\mathbb{R}}_+^n$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье $\tilde{Z}(p)$ удовлетворяло дисперсионному соотношению*

$$\operatorname{Im}\tilde{Z}(p)=\frac{2}{(2\pi)^n}p_1^2\ldots p_n^2(M*\operatorname{Im}\mathcal{K}_n)+iZ^{(0)}-\sum_{1\leqslant j\leqslant n}Z^{(j)}p_j, \tag{4.5}$$

где матрица $M(p)$ есть решение в классе $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n\cup\bar{\mathbb{R}}_+^n)$ уравнения

$$p_1^2\ldots p_n^2 M(p)=\operatorname{Re}\tilde{Z}(p), \tag{4.6}$$

причем матрица $\operatorname{Re}\tilde{Z}(p)$ *такова, что при всех* $a \in \mathbb{C}^N$ *обобщенная функция* $\langle \operatorname{Re}\tilde{Z}(p)a, a\rangle$ *есть неотрицательная мера медленного роста в* $\mathbb{R}^n$; *матрица* $Z^{(0)}$ *вещественна, кососимметрична, а матрицы* $Z^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$, *вещественны, положительны.*

В дисперсионном соотношении (4.5) *матрицы* $[M(p), Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}]$ *единственны с точностью до аддитивных слагаемых вида*

$$[iAD_1 \ldots D_n \operatorname{Im}[i^n \mathscr{K}_n(p)],\ A,\ 0,\ \ldots,\ 0], \tag{4.7}$$

где A — *произвольная постоянная вещественная кососимметричная матрица.*

Замечание 1. При $n=1$ теорема была доказана Е. Бельтрами и М. Волерсом [1]; при $n \geqslant 2$ — В. С. Владимировым [9].

Замечание 2. Фактический рост меры $\langle \operatorname{Re}\tilde{Z}(p)a, a\rangle$ таков, что мера

$$\frac{\langle \operatorname{Re}\tilde{Z}(p)a, a\rangle}{(1+p_1^2)\ldots(1+p_n^2)}$$

конечна на $\mathbb{R}^n$ (см. теорему § 17.4).

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса $\bar{\mathbb{R}}_+^n$. По теореме II § 17.3 матрица $Z(x)$ обладает свойствами:

а) $$\langle Z(x)a + Z^*(x)a, a\rangle \gg 0, \quad a \in \mathbb{C}^N; \tag{4.8}$$

б) $$Z(x) = D_1^2 \ldots D_n^2 Z_0(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)} D_j \delta(x), \tag{4.9}$$

где матрица-функция $Z_0(x)$ — непрерывная, вещественная медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в конусе $\bar{\mathbb{R}}_+^n$; матрицы $Z^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$, вещественны, положительны. Переходя в (4.8) и (4.9) к преобразованию Фурье, заключаем, что при всех $a \in \mathbb{C}^N$ обобщенная функция

$$\langle \operatorname{Re}\tilde{Z}(p)a, a\rangle = \frac{1}{2} F[\langle Z(x)a + Z^*(x)a, a\rangle] \tag{4.10}$$

есть неотрицательная мера медленного роста в $\mathbb{R}^n$ (по теореме Бохнера — Шварца; см. § 8.2) и

$$\tilde{Z}(p) = (-1)^n p_1^2 \ldots p_n^2 F[Z_0](p) - i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)} p_j, \tag{4.11}$$

$$\operatorname{Re}\tilde{Z}(p) = \frac{(-1)^n}{2} p_1^2 \ldots p_n^2 F[Z_0(x) + Z_0^*(x)](p). \tag{4.12}$$

Обозначим

$$M(p) = \frac{(-1)^n}{2} F[Z_0(x) + Z_0^*(x)](p). \tag{4.13}$$

Матрица $M(p)$ принадлежит классу $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n \cup \bar{\mathbb{R}}_+^n)$ и в силу (4.12) удовлетворяет уравнению (4.6). Далее, принимая во внимание равенства (см. § 10.1 и § 10.2)

$$F[Z_0](p) = F[(Z_0(x) + Z_0^*(x))\theta_n(x)] = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} F[Z_0(x) + Z_0^*(x)] * F[\theta_n] = 2(-1)^n M * \mathscr{K}_n,$$

перепишем соотношение (4.11) в виде

$$\tilde{Z}(p) = \frac{2}{(2\pi)^n} p_1^2 \ldots p_n^2 (M * \mathscr{K}_n) - i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)} p_j. \tag{4.14}$$

Отделяя в (4.14) вещественную и мнимую части, получим дисперсионное соотношение (4.5) (при $Z^{(0)}=0$) и соотношение

$$\operatorname{Re}\tilde{Z}(p) = \frac{2}{(2\pi)^n} p_1^2 \ldots p_n^2 (M * \operatorname{Re}\mathscr{K}_n), \tag{4.15}$$

эквивалентное соотношению (4.6), в силу равенства (4.6) § 10:

$$M = \frac{2}{(2\pi)^n} M * \operatorname{Re}\mathscr{K}_n. \tag{4.16}$$

Достаточность. Пусть матрица $Z(x)$ такова, что ее преобразование Фурье $\tilde{Z}(p)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению (4.5), где матрица $M(p)$ есть решение в классе $N(-\bar{\mathbb{R}}_+^n \cup \bar{\mathbb{R}}_+^n)$ уравнения (4.6), причем такова, что при любом $a \in \mathbb{C}^N$ обобщенная функция $\langle \operatorname{Re}\tilde{Z}(p)a, a\rangle$ есть неотрицательная мера медленного роста; матрица $Z^{(0)}$ вещественна, кососимметрична и матрицы $Z^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$, вещественны, положительны.

В силу равенства (4.16) уравнение (4.6) эквивалентно уравнению (4.15), которое вместе с дисперсионным соотношением (4.5) дает равенство

$$\tilde{Z}(p) = \frac{2}{(2\pi)^n} p_1^2 \ldots p_n^2 (M * \mathscr{K}_n) - Z^{(0)} - i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)} p_j, \tag{4.17}$$

откуда, применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$Z(x) = D_1^2 \ldots D_n^2 Z_1(x) - Z^{(0)}\delta(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z^{(j)} D_j \delta(x), \tag{4.18}$$

где $Z_1(x) = 2(-1)^n F^{-1}[M](x)\theta_n(x)$ — вещественная непрерывная функция медленного роста в $\mathbb{R}^n$ с носителем в конусе $\bar{\mathbb{R}}_+^n$. Замечая, что

$$D_1^2 \ldots D_n^2 Z_1(x) - Z^{(0)}\delta(x) = D_1^2 \ldots D_n^2 [Z_1(x) - Z^{(0)} \mathscr{E}_n(x)],$$

убеждаемся, что матрица $Z(x)$ удовлетворяет условию (4.9). Условие (4.8) также выполнено, в силу (4.10) и теоремы Бохнера — Шварца (см. § 8.2). По теореме II § 19.3 матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса $\overline{\mathbb{R}}^n_+$.

Докажем единственность дисперсионного соотношения (4.5) с точностью до аддитивных слагаемых вида (4.7). Пусть представление (4.5) имеет место с другими матрицами $[M_1, Z_1^{(0)}, Z_1^{(1)}, \ldots, Z_1^{(n)}]$. Тогда, по доказанному,

$$M(p) - M_1(p) = iAD_1 \ldots D_n \operatorname{Im}[i^n \mathscr{K}_n(p)],$$

где A — некоторая постоянная вещественная кососимметричная матрица. Отсюда, вычитая различные представления (4.5) для $\operatorname{Im} \tilde{Z}(p)$, получим

$$\frac{2i}{(2\pi)^n} Ap_1^2 \ldots p_n^2 [D_1 \ldots D_n \operatorname{Im}(i^n \mathscr{K}_n) * \operatorname{Im} \mathscr{K}_n] + \\ + i[Z^{(0)} - Z_1^{(0)}] - \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} [Z^{(j)} - Z_1^{(j)}] p_j = 0. \quad (4.19)$$

Переходя в равенстве (4.19) к обратному преобразованию Фурье и пользуясь формулами (4.4) и (2.8) § 10, получим равенство

$$-\frac{i}{2} AD_1^2 \ldots D_n^2 \{[\mathscr{E}_n(x) - \mathscr{E}_n(-x)][\theta_n(x) - \theta_n(-x)]\} + \\ + i[Z^{(0)} - Z_1^{(0)}]\delta(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} [Z^{(j)} - Z_1^{(j)}] D_j \delta(x) = \\ = -\frac{i}{2} AD_1^2 \ldots D_n^2 [\mathscr{E}_n(x) + \mathscr{E}_n(-x)] + \\ + i[Z^{(0)} - Z_1^{(0)}]\delta(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} [Z^{(j)} - Z_1^{(j)}] D_j \delta(x) = \\ = i[Z^{(0)} - Z_1^{(0)} - A]\delta(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} [Z^{(j)} - Z_1^{(j)}] D_j \delta(x) = 0,$$

которое возможно лишь при

$$Z^{(0)} = Z_1^{(0)} + A, \quad Z^{(j)} = Z_1^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

5. Фундаментальное решение и задача Коши. *Фундаментальным решением* пассивного оператора $Z*$ относительно конуса Γ называется всякая матрица $A(x)$, $A_{kj} \in \mathscr{D}'$, удовлетворяющая матричному уравнению в свертках

$$Z * A = I\delta(x). \quad (5.1)$$

Оператор $A*$ называется также *обратным оператором* к оператору $Z*$ (ср. § 4.8, г)), а матрица-функция $\tilde{A}(\zeta)$ — преобразо-

Пассивный оператор $Z*$ относительно конуса Γ называется *невырожденным* (соответственно *вполне невырожденным*), если Γ — острый конус и $\det \tilde{Z}(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in T^C$, где $C = \operatorname{int} \Gamma^*$ (соответственно, если для любого $a \in \mathbb{C}^N$, $a \neq 0$ существует точка $\zeta_0 \in T^C$, что

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta_0) a, a \rangle > 0). \quad (5.2)$$

Если пассивный относительно конуса Γ оператор $Z*$ вполне невырожден, то

$$\operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) > 0, \quad \zeta \in T^C. \quad (5.3)$$

Действительно, по теореме I § 19.3 функция $\langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle$ голоморфна и $\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle \geqslant 0$ в T^C. Но тогда в силу (5.2) справедливо неравенство $\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle > 0$, если $a \neq 0$ (см. рассуждение в § 16.1), что эквивалентно (5.3).

Отсюда следует, что *всякий вполне невырожденный пассивный оператор является и невырожденным пассивным оператором относительно того же конуса.*

Далее: *для того чтобы пассивный относительно острого конуса Γ оператор $Z*$ был вполне невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы равенство*

$$\langle Z(x) a, a \rangle = ig\delta(x) \quad (5.4)$$

было невозможно ни при каких $a \in \mathbb{C}^N$, $a \neq 0$ и вещественных g.

Действительно, если пассивный относительно конуса Γ оператор $Z*$ вполне невырожден, то равенство (5.4), эквивалентное равенству

$$\langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle = ig, \qquad \zeta \in T^C,$$

в силу (5.2) невозможно ни при каких $a \neq 0$ и вещественных g. Обратно, пусть пассивный относительного острого конуса Γ оператор $Z*$ не является вполне невырожденным. Тогда при некотором $a \neq 0$ мы имели бы $\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle \leqslant 0$, $\zeta \in T^C$. С другой стороны, по теореме I § 19.3 функция $\langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle$ голоморфна и $\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle \geqslant 0$ в T^C, и поэтому $\operatorname{Re} \langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle = 0$ в T^C. Следовательно, $\langle \tilde{Z}(\zeta) a, a \rangle = ig$, где g — вещественное число, так что равенство (5.4) оказалось возможным при некоторых $a \neq 0$ и вещественных g.

Теорема I. *Всякий невырожденный пассивный оператор относительно конуса Γ обладает единственным фундаментальным решением, определяющим невырожденный пассивный оператор относительно того же конуса Γ.*

Доказательство. Пусть $Z*$ — невырожденный пассивный оператор относительно конуса Γ, так что $\tilde{Z}(\zeta)$ — положи-

$\det \tilde{Z}(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in T^C$. Докажем существование и единственность решения уравнения (5.1) в классе матриц $A(x)$, определяющих невырожденные пассивные операторы относительно Γ. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (5.1), получим эквивалентное матричное уравнение

$$\tilde{Z}(\zeta)\tilde{A}(\zeta) = I, \quad \zeta \in T^C. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) однозначно разрешимо при всех $\zeta \in T^C$, и его решение — матрица-функция $\tilde{A}(\zeta) = \tilde{Z}^{-1}(\zeta)$ — голоморфна и $\det \tilde{A}(\zeta) \neq 0$ в T^C. Далее, из равенства $\tilde{Z}(\zeta) = \overline{\tilde{Z}}(-\bar{\zeta})$, $\zeta \in T^C$, и из (5.5) следует, что $\tilde{Z}(\zeta)\overline{\tilde{A}}(-\bar{\zeta}) = I$, т. е.

$$\tilde{Z}^{-1}(\zeta) = \tilde{A}(\zeta) = \overline{\tilde{A}}(-\bar{\zeta}), \quad \zeta \in T^C.$$

Наконец, из условия $\operatorname{Re}\tilde{Z}(\zeta) \geqslant 0$, $\zeta \in T^C$, и из (5.5) выводим:

$$\operatorname{Re}\tilde{A}(\zeta) = \tilde{A}^+(\zeta)[\operatorname{Re}\tilde{Z}(\zeta)]\tilde{A}(\zeta) \geqslant 0, \ \zeta \in T^C. \tag{5.6}$$

Следовательно, матрица $\tilde{A}(\zeta)$ положительно вещественна в T^C. По теореме I § 19.3 матрица $A(x)$ определяет невырожденный пассивный оператор относительно конуса Γ. Матрица $A(x)$ единственна. Теорема I доказана.

Следствие. *Если пассивный оператор $Z*$ вполне невырожденный, то и его обратный оператор $A*$ вполне невырожденный.*

Действительно, так как $\operatorname{Re}\tilde{Z}(\zeta) > 0$ и $\det \tilde{A}(\zeta) \neq 0$, то в силу (5.6) $\operatorname{Re}\tilde{A}(\zeta) > 0$, $\zeta \in T^C$.

Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый конус, $C = \operatorname{int}\Gamma^*$, S — C-подобная поверхность и S_+ — область, лежащая над S (см. § 4.4).

По аналогии с § 15.1 введем следующее определение. *Обобщенной задачей Коши* для пассивного относительно конуса Γ оператора $Z*$ с источником $f \in \mathscr{D}'(\bar{S}_+)^{\times N}$ назовем задачу о нахождении в $\mathbb{R}^n$ решения $u(x)$ из $\mathscr{D}'(\bar{S}_+)^{\times N}$ системы (1.1).

Как и в § 15.1, легко доказывается

Теорема II. *Если пассивный оператор $Z*$ — невырожденный относительно (телесного) конуса Γ, то решение обобщенной задачи Коши для него существует для любой f из $\mathscr{D}'(\bar{S}_+)^{\times N}$, единственно и выражается формулой*

$$u = A * f. \tag{5.7}$$

Следствие. *Если S — строго C-подобная поверхность и $f \in \mathscr{S}'(\bar{S}_+)^{\times N}$, то решение обобщенной задачи Коши для оператора $Z*$ существует и единственно в классе $\mathscr{S}'(\bar{S}_+)^{\times N}$ (и выражается формулой (5.7)).*

Вытекает из теоремы II и из результатов § 5.6, б).

Таким образом, пассивные системы ведут себя подобно гиперболическим (см. § 15.1; Л. Хёрмандер [1], гл. V; К. Фридрихс [1], А. А. Дезин [1]).

6. Какие дифференциальные и разностные операторы являются пассивными операторами? Система N линейных дифференциальных уравнений порядка $\leqslant m$ (с постоянными коэффициентами) определяется матрицей (ср. § 14.1)

$$Z(x) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} Z_\alpha D^\alpha \delta(x), \tag{6.1}$$

где Z_α — (постоянные) $N \times N$-матрицы.

Теорема I. *Для того чтобы система N линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами была пассивной относительно острого конуса Γ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$Z(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j D_j \delta(x) + Z_0 \delta(x), \tag{6.2}$$

где $Z_1, \ldots, Z_n$ — вещественные симметричные $N \times N$-матрицы такие, что $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} q_j Z_j \geqslant 0$ при всех $q \in C = \operatorname{int}\Gamma^*$; матрица Z_0 вещественна и $\operatorname{Re} Z_0 \geqslant 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть дифференциальный оператор $Z*$, определяемый формулой (6.1), является пассивным относительно конуса Γ. Тогда по теореме I § 19.3 матрица-функция

$$\tilde{Z}(\zeta) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-i\zeta)^\alpha Z_\alpha \tag{6.3}$$

положительно вещественна в T^C. Поэтому при каждом $a \in \mathbb{C}^N$ функция $\langle \tilde{Z}(\zeta)a, a\rangle$ голоморфна и $\operatorname{Re}\langle \tilde{Z}(\zeta)a, a\rangle \geqslant 0$ в T^C. Поэтому эта функция удовлетворяет оценке (1.1) § 16 и, следовательно, все матричные элементы $\tilde{Z}_{kj}(\zeta)$ удовлетворяют этой оценке:

$$\left|\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-i\zeta)^\alpha Z_{\alpha, kj}\right| \leqslant M(C') \frac{1 + |\zeta|^2}{|q|}, \quad \zeta \in T^{C'},$$

что возможно лишь при $Z_{\alpha, kj} = 0$, $1 \leqslant k, j \leqslant N$, $|\alpha| \geqslant 2$. Поэтому матрица (6.3) принимает вид

$$\tilde{Z}(\zeta) = -i \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} Z_j \zeta_j + Z_0 \tag{6.4}$$

и представление (6.2) доказано. Выписывая условия положительной вещественности матрицы $\tilde{Z}(\zeta)$:

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_j + Z_0 = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j \bar{Z}_j + \bar{Z}_0, \quad q \in C,$$

$$-i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \zeta_j Z_j + Z_0 + i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \bar{\zeta}_j Z_j^+ + Z_0^+ \geqslant 0, \quad \zeta \in T^C,$$

заключаем, что матрицы Z_j, $j=0, 1, \ldots, n$, вещественны, матрицы Z_j, $j=1, \ldots, n$, симметричны, $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_j \geqslant 0$ и $\operatorname{Re} Z_0 \geqslant 0$.

Достаточность. Пусть матрица $Z(x)$ удовлетворяет условиям теоремы I. Тогда ее преобразование Лапласа $\tilde{Z}(\zeta)$ имеет вид (6.4) и

$$\operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_j + \operatorname{Re} Z_0 \geqslant 0, \quad \zeta \in T^C. \tag{6.5}$$

Поэтому матрица-функция $Z(\zeta)$ положительно вещественна в T^C и по теореме I § 19.3 оператор $Z*$ — пассивный относительно конуса Γ. Теорема доказана.

Пусть заданы вещественные симметричные $N \times N$-матрицы $Z_1, \ldots, Z_n$, обладающие тем свойством, что для некоторого вектора $l \in \mathbb{R}^n$ $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} l_j Z_j > 0$.

Обозначим

$$\Gamma_c = [x\colon x_1 = \langle Z_1 a, a\rangle, \ldots, x_n = \langle Z_n a, a\rangle, a \in \mathbb{C}^N],$$

$$\Gamma_r = [x\colon x_1 = \langle Z_1 a, a\rangle, \ldots, x_n = \langle Z_n a, a\rangle, a \in \mathbb{R}^N].$$

При отображении

$$a \to x = (\langle Z_1 a, a\rangle, \ldots, \langle Z_n a, a\rangle) \tag{6.6}$$

прообраз 0 есть 0 в силу неравенства

$$(l, x) = \left\langle \sum_{1\leqslant j\leqslant n} l_j Z_j a, a \right\rangle \geqslant \varkappa |a|^2, \quad \varkappa > 0. \tag{6.7}$$

Очевидно, Γ_c и Γ_r — конусы с вершиной в 0, причем $\Gamma_r \subset \Gamma_c$.

Лемма. *Конусы Γ_c и Γ_r — замкнутые и острые*; $\Gamma_c = \Gamma_r + \Gamma_r$; $l \in \operatorname{int} \Gamma_c^*$.

Доказательство. Отображение (6.6) непрерывно из $\mathbb{C}^N$ (из $\mathbb{R}^N$) в $\mathbb{R}^n$ и, в силу неравенства (6.7), компактного характера, т. е. прообраз любого компакта есть компакт. Поэтому конусы Γ_c и Γ_r — замкнутые. Далее, из равенств

$$\langle Z_j a, a\rangle = \langle Z_j b, b\rangle + \langle Z_j c, c\rangle, \quad a = b + ic, \quad j = 1, \ldots, n,$$

заключаем, что $\Gamma_c = \Gamma_r + \Gamma_r$. Наконец, в силу неравенства (6.6) плоскость $(l, x) = 0$ имеет только одну общую точку с конусом

Γ_c — его вершину. Поэтому Γ_c и Γ_r — острые конусы и $l \in \operatorname{int} \Gamma_c^*$ (см. лемму 1 § 4.4). Лемма доказана.

Отметим, что конусы Γ_c и Γ_r могут и не быть телесными, как показывает пример: $Z_1 > 0$, $Z_2 = 0$ и Γ_c и Γ_r лежат в плоскости $x_2 = 0$.

Теорема II. *Для того чтобы матрица* (6.2) *определяла пассивный вполне невырожденный оператор, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $Z_1, \ldots, Z_n$ были вещественными симметричными, матрица Z_0 вещественна и* $\operatorname{Re} Z_0 \geqslant 0$, *и существовал такой вектор $l \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} l_j Z_j + \operatorname{Re} Z_0 > 0. \tag{6.8}$$

При этом пассивность и вполне невырожденность оператора $Z*$ имеют место относительно любого острого конуса Γ, содержащего конус Γ_c, и $l \in \operatorname{int} \Gamma^*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица (6.2) определяет пассивный и вполне невырожденный оператор относительно некоторого (острого) конуса Γ. Тогда выполнены условия теоремы I и в силу (5.3) и (6.5),

$$\operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_j + \operatorname{Re} Z_0 > 0, \quad \zeta \in T^C, \quad C = \operatorname{int} \Gamma^*,$$

так что условие (6.8) выполнено при всех $q \in C$.

Достаточность. Пусть матрицы $Z_0, \ldots, Z_n$ в (6.2) удовлетворяют условиям теоремы II. Пусть Γ — острый конус, содержащий конус Γ_c, и такой, что $l \in C = \operatorname{int} \Gamma^*$. Отсюда следует, что $(q, x) \geqslant 0$ при всех $q \in C$, $x \in \Gamma_c \subset \Gamma$, т. е.

$$(q, x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j \langle Z_j a, a\rangle \geqslant 0, \quad q \in C, \quad a \in \mathbb{C}^N.$$

Это значит, что $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} q_j Z_j \geqslant 0$, $q \in C$. По теореме I матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса Γ. Далее, по условию $l \in C$ и потому в силу (6.5) и (6.8)

$$\operatorname{Re} Z(il) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} l_j Z_j + \operatorname{Re} Z_0 > 0,$$

так что оператор $Z*$ — вполне невырожденный относительно конуса Γ (см. § 19.5). Теорема II доказана.

Замечание. Теорема II утверждает, что матрицы $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} Z_j D_j \delta(x)$, определяющие пассивные вполне невырожденные дифференциальные операторы $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} Z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, совпадают с главными частями симметричных по Фридрихсу (см. К. Фридрихс [1]) дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Система N линейных разностных уравнений с числом шагов $\leqslant m$ определяется матрицей

$$Z(x) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} Z_\nu \delta(x - h_\nu). \tag{6.9}$$

Теорема III. *Для того чтобы система N линейных разностных уравнений (при $h_\nu \neq h_k$, $\nu \neq k$) была пассивной относительно острого конуса Γ, необходимо и достаточно, чтобы $N \times N$-матрицы $Z_1, \ldots, Z_m$ были вещественными и при всех $\zeta \in T^C$, $C = \operatorname{int} \Gamma^*$ матрица*

$$\sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} e^{-(q,\, h_\nu)} [\cos(p, h_\nu) \operatorname{Re} Z_\nu - \sin(p, h_\nu) \operatorname{Im} Z_\nu] \geqslant 0. \tag{6.10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть разностный оператор $Z *$, определяемой матрицей (6.9), является пассивным относительно острого конуса Γ. Из вещественности матрицы $Z(x)$ и из условия $h_\nu \neq h_k$ при $\nu \neq k$ следует, что матрицы $Z_1, \ldots, Z_m$ вещественны. По теореме I § 19.3

$$\operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) = \operatorname{Re} \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} e^{i(\zeta,\, h_\nu)} Z_\nu \geqslant 0, \quad \zeta \in T^C, \tag{6.11}$$

т. е. выполнено условие (6.10).

Достаточность. Пусть матрицы $Z_1, \ldots, Z_m$ в (6.9) удовлетворяют условиям теоремы III. Тогда в силу (6.11) матрица $\tilde{Z}(\zeta)$ положительно вещественна в T^C и по теореме I § 19.3 матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса $C^* = \Gamma$. Теорема III доказана.

Замечание. Особо отметим необходимое условие пассивности матрицы (6.9): наименьший выпуклый конус, содержащий точки $\{0, h_1, \ldots, h_m\}$, должен быть острым.

7. Примеры. Обозначим через $V^+(a) = [(x, t): at > |x|]$ конус будущего в $\mathbb{R}^4$, соответствующий скорости распространения a: $V^+ = V^+(1)$ (ср. § 4.4).

1. Уравнения Максвелла. Главная часть соответствующего дифференциального оператора имеет вид*)

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x_0} - \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x_0} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \tag{7.1}$$

где $x_0 = ct$, c — скорость света в пустоте, $x = (x_0, \boldsymbol{x})$ и

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu * \boldsymbol{H}, \tag{7.2}$$

где ε и μ — 3×3-матрицы, называемые тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно.

*) Задание $\operatorname{div} \boldsymbol{D}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ в системе уравнений Максвелла не является существенным для наших целей; это, по существу, условия согласованности.

Если ε и μ — постоянные матрицы, кратные единичной, $\varepsilon = \varepsilon I \delta(x)$, $\mu = \mu I \delta(x)$, то система (7.1) — (7.2) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_0} - \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \quad \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_0} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}. \tag{7.3}$$

Система (7.3) *пассивна относительно конуса* $\overline{V}^+(1/\sqrt{\varepsilon\mu})$, в силу неравенства

$$\int\limits_{-V^+(1/\sqrt{\varepsilon\mu})} \Big[\varepsilon\Big(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_0}, \boldsymbol{E}\Big) - (\boldsymbol{E}, \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) + \mu\Big(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_0}, \boldsymbol{H}\Big) + {} + (\boldsymbol{H}, \operatorname{rot} \boldsymbol{E})\Big] dx \geqslant 0, \tag{7.4}$$

справедливого при всех $\boldsymbol{E} \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}^4)^{\times 3}$ и $\boldsymbol{H} \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}^4)^{\times 3}$. Здесь $N = 6$, $n = 4$.

Для доказательства неравенства (7.4) воспользуемся тождеством

$$(\boldsymbol{H}, \operatorname{rot} \boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{E}, \operatorname{rot} \boldsymbol{H}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}),$$

в силу которого левая часть (7.4) равна

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\varepsilon\mu}\,|\boldsymbol{x}|} \frac{\partial}{\partial x_0}(\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \mu|\boldsymbol{H}|^2)\, dx_0\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}| < -x_0/\sqrt{\varepsilon\mu}} \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\, d\boldsymbol{x}\, dx_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big[\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \mu|\boldsymbol{H}|^2 + 2\sqrt{\varepsilon\mu}\,((\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{n})\big]\Big|_{x_0 = -\sqrt{\varepsilon\mu}\,|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \mu|\boldsymbol{H}|^2 - 2\sqrt{\varepsilon\mu}\,|\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{H}|\big)\Big|_{x_0 = -\sqrt{\varepsilon\mu}\,|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(\sqrt{\varepsilon}\,|\boldsymbol{E}| - \sqrt{\mu}\,|\boldsymbol{H}|\big)^2\Big|_{x_0 = -\sqrt{\varepsilon\mu}\,|\boldsymbol{x}|} d\boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

Проверим, что при $\varepsilon = \mu = 1$ конус $\Gamma_c = \Gamma_r = \overline{V}^+$. Действительно, если $a \in \mathbb{R}^6$, то отображение (6.6) принимает вид

$$x_0 = a_1^2 + \ldots + a_6^2, \quad x_1 = -2a_2a_6 + 2a_3a_5,$$
$$x_2 = 2a_1a_6 - 2a_3a_4, \quad x_3 = -2a_1a_5 + 2a_2a_4,$$

так что $x_0 \geqslant 0$ и

$$x^2 = x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2)^2 + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6)^2 \geqslant 0.$$

Если же тензоры ε и μ — нетривиальные, то, в зависимости от свойств среды, естественно постулировать пассивность относительно острого конуса некоторых из операторов

$$\varepsilon *, \ \mu *, \ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_0} *, \ \frac{\partial \mu}{\partial x_0} * \qquad (N=3, \ n=4).$$

Для соответствующих импедансных и адмитансных матриц справедливы все положения теории, развитой §§ 19.3—19.5, в частности, четырехмерные дисперсионные соотношения (см. § 19.4, ср. В. П. Силин и А. А. Рухадзе [1]).

2. Уравнение Дирака. Соответствующий оператор

$$i \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant 3} \gamma^\mu D_\mu - m, \tag{7.5}$$

где γ^μ — 4×4-матрицы Дирака; в базисе Майорана (см., например, Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов и И. Т. Тодоров [1], гл. 2) они имеют вид

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix},$$

где σ_k — 2×2-матрицы Паули,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что оператор (7.5) после умножения на матрицу $-i\gamma^0$,

$$\sum_{0 \leqslant \mu \leqslant 3} \gamma^0 \gamma^\mu D_\mu + im\gamma^0, \tag{7.6}$$

является *пассивным и вполне невырожденным относительно конуса* $\bar{V}^+$.

Действительно, матрицы $\gamma^0\gamma^\mu$ — вещественные и симметричные, а матрицы $im\gamma^0$ — вещественная и кососимметричная. Далее, конус Γ_r совпадает с границей конуса V^+, поскольку отображение (6.6) при $a \in \mathbb{R}^4$ имеет вид

$$x_0 = \langle \gamma^0\gamma^0 a, a \rangle = a_1^2 + \ldots + a_4^2, \ x_1 = \langle \gamma^0\gamma^1 a, a \rangle = 2a_1a_4 + 2a_2a_3,$$
$$x_2 = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2, \quad x_3 = -2a_1a_2 + 2a_3a_4,$$

так что $x_0 \geqslant 0$ и

$$x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2 = (a_1^2 + \ldots + a_4^2)^2 - 4(a_1a_4 + a_2a_3)^2 - \\ - (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3a_4)^2 = 0.$$

По теореме II § 19.6 оператор (7.6) — пассивный и вполне невырожденный относительно конуса $\Gamma_c = \bar{V}^+$ — выпуклой оболочки конуса Γ_r (ср. с леммой § 19.6).

3. Уравнения вращающейся жидкости и акустики*):

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \ \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}. \tag{7.7}$$

Здесь $N = n = 4$. *При всех* $\alpha > 0$ *система* (7.7) *пассивна и вполне невырождена относительно конуса* $\bar{V}^+(1/\sqrt{\alpha})$. Отображение (6.6) при $a \in \mathbb{R}^4$ имеет вид

$$t = \alpha a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2, \quad x_1 = 2a_1a_2, \quad x_2 = 2a_1a_3, \quad x_3 = 2a_1a_4,$$

так что $t \geqslant 0$ и

$$t^2 - \alpha|x|^2 = (\alpha a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)^2 - 4\alpha a_1^2(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = \\ = (\alpha a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому $\Gamma_c = \Gamma_r = \bar{V}^+(1/\sqrt{\alpha})$.

4. Уравнения магнитной гидродинамики**):

$$\begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \\ \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot} \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{B}, \end{gathered} \tag{7.8}$$

где $\boldsymbol{B}$ — заданный вектор; здесь $N = 7$, $n = 4$. *Система* (7.8) — *пассивная и вполне невырожденная относительно некоторого конуса.*

5. Уравнения теории упругости***):

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \sum_{1 \leqslant j, m, n \leqslant 3} c_{mn}^{ij} \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_j \partial x_n}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.9}$$

где $c_{mn}^{ij} = c_{mn}^{ji} = c_{nm}^{ij} = c_{ji}^{nm}$. Если ввести вектор скоростей $\left(v_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \ i = 1, 2, 3\right)$ и тензор напряжений

$$\left\{ \sum_{ij} = \sum_{1 \leqslant n, m \leqslant 3} c_{mn}^{ij} \frac{\partial w_m}{\partial x_n}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3 \right\},$$

то *оператор* (7.9) *преобразуется в пассивный и вполне невырожденный относительно некоторого конуса.* Здесь $N = 9$, $n = 4$.

6. Уравнение переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega}, \operatorname{grad}), \tag{7.10}$$

*) См. В. Н. Масленникова [1] и Ю. Н. Дрожжинов и Р. Х. Галеев [1].
**) См. П. Леонард [1], Ю. Н. Дрожжинов [1].
***) См. К. Вилкокс [1].

где $\mathbf{\Omega}$ — постоянный вектор из $\mathbb{R}^3$; здесь $N=1$, $n=4$. Оператор (7.10) пассивен и вполне невырожден относительно любого (острого) конуса, содержащего вектор $(1, \mathbf{\Omega})$ из $\mathbb{R}^4$. Если к оператору (7.10) применить метод сферических гармоник, то в любом $\mathscr{P}_N$-приближении получится *пассивная вполне невырожденная система относительно некоторого конуса* (зависящего от N). Соответствующие операторы выписаны в работе С. К. Годунова и У. М. Султангазина [1].

§ 20. Абстрактный оператор рассеяния

Применим результаты о линейных пассивных системах к изучению конечномерной матрицы рассеяния. Как и выше, Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в $\mathbb{R}^n$, $C=\operatorname{int}\Gamma^*$. При $n=1$ см. Е. Бельтрами и М. Волерс [1], П. Лакс, Р. Филлипс [1], В. Гюттингер [1] и А. Ранада [1].

1. Определение и свойства абстрактной матрицы рассеяния. *Абстрактной матрицей рассеяния* относительно конуса Γ назовем вещественную $N\times N$-матрицу $S(x)=(S_{kj}(x))$, $S_{kj}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условиям:

причинности относительно конуса Γ

$$\operatorname{supp} S(x)\subset\Gamma; \tag{1.1}$$

ограниченности

$$\int\langle S*\varphi,\ S*\varphi\rangle\,dx\leqslant\int\langle\varphi,\varphi\rangle\,dx,\qquad \varphi\in\mathscr{D}^{\times N}. \tag{1.2}$$

Соответствующий оператор $S*$ называется *оператором рассеяния* (относительно конуса Γ).

Свойства абстрактной матрицы рассеяния.

а) *Оператор $S*$ допускает расширение на $(\mathscr{L}^2)^{\times N}$ с сохранением неравенства* (1.2):

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\Big\|\sum_{1\leqslant j\leqslant N}S_{kj}*\varphi_j\Big\|^2\leqslant\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\|\varphi_k\|^2,\quad \varphi_k\in\mathscr{L}^2. \tag{1.2$'$}$$

Вытекает из (1.2) и плотности $\mathscr{D}$ в $\mathscr{L}^2$ (см. § 1.2).

б) *Ограничения на рост*:

$$S\in(\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2})^{\times N^2}. \tag{1.3}$$

Действительно, из (1.2$'$) следует: если $\varphi\in\mathscr{L}^2$, то и $S_{kj}*\varphi\in\mathscr{L}^2$. Пусть $\mathscr{E}_{n,m}(x)$ — фундаментальное решение оператора Δ^m, принадлежащее $\mathscr{L}^2_{\mathrm{loc}}$. (В силу § 14.4, ж) для каждого n такие m существуют; при этом $\mathscr{E}_{n,m}\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.) Пусть $\alpha\in\mathscr{D}$, $a(x)=1$ в окрестности точки 0. Тогда

$$\Delta^m(\alpha\mathscr{E}_{n,m})=\delta(x)+\eta(x),$$

где $\eta\in\mathscr{D}$ и $\alpha\mathscr{E}_{n,m}\in\mathscr{L}^2$. Поэтому

$$S_{kj}=S_{kj}*\delta=S_{kj}*\Delta^m(\alpha\,\mathscr{E}_{n,m})-S_{kj}*\eta=\Delta^m(S_{kj}*(\alpha\mathscr{E}_{n,m}))-S_{kj}*\eta.$$

Но $S_{kj}*(\alpha\mathscr{E}_{n,m})\in\mathscr{L}^2$, $S_{kj}*\eta\in\mathscr{L}^2$ и потому $S_{kj}\in\mathscr{H}_s$ при некотором $s<0$ (см. § 10.1). Включение (1.3) доказано.

в) *Справедливо неравенство*

$$\int_{-\Gamma}[\langle\varphi,\ \varphi\rangle-\langle S*\varphi,\ S*\varphi\rangle]\,dx\geqslant0,\quad \varphi\in(\mathscr{L}^2)^{\times N}. \tag{1.4}$$

Действительно, пусть $\varphi\in(\mathscr{L}^2)^{\times N}$; тогда $\psi=\theta_{-\Gamma}\varphi\in(\mathscr{L}^2)^{\times N}$, $\operatorname{supp}\psi\subset-\Gamma$ и, стало быть, $S*\varphi=S*\psi$ почти везде в $-\Gamma$, ибо в силу § 4.2, ж) и (1.1)

$$\operatorname{supp}(S*\varphi-S*\psi)=\operatorname{supp}S*[(1-\theta_{-\Gamma})\varphi]\subset$$
$$\subset\overline{\operatorname{supp}S+\operatorname{supp}(1-\theta_{-\Gamma})}\subset\Gamma+\overline{\mathbb{R}^n\setminus(-\Gamma)}=\overline{\mathbb{R}^n\setminus(-\Gamma)}.$$

Отсюда и из (1.2$'$) и вытекает неравенство (1.4):

$$\int_{-\Gamma}[\langle\varphi,\ \varphi\rangle-\langle S*\varphi,\ S*\varphi\rangle]\,dx=\int\langle\psi,\ \psi\rangle\,dx-$$
$$-\int_{-\Gamma}\langle S*\psi,\ S*\psi\rangle\,dx\geqslant\int[\langle\psi,\ \psi\rangle-\langle S*\psi,\ S*\psi\rangle]\,dx\geqslant0.$$

г) *Неравенство* (1.4) *справедливо в усиленной форме*:

$$\int_{-\Gamma+x_0}[\langle\varphi,\ \varphi\rangle-\langle S*\varphi,\ S*\varphi\rangle]\,dx\geqslant0,\ \varphi\in(\mathscr{L}^2)^{\times N},\quad x_0\in\mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Вытекает из неравенства (1.4) с помощью рассуждений, аналогичных в § 19.2, а).

Из неравенства (1.5), как и в § 19.2, б), вытекает неравенство (1.2).

Замечание. Интересно также выяснить, не следует ли условие причинности (1.1) из неравенства (1.4), как это имеет место в случае пассивных операторов (см. § 19.2, в)).

д) *Положительная определенность*:

$$|a|^2\delta-\langle(S^**S)\,a,\ a\rangle\gg0,\quad a\in\mathbb{C}^N, \tag{1.6}$$

Действительно, полагая в (1.2) $\varphi = a\varphi_0$, $a \in \mathbb{C}^N$ и $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, получим (1.6) (см. § 8.1):

$$0 \leqslant \int [|a|^2 |\varphi_0|^2 - \langle S * a\varphi_0, S * a\varphi_0\rangle]\,dx =$$
$$= \Big(\delta, |a|^2 \varphi_0 * \varphi_0^* - \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (S * a\varphi_0)_j * (S * a\varphi_0)_j^*\Big) =$$
$$= \Big(\delta, |a|^2 \varphi_0 * \varphi_0^* - \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (S(x) * a\varphi_0)_j * (S(-x) * \bar{a}\varphi_0^*)_j\Big) =$$
$$= \Big(\delta, |a|^2 \varphi_0 * \varphi_0^* - \sum_{1 \leqslant j,\, k,\, l \leqslant N} S_{jk} * S_{jl}^* * \varphi_0 * \varphi_0^* a_k \bar{a}_l\Big) =$$
$$= \big(|a|^2 \delta - \langle (S^* * S) a, a\rangle, \varphi_0 * \varphi_0^*\big).$$

Здесь мы пользовались существованием сверток для обобщенных функций из $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ (свойство б)) и свойствами сверток (см. § 10.1, § 4.2 и § 4.6).

е) *Матрица* $S(x)$ *обладает преобразованием Лапласа* $\tilde{S}(\zeta)$, *голоморфным в* T^C, $\tilde{S}_{kj} \in H(C)$, *и удовлетворяющим условию вещественности*:

$$\tilde{S}(\zeta) = \bar{\tilde{S}}(-\bar{\zeta}), \quad \zeta \in T^C. \tag{1.7}$$

Вытекает из (1.1) и (1.3), в силу результатов § 12.2.

ж) *Граничное значение* $\tilde{S}(p) = F[S]$ *матрицы* $\tilde{S}(\zeta)$ *удовлетворяет неравенству* (при почти всех $p \in \mathbb{R}^n$)

$$I - \tilde{S}^+(p)\,\tilde{S}(p) \geqslant 0. \tag{1.8}$$

В частности, при почти всех $p \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} |\tilde{S}_{kj}(p)|^2 \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.9}$$

Вытекает из (1.6), в силу теоремы Бохнера — Шварца (см. § 8.2):

$$\langle \tilde{S}^+(p)\,\tilde{S}(p)\,a, a\rangle = |\tilde{S}(p)\,a|^2 \leqslant |a|^2, \quad a \in \mathbb{C}^N. \tag{1.8'}$$

з) *Матрица-функция* $\tilde{S}(\zeta)$ *удовлетворяет неравенству*

$$I - \tilde{S}^+(\zeta)\,\tilde{S}(\zeta) \geqslant 0, \quad \zeta \in T^C. \tag{1.10}$$

В частности,

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant N} |\tilde{S}_{kj}(\zeta)|^2 \leqslant 1, \quad \zeta \in T^C, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.11}$$

Действительно, из (1.8′) при всех a и b из $\mathbb{C}^N$ имеем

$$\langle \tilde{S}(p)\,a, b\rangle \leqslant |a|\,|b| \quad \text{для почти всех} \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

Далее, функция $\langle \tilde{S}(\zeta)\,a, b\rangle$ принадлежит классу $H(C)$ (см. е)), а ее граничное значение $\langle \tilde{S}(p)\,a, b\rangle$ удовлетворяет оценке (1.12). По теореме Фрагмена—Линделёфа (см. § 12.6) функция $\langle \tilde{S}(\zeta)\,a, b\rangle$ удовлетворяет оценке

$$|\langle \tilde{S}(\zeta)\,a, b\rangle| \leqslant |a|\,|b|, \quad \zeta \in T^C,$$

из которой при $b = \tilde{S}(\zeta)\,a$ следует оценка

$$|\tilde{S}(\zeta)\,a|^2 \leqslant |a|^2, \quad \zeta \in T^C, \quad a \in \mathbb{C}^N, \tag{1.10'}$$

эквивалентная оценке (1.10).

Всякая матрица, голоморфная в T^C и удовлетворяющая условиям вещественности (1.7) и ограниченности (1.10), называется *ограниченно-вещественной в* T^C.

Итак, мы доказали, что матрица-функция $\tilde{S}(\zeta)$ ограниченно-вещественна в T^C.

2. Описание абстрактных матриц рассеяния.

Теорема. *Для того чтобы матрица* $S(x)$ *определяла оператор рассеяния относительно конуса* Γ, *необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Лапласа* $\tilde{S}(\zeta)$ *было ограниченно-вещественной матрицей-функцией в области* T^C, *где* $C = \operatorname{int} \Gamma^*$.

Доказательство. Необходимость доказана в § 20.1. Докажем достаточность. Пусть $\tilde{S}(\zeta)$ — ограниченно-вещественная матрица-функция в T^C. Тогда она является преобразованием Лапласа,

$$\tilde{S}(\zeta) = L[S] = F[Se^{-(q,x)}],$$

вещественной матрицы $S(x)$ с элементами из $\mathcal{S}'$, удовлетворяющей условию причинности (1.1) относительно конуса $C^* = \Gamma$; при этом $\tilde{S}(p) = F[S]$, где $\tilde{S}(p)$ — граничное значение $\tilde{S}(\zeta)$ при $q \to 0$, $q \in C$ в $\mathcal{S}'$ (см. § 12.2). Далее, поскольку элементы матрицы $\tilde{S}(\zeta)$ равномерно ограничены в T^C и слабо сходятся при $q \to 0$, $q \in C$ на множестве $\mathcal{S}$, плотном в $\mathcal{L}^1$ (см. § 1.2), то, элементы граничной матрицы $\tilde{S}(p)$ можно отождествить с функциями из $\mathcal{L}^\infty$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}^{\times N}$ и тогда $F[\varphi] = \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}^{\times N}$. Из условия (1.10′) при каждом $q \in C$ имеет место неравенство

$$\int \langle \tilde{S}(\zeta)\,\tilde{\varphi}(p), \tilde{S}(\zeta)\,\tilde{\varphi}(p)\rangle\,dp \leqslant \int \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle\,dp.$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля (см. § 6.6, в)) и пользуясь теоремой о преобразовании Фурье свертки (см. § 6.5), получаем

$$\int \langle [Se^{-(q,x)}] * \varphi,\ [Se^{-(q,x)}] * \varphi \rangle\, dx \leqslant \int \langle \varphi, \varphi \rangle\, dx, \qquad q \in C. \tag{2.1}$$

Теперь применим формулу (2.9) § 9,

$$[Se^{-(q,x)}] * \varphi = e^{-(q,x)} (S * [\varphi e^{(q,x)}]);$$

в результате неравенство (2.1) примет вид

$$\int e^{-2(q,x)} \langle S * [\varphi e^{(q,x)}],\ S * [\varphi e^{(q,x)}] \rangle\, dx \leqslant \int \langle \varphi, \varphi \rangle\, dx, \ q \in C. \tag{2.2}$$

Докажем возможность перехода к пределу при $q \to 0$, $q \in C$ под знаком интеграла слева в (2.2). Для этого заметим, что поскольку все элементы матрицы $\widetilde{S}(p)$ принадлежат $\mathscr{L}^\infty$ и, стало быть, все элементы матрицы $S = F^{-1}[\widetilde{S}(p)]$ принадлежат $\mathscr{D}'_{\mathscr{L}^2}$ (см. § 10.1), а для последних имеет место представление (1.2) § 10, то достаточно рассмотреть случай, когда все элементы матрицы S принадлежат $\mathscr{L}^2$. В этом случае справедливы следующие свойства:

а) $|S_{kj} * [\varphi_j e^{(q,x)}]| \leqslant |S_{kj}| * [|\varphi_j| e^{|x|}] \in \mathscr{L}^2, |q| \leqslant 1$ (см. § 4.1, б));

б) $S * [\varphi e^{(q,x)}] = \int S(x') \varphi(x - x') e^{(q, x-x')} dx' \to$

$$\to \int S(x')\ \varphi(x - x')\, dx' = S * \varphi, \ q \to 0;$$

в) $\operatorname{supp} S * [\varphi e^{(q,x)}] \subset \overline{\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} \varphi} \subset \Gamma + \overline{U}_R$,

если $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{U}_R$ (см. § 4.2, ж));

г) $e^{-2(q,x)} \leqslant e^{2R}, \ x \in \Gamma + \overline{U}_R, \ |q| \leqslant 1, \ q \in C.$

Свойства а) — г) и обеспечивают, в силу теоремы Лебега, возможность перехода к пределу при $q \to 0$, $q \in C$ под знаком интеграла в левой части равенства (2.2). В результате получим условие ограниченности (1.2). Теорема доказана.

Замечание 1. При $n = 1$ эта теорема была доказана Е. Бельтрами и М. Волерсом [1]; при $n \geqslant 2$ — В. С. Владимировым [9].

Замечание 2. Если воспользоваться известной теоремой Фату, согласно которой

$$\widetilde{S}(p + iq) \to \widetilde{S}(p), \ q \to 0, \ q \in C \text{ для почти всех } p \in \mathbb{R}^n,$$

то доказательство достаточности в теореме упрощается. Отметим, что мы здесь не пользовались теоремой Фату.

3. Связь между пассивными операторами и операторами рассеяния. Для установления связи матрицы рассеяния $S(x)$ с пассивными операторами удобно ввести новую матрицу $T(x)$

по формуле

$$S(x) = I\delta(x) + 2iT(x), \tag{3.1}$$

называемую *амплитудой рассеяния.*

Оператор рассеяния $S*$ относительно конуса Γ называется *невырожденным*, если

$$\det [I - \widetilde{S}(\zeta)] \neq 0, \zeta \in T^C. \tag{3.2}$$

Перейдем в (3.1) к преобразованию Лапласа

$$\widetilde{S}(\zeta) = I + 2i\widetilde{T}(\zeta), \ \zeta \in T^C. \tag{3.3}$$

По теореме § 20.2 матрица $\widetilde{S}(\zeta)$ ограниченно-вещественна в T^C, т. е. голоморфна в T^C и удовлетворяет условиям (1.7) и (1.10). Поэтому из (3.2) и (3.3) вытекает, что матрица $-i\widetilde{T}(\zeta)$ голоморфна в T^C, удовлетворяет условию вещественности (1.7), $\det \widetilde{T}(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in T^C$ и

$$\operatorname{Re}[-i\widetilde{T}(\zeta)] = -\frac{i}{2}[\widetilde{T}(\zeta) - \widetilde{T}^+(\zeta)] \geqslant \widetilde{T}^+(\zeta)\widetilde{T}(\zeta) > 0, \ \zeta \in T^C. \tag{3.4}$$

Таким образом, матрица $-i\widetilde{T}(\zeta)$ положительно вещественна в T^C и по теореме I § 19.3 матрица $-iT(x)$ определяет пассивный оператор $-iT*$ относительно конуса Γ; в силу (3.4), этот оператор вполне невырожденный (см. § 19.5). По теореме I § 19.5 существует обратный оператор $(-iT)^{-1}*$, который является вполне невырожденным пассивным оператором относительно конуса Γ.

Теперь введем новые векторные величины: j — «ток» и v — «напряжение» по формулам

$$j = u - S * u, \quad v = u + S * u. \tag{3.5}$$

В силу (3.1), $S * u = u + 2iT * u$, откуда

$$j = -2iT * u = -iT * (v + j),$$

и поэтому j и v связаны соотношением

$$v = Z * j, \tag{3.6}$$

где

$$Z* = (-iT)^{-1} * - I\delta * =$$
$$= 2(I\delta - S)^{-1} * - I\delta * = (I\delta - S)^{-1} * (I\delta + S)*. \tag{3.7}$$

Докажем, что *матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса* Γ.

Действительно, матрица $Z(x)$ вещественна и в силу (3.7) и (3.4) при всех $\zeta \in T^C$

$$\operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) = \frac{1}{2}[\tilde{Z}(\zeta) + \tilde{Z}^+(\zeta)] = \frac{1}{2i}[\tilde{T}^{+-1}(\zeta) - \tilde{T}^{-1}(\zeta)] - I =$$
$$= \tilde{T}^{+-1}(\zeta)\left\{-\frac{i}{2}[\tilde{T}(\zeta) - \tilde{T}^+(\zeta)] - \tilde{T}^+(\zeta)\tilde{T}(\zeta)\right\}\tilde{T}^{-1}(\zeta) \geqslant 0.$$

Таким образом, матрица-функция $\tilde{Z}(\zeta)$ положительно вещественна в T^C и, стало быть, матрица $Z(x)$ определяет пассивный оператор относительно конуса Γ.

Замечание. Если потребовать, помимо условия (3.2), выполнение условия

$$\det[I + \tilde{S}(\zeta)] \neq 0, \quad \zeta \in T^C,$$

то оператор $Z*$ — невырожденный, в силу (3.3) и (3.7)

$$\det \tilde{Z}(\zeta) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{\det[I + \tilde{S}(\zeta)]}{\det \tilde{T}(\zeta)} \neq 0, \quad \zeta \in T^C.$$

Обратно, пусть задан пассивный оператор $Z*$ относительно конуса Γ. Тогда оператор $Z * + I\delta *$ — пассивный и вполне невырожденный относительно конуса Γ. Поэтому существует обратный оператор

$$Q * = (Z + I\delta)^{-1} *, \tag{3.8}$$

являющийся пассивным вполне невырожденным оператором относительно конуса Γ (см. § 19.5). Докажем неравенство

$$\operatorname{Re} \tilde{Q}(\zeta) \geqslant \tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Q}(\zeta), \quad \zeta \in T^C. \tag{3.9}$$

Действительно, в силу (3.8) матрица $Q(x)$ вещественна и (см. § 19.3)

$$\tilde{Z}(\zeta) = \tilde{Q}^{-1}(\zeta) - I, \quad \operatorname{Re} \tilde{Z}(\zeta) \geqslant 0, \quad \zeta \in T^C,$$

откуда и следует неравенство (3.9):

$$\operatorname{Re} \tilde{Q}(\zeta) = \frac{1}{2}[\tilde{Q}(\zeta) + \tilde{Q}^+(\zeta)] = \tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Q}(\zeta) +$$
$$+ \frac{1}{2}\{\tilde{Q}^+(\zeta)[\tilde{Q}^{-1}(\zeta) - I]\tilde{Q}(\zeta) + \tilde{Q}^+(\zeta)[\tilde{Q}^{+-1}(\zeta) - I]\tilde{Q}(\zeta)\} =$$
$$= \tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Q}(\zeta) + \operatorname{Re} \tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Z}(\zeta)\tilde{Q}(\zeta) \geqslant \tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Q}(\zeta).$$

Теперь докажем, что *оператор*

$$S * = I\delta * - 2Q * = (Z + I\delta)^{-1} * (Z - I\delta) * \tag{3.10}$$

есть оператор рассеяния относительно конуса Γ.

Действительно, $S(x)$ — вещественная матрица и

$$\tilde{S}(\zeta) = I - 2\tilde{Q}(\zeta), \quad \zeta \in T^C,$$

а поэтому, в силу (3.9), имеем

$$\tilde{S}^+(\zeta)\tilde{S}(\zeta) = [I - 2\tilde{Q}^+(\zeta)][I - 2\tilde{Q}(\zeta)] =$$
$$= I - 4\operatorname{Re} \tilde{Q}(\zeta) + 4\tilde{Q}^+(\zeta)\tilde{Q}(\zeta) \leqslant I.$$

Таким образом, матрица-функция $\tilde{S}(\zeta)$ ограниченно-вещественна в T^C. По теореме § 20.2 матрица $S(x)$ определяет оператор рассеяния относительно конуса Γ.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Всякий невырожденный абстрактный оператор рассеяния $S*$ определяет по формуле*

$$Z * = (I\delta - S)^{-1} * (I\delta + S) *$$

пассивный оператор; обратно, всякий пассивный оператор $Z*$ определяет по формуле

$$S * = (Z + I\delta)^{-1} * (Z - I\delta) *$$

абстрактный оператор рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

Ж. Адамар (J. Hadamard)
[1] Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques, Paris, 1932. [Перевод: Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.]

Л. А. Айзенберг, Ш. А. Даутов
[1] Голоморфные функции многих комплексных переменных с неотрицательной действительной частью. Следы голоморфных и плюригармонических функций на границе Шилова. Матем. сб. **99** (1976), 343—355.

П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский (P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski)
[1] Theory of distributions. The sequential approach. Amsterdam, Warzawa, 1973. (Русский перевод: Теория распределений, «Мир», 1976.)

Ж. Арсак (J. Arsac)
[1] Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod, 1961.

Е. Бельтрами, М. Волерс (E. Beltrami, M. Wohlers)
[1] Distributions and the boundary values of analytic functions, N. Y. — London, 1966.

Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров
[1] Представление n-точечных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР **112** (1971), 5—21.

Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров
[1] Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», 1970.

Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов
[1] Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, 1958.

Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков
[1] Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд., «Наука», 1976.

С. Бохнер (S. Bochner)
[1] Лекции об интеграле Фурье, Физматгиз, 1962 (1-е изд. 1932 г., Лейпциг).
[2] Group invariance of Cauchy's formula in several variables, Ann Math. **45** (1944), 686—707.

Г. Бремерман (H. Bremermann)
[1] Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, «Мир», 1968.

Н. Бурбаки (N. Bourbaki)
[1] Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.

Г. Вейль (H. Weyl)
[1] The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Mathem. J. **94** (1940), 411—444.

К. Вилкокс (C. Wilcox)
[1] Wave Operators and Asymptotic Solutions of Wave Propagation Problems of Classical Physics, Arch. Rational Mech. and Analysis **22** (1966), 37—78.

Н. Винер (N. Wiener)
[1] Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, 1963.

В. С. Владимиров
[1] Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964.
[2] Уравнения математической физики, 3-е изд., «Наука», 1976.
[3] Обобщение интегрального представления Коши — Бохнера, Изв. АН СССР, сер. матем., **33** (1969), 90—108.
[4] Обобщенные функции с носителями, ограниченными со стороны выпуклого конуса, СМЖ **IX** (1968), 1238—1247.
[5] О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения, Труды Матем. ин-та АН СССР, **60** (1961), 101—144.
[6] О представлении Коши — Бохнера, Изв. АН СССР, сер. матем., **36** (1972), 534—539.
[7] Голоморфные функции с неотрицательной мнимой частью в трубчатой области над конусом. Матем. сб. **79** (1969), 128—152.
[8] О построении оболочек голоморфности для областей специального вида, ДАН СССР **134** (1960), 251—254.
[9] Линейные пассивные системы, Теор. и мат. физика, **1** (1969), 67—94.
[10] Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего, Матем. сб. **93** (1974), 3—17; II, **94** (1974), 499—515; III, **98** (1975), 292—297; IV, **104** (1977), 341—370.
[11] Многомерные линейные пассивные системы, в сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», М., 1972, стр. 121—134.
[12] Оценки роста граничных значений неотрицательных плюригармонических функций в трубчатой области над острым конусом, в Сб. «Комплексный анализ и его приложения», посвященном 70-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа, «Наука», М., 1978, стр. 137—148.
[13] О плюрисубгармонических функциях в трубчатых радиальных областях, Изв. АН СССР, сер. матем.; **29** (1965), 1123—1146.

В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов
[1] Голоморфные функции в поликруге с неотрицательной мнимой частью, Матем. заметки, **15** (1974), 55—61.

Т. Ву (T. Wu)
[1] Some properties of impedance as a causal operator, J. Math. Phys., 3 (1962), 262—271.

Ж. Гарсу (J. Garsoux)
[1] Espaces vectoriels topologiques et distributions, Dunod, 1963.

И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин
[1] Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, 1961.

И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов
[1] Обобщенные функции, вып. 1—3, Физматгиз, 1958.

С. К. Годунов, У. М. Султангазин
[1] О диссипативности граничных условий В. С. Владимирова для симметричной системы метода сферических гармоник, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **11** (1971), 688—704.

Л. Гординг (L. Garding)
[1] Linear hyperboliques partial differential equations with constant coefficients, Acta Math. **85** (1950), 1—62.

В. Гюттингер (W. Güttinger)
[1] Generalized functions in elementary particle physics and passive system theory: recent trends and problems, SIAM J. Appl. Math., **15** (1967), 964—1000.

А. А. Дезин
[1] Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка, Матем. сб., **49** (1959), 459—484.
П. Дирак (P. Dirak)
[1] Quantized singularities in the electromagnetic field, Proc. Roy. Soc., Sect. A **130** (1930).
[2] Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1932.
[3] The physical interpretation of quantum dynamics, Proc. Roy. Soc., Sect. A **113** (1926—1927), 621—641.
Ю. Н. Дрожжинов
[1] Асимптотика решения задачи Коши линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики, ДАН СССР, **212** (1973), 831—833.
Ю. Н. Дрожжинов, Р. Х. Галеев
[1] Асимптотика решения задачи Коши двумерной системы уравнений вращающейся сжимаемой жидкости. Дифф. уравнения, **X** (1974), 53—58.
Ж. Дьедонне, Л. Шварц (J. Dieudonné, L. Schwartz)
[1] La dualité dans les espaces (F) et (LF), Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **1** (1949), 61—101. (Перевод: Двойственность в пространствах (F) и (LF), Математика, **2**, 2 (1958), 77—107.)
А. Земанян (A. Zemanian)
[1] Distribution theory and transform analysis. McGraw-Hill, 1965.
[2] The Hilbert Port, SIAM J. Appl. Math. **18** (1970), 98—138.
[3] An N-port realizability theory based on the theory of distributions, IEEE Trans. Circuit Theory, **CT-10** (1963), 265—274.
Р. Йост (R. Jost)
[1] Общая теория квантованных полей, «Мир», 1967.
Л. В. Канторович, Г. П. Акилов
[1] Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
Х. Кёниг, А. Земанян (H. König, A. Zemanian)
[1] Necessary and Sufficient Conditions for a Matrix Distribution to have a Positive Real Laplace Transform, SIAM J. Appl. Math., **13**, 4 (1965), 1036—1040.
Х. Кёниг, Т. Мейкснер (H. König, T. Meixner)
[1] Lineare Systeme und lineare Transformationen, Math. Nachr., **19** (1958), 265—322.
Г. Кёте (G. Köthe)
[1] Die Randverteilungen analytischer Funktionen, Math. Zeit., **57** (1952), 13—33.
А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин
[1] Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972.
Х. Коматсу (H. Komatsy)
[1] Ultradistributions and hyperfunctions, Lecture Notes in Mathem., 287, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, 1973, 164—179.
А. Кораньи, Дж. Пуканский (A. Koranyi, J. Pukansky)
[1] Holomorphic functions with positive real part in polycylinder, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 449—456.
П. Лакс, Р. Филлипс
[1] Теория рассеяния, «Мир», 1971.
П. Леонард (P. Leonard)
[1] Problemes aux limites pour les operateurs matriciels de derivation hyperboliques des premier et second ordres, Mem. Soc. Sci. Liège, **11** (1965), 5—131.
Ж.-Л. Лионс (J. L. Lions)
[1] Supports dans la transformation de Laplace, J. Analyse Math., **2** (1952—1953), 369—380.

С. Лоясевич (S. Lojasiewicz)
[1] Sur le probleme de division, Studia Math., **18** (1959), 87—136.
З. Лужский, З. Жилезный (Z. Luszczki, Z. Zielezny)
[1] Distributionen der Räume $\mathcal{D}_{\mathcal{L}^p}$ als Randverteilungen analytischer Funktionen, Colloq. Math. **8** (1961), 125—131.
Б. Мальгранж (B. Malgrange)
[1] Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966. (Перевод: Идеалы дифференцируемых функций, «Мир», 1968.)
[2] Equations aux dérivées partielles à coefficients constants, 1. Solution élémentaire, C. R. Acad. Sci. **237** (1953), 1620—1622.
А. Мартино (A. Martineau)
[1] Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Theory distrib. Inst. Gulbenkian ciênc., Lisboa, 1964, 193—326.
В. Н. Масленникова
[1] Явное представление и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для линеаризованной системы вращающейся сжимаемой жидкости, ДАН СССР **187** (1969), 989—992.
Р. Неванлинна (R. Nevanlinna)
[1] Eindentige analytische Functionen, Berlin, Springer, 1936.
В. П. Паламодов
[1] Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967.
И. Г. Петровский
[1] Sur l'analyticité de solutions des systèmes d'equation differentielles, Матем. сб. **5** (1939), 3—68.
А. Ранада (A. Ranada)
[1] Causality and the S-Matrix, J. Math. Phys. **8** (1971), 2321—2326.
М. Рид, Б. Саймон (M. Reed, B. Simon)
[1] Методы современной математической физики, I, Функциональный анализ, «Мир», 1977; II, Гармонический анализ. Самосопряженность, «Мир», 1978.
М. Рисс (M. Riesz)
[1] L'integral de Riemann — Liouville et le probléme de Cauchy, Acta Math. **81** (1949), 1—222.
О. З. Ротхаус (O. S. Rothaus)
[1] Domains of positivity, Abhandlungen aus dem Math. Seminar d. Univ. Hamburg, **24** (1960), 189—235.
М. Сато (M. Sato)
[1] Theory of hyperfunctions, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **8** (1959—1960), 139—193, 387—436.
В. П. Силин, А. А. Рухадзе
[1] Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
С. Л. Соболев
[1] Methode nouvelle a resoudre le probléme de Cauchy pour les ewuations lineares hyperboliques normales, Матем. сб. **1** (1936), 39—72.
[2] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.
Ю. В. Сохоцкий
[1] Об определенных интегралах, употребляемых при разложении в ряды, С.-Петербург, 1873.
И. Стейн, Г. Вейс (E. Stein, G. Weiss)
[1] Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», 1974.
Р. Стритер, А. Вайтман (R. Streater, A. Wightman)
[1] PCT, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966.

Х. Тильман (H. G. Tilmann)
[1] Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen, Math. Z. **77** (1961), 106—124.
[2] Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen, II, Math. Z. **76** (1961), 5—21.
А. Н. Тихонов
[1] Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Матем. сб., **42** (1935), 199—216.
Ж. Трев (J. Treves)
[1] Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, «Мир», 1965.
К. Фридрихс (K. Friedrichs)
[1] Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations, Communs Pure Appl. Math. **7** (1954), 345—392.
В. Хакенброх (W. Hackenbroch)
[1] Integraldarstellungen einer Klasse dissipativer linearer Operatoren, Math. Z. **109** (1969), 273—287.
Л. Хёрмандер (L. Hörmander)
[1] Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», 1965.
[2] On the division of distribution by polynomials, Ark. Math. **3** (1958), 555—568. (Перевод: О делении обобщенных функций на полиномы, Математика, **3**, 5 (1959), 117—130.)
Л. Шварц (L. Schwartz)
[1] Theorie des distributions, I—II, Paris, 1950—1951.
[2] Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.
[3] Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Univ. mat. Semin. (Supplementband), 1952, 196—206.
Л. Эренпрайс (L. Ehrenpreis)
[1] Fourier analysis in several complex variables, N. Y. — London — Sidney — Toronto, 1970.
[2] Solutions of some problemes of division I, Amer, J. Math. **76** (1954), 883—903.
Д. Юола, Л. Кастриота, Г. Карлин (D. Youla, L. Castriota, H. Carlin)
[1] Bounded real scattering matrices and the foundation of linear passive network theory, IRE Trans. Circuit Theory, **CT-16** (1959), 102—124.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абстрактная матрица рассеяния 302
Адмитанс 292
Алгебра 79
— ассоциативная 79
— винеровская 186
— коммутативная 79
— сверточная 78, 124, 168
— — $\mathscr{D}'(\Gamma)$, $\mathscr{D}'(\Gamma+)$ 78
— — $\mathscr{D}'(T)$ 124
— — $H_+(C)$, $H(C)$ 168
— — $\mathscr{S}'(\Gamma)$, $\mathscr{S}'(\Gamma+)$ 78, 100

Бернулли полиномы 127
Бесселев потенциал 142
Бесселя функция 118
Бохнера — Шварца теорема 132

Вещественная обобщенная функция 22
— часть матрицы 271
— — обобщенной функции 22
Винеровская алгебра 186
Волновой потенциал 219
— — поверхностный 221
Вполне невырожденный пассивный оператор 293
— непрерывное (компактное) вложение 91
Выпуклое множество 12

Ганкеля преобразование 119
Гармоническая обобщенная функция 211
Герглотца — Неванлинны теорема 259
Гильберта преобразование 153
Гиперболический оператор 212
Гипоэллиптический оператор 210
Главное значение (конечная часть) 33
Гладкость 61
Грина формула 84
— — для гармонических функций 84

Двойной слой 43
Делители единицы 180
Дирака уравнение 300
Дисперсионные соотношения 160
— — многомерные 288
Диссипативность 280
Допустимый (для конуса) полином 169

Задача Коши классическая 213
— — обобщенная 215, 225, 294
Замены переменных 35
Запаздывающий потенциал 220

Импеданс 278
Индикатриса конуса 75
Интеграл Коши — Бохнера 152
— Пуассона 162

Кирхгофа — Пуассона — Даламбера формула 223
Компактность 11
Конечная часть (главное значение) 33
Конус 73
— компактный 73
— острый 73
— регулярный 177
— сопряженный 73
Коши — Бохнера преобразование (интеграл) 152
Коши задача классическая 213
— — обобщенная 215, 225, 294
— ядро 145
Коэффициенты Фурье 116, 123

Лапласа преобразование 134
Лейбница формула 40
Логарифмический потенциал 83
Локально конечное покрытие 19
— суммируемая функция 13

Максвелла уравнения 298
Мальгранжа — Эренпрайса теорема 192
Матрица ограниченно-вещественная 305
— рассеяния абстрактная 302
Матрица-функция положительно вещественная 272
— — спектральная 272
— $+$-эрмитова 271
— $*$-эрмитова 271
— $+$-эрмитово-сопряженная 271
— $*$-эрмитово-сопряженная 271
Мера 29
— медленного роста 95
Метод спуска 199
Мнимая часть матрицы 271
— — обобщенной функции 22
Множество выпуклое 12
Мультипликаторы (в $\mathcal{S}$) 92

Невырожденный оператор рассеяния 293
— пассивный оператор 307
Неотрицательная обобщенная функция 31
Неравенство Хёрмандера 207
— Юнга 65
Носитель обобщенной функции 26
— функции 14
Нулевое множество обобщенной функции 26
Ньютонов потенциал 83

Обобщенная задача Коши 215, 225, 294
— производная 38
— функция 21
— — вещественная 22
— — гармоническая 211
— — конечного порядка 23
— — медленного роста 93
— — неотрицательная (в $\mathcal{O}$) 31
— — периодическая с n-периодом 120
— — положительно определенная 128
— — регулярная 27
— — сингулярная 28
Обобщенная функция с компактным носителем 50
— — с точечным носителем 51
— — финитная 26
Обобщенное представление Пуассона 163
— — Шварца 179
Обобщенный интеграл (по t) 196
Обратный оператор (к пассивному) 292
Объемный потенциал 83
Ограниченность со стороны конуса 78
Ограниченно-вещественная матрица 305
Оператор гиперболический 212
— гипоэллиптический 210
— дробного дифференцирования 88
— — интегрирования (оператор Римана — Лиувилля) 88
— обратный (к пассивному) 292
— пассивный 278
— — невырожденный 293
— рассеяния невырожденный 307
— Римана — Лиувилля 88
— трансляционно-инвариантный 81
— эллиптический 210
Операционное исчисление Хевисайда 88

Пассивность относительно конуса 278
Пассивный оператор 278
— — вполне невырожденный 293
— — невырожденный 293
Пейли — Винера — Шварца теорема 174
Первообразная обобщенной функции 40
— — — порядка n 42
Планшереля теорема 111
Плюригармоническая функция 231
Плюрисубгармоническая функция 230
Поверхностный волновой потенциал 221
— тепловой потенциал 228
Полиномы Бернулли 127
— Эрмита 115
Полнота $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ 23
Положительно вещественная матрица-функция 272
— определенная обобщенная функция 128
— — функция 128
Порядок обобщенной функции 23
— — — конечный 23
Потенциал бесселев 142
— волновой 219

Потенциал волновой поверхностный 22
— двойного слоя 83, 221
— запаздывающий 220
— логарифмический 83
— ньютонов 83
— объемный 83
— простого слоя 83, 221
— тепловой 225
— — поверхностный 228
Преобразование Ганкеля 119
— Гильберта 153
— Коши — Бохнера 152
— — — обобщенное 158
— Лапласа 134
— Пуассона 162
— Фурье обобщенной функции из $\mathcal{S}'$ 105
— — — — с компактным носителем 107
— — свертки 108
— — функции из $\mathcal{S}$ 103
Причинность 280
Простой слой 32
Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ 19
— — — медленного роста $\mathcal{S}$ 93
— — — с компактным носителем 50
— основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ 17
— — — $\mathcal{S}$ 90
— $C^k(\mathcal{O})$, $C^\infty(\mathcal{O})$, $C^k(\bar{\mathcal{O}})$, $C(\bar{\mathcal{O}})$, $C_0^k(\mathcal{O})$, $C_0(\mathcal{O})$, $C_0^k(\bar{\mathcal{O}})$, $C_0(\bar{\mathcal{O}})$, C^k, C_0^k, $\bar{C}_0^k$ 13—14, 29, 62
— $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}(a, b)$ 17
— $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ 22
— $\mathcal{E}'$ 51
— $\mathcal{H}_s$ 140
— $\mathcal{H}_a^{(s)}(C)$ 155
— $\mathcal{L}^p(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}^p$ 13
— $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$ 13
— $\mathcal{L}^2_s$ 140
— $\mathcal{S}$ 90
— $\mathcal{S}'$ 93
Прямое произведение 54, 98
Пуассона представление обобщенное 163
— преобразование (интеграл) 162
— формула 229
— ядро 160

Равенство обобщенных функций 21
Разложение единицы 19
Рассеяния матрица абстрактная 302
Регуляризация (средняя функция) 20, 80
Регулярные конусы 177
— обобщенные функции 27
Ряд Фурье 117, 123

Свертка обобщенных функций 66
— — — медленного роста 99
— функций 64
Сверточные алгебры 78, 124, 168
Сингулярные обобщенные функции 28
Слабая сходимость 22
Слабый предел 16
Сохоцкого формулы 33, 34
Спектральная матрица-функция 272
— функция 135
Спуска метод 199
Средняя функция (регуляризация) 20
Строго C-подобная поверхность 77
Суммируемая p-локально функция 13
Сходимость в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ 17
— в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ 22
— в $\mathcal{D}'(\Gamma+)$ 78
— в $\mathcal{S}$ 90
— в $\mathcal{S}'$ 93
— к 1 в R^n 65
— слабая 22

Теорема Бохнера — Шварца 132
— Герглоцта — Неванлинны 259
— Мальгранжа — Эренпрайса 192
— о кусочном склеивании 27
— Пейли — Винера — Шварца 174
— Планшереля 111
— Фрагмена — Линделёфа 179
— Хёрмандера — Лоясевича 195
— Шварца 93
Тепловой потенциал 225
— — поверхностный 228
Трансляционно-инвариантный оператор 81

Умножение обобщенных функций 37
Уравнение в свертках 85
— Дирака 300
— переноса 301
Уравнения в сверточных алгебрах 87
— вращающейся жидкости и акустики 301
— магнитной гидродинамики 301
— Максвелла 298
— теории упругости 301

Финитная обобщенная функция 26
— функция 13
Формула Грина 84
— — для гармонических функций 85
— Кирхгофа —Пуассона — Даламбера 223
— Лейбница 40
— Пуассона 229
Формулы Сохоцкого 33, 34
Фрагмена — Линделёфа теорема 179
Фундаментальное решение волнового оператора 202
— — из $\mathscr{D}'$ 180
— — из $\mathscr{S}'$ 184
— — оператора Коши — Римана 205
— — — Лапласа 48, 204
— — — переноса 206
— — — теплопроводности 201
— — — Шрёдингера 206
— — пассивного оператора 292
— — сверточного оператора 86
Функции Эрмита 115
Функция Бесселя 118
— локально суммируемая 13
— p-локально суммируемая 13
— обобщенная 21
— — медленного роста 93
— основная 17, 90
— плюригармоническая 231
— плюрисубгармоническая 230
— положительно определенная 128
— спектральная 135
— финитная 13
— характеристическая 12
— Хевисайда 12
— $*$-эрмитова 128
— $*$-эрмитово-сопряженная 128
Фурье коэффициенты 116, 123
— ряд 117, 123

Характеристическая функция 12
Хевисайда функция 12
Хёрмандера — Лоясевича теорема 195
Хёрмандера неравенство 207

Шварца обобщенное представление 179
— теорема 93
— ядро 177

Эллиптический оператор 210
Эрмита полиномы 115
— функции 115
Эрмитова матрица 271
— $*$-эрмитова матрица 271
— функция 128
— $+$-эрмитова матрица 271
Эрмитово-сопряженная матрица 271
$+$-эрмитово-сопряженная матрица 271
$*$-эрмитово-сопряженная матрица 271
— — матрица 128

Юнга неравенство 65

Ядро Коши 145
— Пуассона 160
— Шварца 177

Василий Сергеевич Владимиров

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

М., 1979 г., 320 стр. с илл.

Редакторы *Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Абгарян*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *М. Л. Медведская, О. А. Сигал*

ИБ № 11366

Сдано в набор 28.07.78. Подписано к печати 01.02.79. Т-05313. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 20,78. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1222. Цена книги 1 р. 60 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15,

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.